УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/2.4>

В. Голомозий, кандидат наук, доцент

**Оцінка експоненційного моменту для
часу одночасного відновлення двох
випадкових блукань на півпрямій.**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володи-
мирська 64.

V. Golomoziy, Ph.D., Associate Professor

**On estimating exponential moment for
the simultaneous renewal time for two
random walks on a half line**

Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.

В даній роботі ми розглядаємо умови існування та скінченості експоненційного моменту для часу одночасного відновлення двох випадкових блукань на півпрямій. Допускається, що випадкові блукання є неоднорідними за часом. Отримані умови за яких експоненційний момент скінчений для кожного окремого ланцюга а також для часу спільного потрапляння у множині. Показано, яким чином можна обчислити оцінки у практичних застосуваннях.

Результати дослідження доповідались на Міжнародній науковій конференції "Modern Stochastics: Theory and Applications. V" (MSTA-V).

Ключові слова: Теорія відновлення, склеювання, неоднорідні ланцюги Маркова.

This paper is devoted to studying the recurrence properties of a pair of time-inhomogeneous random walks on a half-line. We consider a chain of the form $X_{n+1} = (X_n + W_n)^+$, where X_0 is a given starting point (random or non-random), and increments W_n are independent, but not necessarily equally distributed random variables, which makes Markov chain $(X_n)_{n \geq 0}$ time-inhomogeneous. We demonstrate that there exists a set $C = [-c, c]$ such that under suitable conditions on W_n (which are the existence of a uniform geometric moment and uniformly negative expectation), the chain $(X_n)_{n \geq 0}$ has finite exponential moment for the return time to the set C . The exponential moment, thus obtained, is uniformly bounded on the C . We show how the parameter c can be calculated in terms of the distribution of W_n and provide formulas for the bound of the exponential moment, which are suitable for practical application. Later we extend this result to the pair of Markov chains of the same form. We demonstrate that under the same conditions, an exponential moment exists for the simultaneous return time for the pair of chains to the set $C \times C$. We also provide bounds that could be calculated in applications, provided that distributions of increments are known.

Key Words: Renewal theory, coupling, time-inhomogeneous Markov chains

Communicated by Prof. Moklyachuk M.P.

1 Вступ

Оцінки моментів для часу спільного потрапляння двох ланцюгів Маркова у певну множину відіграють ключову роль для побудови склеювання двох таких ланцюгів, що у свою чергу дозволяє розв'язувати широкий клас задач, зокрема отримувати оцінки стійкості перехідних ймовірностей за n кроків або оцінки стійкості функціоналів від двох ланцюгів. Важливим аспектом методу склеювання є те, що оцінки можна отримувати навіть для неоднорідного за часом випадку, що викликає великі труднощі при використанні класичних методів.

В даній роботі використовуються результати двох праць [2] та [3] у яких було розвинуто теорію для побудови оцінок експоненційно-

го часу потрапляння у множину для атомарних та загальних ланцюгів Маркова відповідно. Важливо зазначити, що ключову роль у побудові оцінок відіграє умова зсуву (drift condition) яка широко використовується у класичній теорії однорідних ланцюгів Маркова (див. [4] та [1]).

У роботі [2] було отримано варіант умови зсуву для неоднорідних ланцюгів Маркова, який гарантує існування експоненційного моменту. Цю умову було використано для побудови оцінки одночасного потрапляння двох (можливо неоднорідних) ланцюгів Маркова у певний атом. У роботі [3] ці результати було узагальнено на випадок неатомарних множин, при цьому використовувався відомий метод розще-

плення (splitting method) - див. [4].

В результаті були отримані не лише умови існування експоненційного моменту, але і запропоновано підхід до обчислення оцінок цього моменту із використанням умови зсуву. Саме такий підхід і використовується у даній роботі.

Цікаво відзначити, що ланцюги, які розглядаються в даній роботі є атомарними (мають атом в 0). Однак, виявляється, що для розв'язання задачі, що розглядається більш зручно використовувати підхід із роботи [3], тобто виділити певну "малу" множину (в нашому випадку множину $[0, c]$, $c \in \mathbb{R}^+$), і побудувати пробну функцію яка задовільняє умові зсуву на цій множині а не на атомі $\{0\}$.

Зауважимо, що у даній роботі не припускається нормальність випадкового блукання. Натомість розглядається широкий клас розподілів на який накладаються умови, що забезпечують існування скінченного експоненційного моменту. Накладені умови є природними і відповідають відомим умовам в однорідному випадку (див. [4]). Розглядаючи множину $[0, c]$ вдається вписати пробну функцію у майже явному вигляді для довільного розподілу, що задовільняє умовам описаним вище, а також отримати зручні вирази для оцінки експоненційного моменту. Для практичних застосувань, де розподіл інкременту випадкового блукання явно відомий, отримані оцінки можна обчислити за допомогою чисельних методів наближено обчисливши певні інтеграли.

2 Основні позначення та формулювання задачі

Будемо використовувати позначення $\mathbb{R}^+$ для множини невід'ємних дійсних чисел, та $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ - позначатиме борельову σ -алгебру на цій множині.

Розглядаємо два незалежні ланцюги Маркова $\{X_n^{(1)}, n \geq 0\}$ та $\{X_n^{(2)}, n \geq 0\}$, зі значеннями в $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$, заданих на спільному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ наступним чином:

$$X_n^{(1)} = \left(X_{n-1}^{(1)} + W_n\right)^+, n \geq 1$$

$$X_n^{(2)} = \left(X_{n-1}^{(2)} + Z_n\right)^+, n \geq 1,$$

де величини $W_n, Z_n, n \geq 0$ є незалежними в сукупності, задані на тому ж ймовірнісному про-

сторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ та мають розподіли:

$$F_n(x) = \mathbb{P}\{X_n \in dx\},$$

$$G_n(x) = \mathbb{P}\{Z_n \in dx\}.$$

Таким чином обидва ланцюги є неоднорідними за часом.

Нехай

$$P_{i,n}: \mathbb{R}^+ \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \rightarrow [0, 1],$$

це перехідні ймовірності на n -тому кроці для i -того ланцюга, $i \in \{1, 2\}$. Тоді

$$P_{i,n}(x, A) = \mathbb{P}\left\{X_{n+1}^{(i)} \in A | X_n^{(i)} = x\right\}.$$

Будемо позначати через $\mathbb{P}_{i,x}$, $i \in \{1, 2\}$, $x \in \mathbb{R}^+$ міру асоційовану з ланцюгом $X^{(i)}$, що стартує з точки $x \in \mathbb{R}^+$. Іншими словами:

$$\mathbb{P}_{i,x}\{A\} = \mathbb{P}\left\{X^{(i)} \in A | X_0^{(i)} = x\right\},$$

де $A \in (\mathcal{B}(\mathbb{R}^+))^\infty$ - множина з циліндричної σ -алгебри на множині $(\mathbb{R}^+)^\infty$. Відповідне математичне сподівання позначатимемо через $\mathbb{E}_{i,x}$. Будемо також використовувати позначення $\mathbb{P}_{x,y}$ та $\mathbb{E}_{x,y}$, $x, y \in \mathbb{R}^+$ для позначення аналогічної ймовірності та математичного сподівання породжених парою ланцюгів $(X^{(1)}, X^{(2)})$.

Нехай $c > 0$ - константа, визначимо

$$\begin{aligned} \sigma_c^{(i)} &= \min \left\{ t \geq 1 : X_t^{(i)} \in [0, c] \right\}, \\ \sigma_c &= \min \left\{ t \geq 1 : \left(X_t^{(1)}, X_t^{(2)}\right) \in [0, c] \times [0, c] \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

як час першого повернення у множину $[0, c]$ та час першого спільного потрапляння у цю множину для обох ланцюгів відповідно.

Задача полягає у тому, щоб з'ясувати за яких умов існує таке $c > 0$ та $\beta > 1$, що

$$\mathbb{E}_{i,x} \left[\beta^{\sigma_c^{(i)}} \right] < \infty,$$

та

$$\mathbb{E}_{x,y} [\beta^{\sigma_c}] < \infty,$$

для всіх $i \in \{1, 2\}$, $x, y \in \mathbb{R}^+$, а також отримати оцінки для вищезначених математичних сподівань. Зауважимо, що $\sigma_c^{(i)}$ та σ_c можна вважати, як випадковими величинами заданими на просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, так і величинами на просторі $((\mathbb{R}^+)^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)^\infty)$ з мірами $\mathbb{P}_{i,x}$ та $\mathbb{P}_{x,y}$. Тому в подальшому ми будемо вільно використовувати, як символ $\mathbb{P}$ так і $\mathbb{P}_{i,x}$ для роботи з цими величинами, та будь-якими іншими, що є функціями від $X^{(i)}$. Зауважимо також, що β може бути різним у першій та другій нерівностях вище. Як ми побачимо далі, саме так і буде.

3 Умова зсуву для ланцюгів $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$

Розглянемо наступні умови, які, як ми побачимо далі, забезпечують скінченність експоненційних моментів та дозволяють отримати їх оцінки.

Умова (А) Нехай існує таке $\varepsilon > 0$, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} x F_n(dx) < -\varepsilon,$$

та

$$\int_{-\infty}^{\infty} x G_n(dx) < -\varepsilon,$$

для всіх $n \geq 0$.

Іншими словами,

$$\sup_{n \geq 1} \{ \mathbb{E}[Z_n], \mathbb{E}[W_n] \} < -\varepsilon < 0.$$

Умова (В) Нехай існують такі $\rho_0 > 0$, та $M > 0$, що

$$\sup_{n \geq 0} \{ \mathbb{E}[\exp(\rho_0 W_n)], \mathbb{E}[\exp(\rho_0 Z_n)] \} < M.$$

Іншими словами, існують скінчені експоненційні моменти для величин W_n та Z_n .

Основним інструментом дослідження буде умова зсуву у формі;

$$P_{i,n}V(x) \leq \lambda V(x) + b\mathbb{1}_{[0,c]}(x),$$

де $V: \mathbb{R}^+ \rightarrow [1, \infty]$ - деяка пробна функція, $\lambda \in (0, 1)$, $b < \infty$ - деякі константи. Ми покажемо, що за умов (А) та (В) виконується умова зсуву для обох ланцюгів $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$, та, обчислимо величини λ та b .

Теорема 3.1. Нехай для ланцюгів $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ визначених вище виконані умови (А) та (В). Тоді

1. Існує таке число $c > 0$, що для всіх $n \geq 0$

$$\int_{-c}^{\infty} x F_n(dx) < -\varepsilon/2,$$

та

$$\int_{-c}^{\infty} x G_n(dx) < -\varepsilon/2.$$

2. Існує таке $\rho > 0$, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{\rho y} - \rho y - 1| F_n(dy) \leq \rho\varepsilon/4,$$

та

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{\rho y} - \rho y - 1| G_n(dy) \leq \rho\varepsilon/4,$$

для всіх $n > 0$.

3. Для функції $V(x) = e^{\rho x}$, $n \geq 0$, $i \in \{1, 2\}$ та довільного $x \geq 0$ має місце наступна нерівність

$$\mathbb{E} \left[V \left(X_{n+1}^{(i)} \right) | X_n^{(i)} = x \right] \leq \lambda V(x) + b\mathbb{1}_{[0,c]}(x),$$

де

$$\lambda = 1 - \rho\varepsilon/4 < 1,$$

$$b = \sup_{i \in \{1,2\}, 0 \leq x \leq c, n \geq 0} \mathbb{E} \left[V \left(X_{n+1}^{(i)} \right) | X_n^{(i)} = x \right] < \infty.$$

Доведення.

Очевидно, умова (А) гарантує існування $c > 0$, що задовільняє твердження 1. теореми. Помітимо тепер, що

$$|e^{\rho y} - \rho y - 1| = \rho \left(\frac{e^{\rho y} - 1}{\rho} - \rho y \right) \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0.$$

Окрім того,

$$|e^{\rho y} - \rho y - 1| \leq e^{\rho y} + \rho|y| + 1 \in L_1(F_n),$$

в силу умови (В). Отже існує таке $\rho < \rho_0$, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{\rho y} - \rho y - 1| F_n(dy) \leq \rho\varepsilon/4.$$

З умови (В) також впливає рівномірна інтегровність сімейств величини $\{W_n, n \geq 0\}$ та $\{Z_n, n \geq 0\}$, таким чином константу ρ можна вибрати не залежною від n і такою, що задовільняє твердження 2. теореми для F_n та G_n .

Розглянемо пробну функцію $V(x)$ у формі

$$V(x) = e^{\rho x}, \quad \rho < \rho_0,$$

де ρ взято із 2. Розглянемо умову зсуву для $X^{(1)}$. Для довільних $n \geq 0$ та $x > c$ маємо

$$\begin{aligned} P_{1,n}V(x)/V(x) &= e^{-\rho x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\rho(x+y)^+} F_n(dy) \\ &= e^{-\rho x} \left(F_n(-\infty, -x] + \int_{-x+0}^{\infty} e^{\rho(x+y)} F_n(dy) \right) \\ &= F_n(-\infty, -x] e^{-\rho x} + \int_{-x+0}^{\infty} e^{\rho y} F_n(dy) \\ &= F_n(-\infty, -x] e^{-\rho x} + \int_{-x+0}^{\infty} (e^{\rho y} - \rho y - 1) F_n(dy) \\ &\quad + \int_{-x+0}^{\infty} (\rho y + 1) F_n(dy) \\ &\leq F_n(-\infty, -x] e^{-\rho x} + \int_{-x+0}^{\infty} (e^{\rho y} - \rho y - 1) F_n(dy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \rho \int_{-c}^{\infty} y F_n(dy) + F(-x, \infty) \\
 & \leq 1 - \rho \varepsilon / 2 - F_n(-\infty, -x](1 - e^{-\rho x}) \\
 & + \int_{-x+0}^{\infty} (e^{\rho y} - \rho y - 1) F_n(dy) \\
 & \leq 1 - \rho \varepsilon / 2 - F_n(-\infty, -x](1 - e^{-\rho x}) \\
 & + \int_{-\infty}^{\infty} |e^{\rho y} - \rho y - 1| F_n(dy) \leq \\
 & \leq 1 - \rho \varepsilon / 2 - F_n(-\infty, -x](1 - e^{-\rho x}) + \rho \varepsilon / 4 \\
 & \leq 1 - \rho \varepsilon / 4 = \lambda < 1.
 \end{aligned}$$

Очевидно аналогічні міркування справедливі також для G_n . Оскільки ланцюги $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ феллерові, та $\rho < \rho_0$, то функція $\phi(x) = \mathbb{E}[V(X_{n+1}^{(i)} | X_n^{(i)} = x)]$ є скінченою для кожного x та неперервною. А отже є обмеженою на компакт $[0, c]$.

□

4 Експоненційний момент для часу спільного попадання у множину $[0, c]$

Тепер скористаємось результатами з робіт [2] та [3] щоби встановити скінченність експоненційних моментів для $\sigma_c^{(i)}$ та σ_c .

Теорема 4.1. Для ланцюгів $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ визначених вище, та для констант ρ, c, λ, b з Теорему 3.1 має місце нерівність

$$E_x \left[\lambda^{-\sigma_c^{(i)}} \right] \leq e^{\rho x} + b \mathbb{1}_{[0, c]}(x),$$

для всіх $x \geq 0$, $i \in \{1, 2\}$.

Доведення.

Дане твердження є прямим наслідком Теорему 1 з роботи [2].

□

Для встановлення оцінки для експоненційного момента для σ_c скористаємось Теоремою 4.3 із [3]. Для зручності, формулювання Теорему 4.3 з [3] наведено у додатку.

Спочатку покажемо, що множина $C = [0, c]$ є малою множиною для ланцюгів $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$. Цей результат гарантується наступною теоремою.

Але перед цим нам потрібно ввести поняття мінімуму двох мір. Нехай μ, ν дві міри задані на деякому ймовірнісному просторі. Нехай

$$f = \frac{\mu}{\mu + \nu}, \quad f' = \frac{\nu}{\mu + \nu},$$

тоді мінімумом двох мір μ та ν (або мінімальною мірою) називається ймовірнісна міра:

$$\mu \wedge \nu = (f \wedge f') \cdot (\mu + \nu),$$

де знак $\cdot$ слід розуміти як:

$$\mu \wedge \nu(A) = \int_A (f \wedge f')(x) (\mu + \nu)(dx),$$

для довільної вимірної A .

Аналогічним чином можна визначити мінімальну міру для зліченої сім'ї мір $\{\mu_n, n \geq 0\}$.

Лема 4.1. Нехай $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ ланцюги які визначені вище. Припустимо для них виконані умови (A) та (B). Нехай $\tilde{\nu}$ - мінімальна міра для сім'ї ймовірнісних мір $\{P_{i,n}(x, \cdot), i \in \{1, 2\}, x \in [0, c]\}$. Тоді

$$\alpha := \tilde{\nu}(\mathbb{R}^+) > 0,$$

та для $i \in \{1, 2\}$, $x \in [0, c]$ та $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ має місце нерівність:

$$P_{i,n}(x, A) \geq \alpha \nu(A),$$

де $\nu(A) = \tilde{\nu}(A)/\alpha$ - ймовірнісна міра, причому $\nu([0, c]) > 0$.

Доведення.

В силу умови (B):

$$\inf_{n \geq 0} \{F_n(-\infty, 0], G_n(-\infty, 0]\} > 0.$$

тоді для $x \in [0, c]$

$$\inf_{n \geq 0} P_{1,n}(x, [0, c]) = \inf_{n \geq 0} F_n(-\infty, c - x]$$

$$\geq \inf_{n \geq 0} F_n(-\infty, 0] > 0,$$

та аналогічна нерівність виконана для $P_{2,n}(x, [0, c])$. Таким чином міра $\tilde{\nu}$ ненульова та $\tilde{\nu}([0, c]) > 0$. Тоді, очевидно, ν коректно визначена ймовірнісна міра, для якої $\nu([0, c]) > 0$.

□

Тепер ми готові почати перевірку умов Теорему 4.3 з [3]. Не втрачаючи загальності, вважатимемо, що $\alpha < \rho$ визначене вище в Теоремі 3.1.

В якості функцій $V_t(x)$ з умови 1, Теорему 4.3. будемо використовувати функції $V(x) = e^{\alpha x}$. Зауважимо, що вони не залежать від t , і є

однаковими для всіх моментів часу. Скориставшись нерівністю Чернова, як у [2], розділ 3.2 отримаємо:

$$\mathbb{P}_x\{\sigma_c^{(i)} > n\} \leq e^{\alpha x} \lambda^n,$$

для $x > c$, та

$$\mathbb{P}_x\{\sigma_c^{(i)} > n\} \leq (\lambda e^{\alpha c} + b) \lambda^n,$$

для $x \in [0, c]$. Отже умова 1 Теорема 4.3. виконана, з константами

$$\beta_0 = \lambda^{-1},$$

$$D = \lambda e^{\alpha c} + b,$$

де константи c та b визначені в Теоремі 3.1. Перевіримо умову 2. Для цього треба розглянути

$$q_{n,x}^{(i)}(A) = \frac{P_{i,n}(x, A) - \alpha_t \nu_t(A)}{1 - \alpha_t}.$$

Оскільки в нашому випадку, α та ν не залежать від n маємо:

$$q_{n,x}^{(i)}(A) = \frac{P_{i,n}(x, A) - \alpha \nu(A)}{1 - \alpha}.$$

Для $i = 1$ маємо

$$q_{n,x}^{(i)}(A) = \frac{\int_{A \cap [0, \infty)} F_n(dy - x) - \alpha \nu(A)}{1 - \alpha} + \frac{\mathbb{1}_A(0) F_n(-\infty, -x]}{1 - \alpha}.$$

Тоді

$$q_{n,x}^{(1)}(V) = \frac{\int_{0+}^{\infty} (F_n(dy - x) - \alpha \nu(dy)) e^{\alpha y}}{1 - \alpha} + \frac{F_n(-\infty, -x]}{1 - \alpha}.$$

Очевидно, що аналогічна рівність має місце і для $q_{n,x}^{(2)}(V)$ якщо замінити, F_n на G_n . Тоді скориставшись умовою (B), отримаємо:

$$\begin{aligned} (1 - \alpha) \hat{Q} &= (1 - \alpha) \sup_{n \geq 0, 0 \leq x \leq c, i \in \{0, 1\}} q_{n,x}^{(i)}(V) \\ &\leq (M - \alpha \int_0^{\infty} e^{\alpha y} \nu(dy)) + \\ &\sup_n \{F_n(-\infty, 0], G_n(-\infty, 0]\} < \infty \end{aligned} \quad (2)$$

Зокрема маємо таку грубу оцінку для $\hat{Q}$

$$\hat{Q} \leq \frac{M + 1}{1 - \alpha},$$

де M визначено в умові (B).

Умова 3 Теорема 4.3 з [3] гарантується Теоремою 4.1.

Таким чином всі умови Теорема 4.3. виконані і ми можемо сформулювати основний результат даної роботи.

Теорема 4.2. Нехай $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ два ланцюги Маркова визначених вище, що задовільняють умови (A) та (B). Нехай $\lambda, \varepsilon, \rho, c$ - константи з Теорема 4.1 а α, ν - константа на міноризацийна міра з Лема 4.1. Тоді для довільних $x, y \in \mathbb{R}^+$

$$E_{x,y}[\delta_1^{\sigma_c}] \leq M_0 \left(E_x \left[\delta_0^{\sigma_c^{(1)}} \right] S_1 + E_y \left[\delta_0^{\sigma_c^{(2)}} \right] S_2 \right),$$

де

$$\delta_0 = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\alpha(\lambda^{-1} - 1)}{(1 - \alpha)\hat{Q}\lambda^{-1} + \alpha}} \right),$$

$$\gamma_0 = \left\{ (1 - \alpha) \left(1 + \frac{(\delta_0^2 - 1)\lambda^{-1}}{\lambda^{-1} - \delta_0^2} \hat{Q} \right) \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$\hat{\varepsilon}$ - довільна мала константа

$$\gamma_1 = (\alpha \nu[0, c])^m \times,$$

α, ν визначено у Теоремі 4.1,

$$\times \exp \left(\ln(1 - \check{D} \delta^{-m}) \left(\frac{\delta_0^{m+1}}{\delta_0 - 1} - 1 \right) \right),$$

$$\delta_1 = (1 + \hat{\varepsilon}/2)^{\frac{1}{m+n_0}},$$

$$\check{D} = D \frac{1 + \gamma_0}{1 - \gamma_0} \left(1 + \frac{(\delta_0 - 1)\lambda^{-1}}{\lambda^{-1} - \delta_0} \hat{Q} \right) \times,$$

$$D = \lambda e^{\alpha c} + b,$$

α, c та b з Теорема 3.1,

$$\times \left(1 + \frac{\delta_0(\lambda^{-1} - 1)}{\lambda^{-1} - \delta_0} \right),$$

$$m = \min \{n \geq 1 | \check{D} \delta_0^{-n} < 1\},$$

$$n_0 = \left\lfloor \ln \left(\frac{\hat{\varepsilon}(\delta_0 - \lambda^{-1})}{2\check{D}\lambda^{-m-1}} \right) / \ln \left(\frac{\lambda^{-1}}{\delta_0} \right) \right\rfloor + 3,$$

$$M_0 = \left(1 + \frac{1}{1 - \sqrt{(1 + \hat{\varepsilon})(1 - \gamma_1)}} \right) \left(\frac{1 + \gamma_0}{1 - \gamma_0} \right),$$

S_1 та S_2 визначено в Теоремі 4.2 з [3], та вони задовільняють нерівність

$$\max \{S_1, S_2\} \leq D(1 - \alpha)^{-1},$$

$\hat{Q}$ визначено у (2).

Доведення.

Зауважимо, що попередньо ми перевірили всі умови Теорема 4.3 з роботи [3], та знайшли вираз для $\hat{Q}$. Оскільки отримані δ_0 та δ_1 менші за $\beta_0 = \lambda^{-1}$ то очевидно також виконані умови Теорема 4.2 з [3]. Тоді нерівність

$$E_{x,y}[\delta_1^{\sigma_c}] \leq M_0 \left(E_x \left[\delta_0^{\sigma_c^{(1)}} \right] S_1 + E_y \left[\delta_0^{\sigma_c^{(2)}} \right] S_2 \right),$$

та вираз для M_0 випливають з Теорема 4.2 (з [3]), а формули для констант з Теорема 4.3 та попередніх міркувань. $\square$

5 Додаток

Наводимо формулювання Теорема 4.3 з роботи [3]. За деталями позначень, та доведеннями відсилаємо читача до тексту самої роботи [3]. Всі посилання у формулюванні теорема відповідають оригінальній роботі.

Теорема 5.1. Нехай $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ два ланцюги Маркова, що задовільняють умову міноризації (**Condition (A)** - в оригінальній роботі) та $\check{X}^{(1)}$, $\check{X}^{(2)}$ відповідні розщеплені ланцюги, що визначені у розділі 3, випадкові величини $\sigma_C^{(1)}$, $\sigma_C^{(2)}$ визначені в (1) та $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{M}_1(\mathcal{E})$. Позначимо $\check{\mu}_i = (1 - \alpha_t)\mu_i \times \{0\} + \alpha_t\mu_i \times \{1\}$.

1. Припустимо існує експоненційно домінуюча послідовність з константами $D > 0$, $\beta_0 > 1$ та вимірні функції $V_t^{(i)}: E \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$\sup_{t \geq 0, x \in C} \mathbb{P}_x^t \left\{ \sigma_C^{(i)} > n \right\} \leq G_n = D\beta_0^{-n},$$

та для всіх $x \in E \setminus C$

$$\mathbb{P}_x^t \left\{ \sigma_C^{(i)} > n \right\} \leq G_n(x) = V_t^{(i)}(x)\beta_0^{-n}.$$

References

1. R. DOUC, E. MOULINES, P. PRIOURET and P. SOULIER, (2018) "Markov Chains", (Springer International Publishing, 2018), p. 757.
2. V. GOLOMOZIY (2021) "Computable bounds of exponential moments of simultaneous hitting time for two time-inhomogeneous atomic Markov chains", *Proceedings of the International Conference on Stochastic Processes and Algebraic Structures*, In Print.

2. Для кожного $t \geq 0, x \in C, i \in \{0, 1\}$ визначимо ймовірнісну міру $q_{t,x}^{(i)}(\cdot) \in \mathbb{M}_1$ таку що

$$q_{t,x}^{(i)}(A) = \frac{P_{t,i}(x, A) - \alpha_t \nu_t(A)}{1 - \alpha_t}.$$

Припустимо, що

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= \sup_{t \geq 0, x \in C, i \in \{1, 2\}} q_{t,x}^{(i)}(V_t^{(i)}) \\ &= \sup_{t \geq 0, x \in C, i \in \{1, 2\}} \int_E q_{t,x}^{(i)}(dy) V_t^{(i)}(y) < \infty. \end{aligned}$$

3. Нехай

$$\inf_{t \geq 0} \nu_t(C) > 0.$$

Якщо умови 1-3 виконані, тоді сталі $\delta_0 > 1, \delta_1 > 1, \gamma_0 > 0, \gamma_1 > 0$ та $\varepsilon > 0$ можуть бути обрані наступним чином:

$$\delta_0 < \sqrt{1 + \frac{\alpha(\beta_0 - 1)}{(1 - \alpha)\beta_0\hat{Q} + \alpha}},$$

$$\gamma_0 = \left\{ (1 - \alpha) \left(1 + \frac{(\delta_0^2 - 1)\beta_0}{\beta_0 - \delta_0^2} \hat{Q} \right) \right\}^{\frac{1}{2}},$$

ε - довільна мала константа

$$\gamma_1 = \left(\alpha \inf_t \nu_t(C) \right)^m \exp \left(\ln(1 - \check{D}\delta^{-m}) \left(\frac{\delta_0^{m+1}}{\delta_0 - 1} - 1 \right) \right),$$

$$\delta_1 = (1 + \varepsilon/2)^{\frac{1}{m+n_0}},$$

$$\check{D} = D \frac{1 + \gamma_0}{1 - \gamma_0} \left(1 + \frac{(\delta_0 - 1)\beta_0}{\beta_0 - \delta_0} \hat{Q} \right) \left(1 + \frac{\delta_0(\beta_0 - 1)}{\beta_0 - \delta_0} \right),$$

$$m = \min \{ n \geq 1 | \check{D}\delta_0^{-n} < 1 \},$$

$$n_0 = \left\lfloor \ln \left(\frac{\varepsilon(\delta_0 - \beta_0)}{2\check{D}\beta_0^{m+1}} \right) / \ln \left(\frac{\beta_0}{\delta_0} \right) \right\rfloor + 3,$$

та α визначено у **Condition (A)**.

3. V. GOLOMOZIY (2021) "Exponential moments of simultaneous hitting time for non-atomic Markov chains", *Glasnik Matematiki*, In print.
4. S. MEYN and R.L. TWEEDIE (2009) "Markov Chains and Stochastic Stability", 2nd edn. (Cambridge University Press, 2009), p. 624.