

УДК 624.074.04

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.26>

Трач В. М.¹, д.т.н., проф.
Подворний А. В.¹, к.т.н., доц.
Жукова Н.Б.², к.ф.-м.н., с.н.с.

V.M. Trach¹, Dr. Sci., Professor
A.V. Podvorni¹, Ph.D., Associate Professor
N.B. Zhukova², Ph.D., Senior Research Officer

**Стійкість нетонких анізотропних
циліндричних оболонок в просторовій
постановці під розподіленим боковим
тиском**

**Stability of non-thin anisotropic cylindrical
shells in spatial position under distributed
lateral pressure**

¹Національний університет водного
господарства та природокористування, 33000,
м. Рівне, вул. Соборна 11,
e-mail: trach-vm@ukr.net

²Інститут механіки НАН України, 03057,
м. Київ, вул. Нестерова, 3,
e-mail: zukowa_n@ukr.net

¹National University of Water and Environmental
Engineering, 33000, Rivne, Soborna str., 11,
e-mail: trach-vm@ukr.net

²Institute of Mechanics of National Academy of
Sciences of Ukraine, 03057, Kiev, Nesterov str., 3,
e-mail: zukowa_n@ukr.net

Запропоновано у просторовій постановці підхід до розв'язку задачі стійкості нетонких циліндричних анізотропних шаруватих оболонок під розподіленим боковим тиском. Спираючись на модифікований варіаційний принцип Ху-Васідзу, отримано тривимірну систему однорідних диференціальних рівнянь стійкості для розрахунку оболонок, анізотропія яких характеризується матеріалом з однією площиною пружної симетрії. Розв'язок тривимірної системи проведено при використанні методу Бубнова-Гальоркіна та чисельного методу дискретної ортогоналізації.

Досліджено вплив збільшення кількості перехресно укладених шарів однакової товщини на стійкість циліндричної анізотропної оболонки. Результати розв'язку представлено графіками та приведено їх аналіз.

Ключові слова: стійкість, тривимірний підхід, анізотропні шаруваті циліндричні оболонки.

A three-dimensional approach to solving the problem of stability of non-thin cylindrical anisotropic layered shells under distributed lateral pressure is proposed. Based on the modified Hu-Washizu variational principle, a three-dimensional system of homogeneous differential stability equations is obtained for the calculation of shells, the anisotropy of which is characterized by a material with one plane of elastic symmetry. The solution of the three-dimensional system was carried out using the Bubnov-Galerkin methods and numerical discrete orthogonalization.

The influence of an increase in the number of cross-laid layers of the same thickness on the stability of an anisotropic cylindrical shell is studied. The results of the solution are presented by graphs and their analysis is given.

Key Words: stability, three-dimensional approach, anisotropic layered cylindrical shells.

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я. О.

Вступ

Дослідження стійкості анізотропних оболонок конструкцій є актуальною проблемою. Однак, вирішенню цього питання присвячена незначна кількість наукових досліджень. Розв'язання задач стійкості таких конструкцій, базується на співвідношеннях двовимірних класичної або уточненої теорій [1, 2]. Їх використання

приводить до того, що низька зсувна жорсткість, обтиснення матеріалу оболонки за товщиною, а також його неоднорідність, за цим напрямком, або не враховуються взагалі, або в неповному обсязі. З точки зору врахування цих особливостей напруженого стану тривимірної теорія є більш придатною, тому що позбавлена необхідності використання гіпотез, наприклад, двовимірних теорій.

Класичні роботи [3, 4] присвячені дослідженню стійкості оболонкових конструкцій у просторовій постановці з ізотропного або ортотропного матеріалу. Загально відомо, що використовувані в оболонках матеріали можуть створюватись шляхом укладання під деякими кутами, наприклад, волокнистих композитів на оправку (рис. 1). Внаслідок чого, має місце створення матеріалу, який прийнято вважати матеріалом з однією площиною пружної симетрії.

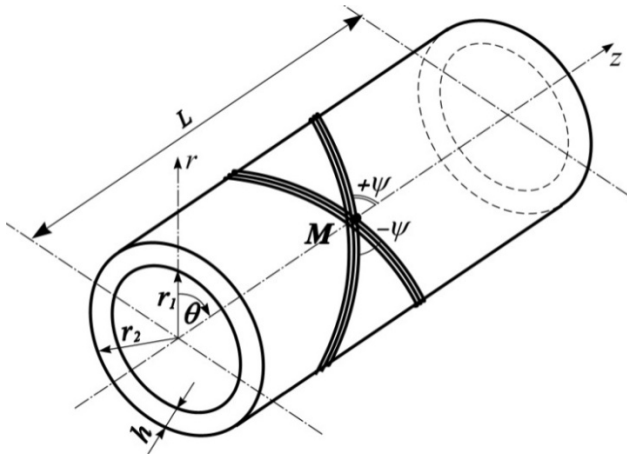


Рис. 1. Циліндрична анізотропна оболонка.

У представлений роботі, спираючись на модифікацію узагальненого варіаційного принципу Ху-Васідзу [5], подано підхід до виведення системи однорідних диференціальних рівнянь стійкості в рамках тривимірної теорії пружності анізотропного тіла. Процес розв'язку поставленої задачі проводиться шляхом зменшення розмірності системи при використанні аналітичного методу Бубнова-Гальоркіна та розв'язку отриманої одновимірної системи чисельним методом дискретної ортогоналізації.

Методика досліджень

Необхідні рівняння стійкості, співвідношення пружності та граничні умови відповідно до варіаційного принципу Ху-Васідзу [6, 7] можна отримати з умови стаціонарності функціоналу Π_1 , що визначається з інтегралу:

$$\Pi_1 = \left\{ \iiint_V \left[W(e_{ij}) - T(u_i) + \Phi(u_i) - \sigma_{ij} \left[e_{ij} - \frac{1}{2} \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times (u_{i,j} + u_{j,i}) \right] \right] dV + \iint_{S_1} \Psi(u_i) dS - \iint_{S_2} p_i (u_i - \bar{u}_i) \right\} dS. \quad (1)$$

В (1) варіюються без використання додаткових умов деформації e_{ij} , напруження σ_{ii} та переміщення u_i , напруження p_i на поверхні S_2 викликані переміщеннями \bar{u}_i . Також у цьому функціоналі $W(e_{ij})$ — потенціальна енергія деформації, $T(u_i)$ — кінетична енергія, $\Phi(u_i)$, $\Psi(u_i)$ — потенціали об'ємних і поверхневих навантажень, крапка з комою перед параметрами i, j позначає коваріантну похідну за координатою з відповідним індексом $i, j = 1, 2, 3$.

Використовуючи підхід, представлений в [6, 7], з умови стаціонарності варіації функціоналу (1), отримаємо тривимірну систему з шести однорідних диференціальних рівнянь стійкості анізотропних циліндричних оболонок в частинних похідних з відповідними граничними умовами на поверхнях та торцях. Скориставшись процедурою методу Бубнова-Гальоркіна [6] для зменшення розмірності отриманих рівнянь, здобудемо нескінчену одновимірну систему звичайних однорідних диференціальних рівнянь стійкості циліндричної оболонки в нормальній формі Коші

$$\frac{d\bar{y}}{dr} = T(r, \lambda) \bar{y}, \quad T(r, \lambda) = t_{i,j}(r, \lambda), \\ i = \overline{1, \infty}, j = \overline{1, \infty}. \quad (2)$$

В (2) $\bar{y} = \{ y_{1,pk}; y_{2,pk}; y_{3,pk}; y_{4,pk}; y_{5,pk}; y_{6,pk}; \\ y'_{1,mk}; y'_{2,mk}; y'_{3,mk}; y'_{4,mk}; y'_{5,mk}; y'_{6,mk} \}$ — розв'язуюча вектор-функція, $T(r, \lambda)$ — матриця із змінними коефіцієнтами, що залежить від аргументу r та параметра навантаження λ .

Система рівнянь стійкості (2) при умовах на поверхнях оболонки

при $r = r_1$:

$$\sigma_{rr}^0(r_1, z, \theta) = 0; \\ \tau_{rz}^0(r_1, z, \theta) = 0; \quad \tau_{r\theta}^0(r_1, z, \theta) = 0,$$

при $r = r_2$:

$$\sigma_{rr}^n(r_2, z, \theta) = 0; \\ \tau_{rz}^n(r_2, z, \theta) = 0; \quad \tau_{r\theta}^n(r_2, z, \theta) = 0$$

та на торцях

$$\sigma_{zz} = u_r = u_\theta = 0$$

розв'язується за використанням адаптованого авторами до реалізації задачі стійкості чисель-

ного методу дискретної ортогоналізації [1, 8]. Алгоритм розв'язку реалізовано у вигляді пакетів прикладних програм для ПК.

Реалізація запропонованого підходу

В якості реалізації запропонованого підходу була розглянута задача дослідження стійкості циліндричної оболонки сталого товщини, утвореної перехресним укладанням однакових за товщиною шарів під кутом повороту на $\pm\psi^\circ$ головних напрямів пружності матеріалу до твірної z . Кількість шарів змінюється від одного до восьми. Оболонка на зовнішній поверхні навантажена розподіленим зовнішнім тиском:

$$q = -q_0 \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right).$$

Геометричні характеристики циліндричної оболонки: радіус внутрішньої поверхні $r_1=0,5925\text{м}$; зовнішньої — $r_2=0,6075\text{м}$; довжина уздовж твірної $L=1,2\text{м}$. Механічні характеристики однонапрявленого волокнистого композиту боропластику: $E_{zz}=280E_0$; $E_{\theta\theta}=E_{rr}=31E_0$; $G_{z\theta}=G_{r\theta}=10,5E_0$; $G_{rz}=21,2E_0$; $\nu_{\theta z}=0,25$; $\nu_{z\theta}=0,0277$; $E_0=1000\text{МПа}$.

На рис. 2 представлено залежність критичних величин бокового тиску q^{cr} від кута ψ . Позначення кривих відповідають кількості анізотропних шарів, а графік 1' — це результати розрахунку оболонкової конструкції з ортотропного матеріалу [6].

Аналіз представлених результатів вказує на те, що найменші значення критичного зовнішнього тиску мають місце для двошарового пакету (крива 2) армованого під кутами $\pm\psi$ до твірної. Порівняно із одношаровою оболонкою (крива 1) критичні навантаження є меншими, максимальна розбіжність складає 32% при $\psi = 60^\circ$. Результати отримані для тришарової оболонки (крива 3) практично не відрізняються від знайдених для одношарової. Розбіжність складає менше 1,5%. Критичні навантаження для чотиришарової оболонки (крива 4) менші на 6% у порівнянні з одношаровою. Подальше збільшення кількості перехресно-армованих шарів до п'яти (крива 5) та восьми (крива 8) веде до наближення отриманих критичних величин зовнішнього бокового тиску до значень визначених для ортотропної оболонки (крива 1').

Отримані результати є підтвердженням описаного в [1] факту, що для тонкостінних анізотропних циліндричних оболонок збільшення кількості перехресно укладених шарів пакету до семи — восьми та більше, призводить до можливості розрахунку циліндричних оболонок на стійкість за ортотропним підходом.

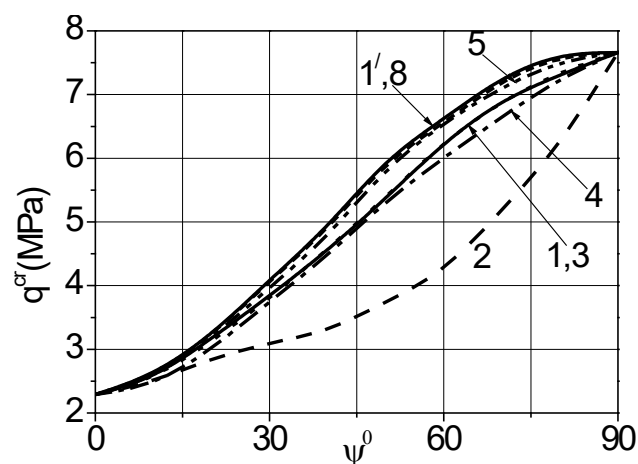


Рис. 2. Графік залежності критичних значень бокового тиску від кута повороту головних напрямів пружності матеріалу.

Висновки

У роботі, за використанням модифікованого варіаційного принципу Ху-Васідзу, отримана тривимірна система однорідних диференціальних рівнянь в частинних похідних, що описують стійкість анізотропних шаруватих циліндричних оболонок. Для приведення її до одновимірної використано процедуру методу Бубнова-Гальоркіна. Розв'язок системи звичайних однорідних диференціальних рівнянь стійкості нормальної форми Коші реалізується, в радіальному напрямку, при використанні чисельного методу дискретної ортогоналізації.

Розглянута стійкість шаруватої композитної анізотропної циліндричної оболонки сталого товщини, що перехресно армована волокнистим боропластиком. Отримані результати порівнювались із такими, що здобуті при використанні ортотропного підходу до розрахунку циліндричної оболонки.

Список використаних джерел

1. *Баженов В.А.* Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок: Монографія / В.А. Баженов, М.П. Семенюк, В.М. Трач. – К.: Каравела, 2010. – 352 с.
2. *Трач В.М.* Деформування та стійкість нетонких анізотропних оболонок: Монографія / В.М. Трач, А.В. Подворний, М.М. Хоружий. – К.: Каравела, 2019. – 274 с.
3. *Гузь А.Н.* Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел / А.Н. Гузь. – Киев: Вища школа, 1986. – 511 с.
4. *Гузь А.Н.* Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Т.4. Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел / А.Н. Гузь, И.Ю. Бабич. – Киев: Наук. думка, 1985. – 280 с.
5. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
6. *Семенюк М.П.* Напружено-деформований стан товстостінної анізотропної циліндричної оболонки / М.П. Семенюк, В.М. Трач, А.В. Подворний // Прикл. механіка. – 2023. – 59, №1. – С. 91-102.
7. *Трач В.М.* Просторові рівняння стійкості анізотропних товстих циліндричних оболонок під дією осьового тиску / В.М. Трач, А.В. Подворний // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: Збірник наукових праць. – НУВГП. – Рівне – 2022. – Випуск 41. – С.197-212.
8. *Григоренко Я. М.* Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей: Монография / Я. М. Григоренко, Г. Г. Влайков, А. Я. Григоренко. – К.: Академперіодика, 2006. – 472 с.

References

1. BAZENOV, V., SEMENUK, M. and TRACH, V. (2010) *Neliniyne deformuvannya, stiykist' i zakritichna povedinka anizotropnykh obolonok*. Kyiv: Karavela.
2. TRACH, V., PODVORNYI, A. and KHORUZHYYI, M. (2019) *Deformuvannya ta stiykist' netonkykh anizotropnykh obolonok*. Kyiv: Karavela.
3. GUZ, A. (1986) *Osnovy trekhmernoї teorii ustoychivosti deformiruemyykh tel*. Kiyev: Vischa shkola.
4. GUZ, A. and BABICH, I. (1985) *Prostranstvennyye zadachi teorii uprugosti i plastichnosti. T.4. Trehmernaya teoriya ustoychivosti deformiruemyykh tel*. Kiyev: Naukova dumka.
5. VASIDZU, K. (1987) *Variatsionnyye metody v teorii uprugosti i plastichnosti*. M.: Mir.
6. SEMENYUK, M., TRACH, V. & PODVORNYI, A. (2023) Napruzheno-deformovanyy stan товстостінної анізотропної циліндричної оболонки. *Prykladna mekhanika*. 59 (1). p. 91-102.
7. TRACH, V. & PODVORNYI, A. (2022) Prostorovi rivnyannya stiykosti anizotropnykh товстих циліндричних оболонок під дією осьового тиску. *Resursoekonomni materialy, konstruktsiyi, budivli ta sporudy*. 41. p. 197-212.
8. GRIGORENKO, YA., VLAYKOV, G. and GRIGORENKO, A. (2006) *Chislenno-analiticheskoe reshenie zadach mekhaniki obolochek na osnove razlichnih modeley*. Kyiv: Akademperiodika.

Надійшла до редколегії 08.06.23