УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/3.5>

О.І. Василик¹, д.ф.-м.н., доцент
Р.Є. Ямненко², д.ф.-м.н., доцент
Т.О. Яневич², к.ф.-м.н., доцент

Оцінювання ймовірності виходу траєкторії строго φ -субгауссового процесу квазідробового ефекту за криву

¹Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, 03056, Київ, проспект Перемоги, 37, e-mail: vasylyk@matan.kpi.ua

²Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, e-mail: yamnenko@univ.kiev.ua
tetianayanevych@knu.ua

O.I. Vasylyk¹, Dr.Sc., Associate Professor
R.E. Yamnenko², Dr.Sc., Associate Professor
T.O. Ianevych², Ph.D., Associate Professor
Estimation of probability of exceeding a curve by a strictly φ -sub-Gaussian quasi shot noise process

¹National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, 37, Prosp. Peremohy, Kyiv, Ukraine, 03056, e-mail: vasylyk@matan.kpi.ua

²Taras Shevchenko National University of Kyiv, 64/13 Volodymyrska st., Kyiv, Ukraine, 01601, e-mail: yamnenko@univ.kiev.ua
tetianayanevych@knu.ua

У цій роботі ми продовжуємо вивчати властивості строго φ -субгауссового процесу квазідробового ефекту $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, u) d\xi(u)$, $t \in \mathbb{R}$, породженого функцією відгуку g та строго φ -субгауссовим випадковим процесом $\xi = (\xi(t), t \in \mathbb{R})$ з некорельованими приростами, таким що $E(\xi(t) - \xi(s))^2 = t - s$, $t > s \in \mathbb{R}$. Отримано оцінки для ймовірності виходу траєкторії сепарабельного строго φ -субгауссового процесу квазідробового ефекту за криву, задану деякою неперервною функцією. Такі оцінки можуть бути застосовані при дослідженні процесів дробового ефекту, які виникають у задачах фінансової математики, теорії телекомунікаційних мереж тощо.

Ключові слова: процеси дробового ефекту, φ -субгауссові процеси.

In this paper, we continue to study the properties of a separable strictly φ -sub-Gaussian quasi shot noise process $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, u) d\xi(u)$, $t \in \mathbb{R}$, generated by the response function g and the strictly φ -sub-Gaussian process $\xi = (\xi(t), t \in \mathbb{R})$ with uncorrelated increments, such that $E(\xi(t) - \xi(s))^2 = t - s$, $t > s \in \mathbb{R}$. We consider the problem of estimating the probability of exceeding some level by such a process on the interval $[a; b]$, $a, b \in \mathbb{R}$. The level is given by a continuous function $f = \{f(t), t \in [a; b]\}$, which satisfies some given conditions. In order to solve this problem, we apply the theorems obtained for random processes from a class $V(\varphi, \psi)$, which generalizes the class of φ -sub-Gaussian processes. As a result, several estimates for probability of exceeding the curve f by sample paths of a separable strictly φ -sub-Gaussian quasi shot noise process are obtained. Such estimates can be used in the study of shot noise processes that arise in the problems of financial mathematics, telecommunication networks theory, and other applications.

Key Words: shot noise processes, φ -sub-Gaussian processes.

Статтю представила д.ф.-м.н. Розора І.В.

Присвячуємо цю роботу пам'яті нашого наукового керівника професора Юрія Васильовича Козаченка, якому ми безмежно вдячні за все, чому він нас навчив. Він завжди був для нас взірцем людяності, інтелігентності, педагогічної майстерності, чуйного і шанобливого ставлення до своїх учнів, обізнаності і щирої зацікавленості не тільки

в математиці, а й у літературі, історії, мистецтві. Світла і вічна пам'ять дорогому Вчителю і видатній Людині!

1 Вступ

Один з напрямків наукової роботи Юрія Васильовича Козаченка присвячений дослідженню випадкових процесів дробового ефекту, які

ще називають дробовими процесами. Зокрема, Ю.В. Козаченко та І.В. Дарійчук досліджували властивості Θ -передгауссових процесів дробового ефекту та запропонували методи моделювання таких процесів [4, 6, 7]. У цій роботі ми продовжуємо вивчати дробові процеси, а саме досліджуємо властивості сепарабельних строго φ -субгауссових процесів квазідробового ефекту. Вперше такі процеси розглядалися у роботі [14], де, зокрема, досліджувалися умови їх вибіркової неперервності. Оцінки розподілів супремумів сепарабельних строго φ -субгауссових процесів квазідробового ефекту отримано у роботах [1, 2]. Задачі оцінювання ймовірності виходу траєкторії φ -субгауссового випадкового процесу за криву розглядалися у роботах [3, 10, 15].

Процеси дробового ефекту є математичними моделями різних явищ і досліджуються від початку ХХ століття. Зараз процеси дробового ефекту застосовуються у фізиці, страхуванні, фінансовій математиці, теорії телекомунікаційних мереж тощо [9, 12, 13].

У класичній моделі дробового ефекту припускається, що в деяку систему надходять імпульси згідно зі стандартним пуассонівським процесом, величини реакції (відгуку) на імпульс є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, незалежними від пуассонівського процесу надходження імпульсів, а після моменту імпульсу реакція «затухає» згідно з експоненціальним законом розподілу. Але із часом з'явилося дуже багато варіацій цієї моделі. У даній роботі розглядається випадок, коли $\xi = (\xi(t), t \in \mathbb{R})$ є строго φ -субгауссовим випадковим процесом із некорельованими приростами, таким що $E(\xi(t) - \xi(s))^2 = t - s$, $t > s \in \mathbb{R}$. Породжений ним процес $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, u) d\xi(u)$ називатимемо строго φ -субгауссовим процесом квазідробового ефекту.

Робота складається зі вступу та трьох розділів. У розділі 2 наведено основні поняття та деякі необхідні результати щодо випадкових величин та процесів із простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$, які далі застосовуються для дослідження властивостей процесів квазідробового ефекту. У розділі 3 наведено означення строго φ -субгауссового процесу квазідробового ефекту та обґрунтовано існування таких процесів. Основні результати наведено у розділі 4, а саме, отримано оцінки для ймовірності виходу траєкторії строго

φ -субгауссового процесу квазідробового ефекту за криву, задану деякою неперервною функцією.

2 Необхідні відомості

У цьому розділі наведено необхідні означення [3, 5, 8] та результати, отримані для φ -субгауссових випадкових величин та процесів [3, 10].

Означення 2.1. Неперервна парна опукла функція $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається N -функцією Орлича, якщо $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) > 0$ при $x \neq 0$, $\frac{\varphi(x)}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$ та $\frac{\varphi(x)}{x} \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$.

Означення 2.2. Нехай $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ — деяка N -функція Орлича. Функція φ^* така, що $\varphi^*(x) := \sup_{y \in \mathbb{R}} (xy - \varphi(y))$, $x \geq 0$, називається перетворенням Юнга – Фенхеля функції φ .

Умова Q. Для N -функції φ виконується умова Q, якщо $\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = C > 0$. Можливо, що $C = +\infty$.

У книзі [11] міститься детальна інформація щодо N -функцій Орлича та їх властивостей.

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — стандартний імовірнісний простір.

Означення 2.3. Нехай φ — N -функція Орлича, для якої виконується умова Q. Випадкова величина ξ належить простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ (простору φ -субгауссових випадкових величин), якщо $E\xi = 0$, $E \exp\{\lambda\xi\}$ існує для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ та існує така стала $a > 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$E \exp(\lambda\xi) \leq \exp(\varphi(a\lambda)).$$

Теорема 2.1. [5] Простір $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ є простором Банаха з нормою

$$\tau_\varphi(\xi) = \sup_{\lambda \neq 0} \frac{\varphi^{-1}(\ln E \exp(\lambda\xi))}{|\lambda|}$$

та для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконуються нерівності

$$\begin{aligned} E \exp(\lambda\xi) &\leq \exp(\varphi(\lambda\tau_\varphi(\xi))), \\ (E\xi^2)^{\frac{1}{2}} &\leq C\tau_\varphi(\xi), \end{aligned} \quad (2.1)$$

де $C > 0$ — деяка стала.

Означення 2.4. Нехай (T, ρ) — деякий псевдометричний або метричний простір. Метричною

ентропією (відносно псевдометрики/метрики ρ) називається функція $H_T(\varepsilon) := \ln N_T(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, де $N_T(\varepsilon)$ — це метрична масивність множини T , тобто, кількість елементів у найменшому ε -покритті цієї множини.

Означення 2.5. Випадковий процес $X = (X(t), t \in T)$ є φ -субгауссовим (тобто, належить простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$), якщо для всіх $t \in T$ випадкові величини $X(t) \in \text{Sub}_\varphi(\Omega)$.

Якщо $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, то такий процес називається субгауссовим.

Приклад 2.1. Центрований гауссовий випадковий процес є субгауссовим.

Означення 2.6. Сім'я Δ випадкових величин із простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ називається строго φ -субгауссовою (позначається як $\Delta \in \text{SSub}_\varphi(\Omega)$), якщо існує стала $C_\Delta > 0$ така, що для будь-якої зліченної множини I , $\xi_i \in \Delta$, $i \in I$, та для довільних $\lambda_i \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\tau_\varphi \left(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i \right) \leq C_\Delta \left(\mathbb{E} \left(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.2)$$

Стала C_Δ називається визначальною сталою сім'ї Δ .

Означення 2.7. Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ називається строго φ -субгауссовим (тобто, $X \in \text{SSub}_\varphi(\Omega)$), якщо сім'я випадкових величин $\{X(t), t \in T\}$ є строго φ -субгауссовою. Визначальна стала цієї сім'ї називається визначальною сталою процесу X та позначається C_X .

Означення 2.8. Нехай $\varphi \prec \psi$ — дві N -функції Орліча. Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ належить класу $V(\varphi, \psi)$, якщо для всіх $t \in T$ процес $X(t)$ належить простору $\text{Sub}_\psi(\Omega)$ та для всіх $s, t \in T$ прирости $(X(t) - X(s))$ належать простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$.

Нехай (T, ρ) — псевдометричний (метричний) сепарабельний простір з псевдометрикою (метрикою) ρ .

Припустимо, що для сепарабельного випадкового процесу $X = \{X(t), t \in T\}$ з класу $V(\varphi, \psi)$ існує така неперервна монотонно зростаюча функція $\sigma = \{\sigma(h), h > 0\}$, що $\sigma(h) \rightarrow 0$, коли $h \rightarrow 0$, та має місце нерівність

$$\sup_{\rho(t,s) \leq h} \tau_\varphi(X(t) - X(s)) \leq \sigma(h). \quad (2.3)$$

Нехай B — компактна множина, $B \subset T$, $\gamma(u) = \tau_\psi(X(u)) < \infty$, $\beta > 0$ — деяке число, таке що $\beta \leq \sigma \left(\inf_{s \in B} \sup_{t \in B} \rho(t, s) \right)$.

Наступні дві теореми містять оцінки ймовірності виходу траєкторії випадкового процесу із класу $V(\varphi, \psi)$ за криву [3, 10].

Теорема 2.2. Нехай для випадкового процесу $X(t) = (X(t), t \in B)$ із класу $V(\varphi, \psi)$ виконується умова (2.3), і нехай $f = \{f(t), t \in B\}$ — неперервна функція, така що $|f(u) - f(v)| \leq \delta(\rho(u, v))$, де $\delta = \{\delta(s), s > 0\}$ — деяка монотонно зростаюча невід'ємна функція, а $r = \{r(u) : u \geq 1\}$ — така неперервна функція, що $r(u) > 0$ при $u > 1$, $r(1) = 0$, а функція $s(t) = r(\exp\{t\})$, $t \geq 0$, опукла. Тоді при виконанні умови

$$J_r(\beta) = \int_0^\beta \frac{r(N_B(\sigma^{(-1)}(u)))}{\varphi^{(-1)}(H_B(\sigma^{(-1)}(u)))} du < \infty \quad (2.4)$$

процес $X_f(t) = X(t) - f(t)$ обмежений з ймовірністю одиниця, та для всіх $p \in (0; 1)$ і $x > 0$ виконуються нерівності

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in B} (X(t) - f(t)) > x \right\} \leq Z_r(p, \beta, x), \quad (2.5)$$

$$\mathbf{P} \left\{ \inf_{t \in B} (X(t) - f(t)) < -x \right\} \leq Z_r(p, \beta, x), \quad (2.6)$$

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in B} |X(t) - f(t)| > x \right\} \leq 2Z_r(p, \beta, x), \quad (2.7)$$

де

$$\begin{aligned} Z_r(p, \beta, x) = & \inf_{\lambda > 0} \exp \left\{ W(\lambda, p, \beta) + p\varphi \left(\frac{\lambda\beta}{1-p} \right) + \right. \\ & + \lambda \left(\sum_{k=2}^{\infty} \delta \left(\sigma^{(-1)}(\beta p^{k-1}) \right) - x \right) \Big\} \times \\ & \times \left(r^{(-1)} \left(\frac{\lambda}{p(1-p)} J_r(\beta p^2) \right) \right)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(\lambda, p, \beta) = & \inf_{v \geq (1-p)^{-1}} \left(\frac{1}{v} H_B(\sigma^{(-1)}(\beta p)) + \right. \\ & \left. + \sup_{u \in B} \left(\frac{\psi(\lambda \gamma(u) v)}{v} - \lambda f(u) \right) \right). \end{aligned}$$

Теорема 2.3. Нехай для випадкового процесу $X(t) = (X(t), t \in B)$ із класу $V(\varphi, \psi)$ виконується умова (2.3), і нехай $f = \{f(t), t \in B\}$ – неперервна функція, така що $|f(u) - f(v)| \leq \delta(\rho(u, v))$, де $\delta = \{\delta(s), s > 0\}$ – деяка монотонно зростаюча невід’ємна функція. Нехай також $r = \{r(u) : u \geq 1\}$ – така неперервна функція, що $r(u) > 0$ при $u > 1$, $r(1) = 0$, а функція $s(t) = r(\exp\{t\}), t \geq 0$, опукла, причому виконується умова

$$I_r(\beta) = \int_0^\beta r(N(\sigma^{(-1)}(u))) du < \infty. \quad (2.8)$$

Тоді процес $X_f(t) = X(t) - f(t)$ обмежений з ймовірністю одиниця, та для всіх $p \in (0; 1)$ і $x > 0$ виконуються нерівності

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in B} (X(t) - f(t)) > x \right\} \leq U_r(p, \beta, x), \quad (2.9)$$

$$\mathbf{P} \left\{ \inf_{t \in B} (X(t) - f(t)) < -x \right\} \leq U_r(p, \beta, x), \quad (2.10)$$

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in B} |X(t) - f(t)| > x \right\} \leq 2U_r(p, \beta, x), \quad (2.11)$$

де

$$\begin{aligned} U_r(p, \beta, x) &= \inf_{\lambda > 0} \exp \left\{ \theta_\psi(\lambda, p) + p\varphi \left(\frac{\lambda\beta}{1-p} \right) + \right. \\ &+ \lambda \left(\sum_{k=2}^{\infty} \delta(\sigma^{(-1)}(\beta p^{k-1})) - x \right) \left. \right\} r^{(-1)} \left(\frac{I_r(\beta p)}{\beta p} \right), \\ \theta_\psi(\lambda, p) &= \sup_{u \in T} \left((1-p)\psi \left(\frac{\lambda\gamma(u)}{1-p} \right) - \lambda f(u) \right). \end{aligned}$$

3 Строго φ -субгауссові процеси квазі-дробового ефекту

Нехай $\xi = (\xi(t), t \in \mathbb{R})$ – дійснозначний центрований випадковий процес з некорельованими приростами, визначений на стандартному ймовірнісному просторі, та

$$\mathbf{E}(\xi(t) - \xi(s))^2 = t - s, \quad t > s \in \mathbb{R}.$$

Нехай $g = (g(t, u), t, u \in \mathbb{R})$ – дійснозначна функція, яка задовольняє умову:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t, u) du < \infty, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Означення 3.1. Будемо називати процес

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, u) d\xi(u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

процесом дробового ефекту, породженим процесом ξ та функцією відгуку g , де інтеграл у (3.2) визначений у середньому квадратичному.

Коваріаційна функція процесу X має вигляд

$$\mathbf{E}X(t)X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, u)g(s, u) du, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

У наступній лемі з роботи [14] доведено, що строго φ -субгауссові процеси вигляду (3.2) існують, а також виведено оцінки для норми такого процесу та норми його приростів.

Лема 3.1. Нехай $\xi = (\xi(t), t \in \mathbb{R})$ – строго φ -субгауссовий випадковий процес із некорельованими приростами та $\mathbf{E}(\xi(t) - \xi(s))^2 = t - s$, $t > s \in \mathbb{R}$. Тоді процес $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, u) d\xi(u)$, $t \in \mathbb{R}$, теж є строго φ -субгауссовим процесом та для довільних $t, s \in \mathbb{R}$

$$\tau_\varphi(X(t)) \leq c_\xi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t, u) du \right)^{1/2}, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \tau_\varphi(X(t) - X(s)) &\leq \\ c_\xi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (g(t, u) - g(s, u))^2 du \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

де c_ξ – визначальна стала процесу ξ .

Означення 3.2. Будемо називати процес $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, u) d\xi(u)$ строго φ -субгауссовим процесом квазідробового ефекту, якщо ξ є строго φ -субгауссовим випадковим процесом.

4 Оцінювання ймовірності виходу траєкторії строго φ -субгауссового процесу квазідробового ефекту за криву

Нехай $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ – сепарабельний строго φ -субгауссовий процес квазідробового ефекту. Припустимо, що існують такі функції $\varkappa = (\varkappa(h), h \geq 0)$ та $k = (k(u), u \in \mathbb{R})$, що

$$|g(t, u) - g(s, u)| \leq \varkappa(t - s)k(u), \quad t, s, u \in \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

причому функція $\varkappa$ є такою невід’ємною неперервною монотонно зростаючою функцією, що $\varkappa(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, та функція k є невід’ємною неперервною функцією, яка задовольняє умову $\int_{\mathbb{R}} k^2(u) du < \infty$.

Теорема 4.1. Нехай $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ – сепарабельний строго φ -субгауссовий процес квазідробового ефекту з функцією відгуку g , яка задовольняє умову (4.1). Нехай $f = \{f(t), t \in [a; b], a, b \in \mathbb{R}\}$ – неперервна функція, така що $|f(u) - f(v)| \leq \delta(\rho(u, v))$, де $\delta = \{\delta(s), s > 0\}$ – деяка монотонно зростаюча невід’ємна функція, а $r = \{r(u): u \geq 1\}$ – така неперервна функція, що $r(u) > 0$ при $u > 1$, $r(1) = 0$, а функція $s(t) = r(\exp\{t\}), t \geq 0$, – опукла. Тоді при виконанні умови

$$J_r^*(\beta) = \int_0^\beta \frac{r\left(\frac{b-a}{2\kappa^{(-1)}(cu)} + 1\right)}{\varphi^{(-1)}\left(\ln\left(\frac{b-a}{2\kappa^{(-1)}(cu)} + 1\right)\right)} du < \infty \quad (4.2)$$

процес $X_f(t) = X(t) - f(t), t \in [a; b]$, обмежений з ймовірністю одиниця та для всіх $p \in (0; 1)$ і $x > 0$ справедливі такі оцінки ймовірності виходу траєкторії процесу X за криву f на відрізьку $[a; b]$:

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t \in [a; b]} (X(t) - f(t)) > x\right\} \leq Z_r^*(p, \beta, x), \quad (4.3)$$

$$\mathbf{P}\left\{\inf_{t \in [a; b]} (X(t) - f(t)) < -x\right\} \leq Z_r^*(p, \beta, x), \quad (4.4)$$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t \in [a; b]} |X(t) - f(t)| > x\right\} \leq 2Z_r^*(p, \beta, x), \quad (4.5)$$

де $\beta > 0$ – деяке число, таке що

$$\beta \leq c^{-1} \kappa \left(\inf_{s \in [a; b]} \sup_{t \in [a; b]} |t - s| \right),$$

$$Z_r^*(p, \beta, x) = \inf_{\lambda > 0} \exp \left\{ W^*(\lambda, p, \beta) + p\varphi \left(\frac{\lambda\beta}{1-p} \right) + \lambda \left(\sum_{k=2}^{\infty} \delta \left(\kappa^{(-1)} \left(c\beta p^{k-1} \right) \right) - x \right) \right\} \times \\ \times \left(r^{(-1)} \left(\frac{\lambda J_r^*(\beta p^2)}{p(1-p)} \right) \right)^2,$$

$$W^*(\lambda, p, \beta) = \inf_{v \geq (1-p)^{-1}} \left(\frac{1}{v} \ln \left(\frac{b-a}{2\kappa^{(-1)}(c\beta p)} + 1 \right) + \sup_{u \in [a; b]} \left(\frac{\varphi(\lambda\gamma(u)v)}{v} - \lambda f(u) \right) \right)$$

$$\text{та } c = \left(c_\xi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} k^2(u) du \right)^{1/2} \right)^{-1}.$$

Доведення. Передусім зауважимо, що строго φ -субгауссовий процес квазідробового ефекту $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ належить класу $V(\varphi, \varphi)$, тому для його дослідження можна застосовувати результати, отримані для випадкових процесів з класів $V(\varphi, \psi)$.

Якщо виконується умова (4.1) для функції відгуку g , то з леми 3.1 випливає, що для $t, s \in [a, b]$

$$\begin{aligned} \tau_\varphi(X(t) - X(s)) &\leq \\ &\leq c_\xi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (g(t, u) - g(s, u))^2 du \right)^{1/2} \leq \\ &\leq c_\xi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\kappa(t-s)k(u))^2 du \right)^{1/2} = \\ &= c_\xi \kappa(t-s) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} k^2(u) du \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

де, згідно з умовою (4.1), функція $\kappa = (\kappa(h), h \geq 0)$ є невід’ємною неперервною монотонно зростаючою функцією, $\kappa(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, а функція $k = (k(u), u \in \mathbb{R})$ є невід’ємною і задовольняє умову $\int_{\mathbb{R}} k^2(u) du < \infty$. Це означає, що існує неперервна монотонно зростаюча функція

$$\sigma(h) = c_\xi \kappa(h) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} k^2(u) du \right)^{1/2}, \quad h \geq 0,$$

така, що $\sigma(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, та для якої виконується умова (2.3) у випадку $B = [a, b]$, $\rho(t, s) = |t - s|$, $t, s \in [a; b]$:

$$\sup_{|t-s| \leq h} \tau_\varphi(X(t) - X(s)) \leq \sigma(h).$$

Тоді матимемо: $\sigma^{(-1)}(u) = \kappa^{(-1)}(cu)$,

$$N_B(\sigma^{(-1)}(u)) \leq \frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 = \frac{b-a}{2\kappa^{(-1)}(cu)} + 1,$$

$$H_B(\sigma^{(-1)}(u)) \leq \ln \left(\frac{b-a}{2\kappa^{(-1)}(cu)} + 1 \right).$$

Функція $\frac{r(e^v)}{\varphi^{(-1)}(v)}$ є неперервною монотонно зростаючою функцією, тому

$$\begin{aligned} &\int_0^\beta \frac{r(N_B(\sigma^{(-1)}(u)))}{\varphi^{(-1)}(H_B(\sigma^{(-1)}(u)))} du \leq \\ &\leq \int_0^\beta \frac{r\left(\frac{b-a}{2\kappa^{(-1)}(cu)} + 1\right)}{\varphi^{(-1)}\left(\ln\left(\frac{b-a}{2\kappa^{(-1)}(cu)} + 1\right)\right)} du \end{aligned}$$

і з виконання умови (4.6) випливає виконання умови (2.8).

Отже, якщо виконуються умови теореми 4.1, то процес X задовольняє умови теореми 2.2 і для нього мають місце наведені в ній оцінки. При цьому для функцій у оцінках (2.9)–(2.11) з урахуванням отриманих вище нерівностей і того, що $\psi = \varphi$, справедливі такі співвідношення:

$$W(\lambda, p, \beta) \leq \inf_{v \geq (1-p)^{-1}} \left(\frac{1}{v} \ln \left(\frac{b-a}{2\kappa^{(-1)}(c\beta p)} + 1 \right) + \sup_{u \in [a; b]} \left(\frac{\varphi(\lambda\gamma(u)v)}{v} - \lambda f(u) \right) \right) =: W^*(\lambda, p, \beta),$$

і, відповідно,

$$Z_r(p, \beta, x) \leq \inf_{\lambda > 0} \exp \left\{ W^*(\lambda, p, \beta) + p\varphi \left(\frac{\lambda\beta}{1-p} \right) + \lambda \left(\sum_{k=2}^{\infty} \delta \left(\kappa^{(-1)}(c\beta p^{k-1}) \right) - x \right) \right\} \times \\ \times \left(r^{(-1)} \left(\frac{\lambda}{p(1-p)} J_r^*(\beta p^2) \right) \right)^2 =: Z_r^*(p, \beta, x).$$

Звідси отримуємо оцінки (4.7)–(4.9).

Теорему доведено. $\square$

Використовуючи аналогічний підхід до доведення теореми 4.1, із теореми 2.3 отримуємо наступний набір оцінок.

Теорема 4.2. Нехай $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ – сепарабельний строго φ -субгауссовий процес квазідробового ефекту з функцією відгуку g , яка задовольняє умову (4.1). Нехай $f = \{f(t), t \in [a; b], a, b \in \mathbb{R}\}$ – неперервна функція, така що $|f(u) - f(v)| \leq \delta(\rho(u, v))$, де $\delta = \{\delta(s), s > 0\}$ – деяка монотонно зростаюча невід’ємна функція. Нехай також $r = \{r(u): u \geq 1\}$ – така неперервна функція, що $r(u) > 0$ при $u > 1$, $r(1) = 0$, а функція $s(t) = r(\exp\{t\}), t \geq 0$, – опукла, та

$$I_r^*(\beta) = \int_0^\beta r \left(\frac{b-a}{2\kappa^{(-1)}(cu)} + 1 \right) du < \infty. \quad (4.6)$$

Список використаних джерел

1. Василик О.І. Властивості строго φ -субгауссових процесів квазі-дробового ефекту // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2019. – Вип. 101. – С. 49–62.
2. Василик О.І. Оцінювання розподілу супре-

Тоді процес $X_f(t) = X(t) - f(t)$, $t \in [a; b]$, обмежений з ймовірністю одиниця та для всіх $p \in (0; 1)$ і $x > 0$ справедливі такі оцінки ймовірності виходу траєкторії процесу X за криву f на відрізку $[a; b]$:

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [a; b]} (X(t) - f(t)) > x \right\} \leq U_r^*(p, \beta, x), \quad (4.7)$$

$$\mathbf{P} \left\{ \inf_{t \in [a; b]} (X(t) - f(t)) < -x \right\} \leq U_r^*(p, \beta, x), \quad (4.8)$$

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [a; b]} |X(t) - f(t)| > x \right\} \leq 2U_r^*(p, \beta, x), \quad (4.9)$$

де $\beta > 0$ – деяке число, таке що

$$\beta \leq c^{-1} \kappa \left(\inf_{s \in [a; b]} \sup_{t \in [a; b]} |t - s| \right),$$

$$U_r^*(p, \beta, x) = \inf_{\lambda > 0} \exp \left\{ \theta_\varphi(\lambda, p) + p\varphi \left(\frac{\lambda\beta}{1-p} \right) + \lambda \left(\sum_{k=2}^{\infty} \delta(\kappa^{(-1)}(c\beta p^{k-1})) - x \right) \right\} r^{(-1)} \left(\frac{I_r^*(\beta p)}{\beta p} \right),$$

$$\theta_\varphi(\lambda, p) = \sup_{u \in [a; b]} \left((1-p)\varphi \left(\frac{\lambda\gamma(u)}{1-p} \right) - \lambda f(u) \right)$$

$$\text{та } c = \left(c_\xi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} k^2(u) du \right)^{1/2} \right)^{-1}.$$

Висновки

У роботі отримано оцінки ймовірності виходу траєкторії сепарабельного строго φ -субгауссового процесу квазідробового ефекту, визначеного на відрізку, за криву, задану деякою неперервною функцією. Такі оцінки можуть бути застосовані при дослідженні процесів дробового ефекту, які виникають у задачах фінансової математики, теорії телекомунікаційних мереж тощо.

муму строго φ -субгауссового процесу квазідробового ефекту // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2019. – №2. – С.9 – 18.

3. Василик О.І. φ -Субгауссові випадкові процеси / О.І. Василик, Ю.В. Козаченко, Р.Є.

- Ямненко. – К: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2008. – 231 с.
4. Дарійчук І.В. Випадкові процеси з просторів Орліча / І.В. Дарійчук, Ю.В. Козаченко, М.М. Перестюк. – Чернівці: “Золоті литаври”, 2011. – 212 с.
5. Buldygin V. V., Metric Characterization of Random Variables and Random Processes / V. V. Buldygin, Yu. V. Kozachenko. – American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. – 257 p.
6. Dariyichuk I. V. Some properties of pre-Gaussian shot noise processes / I. V. Dariyichuk, Yu. V. Kozachenko // Stochastic Analysis and Random Dynamics. International Conference. Abstracts, Lviv, Ukraine, 2009. – С. 57–59.
7. Dariyichuk I. V. The distribution of the supremum of Θ -pre-Gaussian shot noise processes / I. V. Dariyichuk, Yu. V. Kozachenko // Theory of Probability and Mathematical Statistics, 2010. – No. 80. – P.85–100.
8. Giuliano Antonini R. Space of φ -sub-Gaussian random variables / R. Giuliano Antonini, Yu. V. Kozachenko, T. Nikitina. // Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. (5), 2003. – 27. – P.92–124.
9. Koops D. T. Networks of $\cdot/G/\infty$ Queues with Shot-Noise-Driven Arrival Intensities / D. T. Koops, O. J. Boxma, and M. R. H. Mandjes // Queueing Systems, August 2016, DOI: 10.1007/s11134-017-9520-7.
10. Kozachenko Yu. Upper estimate of overrunning by $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ random process the level specified by continuous function / Yu. Kozachenko, R. Yamnenko, O. Vasylyk // Random Oper. Stoch. Equ., 2005. – 13, no. 2. – P.111–128.
11. Krasnosel'skii M. A. Convex Functions and Orlicz Spaces. / M. A. Krasnosel'skii, Ya. B. Rutickii. – Moscow, 1958 (in Russian). English translation: P.Noordhoff Ltd, Groningen, 1961. – 249p.
12. Schmidt T. Catastrophe insurance modeled by shot-noise processes // Risks, ISSN 2227-9091, MDPI, Basel, 2014. – 2, Iss. 1. – P.3–24. – <http://dx.doi.org/10.3390/risks2010003>.
13. Schmidt T. Shot-noise processes in finance // arXiv:1612.06616v1, 2016.
14. Vasylyk O. I. Strictly φ -sub-Gaussian quasi shot noise processes // Statistics, Optimization and Information Computing, 2017. – 5. P.109–120.
15. Yamnenko R. Random process from the class $V(\varphi, \psi)$: Exceeding a curve / R. Yamnenko, O. Vasylyk // Theory of Stochastic Processes. – 2007. – Vol.13 (29), no.4. – P. 219–232.

References

1. VASYLYK, O.I. (2019) Properties of strictly φ -sub-Gaussian quasi shot noise processes, *Teoriya Imovirnostei ta Matematychna Statystyka*, 2(101), p. 49–62.
2. VASYLYK, O.I. (2019) Estimation of distribution of suprema of a strictly φ -sub-Gaussian quasi shot noise process, *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics* Iss.2., p.9 – 18.
3. VASYLYK, O. I., KOZACHENKO, YU. V., YAMNENKO, R. E. (2008) *φ -sub-Gaussian random process*, Kyiv: Vydavnycho-Poligrafichnyi Tsentri “Kyivskyi Universytet”, 231 p. (In Ukrainian)
4. DARIYCHUK, I. V., KOZACHENKO, YU. V., and PERESTYUK, M.M. (2011) *Stochastic processes from Orlicz spaces*. Chernivtsi: “Zoloti lytavry”, 212 p. (In Ukrainian)
5. BULDYGIN, V. V., KOZACHENKO, YU. V. (2000) *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes*. American Mathematical Society, Providence, RI, 257 p.
6. DARIYCHUK, I. V., KOZACHENKO, YU. V. (2009) Some properties of pre-Gaussian shot noise processes. *Stochastic Analysis and Random Dynamics. International Conference. Abstracts*. Lviv, Ukraine, p.57–59.

7. DARIYCHUK, I. V., KOZACHENKO, YU. V. (2010) The distribution of the supremum of Θ -pre-Gaussian shot noise processes. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*. No.80, p.85–100.
8. GIULIANO ANTONINI, R., KOZACHENKO, YU. V., NIKITINA, T. (2003) Space of φ -sub-Gaussian random variables. *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl.* (5) 27, p.92–124.
9. KOOPS, D. T., BOXMA, O. J. AND MANDJES, M. R. H. (2016) Networks of $\cdot/G/\infty$ Queues with Shot-Noise-Driven Arrival Intensities. *Queueing Systems*. August 2016, DOI: 10.1007/s11134-017-9520-7.
10. KOZACHENKO, YU., YAMNENKO, R., VASYLYK, O. (2005) Upper estimate of overruning by $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ random process the level specified by continuous function. *Random Oper. Stoch. Equ.* 13, no. 2, p.111–128.
11. KRASNOSEL'SKII, M. A., RUTICKII, YA. B. (1961) *Convex Functions and Orlicz Spaces*. Moscow, 1958 (in Russian). English translation: P.Noordhoff Ltd, Groningen, 249p., 1961.
12. SCHMIDT, T. (2014) Catastrophe insurance modeled by shot-noise processes, *Risks*. ISSN 2227-9091, MDPI, Basel, 2, Iss. 1, p.3–24. <http://dx.doi.org/10.3390/risks2010003>.
13. SCHMIDT, T. (2016) Shot-noise processes in finance. arXiv:1612.06616v1.
14. VASYLYK, O. I. (2017) Strictly φ -sub-Gaussian quasi shot noise processes. *Statistics, Optimization and Information Computing*. 5, p.109–120.
15. YAMNENKO, R., VASYLYK O. (2007) Random process from the class $V(\varphi, \psi)$: Exceeding a curve. *Theory of Stochastic Processes*. Vol.13 (29), no.4, p. 219–232.

Received: 24.11.2020

Моклячук М.П., Ямненко Р.Є., Яневич Т.О., Козаченко Ю.В., Василик О.І., Майборода Р.Є.
Листопад, 2015 р.