УДК 519.6

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/4.6>

Іванов С.М., к.ф.-м.н.

S. Ivanov, PhD (Phys.-Math.)

Загальний розв'язок та адаптація до параметричного оцінювання SIR моделі

Analytical solution and adaptation to the parameter estimation of the SIR model

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 04116, м. Київ, вул. Богдана
Гаврилишина 24,
e-mail: smivanov87@gmail.com

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
04116, Kyiv, Bohdan Havrylyshyn st., 24,
e-mail: smivanov87@gmail.com

У роботі розглядається SIR модель поширення епідемії. За допомогою заміни експоненціальної функції оберненою пропорційністю знаходиться наближений загальний розв'язок SIR моделі. Для параметричного оцінювання SIR моделі проводиться адаптація загального розв'язку до парних лінійних регресій. Отримані результати можуть бути цікавими студентам, аспірантам та науковцям, які займаються математичною епідеміологією.

Ключові слова: SIR модель, параметричне оцінювання, загальний розв'язок.

The article deals with analytical solution and adaptation to the parameter estimation of the SIR model of the epidemic. By a special replacement of the exponential function by inverse proportionality, the approximate general solution of the SIR model is found. It is spoken in detail about the process of integration of ordinary differential equations of the SIR model. The equality of the sum of the obtained analytical solutions and population size is checked. The obtained solutions are simple and understandable. To parametrically estimate the SIR model, its general solution is adapted to paired linear regressions. The article is of interest for students, graduate students and scientists involved in mathematical epidemiology.

Key Words: SIR model, parameter estimation, analytical solution.

Статтю представив д.т.н. Кудін В.І.

Протягом століть багато різних збудників захворювань поширювалися країнами, викликаючи пандемії, високу смертність і деградацію розвитку [1]. Останні найзначніші з пандемій за смертністю були: іспанський грип 1918 року, азіатський грип 1957 р., гонконгський грип 1968 року та свинячий грип 2009 року, а також поточна пандемія COVID-19 [1]. Для можливості моніторингу, розуміння впливових факторів на поширення епідемії, прогнозування кількості хворих, прийняття рішень щодо кількості ліжок, медичного персоналу та ін. застосовувалися різні підходи моделювання багатьма вченими. Одними з найвідоміших, засновників математичної епідеміології, є Андерсон Маккендрік та Вільям Кермак [2, 3], які запропонували спрощену SIR модель поширення епідемії

де за даною моделлю особини можуть перебувати у трьох станах: здорові, які можуть захворіти $S(t)$, хворі $I(t)$, одужавші та померлі $R(t)$ [2].

Для параметричної ідентифікації цієї моделі застосовують різні способи [4], зокрема за наявними статистичними даними можна знайти чисельні похідні $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ (також будемо позначати S , I , R) і застосувавши метод найменшої квадратичної похибки або максимальної правдоподібності, знайти параметри моделі. Також одним із способів параметричної ідентифікації є знаходження загального розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь і подальше оцінювання параметрів. Про знаходження розв'язку SIR моделі раніше вже повідомлялося, наприклад в [5], однак, цей розв'язок не був адаптований для безпосередньої параметричної ідентифікації.

Розв'язок SIR моделі.

Якщо розділити 1 і 2 рівняння системи (1) на 3 рівняння, то отримується система (2)

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta \cdot I \cdot S, \\ \dot{I} = \beta \cdot I \cdot S - \gamma \cdot I, \\ \dot{R} = \gamma \cdot I, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{dS}{dR} = -\frac{\beta}{\gamma} S, \\ \frac{dI}{dR} = \frac{\beta}{\gamma} S - 1, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma \cdot I. \end{cases} \quad (2)$$

У перших двох рівняннях системи (2) можна розділити змінні та знайти загальний розв'язок

$$\int \frac{dS}{S} = -\frac{\beta}{\gamma} \int dR, \quad \text{ураховавши, що } S > 0,$$

$$\ln S = -\frac{\beta}{\gamma} R + C, \quad S = e^{-\frac{\beta}{\gamma} R + C}. \quad \text{При врахуванні}$$

початкових умов задачі Коші $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$, $R(0) = R_0 = 0$, перепишемо отриманий розв'язок

у вигляді $S(t) = e^{-\frac{\beta}{\gamma} R(t)} \cdot e^C$ та знайдемо сталу інтегрування C , отже $S(0) = e^{-\frac{\beta}{\gamma} \cdot 0} \cdot e^C = e^C = S_0$,

$$S = S_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma} R}. \quad (3)$$

Знайдений розв'язок (3) підставимо у друге рівняння системи (2)

$$\begin{cases} \frac{dI}{dR} = \frac{\beta}{\gamma} S_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma} R} - 1, \\ I(0) = I_0. \end{cases} \quad (4)$$

У рівнянні (4) також можна розділити змінні та знайти загальний розв'язок

$$\int dI = \int \left(\frac{\beta}{\gamma} S_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma} R} - 1 \right) dR, \quad I = \int \frac{\beta}{\gamma} S_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma} R} dR - R,$$

$$\begin{aligned} I + R &= \int \frac{\beta}{\gamma} S_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma} R} dR = \left[d\left(-\frac{\beta}{\gamma} R\right) = -\frac{\beta}{\gamma} dR \right] = \\ &= -S_0 \int e^{-\frac{\beta}{\gamma} R} d\left(-\frac{\beta}{\gamma} R\right) = -S_0 \cdot e^{-\frac{\beta}{\gamma} R} + C. \end{aligned}$$

Сталу інтегрування знайдемо з початкової

умови $I(0) = I_0 = -S_0 \cdot e^{-\frac{\beta}{\gamma} \cdot 0} - 0 + C = -S_0 + C$,
 $C = I_0 + S_0$, отже

$$I = -S_0 \cdot e^{-\frac{\beta}{\gamma} R} - R + I_0 + S_0. \quad (5)$$

Для знаходження $R(t)$ підставимо у третє рівняння системи (2) рівняння (5)

$$\dot{R} = \frac{dR}{dt} = -\gamma \cdot S_0 \cdot e^{-\frac{\beta}{\gamma} R} - \gamma \cdot R + \gamma \cdot I_0 + \gamma \cdot S_0.$$

В отриманому рівнянні також можна розділити змінні:

$$\int \frac{dR}{-\gamma \cdot S_0 \cdot e^{-\frac{\beta}{\gamma} R} - \gamma \cdot R + \gamma \cdot I_0 + \gamma \cdot S_0} = \int dt.$$

Отриманий інтеграл через відомі функції не знаходиться.

Перепишемо цей інтеграл

$$\int \frac{dR}{-S_0 \cdot e^{-\frac{\beta}{\gamma} R} - R + I_0 + S_0} = \gamma \int dt. \quad (5)$$

Для можливого знаходження даного інтеграла

проведемо заміну функції $e^{-\frac{\beta}{\gamma} R} \approx \frac{1}{R}$, врахувавши, що $\beta > 0$ та $\gamma > 0$ (рис. 1), а різниця між значеннями цих функцій є прийнятно малою.

Рис. 1. Експоненціальна функція та обернена пропорційність

Для наближеного обчислення інтеграла (5) можна було б розкласти експоненту в ряд Тейлора-Маклорена, але тоді необхідно було б врахувати занадто багато членів ряду, що значно ускладнило б знаходження інтеграла.

$$\begin{aligned} \int \frac{dR}{-S_0 \cdot \frac{1}{R} - R + I_0 + S_0} &= [I_0 + S_0 = C] = \\ &= \int \frac{RdR}{-S_0 - R^2 + CR} = -\int \frac{RdR}{R^2 - CR + S_0} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{aligned} d(R^2 - CR + S_0) &= (2R - C)dR; \\ \left(\frac{1}{2}(2R - C) + \frac{C}{2} \right) dR &; \\ R^2 - CR + S_0 &= \left(R - \frac{C}{2} \right)^2 - \frac{C^2}{4} + S_0; \\ \frac{-(I_0 + S_0)^2 + 4S_0}{4} &< 0; \end{aligned} \right] = \\
 & = - \int \frac{\left(\frac{1}{2}(2R - C) + \frac{C}{2} \right) dR}{\left(R - \frac{C}{2} \right)^2 - \frac{C^2}{4} + S_0} dR = \\
 & - \frac{1}{2} \int \frac{(2R - C)dR}{\left(R - \frac{C}{2} \right)^2 - \frac{C^2}{4} + S_0} - \frac{C}{2} \int \frac{dR}{\left(R - \frac{C}{2} \right)^2 - \frac{C^2}{4} + S_0} = \\
 & = - \frac{1}{2} \int \frac{d(R^2 - CR + S_0)}{R^2 - CR + S_0} - \frac{C}{2} \int \frac{d\left(R - \frac{C}{2} \right)}{\left(R - \frac{C}{2} \right)^2 - \frac{C^2}{4} + S_0} = \\
 & = - \frac{1}{2} \ln |R^2 - CR + S_0| - \\
 & - \frac{C}{4\sqrt{\frac{C^2}{4} - S_0}} \ln \left| \frac{R - \frac{C}{2} - \sqrt{\frac{C^2}{4} - S_0}}{R - \frac{C}{2} + \sqrt{\frac{C^2}{4} - S_0}} \right| + A_1.
 \end{aligned}$$

Запишемо рівняння

$$\begin{aligned}
 & \ln |R^2 - CR + S_0|^{\frac{1}{2}} - \\
 & - \ln \left| \frac{R - \frac{C}{2} - \sqrt{\frac{C^2}{4} - S_0}}{R - \frac{C}{2} + \sqrt{\frac{C^2}{4} - S_0}} \right|^{\frac{C}{4\sqrt{\frac{C^2}{4} - S_0}}} = \gamma \cdot t + A_1.
 \end{aligned}$$

Розглянемо сталі величини і спростимо вирази

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \frac{C}{4\sqrt{\frac{C^2}{4} - S_0}} = \frac{I_0 + S_0}{4\sqrt{\frac{(I_0 + S_0)^2}{4} - S_0}} \approx \\
 & \approx \frac{S_0}{4\sqrt{\frac{S_0^2}{4} - S_0}} \approx \frac{S_0}{4\sqrt{\frac{1}{4}(S_0^2 - 4S_0)}} \approx \\
 & \approx \frac{S_0}{2\sqrt{S_0(S_0 - 4)}} \approx \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \sqrt{\frac{C^2}{4} - S_0} \approx \sqrt{\frac{S_0^2}{4} - S_0} \approx \sqrt{\frac{1}{4}(S_0^2 - 4S_0)} \approx \\
 & \approx \frac{1}{2} \sqrt{S_0^2 - 4S_0} \approx \frac{1}{2} \sqrt{S_0^2} \approx \frac{1}{2} S_0. \\
 3) \quad & R - \frac{I_0 + S_0}{2} - \frac{1}{2} S_0 \approx R - S_0. \\
 4) \quad & R - \frac{I_0 + S_0}{2} + \frac{1}{2} S_0 \approx R.
 \end{aligned}$$

Отже, отримуємо наступне рівняння

$$\ln \left(|R^2 - CR + S_0|^{\frac{1}{2}} \left| \frac{R - S_0}{R} \right|^{\frac{1}{2}} \right) = \gamma \cdot t + A_1.$$

$$[R^2 - (I_0 + S_0)R + S_0 \approx R^2 - S_0(R - 1) \approx R(R - S_0) < 0]$$

Перепишемо рівняння

$$\ln \left((R(S_0 - R))^{\frac{1}{2}} \left(\frac{S_0 - R}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \right) = \gamma \cdot t + A_1,$$

$$\left(R(S_0 - R) \frac{(S_0 - R)}{R} \right)^{\frac{1}{2}} = (S_0 - R)^{-1} = e^{\gamma t + A_1},$$

$$S_0 - R = A_1 e^{-\gamma t}, \quad R(t) = S_0 - A_1 e^{-\gamma t}.$$

Сталу інтегрування знайдемо з початкової умови $R(0) = 0$: $R(0) = 0 = S_0 - A_1$; $A_1 = S_0$.

$$R(t) = S_0 - S_0 e^{-\gamma t}. \quad (6)$$

Очевидне виконання умови
 $S + I + R = S_0 + I_0 + R_0 = N$.

Загальний розв'язок має вигляд

$$\begin{cases} S(R) = S_0 e^{\frac{\beta}{\gamma} R(t)}, \\ I(R) = -S_0 \cdot e^{\frac{\beta}{\gamma} R(t)} - R(t) + I_0 + S_0, \\ R(t) \approx S_0 - S_0 e^{-\gamma t}. \end{cases}$$

Адаптація до параметричного оцінювання параметрів SIR моделі. Зробимо деякі перетворення для знайдених розв'язків SIR моделі:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \text{Рівняння (6):} \quad R - S_0 = -S_0 e^{-\gamma t}; \\
 & S_0 - R = S_0 e^{-\gamma t}; \quad \ln(S_0 - R) = \ln S_0 - \gamma \cdot t; \\
 & \ln \frac{S_0 - R}{S_0} = -\gamma \cdot t. \text{ Нехай } -\gamma = b_1; \ln \frac{S_0 - R}{S_0} = y.
 \end{aligned}$$

Допараметризувавши рівняння з урахуванням заміни, отримаємо лінійну регресію $y = b_0 + b_1 t$.

Оцінивши параметри b_0, b_1 , можна знайти коефіцієнт γ .

2) Для знаходження параметра β перепишемо рівняння (5):

$$\begin{aligned} I &= -S_0 \cdot e^{-\frac{\beta R}{\gamma}} - R + I_0 + S_0, \\ I_0 + S_0 - I - R &= S_0 \cdot e^{-\frac{\beta R}{\gamma}}, \\ \ln(I_0 + S_0 - I - R) &= \ln S_0 - \frac{\beta}{\gamma} R; \\ \ln \frac{I_0 + S_0 - I - R}{S_0} &= -\frac{\beta}{\gamma} R. \end{aligned}$$

Нехай $\left(-\frac{\beta}{\gamma} = c_1\right)$, $\ln \frac{I_0 + S_0 - I - R}{S_0} = z$.

Допараметризувавши рівняння з урахуванням заміни, отримаємо лінійну регресію $z = c_0 + c_1 R$.

Оцінивши параметри c_0, c_1 , можна знайти коефіцієнт β .

Висновок. Аналітичні розрахунки показали конструктивність отриманого наближеного загального розв'язку SIR моделі через заміну експоненціальної функції на обернену пропорційність. Простота функцій загального розв'язку дозволяє їх зведення до найпростішої парної лінійної регресії для параметричного оцінювання.

Отримані результати можуть бути цікавими студентам, аспірантам та науковцям, які займаються математичною епідеміологією.

Список використаних джерел

1. Akin L. Understanding dynamics of pandemics / Akin L., Gozel M. G. // *Turk. J. Med. Sci.* – 2020. – № 50. – P. 515-519. – Режим доступу до журн.: doi:10.3906/sag-2004-133
2. Братусь А.С. Динамические системы и модели биологии / А.С. Братусь, А.С. Новожилов, А.П. Платонов. – Москва: Физматлит, 2009. – 400 с.
3. Kermack W.O. Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics. / W.O. Kermack, A.G. McKendrick // *Proceedings of the Royal Statistical Society A.* – 1927. – № 115. – P. 700–721. – Режим доступу до журн.: <https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118>
4. Oli M.K. Population dynamics of infectious diseases: A discrete time model. // Oli M.K., Venkataramana M., Klein P.A., Wendland L.D., Brown M.B. // *Ecological modelling.* – 2006. – № 198. – P. 183–194. – Режим доступу до журн.: <https://doi.org/10.1016/j.ecolmodel.2006.04.007>
5. Harko T. Exact analytical solutions of the Susceptible-Infected-Recovered (SIR) epidemic model and of the SIR model with equal death and birth rates. / T.Harko, S. N. Lobo Francisco, M. K. Mak // *Applied Mathematics and Computation.* – 2014. – № 236. – P. 184-194.

References

1. AKIN L. & GÖZEL M. G. (2020) Understanding dynamics of pandemics. *Turk. J. Med. Sci.* 50. p. 515-519. doi:10.3906/sag-2004-133
2. BRATUS, A.S., NOVOZHILOV, A.S. and PLATONOV A.P. (2009) *Dinamicheskiye sistemy i modeli biologii*. Moskva: Fizmatlit.
3. KERMACK W.O. & MCKENDRICK A.G. (1927) Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics. *Proceedings of the Royal Statistical Society A.* 115. p. 700–721. doi: <https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118>
4. OLI, M.K., VENKATARAMANA, M., KLEIN, P. A., WENDLAND, L. D. and BROWN, M.B. (2006) Population dynamics of infectious diseases: A discrete time model. *Ecological modelling.* 198. p. 183–194. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ecolmodel.2006.04.007>
5. HARKO T., LOBO FRANCISCO S. N. and MAK M. K. (2014) Exact analytical solutions of the Susceptible-Infected-Recovered (SIR) epidemic model and of the SIR model with equal death and birth rates. *Applied Mathematics and Computation.* 236. p. 184-194.

Надійшла до редколегії 5.12.2020