

УДК 519.63

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.37>

В. А. Колесников¹, аспірант

Ефективний чисельний метод для розв'язання рівняння Річардса-Клюта з відстеженням зони повного насичення

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03022, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д
e-mail: valera.kolesnikov.1997@gmail.com

V. A. Kolesnykov¹, postgraduate student

An effective numerical method for solving the Richards-Klute equation with tracking of full saturated zone

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03022, Kyiv, Glushkova ave., 4d
e-mail: valera.kolesnikov.1997@gmail.com

Стаття містить опис модифікацій чисельних методів для розв'язання рівняння Річардса-Клюта та моделювання процесу масопереносу у пористому середовищі. Доведена оцінка підвищення ефективності процесу моделювання при використанні модифікованих методів.

Ключові слова: математичне моделювання, чисельні методи, оптимізація обчислень, рівняння Річардса-Клюта, подвійно зв'язаний список ребер.

The article presents modifications for numerical methods for modeling of mass transfer process in porous medium with full saturated zone tracking. The goal of the article is to increase computational efficiency of finding an approximate solution process using division of the area into the two non-intersecting parts: unsaturated zone and zone with full saturation. Numerical methods for solving the one-dimensional Richards-Klute equation with tracking of the full saturated zone have been developed. The cases of monotonic solution and solution with general properties of Richards-Klute equation were considered. A modification of the full saturated zone tracking process using a doubly connected edge list structure have been developed for two-dimensional case. Efficiency increase estimation is proven for one- and two-dimensional cases using probability distribution for a measure of the full saturated zone. A comparative analysis of the proposed modifications was carried out. The results of numerical experiments coincide with the estimates predicted by theory.

Key Words: mathematical modeling, numerical methods, computational optimization, Richards-Klute equation, doubly connected edge list.

Статтю представив д.т.н., проф. Заславський В. А.

1 Вступ

Рівняння Річардса-Клюта використовується для опису процесу масопереносу у пористому середовищі під дією гравітації та капілярності. Задача масопереносу в пористих середовищах є однією з важливих проблем математичної фізики. За допомогою неї описуються процеси іригації та зневоднення, моделюються процеси розповсюдження корисних речовин та передбачаються зони зараження під час техногенних катастроф, що пов'язані з викидами отруйних речовин у ґрунт. Рівняння Річардса-Клюта є нелінійним еліптико-параболічним виродженим рівнянням у часткових похідних. Через ці його властивості відомо дуже мало аналітичних розв'язків, більшість з яких отримані для дуже спрощених випадків. Робота [1] містить аналітичний розв'язок одновимірного рів-

няння Річардса-Клюта у випадку гетерогенного середовища. Цей розв'язок отримано за допомогою перетворення Кірхгофа. Відштовхуючись від цих результатів, у роботі [2] було отримано розв'язок рівняння Річардса-Клюта з нелінійним стоком. Робота [3] містить аналітичні розв'язки одновимірного рівняння Річардса-Клюта для широкого спектру гетерогенних середовищ. Нелінійність рівняння також є причиною того, що відомо дуже мало апріорних оцінок для рівняння Річардса-Клюта, більшість з яких сформульовані для слабких розв'язків. У класичних роботах [4, 5] містяться результати стосовно існування, єдиності та регулярності слабких розв'язків рівняння Річардса-Клюта.

Головним інструментом для розв'язання рівняння Річардса-Клюта та моделювання процесу масопереносу у пористих середовищах є чисельні методи. Найчастіше використову-

ються стандартні метод скінченних елементів (FEM) та метод скінченних об'ємів (FVM) у поєднанні зі зворотним кроком по часу. Проте існує багато модифікацій цих методів. Деякі з них базуються на адаптивному кроці по простору [6, 7] або по часу [8]. Огляд чисельних методів для розв'язання рівняння Річардса-Клюта можна знайти у роботах [9, 10]. Стаття [10] також містить огляд програм для розв'язання рівняння Річардса-Клюта.

З фізичної інтерпретації процесу масопереносу можна зробити висновок, що розв'язок рівняння Річардса-Клюта розбиває досліджувану область на дві підобласті, що не перетинаються: ненасичену зону та зону повного насичення, які змінюються з часом. Роботи [11, 12] містять результати стосовно неперервності та гладкості межі між цими підобластями. Але при використанні чисельних методів для розв'язання рівняння Річардса-Клюта на це розділення не звертають увагу, обчислюючи значення розв'язку на всій досліджуваній області.

Дана стаття містить опис модифікації чисельних методів, що використовуються для відстеження зони повного насичення та підвищення ефективності процесу моделювання. Розділ 2 містить опис модифікації чисельного методу за умов монотонності розв'язку рівняння. У розділі 3 ця умова опускається. Розділ 4 містить оцінку підвищення ефективності процесу розв'язання рівняння Річардса-Клюта. Порівняльний аналіз модифікованого та немодифікованого чисельних методів міститься у розділі 5.

2 Монотонний випадок

Рівняння Річардса-Клюта має вигляд

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (K \nabla h) + \frac{\partial K}{\partial z} + s, \quad (1)$$

де t — час [s], $\theta \in [\theta_{min}, \theta_{max}]$ — коефіцієнт насиченості [-], h — потенціал гідравлічного тиску [m], K — гідравлічна кондуктивність [m/s] та s — джерела [s⁻¹]. z — вертикальна координата, $(x, y, z, t) \in \Omega \times [0, T]$.

Нехай $\Omega_u(t) = \{(x, y, z) | \theta(x, y, z, t) < \theta_{max}\}$ і $\Omega_s(t) = \Omega \setminus \Omega_u(t)$ для $t \in [0, T]$ позначають відповідно ненасичену та насичену зони для розв'язку $\theta(x, y, z, t)$ рівняння (1). Вважаючи, що $s \geq 0$ та що крізь межу досліджуваної області $\partial\Omega$ не проходить від'ємний потік, з фізичної

інтерпретації рівняння Річардса-Клюта можна зробити висновок, що $\partial\theta/\partial t \geq 0$ і ми маємо наступне включення.

$$\Omega_s(t_1) \subseteq \Omega_s(t_2) \text{ for every } t_1 < t_2. \quad (2)$$

Це означає, що якщо розв'язок θ в точці (x, y, z, t_0) дорівнює θ_{max} , тоді для кожного $t_1 > t_0$ $\theta(x, y, z, t_1) = \theta_{max}$ і ми можемо виключити точки з повним насиченням із подальшого розгляду. Для чисельних методів це означає, що просторова сітка ω розбивається на дві частини ω_u та ω_s на кожному кроці по часу за тим самим принципом, що і Ω розбивається на $\Omega_u(t)$ і $\Omega_s(t)$. І для цих підсіток ми маємо різні правила для обчислення значення розв'язку на наступному кроці по часу.

$$\theta_i^{j+1} = \begin{cases} \theta_i^j, & \text{if } \theta_i^j = \theta_{max}, \\ c_i, & \text{інакше,} \end{cases} \quad (3)$$

де $c \in R^{|\omega_u|}$ розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка була сконструйована на поточному кроці.

Розглянемо процес обчислення наближеного розв'язку на одновимірному прикладі рівняння Річардса-Клюта.

Приклад 1.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K(h) \frac{\partial h}{\partial z} \right) + \frac{\partial K}{\partial z}, \quad (4)$$

$$(z, t) \in [0, 40] \times [0, +\infty),$$

$$\theta(h) = \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{\alpha + |h|^\beta} + \theta_r, \quad (5)$$

$$K(h) = K_s \frac{A}{A + |h|^\gamma},$$

$$h(z, 0) = -61.5,$$

$$\partial\theta(0, t)/\partial t = 0, \quad (6)$$

$$h(40, t) = -20.7,$$

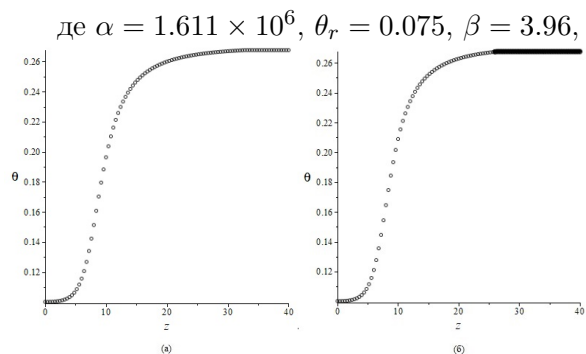


Рис. 1: Наближений розв'язок для Пр. 1. ● — насичені вузли, ○ — ненасичені вузли

$\gamma = 4.74$, $\theta_{max} = \theta_s = 0.287$, $A = 1.175 \times 10^6$ та $K_s = 0.00944$ [8].

Рис. 1 містить графіки наближеного розв'язку, отримані звичайним та модифікованим методами у момент часу $t = 1000$.

3 Загальний випадок

У загальному випадку s та потік маси через $\partial\Omega$ можуть бути від'ємними, тому умова (2) не є справедливою. Тоді для якогось $i \in \omega_s$ ми можемо отримати $\theta_i^{j+1} < \theta_i^j$. Очевидно, що правило (3) не передбачає таких змін у вузлах, тому його потрібно модифікувати для коректної апроксимації розв'язку. Щоб це зробити, ми розіб'ємо ω на три підсітки:

- 1) $\omega_u = \{i \in \omega | \theta_i < \theta_{max}\}$ (ненасичені вузли),
 - 2) $\omega_s = \{i \in \omega | \theta_i = \theta_{max}, \rho(i, \omega_u) \geq d\}$ (насичені вузли, віддалені від ненасичених принаймні на відстань d),
 - 3) $\omega_b = \omega \setminus (\omega_u \cup \omega_s)$ (буферні вузли між насиченими та ненасиченими).
- (7)

Тоді ми маємо наступний алгоритм для знаходження наближеного розв'язку рівняння Річардса-Клюта.

Алгоритм 1.

Крок 1. Обчислити наближений розв'язок θ_i^{j+1} за наступним правилом.

$$\theta_i^{j+1} = \begin{cases} \theta_i^j, & \text{if } i \in \omega_s, \\ c_i, & \text{if } i \in \omega_u \cup \omega_b, \end{cases} \quad (8)$$

де $c \in R^{|\omega_u \cup \omega_b|}$ — розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь, сконструйованої на поточному кроці.

Крок 2. Оновити множини ω_u , ω_b та ω_s відповідно до їх визначення (7).

Розглянемо результат роботи алгоритму на прикладі одновимірного рівняння Річардса-Клюта зі стоком.

Приклад 2.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K(h) \frac{\partial h}{\partial z} \right) + \frac{\partial K}{\partial z} - s(t), \quad (9)$$

$$(z, t) \in [0, 40] \times [0, +\infty),$$

де

$$s(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 1000, \\ 0.02\delta(z - 24), & t > 1000, \end{cases} \quad (10)$$

з додатковими умовами (5)-(6) та значеннями параметрів такими самими, як у Пр. 1.

До моменту часу $t = 1000$, зона повного насичення розширювалася вниз по координаті z , після чого сток рідини відкрився у ненасиченій зоні поблизу фронту повного насичення. Значення розв'язку θ_i^{j+1} у вузлах з ω_b визначається згідно з лінійною системою і на наступному кроці стає менше за θ_{max} . На наступному кроці ці вузли належать вже ω_u . Зона повного насичення звужується ω_s , буферна зона ω_b піднімається вгору по координаті z .

Рис. 2 містить графіки наближеного розв'язку до та після моменту виникнення стоку, товщина буферної зони в даному випадку $d = 2$.

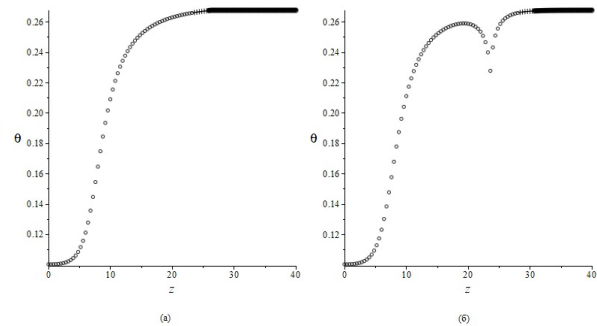


Рис. 2: Наближений розв'язок для Пр. 2 до (а) та після (б) виникнення стоку. ● — насичені вузли, ○ — ненасичені вузли, + — буферні вузли

В одновимірному випадку потрібно знати лише два вузли для відстеження меж ω_u та ω_b . Проте у двовимірному випадку межа складається з багатьох вузлів, тому для оптимізації процесу модифікації меж на наступному кроці, ми об'єднуємо вузли ω в структуру подвійно зв'язаного списку ребер (ПЗСР). Вузли ω будуть вершинами, а зв'язки між ними - ребрами у ПЗСР. Нехай L — список вузлів з ω_b , такий що будь-який вузол із $\omega_b \setminus L$ залишається зліва при проходженні списку L . Тоді ми назвемо L межею між ω_u та ω_b і крок 2 вищенаведеного алгоритму буде описаний наступним чином.

Крок 2. Якщо значення θ_i^{j+1} у вузлі $i \in \omega_u$, що є сусіднім до L , досягає величини θ_{max} , тоді L повинна бути сдвинута, щоб вона проходила через i . Ця процедура повинна повторюватися поки не буде виконуватися умова $\theta_i^{j+1} < \theta_{max}$, $i \in \omega_u$. Якщо значення θ_i^{j+1} у вузлі $i \in L$ менше за θ_{max} , тоді цей вузол повинен бути обі-

йденим зліва і нова версія межі повинна бути збережена. Ця процедура повинна повторюватися, поки значення розв'язку у всіх вузлах з L не буде дорівнювати θ_{max} .

Рис. 3 зображує процедуру виконання кроку 2 при додаванні (а) та видаленні (б) вузла з L .

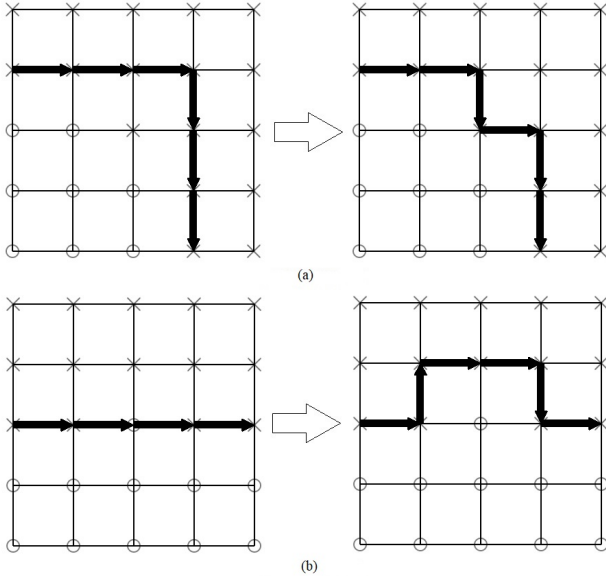


Рис. 3: Додавання (а) та видалення (б) вузла з використанням ПЗСР

Розглянемо роботу алгоритма у випадку двовимірного рівняння Річардса-Клюта зі стоком.

Приклад 3.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla (K(h) \nabla h) + \frac{\partial K}{\partial z} - s(t), \quad (11)$$

$$(z, y, t) \in [0, 40] \times [0, 40] \times [0, +\infty),$$

$$\theta(h) = \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{\alpha + |h|^\beta} + \theta_r, \quad (12)$$

$$K(h) = K_s \frac{A}{A + |h|^\gamma},$$

$$s(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 1000, \\ 0.02\delta(z - 20, y - 20), & t > 1000. \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} h(z, y, 0) &= -61.5, \\ \partial \theta(0, y, t) / \partial t &= 0, \\ h(40, y, t) &= -20.7, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\partial \theta(z, 0, t) / \partial t = \partial \theta(z, 40, t) / \partial t = 0. \quad (15)$$

Параметри ті ж самі, що і у Пр. 1. Рис. 4 мустить зображення області Ω та сіток ω_u, ω_b і

ω_s в момент часу $t = 1100$ з шириною буферної зони $d = 4$.

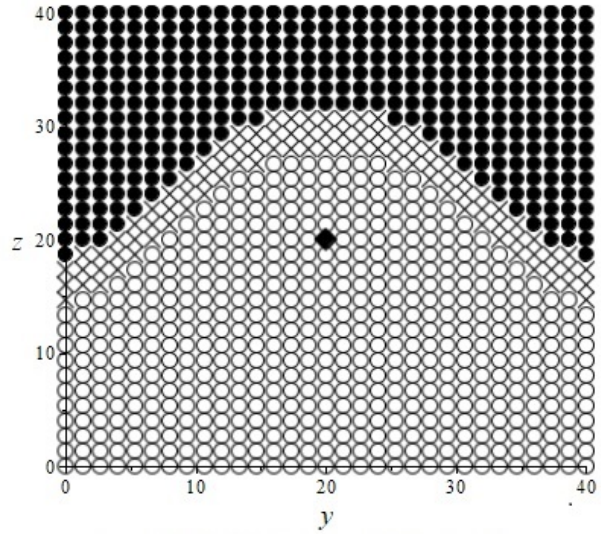


Рис. 4: Область Ω для Пр. 3 в момент часу $t = 1100$. \bullet — насичені вузли, \circ — ненасичені вузли, \times — буферні вузли, \blacklozenge — сток

4 Оцінка підвищення ефективності

У цьому розділі ми доведемо оцінку підвищення ефективності процесу розв'язання рівняння Річардса-Клюта з використанням модифікованого методу.

Чисельні методи складаються з двох процедур: ініціалізація СЛАР $Ax = f$ та її розв'язання. Кожний рядок матриці A , що відповідає вузлу i , містить кількість ненульових елементів, що дорівнює кількості вузлів, сусідніх до i . Таким чином, ініціалізація A займає час $O(n) = C_{in}n$, де $n = |\omega|$. Також для елементів матриці виконується умова $|a_{i,i}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Більшість чисельних методів забезпечують справедливості умови $a_{i,j} = a_{j,i}$. Таким чином, матриця A , що фігурує у СЛАР, є симетричною, розрідженою та має діагональну перевагу.

З цього випливає, що розв'язок x системи $Ax = f$ може бути знайдений за допомогою модифікованого для розріджених матриць методу Зейделя за час $O(mn)$, де m — число ітерацій методу Зейделя. Будемо вважати, що m — константа, що не залежить від n . Пізніше ми побачимо, що ця умова не зменшує оцінку підвищення ефективності. Тоді час, необхідний для знаходження x , дорівнює $O(n) = C_s n$. Зазвичай $C_s \gg C_{in}$.

Модифікований метод складається з трьох

частин: ініціалізація СЛАР, розв'язання СЛАР та модифікація межі L . Перші дві процедури подібні до описаних вище, проте на кожному кроці j ми маємо $x, f \in R^{|\omega_u \cup \omega_b|}$. Щоб оцінити час виконання третьої процедури, ми доведемо наступний результат.

Лема 1. Якщо Δt достатньо мале, а позитивний потік маси через джерела та межу області обмежений за часом на проміжку $[0, T]$, то час, необхідний для модифікації межі L , дорівнює $O(n)$, де n — кількість вузлів у L .

Доведення. Величини θ_i^{j+1} повністю визначаються величинами θ_i^j та Δt . До того ж, $\theta_i^{j+1} \rightarrow \theta_i^j$ при $\Delta t \rightarrow 0$. Оскільки загальна кількість вузлів n скінченна, ми можемо обрати Δt достатньо малим, щоб θ_i^{j+1} не дорівнювало θ_{max} , де $i \in \omega_u \setminus \{k \in \omega_u \cup \omega_b | \rho(k, L) < d\}$. Тоді межа L на наступному кроці по часу буде лежати у смугі $\{k \in \omega_u \cup \omega_b | \rho(k, L) < d\}$. Оскільки d константа, то кількість вузлів у цій смугі може бути оцінена як $O(n)$. Кожна ітерація кроку 2 займає час $O(1)$ і оброблює один вузол сітки. Таким чином, необхідна оцінка доведена. \square

Тепер ми порівняємо час виконання процедур пошуку наближеного розв'язку рівняння Річардса-Клюта з використанням модифікованого методу з методом, що використовує всю сітку ω .

Нехай $\Omega_u(t)$ позначатиме ненасичену зону для розв'язку рівняння Річардса-Клюта в момент часу $t \in [0, T]$ і нехай

$$F(x) = \mu \left\{ t \in [0, T] \mid \frac{|\Omega_u(t)|}{|\Omega|} \leq x \right\} / T. \quad (16)$$

F може бути представлена як функція розподілу деякої випадкової величини ξ , тобто

$$F(x) = F_\xi(x). \quad (17)$$

Тоді щільність $f_\xi(x)$ в точці $x \in [0, 1]$ дорівнює ймовірності того, що $\frac{|\Omega_u(t)|}{|\Omega|} = x$, де t — випадкове число з $[0, T]$.

Нехай для кожного $n = |\omega|$ $P_n = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ буде розподілом ймовірностей, де p_k дорівнює ймовірності того, що $|\omega_u(t)| = k$ для наближеного розв'язку рівняння на $[0, T]$. Тоді $F_{P_n} \rightarrow F_\xi$ при $n \rightarrow +\infty$.

Теорема 1. Нехай $\bar{p} = E(\xi)$ і нехай T_{mod} та T_0 будуть матсподіваннями часу, що витрачаються на обрахунок значення розв'язку рівняння на наступному кроці по часу з викори-

станням модифікованого та немодифікованого методів відповідно. Тоді

$$\frac{T_{mod}}{T_0} \rightarrow \bar{p}, n \rightarrow +\infty. \quad (18)$$

Доведення.

$T_0 = (C_{in} + C_s)n$ для всіх $n > 0$.

В одновимірному випадку межа L — це пара вузлів, тому модифікація L займає час $O(1) = o(n)$.

Для двовимірного випадку, якщо область, що оточена L , містить $n - k$ вузлів, тоді кількість вузлів на L може бути оцінена як $O(\sqrt{n - k})$. Тоді, за лемою 1, модифікація межі L займає час $O(\sqrt{n - k}) = O(\sqrt{n}) = o(n)$. Тоді крок по часу модифікованого чисельного методу займає час $(C_{in} + C_s)k + o(n)$ і ми маємо

$$\begin{aligned} \frac{T_{mod}}{T_{st}} &= \frac{\sum_{k=0}^n p_k ((C_{in} + C_s)k + o(n))}{(C_{in} + C_s)n} = \\ &= \sum_{k=1}^n p_k \left(\frac{k}{n} + \frac{o(n)}{(C_{in} + C_s)n} \right) = \\ &= EF_{P_n} + o(1) \rightarrow E(\xi) = \bar{p}. \end{aligned} \quad (19)$$

\square

Цей результат означає, що якщо відношення міри ненасиченої області до міри всієї області дорівнює \bar{p} в середньому по часу, тоді швидкість процесу обчислень зростає в середньому в $1/(1 - \bar{p})$ разів.

Зауваження 1. Якщо кількість ітерацій m чисельного методу для розв'язання СЛАР залежить від n , тоді процес розв'язання СЛАР займає час $O(n^{1+\epsilon})$ і (19) перетворюється на

$$\begin{aligned} \frac{T_{mod}}{T_{st}} &= \frac{\sum_{k=0}^n p_k (C_{in}k + C_s k^{1+\epsilon} + o(n))}{C_{in}n + C_s n^{1+\epsilon}} \approx \\ &\approx \sum_{k=1}^n p_k \frac{k^{1+\epsilon}}{n^{1+\epsilon}} \rightarrow \hat{p} < \bar{p}. \end{aligned} \quad (20)$$

Це означає, що оцінка підвищення ефективності, доведене в Теор. 1, є нижньою межею реального підвищення ефективності процесу моделювання.

Зауваження 2. На початку процедури знаходження розв'язку рівняння Річардса-Клюта з використанням модифікованого методу є ще одна процедура, яка полягає в ініціалізації структури ПЗСР на просторовій сітці. З

властивостей ПЗСР впливає, що ця процедура займає час $O(n)$, проте вона виконується лише один раз і часом її виконання можна знехтувати.

5 Порівняльний аналіз

У цьому розділі теоретична оцінка підвищення ефективності процесу знаходження наближеного розв'язку рівняння Річардса-Клюта буде підтверджена, використовуючи експериментальні дані. Табл. 1 містить значення величин T_{mod}/T_0 , а також значення абсолютних (α) та відносних (δ) похибок при використанні модифікованого методу у порівнянні з немодифікованим методом в одно-(зліва) та дво-(справа) вимірних випадках в залежності від значення n . Кількість

вузлів $|\omega|$ дорівнює n для одновимірного випадку і $|\omega| = n^2$ — у двовимірному випадку. Параметри рівнянь для одно-та двовимірних випадків ті ж самі, що і у Пр. 2 і 3 відповідно. Функція стоку s визначається наступним чином.

$$s_{1D}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 3000, \\ 0.002\delta(z - 4), & t \in [3000, 5000]. \end{cases}$$

$$s_{2D}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 3000, \\ 0.002\delta(z - 10, y - 20), & t \in [3000, 5000]. \end{cases}$$

За таких функцій стоку $\bar{p} \approx 0.5$ в обох випадках. Абсолютні та відносні похибки обчислені в момент часу $t = 5000$, $\Delta t = 10$.

Табл. 1: Похибки та оцінки підвищення ефективності при $\bar{p} \approx 0.5$

n	α_{5000}	δ_{5000}	T_{mod}/T_0	n	α_{5000}	δ_{5000}	T_{mod}/T_0
50	1.332e-1	5.018e-3	0.5374	50	7.358	7.981e-3	0.7452
100	1.057e-1	4.034e-3	0.5313	100	6.448	6.073e-3	0.6370
200	1.017e-1	3.832e-3	0.5388	200	5.492	5.173e-3	0.6118
300	9.719e-2	3.662e-3	0.5429	300	5.004	4.715e-3	0.5929
400	8.572e-2	3.229e-3	0.5401	400	4.244	3.997e-3	0.5850
500	6.914e-2	2.605e-3	0.5353	500	3.750	93.532e-3	0.5782

Дані з таблиці свідчать про те, що оцінка підвищення ефективності, отримана в Теор. 1, співпадає з експериментальними результатами. Варто відзначити, що для двовимірного випадку при невеликих значеннях n не спостерігається суттєвого підвищення ефективності у процесі знаходження наближеного розв'язку на наступному кроці. Це пояснюється тим, що за таких малих витрати часу на обробку структури ПЗСР займають відносно більше часу, ніж при великих значеннях параметру. В одновимірному випадку така ситуація не спостерігається, бо для відстежування межі насиченої зони завжди достатньо $O(1)$ часу.

6 Висновки

Дана стаття містить модифікацію для чисельних методів для розв'язання рівняння Річардса-Клюта за допомогою відстеження області повного насичення. Для двовимірного

випадку рівняння Річардса-Клюта запропонована модифікація використовує структуру подвійно зв'язаного списку ребер для відстеження межі насичення. Запропонована модифікація призводить до підвищення ефективності процесу пошуку наближеного розв'язку рівняння. Також у статті доведена теорема, що дає оцінку підвищенню ефективності. Обчислювальні експерименти підтвердили отриману теоретичну оцінку.

Подальші дослідження можуть стосуватися аналогічної модифікації чисельних методів для тривимірного рівняння Річардса-Клюта з використанням відповідних структур даних для відстеження межі насичення. Також відкритою є проблема вибору ширини буферної зони між насиченою та ненасиченою зонами. Замале значення цього параметру може призвести до приросту похибок, а завелике — до збільшення часу на модифікацію межі, що впливає на ефективність всього модифікованого методу.

Список використаних джерел

1. *Srivastava R., Jim Yeh T.-C.* Analytical Solutions for One-Dimensional, Transient Infiltration Toward the Water Table in Homogeneous and Layered Soil / R. Srivastava, T.-C. Jim Yeh // *Water Resources Research*. — 1991. — V. 27(5). P. 753–762. <https://doi.org/10.1029/90WR02772>
2. *Broadbridge P., Daly E., Goard J.* Exact Solutions of the Richards Equation With Nonlinear Plant-Root Extraction / P. Broadbridge, E. Daly, J. Goard // *Water Resources Research*. — 2017. — V. 53. — P. 9679–9691. <https://doi.org/10.1002/2017WR021097>
3. *De Luca D.L., Cepeda J.M.* Procedure to Obtain Analytical Solutions of One-Dimensional Richards' Equation for Infiltration in Two-Layered Soils / D.L. De Luca, J.M. Cepeda // *Journal of Hydrologic Engineering*. — 2016. — V. 21(7). [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)HE.1943-5584.0001356](https://doi.org/10.1061/(ASCE)HE.1943-5584.0001356)
4. *Alt H. W., Luckhaus S.* Quasilinear elliptic-parabolic differential equations / H.W. Alt, S. Luckhaus // *Math. Z.* — 1983. — V. 183(1). — P. 311–341. <https://doi.org/10.1007/BF01176474>
5. *Bertsch M., Hulshof J.* Regularity Results for an Elliptic-Parabolic Free Boundary Problem / M. Bertsch, J. Husholf // *Transactions of the American Mathematical Society*. — 1986. — V. 297(1). — P. 337–350. <https://doi.org/10.2307/2000472>
6. *Solin P., Kuraz M.* Solving the nonstationary Richards equation with adaptive hp-FEM / P. Solin, M. Kuraz // *Advances in Water Resources*. — 2011. — V. 34(9). — P. 1062–1081. <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2011.04.020>
7. *Колесников В.А.* Аналіз побудови чисельних методів для розв'язання рівняння Річардса-Клюта / В.А. Колесников // *Ж. Обч. Пр. Мат.* — 2023. — №1. — С. 28–38. <https://doi.org/10.17721/2706-9699.2023.1.03>
8. *Celia M., Bouloutas E., Zarba R.* A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation / M. Celia, E. Bouloutas, R. Zarba // *Water Resources Research*. — 1990. — V. 26(1). — P. 1483–1496. https://doi.org/10.1007/11823285_121
9. *Farthing M.W., Ogden F.L.* Numerical Solution of Richards' Equation: A Review of Advances and Challenges / M.W. Farthing, F.L. Ogden // *Soil Science Society of America Journal*. — 2017. — V. 81(6). — P. 1257–1269. <https://doi.org/10.2136/sssaj2017.02.0058>
10. *Zha Y., Yang J., Zeng J., Tso C.-H. M., Zeng W., Shi L.* Review of numerical solution of Richardson-Richards equation for variably saturated flow in soils / Y. Zha, J. Yang, J. Zeng, C.-H. M. Tso, W. Zeng, L. Shi // *WIREs Water*. — 2019. — V. 6(5). <https://doi.org/10.1002/wat2.1364>
11. *Degtyarev S. P.* Elliptic-parabolic equation and the corresponding free boundary problem I: Elliptic problem with a parameter / S.P. Degtyarev // *Ukr. Math. Vystnyk*. — 2014. — V. 11(1). — P. 15–48.
12. *Degtyarev S. P.* Elliptic-parabolic equation and the corresponding free boundary problem II: smooth solution / S.P. Degtyarev // *Ukr. Math. Vystnyk*. — 2014. — V. 11(1). — P. 447–479.

References

1. SRIVASTAVA, R., JIM YEH, T.-C. (1991) Analytical Solutions for One-Dimensional, Transient Infiltration Toward the Water Table in Homogeneous and Layered Soil. *Water Resources Research*. 27 (5). p.753–762. <https://doi.org/10.1029/90WR02772>
2. BROADBRIDGE, P., DALY, E., GOARD, J. (2017) Exact Solutions of the Richards Equation With Nonlinear Plant-Root Extraction. *Water Resources Research*. 53. p.9679–9691. <https://doi.org/10.1002/2017WR021097>
3. De LUCA, D.L., CEPEDA, J.M. (2016) Procedure to Obtain Analytical Solutions of One-Dimensional Richards' Equation for Infiltration in Two-Layered Soils. *Journal of Hydrologic Engineering*. 21

- (7). [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)HE.1943-5584.0001356](https://doi.org/10.1061/(ASCE)HE.1943-5584.0001356)
4. ALT, H. W., LUCKHAUS, S. (1983) Quasilinear elliptic-parabolic differential equations. *Math. Z.* 183 (1). p.311–341. <https://doi.org/10.1007/BF01176474>
5. BERTSCH, M., HULSHOF, J. (1986) Regularity Results for an Elliptic-Parabolic Free Boundary Problem. *Transactions of the American Mathematical Society.* 297 (1). p.337–350. <https://doi.org/10.2307/2000472>
6. SOLIN, P., KURAZ, M. (2011) Solving the nonstationary Richards equation with adaptive hp-FEM. *Advances in Water Resources.* 34 (9). p.1062–1081. <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2011.04.020>
7. KOLESNYKOV, V.A. (2023) Analysis of the construction of numerical methods for solving the Richards-Klute equation. *J. Num. Appl. Math.* 1. p.28–38. <https://doi.org/10.17721/2706-9699.2023.1.03>
8. CELIA, M., BOULOUTAS, E., ZABRA, R. (1990) A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation. *Water Resources Research.* 26 (1). p.1483–1496. https://doi.org/10.1007/11823285_121
9. FARTHING, M.W., OGDEN, F.L. (2017) Numerical Solution of Richards' Equation: A Review of Advances and Challenges. *Soil Science Society of America Journal.* 81 (6). p.1257–1269. <https://doi.org/10.2136/sssaj2017.02.0058>
10. ZHA, Y., YANG, J., ZENG, J., TSO, C.-H. M., ZENG, W., SHI, L. (2019) Review of numerical solution of Richardson-Richards equation for variably saturated flow in soils. *WIREs Water.* 6 (5). <https://doi.org/10.1002/wat2.1364>
11. DEGTYAREV, S. P. (2014) Elliptic-parabolic equation and the corresponding free boundary problem I: Elliptic problem with a parameter. *Ukr. Math. Vystnyk.* 11 (1). p.15–48.
12. DEGTYAREV, S. P. (2014) Elliptic-parabolic equation and the corresponding free boundary problem II: smooth solution. *Ukr. Math. Vystnyk.* 11 (1). p.447–479.

Надійшла до редколегії 27.10.2023