УДК 517.983.27

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/2.13>

Тетерук І.С.¹, аспірант

Teteruk I.S.¹, PhD student

Двовимірні узагальнені моментні зображення та апроксиманти типу Паде функції двох змінних, яка є узагальненням гіпергеометричних рядів

Two-dimensional generalized instantaneous images and approximations of the Pade type function of two variables, which is a generalization of hypergeometric series

¹Інститут математики НАН України,
Київ
email: innna.teteruk@gmail.com

¹Institute of Mathematics of NASU, Kyiv
email: innna.teteruk@gmail.com

Досліджується питання побудови апроксимант Паде для функції двох змінних. Побудована двовимірний функціональна послідовність, яка має узагальнене моментне зображення і визначені раціональні апроксиманти, що будуть узагальненнями одновимірних апроксимант Паде. Функція двох змінних, яка розглядається, повністю пов'язана з базисними гіпергеометричними рядами, а саме з q -аналогом експоненти e_q .

Ключові слова: апроксимант Паде, моментне зображення, гіпергеометричний ряд, раціональна апроксимація.

Generalized instantaneous image were introduced by V.K. Dzyaduk [1] in 1981 and proved to be a convenient tool for constructing and studying the Padé approximants and their generalizations (see [2]). The method of generalized instantaneous images proposed by Dzyadyk made it possible to construct and study rational Padé approximants and their generalizations for many classes of special functions from a single position. As an example, the Padé approximants is constructed for a class of basic hypergeometric series, which includes a q -analogue of the exponential function. In this paper the construction of the Pade approximants for the function of two variables is investigated. A two-dimensional functional sequence is constructed, which has a generalized instantaneous image, and rational approximants are determined, which will be generalizations of one-dimensional Padé approximants. The function of the two variables is entirely related to the basic hypergeometric series, namely with the q -analog of the exponent e_q .

Keywords: Pade approximation, instantaneous image, hypergeometric series, rational approximation.

Статтю представив д.ф.-м. н., проф., академік НАН України Перестюк М.О.

Вступ та теоретичні відомості.

Узагальнені моментні зображення були введені В.К. Дзядиком [1] у 1981 р. і виявилися зручним інструментом для побудови та вивчення апроксимацій Паде та їх узагальнень (див. [2]).

Означення. Будемо говорити, що для послідовності комплексних чисел $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ має місце узагальнене моментне зображення на добутку лінійних просторів X та Y за означеною на цьому добутку білінійною формою $\langle \cdot, \cdot \rangle$, якщо у просторі X вказано послідовність

елементів $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, а у просторі Y -- послідовність елементів $\{y_j\}_{j=0}^{\infty}$ такі, що

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle \quad k, j \in \mathbb{N}_+ \quad (1)$$

По аналогії з (1) можна визначити узагальнені моментні зображення двовимірних числових послідовностей.

Означення. Будемо говорити, що для двовимірної числової послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ має місце узагальнене моментне зображення на добутку лінійних просторів X та Y за означеною на цьому добутку білінійною формою

$\langle \cdot, \cdot \rangle$, якщо у просторі X вказано двовимірну послідовність елементів $\{x_{k,m}\}_{k,m=0}^\infty$, а у просторі Y -- двовимірну послідовність елементів $\{y_{j,n}\}_{j,n=0}^\infty$ такі, що

$$s_{k+j,m+n} = \langle x_{k,m}, y_{j,n} \rangle \quad k, j, m, n \in \mathbb{N}_+ \quad (2)$$

По аналогії з тим, як у відповідність числовій послідовності $\{s_k\}_{k=0}^\infty$ можна поставити

формальний степеневий ряд $f(z) = \sum_{k=0}^\infty s_k z^k$,

двовимірній числовій послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^\infty$ можна поставити у відповідність формальний степеневий ряд двох змінних

$$f(z, \omega) = \sum_{k,m=0}^\infty s_{k,m} z^k \omega^m \quad (3)$$

Для рядів вигляду (3) можна визначити раціональні апроксиманти, що будуть узагальненнями однодимірних апроксимант Паде, за різними схемами (див. [3, с.323]). При цьому потрібно зафіксувати певні обмежені області N і D з $\mathbb{N}_+^2$ та побудувати алгебраїчні многочлени

$$P_N(z, \omega) = \sum_{(k,m) \in N} p_{k,m} z^k \omega^m,$$

$$Q_D(z, \omega) = \sum_{(k,m) \in D} q_{k,m} z^k \omega^m,$$

таким чином, щоб якомога більше коефіцієнтів $e_{k,m}$ у розкладі

$$f(z, \omega) - \frac{P_N(z, \omega)}{Q_D(z, \omega)} = \sum_{(k,m) \in \mathbb{N}_+^2} e_{k,m} z^k \omega^m$$

дорівнювали нулю.

Наступний результат є аналогом теореми В.К. Дзядика [1] для випадку функцій двох змінних (див.[4]):

Теорема 1. Нехай формальний степеневий ряд двох змінних має вигляд (3) і для двовимірної послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^\infty$ має місце узагальнене моментне зображення вигляду (2). Тоді якщо для деяких $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ існує нетривіальний узагальнений

$$Y_{N_1, N_2} = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1, N_2)} y_{j,n} \quad (4)$$

такий, що виконуються умови біортогональності

$$\langle x_{k,m}, Y_{N_1, N_2} \rangle = 0 \quad (5)$$

при $(k, m) \in ([0, N_1] \times [0, N_2])$, $\{(N_1, N_2)\}$ і $c_{N_1, N_2}^{(N_1, N_2)} \neq 0$, то раціональна функція

$$\frac{1}{Q_{N_1, N_2}(z, \omega)} \left\{ \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2-1} z^k \omega^m \sum_{j=0}^k \sum_{n=0}^m c_{N_1-j, N_2-n}^{(N_1, N_2)} s_{k-j, m-n} + \right. \\ \left. + z^{N_1} \sum_{k=0}^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2-1} z^k \omega^m \sum_{j=0}^k \sum_{n=0}^m c_{j, N_2-n}^{(N_1, N_2)} s_{k+j, m-n} + \right. \\ \left. + \omega^{N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2} z^k \omega^m \sum_{j=0}^k \sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j, n}^{(N_1, N_2)} s_{k-j, m+n} \right\}$$

де $Q_{N_1, N_2}(z, \omega) = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j, N_2-n}^{(N_1, N_2)} z^j \omega^n$ матиме

розклад у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігатимуться з коефіцієнтами ряду (3) для всіх $(j, n) \in ([0, 2N_1] \times [0, 2N_2])$, $\{(2N_1, 2N_2)\}$.

Насправді в теоремі 1 можна вибрати узагальнений поліном Y_{N_1, N_2} з умов біортогональності до елементів $x_{k,m}$ не для $(k, m) \in ([0, N_1] \times [0, N_2])$, $\{(N_1, N_2)\}$, а для $(k, m) \in H$, де H -- певна множина з $\mathbb{N}_+^2$ обмежена деякою кривою $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [0, \pi/2]$, що містить $(N_1+1)(N_2+1)-1$ точку. При цьому за N ми можемо вибрати будь-яку множину з $\mathbb{N}_+^2$, $([N_1, \infty] \times [N_2, \infty])$, що є об'єднанням квадрата $[0, N_1-1] \times [0, N_2-1]$ з множинами вигляду $\{(k, m) : k \in [0, N_1-1], m \in [N_2, x(k)]\}$ та $\{(k, m) : m \in [0, N_2-1], k \in [N_1, y(m)]\}$, де $x(k), y(m)$ -- деякі функції з $\mathbb{N}_+$ в $\mathbb{N}_+$ такі, що $x(k) \geq N_2, y(m) \geq N_1$ для всіх k і m . Тоді множина E буде мати вигляд $N \cup H + (N_1, N_2)$, де $H + (N_1, N_2)$ -- множина, отримана паралельним переміщенням множини H , при якому точка $(0; 0)$ переходить у точку (N_1, N_2) (теорема 1` [4]).

Зауважимо, що як і у випадку однодимірних узагальнених моментних зображень, задача про двовимірні узагальнені моментні зображення

може бути сформульована в операторному вигляді. А саме, припустимо, що простори X та Y є нормованими і в просторі X існують комутуючі між собою обмежені оператори $A_1, A_2 : X \rightarrow X$ такі, що

$$A_1 x_{k,m} = x_{k+1,m},$$

$$A_2 x_{k,m} = x_{k,m+1},$$

при всіх $k, m \in \mathbb{N}_+$. Нехай у просторі Y існують обмежені оператори $A_1^*, A_2^* : Y \rightarrow Y$, спряжені до операторів A_1, A_2 відносно білінійної форми $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в тому розумінні, що для будь-яких $x \in X, y \in Y$

$$(A_1 x, y) = \langle x, A_1^* y \rangle,$$

$$(A_2 x, y) = \langle x, A_2^* y \rangle.$$

Тоді зображення (2) можна записати у вигляді $s_{k,m} = \langle A_1^k A_2^m x_{0,0}, y_{0,0} \rangle$, $k, m \in \mathbb{N}_+$ і ряд (3) буде збіжним в околі початку координат до аналітичної функції, що має зображення $f(z, \omega) = \langle \mathfrak{R}(A_1) \mathfrak{R}(A_2) x_{0,0}, y_{0,0} \rangle$,

де резольвентна функція $\mathfrak{R}(A)$ визначається рівністю $\mathfrak{R}(A) = (I - zA)^{-1}$.

Означення. Для $|q| < 1$ базисним гіпергеометричним рядом називається ряд вигляду

$${}_r\phi_s \left[\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_r \\ b_1, b_2, \dots, b_r \end{matrix} ; q; z \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1; q)_n (a_2; q)_n \dots (a_r; q)_n}{(b_1; q)_n (b_2; q)_n \dots (b_s; q)_n} \left[(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \right]^{1+s-r} z^n,$$

(див. [3, с.23]) де q – символ Похгаммера $(a; q)_n$ визначається формулою

$$(a; q)_n = \begin{cases} (1-a)(1-aq) \dots (1-aq^{n-1}), & n \geq 1 \\ 1, & n = 0, \\ \prod_{m=0}^{\infty} (1-aq^m) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a; q)_n, & n = \infty. \end{cases}$$

Представниками базисних гіпергеометричних рядів є так звані q -аналоги експоненти

$$e_q(z) = {}_1\phi_0(0; -; q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(q; q)_n} = \frac{1}{(z; q)_{\infty}}, \quad |z| < 1,$$

та

$$E_q(z) = {}_0\phi_0(-; -; q; -z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n-1)/2}}{(q; q)_n} z^n = (-z; q)_{\infty}, \quad |z| < 1.$$

В [5,6] запропоновано підходи до побудови та дослідження апроксимант Паде функції $e_q(z)$ та її узагальнень з використанням узагальнених моментних зображень. Зокрема, в [6] для цієї мети використано узагальнені моментні зображення вигляду

$$s_k = \langle A^k x_0, y_0 \rangle, \quad k = \overline{0, \infty},$$

з оператором A та білінійною формою $\langle \cdot, \cdot \rangle$, що виражаються через q -інтеграл Джексона (див [3, с.39])

$$(A\varphi)(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d_q \tau = t(1-q) \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(tq^k) q^k \quad (6).$$

Цей же підхід був використаний і до побудови та вивчення апроксимант Паде функції $E_q(z)$ та її узагальнень (див. [7]). А саме, при $0 \leq \alpha < 1$ визначався лінійний простір

$$X_{\alpha} = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \mid \exists M > 0,$$

$$|f(x)x^{\alpha}| < M \forall x \in [0, 1]\} \quad \text{з нормою}$$

$$\|f\|_{\alpha} = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)x^{\alpha}|. \quad \text{Тоді } X_{\alpha} \text{ при кожному}$$

$$0 \leq \alpha < 1 \text{ буде банаховим простором.}$$

Неважко переконатися, що лінійний оператор A вигляду (6) є обмеженим в просторі X_{α} , а білінійна форма

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 \varphi(\tau) \psi(\tau) d_q \tau \quad (7)$$

є роздільно неперервною на добутку просторів $X_{\alpha} \times X_{\alpha}$.

Спряженим до оператора A відносно білінійної форми (7) буде оператор

$$(A^* \psi)(t) = \int_{qt}^1 \varphi(\tau) d_q \tau = \int_0^1 \varphi(\tau) d_q \tau - \int_0^{qt} \psi(\tau) d_q \tau$$

(див. [6]).

Основний результат.

Розглянемо

послідовність

$$x_k(t) = (A^k x_0)(t) = \frac{(1-q)^k}{(q, q)_k} t^k, k=1, \infty,$$

де $x_0(t) \equiv 1$

і

$$y_j = A^{*j} y_0, j=1, \infty, y_0(t) \equiv 1,$$

(8)

а також

$$s_k = \langle A^k x_0; y_0 \rangle = \frac{(1-q)^{k+1}}{(q, q)_{k+1}}, k=0, \infty. \quad (9)$$

Покладемо

$$x_{k,m}(t) := x_k(t) + x_m(t), \quad y_{j,n}(t) := y_j(t) + y_n(t),$$

де $\{x_k(t)\}_{k=0}^\infty$ і $\{y_j(t)\}_{j=0}^\infty$ визначені формулами

(8). Тоді

$$s_{k+j,m+n} := \langle x_{k,m}; y_{j,n} \rangle = \langle x_k + x_m; y_j + y_n \rangle = \\ = \langle x_k; y_j \rangle + \langle x_k; y_n \rangle + \langle x_m; y_j \rangle + \langle x_m; y_n \rangle = \quad (10)$$

$$= s_{k+j} + s_{k+n} + s_{m+j} + s_{m+n},$$

маємо $s_{k,m} = 2(s_k + s_m)$, де s_k визначено за формулою (9).

Таким чином, для числової послідовності (10) має місце узагальнене моментне зображення на добутку просторів $X_\alpha \times X_\alpha$ за білінійною формою (7).

Двовимірній числовій послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^\infty$,

яка визначена формулою (10), можна поставити у відповідність формальний степеневий ряд двох змінних

$$f(z, \omega) = \sum_{k,m=0}^\infty s_{k,m} z^k \omega^m = \\ = 2 \sum_{k,m=0}^\infty (s_k + s_m) z^k \omega^m = 2 \sum_{k,m=0}^\infty s_k z^k \omega^m + \\ + 2 \sum_{k,m=0}^\infty s_m \omega^m z^k = 2 \sum_{m=0}^\infty \omega^m \left(\sum_{k=0}^\infty \frac{(1-q)^{k+1}}{(q, q)_{k+1}} z^k \right) +$$

$$+ 2 \sum_{k=0}^\infty z^k \left(\sum_{m=0}^\infty \frac{(1-q)^{m+1}}{(q, q)_{m+1}} \omega^m \right) = \frac{2}{1-\omega} \sum_{k=1}^\infty \frac{(1-q)^k}{(q, q)_k} z^{k-1} + \\ + \frac{2}{1-z} \sum_{m=1}^\infty \frac{(1-q)^m}{(q, q)_m} \omega^{m-1} = \frac{2}{1-\omega} \frac{e_q(z(1-q)) - 1}{z} + \\ + \frac{2}{1-z} \frac{e_q(\omega(1-q)) - 1}{\omega} \quad (11)$$

Припустимо, що в просторі X_α існують комутуючі між собою обмежені оператори $A_1, A_2 : X_\alpha \rightarrow X_\alpha$:

$$A_1 x_{k,m} = x_{k+1,m}, (k, m) \in \square_+$$

$$A_2 x_{k,m} = x_{k,m+1}, (k, m) \in \square_+$$

Так як $x_{k,m} = x_k + x_m = x_m + x_k = x_{m,k}$, то

$$A_1 = A_2 : X_\alpha \rightarrow X_\alpha.$$

Позначимо $A_1 = A_2 := \tilde{A}$.

Тоді

$$s_{k,m} = \langle A_1^k A_2^m x_{0,0}; y_{0,0} \rangle = \langle \tilde{A}^{k+m} x_{0,0}; y_{0,0} \rangle = \\ = 4 \langle \tilde{A}^{k+m} x_0; y_0 \rangle$$

З іншого боку,

$$s_{k,m} = 2(s_k + s_m) = 2(\langle A^k x_0; y_0 \rangle + \langle A^m x_0; y_0 \rangle) = \\ = 2\langle (A^k + A^m) x_0; y_0 \rangle.$$

Тоді маємо, що

$$\tilde{A}^{k+m} x_0 = \frac{1}{2} (A^k + A^m) \cdot x_0 \quad (12)$$

Як було зазначено в [8], функція зображена рядом (11) матиме вигляд

$$f(z, \omega) = \frac{\omega \tilde{f}(\omega) - z \tilde{f}(z)}{\omega - z} \quad (13)$$

Далі розглянемо послідовність

$$\tilde{s}_i = \langle \tilde{A}^i x_{0,0}; y_{0,0} \rangle = 4 \langle \tilde{A}^i x_0; y_0 \rangle = \\ = 2 \langle (A^k + A^m)^i x_0; y_0 \rangle, \quad \text{де } k+m=i, i \in \square_+$$

Для послідовності $\{\tilde{s}_i\}_{i \in \square_+}$ виконується умова :

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists \tilde{Y}_N = \sum_{j=0}^N \tilde{c}_j^{(N)} \tilde{y}_j = \sum_{j=0}^N \tilde{c}_j^{(N)} \tilde{A}^j y_{0,0}, \tilde{c}_N^{(N)} \neq 0 \quad P_N(z, \omega) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} z^k \omega^m \sum_{j=0}^k \sum_{n=0}^m c_{N-j, N-n}^{(N, N)} s_{k-j, m-n} +$$

і такий, що

$$\langle \tilde{x}_i; \tilde{Y}_N \rangle = \langle \tilde{A}^i x_{0,0}; Y_N \rangle = 0 \quad k = \overline{0, N-1} \quad (14)$$

або

$$\langle \tilde{x}_i; \tilde{Y}_N \rangle = 2 \langle (A^k + A^m) x_0; Y_N \rangle = 0 \quad \text{Умова} \quad (14)$$

виконується за рахунок того факту, що для q-поліномів Лежандра $L_N(t; q)$, що задовольняють умови ортогональності:

$$\int_0^1 L_N(t; q) \cdot L_M(t; q) d_q t = 0$$

при $N \neq M$, відомо формули:

$$L_N(t; q) = \sum_{k=0}^N \frac{(q^{-N}; q)_k \cdot (q^{N+1}; q)_k}{((q; q)_k)^2} (qt)^k$$

(див., напр. [1]).

В роботі [8] отримано наступний результат, який є узагальненням теореми 1 [4].

Теорема 2. Для аналітичної функції двох змінних f , що має зображення (13) за виконанням умови (14),

$$[N/D]_f(z, \omega) = \frac{P_N(z, \omega)}{Q_D(z, \omega)}$$

такі, що

$$Q_D(z, \omega) = \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^N c_{N-j, N-n}^{(N, N)} z^j \omega^n$$

Список використаних джерел

1. Дзядик В. К. Про узагальнення проблеми моментів / Дзядик В. К. // Доп.АН УРСР №6, 1981. - С.8–12.
2. Голуб А. П. Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде / Голуб А. П. // Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. - 222 с.
3. Бейкер Дж. Апроксимации Паде / Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.Р // М: Мир, 1986. - 502 с.
4. Голуб А. П. Двовимірні узагальнені моментні зображення та раціональні апроксимації функцій двох змінних / Голуб А. П., Чернецька Л. О // Укр.мат.журн. Т.65№8, 2013. - С.1035–1058.

$$+ z^N \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1-m} z^k \omega^m \sum_{j=0}^k \sum_{n=0}^m c_{j, N-n}^{(N, N)} s_{k+j, m-n} +$$

$$+ \omega^N \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1-k} z^k \omega^m \sum_{j=0}^k \sum_{n=0}^m c_{N-j, n}^{(N, N)} s_{k-j, m+n}.$$

а коефіцієнти $c_{k, m}^{N, N}, k, m = \overline{0, N}$ задовольняють рівності

$$\sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^N c_{k, m}^{(N, N)} y_{k, m} = \sum_{j=0}^{2N} \tilde{c}_j^{(2N)} \tilde{y}_j = \tilde{Y}_N \quad \text{матимуть}$$

розклади в степеневі ряди, коефіцієнти яких збігатимуться з коефіцієнтами ряду (3) для функції f для всіх

$$(j, n) \in E = \{(j, n) \in \mathbb{N}_+^2, j+n \leq 4N-1\}$$

Таким чином, функція (13) задовольняє умовам теореми 2 і ми можемо побудувати апроксимант Паде функції (11).

Висновки.

Побудована двовимірною функціональна послідовність, яка має узагальнене моментне зображення і визначені раціональні апроксиманти, що будуть узагальненнями одновимірних апроксимант Паде для функцій двох змінних, яка є узагальненням q-аналога експоненти e_q .

References

1. DZYADYK V. K., (1981) On the generalization of the problem of moments, Dop.AN URSS 6, p. 8–12. (In Ukrainian)
2. GOLUB A. P., (2002) Generalized moment representations and Padé approximants, Proceedings of the Institute of Mathematics NAS Ukraine, 222 p. (In Ukrainian)
3. BEJKEK DZH. and GREJVS-MORRIS P.R., Padé Approximants (1986), 502 p.
4. GOLUB A. P. and CHERNECKA L. O., (2013) Two Dimensional Generalized Moment Representations and Rational Approximations of Functions of Two Variables, UMJ 65,8, p. 1035–1058. (In Ukrainian)

5. Голуб А. П. Обобщенные моментные представления базисных гипергеометрических рядов / Голуб А. П. // Укр.мат.журн. Т.41№6, 1981. - С.803-808.
6. Голуб А. П. Об одной разновидности обобщенных моментных представлений / Голуб А. П. // Укр.мат.журн. Т.41 №11, 1989. - С.1455-1460.
7. Голуб А. П. Апроксиманти Паде q-аналогів експоненти та їх узагальнень, Теорія наближення функцій та суміжні питання / Голуб А. П. // Збірник праць Інституту математики НАН України Т.12 №4, 2015. - С.144–153.
8. Голуб А. П. та Тетерук І. С. Узагальнені моментні зображення та апроксиманти типу Паде деяких базисних гіпергеометричних рядів двох змінних / Голуб А.П., Тетерук І. С. // Збірник праць Інституту математики НАН України Т.16 №2, 2019. - С.1–8.
5. GOLUB A. P., (1981) Generalized moment representations of basic hypergeometric series, UMJ 41№6, p. 803-808. (In Russian)
6. GOLUB A. P., (1989) On one kind of generalized moment representations, UMJ 41 №11 (1989), p.1455- 1460. (In Russian)
7. GOLUB A. P.,(2015) Padé approximants of q-analogues, exponents and their generalizations, Theory of approximation of functions and related questions. Proceedings of the Institute of Mathematics NAS Ukraine T.12 №4, p. 144–153. (In Ukrainian)
8. GOLUB A. P. and TETERUK I. S., (2019) Generalized instantaneous images and Pade-type approximants of some basic hypergeometric series of two variables, Proceedings of the Institute of Mathematics NAS Ukraine t.16 №2, p. 16–23 (In Ukrainian)

Надійшла до редколегії 10.08.21