УДК 539.3

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.13>

Маслов Б.П., д.ф.-м.н., с.н.с.

Maslov B.P., Dr. Sci., Phys.-Math.

**Спадкова повзучість ізотропних
композитів випадкової структури при
складному напруженому стані**

**Hereditary creep of isotropic composites of
random structure under a complex stress state**

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН
України, 03057, м. Київ-57, вул. Нестерова, 3,
e-mail: maslov@inmech.kiev.ua

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics NAS
Ukraine, 03057, Kyiv, 3 Nesterov Str.,
e-mail: maslov@inmech.kiev.ua

Розв'язано задачу нелінійної спадкової повзучості композитів випадкової структури в рамках нелінійної теорії в'язкопружності другого порядку. Спадкові функціонали використано для побудови загальних визначальних рівнянь складного напруженого стану. Принцип відповідності Шепері для квазілінійних в'язкопружних середовищ узагальнено щодо проблем спадкової повзучості. Отримано розв'язок стохастичної крайової задачі про визначення концентрації напружень та їх релаксації в композиті з полімерною матрицею (ПМК). Для виведення повної системи в'язкопружних рівнянь другого порядку використовується метод послідовного наближення. Визначено функції повзучості, локально усереднені за в'язкопружною матрицею та пружними включеннями. Наведені приклади, що показують важливість взаємного впливу нелінійних пружних та в'язких властивостей компонентів на перерозподіл напружень біля включень у багатокомпонентних ПМК. Як практичний результат можна відзначити можливість прогнозування довготривалої міцності матеріалу, коли в'язкопружне поле напружень відомо в результаті комп'ютерного моделювання в околі включень.

Ключові слова: спадкова повзучість, полімер, композит, прогнозування.

Nonlinear hereditary creep problem of the mechanics of composites is solved within the framework of a second-order theory. The hereditary functionals are used to construct general constitutive relations. A stochastic boundary value problem for determining the stress concentration and its relaxation in metal matrix composite (PMC) is solved in Laplace-Carson image space. Shapery's correspondence principle for quasi-linear viscoelastic media is generalised on the hereditary creep problem and the method of successive approximation is used. The reduced creep functions and the stress concentration parameters are determined. Examples are given showing the importance of the mutual influence of nonlinear elastic and viscous properties of the components on stress redistribution near inclusions with possibility to predicting the long-term strength.

Key Words: hereditary creep, polymer, isotropic composite, prediction.

Статтю представив член-кор. НАН України Жук Я.О.

Композитні матеріали застосовуються в елементах конструкцій, які експлуатуються як в умовах тривалих одноразових, так і циклічних навантажень [1, 2]. У зв'язку з цим, для проектування нових матеріалів із заданими властивостями важливим є вивчення мікроструктурних напруг і деформацій, що змінюються в часі. Велике практичне значення має прогнозування наведених макроскопічних характеристик в'язкопружності і визначення їх залежності від форми включень, типу

просторового армування, об'ємної концентрації компонентів. Раніше [1] було отримано розв'язки задач знаходження ефективних пружних постійних нелінійних стисливих і нестисливих пружних композитів. Тут розглянемо в'язкопружний ізотропний композитний матеріал випадкової структури і використаємо метод умовного усереднення [1], із застосуванням інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа-Карсона [3,4] та чисельних алгоритмів в середовищі Fortran 95. В межах теорії спадкової

повзучості малих деформацій визначальне співвідношення між деформаціями і напруженнями вважаємо казілінійним, відповідно до модельних уявлень [5, 6]. Накопичена додаткова енергія $U(\sigma, t)$ в матеріалі, що проявляє властивість квазілінійної спадкової повзучості, може бути виражена формулою

$$U(\sigma, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t J(2t - t_1 - t_2) d\sigma(t_1) d\sigma(t_2) + \frac{1}{3} \int_0^t \int_0^t \int_0^t J(3t - t_1 - t_2 - t_3) d\sigma(t_1) d\sigma(t_2) d\sigma(t_3) \quad (1.1)$$

Тут $J(t)$, $\underline{J}(t)$ - функції повзучості другого та третього порядків [1, 6]. Тоді можемо записати для першого, лінійного e_1

$$e_{1ij}(\mathbf{e}, t) = (J_{ijkl} * d\sigma_{kl})(t),$$

і другого e_2 наближень

$$e_{2ij}(\mathbf{e}, t) = (J_{ijkl} * d\sigma_{kl})(t) + (d\sigma_{kl} * J_{ijklmn} * d\sigma_{mn})(t).$$

Застосуємо надалі узагальнений принцип відповідності Шепері [5, 6] для залежних від часу квазістатичних розв'язків квазілінійних в'язкопружних крайових задач. Це дозволяє аналізувати задачу спадкової повзучості механіки випадково армованих композитів, виходячи з відомого нелінійно пружного розв'язку та використанням чисельно-аналітичних інтегральних перетворень Фур'є та Лапласа-Карсона [3-5].

Деформації в спадковому матеріалі визначаються історією напружень $\sigma(s)$, $s \in [0, t]$, а також початковими умовами $\mathbf{e}(t=0) = \mathbf{0}$. Тоді для лінійного середовища в загальній тензорній формі, після інтегрування (1.1), можна записати [5, 6]

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \mathbf{J}(t-s) \frac{d}{ds} \sigma(\mathbf{x}, s) ds, \quad (1.2)$$

де $\mathbf{J}(t)$ тензор піддатливості (функція ретардації). Або в короткій символічній формі [5]

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}, t) = \frac{d}{dt} (\mathbf{J} * \sigma)(\mathbf{x}, t) = (\sigma * \mathbf{J})(\mathbf{x}, t), \quad (1.3)$$

де знаком $*$ позначена операція інтегральної згортки, точка над символом означає похідну по часу. Таким чином, вираз $(\sigma * \mathbf{J})(t) = (\sigma * d\mathbf{J})(t)$ являє собою згортку Стілтєса [2]. Якщо $f(t)$ – деяка неперервна функція на інтервалі $0 \leq t < \infty$, то перетворення Лапласа-Карсона (LC) функції $f(t)$ визначається наступним чином [2]

$$LC\{f(t)\} = f(s) = f_s = s \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \quad (1.4)$$

В подальшому застосовуємо визначальний закон миттєвого деформування другого порядку малості за величиною деформацій [1, 3]

$$\mathbf{e}(s) = \mathbf{J}(s)\sigma(s) + \sigma(s)\underline{\mathbf{J}}(s)\sigma(s)$$

Для аналізу задач прогнозу деформацій в рамках моделі спадкової повзучості (1.1) використовуємо узагальнений принцип відповідності Шепері [5]. Позначимо t час, $\mathbf{x}$ - положення матеріальної точки в просторі, $\mathbf{e}(\mathbf{x}, t)$ - поточні деформації, $\sigma(\mathbf{x}, t)$ поточні напруги, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ поточні переміщення. Припускаємо, що матеріал виявляє миттєву пружну реакцію, та позначимо $\mathbf{e}^e(\mathbf{x}, t)$, $\sigma^e(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{u}^e(\mathbf{x}, t)$ - миттєві пружні деформації, напруги і переміщення, відповідно. Функції накопиченої енергії $W(\mathbf{e})$ і додаткової енергії $U(\sigma)$ дають можливість знайти миттєві деформації (при повзучості) або миттєві напруги (процес релаксації)

$$U = U(\sigma, \mathbf{x}, t), \quad \mathbf{e}^e(t) = \frac{\partial U}{\partial \sigma}(\sigma, \mathbf{x}, t), \quad (1.5)$$

$$W = W(\mathbf{e}, \mathbf{x}, t), \quad \sigma^e(t) = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{e}}(\mathbf{e}, \mathbf{x}, t). \quad (1.6)$$

Узагальнений принцип відповідності Р. Шепері щодо задач спадкової повзучості

Тут ми застосуємо узагальнений принцип відповідності для залежних від часу квазістатичних розв'язків нелінійних пружних і в'язкопружних крайових задач. Це дозволяє аналізувати спадкову задачу повзучості, виходячи з відомого нелінійно пружного розв'язку. Рівняння рівноваги запишемо у вигляді

$$\text{div } \sigma + \mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (1.7)$$

Співвідношення між напруженнями Коші і модифікованими (відновленими) деформаціями $\mathbf{e}^e(t)$

$$\sigma(t) = [h * d(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{e}})^e](t), \quad h(t) = g^{-1}(t) \quad (1.8)$$

Це призводить до трьох інтегродиференціальних рівнянь для трьох переміщень $u_i(\mathbf{x})$ при підстановці в (1.7). Розв'язок задачі спадкової повзучості має вигляд

$$\sigma(t) = (h * d\sigma^e)(t), \quad \mathbf{u}(t) = (g * d\mathbf{u}^e)(t), \quad (1.9)$$

$$\sigma^e(t) = (g * d\sigma)(t), \quad \mathbf{u}^e(t) = (h * d\mathbf{u})(t), \quad (1.10)$$

де σ^e і $\mathbf{u}^e$ задовольняють рівнянням базової задачі нелінійної пружності (1.5), (1.7), (1.8)

разом з граничними умовами $\mathbf{t}^e = \mathbf{t}$ і початковою умовою $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^e(0) = \mathbf{0}$. Таким чином, $\mathbf{u}^e$ задовольняють рівнянням відповідної нелінійної пружної задачі разом з тими ж масовими силами $\mathbf{b}^e = \mathbf{b}$ в тілі і граничними умовами $\mathbf{t}^e = \mathbf{P}$ на границі.

Локальна задача механіки спадкової повзучості при складному напруженому стані

Прогнозування параметрів спадкової повзучості композитів є одним з важливих чинників при розрахунку і конструюванні сучасних елементів конструкцій. Задача полягає у прогнозуванні повзучості за властивостями та об'ємному вмісту їх компонентів. Отже, ізотропний композит моделюємо неоднорідним середовищем, що займає об'єм V , складеним із N однорідних фаз з характеристичною функцією $\chi^{(r)}(\mathbf{x})$ об'єму $V^{(r)}$, ($r \in [0, N]$). Крім того, приймається, що $V^{(r)} = V$ і міжфазний контакт є ідеальним. Функція повзучості кожної фази r

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \sum_{r=1}^N \mathbf{J}^{(r)}(t) \chi^{(r)}(\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

Причому $\chi^{(r)}(\mathbf{x}) = 1$, $\forall \mathbf{x} \in V^{(r)}$ та $\chi^{(r)}(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \notin V^{(r)}$ в іншому випадку. Об'ємне осереднення по V та $V^{(r)}$ позначається надалі відповідно $\langle \cdot \rangle$ та $\langle \cdot \rangle^{(r)}$. Об'ємне осереднення характеристичної функції, по фазі r дає значення об'ємної концентрації $c_r = \langle \chi \rangle^{(r)}$. Об'ємне осереднення функції f по представницькому об'єму V та по фазі s позначено $\bar{f} = \langle f \rangle = \frac{1}{V} \int_V f dv$ та $\bar{f}^{(s)} = \langle f \rangle^{(s)} = \frac{1}{V^{(s)}} \int_{V^{(s)}} f dv$ відповідно.

Стохастичні рівняння рівноваги і граничні умови першого лінійного наближення, записані в області LC перетворень, можна представити у формі [1]

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\nabla) \mathbf{u}'_{(1)}(\mathbf{x}, s) &= -\nabla \boldsymbol{\tau}_{(1)}(\mathbf{x}, s); \\ \mathbf{u}'(\mathbf{x}, s) &= \mathbf{u}(\mathbf{x}, s) - \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, s); \\ \boldsymbol{\tau}_{(1)}(\mathbf{x}, s) &= \delta \mathbf{C}(\mathbf{x}, s) \mathbf{e}_{(1)}(\mathbf{x}, s); \\ \delta \mathbf{C}(\mathbf{x}, s) &= \mathbf{C}(\mathbf{x}, s) - \mathbf{L}; \end{aligned} \quad (2.2)$$

рискою зверху позначені результати статистичного усереднення в зразку із випадковим тензором пружності $\mathbf{C}(\mathbf{x}, s)$. Фур'є-образ $\mathbf{L}(\mathbf{k})$ диференціального оператора визначається співвідношеннями [1, 3]

$$\begin{aligned} [\mathbf{L}(\mathbf{k})]_{im} &= L_{ijmn} k_j k_n; \\ \mathbf{L} &= \mu_L (\alpha_L \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mathbf{I}), \quad \alpha = \lambda / \mu, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$\mathbf{L}$ - тензор модулів пружності однорідного тіла порівняння [1], тобто параметри μ_L, α_L є постійними в межах представницького об'єму V , $\mathbf{I}$ - одиничний симетричний тензор четвертого рангу, $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, s)$ - тензор напружень поляризації. Функцію Гріна $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ системи рівнянь (2.2) знайдемо з умови

$$\mathbf{L}(\nabla) \mathbf{G}(\mathbf{x}) + \mathbf{I} \delta(\mathbf{x}) = \mathbf{0}; \quad (2.4)$$

Тут $\delta(\mathbf{x})$ - дельта функція Дірака, тоді

$$\mathbf{G}_{im}(\mathbf{k}) = [\mathbf{L}(\mathbf{k})]_{im}^{-1}.$$

Використовуючи методику, викладену в роботах [1], розв'язок системи запишемо у формі інтеграла типу згортки по області V

$$\mathbf{e}'_{(1)}(\mathbf{x}_1, s) = \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) * \boldsymbol{\tau}_{(1)}(\mathbf{x}_2, s), \quad (2.5)$$

Як приклад розглянемо спадкову повзучість композитного зразка, виготовленого із трикомпонентної суміші: полімерна матриця типу ED 10, що армована випадково розорієнтованими у просторі сфероїдальними включеннями скла та бору. Пружні та реологічні характеристики компонентів наведено в [1].

Рис.1 Зміна функцій повзучості матриці та трифазного композиту в залежності від часу t

На рис. 1 зображено криві залежності нормованої функції повзучості $g(t) = E^e J(t)$ від часу t . Суцільна лінія відповідає функції повзучості полімерної матриці. Штрихова лінія ілюструє поведінку функції повзучості для композитного матеріалу із вмістом арматури.

Список використаних джерел

1. Khoroshun L.P., Maslov B.P., Shikula E.N., Nazarenko L.V. Statistical Mechanics and Effective Properties of Materials. – Vol. 3 of the 12-volume series Mechanics of Composites, 1993.- 390 p. (in Russian).
2. Голуб В.П., Маслов Б.П., Фернати П.В. К определению параметров ядер наследственности изотропных линейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии // Теорет. и прикл. механика, 2013. – Том 53, №7. – С. 53-64.
3. Маслов Б.П. Застосування квазілінійної моделі в'язкопружності для прогнозування повзучості неоднорідного геологічного середовища // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки, 2019, №1. – С. 122-125.
4. Asaro R.J., Lubarda V. A. Mechanics of Solids and Materials. Cambridge University Press, 2006, 880 p.
5. Christensen R.M. Theory of viscoelasticity. An Introduction. – New-York and London: Academic Press Inc., 2nd ed., 1982. – 370 p.
6. Golub V.P., Maslov B.P., and Fernati P.V. Identification of the Hereditary Kernels of Isotropic Linear Viscoelastic Materials in Combined Stress State. I. Superposition of Shear and Bulk Creep // International Applied Mechanics, 2016. – Vol. 52, N2, pp. 165-174.
7. Golub V.P., Maslov B.P., and Fernati P.V. Identification of the Hereditary Kernels of Isotropic Linear Viscoelastic Materials in Combined Stress State. II. Deviators Proportionality // International Applied Mechanics, 2016. – Vol. 52, N6, pp.111-125.
8. Maslov B.P. Combined numerical and analytical determination of Poisson's ratio for viscoelastic isotropic materials // International Applied Mechanics, 2018. – 54, N2, pp. 220-230.
9. Schapery R.A. Correspondence principles and a generalized integral for large deformation and fracture analysis of viscoelastic media // International Journal of Fracture, July 1984. – Vol. 25, Issue 3, pp. 195-223.

References

1. KHOROSHUN L.P., MASLOV B.P., SHIKULA E.N., NAZARENKO L.V. Statistical Mechanics and Effective Properties of Materials. – Vol. 3 of the 12-volume series Mechanics of Composites, 1993.- 390 p. (in Russian).
2. Golub V.P., Maslov B.P., Fernati P.V. K opredeleniyu parametrov yader nasledstvennosti yzotropnykh lyneino-viazkoupruhykh materyalov pry slozhnom napriazhennom sostoianyy // Teoret. y prykl. mekhanyka, 2013. – Tom 53, №7. – S. 53-64.
3. Maslov B.P. Zastosuvannia kvaziliniinoi modeli viazkopruzhnosti dlia prohnouzuvannia povzuchosti neodnorodnoho heolohichnoho seredovyshcha // Visnyk Kyivskoho natsionalnoho universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Seriiia fizyko-matematychni nauky, 2019, №1. – S. 122-125.
4. Asaro R.J., Lubarda V. A. Mechanics of Solids and Materials. Cambridge University Press, 2006, 880 p.
5. Christensen R.M. Theory of viscoelasticity. An Introduction. – New-York and London: Academic Press Inc., 2nd ed., 1982. – 370 p.
6. Golub V.P., Maslov B.P., and Fernati P.V. Identification of the Hereditary Kernels of Isotropic Linear Viscoelastic Materials in Combined Stress State. I. Superposition of Shear and Bulk Creep // International Applied Mechanics, 2016. – Vol. 52, N2, pp. 165-174.
7. Golub V.P., Maslov B.P., and Fernati P.V. Identification of the Hereditary Kernels of Isotropic Linear Viscoelastic Materials in Combined Stress State. II. Deviators Proportionality // International Applied Mechanics, 2016. – Vol. 52, N6, pp.111-125.
8. Maslov B.P. Combined numerical and analytical determination of Poissons ratio for viscoelastic isotropic materials // International Applied Mechanics, 2018. – 54, N2, pp. 220-230.
9. Schapery R.A. Correspondence principles and a generalized integral for large deformation and fracture analysis of viscoelastic media // International Journal of Fracture, July 1984. – Vol. 25, Issue 3, pp. 195-223.

Надійшла до редколегії 29.08.21