УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/3.6>

О.К.Закусило,¹ д.ф.-м.н., проф.
І. К. Мацак², д.ф.-м.н., с.н.с.

Гранична теорема для часу першого перетину рівня регенеруючим процесом

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова, 2/6,
e-mail: zakusylo@univ.net.ua

² Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова, 2/6,
e-mail: i.m.k@ukr.net

O. K. Zakusylo¹, Full Professor, Dr.Hab.
I. K. Matsak², Dr.Hab.

Limits theorem of first passages times to regenerative processes

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, 2/6, Glushkova str.,
e-mail: zakusylo@univ.net.ua

²Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, 2/6, Glushkova str.,
e-mail: i.m.k@ukr.net

Присв'ячується пам'яті Ю.В.Козаченка, нашого вчителя і друга.

Анотація.

Установлюється загальна гранична теорема для часу першого перетину рівня регенеруючим процесом. Доведення ґрунтується на одній важливій лемі для деяких випадкових сум. Наводяться приклади застосувань до задач теорії масового обслуговування та теорії надійності.

Ключові слова: Регенеруючі процеси, випадкові суми, системи масового обслуговування.

Abstract.

The current work continues the author's investigation in the field of extreme values analysis. The investigation is concerned with the first passage time of a level u for a wide class of regenerative random processes. The common statement of the problem in most of works in the field under consideration dealt with cases when time of observation, t , and u tend to infinity. Alternatively, we investigate the case when t tends to infinity, whereas u is a fixed number. We establish a general limit theorem for the first passage time of a level u by a regenerative process. This topic is closely associated with the asymptotic behavior of extreme values of regenerative processes. In proving the main result, we establish an important lemma concerning the asymptotic behavior of probabilities for a class of random sums, which may be of independent interest. Necessity of the study of such sums occurs in many areas: mathematical reliability theory, queuing theory, some statistical physics problems. In addition, the work provides examples of applications of the obtained general results to some problems, which arise in applied areas: model of counters of type Geiger-Muller, estimation of the reliability of a redundant system with recovery, the problem of the first passage time of a level u by queue length in the queueing system $M/M/1$.

Key Words: regenerative processes, random sums, queuing systems.

Статтю представив д.ф.-м.н. Моклячук М.П.

1 Вступ. Основна теорема

Розглянемо регенеруючий випадковий процес (в.п.) $X(t), t \geq 0$,

$$X(t) = \xi_k(t - S_{k-1}), \quad \text{при } t \in [S_{k-1}, S_k),$$

де $S_k = T_1 + \dots + T_k, k \geq 1, S_0 = 0, \mathcal{L}_k = (T_k, \xi_k(t)), k \geq 1$, нескінченна послідовність незалежних циклів, однаково розподілених з циклом $\mathcal{L} = (T, \xi(t))$ [1]. Точки S_k називають моментами регенерації, а проміжок

$[S_{k-1}, S_k)$ – k -м періодом регенерації. Регенеруючий в.п. досить популярний і важливий об'єкт теорії ймовірностей (див., наприклад, [1], [2], гл.11, §8,).

На в.п. $\xi_i(t)$ будемо накладати умову сепарабельності. Тоді можна розглянути наступні величини:

$$\bar{X}(t) = \sup_{0 \leq s < t} X(s), \quad t \geq 0,$$

$$Z_k = \sup_{S_{k-1} \leq s < S_k} X(s), \quad k = 1, 2, \dots$$

Із означення зрозуміло, що (Z_k) - це послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин (н.о.р.в.в.). Будемо вважати, що Z_k майже напевне (м.н.) скінчена в.в., для якої

$$0 < q(u) = q_X(u) = \mathbf{P}(Z_1 \geq u) < 1. \quad (1)$$

Позначимо через $\mathfrak{T}(u)$ момент першого перетину процесом $X(t)$ рівня u , тобто

$$\mathfrak{T}(u) = \mathfrak{T}_X(u) = \inf(t \geq 0 : X(t) \geq u).$$

І нехай $P_{\mathfrak{T}(u)}(t) = \mathbf{P}(\mathfrak{T}(u) \geq t)$. Нас буде цікавити асимптотична поведінка ймовірності $P_{\mathfrak{T}(u)}(t)$ при великих t . В силу імплікації

$$\forall t > 0 \quad \{\bar{X}(t) \leq u\} \Leftrightarrow \{\mathfrak{T}(u) \geq t\}, \quad (2)$$

наша задача близька до задачі про асимптотику ймовірності $\mathbf{P}(\bar{X}(t) \leq u)$.

Таким чином ясно, що ця тематика тісно пов'язана з асимптотикою екстремальних значень відповідних процесів (див. [3], [4], [5], [6] та літературу там). При цьому звичайно припускається, що змінні t та u відповідним чином необмежено зростають. Відмінність даної роботи полягає в тому, що ми досліджуємо випадок коли $t \rightarrow \infty$, а u - фіксоване число.

Щоб сформулювати теорему, введемо деякі необхідні позначення та умови. Нехай $\hat{T}$ - це або час досягнення рівня u на одному циклі регенерації, або тривалість циклу, якщо на ньому рівень u не досягається. Покладемо

$$F_T(t) = \mathbf{P}(T < t), \quad F_{\hat{T}}(t) = \mathbf{P}(\hat{T} < t),$$

$$F_{T,u}(t) = \mathbf{P}(T_1 < t, Z_1 < u),$$

$\kappa > 0$ - корінь рівняння

$$\int_0^\infty \exp(\kappa t) dF_{T,u}(t) = 1, \quad (3)$$

2 Одна лема для випадкових сум

Нехай ζ та ϵ випадкові величини такі, що

$$\mathbf{P}(\epsilon = 1) = q, \quad \mathbf{P}(\epsilon = 0) = 1 - q, \quad 0 < q < 1,$$

$$\mathbf{P}(\zeta \geq 0) = 1, \quad \mathbf{P}(\zeta = 0) < 1.$$

В загальному випадку в.в. ζ та ϵ залежні між собою.

Розглянемо послідовність (ζ_n, ϵ_n) незалежних копій пари (ζ, ϵ) . Далі визначимо випад-

$$\alpha = \int_0^\infty t \exp(\kappa t) dF_{T,u}(t) < \infty, \quad (4)$$

$$\beta = \int_0^\infty (1 - F_{\hat{T}}(t)) \exp(\kappa t) dt < \infty. \quad (5)$$

Теорема 1. Нехай $X(t), t \geq 0$, регенеруючий випадковий процес, розподіл $F_{T,u}(t)$ не є арифметичним, u - фіксоване число, для якого виконується умова (1). Припустимо, що існує $\kappa > 0$ - корінь рівняння (3) і виконуються умови (4), (5).

Тоді

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{\mathfrak{T}(u)}(t) \exp(\kappa t) = \frac{\beta}{\alpha}, \quad (6)$$

причому $\beta_* \leq \beta \leq \beta^*$, де

$$\beta_* = \frac{q(u)}{\kappa}, \quad \beta^* = \int_0^\infty (1 - F_T(t)) \exp(\kappa t) dt < \infty.$$

Зауваження 1. Припустимо, що випадковий процес $X(t), t \geq 0$, задовольняє умови теореми 1. Тоді наслідком імплікації (2) та (6) буде така асимптотична рівність:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\bar{X}(t) \leq u) \exp(\kappa t) = \frac{\beta}{\alpha}. \quad (7)$$

Доведення теореми 1 буде ґрунтуватися на твердженні про асимптотику ймовірностей для одного класу випадкових сум, яке можливо має і самостійний інтерес. Необхідність дослідження подібних сум виникає у багатьох областях (математична теорія надійності, теорія масового обслуговування, деякі статистичні задачі фізики) (див. [7], [8], [9], [10], [11], [12]).

Окрім того, у роботі наводиться ряд прикладів застосувань отриманих загальних результатів про час першого перетину рівня до деяких випадкових процесів, які виникають в прикладних задачах.

кову суму S_ν :

$$S_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} \zeta_i, \quad (8)$$

де

$$\nu = \min(n \geq 1 : \epsilon_n = 1).$$

Добре відомо, що ν має геометричний розподіл

$$\mathbf{P}(\nu = n) = q(1 - q)^{n-1}, \quad n \geq 1,$$

Якщо в.в. ζ та ϵ незалежні, то S_ν називають геометричною сумою. Основні результати для геометричних сум та відповідну бібліографію можна знайти в книжці [9]. Найбільш відомий результат тут - це теорема Реньї:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \mathbf{P}(qS_\nu < t) = 1 - \exp(-\frac{t}{a}). \quad (9)$$

де $a = \mathbf{E}\zeta$.

Відомо [12], що при широких умовах рівність (9) залишиться вірною і для загальних сум виду (8) (достатньо, щоб в.в. ζ була рівномірно інтегрованою по q).

Далі будемо вважати, що в.в. S_ν задається рівністю (8) і покладемо

$$\begin{aligned} F_\zeta(t) &= \mathbf{P}(\zeta < t), & F_{\zeta,0}(t) &= \mathbf{P}(\zeta < t, \epsilon = 0), \\ F_S(t) &= \mathbf{P}(S_\nu < t), & P_S(t) &= 1 - F_S(t). \end{aligned}$$

У наступній лемі встановлюється асимптотика ймовірності $P_S(t)$, коли величина q фіксована, а $t \rightarrow \infty$.

Лема 1. Нехай розподіл $F_{\zeta,0}(t)$ не є арифметичним, q фіксоване число, $0 < q < 1$. Якщо існує $\kappa > 0$ таке, що

$$\int_0^\infty \exp(\kappa t) dF_{\zeta,0}(t) = 1, \quad (10)$$

і

$$\alpha = \int_0^\infty t \exp(\kappa t) dF_{\zeta,0}(t) < \infty, \quad (11)$$

$$\beta = \int_0^\infty (1 - F_\zeta(t)) \exp(\kappa t) dt < \infty, \quad (12)$$

то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_S(t) \exp(\kappa t) = \frac{\beta}{\alpha}. \quad (13)$$

Доведення лема 1. У роботі [12] встановлено, що функція $P_S(t)$ задовольняє таке інтегральне рівняння

$$P_S(t) = 1 - F_\zeta(t) + \int_0^t P_S(t - y) dF_{\zeta,0}(y). \quad (14)$$

Подальше доведення, окрім рівності (14), буде спиратися на відомі міркування (див. [2], гл.11, §6), які використовувались при дослідженні асимптотики процесів відновлення з обривами.

Домножимо праву і ліву частини рівності (14) на $\exp(\kappa t)$. Тоді отримаємо наступне рівняння відновлення

$$Z(t) = z(t) + \int_0^t Z(t - y) d\tilde{F}(y), \quad (15)$$

де

$$Z(t) = P_S(t) \exp(\kappa t), \quad z(t) = (1 - F_\zeta(t)) \exp(\kappa t),$$

$$\tilde{F}(t) = \int_0^t \exp(\kappa y) dF_{\zeta,0}(y).$$

За умовою (12) функція $z(t)$ інтегровна на $(0, \infty)$, а функція $z(t) \exp(-\kappa t)$ очевидно не зростаюча. Тому $z(t)$ безпосередньо інтегровна за Ріманом ([13], гл.6, §4, твердження 6.4.1). Звідси та рівності (15) за теоремою відновлення (альтернативна форма, див.[2], гл.11, §1) маємо: при $t \rightarrow \infty$

$$P_S(t) \exp(\kappa t) = Z(t) \rightarrow \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty z(t) dt = \frac{\beta}{\alpha},$$

що еквівалентно (13). □

Припустимо, що в.в. ζ та ϵ незалежні, тобто S_ν - геометрична сума. Тоді

$F_{\zeta,0}(t) = (1 - q)F_\zeta(t)$, $\kappa > 0$, визначається із рівності

$$\int_0^\infty \exp(\kappa t) dF_\zeta(t) = \frac{1}{1 - q}, \quad (16)$$

$$\beta = \int_0^\infty (1 - F_\zeta(t)) \exp(\kappa t) dt = \frac{1}{\kappa} (-1 + \frac{1}{1 - q}) = \frac{q}{\kappa(1 - q)}.$$

Таким чином із лема 1 маємо наступний

Наслідок 1. Нехай у випадку геометричних сум S_ν розподіл $F_\zeta(t)$ не є арифметичним, q фіксоване число, $0 < q < 1$. Якщо існує $\kappa > 0$ корінь рівняння (16) і

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t \exp(\kappa t) dF_\zeta(t) < \infty, \\ \text{то} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} P_S(t) \exp(\kappa t) = \\ = \frac{q}{\kappa(1-q)^2 \int_0^\infty t \exp(\kappa t) dF_\zeta(t)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Наслідок 1 - це відомий результат *H.Cramér* (див. [9], гл.4).

Зауваження 2. Припустимо, що в.в. ζ із наслідку 1 задовольняє такі умови:

$$\exists s_0, 0 < s_0 \leq \infty, \quad \text{таке, що}$$

$$\forall s \in (0, s_0) \quad \mathbf{E} \exp(s\zeta) < \infty, \quad (18)$$

$$\text{при } s \uparrow s_0 \quad \mathbf{E} \exp(s\zeta) \uparrow \infty. \quad (19)$$

Тоді існує $\kappa > 0$ корінь рівняння (16) [3].

Відзначимо тут також наступну просту лему для геометричних сум, яка буде нам потрібна при доведенні теореми 1.

Лема 2. Нехай в.в. ζ та ϵ незалежні, S_ν - геометрична сума, визначена рівністю (8). Тоді

$$\mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{\nu-1} \zeta_k \geq t\right) = (1-q)\mathbf{P}(S_\nu \geq t). \quad (20)$$

(доведення леми 3 наводиться в [14]).

3 Доведення теореми 1

Покладемо

$$\epsilon_k(u) = I(Z_k \geq u),$$

$$\nu(u) = \min(k \geq 1 : \epsilon_k(u) = 1),$$

де через $I(A)$ позначаємо індикатор події A .

І нехай

$$\hat{T}_k = \left\{ \begin{array}{ll} \eta_k, & \text{при } \epsilon_k(u) = 1, \\ T_k, & \text{у протилежному випадку,} \end{array} \right\}$$

тут η_k - це час до перетину рівня u на k -му циклі при умові, що такий перетин відбудеться, тобто

$$\eta_k = \inf(t \geq 0 : \xi_k(t) \geq u / \epsilon_k(u) = 1).$$

Фактично, $(\hat{T}_k)$ - це послідовність незалежних копій в.в. $\hat{T}$, яка була введена вище.

Тоді маємо наступне зображення

$$\mathfrak{T}(u) = \sum_{k=1}^{\nu(u)} \hat{T}_k. \quad (21)$$

Причому за побудовою в.в. $\hat{T}_k$

$$\mathbf{P}(\hat{T}_k < t, \epsilon_k(u) = 0) =$$

$$\mathbf{P}(T_k < t, \epsilon_k(u) = 0) = F_{T,u}(t).$$

Таким чином у відповідності з лемою 1 із рівності (21) одержуємо:
при $t \rightarrow \infty$

$$P_{\mathfrak{T}(u)}(t) \exp(\kappa t) \rightarrow \frac{\beta}{\alpha},$$

де κ, β та α визначені в теоремі 1.

Окрім того очевидно, що $\hat{T}_k \leq T_k$ майже напевно (м.н.). А отже $\beta \leq \beta^*$.

Залишається установити оцінку знизу

$$\frac{q}{\kappa} = \beta_* \leq \beta. \quad (22)$$

Почнемо із очевидної нерівності

$$\sum_{k=1}^{\nu(u)-1} \hat{T}_k \leq \mathfrak{T}(u) \quad \text{м.н.} \quad (23)$$

Далі введемо н.о.р.в.в. (T_k^*) , які не залежать від $\nu(u)$ і задовольняють рівності

$$\mathbf{P}(T_k^* < t) = \mathbf{P}(T_k < t / \epsilon_k = 0) = \frac{1}{1-q} F_{T,u}(t).$$

Щоб оцінити випадкову суму зліва в (23), представимо її геометричною сумою (правда без одного доданка)

$$\sum_{k=1}^{\nu(u)-1} \hat{T}_k = \sum_{k=1}^{\nu(u)-1} T_k \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{\nu(u)-1} T_k^*, \quad (24)$$

позначення $\xi_1 \stackrel{d}{=} \xi_2$ означає, що в.в. ξ_1, ξ_2 мають однаковий розподіл.

Збираючи разом рівність (24), наслідок 1 та лему 2, одержимо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\sum_{k=1}^{\nu(u)-1} \hat{T}_k \geq t \right) \exp(\kappa t) =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - q) \mathbf{P} \left(\sum_{k=1}^{\nu(u)} T_k^* \geq t \right) \exp(\kappa t) = \frac{q}{\kappa \alpha}.$$

Остання рівність та нерівність (23) і дають оцінку (22). $\square$

4 Приклади

Приклад 1. (Лічильник Гейгера-Мюллера). Такий лічильник використовується для підрахунку космічних частинок, які надійшли в деяку область простору. Він діє наступним чином ([1], [2], гл.11, §5): після надходження частинки в лічильник відбувається розряд на протязі випадкового часу η . Під час розряду лічильник не реєструє нові частинки, які надходять.

Позначимо через $\mathfrak{T}$ час, на протязі якого лічильник не втратить жодної частинки, $P_{\mathfrak{T}}(t) = \mathbf{P}(\mathfrak{T} \geq t)$. Вважаємо, що в момент $t_0 = 0$ лічильник порожній, а $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ моменти надходження частинок, $\tau_k = t_{k+1} - t_k, k \geq 0$.

Звичайно припускається, що частинки утворюють пуассонівський потік з деяким параметром λ , тобто $\mathbf{P}(\tau_k < t) = 1 - \exp(-\lambda t), t \geq 0$.

Нехай η_k – це тривалість розряду частинки, яка надійшла в лічильник в момент t_k , (τ_k) та (η_k) незалежні випадкові послідовності,

$$\mathbf{P}(\eta_k \leq t) = G(t), \quad k \geq 1, \quad G(+0) = 0,$$

і

$$\epsilon_k = I(\tau_k < \eta_k), k \geq 1, \quad \nu = \min(k \geq 1 : \epsilon_k = 1). \quad (25)$$

Тоді має місце таке зображення

$$\mathfrak{T} = \tau_0 + S_\nu, \quad S_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} \tau_i. \quad (26)$$

Спочатку, спираючись на рівності (26) та лему 1, знайдемо асимптотику ймовірності $P_S(t)$. Покладемо

$$\begin{aligned} \zeta_i &= \tau_i, i \geq 1, \quad F_\zeta(t) = 1 - \exp(-\lambda t), \\ q &= \mathbf{P}(\tau_1 < \eta_1) = \int_0^\infty (1 - \exp(-\lambda t)) dG(t), \\ F_{\zeta,0}(t) &= \mathbf{P}(\tau_1 < t, \tau_1 \geq \eta_1) = \\ &= \lambda \int_0^t G(x) \exp(-\lambda x) dx. \end{aligned}$$

Таким чином рівняння (14) для даного прикладу матиме вигляд

$$P_S(t) = \exp(-\lambda t) + \lambda \int_0^t P_S(t-x) G(x) \exp(-\lambda x) dx. \quad (27)$$

Важливий параметр κ знаходимо із рівності

$$\lambda \int_0^\infty G(t) \exp(-(\lambda - \kappa)t) dt = 1. \quad (28)$$

Відзначимо, що інтеграл зліва в (28) при $\kappa = 0$ менший за 1, а при $\kappa \uparrow \lambda$ неперервно зростає до ∞ . Тому корінь κ рівняння (28) існує і $0 < \kappa < \lambda$.

Далі за формулами (11) та (12) знаходимо параметри α та β :

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_0^\infty t \exp(\kappa t) dF_{\zeta,0}(t) = \\ &= \lambda \int_0^\infty t \exp(-(\lambda - \kappa)t) G(t) dt < \infty \end{aligned} \quad (29)$$

$$\beta = \int_0^\infty \exp(-\lambda t) \exp(\kappa t) dt = \frac{1}{\lambda - \kappa}. \quad (30)$$

Щоб отримати асимптотику $P_S(t)$ застосуємо лему 1

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_S(t) \exp(\kappa t) = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{\alpha(\lambda - \kappa)}, \quad (31)$$

де α визначено формулою (29).

На наступному кроці ґрунтуючись на співвідношенні (31), виведемо асимптотику ймовірності $P_{\mathfrak{T}}(t)$.

Із рівностей (26) зрозуміло, що подія $\{\mathfrak{T} \geq t\}$ відбувається, коли

$$\{\tau_0 \geq t\} \quad \text{або} \quad \{\tau_0 = x \leq t\} \cap \{S_\nu \geq t - x\}.$$

Підсумовуючи за всіма можливими x , одержимо

$$P_{\mathfrak{T}}(t) = \exp(-\lambda t) + \lambda \int_0^t P_S(t-x) \exp(-\lambda x) I(x \leq t) dx.$$

Так само, як і вище у лемі 1, домножимо останню рівність на $\exp(\kappa t)$

$$P_{\mathfrak{T}}(t) \exp(\kappa t) = \exp(-(\lambda - \kappa)t) + \lambda \int_0^t P_S(t-x) \exp(\kappa(t-x)) \exp(-(\lambda - \kappa)x) I(x \leq t) dx. \quad (32)$$

Очевидно, що $\exp(-(\lambda - \kappa)t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. А отже залишається знайти асимптотику інтегралу в (32).

Згідно рівності (31)

$$\sup_{t>0} P_S(t) \exp(\kappa t) = C < \infty.$$

Тому і весь підінтегральний вираз в (32) обмежений інтегрованою функцією $C \lambda \exp(-(\lambda - \kappa)x)$, тобто можна застосувати теорему Лебега про перехід до границі під інтегралом.

Ще раз скориставшись рівністю (31), одержимо: $\forall x > 0$, при $t \rightarrow \infty$

$$P_S(t-x) \exp(\kappa(t-x)) I(x \leq t) \rightarrow \frac{1}{\alpha(\lambda - \kappa)}.$$

Тому за теоремою Лебега

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} P_{\mathfrak{T}}(t) \exp(\kappa t) &= \\ &= \frac{\lambda}{\alpha(\lambda - \kappa)} \int_0^{\infty} \exp(-(\lambda - \kappa)x) dx = \frac{\lambda}{\alpha(\lambda - \kappa)^2}. \end{aligned} \quad (33)$$

Приклад 2. (Дубльована система). Оцінка надійності резервованої системи з відновленням - це одна з найбільш важливих задач математичної теорії надійності (див., наприклад, [8], [15]).

Розглянемо простий випадок резервування - дублювання, коли до робочого (основного) елемента приєднують один резервний, який у випадку відмови робочого елемента замінює його. Елемент, який відмовив відновлюється, причому після ремонту його характеристики еквівалентні початковим.

Припустимо, що в системі є одна ремонтна одиниця. Окрім того вважаємо, що резервний елемент під час перебування в резерві не може відмовити ("холодний" резерв). Дубльована система перебуває в робочому стані, коли працює хоча б один елемент, а її відмова настає, коли обидва елементи не справні.

Будемо припускати, що час безвідмовної роботи основного елемента τ має експоненціальний розподіл:

$$\mathbf{P}(\tau < t) = F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad (34)$$

а η - час відновлення (ремонт) має довільний розподіл, $G(t) = \mathbf{P}(\eta < t)$, $G(0+) = 0$. Звичайно вважається, що τ та η н.в.в.

Нехай (τ_k) та (η_k) послідовності незалежних копій в.в. τ та η відповідно.

В.в. (ϵ_k) та ν вводяться так само, як і у попередньому прикладі, за формулами (25). Тоді

$$q = \mathbf{P}(\epsilon_k = 1) = \mathbf{P}(\tau_k < \eta_k) = 1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dG(x).$$

Далі через $\xi(t)$ позначаємо число несправних елементів системи в момент часу t , $\xi(0) = 0$ майже напевне (м.н.),

$$P_{\mathfrak{T}}(t) = \mathbf{P}(\mathfrak{T} \geq t), \quad \mathfrak{T} = \inf(t > 0 : \xi(t) = 2),$$

тобто тут $\mathfrak{T}$ - це час до першої відмови дубльованої системи.

Б.В.Гнеденко ([7], [8]) знайшов інтегральне рівняння, якому задовольняє функція $P_{\mathfrak{T}}(t)$ і вивів формулу для перетворення Лапласа цієї функції. На жаль при загальних припущеннях відносно розподілу $G(t)$ явний вигляд функції $P_{\mathfrak{T}}(t)$ не знаходиться. Але ґрунтуючись на лемі 1 неважко знайти асимптотику функції $P_{\mathfrak{T}}(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Дійсно, для в.в. $\mathfrak{T}$ відоме таке зображення

$$\mathfrak{T} = \tau_0 + \tau_1 + \dots + \tau_\nu$$

(див. [8], гл.6, §2).

Фактично ми маємо зображення еквівалентне (26). А отже, так само як і у попередньому прикладі, функція $P_{\mathfrak{T}}(t)$ задовольняє асимптотичну рівність (33), в якій κ - це корінь рівняння (28), а параметр α знаходимо за формулою (29).

Зауваження 3. У випадку, коли $F(t)$ до-
вільна неперервна функція розподілу, міркува-
ння, наведені вище, дозволяють зробити висно-
вок:

$P_{\mathfrak{T}}(t)$ задовольняє асимптотичну рівність (13),
якщо

(i) існує $\kappa > 0$ корінь рівняння

$$\int_0^\infty \exp(\kappa t) G(t) dF(t) = 1, \quad (35)$$

(ii)

$$\alpha = \int_0^\infty t \exp(\kappa t) G(t) dF(t) < \infty, \quad (36)$$

причому параметри κ та α у формулі (13) за-
даються рівностями (35), (36), а

$$\beta = \frac{1}{\kappa} \left(\int_0^\infty \exp(\kappa t) dF(t) - 1 \right).$$

Приклад 3. (Система масового обслугову-
вання $M/M/1$).

Розглянемо одноканальну систему масово-
го обслуговування (СМО), на яку поступає пу-
ассонівський потік заявок з інтенсивністю λ , а
час обслуговування η має експоненційний роз-
поділ

$$G(x) = \mathbf{P}(\eta < x) = 1 - \exp(-\mu x), x \geq 0.$$

Тобто в загальноприйнятих позначеннях - це
СМО типу $M/M/1$ (див. [11], [16]).

Нехай $t_1, \dots, t_n, \dots$ - випадкові моменти
надходження заявок в СМО. Тоді
 $\tau_n = t_n - t_{n-1}$, $n \geq 1$, - н.о.р.в.в. з функцією
розподілу

$$F(x) = \mathbf{P}(\tau_n < x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0.$$

На параметри λ та μ накладемо умову

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1. \quad (37)$$

Під довжиною черги тут і далі будемо розумі-
ти загальне число заявок, які знаходяться на
обслуговуванні або чекають його. І позначаємо
через $Q(t)$ довжину черги в момент часу t .

Казатимемо, що в момент t СМО знаходи-
ться в стані k , якщо $Q(t) = k$.

Нехай в момент $S_0 = 0$ система порожня,
а S_1 - це момент звільнення системи після 1-го
періоду зайнятості. Відповідно S_k - це момент

звільнення системи після k -го періоду зайнятості.

За умови (37) $Q(t)$ регенеруючий процес з
моментами регенерації $S_0, S_1, \dots$ [3], [11].

Нехай

$$\mathfrak{T}(u) = \mathfrak{T}_Q(u) = \inf(t \geq 0 : Q(t) \geq u).$$

Щоб застосувати теорему 1 для знаходження
асмтотики $P_{\mathfrak{T}(u)}(t)$ необхідно обчислити пара-
метри κ, α, β , які задаються формулами (3)
- (5).

Зауваження 4. Наша задача тісно пов'я-
зана з класичною задачею про обмежене випад-
кове блукання з поглинаючими екранами $x = 0$
та $x = u$, та ймовірностями переходів вверх
 $p = \lambda/(\lambda + \mu)$ та вниз $1 - p = \mu/(\lambda + \mu)$ ([17],
гл.14). Так, наприклад, якщо вибрати початко-
вий стан $z = 1$, то ймовірність того, що вкладе-
ний ланцюг Маркова СМО на n - у кроці попаде
в точку $x = 0$ і при цьому не досягне рівня u ,
дорівнює ймовірності поглинання в точці $x = 0$
такого випадкового блукання, яке також стар-
тує із точки $z = 1$.

Тому спочатку нагадаємо деякі відомі ре-
зультати для такого випадкового блукання. По-
значимо через $p_{1,0}^{(n)}$ та $p_{1,u}^{(n)}$ ймовірності того,
що обмежене випадкове блукання, стартуючи з
точки $z = 1$, закінчиться на n - у кроці погли-
нанням у точці $x = 0$ та $x = u$ відповідно. І
нехай

$$P_{1,0}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{1,0}^{(n)} s^n, \quad P_{1,u}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{1,u}^{(n)} s^n -$$

твірні функції розподілів $(p_{1,0}^{(n)})$ та $(p_{1,u}^{(n)})$.

Відомо, що при умові $2\sqrt{p(1-p)}s \leq 1$

$$P_{1,0}(s) = \frac{1-p}{p} \frac{h_1^{u-1}(s) - h_2^{u-1}(s)}{h_1^u(s) - h_2^u(s)}, \quad (38)$$

$$P_{1,u}(s) = \frac{h_1(s) - h_2(s)}{h_1^u(s) - h_2^u(s)}, \quad (39)$$

де

$$h_1(s) = \frac{1 + (1 - 4p(1-p)s^2)^{1/2}}{2ps},$$

$$h_2(s) = \frac{1 - (1 - 4p(1-p)s^2)^{1/2}}{2ps}.$$

Насправді функції $P_{1,0}(s)$ та $P_{1,u}(s)$ зображу-
ються, як відношення деяких многочленів (ко-
рінь $(1 - 4p(1-p)s^2)^{1/2}$ скорочується). Причому

для $2\sqrt{p(1-p)}s > 1$ формули (38),(39) перепишуться у вигляді

$$P_{1,0}(s) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{1/2} \frac{\sin(u-1)\varphi}{\sin u\varphi}, \quad (40)$$

$$P_{1,u}(s) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^{1/2} \frac{\sin \varphi}{\sin u\varphi}, \quad (41)$$

де змінні φ та s пов'язані рівністю

$$\frac{1}{\cos \varphi} = 2\sqrt{p(1-p)}s.$$

(див. [17], гл.14, §4, 5).

Далі, повторюючи міркування із [17], отримаємо: при $u > 2$ найменший корінь знаменників в (40), (41), який не є корнем чисельників, задається рівністю

$$s^* = \frac{1}{2\sqrt{p(1-p)}\cos \frac{\pi}{u}}.$$

Звідси та рівностей (38) - (41) випливають співвідношення:

$$0 < s < s^* \Rightarrow P_{1,0}(s) < \infty, \quad P_{1,u}(s) < \infty,$$

$$s \uparrow s^* \Rightarrow P_{1,0}(s) \uparrow \infty, \quad P_{1,u}(s) \uparrow \infty. \quad (42)$$

Повернемося до задачі знаходження параметрів κ, α, β у випадку СМО $M/M/1$. Обчислимо значення інтегралу

$$J(\gamma) = \int_0^\infty \exp(\gamma t) dF_{T,u}(t), \quad \gamma > 0.$$

Нехай τ_1 - момент надходження першої заявки в СМО, T_1^b - це або час досягнення процесом $Q(t)$ точки $x = u$ на першому циклі регенерації при умові, що він стартує із точки $z = 1$ і $\epsilon_1 = 1$, або тривалість першого періоду зайнятості, якщо $\epsilon_1 = 0$. Ясно, що

$$\hat{T}_1 = \tau_1 + T_1^b, \quad I(\epsilon_1 = 0) = I\left(\sup_{0 \leq s < T_1} Q(s) < u\right).$$

Тоді, скориставшись незалежністю в.в. τ_1 від ϵ_1 та T_1^b , отримаємо

$$J(\gamma) = \mathbf{E} \exp(\gamma(\tau_1 + T_1^b)) I(\epsilon_1 = 0) = \mathbf{E} \exp(\gamma\tau_1) \mathbf{E} \exp(\gamma T_1^b) I(\epsilon_1 = 0) = J_1(\gamma) J_2(\gamma). \quad (43)$$

Перший співмножник в (43) рахується просто

$$J_1(\gamma) = \mathbf{E} \exp(\gamma\tau_1) = \frac{\lambda}{\lambda - \gamma}. \quad (44)$$

Щоб знайти $J_2(\gamma)$, позначимо через ν_1 мінімальний час переходу вкладеного ланцюга Маркова СМО із стану $x = 1$ в один із станів $x = 0$ чи $x = u$ і представимо в.в. T_1^b

де $\tilde{\tau}_k$ - це час сидіння процесу $Q(t)$ на k -у кроці в деякому стані i_k . Відзначимо, що в.в. $\tilde{\tau}_k$ не залежить від вкладеного ланцюга Маркова і має експоненційний розподіл з параметром $(\lambda + \mu)$.

Звідси, враховуючи зауваження 4, маємо

$$\begin{aligned} J_2(\gamma) &= \mathbf{E} \exp\left(\gamma \sum_{k=1}^{\nu_1} \tilde{\tau}_k\right) I(\epsilon_1 = 0) = \sum_{n \geq 1} p_{1,0}^{(n)} \mathbf{E} \exp\left(\gamma \sum_{k=1}^n \tilde{\tau}_k\right) \\ &= \sum_{n \geq 1} p_{1,0}^{(n)} (\mathbf{E} \exp(\gamma \tilde{\tau}_k))^n = \sum_{n \geq 1} p_{1,0}^{(n)} \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda + \mu - \gamma}\right)^n = P_{1,0}(s_\gamma), \end{aligned} \quad (45)$$

$$\text{де } s_\gamma = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + \mu - \gamma}.$$

Тобто, згідно (43)-(45)

$$J(\gamma) = \frac{\lambda}{\lambda - \gamma} P_{1,0}(s_\gamma). \quad (46)$$

Очевидно, що функція $J_1(\gamma)$ монотонно зростає і неперервна на інтервалі $[0, \lambda)$. Причому

$$J_1(\gamma) \uparrow \infty \quad \text{коли } \gamma \uparrow \lambda.$$

Подібне зауваження стосується і функції $J_2(\gamma)$. Дійсно, із (42), (45) випливає, що $J_2(\gamma) \uparrow \infty$ при $s_\gamma \uparrow s^*$ або, що еквівалентно, при $\gamma \uparrow \gamma^* = (\lambda + \mu)(1 - 2\sqrt{p(1-p)}) \cos \frac{\pi}{u}$.

Таким чином інтеграл $J(\gamma)$ на інтервалі $(0, \min(\lambda, \gamma^*))$ монотонно і неперервно зростає до

нескінченості. Причому (див. [3], [6])

$$J(0) = 1 - q(u) < 1, \quad q(u) = \left(\frac{1}{\rho} - 1\right) \frac{\rho^n}{1 - \rho^n}.$$

А отже, корінь κ рівняння

$$J(\kappa) = \frac{\lambda}{\lambda - \kappa} P_{1,0}(s_\kappa) = 1 \quad (47)$$

існує, $\kappa \in (0, \min(\lambda, \gamma^*))$, і його можна знайти, скориставшись формулами (38), (40) та, наприклад, простим методом ділення відрізка навпіл.

Перейдемо до обчислення параметра α .

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_0^\infty t \exp(\kappa t) dF_{T,u}(t) = \mathbf{E}(\tau_1 + T_1^b) \exp(\kappa(\tau_1 + T_1^b)) I(\epsilon_1 = 0) \\ &= \mathbf{E}\tau_1 \exp(\kappa\tau_1) \mathbf{E} \exp(\kappa T_1^b) I(\epsilon_1 = 0) + \mathbf{E}T_1^b \exp(\kappa T_1^b) I(\epsilon_1 = 0) \mathbf{E} \exp(\kappa\tau_1). \end{aligned} \quad (48)$$

Просто знаходиться

рівності (45))

$$\mathbf{E} \exp(\kappa\tau_1) = \frac{\lambda}{\lambda - \kappa}, \quad \mathbf{E}\tau_1 \exp(\kappa\tau_1) = \frac{\lambda}{(\lambda - \kappa)^2}.$$

$$\mathbf{E} \exp(\kappa T_1^b) I(\epsilon_1 = 0) = P_{1,0}(s_\kappa).$$

Наступна формула установлена вище (див.

Ще раз скористаємось зауваженням 4, отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbf{E}T_1^b \exp(\kappa T_1^b) I(\epsilon_1 = 0) &= \mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{\nu_1} \tilde{\tau}_k\right) \exp\left(\kappa \sum_{k=1}^{\nu_1} \tilde{\tau}_k\right) I(\epsilon_1 = 0) \\ &= \sum_{n \geq 1} p_{1,0}^{(n)} \mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^n \tilde{\tau}_k\right) \exp\left(\kappa \sum_{k=1}^n \tilde{\tau}_k\right) = \sum_{n \geq 1} p_{1,0}^{(n)} n \mathbf{E}(\tilde{\tau}_1) \exp(\kappa \tilde{\tau}_1) \mathbf{E} \exp\left(\kappa \sum_{k=2}^n \tilde{\tau}_k\right) \\ &= \sum_{n \geq 1} p_{1,0}^{(n)} n \frac{\lambda + \mu}{(\lambda + \mu - \kappa)^2} \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda + \mu - \kappa}\right)^{n-1} = \frac{\lambda + \mu}{(\lambda + \mu - \kappa)^2} P'_{1,0}(s_\kappa) \end{aligned}$$

(очевидно, що усі ряди в останніх рівностях збігаються).

Збираючи отримані формули разом із (48) будемо мати

$$\alpha = \frac{\lambda}{\lambda - \kappa} \left(\frac{1}{\lambda - \kappa} P_{1,0}(s_\kappa) + \frac{\lambda + \mu}{(\lambda + \mu - \kappa)^2} P'_{1,0}(s_\kappa) \right). \quad (49)$$

Залишається знайти параметр β . Маємо

$$\beta = \int_0^\infty (1 - F_{\hat{T}}(t)) \exp(\kappa t) dt = \frac{1}{\kappa} (1 - F_{\hat{T}}(t)) \exp(\kappa t) \Big|_0^\infty + \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty \exp(\kappa t) dF_{\hat{T}}(t). \quad (50)$$

Спочатку установимо, що при $t \rightarrow \infty$

Очевидно, що

$$(1 - F_{\hat{T}}(t)) \exp(\kappa t) \rightarrow 0. \quad (51) \quad 1 - F_{\hat{T}}(t) \leq \exp(-\gamma t) \mathbf{E} \exp(\gamma \hat{T}_1).$$

Виберемо γ так, щоб виконувались умови

А отже, щоб установити (51), досить перевірити обмеженість величини $\mathbf{E} \exp(\gamma \hat{T}_1)$.

$$\gamma = \kappa + \delta, \quad \delta > 0, \quad \gamma \in (0, \min(\lambda, \gamma^*)).$$

Міркування тут такі самі, як і у випадку рівності (45):

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \exp(\gamma t) dF_{\hat{T}}(t) &= \mathbf{E} \exp(\gamma \hat{T}_1) = \mathbf{E} \exp(\gamma \hat{T}_1) I(\epsilon_1 = 0) + \mathbf{E} \exp(\gamma \hat{T}_1) I(\epsilon_1 = 1) \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - \gamma} \left(\sum_{n \geq 1} p_{1,0}^{(n)} \mathbf{E} \exp(\gamma \sum_{k=1}^n \tilde{\tau}_k) + \sum_{n \geq 1} p_{1,u}^{(n)} \mathbf{E} \exp(\gamma \sum_{k=1}^n \tilde{\tau}_k) \right) \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - \gamma} (P_{1,0}(s_\gamma) + P_{1,u}(s_\gamma)) < \infty. \end{aligned} \quad (52)$$

Остання нерівність в (52) випливає із співвідношень (42) та умови $\gamma \in (0, \min(\lambda, \gamma^*))$. Аналогічно (52) оцінюємо другий доданок

Отже перший доданок в правій частині рівності (50) дорівнює $-1/\kappa$. в правій частині рівності (50).

$$\frac{1}{\kappa} \int_0^\infty \exp(\kappa t) dF_{\hat{T}}(t) = \frac{1}{\kappa} \mathbf{E} \exp(\kappa \hat{T}_1) = \frac{\lambda}{\kappa(\lambda - \kappa)} (P_{1,0}(s_\kappa) + P_{1,u}(s_\kappa)). \quad (53)$$

Із рівностей (47), (50), (53) знаходимо параметр β :

$$\beta = \frac{\lambda}{\kappa(\lambda - \kappa)} P_{1,u}(s_\kappa). \quad (54)$$

Таким чином для СМО $M/M/1$ за умови (37) функція $P_{\mathfrak{T}(u)}(t)$ задовольняє рівність (6), причому параметр κ , знаходиться із рівності (47), а параметри α та β задаються формулами (49), (54) відповідно.

Список використаних джерел

1. *Smith, W. L.* Renewal theory and its ramifications. /W. L. Smith // J. Royal Statist. Soc. — 1958.— **20**.—P. 243–302.
2. *Feller, W.* An introduction to probability theory and its applications, Vol.2./ W. Feller. — New York, London, Sydney, Toronto: John Wiley and Sons, 1968. — 752 p.
3. *Asmussen S.* Extreme values theory for queues via cycle maxima. / S. Asmussen // Extremes.—1998. — **1**. — P. 137–168.
4. *Glasserman, P.* Limits of first passages times to rare sets in regenerative processes./ P. Glasserman, S.G. Kou // Ann. Appl. Probab. — (1995). — **5**, P. 424–445.
5. *Iglehart D.L.* Extreme values in the GI/G/1 queue. / D.L. Iglehart // Ann. Math. Statist. — (1972). — **43**, P. 627–635.
6. *Закусило О.К.* Про екстремальні значення деяких регенеруючих процесів. /О.К.Закусило, І.К. Мацак// Теорія Ймовірн. Мат. Статист. — (2017). — **97**, С.58–71.
7. *Гнеденко Б.В.* О дублировании с восстановлением. / Б.В. Гнеденко // Изв. Акад. Наук СССР, Тех. Киберн. — (1964).— **5**, С. 111–118.
8. *Gnedenko B.V.* Mathematical methods of reliability theory / B.V. Gnedenko, Yu.K. Belyaev and A.D. Solov'yev. — New York, London: Academic Press, 1969. —524 p.
9. *Kalashnikov V.* Geometric sums : bounds for rare events wits applications / V. Kalashnikov. — Amsterdam: Springer-Science+Business Media. — 1997. — 268 p.
10. *Круглов В.М.* Предельные теоремы для случайных сумм /В.М.Круглов, В.Ю. Королев. — Москва: Издательство Московского Университета, 1990. — 232 с.
11. *Gnedenko B.V.* Introduction to Queueing Theory, 2nd ed. /B.V.Gnedenko, I.N. Kovalenko. — Boston: Mathematical Modeling, vol.5, Birkhäuser, 1989. — 432 p.
12. *Matsak I.K.* On Distributions of One Class of Random Sums and their Applications/I.K.Matsak, M.P.Moklyachuk// Statistics Opt. Inform. Comput. —(2020). — **8**, P. 153–164.

13. Іксанов О.М. Випадкові ряди спеціального вигляду, гіллясте випадкове блукання та саморозкладність / О.М. Іксанов. — Київ: КТИ-PRINT, 2007. — 192 с.
14. Закусило О.К. Оцінки швидкості збіжності в граничній теоремі для екстремальних значень регенеруючих процесів / О.К.Закусило, І.К. Мацак // Укр. Мат. журн. — (2020). — **72**, С. 1064–1081.
15. Королук В.С. Стохастичні моделі систем / В.С.Королук. — Київ: Либідь, 1993. — 136 с.
16. Riordan J. Stochastic service systems / J. Riordan. — New York: John Wiley and Sons, 1962. — 184 p.
17. Feller W. An introduction to probability theory and its applications, Vol.1 / W.Feller. — New York, London: John Wiley and Sons, 1957. — 498 p.
7. GNEDENKO B.V. (1964) О dublirovanii z vosstanovleniem . *Izv.Akad.Nauk SSSR, Tekh.Kibern.* **5**, p. 111–118.
8. GNEDENKO B.V., BELYAEV YU.K. and SOLOVYEV A.D. (1969) *Mathematical methods of reliability theory*. New York, London: Academic Press.
9. KALASHNIKOV V. (1997) *Geometric sums : bounds for rare events with applications*. Amsterdam: Springer-Science+Business Media.
10. KRUGLOV V.M. and KOROLEV V.Yu.(1990) *Predelynye teoremy dlya sluchaynykh sum*. Moskva: Izdatelstvo Moskovskogo Universiteta.
11. GNEDENKO B.V. and KOVALENKO I.N. (1989) *Introduction to Queueing Theory*, 2nd ed. Boston: Mathematical Modeling, vol.5, Birkhäuser.
12. MATSAK I.K. and MOKLYACHUK M.P.(2020) *On Distributions of One Class of Random Sums and their Applications*, *Statistics Opt. Inform. Comput.*, **8**, p. 153–164.
13. IKSANOV O.M.(2007) *Vypadkovi ryady spetsialnogo vyglyadu, gillyaste vypadkove blukannya ta samoroskladnisty*. Kyiv: KTI-PRINT.
14. ZAKUSYLO O.K. and MATSAK I.K. (2020) Otsinky shvydkosti zbignosti v granychniy teoremi dlya ekstremalnykh snacheniy regeneruyuchykh procesiv, *Ukr. Math. J.*, **72**, p. 1064–1081.
15. KOROLYUK V.S. (1993) *Stokhastichni modeli system*. Kyiv: Lybidy.
16. RIORDAN J. (1962) *Stochastic service systems*. New York: John Wiley and Sons..
17. Feller W.(1957) *An introduction to probability theory and its applications*, Vol.1. New York, London: John Wiley and Sons.

References

Надійшла до редколегії 18.10.2020