УДК 519.925.51

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/1.11>

Кулян В.Р.¹, к.т.н.
Юнькова О.О.², к.ф.-м.н.

Victor R. Kulian¹, Ph.D.
Olena O. Yunkova², Ph.D.

Математична задача диверсифікації банківських активів

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03127, м. Київ, пр-т
Глушкова, 4д
e-mail: v.kulyan@gmail.com

²Київський національний економічний
університет імені Вадима Гетьмана, м. Київ,
03680, пр-т Перемоги, 54/1
e-mail: olenayunkova@gmail.com

Mathetical problem of banking assets diversification

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03068, Kyiv, Glushkova ave., 4d
e-mail: v.kulyan@gmail.com

²Vadym Getman National Economics University of
Kyiv, 03680, Kyiv, Peremogy ave., 54/1
e-mail: olenayunkova@gmail.com

*Розглядається математична задача оптимальної диверсифікації портфеля акцій на основі
розв'язання двокритеріальної задачі оптимізації.*

Ключові слова: математична модель, оптимальне інвестування, портфель акцій.

In article we consider a problem of optimal investment strategy by a commercial bank building. This task is actual and the development of a procedure to solve it can help in making investment banking decisions. The general formulation of the problem consists of two criteria. The first one is to maximize the expected return, and the second is to minimize the risk of the investment transaction. Mathematical formulation of the problem is considered as a problem of nonlinear programming under constraints. The procedure for solving such a two-criteria optimization problem allows to obtain many solutions, which requires further steps to make a single optimal solution. According to the algorithm proposed in the work, the problem is divided into two separate problems of single-criteria optimization. Each of these tasks allows to obtain the optimal values of the investment vector both in terms of its expected return and in terms of investment risk. Additional constraints in the mathematical formulation of the problem, make it possible to take into account factors that, from the point of view of the investor, may influence decision-making. The procedures presented in this work allow to obtain analytical representations of formulas that describe the optimal values of the investment distribution vector for both mathematical formulations of the problem.

Key words: mathematical model, optimal investment, stock portfolio

Статтю представив д.ф.-м.н., професор Хусаїнов Д.Я.

Динамічні та статичні задачі управління активами і зобов'язаннями знайшли успішне застосування у сфері довгострокового фінансового планування, де необхідність неодноразового прийняття рішень визначається сутністю процесу. Приклади застосування таких математичних задач успішно реалізовано для інвестиційних задач фондового ринку, страхових та інвестиційних компаній, банків та університетських фондів.

Разом з тим, деякі класичні постановки задач моделювання на фондовому ринку знайшли своє застосування в інших прикладних сферах, наприклад, у банківському секторі економіки. Серед них можна виділити задачі Г. Марковиця та Д. Тобіна про інвестування у портфелі цінних

паперів однорідної та змішаної структури відповідно. Задача Г. Марковиця про оптимізацію портфеля акцій з точки зору його очікуваної прибутковості у статичному випадку має такий вигляд

$$r_p = \sum_i x_i r_i \rightarrow \max_x,$$

де x_i – частка акцій i -того виду у портфелі;
 r_i – очікувана прибутковість акції i -того виду.
Часто інвестори задачу розглядають у такій постановці

$$r_p(T) = \sum_i x_i(T) r_i(T) \rightarrow \max_x,$$

тут T – горизонт інвестування;

і полягає вона у побудові оптимального за очікуваною прибутковістю у кінцевий момент часу інвестиційного портфеля. Дослідження математиків і економістів у галузі фінансового аналізу спрямовані на вивчення різних змістових інтерпретацій, узагальнень існуючих постановок задач та поширення їх на нові сфери застосування.

Прикладами такого підходу можуть бути:

1. Задача про оптимальний розподіл інвестиційних ресурсів комерційного банку.
2. Задача про оптимальне кредитування комерційним банком.
3. Задача про оптимізацію розподілу активів комерційного банку з урахуванням обов'язкового резервування.

Для ознайомлення із математичною постановкою та підходами до розв'язання перших двох можна звернутись до [2]. Додамо лише, що формально задача про оптимальний розподіл інвестиційних ресурсів комерційного банку ідентична задачі інвестування у цінні папери на фондовому ринку, тому підходи, описані в [2], повністю або частково можна застосувати при розв'язанні задач п.1 та п.2.

Третя згадана задача є новою у сучасному банківському менеджменті, тому розглянемо її детально. При формальному математичному записі цієї задачі звернемо увагу на те, що іноді зручніше розглядати процеси інвестування не у частках капіталу, що виділяється для інвестування, а безпосередньо у сумі коштів W_i , що виділяються для інвестування у i -тий напрямок; W – загальна сума коштів. Тоді задача матиме вигляд

$$\sum_{i=1}^n (r_i - p_i) W_i \rightarrow \max_W, \quad (1)$$

де $\bar{W} = (W_1, W_2, \dots, W_n)^T$ – вектор-стовпчик, координатами якого є суми коштів, що виділяються для інвестування у відповідні напрямки; r та p – вектор-стовпчики розмірності $n \times 1$, перший з яких характеризує очікувану прибутковість i -того інвестиційного напрямку, а другий – відсоток від суми, що може бути інвестована у відповідний напрямок і який є обов'язковим для резервування. Згідно Марковицю, другий критерій класичної двокритеріальної задачі про оптимальний інвестиційний портфель має вигляд

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_i \sigma_{ij} W_j \rightarrow \min_W, \quad (2)$$

де σ_{ij} – коваріація між i -тим та j -тим інвестиційними напрямками.

Векторно-матричний вигляд задачі є таким

$$\begin{cases} R^T \bar{W} \rightarrow \max_W \\ (\bar{W})^T V \bar{W} \rightarrow \min_W \\ I^T \bar{W} = 1 \\ W_i \geq 0 \end{cases}, \quad (3)$$

де V – коваріаційна матриця; R – вектор розмірності $n \times 1$, координатами якого є $r_i - p_i, i = \overline{1, n}$; символ T – знак транспонування. Сформульована вище задача є двокритеріальною із суперечливими критеріями. Як правило, для розв'язання такого типу задач застосовують методи, що дозволяють будувати множини розв'язків. Серед них виділимо суб'єктивно-орієнтований підхід з прийняття інвестиційних рішень, що ґрунтується на побудові та аналізі допустимої та ефективної множин, а також метод побудови Парето – оптимальної множини розв'язків. Маючи на меті побудову аналітичного розв'язку задачі, і, виходячи із практичних міркувань, перший критерій в (3) замінимо рівністю

$$R^T \bar{W} = S.$$

Тоді (3) матиме вигляд нелінійної задачі одномірної оптимізації при обмеженнях

$$\begin{cases} (\bar{W})^T V \bar{W} \rightarrow \min_W \\ R^T \bar{W} = S \\ I^T \bar{W} = 1 \\ W_i \geq 0 \end{cases}, \quad (4)$$

де S – бажаний рівень прибутку інвестиційної операції.

Застосуємо для її розв'язання метод множників Лагранжа. Функція Лагранжа

$$L = (\bar{W})^T V \bar{W} + \lambda_1 (R^T \bar{W} - S) + \lambda_2 (I^T \bar{W} - 1)$$

містить два невідомі параметри λ_1 і λ_2 і задача полягає у визначенні елементів вектора $\bar{W}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \bar{W}} &= 2V\bar{W} + \lambda_1 R + \lambda_2 I, \\ \bar{W} &= (2V)^{-1} (-\lambda_1 R - \lambda_2 I). \end{aligned} \quad (5)$$

Параметри λ_1 та λ_2 визначимо із системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} R^T (2V)^{-1} (-\lambda_1 R - \lambda_2 I) = S, \\ I^T (2V)^{-1} (-\lambda_1 R - \lambda_2 I) = 1. \end{cases}$$

Із першого рівняння

$$\begin{aligned} -\lambda_1 R^T (2V)^{-1} R &= S + \lambda_2 R^T (2V)^{-1} I, \\ -\lambda_1 &= (R^T (2V)^{-1} R)^{-1} (S + \lambda_2 R^T (2V)^{-1} I). \end{aligned} \quad (6)$$

Із другого рівняння

$$\begin{aligned} -\lambda_1 I^T (2V)^{-1} R &= 1 + \lambda_2 I^T (2V)^{-1} I, \\ -\lambda_1 &= (I^T (2V)^{-1} R)^{-1} (1 + \lambda_2 I^T (2V)^{-1} I). \end{aligned} \quad (7)$$

Прирівняємо (6) та (7)

$$\begin{aligned} (R^T (2V)^{-1} R)^{-1} (S + \lambda_2 R^T (2V)^{-1} I) &= \\ (I^T (2V)^{-1} R)^{-1} (1 + \lambda_2 I^T (2V)^{-1} I). \end{aligned} \quad (8)$$

Отримали лінійне рівняння відносно λ_2 . Розв'яжемо його і знайдемо значення параметра λ_2 підставимо у (6) або (7) і визначимо λ_1 .

Після підстановки визначених значень у (5) отримаємо шукані частки банківських інвестицій.

Для зменшення ризику портфеля часто банківські активи розподіляють не тільки серед ризикованих напрямків інвестування, але також і серед неризикованих. Прикладом такого вкладення ресурсів можуть бути державні та недержавні боргові зобов'язання, і це дозволяє ефективно диверсифікувати інвестиційний портфель.

Математична постановка задачі може бути такою

$$\begin{cases} R^T \bar{W} + R^0 W^0 \rightarrow \max_W \\ (\bar{W})^T V \bar{W} \rightarrow \min_W \\ I^T \bar{W} + W^0 = 1 \\ W_i \geq 0 \end{cases}, \quad (9)$$

де W^0 – сума коштів, що виділяються на інвестування у неризиковані цінні папери. Як і у випадку попередньої задачі, розглянемо однокритеріальну її постановку.

$$\begin{cases} (\bar{W})^T V \bar{W} \rightarrow \min_W \\ R^T \bar{W} + R^0 W^0 = S \\ I^T \bar{W} + W^0 = 1 \\ W_i \geq 0 \end{cases}. \quad (10)$$

Функція Лагранжа

$$L = (\bar{W})^T V \bar{W} + \lambda_1 (R^T \bar{W} + R^0 W^0 - S) +$$

$$\lambda_2 (I^T \bar{W} + W^0 - 1)$$

на відміну від попереднього випадку, містить додаткову невідому W^0 .

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \bar{W}} &= 2V \bar{W} + \lambda_1 R + \lambda_2 I = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial W^0} &= \lambda_1 R^0 + \lambda_2 = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\bar{W} = (2V)^{-1} (-\lambda_1 R - \lambda_2 I).$$

$$\lambda_2 = -\lambda_1 R^0. \quad (12)$$

Для визначення невідомих параметрів λ_1 та λ_2 скористаємось другим та третім рівняннями системи (10). Після підстановки в них λ_2 із (12) отримаємо лінійне алгебраїчне рівняння

$$R^0 (1 - I^T \bar{W}(\lambda_1)) = S - R^T \bar{W}(\lambda_1),$$

що містить одне невідоме λ_1 . Розв'яжемо його, підставимо λ_1 у (12) та визначимо λ_2 . Тепер маємо можливість визначити оптимальні суми коштів, що можуть бути інвестовані у ризиковані та неризиковані проекти.

Як сказано раніше, поряд з наведеною вище задачею мінімізації ризику інвестиційної операції для заданого рівня прибутковості за умови обов'язкового резервування можна навести спряжену з нею задачу про максимізацію прибутку для заданого рівня ризику за умови обов'язкового резервування. Формальна постановка задачі оптимізації інвестиційного портфеля однорідної структури має такий вигляд

$$\begin{cases} R^T \bar{W} \rightarrow \max_W \\ (\bar{W})^T V \bar{W} = \tau \\ I^T \bar{W} = 1 \\ W_i \geq 0 \end{cases},$$

де τ – заданий допустимий рівень ризику. Цю задачу можна сформулювати і для випадку інвестиційного портфеля змішаної структури

$$\begin{cases} R^T \bar{W} + R^0 W^0 \rightarrow \max_{W, W^0} \\ (\bar{W})^T V \bar{W} = \tau \\ I^T \bar{W} + W^0 = 1 \\ W_i \geq 0 \end{cases}.$$

Підходи до розв'язання двох останніх задач можуть бути аналогічними застосованим вище.

У роботі сформульовано нові математичні постановки задач оптимізації прийняття інвестиційних рішень комерційним банком. Для задач оптимізації очікуваної прибутковості при заданому наперед рівні прийнятного ризику та оптимізації ризику при визначеному наперед рівні очікуваної прибутковості розроблено алгоритми та обчислювальні процедури.

Обидві задачі розглядаються як задачі нелінійного програмування при визначених наперед обмеженнях. Подальші кроки оптимізації прийняття конструктивних рішень можуть бути пов'язані із застосуванням положень теорій Г. Марковиця та Д. Тобіна для формування динамічних стратегій диверсифікації портфелів інвестицій однорідної та змішаної структури.

Список використаних джерел

1. Шарп У. Инвестиции / Уильям Ф. Шарп, Гордон Дж. Александер, Джеффри В. Бэйли. – Москва: Инфра-М, 1999. – с.1027.
2. Гаращенко Ф.Г. Качественный анализ математических моделей инвестиционного менеджмента / Кулян В.Р., Рутцкая В.В. // Кибернетика и вычислительная техника. – 2005. – № 148. –с. 3-10.
3. Гаращенко Ф.Г. Моделирование динамики и диверсификация портфеля акций / Кулян В.Р., Петрович В.Н., Юнькова Е.А. // Проблемы управления и информатики.- 2016. - № 4.- с. 124-132.

Reference

1. SHARPE, W., ALEXANDER, G. and BAILEY, J. (1995) *Investments*. New Jersey: Prentice Hall.
2. GARASHCHENKO, F., KULYAN, V. and RUTITSKAYA, V. (2005) Quality analysis of mathematical models of investment management: *Cybernetics and computing engineering*. 148. p. 3-10.
3. GARASHCHENKO FEDIR, KULIAN VICTOR, PETROVICH VALENTINA and YUNKOVA OLENA (2016) Simulation of the Dynamics and Diversification of Stock Portfolio *Journal of Automation and Information Sciences*. - New York, Connecticut. - v. 48, issue 7. - P. 28-40.

Надійшла до редколегії 07.02.2021р.