УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.3>

В. О. Гусак, аспірант

Випромінювання плоского поршня у клинуватому хвилеводі

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03127, м. Київ, пр-т. Акад.
Глушкова, 4-е
e-mail: gusakw7@gmail.com

V. O. Husak, PhD student

Radiation of a flat piston in a wedge-shaped waveguide

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03127, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e
e-mail: gusakw7@gmail.com

В роботі розглянута задача випромінювання плоского поршня у клинуватому хвилеводі. Досліджено особливості випромінювання плоского поршня у клинуватий хвилевод в залежності від параметрів задачі, а саме, кута розхилу клину і хвильового розміру поршня, тобто відношення довжини поршня до довжини хвилі, котру він випромінює. Обчислені діаграми спрямованості плоского поршня у клинуватому хвилеводі при різних кутах розхилу клину. Показано, що при певному співвідношенні між хвильовим розміром поршня і кутом розхилу клину можлива наявність мінімуму у діаграмі спрямованості уздовж осі симетрії клину. Проведено розрахунки модуля тиску в околі поршня, котрі ілюструють, як поступово формується провал в діаграмі спрямованості в напрямку осі хвилеводу.

Ключові слова: Метод часткових областей, клинуватий хвилевод, хвильове поле.

In the work the task of radiation of a flat piston in a wedge-shaped waveguide is considered. The peculiarities of the radiation of a flat piston into a wedge-shaped waveguide depending on the parameters of the task, namely, the angle of inclination of the wedge and the wave size of the piston, that is the ratio of the piston length to the wavelength it emits, are investigated. The directional charts of a flat piston in a wedge-shaped waveguide at different angles of the wedge are calculated. It is shown that at a certain ratio between the wave size of the piston and the angle of inclination of the wedge, it is possible to have a minimum in the directional chart along the axis of symmetry of the wedge. Calculations of the pressure modulus in the vicinity of the piston are performed, which illustrate how the failure in the directional chart in the direction of the waveguide axis is gradually formed.

Key Words: Partial domains method, wedge-shaped waveguide, wave field.

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н, проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Хвилевід — структура, призначена для передачі звукових або електромагнітних хвиль, в якій поширення хвилі обмежено одним чи двома вимірами [1]. В інженерній практиці хвилеводи широко застосовуються в радіоелектронних та акустичних пристроях, тому інтерес до дослідження хвильових процесів в таких структурах не спадає.

В роботі, на базі методу часткових областей [2], розглянута задача випромінювання плоского поршня у клинуватому хвилеводі. Згідно з методом часткових областей вся складна (неканонічна) область існування хвильового поля розбивається на прості області, в кожній з яких вдається побудувати загальний розв'язок рівняння Гельмгольца. Після цього виникає необхі-

дність спряження цих розв'язків на границях часткових областей і, при необхідності, задоволення граничних умов на певних граничних поверхнях та поверхнях випромінювачів. Реалізація граничних умов призводить до функціональних рівнянь з невідомими коефіцієнтами, які є амплітудними коефіцієнтами мод у відповідних часткових областях.

Для визначення шуканих амплітудних коефіцієнтів мод слід перейти від цих рівнянь до системи лінійних алгебраїчних рівнянь. В даній статті перехід до системи алгебраїчних рівнянь здійснюється за допомогою поточкового спряження полів. Цей підхід полягає в прирівнюванні функцій (полів в суміжних часткових областях) в кінцевому наборі точок (назвемо їх ву-

злові точки) на границі цих областей. Кількість вузлових точок на границі визначає порядок системи рівнянь і, тим самим, кількість шуканих амплітудних коефіцієнтів мод в часткових областях. Зазвичай, такий підхід, на відміну від підходу з використанням властивості ортогональності відповідного набору функцій, не містить обчислювальних проблем.

2. Постановка і розв'язання задачі

Розглядається плоска задача про випромінювання поршня в нескінченний клинуватий хвильовод (рис. 1). Поверхні хвильоводу ідеально жорсткі, тобто, дорівнює нулю нормальна складова коливальної швидкості на цих поверхнях.

Рис. 1: Геометрія задачі

Поршень здійснює гармонічні коливання з частотою ω . Розподіл швидкості на поверхні поршня $v(x_0, y) = 1$. Будемо вважати, що в трикутній області OAB хвильове поле відсутнє. Згідно методу часткових областей виділимо дві часткові області. Перша часткова область обмежена поверхнею поршня і дугою кола радіуса R , $-\phi/2 \leq \theta \leq \phi/2$, тобто, утворена частинами поверхонь декартової і полярної систем координат відповідно. Друга часткова область задає

ться полярними координатами $r \geq R$, $-\phi/2 \leq \theta \leq \phi/2$.

Поле тиску в області 1 запишемо у вигляді суми мод плоскопаралельного хвильоводу і суми мод обмеженої області клинуватого хвильоводу (часовий множник $\exp(-i\omega t)$ не пишемо):

$$p_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\alpha_n y) \exp(i\gamma_n(x - x_0)) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(\beta_n \theta) \frac{J_{\beta_n}(kr)}{J'_{\beta_n}(kR)}, \quad (1)$$

де $\alpha_n = \frac{2(n-1)\pi}{L}$, $\gamma_n = \sqrt{k^2 - \alpha_n^2}$, $\beta_n = \frac{2(n-1)\pi}{\phi}$, $n = 1, 2, \dots$; $k = \omega/c$ – хвильове число.

Поле тиску в області 2 представимо у вигляді суперпозиції біжучих циліндричних хвиль:

$$p_2 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\beta_n \theta) \frac{H_{\beta_n}^{(1)}(kr)}{H_{\beta_n}^{(1)'}(kR)}. \quad (2)$$

Для визначення трьох наборів невідомих коефіцієнтів A_n , B_n , C_n , $n = 1, 2, \dots$ слід розписати три граничні умови:

$$1) \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x} = v(x_0, y), \quad x = x_0, \quad y = \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right], \quad (3)$$

$$2) p_1 = p_2, \quad r = R, \quad \theta = \left[-\frac{\phi}{2}, \frac{\phi}{2}\right], \quad (4)$$

$$3) \frac{\partial p_1}{\partial r} = \frac{\partial p_2}{\partial r}, \quad r = R, \quad \theta = \left[-\frac{\phi}{2}, \frac{\phi}{2}\right]. \quad (5)$$

Підставивши вирази (1), (2) в граничні умови (3) – (5) отримаємо наступні три рівняння:

$$1) i \sum_{n=1}^{\infty} A_n \gamma_n \cos(\alpha_n y) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\partial}{\partial x} \left[\cos(\beta_n \arctan \frac{y}{x}) \frac{J_{\beta_n}(k\sqrt{x^2 + y^2})}{J'_{\beta_n}(kR)} \right]_{x=x_0} = i v(x_0, y), \quad (6)$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} A_n [\cos(\alpha_n R \sin \theta) \exp(i\gamma_n(R \cos \theta - x_0))] + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(\beta_n \theta) \frac{J_{\beta_n}(kR)}{J'_{\beta_n}(kR)} - \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\beta_n \theta) \frac{H_{\beta_n}^{(1)}(kR)}{H_{\beta_n}^{(1)'}(kR)} = 0, \quad (7)$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\partial}{\partial r} [\cos(\alpha_n r \sin \theta) \cdot \exp(i\gamma_n(r \cos \theta - x_0))]_{r=R} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(\beta_n \theta) - \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\beta_n \theta) = 0. \quad (8)$$

При виконанні граничних умов (3)–(5) будемо використовувати поточкове спряження полів. Задамо координати вузлових точок на поверхні поршня ($x_j = x_0, y_j$), $j = 1, 2, \dots, n_1$, а на границі розділу часткових областей 1 і 2 – ($r_m = R, \theta_m$), $m = 1, 2, \dots, n_2$. Кількість вузлових точок n_1 і n_2 визначається хвильовою відстанню між вузловими точками Δ/λ .

3. Аналіз чисельних результатів

Виберемо інтегральним критерієм якості виконання граничних умов (3)–(5) найбільш жорстку умову, а саме інтеграл від модуля різниці полів на певній межі:

$$\delta_{vy} = \frac{1}{v(x_0, y)} \int_{-L/2}^{L/2} |v(x_0, y) - v_{1y}(x_0, y)| dy, \quad (9)$$

$$\delta_{pr} = \frac{1}{|p_1(R, 0)|} \int_{-\phi/2}^{\phi/2} |p_1(R, \theta) - p_2(R, \theta)| R d\theta, \quad (10)$$

$$\delta_{vr} = \frac{1}{|v_{1r}(R, 0)|} \int_{-\phi/2}^{\phi/2} |v_{1r}(R, \theta) - v_{2r}(R, \theta)| R d\theta. \quad (11)$$

Результати розрахунків інтегральних критеріїв приведені в табл. 1. Вибрані такі параметри моделі: $\phi = 130^\circ$, $R/\lambda = 1, 2$, $L/\lambda = 2, 2$.

Табл. 1: Інтегральні критерії

Δ/λ	n_1	n_2	δ_{vy}	δ_{vr}	δ_{pr}
0,08	28	35	0,047	0,017	0,022
0,1	22	28	0,053	0,018	0,027
0,2	11	14	0,086	0,085	0,156
0,3	8	10	0,111	0,179	0,343

На рис. 2 і рис. 3 показана графічна ілюстрація виконання граничних умов при хвильовій відстані між вузловими точками $\Delta/\lambda = 0,1$. Параметри моделі: $R/\lambda = 1, 2$, $\phi = 130^\circ$. Аналіз подібних розрахунків показує, що вибір величини $\Delta/\lambda < 0,2$ забезпечує прийнятне виконання граничних умов.

Рис. 2: Амплітуда швидкості на поверхні поршня

Рис. 3: Модулі тиску (а) і радіальної швидкості (б) вздовж дуги кола радіусом R : лінія – зі сторони області 1, точки – зі сторони області 2

Рис. 4: Діаграми спрямованості крива 1 – $\phi = 40^\circ$, 2 – $\phi = 50^\circ$, 3 – $\phi = 70^\circ$, 4 – $\phi = 90^\circ$, 5 – $\phi = 130^\circ$, 6 – $\phi = 180^\circ$

На рис. 4 показані діаграми спрямованості (дальнє поле) при різних кутах розхилу клину і величині $R/\lambda = 1, 2$. Можна відмітити дві характерні риси сукупності цих кривих.

- 1) При кутах розхилу клину $\phi > 120^\circ$ форма головної пелюстки практично залишається незмінною і відповідає головній пелюстці при куті розхилу $\phi = 180^\circ$.
- 2) При певному співвідношенні між параметрами моделі (в даному випадку $\phi = 50^\circ$, $R/\lambda = 1, 2$) формується провал в характеристиці спрямованості уздовж напрямку $\theta = 0^\circ$.

Цей факт є наслідком того, що перша і дру-

га симетричні моди клинуватого хвильоводу, при куті розхилу $\phi = 50^\circ$ в напрямку осі хвильоводу $\theta = 0^\circ$, являються практично протифазні в дальньому полі, що і призводить до провалу в діаграмі спрямованості.

На рис. 5, показано просторовий розподіл модуля тиску в околі поршня для двох значень розхилу клину $\phi = 70^\circ$ і $\phi = 50^\circ$. У випадку кута розхилу клину $\phi = 50^\circ$, бачимо як поступово формується провал в напрямку $\theta = 0^\circ$. А от при куті розхилу клину $\phi = 70^\circ$ уздовж напрямку $\theta = 0^\circ$ формується максимум в діаграмі спрямованості.

Список використаних джерел

1. Мелешко В.В., Мацыпура В.Т., Улітко І.А. Теорія хвильоводів. — К.: ВПЦ «Київський університет», 2013. — 413 с.
2. Grinchenko V., Vovk I., Matsypura V. Acoustic wave problems. — New York : Begell House, Inc., 2018. — 439 p.

Рис. 5: Розподіл модуля тиску в околі поршня для двох значень розхилу клину $\phi = 70^\circ$ і $\phi = 50^\circ$, $R/\lambda = 1, 2$

Колір змінюється як в райдузі – від червоного до фіолетового. Червоний колір відповідає максимуму модуля тиску, а фіолетовий – мінімуму модуля тиску.

4. Висновки

1. На основі методу часткових областей отримано розв'язок задачі про випромінювання поршня в нескінченний клинуватий хвильовод. При цьому використано поточкове спряження хвильових полів.

2. Показано, що хвильова відстань між вузловими точками $\Delta/\lambda < 0,2$ забезпечує прийнятне виконання граничних умов.

3. Обчислені діаграми спрямованості плоского поршня у клинуватому хвильоводі при різних кутах розхилу клину. Показано, що при певному співвідношенні між параметрами моделі (кут розхилу клину і хвильовий розмір поршня) формується провал в характеристиці спрямованості уздовж напрямку кута $\theta = 0^\circ$.

References

1. MELESHKO V., MATSYPURA V., ULITKO I. (2013) *Teoriia khvylevodiv*. K.: VPTS «Kyivskiyi universytet».
2. GRINCHENKO V., VOVK I., MATSYPURA V. (2018) *Acoustic wave problems*. New York : Begell House, Inc.

Надійшла до редколегії 27.08.2021