УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/3.15>

Усар І.Я., к. ф.-м. н.
Макушенко І.А., к. ф.-м. н.

I.Ya. Usar, Ph.D.
I.A. Makushenko, Ph.D.

Аналіз та оптимізація систем з повторними викликами і чергою зі змінною інтенсивністю вхідного потоку

Analysis and optimization of retrial systems and queue with variable rate of input flow

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка,
03680, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д,
e-mail: usar69@ukr.net

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: usar69@ukr.net

У статті розглядається марковська модель системи з повторними викликами зі змінною інтенсивністю вхідного потоку з обмеженою чергою та без обмежень на ємність орбіти. Керування системою здійснюється за допомогою порогових стратегій. Для такої моделі з'ясовані умови існування стаціонарного режиму та досліджуються ймовірнісні характеристики процесу. Метод досліджень базується на апроксимації вихідного процесу процесом з обмеженим простором станів. Для ймовірнісних характеристик процесу в стаціонарному режимі знайдені явні векторно-матричні формули. Поставлена і розв'язана задача максимізації загального прибутку від роботи системи для порогових стратегій керування.

Ключові слова: стохастична система, повторні виклики, порогова стратегія, стаціонарний режим, оптимізація.

The paper is focused on in-depth study of the promising area of the stochastic systems theory related with scrutiny of queuing systems with repeated calls. We research Markov's models of retrial systems with queue and variable rate of input flow controlled by threshold strategy with no restriction on the capacity of the orbit. We defined stationary regime existence conditions and investigated probability characteristics of process for two-dimension Markov process with continuous time which we took as a main model of the specified system. In stationary regime for probability characteristics of the service process were found explicit formulas. Research methods which we used are based on the initial process approximation by the process with bounded state space. Results of the research allow us to evaluate convergence rates of stationary distribution of finite systems with repeated calls to stationary distribution of infinite systems. Method of probability flow equating is used for obtain explicit expressions for stationary system probabilities through the closed path which are defined in a special way. For threshold control strategies the optimization problem of the total income of the system was stated and solved.

Key Words: queue, repeated calls, threshold strategies, stationary regime, optimization.

Статтю представив д. т. н., проф. Заславський В.А.

Результати для систем з повторними викликами представляють один із важливих розділів теорії масового обслуговування. Детальний огляд відповідних результатів можна знайти в [1],[2]. Системи з повторними викликами виникають природним чином в нашій повсякденній діяльності в телефонних системах, комп'ютерних мережах, в області систем передачі інформації та ін. ([3],[4],[5]).

У даній роботі розглядається система з повторними викликами і чергою типу $[M|M|m+t+n]$, для якої m - кількість

обслуговуючих приладів, n - кількість місць у черзі. Час обслуговування на кожному з приладів має показниковий розподіл з параметром μ . Вхідний потік містить дві складові – первинну і вторинну. Інтенсивність λ_j потоку первинних викликів залежить від числа j - джерел повторних викликів. Кожне джерело повторних викликів генерує пуассонівський потік інтенсивності ν .

В якості моделі процесу обслуговування розглянемо двовимірний ланцюг Маркова з

неперервним часом $Q(t) = (Q_1(t), Q_2(t))$, $t \geq 0$ у фазовому просторі $S = I \times J$, $I = \{0, 1, \dots, m+n\}$, $J = \{0, 1, \dots\}$. Компонента $Q_1(t)$ вказує на кількість зайнятих приладів і місць у черзі в момент часу t , а $Q_2(t)$ дорівнює кількості джерел повторних викликів.

Інфінітезимальні характеристики $q_{(i,j)(i',j')}$ для $Q(t)$ визначаються наступним чином:

$$1) \text{ якщо } i = 0, 1, \dots, m+n-1, j \in J, \\ q_{(i,j)(i',j')} = \begin{cases} \lambda_j, \text{ при } (i', j') = (i+1, j), \\ \min\{i, \mu\} \mu, \text{ при } (i', j') = (i-1, j), \\ j\nu, \text{ при } (i', j') = (i+1, j-1), \\ -(\lambda_j + i\mu + j\nu), \text{ при } (i', j') = (i, j), \\ 0, \text{ в інших випадках;} \end{cases}$$

$$2) \text{ якщо } i = m+n, j \in J, \\ q_{(m+n,j)(i',j')} = \begin{cases} \lambda_j, \text{ при } (i', j') = (m+n, j+1), \\ m\mu, \text{ при } (i', j') = (m+n-1, j), \\ -(\lambda_j + m\mu), \text{ при } (i', j') = (m, j), \\ 0, \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

З'ясуємо умови існування стаціонарного режиму для процесу $Q(t)$, $t \geq 0$.

Лема. Нехай $\lambda = \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \lambda_j$. Тоді при $\frac{\lambda}{m\mu} < 1$

ланцюг $Q(t)$ ергодичний і його граничний розподіл співпадає з єдиним стаціонарним.

Доведення. Розглянемо в якості тест-функцій Ляпунова наступні функції

$$\phi(i, j) = ai + j, (i, j) \in S,$$

де параметр "a" буде визначено пізніше.

Для обраних тест-функцій середній перенос

$$y_{ij} = \sum_{(i',j') \neq (i,j)} q_{(i,j)(i',j')} (\phi(i', j') - \phi(i, j))$$

дорівнює

$$y_{ij} = \begin{cases} \lambda_j a - \min\{i, m\} \mu a + j\nu(a-1), 0 \leq i \leq m-1, \\ \lambda_j - m\mu a, i = m. \end{cases}$$

При $\frac{\lambda}{m\mu} < 1$ для будь-якого $a \in \left(\frac{\lambda}{m\mu}, 1\right)$ існує

таке $\varepsilon > 0$, що $y_{ij} < -\varepsilon$ для всіх $(i, j) \in S$ за винятком скінченного числа станів (i, j) . Таким чином для тест-функцій $\phi(i, j)$, $(i, j) \in S$ виконуються умови теореми Твіді ([1], стор.97).

Лему доведено.

Перейдемо до знаходження формул для стаціонарного розподілу при умові, що він існує. Для побудови розрахункових алгоритмів і явних формул спочатку розглянемо модель типу $[M|M|m+n]^{(N)}$, в якій скінченне число N місць для повторних викликів. При умові, що всі N місць зайнято, повторний виклик губиться і не отримує обслуговування в системі. Якщо знайти стаціонарний розподіл такої системи і перейти до границі $N \rightarrow \infty$ (в умовах леми), то ми отримаємо стаціонарний розподіл для системи $[M|M|m+n]$.

Позначимо через $Q^{(N)}(t) = (Q_1^{(N)}(t), Q_2^{(N)}(t))$ процес обслуговування для системи з чергою і скінченною орбітою. Інфінітезимальні характеристики $q_{(i,j)(i',j')}^{(N)}$ для $Q^{(N)}(t)$ у випадку $i = m+n, j = N$ будуть мати вигляд

$$q_{(m+n,j)(i',j')}^{(N)} = \begin{cases} m\mu, \text{ при } (i', j') = (m+n-1, N), \\ -m\mu, \text{ при } (i', j') = (m+n, N), \\ 0, \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

Процес $Q^{(N)}(t)$ приймає значення в скінченній множині станів $S^{(N)} = I \times J^{(N)}$, $I = \{0, 1, \dots, m+n\}$, $J^{(N)} = \{0, 1, \dots, N\}$, і для нього існує стаціонарний режим. Знайдемо його стаціонарний розподіл $\pi_{ij}^{(N)}$, $(i, j) \in S^{(N)}$.

Так як інтенсивність вхідного потоку залежить від кількості повторних викликів, для пошуку стаціонарних ймовірностей застосування методу генератрис є неможливим. В даному випадку, використовуючи теорему про рівність потоків через замкнений контур в стаціонарному режимі, приведемо систему рівнянь Колмогорова до вигляду, який дозволить виписати стаціонарні ймовірності в явному векторно-матричному вигляді.

Щоб сформулювати основний результат, введемо наступні позначення.

Нехай $A(j) = \|a_{ik}(j)\|_{i,k=0}^{m+n-1}$, $j = 0, 1, \dots, N-1$ - тридіагональна матриця вигляду

$$a_{ik}(j) = \begin{cases} \lambda_j + i\mu + j\nu, k = i, i = 0, 1, \dots, m, \\ \lambda_j + m\mu + j\nu, k = i, i = m+1, m+2, \dots, m+n-1, \\ -\lambda_j, k = i+1, i = 0, 1, \dots, m+n-2, \\ -i\mu, k = i-1, i = 1, 2, \dots, m, \\ -m\mu, k = i-1, i = m+1, m+2, \dots, m+n-1, \\ 0, \text{ otherwise,} \end{cases}$$

$$B = \|b_{ik}\|_{i,k=0}^{m+n-1}, b_{ik} = \begin{cases} 1, k = i + 1, i = 0, 1, \dots, m + n - 2, \\ 0, \text{otherwise}, \end{cases}$$

$$C = \|c_{ik}\|_{i,k=0}^{m+n-1}, c_{ik} = \begin{cases} 1, k = m + n - 1, i = 0, 1, \dots, m + n - 1, \\ 0, \text{otherwise}, \end{cases}$$

Через $D(N) = \|d_{ij}(N)\|_{i,j=1}^{m+n-1}$, $i, j = 1, 2, \dots, m + n - 1$ позначимо трикутну матрицю:

$$d_{ij}(N) = \begin{cases} i\mu, j = i, i = 1, 2, \dots, m, \\ m\mu, j = i, i = m + 1, m + 2, \dots, m + n - 1, \\ -(N\nu + \lambda_N), j = i - 1, i = 2, 3, \dots, m + n - 1, \\ -N\nu, j = 1, 2, \dots, i - 2, i = 3, 4, \dots, m + n - 1, \\ 0, \text{otherwise}. \end{cases}$$

Нам також необхідні будуть вектори:

$$\pi^{(N)}(j) = (\pi_{0j}^{(N)}, \pi_{1j}^{(N)}, \dots, \pi_{m+n-1j}^{(N)}),$$

$$G^{(N)}(j) = \frac{\pi^{(N)}(j)}{\pi_{0N}^{(N)}} = (G_{0j}^{(N)}, G_{1j}^{(N)}, \dots, G_{m+n-1j}^{(N)}),$$

$\bar{1}(m+n-1) - (m+n-1)$ – вимірний вектор, що складається з одиниць,
 $e_i(m+n-1) - (m+n-1)$ – вимірний вектор, i – та компонента якого дорівнює одиниці, а інші дорівнюють нулю. Через $\bar{1}, e_i$ будемо позначати такі ж вектори розмірності $m+n$.

Теорема. Якщо $\lambda_j > 0, j = 0, 1, \dots, N$, то стаціонарні ймовірності $\pi_{ij}^{(N)}, (i, j) \in S^{(N)}$ можна подати у вигляді:

$$(\pi_{1N}^{(N)}, \pi_{2N}^{(N)}, \dots, \pi_{m+n-1N}^{(N)})' =$$

$$= \pi_{0N}^{(N)} D^{-1}(N) (N\nu \bar{1}(m+n-1) + \lambda_N e_1(m+n-1)), (1)$$

$$\pi_{m+nN}^{(N)} = \frac{\pi_{0N}^{(N)}}{m\mu} G^{(N)}(N) (N\nu \bar{1} + \lambda_N e_{m+n}),$$

$$\pi_j^{(N)} = \frac{\pi_{0N}^{(N)} N! \nu^{N-j}}{j!} G^{(N)}(N) T(N-1) \times \dots \times T(j), (2)$$

$$\pi_{m+nj}^{(N)} = \frac{\pi_{0N}^{(N)} N! \nu^{N-j}}{\lambda_j j!} G^{(N)}(N) \times$$

$$\times T(N-1) \times \dots \times T(j+1) \bar{1}, j = 0, 1, \dots, N-1, (3)$$

де

$$\pi_{0N}^{(N)} = \left\{ G^{(N)}(N) \left(\bar{1} + N! \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\nu^{N-j}}{j!} T(N-1) \times \dots \times T(j+1) \times \right. \right.$$

$$\left. \times \left[T(j) + \frac{1}{\lambda_j} \right] \bar{1} + \frac{1}{m\mu} (N\nu \bar{1} + \lambda_N e_{m+n}) \right\}^{-1}, (4)$$

$$G^{(N)}(N) = \left(\begin{matrix} 1 \\ D^{-1}(N) (N\nu \bar{1}(m+n-1) + \lambda_N e_1(m+n-1)) \end{matrix} \right), (5)$$

$$T(j) = \left[B + \frac{m\mu}{\lambda_j} C \right] A^{-1}(j), j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Доведення. Для зручності позначимо $\pi_{ij}^{(N)} = \tilde{\pi}_{ij}, G_{ij}^{(N)} = \tilde{G}_{ij}, (i, j) \in S^{(N)}$. Для кожного $k = 0, 1, \dots, m-1$ розіб'ємо $S^{(N)}$ на дві підмножини $E_k = \{(0, N), (1, N), \dots, (k, N)\}$ та $\bar{E}_k = S^{(N)} \setminus E_k$. В силу рівності потоків імовірностей через замкнений контур у стаціонарному режимі ([5], ст.49), будемо мати

$$\begin{cases} N\nu \tilde{\pi}_{0N} + N\nu \tilde{\pi}_{1N} + \dots + N\nu \tilde{\pi}_{k-1N} + (N\nu + \lambda_N) \tilde{\pi}_{kN} = \\ = (k+1) \mu \tilde{\pi}_{k+1N}, k = 0, 1, \dots, m-1, \\ N\nu \tilde{\pi}_{0N} + N\nu \tilde{\pi}_{1N} + \dots + N\nu \tilde{\pi}_{k-1N} + (N\nu + \lambda_N) \tilde{\pi}_{kN} = \\ = m\mu \tilde{\pi}_{k+1N}, k = m, m+1, \dots, m+n-1. \end{cases} (6)$$

Для $\tilde{G}_{ij} = \frac{\tilde{\pi}_{ij}}{\tilde{\pi}_{0N}}, (i, j) \in S^{(N)}$ перші $(m+n-1)$

рівняння із системи (6) мають вигляд

$$\begin{pmatrix} \tilde{G}_{1N} \\ \dots \\ \tilde{G}_{m+n-1N} \end{pmatrix} = D^{-1}(N) (N\nu \bar{1}(m+n-1) + \lambda_N e_1(m+n-1)),$$

що дає нам (5). З (6) при $k = m+n-1$ знаходимо

$$\tilde{G}_{m+nN} = \frac{1}{m\mu} \tilde{G}'(N) (N\nu \bar{1} + \lambda_N e_{m+n}). (7)$$

Знайдемо тепер $\tilde{G}_{m+nj}$ при умові, що $j = 0, 1, \dots, N-1$. Розіб'ємо $S^{(N)}$ на дві підмножини $S_j^{(N)} = \{(\alpha, \beta) \in S^{(N)} : \beta \leq j\}$ і $\bar{S}_j^{(N)} = S^{(N)} \setminus S_j^{(N)}$.

Знову використовуючи рівність потоків імовірностей через замкнений контур, маємо

$$\lambda_j \tilde{\pi}_{m+nj} = (j+1) \nu \tilde{\pi}_{0j+1} + \dots + (j+1) \nu \tilde{\pi}_{m+n-1j+1},$$

звідки отримаємо

$$\tilde{G}_{m+nj} = \frac{(j+1) \nu}{\lambda_j} \tilde{G}'(j+1) \bar{1}, j = 0, 1, \dots, N-1. (8)$$

Розглянемо тепер $(m+n) \times N$ замкнених контурів, які містять одну точку (i, j) з області $\tilde{S}^{(N)} = \{0, 1, \dots, m+n-1\} \times \{0, 1, \dots, N-1\}$. Відповідні рівняння для G_{ij} , $(i, j) \in \tilde{S}^{(N)}$ мають вигляд

$$(\lambda_j + j\nu) \tilde{G}_{0j} = \mu \tilde{G}_{1j}, i = 0, (9)$$

$$\begin{cases} (\lambda_j + i\mu + j\nu)\tilde{G}_{ij} = (j+1)\nu\tilde{G}_{i-1,j+1} + \lambda_j\tilde{G}_{i-1,j} + \\ + (i+1)\mu\tilde{G}_{i+1,j}, \quad i=1,2,\dots,m-1, \\ (\lambda_j + m\mu + j\nu)\tilde{G}_{ij} = (j+1)\nu\tilde{G}_{i-1,j+1} + \lambda_j\tilde{G}_{i-1,j} + \\ + m\mu\tilde{G}_{i+1,j}, \quad i=m,m+1,\dots,m+n-2. \end{cases} \quad (10)$$

При $i = m+n-1$ з урахуванням (8)

$$(\lambda_j + m\mu + j\nu)\tilde{G}_{m+n-1,j} = (j+1)\nu\tilde{G}_{m+n-2,j+1} + \lambda_j\tilde{G}_{m+n-2,j} + \frac{(j+1)\nu m\mu}{\lambda_j}\tilde{G}'(j+1)\bar{1}. \quad (11)$$

Систему (9) - (11) можна представити в векторно-матричному вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{G}'(j) &= (j+1)\nu\tilde{G}'(j+1)\left[B + \frac{m\mu}{\lambda_j}C\right]A^{-1}(j) = \\ &= (j+1)\nu\tilde{G}'(j+1)T(j), \quad j=0,1,\dots,N-1. \end{aligned} \quad (12)$$

Розв'язком рекурентного співвідношення (12) буде послідовність векторів

$$\begin{aligned} G'(j) &= \frac{N!v^{N-j}}{j!}\tilde{G}'(N)T(N-1)\times\dots\times T(j), \\ j &= 0,1,\dots,N-1. \end{aligned} \quad (13)$$

Підставляючи праву частину (13) в (8), маємо

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{m+n,j} &= \frac{N!v^{N-j}}{j!\lambda_j}\tilde{G}'(N)T(N-1)\times\dots\times T(j+1)\bar{1}, \\ j &= 0,1,\dots,N-1. \end{aligned} \quad (14)$$

Умова нормування для стаціонарних імовірностей π_{ij} , $(i,j) \in S$ дозволяє знайти $\tilde{\pi}_{0N}$. Це дає формулу (4). Співвідношення (1)-(3) являються прямим наслідком (7), (13) та (14).

Теорема доведена.

Очевидно, ці формули являють собою ефективну рекурентну процедуру для обчислення стаціонарного розподілу.

Змінний характер інтенсивності вхідного потоку в моделях типу $[M|M|m+n]$ дає можливість ставити і розв'язувати для них оптимізаційні задачі. В зв'язку з цим розглянемо клас багатопорогових стратегій, які задаються порогами $H' = (H_1, H_2, \dots, H_{N-1})$,

$$0 = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{N-1} < H_N = \infty,$$

N - фіксоване число. Якщо в момент часу $t \geq 0$ число джерел повторних викликів $Q_2(t) \in [H_{i-1}, H_i)$, $i=1, \dots, N$, то будемо казати, що система з повторними викликами функціонує в i -ому режимі і інтенсивність вхідного потоку дорівнює h_i . Інші параметри від режиму не залежать. Вибір порогової стратегії H означає фіксацію залежності λ_j від числа джерел

повторних викликів: $\lambda_j = h_i$, $j \in [H_{i-1}, H_i)$, $i=1, \dots, N$. Відповідний процес обслуговування і його характеристики будемо наділяти індексом H , $Q(t) = Q(t, H), \dots$.

Нехай $S_1(t, H)$ - число викликів, обслуговування яких завершено в системі за час t ; $S_2(t, H)$ - число викликів, які отримали відмову в обслуговуванні і стали повторними викликами; $S_3(t, H)$ - число перемикань інтенсивності вхідного потоку. Якщо існують границі $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}S_i(t, H)$, то будемо позначати їх через $S_i(H)$, $i=1,2,3$.

Розглянемо оптимізаційну задачу

$$\begin{aligned} W(H) &= C_1 S_1(H) - C_2 S_2(H) - C_3 S_3(H) \rightarrow \max, \\ 0 &= H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{N-1} < H_N = \infty, \end{aligned}$$

$$H_i \in \{0, 1, \dots\}, \quad i=1, 2, \dots, N-1,$$

де C_1 - прибуток, пов'язаний з обслуговуванням одного виклику; C_2 - штраф за відмову в обслуговуванні; C_3 - штраф за перемикання інтенсивності вхідного потоку.

Розв'язком даної оптимізаційної задачі є така багатопорогова стратегія H , яка максимізує середній прибуток від роботи системи.

Конкретизуємо цю задачу для випадку, коли зміна інтенсивності вхідного потоку пов'язана з пересуванням одного порогу $H_1 = H$. Тоді для інтенсивності вхідного потоку маємо

$$\lambda_j = \begin{cases} h_1, & 0 \leq j < H, \\ h_2, & j \geq H. \end{cases}$$

Оскільки системи з обмеженою чергою апроксимують необмежені системи, то будемо вважати, що число повторних викликів обмежено деяким числом $N < \infty$.

В умовах існування стаціонарного режиму (умови леми) граничні функціонали $S_i(H)$, $i=1,2,3$ можуть бути виписані через стаціонарні імовірності π_{ij} , $(i,j) \in S$ наступним чином

$$\begin{aligned} S_1(H) &= \sum_{j=0}^N \left(\sum_{i=1}^m i\mu\pi_{ij}(H) + \sum_{i=m+1}^{m+n} m\mu\pi_{ij}(H) \right), \\ S_2(H) &= h_1 \sum_{j=0}^{H-1} \pi_{m+n,j}(H) + h_2 \sum_{j=H}^N \pi_{m+n,j}(H), \\ S_3(H) &= h_1 \pi_{m+n,H-1}(H) + \nu h \sum_{i=0}^{m+n-1} \pi_{iH}(H). \end{aligned}$$

Розглянемо приклад системи типу $[M|M|1|1+1]^{(20)}$, яка функціонує в двох режимах, вибір яких визначається порогом $H \in \{1, 2, \dots, 19\}$. Зафіксовані наступні параметри системи $h_1 = 4; h_2 = 0,5; \mu = 1; \nu = 0,1$.

Коефіцієнти якості $C_1 = 6, C_2 = 2, C_3 = 4$.

Програма, написана на основі отриманих формул, дає наступні значення цільового функціоналу:

$W(1) = 3.10832; W(2) = 3.1579; W(3) = 3.18552;$

$W(4) = 3.19712; W(5) = 3.19702; W(6) = 3.18834;$

$W(7) = 3.17337; W(8) = 3.15382; W(9) = 3.13095;$

$W(10) = 3.10571; W(11) = 3.07882; W(12) = 3.05079;$

$W(13) = 3.02192; W(14) = 2.99205; W(15) = 2.95971;$

$W(16) = 2.91864; W(17) = 2.84471; W(18) = 2.64105;$

$W(19) = 1.83259$.

Таким чином, максимум цільової функції 3.19712 досягається для порогу $H = 4$.

У статті в якості основної моделі системи $[M|M|m|m+n]$ розглядається двовимірний марковський процес з неперервним часом. Для нього з'ясовані умови існування стаціонарного режиму та досліджуються ймовірнісні характеристики процесу. Метод дослідження базується на апроксимації вихідної системи системою з обмеженою орбітою. Для ймовірнісних характеристик процесу знайдені явні векторно-матричні формули для стаціонарних імовірностей. Метод знаходження стаціонарних імовірностей процесу полягає в прирівнюванні потоків імовірностей у стаціонарному режимі через замкнені контури, які обираються спеціальним чином.

Змінний характер інтенсивності вхідного потоку в моделі даного типу дозволяє поставити і розв'язати задачу оптимізації, яка полягає в максимізації загального прибутку від роботи системи у випадку, коли керування системою здійснюється за допомогою порогової стратегії. Наводиться приклад та аналізується ефективність застосування даного класу стратегії керування.

Список використаних джерел

1. *Falin G.I. Retrial Queues* / G.I. Falin, J.G.C. Templeton. – London Chapman & Hall, 1997. – 331 p.
2. *Artalejo J.R. Retrial Queueing Systems. A Computational Approach* / J.R. Artalejo, A. Gomes-Corral. – Springer-Verlag, 2008. – 318 p.
3. *Artalejo J.R. Steady state solution of a single server queue with linear repeated request* / J.R. Artalejo, A. Gomes-Corral // *J. Applaid Probability*. – 1997. – Vol.34. – P. 223-233.
4. *Лебедев Є.О. Про системи з повторними викликами та керованим вхідним потоком* / Є.О. Лебедев, І.Я. Усар // *Доповіді національної академії наук України*. – 2009. – №5. – С. 52-59.
5. *Уолрэнд Дж. Введение в теорию массового обслуживания* / Дж. Уолрэнд. – Москва: Мир, 1993. – 336 с.

References

1. *FALIN, G.I., TEMPLETON, J.G.C. (1997) Retrial Queues*, London Chapman & Hall.
2. *ARTALEJO, J.R., GOMES-CORRAL, A. (2008) Retrial Queueing Systems. A Computational Approach*, Springer-Verlag.
3. *ARTALEJO, J.R., GOMES-CORRAL, A. (1997) "Steady state solution of a single server queue with linear repeated request", J. Applied Probability*, vol.34, pp. 223-233.
4. *LEBEDEV, E.O., USAR, I.Y., (2009) "About of retrial queueing systems and controlled of input flow". Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*. vol.5, pp. 52-59.
5. *WALRAND, J. (1993) An Introduction to queueing systems*, Moscow.

Надійшла до редколегії 26.11.2020