

УДК 539.3

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.22>

Маслов Б.П., д.ф.-м.н., с.н.с.

Maslov B.P., Dr. Sci., Senior Research Officer

Побудова критерію довготривалого руйнування втоми для тонкостінних шаруватих оболонок

Construction of long-term fatigue failure criteria for thin-walled laminated shells

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН
України, 03057, м. Київ-57, вул. Нестерова, 3,
e-mail: maslov@inmech.kiev.ua

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics NAS
Ukraine, 03057, Kyiv, 3 Nesterov Str.,
e-mail: maslov@inmech.kiev.ua

Побудовано модель та критерій довготривалого руйнування втоми для тонкостінних шаруватих оболонок із врахуванням впливу виду напруженого стану. Розглянуто задачі розрахунку числа циклів до руйнування при комбінованому навантаженні. Розв'язки будуються на основі концепції еквівалентних напружень. Сформульовано в рамках нелінійної теорії другого порядку задачу визначення локальних напружень у композитах випадкової структури. Отримано розв'язок стохастичної крайової задачі про визначення концентрації напружень в односпрямованому композиті з металевою матрицею (ММК). Для отримання повної системи рівнянь другого порядку використовується метод послідовних наближень. Визначено параметри концентрації напружень на границі компонентів. Наведені приклади показують важливість впливу нелінійних властивостей на перерозподіл напружень біля волокон. Показано можливість прогнозування довготривалої міцності матеріалу, необхідною інформацією про матеріал для формулювання критеріїв руйнування є криві S-N для окремих компонентів комбінованих напружень.

Ключові слова: руйнування втоми, критерій, волокнистий композит, чисельні методи.

A model and criterion of long-term fatigue failure for thin-walled layered shells is built, taking into account the influence of the type of stress state. The problem of calculating the number of cycles to failure under combined loading is considered. Solutions are built on the basis of the concept of equivalent stresses. The problem of determining local stresses in composites of random structure is formulated within the framework of the second-order nonlinear theory. The solution of the stochastic boundary value problem on determining the stress concentration in a unidirectional composite with a metal matrix (MMC) was obtained. To build a complete system of equations of the second order, the method of successive approximations is used. The parameters of the stress concentration at the boundary of the components are determined. The given examples show the importance of the influence of nonlinear properties on the redistribution of stresses near the fibers. The possibility of predicting the long-term strength of the material is shown. The necessary information about the material for the formulation of failure criteria is the S-N curves for individual components of the combined stresses.

Key Words: fatigue failure, criterion, fibrous composite, numerical methods.

Статтю представив член-кореспондент НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Постановка задачі

Однією з фундаментальних проблем прикладної механіки є моделювання процесу довготривалого руйнування внаслідок втоми шаруватих композитних матеріалів при комбінованому циклічному навантаженні [1, 2]. Параметри опору втоми можна визначити при циклічному навантаженні напруженнями зі

сталою амплітудою згідно з існуючими $S - N$ кривими для відповідного напруженого стану [3, 4], який в кожному шарі є локально тривимірним. Це призводить до необхідності формулювання критеріїв руйнування під дією комбінованого навантаження. Перспективним напрямком є розв'язок задач розрахунку довговічності тонкостінних циліндричних оболонок на основі

концепції еквівалентних напружень із використанням сучасних комп'ютерних технологій [3, 5] та класичних критеріїв руйнування [2, 6]. Міцність і довговічність композитів залежить від величини середніх σ_m або максимальних σ_{max} за цикл навантаження напружень як в матриці, так і у волокнах, кількості циклів N та ін. Основоположне практичне значення має прогнозування наведених макроскопічних лінійних та нелінійних пружних характеристик [3, 7, 8]. Розглянемо нелінійно пружний трансверсально ізотропний композитний матеріал з випадковою структурою в площині перпендикулярній напрямку \mathbf{n} армування. Отже, трансверсально ізотропне тіло характеризуємо одиничним вектором \mathbf{n} у напрямку орієнтації волокон, перпендикулярним до площини ізоотропії. Застосуємо надалі також тензор $\mathbf{a} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ та структурний тензор поперечної ізоотропії $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{1} - \mathbf{a}$. Для того, щоб відділити напруження $\boldsymbol{\sigma}$ від тих, що виникають в поперечній площині ізоотропії, використаємо адитивний розклад [4]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_T + \boldsymbol{\sigma}_L, \quad (1)$$

де $\boldsymbol{\sigma}_T$ і $\boldsymbol{\sigma}_L$ являють собою поперечну та поздовжню компоненту, відповідно. Запишемо поперечну складову $\boldsymbol{\sigma}_T$ тензора напружень $\boldsymbol{\sigma}$ за допомогою тензора проектора $\boldsymbol{\theta}$ як

$$\boldsymbol{\sigma}_T = \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{a} - \mathbf{a} \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{a} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{a}. \quad (2)$$

Тоді поздовжня складова $\boldsymbol{\sigma}_L$ впливає з рівняння (1). Можна перекоонатись, що компонента $\boldsymbol{\sigma}_T$ знаходиться в стані плоского напруженого стану.

Розглянемо деякі загальні характеристики феноменологічних критеріїв руйнування при комбінованих циклічних навантаженнях [2, 6]. Вважається, що циклічне напруження із середнім $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ є статистично однорідним. Середні значення визначаються для репрезентативних об'ємних елементів (РОЕ), а статистична однорідність означає [3, 9], що середні значення є незалежними від розташування РОЕ. Далі передбачається, що всі напруження є циклічними на тій же частоті, що максимальна і мінімальна амплітуди, $\boldsymbol{\sigma}_{max}$ і $\boldsymbol{\sigma}_{min}$ відповідно кожної компоненти напружень залишаються постійними під час навантаження. Знакозмінні напруження $\boldsymbol{\sigma}_a$ визначаються як

$$\boldsymbol{\sigma}_a = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_{max} - \boldsymbol{\sigma}_{min}). \quad (3)$$

Якщо цикли напружень є синусоїдальними, то циклічний стан напружень є таким, що однозначно визначається величинами (3) окремих компонентів. Таким чином, передбачається, що для будь-якого зразка матеріалу число циклів до руйнування n_R визначається амплітудою $\boldsymbol{\sigma}_a$ та середніми напруженнями $\boldsymbol{\sigma}_m$. Отже, критерій руйнування виражається у вигляді

$$F(\boldsymbol{\sigma}_m, \boldsymbol{\sigma}_a, N) < 1. \quad (4)$$

Двома практично важливими особливими випадками є нульова амплітуда напружень $\boldsymbol{\sigma}_a = 0$ та відсутність середніх напружень $\boldsymbol{\sigma}_m = 0$. У першому випадку отримуємо статичний критерій руйнування.

Рівень асиметрії циклу напружень задається коефіцієнтом асиметрії R та коефіцієнтом амплітуд A , так що

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = \frac{1-A}{1+A}; \quad A = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{1-R}{1+R}, \quad (5)$$

причому за умов симетричного $\boldsymbol{\sigma}_m = 0$ циклу навантаження $R = -1$ та $A = \infty$.

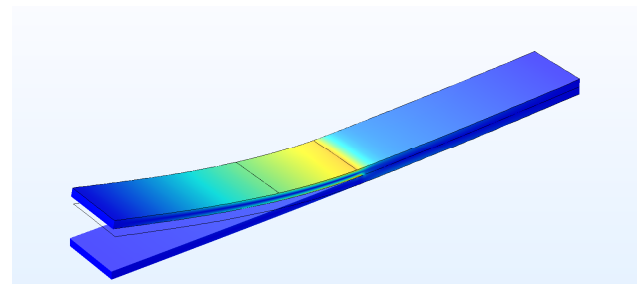


Рис 1. Розрахункова схема [5] процесу деламінування елемента оболонки.

З метою встановлення критеріїв руйнування від комбінованих циклічних напружень розглянемо окремо різні втомні режими для односпрямованих волокнистих композитів. Критерії мають бути функціями трансверсально-ізотропних інваріантів [4] циклічного тензора напружень і, отже, можливо розвинути метод, аналогічний сформульованому в [1]. Використаємо структуру критерію миттєвого руйнування для волокнистого композиту. Вважаємо, що вісь x_1 спрямована у напрямку

волокна і застосуємо систему інваріантів трансверсально ізотропної пружності

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{11}, \quad I_2 = \sigma_{22} + \sigma_{33}, \\ I_3 &= \sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}, \quad I_4 = \sigma_{12}^2 + \sigma_{31}^2, \\ I_4 &= 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} - \sigma_{22}\sigma_{31}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Макроскопічні напруження $\bar{\sigma}$ та деформації $\bar{\epsilon}$ трансверсально ізотропного композиту пов'язані співвідношеннями [1, 8]

$$\bar{\sigma} = \tilde{C}(E_T, E_L, G_T, G_L, \nu_T, \nu_L)\bar{\epsilon} \quad (7)$$

де \tilde{C} — ефективний тензор пружності, та використано характеристики: E_T, E_L — поперечний та поздовжній модулі Юнга, G_T, G_L — поперечний та поздовжній модулі зсуву, ν_T, ν_L — поперечний та поздовжній коефіцієнти Пуассона, відповідно.

Чисельний алгоритм

Матрицю композиту вважаємо ізотропною та такою, що деформується нелінійно, виявляючи ефект зміцнення [3]. В анізотропному композитному середовищі еквівалентні напруження σ_{eq} виразимо [8, 9] через систему I_k відповідних інваріантів (7)

$$\sigma_{eq} = \left(\frac{3}{2} \sigma \cdot \mathbf{I}_d \cdot \sigma \right)^{\frac{1}{2}} = \sigma_{eq}(I_k).$$

Використаємо надалі критерій типу Хілла-Хашіна для визначення руйнування матриці або волокон [1]. Наприклад, щодо матриці запишемо його у вигляді

$$\frac{(\sigma_{22} + \sigma_{33})^2}{\sigma_T^2} + \frac{\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}}{\tau_T^2} + \frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{\tau_A^2} \gg 1, \quad (8)$$

де $\sigma_T = \sigma_T(R, n)$, $\tau_A = \tau_A(R, n)$, $\tau_T = \tau_T(R, n)$ є напруження руйнування для симетричного циклу $R = -1$. Якщо задано $S-N$ криві для будь-якого одновимірного стану, то (8) надалі розглядається як рівняння з невідомим числом циклів до руйнування N . Кожне з такого типу рівнянь розв'язується чисельно [3, 5] і руйнування визначається критерієм, до якого призводить менший N . Результат розрахунку еквівалентних напружень у шарах ламінату

представлений на рис. 2. Ця процедура визначає довговічність матеріалу та умову руйнування.

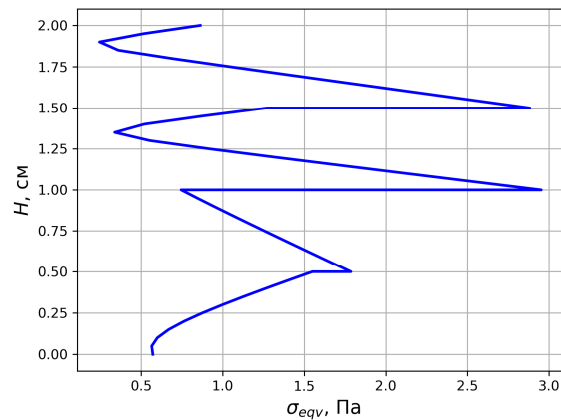


Рис 2. Зміна еквівалентного напруження σ_{eq} в шарах по товщині H оболонки.

Суттєвою проблемою у визначенні критеріїв руйнування [6] є експериментальне визначення напружень руйнування σ_T і τ_A . Найпростішим є σ_A , який отримується з кривої $S-N$ для напруження в напрямку волокна, з використанням плоских однонаправлених зразків [1].

Висновки

Розповсюджена структура типу композитний ламінат містить однонаправлено армовані шари, що знаходяться у комбінованому напруженому стані. Повний тривимірний стан напружень реалізується переважно біля отворів та на краях ламінату. Ці випадки вимагають аналізу сучасними чисельними методами. Перспективною є задача [8, 9] побудови критеріїв довготривалого руйнування внаслідок повзучості за умов складного напруженого стану, формулювання системи базових експериментів для визначення матеріальних констант та чисельно-експериментальна апробація критеріїв на задачах розрахунку часу до руйнування тонкостінних композитних елементів конструкцій.

Список використаних джерел

1. Hashin Z. Fatigue Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites. / Z. Hashin // Transactions of the ASME – 1981. Vol. 48, No. 12. – P. 846–852.
2. Christensen R.M. The Theory of Materials Failure / R.M. Christensen. – Oxford University Press, 2013, – 292 p.
3. Besson J. Non-Linear Mechanics of Materials / J. Besson, G. Cailletaud, J.L. Chaboche, S. Forest – New York: Springer, 2010. – 450 p.
4. Asaro R.J. Mechanics of Solids and Materials / R.J. Asaro, V.A. Lubarda – Cambridge UP, 2006. – 880 p.
5. Zienkiewicz O.C. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals Sixth edition / O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor and J.Z. Zhu – Burlington: Elsevier, 2005. – 802 p.
6. Голуб В.П. Классические критерии разрушения в решении задач усталости при двухосном комбинированном нагружении / В.П. Голуб // Вісник НТУУ “КПІ”, Машинобудування. – 2014. – No. 72. – С. 109–117.
7. Маслов Б.П. Спадкова повзучість ізотропних композитів випадкової структури при складному напруженому стані / Б.П. Маслов // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка, серія фізико-математичні науки, 2021, No. 3. – С. 77–80.
8. Maslov B. Stress concentration in nonlinear viscoelastic composites / B. Maslov // Mechanics and Advanced Technologies – 2017. – Vol. 79, No. 1. – P. 5–10.
9. Maslov B.P. Nonlinear Hereditary Creep of Isotropic Composites of Random Structure / B.P. Maslov // International Applied Mechanics – 2022 – Vol. 58, No. 1 – P. 75–90

References

1. HASHIN, Z. (1981) Fatigue Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites. *Transactions of the ASME*, **48** (12), pp. 846–852.
2. CHRISTENSEN, R.M. (2013) *The Theory of Materials Failure*. Oxford University Press.
3. BESSON, J. (2010) *Non-Linear Mechanics of Materials*. New York: Springer.
4. ASARO, R.J. and LUBARDA, V.A. (2006) *Mechanics of Solids and Materials*. Cambridge: University Press.
5. ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L. and ZHU, J.Z. (2005) *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals Sixth edition*. Burlington: Elsevier.
6. HOLUB, V.P. (2014) Klassycheskye krytery razrusheniya v reshenyy zadach ustalosti pry dvukhosnom kombynyrovannom nahruzhenny. *Visnyk NTUU “KPI”, Mashynobuduvannia*. 72. p. 109–117.
7. MASLOV, B.P. (2021) Spadkova povzuchist izotropnykh kompozytiv vypadkovoї struktury pry skladnomu napruzenomu stani. *Visnyk Kyivskoho natsionalnoho universytetu im. Tarasa Shevchenka. Seriya fizyko-matematychni nauky*. 3. – p. 77–80.
8. MASLOV, B. (2017) Stress concentration in nonlinear viscoelastic composites. *Mechanics and Advanced Technologies*. 79(1). p. 5–10.
9. MASLOV, B.P. (2022) Nonlinear Hereditary Creep of Isotropic Composites of Random Structure. *International Applied Mechanics*. 58(1), p. 75–90.

Надійшла до редколегії 21.08.23