

УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.10>

Борисейко О. В., к.ф.-м.н., доц.
Гусак В. О., аспірант
Маціпура В. Т., д.ф.-м.н., проф.

Використання комбінацій двох варіантів спряження хвильових полів в методі часткових областей

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03127, м. Київ, пр-т. Акад.
Глушкова, 4-е
e-mail: gusakw7@gmail.com

Boryseiko O. V., PhD (Phys.-Math.)
Husak V. O., PhD student
Matsypura V. T., Dr.Sci. (Phys.-Math.)

Using combinations of two options of wave fields conjugation in the method of partial domains

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03127, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e
e-mail: gusakw7@gmail.com

В роботі досліджено можливість використання комбінацій двох варіантів спряження хвильових полів (поточкового спряження та середньоквадратичного наближення) в методі часткових областей на прикладі розв'язання задачі про випромінювання поршня в скінченній клинуватій хвилевод. Показано, що варіант використання середньоквадратичного наближення є найкращим, в той час як використання поточкового спряження полів в цілому спрощує розрахунок задачі. Вибір необхідної комбінації розрахунку залежить від того, яка задача розглядається, можлива ситуація коли саме комбінований варіант розрахунку може призвести до кращого розв'язку задачі з точки зору виконання закону збереження енергії чи умов зшивання полів.

Ключові слова: Метод часткових областей, середньоквадратичне наближення, поточкове спряження полів, скінченний клинуватий хвилевод.

The paper investigates the possibility of using combinations of two options of wave fields conjugation (the conjugation by points and the root mean square approximation) in the method of partial domains using the example of solving the problem of piston radiation in a finite wedge-shaped waveguide. It is shown that the option of using the root mean square approximation is the best, while the use of the conjugation by points of fields generally simplifies the calculation of the problem. The choice of the required calculation combination depends on the problem under consideration, and it is possible that the combined calculation option may lead to a better solution to the problem in terms of fulfilling the law of energy conservation or field conjugation conditions.

Key Words: Partial domains method, root mean square approximation, conjugation by points, finite wedge-shaped waveguide.

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н, проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Метод часткових областей отримав широке застосування в задачах акустики, в котрих досліджуються звукові поля в складних, неканонічних областях [1]. Ідея методу полягає в розділенні складної області існування хвильового поля на прості області, прості в тому сенсі, що в кожній з них можна побудувати загальний розв'язок рівняння Гельмгольца. Такі розв'язки описують звукові поля в часткових областях при довільних граничних умовах на їх границях. Далі виникає потреба спряження по-

лів в часткових областях на границях цих областей. Реалізація граничних умов призводить до функціональних рівнянь з невідомими коефіцієнтами, які є амплітудними коефіцієнтами мод у часткових областях. Для визначення шуканих амплітудних коефіцієнтів мод слід перейти від функціональних рівнянь до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка надалі розв'язується методом редукції. Перехід до лінійної системи алгебраїчних рівнянь спирається на побудовані загальні розв'язки рів-

няння Гельмгольца в часткових областях. Загальний розв'язок передбачає наявність у ньому повної та ортогональної системи функцій, завдяки якій можна записати у вигляді ряду Фур'є будь-яку (розумну з фізичної точки зору) функцію. Використовуючи ортогональність цього набору функцій, можна отримати систему алгебраїчних рівнянь. Про цю процедуру говорять як про наближення функцій у розумінні мінімальності середньоквадратичного відхилення. Труднощі можуть виникнути в ситуації, коли для запису хвильових полів у часткових областях доводиться використовувати декілька (причому, найчастіше, різних) систем координат. Як результат, при переході до системи алгебраїчних рівнянь можуть виникати складні інтеграли.

Інший варіант переходу до системи алгебраїчних рівнянь полягає в прирівнюванні функцій (полів у суміжних часткових областях) в скінченному наборі точок (назвемо їх вузловими точками) на межі цих областей. Кількість вузлових точок на границі визначає порядок системи рівнянь і тим самим кількість шуканих амплітудних коефіцієнтів мод у часткових областях. Як бачимо, такий підхід не містить обчислювальних проблем.

В статті [2] розглянуто використання двох варіантів переходу до системи алгебраїчних рівнянь на прикладі розв'язання задачі про випромінювання поршня в нескінченний клинуватий хвильовод. Продовжуючи цю тему, в даній роботі розглядається задача з більш складною геометрією області існування звукового поля (скінчений клинуватий хвильовод) та використовуються різні комбінації поточкового спряження хвильових полів та середньоквадратичного наближення. Можливість використання комбінації двох підходів до спряження полів на межах часткових областей робить метод часткових областей більш гнучким при побудові загального розв'язку задачі.

2. Постановка і розв'язання задачі

Розглядається плоска задача про випромінювання поршня в скінченному клинуватому хвильоводі (рис. 1). Поршень здійснює гармонічні коливання з частотою ω . Для опису хвильових полів використовуємо дві системи координат: декартову x, y і полярну r, θ з загальним центром в точці O . Поверхні хвильоводу ідеально жорсткі, тобто нулю дорівнює нормальна складова коливальної швидкості на цих поверх-

нях. Будемо вважати, що в трикутній області OAB хвильове поле відсутнє.

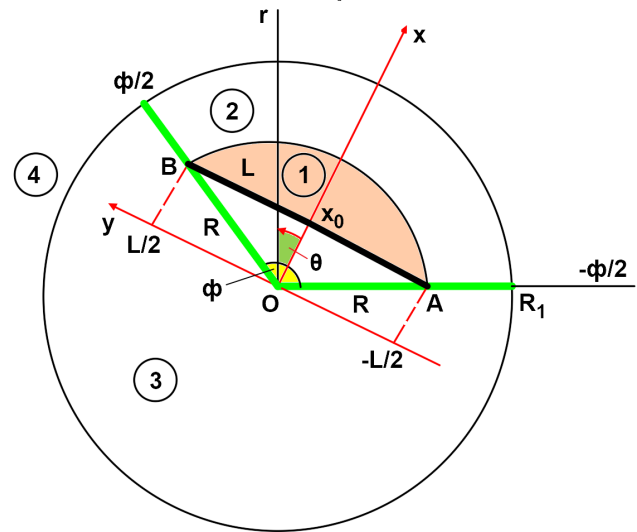


Рис. 1: Геометрія задачі

Згідно методу часткових областей виділимо чотири часткові області. Перша часткова область обмежена поверхнею поршня і дугою кола радіуса R , $-\phi/2 \leq \theta \leq \phi/2$, тобто утворена частинами поверхонь декартової і полярної систем координат відповідно. Інші часткові області визначаються в полярних координатах. Друга: $R \leq r \leq R_1$, $-\phi/2 \leq \theta \leq \phi/2$. Третя: $0 \leq r \leq R_1$, $\phi/2 \leq \theta \leq \pi \cup -\pi \leq \theta \leq -\phi/2$. Четверта: $r \geq R_1$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Поле тиску в області 1 запишемо у вигляді суми мод плоскопаралельного хвильоводу і суми мод обмеженої області клинуватого хвильоводу (часовий множник $\exp(-i\omega t)$ не пишемо):

$$p_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\alpha_n y) \exp(i\gamma_n(x - x_0)) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(\beta_n \theta) \frac{J_{\beta_n}(kr)}{J'_{\beta_n}(kR)}, \quad (1)$$

де $\alpha_n = \frac{2(n-1)\pi}{L}$, $\gamma_n = \sqrt{k^2 - \alpha_n^2}$, $\beta_n = \frac{2(n-1)\pi}{\phi}$, $n = 1, 2, \dots$; $k = \omega/c$ – хвильове число.

Поле тиску в областях 2 і 3 представимо у вигляді мод клинуватого хвильоводу:

$$p_2 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\beta_n \theta) \frac{J_{\beta_n}(kr)}{J'_{\beta_n}(kR_1)} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(\beta_n \theta) \frac{Y_{\beta_n}(kr)}{Y'_{\beta_n}(kR)}. \quad (2)$$

$$p_3 = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos(\eta_n(\theta \mp \frac{\phi}{2})) \frac{J_{\eta_n}(kr)}{J'_{\eta_n}(kR_1)}, \quad (3)$$

де $\eta_n = \frac{2(n-1)\pi}{2\pi-\phi}$, знак (-) при $\theta \geq 0$, знак (+) при $\theta \leq 0$.

Поле тиску в області 4 представимо у вигляді суперпозиції біжучих циліндричних хвиль:

$$p_4 = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos((n-1)\theta) \frac{H_{n-1}^{(1)}(kr)}{H_{(n-1)}^{(1)'}(kR_1)}. \quad (4)$$

Для визначення шести наборів невідомих коефіцієнтів $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n, n = 1, 2, \dots$ необхідно розписати шість граничних умов:

$$\frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x} = v(x_0, y), \quad x = x_0, \quad y = \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right], \quad (5)$$

$$p_1 = p_2, \quad r = R, \quad \theta = \left[-\frac{\phi}{2}, \frac{\phi}{2}\right], \quad (6)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} = \frac{\partial p_2}{\partial r}, \quad r = R, \quad \theta = \left[-\frac{\phi}{2}, \frac{\phi}{2}\right], \quad (7)$$

$$p_2 = p_4, \quad r = R_1, \quad \theta = \left[-\frac{\phi}{2}, \frac{\phi}{2}\right], \quad (8)$$

$$p_3 = p_4, \quad r = R_1, \quad \theta = \left[-\pi, -\frac{\phi}{2}\right] \cup \left[\frac{\phi}{2}, \pi\right], \quad (9)$$

$$\frac{\partial p_4}{\partial r} = \begin{cases} \frac{\partial p_2}{\partial r}, & r = R_1, \quad \theta = \left[-\frac{\phi}{2}, \frac{\phi}{2}\right] \\ \frac{\partial p_3}{\partial r}, & r = R_1, \quad \theta = \left[-\pi, -\frac{\phi}{2}\right] \cup \left[\frac{\phi}{2}, \pi\right]. \end{cases} \quad (10)$$

При виконанні граничних умов (5) – (10) будемо використовувати комбінацію двох підходів: поточкового спряження полів та середньоквадратичного наближення. В роботі досліджуються наступні комбінації двох підходів спряження полів:

- 1) середньоквадратичне наближення;
- 2) поточкове спряження полів: умови (5) – (7), середньоквадратичне наближення: умови (8) – (10);
- 3) поточкове спряження полів: умови (5) – (9), середньоквадратичне наближення: умова – (10);
- 4) поточкове спряження полів.

3. Аналіз чисельних результатів

В якості контрольних величин використовуємо такі енергетичні критерії:

$$\delta P^{(j)} = \left| \frac{P_i^{(j)} - P_d^{(j)}}{P_d^{(1)}} \right|, \quad j = 1, 2, 3, 4;$$

$$\delta P^{(1,m)} = \left| \frac{P_d^{(1)} - P_d^{(m)}}{P_d^{(1)}} \right|, \quad m = 2, 3, 4,$$

де $P_i^{(j)}$ – потік потужності з поверхні поршня при використанні варіанту розрахунку 1, 2, 3,

4 відповідно; $P_d^{(j)}$ – потік потужності в дальній зоні області 4. Величини $\delta P^{(j)}$, по суті, визначають точність виконання закону збереження енергії для конкретного (одного з чотирьох) варіанту розрахунку, а величини $\delta P^{(1,m)}$, $m = 2, 3, 4$ дають порівняльну оцінку потужності в дальньому полі при використанні варіантів розрахунку 2, 3, 4 по відношенню до варіанту 1 (середньоквадратичне наближення).

Для обчислення потоку потужності використовуємо формулу [1]:

$$P = \int_{(S)} IdS = 0,5 \int_{(S)} Re(p\nu_n^*)dS, \quad (12)$$

де p і ν_n^* – тиск і нормальна швидкість на деякій поверхні S , зірочка – знак комплексного спряження, інтенсивність $I = 0,5Re(p\nu_n^*)$.

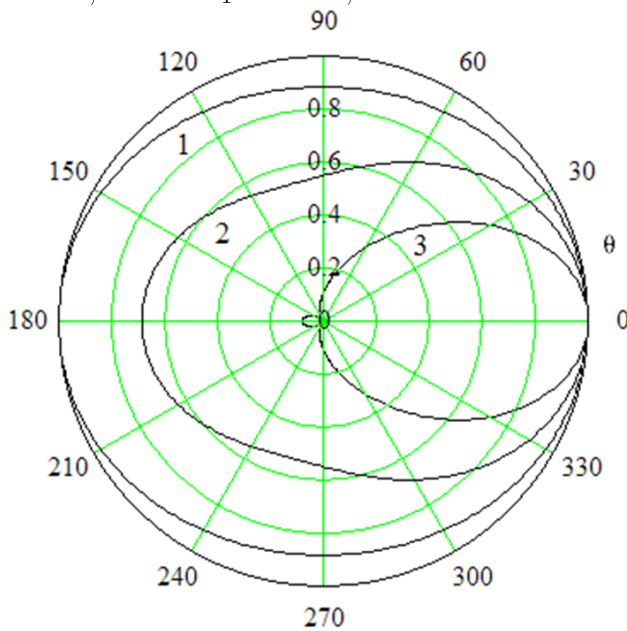
Виберемо такі параметри задачі: $\phi = 150^\circ$, $R/\lambda = 1, 2$, $R_1/\lambda = 1, 4$, тоді $L/\lambda = 2, 3$. Швидкість на поверхні поршня $\nu(x_0, y) = 1$. Результати розрахунків представлені в таблиці; $\Delta h/\lambda$ – відношення відстані між вузловими точками Δh до довжини хвилі λ .

Табл. 1: Енергетичні критерії

$\Delta h/\lambda$	0,3	0,2	0,1
$\delta P^{(1)}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-4}$	$4,3 \cdot 10^{-5}$
$\delta P^{(2)}$	$2,9 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$3,1 \cdot 10^{-3}$
$\delta P^{(3)}$	$2,6 \cdot 10^{-2}$	$8,7 \cdot 10^{-3}$	$2,6 \cdot 10^{-3}$
$\delta P^{(4)}$	$4,2 \cdot 10^{-2}$	$3,5 \cdot 10^{-2}$	$6,3 \cdot 10^{-3}$
$\delta P^{(1,2)}$	$5,8 \cdot 10^{-2}$	$2,7 \cdot 10^{-2}$	$8,9 \cdot 10^{-3}$
$\delta P^{(1,3)}$	$4,4 \cdot 10^{-2}$	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$3,5 \cdot 10^{-3}$
$\delta P^{(1,4)}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$	$8,5 \cdot 10^{-3}$	$8,3 \cdot 10^{-3}$

Як видно з таблиці, для всіх чотирьох варіантів розрахунку величини $\delta P^{(j)}$, $j = 1, 2, 3, 4$, зменшуються при зменшенні хвильової відстані між вузловими точками $\Delta h/\lambda$, що визначає відповідне збільшення кількості мод в часткових областях. Як і передбачалося, варіант використання середньоквадратичного наближення (варіант 1) є найкращим, інші варіанти розрахунку працюють приблизно однаково. Хоча, для даної задачі, мабуть слід відзначити варіант 3 (орієнтуємося на величину $\Delta h/\lambda \approx 0,1$), де в середньоквадратичному наближенні реалізується умова спряження по швидкості на границі області 4 з областями 2 і 3. Ця границя, як складна границя трьох областей має кутові точки $\theta = \pm\phi/2$, але використання однієї (полярної) системи координат дозволяє, завдяки властивості ортогональності відповідного набору функцій, достатньо просто провести процедуру алгебраїзації функціонального рівняння.

Побудований розв'язок дозволяє продемонструвати екрануючу властивість скінченного клину. Для цього розглянемо поршень достатньо малих хвильових розмірів. Нехай параметри задачі такі: $\phi = 150^\circ$, $R/\lambda = 0,1$, тоді $L/\lambda = 0,193$, величина $\Delta h/\lambda = 0,02$. На рис. 2 показані три варіанти розрахунку характеристики направленості по інтенсивності: поршень у вільному просторі (крива 1); часткова область 2 відсутня, тобто $R_1 = R$ (крива 2); $R_1/\lambda = 0,3$ (крива 3). Як бачимо, у вільному просторі (крива 1) поршень практично ненаправлений. Крива 2 відповідає ситуації, коли друга сторона поршня охоплена екраном (область OAB на рис. 1), що, природно, зменшує потік енергії з тильної сторони поршня. Екрануючу властивість скінченного клину наочно ілюструє крива 3. При цьому слід відмітити, що хвильовий розмір екрану достатньо малий, а саме $R_1 - R = 0,2\lambda$.



Список використаних джерел

1. Grinchenko V.T., Vovk I.V., Matsypura V.T. Acoustic wave problems. – New York: Begell House, Inc., 2018. – 439 p.
2. Грінченко В.Т., Гусак В.О., Мацупура В.Т. Використання двох варіантів спряження хвильових полів в методі часткових областей. – Журнал обчислювальної та прикладної математики, 2021, 2(136). – 5 – 16 с.

Рис. 2: Енергетичні діаграми спрямованості: $\phi = 150^\circ$, $R/\lambda = 0,1$, $L/\lambda = 0,193$: 1 – поршень у вільному просторі, 2 – $R_1 = R$ (область 2 відсутня), 3 – $R_1/\lambda = 0,3$

4. Висновки

На основі методу часткових областей отримано розв'язок задачі про випромінювання поршня в скінченний клинуватий хвилевод. При спряженні хвильових полів на границях часткових областей використано комбінацію двох підходів: поточкового спряження полів та середньоквадратичного наближення.

Використання різних комбінацій розрахунку цілком коректно. Всі комбінації працюють приблизно однаково. Варіант в якому використовується тільки середньоквадратичне наближення найточніший. Використання поточкового спряження полів спрощує розрахунок задачі.

Вибір необхідної комбінації розрахунку залежить від того, яка задача розглядається. Якщо для запису хвильових полів в часткових областях доводиться використовувати кілька систем координат, то при використанні середньоквадратичного наближення з'являться складні інтеграли, при обчисленні яких можуть виникати труднощі, в той час як при використанні поточкового спряження полів обчислювальних проблем не виникає.

References

1. GRINCHENKO V.T., VOVK I.V., MATSY PURA V.T. (2018) *Acoustic wave problems*. – New York: Begell House. – 439 p.
2. GRINCHENKO V.T., HUSAK V.O., MATSY PURA V.T. (2021, 2(136)) *Vykorystannia dvokh variantiv spriazhennia khvylovykh poliv v metodi chastkovykh oblastei*. – Zhurnal obchysluvalnoi ta prykladnoi matematyky. – 5 – 16 p.

Надійшла до редколегії 17.07.2023