УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/2.9>

О. П. Макаrchук¹, к.ф.-м.н., доц
К. С. Сальник², аспірант

O. P. Makarchuk¹, *PhD. Phys.-Math.Sci*
K. S. Salnik², *PhD student*

**Асимптотична поведінка модуля
характеристичної функції розподілу
Кантора**

**Asymptotic behavior of the module of the
characteristic Cantor distribution
function**

¹ Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, 25006, м. Кропивницький, вул. Шевченка, 1

e-mail: makolpet@gmail.com

¹Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, 25006, Kropyvnytskyi, Shevchenko Str, 1

e-mail: makolpet@gmail.com

² Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, 25006, м. Кропивницький, вул. Шевченка, 1

e-mail: vikasvat2013@gmail.com

²Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, 25006, Kropyvnytskyi, Shevchenko Str, 1

e-mail: vikasvat2013@gmail.com

В роботі досліджується асимптотична поведінка модуля характеристичної функції випадкової величини, функцією розподілу якої являється класична сингулярна функція Кантора. Акцент здійснюється на обчисленні верхньої границі модуля характеристичної функції розподілу Кантора. Ймовірнісна міра, що відповідає розподілу Кантора входить до класу симетричних згорток Бернуллі, інтерес до яких на сьогоднішній день є значним. Симетричні згортки Бернуллі активно досліджувались як вітчизняними математиками: М. Працьовитий, Г. Турбін, Г. Торбін, Я. Гончаренко, О. Барановський та іншими, так і зарубіжними: Erdos P, Peres Y, Schlag W, Solomyak B, Albeverio S та іншими. Величина верхньої границі модуля характеристичної функції відіграє важливу роль в проблемі визначення лебегівської структури розподілів сум напевно збіжних випадкових рядів з незалежними дискретними доданками (випадкових величин типу Джессена-Вінтера). В статті знайдено точне значення верхньої границі модуля характеристичної функції розподілу Кантора.

Результати дослідження доповідались на Міжнародній науковій конференції “Modern Stochastics: Theory and Applications. V” (MSTA-V).

Ключові слова: послідовність, випадкова величина, характеристична функція, розподіл Кантора, трійковий розклад.

The asymptotic behavior of the modulus of a characteristic function of a random variable, the distribution function of which is the classical singular Cantor function, is investigated. The emphasis is on calculating the upper bound of the modulus of the characteristic Cantor distribution function. The probabilistic measure corresponding to Cantor's distribution belongs to the class of Bernoulli's symmetric convolutions, the interest in which is considerable today. Bernoulli's symmetrical convolutions were actively studied by both domestic mathematicians: M. Pratsyvyty, G. Turbin, G. Torbin, J. Honcharenko, O. Baranovsky and others, and foreign ones: Erdos P, Peres Y, Schlag W, Solomyak B, Albeverio, S and other. The value of the upper bound of the modulus of the characteristic function plays an important role in the problem of determining the Lebesgue structure of distributions of sums of probably convergent random series with independent discrete terms (random values of the Jessen-Winter type). The exact value of the upper bound of the module of the characteristic Cantor distribution function is found in the article.

Key Words: sequence, random variable, characteristic function, Cantor distribution, ternary decomposition.

1 Вступ

Нехай ξ_k — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0 та 2 з ймовірностями $\frac{1}{2}$ відповідно. Розглянемо випадкову величину

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k 3^{-k}.$$

Відомо [3], що $F_{\xi}(x)$ є класичною сингулярною функцією Кантора.

Для випадкової величини ψ та її характеристичної функції $f_{\psi}(t) = M(e^{it\psi})$ розглянемо величину

$$L_{\psi} = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \sup |f_{\psi}(t)|.$$

Відомо [2], що якщо розподіл ψ дискретний, то $L_{\psi} = 1$, адже $f_{\psi}(t)$ є майже-періодичною функцією. Якщо розподіл ψ абсолютно неперевний, то $L_{\psi} = 0$. Якщо розподіл ψ сингулярний, то L_{ψ} може набувати довільного значення з відрізка $[0; 1]$. В роботі [8] Жиро навів приклад сингулярного розподілу ψ , для якого $L_{\psi} = 0$. Приклад характеристичної функції сингулярного розподілу ψ , для якого $L_{\psi} = 1$ наведено Вінтером в роботі [10] та Єсеевом в [7]. Сингулярні розподіли ψ , для яких L_{ψ} набуває заданого значення з відрізка $[0; 1]$ побудовані Шварцем [9].

В цілому, проблема знаходження точного значення L_{ψ} , для випадкових величин ψ , що є сумами напевно збіжних випадкових рядів з незалежними дискретними доданками є нетривіальною, про що свідчать роботи [1, 4, 5, 6].

2 Величина верхньої границі модуля характеристичної функції розподілу Кантора

Теорема 1. *Виконується рівність:*

$$L_{\xi} = \prod_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{3^n}\right).$$

Доведення. Зрозуміло, що

$$|f_{\xi}(t)| = \prod_{k=1}^{\infty} |f_{\xi_k}(t)| = \prod_{k=1}^{+\infty} \left| \cos\left(\frac{t}{3^k}\right) \right|.$$

$$L_{\xi} \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |f_{\xi}(\pi 3^n)| = \prod_{k=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right). \quad (1)$$

Нехай πt_n — зростаюча необмежена послідовність дійсних чисел така, що

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_{\xi}(t_n)| = L_{\xi}.$$

Зрозуміло, що

$$\frac{\pi t_n}{3^{\lfloor \log_3(t_n) \rfloor + 2}} < \frac{\pi t_n}{3^{\log_3(t_n) + 1}} = \frac{\pi}{3}.$$

$$\frac{\pi t_n}{3^{\lfloor \log_3(t_n) \rfloor + 2}} \geq \frac{\pi t_n}{3^{\log_3(t_n) + 2}} = \frac{\pi}{9}.$$

Оскільки послідовність $\frac{\pi t_n}{3^{\lfloor \log_3(t_n) \rfloor + 2}}$ обмежена, то з неї можливо виділити збіжну підпослідовність. Отже, існує зростаюча необмежена послідовність дійсних чисел $\tilde{t}_n$ така, що

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_{\xi}(\pi \tilde{t}_n)| = L_{\xi}. \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{t}_n}{3^{\lfloor \log_3(\tilde{t}_n) \rfloor + 2}} = \gamma \in \left[\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\right].$$

Позначимо:

$$\gamma^*(n) = \frac{\tilde{t}_n}{3^{\lfloor \log_3(\tilde{t}_n) \rfloor + 2}}.$$

Нехай

$$\gamma = \Delta_{\alpha}^3 \underbrace{00\dots 01}_{a_1} \underbrace{1\dots 12}_{b_1} \underbrace{2\dots 2\dots}_{c_1} \dots \underbrace{00\dots 01}_{a_n} \underbrace{1\dots 12}_{b_n} \underbrace{2\dots 2\dots}_{c_n} \dots,$$

де $\alpha = 0$ або $\alpha = 1$.

Припустимо, що послідовності a_n та b_n обмежені, тобто для деякого натурального L та для кожного натурального n : $a_n \leq L$ та $b_n \leq L$. Розглянемо випадки.

Випадок 1. Існує $N_1 \in N$ такий, що для кожного натурального $n \geq N_1$: $a_n \geq 1$. Запишемо число γ в наступному вигляді:

$$\gamma = \Delta_{\alpha_0 1 \alpha_0 2 \dots \alpha_0 d_0}^3 \underbrace{00\dots 0}_{e_1} \alpha_{11} \alpha_{12} \dots \alpha_{1 d_1} \dots \underbrace{00\dots 0}_{e_n} \alpha_{n1} \alpha_{n2} \dots \alpha_{n d_n} \dots.$$

Нехай

$$\gamma^* = \Delta_{\alpha_0 1 \alpha_0 2 \dots \alpha_0 d_0}^3 \underbrace{00\dots 0}_{e_1} \alpha_{11} \alpha_{12} \dots \alpha_{1 d_1} \dots \underbrace{00\dots 0}_{e_n} \alpha_{n1} \alpha_{n2} \dots \alpha_{n d_n} \tau_1 \tau_2 \dots,$$

де $\tau_1, \tau_2, \dots$ — довільні цифри. Зрозуміло, що для кожного $k \in \{1; 2; \dots; n-1\}$:

$$\gamma^* \cdot 3^{d_0 + e_1 + d_1 + \dots + e_k + d_k} = w_k + \Delta_{\underbrace{00\dots 0}_{e_{k+1}}}^3 \dots,$$

де w_k — деяке ціле число, причому

$$\underbrace{\Delta_{00\dots 0}^3}_{e_{k+1}} \geq \underbrace{\Delta_{00\dots 0}^3}_L 1(0).$$

Маємо:

$$|\cos(\gamma^* \cdot 3^{d_0+e_1+d_1+\dots+e_k+d_k})| \leq |\cos(\underbrace{\Delta_{00\dots 0}^3}_L 1(0))|.$$

Зрозуміло, що існує натуральне число l_0 таке, що

$$|\cos(\underbrace{\Delta_{00\dots 0}^3}_L 1(0))|^{l_0} < L_\xi.$$

Зрозуміло, що існує натуральне число l_1 таке, що для кожного $n > l_1$ перші $d_0 + e_1 + d_1 + \dots + e_{l_0} + d_{l_0}$ цифр трійкових зображень чисел $\gamma^*(n)$ та γ рівні.

Зрозуміло, що існує натуральне число l_2 таке, що для кожного $n > l_2$:

$$[\log_3(\tilde{t}_n)] + 2 > d_0 + e_1 + d_1 + \dots + e_{l_0} + d_{l_0}.$$

Нехай $l_3 = \max(l_1; l_2)$, тоді при $n > l_3$ маємо:

$$|f_\xi(\pi \tilde{t}_n)| \leq \prod_{j=1}^{l_0} |\cos(\gamma^*(n) \cdot 3^{d_0+e_1+d_1+\dots+e_j+d_j})| \leq |\cos(\underbrace{\Delta_{00\dots 0}^3}_L 1(0))|^{l_0} < L_\xi.$$

Маємо суперечність з умовою 2.

Випадок 2. Існує $N_2 \in N$ такий, що для кожного натурального $n \geq N_2$ виконується умова $c_n \geq 1$. Запишемо число γ в наступному вигляді:

$$\gamma = \Delta_{\beta_{01}\beta_{02}\dots\beta_{0f_0}}^3 \underbrace{22\dots 2}_{g_1} \beta_{11}\beta_{12}\dots\beta_{1f_1} \dots \underbrace{22\dots 2}_{g_n} \beta_{n1}\dots\beta_{nf_n} \dots$$

Зрозуміло, що для кожного натурального k :

$$\underbrace{\Delta_{22\dots 2}^3}_{g_{k+1}} \leq \underbrace{\Delta_{22\dots 2}^3}_L 2(0).$$

Міркуючи аналогічним чином, як і по відношенню до попереднього випадку отримаємо, що для достатньо великих n :

$$|f_\xi(\pi \tilde{t}_n)| < L_\xi.$$

Маємо суперечність з умовою 2.

Випадок 3. Існує $N_3 \in N$ такий, що для кожного натурального $n \geq N_3$ виконується умова $a_n = c_n = 0$.

Запишемо число γ в наступному вигляді:

$$\gamma = \Delta_{\delta_1\delta_2\dots\delta_j(1)}^3.$$

Маємо:

$$\gamma 3^j = 3^j \left(\frac{\delta_1}{3} + \frac{\delta_2}{3^2} + \dots + \frac{\delta_j}{3^j} \right) + \frac{1}{2}.$$

При $(n \rightarrow +\infty)$ маємо:

$$\gamma^*(n) \cdot 3^j \rightarrow 3^j \left(\frac{\delta_1}{3} + \frac{\delta_2}{3^2} + \dots + \frac{\delta_j}{3^j} \right) + \frac{1}{2}.$$

$$\cos(\gamma^*(n) \cdot 3^j) \rightarrow \cos\left(3^j \left(\frac{\delta_1}{3} + \frac{\delta_2}{3^2} + \dots + \frac{\delta_j}{3^j} \right) + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Зрозуміло, що існує натуральне число r_3 таке, що для кожного $n > r_3$

$$[\log_3(\tilde{t}_n)] + 2 > a_j.$$

Маємо:

$$|f_\xi(\pi \tilde{t}_n)| \leq \cos(\gamma^*(n) \cdot 3^j) \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty).$$

Маємо суперечність з умовою 2.

Отже, або послідовність a_n необмежена або необмеженою є послідовність c_n .

Випадок 4. Нехай γ — трійково-іраціональне число ($\gamma \neq \frac{a}{3^b} \forall a, b \in N$).

Випадок 4.1. Нехай a_n є необмеженою послідовністю.

Запишемо число γ у вигляді:

$$\gamma = \Delta_{\gamma_{01}\gamma_{02}\dots\gamma_{0h_0}}^3 \underbrace{00\dots 0}_{k_1} \gamma_{11}\gamma_{12}\dots\gamma_{1h_1} \dots \underbrace{00\dots 0}_{k_n} \gamma_{n1}\dots\gamma_{nh_n} \dots$$

Зрозуміло, що серед чисел $\gamma_{1h_1}, \gamma_{2h_2}, \dots$ або нескінченна множина одиниць або нескінченна множина двійок.

Випадок 4.1.A. Серед чисел $\gamma_{1h_1}, \gamma_{2h_2}, \dots$ нескінченна множина одиниць.

Запишемо число γ у вигляді:

$$\gamma = \Delta_{\varepsilon_{01}\varepsilon_{02}\dots\varepsilon_{0m_0}}^3 \underbrace{00\dots 0}_{o_1} \varepsilon_{11}\varepsilon_{12}\dots\varepsilon_{1h_1} \dots \underbrace{00\dots 0}_{o_n} \varepsilon_{n1}\dots\varepsilon_{nm_n} \dots$$

де послідовність o_n зростаюча.

Для заданого достатньо малого $\varepsilon > 0$ існує натуральне A^* таке, що

$$\frac{1}{3A^*} < \varepsilon.$$

Зрозуміло, що існує натуральне число A таке, що

$$o_A > A^*.$$

Зрозуміло, що існує натуральне число N_4 таке, що для кожного $n > N_4$ перші $m_0 + o_1 + m_1 + \dots + o_{l_0} + m_{l_0}$ цифр трійкових зображень чисел $\gamma^*(n)$ та γ рівні.

Зрозуміло, що існує натуральне число N_5 таке, що для кожного $n > N_5$:

$$[\log_3(\tilde{t}_n)] + 2 > m_0 + o_1 + m_1 \dots + o_A + m_A.$$

Нехай $N_6 = \max(N_4; N_5)$, тоді при $n > N_6$ маємо:

$$\gamma^*(n) \cdot 3^{m_0 + \sum_{j=1}^{A-1} (o_j + m_j)} = \Delta_{o_A}^3 \underbrace{100\dots 0}_{\varepsilon_{1A} \varepsilon_{2A} \dots \varepsilon_{Am_A} \dots} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3^{o_A}} < \frac{1}{3} + \varepsilon.$$

Випадок 4.1.В. Серед чисел $\gamma_{1h_1}, \gamma_{2h_2}, \dots$ нескінченна множина двійок.

Аналогічним чином, як і у випадку 4.2.А можливо отримати, що для деякої послідовності натуральних чисел p_n :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\gamma^*(n) 3^{p_n} - \frac{2}{3}| = 0.$$

Випадок 4.2. Нехай c_n є необмеженою послідовністю.

Запишемо число γ у вигляді:

$$\gamma = \Delta_{\theta_{01}\theta_{02}\dots\theta_{0r_0}}^3 \underbrace{22\dots 2}_{s_1} \theta_{11}\theta_{12}\dots\theta_{1r_1} \dots \theta_{22}\dots\theta_{2r_2} \theta_{n1}\dots\theta_{nr_n} \dots$$

Зрозуміло, що серед чисел $\theta_{1r_1}, \theta_{r_2}, \dots$ або нескінченна множина нулів або нескінченна множина одиниць.

Якщо серед чисел $\theta_{1r_1}, \theta_{r_2}, \dots$ нескінченна кількість нулів, можливо показати, що для деякої послідовності натуральних чисел q_n :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\gamma^*(n) 3^{q_n} - \frac{1}{3}| = 0.$$

Якщо серед чисел $\theta_{1r_1}, \theta_{r_2}, \dots$ нескінченна кількість одиниць, можливо показати, що для деякої послідовності натуральних чисел u_n :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\gamma^*(n) 3^{u_n} - \frac{2}{3}| = 0.$$

Випадок 5. Нехай γ — трійково-раціональне число, тобто для деяких натуральних a та b виконується рівність $\gamma = \frac{a}{3^b}$.

Число γ можливо записати у вигляді:

$$\gamma = \Delta_{\mu_1\mu_2\dots\mu_E}^3(0),$$

де μ_E дорівнює одиниці або двійці.

З іншого боку число γ можливо записати у вигляді:

$$\gamma = \Delta_{\nu_1\nu_2\dots\nu_F}^3(2),$$

де ν_F дорівнює нулю або одиниці.

Легко бачити, що послідовність $\gamma^*(n)$ або містить нескінченну кількість членів виду

$$\gamma = \Delta_{\mu_1\mu_2\dots\mu_E}^3 \underbrace{00\dots 0}_{x_n},$$

де x_n необмежена послідовність; або $\gamma^*(n)$ містить нескінченну кількість членів виду

$$\gamma = \Delta_{\nu_1\nu_2\dots\nu_F}^3 \underbrace{22\dots 2}_{y_n},$$

де y_n необмежена.

Міркуючи аналогічно до випадку 4, можливо показати, що

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\gamma^*(n) 3^{E-1} - \frac{\mu_E}{3}| = 0,$$

або

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\gamma^*(n) 3^{F-1} - \frac{1 + \nu_F}{3}| = 0.$$

Отже, є вірним одне з тверджень.

Твердження 1. Для кожного додатного ε та натурального N існують натуральні числа $n > N$ та $H_n > 2$ такі, що

$$|\frac{\pi \tilde{t}_n}{3^{H_n}} - \frac{\pi}{3}| < \varepsilon.$$

Твердження 2. Для кожного додатного ε та натурального T існують натуральні числа $n > T$ та $G_n > 2$ такі, що

$$|\frac{\pi \tilde{t}_n}{3^{G_n}} - \frac{2\pi}{3}| < \varepsilon.$$

Припустимо, що

$$L_\xi > \prod_{k=1}^{+\infty} \cos(\frac{\pi}{3^k}) = |f_\xi(\pi)|.$$

Виберемо додатне число δ так, що

$$\delta < \frac{1}{2}(L_\xi - \prod_{k=1}^{+\infty} \cos(\frac{\pi}{3^k})),$$

звідки

$$L_\xi - \delta > \delta + \prod_{k=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right),$$

тоді існує натуральне число N_7 таке, що для всіх натуральних $n > N_7$ виконується умова:

$$||f_\xi(\tilde{t}_n)| - L_\xi| < \delta,$$

звідки

$$|f_\xi(\tilde{t}_n)| > L_\xi - \delta. \quad (3) \quad \text{тобто}$$

Нехай виконується **твердження 1**. Оскільки функція $|f_\xi(x)|$ є неперервною, то існує $\varepsilon > 0$ таке, що для кожного числа x , яке задовольняє умову

$$|x - \pi| < \varepsilon,$$

виконується умова:

$$||f_\xi(x)| - |f_\xi(\pi)|| < \delta,$$

тобто

$$|f_\xi(x)| < |f_\xi(\pi)| + \delta = \delta + \prod_{k=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right).$$

Зрозуміло, що існує натуральні числа $n > N_7$ та $H_n > 2$ такі, що

$$\left| \frac{\pi \tilde{t}_n}{3^{H_n}} - \frac{\pi}{3} \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

звідки

$$\left| \frac{\pi \tilde{t}_n}{3^{H_n-1}} - \pi \right| < \varepsilon,$$

а тому

$$|f_\xi(\frac{\pi \tilde{t}_n}{3^{H_n-1}})| < |f_\xi(\pi)| + \delta.$$

Маємо:

$$|f_\xi(\tilde{t}_n)| = |f_\xi(\frac{\pi \tilde{t}_n}{3^{H_n-1}})| \prod_{j=1}^{H_n-1} |\cos(\frac{\tilde{t}_n}{3^j})| \leq$$

$$\leq |f_\xi(\frac{\pi \tilde{t}_n}{3^{H_n-1}})| < |f_\xi(\pi)| + \delta < L_\xi - \delta.$$

Маємо суперечність з умовою 3.

Нехай виконується **твердження 2**.

Зазначимо, що

$$\begin{aligned} |f_\xi(2\pi)| &= |\cos(\frac{2\pi}{3})| \prod_{k=2}^{+\infty} \cos(\frac{2\pi}{3^k}) = \\ &= \cos(\frac{\pi}{3}) \prod_{k=2}^{+\infty} \cos(\frac{2\pi}{3^k}) < \prod_{k=1}^{+\infty} \cos(\frac{\pi}{3^k}) = |f_\xi(\pi)|. \end{aligned}$$

Оскільки функція $|f_\xi(x)|$ є неперервною, то існує $\varepsilon > 0$ таке, що для кожного числа x , яке задовольняє умову

$$|x - 2\pi| < \varepsilon,$$

виконується умова:

$$||f_\xi(x)| - |f_\xi(2\pi)|| < \delta,$$

тобто

$$|f_\xi(x)| < |f_\xi(2\pi)| + \delta = \delta + \prod_{k=1}^{+\infty} |\cos(\frac{2\pi}{3^k})|.$$

Зрозуміло, що існує натуральні числа $n > N_7$ та $G_n > 2$ такі, що

$$\left| \frac{\pi \tilde{t}_n}{3^{G_n-1}} - 2\pi \right| < \varepsilon,$$

а тому

$$|f_\xi(\frac{\pi \tilde{t}_n}{3^{G_n-1}})| < |f_\xi(2\pi)| + \delta.$$

Маємо:

$$|f_\xi(\tilde{t}_n)| = |f_\xi(\frac{\pi \tilde{t}_n}{3^{G_n-1}})| \prod_{j=1}^{G_n-1} |\cos(\frac{\tilde{t}_n}{3^j})| \leq$$

$$\leq |f_\xi(\frac{\pi \tilde{t}_n}{3^{G_n-1}})| < |f_\xi(2\pi)| + \delta < L_\xi - \delta.$$

Маємо суперечність з умовою 3.

Отже,

$$L_\xi \leq \prod_{k=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right),$$

що разом з умовою 1 доводить твердження теорему.

3 Висновки

В роботі доведено, що

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \sup |f_\xi(t)| = \prod_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{3^n}\right).$$

для характеристичної функції $f_\xi(t)$ випадкової величини ξ , функцією розподілу якої є сингулярна функція Кантора.

В результаті було також показано, що

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \sup |f_\xi(t)| = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |f_\xi(\pi n)|.$$

Список використаних джерел

1. Гончаренко Я. В. Асимптотичні властивості характеристичної функції випадкової величин з незалежними двійковими цифрами та згортки сингулярних розподілів / Я. В. Гончаренко // Наукові записки НПУ імені Драгоманова. Фізико-математичні науки. — №3, 2002. — С.376-390.
2. Лукач Е. Характеристические функции / Е. Лукач — М.: Наука, 1979.— 424с.
3. Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів / М. В. Працьовитий — Київ: Вид-во НПУ імені М.П Драгоманова, 1998. — 296с.
4. Працьовитий М. В. Один клас випадкових величин типу Джессена-Вінтнера / М. В. Працьовитий, Г. М. Торбін // Доп. НАН України. — 1998. — №4. — С.48-54.
5. Турбин А. Ф. Фрактальные множества, функции, распределения / А. Ф. Турбин, Н. В. Працевитый — Киев: Наук. думка, 1992. — 208с.
6. Albeverio S. Convolutions of distributions of random variables with independent binary digits / S. Albeverio, Y. Goncharenko, M. Pratsiovyti, G. Torbin // Random Oper. Stochastic Equations, 2007. — .15.— №1. — P.89-97.
7. Eseen C.G Fourier analysis of distribution functions / C. G. Eseen // Acta Mathematica, 1945, 77. — P. 11-25.
8. Girault M. Les fonctions caracteristiques el leurs transformations / M. Girault // Publ.Inst.Statist.Univ. Paris, 1954, 4. — P. 223-239.
9. Schvartz L. Sur le module de la fonction caracteristicue du calcul des probabilities / L. Schvartz // C.R.Acad.Sci.Paris, 1941. — P.418-421.
10. Jessen B. Distribution function and Riemann Zeta-function / B. Jessen, A. Wintner // Trans.Amer.Math.Soc.38,1935. — P.48-88.

References

1. GONCHARENKO, Y. V. (2002) *Asymptotic properties of the characteristic function of random variables with independent binary digits and convolution of singular distributions*. Scientific notes of NPU named after. Drahomanov. Physical and mathematical sciences. (3), p.376-390.
2. LUKACH, E. (1979) *Characteristic functions*. Moskwa: Nauka.
3. PRATSIOVYTYI, M. (1998) *Fractal approach in singular studies distributions*. Ed. Kyiv: M.P. Drahomanov National Pedagogical University Publishing House.
4. PRATSIOVYTYI, M.V., TORBIN, G.M. (1998) *One class of random variables such as Jessen-Wintner* Add.NAS of Ukraine. (4), p.48-54.
5. TURBIN, A.F., PRATSIOVYTYI, M.V. (1992) *Fractal sets, functions, distribution*. Ed. Kyiv: Naukova dumka.
6. ALBEVERIO,S., GONCHARENKO.Y., PRATSIOVYTI, M.,TORBIN,G. (2007) *Convolutions of distributions of random variables with independent binary digits*. Random Oper. Stochastic Equations. Vol. 15(1), p.89-97.
7. ESEEN, C.G. (1945) *Fourier analysis of distribution functions*. Acta Mathematica, (77), p.11-25.
8. GIRAULT, M. (1954) *Les fonctions caracteristiques el leurs transformations*.Publ.Inst.Statist.Univ. Paris, (4), p. 223-239.
9. SCHVARTZ, L. (1941) *Sur le module de la fonction caracteristicue du calcul des probabilities*. C.R.Acad.Sci.Paris, p.418-421.
10. JESSEN ,B., WINTNER, A. (1935) *Distribution function and Riemann Zeta-function*. Trans.Amer.Math.Soc (38), p.48-88.

Надійшла до редколегії 27.08.2021