

УДК 539.3

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.11>

Вайсфельд Н. Д., д.ф.-м.н., професор,
Журавльова З. Ю., к.ф.-м.н., доцент.

N. D. Vaysfeld, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof,
Z. Yu. Zhuravlova, PhD (Phys.-Math.).

**Дослідження поронапруженого стану
півнескінченного порожнистого
циліндру під дією осесиметричного
навантаження**

**Investigation of porous stress state of semi-
infinite hollow cylinder under axisymmetric
loading**

King's college, Strand building, S2.35, London,
United Kingdom

Одеський національний університет імені І.І.
Мечникова, 65082, м. Одеса, вул. Дворянська, 2,
e-mail: natalya.vaysfeld@kcl.ac.uk,
z.zhuravlova@onu.edu.ua

King's college, Strand building, S2.35, London,
United Kingdom

Odessa I. I. Mechnikov National University, 65082,
Odessa, Dvoryanskaya str., 2,
e-mail: natalya.vaysfeld@kcl.ac.uk,
z.zhuravlova@onu.edu.ua

У статті побудовано точний розв'язок задачі поропружності для півнескінченного порожнистого циліндру під дією осесиметричного навантаження. Вихідну задачу зведено до одновимірної шляхом застосування інтегрального перетворення Фур'є. Одновимірна крайова задача у просторі трансформант сформульована у векторному вигляді, її розв'язок знайдено за допомогою апарату матричного диференціального числення. Отримані аналітичні формули дозволяють дослідити зміну переміщень, напружень та тиску рідини в порах в залежності від виду поропружного матеріалу, прикладеного навантаження, розміру зовнішнього та внутрішнього радіусів циліндру.

Ключові слова: поропружний порожнистий циліндр, осесиметричне навантаження, інтегральне перетворення.

The exact solution of the poroelasticity problem for a semi-infinite hollow cylinder under the axisymmetric load is derived in the paper. The original problem was reduced to a one-dimensional problem by applying the integral Fourier transform. The one-dimensional boundary value problem in the transform domain is formulated in a vector form, its solution is found using the matrix differential calculation apparatus. The derived analytical formulas allow to investigate the change of displacements, stresses and pore pressure depending on the type of porous material, the applied load, the size of outer and inner radii of the cylinder.

Key Words: poroelastic hollow cylinder, axisymmetric loading, integral transform.

Статтю представив член-кор.НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Поропружні матеріали широко зустрічаються у різних галузях медицини, геології, інженерії. Цим пояснюється велика кількість робіт, присвячених дослідженню поропружних станів тіл різної геометричної форми, зокрема циліндрів. Але варто відмітити, що більшість досліджень є числовими через велику кількість рівнянь задач. Аналітичні методи [1]-[5] дають змогу дослідити якісну поведінку переміщень, напружень та тиску. Також їх можна використовувати для верифікації числових методів. Тому проблема розробки нових аналітичних підходів до розв'язання задач поропружності залишається акту-

альною. У даній роботі пропонується нова методика, за допомогою якої отримано точний розв'язок задачі поропружності для півнескінченного порожнистого циліндру під дією осесиметричного навантаження.

Розглядається півнескінченний порожнистий поропружний циліндр у рамках моделі Біо [6], що займає область $a_0 < r < a_1, 0 < z < \infty, -\pi < \varphi < \pi$. Верхня грань $z = 0$ знаходиться в умовах гладкого контакту та є непроникною

$$w|_{z=0} = 0, \tau_{rz}|_{z=0} = 0, \frac{\partial p}{\partial z}|_{z=0} = 0, \quad (1)$$

$$\text{де } u(r, z) = \frac{u_r(r, z)}{a_1}, w(r, z) = \frac{u_z(r, z)}{a_1} -$$

безрозмірні переміщення, $\sigma_r(r, z), \tau_{rz}(r, z)$ - безрозмірні напруження, $p(r, z)$ - безрозмірний тиск рідини, що знаходиться в порах циліндру.

По зовнішній циліндричній грані $r = a_1$ задано навантаження

$$\sigma_r|_{r=a_1} = L(z), \tau_{rz}|_{r=a_1} = T(z), p|_{r=a_1} = P(z), \quad (2)$$

внутрішня грань $r = a_0$ знаходиться в умовах зчеплення та є проникною

$$u|_{r=a_0} = 0, w|_{r=a_0} = 0, p|_{r=a_0} = 0 \quad (3)$$

Потрібно визначити переміщення, напруження та тиск рідини, що задовольняють крайові умови (1)-(3) та рівняння [7]

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} u + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{2}{\kappa+1} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} - \alpha \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{2}{\kappa-1} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \alpha \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{\alpha}{K} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial w}{\partial z} \right] - \frac{S_p}{K} p = 0 \end{cases} \quad (4)$$

де $\kappa = 3 - 4\mu$ - стала Мусхелішвілі, μ - коефіцієнт Пуассона, α - коефіцієнт Біо, $S_p = S_p G, K = \frac{a_1^2 k}{G}$ -

безрозмірні величини, G - модуль зсуву, S_p - запам'ятованість простору пор, k - коефіцієнт проникності.

Вихідну крайову задачу (1)-(4) зведено до одновимірної за допомогою півнескінченного синуса, косинуса перетворення Фур'є за змінною z

$$\begin{bmatrix} u_\beta(r) \\ w_\beta(r) \\ p_\beta(r) \end{bmatrix} = \int_0^\infty \begin{bmatrix} u(r, z) \\ w(r, z) \\ p(r, z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta z \\ \sin \beta z \\ \cos \beta z \end{bmatrix} dz$$

Крайову задачу у просторі трансформант сформульовано у векторному вигляді

$$\begin{cases} L_2 \bar{y}_\beta(r) = 0, \\ \bar{y}_\beta(b) = 0, A_\beta \bar{y}'_\beta(1) + B_\beta \bar{y}_\beta(1) = \bar{g}_\beta \end{cases} \quad (5)$$

Тут L_2 - диференціальний оператор другого порядку, A_β, B_β - відомі матриці, \bar{g}_β - відомий вектор, $\bar{y}_\beta(r) = (u_\beta(r); w_\beta(r); p_\beta(r))^T$.

Розв'язання векторної крайової задачі (5) будуватиметься за допомогою апарату матричного

диференціального числення [8], згідно з яким розглядається відповідне матричне диференціальне рівняння

$$L_2 Y_\beta(r) = 0, \quad (6)$$

де $Y_\beta(r)$ - матриця порядку 3×3 .

Використовуючи співвідношення $L_2 H(r, \xi) = -H(r, \xi) M(\xi)$, де

$$H(r, \xi) = \begin{pmatrix} J_1(\xi r) & 0 & 0 \\ 0 & J_0(\xi r) & 0 \\ 0 & 0 & J_0(\xi r) \end{pmatrix},$$

$J_0(\xi r), J_1(\xi r)$ - функції Бесселя,

$$M(\xi) = \begin{pmatrix} \xi^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \beta^2 & \frac{2\beta}{\kappa+1} \xi & -\alpha \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \xi \\ \frac{2\beta}{\kappa-1} \xi & \xi^2 + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \beta^2 & -\alpha \beta \\ \frac{\alpha}{K} \xi & \frac{\alpha \beta}{K} & \xi^2 + \beta^2 + \frac{S_p}{K} \end{pmatrix},$$

розв'язок матричного рівняння (6) можна отримати за наступною формулою

$$Y_\beta(r) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C H(r, \xi) M^{-1}(\xi) d\xi, \text{ де } M^{-1}(\xi) -$$

матриця, обернена до матриці $M(\xi)$, замкнутий

контур C охоплює усі особливі точки матриці $M^{-1}(\xi)$. Тоді розв'язок векторної крайової задачі

(5) можна отримати за формулою

$$\bar{y}_\beta(r) = Y_1(r) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + Y_2(r) \begin{pmatrix} c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{pmatrix} \quad (7)$$

матриці $Y_1(r), Y_2(r)$ є фундаментальною системою розв'язків матричного рівняння (6), сталі $c_i, i = \overline{1, 6}$ знаходяться з крайових умов у (5).

Застосування формули обернення до виразу (7) завершує побудову точного аналітичного розв'язку вихідної крайової задачі.

Числові розрахунки проводились для Рурського пісковика з наступними параметрами [9]:

$$G = 1.33 \cdot 10^{10} \text{ N} / \text{m}^2, \mu = 0.12, \alpha = 0.637, \\ k = 2 \cdot 10^{-13} \text{ m}^4 / \text{N} \cdot \text{s}, S_p = 3.9215 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2 / \text{N}.$$

Було розглянуто два випадки навантаження: нормальне механічне навантаження

$$L(z) = \sin(\pi z / h), T(z) = 0, P(z) = 0 \text{ (Рис. 1-2)}$$

та навантаження тиском рідини

$$L(z) = 0, T(z) = 0, P(z) = \sin(\pi z / h) \text{ (Рис. 3-4)}.$$

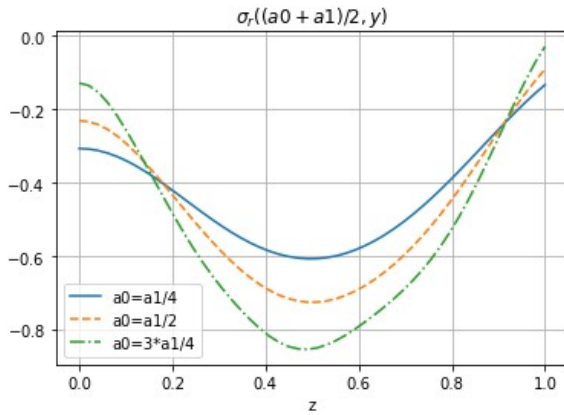


Рис. 1. Нормальне напруження $\sigma_r\left(\frac{a_0 + a_1}{2}, y\right)$ при нормальному механічному навантаженні

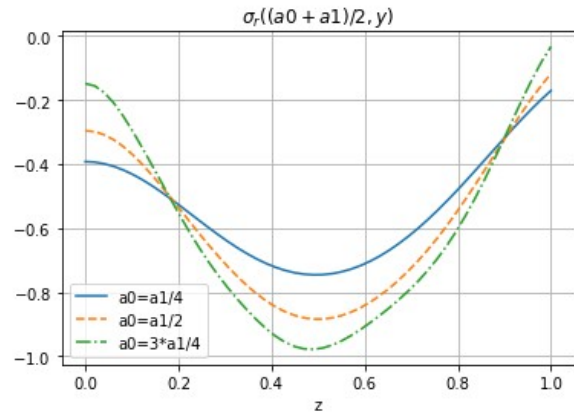


Рис. 3. Нормальне напруження $\sigma_r\left(\frac{a_0 + a_1}{2}, y\right)$ при навантаженні тиском рідини

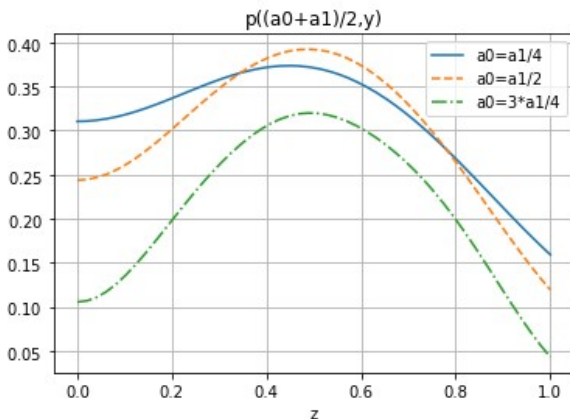


Рис. 2. Тиск $p\left(\frac{a_0 + a_1}{2}, y\right)$ при нормальному механічному навантаженні

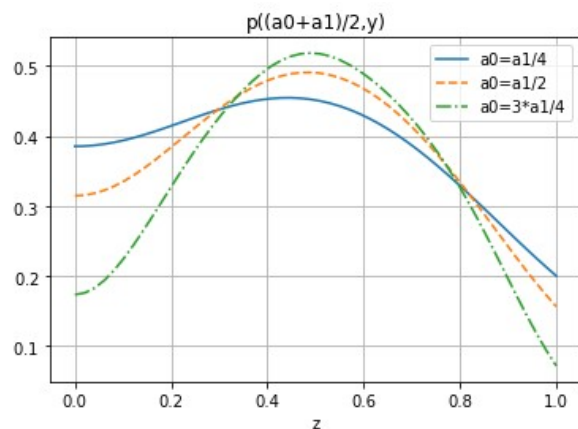


Рис. 4. Тиск $p\left(\frac{a_0 + a_1}{2}, y\right)$ при навантаженні тиском рідини

Як видно, у випадку нормального механічного навантаження максимальні абсолютні значення нормального напруження (Рис. 1) досягаються для більш тонкої стінки порожнистого циліндру, в той час як для таких геометричних параметрів тиск рідини (Рис. 2) у порах є найменшим.

Висновки

У роботі було побудовано точний розв'язок задачі поропружності для півнескінченного порожнистого циліндру під дією осесиметричного навантаження за допомогою апаратів інтегральних перетворень та матричного диференціального числення. Досліджено зміну напружень та тиску рідини усередині циліндру в залежності від поропружного матеріалу та геометричних розмірів. Даний підхід може бути використаний для більш складних областей, також для областей, послаблених дефектами.

У випадку навантаження тиском рідини максимальні абсолютні значення нормального напруження (Рис. 3) та максимальний тиск рідини (Рис. 4) спостерігаються для меншої різниці між діаметрами циліндру $a_1 - a_0$.

Список використаних джерел

1. Zhupanska O.I. Contact with friction of a rigid cylinder with an elastic half-space / O.I. Zhupanska, A.F. Ulitko // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 2005. – № 53(5). – P. 975-999.
2. Senchenkov I.K. Modelling of residual stresses developed in steel cylinders subjected to surface-layer deposition by welding / I.K. Senchenkov, Ya.A. Zhuk, O.P. Chervinko, E. Turyk // *Journal of Engineering Mathematics*. – 2008. – № 61. – P. 271-284.
3. Yuzvyak M. Axisymmetric thermal stresses in an elastic hollow cylinder of finite length / M. Yuzvyak, Yu. Tokovyy, A. Yasinsky // *Journal of Thermal Stresses*. – 2020. – № 44(3). – P. 359-376.
4. Popov G.Ya. Axisymmetric problem for an elastic cylinder of finite length with fixed lateral surface with regard for its weight / G.Ya. Popov, Yu.S. Protserov // *J. Math. Sci.* – 2016. – № 212(1). – P. 67-82.
5. Vaysfeld N. (2023). Exact Solution of the Axisymmetric Problem for Poroelastic Finite Cylinder. / Vaysfeld N., Zhuravlova, Z. // Altenbach, H., Mkhitarian, S.M., Hakobyan, V., Sahakyan, A.V. (eds) *Solid Mechanics, Theory of Elasticity and Creep. Advanced Structured Materials*. Springer, Cham. – 2023. – № 185.
6. Biot M.A. General theory of three-dimensional consolidation / M.A. Biot // *J. Appl. Phys.* – 1941. – № 12. – P. 155-164.
7. Verruijt A. An introduction to soil dynamics. Theory and applications of transport in porous media / A. Verruijt. – Springer, 24, 2010.
8. Gantmacher F.R. The theory of matrices / F.R. Gantmacher. – New York, Chelsea Publishing Company, 1959. – 276 p.
9. Cheng A.H.-D. Poroelasticity. Theory and applications of transport in porous media / A.H.-D. Cheng. – Springer, 27, 2016.

References

1. ZHUPANSKA, O.I. and ULITKO, A.F. (2005) Contact with friction of a rigid cylinder with an elastic half-space. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 53(5). p. 975-999.
2. SENCHENKOV, I.K., ZHUK, Ya.A., CHERVINKO, O.P. and TURYSK, E. (2008) Modelling of residual stresses developed in steel cylinders subjected to surface-layer deposition by welding. *Journal of Engineering Mathematics*, 61. p. 271-284.
3. YUZVYAK, M., TOKOVYY, YU. and YASINSKY, A. (2020) Axisymmetric thermal stresses in an elastic hollow cylinder of finite length. *Journal of Thermal Stresses*, 44(3). p. 359-376.
4. POPOV, G.Ya., PROTSEROV, Yu.S. (2016) Axisymmetric problem for an elastic cylinder of finite length with fixed lateral surface with regard for its weight. *J. Math. Sci.*, 212(1). p. 67-82.
5. VAYSFELD, N., ZHURAVLOVA, Z. (2023) Exact Solution of the Axisymmetric Problem for Poroelastic Finite Cylinder. In: *Altenbach, H., Mkhitarian, S.M., Hakobyan, V., Sahakyan, A.V. (eds) Solid Mechanics, Theory of Elasticity and Creep. Advanced Structured Materials*, Springer, Cham, 185.
6. BIOT, M.A. (1941) General theory of three-dimensional consolidation. *Appl. Phys.*, 12. p. 155-164.
7. VERRUIJT, A. (2010) *An introduction to soil dynamics. Theory and applications of transport in porous media*. Springer, 24.
8. GANTMACHER, F.R. (1959) *The theory of matrices*. New York: Chelsea Publishing Company.
9. CHENG, A.H.-D. (2016) *Poroelasticity. Theory and applications of transport in porous media*. Springer, 27

Надійшла до редколегії 26.06.23