

УДК 539.3

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.12>

Вайсфельд Н.Д.¹, д. ф.-м. н., професор
Процеров Ю. С.², к. ф.-м. н., доцент
Толкачов А.В.², старший викладач

ПЛОСКА ЗАДАЧА ПРО КОЛИВАННЯ БАЛКОВОЇ ПЛИТИ НА ПРЯМОКУТНІЙ ОСНОВІ

¹King's College London, Великобританія
Стренд, Лондон, WC2R 2LS

e-mail: natalya.vaysfeld@kcl.ac.uk

²Одеський національний університет
ім. І.І. Мечникова

65082, м. Одеса, вул. Дворянська, 2

e-mail: protserov@onu.edu.ua

e-mail: andr.tolkach@gmail.com

N. Vaysfeld¹, Doctor of Science
Yu. Protserov², Associate Professor
A. Tolkachov², Senior Lecturer

PLANE PROBLEM ON BEAM PLATE'S OSCILLATIONS ON RECTANGULAR BASE

¹King's College London, UK
Strand, London, WC2R 2LS

e-mail: natalya.vaysfeld@kcl.ac.uk

²Odesa I.I. Mechnikov National University
65082, Odesa, Dvoryanskaya str., 2

e-mail: protserov@onu.edu.ua

e-mail: andr.tolkach@gmail.com

Вертикальні краї прямокутної основи знаходяться в умовах ковзного контакту, нижній край нерухомо закріплено, а з верхнім краєм зчеплено балку (балочну плиту) з вільними кінцями. До балки прикладено нормальне навантаження, яке гармонічно змінюється за часом. Після розв'язання відповідних крайових задач, знайдено переміщення прямокутної основи та прогин балки. З умови сполучення між балкою та основою отримано інтегральне рівняння відносно невідомого контактного напруження, яке розв'язано методом ортогональних многочленів.

Ключові слова: прямокутна основа, балка, динамічне контактне напруження

The plane contact problem of a beam's oscillations on a rectangular elastic base is considered. The vertical edges of the rectangular base are in conditions of the nonfriction contact, the lower edge is fixed, and a beam (beam plate) with free ends is attached to the upper edge. The normal loading is applied to the beam and harmonically changes in time. To solve the boundary valued problem for the elastic base the integral transform method is applied. The apparatus of the Green's function is used to construct the solution for the boundary valued problem for a beam. The displacements of the rectangular base and the deflection of the beam were found. The interface condition between the base and the plate is used to derive the integral singular equation relatively the dynamical contact stress. The orthogonal polynomial method was used to solve the integral equation. The investigation of the oscillations' frequency influence on the deflection of beam and elastic rectangular base's displacements and stress was conducted.

Key words: rectangular base, beam, dynamic contact stress

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Динамічним контактним задачам присвячено багато праць. У більшості з них розглядається контакт абсолютно твердого тіла (штампу) з пружною основою у вигляді напівпростору, напівплощини або шару (Zhilin Li, John C. Simo, Alan P. Pipkin, Yonggang Huang, J. N. Reddy, Г.Я. Попов, В.І. Острик, В.М. Сеймов, А.Ф. Улітко [1-4]) Значно менше робіт присвячено контакту балкових плит або накладок з пружною скінченною основою.

У роботі розглянуто задачу про плоску деформацію прямокутної області (основи)

$|x| \leq l, 0 \leq y \leq h$, краї якої $x = \pm l$ знаходяться в умовах ковзного контакту, край $y = h$ нерухомо закріплено, а з краєм $y = 0$ на ділянці $|x| \leq a < l$ зчеплено балку (балочну плиту), краї $x = \pm a$ якої вільні. До балки прикладено нормальне навантаження інтенсивності $q(x)e^{i\omega t}$. У безрозмірних координатах $x' = xa^{-1}, y' = ya^{-1}$ математичне формулювання задачі відносно амплітуд переміщень точок основи

$u(x, y), v(x, y)$ набуває вигляду (для спрощення запису штрих опущено):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + k_1^2 u = 0 \\ (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \beta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + k_1^2 v = 0 \end{cases}, \quad |x| < b, 0 < y < d \quad (1)$$

$$u|_{x=\pm b} = 0, \frac{\partial v}{\partial x}|_{x=\pm b} = 0, u|_{y=d} = 0, v|_{y=d} = 0, \sigma_y|_{y=0} = \begin{cases} -p(x), & |x| < 1 \\ 0, & 1 < |x| < b \end{cases}, \tau_{xy}|_{y=0} = 0 \quad (2)$$

де $\beta = c_2 c_1^{-1}, k_i = a \omega c_i^{-1} (i = 1, 2), b = l a^{-1}, d = h a^{-1}$, хвиль у пружній основі. Амплітуда прогину балки $w(x)$ мусить задовольняти крайову задачу

$$w^{IV}(x) - \gamma^4 w(x) = a^4 D^{-1}(q(x) - p(x)), w''(\pm 1) = 0, w'''(\pm 1) = 0 \quad (3)$$

де $p(x)$ амплітуда невідомого контактного напруження між балкою та основою, $\gamma^4 = a^4 \rho_0 h_0 \omega^2 D^{-1}$, D циліндрична жорсткість балки, ρ_0, h_0 густина матеріалу та товщина балки. Крім того, мусить виконуватися умова сполучення між балкою та основою $w(x) = v(x, 0), |x| < 1$ (4) За допомогою скінченних перетворень Фур'є

$$u_n(y) = \int_{-b}^b u(x, y) \sin \lambda_n x dx, \quad v_n(y) = \int_{-b}^b v(x, y) \cos \lambda_n x dx, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{b}$$

крайову задачу (1) – (2) зведено до одновимірної, розв'язок якої має вигляд

$$u_n(y) = \frac{a \lambda_n p_n}{4 G \Delta_n} \left[2 \lambda_n^2 \sigma_1 \sigma_2 \operatorname{ch} \sigma_1 y + \sigma_1 \sigma_2 (\lambda_n^2 + \sigma_2^2) \operatorname{ch} \sigma_2 y - \lambda_n^2 (\lambda_n^2 + \sigma_2^2) \operatorname{sh} \sigma_1 (y - d) \operatorname{sh} \sigma_2 d - \right. \\ \left. - 2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 \operatorname{sh} \sigma_2 (y - d) \operatorname{sh} \sigma_1 d - \sigma_1 \sigma_2 (\lambda_n^2 + \sigma_2^2) \operatorname{ch} \sigma_1 (y - d) \operatorname{ch} \sigma_2 d - 2 \lambda_n^2 \sigma_1 \sigma_2 \operatorname{ch} \sigma_2 (y - d) \operatorname{ch} \sigma_1 d \right]$$

$$v_n(y) = -\frac{a \sigma_1 p_n}{4 G \Delta_n} \left[2 \lambda_n^2 \sigma_1 \sigma_2 \operatorname{sh} \sigma_1 y + \lambda_n^2 (\lambda_n^2 + \sigma_2^2) \operatorname{sh} \sigma_2 y - \lambda_n^2 (\lambda_n^2 + \sigma_2^2) \operatorname{ch} \sigma_1 (y - d) \operatorname{sh} \sigma_2 d - \right. \\ \left. - 2 \lambda_n^2 \sigma_1 \sigma_2 \operatorname{ch} \sigma_2 (y - d) \operatorname{sh} \sigma_1 d - \sigma_1 \sigma_2 (\lambda_n^2 + \sigma_2^2) \operatorname{sh} \sigma_1 (y - d) \operatorname{ch} \sigma_2 d - 2 \lambda_n^4 \operatorname{sh} \sigma_2 (y - d) \operatorname{ch} \sigma_1 d \right]$$

$$\Delta_n = \lambda_n^2 \sigma_1 \sigma_2 (\lambda_n^2 + \sigma_2^2) + \lambda_n^2 \left(2 \lambda_n^4 - \lambda_n^2 (k_1^2 + 2k_2^2) + k_1^2 k_2^2 + \frac{1}{4} k_2^4 \right) \operatorname{sh} \sigma_1 d \operatorname{sh} \sigma_2 d - \\ - \left(2 \lambda_n^4 - \lambda_n^2 k_2^2 + \frac{1}{4} k_2^4 \right) \sigma_1 \sigma_2 \operatorname{ch} \sigma_1 d \operatorname{ch} \sigma_2 d; \quad \sigma_i = \sqrt{\lambda_n^2 - k_i^2}, i = 1, 2$$

$$v_0(y) = -\frac{a k_1}{G k_2^2} \frac{\sin k_1 (y - d)}{\cos k_1 d} p_0, \quad \text{де } p_n = \int_{-1}^1 p(x) \cos \lambda_n x dx$$

Скориставшись формулами обернення перетворення Фур'є, отримано вирази для амплітуд переміщень основи. Наприклад, вираз для вертикальних переміщень точок верхнього краю основи, який знадобиться надалі, має вигляд

$$v(x, 0) = \frac{a}{4bG} \int_{-1}^1 \left(2 \frac{k_1}{k_2^2} \operatorname{tg} k_1 d - \sum_{n=1}^{\infty} L_n \cos \lambda_n x \cos \lambda_n \xi \right) p(\xi) d\xi,$$

$$\text{де } L_n = k_2^2 \frac{\sigma_1}{\Delta_n} (\lambda_n^2 \operatorname{ch} \sigma_1 d \operatorname{sh} \sigma_2 d - \sigma_1 \sigma_2 \operatorname{sh} \sigma_1 d \operatorname{ch} \sigma_2 d)$$

Розв'язок крайової задачі (3) подано за формулою $w(x) = a^4 D^{-1} \int_{-1}^1 G_0(x, \xi) [q(\xi) - p(\xi)] d\xi$, де

$$\begin{aligned} G_0(x, \xi) = & \frac{1}{4\gamma^3} [\operatorname{sh} \gamma |x - \xi| - \sin \gamma |x - \xi|] - \frac{1}{4\gamma} (\operatorname{sh} \gamma (\xi + 1) + \sin \gamma (\xi + 1)) \psi_0(x) + \\ & + \frac{1}{4} (\operatorname{ch} \gamma (\xi + 1) + \cos \gamma (\xi + 1)) \psi_1(x) + \frac{1}{4\gamma} (\operatorname{sh} \gamma (\xi - 1) + \sin \gamma (\xi - 1)) \psi_2(x) - \\ & - \frac{1}{4} (\operatorname{ch} \gamma (\xi - 1) + \cos \gamma (\xi - 1)) \psi_3(x) \end{aligned}$$

є функцією Гріна цієї задачі.

Функції $\psi_k(x)$ утворюють фундаментальну базисну систему розв'язків, побудовані на основі функцій Власова і є комбінацією гіперболічних та тригонометричних функцій.

Після задоволення умови сполучення (4), отримано інтегральне рівняння відносно контактного напруження $p(x)$

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{ak_1}{2bGk_2^2} \operatorname{tg} k_1 d - \frac{a}{4bG} \sum_{n=1}^{\infty} L_n \cos \lambda_n x \cos \lambda_n \xi + a^4 D^{-1} G_0(x, \xi) \right] p(\xi) d\xi = a^4 D^{-1} \int_{-1}^1 G_0(x, \xi) q(\xi) d\xi$$

Аналіз виразу L_n коли $n \rightarrow \infty$, приводить до асимптотичного подання $L_n \square \frac{K}{\lambda_n}$, де

Це дозволило виділити у ядрі отриманого інтегрального рівняння сингулярну частину та записати його у вигляді

$$K = (k_1^2 + k_2^2)(k_1^2 - k_2^2)^{-1}.$$

$$\int_{-1}^1 \left[\ln \frac{1}{|x^2 - \xi^2|} + R(x, \xi) \right] p(\xi) d\xi = f(x), \quad -1 < x < 1 \quad (5)$$

де $R(x, \xi)$ регулярна частина ядра.

Наявність спектрального співвідношення

$$\int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x^2 - \xi^2|} \frac{T_{2k}(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi = \begin{cases} 2\pi \ln 2, & k = 0 \\ \frac{\pi}{k} T_{2k}(x), & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

де $T_{2k}(x)$ - многочлени Чебишева першого роду, дає змогу застосувати для наближеного розв'язання інтегрального рівняння (5) метод ортогональних многочленів. Згідно до нього, розв'язок подано у вигляді

$$p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\chi_k}{\beta_k} T_{2k}(\xi), \text{ де}$$

$$\beta_k = \begin{cases} \pi \sqrt{2 \ln 2}, & k = 0 \\ \frac{\pi}{\sqrt{2k}}, & k = 1, 2, \dots \end{cases}, \quad \chi_k - \text{невідомі коефіцієнти.}$$

Таким чином, динамічне контактне напруження має на кінцях кореневу особливість, як і у статичному випадку. Реалізація схеми методу привела до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\chi_m + \sum_{k=0}^{\infty} a_{mk} \chi_k = f_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$a_{mk} = \frac{1}{\beta_m \beta_k} \int_{-1}^1 \frac{T_{2m}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \int_{-1}^1 R(x, \xi) \frac{T_{2k}(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi, \quad f_m = \frac{1}{\beta_m} \int_{-1}^1 f(x) \frac{T_{2m}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Числову реалізацію проведено для випадку бетонної основи та сталеві балки з рівномірно розподіленим навантаженням, що прикладене уздовж всієї її довжини (Рис.1,2).

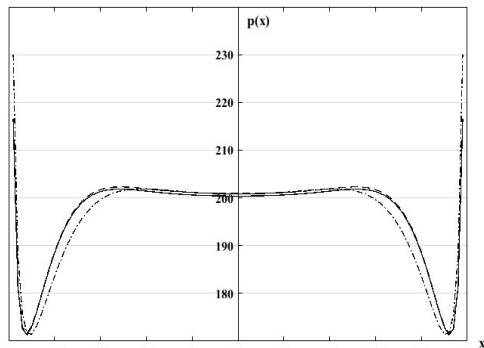


Рис.1

Суцільна лінія тут відповідає випадку частоти $\omega = 15$, пунктирна лінія відповідає частоті $\omega = 3$. Для порівняння штрих пунктирною

лінією позначено результати для відповідної стаціонарної задачі.

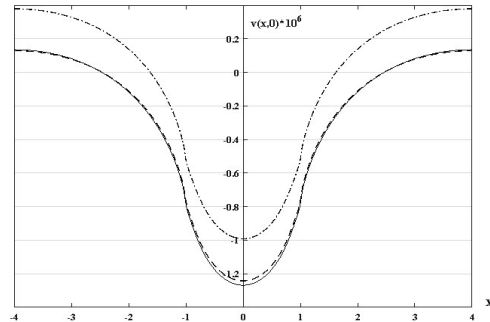


Рис. 2

З графіків видно, що зміна частоти мало впливає на значення контактної напруженості і переміщення, тоді як контактне напруження і переміщення у стаціонарному випадку суттєво менше ніж у динамічному випадку.

Список використаних джерел

1. Улітко А. Ф. Векторні розкладення в просторовій теорії пружності (рос.) / А. Улітко. – Київ: Академперіодика, 2002. – 264 с.
2. Острик В.І., Улітко А.Ф. Метод Вінера-Гопфа в контактних задачах теорії пружності (рос.) / В.І.Острик, А.Ф.Улітко – Київ: Наукова думка, 2006. – 328 с.
3. Попов Г.Я. Рівняння математичної фізики. Метод ортогональних многочленів / Г. Я. Попов, В.В. Реут, М.Г. Моїсєєв, Н.Д. Вайсфельд – Одеса: Астропрінт, 2010. – 120 с.
4. Сеймов В.М. Динамічні контактні задачі (рос.) / В.М. Сеймов – Київ: Наукова думка, 1976. – 328 с.

References

1. ULITKO, A. (2002) *Vectorni rozkladennya u prostоровiy teorii prugnosti*. Kyiv, Academperiodyka.
2. OSTRIK, V., ULITKO, A. (2006) *Wiener-Hopf Method in Contact Problems of Elasticity*. Kyiv, Naukova dumka.
3. POPOV, G., REUT, V., MOISEEV, N., VAYSFELD, N. (2010) *Rivnyannya matematychoi fizyki*. Odesa, Astroprint.
4. SEIMOV, V. (1976) *Dynamic contact problems*. Kyiv, Naukova dumka.

Надійшла до редколегії 25.06.23