УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/4.1>

I.V. Розора, д.ф.-м.н., доц.

Аналітичні властивості траєкторій деяких випадкових процесів

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64.

e-mail: irozora@bigmir.net

I.V. Rozora, D.Sc., Associate Prof.

Analytical properties of sample paths of some stochastic processes

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.

e-mail: irozora@bigmir.net

В роботі розглядаються квадратично-гауссові випадкові процеси. Знайдено умови, за яких траєкторії даних процесів є рівномірно неперервними з ймовірністю одиниця. Отримано також оцінку розподілу модуля неперервності. У частковому випадку вивчаються властивості оцінки коваріаційної функції гауссового стаціонарного процесу.

Ключові слова: Гауссовий процес, квадратично-гауссовий процес, корелограма, вибіркова неперервність.

The study of the analytical properties of random processes and their functionals, without a doubt, was and remains the relevant topic of the theory of random processes. The first result from which the study of the local properties of random processes began is Kolmogorov's theorem on sample continuity with probability one. The classic result for Gaussian random processes is Dudley's theorem. This paper is devoted to the study of local properties of sample paths of random processes that can be represented as a sum of squares of Gaussian random processes. Such processes are called square-Gaussian. We investigate the sufficient conditions of sample continuity with probability 1 for square-Gaussian processes based on the convergence of entropy Dudley type integrals. The estimation of the distribution of the continuity module is studied for square-Gaussian random processes. It is considered in detail an example with an estimator (correlogram) of the covariance function of a Gaussian stationary random process. The conditions on continuity of correlogram's trajectories with probability one are found and the distribution of the continuity module is also estimated.

Key Words: Gaussian process, square-Gaussian process, correlogram, sample continuity.

Статтю представив проф. Пашко А.О.

1 Вступ

Вивчення аналітичних властивостей випадкових процесів та функціоналів від них, без сумніву, було і залишається актуальною задачею теорії випадкових процесів. Першим результатом, з якого почалося дослідження локальних властивостей випадкових процесів, є теорема Колмогорова про вибіркову неперервність з ймовірністю одиниця випадкових процесів.

Теорема Колмогорова (див. [3]) надає достатні умови вибіркової неперервності $L_2(\Omega)$ -випадкових процесів. А саме, нехай $X(t)$, $t \in [0, T]$, – сепарабельний випадковий процес. Траєкторії цього процесу з ймовірністю одиниця будуть неперервними, якщо існують невід'ємні монотонно неспадні функції $g(h)$, $q(c, h)$, $h > 0$ такі, що

$$\mathbf{P}\{\rho(X(t+h), X(t)) > Cg(h)\} \leq q(C, h)$$

і

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} g(2^{-n}T) < \infty,$$

$$Q(C) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n q(C, 2^{-n}T) < \infty.$$

Класичним результатом для гауссових випадкових процесів є теорема Дадлі [1], яка стверджує, що траєкторії гауссового процесу $X(t)$, $t \in T$, є майже напевно (рівномірно) неперервні, якщо збігається ентропійний інтеграл Дадлі:

$$\int_0^{\infty} \sqrt{\ln N_T(\varepsilon)} d\varepsilon < \infty,$$

де $N_T(\varepsilon)$ – метрична масивність множини T відносно псевдометрики

$$d(t, s) = \sqrt{\mathbb{E}|X(t) - X(s)|^2}.$$

(тобто мінімальна кількість куль радіуса ε , що покривають множину T відносно псевдометрики $d(t, s)$). В книзі [3] знайдені умови вибіркової рівномірної неперервності випадкових процесів з K -приростами. Ці умови базуються на збіжності інтегралу типу Дадлі, що пов'язано з ентропійними характеристиками випадкового процесу. В роботах Ю. Козаченка та М. Ядренка отримані такі умови для різних класів випадкових полів.

Велика плеяда науковців досліджували властивості розподілів супремумів випадкових процесів, вивчали умови існування моментів та експоненціальних моментів супремумів процесів, знаходили оцінки ймовірності великих відхилень $\mathbf{P}\{\sup_{t \in T} |X(t)| > \varepsilon\}$ і т.д. Ці та інші результати містяться в книгах М. Лідбеттера, Г. Ліндгрена і Х. Рутсена [5], М. Леду і М. Талагранна [6], В. Булдигіна та Ю. Козаченка [3] тощо.

Починаючи з середини минулого століття велика увага приділялась дослідженню локальних властивостей гауссових процесів, зокрема, Ю. Беляєв отримав умови вибіркової неперервності гауссових стаціонарних процесів та відому “альтернативу Беляєва” [?].

Фундаментальні результати стосовно властивостей гауссових випадкових процесів отримали Р. Дадлі [1], М. Талагран, М. Леду тощо.

Дана робота присвячена дослідженню локальних властивостей траєкторій випадкових процесів, що можна зобразити як суму квадратів гауссових випадкових процесів. Такі процеси будемо називати квадратично-гауссовими. Для них знаходяться достатні умови вибіркової неперервності з ймовірністю 1, що ґрунтуються на збіжності ентропійних інтегралів типу Дадлі. У статті також вивчається оцінка розподілу модуля неперервності квадратично-гауссового випадкового процесу. Детально розглядається приклад з оцінкою коваріаційної функції гауссового стаціонарного випадкового процесу.

2 Квадратично-Гауссові випадкові процеси

В даному розділі розглядаються означення та деякі властивості квадратично-гауссових випадкових величин і процесів.

Нехай (Ω, F, P) – ймовірнісний простір та (T, ρ) – компактний метричний простір з метрикою ρ .

Означення 2.1. Нехай $\Xi = \{\xi_t, t \in T\}$ – сім'я сумісно гауссівських випадкових величин, $E\xi_t = 0$ (наприклад, $\xi_t, t \in T$, є гауссівським випадковим процесом).

Простір $SG_\Xi(\Omega)$ називається простором квадратично-гауссових випадкових величин, якщо кожен елемент $\eta \in SG_\Xi(\Omega)$ можна представити у вигляді

$$\eta = \bar{\xi}^T A \bar{\xi} - E \bar{\xi}^T A \bar{\xi}, \quad (1)$$

де $\bar{\xi}^T = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $\xi_k \in \Xi$, $k = 1, \dots, n$, A – дійснозначна матриця,

або $\eta \in SG_\Xi(\Omega)$ представляється як середньоквадратична границя послідовності випадкових величин з (1)

$$\eta = l.i.m.n \rightarrow \infty (\bar{\xi}_n^T A \bar{\xi}_n - E \bar{\xi}_n^T A \bar{\xi}_n).$$

Означення 2.2. Випадковий процес $\xi(t) = \{\xi(t), t \in T\}$ називається квадратично-гауссовим, якщо для кожного $t \in T$ випадкова величина $\xi(t)$ належить простору $SG_\Xi(\Omega)$.

Відомо також, що

- $SG_\Xi(\Omega)$ є банаховим простором з нормою $\|\zeta\| = \sqrt{E\zeta^2}$;
- $SG_\Xi(\Omega)$ є підпростором простору Орліча, що породжується функцією

$$U(x) = \exp |x| - 1;$$

- норма $\|\zeta\|_{L_U(\Omega)}$ на $SG_\Xi(\Omega)$ еквівалентна нормі $\sqrt{E\zeta^2}$.

Приклад 1. Розглянемо сім'ю гауссівських центрованих випадкових процесів

$\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t), t \in T$. Нехай матриця $A(t)$ є симетричною. Тоді

$$X(t) = \bar{\xi}^T(t) A(t) \bar{\xi}(t) - E \bar{\xi}^T(t) A(t) \bar{\xi}(t),$$

де $\bar{\xi}^T(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t))$, є квадратично-гауссовим випадковим процесом.

Через $N(u)$ позначимо мінімальну кількість замкнених куль радіуса u , що покривають множину T з метрикою ρ .

Нехай $\xi(t) = \{\xi(t), t \in T\}$ — квадратично-гауссовий випадковий процес. Припустимо, що існує функція $\sigma(h)$, $h > 0$, яка є монотонно зростаючою, неперервною і $\sigma(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, а також

$$\sup_{\rho(t,s) \leq h} (\mathbf{Var}(\xi(t) - \xi(s)))^{\frac{1}{2}} \leq \sigma(h).$$

Визначимо деякі сталі:

$$\varepsilon_0 = \inf_{t \in T} \sup_{s \in T} \rho(t, s), \quad t_0 = \sigma(\varepsilon_0),$$

$$\gamma_0 = \sup_{t \in T} (\mathbf{Var} \xi(t))^{1/2},$$

Позначимо $C = \max\{t_0, \gamma_0\}$.

Припустимо, що існує зростаюча функція $r(u) \geq 0, u \geq 1$ така, що $r(u) \rightarrow \infty$ при $u \rightarrow \infty$; функція $r(\exp\{t\})$ є опуклою вниз та

$$\int_0^{t_0} r(N(\sigma^{(-1)}(u))) du < \infty.$$

У роботі Козаченка Ю. і Розори І. [4] знайдено умови рівномірної вибіркової неперервності з імовірністю 1 для квадратично-гауссових випадкових процесів

Теорема 2.1. Якщо для сепарабельного квадратично-гауссового процесу $\xi = \{\xi(t), t \in B\}$ виконуються умови попередньої теореми, то він є вибірково неперервним з імовірністю одиниця та для довільних $p \in (0, 1)$, $\varepsilon > 0$ і $x > 0$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \sup_{\rho(t,s) < \varepsilon} |\xi(t) - \xi(s)| > x \right\} \leq \\ & \leq 2r^{(-1)} \left(\frac{1}{p\sigma(\varepsilon)} \int_0^{\sigma(\varepsilon)} r(N(\sigma^{(-1)}(u))) du \right) \times \\ & \times \left(1 + \frac{\sqrt{2}xp(1-p)^2}{\sigma(\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{xp(1-p)^2}{\sqrt{2}\sigma(\varepsilon)} \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Теорема 2.2. Нехай $X(t) = \{X(t), t \in T = [a, b]\}$ — сепарабельний квадратично-гауссовий

випадковий процес, для якого виконується умова

$$\sup_{|t-s| \leq h} (\mathbf{Var}(X(t) - X(s)))^{\frac{1}{2}} \leq \frac{K_{\ln}}{\ln^\alpha \left(\frac{1}{h} + e^\alpha \right)},$$

де $\alpha > 1$, стала $K_{\ln} > 0$. Тоді процес $X(t)$ є вибірково неперервним з імовірністю одиниця та для довільних $\varepsilon > 0$ і $x > 0$ має місце така оцінка

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \sup_{\substack{t,s \in [a,b] \\ |t-s| < \varepsilon}} |X(t) - X(s)| \geq x \right\} \leq \\ & \leq 2(b-a)^{\frac{\alpha}{p(\alpha-1)}} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} + e^\alpha \right)^{\frac{\alpha}{p(\alpha-1)}} \\ & \times \left(1 + \frac{\sqrt{2}xp(1-p)^2 \ln^\alpha \left(\frac{1}{\varepsilon} + e^\alpha \right)}{K_{\ln}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \times \exp \left\{ -\frac{xp(1-p)^2 \ln^\alpha \left(\frac{1}{\varepsilon} + e^\alpha \right)}{\sqrt{2}K_{\ln}} \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Доведення. Результат теореми випливає з теореми 2.1 при $\sigma(u) = \frac{K_{\ln}}{\ln^\alpha \left(\frac{1}{h} + e^\alpha \right)}$. Досить тільки оцінити вираз

$$r^{(-1)} \left(\frac{1}{p\sigma(\varepsilon)} \int_0^{\sigma(\varepsilon)} r(N(\sigma^{(-1)}(u))) du \right).$$

З умов теореми випливає, що

$$\sigma^{(-1)}(u) = \left(\exp\{(K_{\ln}/u)^{1/\alpha}\} - e^\alpha \right)^{-1}, \quad 0 < u < \frac{K_{\ln}}{\alpha^\alpha}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} N(\sigma^{(-1)}(u)) & \leq \left(\frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) = \\ & = \left(\frac{b-a}{2} (\exp\{(K_{\ln}/u)^{1/\alpha}\} - e^\alpha) + 1 \right) \\ & \leq (b-a) \exp\{(K_{\ln}/u)^{1/\alpha}\}. \end{aligned}$$

Розглянемо тепер функцію

$$r(u) = \ln u, \quad u \geq 1.$$

Легко перевірити, що вона задовольняє умовам теореми. А тому для $u \in (0, \sigma(\varepsilon))$ виконується наступне твердження

$$\begin{aligned} r(N(\sigma^{(-1)}(u))) & \leq r((b-a) \cdot \exp\{(K_{\ln}/u)^{1/\alpha}\}) \\ & \leq \ln(b-a) + (K_{\ln}/u)^{1/\alpha} \\ & \leq \left(\frac{K_{\ln}}{u} \right)^{\beta/\alpha} \left(\ln(b-a) \left(\frac{\sigma(\varepsilon)}{K_{\ln}} \right)^{1/\alpha} + 1 \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Оскільки обернена функція до $r(u)$ дорівнює $r^{(-1)}(u) = \exp\{x\}$, то, використовуючи оцінку (4) та значення $t_0 = \frac{K_{\ln}}{\ln^\alpha(\frac{2}{b-a} + e^\alpha)}$, маємо

$$\begin{aligned} r^{(-1)}\left(\frac{1}{p\sigma(\varepsilon)} \int_0^{\sigma(\varepsilon)} r\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du\right) &= \\ &= \exp\left\{\frac{1}{p\sigma(\varepsilon)} \int_0^{\sigma(\varepsilon)} r\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du\right\} \leq \\ &= \exp\left\{\frac{\alpha}{p(\alpha-1)}\left(\ln(b-a) + \left(\frac{K_{\ln}}{\sigma(\varepsilon)}\right)^{1/\alpha}\right)\right\} = \\ &= \exp\left\{\frac{\alpha}{p(\alpha-1)}\left(\ln(b-a) + \ln\left(\frac{1}{\varepsilon} + e^\alpha\right)\right)\right\} = \\ &= \exp\left\{\frac{\alpha}{p(\alpha-1)} \ln\left((b-a)\left(\frac{1}{\varepsilon} + e^\alpha\right)\right)\right\} = \\ &= (b-a)^{\frac{\alpha}{p(\alpha-1)}} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} + e^\alpha\right)^{\frac{\alpha}{p(\alpha-1)}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Нерівність (3) буде доведено, якщо в (2) підставити значення функції $\sigma(\varepsilon) = \frac{K_{\ln}}{\ln^\alpha(\frac{1}{b-a} + e^\alpha)}$ та оцінку (5).

Якщо $\varepsilon \rightarrow 0$, то з нерівності (3) випливає, що $\mathbf{P}\left\{\sup_{|t-s|<\varepsilon} |X(t) - X(s)| > x\right\} \rightarrow 0$, тобто при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\sup_{|t-s|<\varepsilon} |X(t) - X(s)| \xrightarrow{P} 0.$$

Отже, має місце вибіркова неперервність за ймовірністю. А з монотонності супремума випливає і збіжність з ймовірністю одиниця

$$\sup_{|t-s|<\varepsilon} |X(t) - X(s)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \text{ м.н.}.$$

Таким чином, випадковий процес $X = \{X(t), t \in B\}$ є вибірково неперервним з ймовірністю одиниця. $\square$

У статті [4] доведено таку лему.

Лема 1. Нехай $\psi(u), u \geq 0$ – така неперервна, монотонно зростаюча функція, $\psi(0) = 0$, що функція $\frac{u}{\psi(u)}$ є неспадною при $u > u_0$, де стала $u_0 \geq 0$. Тоді для всіх $u \geq 0$ та $v > 0$ виконуються наступна нерівність

$$\left|\sin \frac{u}{v}\right| \leq \frac{\psi(u + u_0)}{\psi(v + u_0)}. \quad (6)$$

Приклад 2. Умови леми 1 виконуються у випадку $\psi(u) = \ln^\alpha(u + 1)$, $\alpha > 0$, $u_0 = e^\alpha - 1$. Тоді нерівність (6) записується у вигляді

$$\left|\sin \frac{u}{v}\right| \leq \frac{\ln^\alpha(e^\alpha + u)}{\ln^\alpha(e^\alpha + v)}, \quad \alpha > 0. \quad (7)$$

Приклад 3. Нехай $X = \{X(t), t \in T\}$ – дійснозначний центрований стаціонарний гауссовий випадковий процес з неперервною коваріаційною функцією $B(h) = EX(t)X(t+h)$, $h \in R$. Однією із задач статистики випадкових процесів є оцінка або ідентифікація функції B за спостереженнями за однією траєкторією процесу X . В якості оцінки часто розглядають корелограму (емпіричну коваріаційну функцію)

$$\hat{B}_N(h) = \frac{1}{N} \int_0^N X(t)X(t+h)dt, \quad h > 0,$$

інтеграл тут розуміємо як середньо-квадратичний інтеграл Рімана.

Тоді випадковий процес

$$Y_N(h) = \hat{B}_N(h) - E\hat{B}_N(h), \quad h \in [0, b],$$

є квадратично-гауссовим.

Нехай $f = (f(\lambda), \lambda \in R)$ – спектральна щільність випадкового процесу $X(t)$, $t \in T$, $f \in L_2(R)$. Припустимо, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln^{\alpha,i} \left(\frac{|\lambda|}{2} + e^\alpha\right) f^2(\lambda) d\lambda, \quad i = 1, 2, \quad \alpha > 2.$$

В книзі [3] (Лема 4.1, ст. 200) показано, що

$$\begin{aligned} E(Y_N(h_1) - Y_N(h_2))^2 &\leq \\ &\leq \frac{8\pi}{N} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda) \sin^2 \frac{\lambda(h_1 - h_2)}{2} d\lambda \right] + \\ &+ \frac{8\pi \|f\|_2}{N} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda) \sin^2 \frac{\lambda(h_1 - h_2)}{2} d\lambda \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (8)$$

де $N > 0$, $h_1, h_2 \geq 0$.

Для оцінки $E(Y_N(h_1) - Y_N(h_2))^2$ з (8) використаємо нерівність (7) для синусів

$$\left|\sin \frac{u}{v}\right| \leq \frac{\ln^\alpha(e^\alpha + u)}{\ln^\alpha(e^\alpha + v)}, \quad \alpha > 0.$$

Тоді маємо

$$E(Y_N(h_1) - Y_N(h_2))^2 \leq \frac{K_{\ln}^2}{\ln^\alpha \left(\frac{1}{|h_1 - h_2|} + e^\alpha \right)}, \quad \alpha > 2,$$

де значення $K_{\ln}$ дорівнює

$$K_{\ln}^2 = \frac{2^3 \pi}{N} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \ln^\alpha \left(\frac{|\lambda|}{2} + e^\alpha \right) f^2(\lambda) d\lambda + \right. \\ \left. + \|f\|_2^2 \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \ln^{2\alpha} \left(\frac{|\lambda|}{2} + e^\alpha \right) f^2(\lambda) d\lambda} \right).$$

Отже, для процесу $Y_N(h)$, $h \in [0, b]$, виконуються умови теореми 2.2, а саме всі траєкторії процесу $Y_N(h)$ є рівномірно неперервними на $[0, b]$ для будь-якого $b > 0$ та для розподілу модуля неперервності має місце така оцінка

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{\substack{t, s \in [0, b] \\ |t-s| < \varepsilon}} |X(t) - X(s)| \geq x \right\} \leq \\ \leq 2b^{\frac{\alpha}{p(\alpha-2)}} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} + e^\alpha \right)^{\frac{\alpha}{p(\alpha-2)}} \times \\ \times \left(1 + \frac{\sqrt{2}xp(1-p)^2 \ln^{\alpha/2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + e^\alpha \right)}{K_{\ln}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \times \exp \left\{ -\frac{xp(1-p)^2 \ln^{\alpha/2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + e^\alpha \right)}{\sqrt{2}K_{\ln}} \right\}.$$

3 Висновки

В роботі розглядалися квадратично-гауссові випадкові процеси. Знайдено достатні умови рівномірної вибіркової неперервності для них з ймовірністю одиниця отримано розподіл модуля неперервності. Як приклад розглянуто оцінку коваріаційної функції гауссового стаціонарного випадкового процесу.

Список використаних джерел

1. Dudley R. Sample functions of the Gaussian processes/ R. Dudley // *Annals of Probability*.– 1973.– вип. 1, № 1.– С. 3–68.
2. Булдыгин В. Метрические характеристики случайных величин и процессов, / В.Булдыгин, Ю.Козаченко // Киев, ТВиМС.– 1998.
3. Гихман И.И. Теория случайных процессов, т.1 /И.И. Гихман, А.В. Скороход // М.: Наука. – 1971. – 664 с.
4. Козаченко Ю. Умови вибіркової неперервності з ймовірністю одиниця для квадратично-гауссових випадкових процесів / Ю.Козаченко, І.Розора // ТЙіМС.– 2019.– № 101.–С. 134-146.
5. Leadbetter M. Extremes and related properties of random sequences and processes. /M. Leadbetter M., G. Lindgren, H. Rootzen // Springer, Berlin.– 1983.
6. Ledoux M. Probability in Banach Spaces: Isoperimetry and Processes. /M. Ledoux, M. Talagrand //Springer Science and Business Media.– 2013.

References

1. DUDLEY R. (1973) Sample functions of the Gaussian processes *Annals of Probability*. **1**, № 1, 3–68.
2. BULDYGIN, V., KOZACHENKO, YU. (2000) *Metric characterization of random variables and random processes*, Amer. Math. Soc., Providence, RI.
3. GIKHMAN, I.I. and SKOROKHOD, A.V. (1971), *Teoriya sluchainykh processov, v.1*, М.: Nauka, 664 p.
4. KOZACHENKO YU., ROZORA I. (2019) Conditions of sample continuity with probability one for Square-Gaussian stochastic processes статист. *Theor. Probability and Math. Statist.*, **101**, 134-146.
5. LEADBETTER M., LINDGREN G., ROOTZEN H. (1983) *Extremes and related properties of random sequences and processes*, Springer, Berlin.
6. LEDOUX M., TALAGRAND M. (2013) *Probability in Banach Spaces: Isoperimetry and Processes*, Springer Science and Business Media.

Надійшла до редколегії: 7.12.2020