

УДК 539.3

Процюк Б. В., д.ф.-м.н., пров.н.с.

**Визначення квазістатичного  
термопружного стану шаруватих  
термочутливих плит**

Інститут прикладних проблем механіки і  
математики ім. Я. С. Підстригача НАН  
України, 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б,  
e-mail: dept19@iapmm.lviv.ua

B. V. Protsiuk, Dr. Sci, (Phys.Math),  
Leading Sci. Researcher

**Determination of quasi-static thermoelastic  
state of layered thermosensitive plates**

Pidstryhach Institute of Applied Probleme of  
Mechanics and Mathematicies of NAS of Ukraine,  
79060, Lviv, Naukova str., 3-b  
e-mail: dept19@iapmm.lviv.ua

*Проілюстровано методику визначення квазістатичного термопружного стану шаруватих вільних від силових навантажень термочутливих плит. Значну увагу приділено розв'язанню одновимірних нелінійних нестационарних задач теплопровідності. Наведено результати числових розрахунків температурного поля у двошаровій плиті, яке зумовлене сталим тепловим потоком. Досліджено точність знайденого розв'язку. Виконано порівняння з температурними полями, які визначені за припущення простої нелінійності, сталих теплофізичних характеристик та на основі точного розв'язку відповідної нелінійної стаціонарної задачі теплопровідності.*

*Ключові слова: шарувата термочутлива плита, термопружний стан, нелінійна задача теплопровідності, функція Гріна, лінійні сплайни.*

*The technique of determining the quasistatic thermoelastic state of the layered thermosensitive plates free of load is illustrated. Much attention is paid to finding analytical-numerical solutions of one-dimensional non-stationary heat conduction problems taking into account the temperature dependences of the thermal and temperature conductivity coefficients. Their finding involves use of the Kirchhoff transformation, generalized functions, Green's functions of the corresponding linear heat conduction problem, exact sums of the series, in particular those for which the Gibbs effect takes place, linear splines and solving the received recurrent systems of nonlinear algebraic equations relative to the values in the nodes of the spline of the Kirchhoff variable on the layer division surfaces and the derivative in time on inner flat-parallel surfaces of layers. The results of numerical calculations of temperature fields in two-layer plates with different thicknesses of layers and the external surface heated by a constant heat flux are presented. The accuracy of the found solution is investigated. The comparison of the temperature fields, which are determined assuming simple nonlinearity, stable thermophysical characteristics with the ones based on the exact solution of the corresponding nonlinear stationary heat conduction problem is fulfilled.*

*Key Words: layered thermosensitive plate, thermoelastic state, nonlinear heat conduction problem, Green's function, linear splines.*

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

## 1. Вступ

Під час прогнозування термомеханічної поведінки елементів конструкцій сучасної техніки, які перебувають в умовах високотемпературного нагрівання, виникає необхідність у теоретичних дослідженнях їх напружено-деформованого стану на основі математичних моделей, що враховують температурну залежність (термочутливість) фізико-механічних характеристик. Із-за складності відповідних задач для їх розв'язання, крім число-

вих, часто використовують і аналітично-числові методи. Один з них орієнтований [1, 2] на розв'язання квазістатичних задач термопружності, яке передбачає на першому етапі знаходження температурних полів. На основі отриманих з використанням цього методу відповідних розв'язків досліджено, зокрема, температурні поля в тришаровій плиті за припущення простої нелінійності (відношення залежних від температури коефіцієнтів теплопровідності і об'ємних теплоємностей, тобто коефіцієнти температуропровідності,

є сталі) та в одношаровій, в якій враховано температурну залежність і коефіцієнта температуропровідності. Тут цей метод адаптовано до розв'язання задачі теплопровідності для шаруватих плит із температурнозалежними коефіцієнтами тепло- і температуропровідності.

## 2. Формулювання задачі

Розглянемо віднесену до циліндричної системи координат  $\tilde{r}, \varphi, \tilde{z}$  плиту складену з  $n$  ідеально контактуючих шарів, кожен з яких має відповідно початкову температуру  $\bar{T}_{i0} \bar{T}_{i0}(\tilde{z})$  ( $\tilde{z}_{i-1} < \tilde{z} < \tilde{z}_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $\tilde{z}_0 = 0$ ). Нехай одна з обмежувальних поверхонь ( $\tilde{z} = 0$ ) перебуває під дією теплового потоку зі змінною у часі густиною  $q_0 q(\tau)$ , а інша ( $\tilde{z} = \tilde{z}_n$ ) підтримується при температурі  $t_c T_c(\tau)$ . Визначимо одновимірне нестационарне температурне поле плити з урахуванням температурних залежностей коефіцієнтів теплопровідності  $\lambda_{Ti}(T_i) = \lambda_i A_i(T_i)$  і об'ємної теплоємності  $c_{vi}(T_i) = c_i C_i(T_i)$  шарів. Тут множники біля функцій мають розмірності відповідних величин.

За таких припущень задача теплопровідності у безрозмірних величинах матиме вигляд

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \bar{\Lambda}_i(\bar{T}_i) \frac{\partial \bar{T}_i}{\partial z} \right] = A_i \bar{C}_i(\bar{T}_i) \frac{\partial \bar{T}_i}{\partial Fo}, \quad i = \overline{1, n}; \quad (1)$$

$$\lambda_{j+1} \bar{\Lambda}_{j+1}(\bar{T}_i) \frac{\partial \bar{T}_{j+1}}{\partial z} = \lambda_j \bar{\Lambda}_j(\bar{T}_i) \frac{\partial \bar{T}_j}{\partial z},$$

$$\bar{T}_{i+1} = \bar{T}_i, \quad z = z_j, \quad j = \overline{1, n-1}; \quad (2)$$

$$\left( \bar{\Lambda}_1(\bar{T}_1) \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = -Ki \bar{q}(Fo),$$

$$\bar{T}_n(z_n, Fo) = \bar{t}_c \bar{T}_c(Fo); \quad (3)$$

$$\bar{T}_i(z, 0) = \bar{t}_{i0} \bar{T}_{i0}(z), \quad (4)$$

де

$$\bar{T} = \frac{T}{T_s}, \quad \bar{t}_c = \frac{t_c}{T_s}, \quad \bar{t}_{i0} = \frac{t_{i0}}{T_s}, \quad z = \frac{\tilde{z}}{l}, \quad z_i = \frac{\tilde{z}_i}{l}, \quad A_i = \frac{a_i}{a_i},$$

$$a_i = \lambda_i / c_i, \quad \bar{T}_c(Fo) = T_c(l^2 Fo / a_1), \quad \bar{T}_{i0}(z) = T_{i0}(zl),$$

$$[\bar{\Lambda}(\bar{T}), \bar{C}(\bar{T})] = [\Lambda(T), C(T)] \Big|_{T=T_s \bar{T}}, \quad Ki = l q_0 / (\lambda_1 T_s),$$

$$\bar{q}(Fo) = q(l^2 Fo / a_1), \quad Fo = a_1 \tau / l^2, \quad T_s - \text{характерна}$$

для задачі температура;  $l$  – параметр, що має розмірність одиниці довжини.

## 3. Побудова розв'язку задачі

Застосувавши до задачі (1) – (4) перетворення

Кірхгофа  $\theta_i = \int_{\bar{T}_*}^{\bar{T}_i} \bar{\Lambda}_i(\zeta) d\zeta$  за припущення, що функції  $\theta_i = \theta_i(\bar{T}_i)$  мають обернені  $\bar{T}_i(\theta_i)$ , дістанемо

$$\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial z^2} = A_i \frac{\bar{C}_i(\bar{T}_i)}{\bar{\Lambda}_i(\bar{T}_i)} \frac{\partial \theta_i}{\partial Fo}; \quad (5)$$

$$\lambda_{j+1} \frac{\partial \theta_{j+1}}{\partial z} = \lambda_j \frac{\partial \theta_j}{\partial z},$$

$$\theta_{j+1} - \theta_j = F_{j+1}(\theta_{j+1}), \quad z = z_j, \quad j = \overline{1, n-1}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = -Ki \bar{q}(Fo),$$

$$\theta_n(z_n, Fo) = \theta_c(Fo); \quad (7)$$

$$\theta_i(z, 0) = \theta_{i0}^*(z), \quad (8)$$

де

$$F_{j+1}(\theta_{j+1}) = \int_{\bar{T}_*}^{\bar{T}_{j+1}(\theta_{j+1})} [\bar{\Lambda}_{j+1}(\zeta) - \bar{\Lambda}_j(\zeta)] d\zeta,$$

$$\theta_{i0}^*(z) = \int_{\bar{T}_*}^{\bar{t}_{i0} \bar{T}_{i0}(z)} \bar{\Lambda}_i(\zeta) d\zeta,$$

$$\theta_c(Fo) = \int_{\bar{T}_*}^{\bar{t}_c \bar{T}_c(Fo)} \bar{\Lambda}_n(\zeta) d\zeta, \quad \bar{T}_* = \frac{T_*}{T_s},$$

$T_*$  – нижня межа діапазону температур, в якому змінюються теплофізичні характеристики (ТФХ).

Далі замість системи рівнянь (5) і умов контакту (6) розглядатимемо еквівалентне їм рівняння з узагальненими по  $z$  похідними

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\lambda(z)}{\lambda_1} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] = \frac{c(z)}{c_1} \frac{\partial \theta}{\partial Fo} - w_i(z, Fo) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_1} F_j(\theta_{j+1}) \Big|_{z=z_j} \delta'(z - z_j), \quad (9)$$

де  $\delta'(x)$  – похідна від дельта-функції Дірака; функції  $\theta(z, Fo)$ ,  $\lambda(z)$ ,  $c(z)$ ,  $\theta_0^*(z)$ ,  $w_i(z, Fo)$ , співпадають відповідно з  $\theta_i(z, Fo)$ ,  $\lambda_i$ ,  $c_i$ ,  $\theta_{i0}^*(z)$ ,  $w_{ii}(z, Fo) = [1 - \bar{C}_i(\bar{T}(\theta_i)) / \bar{\Lambda}_i(\bar{T}(\theta_i))] \partial \theta_i / \partial Fo$ , при  $z_{i-1} < z < z_i$ .

Розв'язок задачі (9), (7) і (8) за допомогою функції Гріна  $G(z, \zeta, Fo)$  [1] подамо у вигляді

$$\theta(z, Fo) = \theta_L(z, Fo) + \theta_w(z, Fo) + \theta_f(z, Fo), \quad (10)$$

де

$$\theta_L(z, Fo) = \int_0^{z_n} \frac{c(\zeta)}{c_1} \theta_0^*(\zeta) G(z, \zeta, Fo) d\zeta +$$

$$+ Ki \int_0^{Fo} G(z, 0, Fo - \xi) \bar{q}(\xi) d\xi -$$

$$- \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \int_0^{Fo} \frac{\partial G(z, \zeta, Fo - \xi)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=z_n} \theta_c(\xi) d\xi; \quad (11)$$

$$\theta_w(z, Fo) = \int_0^{Fo} \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} G(z, \zeta, Fo - \xi) w_{ii}(\zeta, \xi) d\zeta d\xi; \quad (12)$$

$$\theta_f(z, Fo) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_1} \int_0^{Fo} \frac{\partial G(z, \zeta, Fo - \xi)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=z_j+0} \varphi_{j+1}(\xi) d\xi; \quad (13)$$

$$\varphi_{j+1}(Fo) = F_{j+1}(\theta_{j+1}) \Big|_{\zeta=z_j}.$$

Функції  $\theta_i(z, Fo)$  та  $\partial\theta_i(z, Fo)/\partial Fo$  ( $i = \overline{1, n}$ ) і  $\theta_{i+1}(z_i, Fo)$  ( $i = \overline{1, n-1}$ ), визначаємо за таким алгоритмом. У (12) інтеграли по координаті подаємо як суму інтегралів від  $x_{j-1}^i$  до  $x_j^i$  ( $j = \overline{1, J_i}$ ,  $z_{i-1} = x_0^i < x_1^i < \dots < x_{J_i}^i = z_i$ ). У кожному з цих інтегралів замінюємо  $w_{ii}(\zeta, \xi)$  на  $w_{ij}(\xi) \approx w_{ii}(z_{ij}^*, \xi)$  відповідно, де  $z_{ij}^* = (x_{j-1}^i + x_j^i)/2$ . Після цього функції  $\varphi_{i+1}(Fo)$ , що входять у (13), і  $w_{ij}(Fo)$  апроксимуємо лінійними сплайнами.

Використовуючи ці апроксимації, точні суми рядів, в т. ч. і тих, для яких характерний ефект Гібса, метод колокації і співвідношення

$$\theta_i(z_{ij}^*, Fo_q) \approx \left[ (y_{ij}^0 + y_{ij}^q)/2 + B_{ij}^q \right] Fo_1 + \theta_{i0}^*(z_{ij}^*), \quad (14)$$

де

$$y_{ij}^0 = \frac{1}{A_i} \left( \frac{\bar{A}_i(\bar{T}_i)}{\bar{C}_i(\bar{T}_i)} \Big|_{Fo=0} \frac{\partial^2 \theta_{i0}^*(z)}{\partial z^2} \right) \Big|_{z=z_{ij}^*}, \quad Fo_q = qFo_1,$$

$$y_{ij}^q = \frac{\partial \theta_i}{\partial Fo} \Big|_{z=z_{ij}^*, Fo=Fo_q}, \quad B_{ij}^q = \sum_{k=1}^{q-1} y_{ij}^k, \quad Fo_1 = \frac{a_1 \Delta \tau}{l^2},$$

$\Delta \tau$  – крок сітки сплайна, із (10) одержуємо рекурентну систему нелінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження у вузлах сплайнів  $Fo_q$  значень змінної Кірхгофа на поверхнях  $z = z_i + 0$  та її по-

хідних на поверхнях  $z = z_{ij}^*$ . Розв'язавши її, знайдемо шукані функції, а на їх основі решту відповідних величин, через які виражається розв'язок задачі (5)-(8).

Температуру визначаємо за формулою  $\bar{T}_i(z, Fo) = \bar{T}_i(\theta_i)$ , яка, зокрема, для лінійної залежності  $\bar{A}_i(\bar{T}_i) = 1 + k_i(T_i - T_*)$ , запишеться так

$$\bar{T}_i(z, Fo) = \bar{T}_* + \frac{\sqrt{1 + 2k_i\theta_i} - 1}{k_i}. \quad (15)$$

Зауважимо, що у формулі (15) змінні Кірхгофа для відповідної стаціонарної задачі мають вигляд

$$\theta_i(z) = \theta_c - Ki [f_i(z) - f_n(z_n)] - \sum_{j=i}^{n-1} F_j(\theta_{j+1}) \Big|_{z=z_j},$$

де

$$f_i(z) = z + \sum_{j=1}^{i-1} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_{j+1}} - \frac{\lambda_1}{\lambda_j} \right) (z - z_j),$$

$$F_j(\theta_{j+1}) =$$

$$= \left( 1 - \frac{k_j}{k_{j+1}} \right) \left\{ \theta_{j+1}(z) - \frac{\sqrt{1 + 2k_{j+1}\theta_{j+1}(z)} - 1}{k_{j+1}} \right\}$$

$$\theta_i(z_{i-1}) = \theta_c - Ki [f_i(z_{i-1}) - f_n(z_n)] -$$

$$- \sum_{j=i}^{n-1} F_j(\theta_{j+1}) \Big|_{z=z_j}, \quad i = \overline{n, 2};$$

За відомого температурного поля температурні напруження визначаємо за формулами [1].

#### 4. Числові результати

Розрахунки виконували для двошарової плити при  $t_{i0} = t_c = T_* = 300$  К,  $T_{i0}(\tilde{z}) = T_c(\tau) = 1$ ,  $q(\tau) = 1$ ,  $q_0 = 1.12 \cdot 10^6$  Вт/м<sup>2</sup>,  $\Delta \tau = 0.03215$  с,  $T_s = lq_0/\lambda_1$ ,  $l = \tilde{z}_2$ ,  $\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1 = 10$  мм для двох товщин першого шару:  $\tilde{z}_1 = 1; 2$  мм і відповідно:  $J_1 = 2; 4$ ,  $J_2 = 4$ . Матеріал першого шару – склокераміка, другого – сталь 15ХМ1Ф.

Оцінювали похибку числових результатів залежно від кроку сітки сплайна і кількості розбиттів  $J_1$  проміжку  $[0, z_1]$ . Порівняння з безрозмірними температурами підрахованими в одні ті ж моменти часу з кроком у два рази меншим від наведеного вище показало різницю меншу ніж  $10^{-8}$ , а при зменшенні  $J_1$  ( $\tilde{z}_1 = 2$  мм) у два рази – меншу ніж 0.005.

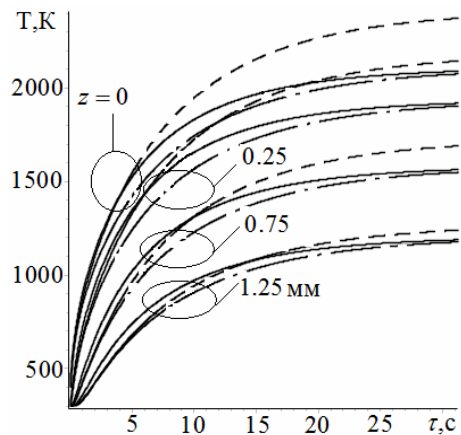


Рис.1. Залежність температури від часу на різних поверхнях першого шару товщиною 2 мм

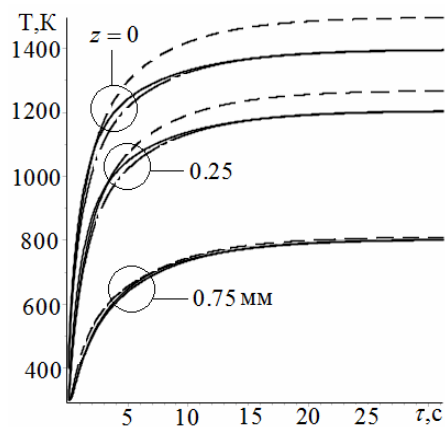


Рис.2. Залежність температури від часу на різних поверхнях першого шару товщиною 1 мм

Результати числових досліджень, частину з яких у вигляді графіків наведено на рис. 1 і 2 (штрихові лінії відповідають сталим, суцільні – заданим температурним залежностям ТФХ, штрихпунктирні – простій нелінійності), засвід-

чили, що зі зменшенням товщини першого шару зменшуються максимальні температури на поверхнях нагріву; у першому шарі зменшується також різниця між температурами підрахованими за сталих і температурнозалежних коефіцієнтів тепло- і температуропровідності (максимальна різниця зменшується з 300 до 100 °С) та за простої нелінійності; у других шарах плит вплив термочутливості неістотний; на одних і тих поверхнях другого шару максимальні температури однакові.

Температури поверхонь підраховані при відповідних часах (близьких до виходу на стаціонарний режим) і на основі розв'язку стаціонарної задачі практично не відрізняються.

## 5. Висновки

У рамках запропонованого раніше підходу до розв'язання квазістатичних задач термомпружності для термочутливих тіл визначення нестационарних температурних полів у шаруватих плитах з урахуванням температурних залежностей коефіцієнтів тепло- і температуропровідності зведено до розв'язання рекурентної системи нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень змінної Кірхгофа у фіксовані моменти часу на поверхнях поділу і похідної за часом на внутрішніх плоскопаралельних поверхнях шарів. На прикладі двошарової плити досліджено точність знайденого розв'язку. Проаналізовано вплив термочутливості та товщини шару, зовнішня поверхня якого нагрівається сталим тепловим потоком.

Робота виконана за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка розвитку пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

## Список використаних джерел

1. Процюк Б.В. Квазістатические температурные напряжения в многослойной пластине при нагреве тепловым потоком / Б.В. Процюк // Теоретическая и прикладная механика. – 2003. – Вып. 38. – С. 63-69.
2. Процюк Б. Метод інтегральних рівнянь у нестационарних задачах теплопровідності термочутливих тіл / Б.В. Процюк // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2009. – Вып. 10. – С. 96-105.

## References

1. PROTSIUK, B.V. (2003) Kvizystaticheskiye temperaturnyye napryazhenyya v mnohosloynoye plastyne pry nahreve teplovym potokom. *Teoreticheskaya y prykladnaya mekhanika*. 38. pp. 63-69.
2. PROTSIUK, B. (2009) Metod intehral'nykh rivnyan' u nestatsionarnykh zadachakh teploprovodnosti termochutlyvykh til. *Fizyko-matematychne modelyuvannya ta informatsiyini tekhnolohiyi*. 10. pp. 96-105.

Надійшла до редколегії 18.06.19