УДК 512.64+512.56

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/4.2>

Стойка М. В.¹, к. ф.-м. н., доцент,
Стьопочкіна М. В.², к. ф.-м. н., доцент.

Stoika M. V.¹, Ph.D.,
Styopochkina M. V.², Ph.D.

Про діаграми Хассе, зв'язані з частково впорядкованою множиною (1,2,7)

On Hasse diagrams connected with the poset (1, 2, 7)

¹ Закарпатський угорський інститут імені Фе-
ренца Ракоці ІІ,
90202 м. Берегово, площа Кошута, 6,
e-mail: stoyka_m@yahoo.com

¹Ferenc Rakoczi II. Transcarpathian Hungarian
Institute, 90202 Beregszász, Kossuth square, 6,
e-mail: stoyka_m@yahoo.com

²Поліський національний університет,
10008, м. Житомир, Старий бульвар, 7,
e-mail: stmar@ukr.net

²Polissia National University,
10008, Zhytomyr, Staryi Boulevard, 7,
e-mail: stmar@ukr.net

Зображення ч. в. множин, введені в 1972 р. Л. О. Назаровою і А. В. Ройтером, виникають при розв'язанні багатьох задач в різних областях математики. Однією з найважливіших задач в теорії зображень будь-яких об'єктів є опис випадків скінченного зображувального типу та ручного зображувального типу. Перша із цих задач для ч. в. множин розв'язана М. М. Клейнером, а друга Л. О. Назаровою. М. М. Клейнер довів, що ч. в. множина має скінченний тип тоді і тільки тоді, коли вона не містить підмножин виду $(1, 1, 1, 1)$, $(2, 2, 2)$, $(1, 3, 3)$, $(1, 2, 5)$ і $(II, 4)$, які на -зи вуються критичними множинами. Узагальнення цього критерію на ручний випадок отримано Л. О. Назаровою. Відповідні множини називаються суперкритичними і складаються вони з ч. в. множин $(1, 1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 2)$, $(2, 2, 3)$, $(1, 3, 4)$, $(1, 2, 6)$ і $(II, 5)$. В. М. Бондаренко запропонував узагальнення критичних і суперкритичних ч. в. множин, назвавши їх 1-надсуперкритичними. У цій статті вивчаються комбінаторні властивості однієї з таких множин.

Ключові слова: ч. в. множина, граф, критична та суперкритична ч. в. множина, 1-надсуперкритична ч. в. множина, антиізоморфізм, діаграми Хассе, мінімаксна еквівалентність

Representations of posets introduced in 1972 by L. O. Nazarova and A. V. Roiter, arise when solving many problems in various fields of mathematics. One of the most important problem in the theory of representations of any objects is a description of the cases of representation finite type and representation tame type. The first of these problems for posets was solved by M. M. Kleiner, and the second L. O. Nazarova. M. M. Kleiner proved that a poset has finite type if and only if it does not contain subsets of the form $(1, 1, 1, 1)$, $(2, 2, 2)$, $(1, 3, 3)$, $(1, 2, 5)$ and $(II, 4)$, which are called the critical sets. A generalization of this criterion to the tame case was obtained by L. O. Nazarova. The corresponding sets are called supercritical and they consist of the posets $(1, 1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 2)$, $(2, 2, 3)$, $(1, 3, 4)$, $(1, 2, 6)$ and $(II, 5)$. V. M. Bondarenko proposed a generalization of the critical and supercritical posets, calling them 1-oversupercritical. This paper studies the combinatorial properties of one of such sets.

Key Words: poset, graph, critical and supercritical poset, 1-oversupercritical poset, anti-isomorphism, Hasse diagrams, minimax equivalence

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Петравчук А. П.

1 Introduction

In [1] M. M. Kleiner proved that a poset S is of finite representation type if and only if it does not contain the subsets of the form $(1, 1, 1, 1)$, $(2, 2, 2)$, $(1, 3, 3)$, $(1, 2, 5)$ and $(II, 4)$; these posets are called the critical posets. In [2] it is proved that a poset is critical with respect

to the positivity of the Tits quadratic form if and only if it is minimax equivalent to a critical poset (the minimax equivalence was introduced in [3]); all such posets were described in [2].

In [4] L. A. Nazarova proved that a poset S is tame if and only if it does not contain subsets of the form $(1, 1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 2)$, $(2, 2, 3)$, $(1, 3, 4)$, $(1, 2, 6)$ and $(II, 5)$; these sets are called supercriti-

cal. In [5] it is proved that a poset is critical with respect to the non-negativity of the Tits form if and only if it is minimax equivalent to a supercritical poset; all such critical posets was described in [6].

The posets that are differ from the supercritical sets in the way as the supercritical sets differ from critical posets are called 1-supercritical (see [7]).

In this paper we study combinatorial properties of the posets which are minimax equivalent to the 1-oversupercritical poset (1, 2, 7).

The authors are grateful to Professor V. M. Bondarenko for his attention to the work.

2 Main theorems

The Hasse diagram of a finite poset S is the directed graph $H(S)$ with the vertices $x \in S$ and the arrows (x, y) , where $x < y$ and there is no z such that $x < z < y$.

Recall some definitions from [8]. One calls the 0-length of an oriented path of $H(S)$ the number of its vertices. One denotes by $l_{min}(S)$ (respectively, $l_{max}(S)$) the 0-length of a most short maximal

(respectively, most long) oriented path of $H(S)$. The number of all maximal oriented path of S is denoted by $n(S)$. One denotes by $[S]^\sim$ the set of all posets minimax equivalent to S [3] (see also [2, 5, 6, 9]) and put

$$L_{min}(S) = \min_{X \in [S]^\sim} l_{min}(X),$$

$$L_{max}(S) = \max_{X \in [S]^\sim} l_{max}(X).$$

We prove the following theorems, which are analogous to Theorems 1 and 2 [9] for the 1-oversupercritical poset (1, 3, 5).

Theorem 1. For $S = (1, 2, 7)$, $L_{min}(S) = 1$, $L_{max}(S) = 9$.

Theorem 2. Let $X \in [(1, 2, 7)]^\sim$. Then $1 \leq l_{min}(X) \leq 8$, $5 \leq l_{max}(X) \leq 9$, $n(X) \in \{2, 3, 4\}$.

3 Proofs of the theorems.

The posets which are minimax equivalent to (1, 2, 7) were classified in [7]. They are given (up to isomorphism and antiisomorphism) by the following table.

We have the next theorem.

Theorem 3. *The following holds for posets 1 – 24:*

N	l_{min}	l_{max}	n	N	l_{min}	l_{max}	n	N	l_{min}	l_{max}	n
1	1	7	3	9	3	5	3	17	2	6	4
2	3	8	2	10	8	9	2	18	3	5	3
3	1	8	3	11	2	7	4	19	3	7	3
4	2	6	3	12	3	6	3	20	2	5	4
5	2	8	3	13	2	8	3	21	3	6	3
6	3	7	3	14	2	6	4	22	3	6	3
7	3	9	2	15	4	5	3	23	2	5	4
8	2	7	4	16	1	8	3	24	2	7	3

Here $l_{min} = l_{min}(S_i)$, $l_{max} = l_{max}(S_i)$ and $n = n(S_i)$ for $i = 1, 2, \dots, 24$, where S_i is the i th poset in the table.

The proof is proved by direct calculations.
Theorems 1 and 2 follow from Theorem 3.

Список використаних джерел

1. Клейнер М. М. Частично упорядоченные множества конечного типа / М. М. Клейнер // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 32–41.
2. Бондаренко В. М. (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса / В. М. Бондаренко, М. В. Степочкина // Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**. – №3. – С. 18–58.

References

1. KLEINER M. M. (1972) Partially ordered sets of finite type. *Zap. Nauch. Semin. LOMI*, **28**, p. 32–41 (in Russian).
2. BONDARENKO V. M., STYOPCHIKINA M. V. (2005) (Min, max)-equivalence of partially ordered sets and the Tits quadratic form. *Problems of Analysis and Algebra: Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr.*, **2**, №3, p. 18–58 (in Russian).

3. Bondarenko V. M. On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms / V. M. Bondarenko // Bull. of Taras Shevchenko University of Kiev (series: Physics & Mathematics). – 2005. – № 1. – P. 24-25.
4. Назарова Л. А. Частично упорядоченные множества бесконечного типа / Л. А. Назарова // Изв. АН СССР. – 1975. – **39**, №5. – С. 963 - 991.
5. Бондаренко В. М. (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и неотрицательные формы Титса / В. М. Бондаренко, М. В. Степочкина // Укр. мат. журнал. – 2008. – **60**, №9. – С. 115-1167.
6. Бондаренко В. М. Описание частично упорядоченных множеств, критических относительно неотрицательности квадратичной формы Титса / В. М. Бондаренко, М. В. Степочкина // Укр. мат. журнал. – 2009. – **61**, №5. – С. 734-746.
7. Бондаренко В. В. 1-над-суперкритические частично упорядоченные множества с тривиальной группой автоморфизмов и min-эквивалентность. I. / В. В. Бондаренко, В. М. Бондаренко, М. В. Степочкина, И. В. Червяков // Наук. вісник Ужгородського ун-ту. Сер. матем. і інформатика. – 2011. – Вип. 22, № 2. – С. 17-25.
8. Bondarenko V. M. On Hasse diagrams connected with the 1-oversupercritical poset (1,3,5) / V. M. Bondarenko, Yu. M. Orlovskaja, M. V. Styopochkina // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2018. – вип. 16 – С. 30-32.
9. Bondarenko V. M. Strengthening of a theorem on Coxeter-Euclidean type of principal partyally ordered sets / V. M. Bondarenko, M. V. Styopochkina // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2018. – №4. – P. 8-15.
3. BONDARENKO V. M. (2005) On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms. *Bull. of Taras Shevchenko University of Kiev (series: Physics & Mathematics)*, № 1, p. 24-25.
4. NAZAROVA L. A. (1975) Partially ordered sets of infinite type. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **39**, №5, p. 963-991 (in Russian).
5. BONDARENKO V. M., STYOPOCHKINA M. V. (2008) (Min, max)-equivalency of posets and nonnegative Tits forms. *Ukrainian Math. J.*, **60**, №9, p. 1349-1359.
6. BONDARENKO V. M., STYOPOCHKINA M. V. (2009) Description of posets critical with respect to the nonnegativity of the quadratic Tits form. *Ukrainian Math. J.*, **61**, №5, p. 734-746. .
7. BONDARENKO V. V., BONDARENKO V. M., STYOPOCHKINA M. V., CHERVYAKOV ov I. V. (2011) 1-oversupercritical partially ordered sets with trivial group of automorphisms and min-equivalence. I. *Nauk. Visn. Uzhgorod. Univ., Ser. Mat.*, **22**, №2, p. 17-25 (in Russian).
8. BONDARENKO V. M., ORLOVSKAJA YU. M. STYOPOCHKINA M. V. (2018) On Hasse diagrams connected with the 1-oversupercritical poset (1,3,5). *Applied problems of mechanics and mathematics*, **16**, p. 30-32.
9. BONDARENKO V. M., STYOPOCHKINA M. V. (2018) Strengthening of a theorem on Coxeter-Euclidean type of principal partyally ordered sets. *Bulletin of University of Kyiv, Series: Physics and Mathematics*, № 4. p. 8-15.

Надійшла до редколегії 14.10.2020