УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/3.9>

М.Ю. Петранова¹

Моделювання гауссового стаціонарного процесу зі стійкою кореляційною функцією із заданою надійністю та точністю

¹ Донецький національний університет імені Василя Стуса, 21021, м. Вінниця, вул. 600-річчя, 21
e-mail: m.petranova@donnu.edu.ua

M. Yu. Petranova¹

Simulation of a Gaussian stationary process with a stable correlation function with a given reliability and accuracy

¹Vasyl' Stus Donetsk National University, 21021, 600-richchia str., 21
e-mail: m.petranova@donnu.edu.ua

У цій статті для побудови моделей стохастичних процесів, що наближає процеси із заданою надійністю та точністю в просторі $L_p([0, T])$ використано зображення випадкових процесів у вигляді випадкових рядів з некорельованими членами, отримані в роботі Ю. В. Козаченко, І. В. Розора, Є. В. Турчина (2007) [1]. Подібні конструкції були досліджені у книзі Ю. В. Козаченка та ін. [2] у загальному випадку. Однак виникають додаткові труднощі при побудові моделей конкретного процесу, такі як, наприклад, вибір відповідного базису в $L_2(\mathbb{R})$. У цій статті побудовані моделі, які наближають гауссовий процес зі стійкою кореляційною функцією $\rho_\alpha(h) = EX_\alpha(t+h)X_\alpha(t) = B^2 \exp\{-d|h|^\alpha\}$, $\alpha > 0, d > 0$ з параметром $\alpha = 2$, що є центрованим стаціонарним процесом із заданою надійністю та точністю в просторі $L_p([0, T])$. А також знайдено швидкості збіжності моделей, сформульовано відповідні теореми. Розглянуто способи зображення та основні властивості процесу зі стійкою кореляційною функцією $\rho_2(h) = B^2 \exp\{-d|h|^2\}$, $d > 0$. У якості базису в просторі $L_2(\mathbb{T})$ використовуються функції Ерміта.

Ключові слова: кореляційна функція, моделювання, модель процесу, точність, надійність.

In this paper, the representation of random processes in the form of random series with uncorrelated members obtained in the work by Yu. V. Kozachenko, I. V. Rozora, E. V. Turchina (2007) [1]. Similar constructions were studied in the book by Yu. V. Kozachenko and others. [2] in the general case. However, there are additional difficulties in construction of models of specific process, such as, for example, selection of the appropriate basis in $L_2(\mathbb{R})$. In this paper, models are constructed that approximate the Gaussian process with a stable correlation function $\rho_\alpha(h) = EX_\alpha(t+h)X_\alpha(t) = B^2 \exp\{-d|h|^\alpha\}$, $\alpha > 0, d > 0$ with parameter $\alpha = 2$, which is a centered stationary process with a given reliability and accuracy in the space $L_p([0, T])$. And also the rates of convergence of the models are found, the corresponding theorems are formulated. Methods of representation and main properties of the process with a stable correlation function $\rho_2(h) = B^2 \exp\{-d|h|^2\}$, $d > 0$ are considered. As a basis in the space $L_2(\mathbb{T})$ Hermitian functions are used.

Key Words: correlation function, simulation, model of the process, accuracy, reliability.

Статтю представила д.ф.-м.н. Розора І.В.

1 Гауссовий процес зі стійкою кореляційною функцією

$$\rho_2(h) = B^2 \exp\{-d|h|^2\}, d > 0$$

Означення 1.1. [3] Стаціонарний випадковий процес $X = \{X(t), t \in [0, T]\}$ називається гауссовим процесом зі стійкою кореляційною функцією з параметром $\alpha = 2$, якщо $EX(t) = 0$ та

$$E(X(t+h)\overline{X(t)}) = \sigma^2 \cdot \exp\{-ah^2\},$$

де $\sigma^2 > 0, a > 0$ - деякі константи.

Щоб отримати зображення процесу у вигляді ряду некорельованих членів, потрібна наступна теорема.

Теорема 1.1 ([1]). Нехай $X = \{X(t), t \in [0, T]\}$, $EX(t) = 0$ є випадковим процесом другого порядку з кореляційною функцією $R(t, s) = E(X(t)\overline{X(s)})$. Нехай $(\Lambda, \beta_\Lambda, \mu)$ - вимірний простір з σ -скінченною мірою μ , функція $f_i(t, \lambda)$,

$t \in T, i = 1, \dots, n$ належать до $L_2(\Lambda, \mu)$, та $\{g_k(\lambda), k \in \mathbb{R}\}$ – ортонормований базис в $L_2(\Lambda, \mu)$. Нехай кореляційна функція $R(t, s)$ може бути представлена у формі

$$R(t, s) = \sum_{i=1}^n \int_{\Lambda} f_i(t, \lambda) \bar{f}_i(s, \lambda) d\mu(\lambda).$$

Тоді процес $Z(t)$ може бути зображений у вигляді ряду, збіжного у середньоквадратичному

$$X(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{ik}(t) \xi_{ik},$$

де

$$a_{ik}(t) = \int_{\Lambda} f_i(t, \lambda) g_k(\lambda) d\mu(\lambda),$$

$$E \xi_{ik} = 0, E \xi_{ik} \bar{\xi}_{jl} = \delta_{ij} \delta_{kl}.$$

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 0, k \neq l, \\ 1, k = l \end{cases} \text{ – дельта-функція Кронекера.}$$

Означення 1.2. [4] Функції

$$g_k(u) = \frac{H_k(u)}{\sqrt{k!}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{u^2}{4} \right\} \quad (1)$$

називаються функціями Ерміта, де

$$H_k(u) = (-1)^k e^{u^2/2} \frac{d^k}{du^k} e^{-u^2/2} \quad (2)$$

поліноми Ерміта.

[4] Система функцій

$$g_k(u) = \frac{H_k(u)}{\sqrt{k!}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{u^2}{4} \right\}$$

– це повна ортонормальна система, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_k(u) \bar{g}_m(u) du = \begin{cases} 0, k \neq m, \\ 1, k = m. \end{cases}$$

Теорема 1.2. Нехай $X(t) = \{X(t), t \in [0, T]\}$ – гауссовий процес зі стійкою кореляційною функцією $\rho_2(h) = B^2 \exp \{-d|h|^2\}$, $d > 0$. Тоді процес $X(t)$ може бути зображений у вигляді ряду, збіжного у середньоквадратичному

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k1}(t) \cdot \xi_k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k2}(t) \cdot \eta_k, \quad (3)$$

де $E \xi_k = E \eta_k = 0$, $E \xi_k \xi_l = \delta_{kl}$, $E \eta_k \eta_l = \delta_{kl}$, $E \xi_k \eta_l = 0$,

$$a_{k1}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot g_k(u) du, \quad (4)$$

$$a_{k2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \sin tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot g_k(u) du. \quad (5)$$

Доведення. Доведення цієї теореми впливає з теореми 1.1. В нашому випадку маємо:

$$\begin{aligned} R(s, t) &= \sigma^2 \cdot \exp \left\{ -a(t-s)^2 \right\} = \\ &= \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos((t-s)x) \cdot \exp \left\{ -\frac{u^2}{4a} \right\} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \exp \left\{ -\frac{u^2}{8a} \right\} \cos tx \right) \times \\ &\quad \times \left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \exp \left\{ -\frac{u^2}{8a} \right\} \cos sx \right) dx + \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \exp \left\{ -\frac{u^2}{8a} \right\} \sin tx \right) \times \\ &\quad \times \left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \exp \left\{ -\frac{u^2}{8a} \right\} \sin sx \right) dx. \end{aligned}$$

Тобто, в позначеннях теореми 1.2 $n = 2$, a_{k1} і a_{k2} визначені в теоремі. $\square$

Далі припускаємо, що $X(t)$ – процес Гаусса. У цьому випадку всі випадкові величини ξ_k та η_k є незалежними.

2 Модель гауссового стаціонарного процесу зі стійкою кореляційною функцією
 $\rho_2(h) = B^2 \exp \{-d|h|^2\}$, $d > 0$ в просторі $L_p([0, T])$

Означення 2.1. Модель $X_N(t)$ наближає процес $X(t)$ з надійністю

$1 - \alpha, \alpha > 0$ та точністю $\beta > 0$ у просторі $L_p([0, T])$, $p \geq 1, t \in [0, T]$, якщо

$$\begin{aligned} P \left\{ \|X(t) - X_N(t)\|_p > \beta \right\} &= \\ &= P \left\{ \left(\int_0^T |X(t) - X_N(t)|^p dt \right)^{1/p} > \beta \right\} \leq \alpha. \end{aligned} \quad (6)$$

Лема 2.1. Нехай $X(t)$ – гауссовий процес зі стійкою кореляційною функцією $\rho_2(h) = B^2 \exp\{-d|h|^2\}$, $d > 0$. Якщо $X_N(t)$ – модель цього процесу, тоді має місце така оцінка

$$\left(\sup_{t \in [0, T]} E(X(t) - X_N(t))^2 \right)^{1/2} \leq B_N, \quad (7)$$

де

$$B_N = \frac{\sigma K}{(\pi a)^{1/4} \sqrt{N+2}} \times \\ \times \left(\frac{2\sqrt{2\pi a}}{a} T^2 + 4(2a+1)T + \right. \\ \left. + \frac{2\pi a}{a} (2a^2 + 3a + 1) \right). \quad (8)$$

Доведення. З теореми 1.2 та означення 1.2 випливає, що

$$E(X(t) - X_N(t))^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} (a_{k1}^2(t) + a_{k2}^2(t)), \quad (9)$$

де

$$a_{k1}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot g_k(u) du, \\ a_{k2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \sin tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot g_k(u) du, \\ g_k(u) = \frac{H_k(u)}{\sqrt{k!}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \exp\left\{-\frac{u^2}{4}\right\} \quad (\text{див. означення 1.1}). \text{ Потрібно оцінити } |a_{k1}| \text{ та } |a_{k2}|:$$

$$|a_{k1}(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot g_k(u) du \right|.$$

Використовуючи інтегрування частинами, властивості поліномів Ерміта, аналогічно до міркувань, проведених в книзі Ю. В. Козаченко та ін. ([2]), отримуємо для $|a_{k1}(t)|$ наступні співвідношення

$$|a_{k1}(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot g_k(u) du \right| = \\ = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \times \right. \\ \left. \times \frac{H_k(u)}{\sqrt{k!}} \cdot e^{-\frac{u^2}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} du \right| = \\ = \left| \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \times \right. \\ \left. \times \frac{e^{-\frac{u^2}{4}}}{\sqrt{k+1}\sqrt{(k+1)!}} \cdot \frac{\partial H_{k+1}(u)}{\partial u} \cdot du \right|.$$

З нерівності Крамера [5] випливає, що для будь-якого u маємо

$$|g_k(u)| \leq K, \quad \text{де } K = 1,086435. \text{ Таким чином,}$$

$$\left| \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \cdot \frac{H_k(u)}{\sqrt{(k+1)!}} \exp\left\{-\frac{u^2}{4}\right\} \right| \leq \text{const.}$$

Тому $e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \cdot \frac{H_k(u)}{\sqrt{(k+1)!}} \exp\left\{-\frac{u^2}{4}\right\} \rightarrow 0$, коли $u \rightarrow \pm\infty$. Звідси

$$|a_{k1}(t)| = \\ = \left| -\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot \frac{u^2}{4} \right)}{\partial u} \times \right. \\ \left. \times \frac{H_{k+1}(u)}{\sqrt{k+1}\sqrt{(k+1)!}} \right|.$$

За допомогою повторного інтегрування частинами, отримуємо

$$|a_{k1}(t)| = \left| -\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \times \frac{u^2}{4} \right)}{\partial u} \times \right. \\ \left. \times \frac{H_{k+1}(u)}{\sqrt{k+1}\sqrt{(k+1)!}} \right| = \\ = \left| -\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot \frac{u^2}{4} \right)}{\partial u} \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+2)}\sqrt{(k+2)!}} \cdot \frac{\partial H_{k+2}(u)}{\partial u} \right| = \\ = \left| \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot \frac{u^2}{4} \right)}{\partial u} \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+2)}\sqrt{(k+2)!}} \cdot H_{k+1}(u) \right|_{-\infty}^{\infty} + \\ + \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot \frac{u^2}{4} \right)}{\partial u^2} \times \\ \times \frac{H_{k+2}(u)}{\sqrt{(k+1)(k+2)}\sqrt{(k+2)!}} du \cdot H_{k+1}(u) \Big| = \\ = \left| \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot \frac{u^2}{4} \right)}{\partial u^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{H_{k+2}(u)}{\sqrt{(k+1)(k+2)}\sqrt{(k+2)!}} du \cdot H_{k+1}(u) \right|.$$

З нерівності Крамера [5] ми отримуємо:

$$|a_{k1}(t)| \leq \frac{K}{\sqrt{(k+1)(k+2)}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} Z_1(t, u) du \right|, \quad (10)$$

де

$$Z_1(t, u) = \frac{\partial^2 \left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \right)}{\partial u^2} -$$

$$- u \frac{\partial \left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \right)}{\partial u} +$$

$$+ \frac{u^2 - 2}{4} \left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \right).$$

Отже

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} Z_1(t, u) du \right| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}} \left(\frac{1}{16a^2} \cos tu \cdot (u^2(2a+1)^2 - \right. \right.$$

$$\left. \left. - (16a^2t^2 + 8a^2 + 4a))tu \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \sin tu \left(\frac{1}{2a} + 1 \right) \right) du \right|.$$

Оцінимо вираз під знаком інтеграла

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} Z_1(t, u) du \right| =$$

$$= \left| \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}} \left(\frac{1}{16a^2} \cos tu \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times (u^2(2a+1)^2 - (16a^2t^2 + 8a^2 + 4a)) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + tu \cdot \sin tu \left(\frac{1}{2a} + 1 \right) \right) du \right| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \left(\frac{1}{16a^2} \cos tu \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times (u^2(2a+1)^2 - (16a^2t^2 + 8a^2 + 4a)) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + tu \cdot \sin tu \left(\frac{1}{2a} + 1 \right) \right) \right| du \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \left(\left| \frac{1}{16a^2} \right| |\cos tu| \cdot (|u^2(2a+1)| + \right.$$

$$\left. + |-(16a^2t^2 + 8a^2 + 4a)| \right) +$$

$$+ |tu| \cdot |\sin tu| \left| \frac{1}{2a} + 1 \right| \right) du \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \left(\frac{1}{16a^2} \cdot (u^2(2a+1)^2 + \right.$$

$$+ (16a^2t^2 + 8a^2 + 4a)) + t|u| \left(\frac{1}{2a} + 1 \right) \right) du =$$

$$= \frac{(2a+1)^2}{16a^2} \cdot \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot u^2 du +$$

$$+ (16a^2t^2 + 8a^2 + 4a) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}} du +$$

$$+ t \left(\frac{1}{2a} + 1 \right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot |u| du.$$

Тепер знайдемо значення наступних інтегралів:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}} du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sqrt{4a}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2} \cdot \frac{1}{4a}} du \sqrt{2\pi\sqrt{4a}} = 2\sqrt{2\pi a},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}} u^2 du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sqrt{4a}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2} \cdot \frac{1}{4a}} u^2 du \sqrt{2\pi\sqrt{4a}} = 4a\sqrt{2\pi\sqrt{4a}} =$$

$$= 8a\sqrt{2\pi a},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}} |u| du =$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2} \cdot \frac{1}{4a}} u du = 2 \int_{-\infty}^{\infty} d \left(e^{-\frac{u^2}{8a}} \right) \cdot 4a = 8a.$$

Замінюємо ці значення на початкову нерівність

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{-\infty}^{\infty} Z_1(t, u) du \right| \leq \\
 & \leq \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \left(\frac{(2a+1)^2}{16a^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot u^2 du + \right. \\
 & \quad + \frac{(16a^2 t^2 + 8a^2 + 4a)}{16a^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}} du + \\
 & \quad \left. + t \left(\frac{1}{2a} + 1 \right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}} |u| du \right) = \\
 & = \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \left(\frac{(2a+1)^2}{16a^2} \cdot 8a\sqrt{2\pi a} + \right. \\
 & \quad + \frac{(16a^2 t^2 + 8a^2 + 4a)}{16a^2} \times \\
 & \quad \times 2\sqrt{2\pi a} + t \left(\frac{1}{2a} + 1 \right) 8a \Big) = \\
 & = \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \left(\frac{\sqrt{2\pi a}}{2a} ((2a+1)^2 + \right. \\
 & \quad \left. + (4at^2 + 2a + 1)) + 4t(2a + 1) \right) = \\
 & = \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \left(\frac{\sqrt{2\pi a}}{2a} (2at^2 + 2a^2 + 3a + 1) + \right. \\
 & \quad \left. + 4t(2a + 1) \right),
 \end{aligned}$$

тоді

$$\begin{aligned}
 |a_{k1}(t)| & \leq \frac{K}{\sqrt{(k+1)(k+2)}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} Z_1(t, u) du \right| \leq \\
 & \leq \frac{K}{\sqrt{(k+1)(k+2)}} \cdot \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \times \\
 & \times \left(\frac{\sqrt{2\pi a}}{a} (2at^2 + 2a^2 + 3a + 1) + \right. \\
 & \quad \left. + 4t(2a + 1) \right).
 \end{aligned}$$

(11) Беремо квадратний корінь з обох сторін нерівності і отримуємо оцінку цієї леми. $\square$

І з того, що $t \in [0, T]$, маємо

$$\begin{aligned}
 & \sup_{t \in [0, T]} |a_{k1}(t)| \leq \\
 & \leq \frac{K}{\sqrt{(k+1)(k+2)}} \cdot \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \times \\
 & \times \left(\frac{\sqrt{2\pi a}}{a} (2aT^2 + 2a^2 + 3a + 1) + \right. \\
 & \quad \left. + 4T(2a + 1) \right).
 \end{aligned} \tag{12}$$

Аналогічно, до міркувань проведених вище, для функції

$$a_{k2}(t) \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \sin tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot g_k(u) du$$

отримаємо таку оцінку:

$$\begin{aligned}
 & \sup_{t \in [0, T]} |a_{k2}(t)| \leq \\
 & \leq \frac{K}{\sqrt{(k+1)(k+2)}} \cdot \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \times \\
 & \times \left(\frac{\sqrt{2\pi a}}{a} (2aT^2 + 2a^2 + 3a + 1) + 4T(2a + 1) \right).
 \end{aligned} \tag{13}$$

І нарешті, отримуємо оцінку для $\sup_{t \in [0, T]} E(X(t) - X_N(t))^2$:

$$\begin{aligned}
 & \sup_{t \in [0, T]} E(X(t) - X_N(t))^2 \leq \\
 & \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{K}{\sqrt{(k+1)(k+2)}} \right)^2 \times \\
 & \times 2 \left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \left(\frac{\sqrt{2\pi a}}{a} (2aT^2 + 2a^2 + 3a + 1) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + 4T(2a + 1) \right) \right)^2 = \\
 & = \frac{\sigma^2 K^2}{(\pi a)^{1/2} (N+2)} \left(\frac{2\sqrt{2\pi a}}{a} T^2 + \right. \\
 & \quad \left. + 4(2a + 1)T + \frac{\sqrt{2\pi a}}{a} (2a^2 + 3a + 1) \right)^2.
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\tag{15}$$

Теорема 2.1. Нехай $X(t) = \{X(t), t \in [0, T]\}$ Отже,

– гауссовий вимірний випадковий процес. Тоді

для $\varepsilon > C_p^{1/2}$, де $C = \int_0^T (E(X(t))^2)^{p/2} dt < \infty$,
має місце нерівність

$$P\left\{\|X(t)\|_p > \varepsilon\right\} \leq 2 \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2C^{2/p}}\right\}. \quad (16)$$

Доведення. Нерівність (16) випливає з наслідку 2.1 з роботи [6]. $\square$

Лема 2.2. Нехай $X(t) = \{X(t), t \in [0, T]\}$ – вимірний гауссовий процес зі стійкою кореляційною функцією $\rho_2(h) = B^2 \exp\{-d|h|^2\}$, $d > 0$. Якщо $X_N(t)$ – модель цього процесу, тоді справедлива наступна оцінка

$$\int_0^T (E(X(t) - X_N(t))^2)^{p/2} dt \leq L_N^{p/2}, \quad (17)$$

де

$$\begin{aligned} L_N = & \frac{\sigma^2 K^2}{(\pi a)^{1/2}(N+2)} \left(\frac{8\pi T^{\frac{2(2p+1)}{p}}}{a(2p+1)^{2/p}} + \right. \\ & + \frac{16\sqrt{2\pi a}(2a+1)}{a} \cdot \frac{T^{\frac{3p+2}{p}}}{\left(\frac{3p}{2}+1\right)^{2/p}} + \\ & + \left(16(2a+1)^2 + \frac{8\pi}{a}(2a^2+3a+1) \right) \times \\ & \times \frac{T^{\frac{2(p+1)}{p}}}{(p+1)^{2/p}} + 8(2a+1) \frac{\sqrt{2\pi a}}{a} \times \\ & \times (2a^2+3a+1) \frac{T^{\frac{p+2}{p}}}{\left(\frac{p}{2}+1\right)^{2/p}} + \\ & \left. + \frac{2\pi}{a}(2a^2+3a+1)^2 T^{2/p} \right). \quad (18) \end{aligned}$$

Доведення. Застосовуючи оцінки (9) та (14) з леми 2.1, отримаємо

$$E(X(t) - X_N(t))^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} (a_{k1}^2(t) + a_{k2}^2(t)),$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=N+1}^{\infty} (a_{k1}^2(t) + a_{k2}^2(t)) & \leq \\ & \leq \frac{\sigma^2 K^2}{(\pi a)^{1/2}(N+2)} \left(\frac{2\sqrt{2\pi a}}{a} t^2 + \right. \\ & \left. + 4(2a+1)t + \frac{\sqrt{2\pi a}}{a}(2a^2+3a+1) \right)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^T (E(X(t) - X_N(t))^2)^{p/2} dt \right)^{2/p} \leq \\ & \leq \frac{\sigma^2 K^2}{(\pi a)^{1/2}(N+2)} \left(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 \right) = \\ & = \frac{\sigma^2 K^2}{(\pi a)^{1/2}(N+2)} \left(\frac{8\pi T^{\frac{2(2p+1)}{p}}}{a(2p+1)^{2/p}} + \right. \\ & + \frac{16\sqrt{2\pi a}(2a+1)}{a} \times \\ & \times \frac{T^{\frac{3p+2}{p}}}{\left(\frac{3p}{2}+1\right)^{2/p}} + \left(16(2a+1)^2 + \right. \\ & + \frac{8\pi}{a}(2a^2+3a+1) \left. \right) \cdot \frac{T^{\frac{2(p+1)}{p}}}{(p+1)^{2/p}} + \\ & + 8(2a+1) \frac{\sqrt{2\pi a}}{a} \cdot T^{\frac{p+2}{p}} (2a^2+3a+1) + \\ & \left. + \frac{2\pi}{a}(2a^2+3a+1)^2 T^{2/p} \right). \end{aligned}$$

де

$$I_1 = \left(\int_0^T \left(\frac{8\pi}{a} t^4 \right)^{p/2} dt \right)^{2/p},$$

$$I_2 = \left(\int_0^T \left(\frac{16\sqrt{2\pi a}(2a+1)}{a} t^3 \right)^{p/2} dt \right)^{2/p},$$

$$I_3 = \left(\int_0^T \left((16(2a+1)^2 + \frac{8\pi}{a}(2a^2+3a+1)) t^2 \right)^{p/2} dt \right)^{2/p},$$

$$I_4 = \left(\int_0^T \left(8(2a+1) \frac{\sqrt{2\pi a}}{a} (2a^2+3a+1) t \right)^{p/2} dt \right)^{2/p},$$

$$I_5 = \left(\int_0^T \left(\frac{2\pi}{a} (2a^2+3a+1)^2 \right)^{p/2} dt \right)^{2/p}.$$

$\square$

Теорема 2.2. Нехай $X(t) = \{X_N(t), t \in [0, T]\}$ – вимірний гауссовий процес зі стійкою кореляційною функцією $\rho_2(h) = B^2 \exp\{-d|h|^2\}$, $d > 0$. Модель $X_N(t)$ наближає процес $X(t)$ у просторі $L_p([0, T])$ з точністю β і надійністю $1 - \alpha$, $0 < \alpha < 1$, якщо $N > 0$ таке, що

$$L_N \leq \frac{\beta^2}{p} \quad (19)$$

та

$$L_N \leq \frac{\beta^2}{\left(2(\ln 2)\right)}, \quad (20)$$

де L_N визначається формулою (18).

Доведення. З нерівності (16) і леми 2.2, якщо $\varepsilon > L_N^{1/p} p^{1/2}$ отримаємо

$$P\left\{|X(t) - X_N(t)|_p > \varepsilon\right\} \leq 2 \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2L_N}\right\}. \quad (21)$$

Якщо в (21) замість ε покласти β , тоді умови теореми виконуються, якщо

$$\beta \geq L_N^{p/2} p^{1/2},$$

Список використаних джерел

1. Kozachenko Yu.V. On expansion of random process in series / Yu.V. Kozachenko, I.V. Rozora, Ye. V. Turchyn. // Random Operators and Stochastic Equations. — 2007. — v. 15(1). — P. 15–35.
2. Козаченко Ю.В. Квазібанахові простори випадкових величин / Ю.В. Козаченко, Ю.Ю. Млавець, О.М. Моклячук — Ужгород: Карпати, 2015. — 212 с.
3. Uhlenbeck G.E. On the theory of Brownian motion / G.E. Uhlenbeck, L.S. Ornstein. // Phys. Rev. — 1930. — v. 36 P. 832–841.
4. Kampe de Fariet J. Fonctions de la Physique Mathematique / Kampe de Fariet J. — Paris: Paris Editions du CNRS, 1957. — 99 p.
5. Erdelyi A. Higher Transcendental Functions / A. Erdelyi. — New-York: McGraw-Hill, 1953. Vol. II — 414 p.
6. Kamenschikova O. On an expansion of random processes in the space $L_p(T)$ / O. Kamenschikova, Y. Kozachenko. // Theory Probab. And Math. Statist. — 2009. — v.79. — P. 83–88.

$$2 \exp\left\{-\frac{\beta^2}{2L_N}\right\} \leq \alpha,$$

тобто, якщо виконуються умови (19) і (20), тоді має місце теорема. $\square$

3 Висновки

У даній роботі побудовано моделі, які наближають гауссовий процес зі стійкою кореляційною функцією $\rho_2(h) = B^2 \exp\{-d|h|^2\}$, $d > 0$ із заданою надійністю $1 - \alpha$, $0 < \alpha < 1$ та точністю $\beta > 0$ в просторі $L_p([0, T])$, $p \geq 1$.

Автор висловлює глибоку подяку своєму керівнику і наставнику Юрію Васильовичу Козаченку. З пам'яттю у серці...

References

1. KOZACHENKO, YU.V., ROZORA, I.V., TURCHYN, YE. V. (2007) On expansion of random process in series. *Random Operators and Stochastic Equations*. v. 15(1). P. 15–35.
2. KOZACHENKO, YU.V., MLAVETS, YU. YU., MOKLIACHUK, O.M. (2015) *Kvazibanakhovi prostory vypadkovykh velychyn*. Uzhhorod: Karpaty.
3. UHLENBECK, G.E., ORNSTEIN, L.S. (1930) On the theory of Brownian motion *Phys. Rev.* v. 36 P. 832–841.
4. KAMPE DE FERIET J. (1957) *Fonctions de la Physique Mathematique*. Paris: Paris Editions du CNRS.
5. ERDELYI, A. (1953) *Higher Transcendental Functions*. New-York: McGraw-Hill. Vol. II.
6. KAMENSCHIKOVA, O., KOZACHENKO, Y. (2009) On an expansion of random processes in the space $L_p(T)$. *Theory Probab. And Math. Statist.* v.79. P. 83–88.

Надійшла до редколегії 01.11.2020