УДК 517.946

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/4.4>

О. І. Когутич¹, аспірантка
В. В. Маринець², д-р фіз.-мат. наук,
професор

**Характеристична задача Коші з
передісторією у випадку нелінійних
диференціальних рівнянь у частинних
похідних**

¹ Ужгородський національний університет,
88000, м. Ужгород, вул. Університетська, 14
e-mail: oksanakogutych97@gmail.com

² Ужгородський національний університет,
88000, м. Ужгород, вул. Університетська, 14
e-mail: vasyly.marynets@uzhnu.edu.ua

O. I. Kohutych¹, PhD student
V. V. Marynets², Dr. Sc. (Phys.- Math.), Prof.

**Characteristic Cauchy's problem with
prehistory in the case of nonlinear
differential equations in partial
derivatives**

¹Uzhhorod National University, 88000,
Uzhhorod, Universytetska str., 14
e-mail: oksanakogutych97@gmail.com

²Uzhhorod National University, 88000,
Uzhhorod, Universytetska str., 14
e-mail: vasyly.marynets@uzhnu.edu.ua

Будується конструктивний метод дослідження та наближеного розв'язання нелінійної задачі Гурса з передісторією. Одержано достатні умови існування, єдиності та знакосталості розв'язку розглядуваної задачі.

Ключові слова: двосторонній метод, достатні умови, «вільна» крива, характеристична задача Коші з передісторією.

We have built a constructive method of investigation and approximate solution for nonlinear Goursa's problem with prehistory. We have established sufficient condition of subsistence, existence of unity and constant signs solution of the investigated problem. At mathematical description to different nature process (gas sorption, the spread of moisture in the porous substances, pipes heating by a stream of hot water, drying by the airflow, etc. [1]) we often come to boundary value problems for nonlinear differential equations in partial derivatives, when not all output data are known, that is some of them need to be found from auxiliary nonlinear problems, which are mathematical models of processes that proceeded the research. These problems should be named as problems with prehistory. One approach to investigation and approximate solution to such a problem has been proposed in the current paper.

Key Words: two-sided method, sufficient conditions, «free» curves, characteristic Cauchy's problem with prehistory.

Нехай на площині xOy задана область $D = D_1 \cup D_2$, де $D_1 = \{(x, y) \mid x \in [x_0, x_1], y \in (g(x), y_0]\}$, $D_2 = \{(x, y) \mid x \in (x_0, x_1], y \in (y_0, y_1]\}$, а $y = g(x)$ ($x = \kappa(y)$) – «вільна» крива і $g'(x) < 0$, $g(x_0) = y_0$, $g(x_1) = y_0 - \alpha$, $\alpha > 0$ – const. Постановка задачі: у просторі функцій $C^*(\bar{D}_2) := C^{(1,1)}(D_2) \cap C(\bar{D}_2)$ знайти розв'язок нелінійного ДРЧП [2]

$$D^{(1,1)}U_2(x, y) = f_2(x, y, U_2(x, y), D^{(1,0)}U_2(x, y), D^{(0,1)}U_2(x, y)) := f_2[U_2(x, y)], \quad (1)$$

який задовольняє умови

$$\begin{aligned} U_2(x_0, y) &= \varphi(y), \quad y \in [y_0, y_1], \\ U_2(x, y_0) &= U_1(x, y_0), \quad x \in [x_0, x_1], \end{aligned} \quad (2)$$

де $U_1(x, y) \in C^*(\bar{D}_1)$ є розв'язком задачі Коші.

$$U_1(x, g(x)) = \varphi_1(x), \quad (4)$$

$$D^{(0,1)}U_1(x, g(x)) = \psi(x), \quad x \in [x_0, x_1],$$

причому виконується умова узгодженості

$$\varphi(y_0) = \varphi_1(x_0). \quad (5)$$

$$\begin{aligned} D^{(1,1)}U_1(x, y) &= f_1(x, y, U_1(x, y), \\ D^{(1,0)}U_1(x, y), D^{(0,1)}U_1(x, y)) &:= f_1[U_1(x, y)], \end{aligned} \quad (3)$$

Надалі будемо вважати, що функції $f_i[U_i(x, y)] \in C(\bar{B}_i)$, $f_i : \bar{B}_i \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{B}_i \in \mathbb{R}^5$, $\text{Пр}_{xOy}\bar{B}_i = \bar{D}_i$, $i = 1, 2$, а задані функції

у вихідних даних (2), (4) $\varphi(y) \in C^1[y_0, y_1]$, $\varphi_1(x) \in C^1[x_0, x_1]$, $\psi(x) \in C[x_0, x_1]$.

Інтегруючи рівняння (1) в області $\overline{D}_2$ по x від x_0 до x і по y від y_0 до y , враховуючи умови (2), а рівняння (3) в області $\overline{D}_1$ по y в межах від $g(x)$ до y та по x від x_0 до x і, врахувавши умови (4), легко переконатися у справедливості наведеної леми.

Лема 1. Нехай $f_i[U_i(x, y)] \in C(\overline{B}_i)$. Тоді задача (1)–(5) і система інтегродиференціальних рівнянь

$$U_i(x, y) = \Phi_i(x, y) + \varepsilon_i T_{1,i} f_1[U_1(\xi, \eta)] + T_i f_i[U_i(\xi, \eta)], (x, y) \in \overline{D}_i, i = 1, 2, \quad (6)$$

$$\text{де } \varepsilon_i = \begin{cases} 0, & \text{при } i = 1, \\ 1, & \text{при } i = 2, \end{cases}$$

$$\Phi_1(x, y) := \varphi_1(x) - \int_{\kappa(y)}^x g'(\xi) \psi(\xi) d\xi \times \\ \times T_1 f_1[U_1(\xi, \eta)] := \int_{\kappa(y)}^x \int_{g(\xi)}^y f_1[U_1(\xi, \eta)] d\eta d\xi,$$

$$\Phi_2(x, y) := \varphi(y) - \varphi(y_0) + \varphi_1(x) - \int_{x_0}^x g'(\xi) \times \\ \times \psi(\xi) d\xi,$$

$$T_{1,2} f_1[U_1(\xi, \eta)] := \int_{x_0}^x \int_{g(\xi)}^{y_0} f_1[U_1(\xi, \eta)] d\eta d\xi,$$

$$T_2 f_2[U_2(\xi, \eta)] := \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y f_2[U_2(\xi, \eta)] d\eta d\xi,$$

є еквівалентними.

Означення 1. Будемо вважати, що функції $f_i[U_i(x, y)] \in C_1(\overline{B}_i)$, якщо вони задовольняють наступні умови [3, 4]:

1) $f_i[U_i(x, y)] \in C(\overline{B}_i)$, $i = 1, 2$;

2) у просторі функцій $C(\overline{B}_{1,i})$, $\overline{B}_{1,i} \in \mathbb{R}^8$, $\text{Пр}_{xOy} \overline{B}_{1,i} = \overline{D}_i$, $i = 1, 2$, існують такі функції $H_i(x, y, z_i(x, y), D^{(1,0)} z_i(x, y), D^{(0,1)} z_i(x, y); v_i(x, y), D^{(1,0)} v_i(x, y), D^{(0,1)} v_i(x, y)) := H_i[z_i(x, y); v_i(x, y)]$, $z_i(x, y), v_i(x, y) \in \overline{B}_{1,i}$ і є неперервно диференційовними, що $\forall U_i(x, y) \in C^1(\overline{D}_i)$:

(а) $H_i[U_i(x, y); U_i(x, y)] \equiv f_i[U_i(x, y)]$, $(x, y) \in \overline{D}_i$, $i = 1, 2$, $U_i(x, y) \in \overline{B}_{1,i}$,

(б) для всяких неперервно диференційовних пар функцій $z_i(x, y), v_i(x, y) \in \overline{B}_{1,i}$, які задовольняють умови $D^{(\kappa,s)} z_i(x, y) \geq D^{(\kappa,s)} v_i(x, y)$, $(x, y) \in \overline{D}_i$, $i = 1, 2$, $\kappa = 0, 1$, $s = 0, 1$, $\kappa + s < 2$, в області $\overline{B}_{1,i}$ виконуються нерівності

$$H_i[z_i(x, y); v_i(x, y)] \geq H_i[v_i(x, y); z_i(x, y)], \quad (x, y) \in \overline{D}_i, \quad (7)$$

3) неперервні функції $H_i[z_i(x, y); v_i(x, y)]$ в області $\overline{B}_{1,i}$ задовольняють умову Ліпшиця, тобто для всяких з простору $C^1(\overline{D}_i)$ функцій $z_{i,r}(x, y), v_{i,r}(x, y) \in \overline{B}_{1,i}$, $r = 1, 2$, виконуються умови

$$|H_i[z_{i,1}(x, y); z_{i,2}(x, y)] - H_i[v_{i,1}(x, y); v_{i,2}(x, y)]| \leq \\ \leq L_i \sum_{r=1}^2 (|w_{i,r}(x, y)| + |D^{(1,0)} w_{i,r}(x, y)| + |D^{(0,1)} w_{i,r}(x, y)|),$$

де L_i —сталі Ліпшиця, $w_{i,r}(x, y) = z_{i,r}(x, y) - v_{i,r}(x, y)$, $i = 1, 2$.

Зауважимо, якщо функції $f_i[U_i(x, y)] \in C(\overline{B}_i)$ і мають в області $\overline{B}_i$ обмежені частинні похідні першого порядку по всім своїм аргументам, розпочинаючи із третього, то вони завжди належать просторові $C_1(\overline{B}_i)$. Зворотнє твердження не справедливе.

Нехай функції $z_{i,p}(x, y), v_{i,p}(x, y) \in C^*(\overline{D}_i)$, належать області $\overline{B}_{1,i}$, $i = 1, 2$, $p \in \mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Введемо позначення:

$$W_{i,p}(x, y) := z_{i,p}(x, y) - v_{i,p}(x, y), \\ f_i^p(x, y) := H_i[z_{i,p}(x, y); v_{i,p}(x, y)], \\ f_{i,p}(x, y) := H_i[v_{i,p}(x, y); z_{i,p}(x, y)]$$

$$\alpha_{i,p}(x, y) := z_{i,p}(x, y) - \Phi_i(x, y) - \varepsilon_i \times \\ \times T_{1,i} f_1^p(\xi, \eta) - T_i f_i^p(\xi, \eta) := z_{i,p}(x, y) - R_i^p(x, y), \\ \beta_{i,p}(x, y) := v_{i,p}(x, y) - \Phi_i(x, y) - \varepsilon_i \times \\ \times T_{1,i} f_{1,p}(\xi, \eta) - T_i f_{i,p}(\xi, \eta) := v_{i,p}(x, y) - R_{i,p}(x, y), \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 D^{(\kappa,s)}\bar{z}_{i,p}(x,y) &:= D^{(\kappa,s)}z_{i,p}(x,y) - \\
 &\quad - q_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y)D^{(\kappa,s)}w_{i,p}(x,y), \\
 D^{(\kappa,s)}\bar{v}_{i,p}(x,y) &:= D^{(\kappa,s)}v_{i,p}(x,y) + \\
 &\quad + c_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y)D^{(\kappa,s)}w_{i,p}(x,y), \\
 \kappa, s &= 0, 1, \kappa + s < 2, i = 1, 2, p \in \mathbb{N}_0, \\
 F_i^p(x,y) &:= H_i[\bar{z}_{i,p}(x,y); \bar{v}_{i,p}(x,y)], \\
 F_{i,p}(x,y) &:= H_i[\bar{v}_{i,p}(x,y); \bar{z}_{i,p}(x,y)], \\
 \bar{R}_i^p(x,y) &:= \Phi_i(x,y) + \varepsilon_i T_{1,i} F_1^p(\xi, \eta) + \\
 &\quad + T_i F_i^p(\xi, \eta), \\
 \bar{R}_{i,p}(x,y) &:= \Phi_i(x,y) + \varepsilon_i T_{1,i} F_{1,p}(\xi, \eta) + \\
 &\quad + T_i F_{i,p}(\xi, \eta), \\
 \bar{\alpha}_{i,p}(x,y) &:= z_{i,p}(x,y) - \bar{R}_i^p(x,y), \\
 \bar{\beta}_{i,p}(x,y) &:= v_{i,p}(x,y) - \bar{R}_{i,p}(x,y),
 \end{aligned} \tag{9}$$

де $q_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y)$ та $c_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y)$ є довільними із простору $C(\bar{D}_s)$ функціями, які задовольняють умови

$$\begin{aligned}
 0 &\leq q_{i,p}^{\kappa,s}(x,y) \leq 0,5, \\
 0 &\leq c_{i,p}^{\kappa,s}(x,y) \leq 0,5, \\
 p &\in \mathbb{N}_0, (x,y) \in \bar{D}_i, \\
 \kappa, s &= 0, 1, \kappa + s < 2.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Побудуємо послідовності функцій $\{z_{i,p}(x,y)\}$ та $\{v_{i,p}(x,y)\}$ згідно закону [5, 6]

$$\begin{aligned}
 z_{i,p+1}(x,y) &= \bar{R}_i^p(x,y), \\
 v_{i,p+1}(x,y) &= \bar{R}_{i,p}(x,y), \\
 (x,y) &\in \bar{D}_i,
 \end{aligned} \tag{11}$$

де за нульове наближення $z_{i,0}(x,y)$, $v_{i,0}(x,y) \in \bar{B}_{1,i}$ вибираємо довільні із простору $C^*(\bar{D}_i)$ функції, які при $(x,y) \in \bar{D}_i$ задовольняють умови

$$\begin{aligned}
 D^{(\kappa,s)}w_{i,0}(x,y) &\geq 0, D^{(\kappa,s)}\alpha_{i,0}(x,y) \geq 0, \\
 D^{(\kappa,s)}\beta_{i,0}(x,y) &\leq 0, (x,y) \in \bar{D}_i, i = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Означення 2. Функції $z_{i,0}(x,y)$, $v_{i,0}(x,y) \in C^*\bar{D}_i$, які належать області $\bar{B}_{1,i}$ і задовольняють умови (12), називаються функціями порівняння крайової задачі (1)–(5).

Із (8), (9), (11) маємо:

$$\begin{aligned}
 D^{(\kappa,s)}[z_{i,p}(x,y) - z_{i,p+1}(x,y)] &= \\
 &= D^{(\kappa,s)}\alpha_{i,p}(x,y) + D^{(\kappa,s)}\{\varepsilon_i \times \\
 &\quad \times T_{1,i}[f_1^p(\xi, \eta) - F_1^p(\xi, \eta)] + \\
 &\quad + T_i[f_i^p(\xi, \eta) - F_i^p(\xi, \eta)]\} \\
 D^{(\kappa,s)}[v_{i,p}(x,y) - v_{i,p+1}(x,y)] &= \\
 &= D^{(\kappa,s)}\beta_{i,p}(x,y) + D^{(\kappa,s)}\{\varepsilon_i \times \\
 &\quad \times T_{1,i}[f_{1,p}(\xi, \eta) - F_{1,p}(\xi, \eta)] + \\
 &\quad + T_i[f_{i,p}(\xi, \eta) - F_{i,p}(\xi, \eta)]\}
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$D^{(\kappa,s)}w_{i,p+1}(x,y) = D^{(\kappa,s)}[\bar{R}_i^p(x,y) - \bar{R}_{i,p}(x,y)], \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
 D^{(\kappa,s)}\alpha_{i,p+1}(x,y) &= D^{(\kappa,s)}[\bar{R}_i^p(x,y) - \\
 &\quad - R_i^{p+1}(x,y)], \\
 D^{(\kappa,s)}\beta_{i,p+1}(x,y) &= D^{(\kappa,s)}[\bar{R}_{i,p}(x,y) - \\
 &\quad - R_{i,p+1}(x,y)], \\
 p &\in \mathbb{N}_0, (x,y) \in \bar{D}_i, i = 1, 2, \kappa, s = 0, 1, \\
 \kappa + s &< 2.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Відмітимо, що в силу (10)

$$\begin{aligned}
 D^{(\kappa,s)}v_{i,0}(x,y) &\leq D^{(\kappa,s)}\bar{v}_{i,0}(x,y) \leq \\
 &\leq D^{(\kappa,s)}\bar{z}_{i,0}(x,y) \leq D^{(\kappa,s)}z_{i,0}(x,y),
 \end{aligned}$$

тобто, якщо $z_{i,0}(x,y), v_{i,0}(x,y) \in \bar{B}_{1,i}$, то і $\bar{z}_{i,0}(x,y)$ та $\bar{v}_{i,0}(x,y)$ також належать цій області.

Приймаючи до уваги (10), (12), (13)–(15), методом математичної індукції переконуємось, що якщо на кожному кроці ітерації (11) функції $q_{i,p}(x,y), c_{i,p}(x,y)$, які задовольняють умови (10), вибирати таким чином, щоб виконувалися нерівності

$$\begin{aligned}
 D^{(\kappa,s)}[z_{i,p}(x,y) - z_{i,p+1}(x,y)] - \\
 - q_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y)D^{(\kappa,s)}w_{i,p}(x,y) &\geq 0, \\
 D^{(\kappa,s)}[v_{i,p}(x,y) - v_{i,p+1}(x,y)] + \\
 + c_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y)D^{(\kappa,s)}w_{i,p}(x,y) &\leq 0, \\
 (x,y) &\in \bar{D}_i, i = 1, 2, \kappa, s = 0, 1, \\
 \kappa + s &< 2,
 \end{aligned} \tag{16}$$

то для довільних $p \in \mathbb{N}$ матимемо

$$\begin{aligned}
 D^{(\kappa,s)}v_{i,p}(x,y) &\leq D^{(\kappa,s)}v_{i,p+1}(x,y) \leq \\
 &\leq D^{(\kappa,s)}z_{i,p+1}(x,y) \leq D^{(\kappa,s)}z_{i,p}(x,y), \\
 D^{(\kappa,s)}\alpha_{i,p}(x,y) &\geq 0, D^{(\kappa,s)}\beta_{i,p}(x,y) \leq 0, \\
 \kappa, s &= 0, 1, (x,y) \in \bar{D}_i, i = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Лема 2. Якщо функції $f_i[U_i(x,y)] \in C_1(\bar{B}_i)$ та існують функції порівняння задачі (1)–(5), то множина функцій $q_{i,p}(x,y), c_{i,p}(x,y)$, які задовольняють умови (10), (16) не порожня.

Доведення. Дійсно покладемо

$$q_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y) = \begin{cases} \frac{D^{(\kappa,s)}\alpha_{i,p}(x,y)}{D^{(\kappa,s)}\tau_{i,p}(x,y)} & \text{при } D^{(\kappa,s)}w_{i,p}(x,y) \neq 0, \\ 0 & \text{при } D^{(\kappa,s)}w_{i,p}(x,y) = 0, \end{cases}$$

$$c_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y) = \begin{cases} -\frac{D^{(\kappa,s)}\beta_{i,p}(x,y)}{D^{(\kappa,s)}\tau_{i,p}(x,y)} & \text{при } D^{(\kappa,s)}w_{i,p}(x,y) \neq 0, \\ 0 & \text{при } D^{(\kappa,s)}w_{i,p}(x,y) = 0, \end{cases} \quad (18)$$

$$\tau_{i,p}(x,y) := \alpha_{i,p}(x,y) - \beta_{i,p}(x,y) + W_{i,p}(x,y),$$

$$\kappa, s = 0, 1, \kappa + s < 2, (x,y) \in \bar{D}_i, i = 1, 2, p \in \mathbb{N}_0.$$

Функції $q_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y)$ та $c_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y)$ визначені де $A := 6l\gamma q(y - y_0 + \alpha + x - x_0)$.
згідно (18) задовольняють умови (10), а

Із оцінок (19) випливає, що

$$\begin{aligned} & D^{(\kappa,s)}[z_{i,p}(x,y) - z_{i,p+1}(x,y)] - \\ & - q_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y)D^{(\kappa,s)}w_{i,p}(x,y) = \\ & = D^{(\kappa,s)}\alpha_{i,p}(x,y) - q_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y) \times \\ & \times D^{(\kappa,s)}w_{i,p}(x,y) + D^{(\kappa,s)}[R_i^p(x,y) - \\ & - \bar{R}_i^p(x,y)] \geq D^{(\kappa,s)}\alpha_{i,p}(x,y) \times \\ & \times \left(1 - \frac{D^{(\kappa,s)}w_{i,p}(x,y)}{D^{(\kappa,s)}\tau_{i,p}(x,y)}\right) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} D^{(\kappa,s)}w_{i,p}(x,y) = 0$$

для всіх $(x,y) \in \bar{D}_i, i = 1, 2, \kappa, s = 0, 1, \kappa + s < 2$.
Але тоді на підставі нерівностей (17)

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} D^{(\kappa,s)}z_{i,p}(x,y) &= \lim_{p \rightarrow \infty} D^{(\kappa,s)}v_{i,p}(x,y) := \\ &= U_i^{(\kappa,s)}(x,y). \end{aligned}$$

Очевидно

$$\begin{aligned} D^{(\kappa,s)}U_i^{(0,0)}(x,y) &:= D^{(\kappa,s)}U_i(x,y) = \\ &= U_i^{(\kappa,s)}(x,y), \end{aligned}$$

для всіх $p \in \mathbb{N}_0$ та $(x,y) \in \bar{D}_i, i = 1, 2, \kappa, s = 0, 1, \kappa + s < 2$.

Аналогічно доводиться і друга із нерівностей (16), якщо $c_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y)$ вибирати згідно (18) і Лема 2 доведена. $\square$

Таким чином справедлива наступна

Теорема 1. Нехай функції $f_i[U_i(x,y)] \in C_1(\bar{B}_i)$ та існують функції порівняння задачі (1)–(5).

Тоді для функцій $z_{i,p}(x,y), v_{i,p}(x,y)$ побудованих згідно закону (11), (12), де $q_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y), c_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y) \in C(\bar{D}_i), i = 1, 2$ задовольняють в області $\bar{B}_{1,i}$ умови (10), (16), справедливі нерівності (17) для всіх $p \in \mathbb{N}_0$ та $(x,y) \in \bar{D}_i, i = 1, 2$.

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} \max_{i,\kappa,s} \sup_{\bar{D}_i} |D^{(\kappa,s)}w_{i,0}(x,y)| &= d, \max_i L_i = l, \\ \max_{i,\kappa,s} \sup_{\bar{D}_i} \left(1 - q_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y) - c_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y)\right) &\leq q, \\ \max \left\{1, \sup_{\bar{D}} (y - y_0 + \alpha + x - x_0)\right\} &= \gamma. \end{aligned}$$

Тоді із (14) [7] неважко отримати оцінки

$$|D^{(\kappa,s)}w_{i,p}(x,y)| \leq \frac{Ap}{p!}d, \quad (19)$$

де $U_i(x,y) \in C^*(\bar{D}_i)$ є розв'язком системи інтегродиференціальних рівнянь (6).

Теорема 2. Нехай функції $f_i[U_i(x,y)] \in C_1(\bar{B}_i)$ та існують функції порівняння задачі (1)–(5). Тоді:

- 1) система рівнянь (6) у класі функцій $C^*(\bar{D}_i)$ має розв'язок і він єдиний при $(x,y) \in \bar{D}_i, i = 1, 2$,
- 2) послідовність функцій $\{D^{(\kappa,s)}z_{i,p}(x,y)\}, \{D^{(\kappa,s)}v_{i,p}(x,y)\}$, побудовані згідно закону (11), (12), (16), збігаються рівномірно при $(x,y) \in \bar{D}_i$ до єдиного розв'язку системи рівнянь (6),
- 3) мають місце оцінки (19),
- 4) для довільних $p \in \mathbb{N}_0, \kappa, s = 0, 1, \kappa + s < 2$, та $(x,y) \in \bar{D}_i, i = 1, 2$ справедливі нерівності

$$\begin{aligned} D^{(\kappa,s)}v_{i,p}(x,y) &\leq D^{(\kappa,s)}v_{i,p+1}(x,y) \leq \\ &\leq D^{(\kappa,s)}U_i(x,y) \leq \\ &\leq D^{(\kappa,s)}z_{i,p+1}(x,y) \leq D^{(\kappa,s)}z_{i,p}(x,y), \end{aligned} \quad (20)$$

5) збіжність ітераційного методу (11), (12), (16) не повільніша збіжності методу, коли $q_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y) \equiv c_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y) \equiv 0$ для всіх $\kappa, s = 0, 1, \kappa + s < 2, p \in \mathbb{N}_0$ тобто

$$\begin{aligned} z_{i,p+1}^*(x,y) &= R_i^p(x,y), \\ v_{i,p+1}^*(x,y) &= R_{i,p}(x,y), \\ (x,y) &\in \bar{D}_i. \end{aligned}$$

Єдиність розв'язку системи інтегродиференціальних рівнянь (6) доводиться методом від супротивного. Пункт 2) та оцінки (19) доведено вище. Для доведення справедливості диференціальних нерівностей (20) та пункту 5)

Теорему 2 достатньо використати міркування, наведені у розділі IV монографії [5].

Наслідок 1. Нехай виконують умови Теорему 1. Тоді задача (1)–(5) має в класі функцій $C^*(\bar{D})$ єдиний розв'язок.

Наслідок 2. Нехай функції $f_i[U_i(x,y)] \in C_1(\bar{B}_i)$ та $f_i[U_i(x,y)] \equiv H_i[U_i(x,y); 0]$, $i = 1, 2$, а $\varphi(y) = 0$, $y \in [y_0, y_1]$, $\varphi_1(x) = \psi(x) = 0$, $x \in [x_0, x_1]$.

Тоді, якщо $f_i[0] \geq (\leq) 0$, $i = 1, 2$ в області $\bar{B}_i$, то розв'язок задачі (1)–(5) $U_i(x,y) \geq (\leq) 0$ при $(x,y) \in \bar{D}_i$.

Розглянемо рівняння

$$\begin{aligned} D^{(1,1)}z(x,y) &= f_3(x,y,z(x,y), D^{(1,0)}z(x,y), D^{(0,1)}z(x,y)) := f_3[z(x,y)], \\ f_3 : \bar{B}_2 &\rightarrow \mathbb{R}, \bar{B}_2 \in \mathbb{R}^5. \end{aligned} \quad (21)$$

Вважатимемо, що праві частини рівнянь (1) та (21) задовольняють наступні умови:

$$1) f_2[U_2(x,y)] \in C_1(\bar{B}_2),$$

2) функція $f_3[z(x,y)] \in C(\bar{B}_2)$ і в області $\bar{B}_2$ має обмежені частинні похідні першого порядку по всім своїм аргументам, починаючи із третього, причому

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_3[z(x,y)]}{\partial D^{(\kappa,s)}z(x,y)} &:= a_{\kappa,s}(x,y) \geq 0, \\ (x,y) &\in \bar{D}_2, \end{aligned} \quad (22)$$

3) для всякої з простору $C^*(\bar{D}_2)$ функції $v(x,y) \in \bar{B}_2$

$$\begin{aligned} f_3[v(x,y)] &\geq (\leq) f_2[v(x,y)], \\ (x,y) &\in \bar{D}_2. \end{aligned} \quad (23)$$

Теорема 3. Нехай для правих частин рівнянь (1), (21) $f_2[U_2(x,y)]$ та $f_3[z(x,y)]$ виконуються наведені вище умови 1–3 і в області $\bar{B}_2$ існують функції порівняння задачі (1)–(5) та

(21), (2)–(5). Тоді для розв'язків цих задач при $(x,y) \in \bar{D}_2$ виконуються нерівності

$$U_2(x,y) \leq (\geq) z(x,y). \quad (24)$$

Доведення. Згідно Теорему 2 та Наслідку 1 розв'язки задач (1)–(5) та (21), (2)–(5) існують і вони єдині у просторі функцій $C^*(\bar{D}_2)$, а отже, позначивши $W(x,y) := z(x,y) - U_2(x,y)$ і використавши теорему про скінченні прирости, матимемо

$$\begin{aligned} D^{(1,1)}W(x,y) &= \tilde{a}_{1,0}(x,y)D^{(1,0)}W(x,y) + \\ &+ \tilde{a}_{0,1}(x,y)D^{(0,1)}W(x,y) + \tilde{a}_{0,0}(x,y)W(x,y) + \\ &+ (f_3[U_2(x,y)] - f_2[U_2(x,y)]), \end{aligned}$$

де $\tilde{a}_{\kappa,s}(x,y)$ —частинні похідні функції $f_3[z(x,y)]$ при деяких значеннях $D^{(\kappa,s)}z(x,y) \in \bar{B}_2$, $(x,y) \in \bar{D}_2$. Очевидно, функція $W(x,y)$ задовольняє однорідні умови (2)–(4), а права частина останнього рівняння відносно $W(x,y)$ належить просторові $C_1(\bar{B}_2)$, причому на підставі (23) вона задовольняє всім умовам Наслідку 2, а отже $W(x,y) \geq (\leq) 0$ при $(x,y) \in \bar{D}_2$, тобто мають місце нерівності (24). $\square$

Список використаних джерел

1. Перестюк М.О. Теорія рівнянь математичної фізики / М.О. Перестюк, В.В.Маринець. — К: ВПЦ «Київський університет», 2017. — 520 с.

2. Collatz. L. Funktionalanalysis und numerische Mathematik / L. Collatz. — Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1964.

3. Marynets V.V. On Goursat-Darboux boundary value problem for systems of nonlinear differential equations of hyperbolic

- type / V.V. Marynets, K.V. Marynets // Miskolc Mathematical Notes. — 2013. — V.14. — №3. — С. 1009-1020.
4. Маринець В.В. Про один підхід дослідження крайової задачі для квазілінійного рівняння гіперболічного типу із розривною правою частиною / В.В.Маринець, О.І. Когутич // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. Збірник наукових праць. — 2019. — №19. — С. 71-77.
 5. Маринець В.В. Аналітичні методи дослідження крайових задач / В.В.Маринець, К.В. Маринець, О.Ю. Питювка. — Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2019. — 288 с.
 6. Красносельский М.А. Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский, Г.М. Вайнико, П.П. Забрейко, Я.Б. Рутницький, Я.Б. Стеценко. — М: Наука, 1969. — 456 с.
 7. Marynets V.V. On one constructive method of the differential equations of the hyperbolic type/ V.V. Marynets, K.V. Marynets, O.Yu. Pytovka // Науковий вісник Ужгородського університету. — 2015. — №2(27). — С. 76-85.
 2. COLLATZ, L. (1964) *Funktionalanalysis und numerische Mathematik*. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag.
 3. MARYNETS, V. & KOHUTYCH, O. (2019) Pro odyd pidkhyd doslidzhennia kraiovoi zadachi dlia kvaziliniinoho rivniannia hiperbolichnoho typu iz rozryvnoi pravoio chastynoi. *Matematychni ta kompiuterni modeliuвання. Serii:Fizyko-matematychni nauky. Zbirnyk naukovykh prats.* 19. p. 71-77.
 4. MARYNETS, V. & MARYNETS, K. (2013) On Goursat-Darboux boundary value problem for systems of nonlinear differential equations of hyperbolic type. *Miskolc Mathematical Notes*. 14(3). p. 1009-1020.
 5. MARYNETS, V., MARYNETS, K. and PYTOVKA, O. (2019) *Analitichni metody doslidzhennia kraiovykh zadach*. Uzhhorod: Vydavnytstvo UzhNU "Hoverla".
 6. KRASNOSELSKYI, M., VAINYKO, H., ZABREIKO, P., RUTNYTSKYI, Ya. and STETSENKO, Ya. (1969) *Priblizhennoe reshenie operatornykh uravnenij..* M: Nauka.
 7. MARYNETS, V. & MARYNETS, K. & PYTOVKA, O. (2015) On one constructive method of the differential equations of the hyperbolic type. *Naukovyi visnyk Uzhhorodskoho universytetu*. 2(27). p. 76-85.

References

Надійшла до редколегії 23.11.2020