

УДК 539.375

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.21>

Маковійчук М. В.¹, к.ф.-м.н., доц.,
Шацький І. П.², д.ф.-м.н., проф.,

M. V. Makoviichuk¹, Cand. Phys. & Math. Sc.,
I. P. Shatskyi², Dr. Phys. & Math. Sc.,

**Аналіз граничної рівноваги зігнутої
сферичної оболонки з колінеарними
тріщинами за локальним та
інтегральним критеріями руйнування**

**Analysis of the limit equilibrium of a bent
spherical shell with collinear cracks according
to local and integral failure criteria**

Лабораторія моделювання демпфуючих систем
Інституту прикладних проблем механіки і
математики ім. Я. С. Підстригача НАН
України, 76002, м. Івано-Франківськ, вул.
Микитинецька, 3,
¹ e-mail: makoviy@ua.fm
² e-mail: ipshatsky@gmail.com

Laboratory of Modeling of Damping Systems,
Pidstryhach-Institute for Applied Problems in
Mechanics and Mathematics, NAS of Ukraine,
76002, Ivano-Frankivsk, Mykutynetska str., 3,
¹ e-mail: makoviy@ua.fm
² e-mail: ipshatsky@gmail.com

Досліджується напружений стан і гранична рівновага ізотропної сферичної оболонки, послабленої двома меридіальними колінеарними тріщинами під дією навантаження згину. Закриття тріщин внаслідок деформації згину враховано на основі моделі контакту країв тріщини вздовж лінії в одній з лицевих поверхонь оболонки. Розв'язок задачі побудовано за допомогою методу сингулярних інтегральних рівнянь та чисельного методу квадратур. Для аналізу граничного стану оболонки використано локальний та інтегральний по товщині енергетичні критерії лінійної механіки руйнування. Досліджено вплив взаємного розташування дефектів та кривизни оболонки на верхню та нижню оцінки граничного навантаження.

Ключові слова: сферична оболонка, колінеарні тріщини, закриття тріщин, згин, граничне навантаження, критерії руйнування.

The stressed-strain state and limit equilibrium of shallow spherical shell weakened by two cross-cutting meridional collinear cracks is studied in the two-dimensional formulation. The crack closure caused by bending deformation was taken into account based on the model of the crack edges contact along a line in one of the face surfaces of the shell. The boundary problem for equations of classical shell theory with interrelated conditions along the line of the cracks is formulated within the framework of such model. Singular integral equation for the unknown jump of normal rotation angle on the cracks edges has been elaborated.

Based on numerical solutions of singular integral equation the stressed-strain state and limit equilibrium of the spherical shell depending on the parameters of shell curvature and distance between cracks are investigated. Using the local and integral through-the-thickness energy failure criteria of linear mechanics of fracture, the upper and lower values of limit load were established. It was found that the upper estimate of the limit load according to the integral criterion is approximately twice the magnitude of the lower estimate according to the local criterion.

Key Words: spherical shell, collinear cracks, crack closure, bending, limit load, failure criteria.

Статтю представив член-кореспондент НАН України Жук Я.О.

Вступ. Постановка задачі

Метою даної роботи є дослідити граничну рівновагу пологої сферичної оболонки, послабленої двома меридіональними колінеарними тріщинами, здатними до закриття унаслідок згину, за

допомогою локального та інтегрального енергетичних критеріїв лінійної механіки руйнування.

Розглядається ізотропна сферична оболонка радіуса R і завтовшки $2h$ з двома наскрізними колінеарними розрізами завдовжки $2l$, які розташовані вздовж меридіана на відстані $2d$ між їхніми центрами. До країв дефектів прикладено

самозрівноважене рівномірно розподілене згинне навантаження $m = \text{const}$; решта поверхонь оболонки вільні від напружень. Дослідимо вплив розташування тріщин та контакту їх берегів унаслідок згину на напружено-деформований стан і граничну рівновагу оболонки.

Уважаючи оболонку в зоні збурення напруженого стану пологою, виберемо систему

$$\Delta\Delta\varphi - \frac{B}{R}\Delta w = 0, \Delta\Delta w + \frac{1}{DR}\Delta\varphi = 0, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus L; \quad (1)$$

$$[u_y] = h |[\theta_y]| \geq 0, M_y = -m + hN_y \text{sgn}[\theta_y], N_y \leq 0, x \in L; \quad (2)$$

$$N_x = N_{xy} = N_y = 0, M_x = M_{xy} = M_y = 0, Q_x^* = Q_y^* = 0, (x, y) \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Тут φ – функція напружень, w – прогин оболонки, $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ – оператор Лапласа; $[u_y]$ – розкриття тріщини в базовій поверхні оболонки, $[\theta_y]$ – розрив кута повороту нормалі ($\theta_y = \partial w / \partial y$); N_x, N_{xy}, N_y – мембранні зусилля, M_x, M_{xy}, M_y – моменти, Q_x^*, Q_y^* – узагальнені поперечні сили; $B = 2Eh$,

декартових координат $Oxyz$ з центром посередині правого розрізу та віссю абсцис уздовж його лінії. З урахуванням симетрії об'єкта та навантаження відносно осі абсцис такий підхід призводить до задачі теорії пологих оболонок із взаємопов'язаними крайовими умовами на розрізах [1, 2]:

$D = 2Eh^3 / (3(1 - \nu^2))$, E і ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки; $L = (-l - 2d, l - 2d) \cup (-l, l)$ – сукупність розрізів.

Для побудови розв'язку задачі (1)–(3) скористалися методом сингулярних інтегральних рівнянь. Враховуючи, що дефекти перебувають в однакових умовах, зусилля та моменти на лінії правої тріщини виразимо через похідні від функцій стрибка [3, 4]:

$$N_y(x, 0) = \frac{B}{4\pi} \int_{-l}^l \left\{ \tilde{K}_{11}(\xi, x) [u_y]'(\xi) - \tilde{K}_{13}(\xi, x) a[\theta_y]'(\xi) \right\} d\xi, \\ M_y(x, 0) = \frac{Ba}{4\pi} \int_{-l}^l \left\{ \tilde{K}_{31}(\xi, x) [u_y]'(\xi) - \tilde{K}_{33}(\xi, x) a[\theta_y]'(\xi) \right\} d\xi. \quad (4)$$

Тут

$$\tilde{K}_{ij}(\xi, x) = K_{ij}(\xi - x) + K_{ij}(\xi + x + 2d), i, j = 1, 3; \\ K_{11}(\zeta) = \frac{2}{\zeta} \left(\ker(\gamma|\zeta|) - \gamma|\zeta| \ker'(\gamma|\zeta|) - \frac{2}{\gamma|\zeta|} \text{kei}'(\gamma|\zeta|) \right), \\ K_{13}(\zeta) = K_{31}(\zeta) = -\frac{2}{\zeta} \left((1 - \nu) \left(\frac{2}{\gamma^2 \zeta^2} + \frac{2}{\gamma|\zeta|} \ker'(\gamma|\zeta|) + \text{kei}(\gamma|\zeta|) \right) + \nu \gamma|\zeta| \text{kei}'(\gamma|\zeta|) \right), \\ K_{33}(\zeta) = \frac{2}{\zeta} \left((1 - \nu)^2 \left(\frac{2}{\gamma|\zeta|} \text{kei}'(\gamma|\zeta|) - \ker(\gamma|\zeta|) \right) - (1 - \nu^2) \gamma|\zeta| \ker'(\gamma|\zeta|) \right) - 2\gamma^2 \int_0^\zeta \text{kei}(\gamma|\zeta|) d\zeta, \\ z = \xi - x, a = h / \sqrt{3(1 - \nu^2)}, \gamma = 1 / \sqrt{Ra} = (3(1 - \nu^2))^{1/4} / \sqrt{Rh},$$

Підставимо вирази (4) в крайові умови (2) на правому розрізі. Виключаючи функцію $[u_y]$ і враховуючи, що $\text{sgn}[\theta_y] = -\text{sgn} m$, дістаємо сингулярне інтегральне рівняння для знаход

ження знакосталого за припущенням стрибка повороту нормалі з додатковою умовою на кінцях розрізу:

$$\frac{D}{4\pi} \int_{-l}^l K(\xi, x) [\theta_y]'(\xi) d\xi = m, x \in (-l, l); [\theta_y](\pm l) = 0. \quad (5)$$

$$K(\xi, x) = 3(1 - \nu^2) \tilde{K}_{11}(\xi, x) + 2 \text{sgn} m \sqrt{3(1 - \nu^2)} \tilde{K}_{13}(\xi, x) + \tilde{K}_{33}(\xi, x).$$

За знайденим розв'язком та першою із формул (2) визначали розкриття тріщин, а за граничними виразами [3, 4]:

$$K_N^\pm = \frac{B}{4\sqrt{l}} \lim_{x \rightarrow \pm l} \sqrt{l^2 - x^2} [u_y]'(x),$$

$$K_M^\pm = \pm(3 - 2\nu - \nu^2) \frac{D}{4\sqrt{l}} \lim_{x \rightarrow \pm l} \sqrt{l^2 - x^2} [\theta_y]'(x),$$

обчислювали коефіцієнти інтенсивності зусиль K_N та моментів K_M у внутрішніх та зовнішніх вершинах тріщин.

Критерії руйнування

Напруження поблизу вершин тріщин розподілені нерівномірно по товщині оболонки. Враховуючи цю обставину, вважаємо, що процес руйнування надтріснутої оболонки відбувається в декілька етапів.

Спочатку за певного нижчого критичного значення навантаження розпочинається стале підростання тріщин в найбільш напруженій зоні, яке визначаємо за локальним енергетичним критерієм лінійної механіки руйнування [5]:

$$\max_z G(z) =$$

$$= \frac{\pi}{(2h)^2 E} \left(K_N^2 + (3 + \kappa) K_N \frac{|K_M|}{h} + 3\kappa \left(\frac{K_M}{h} \right)^2 \right) =$$

$$= 2\gamma_*, \quad (6)$$

де G – потік енергії у вершину тріщини, $\kappa = 3(1 + \nu)/(3 + \nu)$, γ_* – питома поверхнева енергія матеріалу.

Потім, початковий прямий фронт тріщини стає криволінійним і рівномірно напруженим. При досягненні верхнього значення руйнівного навантаження тріщина поширюється лавиноподібно по всій товщині оболонки. Таке нестійке розповсюдження тріщини описуємо середнім значенням потоку енергії до її вершини [4]:

$$\frac{1}{2h} \int_{-h}^h G(z) dz = \frac{\pi}{4h^2 E} \left[K_N^2 + \kappa \left(\frac{K_M}{h} \right)^2 \right] = 2\gamma_*. \quad (7)$$

Після підстановки знайдених значень коефіцієнтів інтенсивності у критерії (6), (7) отримали двобічну оцінку граничних навантажень.

Аналіз результатів

Числовий розв'язок задачі (5) побудували при $\nu = 0,3$ методом механічних квадратур [3]. Варіювали безрозмірний параметр взаємного розташування дефектів: $\rho = l/d$ для фіксованих значень параметра кривини оболонки $\lambda = \gamma l = (3(1 - \nu^2))^{1/4} l / \sqrt{Rh}$.

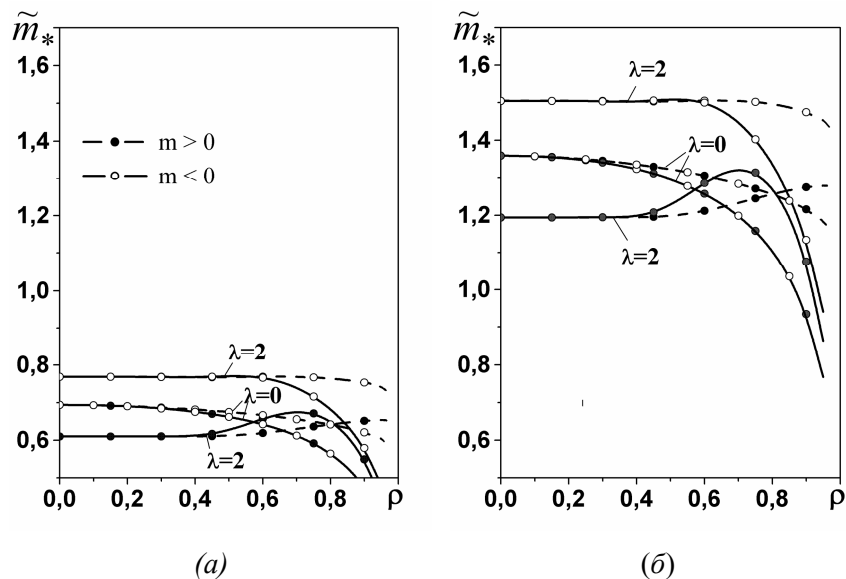
Результати дослідження граничної рівноваги сферичної оболонки з двома меридіональними тріщинами відображено на рисунку. Безрозмірні граничні навантаження $\tilde{m}_* = |m_*| / m^0$ ($m^0 = 2h^2 \sqrt{2E\gamma_*/(\pi l)}$), отримані за локальним критерієм (6), подано ліворуч (а), а за інтегральним критерієм (7) – праворуч (б); суцільні лінії відповідають ближнім, а штрихові – дальнім вершинам. При $m > 0$ береги змикаються у внутрішній (лінії з темними маркерами), а при $m < 0$ – у зовнішній лицьовій поверхні оболонки (світлі маркери).

Як видно з рисунка, верхня оцінка граничного навантаження за інтегральним критерієм приблизно вдвічі перевищує величину нижньої оцінки за локальним критерієм. Для випадку закриття тріщин на внутрішній поверхні оболонки спостерігається немонотонна залежність граничного навантаження від параметра ρ для ближніх вершин дефектів; у той же час за великих λ у певному діапазоні ρ більш небезпечними виявляються дальні вершини тріщин (штрихові лінії лежать нижче від суцільних). Натомість, у разі контакту берегів у зовнішній поверхні завжди небезпечними є ближні вершини розрізів.

Висновки

Руйнівне навантаження згину для сферичної оболонки з двома меридіональними тріщинами залежно від знаку навантаження може бути як більшим так і меншим порівняно з пластиною, а за умови закриття тріщин у внутрішній поверхні немонотонно залежить від параметра віддалі між дефектами, і небезпечними, при цьому, можуть бути зовнішні вершини дефектів.

Встановлено, що верхня оцінка граничного навантаження за інтегральним критерієм приблизно вдвічі перевищує величину нижньої оцінки за локальним критерієм.



Руйнівні навантаження для сферичної оболонки з колінеарними тріщинами

Список використаних джерел

References

1. *Шацький І. П.* Інтегральні рівняння задачі згину пологої оболонки, ослабленої розрізом з контактуючими кромками / І. П. Шацький // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1991 – № 2. – С. 26–29.
2. *Шацький І.* Рівновага сферичної оболонки з урахуванням закриття колінеарних тріщин за згину / І. Шацький, М. Маковійчук // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2010. – № 12. – С. 189–195.
3. *Панасюк В. В.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьшин. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
4. *Осадчук В. А.* Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами / В. А. Осадчук. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.
5. *Шацький І.* Двобічні оцінки граничного навантаження згину для пластини з прямолінійною тріщиною / І. Шацький // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій: зб. наук. праць 5-ї Міжнар. конф. (24–27 черв. 2014 р., Львів) / Під заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: Фіз.-мех. ін.-т ім. Г.В.Карпенка НАН України, 2014. – С. 425–430.
1. SHATS'KYI, I. P. (1991) Integral equations of the problem of bending of a shallow shell weakened by a cut whose edges are in contact. *Dop. Akad. Nauk Ukr RSR. Ser. A. (2)*. p. 26–29.
2. SHATSKY, I., MAKOVYCHUK, M. (2010) An equilibrium of bending spherical shell with taking into account the closure of collinear cracks. *Physico-mathematical modelling and informational technologies*. (12). p. 189–195.
3. PANASYUK, V. V., SAVRUK, M. P. & DATSYSHYN, A. P. (1976) *Raspredelenie napryazheniy okolo treshchin v plastinakh i obolochkach*, Kiev: Naukova dumka.
4. OSADCHUK, V. A. (1985) *Napriazhenno-deformirovannoe sostoianie i predel'noe ravnovesie obolochek s razrezami*. Kiev: Naukova dumka.
5. SHATSKYI, I. (2014) Two-side estimates of limiting bending load for plate with rectilinear crack. In: 5th Int. Conf. “Fracture mechanics of materials and structural integrity.” Karpenko Physico-Mechanical Institute, NASU, Lviv. p. 425–430.

Надійшла до редколегії 19.06.23