УДК 539.3

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.24>

Токовий Ю. В., д.ф.-м.н., с.н.с.,
Юзв'як М. Й., пров. мат.,
Ясінський А. В., д.ф.-м.н., с.н.с.

Yu. V. Tokovyy, Dr. of Sci., Senior Scientist,
M. Yo. Yuzvyak, Math. Research Fellow,
A. V. Yasinsky, Dr. of Sci.

**Подання розв'язків плоских задач теорії
пружності для прямокутної області
через функції Вігака**

**Representation of solutions to the plane
elasticity problems for a rectangular domain
via Vihak's functions**

Інститут прикладних проблем механіки і мате-
матики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б,
e-mail: tokovyy@gmail.com

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mecha-
nics and Mathematics, NAS of Ukraine,
79060, Lviv, 3-B Naukova Str.
e-mail: tokovyy@gmail.com

*Узагальнено використання методу безпосереднього інтегрування ключових рівнянь основних за-
дач теорії пружності для обмежених областей з кутовими точками. Важливим етапом реалізації
методу є подання шуканих компонент тензора напружень через визначальні функції, вибір яких
суттєво залежить від специфіки задачі, а тому вважається найслабшою ланкою алгоритму побудо-
ви розв'язку. У роботі наведено універсальний підхід до вибору визначальних функцій, названих авто-
рами функціями Вігака (на честь основоположника та розробника методу безпосереднього
інтегрування, професора Василя Михайловича Вігака), з використанням інтегральних співвідношень,
отриманих на основі рівнянь рівноваги. Застосування підходу проілюстровано на прикладі плоскої
задачі теорії пружності для прямокутної області. Показано зв'язок функції Вігака для розглянутої
задачі з класичною бігармонічною функцією напружень Ері.*

*Ключові слова: пружна рівновага, плоска задача, прямокутна область, метод безпосереднього
інтегрування, функції Вігака.*

*The paper presents the generalization of the direct integration method for the governing equations of the
basic elasticity problems for the bounded domains with corner points. An important stage in the realization
of the method is the representation of the unknown stress-tensor components via the key functions. The
selection of these functions is motivated by some specific features of the problems and thus was regarded as
a weakest part of the solution algorithm. Herein, we suggest an universal approach for the selection of the
key functions, which we started to call the Vihak functions (to honor Prof. Vasyl M. Vihak, the founder and
developer of the direct integration method) by using the integral relationships derived from the equilibrium
equations. The approach is illustrated by the solution of a plane elasticity problem for an elastic rectangle.
The relationship between Vihak's function for the considered problem and the classical biharmonic Airy
stress function is shown.*

*Key Words: elastic equilibrium, plane problem, rectangular domain, direct integration method, Vihak's
functions.*

Статтю представив член-кор. НАН України Жук Я.О.

Вплив нових тенденцій розвитку техніки та
технологій, зокрема, щодо мініатюризації техніч-
них та електронних пристроїв і потреба якісної
оцінки їх міцнісних характеристик сприяє від-
новленню інтересу до класичних задач механіки,
постановка та розв'язки яких переосмислюються

з урахуванням сучасних потреб. Особливу увагу
привертають задачі для тіл з так званими
концентраторами напружень, наявність яких обу-
мовлена специфікою матеріалу або особливостя-
ми геометрії досліджуваних тіл. До задач такого
класу належать задачі теорії пружності та термо-

пружності для обмежених тіл з кутовими точками, зокрема, плоска задача для пружного прямокутника [1]. Історія вивчення цієї задачі нараховує понад сторіччя, за яке напрацьовано низку наближених аналітичних, напіваналітичних і числових методів побудови її розв'язків [1–3]. Втім, не зважаючи на видиму простоту задачі, її точного аналітичного розв'язку у загальній постановці, наскільки відомо авторам, не було отримано. Це пов'язано насамперед з обмеженістю класичного методу відокремлення змінних для одночасного задоволення ключових рівнянь задачі та повного набору крайових умов на сторонах прямокутника. Цей факт спонукає до продовження досліджень задач такого класу та розробки ефективних методів їх розв'язання.

У роботах [4, 5] розвинуто метод безпосереднього інтегрування вихідних рівнянь плоских задач теорії пружності й термопружності для прямокутної області, яка зазнає впливу зовнішніх силових навантажень на усіх сторонах та внутрішнього розподілу температурного поля. Метод ґрунтується на вираженні шуканих компонент тензора напружень через визначальні функції з подальшим відшукуванням останніх у вигляді розвинень у ряди за повними ортогональними системами власних і приєднаних функцій, що виокремлюють складові від само- й несамозрівноважених навантажень. Отримано необхідні умови для зовнішніх навантажень існування розв'язків таких задач. Початковим етапом застосування методу є вибір визначальних напружень, який не був достатньо обґрунтований. У цій статті запропоновано підхід до використання певних визначальних функцій для вираження компонент тензора напружень єдиним чином. Уведені з використанням інтегральних співвідношень, отриманих на основі рівнянь рівноваги, такі визначальні функції названо на честь основоположника методу, професора В.М. Вігака.

Розглянемо плоску задачу теорії пружності для прямокутної області $D = \{(x, y) \in [-a_x, a_x] \times [-a_y, a_y]\}$, на сторонах якої задано зовнішні силові навантаження

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(\pm a_x, y) &= -p_x^\pm(y), & \sigma_{xy}(\pm a_x, y) &= \tau_{xy}^\pm(y), \\ \sigma_{yy}(x, \pm a_y) &= -p_y^\pm(x), & \sigma_{yx}(x, \pm a_y) &= \tau_{yx}^\pm(x). \end{aligned} \quad (1)$$

Тут $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ – компоненти тензора напружень, а праві частини задано неперервно-диференційованими функціями. За відсутності масових сил напружений стан області D описується класичними рівняннями [1] рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

та суцільності

$$\left\langle \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\rangle (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 \quad (3)$$

в напруженнях.

З використанням співвідношень, отриманих диференціюванням рівнянь рівноваги (2), запровадимо функцію

$$V = \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (4)$$

Проінтегрувавши (4) з урахуванням умов (1), знайдемо вирази напружень через уведену функцію:

$$\begin{aligned} 2\sigma_{xx} &= -p_x^+ - p_x^- - (x - a_x) \frac{d\tau_{xy}^+}{dy} - (x + a_x) \frac{d\tau_{xy}^-}{dy} + \\ &\quad + \int_{-a_x}^{a_x} V(\xi, y) |x - \xi| d\xi, \\ 2\sigma_{yy} &= -p_y^+ - p_y^- - (y - a_y) \frac{d\tau_{yx}^+}{dx} - (y + a_y) \frac{d\tau_{yx}^-}{dx} + \\ &\quad + \int_{-a_y}^{a_y} V(x, \eta) |y - \eta| d\eta, \\ 4\sigma_{xy} &= 2(\tau_{xy}^+ + \tau_{xy}^- + \tau_{yx}^+ + \tau_{yx}^-) - \\ &\quad - \tau_{xy}^+(a_y) - \tau_{xy}^+(-a_y) - \tau_{xy}^-(a_y) - \tau_{xy}^-(-a_y) - \\ &\quad - \iint_D V(\xi, \eta) \operatorname{sgn}(x - \xi) \operatorname{sgn}(y - \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (5)$$

та інтегральні умови для функції $V(x, y)$

$$\begin{aligned} \int_{-a_x}^{a_x} V(x, y) dx &= -\frac{d\tau_{xy}^+}{dy} + \frac{d\tau_{xy}^-}{dy}, \\ \int_{-a_y}^{a_y} V(x, y) dy &= -\frac{d\tau_{yx}^+}{dx} + \frac{d\tau_{yx}^-}{dx}, \\ \int_{-a_x}^{a_x} x V(x, y) dx &= p_x^+ - p_x^- - a_x \left(\frac{d\tau_{xy}^+}{dy} + \frac{d\tau_{xy}^-}{dy} \right), \\ \int_{-a_y}^{a_y} y V(x, y) dy &= p_y^+ - p_y^- - a_y \left(\frac{d\tau_{yx}^+}{dx} + \frac{d\tau_{yx}^-}{dx} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Аналогічні вирази та умови отримано в [4] для задачі термопружності. Шляхом інтегрування

умов (6) виводять інтегральні умови рівноваги та суцільності для зовнішніх навантажень (1), що співпадають зі знайденими в роботах [4, 5].

Таким чином, отримано подання (5) компонент тензора напружень через одну функцію $V(x, y)$, а вісім граничних умов (1) еквівалентно замінено на чотири інтегральні умови (6). Функцію $V(x, y)$ називатимемо функцією Вігака.

Порівнюючи вирази для компонент тензора напружень (4) з відповідними виразами через функцію напружень Ері $\Phi(x, y)$ [1], знаходимо співвідношення

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{4} \iint_D V(\xi, \eta) |x - \xi| |y - \eta| d\xi d\eta,$$

$$\frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} = V(x, y).$$

З використанням загальної стратегії методу безпосереднього інтегрування [4, 5], напружений стан в області D внаслідок силового навантаження (1) можна подати у вигляді суперпозиції самозрівноваженого та несамозрівноваженого напружених станів. Відповідно, функцію Вігака можна подати у вигляді $V = V_0 + V_s$, де V_0 відповідає несамозрівноваженим (елементарним) розв'язкам для напружень [5], а V_s відповідає самозрівноваженим напруженням [4] і задовольняє однорідні інтегральні умови

$$\int_{-a_x}^{a_x} V_s dx = \int_{-a_x}^{a_x} x V_s dx = \int_{-a_y}^{a_y} V_s dy = \int_{-a_y}^{a_y} y V_s dy = 0, \quad (7)$$

Подання самозрівноважених компонент тензора напружень $\tilde{\sigma}_{xx}$, $\tilde{\sigma}_{xy}$ [4] через функцію $V_s(x, y)$ мають вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{xx} = & \frac{1}{2} \int_{-a_x}^{a_x} V_s(\xi, y) |x - \xi| d\xi - \\ & - \frac{(x + a_x)^2 (2a_x - x)}{4a_x^3} \tilde{p}_x^+ - \frac{(x - a_x)^2 (2a_x + x)}{4a_x^3} \tilde{p}_x^- - \\ & - \frac{(x - a_x)^2}{4a_x^2} \left((x + a_x) \frac{d\tilde{\tau}_{xy}^+}{dy} + (x - a_x) \frac{d\tilde{\tau}_{xy}^-}{dy} \right) - \\ & - \frac{1}{4a_y} \int_{-a_y}^{a_y} (\tilde{\tau}_{yx}^+(\xi) - \tilde{\tau}_{yx}^-(\xi)) \operatorname{sgn}(x - \xi) d\xi - \\ & - \frac{3y}{4a_y^3} \left(a_y \int_{-a_x}^{a_x} (\tilde{\tau}_{yx}^+(\xi) + \tilde{\tau}_{yx}^-(\xi)) \operatorname{sgn}(x - \xi) d\xi + \right. \\ & \left. + \int_{-a_x}^{a_x} (\tilde{p}_y^+(\xi) - \tilde{p}_y^-(\xi)) |x - \xi| d\xi \right), \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{xy} = & -\frac{1}{4} \iint_D V_s(\xi, \eta) \operatorname{sgn}(x - \xi) \operatorname{sgn}(y - \eta) d\xi d\eta + \\ & + \frac{a_x + x}{2a_x} \tilde{\tau}_{xy}^+ + \frac{a_x - x}{2a_x} \tilde{\tau}_{xy}^- + \frac{a_y + y}{2a_y} \tilde{\tau}_{yx}^+ + \frac{a_y - y}{2a_y} \tilde{\tau}_{yx}^- + \\ & + 3 \frac{x^2 - a_x^2}{a_x^2} \frac{\tilde{\tau}_{xy}^+ + \tilde{\tau}_{xy}^-}{4} + 3 \frac{y^2 - a_y^2}{a_y^2} \frac{\tilde{\tau}_{yx}^+ + \tilde{\tau}_{yx}^-}{4} + \\ & + \frac{3(x^2 - a_x^2)}{8a_x^3} \int_{-a_y}^{a_y} (\tilde{p}_x^+(\eta) - \tilde{p}_x^-(\eta)) \operatorname{sgn}(y - \eta) d\eta \\ & + \frac{3(y^2 - a_y^2)}{8a_y^3} \int_{-a_x}^{a_x} (\tilde{p}_y^+(\xi) - \tilde{p}_y^-(\xi)) \operatorname{sgn}(x - \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Тут $\tilde{p}_x^+$, $\tilde{p}_y^+$, $\tilde{\tau}_{yx}^+$, $\tilde{\tau}_{xy}^+$ – відповідні самозрівноважені частини [4] крайових умов (1), а вираз для $\tilde{\sigma}_{yy}$ є аналогічним.

Підстановкою виразів (8) у рівняння (3) з використанням (2) отримуємо наступне інтегро-диференціальне рівняння суцільності

$$\begin{aligned} 2V_s + \int_{-a_x}^{a_x} \frac{\partial^2 V_s(\xi, y)}{\partial y^2} \frac{|x - \xi|}{2} d\xi + \\ + \int_{-a_y}^{a_y} \frac{\partial^2 V_s(x, \eta)}{\partial x^2} \frac{|y - \eta|}{2} d\eta = \\ = -\frac{3x}{a_x^3} (\tilde{p}_x^+ - \tilde{p}_x^-) + \frac{3x + a_x}{a_x^2} \frac{d\tilde{\tau}_{xy}^+}{dy} + \frac{3x - a_x}{a_x^2} \frac{d\tilde{\tau}_{xy}^-}{dy} + \\ + \frac{d^2}{dy^2} \left((x + a_x)^2 \frac{2a_x - x}{4a_x^3} \tilde{p}_x^+ + (x - a_x)^2 \frac{2a_x + x}{4a_x^3} \tilde{p}_x^- + \right. \\ \left. + \frac{(x + a_x)(x - a_x)^2}{4a_x^2} \frac{d\tilde{\tau}_{xy}^+}{dy} + \frac{(x - a_x)(x + a_x)^2}{4a_x^2} \frac{d\tilde{\tau}_{xy}^-}{dy} \right) - \\ - \frac{3y}{a_y^3} (\tilde{p}_y^+ - \tilde{p}_y^-) + \frac{3y + a_y}{a_y^2} \frac{d\tilde{\tau}_{yx}^+}{dx} + \frac{3y - a_y}{a_y^2} \frac{d\tilde{\tau}_{yx}^-}{dx} + \\ + \frac{d^2}{dx^2} \left((2a_y - y)(y + a_y)^2 \tilde{p}_y^+ + \right. \\ \left. + \frac{(2a_y + y)(y - a_y)^2}{4a_y^3} \tilde{p}_y^- + \right. \\ \left. + \frac{(y + a_y)(y - a_y)^2}{4a_y^2} \frac{d\tilde{\tau}_{yx}^+}{dx} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{(y - a_y)(y + a_y)^2}{4a_y^2} \frac{d\bar{\tau}_{yx}^-}{dx} \Bigg). \quad (9)$$

Для побудови розв'язку отриманого ключового рівняння (9) з інтегральними умовами (7) використовується методика [4]. Побудову напружень, що відповідають несамозрівноваженій складовій V_0 наведено в роботі [5].

У такий спосіб запропоновано подання (5) компонентів тензорів напружень у випадку плоскої задачі теорії пружності через єдину визначальну функцію Вігака. Слід зауважити, що на

відміну від бігармонічної функції Ері, використання функції Вігака не пов'язане з надлишковим диференціюванням, а також дозволяє залучити крайові умови, задані на сторонах прямокутника. У статті [6] наведено аналогічні подання для плоских задач термопружності вільних від силових навантажень прямокутній області, кільцевому та круговому секторах, а також для осесиметричної задачі термопружності у порожньому циліндрі скінченної довжини. В [7] наведено приклад числової реалізації для останньої задачі та вказано не обчислювальні переваги застосування функцій Вігака.

Список використаних джерел

1. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров / В.Т. Гринченко. – Киев: Наук. думка, 1978. – 264 с.
2. Lurie S.A. The biharmonic problem in the theory of elasticity / S.A. Lurie, V.V. Vasiliev. – Luxembourg: Gordon & Breach, 1995. – 265 p.
3. Meleshko V.V. Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem / V.V. Meleshko // Appl. Mech. Rev. – 2003. – **56**, No. 1. – P. 33–85.
4. Vihak V.M. The solution of the plane thermoelasticity problem for a rectangular domain / V.M. Vihak, M.Y. Yuzvyak, A.V. Yasinskij // Journal of Thermal Stresses. – 1998. – **21**, No. 5. – P. 545–561.
5. Vihak V. Exact solution of the plane problem of elasticity in a rectangular region / V. Vihak, Yu. Tokovyi, A. Rychahivskyy // J. Comput. Appl. Mech. – 2002. – **3**, No. 2. – P. 193–206.
6. Кушнір Р.М. Зведення двовимірних задач термопружності для тіл з кутовими точками до ключових інтегро-диференціальних рівнянь / Р.М. Кушнір, Ю.В. Токовий, М.Й. Юз'вяк, А.В. Ясінський // Укр. мат. журнал. – 2021. – **73**, № 10.
7. Yuzvyak M. Axisymmetric thermal stresses in an elastic hollow cylinder of finite length / M. Yuzvyak, Yu. Tokovyy, A. Yasinskyy // Journal of Thermal Stresses. – 2021. – **44**, No. 3. – P. 359–376.

References

1. GRINCHENKO, V.T. (1978) *Ravnovesie i ustanovivshiesya kolebania uprugikh tel konechnykh razmerov*. Kiev: Naukova Dumka.
2. LURIE, S.A. & VASILIEV, V.V. (1995). *The biharmonic problem in the theory of elasticity*. Luxembourg: Gordon & Breach.
3. MELESHKO, V.V. (2003). Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem, *Appl. Mech. Rev.* 56(1). p. 33–85.
4. VIHAK, V.M., YUZVYAK, M.Y., & YASINSKIJ, A.V. (1998). The solution of the plane thermoelasticity problem for a rectangular domain. *Journal of Thermal Stresses*. 21(5). p. 545–561.
5. VIHAK, V., TOKOVIY, Yu., & RYCHAHIVSKYY, A. (2002) Exact solution of the plane problem of elasticity in a rectangular region. *Journal of Computational and Applied Mechanics*. 3(2). p. 193–206.
6. KUSHNIR, R.M., TOKOVYY, YU.V., YUZVYAK, M.YO., & YASINSKYY, A.V. (2021) Zvedennya dvovymirnykh zadach termopruzhnosti dlya til z kutovymi tochkamy do klyuchovykh integro-differentialnykh rivnyan'. *Ukrainian Mathematical Journal*, 73(10).
7. YUZVYAK M., TOKOVYY, Yu., & YASINSKYY A. (2021) Axisymmetric thermal stresses in an elastic hollow cylinder of finite length. *Journal of Thermal Stresses*. 44(3). p. 359–376.

Надійшла до редколегії 29.08.21