

УДК 539.376

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2024/1.11>

Владислав ГОЛУБ, д-р техн. наук, проф.

ORCID ID: 0009-0006-7140-8937

e-mail: creep@inmech.kyiv.ua

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

Алла ПЛАЩИНСЬКА, канд. техн. наук, ст. наук. співроб.

ORCID ID: 0000-0002-2654-5143

e-mail: plashchynska.alla@gmail.com

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИЙ СПОСІБ РОЗРАХУНКУ КІНЕТИКИ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ТРІЩИН ВТОМИ В ТОНКИХ ПЛАСТИНАХ

Руйнування внаслідок втоми є однією з основних причин раптового виходу з ладу відповідальних елементів сучасних конструкцій. З огляду на це розроблення методів прогнозування кінетики розповсюдження тріщин втоми – актуальне і важливе завдання механіки. Перспективним шляхом розв'язання проблеми є побудова теоретичної моделі розповсюдження тріщин втоми, де рушійною силою вважають процес накопичення пошкоджень.

Метою пропонованої роботи є чисельно-аналітичний розв'язок задачі розрахунку кінетики розповсюдження тріщини втоми в тонкій ізотропній пластині із центральною тріщиною нормального відриву за одновісного асиметричного циклічного навантаження, визначення впливу врахування рівня накопиченого пошкодження вздовж лінії тріщини й експериментальна апробація результатів. Розв'язок задачі побудовано на основі теоретичної двостадійної моделі розповсюдження тріщини втоми, що поєднує концепції механіки руйнування та механіки неперервного пошкодження, а також концепцію еквівалентних напружень за асиметричного циклічного навантаження. Кінцеву зону тріщини втоми розглядаємо згідно з модифікованою моделлю Дагдейла. Система розв'язкових рівнянь задачі зводиться до інтегрального рівняння розповсюдження тріщини втоми. Наближений аналітичний розв'язок отримано шляхом застосування властивостей перетворень Лапласа. Чисельний розв'язок, одержаний методом рекурсії, дає змогу врахувати накопичення пошкодження із часом уздовж лінії тріщини. Побудовано залежності довжини тріщини втоми від кількості (числа) циклів навантаження в тонкій нескінченій пластині з алюмінієвого сплаву 7075-T6 в умовах одновісного багатоциклового асиметричного розтягнення-стиснення. Результати розрахунків, отримані аналітичним і чисельним способами, задовільно узгоджуються з експериментальними даними. Урахування рівня накопиченого із часом пошкодження призводить до збільшення розрахункової швидкості тріщини.

Ключові слова: тріщина втоми, пошкодження, тонка пластина, асиметричний цикл навантаження, одновісне розтягнення-стиснення.

Вступ

Прогнозування термінів безпечної експлуатації елементів конструкцій в умовах багатоциклового навантаження на основі побудови теоретичних моделей руйнування внаслідок втоми є актуальним завданням. Руйнування внаслідок втоми відбувається за напружень, що менші від межі текучості матеріалу, не супроводжується накопиченням макроскопічних пластичних деформацій, що може призвести до раптового та катастрофічного виходу з ладу відповідальних елементів конструкцій. Особливо актуальною ця проблема є для конструкцій, що експлуатуються в умовах сумісної дії статичного та циклічного навантажень. Однією з таких моделей є двостадійна модель розповсюдження тріщини втоми, що поєднує концепції механіки руйнування, континуального пошкодження (Golub, & Plashchinskaya, 2018) та концепції еквівалентних напружень для асиметричного циклічного навантаження (Golub, Pelykh, & Pogrebnyak, 2010). У пропонованій роботі розглянуто задачі про розповсюдження тріщини втоми в тонкій ізотропній пластині за одновісного асиметричного багатоциклового розтягнення-стиснення. Процес руху фронту руйнування тріщини втоми описується нелінійним інтегральним рівнянням. Метою роботи є отримати чисельно-аналітичні розв'язки задачі за різних умов урахування рівня накопиченого пошкодження, та визначити їхній вплив на розрахунок залежності довжини тріщини втоми від кількості (числа) циклів навантаження.

1. Постановка задачі. Основні співвідношення

Розглядаємо тонку ізотропну пластину із центральною тріщиною нормального відриву з початковою довжиною $2\ell_0$. Береги тріщини вільні від навантаження, а до країв пластини прикладено одновісне багатоциклове асиметричне навантаження розтягнення-стиснення $\tilde{\sigma}$

$$\tilde{\sigma} = \sigma_m + \sigma_a \sin(2\pi n) = (\sigma_a)_{eqv} \sin(2\pi n); (\sigma_a)_{eqv} = \left[\cos \left[\frac{\pi \sigma_m}{2 \sigma_B} \right] \right]^{-\eta} \sigma_a, \tag{1.1}$$

де σ_m, σ_a – значення середнього й амплітудного напруження циклу; $(\sigma_a)_{eqv}$ – амплітудне напруження еквівалентного за часом до руйнування симетричного циклу; σ_B – межа міцності матеріалу; η – коефіцієнт чутливості до асиметрії циклу. Вважаємо, що основний масив пластин деформується пружно, а руйнування внаслідок втоми є квазікрихким. Розподіл напружень в околі тріщини втоми довжиною $\ell(n)$ у пружній ділянці має вигляд

$$\Delta\sigma_{yy}(x, n) = \frac{(\sigma_a)_{eqv}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\ell(n)}{x - \ell(n)}}, \tag{1.2}$$

де x – координата за межами циклічної пластичної зони тріщини.

Тріщина втоми зростає стрибками на довжину циклічної пластичної зони (Rice, 1967).

$$\lambda(\ell(n)) = \frac{1}{8} \left[\frac{\pi (\sigma_a)_{eqv}}{2 \sigma_Y} \right]^2 \ell(n), \tag{1.3}$$

що формується в околі її вістря, а напруження в ній обмежені $[-\sigma_Y, \sigma_Y]$.

Процес накопичення пошкоджень унаслідок втоми розглядається як рушійна сила для зростання тріщини та задається еволюційним степеневим рівнянням Качанова – Работнова

$$\frac{\partial \omega(x, n)}{\partial n} = D \left[\frac{(\Delta \sigma_{yy}(x, n))}{1 - \omega(x, n)} \right]^q, \tag{1.4}$$

де функція пошкодження $\omega(x, n) = 0$ за $n = 0$, а $\omega(x, n) = 1$ – у момент руйнування $n = n_f$. Процес руйнування внаслідок втоми складається з інкубаційної стадії та стадії розповсюдження тріщини. Задача полягає в побудові залежностей кінетики розповсюдження тріщин втоми з урахуванням впливу рівня накопиченого пошкодження.

2. Наближений аналітичний спосіб розв'язання

Шляхом інтегрування (1.4) та враховуючи двостадійність процесу руйнування внаслідок втоми, отримуємо рівняння руху фронту руйнування відносно точки з координатою x у вигляді

$$\int_0^1 [1 - \omega(x_*, n)]^q d\omega = D \left\{ \int_0^{n_*} [(\Delta \sigma_{yy})_{eqv}(x, n)]^q dn + \int_{n_*}^{\tilde{n}} [(\Delta \sigma_{yy})_{eqv}(x, n)]^q dn \right\}, \tag{2.1}$$

де $0 \leq n \leq n_*$ – тривалість інкубаційного періоду; $n_* \leq n \leq \tilde{n}$ – стадія розповсюдження тріщини втоми.

Із (2.1), ураховуючи, що $x = \ell(n) + \lambda(\ell(n))$, отримуємо інтегральне рівняння

$$\begin{aligned} 1 - (1 + q)D \left[\frac{(\sigma_a)_{eqv}}{\sqrt{2}} \right]^q \int_0^{n_*} \left[\frac{\ell_0}{\ell(\tilde{n}) + \lambda(\ell(\tilde{n})) - \ell_0} \right]^{\frac{q}{2}} dn = \\ = (1 + q)D \left[\frac{(\sigma_a)_{eqv}}{\sqrt{2}} \right]^q \int_{n_*}^{\tilde{n}} \left[\frac{\ell(n)}{\ell(\tilde{n}) + \lambda(\ell(\tilde{n})) - \ell(n)} \right]^{\frac{q}{2}} dn. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Для розв'язання цього рівняння застосовуємо процедуру переходу від розмірних величин до безрозмірних і зведення його до рівняння Вольтера першого роду у вигляді

$$1 - 2^{-\nu} \alpha_* J_* [z(1 + \mu) - 1]^{-\nu} = 2^{-\nu} \int_1^z \left[\frac{\xi}{z(1 + \mu) - \xi} \right]^\nu d\xi. \tag{2.3}$$

Шляхом застосування перетворень Лапласа та властивостей гамма-функцій рівняння (2.3) набуває вигляду

$$p^{-1} - 2^{-\nu} \alpha_* \nu^{-1} = 2^{-\nu} [\mu]^{1-\nu} \nu^{-1} \Phi(p). \tag{2.4}$$

Здійснюючи зворотній перехід від зображень до оригіналів та від безрозмірних величин до розмірних, отримуємо таку систему рівнянь

$$\begin{cases} n = n_* + \left(\frac{\pi}{4} \right)^{q-2} \frac{\left[\cos \left[\frac{\pi \sigma_m}{2 \sigma_B} \right] \right]^{2n}}{(1 + q^{-1}) D (\sigma_Y)^{q-2}} \int_{\ell_0}^{\ell(n)} [\sigma_a]^2 \ell(n)^{-1} d\ell, \\ n_* = \left[(1 + q) D \left[\frac{4 \sigma_Y}{\pi} \right]^q \right]^{-1}. \end{cases} \tag{2.5}$$

Вона дає змогу визначити тривалість інкубаційного періоду та стадії розповсюдження тріщини втоми.

3. Чисельний спосіб

Для реалізації чисельного способу лінію розповсюдження тріщини дискретизуємо на N проміжків з координатами $x_j = \ell_i + \lambda(\ell_i)$, $i = 0, \dots, N$, $j = i, \dots, N$. На кожному з N дискретних проміжків часу $n_i \leq n \leq n_{i+1}$ відбувається зростання тріщини на довжину циклічної пластичної зони $\lambda(\ell_i)$ та змінюється рівень накопиченого пошкодження $\omega(x_j, n_i)$.

Початкові та граничні умови для функції пошкодження мають вигляд

$$\omega(x, n) = \begin{cases} 0; & x = x_j = \ell_i + \lambda(\ell_i); & n = n_0 = 0 & i = 0, \dots, N; j = i, \dots, N & (a) \\ 1; & x = x_0 = \ell_0 + \lambda(\ell_0); & n = n_1 & & (b) \\ \omega(x_j, n_i); & x = x_j = \ell_i + \lambda(\ell_i); & n = n_i; & i = 1, \dots, N; j = i, \dots, N & (c) \\ 1; & x_j = \ell_i + \lambda(\ell_i); & n = n_{i+1}; i = j = 1, \dots, N. & & (d) \end{cases} \tag{3.1}$$

Інтегральне рівняння (2.1) запишемо як суперпозицію рекурентних рівнянь для кожного проміжку часу у вигляді

$$\sum_{i=0}^N \int_{\omega(n_i, x_j)}^{\omega(n_{i+1}, x_j)} [1 - \omega(n, x_j)]^q d\omega = D \sum_{i=0}^N \int_{n_i}^{n_{i+1}} \left(\sigma_a \right)_{eqv} \sqrt{\frac{\ell(n_i)}{2(x_j - \ell(n_i))}}^q dn; \tag{3.2}$$

$i = 0, \dots, N \quad j = i, \dots, N.$

Тривалість інкубаційного періоду визначаємо з умов (3.1 (a), (b)). Рівень накопиченого пошкодження $\omega(n_{i+1}, x_j)$, $i = 0, \dots, N \quad j = i, \dots, N$ за проміжок часу $n_i \leq n \leq n_{i+1}$ знаходимо з умов (3.1 (a), (c)).

Число циклів до руйнування в точці x_j визначаємо у разі виконання умов (3.1 (c), (d)) зі співвідношення

$$n_{i+1} = n_i + [1 - \omega(n_i, x_j)]^{q+1} \left[(q+1)D \left[\sigma_a \right]_{eqv} \sqrt{\frac{\ell(n_i)}{2(x_j - \ell(n_i))}}^q \right]^{-1}. \tag{3.4}$$

Рівень накопиченого пошкодження $\omega(n_{i+1}, x_j)$, за проміжок часу $n_i \leq n \leq n_{i+1}$, ($i = 0, \dots, N, j = i, \dots, N$) визначаємо зі співвідношення

$$\omega(n_{i+1}, x_j) = 1 - \left([1 - \omega(n_i, x_j)]^{q+1} - (q+1)D \left[\sigma_a \right]_{eqv} \sqrt{\frac{\ell(n_i)}{2(x_j - \ell(n_i))}}^q (n_{i+1} - n_i) \right)^{\frac{1}{1+q}}. \tag{3.5}$$

4. Приклади

Розглянемо тонку нескінченну пластину з алюмінієвого сплаву 7075-T6 із центральною тріщиною початкової довжини $\ell_0 = 0,005$ м, що перебуває в умовах одновісного багатоциклового розтягнення-стиснення (1.1). Значення матеріальних констант $\sigma_y = 523$ МПа, $\sigma_B = 571$ МПа, $D = 3,33 \cdot 10^{-29}(\text{МПа}^q \cdot \text{цикл})^{-1}$, $q = 9,23$, $\eta = 3,57$ визначені зі стандартних базових експериментів на втому на гладких циліндричних зразках, за методикою, викладеною в (Golub, & Plashchinskaya, 2018).

На рис. 1. представлено результати розрахунків кінетики розповсюдження тріщини втомі для симетричного (а), та асиметричного віднульового циклічного навантаження. Лінія 1 відповідає результатам розрахунків за рекурентною залежністю (3.4), що враховує рівень попереднього накопиченого пошкодження, лінія 2 відповідає розрахункам згідно з аналітичним розв'язком (2.5). Отримано задовільне узгодження результатів розрахунків з експериментальними даними (o) з роботи (Hudson, & Scardina, 1967).

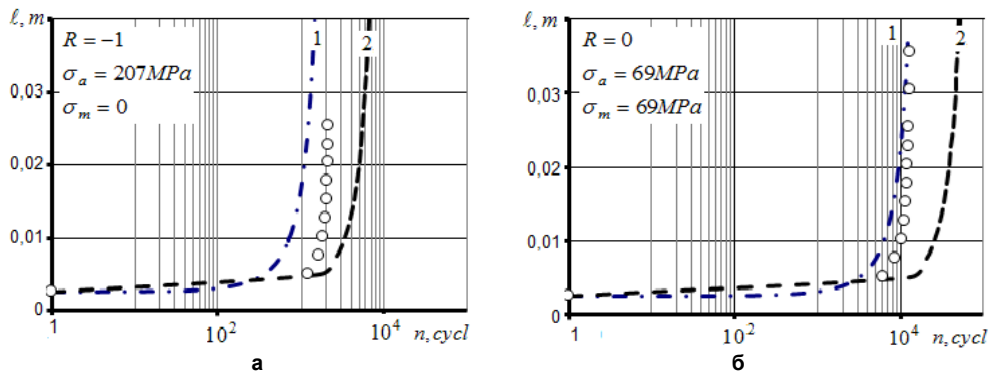


Рис. 1. Залежності ℓ від n пластини зі сплаву 7075-T6 за симетричного (а) й асиметричного (б) циклів навантаження

Дискусія і висновки

Підхід до моделювання процесу розповсюдження тріщин втомі у пружних тілах, що базується на використанні концепцій механіки пошкодження є ефективним шляхом розв'язку цієї складної й дуже актуальної задачі технічної механіки. Результати розрахунків кінетики розповсюдження тріщин втомі у тонких ізотропних пластинах за асиметричного розтягнення-стиснення задовільно погоджуються з експериментальними даними. Використання чисельного алгоритму дає змогу змоделювати процес стрибкоподібного зростання тріщини втомі та врахувати зміну рівня накопичення пошкоджень уздовж лінії тріщини. Аналітичне рішення, що не враховує історію накопичення пошкоджень, задає істотно уповільнений процес розповсюдження тріщин втомі.

Внесок авторів: Владислав Голуб – концепція моделі, методика; Алла Плащинська – розв'язок рівнянь, програмне забезпечення; збір експериментальних даних, розрахунки.

Подяки, джерела фінансування. Наукові дослідження, результати яких опубліковано в цій статті, виконано коштом бюджетної програми "Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень" (КПКВК 6541030).

Список використаних джерел

- Голуб, В. П., Пельх, В. Н., & Погребняк, А. Д. (2010). Прогнозирование усталостной долговечности призматических металлических стержней при асимметричном растяжении-сжатии методом эквивалентных напряжений. *Вісник національного технічного університету України "КПІ"*, 58, 177–182.
- Golub, V. P., & Plashchinskaya, A. V. (2018). On the theory of growth of fatigue mode I cracks in thin isotropic plates of finite size under uniaxial tension-compression. *International Applied Mechanics*, 54(2), 188–206.
- Hudson, C. M., & Scardina, J. T. (1967). Effect of stress ratio on fatigue-crack growth in 7075-T6 aluminum-alloy sheet. *NASA TMX-60125*, 24.
- Rice, J. R. (1967). Mechanics of crack tip deformation and extension by fatigue. *ASTM STP 415. Fatigue Crack Propagation*, 247–309.

References

- Golub, V. P., & Plashchinskaya, A. V. (2018). On the theory of the growth of fatigue mode I cracks in thin isotropic plates of finite size under uniaxial tension-compression. *International Applied Mechanics*, 54(2), 188–206.
- Golub, V. P., Pelykh, V. N., & Pogrebnyak, A. D. (2010). Prediction of fatigue life of prismatic metal rods under asymmetric tension-compression by the equivalent stress method. *Bulletin of the National Technical University of Ukraine "KPI"*, 58, 177–182 [in Russian].
- Hudson, C. M., & Scardina, J. T. (1967). Effect of stress ratio on fatigue crack growth in 7075-T6 aluminum-alloy sheet. *NASA TMX-60125*, 24.
- Rice, J. R. (1967). Mechanics of crack tip deformation and extension by fatigue. *ASTM STP 415. Fatigue Crack Propagation*, 247–309.

Отримано редакцією журналу / Received: 10.04.24

Прорецензовано / Revised: 15.04.24

Схвалено до друку / Accepted: 20.05.24

Vladyslav GOLUB, DSc, Prof.

ORCID ID: 0009-0006-7140-8937

e-mail: creep@inmech.kyiv.ua

National Academy of Science of Ukraine, S. P. Timoshenko Institute of Mechanics, Kyiv, Ukraine

Alla PLASHCHYNSKA, PhD, Senior Researcher

ORCID ID: 0000-0002-2654-5143

e-mail: plashchynska.alla@gmail.com

National Academy of Science of Ukraine, S. P. Timoshenko Institute of Mechanics, Kyiv, Ukraine

NUMERICAL-ANALYTIC COMPUTING METHOD OF THE KINETICS OF FATIGUE CRACK PROPAGATION IN THE THIN PLATES

Fatigue failure is one of the main reasons for the sudden failure of critical elements of modern structures. Therefore, the development of methods for predicting the kinetics of fatigue crack propagation is an important task of mechanics. A promising way to solve this problem is to build a theoretical model of fatigue crack propagation, where the process of damage accumulation is considered the driving force. This paper aims to develop a numerical-analytical solution for predicting the kinetics of fatigue crack propagation in a thin isotropic plate with a central crack under uniaxial asymmetric cyclic loading, taking into account the influence of accumulated damage along the crack line and experimental validation of the results. The solution is based on a theoretical two-stage model of fatigue crack propagation, which combines concepts of fracture mechanics and continuum damage mechanics, and equivalent stresses concept under asymmetric cyclic loading. The fatigue crack tip zone is considered according to the modified Dagdale model. The task is reduced to a solution integral equation of fatigue crack propagation. An approximate analytical solution is obtained using Laplace transform properties. The numerical solution, obtained by the recursion method, allows for the consideration of damage accumulation over time along the crack line. The calculation results using approximate analytical and numerical methods for a thin aluminium alloy 7075-T6 plate with I mode crack under uniaxial asymmetric tension-compression loading satisfactorily agree with the experimental data. Considering the level of accumulated damage over time leads to an increase in the calculated crack propagation rate.

Keywords: *fatigue crack, damage, thin plate, asymmetric load cycle, uniaxial tension-compression.*

Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів. Спонсори не брали участі в розробленні дослідження; у зборі, аналізі чи інтерпретації даних; у написанні рукопису; в рішенні про публікацію результатів.

The authors declare no conflicts of interest. The funders had no role in the design of the study; in the collection, analyses or interpretation of data; in the writing of the manuscript; in the decision to publish the results.