

УДК 532.59: 534.29

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.14>

Жук О.П.¹, д.ф.-м.н., пров.н.с.
Жук Я.О.², чл.-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф.
Клімчук² Т.В., к.ф.-м.н.

O.P. Zhuk¹, Dr.Sci., Leading Researcher.
Y.A. Zhuk², Dr.Sci. (Phys.–Math.)
T.V. Klimchuk², Ph.D.

Взаємодія системи сторонніх об'єктів у рідині, обумовлена силами акустичного випромінювання

Interaction of foreign bodies in liquid caused by the acoustic radiation field

¹Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, 03057, м. Київ, вул. Петра Нестерова, 3
e-mail: opzhuk1939@gmail.com
²Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е,
e-mail: y.zhuk@i.ua

¹Timoshenko Institute of Mechanics, NAS of Ukraine, 3, Petro Nesterov str., Kyiv 03057
e-mail: opzhuk1939@gmail.com
²Taras Shevchenko National University of Kyiv, 4e, Glushkov ave., Kyiv 03680
e-mail: y.zhuk@i.ua

Розглянуто задачу про взаємодію двох сторонніх об'єктів, розташованих у рідині в полі акустичної хвилі, яка поширюється вздовж лінії розташування цих тіл. Узагальнено метод розв'язання задачі, який полягає у дослідженні лінійної задачі розсіювання первинної хвилі на сторонніх об'єктах, обчисленні гідродинамічних сил, які діють на кожний об'єкт, з наступним осередненням їх в часі. В рамках цього підходу виведено формулу для обчислення акустичної радіаційної сили (АРС) для випадку, коли сторонні тіла є краплями рідини, що розташовані в зовнішній рідині. Досліджено вплив на акустичну радіаційну силу частоти падаючої хвилі, відстані між краплями, їх радіусів і фізичних параметрів рідин.

Ключові слова: ідеальна рідина, плоска акустична хвиля, рідка сферична крапля, гідродинамічна сила, акустична радіаційна сила.

The problem of interaction of two foreign bodies placed in a liquid in an acoustic field propagating along the line connecting the bodies is under investigation. An approach is elaborated to characterize the interaction between the bodies caused by the acoustic radiation forces that are the time-constant components of hydrodynamic forces acting upon the bodies located in the outer liquid medium. For example of the method application, propagation of the plane acoustic wave along the center line of two liquid spherical drops placed into a space filled with another liquid is under investigation. Study of the acoustic radiation forces is performed in the frame of two-step procedure. The first step comprises solution of the linear problem of incident wave diffraction on the bodies. The problem is solved by the variable separation method. To satisfy the boundary conditions on spherical surfaces, the expansion of the incident and reflected wave potentials over the spherical wave functions are used. The second step is calculation of the hydrodynamic forces acting upon each body followed by time averaging of forces determined. The analytical formula for the acoustic radiation force calculation is derived for the case under consideration. It is established that value of the acoustic radiation force affecting each liquid drop depends significantly on the incident wave frequency, densities, speed of sound in the outer and internal liquid as well as on the radius and distance between drops.

Key Words: ideal liquid, plane acoustic wave, liquid spherical drop, hydrodynamic force, acoustic radiation force.

Статтю представив академік НАН України Перестюк М.О.

1. Вступ

Різні питання щодо руху і взаємодії газових

бульбашок, крапель рідини в іншій рідині розглядалися в роботах [1-3]. Значний інтерес для технологічних процесів, у яких використовується дія акустичних хвиль, має вивчення руху крапель

рідини під дією радіаційних сил (коагуляція і седиментація аерозолів, дегазація, створення об'ємної сили в невагомості та інші). Публікації досліджень, присвячених різним питанням, пов'язаним з дією радіаційних сил на тверді і рідкі сторонні об'єкти в рідині, наведено в роботах [1-3]. У даній статті розглядається випадок поширення плоскої акустичної хвилі в рідині вздовж прямої, на якій знаходяться центри двох сферичних крапель іншої рідини, ніж зовнішня.

2. Постановка задачі дифракції та її розв'язування

Будемо вважати, що ідеальна стислива рідина густини ρ_0 , в якій звук поширюється зі швидкістю a_0 , заповнює весь простір. У ній знаходяться дві сферичні краплі іншої ідеальної рідини, відстань між центрами яких l . Густина рідини в краплі №1 ρ_1 , швидкість звуку в рідині краплі a_1 , а радіус сферичної краплі R_1 . Відповідно в краплі №2 - ρ_2, a_2 і R_2 . Головна система координат – прямокутна декартова $Oxyz$, центр якої знаходиться на середині відстані l між центрами сферичних крапель. З краплями також зв'яжемо системи декартових координат $O_s x_s y_s z_s$ ($s=1,2$) і сферичні системи координат $O_s r_s \theta_s \phi_s$ ($s=1,2$) (рис.1). Будемо виходити з моделі ідеальної стислої баротропної рідини і силу її дії на сферичну краплю вирахуємо із умови потенціального обтікання краплі. Номером 1 домовимось позначати краплю, на яку хвиля падає першою, а номером 2 – другу краплю.

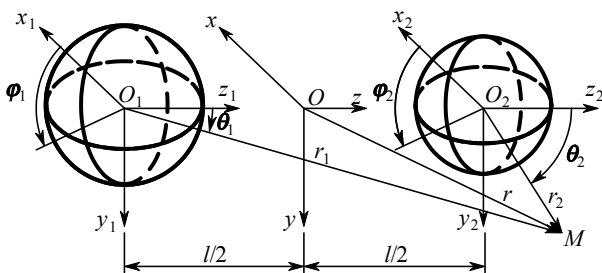


Рис. 1. Система двох рідких крапель в рідині

Коротко викладемо постановку задачі (деталі див. у [3]). Нехай Φ потенціал поля швидкості в зовнішній рідині, який становить суму потенціалу Φ_i первинної хвилі і потенціалів $\Phi_d^{(s)}$ ($s=1,2$) розсіяних на краплях хвиль. Тоді тиск p в зовнішній рідині можна вирахувати, скориставшись одержаним потенціалом, з точністю до величин, що мають порядок квадратів числа Маха, за формулою [2,3]

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho_0 (\text{grad } \Phi)^2 + \frac{\rho_0}{2a_0^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2, \quad (1)$$

в якій потенціал Φ є розв'язком хвильового рівняння

$$\Delta \Phi - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

Обчислення радіаційної сили, яка діє на об'єкти в рідині, зводиться до усереднення в часі гідродинамічної сили

$$\mathbf{F} = -\iint_S p \mathbf{N} dS, \quad (3)$$

де \mathbf{N} – вектор одиничної нормалі до зовнішньої поверхні S об'єкта. Лінійність рівняння (2) дозволяє використати принцип суперпозиції при визначенні потенціалу поля швидкості у випадку системи об'єктів у рідині, отже розв'язати задачу про їх взаємодію.

Нехай потенціал первинної хвилі, який є розв'язком рівняння (1.2), подається виразом

$$\Phi_i = A \exp[i(kz - \omega t)], \quad (4)$$

де A – амплітуда, ω – кругова частота, $k = \omega/a_0$ – хвильове число, t – час.

Первинна хвиля з потенціалом Φ_i поширюється в додатному напрямі осі Oz . Хвильове поле в зовнішній рідині утворюється в результаті інтерференції первинної хвилі (4) і хвиль, розсіяних від сферичних крапель

$$\Phi = \Phi_i + \sum_{s=1}^2 \Phi_d^{(s)}. \quad (5)$$

Граничні умови вимагають неперервності радіальних компонент швидкості зовнішньої і внутрішньої рідини на поверхнях крапель і неперервності величини тиску при переході через поверхні крапель. Їх запишемо в такому вигляді:

$$v_{r_s}^{(s)} \Big|_{r_s=R_s} = \bar{v}_{r_s}^{(s)} \Big|_{r_s=R_s}; \quad p^{(s)} \Big|_{r_s=R_s} = \bar{p}^{(s)} \Big|_{r_s=R_s}. \quad (6)$$

Зауважимо, що потенціали розсіяних на краплях хвиль повинні задовольняти також умовам випромінювання на нескінченності. При формулюванні граничних умов на поверхнях сферичних крапель ми не враховуємо поверхневий натяг в краплях і вважаємо, що амплітуда коливань поверхні краплі є малою величиною і тому радіус краплі приймаємо незмінним. Зазначимо, що у

формулах (6) риска над символом позначає величини, які характеризують стан рідини, яка знаходиться в краплях.

Застосування методу, детально описаного у [2,3], дозволяє звести задачу визначення потенціалів полів швидкості у зовнішній рідині й рідині крапель до розв'язання нескінченної системи алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів $A_n^{(s)}$ і $\bar{A}_n^{(s)}$, $s=1,2$ у розвиненнях цих потенціалів у ряди Фур'є по сферичних хвильових функціях

$$\begin{aligned} & kh_n^{(1)'}(kR_s)A_n^{(s)} - k_s j_n'(k_s R_s)\bar{A}_n^{(s)} + kS_n^{(s)} j_n'(kR_s) = \\ & = -2Ake^{(-1)^s ikl/2} i^n j_n'(kR_s), \quad s=1,2; \quad (7) \\ & \rho_0 h_n^{(1)}(kR_s)A_n^{(s)} - \rho_s j_n(k_s R_s)\bar{A}_n^{(s)} + \\ & + \rho_0 S_n^{(s)} j_n(kR_s) = -2A\rho_0 e^{(-1)^s ikl/2} i^n j_n(kR_s). \end{aligned}$$

Нескінченна система алгебраїчних рівнянь (7) має єдиний розв'язок $\{A_n^{(s)}, \bar{A}_n^{(s)}\}$, $n=0,1,2,\dots$, який знаходимо методом редукції. Обчисленням цих коефіцієнтів формально закінчується визначення потенціалів полів швидкості в зовнішній рідині і в рідині крапель. Заданий степінь точності забезпечується порівнянням результатів обчислень для послідовно зростаючого числа рівнянь.

2. Визначення радіаційних сил, які діють на сферичні краплі

Для обчислення гідродинамічної сили, яка діє на краплю, будемо застосовувати формулу (1) для тиску в рідині у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} p^{(s)} = & \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{\partial \Phi^{(s)}}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{\partial \Phi^{(s)}}{\partial r_s} \right)^2 - \\ & - \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{\partial \Phi^{(s)}}{\partial \theta_s} \right)^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Осереднюючи внесок кожного з доданків у (8) по поверхні краплини і за період падаючої хвилі, отримаємо відповідно

$$\begin{aligned} \langle F_{z1}^{(s)} \rangle = & -2\pi\rho_0 (kR_s)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} \times \\ & \times \left(K_n^{(s)} K_{n+1}^{(s)} + L_n^{(s)} L_{n+1}^{(s)} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \langle F_{z2}^{(s)} \rangle = & 2\pi\rho_0 (kR_s)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} \times \\ & \times \left(K_n^{(s)'} K_{n+1}^{(s)'} + L_n^{(s)'} L_{n+1}^{(s)'} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \langle F_{z3}^{(s)} \rangle = & 2\pi\rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} \times \\ & \times \left(K_n^{(s)} K_{n+1}^{(s)} + L_n^{(s)} L_{n+1}^{(s)} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Додаючи (9)-(11), отримуємо остаточний вираз для акустичної радіаційної сили, що діє на окрему краплю

$$\begin{aligned} \langle F_z^{(s)} \rangle = & 2\pi\rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} \times \\ & \times \left\{ \left(K_n^{(s)} K_{n+1}^{(s)} + L_n^{(s)} L_{n+1}^{(s)} \right) \left[n(n+2) - \alpha_s^2 \right] + \right. \\ & \left. + \left(K_n^{(s)'} K_{n+1}^{(s)'} + L_n^{(s)'} L_{n+1}^{(s)'} \right) \alpha_s^2 \right\}, \quad \alpha_s = kR_s. \end{aligned} \quad (12)$$

Вирази для $K_n^{(s)}$, $L_n^{(s)}$, $K_n^{(s)'}$ і $L_n^{(s)'}$ наведені у статті [3].

3. Числові результати та їх аналіз

Із застосуванням розробленого підходу досліджено задачу про визначення акустичних радіаційних сил (АРС), що діють на дві сферичні краплі тетрахлориду карбону ($a_{1,2} = 926$ м/с, $\rho_{1,2} = 1594$ кг/м³), розташовані у зовнішній рідині – воді ($a_0 = 1500$ м/с, $\rho_0 = 1000$ кг/м³) під дією плоскої звукової хвилі, що поширюється вздовж лінії центрів краплин.

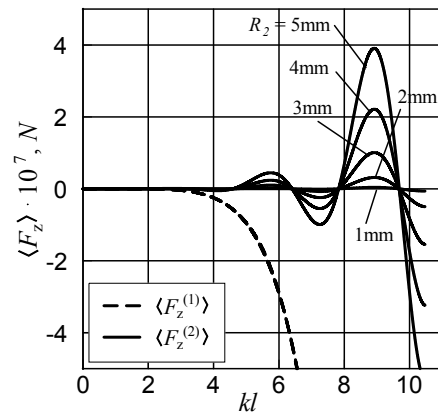


Рис. 2. Залежності АРС від частоти падаючої звукової хвилі при $R_1 \geq R_2$.

На Рис. 2 показано залежність АРС, що діють на першу і другу краплю, $\langle F_z^{(1)} \rangle$ (штрихова лінія) і $\langle F_z^{(2)} \rangle$ (суцільна лінія) відповідно, від частоти падаючої звукової хвилі. При цьому геометричні

параметри системи є наступними: $R_1 = 5$ мм, значення радіусу другої краплі, R_2 , вказані біля відповідних графіків. Відстань від центрів краплин $\ell = 50$ мм. Штрихові лінії для всіх значень R_2 співпадають з точністю до зображення на рисунку, вказуючи, що величина АРС, що діє на першу краплю для даних параметрів не залежить від радіусу другої краплі.

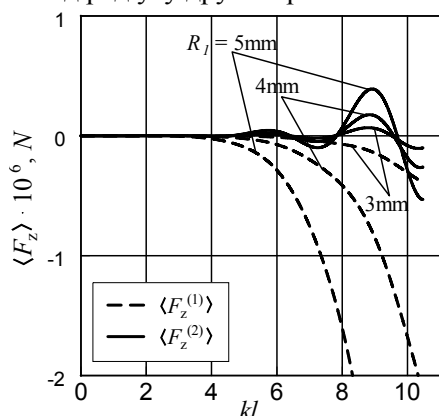


Рис. 3. Залежності АРС від частоти падаючої звукової хвилі при $R_1 \leq R_2$.

На Рис. 3 показано залежності АРС від частоти падаючої звукової хвилі, аналогічні залежностям, показаним на Рис. 2, для випадку, коли радіус першої краплі є меншим від радіусу другої краплі. Штриховими і суцільними кривими показані акустичні радіаційні сили, $\langle F_z^{(1)} \rangle$ і $\langle F_z^{(2)} \rangle$, що діють на першу і другу краплю відповідно.

З Рис. 2 і 3 видно, що при $R_1 \leq R_2$, на відміну від випадку $R_1 \geq R_2$, величина $\langle F_z^{(1)} \rangle$ суттєво залежить від радіусу першої краплі R_1 .

В обох випадках вона є направленою в сторону, протилежну напрямку поширення падаючої хвилі. При цьому АРС, що діє на другу краплю, змінюється як за величиною, так і за

Список використаних джерел

1. King L.V. On the Acoustic Radiation Pressure on Spheres / L.V. King // Proc. Roy. Soc. Ser. A. – 1934. – 147, №861. – P. 212-240.
2. Zhuk A.P. Effect of acoustic radiation on a spherical drop of liquid / A.P. Zhuk // Int. Appl. Mech. – 2007. – vol. 43, No. 7. – P. 726-733.
3. Жук О.П. Про взаємодію сферичних крапель рідини в радіаційному полі акустичної хвилі / О.П. Жук, Я.О. Жук, Т.В. Клімчук // Вісник КНУ. Сер.: Фіз.-мат. науки. – 2023. – № 1. – С. 61-64.

напрямок у залежності від частоти. Крім того, існують певні її значення, при яких $\langle F_z^{(2)} \rangle = 0$, тобто друга крапля залишається нерухомою.

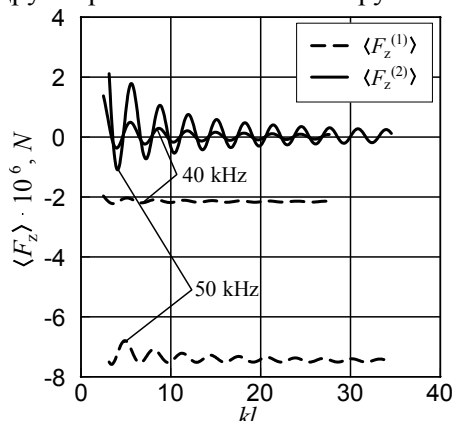


Рис. 4. Залежність АРС від відстані між центрами крапель, ℓ , на заданій частоті.

На Рис. 4 показана залежність АРС від відстані між центрами крапель, ℓ , на заданій частоті для системи двох крапель тетрахлориду карбону у воді. Дані наведені для випадку рівних радіусів краплин $R_1 = R_2 = 5$ мм. Криві для частот 40 і 50 кГц позначені на рисунку. Із збільшенням відстані між краплями взаємодія зменшується. Найбільший рівень взаємного впливу спостерігається при великих значеннях частоти на малій відстані між краплями.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за фінансової підтримки Національного фонду досліджень України (Проект 2020.02/0112 «Дифракційні процеси і радіаційні сили в обмежених гідропружних системах»).

References

1. KING, L.V. (1934) On the Acoustic Radiation Pressure on Spheres. *Proc. Roy. Soc. Ser. A*. **147** (861). p.212-240.
2. ZHUK, A.P. (2007) Effect of acoustic radiation on a spherical drop of liquid. *Int. Appl. Mech.* **43**(7), p. 726-733.
3. ZHUK, O.P., ZHUK, Y.A. & KLIMCHUK, T.V. (2023) Pro vzayemodiu sferychnykh krapel ridyny v radiatsynomy poli akustychnoii hvyli. *Visnyk KNU. Ser.: Fiz.-Math. nauky.* No. 1. p. 61-64.

Надійшла до редколегії 18.08.23