УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.6>

О.В. Капустян, д.ф.-м.н., професор
О.Б. Курилко, к.ф.-м.н.
Т.В. Юсипів, аспірант

Робастна стійкість глобального атрактора системи реакції-дифузії

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул.
Володимирська, 64/13.
e-mail: alexkap@univ.kiev.ua

O.V. Kapustyan, Dr.Sci, professor
O.B. Kurylko, Ph.D. (Phys.-Math.)
T.V. Yusypiv, Ph.D. Student

Robust stability of the global attractor of the reaction-diffusion system

Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st.
e-mail: alexkap@univ.kiev.ua

У роботі розглядається задача робастної стійкості для нелінійної системи рівнянь в частинних похідних типу реакція-дифузія. Незбурена система вважається такою, що має глобальний аттрактор. Основним завданням роботи є оцінка відхилення траєкторії збуреної системи від глобального атрактора незбуреної системи в залежності від величини збурень. Таку оцінку можна отримати в рамках теорії стійкості від входу до стану (ISS). У роботі не накладається жодних умов на похідну нелінійної функції взаємодії, отже, не забезпечується єдиність розв'язку початкової задачі. У роботі запропоновано новий підхід до одержання оцінок робастної стійкості атрактора у випадку многозначного еволюційного розв'язуючого оператора. Зокрема, доведено, що многозначний розв'язуючий оператор породжений слабкими розв'язками нелінійної системи типу реакція-дифузія має властивість асимптотичного підсилення (AG) відносно атрактора незбуреної системи.

Ключові слова: стійкість від входу до стану, асимптотичне підсилення, глобальний аттрактор, нескінченно-вимірна система, система типу реакція-дифузія.

Робота виконана за підтримки НФДУ, проект Ф81/41743.

In this paper we consider the problem of robust stability for a nonlinear system of equations in partial derivatives of the reaction-diffusion type. An undisturbed system is considered to have a global attractor. The main task is to estimate the deviation of the trajectory of the perturbed system from the global attractor of the perturbed system depending on the magnitude of the perturbations. Such an estimate can be obtained in the framework of the theory of input-to-state stability (ISS). The paper does not impose any conditions on the derivative of the nonlinear interaction function, so the unity of the solution of the initial problem is not ensured. The paper proposes a new approach to obtaining estimates of robust stability of the attractor in the case of a multivalued evolutionary decoupling operator. In particular, it is proved that the multivalued decoupling operator generated by weak solutions of a nonlinear reaction-diffusion system has the property of asymptotic gain (AG) with respect to the attractor of the undisturbed system.

Key Words: input-to-state stability, asymptotic gain, global attractor, infinite-dimensional system, reaction-diffusion system.

This work is partially supported by the NRFU, project F81/41743.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф., академік НАН України Перестюк М.О.

Вступ

Асимптотична стійкість положення рівноваги є фундаментальною властивістю еволюційних процесів і відіграє важливу роль для багатьох застосувань. Загальновідомо, що глобальна асимптотично стійка рівновага лінійної та скінченновимірної системи є робастною, тоб-

то для будь-якого істотно обмеженого зовнішнього збурення, що подається на вхід системи, відповідний розв'язок залишається обмеженим протягом всього часу та прямує до певного околу точки рівноваги, коли час прямує до нескінченності. Розмір цього околу залежить лише від норми збурення. Для нелінійних систем

це в загальному випадку не відповідає дійсності й призводить до поняття «стабільності від входу до стану» (ISS), введеного Е.Д. Зонтагом для скінченновимірних систем. Як виявилось, це поняття також підходить для вивчення стійкості рівноваги у випадку нескінченновимірних систем [2]. Протягом останнього десятиліття багато авторів працювали над поширенням теорії ISS на цей клас систем. Значна кількість з цих поширень були розроблені для систем, що задаються диференціальними рівняннями в частинних похідних [4, 5, 7]. Слід зазначити, що майже всі результати, що стосуються стійкості в сенсі ISS для вказаних систем, були розроблені для випадку однієї точки рівноваги системи без збурень. Проте, як відомо, багато нелінійних нескінченновимірних дисипативних еволюційних систем мають нетривіальний глобальний аттрактор, що містить в собі як асимптотично стійкі положення рівноваги, так і інші граничні режими системи. У цій роботі ми вивчаємо питання робастності саме такої множини щодо зовнішніх збурень. Питання існування та властивостей глобальних аттракторів досліджувалися в монографії [1] та статтях [3, 6]. Природним чином постає запитання: якщо розглянути систему, що має глобальний аттрактор, то що можна сказати про оцінку відхилення розв'язків від аттрактора, якщо на цю систему діє деяке збурення d ? У даній роботі ми розв'язуємо дане питання для збуреної системи типу реакція-дифузія (RD). Використовуючи загальну схему, запропоновану в [4], ми доводимо властивості асимптотичного підсилення (AG) відносно глобального аттрактора дисипативної RD-системи.

1. Постановка задачі

В обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ розглянемо наступну задачу (що має назву системи реакція-дифузія)

$$\begin{cases} u_t = a\Delta u - f(u) + g(x) + d(t, x), & x \in \Omega, t > 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де $u = u(t, x) = (u^1(t, x), \dots, u^N(t, x))$ – невідома вектор-функція, $f = (f^1, \dots, f^N)$, $g = (g^1, \dots, g^N)$ – задана функція, a – дійсна матриця $N \times N$ така, що $\frac{1}{2}(a + a^*) \geq \mu I$, $\mu > 0$, $d = (d^1, \dots, d^N)$ – зовнішні збурення.

Припустимо, що виконуються наступні властивості:

$$g \in (L^2(\Omega))^N, \quad f \in C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N),$$

$\exists C_1, C_2 > 0$, $\gamma_i > 0$, $p_i \geq 2$, $i = \overline{1, N}$ такі, що $\forall v \in \mathbb{R}^N$

$$\sum_{i=1}^N |f^i(v)|^{\frac{p_i}{p_i-1}} \leq C_1(1 + \sum_{i=1}^N |v^i|^{p_i}),$$

$$\sum_{i=1}^N f^i(v)v^i \geq \sum_{i=1}^N \gamma_i |v^i|^{p_i} - C_2,$$

В подальшому будемо використовувати стандартні функціональні простори:

$$H = (L^2(\Omega))^N \text{ та } V = (H_0^1(\Omega))^N.$$

Позначимо

$$p = (p_1, \dots, p_N), \quad L^p(\Omega) = L^{p_1}(\Omega) \times \dots \times L^{p_N}(\Omega).$$

Відомо [1], що за таких припущень для будь-яких збурень $d \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H)$ (навіть для $d \in L_{loc}^2(\mathbb{R}_+; H)$) задача (1) є глобально розв'язною у слабкому сенсі у фазовому просторі H , тобто для будь-якого $u_0 \in H$ існує функція $u = u(t, x) \in L_{loc}^2(0, +\infty; V) \cap L_{loc}^p(0, +\infty; L^p(\Omega))$ така, що для будь-яких $T > 0$, $v \in V \cap L^p(\Omega)$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t, x)v(x)dx + \int_{\Omega} (a\nabla u(t, x)\nabla v(x) + \\ & + f(u(t, x))v(x) - g(x)v(x) - d(t, x)v(x))dx = 0 \end{aligned}$$

в сенсі скалярних розподілів на $(0, T)$, та $u(0, x) = u_0(x)$. Єдиність такого розв'язку не гарантується.

За рахунок включення $u \in C([0, +\infty); H)$ остання рівність має сенс.

Розглянемо незбурену систему ($d \equiv 0$)

$$\begin{cases} u_t = a\Delta u - f(u) + g(x), & x \in \Omega, t > 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Відомо [1], що відповідна багатозначна напівгрупа $S: \mathbb{R}_+ \times H \mapsto 2^H$

$$S(t, u_0) = \{u(t) | u(\cdot) \text{ є глобальним слабким розв'язком (2), } u(0) = u_0\}$$

має глобальний аттрактор Θ в H , тобто, існує компактна множина $\Theta \subset H$ така, що виконуються наступні властивості:

(i) $\Theta = S(t, \Theta)$, $t \geq 0$,

(ii) для будь-якої обмеженої множини $B \subset H$

$$\text{dist}(S(t, B), \Theta) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty,$$

де для заданих $A, B \subset H$ ми позначаємо

$$S(t, B) = \bigcup_{b \in B} S(t, b),$$

$$\text{dist}(A, \Theta) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in \Theta} \|x - y\|_H.$$

Дана властивість гарантує, що будь-який розв'язок (2) прямує до Θ при $t \rightarrow \infty$. Нас цікавить довгострокова поведінка відповідних розв'язків у випадку системи (1), на яку діє зовнішнє збурення d .

Нехай задано початковий стан $u_0 := u(0) \in H$ та збурюючий сигнал d . Позначимо $S_d(t, u_0)$ множини всіх розв'язків (1) з $u(0) = u_0$. Через наявність збурення загалом немає гарантії, що розв'язки будуть збігатися до Θ при $t \rightarrow \infty$. Виявляється, що глобальний атрактор є робастним при збуренні, тобто збурення малої величини впливають на його властивості незначним чином. Ця властивість робастності може бути виражена в рамках теорії ISS наступним чином: існує $\beta \in \mathcal{KL}$ та $\gamma \in \mathcal{K}$ такі, що для будь-яких $u_0 \in H$ та $d \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H)$

$$\|S_d(t, u_0)\|_\Theta \leq \beta(\|u_0\|_\Theta, t) + \gamma(\|d\|_\infty), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

де добре відомі класи $\mathcal{K}$ – клас неперервних строго зростаючих функцій на $[0, +\infty)$, згасаючих у початку координат, $\mathcal{KL}$ – множина неперервних функцій, визначених на $[0, +\infty)^2$, перший аргумент яких належить класу $\mathcal{K}$, а другий аргумент строго спадає до нуля, а також

$$\|d\|_\infty = \text{ess sup}_{t \geq 0} \|d(t)\|_H, \text{ якщо } d \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H),$$

$$\|u\|_\Theta = \inf_{\theta \in \Theta} \|u - \theta\|_H, \text{ якщо } u \in H,$$

$$\|U\|_\Theta = \sup_{u \in U} \|u\|_\Theta, U \subset H.$$

Варто зазначити, що в загальному випадку $\Theta \neq \{0\}$. Більш того, структура такого атрактора дуже складна [6]. Тому оцінки типу (3) не можна отримати за допомогою прямих апіорних оцінок.

На жаль, властивість (3), взагалі кажучи, не гарантується навіть у випадку $\Theta = \{0\}$, як було показано в прикладі [2].

У цій роботі доведено наступну властивість AG, яка дуже близька до (3):

існує $\gamma \in \mathcal{K}$ таке, що для будь-якого $u_0 \in H$ та будь-якого $d \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H)$ виконується

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \|S_d(t, u_0)\|_\Theta \leq \gamma(\|d\|_\infty). \quad (4)$$

2. Основні результати

Надалі будемо вважати, що $d \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H)$, $\|d\|_\infty \leq R_0$. Опираючись на [1], розглянемо множину

$$\Sigma(d) = cl_{L_{loc}^{2,\omega}(\mathbb{R}_+; H)} \{d(\cdot + \tau) \mid \tau \geq 0\},$$

де $cl_X A$ означає замикання множини A в топології простору X . Відомо, що $\Sigma(d)$ є інваріантною щодо зсувів, компактною в $L_{loc}^{2,\omega}(\mathbb{R}_+; H)$ множиною, і

$$\forall h \in \Sigma(d) \quad \|h\|_+^2 := \sup_t \int_t^{t+1} \|h(s)\|_H^2 dx \leq \|d\|_\infty^2. \quad (5)$$

Розглянемо сім'ю множинозначних відображень

$$\{S_h : \mathbb{R}_+ \times H \mapsto 2^H\}, \quad (6)$$

де $S_h(t, u_0) = \{u(t) \mid u(\cdot) \text{ є розв'язком (1) зі збуренням } \alpha = h, u(0) = u_0\}_{h \in \Sigma(d)}$.

Виявляється, що властивість робастності типу (4) можна встановити, використовуючи властивості рівномірних атракторів (6). Позначимо $S_\Sigma(t, u_0) = \bigcup_{h \in \Sigma} S_h(t, u_0)$.

Означення Компактна множина $\Theta_\Sigma \subset \subset H$ називається рівномірним атрактором сім'ї $\{S_h\}_{h \in \Sigma}$, якщо для довільної обмеженої $B \subset H$

$$\text{dist}(S_\Sigma(t, B), \Theta_\Sigma) \rightarrow 0 \quad (7)$$

і є мінімальною замкненою множиною, що задовольняє (7).

Теорема 1 [1, 6] Для кожного збурення d , $\|d\|_\infty \leq R_0$, сім'я відображень $\{S_h\}_{h \in \Sigma(d)}$, що визначена в (6), має рівномірний атрактор $\Theta_{\Sigma(d)}$, причому

$$\Theta_{\Sigma(d)} \subset S_{\Sigma(d)}(t, \Theta_{\Sigma(d)}) \quad \forall t \geq 0. \quad (8)$$

Основним результатом роботи є наступна теорема.

Теорема 2 Для розв'язків задачі (1) з обмеженими збуреннями $\|d\|_\infty \leq R_0$ існує функція $\gamma \in \mathcal{K}$ така, що $\forall u_0 \in H$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|S_d(t, u_0)\|_\Theta \leq \gamma(\|d\|_\infty), \quad (9)$$

де $\Theta \subset H$ – глобальний атрактор незбуреної системи (2).

Доведення. Припустимо, що ми маємо граничну рівність

$$\text{dist}(\Theta_{\Sigma(d)}, \Theta) \rightarrow 0, \|d\|_{\infty} \rightarrow 0. \quad (10)$$

Доведемо, що з (10) випливає (9). Дійсно, за побудовою $\Sigma(0) = \{0\}$ і $d \in \Sigma(d)$. Отже, для $u_0 \in H$, $z \in \Theta_{\Sigma(d)}$, $t > 0$, $u(t) \in S_d(t, u_0)$ маємо: для $\theta \in \Theta$

$$\begin{aligned} \|u(t) - \theta\|_H &\leq \|u(t) - z\|_H + \|z - \theta\|_H \Rightarrow \\ \inf_{\theta \in \Theta} \|u(t) - \theta\|_H &\leq \|u(t) - z\|_H + \inf_{\theta \in \Theta} \|z - \theta\|_H \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \inf_{\theta \in \Theta} \|u(t) - \theta\|_H &\leq \inf_{z \in \Theta_{\Sigma(d)}} \|u(t) - z\|_H + \\ &+ \sup_{z \in \Theta_{\Sigma(d)}} \inf_{\theta \in \Theta} \|z - \theta\|_H \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\|u(t)\|_{\Theta} \leq \text{dist}(u(t), \Theta_{\Sigma(d)}) + \text{dist}(\Theta_{\Sigma(d)}, \Theta) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \|S_d(t, u_0)\|_{\Theta} &\leq \text{dist}(S_{\Sigma(d)}(t, u_0), \Theta_{\Sigma(d)}) + \\ &+ \text{dist}(\Theta_{\Sigma(d)}, \Theta). \end{aligned}$$

Оскільки $\Theta_{\Sigma(d)}$ – рівномірний аттрактор, то з (7) для кожного d маємо:

$$\text{dist}(S_{\Sigma(d)}(t, u_0), \Theta_{\Sigma(d)}) \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty.$$

Покладемо $\gamma(s) := \sup_{\|d\|_{\infty} \leq s} \text{dist}(\Theta_{\Sigma(d)}, \Theta) + s$. В силу (10) $\gamma \in K$ і $\text{dist}(\Theta_{\Sigma(d)}, \Theta) \leq \gamma(\|d\|_{\infty})$, що і означає виконання (9).

Отже, доведемо (10). З [6] маємо наступні властивості розв'язків задачі (1) при

$$d = h \in L_{loc}^2(\mathbb{R}_+; H), \|h\|_+ < \infty :$$

1) дисипативність: $\forall u_0 \in H \quad \forall h \in L_{loc}^2(\mathbb{R}_+; H), \|h\|_+ < \infty \quad \forall u(\cdot) \in S_h(\cdot, u_0) \quad \forall t \geq 0$

$$\|u(t)\|_H^2 \leq \|u_0\|_H^2 e^{-\delta t} + K(\|h\|_+^2 + 1), \quad (11)$$

де додатні константи δ, K залежать лише від констант задачі (1);

2) залежність від u_0, h : якщо $h_n \rightarrow h$ в $L_{loc}^{2,\omega}(\mathbb{R}_+; H)$, $u_0^n \rightarrow u_0$ слабо в H , то по деякій підпослідовності для $t > 0$:

$$S_{h_n}(t, u_0^n) \ni u_n(t) \rightarrow u(t) \in S_h(t, u_0) \text{ в } H. \quad (12)$$

Тепер від супротивного припустимо, що (10) не має місця. Це означає, що $\exists d_n \rightarrow 0$ в $L^{\infty}(\mathbb{R}_+; H)$ $\exists \varepsilon > 0 \quad \exists z_n \in \Theta_{\Sigma(d_n)}$ такі, що

$$\text{dist}(z_n, \Theta) \geq \varepsilon. \quad (13)$$

З (11) виводимо: $\forall u(\cdot) \in S_{\Sigma(d)}(\cdot, u_0) \quad \forall t \geq 0$

$$\|u(t)\|_H^2 \leq \|u_0\|_H^2 e^{-\delta t} + K(\|d\|_{\infty}^2 + 1). \quad (14)$$

Оскільки в силу [6] $\xi \in \Theta_{\Sigma} \Leftrightarrow \xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$, де $\xi_n \in S_{\Sigma}(t_n, B)$ де $t_n \nearrow \infty$, $B \subset H$ – обмежена, то з (14) маємо:

$$\forall \xi \in \Theta_{\Sigma(d)} \quad \|\xi\|_H^2 \leq K(\|d\|_{\infty}^2 + 1),$$

тобто існує обмежена $B_0 \subset H$ така, що $\forall d$, $\|d\|_{\infty} \leq R_0$

$$\Theta_{\Sigma(d)} \subset B_0.$$

Тоді $z_n \in \Theta_{\Sigma(d_n)} \subset S_{\Sigma(d_n)}(t, \Theta_{\Sigma(d_n)}) \subset S_{\Sigma(d_n)}(t, B_0)$.

Отже, $z_n = u_n(t) \in S_{h_n}(t, \xi_n)$, де $\xi_n \rightarrow \xi$ слабо в H , $\|h_n\|_+ \leq \|d_n\|_{\infty} \rightarrow 0$. Звідси $h_n \rightarrow 0$ в $L_{loc}^{2,\omega}(\mathbb{R}_+; H)$ і за властивістю (12) по підпослідовності

$$u_n(t) \rightarrow u(t) \in S(t, \xi) \subset S(t, B_0). \quad (15)$$

В силу рівномірного притягнення можемо вибрати $t > 0$ так, щоб

$$\text{dist}(S(t, B_0), \Theta) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тоді з (15)

$$z_n \rightarrow u(t) \in O_{\frac{\varepsilon}{2}}(\Theta),$$

що суперечить (13). Теорема доведена.

Висновки

В роботі розглянуто задачу робастної стійкості для нелінійної системи рівнянь в частинних похідних типу реакція-дифузія (RD). Для такої системи, що має глобальний аттрактор, розв'язано питання оцінки відхилення розв'язків від аттрактора в залежності від величини збурення. Доведено властивості асимптотичного підсилення (AG) відносно глобального аттрактора дисипативної RD-системи.

Список використаних джерел

1. V.V. Chepyzhov. Attractors for equations of mathematical physics // American Mathematical Society. – 2002.
2. S. Dashkovskiy. Input-to-state stability of infinite-dimensional control systems // Math. Contr. Sygn. Syst. – 2013. – 25. – P. 1–35.
3. S. Dashkovskiy. Global attractors of impulsive parabolic inclusions // Discr. Contin. Dyn. Syst. – 2017. – Series B, 22. – P. 1875–1886.
4. S. Dashkovskiy. A local input-to-state stability result w.r.t. attractors of nonlinear reaction-diffusion equations // Mathematics of Control, Signals, and Systems. – 2020. – 32. – P. 309–326.
5. B. Jacob. Input-to-state stability of unbounded bilinear control systems // arXiv:1811.08470. – 2018.
6. O.V. Kapustyan. Structure of uniform global attractor for general non-autonomous reaction-diffusion system // Continuous and distributed systems. – 2014 – Vol. 211. – P. 221–237.
7. Karafyllis, I. Input-to-state stability for PDEs // Communications and Control Engineering Series. – Springer, Cham. – 2019.
8. A. Mironchenko. Input-to-state Stability of Infinite-Dimensional Systems: Recent Results and Open Questions // SIAM Review. – 2020. – 62. – P. 529–614.
9. A. Mironchenko. Characterizations of input-to-state stability for infinite-dimensional systems // IEEE Trans. Autom. Contr. – 2018. – 63. – P. 1692–1707.

References

1. V.V. CHEPYZHOV, M.I. VISHIK (2002) *Attractors for equations of mathematical physics*. American Mathematical Society.
2. S. DASHKOVSKIY, AND A. MIRONCHENKO (2013) Input-to-state stability of infinite-dimensional control systems. *Math. Contr. Sygn. Syst.*, 25 p. ,1–35.
3. S. DASHKOVSKIY, O.V. KAPUSTYAN, I. ROMANIUK (2017) Global attractors of impulsive parabolic inclusions, *Discr. Contin. Dyn. Syst. - Series B*, 22 p. 1875–1886.
4. S. DASHKOVSKIY, O.V. KAPUSTYAN, J. SCHMID (2020) A local input-to-state stability result w.r.t. attractors of nonlinear reaction-diffusion equations. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 32 p. 309–326.
5. B. JACOB, F. SCHWENNINGER (2018) Input-to-state stability of unbounded bilinear control systems. *arXiv:1811.08470*.
6. O.V. KAPUSTYAN, P.O. KASYANOV, J. VALERO, M.Z. ZGUROVSKY (2014) Structure of uniform global attractor for general non-autonomous reaction-diffusion system. *Continuous and distributed systems*. vol. 211, p. 221–237.
7. KARAFYLLIS, I. AND KRSTIC, M. (2019) *Input-to-state stability for PDEs*. Communications and Control Engineering Series. Springer, Cham.
8. A. MIRONCHENKO, CH. PRIEUR (2020) Input-to-state Stability of Infinite-Dimensional Systems: Recent Results and Open Questions. *SIAM Review.*, 62, p. 529–614.
9. A. MIRONCHENKO, F. WIRTH (2018) Characterizations of input-to-state stability for infinite-dimensional systems. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 63, p. 1692–1707.

Надійшла до редколегії 08.09.2021