УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/3.10>

I.B. Розора, д.ф.-м.н., доц.

Вибіркова неперервність з імовірністю одиниця для оцінки імпульсної перехідної функції

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64.
e-mail: irozora@bigmir.net

I.V. Rozora, D.Sc., Associate Prof.

Sample continuity with probability one for the estimator of impulse response function

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.
e-mail: irozora@bigmir.net

В роботі досліджується фізично здійснима однорідна лінійна система з імпульсною перехідною функцією. В якості оцінки імпульсної функції розглядається сумісна корелограма між процесами на вході та виході системи. Знаходяться умови, за яких траєкторії оцінки імпульсної функції є рівномірно неперервними з імовірністю одиниця.

Ключові слова: імпульсна перехідна функція, лінійна однорідна система, гауссовий процес, сумісна корелограма, вибірка неперервність.

The problem of estimation of a stochastic linear system has been a matter of active research for the last years. One of the simplest models considers a 'black box' with some input and a certain output. The input may be single or multiple and there is the same choice for the output. This generates a great amount of models that can be considered. The sphere of applications of these models is very extensive, ranging from signal processing and automatic control to econometrics (errors-in-variables models). In this paper a time-invariant continuous linear system is considered with a real-valued impulse response function. We assume that impulse function is square-integrable. Input signal is supposed to be Gaussian stationary stochastic process with known spectral density. A sample input-output cross-correlogram is taken as an estimator of the response function. The conditions on sample continuousness with probability one for impulse response function are investigated.

Key Words: impulse response function, linear time-invariant system (LTI), Gaussian process, cross-correlogram, sample continuity.

Статтю представив д.ф.-м.н.Моклячук М.П.

1 Вступ

Задача оцінювання характеристик лінійних систем різної фізичної природи виникає у багатьох галузях, наприклад, у радіофізиці, сейсмології, метеорології, теорії сигналів та автоматичного контролю, теорії фільтрації, фінансовій математиці тощо. Останнім часом цей напрям досить активно розвивається.

Деякі методи оцінювання невідомих імпульсних перехідних функцій лінійних систем та вивчення властивостей відповідних оцінок розглядалися у роботах В.Булдігіна та його учнів. У класі лінійних систем важливий підклас складають неперервні однорідні системи. В якості оцінок беруться сумісні періодограми або сумісні корелограми між процесами на вході та виході системи.

Для корелограмної дискретної за часом оцінки у роботах В.Булдігіна, В.Зайця,

В.Курочки та Ф.Уцета [3] вивчалися умови асимптотичної незміщеності та конзистентності у середньому квадратичному, а також умови асимптотичної нормальності як у сенсі збіжності скінченновимірних розподілів, так у сенсі збіжності відповідних розподілів у просторі неперервних функцій.

В працях В.Булдігіна та І.Блажівської [1] встановлюється асимптотична незміщеність та конзистентність у середньому квадратичному корелограмної інтегральної оцінки; з менш обмежувальними умовами, ніж в статтях В.Булдігіна і Фу Лі, вивчалися питання асимптотичної нормальності оцінки та похибки оцінювання у просторі неперервних функцій.

Потрібно зауважити, що у роботах професора Булдігіна В. та його учнів вивчаються асимптотичні властивості оцінок перехідної імпульсної функції і не приділяється увага зна-

ходженню точних оцінок розподілів для супремуму похибки оцінювання. Вперше такі оцінки були знайдені в роботі Ю. Козаченка та І. Розори [4].

У статтях [5, 6] знайдені швидкість збіжності корелограмною оцінки перехідної функції в просторах $C(T)$ і $L_p(T)$ відповідно.

В даній роботі розглядається корелограмна інтегральна оцінка імпульсної перехідної функції та знаходиться достатні умови рівномірної неперервності траєкторій оцінок імпульсної перехідної функції. Ці результати ґрунтуються на теорії квадратично-гауссових випадкових величин.

2 Корелограми та їх властивості

Розглянемо фізично здійсниму однорідну систему з імпульсною перехідною функцією $H(\tau)$, $\tau \in \mathbf{R}$. Це означає, що дійснозначна функція $H(\tau) = 0$ при $\tau < 0$, а реакція системи на допустимий вхідний сигнал $X(t)$, $t \in \mathbf{R}$, має вигляд

$$Y(t) = \int_0^\infty H(\tau)X(t-\tau)d\tau. \quad (1)$$

При вивченні таких систем виникає задача оцінювання функції H за спостереженнями за реакцією системи на вхідний сигнал. У даній статті розглядається корелограмний метод оцінювання імпульсної перехідної функції H за умови $H \in L_2(\mathbf{R})$.

Розглянемо дійснозначний стаціонарний центрований гауссівський випадковий процес $X = (X(t), t \in \mathbf{R})$, що збурює систему (1). Нехай $f = (f(\lambda), \lambda \in \mathbf{R})$ — спектральна щільність процесу X . Припускаємо, що дана функція неперервна і задовольняє умовам

$$\sup_{\lambda \in \mathbf{R}} |f(\lambda)| < \infty; \\ K_X \in L_1(\mathbf{R}),$$

де $K_X(t) = \int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda t} f(\lambda) d\lambda$, $t \in \mathbf{R}$, — кореляційна функція випадкового процесу X .

Оцінку для H в точці τ , $\tau > 0$, визначимо у вигляді сумісної емпіричної корелограми

між вхідним та вихідним процесами (див., наприклад, [1])

$$\hat{H}_T(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T Y(t+\tau)X(t)dt, \quad \tau > 0, \quad (2)$$

де T — довжина інтервалу усереднення, при цьому підході до оцінювання H припускається також, що $X(t) = X_\Delta(t)$, тобто на вхід системи подається сім'я процесів, залежних від параметра $\Delta > 0$ та із певним виглядом спектральної щільності. В подальшому параметр Δ будемо опукати.

Припустимо, що $H \in L_2(\mathbf{R})$.

Через

$$H^*(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} H(t)dt, \quad \lambda \in \mathbf{R},$$

позначимо перетворення Фур'є-Планшереля функції H .

Зауваження 1. Інтеграли в (1) та (2) розглядаються як середньоквадратичні інтеграли Рімана.

Інтеграл в (1) існує тоді і тільки тоді, коли існує інтеграл Рімана

$$\int_0^\infty \int_0^\infty H(\tau)K_X(s-\tau)H(s)dsd\tau. \quad (3)$$

Якщо в даному інтегралі використати зображення кореляційної функції через спектральну щільність та перетворення Фур'є-Планшереля для функції $H(\tau)$, отримаємо

$$\int_0^\infty \int_0^\infty H(\tau)K(s-\tau)H(s)dsd\tau = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} H^*(-\lambda) \cdot H^*(\lambda)f(\lambda)d\lambda.$$

Оскільки $\sup_{\lambda \in \mathbf{R}} |f(\lambda)| < \infty$ і $H \in L_2(\mathbf{R})$, то інтеграл (3) існує, а отже, і існує інтеграл в (1).

Будемо вважати, що інтеграл (3) існує також як інтеграл Лебега.

Легко підрахувати, що математичне сподівання $\hat{H}_T(\tau)$ дорівнює

$$E\hat{H}_T(\tau) = \int_0^\infty H(s)K_X(\tau-s)ds. \quad (4)$$

Отже, з (4) маємо, що в загальному випадку

$$E\hat{H}_T(\tau) \neq H(\tau), \quad \tau \in \mathbf{R}.$$

Це означає, що оцінка $\hat{H}_T(\tau)$ є зміщеною.

В роботах [1], [2] розглядаються послідовності коваріаційних функцій, які залежать від параметру Δ , і знаходяться умови, коли оцінка $\hat{H}_{T,\Delta}(\tau)$ є асимптотично незміщеною для $H(\tau)$ при $\Delta \rightarrow \infty$. Також показано, що за певних умов $\hat{H}_{T,\Delta}(\tau) \rightarrow H(\tau)$ з ймовірністю 1 при $\Delta \rightarrow \infty$ і $T \rightarrow \infty$.

Зауваження 2. З роботи [1] випливає, що всі потрібні умови для асимптотичної незміщеності та для збіжності з ймовірністю 1 виконуються для послідовності таких спектральних щільностей

$$f_{\Delta}(\lambda) = \frac{c}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{\lambda^2}{\Delta} \right\}, \quad \lambda \in \mathbf{R}, \Delta > 0. \quad (5)$$

Нехай

$$\hat{Z}_T(\tau) = \hat{H}_T(\tau) - E\hat{H}_T(\tau).$$

В [1] показано, що кореляційна функція $\hat{Z}_T(\tau)$ має вигляд

$$\begin{aligned} E\hat{Z}_T(\tau_1)\hat{Z}_T(\tau_2) = \\ = \frac{2\pi}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{i(\tau_1-\tau_2)\lambda_2} |H^*(\lambda_2)|^2 + \right. \\ \left. + e^{i(\tau_1\lambda_1+\tau_2\lambda_2)} H^*(\lambda_1)H^*(\lambda_2) \right) \times \\ \times \Phi_T(\lambda_2 - \lambda_1) f(\lambda_1) f(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2, \end{aligned} \quad (6)$$

де $\Phi_T(\lambda)$ — ядро Фейєра

$$\Phi_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \left(\frac{\sin(T\lambda/2)}{\lambda/2} \right).$$

Нехай S — параметрична множина. Функція $\rho(t, s)$ називається псевдометрикою на S , якщо вона задовольняє всі аксіоми метрики, окрім того, що множина $\{(t, s) \in S \times S : \rho(t, s) = 0\}$ може бути більшою ніж діагональ $\{(t, s) \in S \times S : t = s\}$.

Розглянемо функцію (див. [2])

$$g_H(\tau) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |H^*(\lambda)|^2 \sin^2 \frac{\lambda\tau}{2} d\lambda \right]^{1/2}, \quad \tau > 0.$$

Оскільки $H \in L_2(\mathbf{R})$, то функція (7) коректно визначена та породжує псевдометрику

$$\sqrt{\sigma}(\tau_1, \tau_2) = \sqrt{g_H(|\tau_1 - \tau_2|)}, \quad \tau_1, \tau_2 \in \mathbf{R}.$$

Наступна лема дає оцінку стандартного відхилення для приростів процесу Z_T .

Лема 1. [4] Припустимо, що $H \in L_2(\mathbf{R})$ і $\sup_{\lambda \in \mathbf{R}} |f(\lambda)| < \infty$, де $f(t)$ — спектральна щільність процесу $X(t)$. Тоді

$$\begin{aligned} \left(E|\hat{Z}_T(\tau_1) - \hat{Z}_T(\tau_2)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ \leq \frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{T}} \cdot \sup_{t \in \mathbf{R}} |f(t)| \cdot \|H^*\|_2^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\sigma}(\tau_1, \tau_2), \quad \tau_1, \tau_2 > 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Доведемо таку лему.

Лема 2. Нехай $\psi(u), u \geq 0$ — така неперервна, монотонно зростаюча функція, $\psi(0) = 0$, що функція $\frac{u}{\psi(u)}$ є неспадною при $u > u_0$, де стала $u_0 \geq 0$. Тоді для всіх $u \geq 0$ та $v > 0$ виконується наступна нерівність

$$\left| \sin \frac{u}{v} \right| \leq \frac{\psi(u + u_0)}{\psi(v + u_0)}. \quad (9)$$

Доведення. Оскільки за умовою леми функція $\psi(u)$ є монотонно зростаючою, то при $u \geq v$

$$\frac{\psi(u + u_0)}{\psi(v + u_0)} \geq 1.$$

Тому в цьому випадку нерівність (9) є очевидною. Отже, (9) досить довести у випадку, коли $u < v$.

Оскільки функція $\frac{u}{\psi(u)}$ є неспадною при $u > u_0$, то при $u < v$ має місце наступна оцінка

$$\frac{u + u_0}{v + u_0} \leq \frac{\psi(u + u_0)}{\psi(v + u_0)}.$$

А отже, справедливе й співвідношення

$$\left| \sin \frac{u}{v} \right| < \frac{u}{v} < \frac{u + u_0}{v + u_0} \leq \frac{\psi(u + u_0)}{\psi(v + u_0)}.$$

Що й доводить твердження леми. $\square$

Приклад 1. Легко перевірити, що умови попередньої леми виконуються для функції

$$\psi(u) = K \cdot u^\alpha, \quad u \geq 0, \alpha \in (0, 1],$$

(7) де K — деяка стала, а значення $u_0 = 0$.

Теорема 2.1. Припустимо, що $H \in L_2(\mathbf{R})$ і де $\alpha \in (0, 1]$, K_α має вигляд

$\sup_{\lambda \in \mathbf{R}} |f(\lambda)| < \infty$, де $f(t)$ – спектральна щільність процесу $X(t)$. Нехай функція $\psi(u)$, $u \geq 0$, задовольняє всі умови леми 2 та збігається інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H^*(\lambda)|^2 \psi^2 \left(\frac{\lambda}{2} + u_0 \right) d\lambda < \infty.$$

Тоді

$$\left(E |\hat{Z}_T(\tau_1) - \hat{Z}_T(\tau_2)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq K \cdot \psi^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{|\tau_1 - \tau_2|} + u_0 \right), \quad (10)$$

де $\tau_1, \tau_2 \in \mathbf{R}$, u_0 – стала з леми 2, а K дорівнює

$$K = K(T) = \frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{T}} \cdot \sup_{t \in \mathbf{R}} |f(t)| \cdot \|H^*\|_2^{\frac{1}{2}} \times \left(\int_{-\infty}^{\infty} |H^*(\lambda)|^2 \psi^2 \left(\frac{\lambda}{2} + u_0 \right) d\lambda \right)^{1/4}. \quad (11)$$

Доведення. Доведення теореми впливає з (7), леми 1 і леми 2. Дійсно, з леми 2 маємо

$$\sin^2 \frac{\lambda \tau}{2} \leq \frac{\psi^2 \left(\frac{\lambda}{2} + u_0 \right)}{\psi^2 \left(\frac{1}{\tau} + u_0 \right)}.$$

Тоді із співвідношення (7) та останньої нерівності випливає, що

$$\begin{aligned} \sqrt{\sigma}(\tau_1, \tau_2) &= \sqrt{g_H(|\tau_1 - \tau_2|)} \leq \\ &\leq \psi^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{|\tau_1 - \tau_2|} + u_0 \right) \times \\ &\times \left(\int_{-\infty}^{\infty} |H^*(\lambda)|^2 \psi^2 \left(\frac{\lambda}{2} + u_0 \right) d\lambda \right)^{1/4}. \end{aligned}$$

Теорему буде повністю доведено, якщо праву частину нерівності підставити у (8). $\square$

Наслідок 1. Припустимо, що $H \in L_2(\mathbf{R})$ і $\sup_{\lambda \in \mathbf{R}} |f(\lambda)| < \infty$, де $f(t)$ – спектральна щільність процесу $X(t)$, та

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H^*(\lambda)|^2 \lambda^{2\alpha} d\lambda < \infty, \quad \alpha \in (0, 1].$$

Тоді

$$\left(E |\hat{Z}_T(\tau_1) - \hat{Z}_T(\tau_2)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq K_\alpha \cdot |\tau_1 - \tau_2|^{\frac{\alpha}{2}}, \quad (12)$$

$$K_\alpha = K_\alpha(T) = \frac{2^{2-\alpha/2} \sqrt{\pi}}{\sqrt{T}} \cdot \sup_{t \in \mathbf{R}} |f(t)| \times \|H^*\|_2^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} |H^*(\lambda)|^2 \lambda^{2\alpha} d\lambda \right)^{1/4}. \quad (13)$$

Доведення. Наслідок випливає з теореми 2.1 та прикладу 1. $\square$

3 Квадратично-Гауссові випадкові процеси

В даному розділі розглядаються означення та деякі властивості квадратично-гауссових випадкових величин і процесів.

Нехай (Ω, F, P) – ймовірнісний простір та (T, ρ) – компактний метричний простір з метрикою ρ .

Означення 3.1. Нехай $\Xi = \{\xi_t, t \in T\}$ – сім'я сумісно гауссівських випадкових величин, $E\xi_t = 0$ (наприклад, $\xi_t, t \in T$, є гауссівським випадковим процесом).

Простір $SG_\Xi(\Omega)$ називається простором квадратично-гауссових випадкових величин, якщо кожен елемент $\eta \in SG_\Xi(\Omega)$ можна представити у вигляді

$$\eta = \bar{\xi}^T A \bar{\xi} - E \bar{\xi}^T A \bar{\xi}, \quad (14)$$

де $\bar{\xi}^T = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $\xi_k \in \Xi$, $k = 1, \dots, n$, A – дійснозначна матриця,

або $\eta \in SG_\Xi(\Omega)$ представляється як середньоквадратична границя послідовності випадкових величин з (14)

$$\eta = l.i.m. n \rightarrow \infty (\bar{\xi}_n^T A \bar{\xi}_n - E \bar{\xi}_n^T A \bar{\xi}_n).$$

Означення 3.2. Випадковий процес $\xi(t) = \{\xi(t), t \in T\}$ називається квадратично-гауссовим, якщо для кожного $t \in T$ випадкова величина $\xi(t)$ належить простору $SG_\Xi(\Omega)$.

Відомо також, що

- $SG_\Xi(\Omega)$ є банаховим простором з нормою $\|\zeta\| = \sqrt{E\zeta^2}$;
- $SG_\Xi(\Omega)$ є підпростором простору Орліча, що породжується функцією

$$U(x) = \exp |x| - 1;$$

- норма $\|\zeta\|_{L_U(\Omega)}$ на $SG_\Xi(\Omega)$ еквівалентна нормі $\sqrt{E\zeta^2}$.

Приклад 2. Розглянемо сім'ю гауссівських центрованих випадкових процесів

$\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t), t \in T$. Нехай матриця $A(t)$ є симетричною. Тоді

$$X(t) = \xi^T(t)A(t)\bar{\xi}(t) - E\xi^T(t)A(t)\bar{\xi}(t),$$

де $\bar{\xi}^T(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t))$, є квадратично-гауссовим випадковим процесом.

Загальні властивості квадратично-гауссових випадкових процесів можна знайти в роботах [?], [?].

Через $N(u)$ позначимо мінімальну кількість замкнених куль радіуса u , що покривають множину T з метрикою ρ .

Нехай $\xi(t) = \{\xi(t), t \in T\}$ — квадратично-гауссовий випадковий процес. Припустимо, що існує функція $\sigma(h)$, $h > 0$, яка є монотонно зростаючою, неперервною і $\sigma(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, а також

$$\sup_{\rho(t,s) \leq h} (\mathbf{Var}(\xi(t) - \xi(s)))^{\frac{1}{2}} \leq \sigma(h).$$

Визначимо деякі сталі:

$$\varepsilon_0 = \inf_{t \in T} \sup_{s \in T} \rho(t, s), \quad t_0 = \sigma(\varepsilon_0),$$

$$\gamma_0 = \sup_{t \in T} (\mathbf{Var} \xi(t))^{1/2},$$

Позначимо $C = \max\{t_0, \gamma_0\}$.

У роботі Козаченка Ю. і Розори І. [7] знайдено умови рівномірної вибіркової неперервності з імовірністю 1 для квадратично-гауссових випадкових процесів

Теорема 3.1. *Якщо для сепарабельного квадратично-гауссового процесу $\xi = \{\xi(t), t \in B\}$ виконуються умови попередньої теореми, то він є вибірково неперервним з імовірністю одиниця та для довільних $p \in (0, 1)$, $\varepsilon > 0$ і $x > 0$*

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \sup_{\rho(t,s) < \varepsilon} |\xi(t) - \xi(s)| > x \right\} \leq \\ & \leq 2^{r^{(-1)} \left(\frac{1}{p\sigma(\varepsilon)} \int_0^{\sigma(\varepsilon)} r(N(\sigma^{(-1)}(u))) du \right)} \times \\ & \times \left(1 + \frac{\sqrt{2}xp(1-p)^2}{\sigma(\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{xp(1-p)^2}{\sqrt{2}\sigma(\varepsilon)} \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Наслідок 2. *Нехай $\xi(t) = \{\xi(t), t \in [a, b]\}$ — сепарабельний квадратично-гауссовий випадковий процес. Припустимо, що для нього виконується умова*

$$\sup_{|t-s| \leq h} (\mathbf{Var}(\xi(t) - \xi(s)))^{\frac{1}{2}} \leq K \cdot h^\alpha, \quad \alpha \in (0, 1],$$

де стала $K > 0$. Тоді процес $X(t)$ є вибірково неперервним з імовірністю одиниця та для довільних $\varepsilon > 0$ і $x > 0$ справджується така оцінка

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \sup_{\substack{t,s \in [a,b] \\ |t-s| < \varepsilon}} |\xi(t) - \xi(s)| > x \right\} \leq 2^{1+\frac{2}{\alpha}}(b-a)\varepsilon^{-1} \times \\ & \times \min_{p \in (0,1)} \left[\left(1 + \frac{\sqrt{2}xp(1-p)^2}{K\varepsilon^\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{xp(1-p)^2}{\sqrt{2}\varepsilon^\alpha}} p^{-2/\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Доведення. Результат теореми випливає з теореми 3.1 при $\sigma(h) = K \cdot h^\alpha$. Досить тільки знайти функцію $r(u)$, для якої виконується умова теореми, й оцінити вираз

$$r^{(-1)} \left(\frac{1}{p\sigma(\varepsilon)} \int_0^{\sigma(\varepsilon)} r(N(\sigma^{(-1)}(\nu))) d\nu \right).$$

Очевидно, що обернена функція до $\sigma(h) = K \cdot h^\alpha$ дорівнює $\sigma^{(-1)}(h) = \left(\frac{h}{K}\right)^{1/\alpha}$.

Метрична масивність відрізка $[a, b]$ з метрикою $\rho(t, s) = |t-s|$ оцінюється як $N(u) \leq \frac{b-a}{2u} + 1$. Отже,

$$\begin{aligned} N(\sigma^{(-1)}(u)) & \leq \left(\frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) = \\ & = \left(\frac{b-a}{2} \left(\frac{K}{u} \right)^{1/\alpha} + 1 \right). \end{aligned}$$

У якості функції $r(u)$ можна взяти $r(u) = u^{\frac{\alpha}{2}} - 1$, для якої виконуються всі умови попередньої теореми. Оскільки $0 < p < 1$ та

$$t_0 = \sigma \left(\inf_{t \in [a,b]} \sup_{s \in [a,b]} |t-s| \right) = K \left(\frac{b-a}{2} \right)^\alpha,$$

то $\frac{b-a}{2} \left(\frac{K}{pt_0} \right)^{1/\alpha} > 1$. Тому, за умови $0 < u < t_0 p$ справджується нерівність

$$N(\sigma^{(-1)}(u)) \leq (b-a) \left(\frac{K}{u} \right)^{1/\alpha}.$$

Оскільки обернена функція до $r(u)$ дорівнює $r^{(-1)}(u) = (u + 1)^{2/\alpha}$, то

$$\begin{aligned} & r^{(-1)} \left(\frac{1}{p\sigma(\varepsilon)} \int_0^{\sigma(\varepsilon)} r \left(N \left(\sigma^{(-1)}(\nu) \right) \right) d\nu \right) \\ &= \left(\frac{1}{pK\varepsilon^\alpha} \int_0^{K\varepsilon^\alpha} \left(\left(\frac{b-a}{2} \left(\frac{K}{u} \right)^{1/\alpha} + 1 \right)^{\frac{\alpha}{2}} \right) du \right)^{2/\alpha} \\ &\leq \left(\frac{1}{pK\varepsilon^\alpha} \int_0^{K\varepsilon^\alpha} \left((b-a) \left(\frac{K}{u} \right)^{1/\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{2}} du \right)^{2/\alpha} \end{aligned} \quad (17)$$

$$= \frac{2^{\frac{2}{\alpha}}(b-a)}{\varepsilon p^{\frac{1}{\alpha}}}. \quad (18)$$

Якщо в (15) підставити значення функції $\sigma(\varepsilon) = K\varepsilon^\alpha$ та оцінку (18), то нерівність (16) буде повністю доведено.

Якщо $\varepsilon \rightarrow 0$, то з нерівності (16) випливає, що

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{|t-s|<\varepsilon} |\xi(t) - \xi(s)| > x \right\} \rightarrow 0,$$

тобто при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\sup_{|t-s|<\varepsilon} |\xi(t) - \xi(s)| \xrightarrow{P} 0.$$

Отже, справедлива неперервність за ймовірністю. А з монотонності супремуму випливає і збіжність з ймовірністю одиниця, тобто

$$\sup_{|t-s|<\varepsilon} |\xi(t) - \xi(s)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \text{ м.н.}$$

Таким чином, випадковий процес $\xi = \{\xi(t), t \in B\}$ є вибірково неперервним з ймовірністю одиниця. $\square$

4 Вибіркова неперервність з ймовірністю одиниця для оцінки імпульсної перехідної функції

З теорем про рівномірну неперервність майже напевно траєкторій квадратично-гауссових випадкових процесів можна показати, що при певних умовах оцінка (2) імпульсної перехідної функції також буде вибірково неперервною з ймовірністю одиниця.

Покажемо, що процес $\hat{Z}_T(\tau) = \hat{H}_T(\tau) - E\hat{H}_T(\tau)$ є квадратично-гауссовим. Даний факт тоді дозволить застосувати результати, що були доведені для квадратично-гауссових випадкових процесів.

Лема 3. Випадковий процес $\hat{Z}_T(\tau) = \hat{H}_T(\tau) - E\hat{H}_T(\tau)$, $\tau > 0$, є квадратично-гауссовим.

Доведення. Процес $\hat{Z}_T(\tau)$, $\tau > 0$, можна подати у вигляді

$$\hat{Z}_T(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T (Y(t+\tau)X(t) - EY(t+\tau)X(t))dt. \quad (19)$$

Оскільки кожна інтегральна сума (19)

$$\sum_k (Y(t_k + \tau)X(t_k) - EY(t_k + \tau)X(t_k)) \triangle t_k$$

належить простору $SG_\Xi(\Omega)$, а сам процес $\hat{Z}_T(\tau)$ є границею цих сум в середньому квадратично-му, то $\hat{Z}_T(\tau)$ є квадратично-гауссовим процесом. Отже, лема повністю доведена. $\square$

Теорема 4.1. Нехай $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$ – сепарабельний дійснозначний стаціонарний гауссовий процес, що збудує систему (1). Вважаємо, що спектральна щільність $f(t)$ процесу $X(t)$ є обмеженою $\sup_{\lambda \in \mathbf{R}} |f(\lambda)| < \infty$ і перехідна функція $H \in L_2(\mathbf{R})$. Тоді, якщо виконується умова

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H^*(\lambda)|^2 \lambda^{2\alpha} d\lambda < \infty, \quad \alpha \in (0, 1], \quad (20)$$

то оцінка імпульсної перехідної функції вигляду (2) є рівномірно вибірково неперервною на $[a, b]$ з ймовірністю одиниця.

Крім того, якщо виконується (20), то розподіл модуля неперервності $\hat{Z}_T = \hat{H}_T - E\hat{H}_T$ на відрізьку $[a, b]$ оцінюється

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \sup_{\substack{t,s \in [a,b] \\ |t-s|<\varepsilon}} |\hat{Z}_T(t) - \hat{Z}_T(s)| > x \right\} \leq 2^{1+\frac{4}{\alpha}}(b-a)\varepsilon^{-1} \times \\ & \times \min_{p \in (0,1)} \left[\left(1 + \frac{2\sqrt{2}xp(1-p)^2}{K\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{2xp(1-p)^2}{\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}} p^{-4/\alpha} \right], \end{aligned} \quad (21)$$

де K визначено в (13).

Доведення. З леми 3 випливає, що випадковий процес $\hat{Z}_T(\tau) = \hat{H}_T(\tau) - E\hat{H}_T(\tau)$, $\tau > 0$, є квадратично-гауссовим. З наслідку 1 випливає, що за умови (20) має місце нерівність

$$\left(E|\hat{Z}_T(\tau_1) - \hat{Z}_T(\tau_2)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq K_\alpha \cdot |\tau_1 - \tau_2|^{\frac{\alpha}{2}},$$

де $\alpha \in (0, 1]$, K_α з (13). Тому для процесу $\hat{Z}_T(\tau)$ виконується наслідок 2 про рівномірну вибірккову неперервність з ймовірністю одиниця. $\square$

Список використаних джерел

1. Булдигін В.В. Асимптотичні властивості корелограмних оцінок імпульсних перехідних функцій лінійних систем / В.В. Булдигін, І.П. Блажієвська // Наукові вісті НТУУ "КПІ".– 2010.– № 4.– С. 16–27.
2. Buldygin V. On asymptotic normality of an estimation of unit impulse responses of linear system I, II / V. Buldygin, Fu Li // Theor. Probability and Math. Statist.–1997.– № 54, № 55.– P. 3–17, P.30–37.
3. Buldygin V. Asymptotic normality of cross-correlogram estimators of the response function / V. Buldygin, F. Utzet, V. Zaiats // Statistical Inference for Stochastic Processes. – 2004.–№7.–P.1–34.
4. Козаченко Ю. Про корелограмні оцінки імпульсних перехідних функцій / Ю.Козаченко, І.Розора // Теор. ймовір. та матем. статист.– 2015.– № 93.–С. 75–86.
5. Розора І. Швидкість збіжності для оцінки імпульсної перехідної функції у просторі неперервних функцій / І.Розора // Вісник КНУ.Серія:фізико-математичні науки.– 2018.– № 3.–С. 30–36.
6. Розора І. Про швидкість збіжності для оцінки імпульсної перехідної функції у просторі $L_p(T)$ / І.Розора // Вісник КНУ.Серія:фізико-математичні науки.– 2018.– № 4.–С. 36–41.
7. Козаченко Ю. Умови вибіркової неперервності з ймовірністю одиниця для квадратично-гауссових випадкових процесів / Ю.Козаченко, І.Розора // Теор. ймовір. та матем. статист.– 2019.– № 101.–С. 134–146.

5 Висновки

В роботі розглядалась корелограмна інтегральна оцінка імпульсної перехідної функції лінійної однорідної системи. Знайдено достатні умови рівномірної вибіркової неперервності для оцінки імпульсної перехідної функції та отримано розподіл модуля неперервності для нього.

References

1. BULDYGIN V., BLAZHIEVSKA I. (2010) Asymptotic properties of cross-correlogram estimators of impulse response functions in linear system *Research Bulletin of National Technical University of Ukraine "KPI"*, **4**, 16–27.
2. BULDYGIN V., FU LI (1997) On asymptotic normality of an estimation of unit impulse responses of linear system I, II *Theor. Probability and Math. Statist.*, **54**, **55**, 3–17, 30–37.
3. BULDYGIN V., UTZET F., ZAIATS V. (2004) Asymptotic normality of cross-correlogram estimators of the response function *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **7**, 1–34.
4. KOZACHENKO YU., ROZORA I. (2015) On cross-correlogram estimators of impulse response functions *Theor. Probability and Math. Statist.*, **93**, 75–86.
5. ROZORA I. (2018) Convergence rate for the estimation of impulse response function in the space of continuous functions *Bulletin of KNU. Series: Physics and Mathematics*, **3**, 30–36.
6. ROZORA I. (2018) On the convergence rate for the estimation of impulse response function in the space $L_p(T)$ *Bulletin of KNU. Series: Physics and Mathematics*, **4**, 36–41.
7. KOZACHENKO YU., ROZORA I. (2019) Conditions of sample continuity with probability one for Square-Gaussian stochastic processes *statist. Theor. Probability and Math. Statist.*, **101**, 134–146.

Надійшла до редколегії: 2.10.2020