

УДК 539.3

Лавренюк М. В.¹, к.ф.-м.н., доц.

**Методи розрахунку прогину
ортотропної неоднорідної пластини на
пружній основі**

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01033, м. Київ, вул.
Володимирська, 64,
e-mail: mlavrenyuk@univ.kiev.ua

M. V. Lavrenyuk¹, Ph.D. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.

**Methods of calculating the deflection of an
orthotropic inhomogeneous plate on an elastic
basis**

¹ Kyiv Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 01033, Kyiv, Volodymyrs'ka str., 64,
e-mail: mlavrenyuk@univ.kiev.ua

Розглянуто задачу пружної рівноваги ортотропної неоднорідної прямокутної пластини на пружній основі, шарнірно закріпленої з усіх сторін. Проаналізовано придатність методу послідовних наближень та методу збурень для чисельного розв'язання задачі визначення напружено-деформованого стану такої пластини. Встановлені залежності прогину від механічних і геометричних параметрів пластини і основи. В роботі використовується метод Нав'є для знаходження функції прогинів на кожному кроці ітераційного процесу та методи збурень та послідовних наближень як ітераційні методи розв'язання задачі.

Ключові слова: метод послідовних наближень, метод збурень, ортотропна неоднорідна пластина.

The problem of elastic equilibrium of an orthotropic nonhomogeneous rectangular plate on an elastic basis (one-parameter Winkler model) is considered, hingedly fixed from all sides.

We use the Navier method for finding the deflection function at each step of the iterative process and perturbation methods and successive approximations as iterative methods for solving the problem.

The suitability of the method of successive approximations and the method of perturbations for the numerical solution of the problem of determining the stress-strain state of such a plate, the limits of the applicability of these methods, their accuracy and convergence of the iterative process in solving the deformation problems of heterogeneous orthotropic plates have been analyzed.

The dependence of the deflection on the mechanical and geometric parameters of the plate and the base is established. It was found that the Poisson ratio practically does not affect the stress state of the plate (when the Poisson ratio is changed two times, the difference between the intensities of the shear stresses does not exceed 10%), it is possible to consider it as a constant using the methods of successive approximations and disturbances. It is also established that the method of successive approximations and the method of perturbations has a limit on the nature of inhomogeneity, the convergence essentially depends on the nature of the heterogeneity.

Key Words: method of successive approximations, perturbation method, orthotropic inhomogeneous plate.

Статтю представив д.техн.н., проф. Лимарченко О.С.

В останні роки все ширше використовуються композитні матеріали, особливо в аерокосмічній, автомобільній та судноплавній галузях. Композити зазвичай складаються з двох або більше матеріалів, які поєднують для утворення нового матеріалу з потрібними властивостями. Такі композити часто представлені у вигляді

пластин, що мають складну неоднорідну структуру.

Зокрема, прямокутна, поперечно навантажена пластина зі змінними геометричними і механічними параметрами може спиратися на пружну основу, як, наприклад, в покриттях автомобільних доріг, мостів або злітно-посадкових смуг аеродромів. Для аналізу

міцності і надійності таких конструкцій потрібно знати їх напружено-деформований стан.

Задача згину неоднорідних анізотропних пластин на пружній основі є однією з актуальних задач теорії пружності. В замкнутій аналітичній формі розв'язок цієї задачі можна побудувати лише для деяких крайових задач [1]–[3].

Альтернативним підходом є пошук наближеного розв'язання цієї задачі [4]–[6] є представлення розв'язку у вигляді рядів. Також, можна використовуючи варіаційні методи, звести вихідні рівняння в частинних похідних до системи звичайних диференціальних рівнянь. Недоліком цих методів є їх явна залежність від способів задання крайових умов і видів навантаження. Застосування скінченно-різницевого підходу призводить до труднощів задання граничних умов та задовільної точності одержаних чисельних розв'язків.

У даній роботі для чисельного розв'язання задачі про згин пластини застосовується комбінований чисельно-аналітичний підхід. У якості ітераційних методів розв'язання задачі використовуються методи збурень та послідовних наближень, а для знаходження функції прогинів на кожному кроці ітераційного процесу – метод Нав'є.

Також в роботі проаналізовано придатність методу послідовних наближень та методу збурень для чисельного розв'язання задачі визначення напружено-деформованого стану пружної неоднорідної ортотропної пластини на пружній основі, межі застосування цих методів, їх точність та збіжність ітераційного процесу при розв'язанні задач деформації неоднорідних ортотропних пластин.

Розглянемо пружну неоднорідну ортотропну тонку прямокутну пластину на пружній вінклерівській основі. На пластину діє розподілене поперечне навантаження, а краї пластини шарнірно закріплені. Рівняння рівноваги в прогинах для пружної неоднорідної ортотропної пластини на пружній вінклерівській основі запишемо у вигляді:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_1 + 2D_{xy}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \left(\frac{\partial^2 D_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D_1}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 D_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D_y}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \left(\frac{\partial^2 D_1}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 D_{xy}}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial D_1}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} +$$

$$+ 4 \frac{\partial D_1}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 4 \frac{\partial D_{xy}}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} + 4 \frac{\partial D_{xy}}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 2 \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial D_y}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) + c_1 w = q.$$

Граничні умови на контурі $x = const$ запишуться:

$$w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

а на контурі $y = const$: $w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$

$$\text{Тут } D_{xy} = \frac{C_1 h^3}{12}, D_1 = \frac{\alpha_{xy} h^3}{12}, D_x = \frac{\alpha_x h^3}{12},$$

$$D_y = \frac{\alpha_y h^3}{12}, \alpha_{xy}, \alpha_y, \alpha_x - \text{параметри пружності,}$$

C_1 – модуль зсуву.

Розглянемо метод послідовних наближень для нашої задачі. Рівняння рівноваги можна переписати у наступному вигляді:

$$\langle D_x \rangle \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(\langle D_1 \rangle + 2\langle D_{xy} \rangle) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \langle D_y \rangle \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + c_1 w = q - \overline{D_x} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(\overline{D_1} + 2\overline{D_{xy}}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \overline{D_y} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \left(\frac{\partial^2 \overline{D_x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{D_1}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 \overline{D_1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{D_y}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \left(\frac{\partial^2 \overline{D_1}}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 \overline{D_{xy}}}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial \overline{D_1}}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} + 4 \frac{\partial \overline{D_1}}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 4 \frac{\partial \overline{D_{xy}}}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} + 4 \frac{\partial \overline{D_{xy}}}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 2 \left(\frac{\partial \overline{D_x}}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial \overline{D_y}}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right).$$

Для k -го кроку методу одержимо наступну крайову задачу:

Рівняння рівноваги

$$\langle D_x \rangle \frac{\partial^4 w^{(k)}}{\partial x^4} + 2(\langle D_1 \rangle + 2\langle D_{xy} \rangle) \frac{\partial^4 w^{(k)}}{\partial x^2 \partial y^2} + \langle D_y \rangle \frac{\partial^4 w^{(k)}}{\partial y^4} + c_1 w^{(k)} = q - \overline{D_x} \frac{\partial^4 w^{(k-1)}}{\partial x^4} + 2(\overline{D_1} + 2\overline{D_{xy}}) \frac{\partial^4 w^{(k-1)}}{\partial x^2 \partial y^2} + \overline{D_y} \frac{\partial^4 w^{(k-1)}}{\partial y^4} - \left(\frac{\partial^2 \overline{D_x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{D_1}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w^{(k-1)}}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 \overline{D_1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{D_y}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w^{(k-1)}}{\partial y^2} + 2 \left(\frac{\partial^2 \overline{D_1}}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 \overline{D_{xy}}}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial^2 w^{(k-1)}}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial \overline{D_1}}{\partial x} \frac{\partial^3 w^{(k-1)}}{\partial y^2 \partial x} +$$

$$+4 \frac{\partial \overline{D}_1}{\partial y} \frac{\partial^3 w^{(k-1)}}{\partial x^2 \partial y} + 4 \frac{\partial \overline{D}_{xy}}{\partial x} \frac{\partial^3 w^{(k-1)}}{\partial y^2 \partial x} + 4 \frac{\partial \overline{D}_{xy}}{\partial y} \frac{\partial^3 w^{(k-1)}}{\partial x^2 \partial y} +$$

$$+ 2 \left(\frac{\partial \overline{D}_x}{\partial x} \frac{\partial^3 w^{(k-1)}}{\partial x^3} + \frac{\partial \overline{D}_y}{\partial y} \frac{\partial^3 w^{(k-1)}}{\partial y^3} \right),$$

та граничні умови на контурі $x = const$:

$$w^{(1)} = 0, D_x \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial y^2} = 0,$$

а на контурі $y = const$:

$$w^{(1)} = 0, D_y \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial x^2} = 0.$$

Ітераційний процес триває доти, доки $\max_{0 \leq x \leq a} |w^{(k)} - w^{(k-1)}| > \varepsilon$, де ε – задана наперед точність обчислень.

Розглянемо тепер визначальні співвідношення методу збурень для нашої задачі. Визначальні

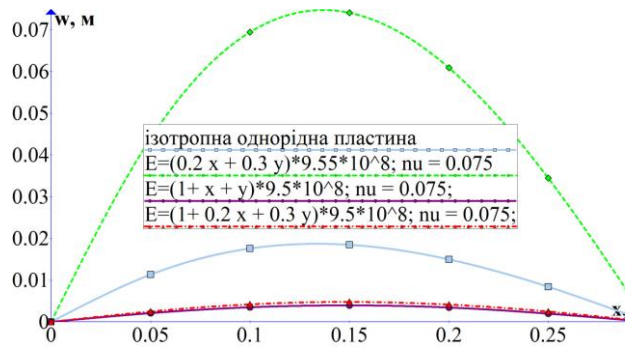


Рис. 1 Прогин однорідної та лінійно-неоднорідних пластин

співвідношення методу збурень [7] для k -го кроку записуються у вигляді:

$$w^{(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^{(k)} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right),$$

$$a_{mn}^{(k)} = \frac{q_{mn}^{(k)}}{\left(D_x \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2H \frac{m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b^2} + D_y \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 + c_1 \right)},$$

$$q_{mn}^{(k)} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q^{(k)}(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy,$$

$$q^{(0)} = q,$$

$$q^{(k)} = - \left(\frac{\partial^2 \overline{D}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{D}_1}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w^{(k-1)}}{\partial x^2} -$$

$$- \left(\frac{\partial^2 \overline{D}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{D}_y}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w^{(k-1)}}{\partial y^2} -$$

$$- 2 \left(\frac{\partial^2 \overline{D}_1}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 \overline{D}_{xy}}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial^2 w^{(k-1)}}{\partial x \partial y} - 4 \frac{\partial \overline{D}_1}{\partial x} \frac{\partial^3 w^{(k-1)}}{\partial y^2 \partial x} -$$

$$- 4 \frac{\partial \overline{D}_1}{\partial y} \frac{\partial^3 w^{(k-1)}}{\partial x^2 \partial y} - 4 \frac{\partial \overline{D}_{xy}}{\partial x} \frac{\partial^3 w^{(k-1)}}{\partial y^2 \partial x} - 4 \frac{\partial \overline{D}_{xy}}{\partial y} \frac{\partial^3 w^{(k-1)}}{\partial x^2 \partial y} -$$

$$- 2 \left(\frac{\partial \overline{D}_x}{\partial x} \frac{\partial^3 w^{(k-1)}}{\partial x^3} + \frac{\partial \overline{D}_y}{\partial y} \frac{\partial^3 w^{(k-1)}}{\partial y^3} \right), k \geq 1.$$

Як і для методу послідовних наближень, граничні умови автоматично задовольняються на кожному кроці ітерації.

Ітераційний процес триває доти, доки $\max_{0 \leq x \leq a} |w^{(k)}| > \varepsilon$, де ε – задана наперед точність обчислень.

Коефіцієнт основи для моделі Вінклера брався рівним $c_1 = 5 \cdot 10^7$. Геометричні характеристики пластини: $a = 0.3$ м; $b = 0.3$ м; $h = 0.02$ м.

Для ізотропного матеріалу модуль Юнга задавався лінійною функцією координат, а коефіцієнт Пуасона та товщина пластини – постійними. Для анізотропного матеріалу D_x і D_y задавалися лінійними функціями координат, а D_{xy} та D_1 – постійними. Розглядалися пластини з фанери ($s_{11} = 1.18 \cdot 10^{-9}$ м²/Н, $s_{22} = 2.37 \cdot 10^{-9}$ м²/Н, $s_{12} = -0.852 \cdot 10^{-10}$ м²/Н, $s_{66} = 2.03 \cdot 10^{-8}$ м²/Н, $\alpha_x = 8.497 \cdot 10^8$ Н/м², $\alpha_y = 4.230 \cdot 10^8$ Н/м², $\alpha_{xy} = 3.055 \cdot 10^7$ Н/м², $G_{xy} = 4.926 \cdot 10^7$ Н/м²) та з гіпотетичного крихкого ізотропного матеріалу, близького по модулю Юнга до текстоліту (для

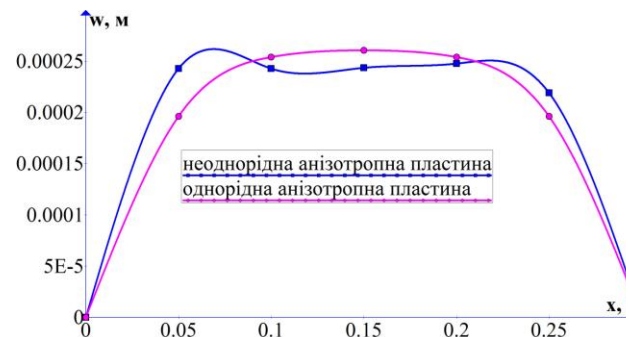


Рис. 2 Прогин однорідної та неоднорідної анізотропних пластин

порівняння брався матеріал із коефіцієнтом Пуасона як середнє між коефіцієнтами Пуасона вздовж (0.085) та поперек (0.065) волокон зовнішніх шарів фанери. і модулем Юнга як середнє між α_x та α_y).

На рисунку 1 наведено величини прогину вздовж осі симетрії однорідної та неоднорідної ізотропних пластин. На рисунку 2 наведено величини прогину вздовж осі симетрії однорідної та неоднорідних ізотропних пластин з лінійним

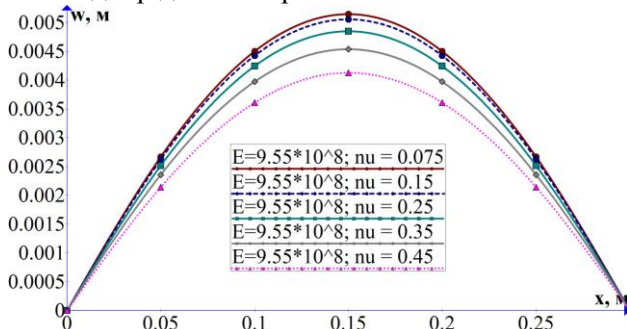


Рис. 3 Прогин однорідних ізотропних пластин, $0.075 \leq \nu \leq 0.45$

розподілом величини модуля Юнга. На рисунку 3 наведено величини прогину вздовж осі симетрії однорідних ізотропних пластин для різних значень коефіцієнта Пуасона. Коефіцієнт Пуасона для всіх пластин брався рівним 0.075.

Список використаних джерел

1. Григоренко Я.М., Мольченко Л.В. Основи теорії пластин та оболонок з елементами магнітопружності, Київ: Вид-во Київський ун-т, 2010. – 403 с.
2. Lekhnitsky S.G. The anisotropic plates. М.: Gostekhizdat, 1957. – 463р.
3. Vlasov V.Z., Leontjev N.N. Beam, plates and shells on elastic foundation, М: Physmatgiz, 1960. – 491р.
4. Идимешев С.В. // Расчет напряженно-деформированного состояния изотропных прямоугольных пластин на упругом основании, Известия Алтайского государственного университета, 2014. – №1(81). – С. 53-56
5. Lenser Aghalovyan // Asymptotic theory of anisotropic plates and shells, Journal of National Academy of Sciences of Armenia. – 2009 – №1(62), – pp. 5-39.
6. Tovstik P.E., Tovstik T.P. // Two-dimensional models of shells made of an anisotropic material, Acta mechanica. 2014. – №3(225), – pp. 647–661
7. Nayfeh A.H. Perturbation methods. John Wiley and Sons. – 1973. – 455p.

На основі проведених чисельних розрахунків можна зробити наступні висновки:

1) коефіцієнт Пуасона практично не впливає на напружений стан пластини (при зміні коефіцієнт Пуасона в два рази, різниця між інтенсивностями дотичних напружень не перевищує 10%), тому можна при використанні методу послідовних наближень вважати його постійним, що суттєво спрощує алгоритм розв'язання задачі;

2) метод послідовних наближень, як і метод збурень, допускають відхилення $D_1(x, y)$, $D_x(x, y)$, $D_y(x, y)$, $D_{xy}(x, y)$ від їх відповідних осереднених значень $\langle D_1 \rangle$, $\langle D_x \rangle$, $\langle D_y \rangle$, $\langle D_{xy} \rangle$ не більше ніж на 10%;

3) метод послідовних наближень, як і метод збурень, доволі чутливі до характеру неоднорідності пружних характеристик пластини.

References

1. HRYHORENKO YA.M., MOLCHENKO L.V. (2010) *Osnovy teorii plastyn ta obolonok z elementamy mahnitopruzhnosti*. Kyiv: Vydavnytstvo Kyivskiyi universytet.
2. LEKHNITSKY S.G. (1957) *The anisotropic plates*. Moskva: Gostekhizdat.
3. VLASOV V.Z., LEONTJEV N.N. (1960) *Beam, plates and shells on elastic foundation*. Moskva: Physmatgiz.
4. IDIMESHEV S.V. (2014) *Raschet napriazhenno-deformirovannogo sostoianiya yzotropnykh priamouholnykh plastyn na uprugom osnovanyu*. *Yzvestiya Altayskoho hosudarstvennoho unyversyteta*. 81 (1). p. 53-56.
5. LENSER A. (2009) *Asymptotic theory of anisotropic plates and shells*. *Journal of National Academy of Sciences of Armenia*. 62 (1). p.5-39.
6. TOVSTIK P.E., TOVSTIK T.P. (2014) *Two-dimensional models of shells made of an anisotropic material*. *Acta mechanica*. 225 (3). p.647-661.
7. Nayfeh A.H. (1973) *Perturbation methods*. Weinheim: John Wiley and Sons.

Надійшла до редколегії 20.06.2019