УДК 532.59: 534.29

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.4>

Жук О.П.¹, д.ф.-м.н., пров.н.с.
Жук Я.О.², чл.-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф.

O.P. Zhuk¹, Dr.Sci., Leading Researcher.
Y.A. Zhuk², Dr.Sci. (Phys.–Math.)

Визначення акустичної радіаційної сили, що діє на тверду сферичну частинку в пружній трубі з рідиною

Determination of acoustic radiation acting on a spherical rigid particle placed in an elastic tube filled with liquid

¹Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, 03057, м. Київ, вул. Петра Нестерова, 3
e-mail: zhuk@inmech.kiev.ua

¹Timoshenko Institute of Mechanics, NAS of Ukraine, 3, Petr Nesterov str., Kyiv 03057
e-mail: zhuk@inmech.kiev.ua

²Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е,
e-mail: y.zhuk@i.ua

²Taras Shevchenko National University of Kyiv, 4e, Glushkov ave., Kyiv 03680
e-mail: y.zhuk@i.ua

Розглянуто випадок поширення у вузькій циліндричній трубі плоскої поздовжньої звукової хвилі, в якій складові руху рідини, паралельні осі труби, мають значно більшу кінетичну енергію ніж складові, перпендикулярні осі труби. Дослідження дії акустичної радіаційної сили звукового поля на тверду сферичну частинку в заповненій ідеальною рідиною тонкостінній пружній циліндричній трубі проведено у два етапи: перший – розв'язання лінійної задачі розсіяння первинної хвилі на перешкодах; другий – обчислення гідродинамічних сил, які діють на сферичну частинку, з наступним осередненням їх в часі. Виведено формулу для обчислення акустичної радіаційної сили для такого випадку.

Ключові слова: ідеальна рідина, плоска акустична хвиля, тверда сферична частинка, гідродинамічна сила, радіаційна сила.

Acoustic radiation force effect upon a rigid spherical particle placed in the thin elastic tube is studied. The problem of determination of the acoustic radiation forces acting on an obstacle in an ideal liquid is formulated with respect to the Lagrange coordinate system. Thus, the radiation pressure is defined as time-averaged value of the acoustic pressure over the obstacle surface. This approach is adequate if, at determining of the acoustic pressure in a fluid, the deviation of the pressure from the harmonic law in time domain is taken into account in the obstacle vicinity. An action of the acoustic radiation force on the rigid spherical particle placed in the thin tube with elastic wall is studied here for the case of the incident plane sound wave propagating along the tube axis. Model is developed to describe the response of the system consisting of the compliant infinite thin circular cylindrical tube filled with the ideal compressible liquid and rigid spherical body which is immovable and located on the tube axis under the plane wave propagating along the tube axis. The problem of the hydrodynamic characteristics determination is reduced to the solution of the infinite system of algebraic equations that can be solved by the reduction method. The formula for the acoustic radiation force calculation is derived to characterize the force acting upon rigid spherical particle in the thin compliant elastic cylindrical tube.

Key Words: ideal liquid, plane acoustic wave, rigid spherical particle, hydrodynamic force, radiation force.

Статтю представив академік НАН України Перестюк М.О.

1. Вступ

При поширенні гармонічної плоскої хвилі в акустичному середовищі крім періодичного звукового тиску виникає сталий тиск звукового випромінювання [1,2], який називають акустичним

радіаційним тиском.

Лінійне наближення для обчислення акустичного радіаційного тиску виявляється недостатнім. Виявляється, однак, що обчислення акустичного тиску з врахуванням величин другого порядку малості можна виконати, використовуючи потен-

ціал поля швидкості, що визначений при розв'язанні лінійної задачі розсіювання первинної хвилі на перешкоді [1,2].

В даній статті досліджується дія радіаційної сили звукового поля на тверду сферичну частинку в заповненій ідеальною рідиною тонкостінній податливій циліндричній трубці.

2. Постановка задачі дифракції та її розв'язування

Розглядаємо поширення у вузькій циліндричній трубці плоскої поздовжньої звукової хвилі. Постановку лінійної задачі першого етапу дослідження – виведення потенціалів хвильового поля в трубці – сформулюємо при умові, що властивості рідини, а також механічні властивості труби поздовжньо однорідні.

Дослідження виконаємо для випадку циліндричної труби, радіус якої a_0 при відсутності в трубці тиску, а товщина стінки h . Матеріал труби має модуль Юнга E і коефіцієнт Пуассона ν . Труба заповнена ідеальною стисливою рідиною густиною ρ_0 , швидкість звуку в якій c_0 . В трубці знаходиться тверда сферична частинка радіусу d з центром на осі труби.

Введемо циліндричну систему координат (R, z, ϕ) , вісь Oz якої направимо вздовж осі труби, а початок координат виберемо в центрі сферичної частинки. Введемо також сферичну систему координат (r, θ, ϕ) як показано на рис. 1.

Рис. 1. Тверда сферична частинка у вузькій податливій нескінченній трубці.

Плоска звукова хвиля поширюється в трубці у додатному напрямі осі Oz і описується потенціалом

$$\Phi_0 = A \exp[i(kz - \omega t)]. \quad (1)$$

Потенціал звукової хвилі Φ (1) у відповідності з прийнятим методом дослідження є розв'язком рівняння

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

У формулах (1) і (2) позначено: A – амплітуда; $k = \omega/c$ – хвильове число; ω – кутова частота; t – час; Δ – диференціальний оператор Лапласа; c – швидкість плоскої хвилі в рідині, яка заповнює податливу (еластичну) трубу. Зазначимо, що швидкість c плоскої хвилі в трубці відмінна від швидкості плоскої хвилі в необмеженій рідині й обчислюється за формулою

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{1 + 2R_0/(hE'\beta_0)}}, \quad (3)$$

в якій $E' = E/(1 - \nu^2)$; $\beta_0 = 1/(\rho_0 c_0^2)$ – стисливість рідини; $R_0 = a_0$ – радіус труби при відсутності в ній тиску, обумовленого звуковою хвилею.

Швидкість рідини і тиск, обумовлені звуковою хвилею, визначаються формулами:

$$\mathbf{v} = \text{grad} \Phi, \quad p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (4)$$

В подальшому згідно [2] використовуємо безрозмірні величини.

Потенціал хвильового поля в трубці формується в результаті інтерференції первинної хвилі і хвиль, розсіяних на твердій сфері і відбитих від стінки трубки. В результаті потенціал хвильового поля в трубці має наступний вигляд:

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_{sph} + \Phi_{cyl}. \quad (5)$$

У формулі (5) Φ_{sph} – потенціал хвилі, відбитої від сферичної частинки; Φ_{cyl} – потенціал хвилі, відбитої від еластичної стінки трубки; Φ – загальний потенціал хвильового поля в трубці.

Знаходження потенціалів цих хвиль зводиться до розв'язування багатозв'язної лінійної задачі дифракції первинної хвилі на твердій сфері і на внутрішній поверхні податливої (еластичної) трубки – розв'язування знерозміреного лінійного хвильового рівняння

$$\Delta \Phi + (\eta \omega)^2 \Phi = 0 \quad (6)$$

де $\eta = 1/c$.

Для рівняння (6) сформулюємо граничні умови. На поверхні нерухомої твердї сфери нормальна швидкість рідини дорівнює нулю

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=d} = 0. \quad (7)$$

На внутрішній поверхні податливої (еластичної) трубки гранична умова повинна задовольняти рівність радіальної швидкості $\partial\Phi/\partial R$ рідини і радіальної швидкості внутрішньої поверхні стінок трубки $\dot{a}(t)$, де $a(t)$ – внутрішній радіус труби в момент t . В лінійній теорії цю граничну умову можна записати як

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial R} \right|_{R=a_0} = \dot{a}(t), \quad (8)$$

оскільки будь яка різниця в значеннях $\partial\Phi/\partial R$ при $R = a(t)$ і при $R = a_0$ є менша ніж

$$|a(t) - a_0| \max \left| \frac{\partial^2\Phi}{\partial R^2} \right|,$$

тому нею можна в лінійній теорії знехтувати [1].

Потенціал Φ_{sph} розсіяний на сфері хвиль повинен задовольняти умовам Зоммерфельда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{d\Phi_{sph}}{dr} - i\omega\Phi_{sph} \right) = 0; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_{sph} = 0. \quad (9)$$

Оскільки рідина знаходиться в трубі, то потенціал Φ_{cyl} відбитої від внутрішньої поверхні труби хвилі повинен бути обмеженим:

$$\Phi_{cyl} \rightarrow \text{const} \text{ якщо } R \rightarrow 0. \quad (10)$$

Таким чином, рівняння (6) із умовами (7)–(10) формують постановку задачі визначення потенціалів поля швидкості в податливій трубці.

3. Побудова потенціалів хвильового поля в податливій вузькій трубці

Визначимо потенціали, приведені у формулі (5), розв'язавши багатозв'язну задачу для рівняння (6) при граничних умовах (7)–(8) на поверхні сферичної частинки і на внутрішній поверхні труби. Потенціали Φ_{sph} і Φ_{cyl} знайдемо при розв'язуванні рівняння (6) методом розділення змінних у відповідних системах координат (сферичній і циліндричній). Множину розв'язків Φ_{sph} виберемо у вигляді узагальнених рядів Фур'є по сферичних хвильових функціях

$$\Phi_{sph}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n^{(1)}(\omega r) P_n(\cos \theta), \quad (11)$$

а множину розв'язків Φ_{cyl} – у вигляді інтеграла

$$\Phi_{cyl} = \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) J_0(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} R) e^{i\xi z} d\xi, \quad (12)$$

У формулах (11), (12) $h_n^{(1)}(w)$ – сферичні функції Ганкеля першого роду n – го порядку;

$P_n(w)$ – поліноми Лежандра; $J_0(w)$ – циліндрична функція Бесселя нульового порядку; A_n – невідомі сталі; $B(\xi)$ – невідома густина; ξ – стала розділення. В (11) і (12) множник $\exp(-i\omega t)$ не приведено.

Із множини розв'язків (11) і (12) рівняння (6) виберемо такі розв'язки, які задовольняють умовам (7), (8) (умовам на нескінченності (9) і на осі труби (10) вони задовольняють автоматично).

Складові потенціали (1), (11) і (12) потенціалу (5) поля швидкості рідини в трубі одержані в системах координат, зв'язаних з сферою і з циліндричною трубою. Щоб використати умову (7) на поверхні сферичної частинки необхідно потенціал (5) записати у сферичній системі координат (r, ϕ, θ) , а, щоб використати граничну умову (8) на внутрішній стінці труби, необхідно записати потенціал (5) у циліндричній системі координат (R, ϕ, z) . Для цього використовуються співвідношення [2], за допомогою яких циліндричні хвильові функції виражаються через сферичні і навпаки. Повторюючи міркування і викладки аналогічно до [2] та вводячи додаткові позначення

$$\begin{aligned} C(\omega, \xi) &= H_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}) \sqrt{\omega^2 - \xi^2} - \\ &- H_0(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}) \frac{\omega^2}{hE'}, \\ D(\omega, \xi) &= J_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}) \sqrt{\omega^2 - \xi^2} - \\ &- J_0(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}) \frac{\omega}{hE'}, \end{aligned} \quad (13)$$

із задоволення граничних умов на поверхні сферичної частинки і податливої трубки із використанням ортогональності поліномів Лежандра отримуємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів A_n

$$\begin{aligned} A_n - \frac{(2n+1)}{2\eta\omega} \frac{j'_n(\eta\omega r_0)}{h_n^{(1)'}(\eta\omega r_0)} \sum_{m=0}^{\infty} i^{n-m} q_{mn} A_m = \\ = -(2n+1) i^n A \left[1 + \frac{G_n(\omega)}{\pi} \right] \frac{j'_n(\eta\omega r_0)}{h_n^{(1)'}(\eta\omega r_0)}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$G_n(\omega) = 2 \int_0^{\infty} \frac{\omega^2}{\delta E' D(\omega, \xi) (1 + \xi^2)} P_n\left(\frac{\xi}{\eta\omega}\right) d\xi, \quad (15)$$

$$q_{mn} = 2 \int_0^{\infty} \frac{C(\omega, \xi)}{D(\omega, \xi)} P_m\left(\frac{\xi}{\eta\omega}\right) P_n\left(\frac{\xi}{\eta\omega}\right) d\xi,$$

причому $q_{kl} = q_{lk}$; а $G_{2k+1}(\omega) = 0$, $k, l = 0, 1, 2, \dots$.

Ця система розв'язується методом редукції [2].

4. Визначення радіаційної сили

Радіаційна сила, яка діє в акустичному полі на тверду сферичну частинку, є середня за період первинної хвилі величина гідродинамічної сили

$$F_z = -r_0^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} p \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi. \quad (16)$$

Використаємо формулу для тиску, наведену в [2], яка, будучи знерозміреною, в досліджуваному випадку має вигляд

$$p = -\frac{1}{2r_0^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2, \quad (17)$$

Підставляючи у (17) вираз для загального потенціалу Φ і обчислюючи похідні, знаходимо внески у радіаційну силу першого і другого доданків із (17)

$$F_z^{(1)} = \pi \int_0^\pi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)^2 \sin \theta \cos \theta d\theta, \quad (18)$$

$$F_z^{(2)} = -\pi r_0^2 \int_0^\pi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \sin \theta \cos \theta d\theta.$$

Осереднюючи (18) в часі і додаючи їх, отримаємо формулу для обчислення радіаційної сили, яка діє на тверду сферичну частинку в податливій (еластичній) циліндричній трубці

$$\begin{aligned} \langle F_z \rangle &= \langle F_z^{(1)} \rangle + \langle F_z^{(2)} \rangle, \\ \langle F_z^{(1)} \rangle &= 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{n(2n+1)}{4n+1} \times \right. \\ &\times \left[\frac{2(2n+1)}{4n+3} K_{2n}(\eta\omega r_0) D_{2n+1}(\eta\omega r_0) + \right. \\ &+ \left. \frac{2n-1}{4n-1} K_{2n} D_{2n-1}(\eta\omega r_0) \right] - \\ &- \left. \frac{n(2n-1)}{4n-1} \times \left[\frac{2n+1}{4n+1} L_{2n-1}(\eta\omega r_0) S_{2n}(\eta\omega r_0) + \right. \right. \end{aligned}$$

Список використаних джерел

1. King L. V. On the acoustic radiation pressure on spheres / King L. V. // Proc. Roy. Soc., Ser. A. – 1934. – Vol. 147, No. 861. – P. 246–265.
2. Zhuk A.P. Acoustic radiation force on a spherical particle in a fluid-filled cavity / A.P. Zhuk, V.D. Kubenko, Y.A. Zhuk // Journal of the Acoustical Society of America (JASA). – 2012. – Vol. 132, No. 4. – P. 2189–2197.

$$\begin{aligned} &+ \left. \frac{2(n-1)}{4n-3} L_{2n-1}(\eta\omega r_0) S_{2n-2}(\eta\omega r_0) \right] \Bigg\} + \\ &+ 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} D_n(\eta\omega r_0) D_{n+1}(\eta\omega r_0) + \right. \\ &+ \left. \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} S_n(\eta\omega r_0) S_{n+1}(\eta\omega r_0) \right], \\ \langle F_z^{(2)} \rangle &= -2\pi (\omega r_0)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1} \left[\frac{2n+1}{4n+3} K_{2n}(\eta\omega r_0) \times \right. \\ &D_{2n+1}(\eta\omega r_0) + \frac{2n}{4n-1} K_{2n}(\eta\omega r_0) D_{2n-1}(\eta\omega r_0) \Bigg] - \\ &- 2\pi (\omega r_0)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n-1} \left[\frac{2n}{4n+1} L_{2n-1}(\eta\omega r_0) S_{2n}(\eta\omega r_0) + \right. \\ &+ \left. \frac{2n-1}{4n-3} L_{2n-1}(\eta\omega r_0) S_{2n-2}(\eta\omega r_0) \right] + \\ &+ 2\pi (\omega r_0)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} D_n(\eta\omega r_0) D_{n+1}(\eta\omega r_0) + \\ &+ 2\pi (\omega r_0)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} S_n(\eta\omega r_0) S_{n+1}(\eta\omega r_0), \\ K_{2n}(\eta\omega r) &= (-1)^n F(\omega)(4n+1) j_{2n}(\eta\omega r), \\ L_{2n-1}(\eta\omega r) &= (-1)^n F(\omega)(4n-1) j_{2n-1}(\eta\omega r), \\ M_n(\eta\omega r) &= \text{Re } A_n j_n(\eta\omega r) - \text{Im } A_n y_n(\eta\omega r), \\ N_n(\eta\omega r) &= \text{Re } A_n y_n(\eta\omega r) + \text{Im } A_n j_n(\eta\omega r), \\ G_n(\eta\omega r) &= \text{Re } B_n j_n(\eta\omega r), \\ T_n(\eta\omega r) &= \text{Im } B_n j_n(\eta\omega r), \\ D_n(\eta\omega r) &= M_n(\eta\omega r) + G_n(\eta\omega r), \\ S_n(\eta\omega r) &= N_n(\eta\omega r) + T_n(\eta\omega r). \end{aligned}$$

Подяка. Результати дослідження отримані за грантової підтримки Національного фонду досліджень України (проект № 2020.02/0112).

References

1. KING L.V. (1934) On the acoustic radiation pressure on spheres. *Proc. Roy. Soc., Ser. A.* 147(861). p. 246–265.
2. ZHUK A.P., KUBENKO V.D., ZHUK Y.A. (2012) Acoustic radiation force on a spherical particle in a fluid-filled cavity. *Journal of the Acoustical Society of America.* 132(4). p. 2189–2197.

Надійшла до редколегії 12.10.21