

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

№2 2023

Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Фізика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, механіко-математичного факультетів, факультету радіофізики, електроніки та комп’ютерних систем і факультету комп’ютерних наук та кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора, кандидата наук і PhD за спеціальностями 111, 112, 113, 104, 105 (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1188 від 24.09.2020) та за спеціальностями 121, 122, 123, 124 (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1471 від 26.11.2020), та реферується в Реферативному журналі Zentralblatt MATH, JournalTOCs, Crossref, ICI World of Journals, Road, Google Scholar, DOAJ, SCOPUS і Науковій періодиці України.

Редакційна колегія:

Моклячук Михайло Павлович, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор**;
Розора Ірина Василівна, д.ф.-м.н., доц., **заст. головного редактора**;
Bartlova Milada, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;
Bavula Vladimir, Prof., University of Sheffield, Great Britain;
Beghin Luisa, Prof., Sapienza Università di Roma, Italy;
Futorny Vyacheslav, Prof., Universidade de São Paulo, Brazil;
Giuliano Rita, Prof., Università di Pisa, Italy;
Gorlatch Sergei, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;
Hudak Stefan, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;
Kukhtarev Nickolai, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;
Leonenko Nikolay, Prof., Cardiff University, Great Britain;
Medvids Arturs, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;
Olenko Andriy, Prof., La Trobe University, Australia;
Orsingher Enzo, Prof., Sapienza University of Rome, Italy;
Ostrovsky Eugene, Prof., Bar-Ilan University, Israel;
Pogany Tibor, Prof., University of Rijeka, Croatia;
Rontó Miklós, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;
Silvestrov Dmitrii, Prof., Stockholms universitet, Sweden;
Sottinen Tommi, Prof., University of Vaasa, Finland;
Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;
Trofimchuk Sergey, Prof., Universidad de Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;
Volodin Andrei, Prof., University of Regina, Canada;
Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;
Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Безущак Оксана Омелянівна, д.ф.-м.н., проф.;
Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;
Гаращенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;
Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;
Жук Ярослав Олександрович, д.ф.-м.н., проф.;
Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., проф.;
Курченко Олександр Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;

Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;
Львов Віктор Анатолійович, д.ф.-м.н., проф.;
Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;
Майборода Ростислав Євгенович, д.ф.-м.н., проф.;
Мішура Юлія Степанівна, д.ф.-м.н., проф.;
Пашко Анатолій Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Петравчук Анатолій Петрович, д.ф.-м.н., проф.;
Погорілий Сергій Дем'янович, д.т.н., проф.;
Савенков Сергій Миколайович, д.ф.-м.н., доц.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.;
Сливка-Тилищак Ганна Іванівна, д.ф.-м.н., проф.;
Хусаїнов Денис Ях'євич, д.ф.-м.н., проф.;

Редакційний відділ:

Затула Дмитро Васильович, **відповідальний секретар**;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
П'ятецька Олена Василівна, visnyk.phys-math@ukr.net;
Отто Георгій Костянтинович, **технічний редактор**, ottogk@gmail.com.

Адреса редакційної колегії:

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03022 Тел. (044) 259-01-49
bphm@knu.ua, fm.visnyk@ukr.net

ISSN 1812-5409

Засновник: Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Свідцтво про державну реєстрацію: КВ №16299-4771Р від 11.12.2009 року

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2>

Безкоштовно

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics
No. 2, 2023.

The journal contains results of new research in various fields of mathematics, computer science, mechanics, physics and radiophysics for researchers, academic staff, postgraduates, engineers and students. It is published on the recommendation of the Academic Councils of Faculty of Physics, Faculty of Radiophysics, Electronics and Computer Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics and the Faculty of Computer Science and Cybernetics.

Journal "Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics" is included in the List of scientific professional publications of Ukraine, in which the results of the theses for obtaining the scientific degrees of a doctor and a candidate of sciences (PhD) in specialties 111, 112, 113, 104, 105, 121, 122, 123 and 124 can be published (approved by the orders of the Ministry of Education and Science of Ukraine No. 1188 dated September 24, 2020 and No. 1471 dated November 26, 2020).

Journal is referenced in the abstract journal **Zentralblatt MATH (zbMATH), JournalTOCs, Crossref, ICI World of Journals, Road, Google Scholar, DOAJ, SCOPUS and Scientific periodicals of Ukraine.**

Editorial Board

Moklyachuk Mikhail Pavlovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine,
Editor in Chief;

Rozora Iryna Vasylyivna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Ukraine, Deputy Editor in Chief;

Bartlova Milada, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;

Bavula Vladimir, Prof., University of Sheffield, Great Britain;

Beghin Luisa, Prof., Sapienza Università di Roma, Italy;

Futorny Vyacheslav, Prof., Universidade de São Paulo, Brazil;

Giuliano Rita, Prof., Università di Pisa, Italy;

Gorlatch Sergei, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;

Hudak Stefan, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;

Kukhtarev Nickolai, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;

Leonenko Nikolay, Prof., Cardiff University, Great Britain;

Medvids Arturs, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;

Olenko Andriy, Prof., La Trobe University, Australia;

Orsingher Enzo, Prof., Sapienza University of Rome, Italy;

Ostrovsky Eugene, Prof., Bar-Ilan University, Israel;

Pogʻany Tibor, Prof., University of Rijeka, Croatia;

Rontó Miklós, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;

Silvestrov Dmitrii, Prof., Stockholm University, Sweden;

Sottinen Tommi, Prof., University of Vaasa, Finland;

Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;

Trofimchuk Sergey, Prof., Universidad de Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;

Volodin Andrei, Prof., University of Regina, Canada;

Akimenko Vitaliy Vladimirovich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Anisimov Igor Alekseevich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Anisimov Anatoliy Vasylovych, Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Bezuschak Oksana Omelyanivna, Dr., Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Voloshin Aleksey Fedorovich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Garaschenko Fedir Georgievich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Yezhov Stanislav Nikolaevich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Zhuk Yaroslav Aleksandrovich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Zaslavskiy Volodymyr Anatolijovych, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Kurchenko Oleksandr Oleksijovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Kudin Volodymyr Ivanovich, Dr. Sci., Sr. Sci. Researcher, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Lvov Victor Anatolijovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Makarets' Nikolay Vladimirovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Maiboroda Rostyslav Yevhenovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Mishura Yuliya Stepanivna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Pashko Anatolij Oleksijovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Perestyuk Mykola Oleksijovych, Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Petravchuk Anatolij Petrovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Pogorily Serhiy Demyanovych, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Savenkov Serhij Mykolajovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Ukraine;
Skrzyevisky Valery Antonovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Slyvka-Tylyshchak Anna Ivanivna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Uzhhorod National University, Uzhhorod, Ukraine;
Husainov Denys Yah'yevych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine.

ISSN: 2218-2055 (on-line version)

ISSN: 1812-5409 (printed version)

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2>

Founders: Taras Shevchenko National University of Kyiv

Foundation year: 1991 (series of bulletins of Kyiv University "Mathematics and Mechanics", "Physics", "Modeling and Optimization of Complex Systems" was reorganized into "Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics").

Certificate of state registration: KB № 16299-4771 P dated 11.12.2009

Issued: 4 times a year

Mailing Address

Taras Shevchenko National University of Kyiv
Faculty of Computer Science and Cybernetics,
03022, Ukraine, Kyiv, 4d Academician Glushkov avenue
Phone: (044) 259-01-49
bphm@knu.ua, fm.visnyk@ukr.net

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Борисенко О.Д., Зубченко В.П., Мішура Ю.С., Перестюк М.О., Ямненко Р.Є., Яневич Т.О. Михайло Павлович Моклячук – до 75-річчя від дня народження	13
Безущак О.О., Автоморфізми груп Маккі	16
Голомозий В. В., Мішура Ю. С., Яневич Т. О. , Ізарова І. О., Порівняння 2D згорток та щільних нейронних мереж в моделях природної обробки мови з кількома вхідними реченнями	20
Голіченко І.І., Моклячук М.П. Задача фільтрації для періодично корельованих випадкових послідовностей із пропущеними даними	30
Зубченко В.П., Авраменко А.В. Дослідження скорингової моделі для кредитопозичальників банку	44
Ральченко К.В., Яковлев М.С. Асимптотична нормальність оцінок параметрів змішаного дробового броунівського руху	54
Грігутіс А. Імовірнісний огляд ймовірностей дефолту для портфелів з низьким рівнем дефолту введених К. Плутто та Д. Таше	63
Боднарчук І.М. Асимптотика м'якого розв'язку параболічного рівняння із загальною стохастичною мірою	75

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Батутіна Т.Я., Олійник В.Н. Напівемпіричне оцінювання акустичних навантажень на головну частину ракети при нестандартній конфігурації стартових споруд	84
Борисейко О.В., Гусак В.О., Маципура В.Т. Використання комбінацій двох варіантів спряження хвильових полів у методі часткових областей	88
Вайсфельд Н.Д., Журавльова З.Ю. Дослідження напружено-деформівного стану півнескінченного порожнистого поропружного циліндру під дією вісісиметричного навантаження	92
Вайсфельд Н.Д., Процеров Ю.С., Толкачов А.В. Плоска задача про коливання балкової плити на прямокутній основі	96
Даляк Т.М., Шацький І.П. Про крихке руйнування тіла з частково залікованою зірчастою тріщиною	100
Жук О.П., Жук Я.О., Клімчук Т.В. Взаємодія системи сторонніх об'єктів у рідині, обумовлена силами акустичного випромінювання	104
Жук Я.О., Мельниченко М.М., Андрущенко В.О., Кір'єв А.М., Пучко Н.П., Водотовка М.А. Експериментальне вивчення руйнування матеріалів після ударно-хвильового навантаження	108
Зражевський Г.М., Зражевська В.Ф. Застосування ВРОЕ та CVaR при визначенні оптимальних керувань формами коливань круглої платівки	112
Камінський А. О., Дудик М. В., Решітник Ю.В. Двопараметрична модель зони передруйнування у квазіпружному матеріалі біля вершини міжфазної тріщини	116
Куценко О.Г., Харитонов О.М., Куценко А.Г. Розклинювання підінтерфейсної тріщини пластичним наплавленням	120
Куценко О.Г., Харитонова Л.В., Круш Р.М. Закономірності росту плоских тріщин в пластинах	124
Лубков М.В. Моделювання деформування соляних структур внаслідок гравітаційної плавучості	128
Маковійчук М. В., Шацький І. П. Аналіз граничної рівноваги зігнутої сферичної оболонки з колінеарними тріщинами за локальним та інтегральним критеріями руйнування	132
Маслов Б.П. Побудова критерію довготривалого руйнування втоми для тонкостінних шаруватих оболонок	136
Онишкевич В.М., Барабаш Г.М. Фрикційний розігрів системи штамп-пружна півплощина при ковзанні вздовж твірної	140
Плацинська А.В., Романов О.В. Щодо розрахунку втомної довговічності призматичних стержнів за умов одновісного асиметричного згину	144

Середницька Х.І. Вплив поздовжньої і поперечної теплопровідності міжфазних щілин на ефективні параметри біматеріалу	148
Трач В.М., Подворний А.В., Жукова Н.Б. Стійкість нетонких анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці під розподіленим боковим тиском	152
Ушакова В.С., Ушаков О.В., Горун О.Ю. Застосування кубічних сплайнів у моделюванні процесів повзучості лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану	156
Хорошев К. Г., Дученко К. О., Кикоть С. В. Векторно-алгебраїчний підхід до кінематичного аналізу структурних груп 2-го класу за Артоболевським	160
Шевельова Н.В., Ходанен Т.В. Система колінеарних електрично та магнітно проникних тріщин між двома п'єзоелектромагнітними матеріалами	164
Шикун О.М., Жукова Н.Б. Модель нелінійного деформування зернистих композитів	168
Юрчук В.М., Сінчило С.В. Крутильні пружні хвилі. Деякі аспекти нелінійного аналізу	172
Яковенко Н.Д., Якименко С.М. Напружено-деформований стан циліндричних тіл з мікроструктурними перетвореннями при імпульсному навантаженні	176
Ящук В. М., Гребіник А.Г., Лебедева І.В., Ваціліна О. В., Лосицький М.Ю., Навозенко О.М. Сенсорні системи з оптичним відгуком	180
Собчук В.В., Зеленська І.О. Побудова асимптотики розв'язку для системи сингулярно збурених рівнянь методом істотно особливих функцій	184

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Бекешене С., Наконечний О., Капустян О., Шевчук Ю., Лосєва М. Аналіз та прогнозування динаміки чисельності осіб зі стресовим синдромом в умовах невизначеності	195
Іванов С.М., Матвієнко С.О. Розпізнавання порушень серцевого ритму у дітей за інтегральними параметрами електрокардіограм	200
Колесников В.А. Ефективний чисельний метод для розв'язання рівняння Річардса-Клюта з відстеженням зони повного насичення	206
Круковець Д.Ю. Оновлений DTW+K-Means підхід з LSTM та ARIMA моделями для прогнозування базової інфляції	214
Рець В.О. Розв'язання задачі комівояжера на основі методу відпалу з урахуванням нечіткості сприйняття плину часу	226
Скуржанський О. Г., Марченко О. О. Нейромережеві підходи для задач письмового асистента	232

CONTENTS

ALGEBRA, GEOMETRY AND PROBABILITY THEORY

Borysenko O., Zubchenko V., Mishura Yu., Perestyuk M., Yamnenko R., Yanevych T., Mykhailo Moklyachuk – to the 75th anniversary of his birth	13
Bezushchak O.O. Automorphisms of Mackey groups	16
Golomoziy V. V., Mishura Yu. S., Ianevych T. O., Izarova I. O. Comparison of 2D convolutions and dense neural networks for natural language process	20
Golichenko I. I., Moklyachuk M. P. Filtering problem for periodically correlated stochastic sequences with missing observations	30
Zubchenko V.P., Avramenko A.V. Investigation of the scoring model for bank borrowers	44
Ralchenko K. V., Yakovliev M. S. Asymptotically normal estimation of parameters of mixed fractional Brownian motion	54
Grigutis A., Probabilistic Overview of Probabilities of Default for Low Default Portfolios by K. Pluto and D. Tasche	63
Bodnarchuk I.M. Asymptotics of the mild solution of a parabolic equation with a general stochastic measure	75

DIFFERENTIAL EQUATIONS, MATHEMATICAL PHYSICS AND MECHANICS

Batutina T. Ya., Oliynik V. N. Semiempirical assessment of acoustic loads on the rocket head with a non-standard configuration	84
Boryseiko O.V., Husak V.O., Matsypura V.T. Using combinations of two options of wave fields conjugation in the method of partial domains	88
Vaysfeld N.D., Zhuravlova Z.Yu. Investigation of porous stress state of semi-infinite hollow cylinder under axisymmetric loading	92
Vaysfeld N., Protserov Yu., Tolkachov A. Plane problem on beam plate's oscillations on rectangular base	96
Dalyak T. M., Shatsky I. P. On brittle fracture of a body with partial healed star-shaped crack	100
Zhuk O.P., Zhuk Ya.O., Klimchuk T.V. Interaction of foreign bodies in liquid caused by the acoustic radiation field	104
Zhuk Ya.O., Melnichenko M.M., Andruschenko V.O., Kiriev A.M., Puchko N.P., Vodotovka M.A. Experimental study of destruction of materials after shock-wave loading	108
Zrazhevsky G.M., Zrazhevskaya V.F. Application of BPOE and CVaR in the determination of optimal controls of round plate oscillations	112
Kaminsky A. O., Dudyk M. V., Reshitnyk Yu. V. Two-parameter model of the prefracture zone in a quasi-elastic material near the tip of an interface crack	116
Kutsenko O.G., Kharytonov O.M., Kutsenko A.H. Wedging of the subinterface crack by plastic cladding	120
Kutsenko O.G., Kharytonova L.V., Krush R.M. Regularities of flat cracks growth in plates	124
Lubkov M.V. Modelling of the salt structures deforming due to gravitational buoyancy	128
Makoviichuk M.V., Shatskyi I.P. Analysis of the limit equilibrium of a bent spherical shell with collinear cracks according to local and integral failure criteria	132
Maslov B.P. Construction of long-term fatigue failure criteria for thin-walled laminated shells	136
Onyshkevych V.M., Barabash G.M. Frictional heating of system punch - elastic half plane when sliding along creative line	140
Plashchynska A.V., Romanov O.V. To the computation of the fatigue life of prismatic bars under uniaxial asymmetric bending	144
Serednytska Kh.I. Influence of longitudinal and transverse thermal conductivity of the interface crack on the effective parameters of the bi-material	148

Trach V.M., Podvornyi A.V., Zhukova N.B. Stability of non-thin anisotropic cylindrical shells in spatial position under distributed lateral pressure	152
Ushakova V.S., Ushakov O.V., Gorun O.Yu. The use of cubic splines in the modeling of creep processes of linear viscoelastic materials under complex stress state	156
Khoroshev K. G., Duchenko K. O., Kykot S. V. The vector algebra approach to the kinematic analysis of the structural groups of the 2nd class by Artobolevsky	160
Shevelova N.V., Khodanenko T.V. A set of collinear electrically and magnetically permeable cracks between two piezoelectromagnetic materials	164
Shikula E.N., Zhukova N.B. Model of nonlinear deformation of granular composites	168
Yurchuk V.M., Sinchilo S.V. Torsional elastic waves. Some aspects of nonlinear analysis	172
Yakovenko N. D., Yakymenko S.M. Investigation of the stress-strain state of a cylinder with microstructural transformations under pulse loading	176
Yashchuk V. M., Grebinyk A.G., Lebedyeva I. V., Vashchilina O. V., Losytskyi M.Yu., Navozenko O. M. Sensor Systems with Optical Response	180
Sobchuk V.V., Zelenska I.O. Construction of asymptotics of the solution for a system of singularly perturbed equations by the method of essentially singular functions	184

COMPUTER SCIENCES AND INFORMATICS

Bekesiene S., Nakonechnyi O., Kapustian O., Shevchuk I., Loseva M. Dynamics analysis and forecast of number of individuals with stress syndrome under uncertainties	195
Ivanov S. M., Matvienko S. O., Recognition of heart rhythm disorders in children by integral parameters of electrocardiograms	200
Kolesnykov V. A. An effective numerical method for solving the Richards-Klute equation with tracking of full saturated zone	206
Krukovets D. Updated DTW+K-Means approach with LSTM and ARIMA-type models for Core Inflation forecasting	214
Rets V.O. Solution of the traveling salesman problem based on the annealing method with the fuzziness of the time perception	226
Skurzhanskyi O. H., Marchenko A. A., Neural approaches for writing assistant tasks	232

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ ТА ТЕОРИЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.1>

Олександр Борисенко¹, к.ф.-м.н., доц.,
Володимир Зубченко², к.ф.-м.н., доц.,
Юлія Мішура³, д.ф.-м.н., проф.,
Микола Перестюк⁴, д.ф.-м.н., проф., академік
НАН України,
Ростислав Ямненко⁵, д.ф.-м.н., доц.,
Тетяна Яневич⁶, к.ф.-м.н., доц.

**Михайло Павлович Моклячук – до
75-річчя від дня народження**

^{1,2,3,4,5,6}Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13,
e-mail: ¹borysenko_oleksandr@knu.ua, ²volodymyr.zubchenko@knu.ua, ³yuliyamishura@knu.ua, ⁴pmo@univ.kiev.ua, ⁵rostyslav.yamnenko@knu.ua, ⁶tetianayanevych@knu.ua

Communicated by Dr. Rozora I.V.

On September 28, 2023, Mykhailo Moklyachuk, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Laureate of the State Prize of Ukraine in Education, and Academician of the Academy of Sciences of the Higher School of Ukraine, celebrated his 75th birthday.



Mykhailo Pavlovych Moklyachuk was born in Rozhychna village, Orativ district, Vinnytsia region. In 1972, he graduated from Taras Shevchenko

Oleksandr Borysenko¹, Ph. D., Assoc. prof.,
Volodymyr Zubchenko², Ph. D., Assoc. prof.,
Yuliya Mishura³, Dr. Sc., Prof.,
Mykola Perestyuk⁴, Dr. Sc., Prof., Academician
of NAS of Ukraine,
Rostyslav Yamnenko⁵, Dr. Sc., Assoc. prof.
Tetyana Yanevych⁶, Ph. D., Assoc. prof.

**Mykhailo Moklyachuk – to the 75th
anniversary of his birth**

^{1,2,3,4,5,6}Taras Shevchenko National University of Kyiv, 64/13 Volodymyrska st., Kyiv, Ukraine, 01601,
e-mail: ¹borysenko_oleksandr@knu.ua, ²volodymyr.zubchenko@knu.ua, ³yuliyamishura@knu.ua, ⁴pmo@univ.kiev.ua, ⁵rostyslav.yamnenko@knu.ua, ⁶tetianayanevych@knu.ua

State University of Kyiv with a degree in probability theory and mathematical statistics. Since 1976, Mykhailo Moklyachuk has been working at Taras Shevchenko National University of Kyiv at the Department of Probability Theory and Mathematical Statistics (since 2009 – the Department of Probability Theory, Statistics and Actuarial Mathematics), where in 1977, under the supervision of Mykhailo Yadrenko, he defended his dissertation for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences on “Some problems of linear forecasting of homogeneous random fields”. In the same year, he received the Young Scientists Award of Taras Shevchenko State University of Kyiv for his scientific achievements. In 1980 he obtained International Science Exchange Program (ISEP) grant (Stanford University visiting scholar).

In 1995, Mykhailo Moklyachuk defended his doctoral dissertation on “Estimation of Functionals from Stochastic Processes and Random Fields”, his scientific advisor was Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Ukraine Mykhailo Yadrenko. In 1999, he received the Taras Shevchenko Prize of the Taras Shevchenko National University of Kyiv for the best textbook (“Calculus of variations. Extreme problems”), and in 2012, the State Prize of Ukrai-

ne in Education.

In 2016, Professor Mokliachuk was elected an academician of the Academy of Sciences of Higher Education of Ukraine. In 2019, he was awarded the badge of the Ministry of Education and Science of Ukraine “For Scientific and Educational Achievements”.

Mykhailo Mokliachuk is the author of more than 200 scientific papers, including 12 monographs, 13 textbooks and manuals. He is the editor-in-chief of the journal “Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physical and Mathematical Sciences” and a member of the editorial boards of the journals “Statistics, Optimization & Information Computing”, “Stochastic Modeling and Applications”, “Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics”. Under his supervision, 7 postgraduate students defended their dissertations for the title of Candidate of Physical and Mathematical Sciences.

Mykhailo Pavlovych is a member of international scientific societies such as the American Mathematical Society and the Institute of Mathematical Statistics (USA). He is an active participant in numerous international scientific conferences, seminars and schools.

Mykhailo Pavlovych’s scientific research is devoted to the study of stationary random processes, functionalities of stationary processes and random fields. For example, in [2] he investigates methods for estimating linear functionals of unknown values of stochastic processes. The formulas for calculating the root mean square error of the optimal estimation are presented. The least favorable spectral widths and minimum (robust) spectral characteristics are found.

Monograph [3] describes methods for estimating linear functionals of unknown values of vector-valued stationary random sequences and processes. The problems of extrapolation, interpolation and filtering are investigated. Two main approaches to solving estimation problems are developed. The first one, the case of spectral certainty, is based on the assumption that the spectral density matrices of stochastic sequences and processes are known exactly. The second approach, the case of spectral uncertainty, is based on the assumption that the spectral density matrices of processes are not known exactly, but classes of permissible values of spectral den-

sities are given. These classes of densities describe different models of vector-valued stationary stochastic processes.

Methods for estimating linear functionals from unknown values of random fields are described in [4]. The formulas for calculating the spectral characteristic and the root mean square error of the optimal estimate are given. The least favorable spectral widths and minimum (robust) spectral characteristics are found.

The monograph [5] investigates methods for estimating linear functionals from unknown values of stochastic processes. The formulas for calculating the root mean square error of the optimal estimate are given. The least favorable spectral densities and minimum (robust) spectral characteristics are found.

The monograph [8] investigates the problems of optimal estimation by the mean-squared criterion of linear functions that depend on unknown values of periodically correlated isotropic random fields. The estimates are based on observations of fields with noise. The formulas for calculating the mean square errors and spectral characteristics of the optimal linear functionals are obtained under conditions of spectral certainty, where the spectral densities of the fields are known exactly.

A thorough study of spectral theory and estimation methods for random processes with stationary increments is provided in [10]. In particular, the estimation of unknown value functions for random processes with stationary increments, including ARIMA processes, seasonal time series, and the class of cointegrated sequences, is investigated. A solution is proposed for the problems of extrapolation (forecasting), interpolation (estimation of missing values) and filtering (smoothing) based on observations with and without noise in discrete and continuous time domains.

The monograph [11] investigates the problems of optimal estimation by the mean-squared criterion of linear functions constructed on the basis of unknown values of stationary random processes. The estimates are based on observations of processes with an additional stationary noise process. The aim of the study is to develop methods for finding optimal estimates of the functional in the case when some observations are missing.

The monograph [12] investigates random processes involving random variables associated

with the concepts of uncertainty or randomness. The study of such processes is currently of particular interest in mathematics and applied sciences. The growing interest of researchers in this area is caused by various applications in such fields as mechanics, acoustics, economics, medicine, biology, and others. The purpose of this book is to combine the needs of practitioners and si-

multaneously present new theoretical results.

The staff of Mechanics and Mathematics faculty sincerely congratulates Mykhailo Moklyachuk on this significant date and wishes him good health, family happiness, creative inspiration and new achievements in his scientific research.

Monographs co-authored by M. Moklyachuk

1. Moklyachuk M. (2008). *Robust estimates for functionals of stochastic processes*. VPC "Kyiv University" [in Ukrainian]. (Моклячук М.П. (2008). *Робастні оцінки функціоналів від стохастичних процесів*. ВПЦ «Київський університет».)
2. Moklyachuk M. & Masyutka O. *Minimax estimates for functionals of stochastic processes*. VPC "Kyiv University" [in Ukrainian]. (Масютка О.Ю., Моклячук М.П. (2012). *Мінімаксні оцінки функціоналів від стаціонарних процесів*. ВПЦ «Київський університет».)
3. Moklyachuk M., Masyutka O. (2012). *Minimax-robust estimation technique for stationary stochastic processes*. LAP Lambert Academic Publishing.
4. Moklyachuk M. & Shchestyuk N. (2013). *Estimates of functionals of random fields*. Uzhgorod: Autdor-Shark [in Ukrainian]. (Оцінки функціоналів від випадкових полів.) (Моклячук М.П., Щестюк Н.Ю. (2013). *Оцінки функціоналів від випадкових полів*. Уж.: ПП «АУТДОР-ШАРК».)
5. Golichenko I. & Moklyachuk M. (2014). *Estimates of functionals of periodically correlated stochastic processes*. Kyiv, NVP "Interservice" [in Ukrainian]. (Голіченко І.І., Моклячук М.П. (2014). *Оцінки функціоналів від періодично корельованих стохастичних процесів*. Київ, НВП «Інтерсервіс».)
6. Luz M. & Moklyachuk M. (2016). *Estimates of functionals from processes with stationary increments and cointegrated sequences*. Kyiv, NVP "Interservice" [in Ukrainian]. (Луз М.М., Моклячук М.П. (2016). *Оцінки функціоналів від процесів зі стаціонарними приростами та коінтегрованих послідовностей*. НВП «Інтерсервіс».)
7. Moklyachuk M. & Golichenko I. (2016). *Periodically Correlated Processes Estimates*. LAP LAMBERT Academic Publishing.
8. Moklyachuk M., Masyutka O., & Golichenko I. (2018). *Estimates of Periodically Correlated Isotropic Random Fields*. Nova Science Publishers.
9. Moklyachuk M. & Sidei M. (2016). *Estimates of functionals from stationary processes with missing observations*. Kyiv, NVP "Interservice" [in Ukrainian]. (Моклячук М.П., Сідей М.І. (2018). *Оцінки функціоналів від стаціонарних процесів за спостереженнями з пропусками*. НВП «Інтерсервіс», Київ.)
10. Luz M. & Moklyachuk M. (2019). *Estimation of Stochastic Processes with Stationary Increments and Cointegrated Sequences*. Wiley – ISTE.
11. Moklyachuk M., Sidei M. & Masyutka O. (2019). *Estimation of Stochastic Processes with Missing Observations*. Nova Science Publishers.
12. Moklyachuk M., Editor (2023). *Stochastic Processes: Fundamentals and Emerging Applications*. NY: Nova Science Publishers.

Received: 03.12.2023

УДК 512.554.37, 512.54

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.2>

Оксана Безущак, д.ф.-м.н., проф.

Автоморфізми груп Маккі

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володи-
мирська, 60,
e-mail: bezushchak@knu.ua

Oksana Bezushchak, Dr Sci., Prof.

Automorphisms of Mackey groups

Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 01033, Kyiv, 60 Volodymyrska str.,
e-mail: bezushchak@knu.ua

Розглядаються тотальні підпростори в просторі лінійних функціоналів над нескінченно-вимірними векторними просторами та пов'язані з ними алгебри і групи Маккі. Ця стаття присвячена опису автоморфізмів груп Маккі $SL_{\infty}(V|W)$, $O_{\infty}(f)$ та $SU_{\infty}(f)$ над полями характеристики, відмінної від 2 або 3. Для цього досліджується зв'язок між автоморфізмами полів та автоморфізмами заданих груп.

Дж.Холл довів, що нескінченними простими фінітарними періодичними групами є або знакозмінні групи на нескінченних множинах, або групи Маккі над полями, що є алгебричними розширеннями скінченних полів. Автоморфізми нескінченних знакозмінних груп були описані в роботах Дж.Шрайера та С.Улама. Описом автоморфізмів фінітарних груп Маккі та спеціальних фінітарних унітарних груп Маккі ми завершуємо класифікацію автоморфізмів усіх нескінченних простих фінітарних періодичних груп над полями характеристики, що не дорівнює 2 або 3. Доведення ґрунтується на описі автоморфізмів елементарних лінійних груп над асоціативними кільцями, який належить І.Голубчику, О.Михалюву та Ю.Зельманову.

Ключові слова: Автоморфізм, анти-автоморфізм, нескінченна проста фінітарна періодична група, група Маккі.

We consider total subspaces of linear functionals on an infinite-dimensional vector space and the related Mackey algebras and groups. We outline the description of automorphisms of Mackey groups $SL_{\infty}(V|W)$, $O_{\infty}(f)$, and $SU_{\infty}(f)$ over fields of characteristics not equal to 2, 3. Moreover, the paper explores the relationship between field automorphisms and automorphisms of the aforementioned groups.

J.Hall proved that infinite simple finitary torsion groups are the alternating groups on infinite sets or Mackey groups over a field, which is an algebraic extension of a finite field. J.Schreier and S.Ulam described automorphisms of infinite alternating groups. With the description of automorphisms of finitary Mackey groups and special finitary unitary Mackey groups we finish classification of automorphisms of all infinite simple finitary torsion groups over fields of characteristics not equal to 2, 3. The proof is based of description of automorphisms of elementary linear groups over associative rings that due to I.Golubchik, A.Mikhalev and E.Zelmanov.

Key Words: Automorphisms, anti-automorphisms, infinite simple finitary torsion group, Mackey group.

Communicated by Prof. Anatolii Petravchuk

1 Introduction

Let $\mathbb{F}$ be a field of characteristic $\neq 2, 3$; and let V be an infinite-dimensional vector space over $\mathbb{F}$. Let V^* denote the vector space of all linear functionals $V \rightarrow \mathbb{F}$. For an element $v \in V$ and a linear functional $w \in V^*$, we denote $w(v) = (v|w)$.

A subspace $W \subset V^*$ is called *total* if $v \in V$, $(v|W) = (0)$ implies $v = 0$.

Let $\text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ be the associative algebra of all linear transformations $V \rightarrow V$. Additionally,

define

$$\text{End}_{fin}(V) = \{\varphi \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V) \mid \dim_{\mathbb{F}} \varphi(V) < \infty\}.$$

The space V^* has a natural structure of a right $\text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ -module. Given a linear functional $\chi : V \rightarrow \mathbb{F}$ and a linear transformation $\varphi : V \rightarrow V$ we define

$$(\chi\varphi)(v) = \chi(\varphi(v)), \quad v \in V.$$

The subalgebras

$$A(V|W) = \{\varphi \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V) \mid W\varphi \subseteq W\}$$

and

$$A_{fin}(V|W) = A(V|W) \cap \text{End}_{fin}(V|W)$$

are called the *Mackey algebra* and the *finitary Mackey algebra*, respectively. Clearly, $A_{fin}(V|W)$ is an ideal of the algebra $A(V|W)$. For more information about Mackey algebra, see [6, 7, 8].

The algebra $A_{fin}(V|W)$ can be identified with the tensor product

$$V \otimes_{\mathbb{F}} W, \quad (v_1 \otimes w_1)(v_2 \otimes w_2) = (v_2|w_1)v_1 \otimes w_2.$$

Here, an element $\sum_i v_i \otimes w_i$ is viewed as the linear transformation

$$v \rightarrow \sum_i (v|w_i)v_i, \quad v \in V.$$

The algebra $A_{fin}(V|W)$ of a total subspace $W \subset V^*$ is a nonunital locally matrix algebra; see [1, 3, 4].

Let $GL(V)$ denote the group of all invertible linear transformations on V . The Mackey algebras $A(V|W)$ and $A_{fin}(V|W)$ give rise to the groups:

$$GL(V|W) = A(V|W) \cap GL(V);$$

$$GL_{\infty}(V|W) = (A_{fin}(V|W) + Id_V) \cap GL(V),$$

where Id_V is the identity mapping $V \rightarrow V$. We also consider the group

$$SL_{\infty}(V|W) = [GL_{\infty}(V|W), GL_{\infty}(V|W)].$$

This group $SL_{\infty}(V|W)$ is a direct limit of groups $SL_n(\mathbb{F})$, and it is a diagonally local SL -group in the sense of [2].

A bijective linear transformation (respectively, additive map) φ of an associative algebra (respectively, ring) A is called an *anti-automorphism* if

$$\varphi(ab) = \varphi(b)\varphi(a)$$

for arbitrary elements $a, b \in A$. An anti-automorphism $*$ is called an *involution* if

$$(a^*)^* = a \quad \text{for an arbitrary element } a \in A.$$

N. Jacobson [6] showed that a finitary Mackey algebra $A_{fin}(V|W)$ has an involution if and only if the vector space V is equipped with a weakly Hermitian nondegenerate bilinear form $f(x, y)$

such that W constitutes the space of linear functionals

$$\widehat{x} : v \rightarrow f(v, x), \quad v \in V,$$

where x runs over V . In this case, we call the pair (V, W) *dual*; and the anti-automorphism is the transpose

$$\varphi \rightarrow \varphi^t, \quad f(\varphi(v_1), v_2) = f(v_1, \varphi^t(v_2)).$$

Let us note that a linear transformation $\varphi \in \text{End}_{\mathbb{F}}(M)$ has a transpose if and only if it lies in $A(V|W)$.

We also note that an anti-automorphism t is an involution if and only if the form f is symmetric or skew-symmetric.

Consider the group $O(f)$ of orthogonal linear transformations defined as

$$O(f) = \{a \in A(V|W) \mid a^t = a^{-1}\}$$

and

$$O_{\infty}(f) = O(f) \cap GL_{\infty}(V|W).$$

If the field $\mathbb{F}$ is equipped with an automorphism of order 2: $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{F}$, and the form f is semi-linear, i.e.

$$f(\alpha v_1, v_2) = \alpha f(v_1, v_2); \quad f(v_1, \alpha v_2) = \bar{\alpha} f(v_1, v_2),$$

then we define unitary groups as follows:

$$U(f) = \{a \in A(V|W) \mid \bar{a}^t = a^{-1}\},$$

$$U_{\infty}(f) = U(f) \cap GL_{\infty}(V|W)$$

and their special analogs:

$$SU(f) = [U(f), U(f)],$$

$$SU_{\infty}(f) = [U_{\infty}(f), U_{\infty}(f)].$$

We also consider scalar-unitary groups defined as follows:

$$\tilde{U}(f) = \{a \in A(V|W) \mid \bar{a}^t = \alpha a^{-1}, 0 \neq \alpha \in \mathbb{F}\}.$$

J. Hall [5] classified infinite simple finitary torsion groups. He showed that a group belongs to this class if and only if it is isomorphic to an alternating group $\text{Alt}(X)$ on an infinite set X or to one of Mackey groups $SL_{\infty}(V|W)$, $O_{\infty}(f)$, $SU_{\infty}(\mathbb{F})$, where the ground field $\mathbb{F}$ is locally finite, and f is a nondegenerate (skew) symmetric (semi)linear form. The proof uses the Classification of Finite Simple Groups.

2 Main results

The following two theorems describe automorphisms of Mackey groups

$$SL_{\infty}(V|W), \quad O_{\infty}(f), \quad SU_{\infty}(f).$$

In particular, they describe automorphisms of all infinite simple finitary torsion groups in J. Hall's classification. Recall that automorphisms of infinite alternating groups were described by J. Schreier and S. Ulam [9].

Theorem 1. (a) *Let the characteristic of the field $\mathbb{F}$ is not equal to 2 or 3. Then an arbitrary automorphism φ of the group $SL_{\infty}(V|W)$ either extends to a ring automorphism of $A_{fin}(V|W)$ or, if the spaces V and W are dual, there exists an anti-automorphism ψ of $A_{fin}(V|W)$ such that*

$$\varphi(g) = \psi((g^{-1})^t)$$

for an arbitrary element $g \in SL_{\infty}(V|W)$.

(b) *Let the characteristic of the field $\mathbb{F}$ is not equal to 2 or 3. Then an arbitrary automorphism of the group $O_{\infty}(f)$ or $SU_{\infty}(f)$ extends to a ring automorphism of $A_{fin}(V|W)$.*

N. Jacobson [6] showed that all $\mathbb{F}$ -linear automorphisms of $A_{fin}(V|W)$ are conjugations by elements from $GL(V|W)$. Hence,

$$\begin{aligned} \text{Aut}_{\mathbb{F}}(A_{fin}(V|W)) &\cong \\ &\cong GL(V|W)/\text{Center} = PGL(V|W). \end{aligned}$$

Список використаних джерел

1. *Bezushchak O.* Derivations and automorphisms of locally matrix algebras / O. Bezushchak // J. Algebra. — **576** (2021). — P.1-26. doi:10.1016/j.jalgebra.2021.02.013
2. *Bezushchak O.* On the Lie structure of locally matrix algebras / O. Bezushchak // Carpathian Math. Publ. — **12**(2) (2020). — P.311-316. doi:10.15330/cmp.12.2.311-316
3. *Bezushchak O.* Spectra of locally matrix algebras / O. Bezushchak // Algebra Discrete Math. — **31**(1) (2021). — P.17-36. doi:10.15330/cmp.12.2.311-316

A ring automorphism of $A_{fin}(V|W)$ is semilinear with respect to some automorphism $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{F})$ of the field $\mathbb{F}$.

Let the subgroup $\text{Aut}_{V,W}(\mathbb{F}) \leq \text{Aut}(\mathbb{F})$ consist of those automorphisms $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{F})$ that extend to σ -semilinear automorphisms of $A_{fin}(V|W)$.

If both spaces V and W are countable-dimensional, then

$$\text{Aut}_{V,W}(\mathbb{F}) = \text{Aut}(\mathbb{F}).$$

If the spaces V and W have uncountable dimensions, then the subgroup $\text{Aut}_{V,W}(\mathbb{F})$ may be strictly smaller than $\text{Aut}(\mathbb{F})$.

Theorem 2. *If the spaces V and W are not dual, then the group $\text{Aut}(SL_{\infty}(V|W))$ is an extension of $\text{Aut}_{V,W}(\mathbb{F})$ by $PGL(V|W)$. If the spaces V and W are dual, then*

$$\begin{aligned} \text{Aut}(SL_{\infty}(V|W))/\text{Aut}_{\mathbb{F}}(A_{fin}(V|W)) &\cong \\ &\cong \text{Aut}_{V,W}(\mathbb{F}), \end{aligned}$$

$$\text{Aut}_{\mathbb{F}}(A_{fin}(V|W))/PGL(V|W) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

The proof of Theorems 1, 2 are based on the description of automorphisms of elementary linear groups over associative rings due to I. Golubchik, A. Mikhalev and E. Zelmanov; and on the fact that $A_{fin}(V|W)$ is locally covered by algebras, to the automorphisms or anti-automorphisms of which the automorphisms of elementary matrix groups are lifted.

The question about automorphisms of Mackey groups in characteristics 2, 3 remains open.

4. *Bezushchak O.* Primary decompositions of unital locally matrix algebras / O. Bezushchak, B. Oliynyk // Bull. Math. Sci. — **10**(1) (2020). doi:10.1142/S166436072050006X
5. *Hall J.I.* Periodic simple groups of finitary linear transformations / J. I. Hall // Annals of Math. — **163** (2006). — P.445-498. doi:10.4007/annals.2006.163.445
6. *Jacobson N.* Lectures in abstract algebra. Volume 2. Linear algebra / N. Jacobson / Springer-Verlag, 1975.
7. *Mackey G.* On infinite-dimensional linear spaces / G. Mackey // Trans. AMS. — **57** (1945). — P.155-207.

8. *Penkov I.* Tensor representations of Mackey Lie algebras and their dense subalgebras. Developments and Retrospectives in Lie theory: Algebraic Methods / I. Penkov, V. Serganova // Dev. Math., Springer Verlag. — **38** (2014). — P.291-330. doi:10.1007/978-3-319-09804-3 14
9. *Schreier J.* Über die Permutationsgruppe der natürlichen Zahlenfolge / J. Schreier, S. Ulam // Studia Math. — **4** (1933). — P.134-141.
10. *BEZUSHCHAK, O., OLIYNYK, B.* (2020) “Primary decompositions of unital locally matrix algebras”, Bull. Math. Sci. **10**(1). doi:10.1142/S166436072050006X
11. *HALL, J.I.* (2006) “Periodic simple groups of finitary linear transformations”, Annals of Math. **163**, pp.445-498. doi:10.4007/annals.2006.163.445
12. *JACOBSON, N.* (1975) “Lectures in abstract algebra. Volume 2. Linear algebra”, Springer-Verlag.
13. *MACKEY, G.* (1945) “On infinite-dimensional linear spaces”, Trans. AMS, **57**, pp.155-207.
14. *PENKOV, I.* “Tensor representations of Mackey Lie algebras and their dense subalgebras. Developments and Retrospectives in Lie theory: Algebraic Methods”, Dev. Math., Springer Verlag, **38**, pp.291-330. doi:10.1007/978-3-319-09804-3 14
15. *SCHREIER, J.* “Über die Permutationsgruppe der natürlichen Zahlenfolge”, Studia Math., **4**, pp.134-141.

References

Received: 20.06.2023

УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.3>

В. В. Голомозий¹, к.ф.-м.н., доц.
Ю. С. Мішура¹, д.ф.-м.н., проф.
Т. О. Яневич¹, к.ф.-м.н., доц.
І. О. Ізарова¹, д.ю.н., проф.

V. V. Golomoziy¹, PhD, Prof. Associate
Yu. S. Mishura¹, Dr. Sci., Professor
T. O. Ianevych¹, PhD, Prof. Associate
I. O. Izarova¹, Dr. Sci., Professor

Порівняння 2D згорток та щільних нейронних мереж в моделях природної обробки мови з кількома вхідними реченнями

Comparison of 2D convolutions and dense neural networks for natural language processing models with multi-sentence input

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володи-
мирська, 64/13, Україна

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
64/13, Volodymyrska Str., Kyiv, 01601, Ukraine,

e-mails: vitaliy.golomoziy@knu.ua, yuliyamishura@knu.ua, tetianayanevych@knu.ua,
irina.izarova@knu.ua

Статтю присвячено аналізу судових справ, який ґрунтується на текстовій інформації, що включає позовні вимоги, підставу позову та відзив відповідача. Беручи до уваги ці параметри, ми можемо класифікувати справу до однієї із семи категорій, визначених для цілей цього дослідження, та спрогнозувати рішення по ній у суді першої інстанції. Для розв'язання цієї задачі ми використали нейронну мережу на основі представлення текстових даних згенерованих мовленнєвою моделлю XLM|RoBERTa. Було порівняно два підходи до побудови такої нейронної мережі. Один базується на вертикальному об'єднанні числових представлень декількох речень таким чином, що вони утворюють матрицю, а потім застосуванні до неї 2D згорток. Другий підхід полягає в послідовному об'єднанні речень та застосуванні щільних нейронних мереж. Останній підхід показує трохи кращі результати в нашому експерименті, в той час як перший демонструє простіший процес навчання.

Ключові слова: обробка природної мови, мовленнєві моделі, згортки, щільні нейронні мережі

This paper is devoted to the analysis of court cases based on multiple sentences that represent plaintiff's claim, claim motivation and defendant's response. Based on these parameters we classify a given case into one of seven categories designed for our task and then predict its decision in the first court's instance. We use fine-tuned XLM|RoBERTa for this task. There were compared two approaches for building fine-tuned model's head. One is based on stacking the numerical representation of multiple sentences so that they form a matrix and applying 2D convolutions. Second approach is based on concatenated sentences and application of dense neural networks. The latter demonstrates a slightly better performance in our experiments, while the former exhibits the simpler training process.

Key Words: Natural Language Processing, language models, convolutions, dense neural networks

Communicated by Prof. M. P. Moklyachuk

1 Introduction

Our research group is working on the project whose main aim is to find the best way of using AI for analyzing court decisions of the Unified state register of Ukraine (more than 100 million cases) to gain efficiency, speed, and valuable insights. This enables us to make faster and more accurate legal research and decision-making, and provide

rational recommendations for the developing of the judicial system.

The analysis of legal documents, such as contracts and claims, constitutes a specific field of research and application of Natural Language Processing (NLP) algorithms. Special considerations in such analysis include: length of a document, specific legal language, special requirements for the legal accuracy of the generated texts, etc. The

length of a document or a series of documents typically exceeds a limit of 512-2048 tokens per sequence required by most open source Large Language Models (LLM), such as BERT (see [1]). In this paper, we construct an algorithm to predict court decisions based on documents related to civil procedure. The cases may have tens of associated documents, with several thousands of tokens each. For more details about the dataset see [2].

Another important aspect of the algorithm under consideration is the multi-sentence input. Typical NLP algorithms follow the standard transformer approach to input. This approach supposes three stages of input pre-processing. In the first stage, every input sentence is trimmed or padded so that all sentences have the same length. In the second stage, every word is encoded using some standard word embedding, thus creating a vector representation of each word. Such vectors then stack one on top of another, forming an input matrix. Finally, this matrix is added to the matrix of the same size, representing so-called positional encodings. The result is a two-dimensional matrix that represents a single input sentence.

In our project we are working on prediction of various characteristics of the civil procedure. The characteristics of interest are: first instance decision, whether it was appealed, decision in appeal, final decision, the process duration, associated costs and etc. Predicting these values based on the whole text of the case documents is a nearly unfeasible task since civil procedure may last for years, and a stock of associated documents may include tens or even hundreds of various documents. To circumvent this problem, we have manually labelled a subset of documents specifying particular sentences or text fragments that, we think, are relevant to the algorithm we develop. Among others, we have chosen claim, claim motivation and defendant's response as three main elements to base our algorithm on. Each of these elements is a relatively short fragment of text that can easily be passed through the existing open-source LLMs. But each LLM takes only one sentence as input, while we have three. Our approach is to use LLMs to derive a contextual numeric representation of each text fragment and then build another neural network to predict values of interests based on these representations. As mentioned above, we use claim, claim motivation and response as input text fragments, and after

passing them through the LLM, we have got three 768-dimensional vectors.

When stacking these vectors, we got a 3×768 matrix as input to our algorithm. Since matrix-type inputs are typical for convolutional neural networks widely used in computer vision, we decided to utilize a convolution-based approach. It is worth mentioning that the use of convolutions in text analysis is not an entirely new idea. See, for example, [10]. As an alternative approach, we can use a dense neural network with all our inputs being flattened into one long vector.

We developed and evaluated three models (small, medium and large) for each approach and compared the results. As a result of our experiments, we have found that a dense network approach performs slightly better in terms of higher accuracy, although it uses more parameters and takes a bit longer to train. The best of our convolutional models demonstrated comparable performance with smaller number of parameters and simpler training process. We believe that convolutional approach for analysis of multi-input NLP models is a perspective one and deserves more attention in the future research.

The approach based on convolutions of matrices created by word embeddings has been proven to be fruitful, as presented in [5, 6]. It allows analysis of a single sentence and uses general word embeddings that miss the context, but such methods demonstrate good results on relatively simple tasks, like sentiment analysis (see [8]). Paper [3] is devoted to 1D convolutions based on word order, and [4] contains a detailed discussion on 2D convolutions applied to one-hot word representation. Convolutions applied to word embeddings for a lexical analysis were used in [7, 15], while [11] is devoted to a semantic clustering problem.

An interesting approach to capture the contextual meaning of the words in a pre-transformers era was developed in [9]. The authors built a convolution-based model to obtain a latent semantic representation for a given text. Another work of a similar kind, where convolutions are applied for development of semantic embeddings from hashtags, is [12].

Finally, the paper [13] is devoted to general discussion about application of convolutions in text mining and natural language processing.

The paper is organized as follows. In Section 2 we describe the initial phase of data processing.

We move on to the category prediction in Section 3. The different approaches for decision prediction are considered and compared in Section 4. The conclusion remarks are given in Section 5.

2 Initial Phase

We started with about 700 labeled court cases, each including the data that is described in Table 1:

Table 1: Variables and their description

variable	description	average length
claim	fragment of text describing the essence of a claim	12300
claim justification	fragment of text motivating the claim	12300
response	fragment of text that includes defendant's response	12300
category	categorical parameter describing a type of a case	7 categories in total
decision	decision in the first instance	4 types

Our analysis pursued three goals:

1. to identify whether the categories are balanced and have impact on decision;
2. to predict the category by a claim;
3. to predict the decision by claim, claim justification and response.

We used simple descriptive statistics to examine our categories. We found out that categories are unbalanced, with roughly 55-60% of cases being judged in favour of plaintiff.

The second task (category prediction) is a very important practical problem. The corpus of judicial documents does not include good categorization, while it is essential for such problems. Different types of civil procedure require different sets of documents to submit, have different chances to win the case, and have different durations and associated costs. That is why categorization itself is a crucial problem. We used dense neural network to predict categories.

Finally, the most important goal of this research is to predict the first instance's decision. To do this, we used our three text variables

as predictors and developed two families of neural networks: one is based on 2D convolutions and another is based on dense neural networks.

The actual problem that needed to be solved was converting text parameters into numeric vectors. Our text data are in Ukrainian language, so we used a variant of XLM/RoBERTa large language model adapted for the Ukrainian language only. This model demonstrates fast inference while sharing the overall performance of the original XLM/Roberta model. We removed the head of the model and used the last layer as our numeric representation, which allowed us to convert all our text data into 768-dimensional numeric vectors used in our further analysis.

3 Category prediction

In order to predict categories we experimented with dense neural networks. There were used claim as the predictor and achieved about 98% accuracy on the test dataset with such model.

On the pie chart (Fig. 1) we can see how many cases belong to the top six categories.

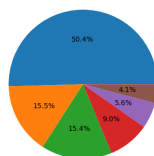


Figure 1: Category's distribution

We can see that the most popular category includes about 50% of all cases, the second and third include about 15%, the fourth is about 9%, and the rest is 5% and below, which makes our categories distribution quite unbalanced.

The model we developed uses *claim* text variable as its input (it is encoded as 768-dimensional numeric vector), which is passed through the two dense layers of 512 neurons each before the final classification layer. We used ReLu activation for

dense layers and softmax for the last one.

We trained our model for 20 epochs with cross-entropy loss function, Adam optimizer and learning rate of 10^{-4} and obtained 95% accuracy on a test dataset.

Since our dataset is imbalanced, we evaluated the performance of each category prediction by calculating Precision, Recall and F1 score, which gives the following results.

Table 2: Prediction performance

category	total number	TP	FP	FN	Precision	Recall	F1
1	99	98	8	1	0.92	99	0.96
2	16	16	0	0	1	1	1
3	18	17	1	1	0.94	0.94	0.94
4	34	34	0	0	1	1	1
5	6	6	0	0	1	1	1
6	22	22	0	0	1	1	1
7	2	2	0	0	1	1	1

where TP is True Positive, FP is False Positive and FN is False Negative. Let the category under consideration is category 1, say. Then True Positive means the number of correct predictions, True Negative means number of prediction for 1 category while the true category is different and False Negative means prediction for another category while the true category is 1. Here

$$Precision = \frac{TP}{TP + FP} = \frac{TP}{Total\ Positive},$$

$$Recall = \frac{TP}{TP + FN} = \frac{TP}{Total\ number\ of\ positive\ instances},$$

$$F1 = 2 * \frac{Precision * Recall}{Precision + Recall}.$$

We can see that model misclassifies the first category, which is expected having the imbalance of the dataset. At the same time we can see that the model's prediction performance is even (homogeneous) across all categories.

4 Decision prediction

As for the term 'decision', we are using one of the following outcomes from the final judgment of the first-instance court: 'complete satisfaction of the claim', 'decline the claim', 'partially satisfy the claim' or 'other'. For the decision prediction we built and evaluated two families of deep models. One of the area of our interest was evaluation how 2D-convolutions (Conv2D) perform themselves in multi-sentence input setup. Normally, 2D-convolutions are used in computer vision problems, and they are known to be effective in capturing spatial effects, such as identifying an eye or an ear in a certain area of an image. In our case, each element of the numerical representation obtained from the large language model contains some particular information about the sentence. Our motivation was caused by the fact that there is at least vertical spacial alignment between elements of the input matrix. In addition to that, other experiments with convolutions, 1-D convolutions, in particular, demonstrated promising results in reducing the number of parameters required, improving the

training process and learning valuable insights from the original numerical sequences representing inputs.

For this purpose, we developed three models (small, medium and large) based on convolutions and three models based on dense networks. Our goal was to evaluate the performance of convolution-based models, their difficulty to train and approximate dependence of a number of parameters.

It is appeared that decisions of about 60% of all cases in our dataset were "complete satisfaction of the claim". It is worth mentioning that we only used a subset of civil cases related mainly to pension and social aid, that's why the percentage of 'positive' decisions is so high. So, 60% is our baseline.

All Conv2D models take input of the size 3×768 . We tried two variants of a loss function: regular cross-entropy loss function and weighted cross-entropy with weights backwards proportional to the class distribution. We repeatedly trained multiple models every time comparing the performance and difficulty of training and evaluating the model's expressiveness. We trained each model with a learning rate of 10^{-3} for some number of epochs (usually between 200 and 400), then selected the best candidates and ran the train-

ing for another 100-200 epochs with the smaller learning rate of 10^{-4} .

4.1 Conv2D-small network

Our first Conv2D-small network model has the following architecture:

1. Conv2D layer with 10 3×3 kernels and ReLU activation function, that outputs tensor of the size $1 \times 766 \times 10$.
2. Conv2D layer with a single 1×1 kernel and ReLU activation function, that outputs tensor of the size $1 \times 766 \times 1$.
3. Flatten layer followed by Linear 766×20 layer with ReLU activation.
4. Dropout layer with $p = 0.3$.
5. Final classification layer.

The model has 15,556 trainable parameters in total. The best achieved result in the sense of accuracy was 0.75, i.e. 15% above the baseline.

We may conclude that such a network does not have enough expressiveness, but at the same time it can be relatively easily trained and does not require much fine-tuning.

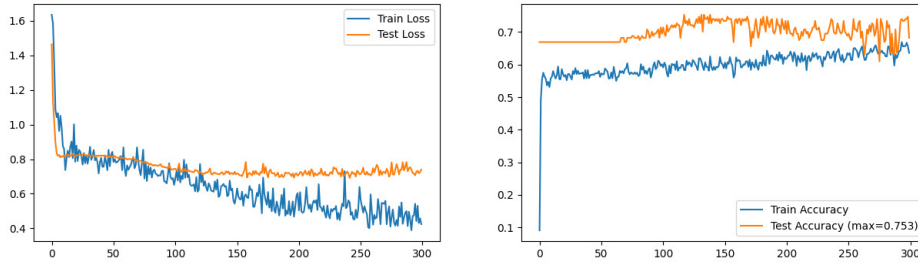


Figure 2: Conv2D-small network model performance

4.2 Conv2D-standard network

The second Conv2D-standard network model has the following architecture:

1. Conv2D layer with 10 3×3 kernels and ReLU activation function, that outputs tensor of the size $1 \times 766 \times 10$.
2. Conv2D layer with a single 1×1 kernel and ReLU activation function, that outputs

tensor of the size $1 \times 766 \times 1$.

3. Flatten layer followed by a Linear 766×50 layer with ReLU activation.
4. Dropout layer with $p = 0.3$.
5. Another 50×30 linear layer with ReLU activation.
6. Dropout layer with $p = 0.3$.

7. Final classification layer.

The model has 40146 trainable parameters in

total. The best achieved accuracy result was 0.786, or 18.6% above the baseline.

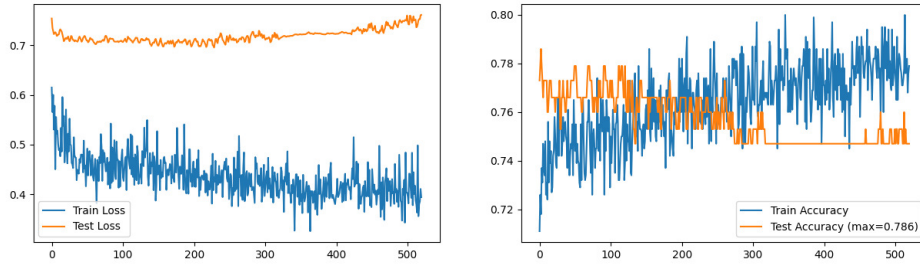


Figure 3: Conv2D-standard network model performance

The best result has been achieved with the first training attempt (without the fine tuning). However, we find that models with weights require some fine-tuning, while standard models usually achieve their best results during the first training attempt.

4.3 Conv2D-deep network

Our last Conv2D-deep network model has the following architecture:

1. Conv2D layer with 10 3×3 kernels, padding="same" and ReLU activation function, that outputs tensor of the size $1 \times 766 \times 10$.
2. Another Conv2D layer with 10 3×3 kernels, and ReLU activation function, that outputs tensor of the size $1 \times 766 \times 10$.
3. Conv2D layer with a single 1×1 kernel and ReLU activation function, that outputs tensor of the size $1 \times 766 \times 1$.

4. Flatten layer followed by a Linear 766×30 layer with ReLU activation.
5. Dropout layer with $p = 0.3$.
6. Another 30×20 linear layer with ReLU activation.
7. Dropout layer with $p = 0.3$.
8. One more 20×30 linear layer with ReLU activation.
9. Dropout layer with $p = 0.3$.
10. Final classification layer.

The model has 25,436 trainable parameters in total. The best achieved accuracy result was 0.73, i.e. 13% above the baseline.

We may conclude that such a network does not have enough expressiveness, but at the same time is relatively easy to train and does not require much fine-tuning.

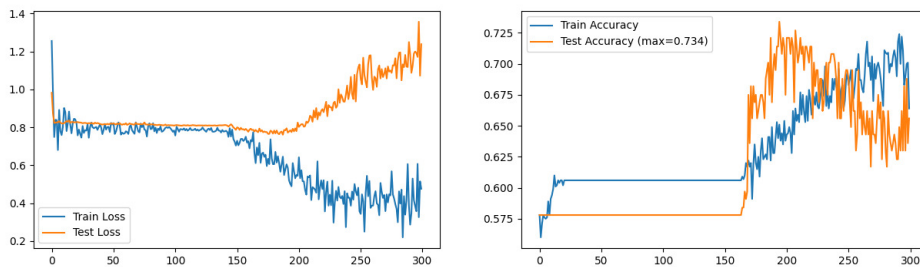


Figure 4: Conv2D-deep network model performance

4.4 Dense-small network

Our first Dense-small network model has the following architecture:

1. Flatten layer that converts (3×768) inputs into one 2304-dimensional array.
2. Dense layer that outputs 20 neurons followed by ReLU activation and Dropout.
3. Final classification layer.

The model has 46,205 trainable parameters in total. The best achieved accuracy result was 0.818, i.e. 21,8% above the baseline. This result has been achieved after multiple iterations of training each consisting of 100-200 epochs and reducing learning rate scheme.

We can see that “small” network has much more parameters and convolution-based networks and renders better accuracy. However it takes more time to converge and is more difficult to train.

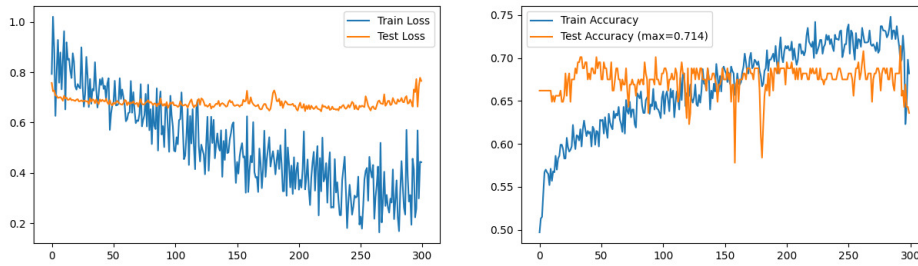


Figure 5: Dense-small network model performance (1st series of 300 epochs)

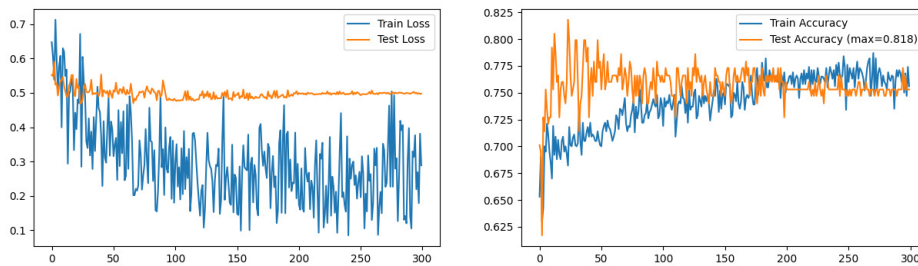


Figure 6: Dense-small network model performance (2nd series of 300 epochs)

4.5 Dense-medium network

The second Dense-medium network model has the following architecture:

1. Flatten layer that converts (3×768) inputs into one 2304-dimensional array.
2. Dense layer that outputs 50 neurons followed by ReLU activation and Dropout.
3. Another dense layer that outputs 30 neurons followed By ReLU activation and Dropout.

4. Final classification layer.

The model has 116,935 trainable parameters in total. The best achieved accuracy result was 0.857, or 25,7% above the baseline.

This is the best result we recorded. The training process was relatively involving, required multiple learning rates adjustment and testing different combinations of batch size and other parameters. This result was achieved using a weighted loss function.

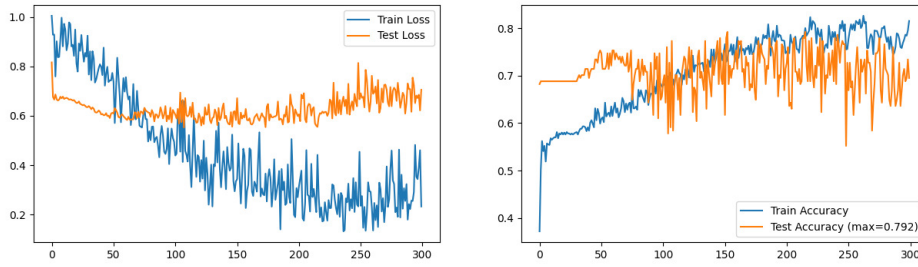


Figure 7: Dense-medium network model performance (1st series of 300 epochs)

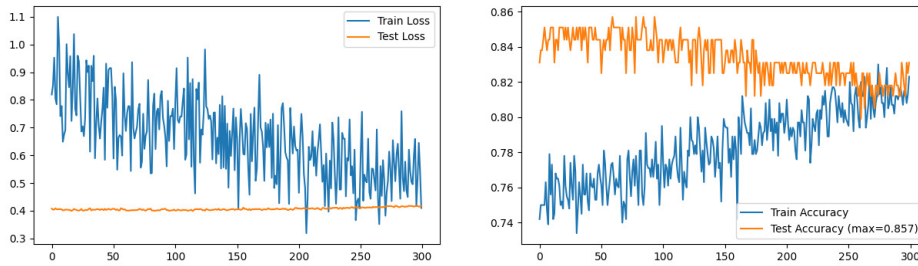


Figure 8: Dense-medium network model performance (2nd series of 300 epochs)

4.6 Dense-large network

Our last Dense-large network model has the following architecture:

1. Flatten layer that converts (3×768) inputs into one 2304-dimensional array
2. Dense layer that outputs 100 neurons followed by ReLU activation and Dropout
3. Another dense layer that outputs 50 neurons followed by ReLU activation and Dropout

4. Yet another dense layer that outputs 30 neurons followed by ReLU activation and Dropout

5. Final classification layer

The model has 237,235 trainable parameters in total. The best achieved accuracy result was 0.786, i.e. 18,6% above the baseline.

Despite all adjustments and experiments we can clearly see that this model overfits the data and demonstrates the worse performance of all dense networks.

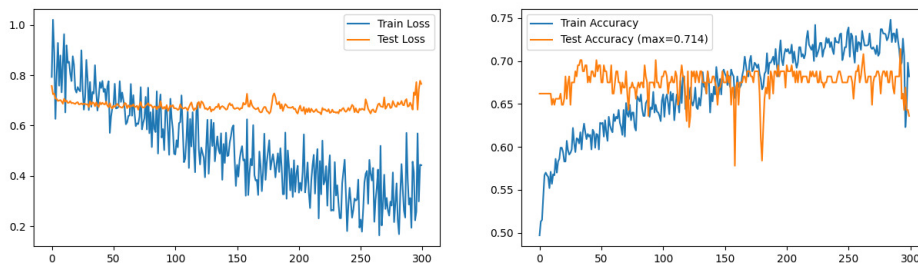


Figure 9: Dense-large network model performance (1st series of 300 epochs)

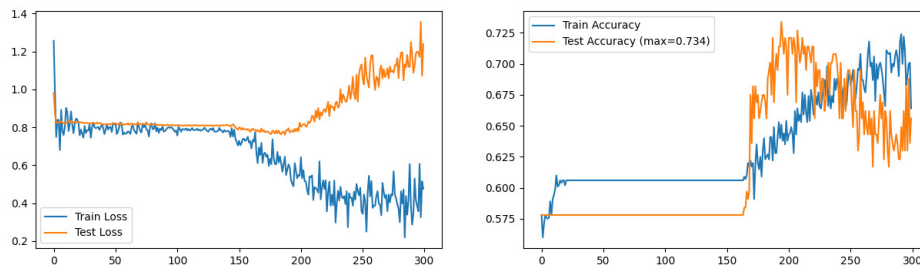


Figure 10: Dense-large network model performance (2nd series of 300 epochs)

5 Conclusions

In this paper, we have developed the algorithm for classification of various parameters related to the civil procedure, such as court case category and first instance decision. One important feature of our algorithm is the use of multiple text inputs such as court claim, claim motivation and defendant's response. In order to process such inputs, we used XLM/RoBERTa language model, which provided us with numerical representations for such text inputs. Thus, we obtained multiple 768-dimensional vectors that represent our input. In order to process them all at the same time, we tried multiple approaches. One approach was to use convolutional layers, typically used in computer vision models, to process multiple layers at once. Our motivation was that each numerical representation keeps the same type of information at the same position of the embedding obtained from the LLM, and so there is some spatial structure in our inputs if we represent them as a matrix.

As alternative to convolutions, we used dense neural networks consisting of fully connected layers. We tried multiple architectures of each type and searched for the best combination of hyperparameters. Finally, we arrived to the following results.

Dense networks, in general, produce better quality (measured by accuracy). However, they are more difficult and expensive to train. Convolutional networks are usually easier to train, and they also produce good results, although slightly worse than that of dense networks.

We may conclude that the use of convolutions in such tasks deserves further investigation. It may be fruitful to try to reshape the output of a large language model so that the similar features are located close to each other in the resulting numeri-

cal vector, thus increasing the spatial connectivity of inputs.

References

1. DEVLIN, J., CHANG, M., LEE, K., and TOUTANOVA, K. (2019) BERT: Pre-training of Deep Bidirectional Transformers for Language Understanding. In *Proceedings of the 2019 Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics: Human Language Technologies, Volume 1 (Long and Short Papers)*, pp. 4171-4186, Available from: <https://aclanthology.org/N19-1423/>
2. GOLOMOZIY, V., MISHURA, Y., IZAROVA, I., and IANEVYCH, T. (2023) Processing Big Data of Court Decisions, *BALTIC JOURNAL OF MODERN COMPUTING*, Vol. 11, No. 4. Available from: <https://www.bjmc.lu.lv/contents/>
3. JOHNSON, R., and ZHANG, T. (2015) Effective Use of Word Order for Text Categorization with Convolutional Neural Networks. In *Proceedings of the 2015 Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics: Human Language Technologies*, pp. 103-112. Available from: <https://aclanthology.org/N15-1011/>
4. JOHNSON, R., and ZHANG, T. (2015) Semi-supervised Convolutional Neural Networks for Text Categorization via Region Embedding. In *Advances in Neural Information Processing Systems* 28, pp. 919-927.
5. KALCHBRENNER, N., GREFFENSTETTE, E., and BLUNSOM, P. (2014) A Convolutional Neural Network for Modelling Sentences.

- In *Proceedings of the 52nd Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics* (Volume 1: Long Papers), pp. 655-665. Available from: <https://aclanthology.org/P14-1062/>
6. KIM, Y., (2014) Convolutional Neural Networks for Sentence Classification. In *Proceedings of the 2014 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing*, pp. 1746-1751.
 7. NGUYEN, T. H., and GRISHMAN, R. (2015) Relation Extraction: Perspective from Convolutional Neural Networks. In *Proceedings of the 1st Workshop on Vector Space Modeling for Natural Language Processing*, pp. 39-48. Available from: <https://aclanthology.org/W15-1506/>
 8. SANTOS, C. N. DOS, and GATTI, M. 2014. Deep Convolutional Neural Networks for Sentiment Analysis of Short Texts. In *Proceedings of COLING 2014, the 25th International Conference on Computational Linguistics: Technical Papers*, pp. 69-78. Available from: <https://aclanthology.org/C14-1008/>
 9. SHEN, Y., HE, X., GAO, J., DENG, L., and MESNIL, G. (2014) A Latent Semantic Model with Convolutional-Pooling Structure for Information Retrieval. In *Proceedings of the 23rd ACM International Conference on Conference on Information and Knowledge Management*, pp. 101-110. <https://doi.org/10.1145/2661829.2661935>
 10. SONI, S., CHOUHAN, S.S. and RATHORE, S.S. (2023) TextConvoNet: a convolutional neural network based architecture for text classification. *Appl Intell* 53, 14249-14268. <https://doi.org/10.1007/s10489-022-04221-9>
 11. WANG, P., XU, J., XU, B., LIU, C., ZHANG, H., WANG, F., and HAO, H. (2015) Semantic Clustering and Convolutional Neural Network for Short Text Categorization. In *Proceedings of the 53rd Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics and the 7th International Joint Conference on Natural Language Processing (Volume 2: Short Papers)*, pp. 352-357. Available from: <https://aclanthology.org/P15-2058/>
 12. WESTON, J., and ADAMS, K. (2014) TagSpace: Semantic Embeddings from Hashtags. In *Proceedings of the 2014 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing.*, pp. 1822-1827. Available from: <https://aclanthology.org/D14-1194/>
 13. WIDIASTUTI, N., (2019) Convolution Neural Network for Text Mining and Natural Language Processing. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, Issue 5, Vol. 662. doi: 10.1088/1757-899X/662/5/052010
 14. YUAN, K., GUO, S., LIU, Z., ZHOU, A., YU, F., and WU, W. (2021) Incorporating Convolution Designs Into Visual Transformers. In *Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision.*, pp. 559-568. doi: 10.1109/ICCV48922.2021.00062
 15. ZENG, D., LIU, K., LAI, S., ZHOU, G., and ZHAO, J. (2014) Relation Classification via Convolutional Deep Neural Network. In *Proceedings of COLING 2014, the 25th International Conference on Computational Linguistics: Technical Papers*, pp. 2335-2344. Available from: <https://aclanthology.org/C14-1220/>

Received: 28.10.2023

The work has been done within the project "Innovative technologies for processing court decisions using machine learning algorithms" K-I-186, financed by an external instrument of assistance of the European Union to fulfill Ukraine's obligations in the European Union Framework Program for Research and Innovation "Horizon 2020".

УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.4>

I. I. Golichenko¹, к. ф.-м. н., доц.

M. P. Moklyachuk², д. ф.-м. н., проф.

**Задача фільтрації для періодично
корельованих випадкових
послідовностей із пропущеними
значеннями**

¹ Національний технічний університет
України "Київський політехнічний інститут
Ігоря Сікорського", м. Київ 03056, Україна
e-mail: idubovetska@gmail.com

² Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул. Воло-
димирська 64
e-mail: moklyachuk@gmail.com

I. I. Golichenko¹, Ph.D., Assoc. Prof.

M. P. Moklyachuk², Dr.Sci., Prof.

**Filtering problem for periodically
correlated stochastic sequences with
missing observations**

¹ National Technical University of Ukraine "Igor
Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv 03056,
Ukraine

e-mail: idubovetska@gmail.com

² Taras Shevchenko National University of Kyiv,
64 Volodymyrska Str., Kyiv 01601, Ukraine

e-mail: moklyachuk@gmail.com

Досліджується задача оптимального оцінювання лінійних функціоналів від невідомих значень періодично корельованої стохастичної послідовності за спостереженнями послідовності із пропущеними значеннями. Знайдено формули для обчислення значень середньокваратичних похибок та спектральних характеристик оптимальних оцінок функціоналів у випадку, коли спектральні щільності послідовностей точно відомі. Отримано формули для визначення найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксних спектральних характеристик оптимальних лінійних оцінок функціоналів у випадку спектральної невизначеності, коли спектральні щільності послідовностей точно не відомі, але задано множини допустимих спектральних щільностей.

Ключові слова: періодично корельована стохастична послідовність, мінімаксна (робастна) оцінка, найменш сприятлива спектральна щільність, мінімаксні спектральні характеристики.

The problem of the mean-square optimal estimation of the linear functionals which depend on the unknown values of a periodically correlated stochastic sequence from observations of the sequence with missings is considered. Formulas for calculation the mean-square error and the spectral characteristic of the optimal estimate of the functionals are proposed in the case where spectral densities of the sequences are exactly known. Formulas that determine the least favorable spectral densities and the minimax spectral characteristics are proposed in the case of spectral uncertainty, when spectral densities of sequences are not exactly known but the class of admissible spectral densities is given.

Key Words: periodically correlated stochastic sequence, minimax (robust) estimate, least favorable spectral density, minimax spectral characteristics.

Introduction

W. R. Bennett in 1958 [1] started to explore cyclostationarity as a phenomenon and property of the process, which describes signals in channels of communication. Studying the statistical characteristics of information transmission, he calls the group of telegraph signals the cyclostationary process, that is the process whose group of statistics changes periodically with time. W. A. Gardner and L. E. Franks [3] highlights the greatest similarity of cyclostationary processes, which are a subclass of nonstationary processes,

with stationary processes. W. A. Gardner [4], W. A. Gardner, A. Napolitano and L. Paura [5] presented bibliography of works in which properties and applications of cyclostationary processes were studied. Recent developments and applications of cyclostationary signal analysis are reviewed in the papers by A. Napolitano [28], [29]. In other sources cyclostationary processes are called periodically stationary, periodically nonstationary, periodically correlated. We will use the term periodically correlated processes.

E. G. Gladyshev in 1961 [6] was the first who

published the analysis of spectral properties and representation of periodically correlated sequences based on its connection with vector stationary sequences. He formulated the necessary and sufficient conditions for determining of periodically correlated sequence in terms of the correlation function. A. Makagon carried in his works [17], [18] detailed spectral analysis of periodically correlated sequences. Main ideas of the research of periodically correlated sequences are outlined in the book by H. L. Hurd and A. Miamee [12].

The problem of estimation of unknown values of random processes is one of the very important and topical subsections of the theory of stochastic processes. Processes that are observed can be completely defined by its characteristics (correlation function, spectral density, canonical decomposition) or their characteristics can be defined only by the set of admissible values of characteristics. The linear extrapolation and interpolation problems for stationary stochastic processes under the condition that spectral densities are known exactly were first introduced by A. N. Kolmogorov [15]. Solutions of the extrapolation and filtering problems for stationary processes and sequences with rational spectral densities were offered by N. Wiener [34] and A. M. Yaglom [35]. Prediction problems for vector-valued stationary processes were investigated by Yu. A. Rozanov [32] and E. J. Hannan [11].

Since processes often accompanied by undesirable noise it is naturally to assume that the exact value of spectral density is unknown and the model of process is given by a set of restrictions on spectral density. K. S. Vastola and H. V. Poor [33] showed for certain classes of spectral densities that the Wiener filter is very sensitive to minor changes of spectral model unlike the robust Wiener filter. That is the filter is the least sensitive to the worst case of uncertainty. Thus, it is reasonable to use the minimax (robust) estimation method, which allows to define the optimal estimate for all densities from a certain class of the admissible spectral densities simultaneously. Ulf Grenander [10] was the first who proposed the minimax approach to the extrapolation problem for stationary processes. A survey of results in minimax-robust methods of data processing can be found in the paper by S. A. Kassam and H. V. Poor [14]. Formulation and investigation of the problems of extrapolation and interpolation of linear func-

tionals which depend on the unknown values of stationary sequences from observations with and without noise are presented by M. P. Moklyachuk in the paper [23]. Similar problems of optimal estimation of vector-valued stationary sequences and processes were examined by M. P. Moklyachuk and O. Yu. Masyutka [24], by O. Yu. Masyutka, I. I. Golichenko and M. P. Moklyachuk [22].

In their book M. M. Luz and M. P. Moklyachuk [16] investigated the minimax estimation problems for linear functionals which depends on unobserved values of stochastic sequences with stationary increments. In their book I. I. Golichenko and M. P. Moklyachuk [27] presented results of investigation of the interpolation, extrapolation and filtering problems for linear functionals from periodically correlated stochastic sequences and processes.

The interpolation and extrapolation problems of linear functionals from periodically correlated stochastic sequences with missing observations were investigated by I. I. Golichenko and M. P. Moklyachuk in [7], [9], by I. I. Golichenko, O. Yu. Masyutka and M. P. Moklyachuk in [8]. The results of the study of the extrapolation, interpolation and filtering problems for linear functionals constructed from unobserved values of multidimensional stochastic sequences and processes are presented in the papers by O. Yu. Masyutka, M. P. Moklyachuk and M. I. Sidi [19]–[21], [26]. We also refer to the book by M. P. Moklyachuk, O. Yu. Masyutka and I. I. Golichenko [25] where results of the investigation of the problem of mean square optimal estimation (forecasting, interpolation, and filtering) of linear functionals constructed from unobserved values of periodically correlated isotropic random fields are described.

In this paper we study the problem of optimal linear estimation of the functional $A\zeta = \sum_{j \in Z_s} a(j)\zeta(-j)$, which depends on the unknown values of a periodically correlated stochastic sequence $\zeta(-j)$, $j \in Z_s = \{T+1, T+2, \dots\} \setminus \bigcup_{i=1}^s \{M_i \cdot T + 1, \dots, (M_i + N_i) \cdot T\}$. Estimation is based on observations of the sequence $\zeta(j) + \theta(j)$ at points $j \in \{\dots, -(T+2), -(T+1)\} \setminus S$, $S = \bigcup_{i=1}^s \{-(M_i + N_i) \cdot T, \dots, -M_i \cdot T - 1\}$. $\theta(j)$ is uncorrelated with $\zeta(j)$ periodically correlated stochastic sequence. Formulas for calculation the

mean square error and the spectral characteristic of the optimal estimate of the functional $A\zeta$ are proposed in the case where spectral densities are exactly known. Formulas that determine the least favorable spectral densities and the minimax spectral characteristic are proposed for the given class of admissible spectral densities.

1 Periodically correlated and multidimensional stationary sequences

The term *periodically correlated* process was introduced by E. G. Gladyshev [6] while W. R. Bennett [1] called random and periodic processes *cyclostationary* process.

Periodically correlated sequences are stochastic sequences that have periodic structure (see, for example, the book by H. L. Hurd and A. Mianee [12]).

Definition 1.1. A complex valued stochastic sequence $\zeta(n), n \in \mathbb{Z}$ with zero mean, $E\zeta(n) = 0$, and finite variance, $E|\zeta(n)|^2 < +\infty$, is called cyclostationary or periodically correlated (PC) with period T (T -PC) if for every $n, m \in \mathbb{Z}$

$$E\zeta(n+T)\overline{\zeta(m+T)} = R(n+T, m+T) = R(n, m) \quad (1)$$

and there are no smaller values of $T > 0$ for which (1) holds true.

Definition 1.2. A complex valued T -variate stochastic sequence $\vec{\xi}(n) = \{\xi_\nu(n)\}_{\nu=1}^T, n \in \mathbb{Z}$ with zero mean, $E\xi_\nu(n) = 0, \nu = 1, \dots, T$, and $E\|\vec{\xi}(n)\|^2 < \infty$ is called stationary if for all $n, m \in \mathbb{Z}$ and $\nu, \mu \in \{1, \dots, T\}$

$$E\xi_\nu(n)\overline{\xi_\mu(m)} = R_{\nu\mu}(n, m) = R_{\nu\mu}(n - m).$$

If this is the case, we denote $R(n) = \{R_{\nu\mu}(n)\}_{\nu, \mu=1}^T$ and call it the *covariance matrix* of T -variate stochastic sequence $\vec{\xi}(n)$.

Proposition 1.1. (E. G. Gladyshev [6]). A stochastic sequence $\zeta(n)$ is PC with period T if and only if there exists a T -variate stationary sequence $\vec{\xi}(n) = \{\xi_\nu(n)\}_{\nu=1}^T$ such that $\zeta(n)$ has the representation

$$\zeta(n) = \sum_{\nu=1}^T e^{2\pi i n \nu / T} \xi_\nu(n), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

The sequence $\vec{\xi}(n)$ is called *generating sequence* of the sequence $\zeta(n)$.

Proposition 1.2. (E. G. Gladyshev [6]). A complex valued stochastic sequence $\zeta(n), n \in \mathbb{Z}$ with zero mean and finite variance is PC with period T if and only if the T -variate blocked sequence $\vec{\zeta}(n)$ of the form

$$[\vec{\zeta}(n)]_p = \zeta(nT + p), \quad n \in \mathbb{Z}, p = 1, \dots, T \quad (3)$$

is stationary.

We will denote by $f^{\vec{\zeta}}(\lambda) = \left\{ f_{\nu\mu}^{\vec{\zeta}}(\lambda) \right\}_{\nu, \mu=1}^T$ the matrix valued spectral density function of the T -variate stationary sequence $\vec{\zeta}(n) = (\zeta_1(n), \dots, \zeta_T(n))^T$ arising from the T -blocking (3) of a univariate T -PC sequence $\zeta(n)$.

2 The classical projection method of filtering

Let $\zeta(j)$ and $\theta(j)$ be uncorrelated T -PC stochastic sequences. Consider the problem of optimal linear estimation of the functional

$$A\zeta = \sum_{j \in Z_s} a(j)\zeta(-j),$$

that depends on the unknown values of T -PC stochastic sequence $\zeta(-j), j \in Z_s = \{T+1, T+2, \dots\} \setminus \bigcup_{i=1}^s \{M_i \cdot T + 1, \dots, (M_i + N_i) \cdot T\}, (M_i \geq 1, M_i > M_{i-1} + N_{i-1}, i = 1, \dots, s)$. Estimation is based on observations of the sequence $\zeta(j) + \theta(j)$ at points $j \in \{\dots, -(T+2), -(T+1)\} \setminus S, S = \bigcup_{i=1}^s \{-(M_i + N_i) \cdot T, \dots, -M_i \cdot T - 1\}$. Note that in every interval of known and unknown observations of sequence $\zeta(j) + \theta(j)$ the amount of observations is a multiple of the period T .

Let assume that the coefficients $a(j), j \in Z_s$ which determine the functional $A\zeta$ satisfy condition

$$\sum_{j \in Z_s} |a(j)| < \infty \quad (4)$$

and are of the form

$$a(j) = a\left(\left(j - \left\lfloor \frac{j}{T} \right\rfloor T\right) + \left\lfloor \frac{j}{T} \right\rfloor T\right) = a(\nu + \tilde{j}T) = a(\tilde{j})e^{2\pi i \tilde{j}\nu/T}, \quad (5)$$

where $\nu = 1, \dots, T, \tilde{j} = \left\lfloor \frac{j}{T} \right\rfloor \geq 1; \nu = T$ and $\tilde{j} = \lambda - 1$, if $j = T \cdot \lambda, \lambda \in \mathbb{Z}$, or

$$a(j) = a(T \cdot \lambda) = a(T + (\lambda - 1)T) = a(\lambda - 1)e^{2\pi i (\lambda - 1)T/T}.$$

Under the condition (4) the functional $A\zeta$ has the finite second moment.

Using Proposition 1.2, the linear functional $A\zeta$ can be written as follows

$$\begin{aligned} A\zeta &= \sum_{j \in Z_s} a(j)\zeta(-j) = \\ &= \sum_{\tilde{j} \in \tilde{Z}_s} a(\tilde{j}) \sum_{\nu=1}^T e^{2\pi i \tilde{j} \nu / T} \zeta(-(\nu + \tilde{j}T)) = \\ &= \sum_{\tilde{j} \in \tilde{Z}_s} \sum_{\nu=1}^T a(\tilde{j}) e^{2\pi i \tilde{j} \nu / T} \zeta_\nu(-\tilde{j}) = \\ &= \sum_{\tilde{j} \in \tilde{Z}_s} \vec{a}^\top(\tilde{j}) \vec{\zeta}(-\tilde{j}) = A\vec{\zeta}, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_s &= \{1, 2, 3, \dots\} \setminus \bigcup_{i=1}^s \{M_i, \dots, M_i + N_i - 1\}, \\ \vec{a}^\top(\tilde{j}) &= (a_1(\tilde{j}), \dots, a_T(\tilde{j})), \\ a_\nu(\tilde{j}) &= a(\tilde{j}) e^{2\pi i \tilde{j} \nu / T}, \nu = 1, \dots, T, \end{aligned} \quad (6)$$

$\vec{\zeta}(\tilde{j}) = \{\zeta_\nu(\tilde{j})\}_{\nu=1}^T$ is T -variate stationary sequence, obtained by the T -blocking (3) of univariate T -PC sequence $\zeta(-j)$, $j \in Z_s$.

Let $\vec{\zeta}(j)$ and $\vec{\theta}(j)$ be uncorrelated T -variate stationary stochastic sequences with the spectral density matrices $f^\zeta(\lambda) = \{f_{\nu\mu}^\zeta(\lambda)\}_{\nu,\mu=1}^T$ and $f^\theta(\lambda) = \{f_{\nu\mu}^\theta(\lambda)\}_{\nu,\mu=1}^T$, respectively. Consider the problem of optimal linear estimation of the functional

$$A\vec{\zeta} = \sum_{\tilde{j} \in \tilde{Z}_s} \vec{a}^\top(\tilde{j}) \vec{\zeta}(-\tilde{j}),$$

that depends on the unknown values of sequence $\vec{\zeta}(-\tilde{j})$, $\tilde{j} \in \tilde{Z}_s$, based on observations of the sequence $\vec{\zeta}(\tilde{j}) + \vec{\theta}(\tilde{j})$ at points $\tilde{j} \in \{\dots, -2, -1\} \setminus \tilde{S}$, $\tilde{S} = \bigcup_{i=1}^s \{-(M_i + N_i) + 1, \dots, -M_i\}$.

Let the spectral densities $f^\zeta(\lambda)$ and $f^\theta(\lambda)$ satisfy the minimality condition

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{Tr} \left[(f^\zeta(\lambda) + f^\theta(\lambda))^{-1} \right] d\lambda < +\infty. \quad (7)$$

Condition (7) is necessary and sufficient in order that the error-free filtering of unknown values of the sequence $\vec{\zeta}(j) + \vec{\theta}(j)$ is impossible [32].

Define as $H = L_2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ the Hilbert space generated by random variables ζ with zero mathematical expectation, $E\zeta = 0$, finite variation, $E|\zeta|^2 < \infty$, and inner product $(\zeta, \theta) = E\zeta\bar{\theta}$. Consider values $\zeta_\nu(j)$, $\nu = 1, \dots, T$; $j \in \mathbb{Z}$ and $\theta_\nu(j)$, $\nu = 1, \dots, T$; $j \in \mathbb{Z}$ as elements of H . Denote by $H^s[\vec{\zeta} + \vec{\theta}]$ the closed linear subspace in the Hilbert space H generated by elements $\{\zeta_\nu(\tilde{j}) + \theta_\nu(\tilde{j}), \tilde{j} \in \{\dots, -2, -1\} \setminus \tilde{S}, \nu = 1, \dots, T\}$.

Denote by $L_2(f)$ the Hilbert space of vector valued functions $\vec{b}(\lambda) = \{b_\nu(\lambda)\}_{\nu=1}^T$ that are integrable with respect to a measure with the density $f(\lambda) = \{f_{\nu\mu}(\lambda)\}_{\nu,\mu=1}^T$:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \vec{b}^\top(\lambda) f(\lambda) \overline{\vec{b}(\lambda)} d\lambda = \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\nu,\mu=1}^T b_\nu(\lambda) f_{\nu\mu}(\lambda) \overline{b_\mu(\lambda)} d\lambda < +\infty. \end{aligned}$$

Denote by $L_2^s(f)$ the subspace in $L_2(f)$ generated by functions

$$\begin{aligned} e^{i\tilde{j}\lambda} \delta_\nu, \delta_\nu = \{\delta_{\nu\mu}\}_{\mu=1}^T, \\ \nu = 1, \dots, T, \tilde{j} \in \{\dots, -2, -1\} \setminus \tilde{S}, \end{aligned}$$

where $\delta_{\nu\nu} = 1$, $\delta_{\nu\mu} = 0$ for $\nu \neq \mu$.

Every linear estimate $\widehat{A\vec{\zeta}}$ of the functional $A\vec{\zeta}$ from observations of the sequence $\vec{\zeta}(\tilde{j}) + \vec{\theta}(\tilde{j})$ at points $\tilde{j} \in \{\dots, -2, -1\} \setminus \tilde{S}$ has the form

$$\begin{aligned} \widehat{A\vec{\zeta}} &= \int_{-\pi}^{\pi} \vec{h}^\top(e^{i\lambda}) (Z^\zeta(d\lambda) + Z^\theta(d\lambda)) = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\nu=1}^T h_\nu(e^{i\lambda}) (Z_\nu^\zeta(d\lambda) + Z_\nu^\theta(d\lambda)), \end{aligned} \quad (8)$$

where $Z^\zeta(\Delta) = \{Z_\nu^\zeta(\Delta)\}_{\nu=1}^T$ and $Z^\theta(\Delta) = \{Z_\nu^\theta(\Delta)\}_{\nu=1}^T$ are orthogonal random measures of the sequences $\vec{\zeta}(\tilde{j})$ and $\vec{\theta}(\tilde{j})$, and $\vec{h}(e^{i\lambda}) = \{h_\nu(e^{i\lambda})\}_{\nu=1}^T$ is the spectral characteristic of the estimate $\widehat{A\vec{\zeta}}$. The function $\vec{h}(e^{i\lambda}) \in L_2^s(f^\zeta + f^\theta)$.

The mean square error $\Delta(\vec{h}; f^\zeta, f^\theta)$ of the estimate $\widehat{A\vec{\zeta}}$ is calculated by the formula

$$\begin{aligned} \Delta(\vec{h}; f^\zeta, f^\theta) &= E|A\vec{\zeta} - \widehat{A\vec{\zeta}}|^2 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[A(e^{i\lambda}) - \vec{h}(e^{i\lambda}) \right]^\top f^\zeta(\lambda) \left[A(e^{i\lambda}) - \vec{h}(e^{i\lambda}) \right] d\lambda + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \vec{h}^\top(e^{i\lambda}) f^\theta(\lambda) \overline{\vec{h}(e^{i\lambda})} d\lambda, \end{aligned} \quad (9)$$

$$A(e^{i\lambda}) = \sum_{\tilde{j} \in \tilde{Z}_s} \tilde{a}(\tilde{j}) e^{-i\tilde{j}\lambda}.$$

The spectral characteristic $\vec{h}(f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}})$ of the optimal linear estimate of $A\vec{\zeta}$ minimizes the mean square error

$$\Delta(f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}}) = \Delta(\vec{h}(f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}}); f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}}) = \min_{\vec{h} \in L_2^s(f^{\vec{\zeta}} + f^{\vec{\theta}})} \Delta(\vec{h}; f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}}) = \min_{\vec{A}\vec{\zeta}} E \left| A\vec{\zeta} - \widehat{A\vec{\zeta}} \right|^2. \quad (10)$$

With the help of the Hilbert space projection method proposed by A. N. Kolmogorov [15] we can find a solution of the optimization problem (10).

The optimal linear estimate $\widehat{A\vec{\zeta}}$ is a projection of the functional $A\vec{\zeta}$ on the subspace $H^s[\vec{\zeta} + \vec{\theta}]$. The projection is characterized by following conditions

- 1) $\widehat{A\vec{\zeta}} \in H^s[\vec{\zeta} + \vec{\theta}]$,
- 2) $A\vec{\zeta} - \widehat{A\vec{\zeta}} \perp H^s[\vec{\zeta} + \vec{\theta}]$.

The condition 2) gives us the possibility to derive the formula for spectral characteristic of the estimate

$$\begin{aligned} \vec{h}^\top(f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}}) = & \left(A^\top(e^{i\lambda}) f^{\vec{\zeta}}(\lambda) - C^\top(e^{i\lambda}) \right) \left[f^{\vec{\zeta}}(\lambda) + f^{\vec{\theta}}(\lambda) \right]^{-1} = \\ & A^\top(e^{i\lambda}) - \left(A^\top(e^{i\lambda}) f^{\vec{\theta}}(\lambda) + C^\top(e^{i\lambda}) \right) \times \\ & \times \left[f^{\vec{\zeta}}(\lambda) + f^{\vec{\theta}}(\lambda) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (11)$$

where

$$C(e^{i\lambda}) = \sum_{j \in \tilde{S}} \tilde{c}(j) e^{ij\lambda} + \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{c}(n) e^{ij\lambda},$$

where $\tilde{c}(j), j \in \tilde{S} \cup \{0, 1, 2, \dots\}$, are unknown vectors of coefficients.

Denote by $U = \tilde{S} \cup \{0, 1, 2, \dots\}$.

Condition 1) is satisfied if the system of equalities

$$\int_{-\pi}^{\pi} \vec{h}(f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}}) e^{-im\lambda} d\lambda = 0, m \in U \quad (12)$$

holds true.

The last equalities (12) provide the following relations

$$\sum_{\tilde{j} \in \tilde{Z}_s} \tilde{a}^\top(\tilde{j}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\vec{\zeta}}(\lambda) (f^{\vec{\zeta}}(\lambda) + f^{\vec{\theta}}(\lambda))^{-1} e^{-i\lambda(\tilde{j}+m)} d\lambda - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_{s,s} & B_{s,s-1} & \dots & B_{s,1} & B_{s,n} \\ B_{s-1,s} & B_{s-1,s-1} & \dots & B_{s-1,1} & B_{s-1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{1,s} & B_{1,s-1} & \dots & B_{1,1} & B_{1,n} \\ B_{n,s} & B_{n,s-1} & \dots & B_{n,1} & B_{n,n} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\tilde{j} \in \tilde{S}} \tilde{c}^\top(\tilde{j}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f^{\vec{\zeta}}(\lambda) + f^{\vec{\theta}}(\lambda))^{-1} e^{-i\lambda(m-\tilde{j})} d\lambda - \\ & \sum_{\tilde{j}=0}^{\infty} \tilde{c}^\top(\tilde{j}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f^{\vec{\zeta}}(\lambda) + f^{\vec{\theta}}(\lambda))^{-1} e^{-i\lambda(m-\tilde{j})} d\lambda = \vec{0}, \end{aligned}$$

$$m \in U. \quad (13)$$

Denote the Fourier coefficients of the matrix functions $(f^{\vec{\zeta}}(\lambda) + f^{\vec{\theta}}(\lambda))^{-1}$ and $f^{\vec{\zeta}}(\lambda)(f^{\vec{\zeta}}(\lambda) + f^{\vec{\theta}}(\lambda))^{-1}$ as

$$B(m, \tilde{j}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f^{\vec{\zeta}}(\lambda) + f^{\vec{\theta}}(\lambda))^{-1} e^{-i\lambda(m-\tilde{j})} d\lambda,$$

$$m \in U, \tilde{j} \in U,$$

$$R(m, \tilde{j}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\vec{\zeta}}(\lambda) (f^{\vec{\zeta}}(\lambda) + f^{\vec{\theta}}(\lambda))^{-1} e^{-i\lambda(m+\tilde{j})} d\lambda,$$

$$m \in U, \tilde{j} \in \tilde{Z}_s.$$

Using the notations above we can rewrite relation (13) in the form of the system of equations

$$\begin{aligned} \sum_{\tilde{j} \in \tilde{Z}_s} R(m, \tilde{j}) \tilde{a}(\tilde{j}) &= \sum_{\tilde{j} \in \tilde{S}} B(m, \tilde{j}) \tilde{c}(\tilde{j}) + \sum_{\tilde{j}=0}^{\infty} B(m, \tilde{j}) \tilde{c}(\tilde{j}), \\ m &\in U. \end{aligned} \quad (14)$$

Denote by

$$\vec{a}^\top = \left(\underbrace{\vec{0}^\top, \dots, \vec{0}^\top}_{\sum_{i=1}^s N_i + 1}, \vec{a}^\top(1), \dots, \vec{a}^\top(M_1 - 1), \right.$$

$$\left. \underbrace{\vec{0}^\top, \dots, \vec{0}^\top}_{N_1}, \dots, \vec{a}^\top(M_s + N_s), \vec{a}^\top(M_s + N_s + 1), \dots \right)$$

a vector that has zero vectors $\vec{0}^\top = \underbrace{(0, \dots, 0)}_T$,

vectors $\vec{a}(1), \dots, \vec{a}(M_1 - 1), \dots, \vec{a}(M_s + N_s), \dots$, are constructed from coefficients of the functional $A\vec{\zeta}$ by formula (6).

Denote by $\vec{c}^\top = (\tilde{c}^\top(m))_{m \in U}$ a vector of the unknown coefficients.

The last system of equations (14) can be rewritten in the matrix form

$$\mathbf{R}\vec{a} = \mathbf{B}\vec{c}.$$

The linear operator $\mathbf{B}$ is defined by the matrix

$$\begin{pmatrix} B_{s,s} & B_{s,s-1} & \dots & B_{s,1} & B_{s,n} \\ B_{s-1,s} & B_{s-1,s-1} & \dots & B_{s-1,1} & B_{s-1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{1,s} & B_{1,s-1} & \dots & B_{1,1} & B_{1,n} \\ B_{n,s} & B_{n,s-1} & \dots & B_{n,1} & B_{n,n} \end{pmatrix},$$

constructed with the help of the block-matrices

$$B_{l,k} = \left\{ B_{l,k}(m, \tilde{j}) \right\}_{m=-(M_l+N_l)+1}^{-M_l} \tilde{j}=-(M_k+N_k)+1}^{-M_k},$$

$$l, k = 1, \dots, s,$$

$$B_{l,n} = \left\{ B_{l,n}(m, \tilde{j}) \right\}_{m=-(M_l+N_l)+1}^{-M_l} \tilde{j}=0}^{\infty}, \quad l = 1, \dots, s,$$

$$B_{n,l} = \left\{ B_{n,l}(m, \tilde{j}) \right\}_{m=0}^{\infty} \tilde{j}=-(M_l+N_l)+1}^{-M_l}, \quad l = 1, \dots, s,$$

$$B_{n,n} = \left\{ B_{n,n}(m, \tilde{j}) \right\}_{m=0}^{\infty} \tilde{j}=0}^{\infty},$$

$$B_{l,k}(m, \tilde{j}) = B(m, \tilde{j}), \quad \forall l, k \in \{1, \dots, s\} \cup \{n\}.$$

The linear operator $\mathbf{R}$ is defined by the corresponding matrix, which is constructed in the same manner as matrix $\mathbf{B}$.

The unknown coefficients $\vec{c}(m), m \in U$ are determined from the equation

$$\vec{c} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{R} \vec{a}, \quad (15)$$

where the m -th component of the vector $\vec{c}$ is the m -th component of vector $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{R} \vec{a}$:

$$\vec{c}(m) = (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{R} \vec{a})(m), \quad m \in U. \quad (16)$$

We will suppose that the operator $\mathbf{B}$ has the inverse matrix.

The mean-square error of the optimal estimate $\widehat{A\zeta}$ is calculated by the formula (9) and is of the form

$$\Delta(\vec{h}, f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}}) = E |A\vec{\zeta} - \widehat{A\zeta}|^2 =$$

$$\sum_{\tilde{j} \in U} \sum_{m \in U} \vec{a}^{\top}(\tilde{j}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\vec{\zeta}}(\lambda) (f^{\vec{\zeta}}(\lambda) + f^{\vec{\theta}}(\lambda))^{-1} \times$$

$$\times f^{\vec{\theta}}(\lambda) e^{-i\lambda(\tilde{j}-m)} d\lambda \cdot \overline{\vec{a}(m)} +$$

$$\sum_{\tilde{j} \in U} \sum_{m \in U} \vec{c}^{\top}(\tilde{j}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f^{\vec{\zeta}}(\lambda) + f^{\vec{\theta}}(\lambda))^{-1} \times$$

$$\times e^{-i\lambda(m-\tilde{j})} d\lambda \cdot \overline{\vec{c}(m)} =$$

$$\langle \mathbf{D} \vec{a}, \vec{a} \rangle + \langle \mathbf{B} \vec{c}, \vec{c} \rangle, \quad (17)$$

where $\langle a, b \rangle$ denotes the scalar product, $\mathbf{D}$ is defined by the corresponding matrix, which is constructed in the same manner as matrix $\mathbf{B}$, with elements

$$D(m, \tilde{j}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\vec{\zeta}}(\lambda) (f^{\vec{\zeta}}(\lambda) + f^{\vec{\theta}}(\lambda))^{-1} \times$$

$$\times f^{\vec{\theta}}(\lambda) e^{-i(\tilde{j}-m)\lambda} d\lambda, \quad m, \tilde{j} \in U.$$

The following statement holds true.

Theorem 2.1. Let $\zeta(j)$ and $\theta(j)$ be uncorrelated T -PC stochastic sequences with the spectral density matrices $f^{\vec{\zeta}}(\lambda)$ and $f^{\vec{\theta}}(\lambda)$ of T -variate stationary sequences $\vec{\zeta}(\tilde{j})$ and $\vec{\theta}(\tilde{j})$, respectively. Assume that $f^{\vec{\zeta}}(\lambda)$ and $f^{\vec{\theta}}(\lambda)$ satisfy the minimality condition (7). Assume that condition (4) is satisfied and operator $\mathbf{B}$ is invertible. The spectral characteristic $\vec{h}(f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}})$ and the mean square error $\Delta(f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}})$ of the optimal linear estimate of the functional $A\vec{\zeta}$ based on observations of the sequence $\vec{\zeta}(\tilde{j}) + \vec{\theta}(\tilde{j})$ at points $\tilde{j} \in \{\dots, -1\} \setminus \tilde{S}$, are calculated by formulas (11) and (17).

Consider the mean-square estimation problem of functional $A\zeta = \sum_{j \in Z_s} a(j)\zeta(-j)$, $Z_s = \{T + 1, T + 2, \dots\} \setminus \{MT + 1, \dots, (M + N)T\}$ based on observations of the sequence $\zeta(j) + \theta(j)$ at points $j \in \{\dots, -(T + 2), -(T + 1)\} \setminus \{-(M + N)T, \dots, -MT - 1\}$. Using Proposition 1.2, the linear functional $A\zeta$ can be written as follows

$$A\zeta = \sum_{j \in Z_s} a(j)\zeta(-j) = \sum_{\tilde{j} \in \tilde{Z}_s} \vec{a}^{\top}(\tilde{j}) \vec{\zeta}(-\tilde{j}) = A\vec{\zeta},$$

where

$$\tilde{Z}_s = \{1, 2, 3, \dots\} \setminus \{M, \dots, M + N - 1\}.$$

The estimate $\widehat{A\vec{\zeta}}$ of functional $A\vec{\zeta}$ from observations of sequence $\vec{\zeta}(\tilde{j}) + \vec{\theta}(\tilde{j})$ at points $\tilde{j} \in \{\dots, -1\} \setminus \{-(M + N) + 1, \dots, -M\}$ is defined by spectral characteristic $\vec{h}(f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}})$ (see formula (8)). The spectral characteristic is calculated by the following formula

$$\vec{h}^{\top}(f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}}) = \left(A^{\top}(e^{i\lambda}) f^{\vec{\zeta}}(\lambda) - C^{\top}(e^{i\lambda}) \right) \times$$

$$\times \left[f^{\vec{\zeta}}(\lambda) + f^{\vec{\theta}}(\lambda) \right]^{-1}, \quad (18)$$

where $C(e^{i\lambda}) = \sum_{j=-(M+N)+1}^{-M} \vec{c}(j) e^{ij\lambda} + \sum_{j=0}^{\infty} \vec{c}(j) e^{ij\lambda}$, unknown coefficients $\vec{c}(j), j \in \{-(M + N) + 1, \dots, -M\} \cup \{0, 1, \dots\}$ are calculated by formula

$$\vec{c} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{R} \vec{a}.$$

Linear operators $\mathbf{B}, \mathbf{R}$ are defined by compound matrices, for example

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{s,n} \\ B_{n,s} & B_{n,n} \end{pmatrix}$$

is constructed with the help of the block-matrices $B_{1,1}, B_{s,n}, B_{n,s}, B_{n,n}$ with the elements

$$B_{1,1} = \left\{ B_{1,1}(m, \tilde{j}) \right\}_{m=-(M+N)-1}^{-M} \tilde{j}=-(M+N)-1}^{-M},$$

$$B_{s,n} = \left\{ B_{s,n}(m, \tilde{j}) \right\}_{m=-(M+N)-1}^{-M} \tilde{j}=0}^{\infty},$$

$$B_{n,s} = \left\{ B_{n,s}(m, \tilde{j}) \right\}_{m=0}^{\infty} \tilde{j}=-(M+N)-1}^{-M},$$

$$B_{n,n} = \left\{ B_{n,n}(m, \tilde{j}) \right\}_{m=0}^{\infty} \tilde{j}=0}^{\infty}.$$

The vector

$$\vec{a}^\top = \left(\underbrace{\vec{0}^\top, \dots, \vec{0}^\top}_{N+1}, \vec{a}^\top(1), \dots, \vec{a}^\top(M-1), \right.$$

$$\left. \underbrace{\vec{0}^\top, \dots, \vec{0}^\top}_N, \vec{a}^\top(M+N), \vec{a}^\top(M+N+1), \dots \right)$$

is a vector with vectors $\vec{a}(1), \dots, \vec{a}(M-1), \vec{a}(M+N), \dots$, constructed from coefficients of the functional $A\zeta$ by formula (6).

The mean square error $\Delta(f^\zeta, f^\theta)$ is calculated by the formula

$$\Delta(f^\zeta, f^\theta) = \langle \mathbf{D}\vec{a}, \vec{a} \rangle + \langle \mathbf{B}\vec{c}, \vec{c} \rangle, \quad (19)$$

where linear operator $\mathbf{D}$ is defined by the corresponding matrix, which is constructed in the same manner as matrix $\mathbf{B}$ above.

The following corollary from the theorem 2.1 holds true.

Corollary 2.1. Let $\zeta(j)$ and $\theta(j)$ be uncorrelated T-PC stochastic sequences with the spectral density matrices $f^\zeta(\lambda)$ and $f^\theta(\lambda)$ of T-variate stationary sequences $\tilde{\zeta}(\tilde{j})$ and $\tilde{\theta}(\tilde{j})$, respectively. Assume that $f^\zeta(\lambda)$ and $f^\theta(\lambda)$ satisfy the minimality condition (7). Assume that condition (4) is satisfied and operator $\mathbf{B}$ is invertible. The spectral characteristic $\vec{h}(f^\zeta, f^\theta)$ and the mean square error $\Delta(f^\zeta, f^\theta)$ of the optimal linear estimate of the functional $A\zeta$ based on observations of the sequence $\tilde{\zeta}(\tilde{j}) + \tilde{\theta}(\tilde{j})$ at points $\tilde{j} \in \{\dots, -1\} \setminus \{-(M+N)+1, \dots, -M\}$, are calculated by formulas (18) and (19).

Consider the mean-square estimation problem of functional $A\zeta = \sum_{j \in Z_s} a(j)\zeta(-j)$, $Z_s = \{T +$

$1, T+2, \dots\} \setminus \{MT+1, \dots, MT+T\}$ based on observations of the sequence $\zeta(j) + \theta(j)$ at points $j \in \{\dots, -(T+2), -(T+1)\} \setminus \{-(MT+T), \dots, -(MT+1)\}$. Using Proposition 1.2, the linear functional $A\zeta$ can be written as follows

$$A\zeta = \sum_{j \in Z_s} a(j)\zeta(-j) = \sum_{\tilde{j} \in \tilde{Z}_s} \vec{a}^\top(\tilde{j})\vec{\zeta}(-\tilde{j}) = A\vec{\zeta},$$

where

$$\tilde{Z}_s = \{1, 2, 3, \dots\} \setminus \{M\}.$$

The estimate $\widehat{A\zeta}$ of functional $A\zeta$ from observations of sequence $\tilde{\zeta}(\tilde{j}) + \tilde{\theta}(\tilde{j})$ at points $\tilde{j} \in \{\dots, -1\} \setminus \{-M\}$ is defined by spectral characteristic $\vec{h}(f^\zeta, f^\theta)$. The spectral characteristic is calculated by the following formula

$$\vec{h}^\top(f^\zeta, f^\theta) = \left(A^\top(e^{i\lambda})f^\zeta(\lambda) - C^\top(e^{i\lambda}) \right) \times \\ \times \left[f^\zeta(\lambda) + f^\theta(\lambda) \right]^{-1}, \quad (20)$$

where $C(e^{i\lambda}) = \vec{c}(-M)e^{-iM\lambda} + \sum_{j=0}^{\infty} \vec{c}(j)e^{ij\lambda}$, unknown coefficients $\vec{c}(j), j \in \{-M\} \cup \{0, 1, \dots\}$ are calculated by formula

$$\vec{c} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}\vec{a}.$$

Linear operators $\mathbf{B}, \mathbf{R}$ are defined by compound matrices, for example

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_{-M,-M} & B_{-M,n} \\ B_{n,-M} & B_{n,n} \end{pmatrix}$$

is constructed with the help of the block-matrices $B_{-M,-M}, B_{-M,n}, B_{n,-M}, B_{n,n}$ with the elements

$$B_{-M,-M} = B(-M, -M),$$

$$B_{-M,n} = \left\{ B_{-M,n}(-M, \tilde{j}) \right\}, \tilde{j} = 0, 1, \dots,$$

$$B_{n,-M} = \left\{ B_{n,-M}(m, -M) \right\}, m = 0, 1, \dots,$$

$$B_{n,n} = \left\{ B_{n,n}(m, \tilde{j}) \right\}_{m=0}^{\infty} \tilde{j}=0}^{\infty}.$$

The vector

$$\vec{a}^\top = \left(\vec{0}^\top, \vec{0}^\top, \vec{a}^\top(1), \dots, \vec{a}^\top(M-1), \vec{0}^\top, \right. \\ \left. \vec{a}^\top(M+1), \vec{a}^\top(M+2), \dots \right)$$

is a vector with vectors $\vec{a}(1), \dots, \vec{a}(M-1), \vec{a}(M+1), \dots$, constructed from coefficients of the functional $A\zeta$ by formula (6).

The mean square error $\Delta(f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}})$ is calculated by the formula

$$\Delta(f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}}) = \langle \mathbf{D}\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle + \langle \mathbf{B}\vec{\mathbf{c}}, \vec{\mathbf{c}} \rangle, \quad (21)$$

where linear operator $\mathbf{D}$ is defined by the corresponding matrix, which is constructed in the same manner as matrix $\mathbf{B}$ above.

The next corollary from the theorem 2.1 holds true.

Corollary 2.2. Let $\zeta(j)$ and $\theta(j)$ be uncorrelated T-PC stochastic sequences with the spectral density matrices $f^{\vec{\zeta}}(\lambda)$ and $f^{\vec{\theta}}(\lambda)$ of T-variate stationary sequences $\vec{\zeta}(\tilde{j})$ and $\vec{\theta}(\tilde{j})$, respectively. Assume that $f^{\vec{\zeta}}(\lambda)$ and $f^{\vec{\theta}}(\lambda)$ satisfy the minimality condition (7). Assume that condition (4) is satisfied and operator $\mathbf{B}$ is invertible. The spectral characteristic $\vec{h}(f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}})$ and the mean square error $\Delta(f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}})$ of the optimal linear estimate of the functional $A\vec{\zeta}$ based on observations of the sequence $\vec{\zeta}(\tilde{j}) + \vec{\theta}(\tilde{j})$ at points $\tilde{j} \in \{\dots, -1\} \setminus \{-M\}$, are calculated by formulas (20) and (21).

The filtering problem of linear functional for the case with factorization of density matrices $f^{\vec{\zeta}}(\lambda)$ and $f^{\vec{\theta}}(\lambda)$ of T-variate stationary sequences $\vec{\zeta}(\tilde{j})$ and $\vec{\theta}(\tilde{j})$ is considered in the article [2].

3 Minimax (robust) method of filtering problem

Let $f(\lambda)$ and $g(\lambda)$ be the spectral density matrices of T -variate stationary sequences $\vec{\zeta}(j)$ and $\vec{\theta}(j)$, obtained by T -blocking (3) of T -PC sequences $\zeta(j)$ and $\theta(j)$, respectively.

Formulas (11) and (17), (18) and (19), (20) and (21) may be applied for finding the spectral characteristic and the mean square error of the optimal linear estimate of the functional $A\vec{\zeta}$ only under the condition that the spectral density matrices $f(\lambda)$ and $g(\lambda)$ are exactly known. If the density matrices are not known exactly while a set $D = D_f \times D_g$ of possible spectral densities is given, the minimax (robust) approach to estimation of functionals from unknown values of stationary sequences is reasonable. In this case we find the estimate which minimizes the mean square error for all spectral densities from the given set simultaneously.

Definition 3.1. For a given class of pairs of spectral densities $D = D_f \times D_g$ the spectral density matrices $f^0(\lambda) \in D_f$, $g^0(\lambda) \in D_g$ are called the least favorable in D for the optimal linear estimation of the functional $A\vec{\zeta}$ if

$$\Delta(f^0, g^0) = \Delta(\vec{h}(f^0, g^0); f^0, g^0) = \max_{(f, g) \in D} \Delta(\vec{h}(f, g); f, g).$$

Definition 3.2. For a given class of pairs of spectral densities $D = D_f \times D_g$ the spectral characteristic $\vec{h}^0(\lambda)$ of the optimal linear estimate of the functional $A\vec{\zeta}$ is called minimax (robust) if

$$\vec{h}^0(\lambda) \in H_D = \bigcap_{(f, g) \in D} L_2^s(f + g),$$

$$\min_{\vec{h} \in H_D} \max_{(f, g) \in D} \Delta(\vec{h}; f, g) = \max_{(f, g) \in D} \Delta(\vec{h}^0; f, g).$$

Taking into consideration these definitions and the obtained relations we can verify that the following lemma holds true.

Lemma 3.1. The spectral density matrices $f^0(\lambda) \in D_f$, $g^0(\lambda) \in D_g$, that satisfy the minimality condition (7), are the least favorable in the class D for the optimal linear estimation of $A\vec{\zeta}$, if the Fourier coefficients of the matrix functions

$$(f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^{-1}, \quad f^0(\lambda)(f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^{-1}, \\ f^0(\lambda)(f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^{-1}g^0(\lambda)$$

define matrices $\mathbf{B}^0, \mathbf{R}^0, \mathbf{D}^0$, that determine a solution of the constrained optimization problem

$$\max_{(f, g) \in D} (\langle \mathbf{R}\vec{\mathbf{a}}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}\vec{\mathbf{a}} \rangle + \langle \mathbf{D}\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle) = \langle \mathbf{R}^0\vec{\mathbf{a}}, (\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{R}^0\vec{\mathbf{a}} \rangle + \langle \mathbf{D}^0\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle. \quad (22)$$

The minimax spectral characteristic $\vec{h}^0 = \vec{h}(f^0, g^0)$ is given by (11), if $\vec{h}(f^0, g^0) \in H_D$.

The least favorable spectral densities $f^0(\lambda) \in D_f$, $g^0(\lambda) \in D_g$ and the minimax spectral characteristic $\vec{h}^0 = \vec{h}(f^0, g^0)$ form a saddle point of the function $\Delta(\vec{h}; f, g)$ on the set $H_D \times D$. The saddle point inequalities

$$\Delta(\vec{h}^0; f, g) \leq \Delta(\vec{h}^0; f^0, g^0) \leq \Delta(\vec{h}; f^0, g^0), \\ \forall \vec{h} \in H_D, \forall f \in D_f, \forall g \in D_g$$

hold true when $\vec{h}^0 = \vec{h}(f^0, g^0)$, $\vec{h}(f^0, g^0) \in H_D$ and (f^0, g^0) is a solution of the constrained optimization problem

$$\Delta(\vec{h}(f^0, g^0); f, g) \rightarrow \sup, (f, g) \in D_f \times D_g. \quad (23)$$

The linear functional $\Delta(\vec{h}(f^0, g^0); f, g)$ is calculated by the formula

$$\begin{aligned} \Delta(\vec{h}(f^0, g^0); f, g) = & \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(A^\top(e^{i\lambda})g^0(\lambda) + (C^0(e^{i\lambda}))^\top \right) \times \\ &\times (f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^{-1} f(\lambda) (f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^{-1} \times \\ &\times \left(A^\top(e^{i\lambda})g^0(\lambda) + (C^0(e^{i\lambda}))^\top \right)^* d\lambda + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(A^\top(e^{i\lambda})f^0(\lambda) - (C^0(e^{i\lambda}))^\top \right) \times \\ &\times (f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^{-1} g(\lambda) (f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^{-1} \times \\ &\times \left(A^\top(e^{i\lambda})f^0(\lambda) - (C^0(e^{i\lambda}))^\top \right)^* d\lambda, \end{aligned}$$

where $C^0(e^{i\lambda}) = \sum_{j \in U} \vec{c}^0(j) e^{ij\lambda}$, according to the formula (16) column vectors $\vec{c}^0(j) = ((\mathbf{B}^0)^{-1} \mathbf{R}^0 \vec{a})(j)$.

The constrained optimization problem (23) is equivalent to the unconstrained optimization problem, [30]:

$$\Delta_D(f, g) = -\Delta(\vec{h}(f^0, g^0); f, g) + \delta((f, g) | D_f \times D_g) \rightarrow \inf, \quad (24)$$

where $\delta((f, g) | D_f \times D_g)$ is the indicator function of the set $D = D_f \times D_g$. A solution of the problem (24) is characterized by the condition $0 \in \partial \Delta_D(f^0, g^0)$, where $\partial \Delta_D(f^0, g^0)$ is the subdifferential of the convex functional $\Delta_D(f, g)$ at point (f^0, g^0) , [31].

The form of the functional $\Delta(\vec{h}(f^0, g^0); f, g)$ admits finding the derivatives and differentials of the functional in the space $L_1 \times L_1$. Therefore the complexity of the optimization problem (24) is determined by the complexity of calculating of subdifferentials of the indicator functions $\delta((f, g) | D_f \times D_g)$ of the sets $D_f \times D_g$, [13].

The form of the functional $\Delta(\vec{h}(f^0, g^0); f, g)$ is convenient for application the Lagrange method of indefinite multipliers for finding solution to the problem (24). Using the Lagrange method of indefinite multipliers and the form of subdifferentials of the indicator functions we derived relations that determine the least favourable spectral densities in some classes of spectral densities (see books [27], [24]).

4 The least favorable spectral densities in the class $D = D_0 \times D_{1\delta}$

Let $f(\lambda)$ and $g(\lambda)$ be the spectral density matrices of T -variate stationary sequences $\vec{\zeta}(j)$ and $\vec{\theta}(j)$, obtained by T -blocking (3) of T -PC sequences $\zeta(j)$ and $\theta(j)$, respectively.

Consider the problem of minimax estimation of the functional $A\vec{\zeta}$ based on observations of the sequence $\vec{\zeta}(\tilde{j}) + \vec{\theta}(\tilde{j})$ at points $\tilde{j} \in \{\dots, -2, -1\} \setminus \tilde{S}$, $\tilde{S} = \bigcup_{i=1}^s \{-(M_i + N_i) + 1, \dots, -M_i\}$, under the condition that the spectral density matrices $f(\lambda)$ and $g(\lambda)$ belong to the class $D = D_0 \times D_{1\delta}$, where

$$\begin{aligned} D_0^1 &= \left\{ f(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Tr } f(\lambda) d\lambda = p \right. \right\}, \\ D_{1\delta}^1 &= \left\{ g(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\text{Tr}(g(\lambda) - g^1(\lambda))| d\lambda \leq \delta \right. \right\}, \\ D_0^2 &= \left\{ f(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{kk}(\lambda) d\lambda = p_k, k = 1, \dots, T \right. \right\}, \\ D_{1\delta}^2 &= \left\{ g(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\text{Tr}(g_{kk}(\lambda) - g_{kk}^1(\lambda))| d\lambda \leq \delta_k, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. k = 1, \dots, T \right\}, \end{aligned}$$

where $g^1(\lambda) = \{g_{kl}^1(\lambda)\}_{k,l=1}^T$ is known positive definite Hermitian matrix, $\delta, \delta_k, p, p_{kk}, k = 1, \dots, T$, are known and fixed numbers.

The classes $D_0^i, i = 1, 2$, describe densities with the moment restrictions. The classes $D_{1\delta}^i, i = 1, 2$, describe the " δ -neighborhood" models in the space L_1 of a fixed bounded spectral density $g^1(\lambda)$.

With the help of the method of Lagrange multipliers we can find that solution $(f^0(\lambda), g^0(\lambda))$ of the constrained optimization problem (23) satisfy the following relations for these sets of admissible spectral densities.

For the pair $D_0^1 \times D_{1\delta}^1$ we have relations

$$(g^0(\lambda) \overline{A(e^{i\lambda}) + C^0(e^{i\lambda})}) (g^0(\lambda))^\top (A(e^{i\lambda}) + C^0(e^{i\lambda}))^\top = \alpha^2 (f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^2, \quad (25)$$

$$(f^0(\lambda) \overline{A(e^{i\lambda}) - C^0(e^{i\lambda})}) (f^0(\lambda))^\top (A(e^{i\lambda}) - C^0(e^{i\lambda}))^\top = \beta^2 \psi(\lambda) (f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^2, \quad (26)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\text{Tr}(g^0(\lambda) - g^1(\lambda))| d\lambda = \delta, \quad (27)$$

where α, β are Lagrange multipliers, $|\psi(\lambda)| \leq 1$ and $\psi(\lambda) = \text{sign}(\text{Tr}(g^0(\lambda) - g^1(\lambda)))$ if $\text{Tr}(g^0(\lambda) - g^1(\lambda)) \neq 0$.

For the pair $D_0^2 \times D_{1\delta}^2$ we have relations

$$\begin{aligned} & (g^0(\lambda)\overline{A(e^{i\lambda})} + \overline{C^0(e^{i\lambda})}) \times \\ & \times (g^0(\lambda))^\top (A(e^{i\lambda}) + C^0(e^{i\lambda}))^\top = \\ & (f^0(\lambda) + g^0(\lambda)) \{ \alpha_k^2 \delta_{kl} \}_{k,l=1}^T (f^0(\lambda) + g^0(\lambda)), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & (f^0(\lambda)\overline{A(e^{i\lambda})} - \overline{C^0(e^{i\lambda})}) \times \\ & (f^0(\lambda))^\top (A(e^{i\lambda}) - C^0(e^{i\lambda}))^\top = \\ & (f^0(\lambda) + g^0(\lambda)) \{ \beta_k^2 \psi_k(\lambda) \delta_{kl} \}_{k,l=1}^T (f^0(\lambda) + g^0(\lambda)), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\text{Tr}(g_{kk}^0(\lambda) - g_{kk}^1(\lambda))| d\lambda = \delta_k, k = 1, \dots, T, \quad (30)$$

where α_k^2, β_k^2 are Lagrange multipliers, δ_{kl} are Kronecker symbols, $|\psi_k(\lambda)| \leq 1$ and $\psi_k(\lambda) = \text{sign}(\text{Tr}(g_{kk}^0(\lambda) - g_{kk}^1(\lambda)))$ if $\text{Tr}(g_{kk}^0(\lambda) - g_{kk}^1(\lambda)) \neq 0, k = 1, \dots, T$.

Hence the following theorem and corollaries hold true.

Theorem 4.1. *Let the spectral densities $f^0(\lambda)$ and $g^0(\lambda)$ satisfy the minimality condition (7). The least favorable spectral densities $f^0(\lambda), g^0(\lambda)$ in the class $D_0^1 \times D_{1\delta}^1$ for the optimal linear filtering of the functional $A\vec{\zeta}$ are determined by relations (25)–(27). The least favorable spectral densities $f^0(\lambda), g^0(\lambda)$ in the class $D_0^2 \times D_{1\delta}^2$ for the optimal linear filtering of the functional $A\vec{\zeta}$ are determined by relations (28)–(30). The minimax spectral characteristic of the optimal estimate of the functional $A\vec{\zeta}$ is determined by the formula (11).*

Corollary 4.1. Assume that the spectral density $g(\lambda)$ is known. Let the spectral density $f^0(\lambda) + g(\lambda)$ satisfies the minimality condition (7). The least favorable spectral density $f^0(\lambda)$ in the class D_0^1 or D_0^2 for the optimal linear filtering of the functional $A\vec{\zeta}$ based on observations of $\vec{\zeta}(\tilde{j})$ at points $\tilde{j} \in \{\dots, -2, -1\} \setminus \tilde{S}$ is determined by relations (25), (28), respectively, and by the constrained optimization problem (22).

Corollary 4.2. Assume that the spectral density $f(\lambda)$ is known. Let the spectral density $f(\lambda) + g^0(\lambda)$ satisfies the minimality condition (7). The least favorable spectral density $g^0(\lambda)$ in the class $D_{1\delta}^1$ or $D_{1\delta}^2$ for the optimal linear filtering of the

functional $A\vec{\zeta}$ based on observations of $\vec{\zeta}(\tilde{j})$ at points $\tilde{j} \in \{\dots, -2, -1\} \setminus \tilde{S}$ is determined by relations (26)–(27), (29)–(30), respectively, and by the constrained optimization problem (22).

5 The least favorable spectral densities in the class $D = D_0 \times D_V^W$

Let $f(\lambda)$ and $g(\lambda)$ be the spectral density matrices of T -variate stationary sequences $\vec{\zeta}(j)$ and $\vec{\theta}(j)$, obtained by T -blocking (3) of T -PC sequences $\zeta(j)$ and $\theta(j)$, respectively.

Consider the problem of minimax estimation of the functional $A\vec{\zeta}$ based on observations of the sequence $\vec{\zeta}(\tilde{j}) + \vec{\theta}(\tilde{j})$ at points $\tilde{j} \in \{\dots, -2, -1\} \setminus \tilde{S}$, under the condition that the spectral density matrices $f(\lambda)$ and $g(\lambda)$ belong to the class $D = D_0 \times D_V^W$, where

$$\begin{aligned} D_0^3 &= \left\{ f(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) d\lambda = P \right. \right\}, \\ D_U^W &= \{ g(\lambda) | U(\lambda) \leq g(\lambda) \leq W(\lambda), \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) d\lambda = Q \}, \end{aligned}$$

where P, Q are known positive definite Hermitian matrices, $U(\lambda), W(\lambda)$ are fixed spectral densities.

The class D_0^3 describes densities with the moment restrictions. The class D_U^W describes the "strip" models of spectral densities.

With the help of the method of Lagrange multipliers we can find that solution $(f^0(\lambda), g^0(\lambda))$ of the constrained optimization problem (23) satisfy the following relations for this set of admissible spectral densities.

For the class $D_0^3 \times D_U^W$ we have relations

$$\begin{aligned} & (g^0(\lambda)\overline{A(e^{i\lambda})} + \overline{C^0(e^{i\lambda})}) \times \\ & (g^0(\lambda))^\top (A(e^{i\lambda}) + C^0(e^{i\lambda}))^\top = \\ & (f^0(\lambda) + g^0(\lambda)) \vec{\alpha} \vec{\alpha}^\top (f^0(\lambda) + g^0(\lambda)), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & (f^0(\lambda)\overline{A(e^{i\lambda})} - \overline{C^0(e^{i\lambda})}) \times \\ & (f^0(\lambda))^\top (A(e^{i\lambda}) - C^0(e^{i\lambda}))^\top = \\ & (f^0(\lambda) + g^0(\lambda)) (\vec{\beta} \vec{\beta}^\top + \Gamma_1(\lambda) + \Gamma_2(\lambda)) (f^0(\lambda) + g^0(\lambda)), \end{aligned} \quad (32)$$

where $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ are Lagrange multipliers, $\Gamma_1(\lambda) \leq 0$ and $\Gamma_1(\lambda) = 0$ if $g^0(\lambda) > V(\lambda)$, $\Gamma_2(\lambda) \geq 0$ and $\Gamma_2(\lambda) = 0$ if $g^0(\lambda) < W(\lambda)$.

Hence the following theorem and corollaries hold true.

Theorem 5.1. Let the spectral densities $f^0(\lambda)$ and $g^0(\lambda)$ satisfy the minimality condition (7). The least favorable spectral densities $f^0(\lambda)$, $g^0(\lambda)$ in the class $D_0^3 \times D_U^W$ for the optimal linear filtering of the functional $A\vec{\zeta}$ are determined by relations (31), (32). The minimax spectral characteristic of the optimal estimate of the functional $A\vec{\zeta}$ is determined by the formula (11).

Corollary 5.1. Assume that the spectral density $g(\lambda)$ is known. Let the spectral density $f^0(\lambda) + g(\lambda)$ satisfies the minimality condition (7). The least favorable spectral density $f^0(\lambda)$ in the class D_0^3 for the optimal linear filtering of the functional $A\vec{\zeta}$ based on observations of $\vec{\zeta}(\tilde{j})$ at points $\tilde{j} \in \{\dots, -2, -1\} \setminus \tilde{S}$ is determined by relation (31) and by the constrained optimization problem (22).

Corollary 5.2. Assume that the spectral density $f(\lambda)$ is known. Let the spectral density $f(\lambda) + g^0(\lambda)$ satisfies the minimality condition (7). The least favorable spectral density $g^0(\lambda)$ in the class D_U^W for the optimal linear filtering of the functional $A\vec{\zeta}$ based on observations of $\vec{\zeta}(\tilde{j})$ at points $\tilde{j} \in \{\dots, -2, -1\} \setminus \tilde{S}$ is determined by relation (32) and by the constrained optimization problem (22).

6 Conclusions

In this article we study the filtering problem of the functional $A\vec{\zeta}$ which depends on the unobserved values of a periodically correlated stochastic sequence $\zeta(j)$. Estimates are based on observations of a periodically correlated stochastic sequence $\zeta(j) + \theta(j)$ with missing observations, that means that observations of $\zeta(j) + \theta(j)$ are known at points $j \in \{\dots, -(T+2), -(T+1), \dots\} \setminus S$. The sequence $\theta(j)$ is uncorrelated with $\zeta(j)$ additive noise.

The filtering problem is considered under conditions of spectral certainty and spectral uncertainty. In the first case of spectral certainty the spectral density matrices $f(\lambda)$ and $g(\lambda)$ of the T -variate stationary sequences $\vec{\zeta}(n)$ and $\vec{\theta}(n)$, obtained by T -blocking of T -PC sequences $\zeta(j)$ and $\theta(j)$, respectively, are supposed to be known exactly. With the help of Hilbert space projection method formulas for calculating the spectral characteristic and the mean-square error of the optimal estimate of the functionals are proposed. In the second case of spectral uncertainty the spectral density matrices are not exactly known

while a class $D = D_f \times D_g$ of admissible spectral densities is given. Using the minimax (robust) estimation method we derived relations that determine the least favorable spectral densities and the minimax spectral characteristic of the optimal estimate of the functional $A\vec{\zeta}$. The problem is investigated in details for two special classes of admissible spectral densities.

Список використаних джерел

1. Bennett W.R. Statistics of regenerative digital transmission/ W.R. Bennet// Bell System Technical Journal. – 1958. – Vol.37, No. 6. – P. 1501-1542.
2. Dubovets'ka I.I. Filtration of linear functionals of periodically correlated sequences/ I.I. Dubovets'ka, M.P. Moklyachuk// Theory Probab. Math. Stat. – 2013. – Vol.86 – P. 51-64.
3. Gardner W.A. Characterization of cyclostationary random signal processes/ W.A. Gardner, L.E. Franks// IEEE Transactions on information theory. – 1975. – Vol. IT-21, No. 1. – P. 4-14.
4. Gardner W.A. Cyclostationarity in communications and signal processing/ W.A. Gardner. – New York: IEEE Press, 1994. – 504 p.
5. Gardner W.A. Cyclostationarity: Half a century of research/ W.A. Gardner, A. Napolitano, L. Paura// Signal Processing. – 2006. – Vol. 86. – P. 639-697.
6. Gladyshev E.G. Periodically correlated random sequences/ E.G. Gladyshev// Sov. Math. – 1961. – Dokl. 2. – P. 385-388.
7. Golichenko I.I. Interpolation Problem for Periodically Correlated Stochastic Sequences with Missing Observations/ I.I. Golichenko, M.P. Moklyachuk// Statistics, Optimization & Information Computing. – 2020. – Vol. 8, No. 2. – P. 631-654.
8. Golichenko I.I. Extrapolation problem for periodically correlated stochastic sequences with missing observations/ I.I. Golichenko, O.Yu. Masyutka, M.P. Moklyachuk// Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physics and Mathematics. – 2021. – No. 2. – P. 39-52.

9. *Golichenko I.* Estimation problems for periodically correlated stochastic sequences with missed observations/ I. Golichenko, M. Moklyachuk// In: M. Moklyachuk (ed.) Stochastic Processes: Fundamentals and Emerging Applications. Nova Science Publishers, New York. – 2023. – P. 111-162.
10. *Grenander U.* A prediction problem in game theory/ U. Grenander// Ark. Mat. – 1957. – Vol. 3. – P. 371-379.
11. *Hannan E.J.* Multiple time series/ E.J. Hannan. — N.Y.: Wiley, 1970. — 536 p.
12. *Hurd H.L.* Periodically correlated random sequences/ H.L. Hurd, A. Miamee. — John Wiley & Sons, Inc., Publication. – 2007. – 353 p.
13. *Ioffe A.D.* Theory of extremal problems/ A.D. Ioffe, V.M. Tihomirov. — Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 6. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland Publishing Company. XII. – 1979. — 459 p.
14. *Kassam S.A.* Robust techniques for signal processing: A survey/ S.A. Kassam, H.V. Poor// Proc. IEEE. — 1985. — Vol. 73, No. 3. — P. 433-481.
15. *Kolmogorov A.N.* Selected works by A. N. Kolmogorov. Vol. II: Probability theory and mathematical statistics/ A. N. Shirayev (Ed.). — Kluwer Academic Publications, 1992. – 611p.
16. *Luz M.* Estimation of Stochastic Processes with Stationary Increments and Cointegrated Sequences/ M. Luz, M. Moklyachuk. — London: ISTE; Hoboken, NJ: John Wiley and Sons, 2019 — 308 p.
17. *Makagon A.* Theoretical prediction of periodically correlated sequences/ A. Makagon// Probab. Math. Statist. – 1999. – Vol. 19, No. 2. – P. 287-322.
18. *Makagon A.* Stationary sequences associated with a periodically correlated sequence/ A. Makagon, H. Salehi, A.R. Soltani// Probab. Math. Statist. – 2011. – Vol. 31, No. 2. – P. 263-283.
19. *Masyutka O.Yu.* Interpolation problem for multidimensional stationary sequences with missing observations/ O.Yu. Masyutka, M.P. Moklyachuk, M.I. Sidei// Stochastic Modeling and Applications. — 2011. – Vol. 22, No. 2. – P. 85-103.
20. *Masyutka O.Yu.* Extrapolation problem for multidimensional stationary sequences with missing observations/ O.Yu. Masyutka, M.P. Moklyachuk, M.I. Sidei// Statistics, Optimization & Information Computing. – 2019. – Vol. 7, No. 1. – P. 97-117.
21. *Masyutka O.Yu.* Filtering of multidimensional stationary sequences with missing observations/ O.Yu. Masyutka, M.P. Moklyachuk, M.I. Sidei// Carpathian Mathematical Publications. – 2019. – Vol.11, No.2. – P. 361-378.
22. *Masyutka O.Yu.* On estimation problem for continuous time stationary processes from observations in special sets of points/ O.Yu. Masyutka, I.I. Golichenko, M.P. Moklyachuk// Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physics and Mathematics. – 2022. – No.1. – P. 20-33.
23. *Moklyachuk M.P.* Minimax-robust estimation problems for stationary stochastic sequences/ M.P. Moklyachuk// Statistics, Optimization & Information Computing. – 2015. – Vol. 3, No. 4. – P. 348-419.
24. *Moklyachuk M.P.* Minimax-robust estimation technique for stationary stochastic processes/ M.P. Moklyachuk, A.Yu. Masyutka — LAP Lambert Academic Publishing, 2012. – 296 p.
25. *Moklyachuk M.P.* Estimates of periodically correlated isotropic random fields/ M.P. Moklyachuk, A.Yu. Masyutka, I.I. Golichenko — Nova Science Publishers Inc. New York, 2018.
26. *Moklyachuk M.P., Sidei M.I., Masyutka O. Yu.* Estimation of stochastic processes with missing observations/ M.P. Moklyachuk, M.I. Sidei, O.Yu. Masyutka — New York: Nova Science Publishers, 2019.
27. *Moklyachuk M.P.* Periodically correlated processes estimates/ M.P. Moklyachuk,

- I.I. Golichenko — LAP Lambert Academic Publishing, 2016. — 308 p.
28. Napolitano A. Cyclostationarity: Limits and generalizations/ A. Napolitano// Signal processing. — 2016. — Vol. 120. — P. 323-347.
29. Napolitano A. Cyclostationarity: New trends and applications/ A. Napolitano// Signal processing. — 2016. — Vol. 120. — P. 385-408.
30. Pshenichnyj B.N. Necessary conditions of an extremum/ B.N. Pshenichnyj — Pure and Applied mathematics. 4. New York: Marcel Dekker, 1971. — 230 p.
31. Rockafellar R.T. Convex Analysis/ R.T. Rockafellar — Princeton University Press, 1997. — 451 p.
32. Rozanov Yu.A. Stationary stochastic processes/ Yu.A. Rozanov. — San Francisco-Cambridge-London-Amsterdam: Holden-Day, 1967.
33. Vastola S.K. An analysis of the effects of spectral uncertainty on Wiener filtering/ S.K. Vastola, H.V. Poor// Automatica. — 1983. — Vol. 19, No. 3. — P. 289-293.
34. Wiener N. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. With engineering applications/ N. Wiener. — The M. I. T. Press, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., 1966. — 163 p.
35. Yaglom A. M. Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 1: Basic results, Vol. 2: Supplementary notes and references/ A.M. Yaglom. — Springer Series in Statistics. New York etc.: Springer-Verlag, 1987.
3. GARDNER, W.A., FRANKS, L.E. (1975) Characterization of cyclostationary random signal processes *IEEE Transactions on information theory* IT-21(1) .p. 4–14.
4. GARDNER, W.A. (1994) *Cyclostationarity in communications and signal processing* New York: IEEE Press.
5. GARDNER, W.A., NAPOLITANO. A. and PAURA. L. (2006) Cyclostationarity: Half a century of research *Signal Processing* 86. p. 639–697.
6. GLADYSHEV, E.G. (1961) Periodically correlated random sequences *Sov. Math. Dokl.* 2. p. 385–388.
7. GOLICHENKO, I.I., MOKLYACHUK, M.P. (2020) Interpolation Problem for Periodically Correlated Stochastic Sequences with Missing Observations/ I.I. Golichenko, M.P. Moklyachuk// *Statistics, Optimization & Information Computing*. 8(2). p. 631–654.
8. GOLICHENKO, I. I., MASYUTKA, A. YU. and MOKLYACHUK, M. P. (2021) Extrapolation problem for periodically correlated stochastic sequences with missing observations. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physics and Mathematics*. 2. p. 39–52.
9. GOLICHENKO, I., MOKLYACHUK, M. (2023) Estimation problems for periodically correlated stochastic sequences with missed observations. In: M. Moklyachuk (ed.) *Stochastic Processes: Fundamentals and Emerging Applications*. Nova Science Publishers, New York. p. 111–162.
10. GRENANDER, U. (1957) A prediction problem in game theory. *Ark. Mat.* 3. p. 371–379.
11. HANNAN, E. J. (1970) *Multiple time series*. Wiley, New York.
12. HURD, H. L., MIAMEE, A. (2007) *Periodically correlated random sequences*. John Wiley & Sons, Inc., Publication.
13. IOFFE, A.D. and TIHOMIROV, V.M. (1979) *Theory of extremal problems*. North-Holland Publishing Company.

References

1. BENNETT, W.R. (1958) Statistics of regenerative digital transmission. *Bell System Technical Journal* 37(6). p. 1501–1542.
2. DUBOVETS'KA, I.I. (2013) Filtration of linear functionals of periodically correlated sequences *Theory Probab. Math. Stat.* 86. p. 51–64.

14. KASSAM, S. A. and POOR, H. V. (1985) Robust techniques for signal processing: A survey. *Proc. IEEE*. 73(3). p. 433–481.
15. KOLMOGOROV, A. N. (1992) In: Shiryayev A. N. (Ed.) *Selected works by A. N. Kolmogorov. Vol. II: Probability theory and mathematical statistics* Kluwer Academic Publishers.
16. LUZ, M., MOKLYACHUK, M. (2019) *Estimation of Stochastic Processes with Stationary Increments and Cointegrated Sequences*. London: ISTE; Hoboken, NJ: John Wiley & Sons .
17. MAKAGON, A. (1999) Theoretical prediction of periodically correlated sequences. *Probab. Math. Statist.* 19(2). p. 287–322.
18. MAKAGON, A., SALEHI, H. and SOLTANI, A.R. (2011) Stationary sequences associated with a periodically correlated sequence *Probab. Math. Statist.* 31(2). p. 263–283.
19. MASYUTKA, O. YU., MOKLYACHUK, M. P. and SIDEI, M. I. (2011) Interpolation problem for multidimensional stationary sequences with missing observations *Stochastic Modeling and Applications*. 22(2). p. 85–103.
20. MASYUTKA, O. YU., MOKLYACHUK, M. P. and SIDEI, M. I. (2019) Extrapolation problem for multidimensional stationary sequences with missing observations. *Statistics, Optimization & Information Computing*. 7(1). p. 97–117.
21. MASYUTKA, O. YU., MOKLYACHUK, M. P. and SIDEI, M. I. (2019) Filtering of multidimensional stationary sequences with missing observations. *Carpathian Mathematical Publications*. 11(2). p. 361–378.
22. MASYUTKA, O. YU., GOLICHENKO, I.I. and MOKLYACHUK, M. P. (2022) On estimation problem for continuous time stationary processes from observations in special sets of points. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physics and Mathematics*. 1. p. 20–33.
23. MOKLYACHUK, M. P. (2015) Minimax-robust estimation problems for stationary stochastic sequences. *Statistics, Optimization & Information Computing*. 3(4). p. 348–419.
24. MOKLYACHUK, M. P. and MASYUTKA, A. YU. (2012) *Minimax-robust estimation technique for stationary stochastic processes*. LAP LAMBERT Academic Publishing.
25. MOKLYACHUK, M. P., MASYUTKA, A. YU. and GOLICHENKO, I.I. (2018) *Estimates of periodically correlated isotropic random fields*. Nova Science Publishers Inc. New York.
26. MOKLYACHUK, M. P., SIDEI, M. I. and MASYUTKA, O. YU. (2019) *Estimation of stochastic processes with missing observations*. New York, NY: Nova Science Publishers.
27. MOKLYACHUK, M. P., GOLICHENKO, I.I. (2016) *Periodically correlated processes estimates*. LAP Lambert Academic Publishing.
28. NAPOLITANO A. (2016) Cyclostationarity: Limits and generalizations *Signal processing*. 120. p. 323–347.
29. NAPOLITANO A. (2016) Cyclostationarity: New trends and applications *Signal processing*. 120. p. 385–408.
30. PSHENICHNYI, B.N. (1971) *Necessary conditions of an extremum*. New York: Marcel Dekker.
31. ROCKAFELLAR, R. T. (1997) *Convex Analysis*. Princeton University Press.
32. ROZANOV, YU.A. (1967) *Stationary stochastic processes*. San Francisco-Cambridge-London-Amsterdam: Holden-Day.
33. VASTOLA, S.K., POOR H.V. (1983) An analysis of the effects of spectral uncertainty on Wiener filtering. *Automatica*. 19(3). p. 289–293.
34. WIENER, N. (1966) *Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. With engineering applications*. The M. I. T. Press, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge.
35. YAGLOM, A. M. (1987) *Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 1: Basic results; Vol. 2: Supplementary notes and references*. Springer-Verlag, New York etc.

Received: 02.09.2023

УДК 519.21:519.6

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.5>

В.П. Зубченко¹, к.ф.-м.н, доц.
А.В. Авраменко²

V.P. Zubchenko¹, PhD, Associate Professor
A.V. Avramenko²

Дослідження скорингової моделі для кредитопозичальників банку

Investigation of the scoring model for bank borrowers

^{1,2}Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Академіка Глушкова 4д,
e-mail: volodymyr.zubchenko@knu.ua,
²avramenkoanton23@gmail.com

^{1,2}Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: volodymyr.zubchenko@knu.ua,
²avramenkoanton23@gmail.com

В роботі досліджено скорингові моделі як інструмент управління кредитними ризиками, їх типи та особливості. Розглянуто поняття кредитоспроможності та скорингу, типи скорингу та їх особливості, методи скорингових моделей (логістична регресія, дерева рішень, лінійне програмування, дерева рішень та інші) та етапи їх побудови. В роботі наведені основні формули, що використовуються для оцінки кредитоспроможності позичальників та підвищення точності скорингових моделей, включаючи індекс стабільності популяції, коефіцієнт R^2 , коефіцієнт Колмогорова-Смірнова та інші; розглянуто практичне застосування скорингових моделей в банках України на прикладі типового позичальника.

Ключові слова: кредитний скоринг, кредитоспроможність, платоспроможність, оцінка кредитоспроможності, позичальники, скорингова карта, класифікація ознак, методи створення, машинне навчання, тестування моделі.

In the paper we investigate scoring models as a tool for credit risk management, their importance, types, features and applications. We consider the history of scoring models and the development of the modern concepts of creditworthiness and scoring, examine scoring types and their features, methods (logistic regression, decision trees, linear programming, decision trees, and others), strengths and weaknesses of each considered method and stages of building scoring models; we stress the importance of scoring cards for building scoring models, indicate the main quantitative and qualitative features, their classification used for and describe the procedure of creating scoring cards. In the paper we consider the factors needed to be considered for more effective scoring model building process; we indicate the main formulas used to assess the creditworthiness of borrowers and improve the accuracy of scoring models, including Population Stability Index (PSI), R-Square Coefficient, Kolmogorov-Smirnov Coefficient, GINI Coefficient, and others; the practical application of scoring models in banks of Ukraine and their steps after applying scoring models are described on the example of a typical borrower.

Keywords: credit scoring, creditworthiness, solvency, creditworthiness assessment, borrowers, scoring card, classification of features, creation methods, machine learning, model testing.

Вступ

В наш час кредитування є однією з ключових економічних складових, оскільки для банків воно є основним джерелом прибутку. В сучасному світі спостерігається збільшення обсягів споживчого кредитування. Проте разом з цим, зростає і кількість неповернених кредитів, що наносить великі збитки банківським установам. Саме через це важливою задачею є мінімізація кредитних ризиків для зменшення цих збитків. З цією метою було розроблено кілька методів оцінювання кредитних ризиків, одним з яких і є кредитний скоринг.

У 1940 році Національне бюро економічних досліджень США опублікувало роботу Ральфа Янга «Особисті фінансові компанії та їх кредитна практика», в якій вперше були висловлені ідеї скорингу. Однак, зараз про цю публікацію знає лише вузьке коло фахівців, а «винахідником» скорингу вважається Девід Дюран, який адаптував розроблену Гансом Фішером методику класифікації рослин для класифікації кредитів на «погані» і «хороші». У 1941 р. Національне бюро економічних досліджень США замовило дослідницький проект, в якому Дюран на основі статистики банків і інших фінансових організацій проаналізував сотню позитивних і негативних кредитних історій, використав дискримінантний аналіз та розробив індивідуальну систему оцінки ступеня важливості параметрів.

Модель Д. Дюрана складалась з групи чинників для визначення ступеня кредитного ризику та коефіцієнтів для різних факторів, що характеризують кредитоспроможність клієнта.

У 1956 році американці – інженер Вільям Фер і математик Ерл Айзек, які працювали в Стенфордському дослідницькому інституті, описали першу кредитну скорингову модель. Вони розробили математичний алгоритм, що дозволяв прораховувати кредитні ризики у вигляді трьохзначного числа, яке є кредитним рейтингом, і таким чином визначав рівень кредитоспроможності позичальника. Вони заснували компанію Fair, Isaac and Company (FICO), яка досі є одним із лідерів серед розробників скорингових систем.

На початку 1960-х років з появою кредитних карток, системи кредитного скорингу набули більшого поширення. Великий потік клієнтів, які зверталися за кредитними картками, разом з дефіцитом трудових ресурсів привів до автоматизації кредитного процесу. Використання кредитного скорингу в банках

зменшило кількість дефолтів по позикам на 50% в порівнянні з використанням експертної думки, яку використовували до цього.

Успіх застосування скорингу у видачі кредитних карток забезпечив на початку 80-х років перехід методу і на інші банківські продукти, такі як персональні кредити, іпотечні кредити та кредити для малого бізнесу. Досягнення в області обчислювальної техніки відкрили можливості для побудови скорингових моделей новими способами. Були розроблені та впроваджені основні математичні методи, які використовуються і сьогодні: лінійне програмування, дерева рішень та логістична регресія.

Мета роботи – розкрити поняття кредитоспроможності та скорингу, розглянути типи скорингу та їх особливості; розглянути методи (логістична регресія, дерева рішень та лінійне програмування) та етапи побудови скорингових моделей, навести основні формули, що використовуються для оцінки кредитоспроможності позичальників та підвищення точності скорингових моделей; описати практичне застосування скорингових моделей в банках України на прикладі конкретного позичальника.

1. Загальна інформація про предмет дослідження

Основним критерієм, що визначає можливість надання банком кредиту, є кредитоспроможність та платоспроможність позичальника, після перевірки яких банки визначають фактори, що впливають на можливість неповернення кредиту.

Кредитоспроможність - наявність у клієнта передумов для проведення активної операції (отримання кредиту) і його спроможність повернути кредит у повному обсязі та в обумовлені договором строки.

Банки (фінансові установи) при оцінці кредитоспроможності враховують наступні фактори:

- ✓ фінансовий стан потенційного позичальника;
- ✓ боргове навантаження – співвідношення існуючих зобов'язань і запитуваної позики до основного доходу заявника;
- ✓ кредитну репутацію клієнта;
- ✓ вартість майна, яке є у власності позичальника;

- ✓ соціальний статус заявника, його особистісні характеристики, просування кар'єрними сходами та інші фактори.

Платоспроможність - це здатність боржника банку здійснювати розрахунки за всіма видами своїх зобов'язань відповідно до умов договорів. [1]

Кредитоспроможність позичальника, на відміну від його платоспроможності, не фіксує неплатежі за минулий період чи на певну дату, а прогнозує здатність до погашення боргу на найближчу перспективу. Отже, кредитоспроможність - це якісна оцінка позичальника, яка дається банком для розгляду питання про можливість і умови кредитування і дозволяє передбачити ймовірність своєчасного повернення позик та їх ефективного використання. [2]

Для визначення кредитоспроможності та платоспроможності кредитопозичальника банки застосовують метод кредитного скорингу.

Кредитний скоринг - математична або статистична модель, створена на підставі кредитної історії минулих клієнтів за допомогою якої банк намагається визначити, наскільки велика вірогідність того, що окремих потенційний позичальник поверне кредит в обумовлений строк; систематизована шкала значень якісних та кількісних показників, а також балів, що використовується для оцінки ймовірності повернення кредиту.

В залежності від мети проведення оцінки виділяють такі 4 типи кредитного скорингу:

- 1) *аплікаційний скоринг* (application scoring) - використовується на початку кредитних відносин, коли позичальник отримує кредит. [3] Дана скорингова модель є методом оцінки потенційних позичальників для прийняття рішення щодо надання кредиту та трансформує в кількісні значення ті ризики, які пов'язані з правильною оцінкою соціальних, демографічних, фінансових та інших даних позичальника. Її використання дозволяє отримати найбільш об'єктивну оцінку на підставі статистично підтверджених закономірностей, а не суб'єктивної думки певного кола осіб;
- 2) *поведінковий скоринг* (behavioral scoring) є частиною кредитного моніторингу протягом кредитного періоду. [3] Даний скоринг є оцінкою ймовірності повернення позичальником

вже існуючих кредитів, яка заснована на даних про історію транзакцій по його рахунках, його кредитній історії, фінансовому стані, соціальних, демографічних та інших даних;

- 3) *колекторський скоринг* (collection scoring) - оцінка ймовірності повного або часткового повернення кредиту. [3] Даний вид скорингу використовується при порушенні позичальником терміну договору та здійснюється для визначення пріоритетних заходів щодо поверненням позичальником кредиту;
- 4) *шахрайський скоринг* (fraud scoring) - статистична оцінка вірогідності шахрайських дій з боку потенційного позичальника. [3]

Скорингові моделі є інструментом оцінки *кредитного ризику*, тобто ймовірності виникнення збитків або додаткових втрат або недоотримання запланованих доходів унаслідок невиконання боржником узятих на себе зобов'язань відповідно до умов договору. [5]

Скорингові моделі застосовуються з метою:

- ✓ прискорення процедури оцінки позичальника і, як наслідок, зменшення терміну розгляду заявки та прийняття рішення;
- ✓ зменшення обсягу неповернутих кредитів та зменшення обсягів сформованих (відповідно до нормативних вимог) резервів під можливі втрати за кредитними зобов'язаннями відповідно;
- ✓ зниження впливу людського фактору на прийняття рішень за кредитними запитами;
- ✓ формування повної та якісної бази даних позичальників тощо.

Етапами побудови скорингової моделі можна зазначити:

- ⇒ визначення основних характеристик та припущень;
- ⇒ підготовка вхідних даних для скорингової моделі, перевірка їх якості і достатності;
- ⇒ побудова моделі;
- ⇒ тестування моделі та оцінка коректності її результатів;
- ⇒ опис та затвердження моделі;
- ⇒ впровадження моделі;
- ⇒ моніторинг моделі та, за необхідності, внесення змін.

2. Методика побудови скорингових моделей

2.1. Методи і моделі для вирішення задачі оцінювання кредитних ризиків

Основними методами, що застосовуються для створення скорингових моделей, є лінійне програмування, дерева рішень та логістична регресія.

Лінійне програмування в контексті оцінки кредитоспроможності клієнта використовується для побудови лінійної ймовірнісної моделі.

Лінійна ймовірнісна модель – модель, у якій ймовірність виникнення певної події (наприклад, виплати кредиту або затримки у платежах) моделюється як лінійна функція від набору показників або змінних. Ці показники можуть включати різні характеристики кредитопозичальників, такі як вік, зайнятість, дохід, кредитна історія та інші.

Лінійну ймовірнісну модель можна представити наступним чином:

$$P(Y = 1|X) = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_kX_k,$$

де $P(Y = 1|X)$ представляє ймовірність події Y (наприклад, виплата кредиту) при заданих значеннях показників $X_1, X_2, \dots, X_k$. $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ є коефіцієнтами моделі, які визначають вплив кожного показника на ймовірність виникнення події. $X_1, X_2, \dots, X_k$ є значеннями показників кредитопозичальників.

Лінійні ймовірнісні моделі є простими в реалізації та інтерпретації та досить стійкими до викидів даних, проте мають низьку ефективність при роботі з даними, які характеризуються нелінійними залежностями.

Логістична регресія – це статистичний регресійний метод, що застосовують у випадку, коли залежна змінна є категорійною (може набувати тільки два значення), тобто за допомогою логістичної регресії можна оцінити ймовірність того, що подія наступить для конкретного дослідження, наприклад, чи буде дефолт по кредиту, чи ні. В останні роки логістична регресія стала найбільш поширеним методом побудови скорингових моделей для розрахунку рейтингу позичальників і управління кредитними ризиками.

Логістична регресія дозволяє оцінити ймовірність того, що відбудеться якась конкретна подія для певного випробування (наприклад, повернення кредиту).

Логістична регресія описується формулою:

$$F(X) = \frac{1}{1 + e^{-(w_0 + w_1x_1 + \dots + w_nx_n)}}, \text{ де}$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ – незалежні змінні/показники;
 $w_1, w_2, \dots, w_n$ – коефіцієнти логістичної регресії;
 n – кількість незалежних змінних/показників.

Існує кілька методів знаходження коефіцієнтів логістичної регресії. Найчастіше використовують метод максимальної правдоподібності. Його використовують в статистиці, щоб одержати оцінки параметрів генеральної сукупності за даними вибірки. В основі методу знаходиться функція правдоподібності (likelihood function), яка виражає щільність ймовірності спільної появи результатів вибірки.

До переваг логістичної регресії можна віднести ефективність в навчанні та зрозумілість в інтерпретації результатів. Окрім цього, в порівнянні з лінійною регресією логістична регресія потребує менше вхідних даних, бо для її проведення потрібно менше припущень. При цьому, одним із обмежень логістичної регресії є те, що вона не дозволяє описати складні нелінійні зв'язки між незалежними та залежними змінними. Іншими недоліками логістичної регресії є те, що вона потребує великого обсягу навчальних даних і є чутливою до викидів.[4]

Дерева рішень представляють собою структуру, зазвичай створену за допомогою алгоритмів машинного навчання, яка моделює прийняття рішень шляхом розгалуження на основі набору правил та умов. Дерево рішень можна проілюструвати як ієрархічну структуру, в якій спостереження класифікуються на основі тверджень «якщо... то...». У деревах рішень вибір класифікаторів та їх граничних значень здійснюється автоматично на основі їх статистичної важливості. Дерево рішень починається з найважливішого класифікатора (кореневого вузла дерева), який розбиває всі залежні значення на дві групи (істина або хиб). Усі наступні класифікатори (оператори if) називаються внутрішніми вузлами. Залежні значення присвоюються відповідним групам операторів then, які називаються листками.

Ключовою перевагою дерев рішень є їх зрозуміле представлення у того, як були отримані результати моделі. Ієрархічна та послідовна структура дерев рішень дозволяє проілюструвати нелінійні зв'язки між незалежними та залежними змінними. Ще однією перевагою застосування дерева рішень є те, що цей метод є ефективним у роботі з відсутніми значеннями. Головний недолік дерев рішень полягає в тому, що вони можуть бути

нестійкими до перенавчання та змін у навчальних даних – це означає, що невеликі коригування вхідних даних можуть кардинально змінити структуру дерева рішень.[5]

Останнім часом набирають популярність нові підходи до побудови скорингових моделей, що використовують можливості штучного інтелекту, такі як нейронні мережі та метод випадкового лісу.

Нейронні мережі – інструмент нелінійного машинного навчання. Вони складаються з вхідного, прихованого та вихідного шарів нейронів. Навчальні дані передаються через вхідні нейрони до нейронів прихованих шарів. На наступному кроці нейрони прихованих шарів намагаються розпізнати деякі закономірності в даних та зв'язки між ознаками та залежною змінною. Після обробки цих даних вони передаються далі на вихідний рівень. Оцінки вихідного рівня порівнюються з фактичними даними та обчислюється похибка моделі.

Нейронні мережі здатні виявляти складні нелінійні моделі даних з великою кількістю параметрів і спостережень. З іншого боку, навчання нейронних мереж потребує багато часу і великих обчислювальних потужностей, а результати створених ними моделей є складними для інтерпретації.[5]

Випадкові ліси — це група методів машинного навчання, які використовуються для задач класифікації та регресії. Основна ідея методу випадкових лісів полягає в побудові набору дерев рішень із випадково вибраними підвибірками даних та ознак. Кожне дерево в лісі незалежно конструюється шляхом випадкового вибору підвибірки даних (bootstrapping) та випадкового вибору підмножини ознак. Випадковий вибір ознак є другим методом, який використовується випадковими лісами для диверсифікації дерев рішень. У цьому підході не всі параметри використовуються в навчанні дерева рішень. Кожне з дерев рішень випадкового лісу буде побудовано на навчальній вибірці з частиною випадково вибраних незалежних змінних. Як наслідок, випадковий вибір параметрів моделі не дозволяє моделі надавати надмірно великого значення певним параметрам та нехтувати іншими.

Метод випадкового лісу має кілька переваг і недоліків. Цей підхід дозволяє зменшити дисперсію окремих дерев рішень і запобігти переобладнанню моделі. Ще одна

перевага випадкового лісу полягає в тому, що він може обробляти відсутні значення. Крім того, метод випадкового лісу не вимагає попередньої нормалізації змінних або вибору ознак і ефективно обробляє набори даних із великою кількістю вхідних змінних. Найбільшим недоліком цього підходу є висока складність аналізу моделі через велику кількість випадкових дерев та потреба у великих обчислювальних потужностях.[5]

2.2. Визначення основних характеристик, підготовка вхідних даних, перевірка їх якості

На даному етапі побудови скорингової моделі здійснюється обробка і аналіз характеристик-показників про поведінку аналогічних позичальників в минулому, експертних знань, значної кількості даних, отриманих з різних (в т. ч. зовнішніх) джерел. Показники, що використовуються, поділяються на кількісні та якісні.

До складу якісних показників можуть включатись, зокрема, але не виключно, наступні показники:

- сімейний стан;
- вік позичальника;
- освіта позичальника;
- стаж роботи;
- стаж роботи на останньому місці роботи;
- посада;
- наявність/відсутність власного майна та/або нерухомості.

До складу кількісних показників можуть включатись, зокрема, але не виключно наступні показники:

- коефіцієнт платоспроможності позичальника;
- розмір доходу позичальника;
- показник сукупного чистого доходу;
- частка погашення кредиту в чистому доході позичальника;
- коефіцієнт боргового навантаження (відношення місячного платежу позичальника за кредитом до його місячного доходу).

Для формування повноцінної вибірки та суттєвого підвищення якості даних, здійснюється цілеспрямований, систематичний збір і аналіз даних.

На основі зібраних даних створюється *скорингова карта*, тобто набір характеристик (вік, дохід, професія, досвід роботи, наявність майна тощо) позичальника та певні ваги, виражені в балах. Клієнту банку нараховується

певна кількість балів залежно від інформації, яку він повідомив про себе.

Максимальна сума кредиту, яку банк готовий надати позичальнику, розраховується залежно від кількості балів. Логістична регресія є найбільш поширеною статистичною моделлю оцінювання бінарної залежної змінної. Оцінка коефіцієнтів логістичної регресії як балів є головним кроком у розробці карти балів.

В подальшому здійснюється класифікація всіх позичальників на три основні групи:

- a) хороші (далі - Goods);
- b) погані (далі - Bads);
- c) невизначені (далі - Indetermined).

Класифікація позичальників залежить від мети, відповідно до якої розроблюється скорингова модель (behavioral scoring, fraud scoring, collection scoring або application scoring).

Позичальники, по яких відсутні випадки виникнення простроченої заборгованості для Application scoring класифікуються, як «Goods». Позичальники, за кредитними операціями яких виникла прострочена заборгованість понад 90 днів для Application scoring, класифікуються, як «Bads». Як Bads також можуть бути визначені позичальники по яких відбулось списання кредитної заборгованості за рахунок сформованого (відповідно нормативних вимог) резерву, рефінансування (пов'язаного з фінансовими труднощами позичальника), погашення кредитної заборгованості тощо.

Позичальники, які не можуть бути класифіковані як «Goods» та «Bads» класифікуються для Application scoring, як «Indetermined» та не враховуються при розробці скорингової моделі. До Indetermined, наприклад, можливо віднести позичальників за якими виникла прострочена заборгованість від 30 до 60 днів.

Для остаточного визначення «Bads» при здійсненні класифікації позичальників може бути застосований один із трьох методів, в залежності від доступних даних:

- ✓ метод консенсусу (спільне обговорення різними зацікавленими службами банку для досягнення консенсусу щодо найкращого визначення «Bads», виходячи з досвіду та операційної діяльності відповідних служби);
- ✓ статистичний метод, який може будуватися на аналізі змін простроченої заборгованості (Roll Rate) з метою визначення рівня простроченої

заборгованості, після якого більшість позичальників будуть проблемними (так званої «точки неповернення») та порівняльному аналізу рівня поточної простроченої заборгованості з найгіршим;

- ✓ комбінація методу консенсусу та статистичного методу.

Одним з перших кроків при побудові скорингової моделі та формування вибірки є визначення періоду в минулому, за який беруться позичальники для аналізу («вікно спостереження») та визначення кінцевої точки, тобто дати, станом на яку визначається статус позичальника.

З метою підвищення ефективності процесу розробки скорингових моделей попередній вибір показників необхідно здійснювати, враховуючи наступні фактори:

- надійність та стабільність;
- зручність збору даних;
- інтерпретованість;
- доступність в майбутньому;
- розрахунок коефіцієнтів (будь-який отриманий коефіцієнт повинен бути обґрунтований).

Для побудови скорингової моделі вибірка має бути істотною і достатньою, а саме: 1500 – 2000 кейсів кожного з класів (Goods/Bads) буде достатньо для побудови скорингових моделей високої якості. Продуктивність скорингової моделі істотно погіршується у випадку, коли кількість кейсів менша за 100 кожного з класів позичальників. В протипагу, вибірка, що включає більше 5000 кожного з класів (Goods/Bads), не має значного ефекту від її використання при побудові скорингової моделі.

2.3. Масштабування та тестування

Для зручності використання та інтерпретації результатів оцінки необхідно застосовувати масштабування. В ході масштабування підбирається діапазон і формат балів скорингової моделі, а також швидкість зміни позитивних шансів у міру зростання балів.

Формат скорингових балів може бути різним, включаючи десятковий або дискретний вираз, наприклад:

- a) бали можуть виражати ймовірність того, що конкретний Позичальник буде поганим;

- б) бали можуть у вигляді числової шкали з заданим мінімум/максимум (наприклад, від 0 до 1, від 1 до 100).

Після розробки скорингової моделі необхідно заміряти її прогностичну здатність та коректність її побудови. Фінальні бали по кредитним запитам необхідно розподілити по кластерах за принципом кривої дистрибуції (розподіл Гаусса, або нормальний розподіл) з інтуїтивно логічним розподілом Approval Rate та Bad Rate (чим нижчий скоринговий бал, тим вищий ризик і нижчий Approval Rate, та навпаки – чим вищий скоринговий бал, тим нижчий ризик і вищий Approval Rate; Тренд Bad Rate повинен бути максимально рівним). При цьому відхилення розподілу вліво або вправо є допустимими за умови, якщо сильні поведінкові показники сумісно були використані в скоринговій моделі, наприклад, показники з кредитного запиту.

Кластери скорингових балів повинні бути сегментовані з врахуванням потреб бізнесу та завдання скорингу. Наприклад, для Application scoring скорингові бали можуть бути розподілені на:

- 1) Зелену зону (автоматичне погодження);
- 2) Сіру зону (потребує більш глибокого ручного аналізу);
- 3) Червону зону (автоматична відмова).

Існує декілька статистичних показників для виявлення відповідності моделі стандарту:

1. Індекс стабільності популяції (Population Stability Index, PSI);
2. Коефіцієнт R^2 ;
3. Log Likelihood;
4. Коефіцієнт GINI.

Індекс стабільності популяції показує величину зміни популяції між вибіркою недавніх позичальників та очікуваними величинами (виходячи з навчальної вибірки) та розраховується за формулою:

$$SI = \sum (\% \text{ фактичний} - \% \text{ очікуваний}) * \ln \left(\frac{\% \text{ фактичний}}{\% \text{ очікуваний}} \right), \text{ де}$$

% фактичний, % очікуваний – розподіл випадків для недавньої вибірки позичальників і навчальної вибірки відповідно для кожного показника.

Чим нижче значення SI, тим стабільніший показник. Найкраще значення прагне до 0.

Коефіцієнт R^2 демонструє точність наближення прогнозованого значення до вихідних даних та розраховується за наступною формулою:

$$R^2 = \frac{\text{Var}[\hat{y}]}{\text{Var}[y]} = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - \widehat{y_{mean}})^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - y_{mean})^2},$$

де $\hat{y}_i$ – прогнозне значення; y_i – первісне (фактичне) значення. Чим краще модель, тим вищий R^2 , значення якого змінюється з 0 до 1.

Log Likelihood використовується для оцінки якості моделі тільки з точки зору бінарної класифікації. Його можна порівняти з натуральним логарифмом функції Likelihood на передбачуваний вибірці.

$$\begin{aligned} \text{Log Likelihood} &= \\ &= \sum_{i, \text{where } y_i=1} \ln \left(\frac{1}{1 + e^{-(\hat{w}_0 + \hat{w}_1 x_{i1} + \hat{w}_2 x_{i2} + \dots + \hat{w}_n x_{in})}} \right) + \\ &+ \sum_{i, \text{where } y_i=0} \ln \left(\frac{1}{1 + e^{-(\hat{w}_0 + \hat{w}_1 x_{i1} + \hat{w}_2 x_{i2} + \dots + \hat{w}_n x_{in})}} \right) - \ln \left(\frac{1}{1 + e^{-(\hat{w}_0 + \hat{w}_1 x_{i1} + \hat{w}_2 x_{i2} + \dots + \hat{w}_n x_{in})}} \right) \end{aligned}$$

Log Likelihood завжди нижче нуля. Краща модель має вищий Log Likelihood (абсолютне значення Log Likelihood повинно наближатися до нуля).

Коефіцієнт GINI – це міра оцінки якості скорингової моделі. Дозволяє судити про здатність скорингової моделі відрізнати «хороших» Позичальників від «поганих» та розраховується за формулою:

$$GINI = \frac{\sum_{i=1}^n (CB_i + CB_{i-1}) * SB_i G_i - \frac{1}{2} * \frac{TotalB}{Total}}{\frac{1}{2} * \frac{TotalB}{Total}}, \text{ де}$$

CB_i – сукупна частка «Bads» в i – й Bin від загальної кількості «Bads»;

$SB_i G_i$ – частка «Bads» та «Goods» в i – й Bin від загальної кількості «Bads» та «Goods»;

TotalB – загальна кількість «Bads»;

Total – загальна кількість «Bads» та «Goods».

Найвище значення коефіцієнту GINI є кращим, тобто більш високе значення даного коефіцієнту показує, що конкретна скорингова модель краще відрізняє «Bads» і «Goods». Найкраще значення прагне до 100% (або 1).

Дуже високий GINI не є реалістичним та, скоріш за все, вказує на те, що модель треба переробити.

Коефіцієнт GINI порівнює криву Лоренца (Lorenz Curve) з лінією досконалої випадковості (Line of perfect randomness). На рисунку нижче, GINI – це відношення площі під кривою Лоренца і вище лінії досконалої випадковості (A) до всієї площі над лінією досконалої випадковості (A + B). (рис.1)

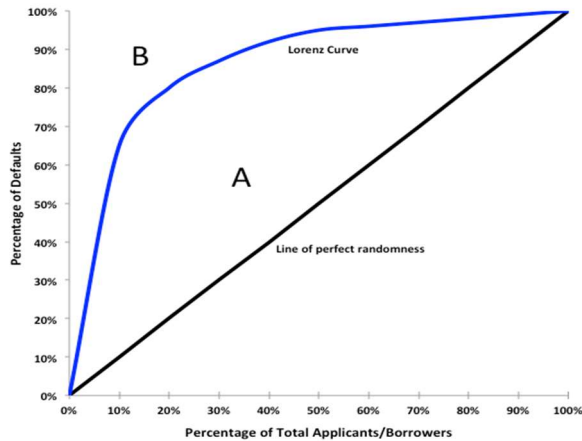


Рисунок 1

Коефіцієнт Колмогорова-Смірнова (КС) є показником розподілу для бінарної класифікації. Коефіцієнт Колмогорова-Смірнова визначається за формулою:

$KS = |F_g(score) - F_b(score)|$, де $F_g(score)$, $F_b(score)$ - кумулятивний розподіл скорингового бала для «Goods» і «Bads».

Теоретично коефіцієнт Колмогорова-Смірнова може приймати значення від 0 до 100, але на практиці при значенні КС > 70 вважається, що є проблеми в розрахунках або із самою моделлю.

3. Практичне застосування скорингових моделей в банках України

Розглянемо на прикладі кейс одного з банків України.

В банк «Стабільність» звернувся потенційний позичальник Петренко Петро Іванович із запитом на проведення активної операції, а саме - кредитування придбання нового транспортного засобу, при цьому запитуваний кредит складає 1 200 000 грн. на 84 місяці під 15%.

Довідково: Петренко П.І. 1975р.н. проживає в м. Кропивницький, 12 років працює лікарем-стоматологом в ТОВ «Smile 32», одружений в 2011р., має у власності будинок. Згідно довідки про доходи за останні 6 місяців його доходи складають 306 000 грн. (доходи дружини не враховуються до розрахунку), щомісячні обов'язкові витрати (податкові, комунальні платежі) – 15 000 грн., рахунків в банку немає.

Банк «Стабільність» пропонує для фізичних осіб банківський продукт «Автокредитування» - кредит на придбання нового автомобіля.

Умови кредитування:

- строк - від 1 до 7 років;
- процентна ставка – від 0.01% до 18%.
- максимальна сума кредиту – до 2 000 000 грн.

При цьому банк використовує наступну експертну скорингову модель для оцінки платоспроможності потенційного позичальника за напрямом кредитування на придбання нового транспортного засобу (див. рис. 2)

Для оцінки фінансового стану позичальника банком використовуються наступні кількісні показники:

- коефіцієнт платоспроможності позичальника (відношення сукупного середньомісячного доходу позичальника до суми середньомісячних сукупних витрат позичальника та щомісячним платежем по кредиту);
- частка погашення кредиту в чистому сукупному доході позичальника (відношення щомісячного платежу по кредиту до середньомісячних сукупних чистих надходжень позичальника (доходи позичальника за мінусом його витрат);
- показник сукупного чистого доходу позичальника (визначається, як відношення залишку коштів (щомісячних доходів) на одну особу позичальника та членів його родини, що знаходяться на утриманні, після сплати постійних витрат та місячного платежу за кредитом до показника прожиткового мінімуму);
- показник накопичень позичальника на інших рахунках в банку (відношення загальної суми залишків грошових коштів на депозитних рахунках позичальника, відкритих в банках до суми кредиту);

До якісних показників, які використовуються банком при оцінці фінансового стану відносяться наступні показники:

- наявність власного майна у позичальника;
- наявність постійної роботи;
- загальний стаж роботи;
- сімейний стан;
- місце проживання;
- вік позичальника на момент погашення кредиту.

Таким чином, скорингова модель потенційного позичальника Петренка П.І. матиме наступний вигляд (див. рис. 3):

Коефіцієнт платоспроможності позичальника	Значення	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.6	1.8
	Кількість балів						170	
Частка погашення кредиту в сукупному доході позичальника	Значення	1	0.9	0.75	0.6	0.5	0.4	0.3
	Кількість балів				130			
Чистий дохід позичальника	Значення	0.5	0.7	0.9	1	1.2	1.3	1.4
	Кількість балів							160
Наявність накопичень на рахунках в банку	Значення	0	0.1	0.11	0.15	0.18	0.2	0.25
	Кількість балів	0						
Наявність власної нерухомості	Значення	не має	нерухомість/транспорт	житло	нерухомість та транспорт	житло та транспорт	нерухомість	власне майно
	Кількість балів	5	15	20	28	38	42	45
Наявність постійної роботи	Значення	безробітний	студент/пенсіонер	від 0,5 до 1 року	від 1 до 2 років	від 2 до 3 років	від 3 до 5 років	від 5 років
	Кількість балів	0	14	18	23	27	33	37
Стаж роботи	Значення	менше 1 року	від 1 року до 2 років	від 2 років до 3 років	від 3 до 5 років	від 5 до 10 років	від 10 до 15 років	більше 15 років
	Кількість балів	0	14	19	25	30	37	40
Сімейний стан	Значення	неодружений на утриманні більше 2 осіб	не-одружений	одружений на утриманні більше 3 осіб	неодружений на утриманні до 2 осіб	одружений на утриманні до 3 осіб	одружений на утриманні до 10 років	одружений більше 10 років
	Кількість балів	10	15	20	27	35	45	50
Місце проживання	Значення	без житла	оренда житла	житло обтяжене	житло родичів	житло у кредиті	власне житло подружжя	власне житло
	Кількість балів	0	14	20	28	33	36	40
Вік позичальника на момент погашення кредиту	Значення	25	30	35	30	45	55	65
	Кількість балів	16	22	27	44	50	35	30

Рисунок 2

Коефіцієнт платоспроможності позичальника	Значення	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.6	1.8
	Кількість балів						170	
Частка погашення кредиту в сукупному доході позичальника	Значення	1	0.9	0.75	0.6	0.5	0.4	0.3
	Кількість балів				130			
Чистий дохід позичальника	Значення	0.5	0.7	0.9	1	1.2	1.3	1.4
	Кількість балів							160
Наявність накопичень на рахунках в банку	Значення	0	0.1	0.11	0.15	0.18	0.2	0.25
	Кількість балів	0						
Наявність власної нерухомості	Значення	не має	нерухомість/транспорт	житло	нерухомість та транспорт	житло та транспорт	нерухомість	власне майно
	Кількість балів	5	15	20	28	38	42	45
Наявність постійної роботи	Значення	безробітний	студент/пенсіонер	від 0,5 до 1 року	від 1 до 2 років	від 2 до 3 років	від 3 до 5 років	від 5 років
	Кількість балів	0	14	18	23	27	33	37
Стаж роботи	Значення	менше 1 року	від 1 року до 2 років	від 2 років до 3 років	від 3 до 5 років	від 5 до 10 років	від 10 до 15 років	більше 15 років
	Кількість балів	0	14	19	25	30	37	40
Сімейний стан	Значення	неодружений на утриманні більше 2 осіб	не-одружений	одружений на утриманні більше 3 осіб	неодружений на утриманні до 2 осіб	одружений на утриманні до 3 осіб	одружений на утриманні до 10 років	одружений більше 10 років
	Кількість балів	10	15	20	27	35	45	50
Місце проживання	Значення	без житла	оренда житла	житло обтяжене	житло родичів	житло у кредиті	власне житло подружжя	власне житло
	Кількість балів	0	14	20	28	33	36	40
Вік позичальника на момент погашення кредиту	Значення	25	30	35	30	45	55	65
	Кількість балів	16	22	27	44	50	35	30

Рисунок 3

Загальний бал даного позичальника склав 679 од.

У спрощеному вигляді наступні етапи щодо кредитної операції виглядають таким чином: здійснюється аналіз отриманого загального балу конкретного позичальника згідно скорингової моделі. У разі невідповідності визначеного загального балу позичальника його мінімально необхідному розміру (встановленому в банку) кредитна заявка потенційного позичальника відхиляється.

У разі прийняття попереднього рішення про проведення кредитної операції, банком, відповідно до встановлених внутрішніх процедур та з урахуванням нормативних вимог НБУ, на підставі отриманих результатів скорингової моделі (величини показників) визначається кредитний рейтинг та клас позичальника? Після чого приймається остаточне рішення про проведення кредитної операції (укладаються договори, надаються кошти, формується кредитна справа позичальника тощо).

В подальшому здійснюється моніторинг кредитної операції протягом всього терміну кредитування та, відповідно до нормативно визначених термінів, проводиться оцінка фінансового стану позичальника і, за

необхідності, коригування його класу та кредитного рейтингу, враховуючи показники, які були отримані при проведенні поточних розрахунків.

Висновки

В ході роботи були розглянуті етапи побудови скорингових моделей та деякі методи, які використовують для цієї мети, такі як лінійні ймовірнісні моделі, логістична регресія, дерева рішень, нейронні мережі та метод випадкового лісу, кожен із яких має свої переваги та недоліки:

- Лінійні ймовірнісні моделі є простими у застосуванні та інтерпретації, але мають обмежену сферу використання, однак відрізняються низькою ефективністю при роботі з нелінійними залежностями даних;
- Логістична регресія здатна працювати з невеликою кількістю вхідних даних і є простою в інтерпретації, але є чутливою до викидів та потребує великої навчальної вибірки.
- Дерева рішень здатні проілюструвати нелінійні зв'язки між незалежними та залежними змінними та демонструють високу ефективність у роботі з відсутніми даними, але вразливі до перенавчання та змін у навчальних даних.
- Нейронні мережі здатні виявляти складні нелінійні моделі даних з великою кількістю параметрів і спостережень, але потребують великих обчислювальних потужностей і є складними для інтерпретації.
- Метод випадкового лісу ефективно обробляє набори даних із великою кількістю вхідних змінних, але є складним у застосуванні та потребує великих обчислювальних потужностей.

Загалом, скорингові моделі є необхідним інструментом для банків у процесі кредитування. Вибір конкретної моделі залежить від багатьох факторів, таких як тип даних, складність задачі, нормативні обмеження та потужність доступних обчислювальних ресурсів. Розуміння переваг та недоліків різних скорингових моделей допомагає банкам зробити обґрунтований вибір та досягти кращих результатів у визначенні кредитоспроможності клієнтів.

Список використаних джерел

1. Положення про визначення банками України розміру кредитного ризику за

активними банківськими операціями, затверджене постановою Правління НБУ від 30.06.2016р. №351, із змінами.

2. Вдовенко Л. О. Економічна сутність та значення кредитоспроможності підприємств // Облік і фінанси.– 2012. – № 1.

3. Бучко І. Є. Скоринг як метод зниження кредитного ризику банку // Вісник Університету банківської справи Національного банку України. – 2013. – №2.

4. Bohdan Popovych. Application of AI in Credit Scoring Modeling – Springer Gabler, 1st ed., 2022.

5. Положення про організацію системи управління ризиками в банках України та банківських групах, затверджене постановою Правління НБУ від 11.06.2018р. №64, із змінами.

6. Кузнєцова Н. В. Порівняльний аналіз характеристик моделей оцінювання ризиків кредитування / ред. Н. В. Кузнєцова, П. І. Бідюк / Наукові вісті НТУУ «КПІ», 2010. №1

References

1. Regulation on the determination by banks of Ukraine of the amount of credit risk for active banking operations, approved by the resolution of the NBU Board dated June 30, 2016. No. 351, with changes.
2. VDOVENKO L. O. Economic essence and the meaning of creditworthiness of enterprises // Accounting and finance. – 2012. – No. 1.
3. BUCHKO I. E. Scoring as a method of reducing the bank's credit risk // Bulletin of the University of Banking of the National Bank of Ukraine. – 2013. – No. 2.
4. BOHDAN POPOVYCH. Application of AI in Credit Scoring Modeling - Springer Gabler, 1st ed., 2022.
5. Regulations on the organization of the risk management system in banks of Ukraine and banking groups, approved by the resolution of the NBU Board dated June 11, 2018. No. 64, with changes.
6. KUZNETSOVA N. V. Comparative analysis of the characteristics of lending risk assessment models / ed. N. V. Kuznetsova, p. I. Bidyuk / Scientific news of NTUU "KPI", 2010. No. 1.

Надійшла до редколегії 08.08.2023

УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.6>

К.В. Ральченко¹, д.ф.-м.н., доц.
М.С. Яковлев², аспірант

K. V. Ralchenko¹, Dr Sci., Associate Professor
M. S. Yakovliev², PhD Student

Асимптотична нормальність оцінок параметрів змішаного дробового броунівського руху

Asymptotically normal estimation of parameters of mixed fractional Brownian motion

^{1,2} Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13,
e-mail: ¹kostiantynralchenko@knu.ua
²mykyta.yakovliev@gmail.com

^{1,2}Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska str.,
e-mail: ¹kostiantynralchenko@knu.ua
²mykyta.yakovliev@gmail.com

У роботі досліджується модель змішаного дробового броунівського руху вигляду $X_t = \sigma W_t + \kappa B_t^H$, що складається зі стандартного броунівського руху W та дробового броунівського руху B^H з індексом Херста H . Розглядаються строго консистентні оцінки невідомих параметрів моделі (H, κ, σ) на основі рівновіддалених спостережень траєкторії. Доведено спільну асимптотичну нормальність оцінок для $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.

Ключові слова: дробовий броунівський рух, вінерівський процес, змішана модель, параметричне оцінювання, асимптотичний розподіл.

We investigate the mixed fractional Brownian motion of the form $X_t = \sigma W_t + \kappa B_t^H$, driven by a standard Brownian motion W and a fractional Brownian motion B^H with Hurst parameter H . We consider strongly consistent estimators of unknown model parameters (H, κ, σ) based on the equidistant observations of a trajectory. Joint asymptotic normality of these estimators is proved for $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.

Key Words: Fractional Brownian motion, Wiener process, mixed model, parameter estimation, asymptotic distribution.

1 Introduction

Many real-world processes that evolve over time are traditionally mathematically modeled using the standard Brownian motion. Still, multiple studies show that some time series possess properties of self-similarity, long-range dependence and complex correlation structures [1] and thus cannot be modeled properly by the usage of the Brownian motion only. Instead, a fractional Brownian motion can be used as it has correlated increments which implies short-range ($H < 1/2$) or long-range ($H > 1/2$) dependence [2]. The mixed fractional Brownian motion combines properties of both standard and fractional Brownian motions; this makes it a suitable model for many financial applications. It was first proposed by Cheridito [3]. There are already existing practical applications of this model, see, e.g., [4]. Its properties can be found in [5]. In the present paper we consider the following mixed fractional Brownian motion:

where W is a Wiener process, B^H is a fractional Brownian motion with Hurst index H , B^H is independent of W . We aim to estimate unknown parameters $(H, \kappa, \sigma)^\top$ based on observed $\{X_{kh}, k = 0, 1, 2, \dots\}$, $h > 0$.

In the present paper, following [6], we introduce the next statistics

$$\begin{aligned}\xi_N &:= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (X_{(k+1)h} - X_{kh})^2, \\ \eta_N &:= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (X_{(k+1)h} - X_{kh}) \times \\ &\quad \times (X_{(k+2)h} - X_{(k+1)h}), \\ \zeta_N &:= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (X_{(k+2)h} - X_{kh}) \times \\ &\quad \times (X_{(k+4)h} - X_{(k+2)h}).\end{aligned}\tag{2}$$

Let us denote

$$X_t = \sigma W_t + \kappa B_t^H, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

$$\tau_N = (\xi_N, \eta_N, \zeta_N)^\top. \tag{3}$$

According to [6, Lemma 3.2], for any $H \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned}\tau_N &\rightarrow (\mathbf{E} \xi_1, \mathbf{E} \eta_1, \mathbf{E} \zeta_1)^\top = \\ &= (\sigma^2 h + \kappa^2 h^{2H}, \kappa^2 h^{2H} (2^{2H-1} - 1), \\ &\kappa^2 h^{2H} 2^{2H} (2^{2H-1} - 1))^\top =: \tau_0\end{aligned}$$

a.s., as $N \rightarrow \infty$. Then, similarly to [6], for $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$, we can consider the following strongly consistent estimators for the parameters $(H, \kappa^2, \sigma^2)^\top$:

$$\begin{aligned}\hat{H}_N &= \frac{1}{2} \log_{2+} \frac{\zeta_N}{\eta_N}, \\ \hat{\kappa}_N^2 &= \frac{\eta_N}{h^{2\hat{H}_N} (2^{2\hat{H}_N-1} - 1)}, \\ \hat{\sigma}_N^2 &= \frac{1}{h} (\xi_N - \hat{\kappa}_N^2 h^{2\hat{H}_N})\end{aligned}\quad (4)$$

with

$$\log_{2+} x = \begin{cases} \log_2 x, & \text{if } x > 0, \\ 0, & \text{if } x \leq 0. \end{cases}$$

(Evidently, the model is non-identifiable in the case $H = \frac{1}{2}$, so we should exclude this value.) The goal of the present paper is to study joint asymptotic normality of these estimators. It worth mentioning that asymptotic normality does not hold for $H > \frac{3}{4}$, which is typical for models with fractional Brownian motion, see, e.g., [7]. The estimators remain strongly consistent, but have non-Gaussian asymptotic distribution.

The paper is organized as follows. In Section 2 we prove the joint asymptotic normality of statistics (2) and evaluate their asymptotic covariance matrix. Thereafter, in Section 3 we obtain the main result on asymptotic normality of (4) by applying the delta method. Section 4 we investigate the behavior of the estimators numerically, using Monte Carlo simulations.

We use the following notation. The symbol $\mathbf{E}$ denotes expectation and acts as an operator on the total product of quantities, $\mathbf{cov}$ stands for the covariance of two random variables and for the covariance matrix of a random vector. The upper index $\top$ denotes transposition. In the paper, all the vectors are column ones. Weak convergence in distribution is denoted by $\xrightarrow{d}$.

2 Asymptotic normality of vector $(\xi_N, \eta_N, \zeta_N)^\top$

We will start by studying the asymptotic properties of the vector $(\xi_N, \eta_N, \zeta_N)^\top$. Let us denote the

increment

$$\Delta X_k := X_{(k+1)h} - X_{kh} = \sigma \Delta W_k + \kappa \Delta B_k^H.$$

It is well-known that $\{\Delta X_k\}$ is a stationary Gaussian sequence with the following autocovariance function

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(i) &= \mathbf{cov}(\Delta X_0, \Delta X_i) = \sigma^2 \mathbf{cov}(\Delta W_0, \Delta W_i) + \\ &+ \kappa^2 \mathbf{cov}(\Delta B_0^H, \Delta B_i^H) = \\ &= \sigma^2 h \mathbf{1}_{\{i=0\}} + \kappa^2 h^{2H} \rho(i), \quad i \in \mathbb{Z},\end{aligned}\quad (5)$$

where

$$\rho(i) := \frac{1}{2} (|i+1|^{2H} - 2|i|^{2H} + |i-1|^{2H}) \quad (6)$$

denotes the autocovariance function of the stationary sequence $\{B_{k+1}^H - B_k^H, k \geq 0\}$, which is known as fractional Gaussian noise.

The following statement provides some important properties of sequences $\tilde{\rho}(i)$ and $\rho(i)$, $i \in \mathbb{Z}$, defined by (5) and (6) respectively.

Lemma 1. *Let $H \in (0, \frac{3}{4})$. Then the following statements hold*

- 1) $\rho(i) \sim H(2H-1)|i|^{2H-2}$ as $|i| \rightarrow \infty$,
- 2) $\sum_{i=-\infty}^{\infty} \rho^2(i) < \infty$,
- 3) For all $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i+\alpha) \tilde{\rho}(i+\beta) < \infty. \quad (7)$$

Proof. First two statements are well known, see e.g., [7]. In order to prove the third one, we observe that

$$\begin{aligned}\sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}^2(i) &= \sigma^4 h^2 + 2\sigma^2 \kappa^2 h^{2H+1} + \\ &+ \kappa^4 h^{4H} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \rho^2(i) < \infty,\end{aligned}$$

by the second statement. Then, using the Cauchy–Schwarz inequality, we get for all $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i+\alpha) \tilde{\rho}(i+\beta) &\leq \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}^2(i+\alpha) \cdot \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}^2(i+\beta)} = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}^2(i) < \infty,\end{aligned}$$

where the equality follows by substitutions $i' = i + \alpha$ and $i' = i + \beta$. $\square$

Now we are ready to prove the main result of this section.

Theorem 2.1. *Let $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$. The vector τ_N defined by (3) is asymptotically normal, namely*

$$\sqrt{N}(\tau_N - \tau_0) = \sqrt{N} \begin{pmatrix} \xi_N - \mathbb{E} \xi_N \\ \eta_N - \mathbb{E} \eta_N \\ \zeta_N - \mathbb{E} \zeta_N \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\vec{0}, \tilde{\Sigma})$$

with the asymptotic covariance matrix $\tilde{\Sigma}$, which can be presented explicitly as

$$\tilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} \tilde{\Sigma}_{11} & \tilde{\Sigma}_{12} & \tilde{\Sigma}_{13} \\ \tilde{\Sigma}_{12} & \tilde{\Sigma}_{22} & \tilde{\Sigma}_{23} \\ \tilde{\Sigma}_{13} & \tilde{\Sigma}_{23} & \tilde{\Sigma}_{33} \end{pmatrix}$$

where

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_{11} &= 2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i)^2, \\ \tilde{\Sigma}_{22} &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) \left(\tilde{\rho}(i) + \tilde{\rho}(i+2) \right), \\ \tilde{\Sigma}_{33} &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) \left(6\tilde{\rho}(i) + 8\tilde{\rho}(i+1) + 3\tilde{\rho}(i+2) + \right. \\ &\quad \left. + 4\tilde{\rho}(i+3) + 6\tilde{\rho}(i+4) + 4\tilde{\rho}(i+5) + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\rho}(i+6) \right), \\ \tilde{\Sigma}_{12} &= 2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) \tilde{\rho}(i+1), \\ \tilde{\Sigma}_{13} &= 2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) \left(\tilde{\rho}(i+1) + 2\tilde{\rho}(i+2) + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\rho}(i+3) \right), \\ \tilde{\Sigma}_{23} &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i) \left(\tilde{\rho}(i) + 2\tilde{\rho}(i+1) + \right. \\ &\quad \left. + 2\tilde{\rho}(i+2) + 2\tilde{\rho}(i+3) + \tilde{\rho}(i+4) \right). \end{aligned}$$

Proof. The proof consists of two parts: in the first part we compute the asymptotic covariance matrix $\tilde{\Sigma}$, while the second part contains the proof of asymptotic normality.

Part 1: Identification of the asymptotic covariance matrix. First, we will find the explicit form of covariance matrix $\tilde{\Sigma}$ by evaluating convergence limits as $N \rightarrow \infty$ for the following variances and covariances: $N \mathbf{Var}(\xi_N)$, $N \mathbf{Var}(\eta_N)$,

$$N \mathbf{Var}(\zeta_N), \quad N \mathbf{cov}(\xi_N, \eta_N), \quad N \mathbf{cov}(\xi_N, \zeta_N), \quad N \mathbf{cov}(\eta_N, \zeta_N).$$

1.1 Evaluation of convergence limit for $N \mathbf{Var}(\xi_N)$. Using Isserlis' theorem¹, and stationarity of the sequence $\{\Delta X_k\}$, we can write

$$\mathbf{cov}((\Delta X_k)^2, (\Delta X_j)^2) = 2\tilde{\rho}(k-j)^2.$$

Therefore

$$\begin{aligned} N \mathbf{Var}(\xi_N) &= \frac{1}{N} \mathbf{Var} \left(\sum_{k=0}^{N-1} (\Delta X_k)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{cov}((\Delta X_k)^2, (\Delta X_j)^2) = \\ &= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\rho}(k-j)^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Further, by rearranging sums, we get

$$\begin{aligned} N \mathbf{Var}(\xi_N) &= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=k-N+1}^k \tilde{\rho}(i)^2 = \\ &= \frac{2}{N} \sum_{i=-N+1}^0 \sum_{k=0}^{N-1+i} \tilde{\rho}(i)^2 + \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i}^{N-1} \tilde{\rho}(i)^2 = \\ &= 2 \sum_{i=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|i|}{N} \right) \tilde{\rho}(i)^2 \rightarrow \\ &\rightarrow 2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i)^2, \quad \text{as } N \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (9)$$

where the passage to the limit can be justified by the dominated convergence theorem due to Lemma 1.

1.2. Evaluation of convergence limit for $N \mathbf{cov}(\xi_N, \eta_N)$. Write

$$\begin{aligned} N \mathbf{cov}(\xi_N, \eta_N) &= \\ &= \frac{1}{N} \mathbf{cov} \left(\sum_{k=0}^{N-1} (\Delta X_k)^2, \sum_{j=0}^{N-1} \Delta X_j \Delta X_{j+1} \right) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{cov}((\Delta X_k)^2, \Delta X_j \Delta X_{j+1}). \end{aligned}$$

By Isserlis' theorem,

$$\mathbf{cov}((\Delta X_k)^2, \Delta X_j \Delta X_{j+1}) = 2\tilde{\rho}(j-k)\tilde{\rho}(j-k+1).$$

¹Isserlis' theorem [8]: if (X_1, X_2, X_3, X_4) is a zero-mean multivariate normal random vector, then $\mathbb{E}(X_1 X_2 X_3 X_4) = \mathbb{E} X_1 X_2 \mathbb{E} X_3 X_4 + \mathbb{E} X_1 X_3 \mathbb{E} X_2 X_4 + \mathbb{E} X_1 X_4 \mathbb{E} X_2 X_3$. In particular, $\mathbf{cov}(X_1^2, X_2^2) = 2 \mathbf{cov}(X_1, X_2)^2$.

Therefore arguing as in (9), we obtain

$$\begin{aligned} N \mathbf{cov}(\xi_N, \eta_N) &= \\ &= \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\rho}(j-k) \tilde{\rho}(j-k+1) = \\ &= \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=j-N+1}^j \tilde{\rho}(i) \tilde{\rho}(i+1) = \\ &= 2 \sum_{i=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|i|}{N}\right) \tilde{\rho}(i) \tilde{\rho}(i+1) \rightarrow \\ &\rightarrow 2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) \tilde{\rho}(i+1), \end{aligned}$$

as $N \rightarrow \infty$, where the last series converges according to the Lemma 1.

1.3. *Evaluation of convergence limit for $N \mathbf{Var}(\eta_N)$.* We have

$$\begin{aligned} N \mathbf{Var}(\eta_N) &= \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{cov}(\Delta X_k \Delta X_{k+1}, \Delta X_j \Delta X_{j+1}). \end{aligned}$$

By Isserlis' Theorem,

$$\begin{aligned} \mathbf{cov}(\Delta X_k \Delta X_{k+1}, \Delta X_j \Delta X_{j+1}) &= \\ &= \tilde{\rho}(k-j)^2 + \tilde{\rho}(k-j+1) \tilde{\rho}(k-j-1), \end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}(\eta_N) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\rho}(k-j)^2 + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\rho}(k-j+1) \tilde{\rho}(k-j-1). \quad (10) \end{aligned}$$

According to (8) and (9), the first term in the right hand side of (10)

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\rho}(k-j)^2 &= \\ &= \frac{N}{2} \mathbf{Var}(\xi_N) \rightarrow \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i)^2, \quad N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

The second term can be treated similarly to (9) as follows:

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\rho}(k-j+1) \tilde{\rho}(k-j-1) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=j-(N-1)}^j \tilde{\rho}(i-1) \tilde{\rho}(i+1) = \\ &= \sum_{i=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|i|}{N}\right) \tilde{\rho}(i-1) \tilde{\rho}(i+1) \rightarrow \\ &\rightarrow \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i-1) \tilde{\rho}(i+1) = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) \tilde{\rho}(i+2), \quad \text{as } N \rightarrow \infty. \quad (11) \end{aligned}$$

Combining (10)–(11), we arrive at

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \mathbf{Var}(\eta_N) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(i) (\tilde{\rho}(i) + \tilde{\rho}(i+2)).$$

Convergency limits for $N \mathbf{cov}(\xi_N, \zeta_N)$, $N \mathbf{cov}(\eta_N, \zeta_N)$, $N \mathbf{Var}(\zeta_N)$ are evaluated in a similar way.

Part 2: Proof of asymptotic normality. Let us define $Y_k = \left(Y_k^{(1)}, Y_k^{(2)}, Y_k^{(3)}\right)^\top$ by

$$\begin{aligned} Y_k^{(1)} &:= \Delta X_k, \quad Y_k^{(2)} := \Delta X_{k+1}, \\ Y_k^{(3)} &:= \Delta X_{k+2} + \Delta X_{k+3}. \end{aligned} \quad (12)$$

Then

$$\xi_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(Y_k^{(1)}\right)^2, \quad \eta_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_k^{(1)} Y_k^{(2)},$$

$$\zeta_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(Y_k^{(1)} + Y_k^{(2)}\right) Y_k^{(3)}.$$

We shall prove the convergence of vector $(\xi_N, \eta_N, \zeta_N)^\top$ with the help of the Cramér–Wold device. Let the parameters $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ be any fixed ones satisfying the condition $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$. We introduce the function

$$\begin{aligned} f(y) &= \alpha y_1^2 + \beta y_1 y_2 + \gamma (y_1 + y_2) y_3, \\ y &= (y_1, y_2, y_3)^\top \in \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

so that

$$\alpha \xi_N + \beta \eta_N + \gamma \zeta_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(Y_k).$$

Thus, we need to prove that the sequence

$$\begin{aligned} \sqrt{N} \left(\alpha (\xi_N - \mathbb{E} \xi_N) + \beta (\eta_N - \mathbb{E} \eta_N) + \right. \\ \left. + \gamma (\zeta_N - \mathbb{E} \zeta_N) \right) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \left(f(Y_k) - \mathbb{E} f(Y_k) \right) \end{aligned} \quad (13)$$

converges to a normal distribution. This fact can be established by application of the Breuer–Major theorem for stationary vectors [9, Theorem 4], see also [10, Theorem 1.1]. In order to apply this theorem, it suffices to verify the following condition:

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| r^{(p,l)}(j) \right|^q < \infty, \quad \text{for all } p, l \in \{1, 2, 3\}. \quad (14)$$

where

$$r^{(p,l)}(k) := \mathbf{cov} \left(Y_1^{(p)}, Y_{1+k}^{(l)} \right), \quad k \in \mathbb{Z},$$

and q is the Hermite rank² of f with respect to Y_1 .

It is not hard to see that this Hermite rank $q \geq 2$. Indeed, note that $f(Y_1)$ is a second-order polynomial of zero-mean normally distributed random variables $Y_1^{(1)}, Y_1^{(2)}, Y_1^{(3)}$ in which only terms of the second order are present, namely $(Y_1^{(1)})^2$, $Y_1^{(1)}Y_1^{(2)}$, and $Y_1^{(1)}Y_1^{(3)}$. Therefore, according to Isserlis' theorem, we will have that the expected value of the product of $f(Y_1)$ and any of $Y_1^{(t)}$, $t \in \{1, 2, 3\}$, will be equal to zero. All the obtained terms will have the form $\mathbf{E} G_1 G_2 G_3$, where $(G_1, G_2, G_3)^\top$ is a zero-mean multivariate normal random vector and according to the Isserlis' theorem $\mathbf{E} G_1 G_2 G_3 = 0$. Therefore, the expected value of the product of $f(Y_1)$ and any first-order polynomial of $\{Y_1\}$ (a linear combination of $Y_1^{(1)}, Y_1^{(2)}, Y_1^{(3)}$) will be equal to zero, and therefore the Hermite rank q of the function f with respect to Y_1 cannot be equal to 1.

Since $q \geq 2$, we easily see that in order to verify the condition (14), it suffices to prove that

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| r^{(p,l)}(j) \right|^2 < \infty, \quad \text{for all } p, l \in \{1, 2, 3\}. \quad (15)$$

In turn, (15) follows from Lemma 1, since using (12) and the definition of $\tilde{\rho}$, we can represent $r^{(p,l)}$ via $\tilde{\rho}$ as follows:

$$\begin{aligned} r^{(1,1)}(k) &= r^{(2,2)}(k) = \tilde{\rho}(k), \\ r^{(1,2)}(k) &= \tilde{\rho}(k+1), \quad r^{(2,1)}(k) = \tilde{\rho}(k-1), \\ r^{(1,3)}(k) &= \tilde{\rho}(k+2) + \tilde{\rho}(k+3), \\ r^{(3,1)}(k) &= \tilde{\rho}(k-2) + \tilde{\rho}(k-3), \\ r^{(2,3)}(k) &= \tilde{\rho}(k+1) + \tilde{\rho}(k+2), \\ r^{(3,2)}(k) &= \tilde{\rho}(k-1) + \tilde{\rho}(k-2), \end{aligned}$$

$$r^{(2,3)}(k) = \tilde{\rho}(k+1) + 2\tilde{\rho}(k) + \tilde{\rho}(k-1).$$

Indeed, for example the series

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(r^{(1,3)}(k) \right)^2 &= \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\tilde{\rho}(k+2) + \tilde{\rho}(k+3))^2 = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(k+2)^2 + 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(k+2) \times \\ &\quad \times \tilde{\rho}(k+3) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(k+3)^2, \end{aligned}$$

converges as a finite sum of series convergent according to Lemma 1. Similarly, other series in (15) are also finite.

Therefore, the assumptions of the Breuer–Major theorem for stationary vectors are satisfied, whence the desired weak converge of (13) to a zero-mean normal distribution follows. $\square$

3 Asymptotic normality of vector $(\hat{H}_N, \hat{\kappa}_N^2, \hat{\sigma}_N^2)^\top$

In this section, we provide the main result on asymptotic properties of our estimator (4). Let us denote

$$\begin{aligned} \vartheta &= (H, \kappa^2, \sigma^2)^\top, \\ \hat{\vartheta}_N &= (\hat{H}_N, \hat{\kappa}_N^2, \hat{\sigma}_N^2)^\top, \quad N \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (16)$$

Theorem 3.1. *Let $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$. The estimator $\hat{\vartheta}_N$ is asymptotically normal, namely*

$$\sqrt{N} \left(\hat{\vartheta}_N - \vartheta \right) = \sqrt{N} \begin{pmatrix} \hat{H}_N - H \\ \hat{\kappa}_N^2 - \kappa^2 \\ \hat{\sigma}_N^2 - \sigma^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left(\vec{0}, \Sigma^0 \right)$$

with the asymptotic covariance matrix Σ^0 , which can be found by the formula

$$\Sigma^0 = g'(\tau_0) \tilde{\Sigma} (g'(\tau_0))^\top,$$

where $\tilde{\Sigma}$ is defined in Theorem 2.1 and

$$g'(\tau_0) = \begin{pmatrix} 0 & G_{12} & G_{13} \\ 0 & G_{22} & G_{23} \\ \frac{1}{h} & \frac{4(1-2^{2H})}{h(2^{2H}-2)^2} & \frac{2}{h(2^{2H}-2)^2} \end{pmatrix}$$

²The function $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ is said to have Hermite rank equal to q with respect to a random vector X if (a) $\mathbf{E}[(f(X) - \mathbf{E}[f(X)])p_m(X)] = 0$ for every polynomial p_m (on $\mathbb{R}^d$) of degree $m \leq q-1$; and (b) there exists a polynomial p_q of degree q such that $\mathbf{E}[(f(X) - \mathbf{E}[f(X)])p_m(X)] \neq 0$, see [10].

with

$$\begin{aligned} G_{12} &= \frac{-1}{2\kappa^2 h^{2H} (2^{2H-1} - 1) \log 2}, \\ G_{13} &= \frac{1}{2\kappa^2 h^{2H} 2^{2H} (2^{2H-1} - 1) \log 2}, \\ G_{22} &= \frac{2}{h^{2H}} \frac{(2 + \log_{2+} h) 2^{2H} - 2(\log_{2+} h + 1)}{(2^{2H} - 2)^2}, \\ G_{23} &= \frac{2}{h^{2H}} \frac{(2 \log_{2+} h - (\log_{2+} h + 1) 2^{2H})}{2^{2H} (2^{2H} - 2)^2}. \end{aligned}$$

Proof. Let us introduce the following function of $\tau = (\xi, \eta, \zeta)^\top$:

$$g(\tau) = (g_1(\tau), g_2(\tau), g_3(\tau)),$$

where

$$\begin{aligned} g_1(\tau) &= g_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2} \log_{2+} \frac{\zeta}{\eta}, \\ g_2(\tau) &= g_2(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\eta}{h^{2g_1(\xi, \eta, \zeta)} (2^{2g_1(\xi, \eta, \zeta)-1} - 1)}, \\ g_3(\tau) &= g_3(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{h} \left(\xi - g_2(\xi, \eta, \zeta) h^{2g_1(\xi, \eta, \zeta)} \right). \end{aligned}$$

Then the estimator (16) can be presented in the following form

$$\hat{\vartheta}_N = (\hat{H}_N, \hat{\kappa}_N^2, \hat{\sigma}_N^2)^\top = g(\xi_N, \eta_N, \zeta_N).$$

To prove the asymptotic normality of $\hat{\vartheta}_N$ we will apply the delta method to function $g(\tau)$ and sequence τ_N that is asymptotically normal by Theorem 2.1. For this we will need to find matrix $g'(\tau)$ and to show that it is non-singular at τ_0 . We will start with evaluating partial derivatives of function g_1 . Since

$$g_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2} \log_{2+} \frac{\zeta}{\eta} = \frac{\log \zeta - \log \eta}{2 \log 2},$$

we see that

$$\frac{\partial g_1}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial \eta} = -\frac{1}{2\eta \log 2}, \quad \frac{\partial g_1}{\partial \zeta} = \frac{1}{2\zeta \log 2}.$$

In order to evaluate partial derivatives of g_2 and g_3 , let us consider two intermediate functions:

$$h^{2g_1(\xi, \eta, \zeta)} = h^{\log_{2+} \frac{\zeta}{\eta}} = \left(\frac{\zeta}{\eta} \right)^{\log_{2+} h} = \left(\frac{\zeta}{\eta} \right)^c,$$

where $c = \log_{2+} h$, and

$$2^{2g_1(\xi, \eta, \zeta)-1} - 1 = 2^{\log_{2+} \frac{\zeta}{\eta} - 1} - 1 = \frac{\zeta}{2\eta} - 1 = \frac{\zeta - 2\eta}{2\eta}.$$

Then

$$\begin{aligned} g_2(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{\eta}{h^{2g_1(\xi, \eta, \zeta)} (2^{2g_1(\xi, \eta, \zeta)-1} - 1)} \\ &= \frac{\eta}{\left(\frac{\zeta}{\eta} \right)^c \cdot \frac{\zeta - 2\eta}{2\eta}} = \frac{2\eta^{2+c}}{\zeta^{c+1} - 2\eta\zeta^c}. \end{aligned}$$

Therefore, the corresponding partial derivatives are equal to

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_2}{\partial \xi} &= 0, \\ \frac{\partial g_2}{\partial \eta} &= 2 \frac{(2+c)\eta^{1+c}(\zeta^{c+1} - 2\eta\zeta^c) + 2\eta^{2+c}\zeta^c}{(\zeta^{c+1} - 2\eta\zeta^c)^2} = \\ &= 2 \frac{(2+c)\eta^{1+c}\zeta^{c+1} - 2(c+1)\eta^{2+c}\zeta^c}{(\zeta^{c+1} - 2\eta\zeta^c)^2} = \\ &= 2 \left(\frac{\eta}{\zeta} \right)^c \frac{(2+c)\eta\zeta - 2(c+1)\eta^2}{(\zeta - 2\eta)^2}, \\ \frac{\partial g_2}{\partial \zeta} &= 2\eta^{2+c} \cdot \frac{-1}{(\zeta^{c+1} - 2\eta\zeta^c)^2} \times \\ &\quad \times ((c+1)\zeta^c - 2c\eta\zeta^{c-1}) = \\ &= 2 \left(\frac{\eta}{\zeta} \right)^c \frac{\eta^2(2c\eta - (c+1)\zeta)}{\zeta(\zeta - 2\eta)^2}. \end{aligned}$$

The function g_3 can be rewritten as

$$\begin{aligned} g_3(\xi, \eta, \zeta) &= \\ &= \frac{1}{h} \left(\xi - \frac{\eta}{h^{2g_1(\xi, \eta, \zeta)} (2^{2g_1(\xi, \eta, \zeta)-1} - 1)} \times \right. \\ &\quad \left. \times h^{2g_1(\xi, \eta, \zeta)} \right) = \frac{1}{h} \left(\xi - \frac{2\eta^2}{\zeta - 2\eta} \right). \end{aligned}$$

Hence,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_3}{\partial \xi} &= \frac{1}{h}, \\ \frac{\partial g_3}{\partial \eta} &= \frac{(-1)}{h} \cdot \frac{4\eta(\zeta - 2\eta) - 2\eta^2(-2)}{(\zeta - 2\eta)^2} = \\ &= \frac{4\eta(\eta - \zeta)}{h(\zeta - 2\eta)^2}, \\ \frac{\partial g_3}{\partial \zeta} &= \frac{2\eta^2}{h(\zeta - 2\eta)^2}. \end{aligned}$$

So, we have the following derivative matrix:

$$\begin{aligned} g'(\xi, \eta, \zeta) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \xi} & \frac{\partial g_1}{\partial \eta} & \frac{\partial g_1}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \xi} & \frac{\partial g_2}{\partial \eta} & \frac{\partial g_2}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial g_3}{\partial \xi} & \frac{\partial g_3}{\partial \eta} & \frac{\partial g_3}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & G_{12}^\tau & G_{13}^\tau \\ 0 & G_{22}^\tau & G_{23}^\tau \\ \frac{1}{h} & \frac{4\eta(\eta - \zeta)}{h(\zeta - 2\eta)^2} & \frac{2\eta^2}{h(\zeta - 2\eta)^2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} G_{12}^\tau &= \frac{-1}{2\eta \log 2}, \\ G_{13}^\tau &= \frac{1}{2\zeta \log 2}, \\ G_{22}^\tau &= 2\left(\frac{\eta}{\zeta}\right)^c \frac{(2+c)\eta\zeta - 2(c+1)\eta^2}{(\zeta - 2\eta)^2}, \\ G_{23}^\tau &= 2\left(\frac{\eta}{\zeta}\right)^c \frac{\eta^2(2c\eta - (c+1)\zeta)}{\zeta(\zeta - 2\eta)^2}, \end{aligned}$$

where $c = \log_{2+} h$.

At $\tau = \tau_0$

$$g'(\tau_0) = \begin{pmatrix} 0 & G_{12} & G_{13} \\ 0 & G_{22} & G_{23} \\ \frac{1}{h} & \frac{4(1-2^{2H})}{h(2^{2H}-2)^2} & \frac{2}{h(2^{2H}-2)^2} \end{pmatrix},$$

where $G_{12}, G_{13}, G_{22}, G_{23}$ are defined in the in the formulation of the theorem.

It is not hard to see that the determinant of this matrix

$$\det(g'(\tau_0)) = -\frac{1}{2^{2H+1}\kappa^2 h^{4H+1}(2^{2H-1} - 1)^2 \log 2}.$$

is well defined for $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ and it is not equal to zero. Therefore the matrix of derivatives is non-singular at $\tau = \tau_0$ and so the delta method can be applied, see, e.g., [11, Theorem B.6]. This method implies the statement of the theorem and provides with the formula for asymptotic covariance matrix Σ^0 . $\square$

4 Simulation study

In this section we would like to present results of estimators performance by numerical simulations. For each generated trajectory we will estimate asymptotic covariance matrices defined in (2.1) and (3.1) by using values of estimators (4). For each set of parameters we generate 1000 trajectories of the process X_t and calculate the empirical means, empirical standard deviations of the estimates, the square root of estimated asymptotic variation divided by N ($\sqrt{\hat{\sigma}/N}$) and cover probability (CP) for $\alpha = 5\%$ based on estimator of asymptotic covariance matrix. Series alike (7) are divided into sum of two convergent series

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(i+\alpha)\tilde{\rho}(i+\beta) = \sum_{i=0}^{+\infty} \tilde{\rho}(i+\alpha)\tilde{\rho}(i+\beta) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{+\infty} \tilde{\rho}(i+1-\alpha)\tilde{\rho}(i+1-\beta),$$

where $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Series $\sum_{i=0}^{+\infty} \tilde{\rho}(i+\alpha)\tilde{\rho}(i+\beta)$ are estimated with precision $\delta = 10^{-3}$ by evaluating the sum $S_m = \sum_{i=0}^m \tilde{\rho}(i+\alpha)\tilde{\rho}(i+\beta)$ with the first m such that $|S_m - S_{m-1}| < 10^{-3}$. Also, for simulation purposes, we will be using only $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ because otherwise the series (7) will not converge thus the asymptotic covariance matrix will be non-evaluable. Moreover, the same will be applied for each case when the estimated $\hat{H}_N$ will be out of boundaries $(0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.

Table 1: The estimator $\hat{H}_N$ with $\kappa^2 = 6.25$, $\sigma^2 = 2.25$ ($h = 1$)

		N			
H		2^8	2^{12}	2^{16}	2^{20}
0.2	Mean	0.1823	0.2018	0.2008	0.2000
	S.dev.	0.3135	0.0721	0.0176	0.0043
	$\sqrt{\hat{\sigma}/N}$	0.3027	0.0728	0.0181	0.0045
	CP%	100.00	97.522	95.600	96.400
0.4	Mean	0.4281	0.4052	0.4009	0.3994
	S.dev.	0.7990	0.1686	0.0403	0.0103
	$\sqrt{\hat{\sigma}/N}$	0.6739	0.1715	0.0404	0.0100
	CP%	100.00	99.636	97.005	94.795
0.6	Mean	0.5963	0.5903	0.5999	0.5999
	S.dev.	0.5792	0.1232	0.0290	0.0070
	$\sqrt{\hat{\sigma}/N}$	0.4746	0.1119	0.0279	0.0070
	CP%	100.00	100.00	95.755	95.496

Table 2: The estimator $\hat{\kappa}_N^2$ with $\kappa^2 = 6.25$, $\sigma^2 = 2.25$ ($h = 1$)

		N			
H		2^8	2^{12}	2^{16}	2^{20}
0.2	Mean	13.197	6.5692	6.2721	6.2505
	S.dev.	86.074	1.3784	0.2560	0.0604
	$\sqrt{\hat{\sigma}/N}$	4.0819	1.0934	0.2569	0.0633
	CP%	100.00	93.427	95.500	95.900
0.4	Mean	8.5306	25.768	8.0469	6.2735
	S.dev.	54.206	206.04	9.9068	0.5839
	$\sqrt{\hat{\sigma}/N}$	13.130	4.2116	2.0175	0.5636
	CP%	98.131	70.909	88.412	94.094
0.6	Mean	9.1450	26.615	10.454	6.2924
	S.dev.	39.869	269.74	104.39	0.5002
	$\sqrt{\hat{\sigma}/N}$	17.947	4.5897	1.7836	0.4920
	CP%	100.00	83.200	88.639	94.795

Table 3: The estimator $\hat{\sigma}_N^2$ with $\kappa^2 = 6.25$, $\sigma^2 = 2.25$ ($h = 1$)

H		N			
		2^8	2^{12}	2^{16}	2^{20}
0.2	Mean	3.2413	2.1907	2.2265	2.2492
	S.dev.	1.4481	0.8823	0.2542	0.0602
	$\sqrt{\hat{\sigma}/N}$	4.0495	1.0873	0.2554	0.0629
	CP%	100.00	92.996	95.900	96.400
0.4	Mean	5.7222	4.4137	2.6526	2.2297
	S.dev.	1.8376	1.6134	1.2686	0.5759
	$\sqrt{\hat{\sigma}/N}$	13.129	4.2119	2.0175	0.5636
	CP%	99.533	70.000	89.063	94.094
0.6	Mean	6.2802	4.5294	2.6477	2.2096
	S.dev.	2.2077	1.8375	1.2471	0.4946
	$\sqrt{\hat{\sigma}/N}$	17.972	4.5923	1.7840	0.4920
	CP%	100.00	82.600	88.764	94.795

In Tables 1–3 one can find performance of the estimators $\hat{H}_N$, $\hat{\kappa}_N^2$, and $\hat{\sigma}_N^2$, for the following true values of the parameters: $\kappa = 2.5$, $\sigma = 1.5$. We observe that the cover probability and asymptotic variance estimators demonstrate better results for H in $(0, 1/2)$ in comparison with H in $(1/2, 3/4)$. Moreover, the closer parameter H to $1/2$ the lower rate of convergence for constructed estimators and this is consistent with numerical simulations results obtained in [6].

We believe that partially observed results are affected by convergence rates of series defined in Lemma 1. These series do converge for $H \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ but with a such significantly slow rate that it actually has an impact on estimating the sum of the corresponding series. At the same time for $H \in (0, \frac{1}{2})$ there is no significant impact. Moreover, the convergence rates for $H \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ creates some technical difficulties. As was previously stated we evaluate such series by splitting them in two. We have conducted simulations for the following series:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \tilde{\rho}(i)^2. \quad (17)$$

We estimate (17) by finding the first $m \in \mathbb{N}$ such that for $S_m = \sum_{i=0}^m \tilde{\rho}(i)^2$ for some pre-defined δ it holds that $|S_m - S_{m-1}| \leq \delta$.

This estimation was conducted for $\delta \in \{10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-7}, 10^{-9}\}$ for $\kappa = 2.5$, $\sigma = 1.5$ and $H \in \{0.2, 0.6\}$. Estimation results are presented in Table 4. As one can see, in order to estimate S_m with a precision of $\delta = 10^{-10}$ for $H = 0.2$

only a few hundred iterations are needed, while for $H = 0.6$ it requires hundreds of thousands of iterations. Moreover, lowering the precision from 10^{-10} to 10^{-3} has almost no impact on the estimated value S_m for low H , but for high H it could result in a difference around 1%.

Table 4: The $\tilde{\Sigma}_{11}$ convergence with $\kappa^2 = 6.25$, $\sigma^2 = 2.25$ ($h = 1$)

H		δ			
		10^{-3}	10^{-5}	2^{-7}	10^{-9}
0.2	m	8	31	129	543
	S_m	76.879	76.880	76.881	76.881
0.6	m	53	931	16552	$2.9 * 10^5$
	S_m	73,768	73.831	73.851	73.853

Additionally, we want to note that for a small number N there is a high percentage of iterations that result in some estimators (4) being non-evaluable (Non Ev.%) or estimated value of H being out of interval $(0, \frac{1}{2}) \cap (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ (H Out%). In such cases, asymptotic covariance matrices cannot be estimated because the required series (7) will not converge. Corresponding simulation results can be found in Table 5.

Table 5: Percentage of estimated results that cannot be used for estimating asymptotic covariance matrix in previous simulations

H		N			
		2^8	2^{12}	2^{16}	2^{20}
0.2	Non Ev.%	34.10	6.900	0.000	0.000
	H Out%	25.80	0.300	0.000	0.000
0.4	Non Ev.%	59.00	44.10	23.20	0.100
	H Out%	19.60	0.900	0.000	0.000
0.6	Non Ev.%	52.60	42.20	19.90	0.100
	H Out%	31.80	7.800	0.000	0.000

5 Conclusion

Joint asymptotic normality of estimators for parameters (H, κ, σ) constructed in [6] is proved for $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ and respective asymptotic covariance matrix is estimated. Provided simulations show that constructed estimators are much more accurate for low values of H , while for high values of H they are less accurate and much harder to compute. In general, the obtained results are consistent with conclusions from [6].

Список використаних джерел

1. Dai, Q. Specification analysis of affine term structure models / Q. Dai, K.J. Singleton // J. Finance, 55, p. 1943–1978, 2000.
2. Mishura, Y. Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes / Y. Mishura. Berlin : Springer-Verlag, 2008.
3. Cheridito, P. Mixed fractional Brownian motion / P. Cheridito // Bernoulli, 7 (6), p. 913–934, 2001.
4. Sun, L. Pricing currency options in the mixed fractional Brownian motion / L. Sun // Phys. A, 392 (16), p. 3441–3458, 2013.
5. Zili, M. On the mixed fractional Brownian motion / M. Zili // J. Appl. Math. Stoch. Anal., Art. ID 32435, 9, 2006.
6. Kukush, A. Two approaches to consistent estimation of parameters of mixed fractional Brownian motion with trend / A. Kukush, S. Lohvinenko, Y. Mishura, K. Ralchenko // Stat. Inference Stoch. Process., 25 (1), p. 159–187, 2022.
7. Nourdin, I. Selected aspects of fractional Brownian motion / I. Nourdin. Milan : Springer, 2012.
8. Isserlis, L. On a formula for the product-moment coefficient of any order of a normal frequency distribution in any number of variables / L. Isserlis // Biometrika, 12 (1/2), p. 134–139, 1918.
9. Arcones, M.A. Limit theorems for nonlinear functionals of a stationary Gaussian sequence of vectors / M.A. Arcones // Ann. Probab., 22 (4), p. 2242–2274, 1994.
10. Nourdin, I. Quantitative Breuer–Major theorems. / I. Nourdin, G. Peccati, M. Podolskij // Stochastic Process. Appl., 121 (4), p. 793–812, 2011.
11. Kubilius, K. Parameter estimation in fractional diffusion models / K. Kubilius, Y. Mishura, K. Ralchenko. Cham : Springer, 2017.

References

1. DAI, Q., SINGLETON, K.J. (2000) *Specification analysis of affine term structure models*. J. Finance, 55, p. 1943–1978.
2. MISHURA, Y. (2008) *Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes*. Springer-Verlag, Berlin.
3. CHERIDITO, P. (2001) *Mixed fractional Brownian motion*. Bernoulli, 7 (6), p. 913–934.
4. SUN, L. (2013) *Pricing currency options in the mixed fractional Brownian motion*. Phys. A, 392 (16), p. 3441–3458.
5. ZILI, M. (2006) *On the mixed fractional Brownian motion*. J. Appl. Math. Stoch. Anal., Art. ID 32435, 9.
6. KUKUSH, A., LOHVINENKO, S., MISHURA, Y., RALCHENKO, K. (2022) *Two approaches to consistent estimation of parameters of mixed fractional Brownian motion with trend*. Stat. Inference Stoch. Process., 25 (1), p. 159–187.
7. NOURDIN, I. (2012) *Selected aspects of fractional Brownian motion*. Springer, Milan.
8. ISSERLIS, L. (1918) *On a formula for the product-moment coefficient of any order of a normal frequency distribution in any number of variables*. Biometrika, 12 (1/2), p. 134–139.
9. ARCONES, M.A. (1994) *Limit theorems for nonlinear functionals of a stationary Gaussian sequence of vectors*. Ann. Probab., 22 (4), p. 2242–2274.
10. NOURDIN, I., PECCATI, G., PODOLSKIJ, M. (2011) *Quantitative Breuer–Major theorems*. Stochastic Process. Appl., 121 (4), p. 793–812.
11. KUBILIUS, K., MISHURA, Y., RALCHENKO, K. (2017) *Parameter estimation in fractional diffusion models*. Springer, Cham.

Надійшла до редколегії 20.09.2023

УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.7>

A. Grigutis¹, доктор філософії, доцент

**Імовірнісний огляд ймовірностей
дефолту для портфелів з низьким
рівнем дефолту введених К. Плутто та
Д. Таше**

¹ Інститут математики, факультет математики та інформатики, Вільнюський університет, Наугардуко, 24, Вільнюс, LT-03225, Литва
e-mail: andrius.grigutis@mif.vu.lt

A. Grigutis¹, PhD, Assoc. Prof.

**Probabilistic Overview of Probabilities of
Default for Low Default Portfolios by K.
Pluto and D. Tasche**

¹Institute of Mathematics, Faculty of Mathematics and Informatics, Vilnius University, Naugarduko g. 24, Vilnius, LT-03225, Lithuania
e-mail: andrius.grigutis@mif.vu.lt

У цій статті подано огляд методу, що широко використовується для оцінювання ймовірності дефолту, запропонований К. Плуттоном і Д. Таше. Наведено припущення та отримано нерівність, в якій ймовірність дефолту залежить від впливу систематичного фактору.

This article gives a probabilistic overview of the widely used method of default probability estimation proposed by K. Pluto and D. Tasche. There are listed detailed assumptions and derivation of the inequality where the probability of default is involved under the influence of systematic factor. The author anticipates adding more clarity, especially for early career analysts or scholars, regarding the assumption of borrowers' independence, conditional independence, and interaction between the probability distributions such as binomial, beta, normal, and others. There is also shown the relation between the probability of default and the joint distribution of $\sqrt{\varrho}X - \sqrt{1-\varrho}Y$, where X , including but not limiting, is the standard normal, Y admits, including but not limiting, the beta-normal distribution and X, Y are independent.

Key Words: probability of default, binomial distribution, beta-normal distribution, Vasicek distribution, Pluto-Tasche method.

1 Introduction

The probability of default p is actually the most important metric in credit risk management. Roughly, this probability provides the likelihood for a certain obligor not to follow the taken financial commitments properly within a certain period of time, typically one year. The number of defaulted borrowers divided by the number of total borrowers within a certain portfolio is known as the observed default rate, while the predicted one p is called the expected default rate. Any model tasked to predict p , should ensure the alignment between the observed and expected default rates. However, in some instances, such as low default portfolios, there is not possible to have any robust observations for the observed default rate. In such instances, the famous work [14] suggests applying the Bernoulli trials to estimate the experiment's success probability p . This article is a survey of two models: (a) the estimation of p when obligors in the portfolio are treated independently of each other and there is no side influence for such a

portfolio, (b) the estimation of p when obligors in the portfolio are treated conditionally independent of each other when each obligor is influenced by some systematic factor. We aim to reflect on the detailed steps and assumptions used in deriving the two mentioned models and add some insights about the involved probability distributions.

Let us recall several well-known random variables.

- We say that the random variable X is binomial distributed with parameters $n \in \mathbb{N}$ and $p \in (0, 1)$ (denoted $X \sim \text{Bin}(n, p)$) if the probability mass function is

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) \\ = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \end{aligned}$$

where

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

We denote the cumulative distribution

function of the binomial random variable by

$$\begin{aligned} \text{Bin}_{n,p}(k) &:= \mathbb{P}(X \leq k) \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

- We say that the random variable X is beta distributed with parameters $\alpha > 0$ and $\beta > 0$ (denoted $X \sim \mathcal{B}(\alpha, \beta)$) if its probability density function is

$$b_{\alpha,\beta}(x) := \frac{x^{\alpha}(1-x)^{\beta}}{B(\alpha, \beta)}, \quad x \in (0, 1),$$

where

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

and the gamma function for the complex number $s \in \mathbb{C}$ is

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt, \quad \Re s > 0.$$

We denote the cumulative distribution function of the beta random variable by

$$\mathcal{B}_{\alpha,\beta}(x) = \int_0^x b_{\alpha,\beta}(y) dy, \quad x \in (0, 1)$$

2 Binomial and mixture binomial distributions for the probability of default estimation

In this section, in the subsections [2.1](#) and [2.2](#) respectively, we review the derivation of two methods used to estimate the probability of default p . As mentioned in Introduction [1](#), the first method is just the Bernoulli trials assuming the obligors' independence, while the second method provides the estimation of p under the assumption of obligors' conditional independence of each other under the influence of a certain systematic factor.

2.1 Binomial distribution

Let $X_1, X_2, \dots, X_n$ be independent copies of Bernoulli random variable X which distribution is $\mathbb{P}(X = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X = 0)$. In risk management, the random variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ are treated as independent obligors and the attained value $X_i = 1, i = 1, 2, \dots, n$ means that the i 'th obligor defaults within some observation period (typically one year), while $X_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$ means that the i 'th obligor does not default within the same observation period.

and its inverse by $\mathcal{B}_{\alpha,\beta}^{-1}(x), x \in (0, 1)$.

- We say that the random variable X is normally distributed with parameters $\mu \in \mathbb{R}$ and $\sigma^2 > 0$ (denoted by $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$) if its probability density function is

$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

We denote the cumulative distribution function of the normal distribution by

$$\Phi_{\mu,\sigma^2}(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_{\mu,\sigma^2}(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}$$

and its inverse by $\Phi_{\mu,\sigma^2}^{-1}(x)$. We recall the symmetry $\Phi_{\mu,\sigma^2}(x) = 1 - \Phi_{\mu,\sigma^2}(-x + 2\mu)$ and write $\varphi(x)$, $\Phi(x)$ and $\Phi^{-1}(x)$ respectively if $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

The other distributions met in this paper, are introduced in the proper places where they are used.

Then, the sum $Y := X_1 + X_2 + \dots + X_n$ may attain any value from the set $\{0, 1, \dots, n\}$ with probability

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1)$$

The probability mass function of the binomial distribution [\(1\)](#) means the probability to default k out of total n obligors in the portfolio, while the distribution function [\(2\)](#)

$$\begin{aligned} \text{Bin}_{n,p}(k) &= \mathbb{P}(Y \leq k) \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \quad k = 0, 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2)$$

is the probability to default no more than k obligors out of total n . Obviously,

$$\begin{aligned} \text{Bin}_{n,p}(n) &= \mathbb{P}(Y \leq n) \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = (p + 1 - p)^n = 1 \end{aligned}$$

for any $p \in (0, 1)$.

In many examples, e.g., tossing a coin or a die, the experiment's success probability p is known beforehand. However, in real-life problems, such as

default probability estimation, the probability p is desired to know. In order to get p out of (1) or (2) we need an expert judgment first. Let us suppose that the probability of the amount of defaulted obligors does not exceed $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ out of n is at least $1 - \gamma$. Then,

$$\begin{aligned} \text{Bin}_{n,p}(k) &= \mathbb{P}(Y \leq k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\ &\geq (1-\gamma), \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \end{aligned} \quad (3)$$

and, in view of Proposition 1, the upper bound of default probability p is

$$p \leq 1 - \mathcal{B}_{n-k, k+1}^{-1}(1-\gamma), \quad (4)$$

where $\mathcal{B}_{n-k, k+1}^{-1}(\cdot)$ is an inverse of beta distribution function. In particular, if $k = 0$, i.e., we are certain with probability $1 - \gamma$ that there be no defaulted obligors at all, then

$$p \leq 1 - (1-\gamma)^{1/n}.$$

The probability $1 - \gamma$ can be introduced as the probability of type I error, also known as the false positive instance classification, which in our context means that the actual probability of default does not belong to the predicted interval $0 \leq p \leq 1 - \mathcal{B}_{n-k, k+1}^{-1}(1-\gamma)$; see [4]. Moreover, the confidence interval of the binomial distribution is known as the Clopper-Pearson interval; see [3], [5].

2.2 Mixture of Binomial and Normal distributions

Let r be an annual return rate and $(1+r/n)^n$, $n \in \mathbb{N}$ the increment of the invested amount when the return rate is compounded n times per year. It is well known that $(1+r/n)^n \rightarrow e^r$ when $n \rightarrow \infty$. Thus,

$$V_F = V_I e^r$$

assuming the continuously compounded return, where $V_F > 0$ denotes the final value and $V_I > 0$ the initial one. Based on the previous thoughts, we define

$$r_{\log} := \ln \frac{V_F}{V_I} = \ln V_F - \ln V_I. \quad (5)$$

The return derived in (5) is called the logarithmic return or just log-return. We now assume

the logarithmic return to be a random variable. More precisely, we assume

$$r_{\log} = \beta S + \xi, \quad (6)$$

where $\beta \in \mathbb{R}$, $S \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $\xi \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, the random variables S and ξ are independent and both non-degenerate. Also, S is known as systematic risk factor, while ξ as idiosyncratic; see [9]. The origin of return's definition (6) has similarities with the capital asset pricing model which states that every expected return $\mathbb{E}r_i$ under certain assumptions satisfies

$$\mathbb{E}(r_i - r_f) = \beta_i \mathbb{E}(r_M - r_f),$$

where r_f is the risk-free return rate, r_M the return of systemic portfolio M and $\beta_i = \text{cov}(r_i, r_M) / \sigma_M^2$, see, for example, [6] and observe that (6) implies $\mathbb{E}(r_{\log} - \xi) = \beta \mathbb{E}S$.

Let us now standardize the log-return (6). It is easy to check that

$$\begin{aligned} r_{\log} &= \beta S + \xi \Leftrightarrow \\ \frac{r_{\log} - \mathbb{E}r_{\log}}{\sigma_{r_{\log}}} &= \beta \frac{\sigma_S}{\sigma_{r_{\log}}} \frac{S - \mathbb{E}S}{\sigma_S} + \frac{\sigma_{\xi}}{\sigma_{r_{\log}}} \frac{\xi - \mathbb{E}\xi}{\sigma_{\xi}}. \end{aligned}$$

Thus, it is equivalent to define $r_{\log}$ as

$$\tilde{r}_{\log} = \sqrt{\varrho} \tilde{S} + \sqrt{1-\varrho} \tilde{\xi}, \quad \varrho \in [0, 1], \quad (7)$$

where

$$\varrho = \left(\beta \frac{\sigma_S}{\sigma_{r_{\log}}} \right)^2 = \frac{\beta^2 \sigma_S^2}{\beta^2 \sigma_S^2 + \sigma_{\xi}^2}, \quad (8)$$

and $\tilde{S}$, $\tilde{\xi}$ are independent standard normal random variables. Indeed, $r_{\log} \sim \mathcal{N}(\beta\mu_1 + \mu_2, \beta^2\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ is equivalent to $\tilde{r}_{\log} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

We note that

$$1 = \sigma_{\tilde{r}_{\log}}^2 = \left(\beta \frac{\sigma_S}{\sigma_{r_{\log}}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\xi}}{\sigma_{r_{\log}}} \right)^2$$

and the coefficient ϱ in (8) is called the asset correlation (see [19]); it expresses the correlation between $\tilde{r}_{\log}$ and $\tilde{S}$:

$$\text{corr}(\tilde{r}_{\log}, \tilde{S}) = \text{cov}(\sqrt{\varrho} \tilde{S} + \sqrt{1-\varrho} \tilde{\xi}, \tilde{S}) = \sqrt{\varrho}.$$

We now define the default event D by

$$D = \begin{cases} 1, & \text{if } \sqrt{\varrho} \tilde{S} + \sqrt{1-\varrho} \tilde{\xi} < x_p, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (9)$$

Of course, D is Bernoulli random variable and $x_p = \Phi^{-1}(p)$ since the random variable $\sqrt{\varrho}\tilde{S} + \sqrt{1-\varrho}\tilde{\xi}$ is standard normal. We now are interested in that particular p which causes $D = 1$. Conditioning on $\tilde{S}$, i.e., assuming that the systematic factor attains some particular value $x \in \mathbb{R}$, for $\varrho \neq 1$, we have

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D = 1 | \tilde{S} = x) &= \mathbb{P}\left(\tilde{\xi} < \frac{\Phi^{-1}(p) - \sqrt{\varrho}\tilde{S}}{\sqrt{1-\varrho}} \middle| \tilde{S} = x\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p) - \sqrt{\varrho}x}{\sqrt{1-\varrho}}\right) \end{aligned} \quad (10)$$

and

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D = 0 | \tilde{S} = x) \\ = 1 - \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p) - \sqrt{\varrho}x}{\sqrt{1-\varrho}}\right). \end{aligned} \quad (11)$$

The random variable

$$\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p) - \sqrt{\varrho}\tilde{S}}{\sqrt{1-\varrho}}\right), \quad p \in (0, 1), \quad \varrho \in [0, 1), \quad (12)$$

where $\tilde{S} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, is known as Vasicek distribution, see [78].

Let $D_1, D_2, \dots, D_n$ be the conditionally independent copies of the random variable D when the systematic factor $\tilde{S} = x$. Then, $\mathcal{D} := D_1 + D_2 + \dots + D_n$ is binomial random variable and the conditional probability that $\mathcal{D} = i$ if $\tilde{S} = x$ is

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{D} = i | \tilde{S} = x) &= \binom{n}{i} \Phi^i\left(\frac{\Phi^{-1}(p) - \sqrt{\varrho}x}{\sqrt{1-\varrho}}\right) \\ &\times \left(1 - \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p) - \sqrt{\varrho}x}{\sqrt{1-\varrho}}\right)\right)^{n-i}, \end{aligned} \quad (13)$$

where $i = 0, 1, \dots, n$. Thus, being certain with probability at least $1 - \gamma$, that there default up to $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ obligors out of total n , by the law of total probability we get

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{D} \leq k) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{P}(\mathcal{D} \leq k | \tilde{S} = x)\right) = \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \left(\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p) - \sqrt{\varrho}x}{\sqrt{1-\varrho}}\right)\right)^i \\ &\times \left(1 - \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p) - \sqrt{\varrho}x}{\sqrt{1-\varrho}}\right)\right)^{n-i} dx \geq 1 - \gamma. \end{aligned} \quad (14)$$

Notice that if $k = n$, then the inequality (14) is satisfied with any $p \in (0, 1)$ when $\gamma \in [0, 1]$. Also, $\varrho = 0$ in (14) implies the inequality [3].

Equally, the integral in (14) is nothing but the mixture of the binomial and Vasicek distributions: it is the cumulative binomial distribution function $\text{Bin}_{n,p}(k)$, $k = 0, 1, \dots, n$ when the parameter p is Vasicek distributed (12). See [72] for the mixture distribution models.

According to Proposition 2, the upper bound of p in (14) is

$$p \leq 1 - \Phi\left(\sqrt{1-\varrho}F_{n-k,k+1,\varrho}^{-1}(1-\gamma)\right), \quad (15)$$

where $F_{n-k,k+1,\varrho}^{-1}(y)$, $y \in \mathbb{R}$ is the inverse of the cumulative distribution function

$$\begin{aligned} F_{n-k,k+1,\varrho}(y) &= \\ &\int_0^1 \mathcal{B}_{n-k,k+1}\left(\Phi\left(\sqrt{\frac{\varrho}{1-\varrho}}\Phi^{-1}(x) + y\right)\right) dx. \end{aligned} \quad (16)$$

It is not easy to get a more convenient expression of the cumulative distribution function $F_{n-k,k+1,\varrho}(y)$ in (16). Thus, we shall search for the quantiles of the underlying distribution, described by $F_{n-k,k+1,\varrho}(y)$, numerically; see Section 5. Of course, the function $F_{n-k,k+1,\varrho}(y)$ is defined in view of Proposition 2 by replacing

$$y = -\frac{\Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\varrho}}$$

in (19) and there is equivalent to search for such $p \in (0, 1)$ that

$$F_{n-k,k+1,\varrho}\left(-\frac{\Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\varrho}}\right) \geq 1 - \gamma$$

or

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{n-k,k+1,\varrho}(p) &:= \\ 1 - F_{n-k,k+1,\varrho}\left(-\frac{\Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\varrho}}\right) &\leq \gamma, \end{aligned} \quad (17)$$

where $\tilde{F}_{n-k,k+1,\varrho}(p)$, $p \in (0, 1)$ is the continuous cumulative distribution function with respect to p .

Let us mention that the probability distribution, described by its cumulative distribution function

$$\mathcal{BN}_{\alpha,\beta,\mu,\sigma^2}(x) := \mathcal{B}_{\alpha,\beta}(\Phi_{\mu,\sigma^2}(x)), \quad x \in \mathbb{R},$$

is known as beta-normal. We write $X \sim \mathcal{BN}(\alpha, \beta, \mu, \sigma^2)$ if X is the beta-normal random variable and $bn_{\alpha,\beta,\mu,\sigma^2}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ denotes its density. See [7], [8], [10] and [15] for the beta-normal distribution. Thus, $F_{\alpha,\beta,\varrho}(y)$ in (16) can

be easily described in terms of the beta-normal distribution. See also [2] as the good initial source on credit risk management and some other insights deriving inequality (14). Equally, in view of (16), we depict the probability density function

$$\frac{dF_{\alpha,\beta,\varrho}(y)}{dy}, y \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \beta > 0, 0 \leq \varrho < 1$$

for some chosen parameters in Figure 1 and the cumulative distribution function $F_{\alpha,\beta,\varrho}(y)$ correspondingly in Figure 2 below.

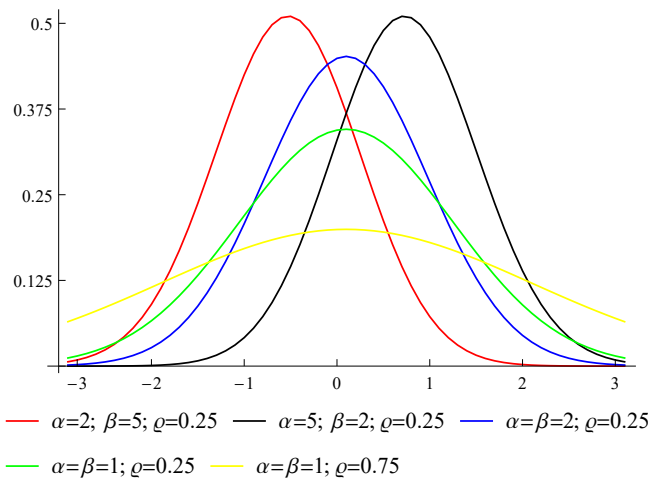


Figure 1: The probability density function whose cumulative distribution function is $F_{\alpha,\beta,\varrho}(y)$, $y \in \mathbb{R}$.

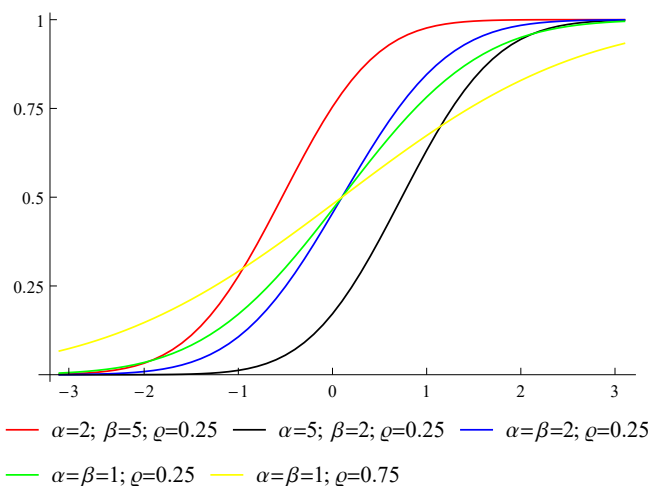


Figure 2: The cumulative distribution function $F_{\alpha,\beta,\varrho}(y)$, $y \in \mathbb{R}$.

The derivative of $\tilde{F}_{n-k,k+1,\varrho}(p)$ in (17) and the cumulative distribution function $\tilde{F}_{n-k,k+1,\varrho}(p)$ for some chosen parameters are depicted in Figure 3 and Figure 4 below respectively.

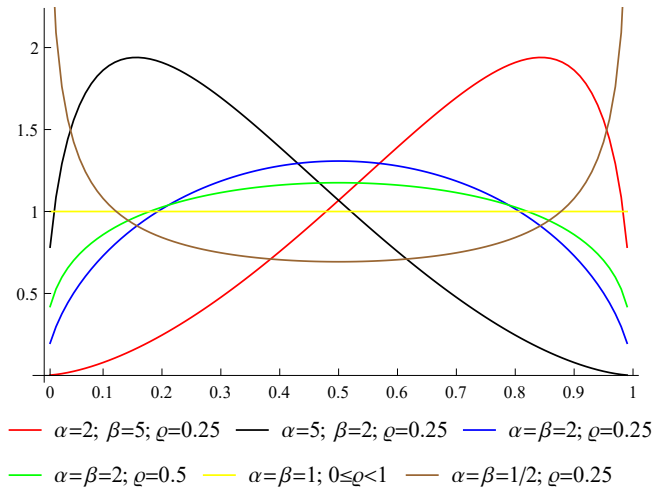


Figure 3: The probability density function whose cumulative distribution function is $\tilde{F}_{n-k,k+1,\varrho}(p)$, $p \in (0, 1)$.

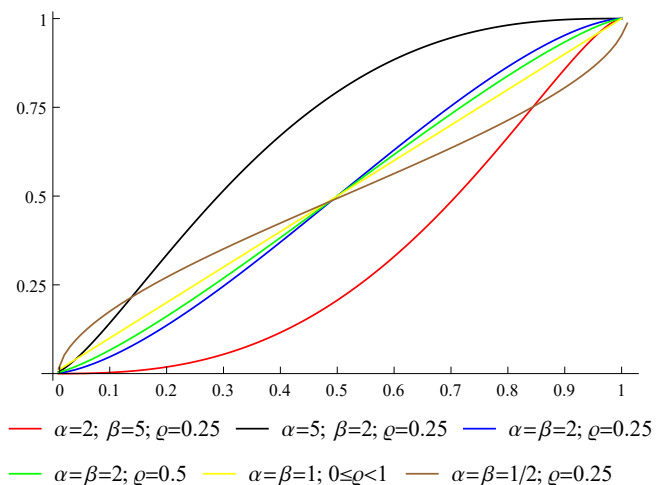


Figure 4: The cumulative distribution function $\tilde{F}_{n-k,k+1,\varrho}(p)$, $p \in (0, 1)$.

The depicted functions in Figures 1-4 relate the search of the upper bound of p with the quantile function of $1-\gamma$ under the underlying distribution. According to Propositions 2 and 3, in Figures 5, 6 and 7 below we illustrate the search of the upper bound of p relation with the partial volume of the unit given by $1-\gamma$ (the blue colored volume in Figures 5, 6 and 7) under the joint density surface.

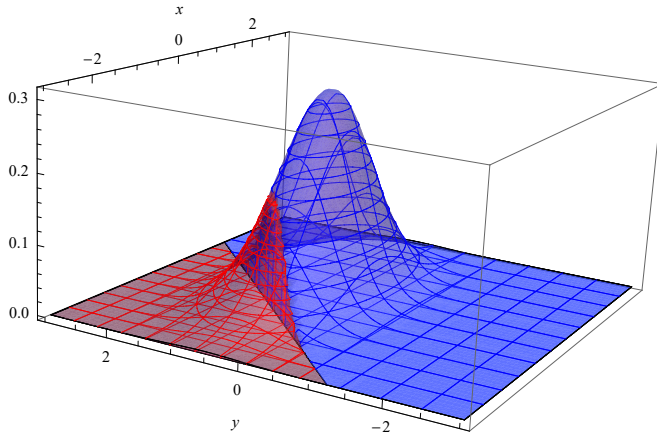


Figure 5: The joint density $\varphi(x)bn_{\alpha,\beta,0,1}(y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ and the line $\sqrt{\varrho}x - \sqrt{1-\varrho}y = \Phi^{-1}(p)$, when $\alpha = 5$, $\beta = 2$, $\varrho = 1/2$ and $p = 1/10$. The red colored volume corresponds to $\sqrt{\varrho}x - \sqrt{1-\varrho}y < \Phi^{-1}(p)$, while the blue one is $1 - \gamma = 0.869$. In other words, the inequality (14) with $1 - \gamma = 0.869$, $k = 1$, $n = 6$ and $\varrho = 1/2$ is satisfied when $p \in (0, 1/10]$.

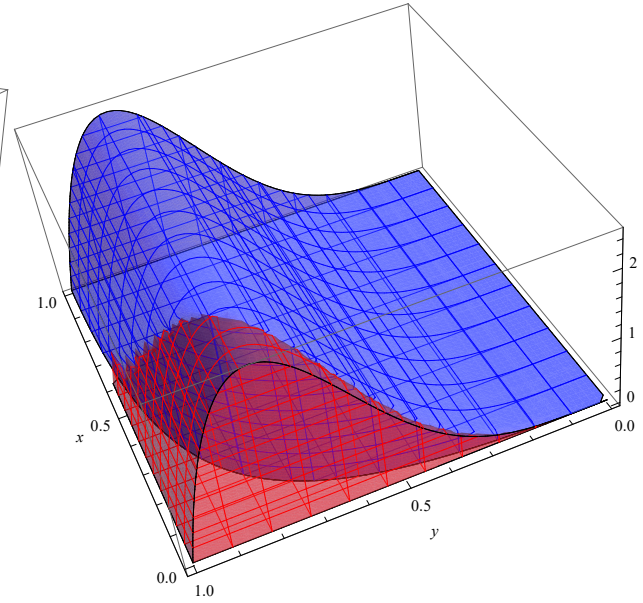


Figure 7: The joint density $1 \cdot b_{\alpha,\beta}(y)$, $0 < x, y < 1$, and the curve $\sqrt{\varrho}\Phi^{-1}(x) - \sqrt{1-\varrho}\Phi^{-1}(y) = \Phi^{-1}(p)$, when $\alpha = 5$, $\beta = 2$, $\varrho = 1/2$ and $p = 1/10$. The red colored volume corresponds to $\sqrt{\varrho}\Phi^{-1}(x) - \sqrt{1-\varrho}\Phi^{-1}(y) < \Phi^{-1}(p)$, while the blue one is $1 - \gamma = 0.869$.

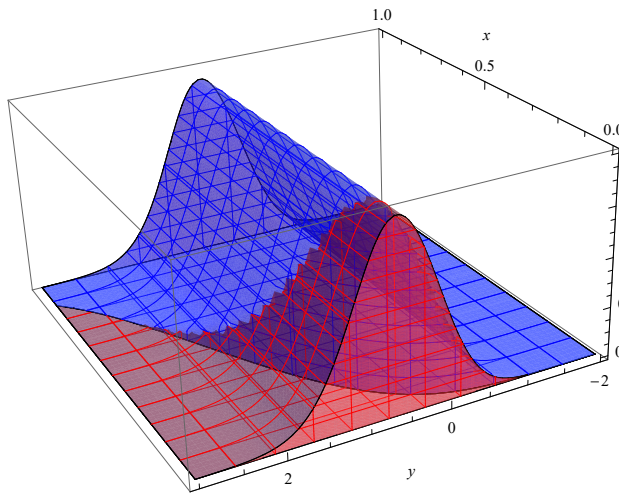


Figure 6: The joint density $1 \cdot bn_{\alpha,\beta,0,1}(y)$, $0 < x < 1$, $y \in \mathbb{R}$ and the curve $\sqrt{\varrho}\Phi^{-1}(x) - \sqrt{1-\varrho}y = \Phi^{-1}(p)$, when $\alpha = 5$, $\beta = 2$, $\varrho = 1/2$ and $p = 1/10$. The red colored volume corresponds to $\sqrt{\varrho}\Phi^{-1}(x) - \sqrt{1-\varrho}y < \Phi^{-1}(p)$, while the blue one is $1 - \gamma = 0.869$.

To estimate the probability of default p by (4) or (15) among the portfolio sub-classes $A_1, A_2, \dots, A_l$, where A_1 represents the lowest risk borrowers and A_l the highest respectively, there was proposed a method of conservatism; see [14]. The method of conservatism states the following. Let $n_1, n_2, \dots, n_l$, $k_1, k_2, \dots, k_l$ and $p_1, p_2, \dots, p_l$ be the number of obligors, the number of expected defaults and default probabilities over the portfolio sub-classes $A_1, A_2, \dots, A_l$ respectively. Then $n_1 + n_2 + \dots + n_l = n$, $k_1 + k_2 + \dots + k_l = k$ and the probability of defaults p_1 shall be estimated using the parameters (n, k) in (4) or (15), p_2 shall be estimated using $(n - n_1, k - k_1)$, p_3 with $(n - n_1 - n_2, k - k_1 - k_2)$ and so on up to p_l which shall be estimated using (n_l, k_l) .

Discussions and dissatisfaction among the practitioners that the estimates (4) or (15) of the probability of default are too conservative, force some adjustments to estimate p conditionally (biased), see [16] and related papers.

3 Statements

In this section, we recall the connection between the binomial and beta distributions, provide several

equivalent forms of inequality (14), and its connection to the normal multivariate distribution when there are no expected defaults, i.e. $k = 0$.

Proposition 1. Let $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ be fixed and $p \in (0, 1)$. Then the cumulative distribution function of binomial and beta random variables are related as

$$\begin{aligned} 1 - \mathcal{B}_{k+1, n-k}(p) &= \mathcal{B}_{n-k, k+1}(1-p) \\ &= \text{Bin}_{n,p}(k), \quad p \in (0, 1). \end{aligned}$$

NOTE 1: Let us emphasize that the function $\text{Bin}_{n,p}(k)$ in Proposition 1 is understood as the function of $p \in (0, 1)$, when n and k are fixed.

Proposition 1 is often met in probabilistic books; e.g., [4, p. 82].

Proposition 2. Let $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ be fixed and $p \in (0, 1)$. Then the inequality (14) admits the following equivalent representations:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \times \mathcal{B}_{n-k, k+1} \left(\Phi \left(\sqrt{\frac{\varrho}{1-\varrho}} x - \frac{\Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\varrho}} \right) \right) dx \quad (18)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \mathcal{B}_{n-k, k+1} \left(\Phi \left(\sqrt{\frac{\varrho}{1-\varrho}} \Phi^{-1}(x) - \frac{\Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\varrho}} \right) \right) dx \\ &\geq 1 - \gamma, \end{aligned} \quad (19)$$

where $\mathcal{B}_{n-k, k+1}(\cdot)$ is the cumulative distribution function of the beta random variable.

NOTE 2: The same way as Proposition 1 relates the cumulative distribution functions of binomial and beta distributions, Proposition 2 relates the cumulative distribution function $\mathbb{P}(\mathcal{D} \leq k)$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ from (14) to the ones in (18) or (19) when $p \in (0, 1)$. Of course, $\mathcal{B}_{n-k, k+1}(\cdot)$ in (18) and (19) can be easily replaced by $\mathcal{BN}_{n-k, k+1, 0, 1}(\cdot)$ due to the argument $\Phi(\cdot)$.

We denote $\mathcal{U}(0, 1)$ the uniform distribution over the interval $(0, 1)$. Then, the following proposition is correct.

Proposition 3. Let $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $Y \sim \mathcal{BN}(n-k, k+1, 0, 1)$, $Z \sim \mathcal{U}(0, 1)$, $W \sim \mathcal{B}(n-k, k+1)$ and suppose that the random variables in pairs (X, Y) , (Y, Z) , (Z, W) are independent. Then

the distribution function in (18) or (19), when $p \in (0, 1)$, equals to

$$\mathbb{P} \left(\Phi \left(\sqrt{\varrho} X - \sqrt{1-\varrho} Y \right) > p \right) = \quad (20)$$

$$\mathbb{P} \left(\Phi \left(\sqrt{\varrho} \Phi^{-1}(Z) - \sqrt{1-\varrho} Y \right) > p \right) = \quad (21)$$

$$\mathbb{P} \left(\Phi \left(\sqrt{\varrho} \Phi^{-1}(Z) - \sqrt{1-\varrho} \Phi^{-1}(W) \right) > p \right) \quad (22)$$

NOTE 3: Of course, there can be given some other joint distributions' expressions than those provided in (20), (21), (22).

Corollary 1. If $k = 0$, $n \in \mathbb{N}$ and $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, then the left hand-side of the inequality (14) is

$$\mathbb{E} \Phi^n \left(\sqrt{\frac{\varrho}{1-\varrho}} X - \frac{\Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\varrho}} \right) \quad (23)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \Phi^n \left(\sqrt{\frac{\varrho}{1-\varrho}} x - \frac{\Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\varrho}} \right) dx \quad (24)$$

$$= \Phi_R \left(-\Phi^{-1}(p), \dots, -\Phi^{-1}(p) \right), \quad (25)$$

where Φ_R is the Gaussian copula with the correlation matrix

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \varrho & \dots & \varrho \\ \varrho & 1 & \dots & \varrho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varrho & \varrho & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

On top of that, the multivariate density of Φ_R in (25) is

$$\begin{aligned} \varphi_R &:= \\ &\exp \left\{ \frac{(1+(n-2)\varrho) \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\varrho \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j}{-2(1-\varrho)(1+(n-1)\varrho)} \right\} \\ &\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n (1-\varrho)^{n-1} (1+(n-1)\varrho)}}, \quad (26) \\ &(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Corollary 1 and its proof (see Section 4) implies

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \Phi^n \left(-\sqrt{\frac{\varrho}{1-\varrho}} X + \frac{\Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\varrho}} \right) \\ = \Phi_R \left(\Phi^{-1}(p), \dots, \Phi^{-1}(p) \right), \end{aligned}$$

where $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, and these moments of Vasicek distribution (12) are connected to the moments of the probability distribution given by

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = i) &= \binom{n}{i} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \Phi^i \left(\frac{\Phi^{-1}(p) - \sqrt{\varrho} x}{\sqrt{1-\varrho}} \right) \\ &\times \left(1 - \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(p) - \sqrt{\varrho} x}{\sqrt{1-\varrho}} \right) \right)^{n-i} dx, \end{aligned} \quad (27)$$

where $n \in \mathbb{N}$ and $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, see (13). Indeed, due to the well-known moment-generating function of the binomial distribution, the moment-generating function $M(t)$ of (27) is

$$\mathbb{E} \left(\Phi \left(\sqrt{\frac{\varrho}{1-\varrho}} X - \frac{\Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\varrho}} \right) + \Phi \left(-\sqrt{\frac{\varrho}{1-\varrho}} X + \frac{\Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\varrho}} \right) e^t \right)^n, t \in \mathbb{R},$$

where $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Notice that $M(\log t)$ is the probability-generating function of the underlying distribution.

4 Proofs

This section provides the proofs for three formulated statements in Section 3. The majority of the given proofs are commonly known among researchers or scholars and it is difficult to give any initial source.

Proof of Proposition 1. Let us first show that

$$1 - \mathcal{B}_{k+1, n-k}(p) = \mathcal{B}_{n-k, k+1}(1-p).$$

Indeed,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{n-k, k+1}(1-p) &= \frac{\int_0^{1-p} u^{n-k-1} (1-u)^k du}{B(n-k, k+1)} = \\ &= \frac{\int_1^p (1-x)^{n-k-1} x^k dx}{B(n-k, k+1)} = \frac{\int_p^1 x^k (1-x)^{n-k-1} dx}{B(k+1, n-k)} \\ &= \frac{B(k+1, n-k) - \int_0^p x^k (1-x)^{n-k-1} dx}{B(k+1, n-k)} \\ &= 1 - \mathcal{B}_{k+1, n-k}(p). \end{aligned}$$

We now aim to prove

$$1 - \mathcal{B}in_{n,p}(k) = \mathcal{B}_{n-k, k+1}(1-p),$$

where $\mathcal{B}in_{n,p}(k)$ is considered as a function of $p \in (0, 1)$ when k and n are fixed. Let us rewrite

$$\begin{aligned} f(p) &:= 1 - \mathcal{B}in_{n,p}(k) \\ &= \sum_{i=k+1}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

One may observe that $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ and the derivative

$$\begin{aligned} \frac{df(p)}{dp} &= \sum_{i=k+1}^n \binom{n}{i} \\ &\times (ip^{i-1}(1-p)^{n-i} - (n-i)p^i(1-p)^{n-1-i}) \\ &= n \sum_{i=k+1}^n \left(\binom{n-1}{i-1} p^{i-1} (1-p)^{n-i} \right. \\ &\quad \left. - \binom{n-1}{i} p^i (1-p)^{n-1-i} \mathbb{1}_{\{i \leq n-1\}} \right) \\ &= n \left(\binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \right. \\ &\quad \left. - \binom{n-1}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n-2-k} \right. \\ &\quad \left. + \binom{n-1}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n-2-k} \right. \\ &\quad \left. - \binom{n-1}{k+2} p^{k+2} (1-p)^{n-3-k} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \binom{n-1}{n-1} p^{n-1} (1-p)^0 \right) \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} p^k (1-p)^{n-1-k} \end{aligned}$$

is positive for all $p \in (0, 1)$. Thus, $f(p)$ is the cumulative distribution function over the interval $p \in (0, 1)$ and its derivative is nothing but the density of the beta distribution with parameters $(k+1, n-k)$, i.e.,

$$\begin{aligned} \frac{df(p)}{dp} &= b_{k+1, n-k}(p) \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k)} p^k (1-p)^{n-k-1}, \quad p \in (0, 1). \end{aligned}$$

□

Proof of Proposition 2. The integral in (14) implies (18) by Proposition 1, while (18) implies (19) by the change of variable $\Phi(x) \mapsto x$. □

Proof of Proposition 3. The probability (20) is

implied by (18) observing that

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \\ & \times \left(\int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{\varrho}{1-\varrho}}x - \frac{\Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\varrho}}} bn_{n-k, k+1, 0, 1}(y) dy \right) dx \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{\varrho}{1-\varrho}}x - \frac{\Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\varrho}}} \\ & \times \varphi(x) bn_{n-k, k+1, 0, 1}(y) dx dy \\ & = \mathbb{P} \left(Y < \sqrt{\frac{\varrho}{1-\varrho}}X - \frac{\Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\varrho}} \right) \\ & = \mathbb{P} \left(\sqrt{\varrho}X - \sqrt{1-\varrho}Y > \Phi^{-1}(p) \right) \\ & = \mathbb{P} \left(\Phi \left(\sqrt{\varrho}X - \sqrt{1-\varrho}Y \right) > p \right), \end{aligned}$$

when X and Y are independent. The remaining probabilities (21) and (22) are implied by the integral in (19) by the same arguments. $\square$

Proof of Corollary 1. Let $a, b \in \mathbb{R}$. Assume the random variables $Y_1, \dots, Y_n$ are independent and identically distributed by $\mathcal{N}(0, 1)$. If $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ and $Y_1, \dots, Y_n$ are conditionally independent of X , then

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(Y_1 < aX + b, \dots, Y_n < aX + b) = \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(Y_1 < aX + b, \dots, Y_n < aX + b | X = x) \\ & \times \varphi(x) dx \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \Phi^n(ax + b) dx = \mathbb{E} \Phi^n(aX + b). \end{aligned}$$

The equality (24) follows by choosing

$$a = \sqrt{\frac{\varrho}{1-\varrho}}, b = -\frac{\Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\varrho}},$$

while the equality (25) is implied observing that

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\sqrt{1-\varrho}Y_1 - \sqrt{\varrho}X < -\Phi^{-1}(p), \dots, \right. \\ & \left. \sqrt{1-\varrho}Y_n - \sqrt{\varrho}X < -\Phi^{-1}(p) \right) \\ & = \Phi_R \left(-\Phi^{-1}(p), \dots, -\Phi^{-1}(p) \right), \end{aligned}$$

where

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \varrho & \dots & \varrho \\ \varrho & 1 & \dots & \varrho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varrho & \varrho & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n},$$

because

$$\begin{aligned} & \text{corr} \left(\sqrt{1-\varrho}Y_i - \sqrt{\varrho}X, \sqrt{1-\varrho}Y_j - \sqrt{\varrho}X \right) \\ & = \begin{cases} 1, & i = j, \\ \varrho, & i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

and

$$\mathbb{E} \left(\sqrt{1-\varrho}Y_i - \sqrt{\varrho}X \right) = 0, i = 1, \dots, n.$$

The determinant of R is

$$|R| = (1-\varrho)^{n-1}(1+(n-1)\varrho)$$

and the inverse matrix of R admits the following representation

$$R^{-1} = \frac{1}{(1-\varrho)(1+(n-1)\varrho)} \times \begin{pmatrix} 1+(n-2)\varrho & -\varrho & \dots & -\varrho \\ -\varrho & 1+(n-2)\varrho & \dots & -\varrho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\varrho & -\varrho & \dots & 1+(n-2)\varrho \end{pmatrix}$$

Indeed, it is easy to check that $RR^{-1} = I$, where I is the identity matrix. Then, the multivariate density (26) is implied by the formula

$$\begin{aligned} & \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2}(x_1, \dots, x_n)R^{-1}(x_1, \dots, x_n)^T \right\}}{\sqrt{(2\pi)^n |R|}}, \\ & (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

see, for example, [11], [1], [17]. $\square$

5 Examples

Example 1. Suppose there are up to 3 defaults expected with probability $1 - \gamma$ out of 800 obligors which are split into three risk classes: A , B and C , where A represents the lowest risk and C the highest. Assume the numbers of obligors are 100, 400, 300 and the numbers of expected defaults are up to 0, 2, 1 in risk classes A , B and C respectively. We apply Propositions 1, 2 and the method of conservatism introduced in [14] to estimate the probabilities of default p_A , p_B and p_C in risk classes A , B and C .

The method of conservatism (see [14] and the description by end of Section 2) states that p_A shall be estimated for the entire portfolio, i.e., $n = 800$ and $k = 3$ in the considered case. The

probability p_B shall be estimated for the entire portfolio excluding the class A , i.e., $n = 700$ and $k = 3$ in the considered case. Then, the probability p_C is estimated using $n = 300$ and $k = 1$ as per

the riskiest class C .

Using Proposition 1, the underlying logic stated in subsection 2.1 and the method of conservatism, we obtain Table 1.

γ	0.5	0.75	0.9	0.95	0.99	0.999
$1 - \mathcal{B}_{797,4}^{-1}(1 - \gamma)$	0.46%	0.64%	0.83%	0.97%	1.25%	1.62%
$1 - \mathcal{B}_{697,4}^{-1}(1 - \gamma)$	0.52%	0.73%	0.95%	1.10%	1.43%	1.85%
$1 - \mathcal{B}_{299,2}^{-1}(1 - \gamma)$	0.56%	0.90%	1.29%	1.57%	2.19%	3.04%

Table 1: The upper bounds of p_A , p_B and p_C .

Note that the numbers in Table 1 are given in [14] too and we replicate them for comparison purposes, especially calculating the quantiles of the underlying distribution given by $F_{n-k,k+1,\varrho}(y)$.

Suppose the asset correlation $\varrho = 12\%$ [3].

in Example 1. Then, using Proposition 2, the underlying logic stated in subsection 2.2, the method of conservatism, and the function "Find-Root" in program [13] we obtain Table 2 and Table

γ	0.5	0.75	0.9	0.95	0.99	0.999
$F_{797,4,0.12}^{-1}(1 - \gamma)$	2.61	2.34	2.09	1.94	1.67	1.36
$F_{697,4,0.12}^{-1}(1 - \gamma)$	2.57	2.29	2.04	1.90	1.62	1.31
$F_{299,2,0.12}^{-1}(1 - \gamma)$	2.55	2.25	1.98	1.82	1.52	1.19

Table 2: The quantiles of distribution which cumulative distribution function is $F_{n-k,k+1,\varrho}(y)$.

γ	0.5	0.75	0.9	0.95	0.99	0.999
$\Phi(a)$	0.71%	1.41%	2.49%	3.41%	5.88%	10.08%
$\Phi(b)$	0.80%	1.58%	2.76%	3.77%	6.43%	10.91%
$\Phi(c)$	0.84%	1.75%	3.18%	4.41%	7.67%	13.13%

Table 3: The upper bounds of p_A , p_B and p_C under the influence of systematic factor. Here $a = -\sqrt{1 - \varrho}F_{797,4,0.12}^{-1}(1 - \gamma)$, $b = -\sqrt{1 - \varrho}F_{697,4,0.12}^{-1}(1 - \gamma)$, $c = -\sqrt{1 - \varrho}F_{299,2,0.12}^{-1}(1 - \gamma)$ as provided in Table 2.

The provided numbers in Table 3 match the corresponding ones in [14] except few cases caused by rounding errors in the fourth decimal place.

Example 2. Suppose there are up to 7 defaults expected with probability $1 - \gamma$ out of 1500 obligors which are split in four risk classes: A , B , C and D where A represents the lowest risk and D the highest. Assume the numbers of obligors are 400, 700, 250, 150 and the numbers of expected

defaults are up to 2, 1, 3, 1 in risk classes A , B , C and D respectively. We apply Propositions 1, 2 and the method of conservatism introduced in [14] to estimate the probabilities of default p_A , p_B , p_C and p_D in risk classes A , B , C and D .

Using Proposition 1, the underlying logic stated in subsection 2.1 and the method of conservatism, we obtain Table 4.

γ	0.5	0.75	0.9	0.95	0.99	0.999
$\mathcal{B}_{1493,8}^{-1}(1-\gamma)$	0.51%	0.65%	0.78%	0.87%	1.06%	1.30%
$\mathcal{B}_{1095,6}^{-1}(1-\gamma)$	0.52%	0.67%	0.84%	0.95%	1.19%	1.49%
$\mathcal{B}_{396,5}^{-1}(1-\gamma)$	1.17%	1.56%	1.99%	2.27%	2.87%	3.65%
$\mathcal{B}_{149,2}^{-1}(1-\gamma)$	1.12%	1.78%	2.57%	3.12%	4.34%	5.99%

Table 4: The upper bounds of p_A , p_B , p_C and p_D .

Notice that $\mathcal{B}_{396,5}^{-1}(1/2) > \mathcal{B}_{149,2}^{-1}(1/2)$ in Table 4 and, as stated in [14, Footnote 6], "... this is not a desirable effect, a possible work-around could be to increment the number of defaults in grade D up to the point where p_D would take on a greater value than p_C ...".

Suppose the asset correlation $\varrho = 12\%$ in Example 2. Then, using Proposition 2, the underlying logic stated in subsection 2.2, the method of conservatism, and the function "Find-Root" in program [13] we obtain Table 5 and Table 6.

γ	0.5	0.75	0.9	0.95	0.99	0.999
$F_{1493,8,0.12}^{-1}(1-\gamma)$	2.57	2.31	2.07	1.93	1.67	1.37
$F_{1095,6,0.12}^{-1}(1-\gamma)$	2.57	2.30	2.06	1.92	1.65	1.35
$F_{396,5,0.12}^{-1}(1-\gamma)$	2.27	2.00	1.75	1.61	1.33	1.02
$F_{149,2,0.12}^{-1}(1-\gamma)$	2.30	1.98	1.71	1.54	1.24	0.91

Table 5: The quantiles of distribution which cumulative distribution function is $F_{n-k,k+1,\varrho}(y)$.

γ	0.5	0.75	0.9	0.95	0.99	0.999
$\Phi(a)$	0.79%	1.51%	2.59%	3.49%	5.58%	9.90%
$\Phi(b)$	0.79%	1.53%	2.64%	3.58%	6.06%	10.23%
$\Phi(c)$	1.64%	3.04%	5.01%	6.60%	10.61%	16.87%
$\Phi(d)$	1.56%	3.13%	5.45%	7.36%	12.21%	19.76%

Table 6: The upper bounds of p_A , p_B , p_C and p_D under the influence of systematic factor. Here $a = -\sqrt{1-\varrho}F_{1493,8,0.12}^{-1}(1-\gamma)$, $b = -\sqrt{1-\varrho}F_{1095,6,0.12}^{-1}(1-\gamma)$, $c = -\sqrt{1-\varrho}F_{396,5,0.12}^{-1}(1-\gamma)$, $d = -\sqrt{1-\varrho}F_{149,2,0.12}^{-1}(1-\gamma)$ as provided in Table 5.

Notice that $F_{396,5,0.12}^{-1}(1/2) > F_{149,2,0.12}^{-1}(1/2)$ in Table 5 and consequently the corresponding upper bounds of p_C and p_D in Table 6 maintain the upper bound reversal.

of $F_{\alpha,\beta,\varrho}(p)$ (see (16)) in terms of a superposition of $\Phi_{\mu,\sigma^2}^{-1}(\cdot)$ and $\mathcal{B}_{\alpha,\beta}^{-1}(\cdot)$, which possibly would include studying the cumulative distribution function $\Phi_{\mu,\sigma^2}\left(a\Phi_{\tilde{\mu},\tilde{\sigma}^2}^{-1}(x) + b\right)$ when $a, b \in \mathbb{R}$ and $x \in (0, 1)$.

6 Concluding remarks

As stated, this survey article gives a detailed probabilistic overview of two methods for the upper bound of default probability. The provided insights reveal the important role played by the beta-normal distribution. However, the beta-normal distribution appears to be little studied, compared to the voluminous literature for the separate normal or beta distributions. It would be of interest to get any closed-form of the inverse

7 Acknowledgments

The author is thankful to Arvydas Karbonskis for his feedback on this article's draft version and to Dirk Tasche for pointing to the reference [16] and giving several other valuable comments.

References

1. ARBENZ, P. (2013) *Bayesian Copulae Distributions, with Application to Operational Risk Management — Some Comments*. Methodology and Computing in Applied Probability 15: 105–8. <https://doi.org/10.1007/s11009-011-9224-0>.
2. BLUHM, C., WAGNER, C., OVERBECK, L. (2003) An Introduction to Credit Risk Modeling. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC.
3. BROWN, L. D., DASGUPTA, A., CAI, T. T. (2001) Interval estimation for a binomial proportion. Statistical Science 16 (2): 101–33. <https://doi.org/10.1214/ss/1009213286>.
4. CASELLA, G., BERGER, R. L. (2002) Statistical Inference. Duxbury Press, Pacific Grove.
5. CLOPPER, C. J., PEARSON, E. S. (1934) The use of confidence or fiducial limits illustrated in the case of the binomial. Biometrika 26 (4): 404–13. <https://doi.org/10.1093/biomet/26.4.404>.
6. FRENCH, C. W. (2003) The Treynor Capital Asset Pricing Model. Journal of Investment Management 1 (2): 60–72.
7. EUGENE, N., LEE, C., FAMOYE, F. (2002) Beta-Normal Distribution and Its Applications. Communications in Statistics - Theory and Methods 31 (4): 497–512. <https://doi.org/10.1081/STA-120003130>.
8. EUGENE, N., LEE, C., FAMOYE, F. (2004) Beta-Normal Distribution: Bimodality Properties and Application. Journal of Modern Applied Statistical Methods, 3. <https://doi.org/10.22237/jmasm/1083370200>.
9. GATFAOUI, H. (2007) Idiosyncratic Risk, Systematic Risk and Stochastic Volatility: An Implementation of Merton's Credit Risk Valuation. In Advances in Risk Management, 107–31. London: Palgrave Macmillan UK. https://doi.org/10.1057/9780230625846_6.
10. GUPTA, A. K., NADARAJAH, S. (2005) On the Moments of the Beta Normal Distribution. Communications in Statistics - Theory and Methods 33 (1): 1–13. <https://doi.org/10.1081/STA-120026573>.
11. GUT, A. (2009) An Intermediate Course in Probability. New York: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0162-0>.
12. LINDSAY, B. G. (1995) Mixture Models: Theory, Geometry and Applications. NSF-CBMS Regional Conference Series in Probability and Statistics 5: 1–163.
13. Inc., Wolfram Research (2022) Mathematica Online, Version 13.2. <https://www.wolfram.com/mathematica>.
14. PLUTO, K., TASCHE, D. (2006) Estimating Probabilities of Default for Low Default Portfolios. In The Basel II Risk Parameters: Estimation, Validation, and Stress Testing, 79–103. Springer, Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/3-540-33087-9_5.
15. RÊGO, L. C., CORDEIRO, G. M., CINTRA, R. J. (2012) On Some Properties of the Beta Normal Distribution. Communications in Statistics - Theory and Methods 41 (20): 3722–38. <https://doi.org/10.1080/03610926.2011.568156>.
16. TASCHE, D. (2013) Bayesian Estimation of Probabilities of Default for Low Default Portfolios. Journal of Risk Management in Financial Institutions 6 (3): 302–26.
17. XUE-KUN SONG, P. (2000) Multivariate Dispersion Models Generated from Gaussian Copula. Scandinavian Journal of Statistics 27 (2): 305–20. <https://doi.org/10.1111/1467-9469.00191>.
18. VASICEK, O. A. (1987) Probability of Loss on Loan Portfolio, San Francisco: KMV Corporation.
19. ZHANG, J., LEE, J., ZHU, F. (2008) Asset Correlation, Realized Default Correlation, and Portfolio Credit Risk. Moody's KMV Company.

Received: 18.08.2023

УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.8>

I.M. Боднарчук, к.ф.-м.н., асист.

Асимптотика м'якого розв'язку параболічного рівняння із загальною стохастичною мірою

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13.
e-mail: ibodnarchuk@knu.ua

I.M. Bodnarchuk, Ph.D., Assistant

Asymptotics of the mild solution of a parabolic equation with a general stochastic measure

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st.
e-mail: ibodnarchuk@knu.ua

Анотація. Розглянуто задачу Коші для параболічного рівняння в одновимірному просторі, керованого загальною стохастичною мірою. Доведено, що за певних умов м'який розв'язок прямує до нуля майже напевно, якщо абсолютна величина просторової змінної прямує до нескінченності.

Ключові слова: асимптотична поведінка, стохастична міра, стохастичне параболічне рівняння, м'який розв'язок, простір Бесова.

Abstract. We study the Cauchy problem for a parabolic equation on the line driven by a general stochastic measure. Under some assumptions, we prove that the mild solution tends to zero almost surely as the absolute value of the spatial variable tends to infinity.

Key Words: asymptotic behavior, stochastic measure, stochastic parabolic equation, mild solution, Besov space.

Communicated by Professor Yuliya Mishura.

1 Introduction

We continue investigation of the parabolic equation driven by a general stochastic measure. Namely, we study the asymptotic behavior of the mild solution.

Let $L_0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be the set of all real-valued random variables defined on complete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, X be a metric space and $\mathcal{B}(X)$ be a σ -algebra of Borel subsets of X . Let μ be a general stochastic measure (or simply «stochastic measure») on $\mathcal{B}(X)$, i.e. a σ -additive mapping $\mu : \mathcal{B}(X) \rightarrow L_0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (see, for example, [1, Section 7]). We do not require the fulfillment of any other assumptions except σ -additivity.

Consider the following equation

$$\begin{cases} Lu(t, x)dt + f(t, x, u(t, x))dt + \sigma(t, x)d\mu(x) = 0, \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (1)$$

where $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, μ is a general stochastic measure defined on the σ -algebra of Borel subsets

of $\mathbb{R}$, and the operator L has the form

$$Lu(t, x) = a(t) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial^2 x} + b(t) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} + c(t)u(t, x) - \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}, \quad (2)$$

where functions a, b, c are defined on the set

$$S = [0, T] \times \mathbb{R} = \{(t, x) : t \in [0, T], x \in \mathbb{R}\}.$$

The solution of equation (1) is understood in the following mild sense

$$\begin{aligned} u(t, x) = & \int_{\mathbb{R}} p(t, x; 0, y)u_0(y) dy + \\ & + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} p(t, x; s, y)f(s, y, u(s, y)) dy + \\ & + \int_{\mathbb{R}} d\mu(y) \int_0^t p(t, x; s, y)\sigma(s, y) ds. \end{aligned} \quad (3)$$

Here $p(t, x; s, y)$ is the fundamental solution of the operator L defined by (2). The integrals of random functions with respect to ds and dy are taken for each fixed ω . Some approaches to a definition of such integrals and their properties are investigated in [2]. For more details about the definition of the mild solution see [3, Chapter 6].

The existence, uniqueness and Hölder regularity of the solution of equation (3) are proved in [4].

Our aim here is to establish the conditions under which that the solution of problem (3) tends to zero almost surely as the absolute value of the spatial variable tends to infinity. The same result is presented in [5] for the heat equation. We generalize it to the case of a parabolic equation.

Boris Manikin in [6] obtained the asymptotic properties of the same parabolic equation as $t \rightarrow \infty$. The particular case of this problem (heat equation) is considered in [7].

Similar asymptotic behavior and the regularity of the mild solution of the wave equation with general stochastic measure in three-dimensional space are investigated in [8] and [9].

The heat equation with stochastic measure depending on time variable t , is considered in [10], where it was proved that the mild solution tends to zero as $|x| \rightarrow \infty$.

2 Preliminaries

Consider the Besov space $B_{22}^\alpha([b, c])$, $\alpha \in (1/2, 1)$, $b, c \in \mathbb{R}$, that is, the space of functions $g : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}$ such that the norm

$$\|g\|_{B_{22}^\alpha([b, c])} = \|g\|_{L_2([b, c])} + \left(\int_0^{c-b} (w_{2,[b, c]}(g, r))^2 r^{-2\alpha-1} dr \right)^{\frac{1}{2}},$$

is finite. Here

$$w_{2,[b, c]}(g, r) = \sup_{0 \leq h \leq r} \left(\int_b^{c-h} |g(s+h) - g(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

For any fixed $j \in \mathbb{Z}$ put

$$\Delta_{kn}^{(j)} = (j + (k-1)2^{-n}, j + k2^{-n}], \\ n \geq 0, \quad 1 \leq k \leq 2^n.$$

Let function

$$g(t, x, v) : [0, T] \times \mathbb{R} \times [j, j+1] \rightarrow \mathbb{R}$$

be such that $\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R} : g(t, x, \cdot)$ is continuous on $[j, j+1]$.

Put

$$g_n(t, x, v) = g(t, x, j) \mathbb{1}_{\{j\}}(v) + \sum_{1 \leq k \leq 2^n} g(t, x, j + (k-1)2^{-n}) \mathbb{1}_{\Delta_{kn}^{(j)}}(v).$$

Then by [11, Lemma 3.2] the stochastic function

$$\eta_j(t, x) = \int_{[j, j+1]} g(t, x, v) d\mu(v), \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R},$$

has the version

$$\tilde{\eta}_j(t, x) = \int_{[j, j+1]} g_0(t, x, v) d\mu(v) + \sum_{n \geq 1} \int_{[j, j+1]} (g_n(t, x, v) - g_{n-1}(t, x, v)) d\mu(v), \quad (4)$$

such that, for all

$$\varepsilon > 0, \quad \omega \in \Omega, \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R},$$

we get

$$|\tilde{\eta}_j(t, x)| \leq |g(t, x, j) \mu([j, j+1])| + \left\{ \sum_{n \geq 1} 2^{n\varepsilon} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} |g(t, x, j + k2^{-n}) - g(t, x, j + (k-1)2^{-n})|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \times \left\{ \sum_{n \geq 1} 2^{-n\varepsilon} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} |\mu(\Delta_{kn}^{(j)})|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

For this version we have, by [12, Theorem 1.2],

$$|\tilde{\eta}_j(t, x)| \leq |g(t, x, j) \mu([j, j+1])| + C \|g(t, x, \cdot)\|_{B_{22}^\alpha([j, j+1])} \times \left\{ \sum_{n \geq 1} 2^{-n\varepsilon} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} |\mu(\Delta_{kn}^{(j)})|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (5)$$

where $\alpha = \varepsilon/2 + 1/2$ and the sum with a stochastic measure is finite by [11, Lemma 3.1]. Note that we can choose the same version (4) for all $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, while the constant C depends on α and does not depend on j, t, x, ω .

3 Main result

The following conditions are assumed throughout the paper.

A1. Function $u_0(y) = u_0(y, \omega) : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ is measurable and bounded, namely,

$$|u_0(y, \omega)| \leq C_{u_0}(\omega).$$

A2. Function $u_0(y)$ is Hölder continuous in $y \in \mathbb{R}$, that is,

$$|u_0(y_1) - u_0(y_2)| \leq L_{u_0}(\omega) |y_1 - y_2|^{\beta(u_0)},$$

$$\beta(u_0) \geq 1/2.$$

A3. Function $f(s, y, z) : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is measurable and bounded, namely,

$$|f(s, y, z)| \leq C_f.$$

A4. Function $f(s, y, z)$ is uniformly Lipschitz in $y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$, that is,

$$|f(s, y_1, z_1) - f(s, y_2, z_2)| \leq L_f(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|).$$

A5. Function $\sigma(s, y) : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is measurable and bounded, namely,

$$|\sigma(s, y)| \leq C_\sigma.$$

A6. Function $\sigma(s, y)$ is Hölder continuous in $y \in \mathbb{R}$, namely,

$$|\sigma(s, y_1) - \sigma(s, y_2)| \leq L_\sigma |y_1 - y_2|^{\beta(\sigma)}, \quad \beta(\sigma) > 1/2.$$

A7. Fundamental solution p of the operator L is homogeneous in the space variable, namely,

$$p(t, x; s, y) = p(t, x - y; s).$$

A8. Functions $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ are continuous in $[0, T]$ and there are $\alpha > 0$, $A > 0$, $A_0 > 0$ such that

$$|a(t_1) - a(t_2)| \leq A |t_1 - t_2|^\alpha, \quad a(t_1) \geq A_0,$$

for all $t_1, t_2 \in [0, T]$.

A9. Function $|y|^\tau$ is integrable with respect to μ on $\mathbb{R}$ for some $\tau > 1/2$.

$$A10. |u_0(y)| \rightarrow 0, \quad \sup_{s \in [0, T], z \in \mathbb{R}} |f(s, y, z)| \rightarrow 0,$$

as $|y| \rightarrow \infty$.

Note that we consider the fundamental solution p of the operator L that is homogeneous in the space variable (Assumption A7). In this case coefficients a, b, c do not depend on the space variable.

If Assumption A8 holds, then according to [13, Section 4, Theorem 1] we have

$$|p(t, x; s)| \leq M(t - s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\lambda|x|^2}{t-s}}, \quad (6)$$

$$\left| \frac{\partial p(t, x; s)}{\partial x} \right| \leq M(t - s)^{-1} e^{-\frac{\lambda|x|^2}{t-s}}, \quad (7)$$

where λ and M are positive constants.

The symbols C and $C(\omega)$ denote nonrandom and random constants which can vary from line to line.

Theorem 3.1. Suppose Assumptions A1–A10 hold. Then the solution of equation (3) has a version $u(t, x)$ such that for all $t \in [0, T]$, $\omega \in \Omega$,

$$|u(t, x)| \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Proof. According to [4, Theorem], under Assumptions A1–A7 for all $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}$, equation (3) has the unique solution $u(t, x)$.

We have

$$|u(t, x)| \leq \left| \int_{\mathbb{R}} p(t, x - y; 0) u_0(y) dy \right| +$$

$$+ \left| \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} p(t, x - y; s) f(s, y, u(s, y)) dy \right| +$$

$$+ \left| \int_{\mathbb{R}} d\mu(y) \int_0^t p(t, x - y; s) \sigma(s, y) ds \right| =$$

$$= I_1(t, x) + I_2(t, x) + I_3(t, x). \quad (8)$$

Now each of terms is treated separately. First consider the integral with respect to stochastic measure. Put

$$h(t, x, y) = \int_0^t p(t, x - y; s) \sigma(s, y) ds,$$

then

$$I_3(t, x) \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \int_{(j, j+1]} h(t, x, y) d\mu(y) \right|.$$

Let arbitrary $j \in \mathbb{Z}$, $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}$, be fixed. Then the random function

$$\eta_j(t, x) = \int_{(j, j+1]} h(t, x, y) d\mu(y)$$

has a version (4) that admits estimate (5). This version is denoted by the same symbol η . Thus, for any $\alpha \in (1/2, 1)$, we have

$$|\eta_j(t, x)| \leq |h(t, x, j) \mu([j, j+1])| +$$

$$+ C \|h(t, x, \cdot)\|_{B_{22}^{\alpha}([j, j+1])} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{n \geq 1} 2^{-n\epsilon} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} |\mu(\Delta_{kn}^{(j)})|^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

and

$$I_3(t, x) \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\eta_j(t, x)| \leq J_1(t, x) + J_2(t, x), \quad (9)$$

where

$$J_1(t, x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |h(t, x, j) \mu([j, j+1])|,$$

$$J_2(t, x) = C \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|h(t, x, \cdot)\|_{B_{22}^\alpha([j, j+1])} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{n \geq 1} 2^{-n\varepsilon} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} |\mu(\Delta_{kn}^{(j)})|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Consider the first term from (9). Get

$$J_1(t, x) \leq \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} (1 + |j|)^{-2\tau} |h(t, x, j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} (1 + |j|)^{2\tau} |\mu([j, j+1])|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = F_1 \cdot F_2.$$

By Assumption A8 for $\tau > 1/2$ according to [11, Lemma 3.1] for function $(1 + |j|)^\tau \mathbb{1}_{(j, j+1]}(y)$ we obtain that $F_2 < +\infty$ a.s. And we can assume $u(t, x) = 0$ on the set of ω such that $F_2 = +\infty$.

Further, by Assumptions A5, A7 and upper bound (6) we have

$$|h(t, x, j)| \leq C_\sigma \int_0^t |p(t, x - j; s)| ds \leq$$

$$\leq C_\sigma M \int_0^t (t - s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\lambda|x-j|^2}{t-s}} ds \leq$$

$$\leq 2C_\sigma M \sqrt{t} \leq C. \quad (10)$$

Due to the fact $\sum_{j \in \mathbb{Z}} (1 + |j|)^{-2\tau} < +\infty$, we conclude that F_1 is bounded. Moreover, by estimates from (10) we obtain, for any fixed $j \in \mathbb{Z}$,

$$h(t, x, j) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Thus by the Lebesgue's dominated convergence theorem we get

$$F_1 \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Consequently,

$$J_1(t, x) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Now we consider term $J_2(t, x)$. For it, we have

the following result.

$$J_2(t, x) \leq C \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left[\|h(t, x, \cdot)\|_{L_2([j, j+1])} + \right.$$

$$\left. + \left(\int_0^1 (w_{2, [j, j+1]}(h, r))^2 r^{-2\alpha-1} dr \right)^{\frac{1}{2}} \right] \times$$

$$\times \left\{ \sum_{n \geq 1} 2^{-n\varepsilon} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} |\mu(\Delta_{kn}^{(j)})|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= C \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|h(t, x, \cdot)\|_{L_2([j, j+1])} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{n \geq 1} 2^{-n\varepsilon} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} |\mu(\Delta_{kn}^{(j)})|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ C \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\int_0^1 (w_{2, [j, j+1]}(h, r))^2 r^{-2\alpha-1} dr \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{n \geq 1} 2^{-n\varepsilon} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} |\mu(\Delta_{kn}^{(j)})|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq C J_{21}(t, x) + C J_{22}(t, x).$$

Here

$$J_{21}(t, x) =$$

$$= \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} (1 + |j|)^{-2\tau} \|h(t, x, \cdot)\|_{L_2([j, j+1])}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} (1 + |j|)^{2\tau} \sum_{n \geq 1} 2^{-n\varepsilon} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} |\mu(\Delta_{kn}^{(j)})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= D_1 \cdot D_2,$$

and

$$J_{22}(t, x) = \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} (1 + |j|)^{-2\tau} \times \right.$$

$$\times \left. \left(\int_0^1 (w_{2, [j, j+1]}(h, r))^2 r^{-2\alpha-1} dr \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} (1 + |j|)^{2\tau} \sum_{n \geq 1} 2^{-n\varepsilon} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} |\mu(\Delta_{kn}^{(j)})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= D_3 \cdot D_2.$$

Firstly, estimate the L_2 -norm of function $h(t, x, \cdot)$ for fixed parameters (t, x) . We have from (10), for any $j \in \mathbb{R}$,

$$\|h(t, x, \cdot)\|_{L_2([j, j+1])} = \left(\int_j^{j+1} |h(t, x, y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq C \sqrt{t},$$

hence,

$$\|h(t, x, \cdot)\|_{L_2([j, j+1])} \rightarrow 0, |x| \rightarrow \infty.$$

We obtain that series D_1 converges and tends to 0 as $|x|$ tends to ∞ .

On the other hand, by [11, Lemma 3.1] series D_2 is bounded almost surely. Here we use Lemma 3.1 for functions

$$g_j(y) = 2^{-\frac{n\epsilon}{2}} (1+|j|)^\tau \mathbb{1}_{\Delta_{kn}^{(j)}}(y), j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, k = \overline{1, n}. \text{ we can similarly to (11) conclude that}$$

We can put $u(t, x) = 0$ on the set $\{D_2 = +\infty\}$.

Thus,

$$J_{21}(t, x) \rightarrow 0, |x| \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Further we estimate function $w_{2, [j, j+1]}(h, r)$, for $r \in [0, 1]$, and term $J_{22}(t, x)$. Let $v \in [0, r]$, we have

$$\begin{aligned} & |h(t, x, y+v) - h(t, x, y)| = \\ & = \left| \int_0^t p(t, x-y-v; s) \sigma(s, y+v) ds - \right. \\ & \quad \left. - \int_0^t p(t, x-y; s) \sigma(s, y) ds \right| \leq \\ & \leq \int_0^t |p(t, x-y-v; s)| |\sigma(s, y+v) - \sigma(s, y)| ds + \\ & + \left| \int_0^t (p(t, x-y-v; s) - p(t, x-y; s)) \sigma(s, y) ds \right| = \\ & = \tilde{J}_1(t, x) + \tilde{J}_2(t, x). \end{aligned}$$

Next we use Assumption A6 and estimate (6) to conclude

$$\begin{aligned} \tilde{J}_1(t, x) & \leq L_\sigma v^{\beta(\sigma)} \int_0^t M(t-s)^{-1/2} e^{-\frac{\lambda|x-y-v|^2}{t-s}} ds \leq \\ & \leq C v^{\beta(\sigma)}. \end{aligned}$$

Moreover, similarly to (11) we obtain

$$\tilde{J}_1(t, x) \rightarrow 0, |x| \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Also, by A5 and (7),

$$\begin{aligned} & \tilde{J}_2(t, x) = \\ & = \left| \int_0^t \int_y^{y+v} \frac{\partial p(t, x-w; s)}{\partial w} \sigma(s, y) dw ds \right| \leq \\ & \leq C_\sigma \int_0^t \int_y^{y+v} M(t-s)^{-1} e^{-\frac{\lambda|x-w|^2}{t-s}} dw ds. \end{aligned}$$

According to upper bound (11) from [4] by A5 we get

$$\tilde{J}_2(t, x) \leq C v^\gamma,$$

for any $\gamma \in (0, 1)$, where constant C depends on γ, M, λ and T .

Taking into account the representation

$$\begin{aligned} \tilde{J}_2(t, x) & \leq \int_0^t |p(t, x-y-v; s) \sigma(s, y)| ds + \\ & + \int_0^t |p(t, x-y; s) \sigma(s, y)| ds \leq C, \end{aligned}$$

$$\tilde{J}_2(t, x) \rightarrow 0, |x| \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Recall that $v, \gamma \in (0, 1)$ and $\beta(\sigma) > 1/2$.

Thus,

$$|h(t, x, y+v) - h(t, x, y)| \leq C v^{\alpha_1},$$

where $\alpha_1 = \min\{\beta(\sigma), \gamma\}$. Since $\gamma \in (0, 1)$ is arbitrary, the last estimate is correct for any $\alpha_1 \leq \beta(\sigma)$.

Therefore,

$$\begin{aligned} & w_{2, [j, j+1]}(h, r) = \\ & = \sup_{0 \leq v \leq r} \left(\int_j^{j+1-v} |h(t, x, y+v) - h(t, x, y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq \sup_{0 \leq v \leq r} \left(C |1-v| v^{2\alpha_1} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C r^{\alpha_1}. \end{aligned}$$

Hence there exists $\alpha \in (1/2, 1)$ such that $1/2 < \alpha < \alpha_1 \leq \beta(\sigma)$ and

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (w_{2, [j, j+1]}(h, r))^2 r^{-2\alpha-1} dr \leq \\ & \leq \int_0^1 C r^{-2\alpha-1} r^{2\alpha_1} dr = C \frac{r^{2(\alpha_1-\alpha)}}{2(\alpha_1-\alpha)} \Big|_0^1 \leq C, \end{aligned}$$

where C depends on $\beta(\sigma)$.

On the other hand, due to convergences (13) and (14), by the Lebesgue's dominated convergence theorem we conclude

$$\int_0^1 (w_{2, [j, j+1]}(h, r))^2 r^{-2\alpha-1} dr \rightarrow 0, |x| \rightarrow \infty.$$

Consequently,

$$E_1 \rightarrow 0, |x| \rightarrow \infty,$$

and similarly to (12) we get

$$J_{22}(t, x) \rightarrow 0, |x| \rightarrow \infty,$$

and the same result is fulfilled for $J_2(t, x) = J_{21}(t, x) + J_{22}(t, x)$. That is why we have

$$I_3(t, x) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Consider another terms of (8). For an arbitrary $y_0 \in \mathbb{R}_+$, we have

$$\begin{aligned} I_2(t, x) &\leq \\ &\leq \left| \int_0^t ds \int_{|y| \leq y_0} p(t, x - y; s) f(s, y, u(s, y)) dy \right| + \\ &+ \left| \int_0^t ds \int_{|y| > y_0} p(t, x - y; s) f(s, y, u(s, y)) dy \right| = \\ &= I_{21}(t, x) + I_{22}(t, x). \end{aligned}$$

By Assumption A9 for any $\varepsilon > 0$ there exists $y_0 \in \mathbb{R}_+$, such that

$$\sup_{s \in [0, T], z \in \mathbb{R}} |f(s, y, z)| < \varepsilon, \quad \forall |y| > y_0.$$

Let fix this y_0 . Since

$$\int_{\mathbb{R}} |p(t, x - y; s)| dy \leq C,$$

where C depends on M, λ from (6), and on T (see [4, estimate (7)]), we can conclude that

$$I_{22}(t, x) \leq \varepsilon t \leq \varepsilon T.$$

Список використаних джерел

1. *Kwapień S.* Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple / S. Kwapień, W. A. Woyczyński – Boston: Birkhäuser, 1992. – 360 p.
2. *Radchenko V.N.* On a definition of the integral of a random function / V.N. Radchenko // Theory of Probability and its Applications. – 1997. – Vol. 41, no. 3. – P. 597–601.
3. *Da Prato G., Zabczyk J.* Stochastic Equations in Infinite Dimensions / G. Da Prato, J. Zabczyk // Encyclopedia Math. Appl. – Vol. 45. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992. – 454 p.
4. *Bodnarchuk, I.M.* Regularity of the Mild Solution of a Parabolic Equation with Stochastic Measure / I.M. Bodnarchuk // Ukrainian Mathematical Journal. – 2017. – Vol. 69, no. 1. – P. 1–18.
5. *Боднарчук І.М.* Асимптотична поведінка розв'язку рівняння теплопровідності зі

Further by the Lebesgue's dominated convergence theorem we get

$$I_{21}(t, x) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Here we use the estimates

$$\begin{aligned} |p(t, x - y; s) f(s, y, u(s, y))| &\leq \\ &\leq C_f M (t - s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\lambda |x - y|^2}{t - s}} \end{aligned}$$

(obtained by inequality (6) and Assumption A3) and

$$e^{-\frac{\lambda |x - y|^2}{t - s}} \leq e^{-\frac{\lambda |y_0 - y|^2}{t - s}}, \quad |x| \geq y_0,$$

and also the arguments similar to those applied in the inequality (11).

Thus we obtain that $I_2(t, x)$ tends to zero as $|x| \rightarrow \infty$.

The same arguments and condition A10 for function u_0 give us convergence

$$I_1(t, x) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

As the result, we get the statement of our Theorem.

стохастичною мірою / І.М. Боднарчук, В.М. Радченко // Науковий вісник Чернівецького нац. ун-ту. Математика. – 2012. – Т. 2, № 1. – С. 7–11.

6. *Manikin B.* Asymptotic properties of the parabolic equation driven by stochastic measure / B. Manikin // Modern Stochastics: Theory and Applications. – 2022. – Vol. 9, no. 4. – P. 483–498.
7. *Радченко В.М.* Асимптотична поведінка розв'язку рівняння теплопровідності зі стохастичною мірою при $t \rightarrow \infty$ / В.М. Радченко // Науковий вісник УжНУ. Серія: Математика і інформатика. – 2012. – Вип. 23, № 1. – С. 119–124.
8. *Боднарчук І.* Асимптотика м'якого розв'язку хвильового рівняння у тривимірному просторі, керованого загальною стохастичною мірою / І. Боднарчук // Вісник Київського університету імені Тараса Шевченка. Вісник КНУ імені Тараса Шевченка.

Серія: фізико-математичні науки. – 2019. – № 4. – С. 12–17.

9. Bodnarchuk I.M., Radchenko V.M. The wave equation in the three-dimensional space driven by a general stochastic measure / I.M. Bodnarchuk, V.M. Radchenko // *Theory of Probability and Mathematical Statistics*. – 2020. – 100. – P. 43–60.
10. Боднарчук І. Асимптотична поведінка м'якого розв'язку стохастичного рівняння теплопровідності / І. Боднарчук // Вісник Київського університету імені Тараса Шевченка. Математика і механіка. – 2016. – № (2) 36. – С. 40–42.
11. Radchenko V. Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure / V. Radchenko // *Studia Mathematica*. – 2009. – Vol. 194, no. 3. – P. 231–251.
12. Kamont A. A discrete characterization of Besov spaces // *Approx. Theory Appl. (N.S.)* – 1997. – Vol. 13, no. 2. – P. 63–77.
13. Ilyin A.M., Kalashnikov A.S., Oleynik O.A. Linear second-order partial differential equations of the parabolic type / A.M. Ilyin, A.S. Kalashnikov, O.A. Oleynik // *J. Math. Sci.* – 2002. – Vol. 108, no. 4. – P. 435–542.

References

1. KWAPIEŃ, S. and WOYCZYŃSKI, W.A. (1992) *Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple*. Boston: Birkhäuser.
2. RADCHENKO, V.N. (1997) On a definition of the integral of a random function, *Theory of Probability and its Applications*. 41 (3). p. 597–601.
3. DA PRATO, G. and ZABCZYK, J. Stochastic Equations in Infinite Dimensions. *Encyclopedia Math. Appl.* 45 – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.
4. BODNARCHUK, I.M. (2017) Regularity of the Mild Solution of a Parabolic Equation with Stochastic Measure. *Ukrainian Mathematical Journal*. 69 (1). p. 1–18.
5. BODNARCHUK, I.M. & RADCHENKO, V.M. (2012) Asymptotic behavior of a solution of the heat equation with general stochastic measure. *Scientific Herald of Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University. Series: mathematics*. 2 (1), p. 7–11.
6. MANIKIN, B. (2022) Asymptotic properties of the parabolic equation driven by stochastic measure. *Modern Stochastics: Theory and Applications*. 9 (4). p. 483–498.
7. RADCHENKO, V.M. (2012) Asymptotic behavior of a solution for the heat equation with a stochastic measure as $t \rightarrow \infty$. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*. 23 (1). p. 119–124.
8. BODNARCHUK, I. (2019) Asymptotics of the mild solution of a wave equation in three-dimensional space driven by a general stochastic measure. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics*. no. 4. p. 12–17.
9. BODNARCHUK, I.M. & RADCHENKO, V.M. (2020) The wave equation in the three-dimensional space driven by a general stochastic measure *Theory of Probability and Mathematical Statistics*. 100. p. 43–60.
10. BODNARCHUK, I. (2016) Asymptotic behavior of a mild solution of the stochastic heat equation. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Maths. Mechanics*. no. (2) 36, p. 40–42.
11. RADCHENKO, V. (2009) Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure. *Studia Mathematica*. 194 (3). p. 231–251.
12. KAMONT, A. (1997) A discrete characterization of Besov spaces. *Approx. Theory Appl. (N.S.)*. 13 (2). p. 63–77.
13. ILYIN, A.M., KALASHNIKOV, A.S. and OLEYNIK, O.A. (2002) Linear second-order partial differential equations of the parabolic type. *J. Math. Sci.* 108 (4). p. 435–542.

Received: 18.08.2023

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ,
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА
ТА МЕХАНІКА**

УДК 532.516

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.9>

Батутіна Т.Я.¹
Олійник В.Н.², к.ф.-м.н., с.н.с.

T.Ya. Batutina¹
V.N. Oliynik², Ph.D. (Phys.-Math.), Senior Resch.

**Напівемпіричне оцінювання акустичних
навантажень на головну частину ракети
при нестандартній конфігурації
стартових споруд**

**Semiempirical assessment
of acoustic loads on the rocket head
with a non-standard configuration
of launch facilities**

¹Державне підприємство «Конструкторське
бюро «Південне» ім. М. К. Янгеля»,
49008, м. Дніпро, вул. Криворізька, 3,
e-mail: tatanabatutina46@gmail.com

¹M. K. Yangel State Design Bureau "Pivdenne",
49008, Dnipro, Kryvorizka str., 3,
e-mail: tatanabatutina46@gmail.com

²Інститут гідромеханіки НАН України,
03057, м. Київ, вул. Марії Капніст, 8/4,
e-mail: v_oliynik@yahoo.com

² Institute of Hydromechanics of NAS of Ukraine,
03057, Kyiv, Marii Kapnist str., 8/4,
e-mail: v_oliynik@yahoo.com

Обговорено результати розрахунку акустичних навантажень на поверхні стартуючої ракети, отримані за допомогою напівемпіричної методики NASA SP-8072 для стартової позиції, розташованої над акваторією водойми. До особливостей стартових споруд належать зменшена довжина газоходу й наявність клиновидного газодинамічного дефлектора, розділеного на два симетричні протилежно спрямовані схили. При розрахунках бралася до уваги можливість обмеження довжини ламінарного ядра реактивного струменя під час злету за рахунок взаємодії з дефлектором. Вперше у вітчизняній практиці використано скореговану залежність для розподілу загальної акустичної енергії уздовж надзвукового струменя. Дано оцінку внесків джерел звуку, пов'язаних з різними ділянками струменя, та акустичного відбиття від поверхні води в залежності від висоти підйому ракети. Відзначено суттєву залежність результуючого акустичного поля в околі головної частини ракети від довжини горизонтальної ділянки газоходу.

Ключові слова: акустичні навантаження, надзвуковий реактивний струмінь, стартові споруди, напівемпірична методика.

The paper deals with assessing the acoustic loads on the surface of a launching rocket obtained using the semiempirical technique NASA SP-8072 adapted for a launch pad located above the water area. The features of the launch facilities include the reduced length of the gas duct and the presence of a wedge-shaped gas-dynamic deflector divided into two symmetrical oppositely directed slopes. The calculations are made with the allowance for the limited length of the rocket jet's laminar core during take-off due to interaction with the gas-dynamic deflector. A corrected dependence is used for the overall acoustic energy distribution along the supersonic jet for the first time in domestic practice. The contributions of the sound sources associated with different jet sections and acoustic reflection from the water surface are assessed, depending on the current height of the rocket lift. A significant dependence of the resulting acoustic field around the rocket head on the length of the horizontal section of the gas duct is noted.

Key Words: acoustic loads, supersonic jet, launch facilities, semiempirical technique.

Статтю представив член-кореспондент НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Хоча ракети космічного призначення й належать до найпотужніших джерел звуку, на його генерацію витрачається лише мала частка кінетичної енергії газодинамічного потоку [1].

Тому для опису результуючого звукового поля необхідно знати «тонку» структуру нестационарних вихрових полів у газодинамічних струменях при ламінарно-турбулентному переході, формуванні шарів змішування, внески яких превалюють в акустичному випромінюванні

двигунів реальних ракет. При таких розрахунках альтернативою прямому чисельному моделюванню стали напівемпіричні методи, які спираються на універсальні розподіли характеристик акустичних джерел, отримані в експериментах. Вони невибагливі до залучених обчислювальних потужностей і забезпечують прийнятну для інженерних потреб точність результатів.

У цьому дослідженні обговорюються результати, отримані за допомогою методики NASA SP-8072 [2] для стартової платформи, призначеної для старту ракети з акваторії водойми. Процес поширення звуку моделюється на основі підходу геометричної акустики.

Геометрія задачі

Розглянемо модельну геометрію стартового комплексу, створеного для виводу на орбіту ракети-носія космічного призначення (рис. 1).

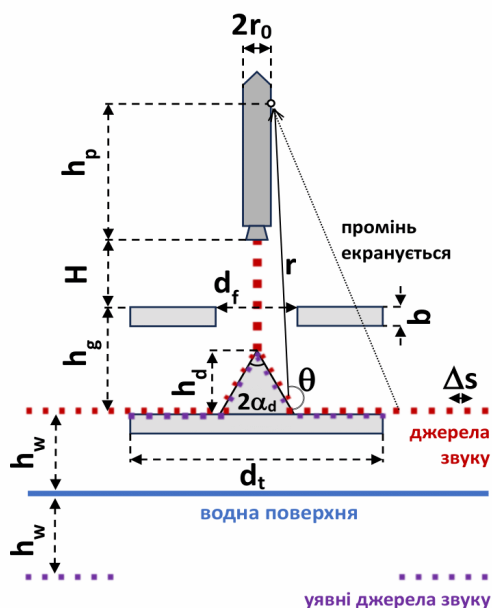


Рис. 1 Конфігурація стартового комплексу

Він складається зі startової платформи довжиною $d_l = 8$ м або 16 м, розміщеної на висоті $h_w = 10$ м над урізом води. Усі конструкції складаються з акустично жорстких плит товщиною $b = 0.5$ м. Усередині платформи влаштовано наскрізний горизонтальний канал для відведення газів реактивного струменя, розташований таким чином, що відстань від поверхні startового стола до дна газоходу становить $h_g = 5$ м. Для входу реактивного струменя в газохід у startовому столі влаштовано вогневу

пройму шириною $d_f = 3.6$ м. Під час злету центральна вісь ракети проходить через центр вогневої пройми, а вихідний зріз її сопла в початковий момент співпадає з площиною стартового стола (H – поточна висота підйому над стартовим столом). Для здійснення повороту факела реактивного струменя по центру дна газоходу розміщено газодинамічний дефлектор, поперечний переріз якого має вигляд рівнобедреного трикутника висотою $h_d = 3$ м з кутом розхилу $2\alpha_d = 60^\circ$ при вершині. Набігаючи на дефлектор, потік розділяється на два однакові «рукави», які виходять з бічних отворів газоходу в вигляді протилежно напрямлених горизонтальних «хвостів». Водну поверхню вважаємо горизонтальною необмеженою та ідеально відбиваючою, а можливим хвилюванням нехтуємо.

Точка спостереження P розташована на корпусі ракети. Її азимут співпадає з одним із «хвостів» реактивного струменя. У поздовжньому напрямку вона віддалена від зрізу сопла на відстань $h_p = 17$ м. Нехай діаметр циліндричної частини ракети становить $d_0 = 2r_0 = 2.4$ м, а вихідний діаметр сопла – $d_e = 1.5$ м. Для розв'язання акустичної задачі нам знадобляться такі характеристики реактивного рушія на зрізі сопла: тяга $N = 2000$ кН, швидкість витікання реактивних газів $v_e = 2600$ м/с та число Маха $M_e = 3.3$.

Розрахункова схема

В основі методики SP-8072 [2] лежить ідея заміни акустично активної ділянки реактивного струменя набором дискретних джерел звуку з певними характеристиками. Вони розташовані на осі основного потоку та моделюють випромінювання циліндричних осьових перерізів довжиною Δs , як показано на рис. 1.

Інтегральний рівень акустичної потужності W_{OA} відносно стандартного порогу 10^{-12} Вт у децибелах (дБ) обчислюють як

$$L_W = 10 \lg \frac{W_{OA}}{10^{-12}} = 10 \lg \left[\frac{\eta}{2} N v_e \right] + 120.$$

де η – коефіцієнт акусто-газодинамічної ефективності. Зважаючи на теоретичну оцінку акустичної ефективності турбулентного примежового шару надзвукового потоку з числами Маха $M > 2$ [1], покладемо $\eta = 0.6\%$.

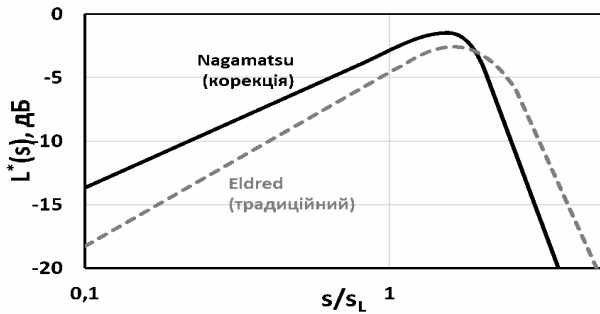


Рис. 2 Традиційний і скорегований розподіли акустичної енергії струменя по довжині

Оскільки акустична енергія

$$L^*(s) = 10 \lg \left[\frac{s_L W(s)}{W_{OA}} \right],$$

розподіляється вздовж осі реактивного струменя згідно з універсальною залежністю рис. 2а, то для точкового джерела s маємо

$$L_{W,s} = L^*(s) + L_W + 10 \lg \frac{\Delta s}{s_L}.$$

Тут s_L – довжина ламінарного ядра, тобто максимальна відстань від зрізу сопла, на якій ще залишається ламінарною приосьова частина основного потоку. Відповідно до методичних вказівок [2] її оцінюють так:

$$s_L = 3.45 d_e (1 + 0.38 M_e)^2.$$

Під час старту можливе руйнування вершини ламінарного ядра за рахунок взаємодії набігаючого струменя з елементами стартових споруд. У цих випадках замість повної довжини ядра s_L використовують редуковану [3].

Поздовжній розмір акустично активної частини струменя становить $5s_L$, а максимум випромінювання спостерігається при $\sim 1.5s_L$, де відбувається найбільш інтенсивна турбулізація в шарі змішування [2]. У розрахунки закладався скорегований тренд (див. рис. 2), який наразі вважається еталонним [4].

Спектрально частотні властивості акустичного випромінювання реактивного струменя підпорядковуються відомій автомоделній залежності [2] від модифікованого числа Струхала $St' = St c_e / c_a$:

$$L^{**}(St') = 10 \lg \left[\frac{W(f, s) v_e c_a}{W(s) s c_e} \right].$$

Тут f – частота; s – координата джерела вздовж струменя; $St = fs / v_e$ – осьове число Струхала; c_e і c_a – швидкості звуку в газі на

зрізі сопла та навколишньому середовищі відповідно. Тоді акустична потужність джерела s у частотній смузі з центральною частотою f_b й шириною Δf_b буде

$$L_{W,s,b} = L^{**}(St') + L_{W,s} + 10 \lg St' + 10 \lg \frac{\Delta f_b}{f_b}.$$

Знання частотно-просторового розподілу потужності й характеру спрямованості випромінювання від кожного s -ого дискретного джерела звуку дозволяє знайти згенеровані ним акустичні навантаження в довільній точці спостереження P :

$$SPL_{s,b,p} = L_{W,s,b} + DI(f, s, \theta) - 10 \lg(4\pi r^2).$$

Тут $DI(f, s, \theta)$ – функціональний вираз для діаграми спрямованості; r – відстань від джерела до точки спостереження; θ – кут між напрямком основного потоку й напрямком на точку спостереження. При розрахунках було обрано модельну діаграму спрямованості Plotkin, для якої розроблено зручне апроксимаційне співвідношення, представлене в [5].

Рівень звуку для некорельованого шуму від усього реактивного струменя, зосереджений у частотній смузі з центральною частотою f_b , буде

$$SPL_{b,p} = 10 \lg \left[\sum_s 10^{SPL_{s,b,p}/10} \right].$$

Загальний рівень звуку OASPL знайдемо підсумовуючи внески всіх частотно смугових рівнів.

При наявності на шляху відповідного променя екрануючих поверхонь вважається, що він не дає внеску в акустичне поле в точці P . Присутність відбиваючих поверхонь моделюють за рахунок уведення відповідних уявних джерел, якщо дозволяє конфігурація системи (див. рис. 1).

Числові результати

На рис. 3 показано залежність загального рівня акустичних навантажень у точці спостереження P від висоти підйому ракети H , а також компоненти акустичних навантажень від окремих зон струменя для стартової платформи довжиною $d_t = 8$ м.

При малих висотах підйому в акустичних навантаженнях превалюють внески від частини струменя, що знаходиться в газоході, горизонтальних «хвостів» і відбитого від води поля. Водночас при $H < 15$ м роль незбуреної частини струменя незначна. Вона поступово

зростає і домінує, починаючи з $H = 20$ м. Надалі рівень загальних акустичних навантажень поступово виходить на асимптотичне значення.

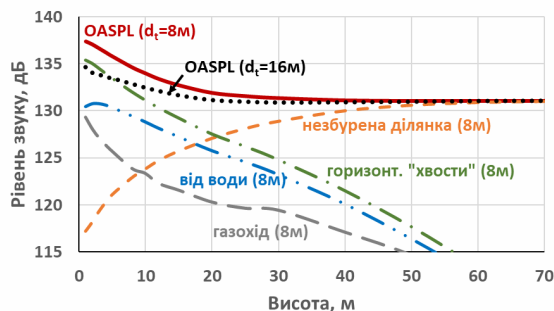


Рис. 3 Рівні акустичних навантажень (OASPL) в точці спостереження при $d_t = 8$ м і 16 м

Для довшого газоходу спостерігається істотне зниження рівнів акустичних навантажень, особливо при $H < 10$ м, де різниця може досягати 3 дБ (чорна пунктирна крива на рис. 3). У цьому випадку конструкції більш ефективно екранують випромінювання від зони максимальної турбулізації реактивного струменя

при $H < 15$ м, знижуючи внесок відхилених «хвостів» (за браком місця вони не наведені).

Висновки

За допомогою напівемпіричного методу SP-8072 виконано розрахунок акустичних навантажень при старті ракети-носія з надводної платформи, обладнаної симетричним клиновидним дефлектором і газоходом з двома протилежно спрямованими виходами.

Спершу в акустичних навантаженнях домінують внески відхилених горизонтально «хвостів» реактивного струменя. Зі збільшенням висоти підйому їхня роль поступово зменшується, а на передній план виходить випромінювання від незбуреної частини струменя. Головну роль у зниженні стартових рівнів звуку поблизу головної частини ракети відіграє довжина газоходу. Ключова вимога до його конфігурації – область максимального акустичного випромінювання від реактивного струменя має якомога довше знаходитись усередині газовідвідного каналу.

Список використаних джерел

1. Ffowcs Williams J.E. The noise from turbulence convected at high speed / J. E. Ffowcs Williams // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A.* – 1963. – vol. 255, № 1061. – P. 469-503.
2. Eldred K. M. Acoustic loads generated by the propulsion system: TR NASA-SP-8072. Washington, DC: NASA, 1971. – 49 p.
3. Haynes J. Modifications to the NASA SP-8072 distributed source method II for Ares I lift-off environment predictions / J. Haynes, R. Kenny // *15th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (30th AIAA Aeroacoustics Conference)*, Miami, FL. – 2009. – 35 p.
4. Gee K.L. A tale of two curves and their influence on rocket and supersonic jet noise research / K. L. Gee // *The Journal of the Acoustical Society of America.* – 2021. – vol. 194, № 4. – P. 2159-2162.
5. Smith W.O.III. An empirical and computational investigation into the acoustical environment at the launch of a space vehicle / W. O. Smith, III. – Auburn, AL: Auburn University, 2013 – 302 p.

References

1. Ffowcs Williams, J. E. (1963) The noise from turbulence convected at high speed. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A.* 255 (1061). pp. 469-503.
2. Eldred, K. M. (1971) *Acoustic loads generated by the propulsion system* (TR NASA-SP-8072). Washington, DC: NASA.
3. Haynes, J. & Kenny, R. (2009) Modifications to the NASA SP-8072 distributed source method II for Ares I lift-off environment predictions. In *15th AIAA/CEAS Aeroacoust. Conf. (30th AIAA Aeroacoust. Conf.)*, Miami: AIAA. 35 p.
4. Gee, K. L. (2021) A tale of two curves and their influence on rocket and supersonic jet noise research. *The Journal of the Acoustical Society of America.* 149 (4). pp. 2159-2162.
5. Smith, W. O. III. (2013) *An empirical and computational investigation into the acoustical environment at the launch of a space vehicle* (PhD thesis). Auburn, AL: Auburn University.

Надійшла до редколегії 08.08.23

УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.10>

Борисейко О. В., к.ф.-м.н., доц.
Гусак В. О., аспірант
Маципура В. Т., д.ф.-м.н., проф.

Використання комбінацій двох варіантів спряження хвильових полів в методі часткових областей

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03127, м. Київ, пр-т. Акад.
Глушкова, 4-е
e-mail: gusakw7@gmail.com

Boryseiko O. V., PhD (Phys.-Math.)
Husak V. O., PhD student
Matsypura V. T., Dr.Sci. (Phys.-Math.)

Using combinations of two options of wave fields conjugation in the method of partial domains

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03127, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e
e-mail: gusakw7@gmail.com

В роботі досліджено можливість використання комбінацій двох варіантів спряження хвильових полів (поточкового спряження та середньоквадратичного наближення) в методі часткових областей на прикладі розв'язання задачі про випромінювання поршня в скінченний клинуватий хвиловод. Показано, що варіант використання середньоквадратичного наближення є найкращим, в той час як використання поточкового спряження полів в цілому спрощує розрахунок задачі. Вибір необхідної комбінації розрахунку залежить від того, яка задача розглядається, можлива ситуація коли саме комбінований варіант розрахунку може призвести до кращого розв'язку задачі з точки зору виконання закону збереження енергії чи умов зшивання полів.

Ключові слова: Метод часткових областей, середньоквадратичне наближення, поточкове спряження полів, скінченний клинуватий хвиловод.

The paper investigates the possibility of using combinations of two options of wave fields conjugation (the conjugation by points and the root mean square approximation) in the method of partial domains using the example of solving the problem of piston radiation in a finite wedge-shaped waveguide. It is shown that the option of using the root mean square approximation is the best, while the use of the conjugation by points of fields generally simplifies the calculation of the problem. The choice of the required calculation combination depends on the problem under consideration, and it is possible that the combined calculation option may lead to a better solution to the problem in terms of fulfilling the law of energy conservation or field conjugation conditions.

Key Words: Partial domains method, root mean square approximation, conjugation by points, finite wedge-shaped waveguide.

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н, проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Метод часткових областей отримав широке застосування в задачах акустики, в котрих досліджуються звукові поля в складних, неканонічних областях [1]. Ідея методу полягає в розділенні складної області існування хвильового поля на прості області, прості в тому сенсі, що в кожній з них можна побудувати загальний розв'язок рівняння Гельмгольца. Такі розв'язки описують звукові поля в часткових областях при довільних граничних умовах на їх границях. Далі виникає потреба спряження по-

лів в часткових областях на границях цих областей. Реалізація граничних умов призводить до функціональних рівнянь з невідомими коефіцієнтами, які є амплітудними коефіцієнтами мод у часткових областях. Для визначення таких амплітудних коефіцієнтів мод слід перейти від функціональних рівнянь до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка надалі розв'язується методом редукції. Перехід до лінійної системи алгебраїчних рівнянь спирається на побудовані загальні розв'язки рів-

няння Гельмгольца в часткових областях. Загальний розв'язок передбачає наявність у ньому повної та ортогональної системи функцій, завдяки якій можна записати у вигляді ряду Фур'є будь-яку (розумну з фізичної точки зору) функцію. Використовуючи ортогональність цього набору функцій, можна отримати систему алгебраїчних рівнянь. Про цю процедуру говорять як про наближення функцій у розумінні мінімальності середньоквадратичного відхилення. Труднощі можуть виникнути в ситуації, коли для запису хвильових полів у часткових областях доводиться використовувати декілька (причому, найчастіше, різних) систем координат. Як результат, при переході до системи алгебраїчних рівнянь можуть виникати складні інтеграли.

Інший варіант переходу до системи алгебраїчних рівнянь полягає в прирівнюванні функцій (полів у суміжних часткових областях) в скінченному наборі точок (назвемо їх вузловими точками) на межі цих областей. Кількість вузлових точок на границі визначає порядок системи рівнянь і тим самим кількість шуканих амплітудних коефіцієнтів мод у часткових областях. Як бачимо, такий підхід не містить обчислювальних проблем.

В статті [2] розглянуто використання двох варіантів переходу до системи алгебраїчних рівнянь на прикладі розв'язання задачі про випромінювання поршня в нескінченний клинуватий хвильовод. Продовжуючи цю тему, в даній роботі розглядається задача з більш складною геометрією області існування звукового поля (скінчений клинуватий хвильовод) та використовуються різні комбінації поточкового спряження хвильових полів та середньоквадратичного наближення. Можливість використання комбінації двох підходів до спряження полів на межах часткових областей робить метод часткових областей більш гнучким при побудові загального розв'язку задачі.

2. Постановка і розв'язання задачі

Розглядається плоска задача про випромінювання поршня в скінченному клинуватому хвильоводі (рис. 1). Поршень здійснює гармонічні коливання з частотою ω . Для опису хвильових полів використовуємо дві системи координат: декартову x, y і полярну r, θ з загальним центром в точці O . Поверхні хвильоводу ідеально жорсткі, тобто нулю дорівнює нормальна складова коливальної швидкості на цих поверх-

нях. Будемо вважати, що в трикутній області OAB хвильове поле відсутнє.

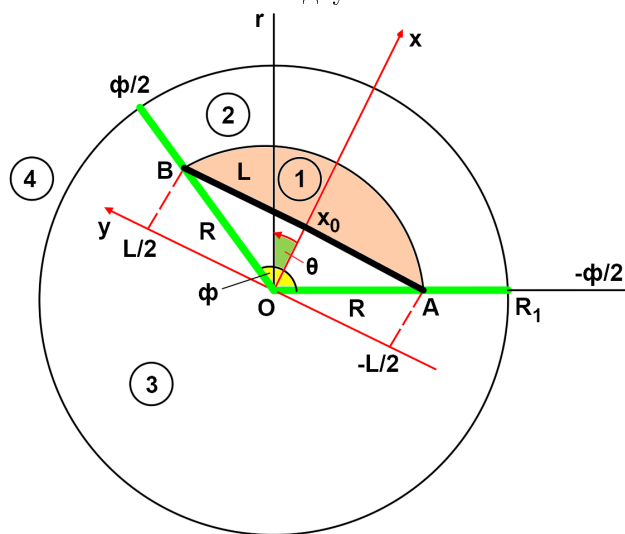


Рис. 1: Геометрія задачі

Згідно методу часткових областей виділимо чотири часткові області. Перша часткова область обмежена поверхнею поршня і дугою кола радіуса R , $-\phi/2 \leq \theta \leq \phi/2$, тобто утворена частинами поверхонь декартової і полярної систем координат відповідно. Інші часткові області визначаються в полярних координатах. Друга: $R \leq r \leq R_1$, $-\phi/2 \leq \theta \leq \phi/2$. Третя: $0 \leq r \leq R_1$, $\phi/2 \leq \theta \leq \pi \cup -\pi \leq \theta \leq -\phi/2$. Четверта: $r \geq R_1$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Поле тиску в області 1 запишемо у вигляді суми мод плоскопаралельного хвильоводу і суми мод обмеженої області клинуватого хвильоводу (часовий множник $\exp(-i\omega t)$ не пишемо):

$$p_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\alpha_n y) \exp(i\gamma_n(x - x_0)) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(\beta_n \theta) \frac{J_{\beta_n}(kr)}{J'_{\beta_n}(kR)}, \quad (1)$$

де $\alpha_n = \frac{2(n-1)\pi}{L}$, $\gamma_n = \sqrt{k^2 - \alpha_n^2}$, $\beta_n = \frac{2(n-1)\pi}{\phi}$, $n = 1, 2, \dots$; $k = \omega/c$ – хвильове число.

Поле тиску в областях 2 і 3 представимо у вигляді мод клинуватого хвильоводу:

$$p_2 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\beta_n \theta) \frac{J_{\beta_n}(kr)}{J'_{\beta_n}(kR_1)} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(\beta_n \theta) \frac{Y_{\beta_n}(kr)}{Y'_{\beta_n}(kR)}. \quad (2)$$

$$p_3 = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos(\eta_n(\theta \mp \frac{\phi}{2})) \frac{J_{\eta_n}(kr)}{J'_{\eta_n}(kR_1)}, \quad (3)$$

де $\eta_n = \frac{2(n-1)\pi}{2\pi-\phi}$, знак $(-)$ при $\theta \geq 0$, знак $(+)$ при $\theta \leq 0$.

Поле тиску в області 4 представимо у вигляді суперпозиції біжучих циліндричних хвиль:

$$p_4 = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos((n-1)\theta) \frac{H_{n-1}^{(1)}(kr)}{H_{(n-1)}^{(1)'}(kR_1)}. \quad (4)$$

Для визначення шести наборів невідомих коефіцієнтів $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n, n = 1, 2, \dots$ необхідно розписати шість граничних умов:

$$\frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x} = v(x_0, y), \quad x = x_0, \quad y = [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}], \quad (5)$$

$$p_1 = p_2, \quad r = R, \quad \theta = [-\frac{\phi}{2}, \frac{\phi}{2}], \quad (6)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} = \frac{\partial p_2}{\partial r}, \quad r = R, \quad \theta = [-\frac{\phi}{2}, \frac{\phi}{2}], \quad (7)$$

$$p_2 = p_4, \quad r = R_1, \quad \theta = [-\frac{\phi}{2}, \frac{\phi}{2}], \quad (8)$$

$$p_3 = p_4, \quad r = R_1, \quad \theta = [-\pi, -\frac{\phi}{2}] \cup [\frac{\phi}{2}, \pi], \quad (9)$$

$$\frac{\partial p_4}{\partial r} = \begin{cases} \frac{\partial p_2}{\partial r}, & r = R_1, \quad \theta = [-\frac{\phi}{2}, \frac{\phi}{2}] \\ \frac{\partial p_3}{\partial r}, & r = R_1, \quad \theta = [-\pi, -\frac{\phi}{2}] \cup [\frac{\phi}{2}, \pi]. \end{cases} \quad (10)$$

При виконанні граничних умов (5) – (10) будемо використовувати комбінацію двох підходів: поточкового спряження полів та середньоквадратичного наближення. В роботі досліджуються наступні комбінації двох підходів спряження полів:

- 1) середньоквадратичне наближення;
- 2) поточкове спряження полів: умови (5) – (7), середньоквадратичне наближення: умови (8) – (10);
- 3) поточкове спряження полів: умови (5) – (9), середньоквадратичне наближення: умова – (10);
- 4) поточкове спряження полів.

3. Аналіз чисельних результатів

В якості контрольних величин використовуємо такі енергетичні критерії:

$$\delta P^{(j)} = \left| \frac{P_i^{(j)} - P_d^{(j)}}{P_d^{(1)}} \right|, \quad j = 1, 2, 3, 4;$$

$$\delta P^{(1,m)} = \left| \frac{P_d^{(1)} - P_d^{(m)}}{P_d^{(1)}} \right|, \quad m = 2, 3, 4,$$

де $P_i^{(j)}$ – потік потужності з поверхні поршня при використанні варіанту розрахунку 1, 2, 3,

4 відповідно; $P_d^{(j)}$ – потік потужності в дальній зоні області 4. Величини $\delta P^{(j)}$, по суті, визначають точність виконання закону збереження енергії для конкретного (одного з чотирьох) варіанту розрахунку, а величини $\delta P^{(1,m)}$, $m = 2, 3, 4$ дають порівняльну оцінку потужності в дальньому полі при використанні варіантів розрахунку 2, 3, 4 по відношенню до варіанту 1 (середньоквадратичне наближення).

Для обчислення потоку потужності використовуємо формулу [1]:

$$P = \int_{(S)} IdS = 0,5 \int_{(S)} Re(p\nu_n^*)dS, \quad (12)$$

де p і ν_n^* – тиск і нормальна швидкість на деякій поверхні S , зірочка – знак комплексного спряження, інтенсивність $I = 0,5 Re(p\nu_n^*)$.

Виберемо такі параметри задачі: $\phi = 150^\circ$, $R/\lambda = 1, 2$, $R_1/\lambda = 1, 4$, тоді $L/\lambda = 2, 3$. Швидкість на поверхні поршня $\nu(x_0, y) = 1$. Результати розрахунків представлені в таблиці; $\Delta h/\lambda$ – відношення відстані між вузловими точками Δh до довжини хвилі λ .

Табл. 1: Енергетичні критерії

$\Delta h/\lambda$	0,3	0,2	0,1
$\delta P^{(1)}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-4}$	$4,3 \cdot 10^{-5}$
$\delta P^{(2)}$	$2,9 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$3,1 \cdot 10^{-3}$
$\delta P^{(3)}$	$2,6 \cdot 10^{-2}$	$8,7 \cdot 10^{-3}$	$2,6 \cdot 10^{-3}$
$\delta P^{(4)}$	$4,2 \cdot 10^{-2}$	$3,5 \cdot 10^{-2}$	$6,3 \cdot 10^{-3}$
$\delta P^{(1,2)}$	$5,8 \cdot 10^{-2}$	$2,7 \cdot 10^{-2}$	$8,9 \cdot 10^{-3}$
$\delta P^{(1,3)}$	$4,4 \cdot 10^{-2}$	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$3,5 \cdot 10^{-3}$
$\delta P^{(1,4)}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$	$8,5 \cdot 10^{-3}$	$8,3 \cdot 10^{-3}$

Як видно з таблиці, для всіх чотирьох варіантів розрахунку величини $\delta P^{(j)}$, $j = 1, 2, 3, 4$, зменшуються при зменшенні хвильової відстані між вузловими точками $\Delta h/\lambda$, що визначає відповідне збільшення кількості мод в часткових областях. Як і передбачалося, варіант використання середньоквадратичного наближення (варіант 1) є найкращим, інші варіанти розрахунку працюють приблизно однаково. Хоча, для даної задачі, мабуть слід відзначити варіант 3 (орієнтуємося на величину $\Delta h/\lambda \approx 0,1$), де в середньоквадратичному наближенні реалізується умова спряження по швидкості на границі області 4 з областями 2 і 3. Ця границя, як складна границя трьох областей має кутові точки $\theta = \pm\phi/2$, але використання однієї (полярної) системи координат дозволяє, завдяки властивості ортогональності відповідного набору функцій, достатньо просто провести процедуру алгебраїзації функціонального рівняння.

Побудований розв'язок дозволяє продемонструвати екрануючу властивість скінченного клину. Для цього розглянемо поршень достатньо малих хвильових розмірів. Нехай параметри задачі такі: $\phi = 150^\circ$, $R/\lambda = 0,1$, тоді $L/\lambda = 0,193$, величина $\Delta h/\lambda = 0,02$. На рис. 2 показані три варіанти розрахунку характеристики направленості по інтенсивності: поршень у вільному просторі (крива 1); часткова область 2 відсутня, тобто $R_1 = R$ (крива 2); $R_1/\lambda = 0,3$ (крива 3). Як бачимо, у вільному просторі (крива 1) поршень практично ненаправлений. Крива 2 відповідає ситуації, коли друга сторона поршня охоплена екраном (область OAB на рис. 1), що, природно, зменшує потік енергії з тильної сторони поршня. Екрануючу властивість скінченного клину наочно ілюструє крива 3. При цьому слід відмітити, що хвильовий розмір екрану достатньо малий, а саме $R_1 - R = 0,2\lambda$.

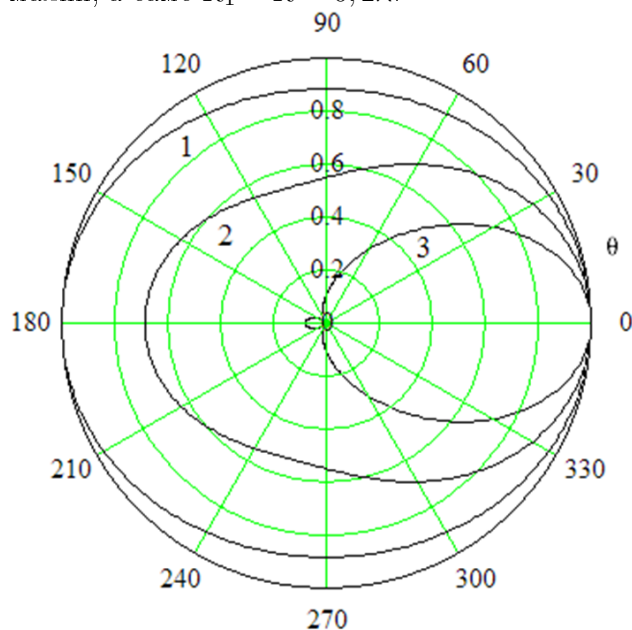


Рис. 2: Енергетичні діаграми спрямованості: $\phi = 150^\circ$, $R/\lambda = 0,1$, $L/\lambda = 0,193$: 1 – поршень у вільному просторі, 2 – $R_1 = R$ (область 2 відсутня), 3 – $R_1/\lambda = 0,3$

4. Висновки

На основі методу часткових областей отримано розв'язок задачі про випромінювання поршня в скінченний клинуватий хвилевод. При спряженні хвильових полів на границях часткових областей використано комбінацію двох підходів: поточкового спряження полів та середньоквадратичного наближення.

Використання різних комбінацій розрахунку цілком коректно. Всі комбінації працюють приблизно однаково. Варіант в якому використовується тільки середньоквадратичне наближення найточніший. Використання поточкового спряження полів спрощує розрахунок задачі.

Вибір необхідної комбінації розрахунку залежить від того, яка задача розглядається. Якщо для запису хвильових полів в часткових областях доводиться використовувати кілька систем координат, то при використанні середньоквадратичного наближення з'являться складні інтеграли, при обчисленні яких можуть виникати труднощі, в той час як при використанні поточкового спряження полів обчислювальних проблем не виникає.

Список використаних джерел

1. Grinchenko V.T., Vovk I.V., Matsypura V.T. Acoustic wave problems. – New York: Begell House, Inc., 2018. – 439 p.
2. Грінченко В.Т., Гусак В.О., Мацупура В.Т. Використання двох варіантів спряження хвильових полів в методі часткових областей. – Журнал обчислювальної та прикладної математики, 2021, 2(136). – 5 – 16 с.

References

1. GRINCHENKO V.T., VOVK I.V., MATSYPUA V.T. (2018) *Acoustic wave problems*. – New York: Begell House. – 439 p.
2. GRINCHENKO V.T., HUSAK V.O., MATSYPUA V.T. (2021, 2(136)) *Vykorystannia dvokh variantiv spriazhennia khvylovykh poliv v metodi chastkovykh oblastei*. – Zhurnal obchysluvalnoi ta prykladnoi matematyky. – 5 – 16 p.

Надійшла до редколегії 17.07.2023

УДК 539.3

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.11>

Вайсфельд Н. Д., д.ф.-м.н., професор,
Журавльова З. Ю., к.ф.-м.н., доцент.

**Дослідження поронапруженого стану
півнескінченного порожнистого
циліндру під дією осесиметричного
навантаження**

King's college, Strand building, S2.35, London,
United Kingdom

Одеський національний університет імені І.І.
Мечникова, 65082, м. Одеса, вул. Дворянська, 2,
e-mail: natalya.vaysfeld@kcl.ac.uk,
z.zhuravlova@onu.edu.ua

N. D. Vaysfeld, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof,
Z. Yu. Zhuravlova, PhD (Phys.-Math.).

**Investigation of porous stress state of semi-
infinite hollow cylinder under axisymmetric
loading**

King's college, Strand building, S2.35, London,
United Kingdom

Odessa I. I. Mechnikov National University, 65082,
Odessa, Dvoryanskaya str., 2,
e-mail: natalya.vaysfeld@kcl.ac.uk,
z.zhuravlova@onu.edu.ua

У статті побудовано точний розв'язок задачі поропружності для півнескінченного порожнистого циліндру під дією осесиметричного навантаження. Вихідну задачу зведено до одновимірної шляхом застосування інтегрального перетворення Фур'є. Одновимірна крайова задача у просторі трансформант сформульована у векторному вигляді, її розв'язок знайдено за допомогою апарату матричного диференціального числення. Отримані аналітичні формули дозволяють дослідити зміну переміщень, напружень та тиску рідини в порах в залежності від виду поропружного матеріалу, прикладеного навантаження, розміру зовнішнього та внутрішнього радіусів циліндру.

Ключові слова: поропружний порожнистий циліндр, осесиметричне навантаження, інтегральне перетворення.

The exact solution of the poroelasticity problem for a semi-infinite hollow cylinder under the axisymmetric load is derived in the paper. The original problem was reduced to a one-dimensional problem by applying the integral Fourier transform. The one-dimensional boundary value problem in the transform domain is formulated in a vector form, its solution is found using the matrix differential calculation apparatus. The derived analytical formulas allow to investigate the change of displacements, stresses and pore pressure depending on the type of porous material, the applied load, the size of outer and inner radii of the cylinder.

Key Words: poroelastic hollow cylinder, axisymmetric loading, integral transform.

Статтю представив член-кор.НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Поропружні матеріали широко зустрічаються у різних галузях медицини, геології, інженерії. Цим пояснюється велика кількість робіт, присвячених дослідженню поропружних станів тіл різної геометричної форми, зокрема циліндрів. Але варто відмітити, що більшість досліджень є числовими через велику кількість рівнянь задач. Аналітичні методи [1]-[5] дають змогу дослідити якісну поведінку переміщень, напружень та тиску. Також їх можна використовувати для верифікації числових методів. Тому проблема розробки нових аналітичних підходів до розв'язання задач поропружності залишається акту-

альною. У даній роботі пропонується нова методика, за допомогою якої отримано точний розв'язок задачі поропружності для півнескінченного порожнистого циліндру під дією осесиметричного навантаження.

Розглядається півнескінченний порожнистий поропружний циліндр у рамках моделі Біо [6], що займає область $a_0 < r < a_1, 0 < z < \infty, -\pi < \varphi < \pi$. Верхня грань $z = 0$ знаходиться в умовах гладкого контакту та є непроникною

$$w|_{z=0} = 0, \tau_{rz}|_{z=0} = 0, \frac{\partial p}{\partial z}|_{z=0} = 0, \quad (1)$$

$$\text{де } u(r, z) = \frac{u_r(r, z)}{a_1}, w(r, z) = \frac{u_z(r, z)}{a_1} -$$

безрозмірні переміщення, $\sigma_r(r, z), \tau_{rz}(r, z)$ - безрозмірні напруження, $p(r, z)$ - безрозмірний тиск рідини, що знаходиться в порах циліндру. По зовнішній циліндричній грані $r = a_1$ задано навантаження

$$\sigma_r|_{r=a_1} = L(z), \tau_{rz}|_{r=a_1} = T(z), p|_{r=a_1} = P(z), \quad (2)$$

внутрішня грань $r = a_0$ знаходиться в умовах зчеплення та є проникною

$$u|_{r=a_0} = 0, w|_{r=a_0} = 0, p|_{r=a_0} = 0 \quad (3)$$

Потрібно визначити переміщення, напруження та тиск рідини, що задовольняють крайові умови (1)-(3) та рівняння [7]

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} u + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{2}{\kappa+1} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} - \alpha \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{2}{\kappa-1} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \alpha \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{\alpha}{K} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial w}{\partial z} \right] - \frac{S_p}{K} p = 0 \end{cases} \quad (4)$$

де $\kappa = 3 - 4\mu$ - стала Мусхелішвілі, μ - коефіцієнт Пуассона, α - коефіцієнт Біо, $S_p = S_p G, K = \frac{a_1^2 k}{G}$ -

безрозмірні величини, G - модуль зсуву, S_p - запам'ятованість простору пор, k - коефіцієнт проникності.

Вихідну крайову задачу (1)-(4) зведено до одновимірної за допомогою півнескінченного синуса, косинуса перетворення Фур'є за змінною z

$$\begin{bmatrix} u_\beta(r) \\ w_\beta(r) \\ p_\beta(r) \end{bmatrix} = \int_0^\infty \begin{bmatrix} u(r, z) \\ w(r, z) \\ p(r, z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta z \\ \sin \beta z \\ \cos \beta z \end{bmatrix} dz$$

Крайову задачу у просторі трансформант сформульовано у векторному вигляді

$$\begin{cases} L_2 \bar{y}_\beta(r) = 0, \\ \bar{y}_\beta(b) = 0, A_\beta \bar{y}'_\beta(1) + B_\beta \bar{y}_\beta(1) = \bar{g}_\beta \end{cases} \quad (5)$$

Тут L_2 - диференціальний оператор другого порядку, A_β, B_β - відомі матриці, $\bar{g}_\beta$ - відомий вектор, $\bar{y}_\beta(r) = (u_\beta(r); w_\beta(r); p_\beta(r))^T$.

Розв'язання векторної крайової задачі (5) будеться за допомогою апарату матричного

диференціального числення [8], згідно з яким розглядається відповідне матричне диференціальне рівняння

$$L_2 Y_\beta(r) = 0, \quad (6)$$

де $Y_\beta(r)$ - матриця порядку 3×3 . Використовуючи співвідношення $L_2 H(r, \xi) = -H(r, \xi) M(\xi)$, де

$$H(r, \xi) = \begin{pmatrix} J_1(\xi r) & 0 & 0 \\ 0 & J_0(\xi r) & 0 \\ 0 & 0 & J_0(\xi r) \end{pmatrix},$$

$J_0(\xi r), J_1(\xi r)$ - функції Бесселя,

$$M(\xi) = \begin{pmatrix} \xi^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \beta^2 & \frac{2\beta}{\kappa+1} \xi & -\alpha \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \xi \\ \frac{2\beta}{\kappa-1} \xi & \xi^2 + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \beta^2 & -\alpha \beta \\ \frac{\alpha}{K} \xi & \frac{\alpha \beta}{K} & \xi^2 + \beta^2 + \frac{S_p}{K} \end{pmatrix},$$

розв'язок матричного рівняння (6) можна отримати за наступною формулою

$$Y_\beta(r) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C H(r, \xi) M^{-1}(\xi) d\xi, \text{ де } M^{-1}(\xi) -$$

матриця, обернена до матриці $M(\xi)$, замкнутий контур C охоплює усі особливі точки матриці $M^{-1}(\xi)$. Тоді розв'язок векторної крайової задачі

(5) можна отримати за формулою

$$\bar{y}_\beta(r) = Y_1(r) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + Y_2(r) \begin{pmatrix} c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{pmatrix} \quad (7)$$

матриці $Y_1(r), Y_2(r)$ є фундаментальною системою розв'язків матричного рівняння (6), сталі $c_i, i = \overline{1, 6}$ знаходяться з крайових умов у (5).

Застосування формули обернення до виразу (7) завершує побудову точного аналітичного розв'язку вихідної крайової задачі.

Числові розрахунки проводились для Рурського пісковика з наступними параметрами [9]:

$$G = 1.33 \cdot 10^{10} \text{ N} / \text{m}^2, \mu = 0.12, \alpha = 0.637, \\ k = 2 \cdot 10^{-13} \text{ m}^4 / \text{N} \cdot \text{s}, S_p = 3.9215 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2 / \text{N}.$$

Було розглянуто два випадки навантаження: нормальне механічне навантаження $L(z) = \sin(\pi z / h), T(z) = 0, P(z) = 0$ (Рис. 1-2) та навантаження тиском рідини $L(z) = 0, T(z) = 0, P(z) = \sin(\pi z / h)$ (Рис. 3-4).

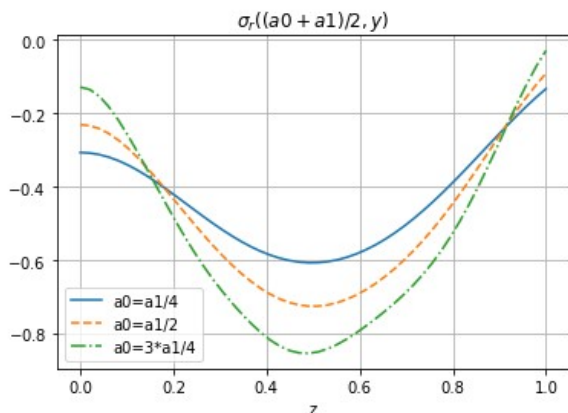


Рис. 1. Нормальне напруження $\sigma_r\left(\frac{a_0+a_1}{2}, y\right)$ при нормальному механічному навантаженні

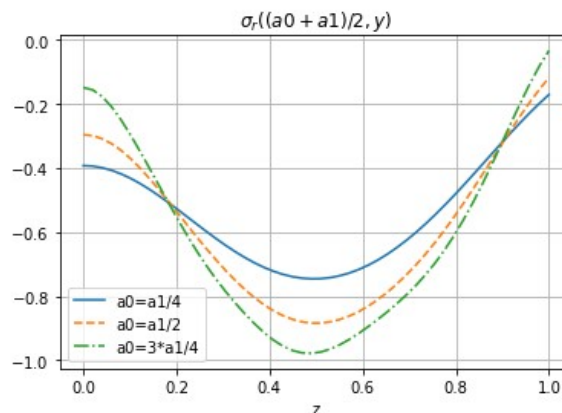


Рис. 3. Нормальне напруження $\sigma_r\left(\frac{a_0+a_1}{2}, y\right)$ при навантаженні тиском рідини

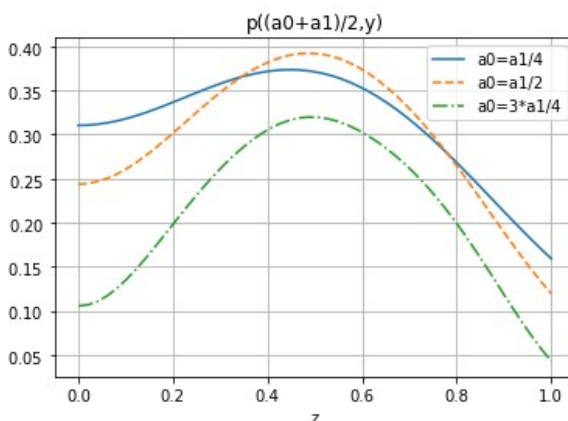


Рис. 2. Тиск $p\left(\frac{a_0+a_1}{2}, y\right)$ при нормальному механічному навантаженні

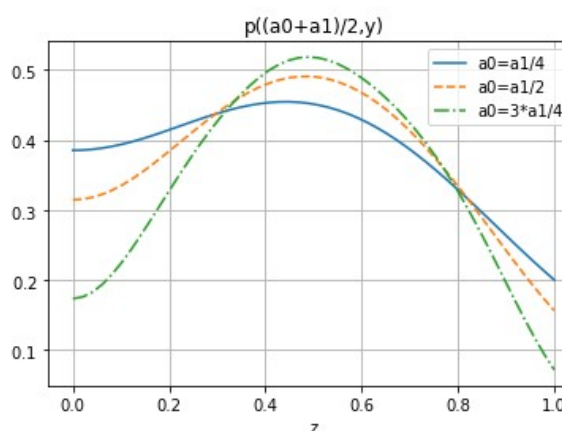


Рис. 4. Тиск $p\left(\frac{a_0+a_1}{2}, y\right)$ при навантаженні тиском рідини

Як видно, у випадку нормального механічного навантаження максимальні абсолютні значення нормального напруження (Рис. 1) досягаються для більш тонкої стінки порожнистого циліндру, в той час як для таких геометричних параметрів тиск рідини (Рис. 2) у порах є найменшим.

Висновки

У роботі було побудовано точний розв'язок задачі поропружності для півнескінченного порожнистого циліндру під дією осесиметричного навантаження за допомогою апаратів інтегральних перетворень та матричного диференціального числення. Досліджено зміну напружень та тиску рідини усередині циліндру в залежності від поропружного матеріалу та геометричних розмірів. Даний підхід може бути використаний для більш складних областей, також для областей, послаблених дефектами.

тиском рідини

У випадку навантаження тиском рідини максимальні абсолютні значення нормального напруження (Рис. 3) та максимальний тиск рідини (Рис. 4) спостерігаються для меншої різниці між діаметрами циліндру $a_1 - a_0$.

Список використаних джерел

1. Zhupanska O.I. Contact with friction of a rigid cylinder with an elastic half-space / O.I. Zhupanska, A.F. Ulitko // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 2005. – № 53(5). – P. 975-999.
2. Senchenkov I.K. Modelling of residual stresses developed in steel cylinders subjected to surface-layer deposition by welding / I.K. Senchenkov, Ya.A. Zhuk, O.P. Chervinko, E. Turyk // *Journal of Engineering Mathematics*. – 2008. – № 61. – P. 271-284.
3. Yuzvyak M. Axisymmetric thermal stresses in an elastic hollow cylinder of finite length / M. Yuzvyak, Yu. Tokovyy, A. Yasinsky // *Journal of Thermal Stresses*. – 2020. – № 44(3). – P. 359-376.
4. Popov G.Ya. Axisymmetric problem for an elastic cylinder of finite length with fixed lateral surface with regard for its weight / G.Ya. Popov, Yu.S. Protserov // *J. Math. Sci*. – 2016. – № 212(1). – P. 67-82.
5. Vaysfeld N. (2023). Exact Solution of the Axisymmetric Problem for Poroelastic Finite Cylinder. / Vaysfeld N., Zhuravlova, Z. // Altenbach, H., Mkhitryan, S.M., Hakobyan, V., Sahakyan, A.V. (eds) *Solid Mechanics, Theory of Elasticity and Creep. Advanced Structured Materials*. Springer, Cham. – 2023. – № 185.
6. Biot M.A. General theory of three-dimensional consolidation / M.A. Biot // *J. Appl. Phys.* – 1941. – № 12. – P. 155-164.
7. Verruijt A. An introduction to soil dynamics. Theory and applications of transport in porous media / A. Verruijt. – Springer, 24, 2010.
8. Gantmacher F.R. The theory of matrices / F.R. Gantmacher. – New York, Chelsea Publishing Company, 1959. – 276 p.
9. Cheng A.H.-D. Poroelasticity. Theory and applications of transport in porous media / A.H.-D. Cheng. – Springer, 27, 2016.

References

1. ZHUPANSKA, O.I. and ULITKO, A.F. (2005) Contact with friction of a rigid cylinder with an elastic half-space. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 53(5). p. 975-999.
2. SENCHENKOV, I.K., ZHUK, Ya.A., CHERVINKO, O.P. and TURYSK, E. (2008) Modelling of residual stresses developed in steel cylinders subjected to surface-layer deposition by welding. *Journal of Engineering Mathematics*, 61. p. 271-284.
3. YUZVYAK, M., TOKOVYY, YU. and YASINSKY, A. (2020) Axisymmetric thermal stresses in an elastic hollow cylinder of finite length. *Journal of Thermal Stresses*, 44(3). p. 359-376.
4. POPOV, G.Ya., PROTSEROV, Yu.S. (2016) Axisymmetric problem for an elastic cylinder of finite length with fixed lateral surface with regard for its weight. *J. Math. Sci.*, 212(1). p. 67-82.
5. VAYSFELD, N., ZHURAVLOVA, Z. (2023) Exact Solution of the Axisymmetric Problem for Poroelastic Finite Cylinder. In: Altenbach, H., Mkhitryan, S.M., Hakobyan, V., Sahakyan, A.V. (eds) *Solid Mechanics, Theory of Elasticity and Creep. Advanced Structured Materials*, Springer, Cham, 185.
6. BIOT, M.A. (1941) General theory of three-dimensional consolidation. *Appl. Phys.*, 12. p. 155-164.
7. VERRUIJT, A. (2010) *An introduction to soil dynamics. Theory and applications of transport in porous media*. Springer, 24.
8. GANTMACHER, F.R. (1959) *The theory of matrices*. New York: Chelsea Publishing Company.
9. CHENG, A.H.-D. (2016) *Poroelasticity. Theory and applications of transport in porous media*. Springer, 27

Надійшла до редколегії 26.06.23

УДК 539.3

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.12>

Вайсфельд Н.Д.¹, д. ф.-м. н., професор
Процеров Ю. С.², к. ф.-м. н., доцент
Толкачов А.В.², старший викладач

ПЛОСКА ЗАДАЧА ПРО КОЛИВАННЯ БАЛКОВОЇ ПЛИТИ НА ПРЯМОКУТНІЙ ОСНОВІ

¹King's College London, Великобританія
Стренд, Лондон, WC2R 2LS

e-mail: natalya.vaysfeld@kcl.ac.uk

²Одеський національний університет
ім. І.І. Мечникова

65082, м. Одеса, вул. Дворянська, 2

e-mail: protserov@onu.edu.ua

e-mail: andr.tolkach@gmail.com

N. Vaysfeld¹, Doctor of Science
Yu. Protserov², Associate Professor
A. Tolkachov², Senior Lecturer

PLANE PROBLEM ON BEAM PLATE'S OSCILLATIONS ON RECTANGULAR BASE

¹King's College London, UK
Strand, London, WC2R 2LS

e-mail: natalya.vaysfeld@kcl.ac.uk

²Odesa I.I. Mechnikov National University
65082, Odesa, Dvoryanskaya str., 2

e-mail: protserov@onu.edu.ua

e-mail: andr.tolkach@gmail.com

Вертикальні краї прямокутної основи знаходяться в умовах ковзного контакту, нижній край нерухомо закріплено, а з верхнім краєм зчеплено балку (балочну плиту) з вільними кінцями. До балки прикладено нормальне навантаження, яке гармонічно змінюється за часом. Після розв'язання відповідних крайових задач, знайдено переміщення прямокутної основи та прогин балки. З умови сполучення між балкою та основою отримано інтегральне рівняння відносно невідомого контактного напруження, яке розв'язано методом ортогональних многочленів.

Ключові слова: прямокутна основа, балка, динамічне контактне напруження

The plane contact problem of a beam's oscillations on a rectangular elastic base is considered. The vertical edges of the rectangular base are in conditions of the nonfriction contact, the lower edge is fixed, and a beam (beam plate) with free ends is attached to the upper edge. The normal loading is applied to the beam and harmonically changes in time. To solve the boundary valued problem for the elastic base the integral transform method is applied. The apparatus of the Green's function is used to construct the solution for the boundary valued problem for a beam. The displacements of the rectangular base and the deflection of the beam were found. The interface condition between the base and the plate is used to derive the integral singular equation relatively the dynamical contact stress. The orthogonal polynomial method was used to solve the integral equation. The investigation of the oscillations' frequency influence on the deflection of beam and elastic rectangular base's displacements and stress was conducted.

Key words: rectangular base, beam, dynamic contact stress

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Динамічним контактним задачам присвячено багато праць. У більшості з них розглядається контакт абсолютно твердого тіла (штампу) з пружною основою у вигляді напівпростору, напівплощини або шару (Zhilin Li, John C. Simo, Alan P. Pipkin, Yonggang Huang, J. N. Reddy, Г.Я. Попов, В.І. Острик, В.М. Сеймов, А.Ф. Улітко [1-4]) Значно менше робіт присвячено контакту балкових плит або накладок з пружною скінченною основою.

У роботі розглянуто задачу про плоску деформацію прямокутної області (основи)

$|x| \leq l, 0 \leq y \leq h$, краї якої $x = \pm l$ знаходяться в умовах ковзного контакту, край $y = h$ нерухомо закріплено, а з краєм $y = 0$ на ділянці $|x| \leq a < l$ зчеплено балку (балочну плиту), краї $x = \pm a$ якої вільні. До балки прикладено нормальне навантаження інтенсивності $q(x)e^{i\omega t}$. У безрозмірних координатах $x' = xa^{-1}, y' = ya^{-1}$ математичне формулювання задачі відносно амплітуд переміщень точок основи

$u(x, y), v(x, y)$ набуває вигляду (для спрощення запису штрих опущено):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + k_1^2 u = 0 \\ (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \beta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + k_1^2 v = 0 \end{cases}, \quad |x| < b, 0 < y < d \quad (1)$$

$$u|_{x=\pm b} = 0, \frac{\partial v}{\partial x}|_{x=\pm b} = 0, u|_{y=d} = 0, v|_{y=d} = 0, \sigma_y|_{y=0} = \begin{cases} -p(x), |x| < 1 \\ 0, 1 < |x| < b \end{cases}, \tau_{xy}|_{y=0} = 0 \quad (2)$$

де $\beta = c_2 c_1^{-1}, k_i = a \omega c_i^{-1} (i = 1, 2), b = l a^{-1}, d = h a^{-1}$, хвиль у пружній основі. Амплітуда прогину балки $w(x)$ мусить задовольняти крайову задачу

$$w^{IV}(x) - \gamma^4 w(x) = a^4 D^{-1} (q(x) - p(x)), w''(\pm 1) = 0, w'''(\pm 1) = 0 \quad (3)$$

де $p(x)$ амплітуда невідомого контактного напруження між балкою та основою, $\gamma^4 = a^4 \rho_0 h_0 \omega^2 D^{-1}$, D циліндрична жорсткість балки, ρ_0, h_0 густина матеріалу та товщина балки. Крім того, мусить виконуватися умова сполучення між балкою та основою $w(x) = v(x, 0), |x| < 1$ (4) За допомогою скінченних перетворень Фур'є

$$u_n(y) = \int_{-b}^b u(x, y) \sin \lambda_n x dx, \quad v_n(y) = \int_{-b}^b v(x, y) \cos \lambda_n x dx, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{b}$$

крайову задачу (1) – (2) зведено до одновимірної, розв'язок якої має вигляд

$$u_n(y) = \frac{a \lambda_n p_n}{4 G \Delta_n} \left[2 \lambda_n^2 \sigma_1 \sigma_2 ch \sigma_1 y + \sigma_1 \sigma_2 (\lambda_n^2 + \sigma_2^2) ch \sigma_2 y - \lambda_n^2 (\lambda_n^2 + \sigma_2^2) sh \sigma_1 (y - d) sh \sigma_2 d - \right. \\ \left. - 2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 sh \sigma_2 (y - d) sh \sigma_1 d - \sigma_1 \sigma_2 (\lambda_n^2 + \sigma_2^2) ch \sigma_1 (y - d) ch \sigma_2 d - 2 \lambda_n^2 \sigma_1 \sigma_2 ch \sigma_2 (y - d) ch \sigma_1 d \right]$$

$$v_n(y) = -\frac{a \sigma_1 p_n}{4 G \Delta_n} \left[2 \lambda_n^2 \sigma_1 \sigma_2 sh \sigma_1 y + \lambda_n^2 (\lambda_n^2 + \sigma_2^2) sh \sigma_2 y - \lambda_n^2 (\lambda_n^2 + \sigma_2^2) ch \sigma_1 (y - d) sh \sigma_2 d - \right. \\ \left. - 2 \lambda_n^2 \sigma_1 \sigma_2 ch \sigma_2 (y - d) sh \sigma_1 d - \sigma_1 \sigma_2 (\lambda_n^2 + \sigma_2^2) sh \sigma_1 (y - d) ch \sigma_2 d - 2 \lambda_n^4 sh \sigma_2 (y - d) ch \sigma_1 d \right]$$

$$\Delta_n = \lambda_n^2 \sigma_1 \sigma_2 (\lambda_n^2 + \sigma_2^2) + \lambda_n^2 \left(2 \lambda_n^4 - \lambda_n^2 (k_1^2 + 2 k_2^2) + k_1^2 k_2^2 + \frac{1}{4} k_2^4 \right) sh \sigma_1 d sh \sigma_2 d - \\ - \left(2 \lambda_n^4 - \lambda_n^2 k_2^2 + \frac{1}{4} k_2^4 \right) \sigma_1 \sigma_2 ch \sigma_1 d ch \sigma_2 d; \quad \sigma_i = \sqrt{\lambda_n^2 - k_i^2}, i = 1, 2$$

$$v_0(y) = -\frac{a k_1}{G k_2^2} \frac{\sin k_1 (y - d)}{\cos k_1 d} p_0, \quad \text{де } p_n = \int_{-1}^1 p(x) \cos \lambda_n x dx$$

Скориставшись формулами обернення перетворення Фур'є, отримано вирази для амплітуд переміщень основи. Наприклад, вираз для вертикальних переміщень точок верхнього краю основи, який знадобиться надалі, має вигляд

$$v(x, 0) = \frac{a}{4bG} \int_{-1}^1 \left(2 \frac{k_1}{k_2^2} \operatorname{tg} k_1 d - \sum_{n=1}^{\infty} L_n \cos \lambda_n x \cos \lambda_n \xi \right) p(\xi) d\xi,$$

$$\text{де } L_n = k_2^2 \frac{\sigma_1}{\Delta_n} \left(\lambda_n^2 \operatorname{ch} \sigma_1 d \operatorname{sh} \sigma_2 d - \sigma_1 \sigma_2 \operatorname{sh} \sigma_1 d \operatorname{ch} \sigma_2 d \right)$$

Розв'язок крайової задачі (3) подано за формулою $w(x) = a^4 D^{-1} \int_{-1}^1 G_0(x, \xi) [q(\xi) - p(\xi)] d\xi$, де

$$\begin{aligned} G_0(x, \xi) = & \frac{1}{4\gamma^3} \left[\operatorname{sh} \gamma |x - \xi| - \sin \gamma |x - \xi| \right] - \frac{1}{4\gamma} \left(\operatorname{sh} \gamma (\xi + 1) + \sin \gamma (\xi + 1) \right) \psi_0(x) + \\ & + \frac{1}{4} \left(\operatorname{ch} \gamma (\xi + 1) + \cos \gamma (\xi + 1) \right) \psi_1(x) + \frac{1}{4\gamma} \left(\operatorname{sh} \gamma (\xi - 1) + \sin \gamma (\xi - 1) \right) \psi_2(x) - \\ & - \frac{1}{4} \left(\operatorname{ch} \gamma (\xi - 1) + \cos \gamma (\xi - 1) \right) \psi_3(x) \end{aligned}$$

є функцією Гріна цієї задачі.

Функції $\psi_k(x)$ утворюють фундаментальну базисну систему розв'язків, побудовані на основі функцій Власова і є комбінацією гіперболічних та тригонометричних функцій. Після задоволення умови сполучення (4), отримано інтегральне рівняння відносно контактного напруження $p(x)$

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{ak_1}{2bGk_2^2} \operatorname{tg} k_1 d - \frac{a}{4bG} \sum_{n=1}^{\infty} L_n \cos \lambda_n x \cos \lambda_n \xi + a^4 D^{-1} G_0(x, \xi) \right] p(\xi) d\xi = a^4 D^{-1} \int_{-1}^1 G_0(x, \xi) q(\xi) d\xi$$

Аналіз виразу L_n коли $n \rightarrow \infty$, приводить до асимптотичного подання $L_n \sim \frac{K}{\lambda_n}$, де Це дозволило виділити у ядрі отриманого інтегрального рівняння сингулярну частину та записати його у вигляді

$$K = (k_1^2 + k_2^2)(k_1^2 - k_2^2)^{-1}.$$

$$\int_{-1}^1 \left[\ln \frac{1}{|x^2 - \xi^2|} + R(x, \xi) \right] p(\xi) d\xi = f(x), \quad -1 < x < 1 \quad (5)$$

де $R(x, \xi)$ регулярна частина ядра.

Наявність спектрального співвідношення

$$\int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x^2 - \xi^2|} \frac{T_{2k}(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi = \begin{cases} 2\pi \ln 2, & k = 0 \\ \frac{\pi}{k} T_{2k}(x), & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

де $T_{2k}(x)$ - многочлени Чебишева першого роду, дає змогу застосувати для наближеного розв'язання інтегрального рівняння (5) метод ортогональних многочленів. Згідно до нього, розв'язок подано у вигляді

$$p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\chi_k}{\beta_k} T_{2k}(\xi), \text{ де}$$

$$\beta_k = \begin{cases} \pi \sqrt{2 \ln 2}, & k = 0 \\ \frac{\pi}{\sqrt{2k}}, & k = 1, 2, \dots \end{cases}, \quad \chi_k - \text{невідомі коефіцієнти.}$$

Таким чином, динамічне контактне напруження має на кінцях кореневу особливість, як і у статичному випадку. Реалізація схеми методу привела до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

:

$$\chi_m + \sum_{k=0}^{\infty} a_{mk} \chi_k = f_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$a_{mk} = \frac{1}{\beta_m \beta_k} \int_{-1}^1 \frac{T_{2m}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \int_{-1}^1 R(x, \xi) \frac{T_{2k}(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi, \quad f_m = \frac{1}{\beta_m} \int_{-1}^1 f(x) \frac{T_{2m}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Числову реалізацію проведено для випадку бетонної основи та сталеві балки з рівномірно розподіленим навантаженням, що прикладене уздовж всієї її довжини (Рис.1,2).

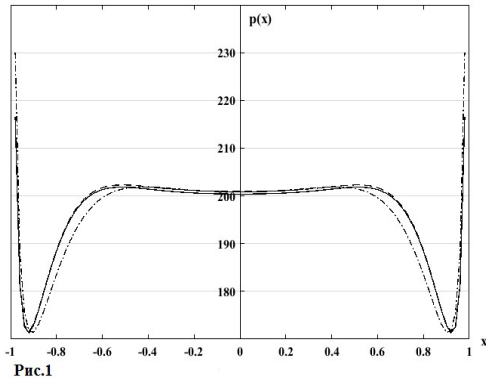


Рис.1
Суцільна лінія тут відповідає випадку частоти $\omega = 15$, пунктирна лінія відповідає частоті $\omega = 3$. Для порівняння штрих пунктирною

лінією позначено результати для відповідної стаціонарної задачі.

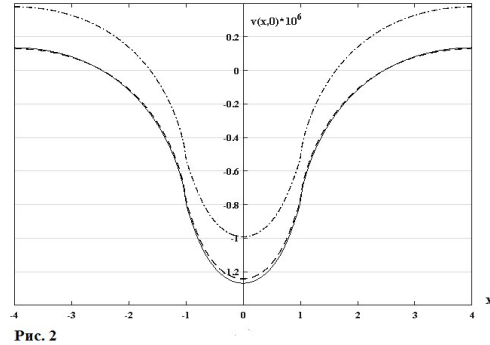


Рис. 2
З графіків видно, що зміна частоти мало впливає на значення контактного напруження і переміщення, тоді як контактне напруження і переміщення у стаціонарному випадку суттєво менше ніж у динамічному випадку.

Список використаних джерел

1. Улітко А. Ф. Векторні розкладення в просторовій теорії пружності (рос.) / А. Улітко. — Київ: Академперіодика, 2002. — 264 с.
2. Острик В.І., Улітко А.Ф. Метод Вінера-Гопфа в контактних задачах теорії пружності (рос.) / В.І.Острик, А.Ф.Улітко — Київ: Наукова думка, 2006. — 328 с.
3. Попов Г.Я. Рівняння математичної фізики. Метод ортогональних многочленів / Г. Я. Попов, В.В. Реут, М.Г. Моїсєєв, Н.Д. Вайсфельд — Одеса: Астропрінт, 2010. — 120 с.
4. Сеймов В.М. Динамічні контактні задачі (рос.) / В.М. Сеймов — Київ: Наукова думка, 1976. — 328 с.

References

1. ULITKO, A. (2002) *Vectorni rozkladennya u prostоровiy teorii prugnosti*. Kyiv, Academperiodyka.
2. OSTRIK, V., ULITKO, A. (2006) *Wiener-Hopf Method in Contact Problems of Elasticity*. Kyiv, Naukova dumka.
3. POPOV, G., REUT, V., MOISEEV, N., VAYSFELD, N. (2010) *Rivnyannya matematychoi fizyki*. Odesa, Astroprint.
4. SEIMOV, V. (1976) *Dynamic contact problems*. Kyiv, Naukova dumka.

Надійшла до редколегії 25.06.23

УДК 539.375

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.13>

Даляк Т. М.¹, к. ф.-м. н, доц.,
Шацький І. П.², д. ф.-м. н, проф.

T. M. Dalyak¹, Cand. Phys. & Math. Sc., Ass. Prof.
I. P. Shatsky², Dr. Phys. & Math. Sc., Prof.

Про крихке руйнування тіла з частково залікованою зірчастою тріщиною

On brittle fracture of a body with partial healed star-shaped crack

Лабораторія моделювання демпфуючих систем
Інституту прикладних проблем механіки і
математики ім. Я. С. Підстригача НАН
України, 76002, м. Івано-Франківськ, вул.
Микитинецька, 3,

Laboratory of Modeling of Damping Systems,
Pidstryhach-Institute for Applied Problems in
Mechanics and Mathematics, NAS of Ukraine,
76002, Ivano-Frankivsk, Mykytynetska str., 3,

¹ e-mail: tdalyak@gmail.com

¹ e-mail: tdalyak@gmail.com

² e-mail: ipshatsky@gmail.com

² e-mail: ipshatsky@gmail.com

Експрес-методика оцінки міцності тіла з частково залікованою тріщиною використовується для моделювання реновації тіла із зіркоподібним дефектом циклічно-симетричної структури. За розв'язками задачі механіки тріщин у однорідному за пружними властивостями та неоднорідному за тріщиностійкістю тілі дослідили залежності ефективності заліковування від ступеня заповнення тріщини та від якості з'єднувального шару. Детально розглянуто два варіанти заліковування: поблизу вершин та поблизу центра зірчастого дефекту.

Ключові слова: тверде тіло, зірчаста тріщина, крихке руйнування, ефективність залікування.

In this article, the express methodology for assessing the strength of a brittle material with a partially healed crack is used to model the renovation of a body with a star-shaped defect of a cyclically symmetrical structure. The rheology of the joint layer is not taken into account, but the specific surface energy in the healed area is generally different than in the solid body. Therefore, we have the problem of crack mechanics in a body that is homogeneous in terms of elastic properties and heterogeneous in terms of crack resistance. The degree of crack healing was described by two parameters: the ratio of the crack resistance of the joint and body materials and the ratio of the length of the healed area to the length of the initial crack. The subject of the analytical study was the efficiency of healing - the ratio of ultimate loads of brittle failure for a healed and primary crack. Two treatment options are considered in detail: near the peaks and near the center of the star defect.

Key Words: solid, star crack, brittle fracture, healed efficiency.

Статтю представив член-кореспондент НАН України Я.О.Жук

Вступ

Проблема продовження терміну експлуатації елементів конструкцій залишається актуальною на сьогоднішній день. Руйнування матеріалу внаслідок розвитку тріщин є однією із найпоширеніших причин втрати його цілісності.

Відновлення суцільності дефектної конструкції на частині тріщини закономірно

знижує концентрацію напружень біля її вершин. Це, однак, відбувається за рахунок підвищення напружень на залікованій ділянці. Ця обставина мусить бути врахована під час оцінки утримувальної здатності відремонтованої деталі.

Мета цієї роботи – оцінити ефективність часткового заліковування крихкого тіла із зірчастою тріщиною.

Модель залікованої тріщини. Постановка задачі

Експрес-методика оцінки міцності тіла з частково залікованою тріщиною [1] у цьому повідомленні використовується для моделювання реновації тіла із зіркоподібним дефектом циклічно-симетричної структури. Тріщина у деформованому тілі розуміється як поверхня розриву переміщень. Якщо у деякій підобласті цієї поверхні відновити суцільність тіла, то дістанемо новий об'єкт – частково заліковану тріщину. Реологія неконтрастного з'єднувального шару не враховується, однак питома поверхнева енергія γ_h на залікованій ділянці загалом вважається інакшою, ніж γ_0 у суцільному тілі. Таким чином, маємо задачу механіки тріщин у однорідному за пружними властивостями та неоднорідному за тріщиностійкістю тілі.

Ступінь заліковування тріщини описували двома параметрами: відношенням тріщиностійкостей матеріалів з'єднання та тіла: $\eta = \sqrt{\gamma_h / \gamma_0}$ та відношенням довжини залікованої ділянки до довжини початкової тріщини: $\psi = l_h / l_0 \in [0, 1]$. Ефективність заліковування шукали як відношення граничних навантажень для залікованої та первинної тріщини: $\chi = p_h / p_0$.

У межах припущень плоскої задачі теорії пружності розглядали безмежну площину із зірчастою N -ланковою тріщиною за умов всебічного розтягу напруженнями $p = \text{const}$. Побудуємо залежність $\chi(\eta, \psi)$ для різних варіантів залікування.

Тріщина, залікована в околі вершин

Нехай зірчаста тріщина залікована поблизу вершин на ділянках (l, l_0) , тобто маємо N -ланкову систему укорочених тріщин завдовжки l (рис. 1).

Тоді коефіцієнт інтенсивності напружень для вихідної тріщини буде:

$$k_1^0 = p\sqrt{\pi l_0} F^0(N), \quad (1)$$

а для залікованої –

$$k_1^h = p\sqrt{\pi l} F^0(N), \quad (2)$$

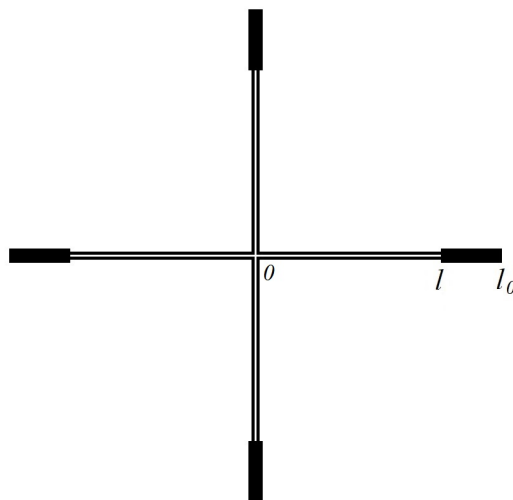


Рис. 1 Зірчаста тріщина, залікована поблизу вершин

де $F^0(N)$ – відома функція від кількості ланок [2–4].

Враховавши співвідношення критерію Гріффітса [4]:

$$k_1^0 = K_{1C}^0 = \sqrt{2E\gamma_0}, \\ k_1^h = K_{1C}^h = \sqrt{2E\gamma_h},$$

із формул (1) і (2) маємо граничні навантаження:

$$p_0 = \frac{\sqrt{2E\gamma_0}}{F^0(N)\sqrt{\pi l_0}}, \\ p_h = \frac{\sqrt{2E\gamma_h}}{F^0(N)\sqrt{\pi l}}. \quad (3)$$

Знайдемо ефективність заліковування:

$$\chi = \frac{p_h}{p_0} = \frac{\eta}{\sqrt{1-\psi}}. \quad (4)$$

Для залікованої поблизу вершин тріщини ефективність (4) ніяк не залежить від кількості ланок дефекту. Із зростанням відносної протяжності ділянки заліковування ψ спостерігаємо зростання стримувальної здатності (рис. 2). Використання матеріалів з більшою тріщиностійкістю також позитивно впливає на значення ефективності χ . Зазначимо також, що процедура відновлення цілісності має сенс, якщо $\chi > 1$.

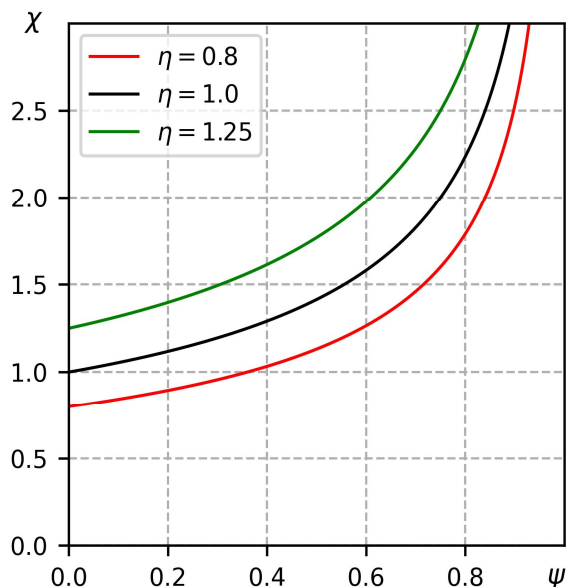


Рис. 2 Вплив ступеня заліковування вершин тріщини на утримувальну здатність тіла

Тріщина, залікована в околі центра

Нехай тепер суцільність тіла відновлено в околі центра зірчастої тріщини на ділянках $(0, a)$ (рис. 3). Задача для залікованої тріщини трансформується у відому задачу розтягу площини з циклічною системою радіальних розрізів (a, l_0) [4, 5], за розв'язками якої маємо співвідношення для коефіцієнтів інтенсивності зусиль:

$$k_1^{\pm} = p \sqrt{\pi l} F^{\pm}(\lambda, N), \quad (5)$$

Рис. 3 Зірчаста тріщина, залікована поблизу центра

де $F^{\pm}(\lambda, N)$ відображає взаємне розташування розрізів, а $l = (l_0 - a)/2$, $\lambda = l/R$, $R = (a + l_0)/2$.

Застосувавши критерій Гріффітса до співвідношення (5) та виконавши аналогічні до попереднього пункту перетворення, дістали вираз для граничного навантаження:

$$p_h = \min \left(\frac{\sqrt{2E\gamma_h}}{\sqrt{\pi l} F^{-}(\lambda, N)}, \frac{\sqrt{2E\gamma_0}}{\sqrt{\pi l} F^{+}(\lambda, N)} \right). \quad (6)$$

Врешті, скориставшись значеннями граничних навантажень (3) і (6), отримали формулу для ефективності заліковування тріщини поблизу

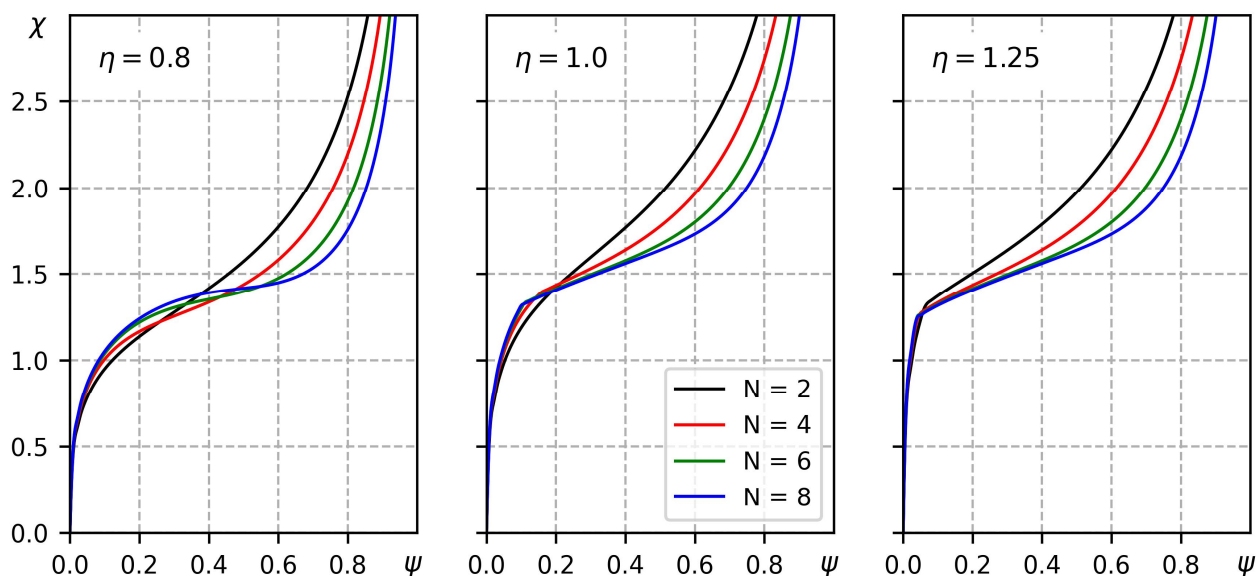


Рис. 4 Вплив ступеня заліковування центра тріщини на утримувальну здатність тіла

центра:

$$\chi = \frac{\sqrt{2} F^0(N)}{\sqrt{1-\psi}} \min \left(\frac{\eta}{F^-\left(\frac{1-\psi}{1+\psi}, N\right)}, \frac{1}{F^+\left(\frac{1-\psi}{1+\psi}, N\right)} \right). \quad (9)$$

Тут враховано, що $l/l_0 = (1-\psi)/2$, $\lambda = (1-\psi)/(1+\psi)$.

На рис. 4 подано залежність утримувальної здатності дефектного тіла від довжини ділянки заліковування для різної кількості дефектів та різних характеристиках якості матеріалу відновлення. У випадку $\eta < 1$ небезпечною завжди є зона заліковування. Для малих ψ ефективність зростає зі збільшенням кількості ланок дефекту, для більших ψ – ефект протилежний. За відсутності контрасту ($\eta = 1$) спостерігаємо зміну тенденцій – для малих ψ небезпечною буде все ще внутрішня частина, в той час як для $\psi > 0.15$ ($N = 4$), $\psi > 0.11$ ($N = 6$) і $\psi > 0.1$ ($N = 8$) небезпечнішими стають зовнішні вершини тріщини. Така зміна характеру руйнування відображається зламами на графіках. Винятком є випадки $N = 2; 3$. Із зростанням $\eta > 1$

перерозподіл відбувається для усіх варіантів кількості ланок, а точки зміни типу руйнування зміщуються уліво.

Висновки

Розроблена методика дозволяє отримати аналітичні оцінки міцності крихкого тіла із частково залікованою зірчастою тріщиною. Аналітичний результат досягається за рахунок радикального спрощення – нехтуємо реологією з'єднання берегів тріщини.

Збільшення зони відновлення та підвищення якості зчеплення сприяють зростанню утримувальної здатності матеріалу.

У разі заліковування поблизу вершин зіркоподібної тріщини ефективність заліковування не залежить від числа ланок.

У разі заліковування поблизу центра позитивний результат досягається для не надто коротких ділянок зчеплення (не мале ψ). Крім того, для малих η небезпечні є внутрішні вершини, а при більших – зовнішні вершини залікованої тріщини. Про зміну механізму руйнування свідчать злами на графіках.

Список використаних джерел

1. Шацький І. П. Гранична рівновага пластини з частково залікованою тріщиною / І. П. Шацький // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2015. – Т. 51, № 3. – С. 25–31.
2. Westmann R. A. Pressurized star crack // J. Math. and Phys. – 1964. – 43, N 3. – P. 191–198.
3. Williams W. E. A star-shaped crack deformed by an arbitrary internal pressure // Int. J. Eng. Sci. – 1971. – 9, N. 8. – P. 705–712.
4. Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4 т. / Под ред. Панасюка В. В. – Киев: Наук. думка, 1988. – Т. 2: Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / Саврук М. П. – 1988. – 620 с.
5. Tweed J., Rooke D. P. The stress intensity factor of a star-shaped array of cracks in infinite elastic solid // Int. J. Eng. Sci. – 1974. – 12, N 5. – P. 423–431.

References

1. SHATS'KYI, I.P. (2015) Limiting Equilibrium of a Plate with Partially Healed Crack. *Mater Sci.* 51. p. 322–330
2. WESTMANN, R. A. (1964) Pressurized star crack. *J. Math. and Phys.* 43 (3). p. 191–198.
3. WILLIAMS, W. E. (1971) A Star-Shaped Crack Deformed by an Arbitrary Internal Pressure. *Int. J. Eng. Sci.* 9 (8). p. 705–712.
4. SAVRUK, M. P. (1988) *Intensity factors stresses in bodies with cracks*, Fracture mechanics and Strength of Materials: A Reference Guide under General edited by Panasyuk V.V. V.2. - Kyiv: Nauk. Dumka.
5. TWEED J., ROOKE D. P. (1974) The Stress Intensity Factor of a Star-Shaped Array of Cracks in Infinite Elastic Solid. *Int. J. Eng. Sci.* 12 (5). p. 423–431.

Надійшла до редколегії 19.06.23

УДК 532.59: 534.29

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.14>

Жук О.П.¹, д.ф.-м.н., пров.н.с.
Жук Я.О.², чл.-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф.
Клімчук² Т.В., к.ф.-м.н.

O.P. Zhuk¹, Dr.Sci., Leading Researcher.
Y.A. Zhuk², Dr.Sci. (Phys.–Math.)
T.V. Klimchuk², Ph.D.

Взаємодія системи сторонніх об'єктів у рідині, обумовлена силами акустичного випромінювання

Interaction of foreign bodies in liquid caused by the acoustic radiation field

¹Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, 03057, м. Київ, вул. Петра Нестерова, 3
e-mail: opzhuk1939@gmail.com
²Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е,
e-mail: y.zhuk@i.ua

¹Timoshenko Institute of Mechanics, NAS of Ukraine, 3, Petro Nesterov str., Kyiv 03057
e-mail: opzhuk1939@gmail.com
²Taras Shevchenko National University of Kyiv, 4e, Glushkov ave., Kyiv 03680
e-mail: y.zhuk@i.ua

Розглянуто задачу про взаємодію двох сторонніх об'єктів, розташованих у рідині в полі акустичної хвилі, яка поширюється вздовж лінії розташування цих тіл. Узагальнено метод розв'язання задачі, який полягає у дослідженні лінійної задачі розсіювання первинної хвилі на сторонніх об'єктах, обчисленні гідродинамічних сил, які діють на кожний об'єкт, з наступним осередненням їх в часі. В рамках цього підходу виведено формулу для обчислення акустичної радіаційної сили (АРС) для випадку, коли сторонні тіла є краплями рідини, що розташовані в зовнішній рідині. Досліджено вплив на акустичну радіаційну силу частоти падаючої хвилі, відстані між краплями, їх радіусів і фізичних параметрів рідин.

Ключові слова: ідеальна рідина, плоска акустична хвиля, рідка сферична крапля, гідродинамічна сила, акустична радіаційна сила.

The problem of interaction of two foreign bodies placed in a liquid in an acoustic field propagating along the line connecting the bodies is under investigation. An approach is elaborated to characterize the interaction between the bodies caused by the acoustic radiation forces that are the time-constant components of hydrodynamic forces acting upon the bodies located in the outer liquid medium. For example of the method application, propagation of the plane acoustic wave along the center line of two liquid spherical drops placed into a space filled with another liquid is under investigation. Study of the acoustic radiation forces is performed in the frame of two-step procedure. The first step comprises solution of the linear problem of incident wave diffraction on the bodies. The problem is solved by the variable separation method. To satisfy the boundary conditions on spherical surfaces, the expansion of the incident and reflected wave potentials over the spherical wave functions are used. The second step is calculation of the hydrodynamic forces acting upon each body followed by time averaging of forces determined. The analytical formula for the acoustic radiation force calculation is derived for the case under consideration. It is established that value of the acoustic radiation force affecting each liquid drop depends significantly on the incident wave frequency, densities, speed of sound in the outer and internal liquid as well as on the radius and distance between drops.

Key Words: ideal liquid, plane acoustic wave, liquid spherical drop, hydrodynamic force, acoustic radiation force.

Статтю представив академік НАН України Перестюк М.О.

1. Вступ

Різні питання щодо руху і взаємодії газових

бульбашок, крапель рідини в іншій рідині розглядалися в роботах [1-3]. Значний інтерес для технологічних процесів, у яких використовується дія акустичних хвиль, має вивчення руху крапель

рідини під дією радіаційних сил (коагуляція і седиментація аерозолів, дегазація, створення об'ємної сили в невагомості та інші). Публікації досліджень, присвячених різним питанням, пов'язаним з дією радіаційних сил на тверді і рідкі сторонні об'єкти в рідині, наведено в роботах [1-3]. У даній статті розглядається випадок поширення плоскої акустичної хвилі в рідині вздовж прямої, на якій знаходяться центри двох сферичних крапель іншої рідини, ніж зовнішня.

2. Постановка задачі дифракції та її розв'язування

Будемо вважати, що ідеальна стислива рідина густини ρ_0 , в якій звук поширюється зі швидкістю a_0 , заповнює весь простір. У ній знаходяться дві сферичні краплі іншої ідеальної рідини, відстань між центрами яких l . Густина рідини в краплі №1 ρ_1 , швидкість звуку в рідині краплі a_1 , а радіус сферичної краплі R_1 . Відповідно в краплі №2 - ρ_2, a_2 і R_2 . Головна система координат – прямокутна декартова $Oxyz$, центр якої знаходиться на середині відстані ℓ між центрами сферичних крапель. З краплями також зв'яжемо системи декартових координат $O_s x_s y_s z_s$ ($s=1,2$) і сферичні системи координат $O_s r_s \theta_s \varphi_s$ ($s=1,2$) (рис.1). Будемо виходити з моделі ідеальної стисливої баротропної рідини і силу її дії на сферичну краплю вирахуємо із умови потенціального обтікання краплі. Номером 1 домовимось позначати краплю, на яку хвиля падає першою, а номером 2 – другу краплю.

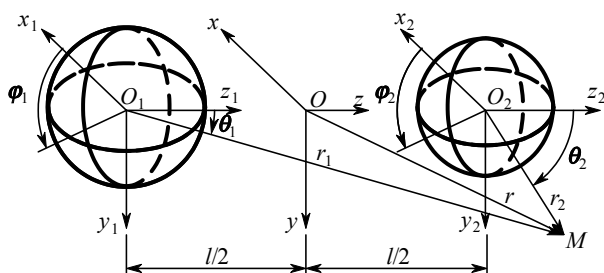


Рис. 1. Система двох рідких крапель в рідині

Коротко викладемо постановку задачі (деталі див. у [3]). Нехай Φ потенціал поля швидкості в зовнішній рідині, який становить суму потенціалу Φ_i первинної хвилі і потенціалів $\Phi_d^{(s)}$ ($s=1,2$) розсіяних на краплях хвиль. Тоді тиск p в зовнішній рідині можна вирахувати, скориставшись одержаним потенціалом, з точністю до величин, що мають порядок квадратів числа Маха, за формулою [2,3]

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho_0 (\text{grad } \Phi)^2 + \frac{\rho_0}{2a_0^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2, \quad (1)$$

в якій потенціал Φ є розв'язком хвильового рівняння

$$\Delta \Phi - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

Обчислення радіаційної сили, яка діє на об'єкти в рідині, зводиться до усереднення в часі гідродинамічної сили

$$\mathbf{F} = - \iint_S p \mathbf{N} dS, \quad (3)$$

де $\mathbf{N}$ – вектор одиничної нормалі до зовнішньої поверхні S об'єкта. Лінійність рівняння (2) дозволяє використати принцип суперпозиції при визначенні потенціалу поля швидкості у випадку системи об'єктів у рідині, отже розв'язати задачу про їх взаємодію.

Нехай потенціал первинної хвилі, який є розв'язком рівняння (1.2), подається виразом

$$\Phi_i = A \exp[i(kz - \omega t)], \quad (4)$$

де A – амплітуда, ω – кругова частота, $k = \omega/a_0$ – хвильове число, t – час.

Первинна хвиля з потенціалом Φ_i поширюється в додатному напрямі осі Oz . Хвильове поле в зовнішній рідині утворюється в результаті інтерференції первинної хвилі (4) і хвиль, розсіяних від сферичних крапель

$$\Phi = \Phi_i + \sum_{s=1}^2 \Phi_d^{(s)}. \quad (5)$$

Граничні умови вимагають неперервності радіальних компонент швидкості зовнішньої і внутрішньої рідини на поверхнях крапель і неперервності величини тиску при переході через поверхні крапель. Їх запишемо в такому вигляді:

$$v_{r_s}^{(s)} \Big|_{r_s=R_s} = \bar{v}_{r_s}^{(s)} \Big|_{r_s=R_s}; \quad p^{(s)} \Big|_{r_s=R_s} = \bar{p}^{(s)} \Big|_{r_s=R_s}. \quad (6)$$

Зауважимо, що потенціали розсіяних на краплях хвиль повинні задовольняти також умовам випромінювання на нескінченності. При формулюванні граничних умов на поверхнях сферичних крапель ми не враховуємо поверхневий натяг в краплях і вважаємо, що амплітуда коливань поверхні краплі є малою величиною і тому радіус краплі приймаємо незмінним. Зазначимо, що у

формулах (6) риска над символом позначає величини, які характеризують стан рідини, яка знаходиться в краплях.

Застосування методу, детально описаного у [2,3], дозволяє звести задачу визначення потенціалів полів швидкості у зовнішній рідині й рідині крапель до розв'язання нескінченної системи алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів $A_n^{(s)}$ і $\bar{A}_n^{(s)}$, $s=1,2$ у розвиненнях цих потенціалів у ряди Фур'є по сферичних хвильових функціях

$$\begin{aligned} & kh_n^{(1)'}(kR_s)A_n^{(s)} - k_s j_n'(k_s R_s)\bar{A}_n^{(s)} + kS_n^{(s)} j_n'(kR_s) = \\ & = -2Ake^{(-1)^s ikl/2} i^n j_n'(kR_s), \quad s=1,2; \quad (7) \\ & \rho_0 h_n^{(1)}(kR_s)A_n^{(s)} - \rho_s j_n(k_s R_s)\bar{A}_n^{(s)} + \\ & + \rho_0 S_n^{(s)} j_n(kR_s) = -2A\rho_0 e^{(-1)^s ikl/2} i^n j_n(kR_s). \end{aligned}$$

Нескінченна система алгебраїчних рівнянь (7) має єдиний розв'язок $\{A_n^{(s)}, \bar{A}_n^{(s)}\}$, $n=0,1,2,\dots$, який знаходимо методом редукції. Обчисленням цих коефіцієнтів формально закінчується визначення потенціалів полів швидкості в зовнішній рідині і в рідині крапель. Заданий степінь точності забезпечується порівнянням результатів обчислень для послідовно зростаючого числа рівнянь.

2. Визначення радіаційних сил, які діють на сферичні краплі

Для обчислення гідродинамічної сили, яка діє на краплю, будемо застосовувати формулу (1) для тиску в рідині у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} p^{(s)} = & \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{a_0^2} \left(\frac{\partial \Phi^{(s)}}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{\partial \Phi^{(s)}}{\partial r_s} \right)^2 - \\ & - \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{r_s^2} \left(\frac{\partial \Phi^{(s)}}{\partial \theta_s} \right)^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Осереднюючи внесок кожного з доданків у (8) по поверхні краплини і за період падаючої хвилі, отримаємо відповідно

$$\begin{aligned} \langle F_{z1}^{(s)} \rangle = & -2\pi\rho_0 (kR_s)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} \times \\ & \times (K_n^{(s)} K_{n+1}^{(s)} + L_n^{(s)} L_{n+1}^{(s)}), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \langle F_{z2}^{(s)} \rangle = & 2\pi\rho_0 (kR_s)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} \times \\ & \times (K_n^{(s)'} K_{n+1}^{(s)'} + L_n^{(s)'} L_{n+1}^{(s)'}), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \langle F_{z3}^{(s)} \rangle = & 2\pi\rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} \times \\ & \times (K_n^{(s)} K_{n+1}^{(s)} + L_n^{(s)} L_{n+1}^{(s)}). \end{aligned} \quad (11)$$

Додаючи (9)-(11), отримуємо остаточний вираз для акустичної радіаційної сили, що діє на окрему краплю

$$\begin{aligned} \langle F_z^{(s)} \rangle = & 2\pi\rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} \times \\ & \times \left\{ (K_n^{(s)} K_{n+1}^{(s)} + L_n^{(s)} L_{n+1}^{(s)}) [n(n+2) - \alpha_s^2] + \right. \\ & \left. + (K_n^{(s)'} K_{n+1}^{(s)'} + L_n^{(s)'} L_{n+1}^{(s)'}) \alpha_s^2 \right\}, \quad \alpha_s = kR_s. \end{aligned} \quad (12)$$

Вирази для $K_n^{(s)}$, $L_n^{(s)}$, $K_n^{(s)'}$ і $L_n^{(s)'}$ наведені у статті [3].

3. Числові результати та їх аналіз

Із застосуванням розробленого підходу досліджено задачу про визначення акустичних радіаційних сил (АРС), що діють на дві сферичні краплі тетраклориду карбону ($a_{1,2} = 926$ м/с, $\rho_{1,2} = 1594$ кг/м³), розташовані у зовнішній рідині – воді ($a_0 = 1500$ м/с, $\rho_0 = 1000$ кг/м³) під дією плоскої звукової хвилі, що поширюється вздовж лінії центрів краплин.

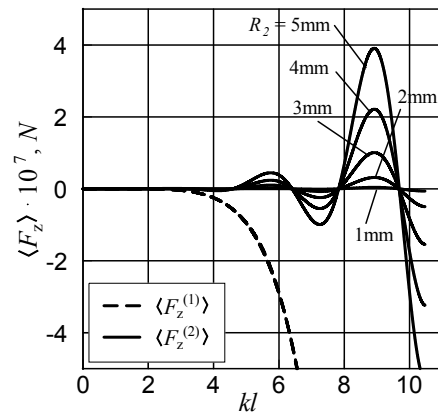


Рис. 2. Залежності АРС від частоти падаючої звукової хвилі при $R_1 \geq R_2$.

На Рис. 2 показано залежність АРС, що діють на першу і другу краплю, $\langle F_z^{(1)} \rangle$ (штрихова лінія) і $\langle F_z^{(2)} \rangle$ (суцільна лінія) відповідно, від частоти падаючої звукової хвилі. При цьому геометричні

параметри системи є наступними: $R_1 = 5$ мм, значення радіусу другої краплі, R_2 , вказані біля відповідних графіків. Відстань від центрів краплин $\ell = 50$ мм. Штрихові лінії для всіх значень R_2 співпадають з точністю до зображення на рисунку, вказуючи, що величина АРС, що діє на першу краплю для даних параметрів не залежить від радіусу другої краплі.

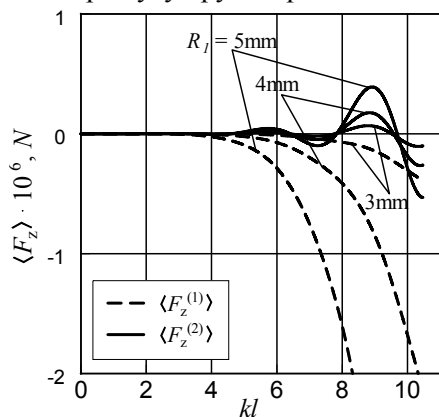


Рис. 3. Залежності АРС від частоти падаючої звукової хвилі при $R_1 \leq R_2$.

На Рис. 3 показано залежності АРС від частоти падаючої звукової хвилі, аналогічні залежностям, показаним на Рис. 2, для випадку, коли радіус першої краплі є меншим від радіусу другої краплі. Штриховими і суцільними кривими показані акустичні радіаційні сили, $\langle F_z^{(1)} \rangle$ і $\langle F_z^{(2)} \rangle$, що діють на першу і другу краплю відповідно.

З Рис. 2 і 3 видно, що при $R_1 \leq R_2$, на відміну від випадку $R_1 \geq R_2$, величина $\langle F_z^{(1)} \rangle$ суттєво залежить від радіусу першої краплі R_1 .

В обох випадках вона є направленою в сторону, протилежну напрямку поширення падаючої хвилі. При цьому АРС, що діє на другу краплю, змінюється як за величиною, так і за

напрямком у залежності від частоти. Крім того, існують певні її значення, при яких $\langle F_z^{(2)} \rangle = 0$, тобто друга крапля залишається нерухомою.

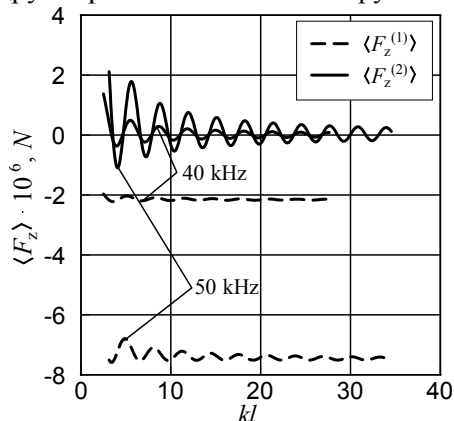


Рис. 4. Залежність АРС від відстані між центрами крапель, ℓ , на заданій частоті.

На Рис. 4 показана залежність АРС від відстані між центрами крапель, ℓ , на заданій частоті для системи двох крапель тетраклориду карбону у воді. Дані наведені для випадку рівних радіусів краплин $R_1 = R_2 = 5$ мм. Криві для частот 40 і 50 кГц позначені на рисунку. Із збільшенням відстані між краплями взаємодія зменшується. Найбільший рівень взаємного впливу спостерігається при великих значеннях частоти на малій відстані між краплями.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за фінансової підтримки Національного фонду досліджень України (Проект 2020.02/0112 «Дифракційні процеси і радіаційні сили в обмежених гідропружних системах»).

Список використаних джерел

1. King L.V. On the Acoustic Radiation Pressure on Spheres / L.V. King // Proc. Roy. Soc. Ser. A. – 1934. – 147, №861. – P. 212-240.
2. Zhuk A.P. Effect of acoustic radiation on a spherical drop of liquid / A.P. Zhuk // Int. Appl. Mech. – 2007. – vol. 43, No. 7. – P. 726-733.
3. Жук О.П. Про взаємодію сферичних крапель рідини в радіаційному полі акустичної хвилі / О.П. Жук, Я.О. Жук, Т.В. Клімчук // Вісник КНУ. Сер.: Фіз.-мат. науки. – 2023. – № 1. – С. 61-64.

References

1. KING, L.V. (1934) On the Acoustic Radiation Pressure on Spheres. *Proc. Roy. Soc. Ser. A*. **147** (861). p.212-240.
2. ZHUK, A.P. (2007) Effect of acoustic radiation on a spherical drop of liquid. *Int. Appl. Mech.* **43**(7), p. 726-733.
3. ZHUK, O.P., ZHUK, Y.A. & KLIMCHUK, T.V. (2023) Pro vzayemodiu sferychnykh krapel ridyny v radiatsiynomy poli akustychnoyi hvyli. *Visnyk KNU. Ser.: Fizyko-Math. nauky*. No. 1. p. 61-64.

Надійшла до редколегії 18.08.23

УДК 531.7:621.763

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.15>

Уве

Жук Я. О.¹, д.ф.-м.н., проф.,
Мельниченко М. М.¹, к.ф.-м.н., с.н.с.,
Андрущенко В. О.¹, провідний інженер,
Кір'єв А. М.¹, провідний інженер,
Пучко Н.П.¹, провідний математик,
Водотовка М.А.¹, електрослюсар

Y. O. Zhuk¹, Dr. Sc., Prof.,
M. M. Melnichenko¹, PhD,
V. A. Andruschenko¹, Senior Engineer,
A. M. Kiriev¹, Senior Engineer,
N. P. Puchko¹, Lead. Math.
M. A. Vodotovka¹, Electrical fitter

Експериментальне вивчення руйнування матеріалів після ударно- хвильового навантаження

Experimental study of destruction of materials after shock-wave loading

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4 е,
e-mail: realcrystallab@univ.kiev.ua

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4 e,
e-mail: realcrystallab@univ.kiev.ua

У роботі проведені систематичні дослідження динаміки процесів руйнування та еволюції дефектів на прикладі зразків із штучного каменю. При експериментальному дослідженні зразків зі штучного каменю після ударно-хвильового навантаження спостерігається утворення радіальних тріщин, а також зародження та рух локальних тріщин в різних місцях зразків. Останнє дає можливість стверджувати про наявність складного багаторівневого руйнування зразків під дією ударно-хвильового навантаження.

Ключові слова: ударно-хвильовий пристрій, вибух металевої фольги, відкольне руйнування, радіальна тріщина, локальна тріщина.

In work, systematic studies of the dynamics of destruction processes and the evolution of defects are carried out on the example of artificial stone samples. During the experimental study of samples made of artificial stone after shock wave loading, destruction of the samples was not observed. At the same time, only the formation of radial cracks is observed. In contrast to ceramics, under the same load conditions, the rate of crack growth in artificial stone samples is, on average, 75 km/s. Software tools for 3D surface reconstruction, with high spatial resolution, were used to study the initiation and movement of cracks after shock-wave loading. 3D reconstruction of the surface makes it possible to observe and study the entire pattern of crack growth from the center to the periphery of the sample. The study and analysis of individual parts of the crack were carried out, particularly in the areas where their bifurcation and further growth occur. The nucleation and movement of local cracks in different places of the samples were also observed. The latter makes it possible to assert the existence of complex multi-level destruction of samples under the influence of shock-wave loading.

Key Words: shock wave device, metal foil explosion, spalling failure, radial crack, local crack.

Статтю представив член-кореспондент НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Розвиток авіаційно-космічної та військової техніки, енергетики та інших галузей промисловості викликає необхідність детального експериментального вивчення реакції різних конструкційних матеріалів на ударно-хвильове навантаження. Аналіз ударно-хвильових явищ у твердих тілах дозволяє встановити особливості

перебігу деформаційних процесів при високих швидкостях впливу. В даний час ще не існує єдиної теорії, яка б пояснювала ключові ефекти, що визначають пружно-пластичні властивості та динамічну міцність матеріалів при інтенсивних навантаженнях. Особливості поведінки металів та керамік в умовах динамічного та ударно-

хвильового навантаження, обумовлених розвитком дефектів, є предметом сучасних активних досліджень, які складаються з експериментального вивчення поведінки матеріалів та розробки методів широкодіапазонного моделювання.

Довгий час отримання плоских нестационарних ударних хвиль для цілей вивчення термодинамічних і механічних властивостей твердих і рідких речовин під дією імпульсного тиску проводилося традиційними методами, такими як підриг заряду хімічної вибухової речовини, розташованої на поверхні зразка, або ударом тонкої пластини, попередньо розігнаної продуктами вибуху, або електричною гарматою [1,2]. Використання цих методів вивчення механічних властивостей матеріалів в умовах великих швидкостей деформації при малих імпульсних навантаженнях обмежено або критичною товщиною вибухової речовини, або стійкістю прискорення тонких пластин.

Тому для цих цілей в даний час використовується електричний вибух металеві фольги, що розташовується на поверхні випробуваних зразків. Метод електричного вибуху передбачає можливість швидкого перетворення електромагнітної енергії на теплову енергію матеріалу фольги і забезпечує отримання згасаючих ударних хвиль з амплітудою від кількох одиниць до десятків ГПа [3-5]. При цьому експериментально доведено, що метод електричного вибуху фольги дозволяє проводити вивчення механічних властивостей при плоскому імпульсному навантаженні. Ударні хвилі, ініційовані електричним вибухом провідників у різних середовищах, знаходять широке застосування завдяки можливості керувати їх характеристиками в широких діапазонах шляхом зміни параметрів розрядного RLC-контуру, розміром та матеріалом провідника, що вибухає. Дослідження динамічного руйнування твердих тіл при ударно-хвильовому навантаженні демонструють ряд ефектів [6], що суперечать класичним моделям міцності та тріщиностійкості [7]. Останнє має дуже важливе значення, оскільки динамічне руйнування є визначальним при пробиванні броні та дробленні снарядів. При цьому складність динамічних досліджень полягає в необхідності проводити реєстрацію параметрів процесу в мікро секундному часовому діапазоні, а для підвищення інформативності необхідно оцінювати поведінку матеріалів при різних видах навантаження та руйнування: у плоских хвилях

навантаження, при розвитку одиночної тріщини та при пробитті перешкоди.

Специфіка ударно-хвильових впливів полягає в тому, що через малу тривалість часу навантаження практично відсутній взаємний вплив окремих ділянок навантажуваного тіла, що містять будь-які великі дефекти, і відповідно їх внесок у процес руйнування. Крім того, при цьому розвиваються екстремально високі швидкості деформування, відбувається розігрів речовини, змінюється сам механізм пластичної деформації (наприклад, у металах відбувається активування додаткових площин ковзання, збільшується внесок двійникування в деформацію навіть для тих матеріалів, де у звичайних умовах навантаження деформаційні двійники не утворюються).

Актуальність досліджень у цій галузі обумовлена також необхідністю розробки математичних моделей, здатних описати зв'язок пружно-пластичної поведінки та руйнування матеріалів з кінетикою накопичення дефектів. При цьому подальші дослідження змін міцності на мікрорівні та механізмів пластичного деформування сприятимуть конструюванню нових високоміцних матеріалів та вдосконаленню технології їх обробки.

Зразки і методи вимірів

Головна мета роботи полягала у розробці методики експрес-діагностики для експериментального визначення міцнісних властивостей керамічних, скляних і полімерних матеріалів при їх ударно-хвильовому руйнуванні.

З цією метою авторами був розроблений ударно-хвильовий експериментальний пристрій, який ґрунтується на використанні специфіки ударно-хвильових впливів. Експериментальний пристрій розроблено для тестування динамічної міцності таких матеріалів як кераміка, скло, та оргскло різної товщини. Ударно-хвильовий пристрій дозволяє генерувати пружний імпульс стиснення до 5 ГПа протягом менше 0,4 мікросекунди на площі в кілька десятків квадратних міліметрів. При цьому тонка металева фольга затискається між двома гладкими пластинами (наприклад, зі скла) і вибухає (розплавляється та випаровується) від розряду накопичувального конденсатора. Хвиля стиску доходить до верхньої вільної межі випробуваної пластини і, відбиваючись від неї, формує хвилю руйнування, яка забезпечує конусне відкольне руйнування. За допомогою такого пристрою можливо досить точно

визначати величину динамічної міцності, по початку відкольного руйнування, і, таким чином, модифікувати технологічний процес до отримання необхідних параметрів міцності, або провести порівняння і відбір матеріалів для конкретних цілей.

Результати та їхнє обговорення

У роботі були проведені систематичні дослідження динаміки процесів руйнування для зразків з штучного каменю, виготовленого за заводськими вимогами. Штучний камінь створюють з крихти природного каменю і в першу чергу – кварциту. Характеристики міцності кварциту дуже високі. Штучний камінь перевершує не тільки мрамур, а й граніт за всіма показниками міцності: на удар, на вигин, на стиск та на стиск при охолодженні. Розмір зразка становив 60 мм на 60 мм при товщині 3 мм. При

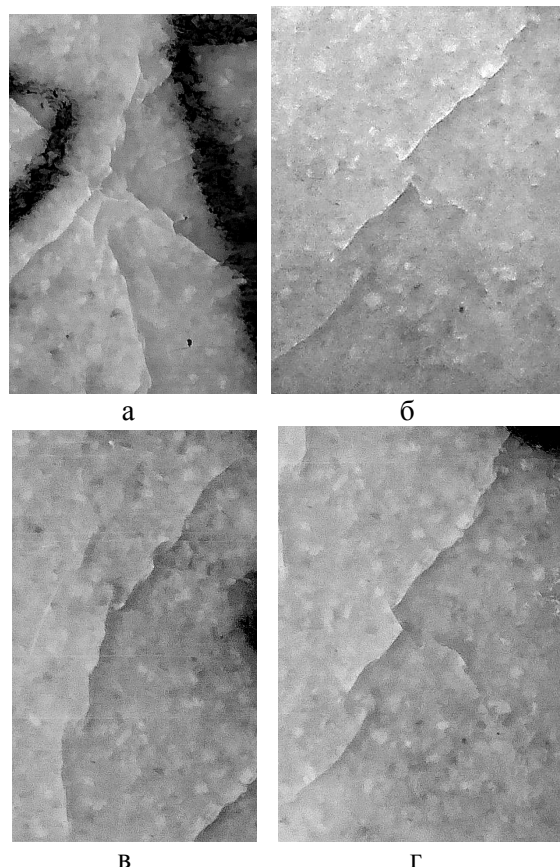


Рис. 1 Зображення тріщин після ударно-хвильового навантаження: а- центральна частина, б та в-середня частина, г-периферія зразка (збільшення у 5 разів).

експериментальному дослідженні зразків зі штучного каменю після ударно-хвильового навантаження не спостерігається руйнування зразків. При цьому спостерігається лише утворення радіальних тріщин.

В роботі також було проведено вивчення та аналіз окремих частин тріщин зокрема на ділянках де відбувається їх роздвоєння та подальший ріст рис. 1.

Дуже важливим є можливість вивчати ріст тріщини з роздвоєнням рис. 2а,б. Після роздвоєння тріщини енергії для росту вистачає як правило лише на одну гілку роздвоєної тріщини рис. 2а.

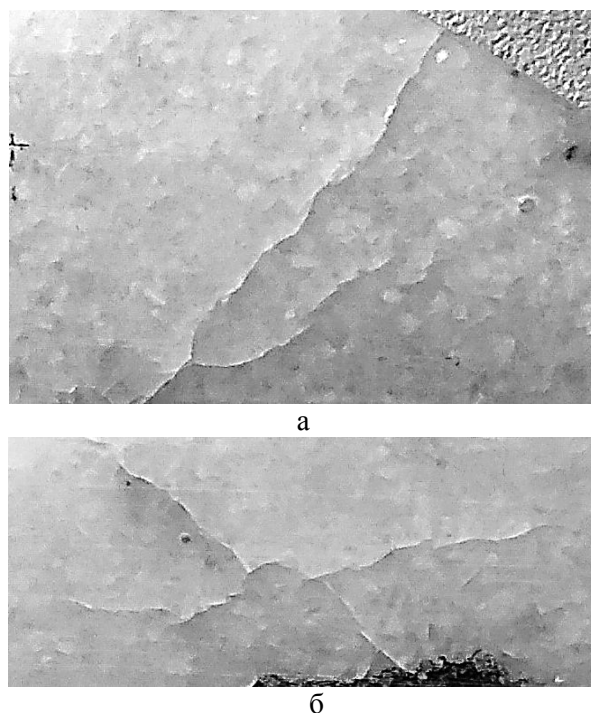


Рис. 2 Зображення окремих частин тріщини на ділянках де відбувається їх роздвоєння - а та подальший ріст - б (збільшення у 5 разів).

Отримані результати по дослідженню утворення та руху тріщин після ударно-хвильового навантаження зразків штучного каменю дають можливість провести оцінку швидкості росту тріщин у таких зразках. На відміну від кераміки при одних і тих же умовах навантаження швидкість росту тріщин у зразках штучного каменю в середньому дорівнює 75 км/с, що майже у два рази менше ніж у кераміці.

Для прецизійного вивчення зародження та руху тріщин після ударно-хвильового навантаження в роботі використовували програмні засоби для 3D реконструкції поверхні з високою просторовою роздільною здатністю. На рис. 3 продемонстровано отриману 3D поверхню периферійної частини зразка штучного каменю. 3D реконструкція поверхні дає можливість спостерігати та вивчати всю картину росту тріщин від центру до периферії зразка. Аналіз рис. 3 вказує на можливість вивчати в деталях рух тріщин до краю зразків під дією

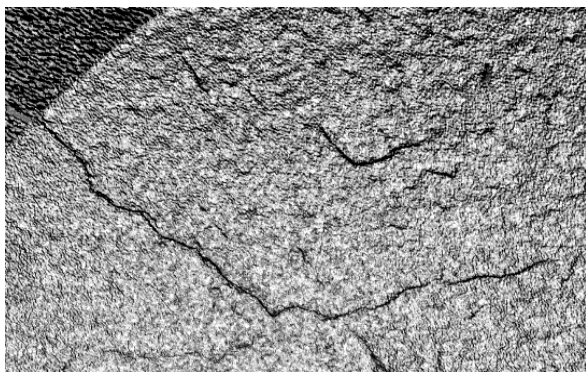


Рис. 3 3D зображення поверхні на периферії зразка із штучного каменю.

високошвидкісного ударного навантаження в

незалежності від кутів освітлення необхідних при металографічних дослідженнях. При цьому спостерігається також зародження та рух локальних тріщин в різних місцях зразків. Останнє дає можливість стверджувати про наявність складного багаторівневого руйнування зразків під дією ударно-хвильового навантаження.

Всі одержані експериментальні результати є необхідними і дуже важливими для математичного моделювання процесів тріщиноутворення з метою одержання нових матеріалів з високими значеннями міцності необхідними для протидії високошвидкісним ударним навантаженням.

Список використаних джерел

References

1. Zirnheld J.L. Electric explosion of aluminum metallized film / J.L. Zirnheld, S. Olabisi, K. Burke, T.M. Disanto, H.L. Moore, and H. Singh // IEEE Transactions on plasma science. – 2009. – vol. 37(12). – P. 2378–2384.
2. Saxena A.K. Shock experiments and numerical simulations on low energy portable electrically exploding foil accelerators / A.K. Saxena, T.C. Kaushik, S.C. Gupta // Review of scientific instruments. – 2010. – vol. 81(3). – 033508.
3. Muffoletto D.P. Effects of Inductance on the Pressure Produced from Exploding Aluminum Metallized Capacitor Grade Polypropylene Films / D.P. Muffoletto, K.M. Burke, J.L. Zirnheld, and S.O. Olabisi // IEEE Transactions on Radiation and Plasma Medical Sciences. – 2018. – vol. 2(6). – P. 624–628.
4. Surkaev A.L. Millisecond Electric Explosion of Metal Conductors / A.L. Surkaev, V.I. Usachev, and M.M. Kumysh // Technical Physics Letters. – 2011. – vol. 37(12). – P. 1135–1138.
5. Grigor'ev A.N. Pressure Generated by the Electric Explosion of Metal Foils / A.N. Grigor'ev A.V. Pavlenko // Technical Physics Letters. – 2009. – vol. 35(9). – P. 865–868.
6. Kanel G.I. Shock-Wave Phenomena and the Properties of Condensed Matter / G.L. Kanel, S.V. Razorenov, V.E. Fortov // Springer New York. – 2013. – P. 322.
7. Kundu T. Fundamentals of fracture mechanics / T. Kundu // CRC Press. – 2008. – P. 305.
1. ZIRNHELD J.L., OLABISI S., BURKE K., DISANTO T.M., MOORE H.L. JR., AND SINGH H. (2009) *Electric explosion of aluminum metallized film*. IEEE Transactions on plasma science. 37(12). p. 2378–2384.
2. SAXENA A.K., KAUSHIK T.C., GUPTA S.C. (2010) *Shock experiments and numerical simulations on low energy portable electrically exploding foil accelerators*. Review of scientific instruments. 81(3). 033508.
3. MUFFOLETTO D.P., BURKE K.M., ZIRNHELD J.L., AND OLABISI S.O. (2018) *Effects of Inductance on the Pressure Produced from Exploding Aluminum Metallized Capacitor Grade Polypropylene Films*. IEEE Transactions on Radiation and Plasma Medical Sciences. 2(6). p. 624–628.
4. SURKAEV A.L., USACHEV V.I., AND KUMYSH M.M. (2011) *Millisecond Electric Explosion of Metal Conductors*. Technical Physics Letters. 37(12). p. 1135–1138.
5. GRIGOR'EV A.N., PAVLENKO A.V. (2009) *Pressure Generated by the Electric Explosion of Metal Foils*. Technical Physics Letters. 35(9). p. 865–868.
6. KANEL G.I., RAZORENOV S.V., FORTOV V.E. (2013) *Shock-Wave Phenomena and the Properties of Condensed Matter*. Springer New York. p. 322.
7. KUNDU T. (2008) *Fundamentals of fracture mechanics*. CRC Press. p. 305.

Надійшла до редколегії 25.06.23

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.16>

УДК 539.375

Зражевський Г.М.¹, к.ф.-м.н., доцент,
Зражевська В.Ф.², к.ф.-м.н., доцент.

Застосування BPOE та CVaR при визначенні оптимальних керувань формами коливань круглої платівки

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03127, м. Київ, пр-т
Глушкова 4,
e-mail: greg.zrazhevsky@knu.ua

² Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря
Сікорського», 03056, м. Київ, пр-т Перемоги,
37,
e-mail: vera.zrazhevskaya@gmail.com

G.M. Zrazhevsky¹, PhD,
V.F. Zrazhevskaya², PhD.

Application of BPOE and CVaR in the determination of optimal controls of round plate oscillations

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03127, Kyiv, Glushkova av., 4,
e-mail: greg.zrazhevsky@knu.ua

² National Technical University of Ukraine "Igor
Sikorsky Kiev Polytechnic Institute", 03056, Kyiv,
Peremogi av., 37,
e-mail: vera.zrazhevskaya@gmail.com

Робота присвячена моделюванню вимушених моногармонічних коливань круглої платівки, що опирається на активні опори з метою визначення оптимального розташування мінімальної кількості опор та оптимального керування опорами, що забезпечують відхилення від заданої форми хвильового руху поверхні платівки з необхідною точністю. Припускалось, що на платівці розташовується ансамбль малих неоднорідностей (дефектів) з невідомими геометричними та фізичними характеристиками. Дефекти моделювались сингулярностями високого порядку, що забезпечують еквівалентність розв'язання граничної задачі з точністю до заданого степеня малого параметра, що є характерною площею областей окремих дефектів. За основний метод дослідження задачі обрана стохастична оптимізація. В якості критерію оптимальності розглянута ймовірність перевищення середньоквадратичним відхиленням форми коливань керованої платівки від заданого хвильового профілю (ймовірність відмови). Формування кількісної характеристики ймовірності відмови проводилось шляхом побудови сценаріїв зі згенерованими дефектами з випадковими характеристиками. Запропоновано використання мір ризику bPOE та CVaR, розглянутих в [1], що є квазіопуклими відносно випадкових величин.

Ключові слова: керування, коливання платівки, bPOE, CVaR.

The work is devoted to the modeling of forced mono harmonic oscillations of a circular plate on active supports in order to determine the optimal location of the minimum number and optimal controls of supports, which ensure the deviation from the given shape of the wave motion of the plate surface with the required accuracy. It was assumed that the plate contains an ensemble of small inhomogeneities (defects) with unknown geometric and physical characteristics. Defects were modeled by high-order singularities, which ensure the equivalence of the boundary value problem solution with specified accuracy to a given power of a small parameter, which is the characteristic area of the regions of individual defects. Stochastic optimization is chosen as the main method of problem research. The probability of exceeding the rms deviation of the oscillation form of the controlled plate from the given wave profile (probability of failure) is considered as a criterion of optimality. The formation of a quantitative characteristic of the probability of failure was carried out by constructing scenarios with generated defects with random characteristics. It is proposed to use the risk measures bPOE and CVaR considered in [1], which are quasi-convex with respect to random variables.

Key words: control, vibration of plate, bPOE, CVaR.

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

У роботі узагальнені та розвинуті результати, отримані раніше в [2-4], де досліджуються задачі знаходження оптимальних параметрів механічних пристроїв для збудження та формування хвильового руху. Такі пристрої можна використовувати для генерації, перетворення та передачі інформації та хвильової енергії. В даній роботі, розглянуто задачу модуляції дзеркала, закріпленого на активних опорах. Завдання полягає в пошуку керуючих сил та їх характеристик - точок прикладання, амплітуди та фази сил, які забезпечують найкраще наближення заданої форми та фази коливань дзеркала з урахуванням структурних неоднорідностей (дефектів) з невизначеними геометричними та механічними характеристиками. В області неоднорідностей змінюється щільність матеріалу, модуль Юнга та циліндрична жорсткість, що є невизначеними. Невизначеними є також розташування дефектів, їх розміри та форма (з деякими накладеними обмеженнями). Дослідження складається з детермінованої та стохастичної частин.

В детермінованій частині вважались відомими характеристики дефектів. Вона зведена до задачі знаходження мінімуму функціоналу, що будується на середньоквадратичному відхиленні прогинів платівки від заданого хвильового профілю. Параметрами оптимізації були точки прикладання, амплітуди та фази керуючих сил активних опор [4]. Для прискорення розв'язання граничної задачі рівноваги платівки, розв'язок якої формує цільову функцію оптимізаційної задачі, дефекти моделювались точковими сингулярностями високого порядку згідно з технікою, основи якої розвинуті в [4-5], що забезпечило точність заданого порядку по відношенню до малого параметра - площі області неоднорідності в припущенні не виродження розмірності дефекту. При розв'язанні детермінованої задачі використовувались методи узагальненої функції Гріна та гармонійний аналіз з контролем кількості гармонік при розкладі по коловій координаті платівки.

В стохастичній частині вважалось, що кількість дефектів та їх характеристики є невизначеними чи щодо них є часткова інформація. Відповідно до цього застосовано метод стохастичної оптимізації на основі методу Монте-Карло. Зазвичай у теорії надійності ризик кількісно визначається ймовірністю відмови. Хоча ймовірність відмови дуже популярна, вона

має небажані математичні властивості, такі як некогерентність та розрив для вибірових розподілів. Щоб подолати ці недоліки, у [1] було розроблено нову альтернативну міру ризику — буферизовану ймовірність відмови (BPF). Вона враховує ступінь перевищення порогу відмови і є більш консервативною, ніж класична ймовірність відмови. Буферизована ймовірність перевищення, bPOE, запропонована в [6], узагальнює BPF у випадку, коли поріг відмови системи може бути будь-яким числом (не тільки 0). Ці міри ризику базуються на властивостях міри ризику CVaR [7]. bPOE має виняткові математичні властивості (за загальних умов bPOE є квазіопуклим відносно випадкової величини).

Постановка та розв'язання задачі

Математичною постановкою детермінованої задачі є гранична задача для рівняння відносно прогину серединної поверхні платівки w та згинаючого моменту $\bar{M}$ в області Ω :

$$LL_1L_2w - k^4w = \frac{q}{D_0} + \dots, (x, y) \in \Omega \quad (1)$$

$$L_1L_2w \sum_{j=1}^J \kappa_{Dj} L\theta(P_j) - k^4w \sum_{j=1}^J \kappa_{\rho j} \theta(P_j)$$

з граничними умовами на границі області Γ :

$$\begin{cases} w(x, y) = 0 \\ M_n(x, y) = 0 \end{cases}, (x, y) \in \Gamma \quad (2)$$

де L, L_1, L_2 - лінійні матричні диференціальні оператори [4], $\rho_0 \omega^2 / D_0 = k^4$ - нормоване хвильове число, q - зовнішнє навантаження (керуючі сили, що моделюють активні опори), $\Delta D_j / D_0 = \kappa_{Dj}$, $\Delta \rho_j / \rho_0 = \kappa_{\rho j}$, $j = \overline{1, J}$ - нормовані зміни циліндричної жорсткості та густини в області j -го дефекту, $\theta(P_j)$ - функція області j -го дефекту. В [4] показано, що для еліптичних дефектів має місце:

$$\begin{aligned} L_1L_2w \sum_{j=1}^J \kappa_{Dj} L\theta(P_j) - k^4w \sum_{j=1}^J \kappa_{\rho j} \theta(P_j) = \\ \sum_{j=1}^J \kappa_{Dj} S_{Pj} \{ v_x(\xi_j) \partial^2 \delta(x - X_j) / \partial x^2 \delta(y - Y_j) + \\ 2v_{xy}(\xi_j) \partial \delta(x - X_j) / \partial x \partial \delta(y - Y_j) / \partial y + \\ v_y(\xi_j) \partial^2 \delta(y - Y_j) / \partial y^2 \delta(x - X_j) \} - \\ - k^4 \sum_{j=1}^J \kappa_{\rho j} S_{Pj} w(\xi_j) \delta(x - X_j) \delta(y - Y_j) + O(S_p^2) \end{aligned} \quad (3)$$

де S_{pj} , $j = \overline{1, J}$ - площа j -го дефекту, $S_p = \max S_{pj}$, $\xi_j = (X_j, Y_j)$ - середня точка j -го дефекту, $\delta(\cdot)$ - дельта функція Дірака, $\vec{v}(\xi_j) = -\vec{M}(\xi_j) / (D_0 - \Delta D)$. В цьому дослідженні доведено, що (3) як перше наближення в просторі узагальнених функцій має місце для дефектів довільної форми при умові однозв'язності та не виродження областей дефектів. В цьому випадку під ξ_j треба розуміти центр площі j -го дефекту. Розроблена техніка для отримання наближень правої частини (1) вищих порядків, однак використання вищих наближень покладено тим, що на відміну від першого наближення має місце інтерференція дефектів, а отже принцип суперпозиції не виконується. Використання моделі дефектів (3) та моделювання активних опор точковими силами дозволяє побудувати розв'язок (1) - (2) з використанням узагальненої функції Гріна.

Оптимізаційна задача в детермінованій постановці при зафіксованому ансамблі дефектів з масивом характеристик $D = J, \{\xi_j, \Delta D_j, \Delta \rho_j\}_{j=1}^J$ (кількість дефектів J , їх положення на платівці ξ_j , геометричні та фізичні характеристики $\Delta D_j, \Delta \rho_j$) має вигляд:

$$I(w) = \int_{\Omega} |w(\vec{x}; \vec{R}, \vec{F}; D) - W(\vec{x})|^2 d\Omega_{\vec{x}} \rightarrow \min_{\{\vec{R}, \vec{F}\} \in U} \quad (4)$$

де $\vec{R} = \{x_i, y_i\}_{i=1}^N$ визначає розташування опор, $\vec{F} = \{F_i\}_{i=1}^N$ - комплексні амплітуди сил, що моделюють опори, $W(\vec{x})$ - заданий хвильовий профіль, що має бути наближений. U - область допустимих змін параметрів оптимізації. Оскільки $w(\vec{x}; \vec{R}, \vec{F}; D)$ є розв'язком граничної задачі (1) - (3), то функціонал в (4) не є квадратичним. Показано, що у випадку, коли опори розташовуються на концентричних колах з довільними радіусами, функціонал в (4) є опуклим. У випадку, коли D є стохастичним, $w(\vec{x}; \vec{R}, \vec{F}; D)$ стає випадковою функцією та значення функціоналу в (4) є випадковим. А отже, оптимізаційна задача (4) з врахуванням параметризації $w = w(\vec{x}; \vec{R}, \vec{F}; D)$ має бути трансформована до вигляду мінімізації функції:

$$H(\vec{R}, \vec{F}) = \eta(I(w(\vec{x}; \vec{R}, \vec{F}; D))) \xrightarrow{\vec{R}, \vec{F}} \min_{\{\vec{R}, \vec{F}\} \in U} \quad (5)$$

де $\eta(\cdot)$ є деякою мірою ризику. В проведеному дослідженні в якості міри ризику було використано CVaR та bPOE. За означенням, CVaR (Conditional Value-at-Risk) від випадкової величини X (що характеризують втрати) визначається як математичне очікування значень, що перевищують значення квантілі з рівнем α :

$$CVaR_{\alpha}(X) = E[X : X \geq q_{\alpha}(X)]. \quad (6)$$

де для заданої функції розподілу $F_X(x) = P\{X \leq x\}$, квантілі рівня α визначається як

$$q_{\alpha}(X) = F_X^{-1}(\alpha) = \inf\{x : \alpha \leq F_X(x)\}, \alpha \in (0, 1).$$

CVaR є консервативною оцінкою по відношенню до значення квантілі (VaR - Value-at-Risk), що є природною мірою ризику та часто використовується в теорії надійності, але має суттєво кращі математичні властивості: гладкість та опуклість по відношенню до випадкової величини, отже суттєво спрощує оптимізаційну процедуру. В [7] надається правило для підрахунку CVaR:

$$CVaR_{\alpha}(X) = \min_u \left(u + E[X - u]^+ / (1 - \alpha) \right),$$

де $[\cdot]^+ = \max\{\cdot, 0\}$.

Якщо CVaR (як і VaR) визначає значення в просторі X , тобто середнє значення втрат, що перевищують значення квантілі з заданим рівнем то обернена до неї величина bPOE визначається як обернена величина до CVaR, тобто ймовірність того, що середнє значення втрат перевищить заданий рівень [6]:

$$bPOE_x(X) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \geq \sup X; \\ 1 - CVaR^{-1}(x; X) & \text{if } EX < x < \sup X; \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Аналогічно bPOE є консервативною оцінкою для POE (probability of exceedance): $p_X(x) = P\{X > x\} = 1 - F_X(x)$ та має ті ж властивості, що і CVaR. Використання CVaR чи bPOE є альтернативним, і призводить до однакових результатів.

Результатом досліджень стала розробка програмного пакету в середовищі MATLAB, що дозволяє визначати оптимальні параметри керування при заданій хвильовій формі поверхні кругового дзеркала. В якості засобу розв'язання задач умовної опуклої оптимізації

використовується продукт компанії AORDA
(<http://www.aorda.com>) PSG MATLAB.
Розроблений алгоритм продемонстрував високу

ефективність та продуктивність на рівні real time
calculating.

Список використаних джерел

1. Rockafellar T. On buffered failure probability in design and optimization of structures / T. Rockafellar, J. O. Royset // Reliability Engineering and System Safety. – 2010. - № 95. – P. 499 - 510.
2. Zrazhevsky G. Mathematical Methods to Find Optimal Control of Oscillations of a Hinged Beam (Deterministic Case) / G. Zrazhevsky, A. Golodnikov, S. Uryasev // Cybernetics and Systems Analysis. – 2019. – № 55. – P. 1009 - 1026. – Режим доступу до журн.: <https://doi.org/10.1007/s10559-019-00211-x>
3. Zrazhevsky G. Application of Buffered Probability of Exceedance in Reliability Optimization Problems / G. Zrazhevsky, A. Golodnikov, S. Uryasev // Cybernetics and Systems Analysis. – 2020. – № 56. – P. 476 - 484. – Режим доступу до журн.: <https://doi.org/10.1007/s10559-020-00263-4>
4. Zrazhevsky, G.M. Developing a Model for a Modulating Mirror Fixed on Active Supports. Deterministic Problem / G. M. Zrazhevsky, V.F. Zrazhevskaya, A.N. Golodnikov // Cybernetics and Systems Analysis. – 2022. – № 58. – P. 707 - 712
5. Зражевський Г.М. Моделювання скінченних неоднорідностей дискретними особливостями / Г.М. Зражевський, В.Ф. Зражевська // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2021. - № 1 (135). – С. 138-144.
6. Mafusalov A. Buffered probability of exceedance: mathematical properties and optimization./ A. Mafusalov // SIAM. J. Optim. – 2018. – V. 28. – P. 1077–1103. - Режим доступу до журн.: <https://doi.org/10.1137/15M1042644>
7. Rockafellar R.T. Optimization of conditional value-at-risk / R.T. Rockafellar, S. Uryasev // The Journal of Risk. – 2000. - V. 2. – №. 3. - P. 21-41. - Режим доступу до журн.: <https://doi.org/10.21314/JOR.2000.038>.

References

1. ROCKAFELLAR, T. & ROYSET, J. O. (2010) On buffered failure probability in design and optimization of structures. *Reliability Engineering and System Safety*. 95. p. 499 - 510.
2. ZRAZHEVSKY, G., GOLODNIKOV, A. & URYASEV, S. (2019) Mathematical Methods to Find Optimal Control of Oscillations of a Hinged Beam (Deterministic Case). *Cybernetics and Systems Analysis*. 55. p. 1009-1026.
3. ZRAZHEVSKY, G., GOLODNIKOV, A. & URYASEV, S. (2020) Application of Buffered Probability of Exceedance in Reliability Optimization Problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 56. p. 476-484.
4. ZRAZHEVSKY, G.M, ZRAZHEVSKAYA V.F. & GOLODNIKOV, A.N. (2022) Developing a Model for a Modulating Mirror Fixed on Active Supports. Deterministic Problem. *Cybernetics and systems analysis*. 58. p. 707-712.
5. ZRAZHEVSKY, G.M, & ZRAZHEVSKAYA V.F. (2021) Modelyuvannya skinchennykh neodnorodnostey dyskretnymi osoblyvostyamy. *Zhurnal obchyslyval'noyi ta prykladnoyi matematyky*. 1(135). p. 138-144.
6. MAFUSALOV, A. & URYASEV, S. (2018) Buffered probability of exceedance: mathematical properties and optimization. *SIAM. J. Optim.* 28. p. 1077-1103.
7. ROCKAFELLAR, R.T. & URYASEV S. (2000) Optimization of conditional value-at-risk *The Journal of Risk*. 2 (3). p. 21-41.

Надійшла до редколегії 11.08.2023

УДК 539.375

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.17>

Камінський А. О.¹, д.ф.-м.н., проф.,
Дудик М. В.², к.ф.-м.н., доц.,
Решітник Ю. В.², к.ф.-м.н., доц.

A. O. Kaminsky¹, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
M. V. Dudyk², PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.
Yu. V. Reshitnyk², PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.

Двопараметрична модель зони передруйнування у квазіпружному матеріалі біля вершини міжфазної тріщини

Two-parameter model of the prefracture zone in a quasi-elastic material near the tip of an interface crack

¹ Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН
України, 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3,
e-mail: dfm11@ukr.net

² Уманський державний педагогічний
університет імені Павла Тичини, 20300, м.
Умань, вул. Садова, 2,
e-mail: dudik_m@hotmail.com,
dikhtiarenko_iu@udpu.edu.ua

¹ S.P.Timoshenko Institute of Mechanics of National
Academy of Sciences of Ukraine, 03057, Kyiv,
Nesterov str., 3,
e-mail: dfm11@ukr.net

² Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University,
20300, Uman, Sadova str., 2,
e-mail: dudik_m@hotmail.com,
dikhtiarenko_iu@udpu.edu.ua

Розвинуто модель зони передруйнування, яка в умовах плоскої деформації поширюється з вершини міжфазної тріщини під кутом до плоскої межі розділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів. Зону передруйнування подано лінією розриву переміщення, на якій виконується двопараметричний критерій міцності типу Мізеса – Хілла. Параметрами моделі служать опір відриву і опір зсуву матеріалу, в якому розвивається зона. Модель враховує крихкий і пластичний механізми руйнування і може бути використана для опису квазікрихкого руйнування кусково-однорідного тіла з міжфазною тріщиною. Показано можливість переходу між крихким і пластичним механізмами руйнування при зміні відношення опорів відриву і зсуву матеріалу.

Ключові слова: міжфазна тріщина, зона передруйнування, критерій міцності Мізеса – Хілла.

A model of the pre-fracture zone, which under plane strain conditions extends from the tip of the interface crack at an angle to the plane interface of two different homogeneous isotropic materials, has been developed. The pre-fracture zone is represented by the displacement discontinuity line, on which the strength condition of the Mises - Hill type is satisfied. The parameters of the model are the tensile resistance and shear resistance of the material in which the zone develops. The model takes into account brittle and ductile fracture mechanisms and can be used to describe the quasi-brittle fracture of a piece-homogeneous body with an interface crack. The possibility of a transition between brittle and ductile fracture mechanisms is shown when the ratio of tensile and shear resistance of the material changes.

Key Words: interface crack, pre-fracture zone, Mises-Hill strength criterion.

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ. У механіці руйнування для дослідження процесів в околі концентраторів напружень поширеним є використання різного роду моделей зон передруйнування. Строгий опис процесів передруйнування ускладнений нелінійністю визначальних рівнянь, які задають напружено-деформований стан матеріалу в зоні. Це зумовило впровадження ряду спрощених моделей зон з використанням тих чи інших критеріїв руйнування, які за певних умов допускають аналітичне розв'язання. До таких моделей відносяться, зокрема, модель пластичної зони Дагдей-

ла і зони процесу Леонова – Панасюка, які подають зони передруйнування поверхнями розриву переміщення з заданими критеріальними обмеженнями на компоненти тензора напружень.

Моделі Дагдейла і Леонова – Панасюка використовують однопараметричні критерії руйнування типу Треска – Сен-Венана і спочатку призначались для дослідження зон передруйнування в однорідних матеріалах. Згодом з'явилися приклади їх успішного застосування до моделювання зон передруйнування біля вершин тріщин в кусково-однорідних та анізотропних тілах. Однак ці

моделі викликають питання про достатність використання в них однопараметричних критеріїв у випадку квазікрихкого типу процесів руйнування або за складного характеру навантаження. У зв'язку з цим на увагу заслуговують багатопараметричні критерії руйнування.

У роботах [1, 2] використано двопараметричний критерій міцності типу Мізеса – Хілла [3] для побудови моделей зон передруйнування біля вершини тріщини в ортотропних та кусково-однорідних тілах відповідно. Параметрами моделей служили опір відриву і опір зсуву матеріалу, в якому розвивається зона. Ефективність моделей в [1] була підтверджена експериментально, в [2] – успішним порівнянням передбачуваних та спостережуваних на досліді кутів повороту міжфазної тріщини.

Метою даної роботи є дослідження в рамках моделі [2] впливу процесів пластичного і крихкого механізмів руйнування на формування зони передруйнування біля вершини міжфазної тріщини.

Опис моделі. Розглядається модель маломасштабної зони передруйнування в умовах плоскої деформації біля вершини розкритої міжфазної тріщини, розташованої на плоскій межі розділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів з модулями Юнга E_1, E_2 і коефіцієнтами Пуассона ν_1, ν_2 відповідно. Зону передруйнування подано лінією розриву переміщення, нахиленою під кутом α до межі розділу (рис. 1). Нормальне і дотичне напруження на лінії розриву задовольняють критерій міцності типу Мізеса – Хілла

$$(\sigma_\theta / \sigma_1)^2 + (\tau_{r\theta} / \tau_1)^2 = 1, \quad (1)$$

де σ_1, τ_1 – опори відриву та зсуву першого матеріалу, в якому передбачається утворення зони. Довжина зони передруйнування l вважається значно меншою, ніж довжина тріщини L ($l \ll L$) (рис. 1).

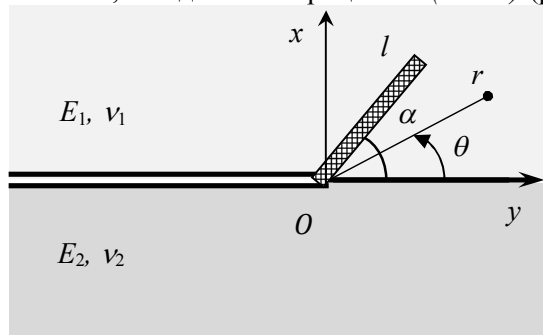


Рис. 1. Модель кусково-однорідного тіла з міжфазною тріщиною і зоною передруйнування

Умову на нескінченності сформульовано у вигляді можливості зшивання шуканого розв'язку на відстанях $l = r = L$ з асимптотикою

розв'язку аналогічної задачі без лінії розриву [4].

За допомогою інтегрального перетворення Мелліна задача про розрахунок параметрів зони зведено до функціонального рівняння Вінера – Гопфа, для якого отримано наближений розв'язок. Використовуючи умову обмеженості напружень в кінці лінії розриву, знайдено рівняння для розрахунку довжини зони l [2]:

$$\left[\frac{G_{11}^{0+}(-1)}{\sigma_1 K^+(-1)} \left(2 \operatorname{Re} (C F_1 l^{\lambda_0} N_1) + \frac{\mathcal{H}_{12}}{2\pi} \right) \right]^2 + \left[\frac{G_{22}^{0+}(-1)}{\tau_1 K^+(-1)} \left(2 \operatorname{Re} (C F_2 l^{\lambda_0} N_2) + \frac{\mathcal{H}_{21}}{2\pi} \right) \right]^2 = 1,$$

де $C = -ie'KL^{-i\omega}$, $e' = \frac{\sqrt{(e + \kappa_1)(1 + e\kappa_2)}}{2\sqrt{2\pi}[(e + \kappa_1)^2 - (1 + e\kappa_2)^2]}$,

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{e + \kappa_1}{1 + e\kappa_2}, \quad e = \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1} \frac{E_1}{E_2}, \quad \kappa_{1(2)} = 3 - 4\nu_{1(2)};$$

$\lambda_0 = -0.5 + i\omega$ – показник сингулярності напружень біля вершини міжфазної тріщини; K – комплексний коефіцієнт інтенсивності напружень, який характеризує величину і конфігурацію зовнішнього навантаження. Решта позначень приведено в [2] і опущено тут через громіздкість. Орієнтація зони передруйнування визначається з умови максимуму величини дисипації енергії в зоні, для якої в [2] отримано відповідний аналітичний вираз. Виведено формули для розкриття тріщини у її вершині $\delta u = \sqrt{\langle u_\theta(0, \alpha) \rangle^2 + \langle u_r(0, \alpha) \rangle^2}$ та середнього значення фазового кута напружень в зоні $\psi = \arctg \frac{(\tau_{r\theta} / \tau_1)}{(\sigma_\theta / \sigma_1)}$.

Числовий аналіз моделі. Дослідимо наслідки моделі щодо впливу процесів пластичного і крихкого механізмів руйнування на параметри зони передруйнування. В якості прикладу розглянемо внутрішню міжфазну тріщину довжиною L у кусково-однорідній площині, навантаженій на нескінченності рівномірно розподіленими тангенціальними і розтягувальними нормальними зусиллями ($\tau_{xy}=q, \sigma_x=p>0$ при $x^2+y^2 \rightarrow \infty$ в декартовій системі координат, зображений на рис. 1). Нормований комплексний КІН в кінці тріщини визначається як $K=K_1+iK_2$ [4], де

$$K_1 = \frac{(p - 2\omega q)\sqrt{\pi L}}{\sqrt{2} \operatorname{ch} \pi \omega}, \quad K_2 = \frac{(2\omega p + q)\sqrt{\pi L}}{\sqrt{2} \operatorname{ch} \pi \omega}.$$

Зовнішнє навантаження задаємо безрозмірним модулем $f = \sqrt{p^2 + q^2} / \sigma_1$ та конфігурацією, що визначається фазовим кутом $\varphi = \arctg(q / p)$. Результати числових розрахунків для сталих ко-

ефіцієнтів Пуассона $\nu_1=\nu_2=0.3$ подано на рис. 2, де графіки *a*, *b*, *c*, *d* відображають залежності від відношення опорів відриву та зсуву матеріалу, в якому виникла зона, відповідно відносної довжини зони передруйнування $x=l/L$, кута α нахилу зони до межі розділу, фазового кута ψ напруження в зоні та нормованого розкриття тріщини у її

$$\text{вершині } \delta \tilde{u} = \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)} \frac{\delta u}{L}.$$

Як впливає з аналізу рис. 2, у залежності параметрів зони передруйнування від відношення опорів відриву і зсуву передбачається два специфічних ефекти. Перший полягає у переході від крихкого характеру руйнування матеріалу до пластичного та проявляється у швидкому зростанні розмірів зони і розкриття тріщини при перевищенні опором відриву σ_1 матеріалу значення опор зсуву τ_1 (рис. 2*a*, *d*). При цьому також змінюється характер залежності кута нахилу зони до межі розділу (рис. 2*b*) і фазового кута напружень в зоні (рис. 2*c*) від відношення σ_1/τ_1 . Даний ефект

може спостерігатися при зміні температури твердих тіл, оскільки при нагріванні опір відриву змінюється мало, тоді як опір зсуву помітно зменшується [5]. Підтвердженням цього можуть бути результати експериментів з дослідження впливу температури на поширення міжфазної тріщини у багатошарових вуглепластикових ламінатах [6]. Як встановлено в [6], кут повороту тріщини від межі розділу двох різнонаправлених шарів зменшується зі збільшенням температури. Цей результат узгоджується зі зменшенням кута нахилу зони передруйнування при збільшенні відношення σ_1/τ_1 (суцільні лінії на рис. 2*b* для $\varphi \leq 0^\circ$) і пов'язаний зі зменшенням опор зсуву матеріалу шару при підвищенні температури. Однак розвинута вище модель не забезпечує кількісний аналіз результатів роботи [6], оскільки не враховує залежність від температури пружних характеристик і теплове розширення матеріалів, що приводить до викривлення межі розділу та появи додаткових напружень.

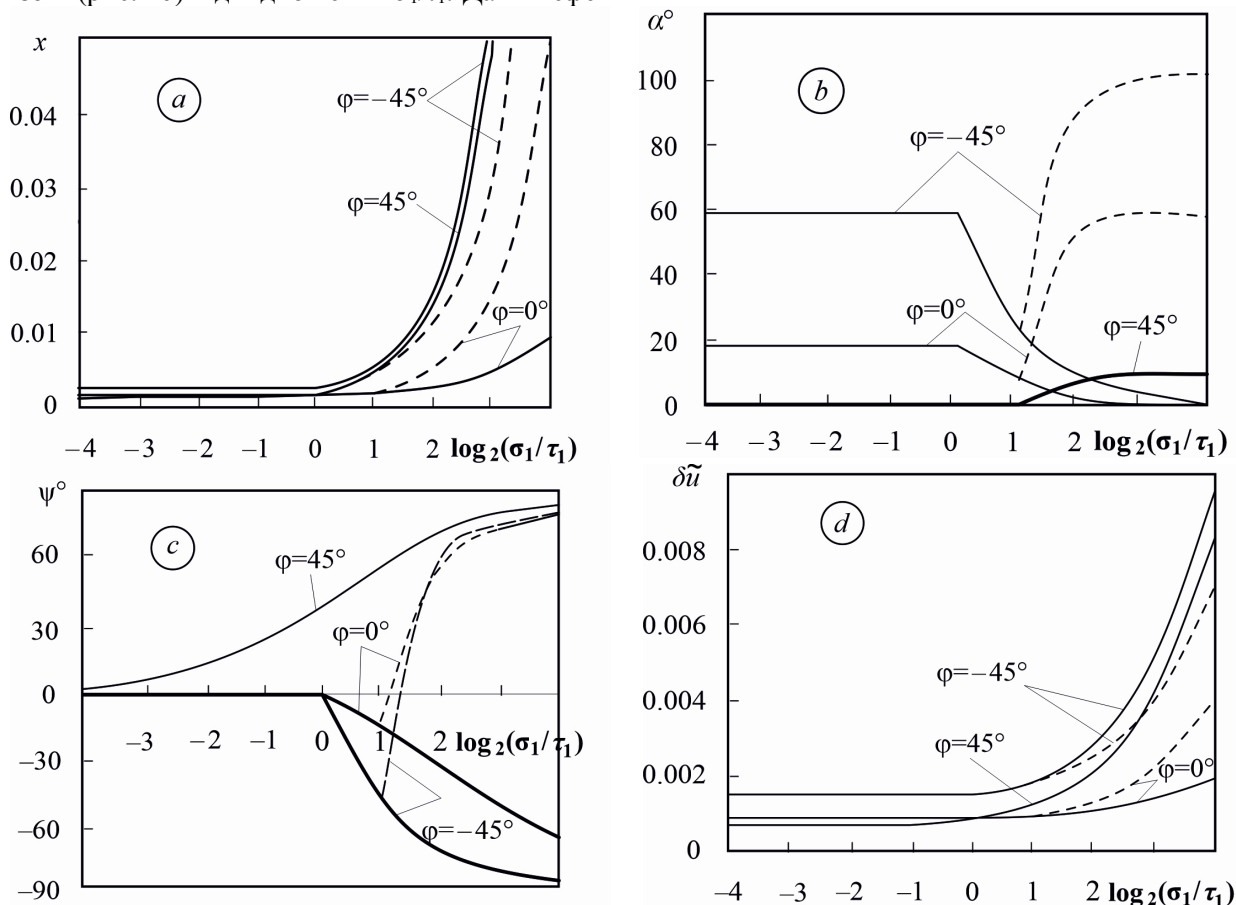


Рис. 2. Залежність параметрів зони передруйнування від відношення опорів відриву і зсуву

Другий ефект від зміни відношення опорів відриву і зсуву проявляється в розгалуженні зони передруйнування при $\sigma_1 \geq 2\tau_1$ і $\varphi \leq 0^\circ$. Одна із гілок зони (їй відповідають суцільні лінії на графіках)

повертається до межі розділу, а інша (пунктирні лінії) відхиляється від межі на значний кут (рис. 2*b*). Крім того, в них виявляється різним напрямком дотичних напружень (рис. 2*c*). Оскільки при

$\sigma_1 \geq 2\tau_1$ процеси руйнування в зоні набувають переважно пластичного характеру і пов'язані з зсувними деформаціями, розгалуження зони передруйнування можна розглядати як непрямий наслідок закону парності дотичних напружень. Розгалуження пластичної зони демонструють, зокрема, результати числового моделювання в [7] маломасштабного поля пластичних деформацій у пружнопластичному матеріалі біля вершини міжфазної тріщини. Однак слід зазначити, що розвинута вище модель лише вказує на можливість розгалуження зони передруйнування, але непридатна для визначення параметрів її гілок, оскільки базується на припущенні про наявність лише однієї гілки.

Висновки. В статті досліджено двохпараметричну модель маломасштабної зони передруйнування в квазіпружному матеріалі композитного з'єднання біля вершини міжфазної тріщини. Особливістю моделі є використання критерію міцності типу Мізеса – Хілла, параметрами якого служать опір відриву і опір зсуву матеріалу. Модель враховує одночасно крихкий і пластичний процеси руйнування матеріалу в зоні та призначена для вивчення квазікрихкого руйнування кусково-однорідного тіла з міжфазною тріщиною. Виконано числовий аналіз параметрів зони передруйнування в кінці внутрішньої міжфазної тріщини у кусково-однорідній площині при її навантаженні віддаленими рівномірно розподіленими тангенціальним і розтягувальним нормальним зусиллями. Виявлено існування переходу між крихким і пластичним механізмами руйнування у вузькому інтервалі значень відношення опорів відриву і зсуву біля $\sigma_1/\tau_1 \approx 2$.

Список використаних джерел

1. Kaminsky A.A. On modelling cracks in orthotropic plates under biaxial loading: synthesis and summary / A.A. Kaminsky, O.S. Bogdanova, V.N. Bastun // *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. – 2010. – Vol. 34. – P. 345–355.
2. Kaminsky A.O. An analytical method of modeling the process zone near the tip of an interface crack due to its kinking from the interface of quasi-elastic materials / A.O. Kaminsky, M.V. Dudyk, Y.V. Reshitnyk, Y.O. Chornoivan // *Int. J. Solids and Struct.* – 2023. – Vol. 267. – N 112117.
3. Hill R.A. Theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals / R.A. Hill // *Proc. Roy. Soc. London*. – 1948. – Vol. 193. – P. 281–297.
4. Rice J.R. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks / J.R. Rice // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1988. – Vol. 55, N 3. – P. 98–103.
5. Фридман Я.Б. Механические свойства металлов. Часть 1. Деформация и разрушение / Я.Б. Фридман. – М.: Машиностроение, 1972. – 472 с.
6. Yamamoto S. Effect of temperature on crack kinking and jumping in a cross-ply laminated beam / S. Yamamoto, T. Ikeda, A. Senba // *Arch. Mech.* – 2016. – Vol. 68, N 5. – P. 349–369.
7. Shih C.F. Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces: Part II – Structure of small-scale yielding / C.F. Shih, R.J. Asaro // *J. Appl. Mech.* – 1989. – Vol. 56. – P. 763–779.

References

1. KAMINSKY, A.A., BOGDANOVA, O.S. & BASTUN, V.N. (2010) On modelling cracks in orthotropic plates under biaxial loading: synthesis and summary. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 34. p.345-355.
2. KAMINSKY, A.O., DUDYK, M.V., RESHITNYK, Y.V. & CHORNOIVAN Y.O. (2023) An analytical method of modeling the process zone near the tip of an interface crack due to its kinking from the interface of quasi-elastic materials. *Int. J. Solids and Struct.* 267 (112117).
3. HILL, R.A. (1948) Theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proc. Roy. Soc. London*. 193. p.281-297.
4. RICE, J.R. (1988) Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks. *J. Appl. Mech.* 55 (3). p.98-103.
5. FRIDMAN, Ya.B. (1972) *Mechanicheskie svoystva metallov*. Part 1. Moskva: Mashinostroyeniye.
6. YAMAMOTO, S., IKEDA, T. & SENBA, A. (2016) Effect of temperature on crack kinking and jumping in a cross-ply laminated beam. *Arch. Mech.* 68 (5). p.349-369.
7. SHIH, C.F. and ASARO, R.J. (1989) Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces: Part II – Structure of small-scale yielding. *J. Appl. Mech.* 56. p.763-779.

Надійшла до редколегії 20.08.23

УДК 539.3

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.18>

Куценко О. Г.¹, к. ф.-м. н., доц.,
Харитонов О. М.¹, к. ф.-м. н., доц.,
Куценко А. Г.², к. ф.-м. н., доц.

O. G. Kutsenko¹, Ph.D (Phys.-Math.),
O. M. Kharytonov¹, Ph.D (Phys.-Math.),
A. H. Kutsenko², Ph.D (Phys.-Math.)

Розклинювання підінтерфейсної тріщини пластичним наплавленням

Wedging of the subinterface crack by plastic cladding

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03127, м. Київ, пр-т
Глушкова 4е,
e-mail: Oleksii.Kutsenko@knu.ua

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03127, Kyiv, Glushkova av., 4e,
e-mail: Oleksii.Kutsenko@knu.ua

² Національний університет біоресурсів і
природокористування України, 03041, м. Київ,
вул. Героїв Оборони 12

² National University of Life and Environmental
Sciences of Ukraine, 03041, Kyiv, Heroyiv Oborony
str., 12

Розглянуто модельну задачу про розтяг двошарового циліндру з кільцевою піднапивною тріщиною, розміщеною в основному матеріалі циліндра. Основний матеріал циліндра вважається лінійно-пружним, напавлення — пружно-пластичним з білінійним зміцненням. Досліджується залежність коефіцієнта інтенсивності на внутрішньому фронті тріщини від величини зовнішнього навантаження та величини залишкових деформацій в напавленні. Задача розв'язувалася чисельно за допомогою методу скінченних елементів. Встановлено, що пластична зона в напавленні розвивається не за напрямком продовження тріщини, а під деяким кутом до нього. Попередньо проведений аналіз напруженого стану за відсутності тріщини дозволив пояснити цей феномен, як і деякі інші закономірності, отримані в чисельних результатах. Висновки, зроблені в роботі, можуть бути корисними при оцінці тріщиностійкості обладнання та трубопроводів з антикорозійним напавленням.

Ключові слова: двошаровий циліндр, підінтерфейсна тріщина, залишкові деформації.

The model problem of tension of a two-layer cylinder with an annular subcladding crack located at the base material of the cylinder is considered. It is assumed that the base material of the cylinder is linear elastic. The cladding of the cylinder is considered as elastic-plastic with bilinear strengthening. The base material of the cylinder is considered to be linear-elastic, the cladding is considered to be elastic-plastic with bilinear strengthening. The dependence of the stress intensity factor on the internal crack front on the value of the tension stresses and the magnitude of the residual strains in the cladding is investigated. The problem was solved numerically using the finite element method. It was established that the plastic zone in cladding does not develop in the direction of crack extension, but at some angle to it. A preliminary analysis of the stress state in the absence of a crack made it possible to explain this phenomenon, as well as some other regularities obtained in the numerical results. The conclusions presented in the work can be useful in evaluating of the crack resistance of equipment and pipes with anti-corrosion cladding.

Key Words: two-layer cylinder, subcladding crack, residual strains.

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я. О.

Вступ

В багатьох галузях промисловості для продовження терміну експлуатації відповідальне обладнання та трубопроводи вкривають шаром анти-

корозійного напавлення. При цьому ще декілька десятиліть назад, коли рівень розвитку обчислювальних засобів був недостатнім для проведення розрахунків на повномасштабних моделях, при

розрахунку такого обладнання на опір крихкому руйнуванню використовувалися наближені інженерні методи і наявність наплавлення не враховувалася (див., наприклад, [1] розділ 3.5.5). Вважалося, що такий підхід є консервативним, тобто нехтування наявності наплавлення йде у запас міцності. З початком широкого застосування комп'ютерної техніки для проведення розрахунків на міцність з'ясувалося, що це не завжди так. Наприклад, у роботі [2] продемонстрований негативний вплив наплавлення на стан напівеліптичної тріщини, що знаходиться в основному металі (ОМ) стінки корпусу реактора ВВЕР-1000 поблизу його інтерфейсної з наплавленням поверхні. Було вказано на причину такого впливу — розклинювання тріщини залишковими деформаціями, які виникають у наплавленні. Проте у вказаній роботі мета дослідження була комплексною і стосувалася, головним чином, впливу радіаційного зміцнення наплавлення на тріщиностійкість КР. Тому детально процес розклинювання тріщини залишковими деформаціями розглянутий не був. Мета даної роботи полягає в усуненні означеного упущення.

Постановка задачі та попередній аналіз

Для з'ясування механізму розклинювання розглянемо модельну задачу про розтяг двошарового циліндра з коловою підінтерфейсною тріщиною постійними осьовими напруженнями p , прикладеними до торця циліндру. Довжина тріщини l вважається постійною, незалежною від колової координати. Таким чином, маємо осесиметричну задачу з додатковою площиною симетрії — площиною розташування тріщини. За таких умов достатньо розглянути напружений стан лише у верхній половині поздовжнього перерізу стінки циліндра (див. рис. 1).

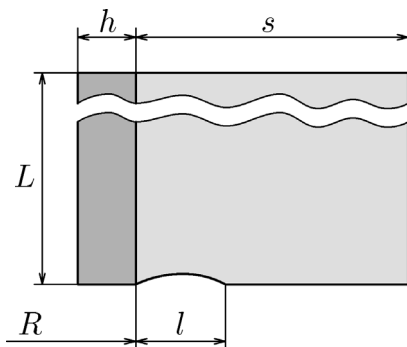


Рис. 1 Поздовжній переріз стінки циліндра

Припускається, що одна з вершин тріщини знаходиться на інтерфейсі, а сама тріщина пов-

ністю розташована в ОМ. Радіус інтерфейсної поверхні R та довжина твірної циліндра L вважаються великим у порівнянні з товщиною шару ОМ s . В свою чергу товщина шару ОМ є значно більшою за товщину наплавлення h та довжину тріщини. Тому для подальшого аналізу раціонально ввести наступні безрозмірні геометричні параметри

$$\bar{l} = l/s, \quad \bar{h} = h/s. \quad (1)$$

Матеріал ОМ вважається ідеально лінійно-пружним з модулем пружності E та коефіцієнтом Пуассона ν . Це пояснюється тим, що межа текучості ОМ значно вища за межу текучості наплавлення. Матеріал же наплавлення моделюється як білінійний з тими самими пружними властивостями. Ділянка зміцнення починається з межі текучості σ_T і відповідає ізотропному зміцненню згідно теорії пластичності Гебера-Мізеса-Генкі:

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & \varepsilon < \varepsilon_T, \\ E\varepsilon_T + T(\varepsilon - \varepsilon_T), & \varepsilon > \varepsilon_T, \end{cases} \quad (2)$$

де σ — напруження при одновісному розтягу, ε — відповідна повна (сума пружної і пластичної) деформація, $\varepsilon_T = \sigma_T/E$, T — дотичний модуль, який відповідає залежності пластичних деформацій від напружень. При цьому повний модуль на другій ділянці E_1 рівний $ET(E + T)^{-1}$.

Для розуміння механізму розклинювання тріщини корисно проаналізувати розподіл напружень в ОМ та наплавленні за її відсутності. У цьому випадку напружений стан є лише функцією радіальної координати r . Враховуючи зроблені припущення про співвідношення характерних розмірів, можна вважати, що поздовжні напруження в наплавленні є постійними, а в ОМ — розподіленими лінійно:

$$\sigma_z^{(c)} = \sigma_{z0}, \quad \sigma_z^{(b)} = \sigma_{z1} \frac{R+s-r}{s} + \sigma_{z2} \frac{r-R}{s}, \quad (3)$$

де через $\sigma_z^{(c)}$ та $\sigma_z^{(b)}$ позначені осьові напруження в наплавленні та основному металі (cladding та base metal). Значення сталей σ_{z0} , σ_{z1} , та σ_{z2} , визначаються з умов силової та моментної рівноваги і умов рівності поздовжніх деформацій в основному металі та наплавленні.

Поки в наплавленні не виникає пластичних деформацій, всі ці три сталі рівні розтягуючим напруженням p і осьові напруження не зміню-

ються від точки до точки. Як тільки напруження за Мізесом в наплавленні перевершують межу текучості, вони стають меншими за p . Одночасно з цим зростають σ_{z1} , та σ_{z2} , причому з умови моментної рівноваги випливає, що $\sigma_{z1} > \sigma_{z2}$, тобто в ОМ утворюється згинаючий момент. У випадку наявності тріщини залишкові деформації в наплавленні після зняття зовнішнього навантаження створюють подібний момент протилежного знаку, який і призводить до розкриття берегів тріщини.

Методи дослідження

Сформульована задача розв'язувалася чисельно за допомогою скінченно-елементного пакету CalculiX [3]. Зовнішня та внутрішня границя стінки циліндра, а також берег тріщини вважалися вільним від напружень. На іншій частині нижньої границі області задавалися умови симетрії (нульові нормальні зміщення і дотичні напруження). На верхній границі на першому кроці навантаження задавалися нормальні напруження p та нульові дотичні напруження, на другому — умови вільної границі. На кожному кроці визначався коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) у вершині тріщини, розміщеній в ОМ (правій). Його значення на першому та другому кроках позначалися як $K_{\max}$ і $K_{\min}$ відповідно. Задача розв'язувалася в осесиметричній постановці. Оскільки ОМ вважався ідеально пружним, КІН обчислювався шляхом асимптотичної апроксимації нормальних зміщень точок берегів тріщини. При цьому у вершині тріщини використовувалися сингулярні скінченні елементи. Розрахунки були проведені для практично важливих значень параметрів:

- $\bar{h}$ від 0,02 до 0,06 з кроком 0,01;
- $\bar{l}$ від 0,1 до 0,2 з кроком 0,25;
- $\bar{p} = p / \sigma_T$ від 0,1 до 2 з кроком 0,1.

Результати та їх аналіз

На рис. 2 наведено залежності середньої пластичної деформації на продовженні тріщини в наплавленні від відносної величини розтягуючих напружень. Залежності наведені для різних значень відносної довжини тріщини та постійної товщини наплавлення $\bar{h} = 0,02$. Бачимо, що всі графіки є подібними і утримують дві ділянки: ділянку повільного зростання та ділянку лінійного росту. Перша ділянка відповідає виникненню та розвитку пластичної зони в напла-

вленні, друга — переходу всього наплавлення у пластичний стан. Через наявність тріщини цей перехід відбувається значно раніше, ніж p досягає значення σ_T .

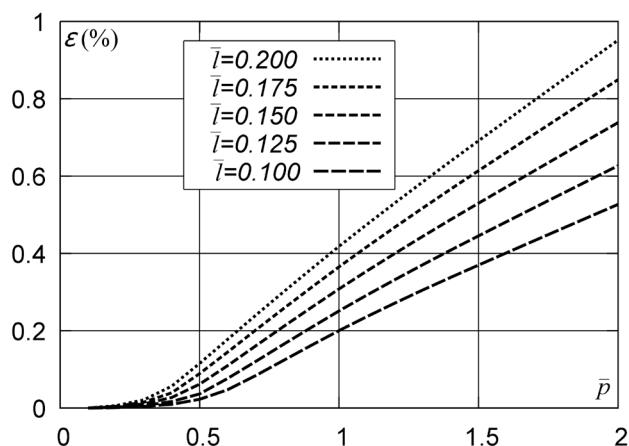


Рис. 2 Залежність середньої пластичної деформації на продовженні тріщини від навантаження при $\bar{h} = 0,02$

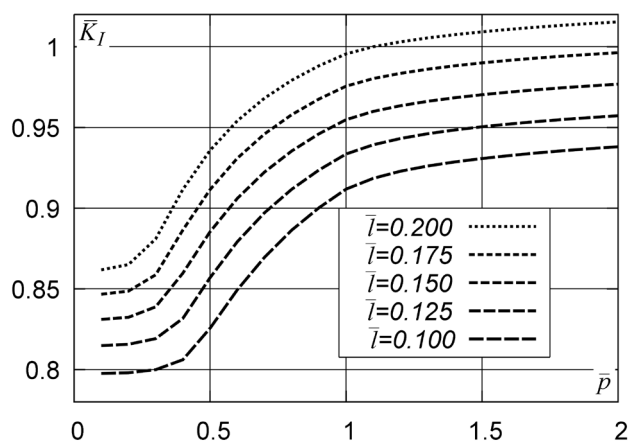


Рис. 3 Залежність КІН на кроці навантаження від його величини при $\bar{h} = 0,02$

На рис. 3 наведено залежності безрозмірного КІН $K_{\max} / (p\sqrt{\pi l})$ від $\bar{p}$ для $\bar{h} = 0,02$. Ці залежності утримують три ділянки: дві крайні і перехідну між ними, причому крайні мають горизонтальні асимптоти. Крайня ліва відповідає малому рівню пластичних деформацій, тобто при $\bar{p} \rightarrow 0$ отримуємо внутрішню кільцеву тріщину в однорідному пружному циліндрі. При $\bar{p} \rightarrow \infty$ графік асимптотично наближається до значення КІН для внутрішньої крайової тріщини (для великих радіусів циліндра $\approx 1,12$), тобто вплив

наплавлення через великі пластичні деформації в ньому зводиться нанівець.

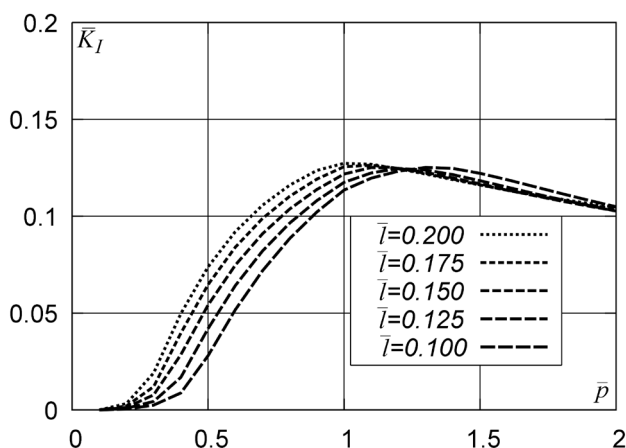


Рис. 4 Залежність КІН на кроці розвантаження від величини навантаження при $\bar{h} = 0,02$



Рис. 5 Зони, де $\sigma_z > \sigma_T$

На рис. 4 наведено залежності безрозмірного КІН $K_{\min}/(p\sqrt{\pi l})$ від $\bar{p}$ для $\bar{h} = 0,02$. Хоч значення даної характеристики на порядок менші за $K_{\max}/(p\sqrt{\pi l})$, якісна поведінка відповідних значень схожа. Відмінним є лише наявність максимуму у кривих з рисунка 4. Крім того, перехідні ділянки на рис. 3 та 4 зміщені вправо у

порівнянні з перехідними ділянками на рис. 2. Відзначимо також, що всі наведені закономірності зберігаються і для інших значень параметра $\bar{h}$.

Вказані особливості пояснюються тим, що інтегрально напруження в наплавленні на продовженні тріщини зводяться не лише до осової сили, а також і до моменту. Останнє призводить до зміщення напрямку розвитку пластичної зони з лінії продовження тріщини (див. рис. 5). Після зняття навантаження наявність пружної зони на продовженні тріщини створює момент оберненого знаку, який і розкриває тріщину поблизу внутрішньої (правої) вершини.

Висновки

Розв'язана модельна задача дозволила пояснити механізм впливу пластичних деформацій наплавлення на стан підінтерфейсної тріщини після зняття навантаження. Незважаючи на відносно невисокі відповідні значення КІН, нехтувати цим механізмом не можна, адже в умовах термоудару, коли на внутрішній поверхні обладнання чи трубопроводу різко падає температура, з нею стрімко знижується і значення критичного КІН. Тому навіть такий невисокий рівень напружень в околі вершини тріщини може призвести до її зрушення. Крім того, даний механізм наочно демонструє той факт, що неврахування пластичних деформацій не завжди є консервативним.

Список використаних джерел

1. IAEA Assessment and management of ageing of major nuclear power plant components important to safety: PWR Pressure Vessels. Vienna: IAEA, 1999. 175 p.
2. Kutsenko O. Effect of neutron irradiation hardening of the base metal on the results of WWER-1000 reactor pressure vessel residual lifetime assessment / O. Kutsenko, I. Kadenko, X. Pitoiset, O. Kharytonov, N. Sakhno, I. Kravchenko // Int. J. Press. Vessel. Pip. – 2019. – Vol. 171. – P. 173–183.
3. A Free Software Three-Dimensional Structural Finite Element Program [Електронний ресурс]. – 2023. – Режим доступу до ресурсу: <https://www.calculix.de>.

References

1. IAEA (1999) *Assessment and management of ageing of major nuclear power plant components important to safety: PWR Pressure Vessels*. Vienna: IAEA.
2. KUTSENKO, O et al. (2019) *Effect of neutron irradiation hardening of the base metal on the results of WWER-1000 reactor pressure vessel residual lifetime assessment*. Int. J. Press. Vessel. Pip. 171. p.173–183.
3. (2020) A Free Software Three-Dimensional Structural Finite Element Program. Available from: <https://www.calculix.de>.

Надійшла до редколегії 30.06.23

УДК 539.3

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.19>

Куценко О. Г.¹, к. ф.-м. н., доц.
Харитоновна Л. В.², к. ф.-м. н., доц.
Круш Р. М.³, студент

O. G. Kutsenko¹, Ph.D, Associate Professor
L. V. Kharytonova², Ph.D, Associate Professor
R. M. Krush³, Student

Закономірності росту плоских тріщин в пластинах

Regularities of flat cracks growth in plates

^{1,3}Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03127, м. Київ, пр-т
Глушкова 4е,

^{1,3}Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03127, Kyiv, Glushkova av., 4e,

²Національний транспортний університет,
01010, м. Київ, вул. М. Омеляновича-
Павленка, 1
e-mail: Oleksii.Kutsenko@knu.ua

²National Transport University, 01010, Kyiv,
M. Omelianovycha-Pavlenka str., 1
e-mail: Oleksii.Kutsenko@knu.ua

Досліджено загальні закономірності впливу геометричних параметрів тріщини втомі на напрямок її росту в пружних пластинах при їх одновісному розтягу. Розглянуто прямолінійні тріщини, тріщини у вигляді повного періоду косинусоїди, тріщини у вигляді дуги кола та тріщини у вигляді ломаної в широкому діапазоні зміни їх геометричних параметрів. Напрямок розвитку тріщин визначався у відповідності до критерію максимальних колових напружень. Отримані результати дозволили зробити висновок, що у випадку гладких берегів тріщини напрямок її росту в першу чергу залежить від кута між дотичною при вершині та напрямком розтягу. Встановлено, що наявність кутової точки берега тріщини поблизу її вершини суттєво впливає на напрямок її росту у випадку малих кутів між дотичною та напрямком розтягу. Для таких випадків чисельно не вдалося досягти неперервного граничного переходу в результатах при наближенні кутової точки до вершини. Дана обставина ускладнює питання про вибір розміру початкового приросту тріщини.

Ключові слова: критерій максимальних колових напружень, ломана тріщина.

The general regularities of the influence of the geometric parameters of a fatigue crack on the direction of its growth in elastic plates under uniaxial tension were studied. Straight cracks, cracks in the form of a full cosine period, cracks in the form of a circle arc and kinked cracks were considered in a broad range of their geometric parameters variations. The direction of crack growth was determined in accordance with the criteria of maximum tangential (circumferential) stresses. The stress intensity factor of mode I and mode II of fracture were determined numerically using the finite element method. The obtained results made it possible to conclude that in the case of smooth crack faces, the direction of its growth primarily depends on the angle between the tangent at the crack tip and the direction of tension. It was established that the presence of a corner point of the faces near crack tip significantly affects the direction of crack growth in the case of small angles, between the tangent and the direction of tension. For such cases, numerically, it was not possible to achieve a continuous limiting transition in the results when the corner point approaches the tip. This circumstance complicates the issue of choosing the size of the initial crack growth step.

Key Words: maximum tangential stress criteria, kinked crack.

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я. О.

Вступ

Вивчення процесу підростання тріщин втомі залишається актуальним напрямком механіки

руйнування вже понад півстоліття. Воно поєднує в собі декілька складових: встановлення критеріїв визначення напрямку розвитку тріщини та

залежностей швидкості поширення тріщин від інтенсивності зовнішнього навантаження для різних матеріалів, розробку методів визначення характеристик механіки руйнування, що впливають на процес, тощо. Огляд досліджень з даної тематики можна знайти в роботах [1,2].

Метою даної роботи покладено встановлення загальних закономірностей впливу різних геометричних чинників на формування траєкторії плоских (наскрізних) тріщин в пружних пластинах. На думку авторів дане питання не знайшло свого достатнього відображення в наявних публікаціях.

Постановка задачі та методи дослідження

Будемо розглядати центральну тріщину в пружній квадратній пластині розмірами $2a \times 2a$, яка розтягується вздовж однієї пари своїх сторін напруженнями p (див. рис. 1). Конфігурація тріщини не змінюється по товщині пластини. За характерний розмір тріщини приймається довжина її хорди (відрезка, що сполучає кінці тріщини) $2l$. Нормаль до хорди складає кут α з напрямком розтягу. Напрямок поширення тріщини задається кутом ϑ , який відкладається від продовження хорди проти годинникової стрілки.

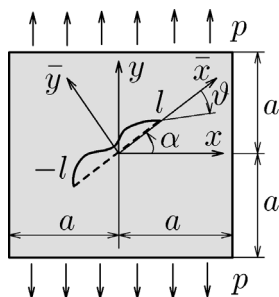


Рис. 1 Пластина з плоскою тріщиною

У якості критерію визначення напрямку розвитку тріщини будемо використовувати критерій максимальних колових напружень у вершині тріщини. Він є історично першим і найбільш вживаним критерієм. Разом з критеріями напрямку максимальної швидкості вивільнення енергії деформації та напрямку мінімальної питомої енергії деформації він дає схожі результати у випадку крихкого тіла [3]. У відповідності до нього кут напрямку зростання тріщини визначається зі співвідношення [4]:

$$\vartheta = \arccos \left(\frac{3K_{II}^2 + K_I \sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2}}{K_I^2 + 9K_{II}^2} \right), \quad (1)$$

де K_I — коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) деформації нормального розриву тріщини, K_{II} — КІН деформації поперечного зсуву тріщини. Для знаходження значень КІН будемо використовувати метод скінченних елементів, реалізований у пакеті CalculiX [5].

Результати та їх аналіз

Проаналізуємо спочатку залежність кута зростання прямолінійної тріщини від її довжини та орієнтації. На рисунку 2 наведені відповідні графіки. З них випливає, що напрямок зростання, практично, не залежить від довжини тріщини. При цьому самі значення КІН швидко зростають з наближенням півдовжини тріщини до a .

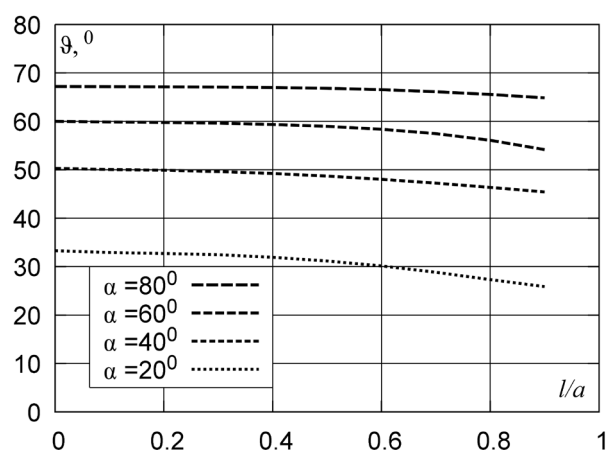


Рис. 2 Розподіл ϑ для прямолінійної тріщини

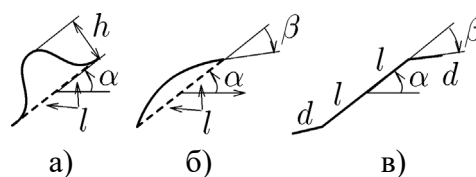


Рис. 3 Розглянуті конфігурації тріщин

Дослідимо вплив на напрямок зростання тріщини її кривизни. Для цього розглянемо два типи криволінійних тріщин: у вигляді косинусоїди (рис. 3а) та у вигляді дуги кола (рис. 3б). У тріщин першого типу хорди дотикаються до їх берегів у вершинах. Кривина таких тріщин характеризується величиною подвоєної амплітуди косинусоїди h .

Розрахунки показують, що для малих тріщин першого типу напрямок росту тріщини залежить головним чином від кута між нормаллю до хорди та напрямком розтягу. Так для тріщини довжиною $l = 0,1a$, орієнтованою під кутом $\alpha = 45^\circ$,

для значень $0 \leq h \leq l$ напрямом поширення тріщини ϵ , практично, незмінним: $53^\circ < \vartheta < 55^\circ$ (див. рис. 4).

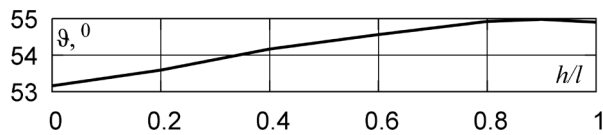


Рис. 4 Розподіл ϑ для тріщини-косинусоїди

З наведеного випливає, що у випадку, коли береги тріщини є гладкими, а їх нахил в околі вершини співпадає з нахилом хорди тріщини, напрям подальшого росту тріщини залежить саме від відповідного кута. Розглянемо випадок, коли дотична до берега при вершині та хорда не є колінеарними. Для цього дослідимо напружений стан в пластині з тріщиною у вигляді дуги кола. Відзначимо, що кут між дотичною та хордою такої тріщини — кут β , рівний половині кутового розміру дуги.

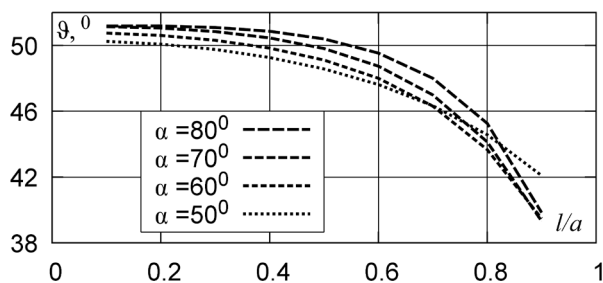


Рис. 5 Розподіл ϑ для правої вершини тріщини у вигляді дуги кола при $\alpha - \beta = 40^\circ$

Аналізуючи результати розрахунків для тріщини-дуги, можна прийти до висновку про суттєву залежність його від кутів α та β , якщо фіксувати один з кутів і змінювати інший. Проте якщо розглянути різницю $\alpha - \beta$, то можна помітити, що при її фіксованому значенні кут ϑ слабо залежить як від кута α , так і від довжини тріщини. Вказаний висновок ілюструється рисунком 5, на якому зображено графіки залежності кута ϑ для правої (див. рис. 3б) вершини тріщини від кута α та відносної довжини хорди тріщини при $\alpha - \beta = 40^\circ$.

Таким чином, можемо констатувати, що кут розвитку тріщини-дуги залежить не окремо від кутів α та β , а від їх різниці. Це пояснюється тим, що різниця $\alpha - \beta$ відповідає куту між

дотичною до тріщини у її вершині та напрямком розтягу. Більш сильна залежність ϑ від геометричних параметрів при великих розмірах тріщини пояснюється виключно впливом тріщини на глобальний розподіл напружень в пластині. Зауважимо, що у випадку прямолінійних тріщин та тріщин-дуг адекватність отриманих результатів контролювалася шляхом порівняння з випадком необмеженої пластини, для якого відомі точні аналітичні розв'язки.

Береги всіх вже розглянутих тріщин є гладкими. З'ясуємо, як на напрям росту тріщини впливає наявність кутових точок берегів, відмінних від вершин. Для цього розглянемо тріщину, яка складається з трьох прямолінійних ланок (див. рис. 3в): центральної довжиною $2l$ та симетрично розташованих крайніх довжиною d кожна, нахилених під кутом β до середньої.

Особливий інтерес являє випадок, коли кутова точка розташована поблизу вершини тріщини, тобто $d \ll l$. Очевидно, що в цьому випадку її вплив є суттєвим. Подібна ситуація виникає при зміні навантаження, коли до певного моменту тріщина підростала під дією одного навантаження, а потім воно змінилося, наприклад, змінився напрям розтягу пластини. Тріщини такого типу в літературі прийнято називати ломаними (kinked crack).

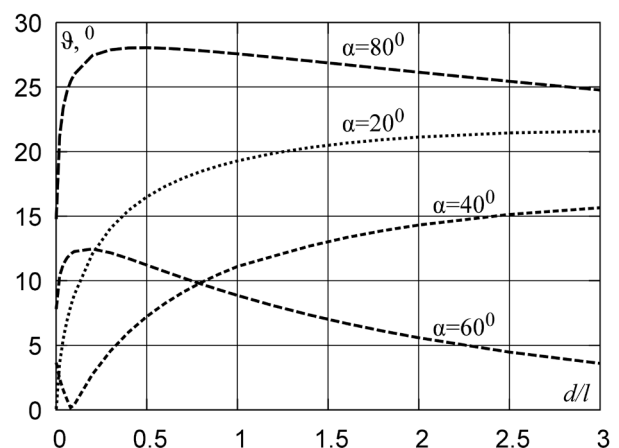


Рис. 6 Розподіл ϑ для ломаної тріщини

Цікаво прослідкувати саме за початковим етапом розвитку нової ланки ломаної тріщини. Для цього виберемо кут β рівним куту ϑ для прямолінійної тріщини. Вважаючи довжину тріщини малою у порівнянні з розміром пластини, цей кут можна знайти з співвідношення (1), якщо покласти в ньому

$$K_I = \cos^2 \alpha, \quad K_{II} = \sin \alpha \cos \alpha. \quad (2)$$

Логічно припустити, що для такої ломаної тріщини $\vartheta \rightarrow 0$, якщо $d \rightarrow 0$. Розрахунки показують, що для кутів $\alpha < 40^\circ$ це, дійсно, так. Проте для більших кутів даний результат не є очевидним. Якщо подивитися на рисунок 6, на якому зображені графіки залежності кута ϑ від відносної довжини крайніх ланок для різних кутів α , то можна побачити, що для кутів $\alpha > 40^\circ$, кут ϑ , хоч і зменшується за величиною, проте не до нульового значення. При цьому крайні ліві точки цих графіків відповідають значенням $d/l = 0,001$, а, наприклад, для $\alpha = 80^\circ$ кут ϑ складає біля 15° . Причиною такого відхилення може бути вплив сингулярності в кутовій точці на розподіл напружень біля вершини, яким традиційно нехтують без чіткого теоретичного обґрунтування [6].

Список використаних джерел

1. *Miranda A. C. O. Fatigue life and crack path predictions in generic 2D structural components* / A. C. O. Miranda, M. A. Meggiolaro, J. T. P. Castro, L. F. Martha, T. N. Bittencourt // *Engineering Fracture Mechanics* – 2003. – Vol. 70, No. 10. – P. 1259–1279.
2. *Rege K. A review of fatigue crack propagation modelling techniques using FEM and XFEM* / K. Rege, H.G. Lemu // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* – 2017. – Vol. 276, No. 1. – P. 12–27.
3. *Bittencourt T. N. Quasi-automatic simulation of crack propagation for 2D LEFM problems* / T. N. Bittencourt, P. A. Wawrzynek, A. R. Ingraffea, J. L. Sousa // *Eng. Fract. Mech.* – 1996. – Vol. 55, No. 2. – P. 321–334.
4. *Erdogan F. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear* / F. Erdogan, G. C. Sih // *J. Basic Eng.* – 1963. – Vol. 85, No. 4. – p. 519–525.
5. A Free Software Three-Dimensional Structural Finite Element Program [Електронний ресурс]. – 2023. – Режим доступу до ресурсу: <https://www.calculix.de>.
6. *Chen Y. Z. A singular integral equation method for examining asymptotic solutions of a kinked crack with infinitesimal kink length* / Y. Z. Chen, X. Y. Lin, Z. X. Wang // *Journal of Mechanics of Materials and Structures* – 2009. – Vol. 4, No. 10. – P. 1657–1674.

Висновки

Наведені результати дозволяють стверджувати, що у випадку гладких берегів тріщини напрямки її подальшого росту в першу чергу визначається кутом між дотичною до берегів у вершині та напрямком розтягу. Для ломаних тріщин з малими кутами між середньою ланкою тріщини та напрямком розтягу чисельно не вдалося отримати неперервного граничного переходу $\vartheta \rightarrow 0$, при $d \rightarrow 0$. Дане питання потребує додаткового дослідження. Проте навіть за умови справедливості такого переходу, гостро постає питання про величину першого кроку утворення нової ланки тріщини при її підростанні, адже при прирості в 0,05% довжини тріщини відхилення напрямку росту тріщини від теоретично передбаченого може складати більше 10° .

References

1. MIRANDA, A. C. O. et al. (2003) *Fatigue life and crack path predictions in generic 2D structural components*. *Engineering Fracture Mechanics*. 70(10). p. 1259–1279.
2. REGE, K. & LEMU, H.G. (2017) *A review of fatigue crack propagation modelling techniques using FEM and XFEM*. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 276(1). p. 12–27.
3. BITTENCOURT T.N. et al. (1996) *Quasi-automatic simulation of crack propagation for 2D LEFM problems*. *Engineering Fracture Mechanics*. 55(2). p. 321–334.
4. ERDOGAN F. & SIH G. C. (1963) *On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear* *Journal of Basic Engineering*. 85(4). p. 519–525.
5. (2023) A Free Software Three-Dimensional Structural Finite Element Program. Available from: <https://www.calculix.de>.
6. CHEN Y. Z., LIN X. Y. & WANG Z. X. (2009) *A singular integral equation method for examining asymptotic solutions of a kinked crack with infinitesimal kink length* *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 4(10). p. 1657–1674.

Надійшла до редколегії 14.07.23

УДК 551.24.035+551.242.1.02

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.20>

Лубков М. В., д.ф.-м.н., с.н.с

M. V. Lubkov, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
Sr. Sci. Researcher

Моделювання деформування соляних структур внаслідок гравітаційної плавучості

Modelling of the salt structures deforming due to gravitational buoyancy

Полтавська гравіметрична обсерваторія
НАНУ, 36014, м. Полтава, вул. Мясоедова
27/29,
e-mail: mikhail.lubkov@ukr.net

Poltava Gravimetric Observatory of NASU, 36014,
Poltava, Myasoedova st., 27/29,
e-mail: mikhail.lubkov@ukr.net

Розглянуто моделювання і геофізичну інтерпретацію деформування соляних структур внаслідок гравітаційної плавучості (галокінез). Для вирішення цієї геофізичної проблеми застосовано варіаційний скінченно-елементний метод розв'язання задачі пружності з урахуванням неоднорідного розподілу геологічних порід всередині розглянутих соляних структур.

Ключові слова: неоднорідна задача пружності, галокінез, варіаційний скінченно-елементний метод.

We consider modeling and geophysical interpretation of the obtained results in the deforming process of the salt structures due to gravitational buoyancy (halokinesis). For solving this geophysical problem, we use variation finite element method of elastic problem resolving with calculation of heterogeneous rocks distribution into considering salt structures. We have defined that salt structures deforming amplitudes mainly depend on linear sizes (length and thickness) of the bottom parts of these structures. Decreasing of these parameters lead to noticeable drop of the press-strain state near the whole region of the salt structure (diapirs). Another hand forms and linear sizes of the top parts of the salt stocks influence only on the deforming of the local regions near these structure elements and don't essentially influence on the whole region deforming around the stock. Quantity characteristics of linear sizes of the salt diapirs structural elements define the whole picture of the stress-strain state around these objects.

Key Words: heterogeneity elastic problem, halokinesis, variation finite element method.

Статтю представив член-кореспондент НАН України Жук Я.О.

1. Вступ

У наш час є важливим розуміння основних етапів розвитку соляного діпіризму. Це пов'язано з тим, що чисельні та різноманітні локальні соляні структури представляють собою ідеальні пастки для накопичення вуглеводневої сировини. Це повною мірою відноситься, наприклад, до локальних соляних структур Дніпровсько-Донецької западини (ДДЗ), що характеризуються різноманітною будовою, літологією та історією формування [1, 2, 4, 6]. Галокінез (деформування соляних структур і навколишнього середовища внаслідок гравітаційної плавучості соляних товщ відносно більш щільних теригенних порід), безумовно, відіграє важливу роль у формуванні та розвитку соляного діпіризму, тому важливо розуміти механізми цього процесу не тільки на якісному, але й кількісному рівні. Проблемами

галокінезу займалися багато дослідників, які будували відповідні геофізичні та математичні моделі цього процесу, але в силу присутності багатьох стратиграфічно-геологічних та тектонічних факторів, як правило, обмежувались лише окремими якісними висновками [2, 3, 6 - 9].

У даній роботі на основі варіаційного скінченно-елементного методу для пружної задачі буде проведено кількісне моделювання галокінезу різних структурних форм, тобто процесів деформування різних соляних структур, пов'язаних з гравітаційною плавучістю соляних шарів відносно більш щільних навколишніх теригенних порід [5].

2. Постановка та метод розв'язання задачі

Припустимо, що розміри шаруватих фрагментів розрізу осадового чохла розглянутих локальних соляних структур значно менші від розмірів навколишніх блоків кристалічного фундаменту.

© М.В.Лубков, 2023

Внаслідок цього деформування відповідного фрагменту може розглядатися як плоске. У цьому випадку загальна постановка задачі пружності в системі відліку, яка жорстко пов'язана з розглянутими блоками кристалічного фундаменту, має вигляд [5]:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0; \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + k\theta\delta_{ij}; \quad (2)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{j,i}); \quad \sigma_{ij}\mathbf{n}_j - \mathbf{f}_i = 0, \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i^*; \quad (3)$$

Тут (1) – рівняння рівноваги; (2) – закон Гука; (3) – співвідношення Коші та граничні умови I – го й II – го роду відповідно; $\mathbf{u}_i$ – компоненти переміщення; σ_{ij} – компоненти тензора напружень; ϵ_{ij} – компоненти тензора деформацій; $\mathbf{F}_i$ – компоненти об'ємної сили, яка в даному випадку збігається із силою виштовхування соляних масивів; $\mathbf{f}_i$ – поверхневі зовнішні сили; $\mathbf{n}_j$ – одиничний вектор нормалі до поверхні; ρ – густина, μ – модуль зсуву; k – модуль всебічного стиску; θ – дилатація; δ_{ij} – символ Кронекера.

Складемо функціонал Лагранжу двовимірної пружної задачі з відповідними граничними умовами, що виражає повну механічну енергію об'єкту, якій досліджується, у неруходій декартовій системі координат (x, y) [5]:

$$E = \frac{1}{2} \iint_S [C_1(\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{yy}^2) + 4C_2\epsilon_{xy}^2 + 2C_3\epsilon_{xx}\epsilon_{yy} - (\rho_T - \rho_C)gw] dx dy - \int_L (\mathbf{f}_{xn}u + \mathbf{f}_{yn}w) dl; \quad (4)$$

де $C_1 = k + 4\mu/3$, $C_2 = \mu$, $C_3 = k - 2\mu/3$ – пружні коефіцієнти; u , w – компоненти переміщення уздовж осей x і y відповідно; g – прискорення сили тяжіння; ρ_T – густина теригенних порід; ρ_C – густина сольових товщ; S – площа перерізу розглянутого об'єкту; L – контур, що охоплює площу S ; dl – елемент контуру.

Для розв'язання двовимірної пружної задачі застосовується метод скінчених елементів, заснований на варіаційному принципі Лагранжа [5], що виражає мінімум повної механічної енергії системи:

$$\delta E(u, w) = 0. \quad (5)$$

При розв'язанні варіаційного рівняння (5) застосовуємо восьмивузловий ізопараметричний чотирикутний криволінійний скінчений елемент [5]. Як глобальна система координат, тобто система в якій поєднуються всі скінчені елементи, використовується декартова система координат (x, y) . Як локальна система координат, у якій для кожного елемента визначаються функції форми і проводиться чисельне інтегрування, використовується допоміжна нормалізована система координат (ξ, η) . При побудові функцій форми, що апроксимують змінні й функції в межах кожного елемента, використовуються квадратичні алгебраїчні поліноми [5]. Алгоритм скінчено-елементного розв'язання варіаційної задачі (5) полягає в наступному [5]. Спочатку в локальній системі координат відбувається апроксимація усіх компонент переміщення і деформацій, що входять до функціоналу Лагранжа (4), з використанням отриманих функцій форми. Потім проводиться диференціювання функціоналу (4) по всіх вузлових складових переміщення і прирівнювання відповідних похідних нулю. В результаті для кожного скінченого елемента одержуємо лінійну алгебраїчну систему, що складається з 16 рівнянь. Далі в глобальній системі координат (x, y) відбувається підсумовування локальних систем лінійних алгебраїчних рівнянь по всіх скінчених елементах, на які розбито область, що досліджуємо, і формування глобальної системи рівнянь. Розв'язання глобальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь проводиться за допомогою чисельного методу Гауса [5], внаслідок чого визначаються компоненти переміщення в усіх вузлових точках скінчено-елементної сітки. По знайдених вузлових значеннях переміщення можуть бути визначені компоненти переміщення, деформацій, напружень та інші величини у довільній точці скінченого елемента, тобто в будь-якій точці області, що досліджується.

3. Моделювання галокінезу соляних структур

Розглянемо умовні, характерні для ДДЗ, геологічні розрізи осадових порід, які мають пружні властивості [1, 2, 5]. Так, при моделюванні процесів галокінезу (гравітаційного деформування соляних структур) будемо вважати, що на відстанях вглибину від 0 до 2000 м розташовані глини та алевроїти; на відстанях від 2000 до 6000 м розташовані різні конфігурації соляних структур, що складаються з шарів кам'яної солі та навколишніх теригенних порід (піщаників); на

відстанях від 6000 до 7000 м – доломіти. Пружні властивості вказаних геологічних порід було обрано з наступних літературних джерел [1, 2, 5]. Нижче на рисунках представлено деформування різних конфігурацій соляних структур, що розташовані у розглянутому фрагменті осадового чохла. Ці конфігурації в двовимірному випадку представлено у вигляді: а) прямокутних соляних подушок, що мають довжину по горизонталі та товщину по вертикалі; б) соляних штоків, які складаються з нижнього прямокутника-основи та верхнього прямокутника-вершини й відповідно мають довжини та товщини.

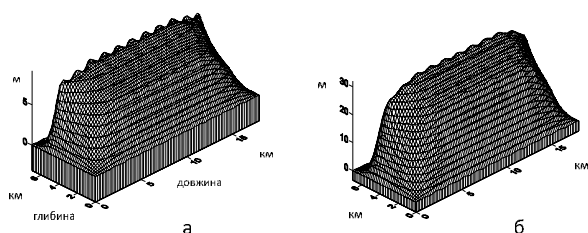


Рис. 1 Розподіл вертикальної складової переміщення при деформуванні соляних подушок довжиною 18 км та товщиною : а) 1 км; б) 2 км.

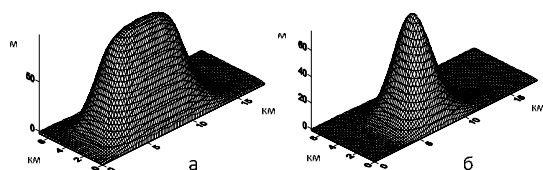


Рис. 2 Розподіл вертикальної складової переміщення при деформуванні соляних подушок товщиною 4 км та довжиною : а) 9 км; б) 3 км.

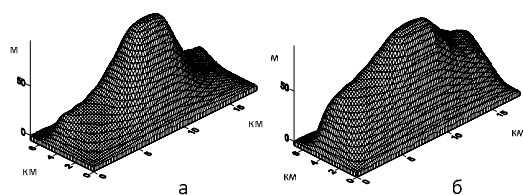


Рис. 3 Розподіл вертикальної складової переміщення при деформуванні соляних штоків довжиною основи 18 км та: а) товщиною 2 км, довжиною вершини 6 км та товщиною 2 км; б) товщиною 3 км, довжиною вершини 6 км та товщиною 1 км.

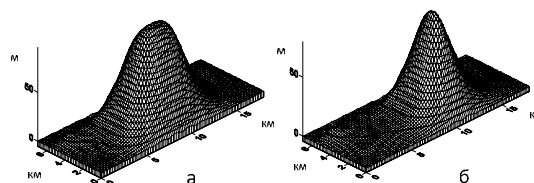


Рис. 4 Розподіл вертикальної складової переміщення при деформуванні соляних штоків довжиною основи 18 км та товщиною 1 км: а) довжиною вершини 6 км та товщиною 3 км; б) довжиною вершини 3 км та товщиною 3 км.

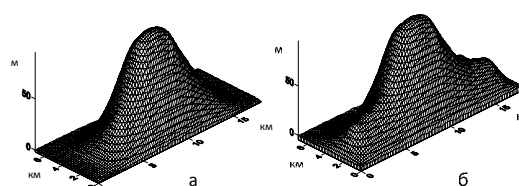


Рис. 5 Розподіл вертикальної складової переміщення соляних штоків товщиною основи 3 км та: а) довжиною 6 км, довжиною вершини 9 км та товщиною 1 км; б) довжиною 6 км, довжиною вершини 18 км та товщиною 1 км.

Висновки

Встановлено, що амплітуди деформування соляних діапирів головним чином залежать від лінійних розмірів (довжини та товщини) нижніх основ (базисів) цих структур. Зменшення цих параметрів призводить до значного зниження напружено-деформованого стану навколо всієї області соляних діапирів. По-друге, форми та лінійні розміри верхніх частин соляних штоків впливають у значній мірі на деформування локальних областей поблизу цих структурних елементів й не мають суттєвого впливу на деформування всієї області навколо соляного штоку. Кількісні характеристики лінійних розмірів структурних елементів соляного діапіру визначають загальну картину напружено-деформованого стану навколо розглянутого об'єкту. Так, для подолання позначки амплітуди деформації в 50 м загальна товщина соляного діапіру повинна бути не менше 3 км.

Список використаних джерел

1. Айзенверг Д. Е. Геология и нефтегазоносность Днепровско-Донецкой впадины. Стратиграфия / Д.Е. Айзенверг, О.И. Берченко, Н.Бражникова. – Киев: Наук. думка, 1988. – 147с.
2. Гавриш В. К. Геология и нефтегазоносность Днепровско-Донецкой впадины. Глубинное строение и геотектоническое развитие / В.К. Гавриш, Г. Д. Забелло, Л. М. Рябчун. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208с.
3. Кудельский А.В. Эксгалиационно-осадочный галокинез в Припятском палеорифте / А.В. Кудельский // Геология и минерально-сырьевые ресурсы запада Восточно-Европейской платформы. Минск, 2017. – С. 167- 171.
4. Куриленко В.С. Соляной диапиризм Днепровско-Донецкой впадины с позиций флюидодинамических представлений / В.С. Куриленко // Допов. Нац. акад. наук Укр. - 2019. – N 6. – С. 43 -47.
5. Лубков М. В. Утворення вуглеводневих пасток у локальних соляних структурах Дніпровсько-Донецької западини / М.В. Лубков, О.О. Захарчук // Геоінформатика. – 2019. – 70, N 2. – С. 50 – 57.
6. Стовба С.Н. Про механізми соляного тектогенезу в Дніпровсько-Донецькій западині / С.Н. Стовба // Геолог України. – 2005. - N 1. - С. 23 – 29.
7. Bahroudi A. Effect of spatial distribution of Hormuz salt on deformation style in the Zagros fold-thrust belt / A. Bahroudi, H.A. Koyi // Journal of the Geological Society of London. – 2003. – vol. 160. – P. 719 – 733.
8. Schultz-Ela D.D. Modeling of grabens extending above evaporites in Canyon-lands National Park, Utah / D.D. Schultz-Ela, P. Walsh // Journal of Structural Geology. – 2002. – vol. 24, N 2. – P. 247 -275.
9. Stewart S.A. Salt tectonics in the North Sea Basin: a structural style template for seismic interpreters / S.A. Stewart // Space publications of the geological Society. London. – 2007. – vol. 272. – P. 361 – 396.

References

1. AIZENVERG, D.E., BERCHEKNO, O.I., BRAZHNKOVA, N. (1988) *Geologija i neftegazonosnost' Dneprovsko-Donetskoy vpadiny. Stratigrafija*. Kiev: Nauk. dumka.
2. GAVRISH, V. K., ZABELLO, G. D., RYABCHUN, L.M. (1989) *Geologija i neftegazonosnost' Dneprovsko-Donetskoy vpadiny. Glubinnoe stroenie i geotektonicheskoe razvitie*. Kiev: Nauk. dumka.
3. KUDEL'SKIJ, A.V. (2017) Jeksgaljacionno-osadochnyj galokinez v Pripjatskom paleorifte. *Geologija i mineral'no-syr'evye resursy zapada Vostochno-Evropejskoj platformy*. Minsk. p. 161 – 171.
4. KURILENKO, V.S. (2019) Soljanoy diapirizm Dneprovsko-Donetskoy vpadiny s pozicij fljuidodinamicheskikh predstavlenij. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.* N 6. p. 43 -47.
5. LUBKOV, M., ZAHARCHUK, O. (2019) Utvorennya vuglevodnevy`x pastok u lokal'ny`x soljany`x strukturax Dniprovs`ko-Donecz`koyi zapady`ny`. *Geoinformatics*. 2(70). p. 50 – 57.
6. STOVBA, S.N. (2005) Pro mexanizmy` solyanogo tektogenezu v Dniprovs`ko-Donecz`kij zapady`ni. *Geolog Ukrayiny`*. N 1. p. 23 – 29.
7. BAHROUDI, A., KOUJ, H.A. (2003). Effect of spatial distribution of Hormuz salt on deformation style in the Zagros fold-thrust belt. *Journal of the Geological Society of London*. Vol. 160. p. 719 – 733.
8. SCHULTZ-ELA, D.D., WALSH, P. (2002). Modeling of grabens extending above evaporites in Canyon-lands National Park, Utah. *Journal of Structural Geology*. Vol. 24, N 2. p. 247 -275.
9. STEWART, S.A. (2007). Salt tectonics in the North Sea Basin: a structural style template for seismic interpreters. *Space publications of the geological Society. London*. Vol. 272. p. 361 – 396.

Надійшла до редколегії 01.07.23

УДК 539.375

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.21>

Маковійчук М. В.¹, к.ф.-м.н., доц.,
Шацький І. П.², д.ф.-м.н., проф.,

M. V. Makoviichuk¹, Cand. Phys. & Math. Sc.,
I. P. Shatskyi², Dr. Phys. & Math. Sc.,

**Аналіз граничної рівноваги зігнутої
сферичної оболонки з колінеарними
тріщинами за локальним та
інтегральним критеріями руйнування**

**Analysis of the limit equilibrium of a bent
spherical shell with collinear cracks according
to local and integral failure criteria**

Лабораторія моделювання демпфуючих систем
Інституту прикладних проблем механіки і
математики ім. Я. С. Підстригача НАН
України, 76002, м. Івано-Франківськ, вул.
Микитинецька, 3,

¹ e-mail: makoviy@ua.fm

² e-mail: ipshatsky@gmail.com

Laboratory of Modeling of Damping Systems,
Pidstryhach-Institute for Applied Problems in
Mechanics and Mathematics, NAS of Ukraine,
76002, Ivano-Frankivsk, Mykytynetska str., 3,

¹ e-mail: makoviy@ua.fm

² e-mail: ipshatsky@gmail.com

Досліджується напружений стан і гранична рівновага ізотропної сферичної оболонки, послабленої двома меридіальними колінеарними тріщинами під дією навантаження згину. Закриття тріщин внаслідок деформації згину враховано на основі моделі контакту країв тріщини вздовж лінії в одній з лицевих поверхонь оболонки. Розв'язок задачі побудовано за допомогою методу сингулярних інтегральних рівнянь та чисельного методу квадратур. Для аналізу граничного стану оболонки використано локальний та інтегральний по товщині енергетичні критерії лінійної механіки руйнування. Досліджено вплив взаємного розташування дефектів та кривизни оболонки на верхню та нижню оцінки граничного навантаження.

Ключові слова: сферична оболонка, колінеарні тріщини, закриття тріщин, згин, граничне навантаження, критерії руйнування.

The stressed-strain state and limit equilibrium of shallow spherical shell weakened by two cross-cutting meridional collinear cracks is studied in the two-dimensional formulation. The crack closure caused by bending deformation was taken into account based on the model of the crack edges contact along a line in one of the face surfaces of the shell. The boundary problem for equations of classical shell theory with interrelated conditions along the line of the cracks is formulated within the framework of such model. Singular integral equation for the unknown jump of normal rotation angle on the cracks edges has been elaborated.

Based on numerical solutions of singular integral equation the stressed-strain state and limit equilibrium of the spherical shell depending on the parameters of shell curvature and distance between cracks are investigated. Using the local and integral through-the-thickness energy failure criteria of linear mechanics of fracture, the upper and lower values of limit load were established. It was found that the upper estimate of the limit load according to the integral criterion is approximately twice the magnitude of the lower estimate according to the local criterion.

Key Words: spherical shell, collinear cracks, crack closure, bending, limit load, failure criteria.

Статтю представив член-кореспондент НАН України Жук Я.О.

Вступ. Постановка задачі

Метою даної роботи є дослідити граничну рівновагу пологої сферичної оболонки, послабленої двома меридіональними колінеарними тріщинами, здатними до закриття унаслідок згину, за

допомогою локального та інтегрального енергетичних критеріїв лінійної механіки руйнування.

Розглядається ізотропна сферична оболонка радіуса R і завтовшки $2h$ з двома наскрізними колінеарними розрізами завдовжки $2l$, які розташовані вздовж меридіана на відстані $2d$ між їхніми центрами. До країв дефектів прикладено

самозрівноважене рівномірно розподілене згинне навантаження $m = \text{const}$; решта поверхонь оболонки вільні від напружень. Дослідимо вплив розташування тріщин та контакту їх берегів унаслідок згину на напружено-деформований стан і граничну рівновагу оболонки.

Уважаючи оболонку в зоні збурення напруженого стану пологою, виберемо систему

$$\Delta\Delta\varphi - \frac{B}{R}\Delta w = 0, \Delta\Delta w + \frac{1}{DR}\Delta\varphi = 0, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus L; \quad (1)$$

$$[u_y] = h |[\theta_y]| \geq 0, M_y = -m + hN_y \text{sgn}[\theta_y], N_y \leq 0, x \in L; \quad (2)$$

$$N_x = N_{xy} = N_y = 0, M_x = M_{xy} = M_y = 0, Q_x^* = Q_y^* = 0, (x, y) \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Тут φ – функція напружень, w – прогин оболонки, $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ – оператор Лапласа; $[u_y]$ – розкриття тріщини в базовій поверхні оболонки, $[\theta_y]$ – розрив кута повороту нормалі ($\theta_y = \partial w / \partial y$); N_x, N_{xy}, N_y – мембранні зусилля, M_x, M_{xy}, M_y – моменти, Q_x^*, Q_y^* – узагальнені поперечні сили; $B = 2Eh$,

декартових координат $Oxyz$ з центром посередині правого розрізу та віссю абсцис уздовж його лінії. З урахуванням симетрії об'єкта та навантаження відносно осі абсцис такий підхід призводить до задачі теорії пологих оболонок із взаємопов'язаними крайовими умовами на розрізах [1, 2]:

$D = 2Eh^3 / (3(1 - \nu^2))$, E і ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки; $L = (-l - 2d, l - 2d) \cup (-l, l)$ – сукупність розрізів.

Для побудови розв'язку задачі (1)–(3) скористалися методом сингулярних інтегральних рівнянь. Враховуючи, що дефекти перебувають в однакових умовах, зусилля та моменти на лінії правої тріщини виразимо через похідні від функцій стрибка [3, 4]:

$$N_y(x, 0) = \frac{B}{4\pi} \int_{-l}^l \left\{ \tilde{K}_{11}(\xi, x) [u_y]'(\xi) - \tilde{K}_{13}(\xi, x) a[\theta_y]'(\xi) \right\} d\xi, \\ M_y(x, 0) = \frac{Ba}{4\pi} \int_{-l}^l \left\{ \tilde{K}_{31}(\xi, x) [u_y]'(\xi) - \tilde{K}_{33}(\xi, x) a[\theta_y]'(\xi) \right\} d\xi. \quad (4)$$

Тут

$$\tilde{K}_{ij}(\xi, x) = K_{ij}(\xi - x) + K_{ij}(\xi + x + 2d), i, j = 1, 3; \\ K_{11}(\zeta) = \frac{2}{\zeta} \left(\ker(\gamma|\zeta|) - \gamma|\zeta| \ker'(\gamma|\zeta|) - \frac{2}{\gamma|\zeta|} \text{kei}'(\gamma|\zeta|) \right), \\ K_{13}(\zeta) = K_{31}(\zeta) = -\frac{2}{\zeta} \left((1 - \nu) \left(\frac{2}{\gamma^2 \zeta^2} + \frac{2}{\gamma|\zeta|} \ker'(\gamma|\zeta|) + \text{kei}(\gamma|\zeta|) \right) + \nu \gamma|\zeta| \text{kei}'(\gamma|\zeta|) \right), \\ K_{33}(\zeta) = \frac{2}{\zeta} \left((1 - \nu)^2 \left(\frac{2}{\gamma|\zeta|} \text{kei}'(\gamma|\zeta|) - \ker(\gamma|\zeta|) \right) - (1 - \nu^2) \gamma|\zeta| \ker'(\gamma|\zeta|) \right) - 2\gamma^2 \int_0^\zeta \text{kei}(\gamma|\zeta|) d\zeta, \\ z = \xi - x, a = h / \sqrt{3(1 - \nu^2)}, \gamma = 1 / \sqrt{Ra} = (3(1 - \nu^2))^{1/4} / \sqrt{Rh},$$

Підставимо вирази (4) в крайові умови (2) на правому розрізі. Виключаючи функцію $[u_y]$ і враховуючи, що $\text{sgn}[\theta_y] = -\text{sgn} m$, дістаємо сингулярне інтегральне рівняння для знаход

ження знакосталого за припущенням стрибка повороту нормалі з додатковою умовою на кінцях розрізу:

$$\frac{D}{4\pi} \int_{-l}^l K(\xi, x) [\theta_y]'(\xi) d\xi = m, x \in (-l, l); [\theta_y](\pm l) = 0. \quad (5) \\ K(\xi, x) = 3(1 - \nu^2) \tilde{K}_{11}(\xi, x) + 2 \text{sgn} m \sqrt{3(1 - \nu^2)} \tilde{K}_{13}(\xi, x) + \tilde{K}_{33}(\xi, x).$$

За знайденим розв'язком та першою із формул (2) визначали розкриття тріщин, а за граничними виразами [3, 4]:

$$K_N^{\pm} = \frac{B}{4\sqrt{l}} \lim_{x \rightarrow \pm l} \sqrt{l^2 - x^2} [u_y]'(x),$$

$$K_M^{\pm} = \pm(3 - 2\nu - \nu^2) \frac{D}{4\sqrt{l}} \lim_{x \rightarrow \pm l} \sqrt{l^2 - x^2} [\theta_y]'(x),$$

обчислювали коефіцієнти інтенсивності зусиль K_N та моментів K_M у внутрішніх та зовнішніх вершинах тріщин.

Критерії руйнування

Напруження поблизу вершин тріщин розподілені нерівномірно по товщині оболонки. Враховуючи цю обставину, вважаємо, що процес руйнування надтріснутої оболонки відбувається в декілька етапів.

Спочатку за певного нижчого критичного значення навантаження розпочинається стале підростання тріщин в найбільш напруженій зоні, яке визначаємо за локальним енергетичним критерієм лінійної механіки руйнування [5]:

$$\max_z G(z) =$$

$$= \frac{\pi}{(2h)^2 E} \left(K_N^2 + (3 + \kappa) K_N \frac{|K_M|}{h} + 3\kappa \left(\frac{K_M}{h} \right)^2 \right) =$$

$$= 2\gamma_*, \quad (6)$$

де G – потік енергії у вершину тріщини, $\kappa = 3(1 + \nu)/(3 + \nu)$, γ_* – питома поверхнева енергія матеріалу.

Потім, початковий прямий фронт тріщини стає криволінійним і рівномірно напруженим. При досягненні верхнього значення руйнівного навантаження тріщина поширюється лавиноподібно по всій товщині оболонки. Таке нестійке розповсюдження тріщини описуємо середнім значенням потоку енергії до її вершини [4]:

$$\frac{1}{2h} \int_{-h}^h G(z) dz = \frac{\pi}{4h^2 E} \left[K_N^2 + \kappa \left(\frac{K_M}{h} \right)^2 \right] = 2\gamma_*. \quad (7)$$

Після підстановки знайдених значень коефіцієнтів інтенсивності у критерії (6), (7) отримали двобічну оцінку граничних навантажень.

Аналіз результатів

Числовий розв'язок задачі (5) побудували при $\nu = 0,3$ методом механічних квадратур [3]. Варіювали безрозмірний параметр взаємного розташування дефектів: $\rho = l/d$ для фіксованих значень параметра кривини оболонки $\lambda = \gamma l = (3(1 - \nu^2))^{1/4} l / \sqrt{Rh}$.

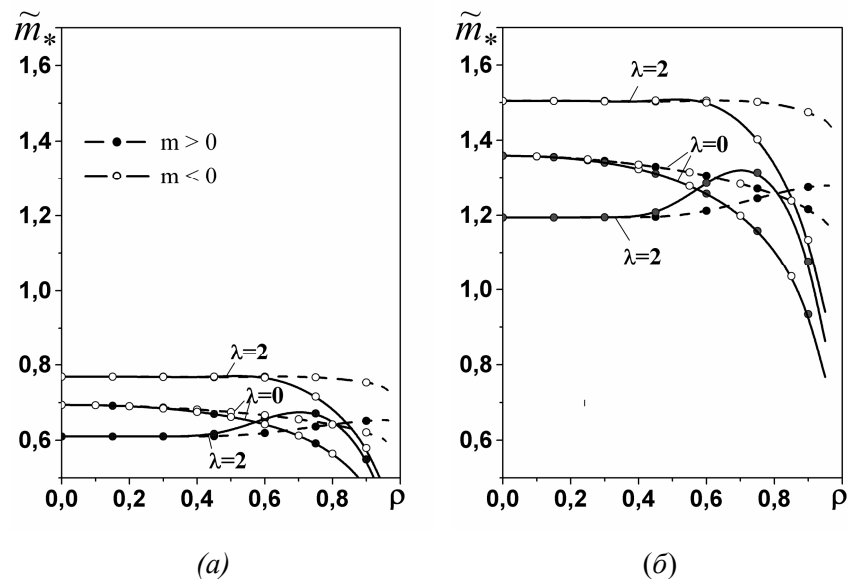
Результати дослідження граничної рівноваги сферичної оболонки з двома меридіональними тріщинами відображено на рисунку. Безрозмірні граничні навантаження $\tilde{m}_* = |m_*| / m^0$ ($m^0 = 2h^2 \sqrt{2E\gamma_*/(\pi l)}$), отримані за локальним критерієм (6), подано ліворуч (а), а за інтегральним критерієм (7) – праворуч (б); суцільні лінії відповідають ближнім, а штрихові – дальнім вершинам. При $m > 0$ береги зникаються у внутрішній (лінії з темними маркерами), а при $m < 0$ – у зовнішній лицьовій поверхні оболонки (світлі маркери).

Як видно з рисунка, верхня оцінка граничного навантаження за інтегральним критерієм приблизно вдвічі перевищує величину нижньої оцінки за локальним критерієм. Для випадку закриття тріщин на внутрішній поверхні оболонки спостерігається немонотонна залежність граничного навантаження від параметра ρ для ближніх вершин дефектів; у той же час за великих λ у певному діапазоні ρ більш небезпечними виявляються дальні вершини тріщин (штрихові лінії лежать нижче від суцільних). Натомість, у разі контакту берегів у зовнішній поверхні завжди небезпечними є ближні вершини розрізів.

Висновки

Руйнівне навантаження згину для сферичної оболонки з двома меридіональними тріщинами залежно від знаку навантаження може бути як більшим так і меншим порівняно з пластиною, а за умови закриття тріщин у внутрішній поверхні немонотонно залежить від параметра віддалі між дефектами, і небезпечними, при цьому, можуть бути зовнішні вершини дефектів.

Встановлено, що верхня оцінка граничного навантаження за інтегральним критерієм приблизно вдвічі перевищує величину нижньої оцінки за локальним критерієм.



Руйнівні навантаження для сферичної оболонки з колінеарними тріщинами

Список використаних джерел

References

1. Шацький І. П. Інтегральні рівняння задачі згину пологої оболонки, ослабленої розрізом з контактуючими кромками / І. П. Шацький // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1991 – № 2. – С. 26–29.
2. Шацький І. Рівновага сферичної оболонки з урахуванням закриття колінеарних тріщин за згину / І. Шацький, М. Маковійчук // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2010. – № 12. – С. 189–195.
3. Панасюк В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
4. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами / В. А. Осадчук. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.
5. Шацький І. Двобічні оцінки граничного навантаження згину для пластини з прямолінійною тріщиною / І. Шацький // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій: зб. наук. праць 5-ї Міжнар. конф. (24–27 черв. 2014 р., Львів) / Під заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: Фіз.-мех. ін.-т ім. Г.В.Карпенка НАН України, 2014. – С. 425–430.
1. SHATS'KYI, I. P. (1991) Integral equations of the problem of bending of a shallow shell weakened by a cut whose edges are in contact. *Dop. Akad. Nauk Ukr RSR. Ser. A.* (2). p. 26–29.
2. SHATSKY, I., MAKOVYCHUK, M. (2010) An equilibrium of bending spherical shell with taking into account the closure of collinear cracks. *Physico-mathematical modelling and informational technologies.* (12). p. 189–195.
3. PANASYUK, V. V., SAVRUK, M. P. & DATSYSHYN, A. P. (1976) *Raspredelenie napryazheniy okolo treshchin v plastinakh i obolochkach*, Kiev: Naukova dumka.
4. OSADCHUK, V. A. (1985) *Napriazhenno-deformirovannoe sostoianie i predel'noe ravnovesie obolochek s razrezami*. Kiev: Naukova dumka.
5. SHATSKYI, I. (2014) Two-side estimates of limiting bending load for plate with rectilinear crack. In: 5th Int. Conf. “Fracture mechanics of materials and structural integrity.” Karpenko Physico-Mechanical Institute, NASU, Lviv. p. 425–430.

Надійшла до редколегії 19.06.23

УДК 539.3

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.22>

Маслов Б.П., д.ф.-м.н., с.н.с.

Maslov B.P., Dr. Sci., Senior Research Officer

**Побудова критерію довготривалого
руйнування втоми для тонкостінних
шаруватих оболонок**

**Construction of long-term fatigue failure
criteria for thin-walled laminated shells**

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН
України, 03057, м. Київ-57, вул. Нестерова, 3,
e-mail: maslov@inmech.kiev.ua

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics NAS
Ukraine, 03057, Kyiv, 3 Nesterov Str.,
e-mail: maslov@inmech.kiev.ua

Побудовано модель та критерій довготривалого руйнування втоми для тонкостінних шаруватих оболонок із врахуванням впливу виду напруженого стану. Розглянуто задачі розрахунку числа циклів до руйнування при комбінованому навантаженні. Розв'язки будуються на основі концепції еквівалентних напружень. Сформульовано в рамках нелінійної теорії другого порядку задачу визначення локальних напружень у композитах випадкової структури. Отримано розв'язок стохастичної крайової задачі про визначення концентрації напружень в односпрямованому композиті з металевою матрицею (ММК). Для отримання повної системи рівнянь другого порядку використовується метод послідовних наближень. Визначено параметри концентрації напружень на границі компонентів. Наведені приклади показують важливість впливу нелінійних властивостей на перерозподіл напружень біля волокон. Показано можливість прогнозування довготривалої міцності матеріалу. Необхідною інформацією про матеріал для формулювання критеріїв руйнування є криві S-N для окремих компонентів комбінованих напружень.

Ключові слова: руйнування втоми, критерій, волокнистий композит, чисельні методи.

A model and criterion of long-term fatigue failure for thin-walled layered shells is built, taking into account the influence of the type of stress state. The problem of calculating the number of cycles to failure under combined loading is considered. Solutions are built on the basis of the concept of equivalent stresses. The problem of determining local stresses in composites of random structure is formulated within the framework of the second-order nonlinear theory. The solution of the stochastic boundary value problem on determining the stress concentration in a unidirectional composite with a metal matrix (MMC) was obtained. To build a complete system of equations of the second order, the method of successive approximations is used. The parameters of the stress concentration at the boundary of the components are determined. The given examples show the importance of the influence of nonlinear properties on the redistribution of stresses near the fibers. The possibility of predicting the long-term strength of the material is shown. The necessary information about the material for the formulation of failure criteria is the S-N curves for individual components of the combined stresses.

Key Words: fatigue failure, criterion, fibrous composite, numerical methods.

Статтю представив член-кореспондент НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Постановка задачі

Однією з фундаментальних проблем прикладної механіки є моделювання процесу довготривалого руйнування внаслідок втоми шаруватих композитних матеріалів при комбінованому циклічному навантаженні [1, 2]. Параметри опору втоми можна визначити при циклічному навантаженні напруженнями зі

сталюю амплітудою згідно з існуючими $S - N$ кривими для відповідного напруженого стану [3, 4], який в кожному шарі є локально тривимірним. Це призводить до необхідності формулювання критеріїв руйнування під дією комбінованого навантаження. Перспективним напрямком є розв'язок задач розрахунку довговічності тонкостінних циліндричних оболонок на основі

концепції еквівалентних напружень із використанням сучасних комп'ютерних технологій [3, 5] та класичних критеріїв руйнування [2, 6]. Міцність і довговічність композитів залежить від величини середніх σ_m або максимальних σ_{max} за цикл навантаження напружень як в матриці, так і у волокнах, кількості циклів N та ін. Основоположене практичне значення має прогнозування наведених макроскопічних лінійних та нелінійних пружних характеристик [3, 7, 8]. Розглянемо нелінійно пружний трансверсально ізотропний композитний матеріал з випадковою структурою в площині перпендикулярній напрямку $\mathbf{n}$ армування. Отже, трансверсально ізотропне тіло характеризуємо одиничним вектором $\mathbf{n}$ у напрямку орієнтації волокон, перпендикулярним до площини ізотропії. Застосуємо надалі також тензор $\mathbf{a} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ та структурний тензор поперечної ізотропії $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{1} - \mathbf{a}$. Для того, щоб відділити напруження $\boldsymbol{\sigma}$ від тих, що виникають в поперечній площині ізотропії, використаємо адитивний розклад [4]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_T + \boldsymbol{\sigma}_L, \quad (1)$$

де $\boldsymbol{\sigma}_T$ і $\boldsymbol{\sigma}_L$ являють собою поперечну та поздовжню компоненту, відповідно. Запишемо поперечну складову $\boldsymbol{\sigma}_T$ тензора напружень $\boldsymbol{\sigma}$ за допомогою тензора проектора $\boldsymbol{\theta}$ як

$$\boldsymbol{\sigma}_T = \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{a} - \mathbf{a} \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{a} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{a}. \quad (2)$$

Тоді поздовжня складова $\boldsymbol{\sigma}_L$ впливає з рівняння (1). Можна перекоонатись, що компонента $\boldsymbol{\sigma}_T$ знаходиться в стані плоского напруженого стану.

Розглянемо деякі загальні характеристики феноменологічних критеріїв руйнування при комбінованих циклічних навантаженнях [2, 6]. Вважається, що циклічне напруження із середнім $\bar{\sigma}$ є статистично однорідним. Середні значення визначаються для репрезентативних об'ємних елементів (РОЕ), а статистична однорідність означає [3, 9], що середні значення є незалежними від розташування РОЕ. Далі передбачається, що всі напруження є циклічними на тій же частоті, що максимальна і мінімальна амплітуди, σ_{max} і σ_{min} відповідно кожної компоненти напружень залишаються постійними під час навантаження. Знакозмінні напруження σ_a визначаються як

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min}). \quad (3)$$

Якщо цикли напружень є синусоїдальними, то циклічний стан напружень є таким, що однозначно визначається величинами (3) окремих компонентів. Таким чином, передбачається, що для будь-якого зразка матеріалу число циклів до руйнування n_R визначається амплітудою σ_a та середніми напруженнями σ_m . Отже, критерій руйнування виражається у вигляді

$$F(\sigma_m, \sigma_a, N) < 1. \quad (4)$$

Двома практично важливими особливими випадками є нульова амплітуда напружень $\sigma_a = 0$ та відсутність середніх напружень $\sigma_m = 0$. У першому випадку отримуємо статичний критерій руйнування.

Рівень асиметрії циклу напружень задається коефіцієнтом асиметрії R та коефіцієнтом амплітуд A , так що

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = \frac{1-A}{1+A}; \quad A = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{1-R}{1+R}, \quad (5)$$

причому за умов симетричного $\sigma_m = 0$ циклу навантаження $R = -1$ та $A = \infty$.

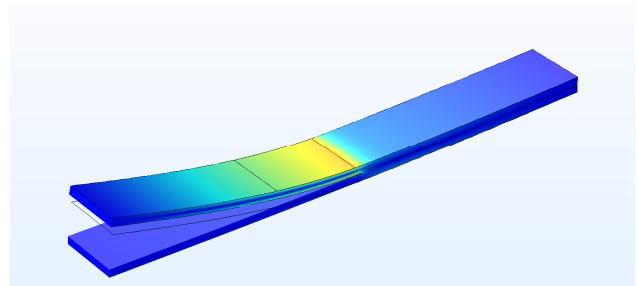


Рис 1. Розрахункова схема [5] процесу деламінування елемента оболонки.

З метою встановлення критеріїв руйнування від комбінованих циклічних напружень розглянемо окремо різні втомні режими для односпрямованих волокнистих композитів. Критерії мають бути функціями трансверсально-ізотропних інваріантів [4] циклічного тензора напружень і, отже, можливо розвинути метод, аналогічний сформульованому в [1]. Використаємо структуру критерію миттєвого руйнування для волокнистого композиту. Вважаємо, що вісь x_1 спрямована у напрямку

волокна і застосуємо систему інваріантів трансверсально ізотропної пружності

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{11}, \quad I_2 = \sigma_{22} + \sigma_{33}, \\ I_3 &= \sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}, \quad I_4 = \sigma_{12}^2 + \sigma_{31}^2, \\ I_4 &= 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} - \sigma_{22}\sigma_{31}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Макроскопічні напруження $\bar{\sigma}$ та деформації $\bar{\epsilon}$ трансверсально ізотропного композиту пов'язані співвідношеннями [1, 8]

$$\bar{\sigma} = \tilde{C}(E_T, E_L, G_T, G_L, \nu_T, \nu_L) \bar{\epsilon} \quad (7)$$

де $\tilde{C}$ — ефективний тензор пружності, та використано характеристики: E_T, E_L — поперечний та поздовжній модулі Юнга, G_T, G_L — поперечний та поздовжній модулі зсуву, ν_T, ν_L — поперечний та поздовжній коефіцієнти Пуассона, відповідно.

Чисельний алгоритм

Матрицю композиту вважаємо ізотропною та такою, що деформується нелінійно, виявляючи ефект зміцнення [3]. В анізотропному композитному середовищі еквівалентні напруження σ_{eq} виразимо [8, 9] через систему I_k відповідних інваріантів

$$\sigma_{eq} = \left(\frac{3}{2} \bar{\sigma} \cdot \mathbf{I}_d \cdot \bar{\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} = \sigma_{eq}(I_k). \quad (7)$$

Використаємо надалі критерій типу Хілла-Хашіна для визначення руйнування матриці або волокон [1]. Наприклад, щодо матриці запишемо його у вигляді

$$\frac{(\sigma_{22} + \sigma_{33})^2}{\sigma_T^2} + \frac{\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}}{\tau_T^2} + \frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{\tau_A^2} \leq 1, \quad (8)$$

де $\sigma_T = \sigma_T(R, n)$, $\tau_A = \tau_A(R, n)$, $\tau_T = \tau_T(R, n)$ є напруження руйнування для симетричного циклу $R = -1$. Якщо задано $S-N$ криві для будь-якого одновимірного стану, то (8) надалі розглядається як рівняння з невідомим числом циклів до руйнування N . Кожне з такого типу рівнянь розв'язується чисельно [3, 5] і руйнування визначається критерієм, до якого призводить менший N . Результат розрахунку еквівалентних напружень у шарах ламінату

представлений на рис. 2. Ця процедура визначає довговічність матеріалу та умову руйнування.

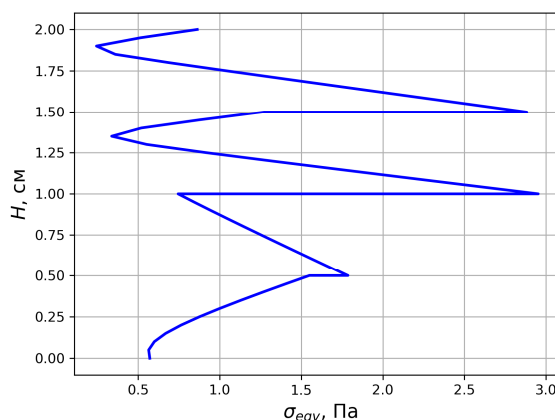


Рис 2. Зміна еквівалентного напруження σ_{eq} в шарах по товщині H оболонки.

Суттєвою проблемою у визначенні критеріїв руйнування [6] є експериментальне визначення напружень руйнування σ_T і τ_A . Найпростішим є σ_A , який отримується з кривої $S-N$ для напруження в напрямку волокна, з використанням плоских однонаправлених зразків [1].

Висновки

Розповсюджена структура типу композитний ламінат містить однонаправлено армовані шари, що знаходяться у комбінованому напруженому стані. Повний тривимірний стан напружень реалізується переважно біля отворів та на краях ламінату. Ці випадки вимагають аналізу сучасними чисельними методами. Перспективною є задача [8, 9] побудови критеріїв довготривалого руйнування внаслідок повзучості за умов складного напруженого стану, формулювання системи базових експериментів для визначення матеріальних констант та чисельно-експериментальна апробація критеріїв на задачах розрахунку часу до руйнування тонкостінних композитних елементів конструкцій.

Список використаних джерел

1. Hashin Z. Fatigue Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites. / Z. Hashin // Transactions of the ASME – 1981. Vol. 48, No. 12. – P. 846–852.
2. Christensen R.M. The Theory of Materials Failure / R.M. Christensen. – Oxford University Press, 2013, – 292 p.
3. Besson J. Non-Linear Mechanics of Materials / J. Besson, G. Cailletaud, J.L. Chaboche, S. Forest – New York: Springer, 2010. – 450 p.
4. Asaro R.J. Mechanics of Solids and Materials / R.J. Asaro, V.A. Lubarda – Cambridge UP, 2006. – 880 p.
5. Zienkiewicz O.C. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals Sixth edition / O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor and J.Z. Zhu – Burlington: Elsevier, 2005. – 802 p.
6. Голуб В.П. Классические критерии разрушения в решении задач усталости при двухосном комбинированном нагружении / В.П. Голуб // Вісник НТУУ “КПІ”, Машинобудування. – 2014. – No. 72. – С. 109–117.
7. Маслов Б.П. Спадкова повзучість ізотропних композитів випадкової структури при складному напруженому стані / Б.П. Маслов // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка, серія фізико-математичні науки, 2021, No. 3. – С. 77–80.
8. Maslov B. Stress concentration in nonlinear viscoelastic composites / B. Maslov // Mechanics and Advanced Technologies – 2017. – Vol. 79, No. 1. – P. 5–10.
9. Maslov B.P. Nonlinear Hereditary Creep of Isotropic Composites of Random Structure / B.P. Maslov // International Applied Mechanics – 2022 – Vol. 58, No. 1 – P. 75–90

References

1. HASHIN, Z. (1981) Fatigue Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites. *Transactions of the ASME*, **48** (12), pp. 846–852.
2. CHRISTENSEN, R.M. (2013) *The Theory of Materials Failure*. Oxford University Press.
3. BESSON, J. (2010) *Non-Linear Mechanics of Materials*. New York: Springer.
4. ASARO, R.J. and LUBARDA, V.A. (2006) *Mechanics of Solids and Materials*. Cambridge: University Press.
5. ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L. and ZHU, J.Z. (2005) *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals Sixth edition*. Burlington: Elsevier.
6. HOLUB, V.P. (2014) Klassycheskiye krytery razrusheniya v resheniiy zadach ustalosti pry dvukhosnom kombinyrovannom nahruzhennyy. *Visnyk NTUU “KPI”, Mashynobuduvannia*. 72. p. 109–117.
7. MASLOV, B.P. (2021) Spadkova povzuchist izotropnykh kompozytiv vypadkovoї struktury pry skladnomu napruzhenomu stani. *Visnyk Kyivskoho natsionalnoho universytetu im. Tarasa Shevchenka. Seriya fizyko-matematychni nauky*. 3. – p. 77–80.
8. MASLOV, B. (2017) Stress concentration in nonlinear viscoelastic composites. *Mechanics and Advanced Technologies*. 79(1). p. 5–10.
9. MASLOV, B.P. (2022) Nonlinear Hereditary Creep of Isotropic Composites of Random Structure. *International Applied Mechanics*. 58(1), p. 75–90.

Надійшла до редколегії 21.08.23

УДК 539.3

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.23>

Онишкевич В. М.¹, к.ф.-м.н., доц.,
Барабаш Г. М.², к.ф.-м.н., доц.

V. M. Onyshkevych¹, Ph. D. (Phys.-Math.), Assoc.
Prof.,
G. M. Barabash², Ph. D. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.

**Фрикційний розігрів системи штамп-
пружна півплощина при ковзанні
вздовж твірної**

**Frictional heating of system punch - elastic
half plane when sliding along creative line**

¹ Національний лісотехнічний університет
України, 79057, м. Львів, вул. Генерала
Чупринки, 103,
e-mail: onyshkevych@nltu.edu.ua

¹ Ukrainian National Forestry University, 79057,
L'viv, General Chuprynka str., 103,
e-mail: onyshkevych@nltu.edu.ua

² Львівський національний університет імені
Івана Франка, 79000, м. Львів, вул.
Університетська, 1,
e-mail: galynabarabash71@gmail.com

² Ivan Franko National University of L'viv, 79000,
L'viv, Universytetska str., 1,
e-mail: galynabarabash71@gmail.com

Розглядається фрикційний розігрів системи штамп-пружна півплощина при русі штамп прямолінійно уздовж своєї твірної з деякою швидкістю. Для математичного опису контакту використано модель так званого «третього тіла» – тонких приповерхневих і проміжкових шарів контактуючих тіл, фізико-механічні властивості яких відрізняються від властивостей тіл контактної пари, та мікрогеометрією поверхонь тіл у зоні контакту. Розв'язок задачі термопружності для півплощини побудовано за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Задачу теплопровідності для штамп розв'язано методом прямих. Для визначення наперед невідомої області контакту застосовано ітераційну схему, яка на кожному кроці передбачає контроль знаку нормальних напружень у області, де передбачено безпосередній контакт тіл. Для моделювання нестационарної задачі запропоновано метод рухомої лінії розділу граничних умов.

Ключові слова: контакт, тертя, розігрів, термопроникність.

Friction heating of system punch-elastic half plane when sliding along creative line is considered. Model of so-called "third body", i.e., thin near-surface and intermediate layers, the physical and mechanical properties of which differ from those of the interacting bodies, and by the microgeometry of their surfaces in the contact zone, used for mathematical description of contact. The method of determination of thermal contact conductance in mathematical modelling of contact interaction with considering friction and heat generation by "third body" is presented. Using of modified conditions of heat contact in mathematical model of contact thermoelasticity, taking into account of friction and heat generation is proposed. The solution of the problem of thermoelasticity for a half-plane is obtained by means of the Fourier integral transformation. Heat conductivity problem for the punch is solved by method of straight lines. The system obtained of dual integral equations is reduced to the system of linear algebraic equations by means of points collocation method. Formulas for thermal fields, heat fluxes and contact stresses are proposed. In order to obtain the unknown contact area, the iterative scheme based on a control of a sign of normal stresses in the immediate contact interaction zones is used. Method of moving line of separation of boundary conditions is proposed.

Key Words: contact, friction, heating, thermal conductance.

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я. О.

1. Вступ

Дослідження перерозподілу теплових полів у парі тертя є актуальною і математично складною науково-технічною проблемою. Вперше плоска

задача термопружності про тиск штамп з неповним контактом розглядалась в [1], де у випадку тепловіддачі від штамп до півплощини було встановлено втрату контакту на краях штамп і з'ясовано необхідність урахування

нелінійності задачі через зміну області контакту. Різноманітність чинників впливу на тепловий режим типологічної пари зумовлює складність опису та математичного моделювання такої задачі. Зокрема, дослідження контактної термopружності за наявності поверхневих теплофізичних неоднорідностей вперше було проведене в [2]. В [3] було обґрунтовано можливість математично моделювати режими тертя, зношування та теплоутворення за допомогою так званого «третього тіла» [4] – тонких приповерхневих і проміжкових шарів контактуючих тіл, фізико-механічні властивості яких відрізняються від властивостей тіл контактної пари, та мікрогеометрією поверхонь тіл у контактній зоні. Застосування «третього тіла» як математичної моделі контактної термopружності було використано в [5].

2. Постановка задачі

Нехай плоский штамп висоти H втискується силою P у пружну півплощину і рухається прямолінійно уздовж твірної поверхні з деякою сталою швидкістю V . Між верхньою поверхнею штампа, бічними поверхнями штампа і ненавантаженою поверхнею півплощини з одного боку та зовнішнім середовищем з іншого здійснюється теплообмін за законом Ньютона з різними коефіцієнтами теплообміну. Тепловий контакт між штампом і півплощиною неідеальний з коефіцієнтом теплопроникності контакту h . Від дії сили тертя на ділянці контакту відбувається теплоутворення, що пропорційне інтенсивності сили тертя. Температуру зовнішнього середовища вважаємо нульовою.

З урахуванням цього для розв'язання задачі необхідно проінтегрувати систему рівнянь

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu \partial \theta / \partial x) - \beta \partial t^{(2)} / \partial x = 0, \quad (1)$$

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu \partial \theta / \partial y) - \beta \partial t^{(2)} / \partial y = 0, \quad (2)$$

$$\Delta t^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

де Δ – оператор Лапласа; $\theta = \partial u / \partial x + \partial u / \partial y$; u та v – компоненти вектора переміщень; λ та μ – коефіцієнти Ламе; $\beta = (3\lambda + 2\mu)\alpha_T$; α_T – температурний коефіцієнт лінійного розширення. При цьому треба врахувати температурні граничні умови:

$$y = 0: \quad \partial t^{(1)} / \partial y = \gamma_0 t^{(1)}, \quad |x| \leq a; \quad (4)$$

$$x = \pm a: \quad \partial t^{(1)} / \partial x = \mp \gamma_a t^{(1)}, \quad |x| \leq a; \quad (5)$$

$$y = H:$$

$$\begin{aligned} \lambda \Delta (t^{(1)} + t^{(2)}) + 2(\lambda^{(1)} \partial t^{(1)} / \partial n - \lambda^{(2)} \partial t^{(2)} / \partial n) = \\ = c(i^{(1)} + i^{(2)}) - 2Q, \quad |x| \leq a; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \lambda \Delta (t^{(1)} - t^{(2)}) + 2(\lambda^{(1)} \partial t^{(1)} / \partial n + \lambda^{(2)} \partial t^{(2)} / \partial n) - \\ - 12h(t^{(1)} - t^{(2)}) = c(i^{(1)} - i^{(2)}), \quad |x| \leq a; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\partial t^{(2)} / \partial y = \gamma_H t^{(2)}, \quad |x| > a; \quad (8)$$

та силові граничні умови:

$$y = H: \quad v(x, H) = f(x) + \delta, \quad |x| \leq a; \quad (9)$$

$$\sigma_y(x, H) = 0, \quad |x| > a; \quad (10)$$

$$\tau_{xy}(x, H) = 0, \quad |x| < \infty; \quad (11)$$

де задано γ_0 , γ_a , γ_H – коефіцієнти теплообміну відповідно між верхньою поверхнею штампа, бічними поверхнями штампа, незавантаженою поверхнею півплощини з одного боку і зовнішнім середовищем з іншого, коефіцієнт теплопроникності контакту h , коефіцієнт тертя f_T , півширина штампа a , форма основи штампа $f(x)$, величина осідання штампа δ , коефіцієнти теплопровідності $\lambda^{(i)}$ ($i=1$ відноситься до штампа, $i=2$ – до півплощини); n – нормаль до поверхні контакту тіл; λ – зведена теплопровідність; Δ – двовимірний оператор Лапласа; c – зведена теплоємність; Q – інтенсивність теплових джерел.

Проведений в [4] числовий аналіз показав, що нехтування коефіцієнтом λ незначно впливає на розподіл температурних полів у тілах пари тертя, а суттєвий вплив на результати має коефіцієнт теплопроникності контакту h . Тому для практичних розрахунків можна використати такі спрощені теплофізичні умови на ділянці контакту:

$$\lambda^{(1)} \partial t^{(1)} / \partial n - \lambda^{(2)} \partial t^{(2)} / \partial n = c(i^{(1)} + i^{(2)}) / 2 - Q,$$

$$\lambda^{(1)} \partial t^{(1)} / \partial n + \lambda^{(2)} \partial t^{(2)} / \partial n - 2h(t^{(1)} - t^{(2)}) = c(i^{(1)} - i^{(2)}) / 6$$

Ці граничні умови для сформульованої контактної задачі набувають такого вигляду:

$$\lambda^{(1)} \partial t^{(1)} / \partial y - \lambda^{(2)} \partial t^{(2)} / \partial y = -f_T V \sigma_y(x), \quad |x| \leq a; \quad (12)$$

$$\lambda^{(1)} \partial t^{(1)} / \partial y + \lambda^{(2)} \partial t^{(2)} / \partial y = h(t^{(2)} - t^{(1)}) 0, |x| \leq a \quad (13)$$

3. Розв'язок задачі

Використовуючи скінченно-різницеву апроксимацію рівняння теплопровідності для штампів і крайових умов (4) за координатою x , розв'язок задачі для штампів будується методом прямих і зводиться до системи лінійних диференціальних рівнянь типу

$$d\bar{s}/dy = A\bar{s}, \quad (14)$$

яка розв'язується за допомогою матричної експоненти.

Використовуючи загальний розв'язок рівнянь термодинаміки для півплощини в просторі трансформант Фур'є та задовольняючи граничні умови (6)–(11), задачу зведено до системи парних інтегральних рівнянь. Подаючи невідомі контактні напруження $\sigma_y(x)$ та невідому функцію $\psi(x)$ у вигляді рядів Фур'є та заміняючи в інтегральних рівняннях інтеграли на суми, отримаємо співвідношення:

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} \sum_{n=-N}^N a_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\xi a + \pi n)}{|\xi|(\xi + \pi n/a)} e^{-i\xi x} d\xi + \frac{\beta(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \cdot \sum_{n=-N}^N b_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\xi a + \pi n)}{|\xi|(\gamma_H + |\xi|)(\xi + \pi n/a)} e^{-i\xi x} d\xi = -2\pi(f(x) + \delta),$$

$$\frac{\lambda^{(2)}}{\pi} \sum_{n=-N}^N b_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\xi| \sin(\xi a + \pi n)}{(\gamma_H + |\xi|)(\xi + \pi n/a)} e^{-i\xi x} d\xi + f_T V \sum_{n=-N}^N a_n \exp(ik\pi x/a) + \lambda^{(1)} \partial t^{(1)} / \partial y = 0,$$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=-N}^N b_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(h + \lambda^{(2)} |\xi|) \sin(\xi a + \pi n)}{(\gamma_H + |\xi|)(\xi + \pi n/a)} e^{-i\xi x} d\xi - \lambda^{(1)} \partial t^{(1)} / \partial y - h t^{(1)} = 0.$$

Використовуючи метод поточної колокації, отримано систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів

розкладу. Повертаючись у простір оригіналів, отримано вирази для контактних напружень, температури і теплових потоків у контактуючих тілах та переміщень півплощини.

4. Числові результати. Висновки

При числових розрахунках вважалося, що основа штампів має закруглені краї, тобто $f(x) = x^2 H(|x| - x^*)/2a$, де x^* є близьким до a , а $H(x)$ – функція Хевісайда. Отримано розподіл контактних напружень, який за різних значень параметрів задачі може дати два якісно різні випадки контактної взаємодії. У першому випадку розраховані контактні напруження $\sigma_y(x)$ на всій ділянці $L_0: x \in [-a; a]$ не є додатними. Це означає, що на всій цій ділянці штамп прилягає до основи, граничні умови (6), (7), (9) виконані, а отримані контактні напруження та розподіл температури будуть остаточною. Прикладена до штампів сила, яка спричинила задане осідання δ , обчислюється з умови рівноваги штампів:

$$P = - \int_{-a}^a \sigma_y(x) dx = - \int_{-a}^a \sum_{n=-N}^N a_n \exp(i\pi n x/a) dx = -2aa_0.$$

В іншому випадку на певній ділянці $L_1 = \bigcup_{m=1}^M L^{2m}$,

яка складається з сукупності M проміжків $L^{2m} = [x_{2m-1}; x_{2m}]$,

$$(-a = x_0 \leq x_1, x_i < x_{i+1}, x_{2M} \leq x_{2M+1} = a;$$

$m = \overline{1, M}; i = \overline{1, 2M}$), розраховані значення напруження $\sigma_y(x)$ є строго додатними. Це

означає, що на цих ділянках якісь зусилля мали б притягувати штамп до півплощини, а тому отриманий розв'язок не є коректним розв'язком контактної задачі, оскільки існує велика ймовірність того, що штамп контактує з півплощиною на ділянці

$$L'_0 = L_0 - L_1 = \bigcup_{m=0}^M L^{2m+1}, \text{ а на } L_1 \text{ контакт відсутній.}$$

Тут $L^1 = [x_0; x_1]$, $L^{2m+1} = (x_{2m}; x_{2m+1})$, $(m = \overline{1, M-1})$, $L^{2M+1} = (x_{2M}; x_{2M+1})$. Тому треба

змінити початкове формулювання граничних умов (6), (7), (9), а інші умови залишаються у незмінному вигляді. У нульовому наближенні вважатимемо, що справджується припущення про контакт штампів на L'_0 , а тому замість L_0 тепер треба брати L'_0 , а для лінії L_1 умова відсутності контакту має вигляд:

$$y = H, \quad x \in L_1: \quad \sigma_y(x, H) = 0, \quad v(x, H) > \delta, \quad (15)$$

$$\lambda^{(1)} \partial t^{(1)} / \partial y + \lambda^{(2)} \partial t^{(2)} / \partial y = h_0 (t^{(2)} - t^{(1)}) \quad (16)$$

де h_0 – коефіцієнт теплопроникності контакту на ділянці L_1 . Така зміна граничних умов змушує розв’язувати основну систему рівнянь ще раз вже лише на проміжку L'_0 , а на ділянці L_1 – систему

рівнянь, яка забезпечує виконання граничних умов (15) – (16).

Запропонований метод послідовно-дискретного розділення граничних умов з використанням рухомої лінії розділу граничних умов може бути використаний для розв’язування нестационарної задачі шляхом зведення її до послідовності задач із незмінними ділянками прикладання видозмінених крайових умов.

Список використаних джерел

1. Comninou M. Heat conduction through flat punch / M. Comninou, J. R. Barber, J. Dundurs // J. Appl. Mech. – 1981. – Vol. 48. – P. 871–874.
2. Мартыняк Р.М. Термоупругое контактное взаимодействие тел при наличии поверхностных теплофизических неоднородностей / Р.Н. Швец, Р.М. Мартыняк // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1988. – Вып. 27. – С. 23–28.
3. Онишкевич В. М. Моделивання контактної взаємодії «третім тілом» у трибологічних задачах / В.М. Онишкевич, Г.М. Барабаш // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: фізико-математичні науки. – 2021. – № 3. – С. 85–88.
4. Онишкевич В.М. Дослідження впливу властивостей «третього тіла» на теплоутворення від тертя / В.П. Левицький, В.М. Онишкевич // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – Вип. 42, №1. – С. 82–86.
5. Онишкевич В. М. Задача про термопружний контакт півплощини з прямокутним штампом за теплоутворення від тертя / В. М. Онишкевич, Г. Т. Сулим // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: фізико-математичні науки. – 2017. – № 3. – С. 165–168.

References

1. COMNINOU, M., BARBER, J. R. & DUNDURS, J. (1981) Heat conduction through flat punch. *J. Appl. Mech.* 48. pp. 871–874.
2. SHVEC, R. N. & MARTYNYIAK, R. M. (1988) Termouprugoye kontaktnoye vzaimodejstviye tel pri nalichii poverhnostnyh teplofizicheskikh neodnorodnostey. *Mat. metody i fiz.-meh. polia.* 27. p. 23–28.
3. ONYSHKEVYCH, V. M. & BARABASH, G. M. (2021) Modeliuvannya kontaktnoyi vzayemodii “tretim tilom” u trybologichnyh zadachah. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics.* 3. p. 85–88.
4. LEVYTSKYI, V.P. & ONYSHKEVYCH, V.M. (1999) Doslidjennya vplyvu vlastyivostey “tretioho tila” na teploutvorennia vid tertia. *Mat. metody ta fiz.-meh. polia.* 42(1). p. 82–86.
5. ONYSHKEVYCH, V. M. & SULYM, G. T. (2017) Zadacha pro termopruznyi kontakt pivploshchyny z priamokutnym shtampom za teploutvorennia vid tertia. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics.* 3. p.165–168.

Надійшла до редколегії 11.07.23

УДК 539.376

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.24>

Плащинська А.В., к.т.н., с.н.с.
Романов О.В., к.т.н., с.н.с.

Alla V. Plashchynska, Ph.D
Olexander V. Romanov, Ph.D

**Щодо розрахунку втомної довговічності
призматичних стержнів за умов
одновісного асиметричного згину**

**To the computation of the fatigue life of
prismatic bars under uniaxial asymmetric
bending**

Національна академія наук України
Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка
вул. Нестерова, 3, м. Київ-57, 03057, Україна
e-mail: creep@inmech.kiev.ua

National Academy of Sciences of Ukraine
S.P.Timoshenko Institute of Mechanics
P.Nesterov str., 3, Kyiv-57, 03057, Ukraine
e-mail: creep@inmech.kiev.ua

Розглянуто альтернативний емпіричному підхід щодо розв'язку задач розрахунку втомної довговічності зразків матеріалів та елементів конструкцій за умов одновісного асиметричного багатоциклового навантаження. Підхід ґрунтується на концепції еквівалентних напружень, що дозволяє асиметричний цикл навантаження звести до еквівалентного за числом циклів до руйнування симетричного циклу. Структура еквівалентних напружень отримана на основі гіпотези існування єдиних ізохронних діаграм граничних напружень, які інваріантні стосовно числа циклів до руйнування. Як базові експерименти, для визначення матеріальних констант у вихідних рівняннях, використовуються легко відтворювані стандартні випробування гладких зразків матеріалу на короточасну міцність та втому за умов симетричного й асиметричного циклів навантаження згином. Розв'язано задачі аналізу багатоциклової втоми призматичних стержнів при одновісному асиметричному згині із врахуванням впливу середнього напруження циклу, коефіцієнту асиметрії та коефіцієнту амплітуд. Отримано задовільне узгодження результатів розрахунків з даними експериментів.

Ключові слова: призматичні стержні, одновісний асиметричний згин, багатоциклова втома, прогнозування довговічності, експериментальна апробація.

An alternative approach to solving the fatigue life computing problems for material samples and structural elements under uniaxial asymmetric cyclic loading has been considered. This approach is based on the concept of equivalent stresses, which allows the asymmetric load cycle to be reduced to the equivalent symmetric cycle for the number of fracture cycles. The structure of equivalent stresses is obtained based on the hypothesis of the existence of single isochronous ultimate stress diagrams, which are invariant with respect to the number of cycles to fracture. As basic experiments, to determine the material constants in the original equations, easily reproducible standard tests of smooth samples of the material for short-term strength and fatigue under symmetric and asymmetric bending load cycles are used. Problems of multicycle fatigue analysis of prismatic rods under uniaxial asymmetric bending, considering the influence of mean stress, stress range, and amplitude coefficient, have been solved. Satisfactory agreement of calculation results with experimental data was obtained.

Keywords: prismatic bars, uniaxial asymmetrical bending, high-cyclic fatigue, lifetime analysis, experimental approval.

Статтю представив чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Для більшості відповідальних елементів конструкцій досить актуальною залишається проблема розрахунку їх довговічності в умовах багатоциклової втоми при асиметричному згині,

коли одночасно діють статичне та циклічне навантаження. У роботах [1,2] запропоновано підхід до прогнозування довговічності за умов одновісного асиметричного навантаження, який ґрунтується на концепції еквівалентних

напружень, що дозволяє асиметричний цикл навантаження звести до еквівалентного за часом до руйнування симетричного циклу. Структура еквівалентних напружень задається виходячи із гіпотези існування єдиної діаграми граничних напружень в нормованій системі координат, яка є інваріантною числу циклів до руйнування.

У межах підходу розв'язано задачі з розрахунку втомної довговічності призматичних стержнів за умов асиметричного згину як функції амплітуди циклічних напружень по параметру середнього напруження циклу σ_m^b , коефіцієнтам асиметрії R та амплітуд A .

1. Постановка задачі. Вихідні співвідношення

Розглядається довготривале руйнування призматичних ізотропних стержнів внаслідок багатоциклової втоми за умов одновісного асиметричного згину. Умови навантаження задаються співвідношеннями

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}^b = \sigma_m^b + \sigma_a^b \sin(2\pi n); \\ \sigma_{max}^b = \sigma_m^b + \sigma_a^b < \sigma_Y, \end{cases} \quad (1.1)$$

де $\tilde{\sigma}^b$ – змінне напруження асиметричного циклу; σ_m^b – середнє напруження; σ_a^b – амплітуда циклічного напруження; σ_{max}^b – максимальне, а $\sigma_{min}^b = \sigma_m^b - \sigma_a^b$ – мінімальне напруження циклу; σ_Y – межа течії матеріалу

стержня; $n = ft$ – число циклів навантаження; f – частота навантаження; t – фізичний час.

Рівень асиметрії циклу навантаження задається коефіцієнтом асиметрії R та коефіцієнтом амплітуд A , таким чином

$$\begin{aligned} R &= \sigma_{min}^b / \sigma_{max}^b = (1 - A) / (1 + A); \\ A &= \sigma_a^b / \sigma_m^b = (1 - R) / (1 + R), \end{aligned} \quad (1.2)$$

де за умов симетричного ($\sigma_m^b = 0$) циклу навантаження $R = -1$ та $A = \infty$.

Вважається, що компоненти $\sigma_m^b = const$ та $\sigma_a^b = const$ (стаціонарний режим), циклічна компонента $\sigma_a^b \sin 2\pi ft$ достатньо швидко ($f \geq 10$ Гц) змінюються від циклу до циклу, а максимальне напруження циклу не перевищує межу течії матеріалу $\sigma_{max}^b < \sigma_Y$. У цьому випадку руйнування стержнів внаслідок втоми не супроводжується накопиченням макропластичних циклічних деформацій, а є наслідком розвитку процесу пошкодження та реалізується у багатоциклової області з числом циклів до руйнування $n_R \geq 10^4$.

Вихідні рівняння для розрахунку довговічності за параметрами σ_m^b , R , A задаються у вигляді системи

$$\begin{cases} \frac{d\omega_f}{dn} = D_b \left(\frac{\sigma_{eqv}^b}{1 - \omega_f} \right)^{q_b} \\ n_R = \frac{1}{(1 + q_b) D_b (\sigma_{eqv}^b)^{q_b}} \end{cases} \quad \forall \quad \begin{cases} \sigma_{eqv}^b = \left[\cos \left(\frac{\pi \sigma_m^b}{2 \sigma_B} \right) \right]^{-\lambda_b} \sigma_a^b \\ \sigma_{eqv}^b = \left[\cos \left(\frac{\pi (1 + R) \sigma_a^b}{2 (1 - R) \sigma_B} \right) \right]^{-\lambda_b} \sigma_a^b \\ \sigma_{eqv}^b = \left[\cos \left(\frac{\pi (1 + R) \sigma_a^b}{2 A \sigma_B} \right) \right]^{-\lambda_b} \sigma_a^b \end{cases} \quad (1.3)$$

де ω_f – скалярний параметр пошкодження, який змінюється від 0 при $n = 0$ до 1 при $n = n_R$; σ_{eqv}^b – еквівалентне напруження, що враховує вплив σ_m^b та параметрів R , A ; σ_B – межа короточасної міцності матеріалу стержня; n_R – число циклів до руйнування; q_b , D_b , λ_b – константи матеріалу.

2. Методика визначення характеристик матеріалу та коефіцієнтів вихідних рівнянь

Вихідні рівняння (1.3) для розв'язання задачі розрахунку довговічності стержнів за умов одновісного асиметричного згину, містять три групи констант матеріалу та коефіцієнтів, які визначаються з системи відповідних базових експериментів.

Перша група констант матеріалу містить межу короткочасної міцності σ_B та визначається за результатами стандартних випробувань зразків на одновісний розтяг.

Друга група констант матеріалу містить коефіцієнти q_b та D_b , що характеризують опір матеріалу втоми за умов одновісного згину. Значення коефіцієнтів визначаються шляхом апроксимації експериментальних даних на втому за умов одновісного симетричного згину зразків матеріалу функцією у вигляді

$$n_R = \frac{I}{(1 + q_b)D_b(\sigma_a^b)^{q_b}}, \quad (2.1)$$

за умов $\sigma_m^b = 0$, $\sigma_{eqv}^b = \sigma_a^b$.

Задача визначення коефіцієнтів q_b та D_b у (2.1) зводиться до мінімізації функціоналу

$$\Phi(q_b, D_b) = \sum_{j=1}^S \left\{ n_{Rj}(\sigma_{nj}^b) - \frac{I}{(1 + q_b)D_b(\sigma_{aj}^b)^{q_b}} \right\}^2, \quad (2.2)$$

де σ_{aj}^b , n_{Rj} – набір дискретних значень амплітуд напружень та чисел циклів до руйнування.

Третя група констант матеріалу містить показник степені λ_b , що характеризує чутливість матеріалу до асиметрії циклу напружень. Значення λ_b розраховуються за результатами обробки експерименту для декількох комбінацій дискретних значень статичних σ_m^b та амплітуд циклічних σ_a^b напружень. Задача визначення показника степені λ_b в (1.3) зводиться до мінімізації функціоналу [1, 2]

$$\Phi(\lambda_b) = \sum_{j=1}^k \left\{ \left[\frac{\sigma_{aj}^b}{\sigma_{nj}^b(n_{Rj})} \right] - \left[\cos \left(\frac{\pi \sigma_{mj}^b}{2 \sigma_B} \right) \right]^{\lambda_b} \right\}^2 \quad (2.3)$$

де σ_{aj}^b , σ_{mj}^b , σ_{nj}^b , n_{Rj} – набір дискретних значень амплітуд циклічних напружень, середніх напружень, меж втоми за умов симетричного циклу напружень та відповідних їм чисел циклів до руйнування. У якості σ_{aj}^b та σ_{mj}^b можуть бути обрані значення $\sigma_{aj}^b = \sigma_{mj}^b$, що відповідають віднульовому циклу напружень, так що коефіцієнт амплітуд $A = 1$.

3. Розрахунок довговічності призматичних стержнів зі Сталі 45 при одновісному асиметричному згині

Розв'язуються задачі розрахунку втоми довговічності призматичних стержнів за умов одновісного асиметричного згину зі Сталі 45 за рівняннями (1.3). Характеристики короткочасної міцності матеріалу $\sigma_Y = 408$ МПа, $\sigma_B = 731.8$ МПа, та коефіцієнти $q_b = 6.08$, $D_b = 5.140 \cdot 10^{-21}$ МПа^{-q}цикл, $\lambda_b = 1.82$ визначені за викладеною методикою.

Результати розрахунків нанесено на фіг.1 штриховими та штрих-пунктирними лініями, а експериментальні дані [2, 3, 4] – маркерами. На фіг.1(а) представлено отримані результати по параметру середнього напруження $\sigma_m^b = \text{const}$ ($\sigma_m^b = 147$ МПа (○), $\sigma_m^b = 196$ МПа (●)), на фіг.1(б) по параметру коефіцієнта асиметрії $R = \text{const}$ ($R = -0.1$ (○), $R = 0.1$ (●)), на фіг.1(в) по параметру коефіцієнта амплітуд $A = \text{const}$ ($A = 1.2$ (○), $A = 0.82$ (●)). Суцільними лініями нанесені експериментальні „криві” втоми за умов симетричного циклу ($\sigma_m = 0$).

Висновки

Підхід до розрахунку довговічності елементів конструкцій в умовах класичної втоми при одновісному асиметричному згині, який ґрунтується на концепції еквівалентних напружень, може розглядатись як один із найбільш ефективних підходів до розв'язку такого класу задач. Концепція еквівалентних напружень дозволяє дію компонент асиметричного циклу зводити до дії еквівалентної за числом циклів до руйнування амплітуди симетричного циклу. У якості базових експериментів при визначенні матеріальних констант використовуються легковідтворювані стандартні випробування зразків матеріалу на короткочасну міцність та на втому за умов симетричного та асиметричного циклів навантаження.

Ефективність вищезазначеного підходу до прогнозування довготривалого руйнування елементів конструкцій внаслідок класичної (багатоциклової) втоми апробується в роботі на задачах розрахунку довговічності призматичних стержнів із Сталі 45. Як показано на Рис. 1, отримано цілком задовільне узгодження результатів розрахунків числа циклів до руйнування стержнів за умов одновісного асиметричного згину із даними експериментів.

Максимальна похибка не перевищує 20% і на асиметричному циклу напружень, а також рівень

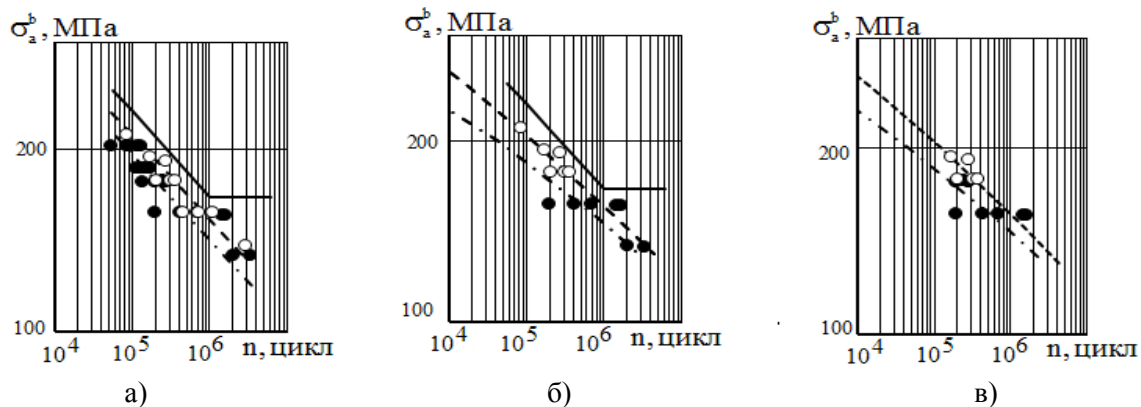


Рис. 1. Результати розрахунків втомної довговічності призматичних стержнів зі Сталі 45.

величину похибки практично не впливає напружень.
структура залежності числа циклів до
руйнування від характеристик та параметрів

Список використаних джерел

1. Голуб В.П. К расчету предельного состояния армированных пластиков и неориентированных полимеров при асимметричном многоцикловом растяжении-сжатии [Текст] / В.П.Голуб, В.И.Крижановский, А.Д.Погребняк // Механика композитных материалов. – 2004. – Том 40, №1. – С. 65-82.
2. Голуб В.П. Усталостная прочность металлических и композитных материалов при нагружении асимметричным многоцикловым изгибом [Текст] / В.П.Голуб, А.Д.Погребняк, Е.С.Кочеткова // Прикладная механика – 2006. – Том 42, №5. – С. 26-36.
3. Павловский В.Э. Влияние асимметрии нагружения на накопление повреждений при программных испытаниях на усталость стальных образцов [Текст] / В.Э.Павловский // Пробл. прочности. – 1986. – №6. – С. 55-60.
4. Kitagawa H. Some behaviour of structural steel subjected to corrosion fatigue (the 4th report). Influence of mean stress [Text] / H.Kitagawa, T.Morohashi // Proc. of the 10th Japan Nat. Congr. Appl. Mech. – 1960. – P. 155-161.

References

1. GOLUB, V., KRIZHANOVSKIY, V., POGREBNIYAK, A. (2004) K raschetu predelnogo sostoyaniya armirovannykh plastikov i neorientirovannykh polimerov pri asimmetrichnom mnogociklovom rastyazhenii-szhatii // *Mekhanika kompozitnykh materialov*. 40(1). P. 65-822.
2. GOLUB, V., POGREBNIYAK, A., KOCHETKOVA, Ye. (2006) Ustalostnaya prochnost' metallichesikh i kompozitnykh materialov pri nagruzhenii asimmetrichnym mnogotsiklovym izgibom // *Prikladna mekhanika*. 42(5). P. 26-36
3. PAVLOVSKIY, V. (1986) Vliyaniye asimmetrii nagruzheniya na nakopleniye povrezhdeniy pri programmnykh ispytaniyakh na ustalost' stal'nykh obrastsov // *Probl. prochnosti*. 6. P. 55-60.
4. KITAGAWA, H., MOROHASHI, T. (1960) Some behaviour of structural steel subjected to corrosion fatigue (the 4th report). Influence of mean stress // *Proc. of the 10th Japan Nat. Congr. Appl. Mech.* P. 155-161.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми „Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень” (КПКВК 6541230)

Надійшла до редколегії 29.06.2023

УДК 539.3

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.25>

Середницька Х. І., к. ф.-м. н.

Kh. I. Serednytska, Ph. D. (Phys.-Math.)

Вплив поздовжньої і поперечної тепло- провідності міжфазних щілин на ефек- тивні параметри біматеріалу

Influence of longitudinal and transverse thermal conductivity of the interface crack on the effective parameters of the bi-material

Інститут прикладних проблем механіки і мате-
матики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б
e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Me-
chanics and Mathematics, National Academy of
Sciences of Ukraine, 79060, Lviv, Naukova str., 3-b
e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

Досліджено ефективні параметри біматеріалу з періодичною системою міжфазних щілин з урахуванням їх поздовжньої і поперечної теплопровідності. Поперечну і поздовжню теплопровідність щілин враховано змінним в процесі навантаження термоопором їх заповнювача та фіксованою теплопровідністю поверхневих плівок відповідно. Задачу термопружності зведено до нелінійної системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь відносно розкриття щілин та стрибка температури між їх берегами. Запропоновано аналітично-числову ітераційну процедуру для розв'язування цієї системи. На основі отриманого розв'язку визначено ефективний стрибок температури та ефективний термоопір біматеріалу. Проаналізовано залежності ефективних параметрів біматеріалу від прикладеного розтягувального навантаження, однорідного теплового потоку та коефіцієнтів теплопровідності заповнювача і поверхневих плівок.

Ключові слова: поздовжня і поперечна теплопровідність, міжфазні щілини, ефективні параметри.

The effective parameters of the bi-material with a periodic system of interfacial cracks are studied, taking into account their longitudinal and transverse thermal conductivity. The bi-material is subjected to tensile forces and uniform heat flow. The transverse and longitudinal thermal conductivity of the cracks is taken into account by the thermal resistance of the filler and the thermal conductivity of the surface films, respectively. The thermal resistance of the filler is directly proportional to the opening of the cracks and inversely proportional to the thermal conductivity of the filler. Thermal conductivity of surface films does not change under the influence of load. The thermo-elastic problem is reduced to nonlinear systems of singular integro-differential equations for an opening cracks and a temperature jump between the cracks faces. An analytical-numerical iterative procedure for solving this system is proposed. Based on the obtained solution, the effective temperature jump and the effective thermal resistance of the bi-material are determined. The dependences of the effective parameters of the bi-material on the applied load and thermal conductivity coefficients of the filler and the surface films of the cracks are analyzed.

Key Words: Longitudinal and Transverse thermal conductivity, Interfacial Cracks, The effective parameters.

Статтю представив член-кореспондент НАН України Жук Я.О.

1. Вступ

Поздовжня і поперечна теплопровідність міжфазного інтерфейсу характеризується різними умовами передачі тепла через з'єднані елементи. В літературі розрізняють умови сильно-провідного і слабо-провідного інтерфейсу [1]. Для біматеріалів проведено дослідження слабо-провідних міжфазних дефектів з урахуванням газу в їх порожнинах [2]. В праці враховано умо-
ву неідеального теплового контакту зі змінним в

процесі навантаження термоопором, який обер-
нено пропорційний коефіцієнту теплопровідності
газу. Умови сильно-провідного міжфазного
включення враховано в композиті з недоскона-
лою поверхнею інтерфейсу [3].

У даній статті вивчено вплив поздовжньої і
поперечної теплопровідності міжфазних щілин
на ефективні параметри біматеріалу під дією те-
плового потоку та розтягувального навантажен-
ня.

2. Формулювання задачі

Розглядаємо біматеріал, що складається з двох півплощин D_1 і D_2 , матеріали яких характеризуються різними коефіцієнтами Пуассона (ν_1, ν_2), модулями зсуву (G_1, G_2), коефіцієнтами лінійного теплового розширення (α_1, α_2) та коефіцієнтами теплопровідності (λ_1, λ_2). На межі з'єднання півплощин розташована періодична система міжфазних щілин (рис. 1) завдовжки $2a$ з початковою висотою $h_0(x)$ та періодом розташування d . Порожнини щілин заповнені теплопровідною речовиною, яка проводить тепло лише в поперечному напрямку з коефіцієнтом теплопровідності λ_m . Береги щілин покриті тонкими плівками, які проводять тепло лише в поздовжньому напрямку з коефіцієнтом теплопровідності λ_s . Вважаємо, що заповнювач і плівки не чинять опору деформуванню компонент біматеріалу і береги щілин вільні від напружень.

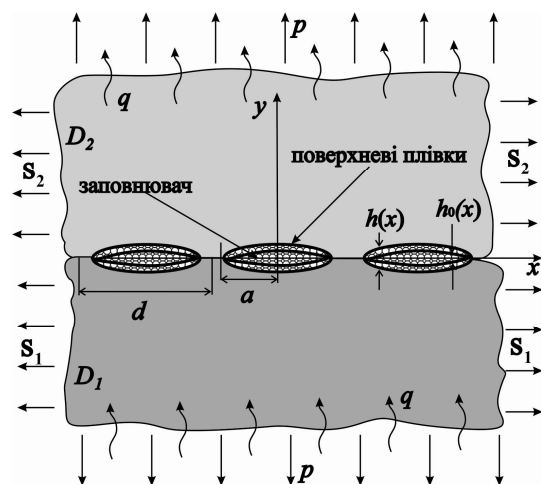


Рис. 1. Схема біматеріалу.

На нескінченності до біматеріалу прикладено рівномірно розподілене розтягувальне навантаження p та стаціонарний однорідний тепловий потік q .

Вплив заповнювача і плівок на передачу тепла між берегами щілин враховуємо умовою неідеального теплового контакту з термоопором $R(x) = h(x)/\lambda_m$ і коефіцієнтом теплопровідності λ_s .

Контактно-крайові умови на ділянках щілин ($y = 0, x \in (-a + kd, a + kd), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) мають вигляд:

$$-\frac{\lambda_s}{12} \frac{\partial^2 (T^- - T^+)}{\partial x^2} + \frac{(T^- - T^+)}{R(x)} = q_y^+, \quad q_y^+ = q_y^-, \quad (1)$$

$$\sigma_y^+ = \sigma_y^- = 0, \quad \tau_{xy}^+ = 0, \quad \tau_{xy}^- = 0, \quad (2)$$

де $T^+, T^-, q_y^+, q_y^-, \sigma_y^+, \sigma_y^-, \tau_{xy}^+, \tau_{xy}^-$ – граничні значення температури, нормальної компоненти вектора теплового потоку та компонент тензора напружень у верхній і нижній площині.

3. Сингулярні інтегро-диференціальні рівняння задачі

Використовуючи методику розв'язування задач термопружності для біматеріалу з міжфазними тріщинами [2] та задовольняючи умови (1)-(2), сформульовану задачу зведено до нелінійної системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь з ядром Гільберта відносно стрибка температури між берегами щілин $\gamma(x)$ та розкриття щілин $h(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{d} \int_{-a}^a h'(t) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(t-x)}{d} \right) dt + \frac{\lambda \eta^-}{2} (\gamma(x) - \gamma_{ef}) = \\ = -\frac{G^*}{2} p + \frac{1}{d} \int_{-a}^a h'_0(t) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(t-x)}{d} \right) dt, \\ h(\pm a) = 0, \quad |x| < a; \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_m \gamma(x)}{h(x)} - \frac{\lambda_s}{12} \gamma''(x) - \frac{\lambda}{2d} \int_{-a}^a \gamma'(t) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(t-x)}{d} \right) dt = q, \\ \gamma(\pm a) = 0, \quad |x| < a; \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{де } \gamma_{ef} = \frac{1}{d} \int_{-a}^a \gamma(x) dx; \quad \lambda = \frac{2\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad G^* = \frac{(1 - \kappa_1 \kappa_2)}{G_1 (1 - \kappa_2)}, \\ \kappa_n = 3 - 4\nu_n, \quad \eta^- = \eta_2 - \eta_1, \quad \eta_n = \alpha_n (1 + \nu_n) / \lambda_n, \\ n = 1, 2. \end{aligned}$$

Для розв'язування системи (3), (4) використано модифіковану ітераційну аналітично-числову процедуру [2] з урахуванням початкової висоти, заданої функцією $h_0(x) = 0.001(a^2 - x^2)^{3/2}$.

4. Ефективні параметри біматеріалу

На основі отриманого розв'язку системи (3)-(4) проаналізовано ефективні параметри біматеріалу (ефективний стрибок температури та ефективний термоопір), які характеризують сумарний термічний вплив системи щілин.

Ефективний (усереднений) стрибок температури γ_{ef} визначає додатковий розподіл температури, зумовлений множиною щілин.

Ефективний термічний опір R_{ef} на лінії контакту є функцією теплового потоку і визначається як $R_{ef}(q) = \frac{\partial \gamma_{ef}}{\partial q}$.

5. Числові результати та їх аналіз

Числові розрахунки проведено для наступних безрозмірних величин: $\bar{q} = qd\eta^-$, $\bar{p} = pG^*$,

$$\bar{\lambda}_m = \frac{\lambda_m}{\lambda}, \quad \bar{\lambda}_s = \frac{\lambda_s}{\lambda}, \quad \bar{\gamma}_{ef} = \gamma_{ef}\lambda\eta^-, \quad \bar{R}_{ef} = \frac{R_{ef}d}{\lambda}.$$

Діапазон зміни коефіцієнта міжфазної тріщинуватості ($\bar{k}_t = 2a/d$ – характеризує щільність розташування щілин на міжфазній лінії) $0.1 \leq \bar{k}_t < 1$.

На рис. 2-5 проілюстровано залежність ефективних стрибка температури $\bar{\gamma}_{ef}$ та термоопору $\bar{R}_{ef}$ від густини теплового потоку $|\bar{q}|$ для різних значень коефіцієнта теплопровідності поверхневих плівок $\bar{\lambda}_s$ (подовжня теплопровідність) (рис.2-3) і коефіцієнта теплопровідності заповнювача $\bar{\lambda}_m$ (поперечна теплопровідність) (рис.4-5) за фіксованих значень розтягувальних зусиль $\bar{p}$ і коефіцієнта міжфазної тріщинуватості $\bar{k}_t$.

Спостерігається нелінійна залежність ефективних параметрів біматеріалу від густини теплового потоку і збільшення їх величини зі збільшенням коефіцієнта теплопровідності плівок та зменшенням коефіцієнта теплопровідності заповнювача. Для різних напрямів теплового потоку ефективні параметри приймають різні значення для одного і того ж фіксованого значення густини теплового потоку.

На рис.2 і рис.4 бачимо, що ефективний стрибок температури зростає зі збільшення густини теплового потоку і приймає різні значення при зміні напрямку потоку на протилежний. Причому ця різниця зростає при збільшенні густини потоку.

Розподіл ефективного термоопору для різних значень коефіцієнтів $\bar{\lambda}_s$ і $\bar{\lambda}_m$ побудовано на рис. 3, 5. При зміні напрямку теплового потоку криві змінюють характер зі зростаючого на спадний відповідно. Різниця між значеннями ефективного термоопору зростає при збільшенні густини теплового потоку. Такий ефект в літературі має на-

зву термічної ректифікації. Кількісним показником такого явища є параметр термічної ректифікації, який характеризує відносну похибку між значеннями ефективного термоопору за фіксованої густини теплового потоку та двох протилежних напрямів потоку і визначається у відсотках. Так, наприклад для теплового потоку густини $|\bar{q}| = 0.002$ параметр термічної ректифікації змінюється від 13% до 27% в залежності від значень подовжньої $\bar{\lambda}_s$ і поперечної теплопровідності $\bar{\lambda}_m$. А для теплового потоку з густиною $|\bar{q}| = 0.008$ параметр термічної ректифікації приймає значення 44-56%. Чим більша густина теплового потоку, тим більший рівень термічної ректифікації.

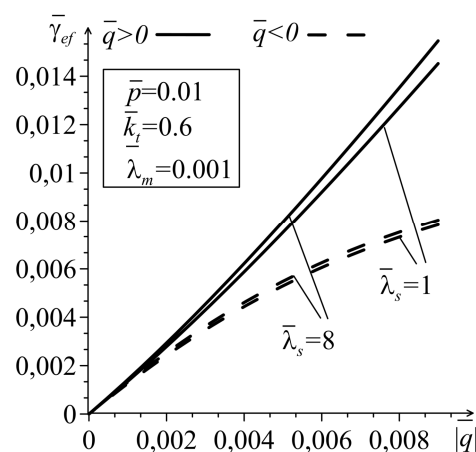


Рис. 2. Залежність ефективного стрибка температури $\bar{\gamma}_{ef}$ від густини теплового потоку $|\bar{q}|$ для різних значень коефіцієнта теплопровідності $\bar{\lambda}_s$.

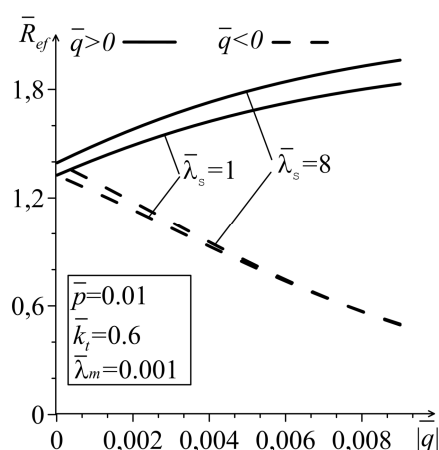


Рис. 3. Залежність ефективного термоопору $\bar{R}_{ef}$ від густини теплового потоку $|\bar{q}|$ для різних значень коефіцієнта теплопровідності $\bar{\lambda}_s$.

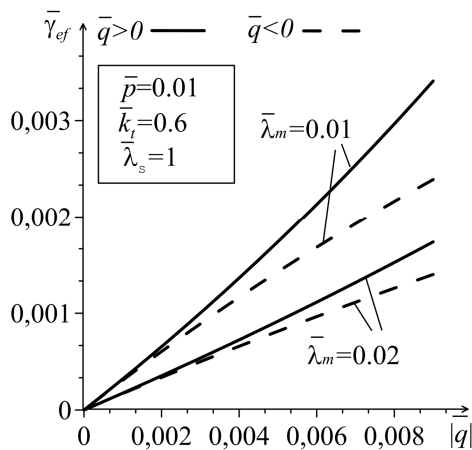


Рис. 4. Залежність ефективного стрибка температури $\bar{\gamma}_{ef}$ від густини теплового потоку $|\bar{q}|$ для різних значень коефіцієнта теплопровідності $\bar{\lambda}_m$.

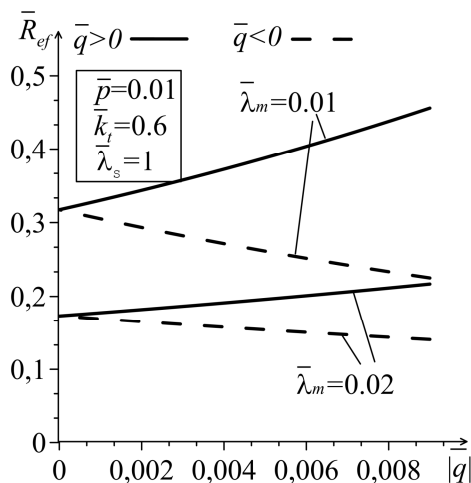


Рис. 5. Залежність ефективного термоопору $\bar{R}_{ef}$ від густини теплового потоку $|\bar{q}|$ для різних значень коефіцієнта теплопровідності $\bar{\lambda}_m$.

6. Висновки

Визначено вплив поздовжньої і поперечної теплопровідності системи міжфазних щілин на ефективні параметри біматеріалу, що знаходиться під дією розтягувальних зусиль та однорідного теплового потоку. Сформульовано задачу термопружності для розглянутого біматеріалу з урахуванням теплопровідності заповнювача щілин, що змінюється в процесі навантаження і незмінної теплопровідності поверхневих плівок. Задачу термопружності зведено до системи сингулярних інтеро-диференціальних рівнянь відносно розкриття щілин та стрибка температури між їх берегами. Поперечну і поздовжню теплопровідність щілин враховано модифікованою узагальненою умовою неідеального теплового контакту ім. Я.С. Підстригача. Проаналізовано залежності ефективного стрибка температури та ефективного термоопору біматеріалу від густини теплового потоку для різних значень коефіцієнтів теплопровідності заповнювача і поверхневих плівок. Встановлено нелінійну залежність ефективних параметрів від густини теплового потоку та явище термічної ректифікації. Для більших значень теплового потоку і теплопровідності поверхневих плівок та меншої теплопровідності заповнювача міра термічної ректифікації є більшою.

Список використаних джерел

References

1. Torquato S. & Rintoul M. Effects of the interface on the properties of composite media / S.Torquato & M. Rintoul // *Phys. Rev. Lett.* 1995. – 52. – P. 2635-2638
2. Serednytska Kh. The thermoelastic state of a bi-material with an open gas-filled interface crack / Kh.Serednytska, R. Martynyak, K.Chumak // *Journal of Theoretical and Applied Mechanics.* – 2019.–57(2). – P. 331-341.
3. Kushch V.I. Effective conductivity of spheroidal particle composite with imperfect interface: complete solutions for periodic and random microstructures / V.I. Kushch, I. Sevostianov, A.S. Belyaev // *Mechanics of Materials.* – 2015. – 89. – P. 1-11.
1. TORQUATO, S. & RINTOUL, M. (1995) Effects of the interface on the properties of composite media. *Phys. Rev. Lett.* 52. P. 2635-2638.
2. SEREDNYTSKA, KH. & MARTYNYAK, R. & CHUMAK, K. (2019) The thermoelastic state of a bi-material with an open gas-filled interface crack. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics.* 57, No. 2. P. 331-341.
3. KUSHCH, V.I., SEVOSTIANOV, IGOR & BELYAEV A.S. (2015) Effective conductivity of spheroidal particle composite with imperfect interface: complete solutions for periodic and random microstructures. *Mechanics of Materials.* 89. P. 1-11.

Надійшла до редколегії 25.08.23

УДК 624.074.04

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.26>

Трач В. М.¹, д.т.н., проф.
Подворний А. В.¹, к.т.н., доц.
Жукова Н.Б.², к.ф.-м.н., с.н.с.

V.M. Trach¹, Dr. Sci., Professor
A.V. Podvornyi¹, Ph.D., Associate Professor
N.B. Zhukova², Ph.D., Senior Research Officer

**Стійкість нетонких анізотропних
циліндричних оболонок в просторовій
постановці під розподіленим боковим
тиском**

**Stability of non-thin anisotropic cylindrical
shells in spatial position under distributed
lateral pressure**

¹Національний університет водного
господарства та природокористування, 33000,
м. Рівне, вул. Соборна 11,
e-mail: trach-vm@ukr.net
²Інститут механіки НАН України, 03057,
м. Київ, вул. Нестерова, 3,
e-mail: zukowa_n@ukr.net

¹National University of Water and Environmental
Engineering, 33000, Rivne, Soborna str., 11,
e-mail: trach-vm@ukr.net
²Institute of Mechanics of National Academy of
Sciences of Ukraine, 03057, Kiev, Nesterov str., 3,
e-mail: zukowa_n@ukr.net

Запропоновано у просторовій постановці підхід до розв'язку задачі стійкості нетонких циліндричних анізотропних шаруватих оболонок під розподіленим боковим тиском. Спираючись на модифікований варіаційний принцип Ху-Васідзу, отримано тривимірну систему однорідних диференціальних рівнянь стійкості для розрахунку оболонок, анізотропія яких характеризується матеріалом з однією площиною пружної симетрії. Розв'язок тривимірної системи проведено при використанні методу Бубнова-Гальоркіна та чисельного методу дискретної ортогоналізації.

Досліджено вплив збільшення кількості перехресно укладених шарів однакової товщини на стійкість циліндричної анізотропної оболонки. Результати розв'язку представлено графіками та приведено їх аналіз.

Ключові слова: стійкість, тривимірний підхід, анізотропні шаруваті циліндричні оболонки.

A three-dimensional approach to solving the problem of stability of non-thin cylindrical anisotropic layered shells under distributed lateral pressure is proposed. Based on the modified Hu-Washizu variational principle, a three-dimensional system of homogeneous differential stability equations is obtained for the calculation of shells, the anisotropy of which is characterized by a material with one plane of elastic symmetry. The solution of the three-dimensional system was carried out using the Bubnov-Galerkin methods and numerical discrete orthogonalization.

The influence of an increase in the number of cross-laid layers of the same thickness on the stability of an anisotropic cylindrical shell is studied. The results of the solution are presented by graphs and their analysis is given.

Key Words: stability, three-dimensional approach, anisotropic layered cylindrical shells.

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я. О.

Вступ

Дослідження стійкості анізотропних оболонок конструкцій є актуальною проблемою. Однак, вирішенню цього питання присвячена незначна кількість наукових досліджень. Розв'язання задач стійкості таких конструкцій, базується на співвідношеннях двовимірних класичної або уточненої теорій [1, 2]. Їх використання

приводить до того, що низька зсувна жорсткість, обтиснення матеріалу оболонки за товщиною, а також його неоднорідність, за цим напрямком, або не враховуються взагалі, або в неповному обсязі. З точки зору врахування цих особливостей напруженого стану тривимірна теорія є більш придатною, тому що позбавлена необхідності використання гіпотез, наприклад, двовимірних теорій.

Класичні роботи [3, 4] присвячені дослідженню стійкості оболонкових конструкцій у просторовій постановці з ізотропного або ортотропного матеріалу. Загально відомо, що використовувані в оболонках матеріали можуть створюватись шляхом укладання під деякими кутами, наприклад, волокнистих композитів на оправку (рис. 1). Внаслідок чого, має місце створення матеріалу, який прийнято вважати матеріалом з однією площиною пружної симетрії.

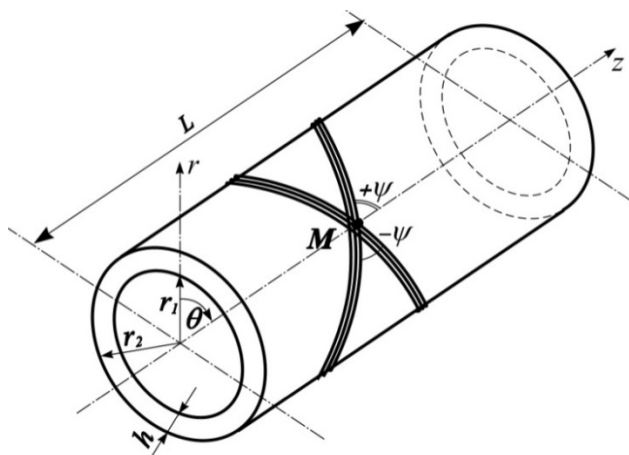


Рис. 1. Циліндрична анізотропна оболонка.

У представлений роботі, спираючись на модифікацію узагальненого варіаційного принципу Ху-Васідзу [5], подано підхід до виведення системи однорідних диференціальних рівнянь стійкості в рамках тривимірної теорії пружності анізотропного тіла. Процес розв'язку поставленої задачі проводиться шляхом зменшення розмірності системи при використанні аналітичного методу Бубнова-Гальоркіна та розв'язку отриманої одновимірної системи чисельним методом дискретної ортогоналізації.

Методика досліджень

Необхідні рівняння стійкості, співвідношення пружності та граничні умови відповідно до варіаційного принципу Ху-Васідзу [6, 7] можна отримати з умови стаціонарності функціоналу Π_1 , що визначається з інтегралу:

$$\Pi_1 = \left\{ \iiint_V [W(e_{ij}) - T(u_i) + \Phi(u_i) - \sigma_{ij} \left[e_{ij} - \frac{1}{2} \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times (u_{i,j} + u_{j,i}) \right] \right] dV + \iint_{S_1} \Psi(u_i) dS - \iint_{S_2} p_i (u_i - \bar{u}_i) \right\} dS. \quad (1)$$

В (1) варіюються без використання додаткових умов деформації e_{ij} , напруження σ_{ij} та переміщення u_i , напруження p_i на поверхні S_2 викликані переміщеннями $\bar{u}_i$. Також у цьому функціоналі $W(e_{ij})$ — потенціальна енергія деформації, $T(u_i)$ — кінетична енергія, $\Phi(u_i)$, $\Psi(u_i)$ — потенціали об'ємних і поверхневих навантажень, крапка з комою перед параметрами i, j позначає коваріантну похідну за координатою з відповідним індексом $i, j = 1, 2, 3$.

Використовуючи підхід, представлений в [6, 7], з умови стаціонарності варіації функціоналу (1), отримаємо тривимірну систему з шести однорідних диференціальних рівнянь стійкості анізотропних циліндричних оболонок в частинних похідних з відповідними граничними умовами на поверхнях та торцях. Скориставшись процедурою методу Бубнова-Гальоркіна [6] для зменшення розмірності отриманих рівнянь, здобудемо нескінчену одновимірну систему звичайних однорідних диференціальних рівнянь стійкості циліндричної оболонки в нормальній формі Коші

$$\frac{d\bar{y}}{dr} = T(r, \lambda) \bar{y}, \quad T(r, \lambda) = t_{i,j}(r, \lambda), \\ i = \overline{1, \infty}, j = \overline{1, \infty}. \quad (2)$$

В (2) $\bar{y} = \{y_{1,pk}; y_{2,pk}; y_{3,pk}; y_{4,pk}; y_{5,pk}; y_{6,pk}; y'_{1,mk}; y'_{2,mk}; y'_{3,mk}; y'_{4,mk}; y'_{5,mk}; y'_{6,mk}\}$ — розв'язуюча вектор-функція, $T(r, \lambda)$ — матриця із змінними коефіцієнтами, що залежить від аргументу r та параметра навантаження λ .

Система рівнянь стійкості (2) при умовах на поверхнях оболонки

при $r = r_1$:

$$\sigma_{rr}^0(r_1, z, \theta) = 0; \\ \tau_{rz}^0(r_1, z, \theta) = 0; \quad \tau_{r\theta}^0(r_1, z, \theta) = 0,$$

при $r = r_2$:

$$\sigma_{rr}^n(r_2, z, \theta) = 0; \\ \tau_{rz}^n(r_2, z, \theta) = 0; \quad \tau_{r\theta}^n(r_2, z, \theta) = 0$$

та на торцях

$$\sigma_{zz} = u_r = u_\theta = 0$$

розв'язується за використанням адаптованого авторами до реалізації задачі стійкості чисель-

ного методу дискретної ортогоналізації [1, 8]. Алгоритм розв'язку реалізовано у вигляді пакетів прикладних програм для ПК.

Реалізація запропонованого підходу

В якості реалізації запропонованого підходу була розглянута задача дослідження стійкості циліндричної оболонки сталої товщини, утвореної перехресним укладанням однакових за товщиною шарів під кутом повороту на $\pm\psi^\circ$ головних напрямів пружності матеріалу до твірної z . Кількість шарів змінюється від одного до восьми. Оболонка на зовнішній поверхні навантажена розподіленим зовнішнім тиском:

$$q = -q_0 \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right).$$

Геометричні характеристики циліндричної оболонки: радіус внутрішньої поверхні $r_1=0,5925\text{м}$; зовнішньої — $r_2=0,6075\text{м}$; довжина уздовж твірної $L=1,2\text{м}$. Механічні характеристики однонапрявленого волокнистого композиту боропластику: $E_{zz}=280E_0$; $E_{\theta\theta}=E_{rr}=31E_0$; $G_{z\theta}=G_{r\theta}=10,5E_0$; $G_{rz}=21,2E_0$; $\nu_{\theta z}=0,25$; $\nu_{z\theta}=0,0277$; $E_0=1000\text{МПа}$.

На рис. 2 представлено залежність критичних величин бокового тиску q^{cr} від кута ψ . Позначення кривих відповідають кількості анізотропних шарів, а графік 1' — це результати розрахунку оболонкової конструкції з ортотропного матеріалу [6].

Аналіз представлених результатів вказує на те, що найменші значення критичного зовнішнього тиску мають місце для двошарового пакету (крива 2) армованого під кутами $\pm\psi$ до твірної. Порівняно із одношаровою оболонкою (крива 1) критичні навантаження є меншими, максимальна розбіжність складає 32% при $\psi = 60^\circ$. Результати отримані для тришарової оболонки (крива 3) практично не відрізняються від знайдених для одношарової. Розбіжність складає менше 1,5%. Критичні навантаження для чотиришарової оболонки (крива 4) менші на 6% у порівнянні з одношаровою. Подальше збільшення кількості перехресно-армованих шарів до п'яти (крива 5) та восьми (крива 8) веде до наближення отриманих критичних величин зовнішнього бокового тиску до значень визначених для ортотропної оболонки (крива 1').

Отримані результати є підтвердженням описаного в [1] факту, що для тонкостінних анізотропних циліндричних оболонок збільшення кількості перехресно укладених шарів пакету до семи — восьми та більше, призводить до можливості розрахунку циліндричних оболонок на стійкість за ортотропним підходом.

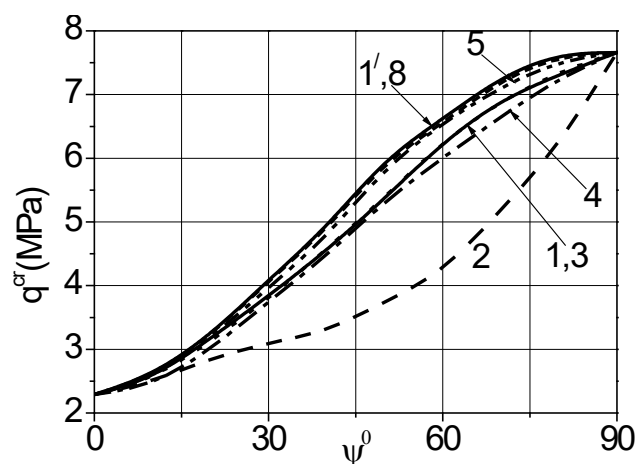


Рис. 2. Графік залежності критичних значень бокового тиску від кута повороту головних напрямів пружності матеріалу.

Висновки

У роботі, за використанням модифікованого варіаційного принципу Ху-Васідзу, отримана тривимірна система однорідних диференціальних рівнянь в частинних похідних, що описують стійкість анізотропних шаруватих циліндричних оболонок. Для приведення її до одновимірної використано процедуру методу Бубнова-Гальоркіна. Розв'язок системи звичайних однорідних диференціальних рівнянь стійкості нормальної форми Коші реалізується, в радіальному напрямку, при використанні чисельного методу дискретної ортогоналізації.

Розглянута стійкість шаруватої композитної анізотропної циліндричної оболонки сталої товщини, що перехресно армована волокнистим боропластиком. Отримані результати порівнювались із такими, що здобуті при використанні ортотропного підходу до розрахунку циліндричної оболонки.

Список використаних джерел

1. Баженов В.А. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок: Монографія / В.А. Баженов, М.П. Семенюк, В.М. Трач. – К.: Каравела, 2010. – 352 с.
2. Трач В.М. Деформування та стійкість нетонких анізотропних оболонок: Монографія / В.М. Трач, А.В. Подворний, М.М. Хоружий. – К.: Каравела, 2019. – 274 с.
3. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел / А.Н. Гузь. – Киев: Вища школа, 1986. – 511 с.
4. Гузь А.Н. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Т.4. Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел / А.Н. Гузь, И.Ю. Бабич. – Киев: Наук. думка, 1985. – 280 с.
5. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
6. Семенюк М.П. Напружено-деформований стан товстостінної анізотропної циліндричної оболонки / М.П. Семенюк, В.М. Трач, А.В. Подворний // Прикл. механіка. – 2023. – 59, №1. – С. 91-102.
7. Трач В.М. Просторові рівняння стійкості анізотропних товстих циліндричних оболонок під дією осьового тиску / В.М. Трач, А.В. Подворний // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: Збірник наукових праць. – НУВГП. – Рівне – 2022. – Випуск 41. – С.197-212.
8. Григоренко Я. М. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей: Монография / Я. М. Григоренко, Г. Г. Влайков, А. Я. Григоренко. – К.: Академперіодика, 2006. – 472 с.

References

1. BAZENOV, V., SEMENUK, M. and TRACH, V. (2010) *Neliniyne deformuvannya, stiykist' i zakritichna povedinka anizotropnykh obolonok*. Kyiv: Karavela.
2. TRACH, V., PODVORNYI, A. and KHORUZHYYI, M. (2019) *Deformuvannya ta stiykist' netonkykh anizotropnykh obolonok*. Kyiv: Karavela.
3. GUZ, A. (1986) *Osnovy trekhmernoy teorii ustoychivosti deformiruemyykh tel*. Kiyev: Vischa shkola.
4. GUZ, A. and BABICH, I. (1985) *Prostranstvennyye zadachi teorii uprugosti i plastichnosti. T.4. Trehmernaya teoriya ustoychivosti deformiruemyykh tel*. Kiyev: Naukova dumka.
5. VASIDZU, K. (1987) *Variatsionnyye metody v teorii uprugosti i plastichnosti*. M.: Mir.
6. SEMENYUK, M., TRACH, V. & PODVORNYI, A. (2023) Napruzhenodeformovanyy stan tovtostinnoyi anizotropnoyi tsylindrychnoyi obolonky. *Prykladna mekhanika*. 59 (1). p. 91-102.
7. TRACH, V. & PODVORNYI, A. (2022) Prostorovi rivnyannya stiykosti anizotropnykh tovtstyx tsylindrychnykh obolonok pid diyeyu os'ovoho tysku. *Resursoekonomni materialy, konstruktsiyi, budivli ta sporudy*. 41. p. 197-212.
8. GRIGORENKO, YA., VLAYKOV, G. and GRIGORENKO, A. (2006) *Chislenno-analiticheskoe reshenie zadach mekhaniki obolochek na osnove razlichnih modeley*. Kyiv: Akademperiodika.

Надійшла до редколегії 08.06.23

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.27>

УДК 519.9

Ушакова В.С.¹, к.ф.-м.н., с.н.с.,
Ушаков О.В.², заступник начальника центру,
Горун О.Ю.², пров.н.с.

V.S. Reznik¹, Ph.D. (Phys.-Math.), sen.sci.researcher.
O.V. Ushakov², Deputy head of the center,
O.Y. Gorun², Lead.researcher

**Застосування згладжуючих кубічних
сплайнів у моделюванні процесів
повзучості лінійно-в'язкопружних
матеріалів за умов складного
напруженого стану**

**The use of cubic splines in the modeling of
creep processes of linear viscoelastic materials
under complex stress state**

¹Інститут механіки С.П. Тимошенка НАН
України, вул. Нестерова, 3, 03057, Київ;
e-mail: creep@inmech.kiev.ua

¹S.P. Timoshenko Institute of Mechanics, 03057,
Nesterov str, 3, Kiev;

e-mail: creep@inmech.kiev.ua

²Інститут спеціальної техніки та судових
експертиз Служби безпеки України, вул.
Василенка, 3, 03113, м. Київ;
e-mail: nddkr_ict@ssu.gov.ua

²Ukrainian scientific and research Institute of special
equipment and forensic expertise of the Security
Service of Ukraine. 03113 Vasilenko str 5, Kyiv;
e-mail: nddkr_ict@ssu.gov.ua

Розглядаються процеси повзучості тонкостінних трубчастих елементів з лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану. Об'єктом дослідження є базові експериментальні дані на одновісний розтяг і чисте кручення у вигляді дискретних значень. Ці дискретні значення використовуються для подальшої ідентифікації ядер спадковості, що використовують в процесах моделювання повзучості за умов складного напруженого стану. Розрахунки здійснюються на прикладі оргскла СТІ. Обґрунтовується область лінійності моделі, виходячи зі значення квантиля статистики і гіпотези існування єдиної функції повзучості у певному, заданому наперед, довірчому інтервалі. Функція повзучості інваріантна відносно напружень та побудована по кривим податливості. Визначальні рівняння моделі містять набір функцій і коефіцієнтів, що визначаються з базових експериментів. Для подальших розрахунків експериментальні дані апроксимуються степеневою функцією і згладжуючими кубічними сплайнами. Проводиться аналіз апроксимації на підставі мінімуму квадратичного відхилення експериментальних даних від розрахункових. Виходячи з мінімуму квадратичного відхилення аналізується апроксимуюча функція.

Ключові слова: лінійна в'язкопружність, складний напружений стан, сплайн апроксимація, функція повзучості, ядра спадковості, квадратичне відхилення, квантиль статистики.

The processes of creep of thin-walled tubular elements made of linear viscoelastic materials under complex stress conditions are considered. The discrete values of basic experimental data on uniaxial tension and pure torsion are considered. These discrete values are used for identification of hereditary kernels normally used in creep modeling processes under complex stress conditions. As an example material, plexiglass STI is used for calculations. The area of linearity of the model is substantiated by the value of the quantile of statistics and the hypothesis of the existence of a unified creep function in a certain, predetermined confidence interval. The creep function is invariant with respect to stresses and is built with making use of the yield curves. Constitutive equations of the model contain a set of functions and coefficients determined from basic experiments. For further calculations, the experimental data are approximated by a power function followed by the smoothing with cubic splines. Approximation analysis is carried out by evaluation of the least squared deviation of experimental data from the calculated data. The approximating function is analyzed with making use of minimum of the quadratic deviation.

Keywords: linear viscoelasticity, complex stress state, spline approximation, creep function, hereditary kernels, quadratic deviation, quantile of statistics.

Статтю представив член-кореспондент НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

У лінійній теорії в'язкопружності квазістатичні механічні властивості матеріалів досить точно можуть бути задані за допомогою функцій повзучості релаксації. Ці функції будуються за результатами прямих одновісних експериментів на повзучість при постійних напруженнях або відповідно на релаксацію при фіксованих деформаціях. Загальний підхід – логічні процедури, експериментальна і чисельна реалізація процедур, потрібні для визначення механічних характеристик у лінійній теорії в'язкопружності, досліджуються в [1,2].

Моделювання процесів повзучості лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану є фундаментальною задачею сучасної механіки деформівного твердого тіла. При розв'язуванні цієї задачі основну роль відіграє експеримент на повзучість, в якому дані представляють у вигляді дискретних значень деформацій при постійних напруженнях у певний момент часу. Функції, що задані дискретно за допомогою таблиць первинних або перетворених експериментальних даних, необхідно апроксимувати аналітичними виразами, які дають змогу визначити значення деформацій в довільний момент часу. Від точності апроксимації експериментальних даних суттєво залежать подальші розрахунки. В роботі за допомогою згладжувачів кубічних сплайнів апроксимуються експериментальні дані, а методом найменших квадратів знаходиться похибка шляхом мінімізації функціоналу [1].

1. Постановка задачі

У роботі розглядається деформування ізотропних лінійно-в'язкопружних середовищ зі стабільними механічними властивостями за умов складного напруженого стану із заданою програмою навантаження, так що

$$\sigma_{ij}(\tau), \quad \tau \in (0, t), \quad (1)$$

де σ_{ij} – компоненти тензора напружень; t – час спостереження; τ – час, що передує моменту спостереження. Процес навантаження (1) вважаємо простим, так що виконуються співвідношення [2]

$$\sigma_{11} = \mu(t)\bar{\sigma}_{11}, \dots, \tau_{12} = \mu(t)\bar{\tau}_{12}, \dots$$

Базові експерименти, за допомогою яких ідентифікуються ядра спадковості задаються кривими повзучості за умов одновісного розтягу із заміром повздовжніх і поперечних деформацій при постійних напруженнях у вигляді дискретних значень. Для подальших розрахунків

дискретні значення необхідно апроксимувати неперервними функціями, які описують процеси повзучості і в області сингулярності, і в області великих часів. Є різні варіанти апроксимуючих функцій, але найкращі результати дають наближення у вигляді сплайн апроксимації. Сплайн апроксимація досить точно описує процеси повзучості і релаксації на всій області визначення, оскільки представляє собою множину кубічних парабол у вказаному інтервалі розбиття. У роботі на прикладі оргскла СТ1 будується сплайн апроксимація і визначаються коефіцієнти моделі, а також знаходиться похибка апроксимації.

2. Побудова сплайн апроксимації експериментальних даних

Функції, задані дискретно за допомогою таблиць первинних або перетворених експериментальних даних, які використовуються для визначення механічних характеристик матеріалу, аналітично можуть бути представлені згладжувачами кубічними сплайнами у вигляді [4]

$$y(x) = y_j + \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \frac{h_j}{6} (2k_j + k_{j+1}) \right) \cdot \left(\frac{x - x_j}{h_j} \right)^2 + \frac{k_{j+1} - k_j}{6h_j} (x - x_j)^3 \quad (2)$$

$$x \in [x_j; x_{j+1}], \quad h_j = x_{j+1} - x_j; \quad j = \overline{1, l-1},$$

де k_j – коефіцієнти сплайна, що визначаються з умови неперервності першої похідної в точках x_j і деяких краєвих умов на кінцях відрізка, що задає апроксимуючу функцію $y(x)$; h_j – табличні значення функції, що апроксимується в точках x_j . На рис. 1 як приклад наведено сплайн апроксимацію кривих поздовжньої повзучості оргскла СТ1, що побудовані за умов одновісного розтягу при постійних напруженнях. Напруження для кривих 1, 2 і 3 відповідно складають $\sigma_{11} = 7,65$ (1), 11,45 (2) і 15,30 (3) МПа. Тут і далі експериментальні дані нанесено точками. Апроксимацію експериментальних даних згладжувачами кубічними сплайнами нанесено суцільними лініями. Коефіцієнти сплайн апроксимації кривих поздовжньої повзучості структурою (2) наведено в таблицях 1-3.

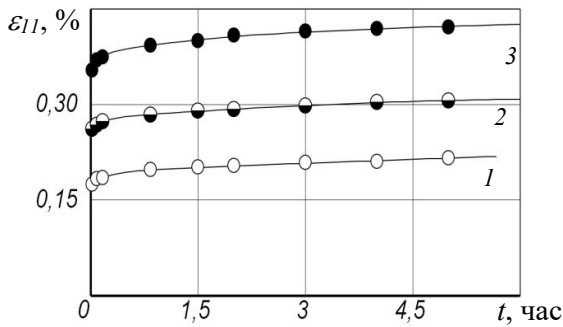


Рис. 1 – Сплайн апроксимація кривих повздовжньої і поперечної повзучості оргскла СТ-1.

Таблиця 1.

Коефіцієнти сплайн апроксимації при $\sigma_{11} = 7,65$

tj	A0	A1	A2	A3
0,0125	0,000145	-0,0004	0,000462	0,00179
0,9375	1,35E-06	-1,3E-05	8,21E-05	0,00191
3,2085	-2,7E-10	-3,8E-09	4,04E-05	0,00195
6	0	0	0	0

Таблиця 2.

Коефіцієнти сплайн апроксимації при $\sigma_{11} = 11,45$

tj	A0	A1	A2	A3
0,0156	0,007807	-0,00593	0,001737	0,00257
0,2444	8,21E-05	-0,00026	0,000353	0,00269
1,0654	-8,6E-07	1,09E-06	7E-05	0,00279
1,9958	-1,1E-06	2,59E-06	6,7E-05	0,00279
3,1835	5,56E-07	-1,3E-05	0,000118	0,00273
7	0	0	0	0

Таблиця 3.

Коефіцієнти сплайн апроксимації при $\sigma_{11} = 15,3$

tj	A0	A1	A2	A3
0,0156	0,007807	-0,00593	0,001737	0,00257
0,2444	8,21E-05	-0,00026	0,000353	0,00269
1,0654	-8,6E-07	1,09E-06	7E-05	0,00279
1,9958	-1,1E-06	2,59E-06	6,7E-05	0,00279
3,1835	5,56E-07	-1,3E-05	0,000118	0,00273
7	0,007807	-0,00593	0,001737	0,00257

З таблиць 1-3 бачимо, що кількість інтервалів розбиття відрізняється. Це пов'язано з тим, що чим більше інтервалів розбиття, тим точнішою є сплайн апроксимація експериментальних даних. Для першої кривої для досягнення точності апроксимації не менше 95% достатньо трьох інтервалів, для другої і третьої кривої для досягнення даної точності знадобилось 5 інтервалів розбиття [4].

3. Обґрунтування застосування моделі в'язкопружності

Побудова сплайн апроксимації кривих повзучості є першим етапом при виборі моделі в'язкопружного деформування. Розрізняють лінійні і нелінійні моделі в'язкопружного деформування

[3]. Матеріал вважають лінійно-в'язкопружним, якщо функція повзучості $J(t)$ інваріантна по відношенню до рівня напруження $\sigma_m (m = \overline{1, k})$

$$J_1(t) = \frac{\varepsilon(t, \sigma_1)}{\sigma_1} = J_2(t) = \frac{\varepsilon(t, \sigma_2)}{\sigma_2} = \dots = J_m(t) = \frac{\varepsilon(t, \sigma_m)}{\sigma_m},$$

а розрахункове значення квантиля статистики $t_{\alpha, k}$ більше його критичного табличного значення $t_{\alpha, k}^*$. Тобто виконується умова

$$t_{\alpha, k} = \frac{\sqrt{n}}{S_j(t_j)} \delta \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m J_k(t_j) = \frac{\sqrt{n}}{S_j(t_j)} \delta \bar{J}(t_j) > t_{\alpha, k}^*.$$

Тут $J_k(t_j)$ – значення функції повзучості в момент часу t_j при напруженнях σ_k ; $\bar{J}(t_j)$ – вибіркове середнє функції повзучості [4].

Для побудови єдиної функції повзучості аналітичні значення кривих повзучості діляться на відповідні значення напружень, сплайн апроксимація кривих дозволяє знайти значення функції повзучості в довільний момент часу визначеного інтервалу.

Величина похибки δ в розрахунках прийнята рівною $\pm 5\%$, а ймовірність p попадання експериментальних функцій повзучості в інтервал, обмежений величиною похибки δ становить 90%.

На рис. 2 як приклад наведено функції поздовжньої $J_{11}(t)$ і поперечної повзучості $J_{22}(t)$ оргскла СТ-1.

$$J_{11}, J_{22} \text{ МПа}^{-1} \%$$

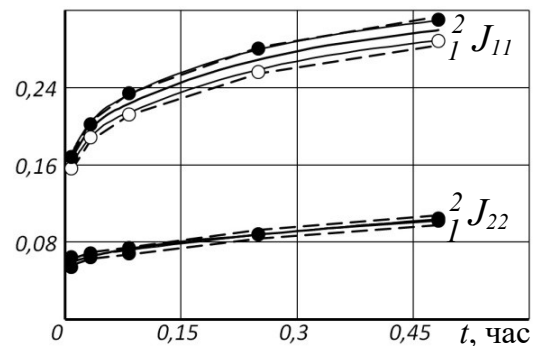


Рис. 2 – Функції поздовжньої і поперечної повзучості оргскла СТ-1

Тут суцільними лініями нанесено апроксимацію дискретних значень функцій повзучості згладжуючими кубічними сплайнами, на основі

яких розраховувалось вибіркове середнє $\bar{J}_{11}(t_l)$ і $\bar{J}_{22}(t_l)$. Штриховими лініями нанесено межі інтервала, який відповідає величині максимальної похибки $\delta_{\max} = \pm 5\%$ від величин $\bar{J}_{11}(t_l)$ і $\bar{J}_{22}(t_l)$. Як видно з рис.2, склопластик СТ1 проявляє лінійність в'язкопружних властивостей при даних напруженнях на всьому проміжку, що досліджується, а тому до даного матеріалу можна застосовувати лінійну теорію в'язкопружності.

4. Висновки

У роботі розглядається актуальна тема моделювання процесів повзучості лінійно-в'язко-

пружних матеріалів за умов складного напруженого стану. Еспериментальні дані на поздовжню повзучість представлено у вигляді дискретних значень деформацій при постійних напруженнях у певний момент часу. Функції, що задані дискретно за допомогою таблиць, апроксимуються згладжуючими кубічними сплайнами. Дана апроксимація дозволяє отримати досить точну апроксимацію експериментальних даних, від яких суттєво залежать подальші розрахунки.

За допомогою сплайн апроксимації кривих досліджується лінійність або нелінійність матеріалу, що дозволяє обрати модель в'язкопружного деформування.

Список використаних джерел

1. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н.Работнов. – Москва: Наука, 1966. – 752 с.
2. Кристенсен Р.М. Введение в теорию вязкоупругости / Р.М. Кристенсен // Пер. с англ. под ред. Г.С.Шапиро. – Москва: Мир, 1974. – 340 с.
3. Голуб В. П. К задаче определения параметров ядер наследственности изотропных нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии / В.П. Голуб, Ю.М. Кобзарь, В. С. Рагулина // Теорет. и прикл. механика. – 2013. – №5(51). – С. 26-35.
4. Голуб В.П. К решению задач ползучести изотропных нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии / В.П. Голуб, Ю.М. Кобзарь, П.В. Фернати // Теор. и прикл. механика. – 2014. – Вып 8 (54). – С. 45-56

References

1. RABOTNOV, U.N. (1966) *Polzuchest' elementov konstrukcii*. Moskva: Nauka.
2. KRISTENSEN, R.M. (1974). *Vvedenie v teoriiu vyazkoupругosti*. Moskva: Mir.
3. GOLUB, V.P., KOBZAR, U.M., RAGULINA, V.S. (2013) K zadache opredeleniya parametrov yader nasledstvennosti izotropnih nelineyno-vyazkoupругih materialov pri slozhnom napryagennom sostoyanii. *Teoret. i prikl. mehanika*. 5(51). p. 26-35.
4. GOLUB, V.P., KOBZAR, U.M., FERNATI, P.V. (2014). K resheniu zadach polzuchesti izotropnih nelineyno-vyazkoupругih materialov pri slozhnom napryagennom sostoyanii. *Teoret. i prikl. mehanika*. 8(54). p. 45-56.

Надійшла до редколегії 28.05.2023

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми "Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень" (КПКВК 6541230).

УДК 531.8

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.28>

К. Г. Хорошев¹, к.ф.-м.н., доц.
К. О. Дученко², студент
С. В. Кикоть³, к.ф.-м.н., доц.

Векторно-алгебраїчний підхід до кінематичного аналізу структурних груп 2-го класу за Артоболевським

¹ КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, 03056,
м. Київ, Берестейський пр-т, 37

e-mail: khoroshev.kostiantyn@lkl.kpi.ua

² Мюнхенський технічний університет, Німеч-
чина, 80333, м. Мюнхен, Арцисштрассе, 21

e-mail: ge85fix@mytum.de

³ КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, 03056,
м. Київ, Берестейський пр-т, 37

e-mail: kykot.serhii@lkl.kpi.ua

K. G. Khoroshev¹, Ph.D.
K. O. Duchenko²,
S. V. Kykot³, Ph.D.

The vector algebra approach to the kinematic analysis of the structural groups of the 2nd class by Artobolevsky

¹Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute,
Ukraine, 03056, Kyiv, Prosp. Beresteiskyi, 37

e-mail: khoroshev.kostiantyn@lkl.kpi.ua

² Technical University of Munich, Germany,
80333, Munich, Arcisstrasse, 21

e-mail: ge85fix@mytum.de

³Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute,
Ukraine, 03056, Kyiv, Prosp. Beresteiskyi, 37

e-mail: kykot.serhii@lkl.kpi.ua

Розроблена методика проведення кінематичного аналізу структурних груп 2-го класу за Артоболевським за допомогою виключно інструментарію векторної алгебри. Плани положень структурних груп, а за необхідності, і зовнішніх до них ланок, вважаються виконаними будь-яким підходом. Наведені формули для обчислень, які можуть бути використані для кінематичного, кінетостатичного та динамічного аналізу плоских важільних механізмів 2-го класу за Артоболевським, вказані межі їх використання.

Ключові слова: кінематика, плоский механізм, структурна група, векторна алгебра

The methodology for analyzing velocities and accelerations of characteristic points, as well as angular velocities and angular accelerations of links, of the structural groups of the 2nd class according to Artobolevsky is developed using exclusively the tools of vector algebra. There are exist five forms of the structural groups of the 2nd class by Artobolevsky, each form has been considered. The position analyses of the structural groups, which are described by the links' direction vectors and the radius-vectors of points of external kinematic pairs, and in addition, if necessary, the position analysis of external links are assumed to have been carried out by the vector algebra or some other approach. Provided for all forms of the structural groups formulas for calculations are prepared for creating a software product that automatizes the kinematic analysis of planar linkages of the 2nd class according to Artobolevsky. Also, they can be used for the kinetostatic and dynamic analyses of the mentioned linkages. The specified limits of application of the presented approach are pointed out.

Key Words: kinematics, planar linkage, structural group, vector algebra

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Introduction

The development of based on analytical methods algorithms for the kinematic analysis of structural groups of the 2nd class according to Artobolevsky makes it possible to automatize approaches to the kinematic analysis of any planar linkage of the 2nd class by Artobolevsky. All well-known analytical methods are essentially forms of projection schemes for solving vector contour equations [1, 2].

The paper [3] describes the method of solving vector polygonal equations in terms of vector algebra, but a general approach for linkages that can be classified is not suggested. As example, the Wanzel needle-bar mechanism is considered. Vector algebra is also used for the investigation of the kinematics of the crank-slider mechanisms in [4].

This work presents the vector algebra approach to the velocity and acceleration analyses of the mentioned structural groups, which position analyses have already been done.

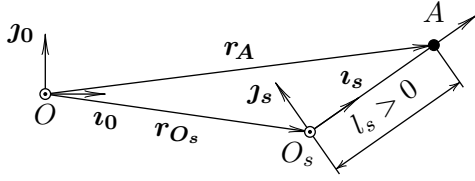


Figure 1: To the kinematics of a point in a plane

The kinematics of a point in a plane

Consider the motion of a point A in a plane (Fig. 1). Let a stationary point O and another, possibly moving, point O_s be selected so that $|OA| \neq 0$ and $l_s = |O_sA| \neq 0$. We will join to the points O and O_s the fixed $\{j_0, j_1, k_0\}$ and possibly moving $\{j_s, j_n, k_s\}$ standard bases in $\mathbb{R}^3$, so that vectors $k_0 = k_s$ will be normal to the plane and the vector j_s will lie on the ray O_sA .

For the radius-vector r_A of absolute motion, the absolute velocity v_A and acceleration w_A of the point A it can be written

$$\begin{aligned} r_A &= r_{O_s} + l_s j_s; \quad v_A = v_{O_s} + \dot{l}_s j_s + \omega_s l_s j_n; \\ w_A &= w_{O_s} + (\ddot{l}_s - \omega_s^2 l_s) j_s + \\ &\quad + (2\omega_s \dot{l}_s + \varepsilon_s l_s) j_n. \end{aligned} \quad (1)$$

Here r_{O_s} , v_{O_s} and w_{O_s} are the radius-vector of absolute motion, the absolute velocity and acceleration of the point O_s ; ω_s and ε_s are the absolute angular velocity and acceleration of the ray O_sA ; the operation « $\dot{}$ » means the differentiation of a quantity by time.

Structural groups

According to [1], the structural group of the 2nd class by Artobolevsky is a planar kinematic chain consisting of two links m and n (Fig. 2), which form an inner one at the point E and outer ones with the links k and p of the mechanism at the points D and F kinematic pairs of the Vth class. It is accepted that $|DE| = l_m$ and $|FE| = l_n$.

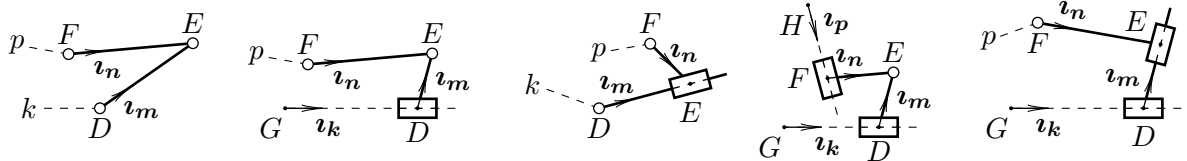


Figure 2: Forms of the structural groups of the 2nd class by Artobolevsky (numbering of the forms starts from the left)

Let the structural group be referred to a fixed coordinate system with a center at a certain point and the standard basis $\{j_0, j_1, k_0\}$. The vector k_0 is perpendicular to the plane of the structural group position. We define the unit vectors j_m and j_n along the rays DE and FE then construct joined to the points D and F the local standard bases $\{j_m, j_n, k_m\}$ and $\{j_n, j_n, k_n\}$ so that $k_m = k_0$ and $k_n = k_0$.

Let the points G and H be selected on the outer links k and p . Similarly, we introduce the bases $\{j_k, j_k, k_k\}$ and $\{j_p, j_p, k_p\}$ with j_k and j_p lying along the rays GD and HF . The notations $|GD| = l_k > 0$ and $|HF| = l_p > 0$ are accepted.

Using the expressions (1) for the absolute velocity v_E and acceleration w_E of the point E , we form the following vector equations

$$\begin{aligned} v_{DF} + \dot{l}_m j_m + \omega_m l_m j_n &= \dot{l}_n j_n + \omega_n l_n j_m; \\ w_{DF} + (\ddot{l}_m - \omega_m^2 l_m) j_m + \\ &\quad + (2\omega_m \dot{l}_m + \varepsilon_m l_m) j_n = \\ &= (\ddot{l}_n - \omega_n^2 l_n) j_n + (2\omega_n \dot{l}_n + \varepsilon_n l_n) j_m, \end{aligned} \quad (2)$$

where $v_{DF} = v_D - v_F$, $w_{DF} = w_D - w_F$; v_D , v_F and w_D , w_F are the absolute velocities and accelerations of the points D and F ; ω_m and ε_m , ω_n and ε_n are the absolute angular velocities and accelerations of the links m and n .

Consider each form of the structural group separately. Suppose that the position analysis was performed, that is, the unit vectors j_m , j_n , the lengths l_m , l_n and, if necessary, the unit vectors j_k , j_p , the lengths l_k , l_p are known.

We will assume that the velocity and acceleration analyses of the structural group are carried out completely if all the quantities contained in the equation (2) are known.

The 1st form. Known: j_m , $l_m > 0$, j_n , $l_n > 0$, v_{DF} and w_{DF} . Find: $\dot{l}_m$, $\dot{l}_n$, ω_m , ω_n , $\ddot{l}_m$, $\ddot{l}_n$, ε_m and ε_n .

Since l_m and l_n are constant in time, then $\dot{l}_m = \dot{l}_n = 0$ and $\ddot{l}_m = \ddot{l}_n = 0$. If $\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{J}_n \neq 0$, then from the equations (2) we obtain

$$\begin{aligned}\omega_m &= \frac{\mathbf{v}_{DF} \cdot \mathbf{v}_n}{l_m (\mathbf{J}_n \cdot \mathbf{v}_m)}; \quad \omega_n = \frac{\mathbf{v}_{DF} \cdot \mathbf{v}_m}{l_n (\mathbf{J}_n \cdot \mathbf{v}_m)}; \\ \varepsilon_m &= \frac{\mathbf{w}_{DF} \cdot \mathbf{v}_n - \omega_m^2 l_m (\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{v}_n) + \omega_n^2 l_n}{l_m (\mathbf{J}_n \cdot \mathbf{v}_m)}; \\ \varepsilon_n &= \frac{\mathbf{w}_{DF} \cdot \mathbf{v}_m - \omega_m^2 l_m + \omega_n^2 l_n (\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_m)}{l_m (\mathbf{J}_n \cdot \mathbf{v}_m)}.\end{aligned}$$

Here and everywhere, the operation « $\cdot$ » means the scalar product of vectors.

When the links m and n lie on the same line ($\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{J}_n = 0$), there is no unambiguous solution.

The 2nd form. Known: $\mathbf{v}_m$, $l_m \geq 0$, $\mathbf{v}_n$, $l_n > 0$, $\mathbf{v}_F$, $\mathbf{w}_F$, $\mathbf{v}_k$, $l_k > 0$, the absolute angular velocity ω_k and acceleration ε_k of the link k and the absolute velocity $\mathbf{v}_G$ and acceleration $\mathbf{w}_G$ of the point G . Find: $\mathbf{v}_{DF}$, $\dot{l}_m$, $\dot{l}_n$, ω_m , ω_n , $\mathbf{w}_{DF}$, $\ddot{l}_m$, $\ddot{l}_n$, ε_m and ε_n .

Formulas (1) for $\mathbf{v}_{DF}$ and $\mathbf{w}_{DF}$ give

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{DF} &= \mathbf{v}_{GF} + \dot{l}_k \mathbf{v}_k + \omega_k l_k \mathbf{J}_k; \\ \mathbf{w}_{DF} &= \mathbf{w}_{GF} + \left(\ddot{l}_k - \omega_k^2 l_k \right) \mathbf{v}_k + \\ &\quad + \left(2\omega_k \dot{l}_k + \varepsilon_k l_k \right) \mathbf{J}_k,\end{aligned}\quad (3)$$

where $\mathbf{v}_{GF} = \mathbf{v}_G - \mathbf{v}_F$, $\mathbf{w}_{GF} = \mathbf{w}_G - \mathbf{w}_F$. Expressions (3) imply that $\mathbf{v}_{DF}$ and $\mathbf{w}_{DF}$ will be known after determining $\dot{l}_k$ and $\ddot{l}_k$.

Here $\dot{l}_m = \dot{l}_n = 0$, $\ddot{l}_m = \ddot{l}_n = 0$. From property $\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{v}_k = \text{const}$ follows that $\omega_m = \omega_k$, $\varepsilon_m = \varepsilon_k$. Substituting (3) into (2) and, if the inequality $\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_n \neq 0$ holds, we deduce that

$$\begin{aligned}\omega_n &= \frac{\mathbf{v}_{GF} \cdot \mathbf{J}_k + \omega_k l_k + \omega_k l_m (\mathbf{J}_m \cdot \mathbf{J}_k)}{l_n (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_n)}; \\ \dot{l}_k &= -\frac{1}{\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_n} \times (\mathbf{v}_{GF} \cdot \mathbf{v}_n + \omega_k l_k (\mathbf{J}_k \cdot \mathbf{v}_n) + \\ &\quad + \omega_k l_m (\mathbf{J}_m \cdot \mathbf{v}_n)); \\ \varepsilon_n &= \frac{1}{l_n (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_n)} \times \left(\mathbf{w}_{GF} \cdot \mathbf{J}_k + 2\omega_k \dot{l}_k + \right. \\ &\quad + \varepsilon_k l_k - \omega_k^2 l_m (\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{J}_k) + \varepsilon_k l_m \times \\ &\quad \times (\mathbf{J}_m \cdot \mathbf{J}_k) + \omega_n^2 l_n (\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{J}_k) \left. \right); \\ \ddot{l}_k &= \omega_k^2 l_k - \frac{1}{\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_n} \times (\mathbf{w}_{GF} \cdot \mathbf{v}_n + \\ &\quad + \left(2\omega_k \dot{l}_k + \varepsilon_k l_k \right) (\mathbf{J}_k \cdot \mathbf{v}_n) - \omega_k^2 l_m \times \\ &\quad \times (\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{v}_n) + \varepsilon_k l_m (\mathbf{J}_m \cdot \mathbf{v}_n) + \omega_n^2 l_n).\end{aligned}$$

There are no unambiguous solutions of the equations (2) when the links k and n are perpendicular ($\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_n = 0$).

The 3rd form. Known: $\mathbf{v}_m$, $l_m > 0$, $\mathbf{v}_n$, $l_n \geq 0$, $\mathbf{v}_{DF}$ and $\mathbf{w}_{DF}$. Find: $\dot{l}_m$, $\dot{l}_n$, ω_m , ω_n , $\ddot{l}_m$, $\ddot{l}_n$, ε_m and ε_n .

Since $\dot{l}_n = 0$, $\ddot{l}_n = 0$, $\omega_n = \omega_m$ and $\varepsilon_n = \varepsilon_m$, then after substituting (3) in (2) under the condition $l_n (\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_m) - l_m \neq 0$ we have

$$\begin{aligned}\omega_m &= \frac{\mathbf{v}_{DF} \cdot \mathbf{J}_m}{l_n (\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_m) - l_m}; \\ \dot{l}_m &= \frac{l_m (\mathbf{v}_{DF} \cdot \mathbf{v}_m) - l_n (\mathbf{v}_{DF} \cdot \mathbf{v}_n)}{l_n (\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_m) - l_m}; \\ \varepsilon_m &= \frac{\mathbf{w}_{DF} \cdot \mathbf{J}_m + \omega_m^2 l_n (\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{J}_m) + 2\omega_m \dot{l}_m}{l_n (\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_m) - l_m}; \\ \ddot{l}_m &= \frac{1}{l_n (\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_m) - l_m} \times (l_m (\mathbf{w}_{DF} \cdot \mathbf{v}_m) - \\ &\quad - l_n (\mathbf{w}_{DF} \cdot \mathbf{v}_n) - \omega_m^2 [l_m^2 + l_n^2 - 2l_m l_n \times \\ &\quad \times (\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_m)] - 2\omega_m \dot{l}_m l_n (\mathbf{J}_m \cdot \mathbf{v}_n)).\end{aligned}$$

If $l_n (\mathbf{J}_n \cdot \mathbf{J}_m) - l_m = 0$, then the points D , E and F are vertices of a right triangle with a right angle at the point D . Unambiguous solutions of the equations (2) are impossible.

The 4th form. Known: $\mathbf{v}_m$, $l_m \geq 0$, $\mathbf{v}_n$, $l_n \geq 0$, $\mathbf{v}_k$, $l_k > 0$, $\mathbf{v}_p$, $l_p > 0$, ω_k , ε_k , $\mathbf{v}_G$, $\mathbf{w}_G$, the absolute angular velocity ω_p and acceleration ε_p of the link p , the absolute velocity $\mathbf{v}_H$ and acceleration $\mathbf{w}_H$ of the point H . Find: $\mathbf{v}_{DF}$, $\dot{l}_m$, $\dot{l}_n$, ω_m , ω_n , $\mathbf{w}_{DF}$, $\ddot{l}_m$, $\ddot{l}_n$, ε_m and ε_n .

Based on (1) for $\mathbf{v}_{DF}$ and $\mathbf{w}_{DF}$ we write

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{DF} &= \mathbf{v}_{GH} + \dot{l}_k \mathbf{v}_k + \omega_k l_k \mathbf{J}_k - \dot{l}_p \mathbf{v}_p - \omega_p l_p \mathbf{J}_p; \\ \mathbf{w}_{DF} &= \mathbf{w}_{GF} + \left(\ddot{l}_k - \omega_k^2 l_k \right) \mathbf{v}_k + \left(2\omega_k \dot{l}_k + \right. \\ &\quad + \varepsilon_k l_k \left. \right) \mathbf{J}_k - \left(\ddot{l}_p - \omega_p^2 l_p \right) \mathbf{v}_p - \\ &\quad - \left(2\omega_p \dot{l}_p + \varepsilon_p l_p \right) \mathbf{J}_p.\end{aligned}$$

Here $\mathbf{v}_{GH} = \mathbf{v}_G - \mathbf{v}_H$, $\mathbf{w}_{GH} = \mathbf{w}_G - \mathbf{w}_H$. It can be seen from the last expressions that the unknowns are $\dot{l}_k$, $\dot{l}_p$ and $\ddot{l}_k$, $\ddot{l}_p$.

Given that $\dot{l}_m = \dot{l}_n = 0$, $\ddot{l}_m = \ddot{l}_n = 0$, $\omega_m = \omega_k$, $\varepsilon_m = \varepsilon_k$ and $\omega_n = \omega_p$, $\varepsilon_n = \varepsilon_p$, from equations (2) for the case $\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{J}_p \neq 0$ we get

$$\begin{aligned}\dot{l}_k &= \frac{1}{\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{J}_k} \times (\mathbf{v}_{GH} \cdot \mathbf{J}_p + \omega_k l_k (\mathbf{J}_k \cdot \mathbf{J}_p) - \\ &\quad - \omega_p l_p + \omega_k l_m (\mathbf{J}_m \cdot \mathbf{J}_p) - \omega_p l_n (\mathbf{J}_n \cdot \mathbf{J}_p)); \\ \dot{l}_p &= \frac{1}{\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{J}_k} \times (\mathbf{v}_{GH} \cdot \mathbf{J}_k + \omega_k l_k - \omega_p l_p \times \\ &\quad \times (\mathbf{J}_p \cdot \mathbf{J}_k) + \omega_k l_m (\mathbf{J}_m \cdot \mathbf{J}_k) - \omega_p l_n (\mathbf{J}_n \cdot \mathbf{J}_k)); \\ \ddot{l}_k &= \omega_k^2 l_k + \frac{1}{\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{J}_k} \times (\mathbf{w}_{GH} \cdot \mathbf{J}_p +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(2\omega_k \dot{l}_k + \varepsilon_k l_k \right) (\mathbf{J}_k \cdot \mathbf{J}_p) - 2\omega_p \dot{l}_p - \\
 & - \varepsilon_p l_p - \omega_k^2 l_m (\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{J}_p) + \varepsilon_k l_m (\mathbf{J}_m \cdot \mathbf{J}_p) + \\
 & + \omega_p^2 l_n (\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{J}_p) - \varepsilon_p l_n (\mathbf{J}_n \cdot \mathbf{J}_p) \Big); \\
 \ddot{l}_p = & \omega_p^2 l_p + \frac{1}{\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{J}_k} \times \left(\mathbf{w}_{GH} \cdot \mathbf{J}_k + 2\omega_k \dot{l}_k + \right. \\
 & + \varepsilon_k l_k - \left(2\omega_p \dot{l}_p + \varepsilon_p l_p \right) (\mathbf{J}_p \cdot \mathbf{J}_k) - \\
 & - \omega_k^2 l_m (\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{J}_k) + \varepsilon_k l_m (\mathbf{J}_m \cdot \mathbf{J}_k) + \\
 & + \omega_p^2 l_n (\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{J}_k) - \varepsilon_p l_n (\mathbf{J}_n \cdot \mathbf{J}_k) \Big).
 \end{aligned}$$

For the parallel links k and p ($\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{J}_p = 0$) the equations (2) can't be solved unambiguously.

The 5th form. Known: $\mathbf{v}_m$, $l_m > 0$, $\mathbf{v}_n$, $l_n \geq 0$, $\mathbf{v}_F$, $\mathbf{w}_F$, $\mathbf{v}_k$, $l_k > 0$, ω_k , ε_k , $\mathbf{v}_G$, $\mathbf{w}_G$. Find: $\mathbf{v}_{DF}$, $\dot{l}_m$, $\dot{l}_n$, ω_m , ω_n , $\mathbf{w}_{DF}$, $\dot{l}_m$, $\dot{l}_n$, ε_m , ε_n .

Here, as for the 2nd form, the quantities $\mathbf{v}_{DF}$ and $\mathbf{w}_{DF}$ are represented by expressions (3) with unknowns $\dot{l}_k$ and $\dot{l}_m$.

Substituting (3) into (2) and considering that $\dot{l}_n = 0$, $\ddot{l}_n = 0$, $\omega_m = \omega_n = \omega_k$, $\varepsilon_m = \varepsilon_n = \varepsilon_k$, after solving for $\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{J}_k \neq 0$ we obtain

$$\begin{aligned}
 \dot{l}_k = & \frac{1}{\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{J}_k} \times (\mathbf{v}_{GF} \cdot \mathbf{J}_m + \omega_k l_k (\mathbf{J}_k \cdot \mathbf{J}_m) + \\
 & + \omega_k l_m - \omega_k l_n (\mathbf{J}_n \cdot \mathbf{J}_m)); \\
 \dot{l}_m = & - \frac{1}{\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{J}_k} \times (\mathbf{v}_{GF} \cdot \mathbf{J}_k + \omega_k l_k +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \omega_k l_m (\mathbf{J}_m \cdot \mathbf{J}_k) - \omega_k l_n (\mathbf{J}_n \cdot \mathbf{J}_k)); \\
 \ddot{l}_k = & \omega_k^2 l_k + \frac{1}{\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{J}_k} \times (\mathbf{w}_{GF} \cdot \mathbf{J}_m + \\
 & + \left(2\omega_k \dot{l}_k + \varepsilon_k l_k \right) (\mathbf{J}_k \cdot \mathbf{J}_m) + 2\omega_k \dot{l}_m + \\
 & + \varepsilon_k l_m + \omega_k^2 l_n (\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{J}_m) - \varepsilon_k l_n (\mathbf{J}_n \cdot \mathbf{J}_m)); \\
 \ddot{l}_m = & \omega_k^2 l_m - \frac{1}{\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{J}_k} \times \left(\mathbf{w}_{GF} \cdot \mathbf{J}_k + 2\omega_k \dot{l}_k + \right. \\
 & + \varepsilon_k l_k + \left(2\omega_k \dot{l}_m + \varepsilon_k l_m \right) (\mathbf{J}_m \cdot \mathbf{J}_k) + \\
 & + \omega_k^2 l_n (\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{J}_k) - \varepsilon_k l_n (\mathbf{J}_n \cdot \mathbf{J}_k) \Big).
 \end{aligned}$$

If the links m and k lie on the same line ($\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{J}_k = 0$), then the equations (2) are unambiguously unsolvable.

Conclusions

The velocity and acceleration analyses of structural groups of the 2nd class by Artobolevsky were carried out using the vector algebra methods. The positions of the structural groups for which there is no unambiguous solution are pointed out.

The obtained formulas are optimized to create a software for the automatized kinematic analysis of the linkages of the 2nd class by Artobolevsky. They also can be used for further kinetostatic or dynamical analyses of the specified mechanisms.

Список використаних джерел

1. Кіницький Я.Т. Теорія механізмів і машин: підручник / Я.Т. Кіницький. — Київ: Наукова думка, 2002. — 659 с.
2. Гончар М.О. Теорія механізмів і машин: підручник / М.О. Гончар. — Київ: Видавничий дім Вінниченко, 2011. — 456 с.
3. Chase M.A. Vector Analysis of Linkages [Електронний ресурс] / M.A. Chase // Journal of Engineering for Industry. — 1963. — Т. 85, №3. — С. 289–297. — Режим доступу до журн.: <https://doi.org/10.1115/1.3669867>.
4. Дученко К.О. Кінематичне дослідження кривошипно-повзунного механізму методами векторної алгебри. [Електронний ресурс] / К.О. Дученко, К.Г. Хорошев // Інновації молоді в машинобудуванні. — К. : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. — № 3. — 460 с. — С. 455–460. — Режим доступу до ресурсу: <http://imm-mmi.kpi.ua/proc/article/view/231697>.

References

1. KINYTSKYI YA.T. (2002) *Teoriia mekhanizmiv i mashyn: pidruchnyk*. Kyiv: Naukova dumka.
2. HONCHAR M.O. (2011) *Teoriia mekhanizmiv i mashyn: pidruchnyk*. Kyiv: Vydavnychiy dim Vinnychenko.
3. CHACE, M.A. (1963) Vector Analysis of Linkages. *Journal of Engineering for Industry*. [Online] 85(3). p. 289–297. — Available from: <https://doi.org/10.1115/1.3669867>.
4. DUCHENKO K.O., KHOROSHEV K.G. (2021) Kinematychne doslidzhennia kryvo-shypno-povzunnoho mekhanizmu metoda-my vektornoj alhebry. In *Youth Innovations in Mechanical Engineering*. [Online] Kyiv: KPI im. Ihoria Sikorskoho. N.3. p. 455–460. — Available from: <http://imm-mmi.kpi.ua/proc/article/view/231697>.

Надійшла до редколегії 07.08.2023

УДК 539.3

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.29>

Шевельова Н.В., аспірант,
Ходанен Т.В., к.ф.-м.н., доц.

N.V. Shevelova, postgraduate student,
T.V. Khodanenko, PhD, docent

**Система колінеарних електрично та
магнітно проникних тріщин
між двома п'єзоелектромагнітними
матеріалами**

**A set of collinear electrically and magnetically
permeable cracks between two
piezoelectromagnetic materials**

Дніпровський національний університет імені
Олеси Гончара, м. Дніпро, пр-т Гагаріна, 72,
e-mail: thod7474@gmail.com
e-mail: nataliya.shevelyova@gmail.com

Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro,
Gagarin Av., 72,
e-mail: thod7474@gmail.com
e-mail: nataliya.shevelyova@gmail.com

Розглянуто плоску деформацію біматеріального простору, що складається з двох п'єзоелектромагнітних півпросторів зі скінченним набором електрично і магнітно проникних тріщин уздовж межі поділу матеріалів. Визначено в замкнутому вигляді всі необхідні механічні, електричні та магнітні компоненти вздовж межі поділу матеріалів, а також швидкість звільнення енергії для всіх вершин тріщин

Ключові слова: п'єзоелектромагнетик, інтерфейс, множина тріщин.

The plane strain problem for the bimaterial space consisting of two piezoelectromagnetic half-spaces with a finite set of cracks along the material interface is considered. It is assumed that the edges of the crack are electrically and magnetically permeable, and a mixed mechanical load and electric and magnetic fields can be set at infinity.

The presentations of electro-magneto-mechanical quantities through a piecewise analytical vector function are constructed with the use of constitutive equations for piezoelectromagnetic materials. By means of these presentations the problem of linear relationship is formulated and solved analytically. Using the obtained solution, all the necessary mechanical, electrical, and magnetic components along the material interface as well as the energy release rate for all crack tips are found analytically. The asymptotic presentations of all fields around the crack tips and the crack closure integral method were used.

Numerical results are obtained for different loads, location of the cracks, their number and lengths. A significant increase in energy release rates was demonstrated because of cracks converge, especially for the tips located closest to each other.

Key Words: piezoelectromagnetic, interface, cracks set.

Статтю представив член-кореспондент НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Волокнисті та шаруваті композити, виготовлені з п'єзоелектричних та магнітоелектропружних матеріалів [1, 2], знаходять все більш широке застосування в техніці. Натомість такі матеріали дуже часто руйнуються через свою крихкість. Але систему міжфазних тріщин у магнітоелектропружних матеріалах дотепер вивчено недостатньо. Лише в роботах [3] та [4] розглянуто плоску задачу для магнітоелектропружного композита із електро-магнітно-ізованими та електро-магнітно-провідними міжфазними тріщинами, відповідно. Тому в даній роботі

розглядається проблема довільної кількості колінеарних електропроникних міжфазних тріщин довільної довжини та розташування в магнітоелектропружному біматеріалі, що раніше не вивчалась.

2. Система колінеарних тріщин на межі поділу матеріалів

Будемо вважати, що на межі поділу матеріалів $x_3 = 0$ виникли n електро- та магнітопроникних тріщин $a_1 \leq x_1 \leq b_1$, $a_2 \leq x_1 \leq b_2$, ..., $a_n \leq x_1 \leq b_n$, які можуть мати довільну довжину і розташування. При цьому матеріали мають клас

симетрії $6mm$ і попередньо поляризовані в напрямку осі x_3 . Вважається, що береги тріщин вільні від механічних напружень.

Позначимо через $L' = \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k)$ множини тріщин, а через $L'' = (-\infty, \infty) \setminus L'$ – ділянки інтерфейсу поза тріщинами. Тоді умови на межі поділу матеріалів для поставленої задачі можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_{i3}^{(m)}(x_1, 0) = 0, \quad E_1^{(1)}(x_1, 0) = E_1^{(2)}(x_1, 0) = 0, \\ H_1^{(1)}(x_1, 0) = H_1^{(2)}(x_1, 0) = 0 \quad \text{для } x_1 \in L', \quad (1) \\ u_i^{(1)}(x_1, 0) = u_i^{(2)}(x_1, 0), \quad \sigma_{i3}^{(1)}(x_1, 0) = \sigma_{i3}^{(2)}(x_1, 0), \\ E_1^{(1)}(x_1, 0) = E_1^{(2)}(x_1, 0), \quad H_1^{(1)}(x_1, 0) = H_1^{(2)}(x_1, 0), \\ D_3^{(1)}(x_1, 0) = D_3^{(2)}(x_1, 0), \\ B_3^{(1)}(x_1, 0) = B_3^{(2)}(x_1, 0) \quad \text{для } x_1 \in L'', \quad (2) \end{aligned}$$

де σ_{ij} , ε_{ij} – компоненти тензорів напружень і деформацій, D_i , B_i – складові електричної та магнітної індукцій, E_i , H_i – напруженості електричного та магнітного полів, $i = 1, 3$.

В роботі [5] отримано такі представлення компонент напружень та стрибків переміщень через функції, аналітичні у всій площині за виключенням області тріщини:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + im_j \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \\ = \mathcal{G}_j \left(\Phi_j^+(x_1) + \gamma_j \Phi_j^-(x_1) \right), \quad (3) \end{aligned}$$

$$\langle u_1'(x_1) \rangle + is_j \langle u_3'(x_1) \rangle = \Phi_j^+(x_1) - \Phi_j^-(x_1), \quad (4)$$

причому

$$\Phi_j(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \tilde{\sigma}_j - i\tilde{\tau}_j, \quad (5)$$

де $\tilde{\sigma}_j = \sigma^\infty / r_j$, $\tilde{\tau}_j = -m_j \tau^\infty / r_j$, $j = 1, 3$.

Використовуючи представлення (3) при $j = 1$, з граничних умов (1) одержуємо

$$\Phi_1^+(x_1) + \gamma_1 \Phi_1^-(x_1) = 0 \quad \text{для } x_1 \in L'. \quad (6)$$

На основі [6] розв'язок задачі лінійного спряження (6) можна подати у вигляді

$$\Phi_1(z) = X(z) P_n(z), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{де } X(z) = \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{-\frac{1}{2} + i\varepsilon_1} \cdot (z - b_k)^{-\frac{1}{2} - i\varepsilon_1}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\ln \gamma_1}{2\pi}, \\ P_n(z) = C_0 z^n + C_1 z^{n-1} + \dots + C_n. \end{aligned}$$

Коефіцієнти C_k ($k = 0, 1, \dots, n$) визначаються з умови (5) при $j = 1$ та умов однозначності переміщень при обході контурів тріщин. В результаті одержуємо:

$$C_0 = \tilde{\sigma}_1 - i\tilde{\tau}_1, \quad (8)$$

$$\int_{a_m}^{b_m} P_n(t) X(t) dt = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

Останнє співвідношення призводить до наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{\alpha=1}^n \hat{a}_{m\alpha} C_\alpha = \tilde{b}_m, \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

У цій системі

$$\hat{a}_{m\alpha} = I_{m, n-\alpha}, \quad \tilde{b}_m = -I_{mn} C_0, \quad (10)$$

$$I_{ms} = \int_{a_m}^{b_m} \frac{t^s}{\prod_{k=1}^n (t - a_k)^{\frac{1}{2} - i\varepsilon_1} \cdot (t - b_k)^{\frac{1}{2} + i\varepsilon_1}} dt.$$

Точний аналітичний розв'язок системи (9) можна знайти для будь-якого значення n методом Гауса.

З використанням отриманого розв'язку напруження поза тріщинами може бути знайдене за формулою:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + im_1 \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \mathcal{G}_1 (1 + \gamma_1) \Phi_1(x_1), \quad (11)$$

а стрибки переміщень на тріщині – в результаті інтегрування формули:

$$\langle u_1'(x_1) \rangle + is_1 \langle u_3'(x_1) \rangle = \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1} \Phi_1^+(x_1). \quad (12)$$

Електричне та магнітне поля можуть бути визначені за формулами [5].

Особливий інтерес представляють асимптотичні вирази для напружень та стрибків переміщень в околі вершин тріщин. На основі формул (11) і (12) ці вирази в околі правої вершини k -ї тріщини можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) - im_1 \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) \Big|_{x_1 \rightarrow b_k + 0} = \\ = \bar{R}_k (x_1 - b_k)^{-0.5 + i\varepsilon_1}, \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{де } \bar{R}_k = (1 + \gamma_1) \mathcal{G}_1 \bar{P}_n(b_k) (b_k - a_k)^{-0.5 - i\varepsilon_1} \times \\ \times \prod_{j=1, j \neq k}^n (b_k - a_j)^{-0.5 - i\varepsilon_1} (b_k - b_j)^{-0.5 + i\varepsilon_1}, \end{aligned}$$

$$\langle u_1(x_1) \rangle + i s_1 \langle u_3(x_1) \rangle|_{x_1 \rightarrow b_k - 0} = T_k (b_k - x_1)^{0.5 - i \varepsilon_1}, \quad (14)$$

$$\text{де } T_k = \frac{i(1 + \gamma_1)}{\sqrt{\gamma_1} (0.5 - i \varepsilon_1)} P_n(b_k) (b_k - a_k)^{-0.5 + i \varepsilon_1} \times \\ \times \prod_{j=1, j \neq k}^n (b_k - a_j)^{-0.5 + i \varepsilon_1} (b_k - b_j)^{-0.5 - i \varepsilon_1}.$$

Беручи до уваги, що $\langle \varphi(x_1) \rangle = 0$ і $\langle \psi(x_1) \rangle = 0$ для $-\infty < x_1 < \infty$, швидкість звільнення енергії (ШЗЕ) біля вершини тріщини b_k може бути визначена за формулою:

$$G_{b_k} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta l} \int_{b_k}^{b_k + \Delta l} [\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) \langle u_3(x_1 - \Delta l) \rangle + \\ + \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) \langle u_1(x_1 - \Delta l) \rangle] dx_1. \quad (15)$$

Використаємо далі наступну тотожність:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) \langle u_3(x_1 - \Delta l) \rangle + \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) \langle u_1(x_1 - \Delta l) \rangle = \\ = -m_1^{-1} \text{Im} \left\{ \left[\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) - i m_1 \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) \right] \times \right. \\ \left. \times [\langle u_1(x_1 - \Delta l) \rangle + i s_1 \langle u_3(x_1 - \Delta l) \rangle] \right\}. \quad (16)$$

Підставляючи формули (13), (14) в (16), а потім в (15) і проводячи інтегрування, отримуємо:

$$G_{b_k} = -\frac{\pi}{4m_1} \text{Im} \left(\frac{1 - 2i\varepsilon_1}{\cosh(\pi\varepsilon_1)} \bar{R}_k S_k \right). \quad (17)$$

Аналогічним чином знайдено ШЗЕ і біля лівих вершин тріщин.

3. Результати та їх аналіз

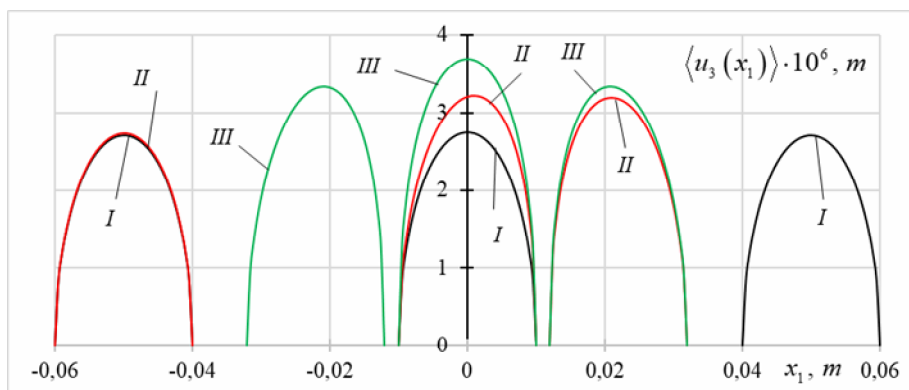


Рис. 2. Зміна розкриття тріщин при зміні відстаней між ними

Для числової ілюстрації розглянемо біматеріал, що складається з композиту BaTiO_3 - CoFe_2O_4 з об'ємними частками BaTiO_3 $V_f = 0.5$ (верхній матеріал) і $V_f = 0.1$ (нижній). Характеристики цих матеріалів наведено в [2].

Результати для випадку трьох тріщин однакової довжини 20 мм, які мають координати лівих вершин $a_1 = -60$ мм, $a_2 = -10$ мм, $a_3 = 40$ мм (лінії I), $a_1 = -60$ мм, $a_2 = -10$ мм, $a_3 = 12$ мм (II), $a_1 = -32$ мм, $a_2 = -10$ мм, $a_3 = 12$ мм (III) показано на рис. 2. Зовнішнє механічне навантаження було обрано таким: $\sigma^\infty = 10^7$ Па, $\tau^\infty = 0$, а значення електричної та магнітної індукцій: $D_3^\infty = 0$, $B_3^\infty = 0$. З рис. 2 видно, що зближення тріщин призводить до суттєвого збільшення розкриття середньої тріщини, а також збільшення значень розкриття для тієї тріщини, що стає ближче до середньої.

У табл. 1 показано зміни швидкості звільнення енергії біля лівої G_{a_2} та правої G_{b_2} вершин середньої тріщини $a_2 = -10$ мм, $b_2 = 10$ мм для фіксованого положення лівої тріщини $a_1 = -32$ мм, $b_1 = -12$ мм та зміни положення правої тріщини. З результатів, наведених в таблиці 1, видно, що зближення тріщин приводить до суттєвого росту швидкостей звільнення енергії, особливо для найближче розташованих вершин.

Таблиця 1

Зміни швидкостей звільнення енергії біля правої та лівої вершин середньої тріщини

Розташування тріщин, мм	$a_3 = 80$, $b_3 = 100$	$a_3 = 40$ $b_3 = 60$	$a_3 = 20$, $b_3 = 40$	$a_3 = 12$, $b_3 = 32$	$a_3 = 11$, $b_3 = 31$	$a_3 = 10,5$, $b_3 = 30,5$
G_{b_2} , N / m	26.434	27.447	31.973	56.666	81.753	124.141
G_{a_2} , N / m	46.569	47.598	50.453	56.666	59.350	61.803

4. Висновки

Проаналізовано плоску деформацію біматеріального простору, що складається з двох п'єзоелектромагнітних півпросторів зі скінченим набором електро і магнітно проникних тріщин уздовж межі поділу матеріалів. З використанням представлень електро-магнітомеханічних величин через кусково-аналітичну вектор-функцію сформульовано задачу лінійного спряження, яку розв'язано аналітично. Знайдено

швидкість звільнення енергії для всіх вершин тріщин. Проведено чисельну ілюстрацію одержаних аналітичних розв'язків.

Результати роботи було викладено у доповіді на VII Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки» (Київ, 28-30 серпня 2023 р.). Автори щиро вдячні організаторам.

Список використаних джерел

1. Механика связанных полей в элементах конструкций. В 5 т. Т. 5 Электроупругость / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга / Под ред. Гузя А. Н. – Київ: Наукова думка, 1989. – 280 с.
2. Sih, G. C. Magnetic and electric poling effects associated with crack growth in BaTiO₃-CoFe₂O₄ composite / G. C. Sih, Z. F. Song // Theor. Appl. Fract. Mech. – 2003. – **39**. – P. 209–227.
3. Feng W. J. Fracture analysis of bounded magnetoelectroelastic layers with interfacial cracks under magnetoelectromechanical loads: plane problem / Feng, W. J., Su, R. K. L., Liu, J. X., Li, Y. S. // J. Intell. Mater. Syst. Struct. – 2010. – **21**. – P. 581–594.
4. Shevelova N. A set of collinear electrically charged interfacial cracks in magnetoelectroelastic bimaterial / Shevelova N., Khodaneni T., Chapelle F., Lapusta Y., Loboda V. // Acta Mechanica, – 2023. – P. 1–17. Режим доступу до журн.: <https://doi.org/10.1007/s00707-023-03642-y>.
5. Herrmann K. P. An interface crack with contact zones in a piezoelectric/piezomagnetic bimaterial / Herrmann K. P., Loboda V. V., Khodaneni T. V. // Archive of Applied Mechanics. – 2010. – **80** (6), P. 651–670.
6. Muskhelishvili N. I. Some Basic Problems in the Mathematical Theory of Elasticity. – Noordhoff, Groningen, 1963. – 707 с.

References

1. GRINCHENKO, V. T., ULITKO, A. F. and SHULGA, N. A. (1989) *Elektrouprugost*. Kiev: Naukova dumka (*Mechanika svyazannykh poley v elementakh konstruktsiy*: v 5 t.; t. 5).
2. SIH, G. C. and SONG, Z. F. (2003) Magnetic and electric poling effects associated with crack growth in BaTiO₃-CoFe₂O₄ composite. *Theor. Appl. Fract. Mech.* **39**, p. 209–227.
3. FENG, W. J., SU, R. K. L., LIU, J. X. and LI, Y. S. (2010) Fracture analysis of bounded magnetoelectroelastic layers with interfacial cracks under magnetoelectromechanical loads: plane problem. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* **21**, p. 581–594.
4. SHEVELOVA, N., KHODANEN, T., CHAPELLE, F., LAPUSTA, Y. and LOBODA, V. (2023) A set of collinear electrically charged interfacial cracks in magnetoelectroelastic bimaterial. *Acta Mechanica*. p. 1–17. Available from: <https://doi.org/10.1007/s00707-023-03642-y>.
5. HERRMANN, K. P., LOBODA V. V. and KHODANEN, T. V. (2010) An interface crack with contact zones in a piezoelectric /piezomagnetic bimaterial. *Archive of Applied Mechanics* **80** (6), p. 651–670.
6. MUSKHELISHVILI, N. I. (1963) *Some Basic Problems in the Mathematical Theory of Elasticity*. Noordhoff, Groningen.

Надійшла до редколегії 01.09.23

УДК 539.3

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.30>

Шикула О. М.¹, д.ф.-м.н., проф.
Жукова Н. Б.², к.ф.-м.н., с.н.с.

E. N. Shikula¹, Doctor of Phys. and Math. Sciences,
N. B. Zhukova², Cand. of Phys. and Math. Sciences.

Модель нелінійного деформування зернистих композитів

Model of nonlinear deformation of granular composites

¹ Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН
України, 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3,
Державний університет інформаційно-
телекомунікаційних технологій, 03110, м.
Київ, вул. Солом'янська, 7,
e-mail: ensh@ukr.net

² Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН
України, 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3,
e-mail: zhukova_n@ukr.net

¹ S.P. Timoshenko Institute of Mechanics, National
Academy of Science of Ukraine, 03057, Kyiv,
Nesterova str., 3; State University of Information and
Telecommunication Technologies, 03110, Kyiv,
Solomyanska str., 7,
e-mail: ensh@ukr.net

² S.P. Timoshenko Institute of Mechanics, National
Academy of Science of Ukraine, 03057, Kyiv,
Nesterova str., 3,
e-mail: zhukova_n@ukr.net

Побудовано модель нелінійного деформування зернистого композитного матеріалу стохастичної структури з фізично нелінійними компонентами. В основу покладені стохастичні диференціальні рівняння фізично нелінійної теорії пружності Л.П. Хорошуна. Розв'язок задачі про напружено-деформівний стан та ефективні деформативні властивості композитного матеріалу будується за методом осереднення. Розроблено алгоритм визначення ефективних властивостей зернистого матеріалу з фізично нелінійними компонентами. Розв'язок нелінійних рівнянь, що враховують їх фізичну нелінійність, будується за ітераційним методом. Встановлено закон зв'язку між макронапруженнями і макродеформаціями в зернистому матеріалі та залежності середніх деформацій і напружень в його компонентах від макродеформацій. Побудовано криві деформування матеріалу для різних значень об'ємного вмісту його компонентів. Вивчено залежність ефективних деформативних властивостей зернистого матеріалу від об'ємного вмісту компонентів. Досліджено вплив нелінійності компонентів на деформування зернистого композитного матеріалу. Встановлено, що нелінійність компонентів суттєво впливає на ефективні деформативні властивості та напружено-деформований стан зернистих матеріалів.

Ключові слова: зернистий композитний матеріал, нелінійність деформування компонентів, ефективні деформативні властивості, напружено-деформівний стан, вплив нелінійності

The model of nonlinear deformation of a granular composite material of a stochastic structure with physically nonlinear components was constructed. The basis is the stochastic differential equations of the physically nonlinear theory of elasticity by L.P. Khoroshun. The solution to the problem of the stress-strain state and effective deformable properties of the composite material is built using the averaging method. An algorithm for determining the effective properties of granular material with physically nonlinear components has been developed. The solution of nonlinear equations, taking into account their physical nonlinearity, is constructed by the iterative method. The law of the relationship between macrostresses and macrostrains in granular material and the dependence of average strains and stresses in its components on macrostrains has been established. Curves of deformation of the material were constructed for different values of the volume content of its components. The dependence of the effective deformable properties of the granular material on the volume content of the components was studied. The effect of component nonlinearity on the deformation of granular composite material was studied. It was established that the nonlinearity of the components significantly affects the effective deformable properties and the stress-strain state of granular materials.

Key Words: granular composite material, nonlinearity of deformation of components, efficient deformative properties, stress-strain state, influence of nonlinearity

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

В умовах достатньо високих навантажень багато композитних матеріалів мають нелінійний характер залежностей між макронапруженнями та макродеформаціями внаслідок фізично нелінійного деформування компонентів. Такий вид нелінійності притаманний композитам на основі пластичної металевої матриці та на основі полімерів при підвищених температурах. Експериментальні дослідження показують [1], що при досить високих температурах нелінійно деформуються також високомодульні матеріали типу органічного скла. На рис. 1 наведено графіки експериментальної залежності напруження від деформації для органічного скла за різних температур. Як бачимо при температурі 80° , залежність між напруженням і деформацією має параболічний характер. Тому актуальним є дослідження фізично нелінійного деформування композитних матеріалів при нелінійному деформуванні як матриці, так і включень.

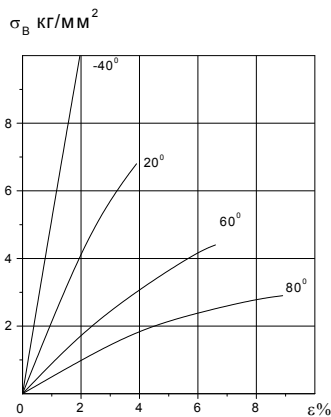


Рис.1. Експериментальна залежність напруження від деформації для органічного скла при різних температурах

Розглянемо зернистий композит з нелінійними ізотропними компонентами, який знаходиться в умовах однорідних макродеформацій. Залежності між напруженнями σ_{ij} та деформаціями ε_{ij} можна подати у вигляді

$$\sigma_{ij} = (K - 2\mu/3)\varepsilon_{pp}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (i, j, p=1, 2, 3), \quad (1)$$

де модулі об'ємного стиску K і зсуву μ – випадкові функції координат, які приймають значення відповідно K_1, μ_1 і K_2, μ_2 для включень і матриці, причому об'ємні деформації компонентів є лінійними, тобто модулі об'ємного стиску K_1, K_2 не залежать від деформацій, а деформації зсуву описуються нелінійними діаграмами.

Виходячи з рівнянь рівноваги

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (2)$$

співвідношень Коші

$$\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3)$$

та залежностей (1), отримаємо фізично та статистично нелінійні рівняння рівноваги відносно флуктуацій переміщень $u_i^0 = u_i - \langle \varepsilon_{ij} \rangle x_j$

$$(K_c + \mu_c/3)u_{r,ri}^0 + \mu_c u_{i,rr}^0 = -[(K' - 2/3\mu')\varepsilon_{pp}\delta_{ij} + 2\mu'\varepsilon_{ij}]_{,j} \quad (K' = K - K_c; \mu' = \mu - \mu_c; i, j, p, r=1, 2, 3). \quad (4)$$

Усереднюючи співвідношення (1), отримуємо вирази для середніх напружень у вигляді

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle &= c_1(K_1 - 2/3\mu_1) \langle \varepsilon_{pp} \rangle \delta_{ij} + \\ &+ c_2(K_2 - 2/3\mu_2) \langle \varepsilon_{pp} \rangle \delta_{ij} + \\ &+ 2c_1\mu_1 \langle \varepsilon_{ij} \rangle + 2c_2\mu_2 \langle \varepsilon_{ij} \rangle, \end{aligned} \quad (5)$$

де c_1, c_2 – об'ємні вмісти відповідно включень та матриці.

За допомогою функції Гріна рівняння (4) можна привести до інтегральної форми. Скориставшись методом умовних моментів Л.П. Хорошуна [2, 3], усереднюючи ці рівняння за умовною щільністю, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно середніх деформацій компонентів. Визначивши їх з цієї системи і підставивши в співвідношення (5), отримаємо залежності між макронапруженнями $\langle \sigma_{ij} \rangle$ і макродеформаціями $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = (K^* - 2/3\mu^*) \langle \varepsilon_{pp} \rangle \delta_{ij} + 2\mu^* \langle \varepsilon_{ij} \rangle, \quad (6)$$

Ефективні деформативні коефіцієнти мають вигляд [2, 4]

$$\begin{aligned} K^* &= \langle K \rangle - \frac{c_1 c_2 (K_1 - K_2)^2}{c_1 K_2 + c_2 K_1 + \bar{K}_c}; \\ \mu^* &= \langle \mu \rangle - \frac{c_1 c_2 (\mu_1 - \mu_2)^2}{c_1 \mu_2 + c_2 \mu_1 + \bar{\mu}_c}; \end{aligned} \quad (7)$$

де [5]

$$\bar{K}_c = \frac{4}{3}\mu_c; \quad \bar{\mu}_c = \frac{\mu_c(9K_c + 8\mu_c)}{6(K_c + 2\mu_c)}; \quad (8)$$

$$\mu_c = c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2; \quad K_c = c_1 K_1 + c_2 K_2, \quad (9)$$

якщо жорсткість матриці більше, ніж жорсткість включень, та

$$\mu_c = \left(\frac{c_1}{\mu_1} + \frac{c_2}{\mu_2} \right)^{-1}; \quad K_c = \left(\frac{c_1}{K_1} + \frac{c_2}{K_2} \right)^{-1} \quad (10)$$

в іншому випадку.

Зауважимо, що в випадку фізичної нелінійності компонентів композиту ефективні деформативні характеристики (7) – (10) будуть функціями середніх деформацій у включеннях $\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle$ та матриці $\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle$. Виразивши середні деформації в компонентах через макродеформації $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$, отримаємо ефективні коефіцієнти як функції макродеформацій.

Враховуючи співвідношення, що пов'язують макронапруження та макродеформації із середніми напруженнями та деформаціями в компонентах

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle &= c_1 \langle \sigma_{ij}^1 \rangle + c_2 \langle \sigma_{ij}^2 \rangle; \\ \langle \varepsilon_{ij} \rangle &= c_1 \langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle + c_2 \langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle, \end{aligned} \quad (11)$$

зв'язки між напруженнями та деформаціями компонентів, що впливають з (1)

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij}^v \rangle &= \left(K_v - \frac{2}{3} \mu_v \right) \langle \varepsilon_{pp}^v \rangle + \delta_{ij} + 2\mu_v \langle \varepsilon_{ij}^v \rangle \\ (v=1,2) \end{aligned} \quad (12)$$

і співвідношення (7), отримаємо залежності, що пов'язують середні деформації в компонентах $\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle$ ($v=1,2$) та макродеформації $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij}^v \rangle &= (-1)^{v+1} \times \\ &\times \left[\frac{2\mu^* (\mu_1 - \mu_2) (K^* - K_{3-v}) - 3K^* (K_1 - K_2) (\mu^* - \mu_{3-v})}{6c_2 \mu^* (K_1 - K_2) (\mu_1 - \mu_2)} \times \right. \\ &\left. \times \langle \varepsilon_{pp} \rangle + \delta_{ij} + \frac{\mu^* - \mu_{3-v}}{2c_2 \mu^* (\mu_1 - \mu_2)} \langle \varepsilon_{ij} \rangle \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Підставивши співвідношення (13) в (7) – (10), отримаємо вирази для ефективних коефіцієнтів як функцій макродеформацій $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$.

Співвідношення (7) – (10), (13) дозволяють написати ітераційний алгоритм для визначення ефективних деформативних характеристик зернистого композитного матеріалу.

В якості конкретної задачі досліджуємо нелінійне деформування зернистого композитного матеріалу, у якого модулі об'ємного стиску включень K_1 та матриці K_2 є сталими, а модулі зсуву μ_v ($v=1,2$) задаються функціями

$$\mu_1(\langle \varepsilon^1 \rangle) = \begin{cases} \mu_{01}, & J_\varepsilon^1 < \frac{k_1}{2\mu_{01}}; \\ \mu_{01} - \mu'_1 \left(1 - \frac{k_1}{2J_\varepsilon^1} \right), & J_\varepsilon^1 \geq \frac{k_1}{2\mu_{01}}; \end{cases} \quad (14)$$

$$\mu_2(\langle \varepsilon^2 \rangle) = \begin{cases} \mu_{02}, & J_\varepsilon^2 < \frac{k_2}{2\mu_{02}}; \\ \mu'_2 + \left(1 - \frac{\mu'_2}{\mu_{02}} \right) \frac{k_2}{2J_\varepsilon^2}, & J_\varepsilon^2 \geq \frac{k_2}{2\mu_{02}}, \end{cases} \quad (15)$$

де μ_{0v} , μ'_v , $k_v = \sigma_{0v} \sqrt{\frac{2}{3}}$ – сталі включень (при $v=1$) та матриці (при $v=2$), σ_{0v} – межа їх плинності, $J_\varepsilon^v = (\langle \varepsilon_{pq}^v \rangle' \langle \varepsilon_{pq}^v \rangle')^{1/2}$, $\langle \varepsilon_{pq}^v \rangle'$ – девіатор середніх у включеннях або матриці деформацій.

При виконанні розрахунків в якості компонентів взяті відповідно включення з органічного скла, які мають діаграму нелінійного деформування (14) із сталими [1, 4 – 6]

$$K_1 = 27,78 \text{ ГПа}; \quad \mu_{01} = 20,83 \text{ ГПа};$$

$$\mu'_1 = 0,184 \text{ ГПа}; \quad \sigma_{01} = 1,8 \text{ ГПа}, \quad (16)$$

об'ємним вмістом $c_1 = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 1,0$

та епоксидна матриця, яке має діаграму лінійного зміцнення (15) із сталими [1, 4 – 6]

$$K_2 = 3,33 \text{ ГПа}; \quad \mu_{02} = 1,11 \text{ ГПа};$$

$$\mu'_2 = 0,02 \text{ ГПа}; \quad \sigma_{02} = 0,12 \text{ ГПа}. \quad (17)$$

На основі отриманих залежностей було досліджено ефективні діаграми нелінійного деформування зернистого композитного матеріалу при різних об'ємних концентраціях компонентів у разі заданих макропараметрів.

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle \neq 0; \quad \langle \sigma_{22} \rangle = \langle \sigma_{33} \rangle = 0. \quad (18)$$

На рис. 2 наведено графіки залежностей макронапруження $\langle \sigma_{11} \rangle / \mu_2$ від макродеформації $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ для зернистого композита при різних

об'ємних вмістах компонентів c_1 . Як бачимо, фізична нелінійність компонентів матеріалу істотно впливає на характер діаграм деформування при всіх значеннях об'ємного вмісту включень, криві залежностей мають параболический характер.

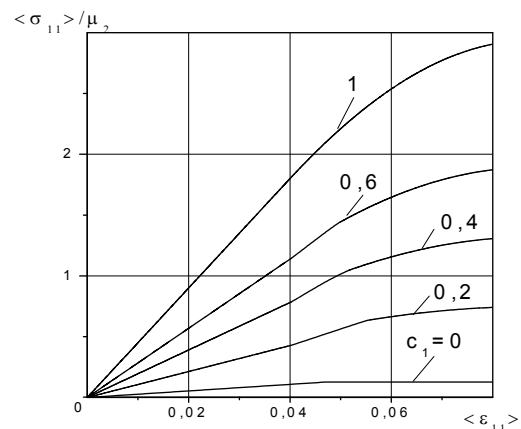


Рис. 2. Залежності макронапруження $\langle \sigma_{11} \rangle / \mu_2$ від макродеформації $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ для зернистого композита при різних об'ємних вмістах компонентів c_1 .

Список використаних джерел

1. Вулф Б.К. Авиационное материаловедение / Б.К. Вулф, К.П. Ромадин – Москва: Машиностроение, 1967. – 422 с.
2. Хорошун Л.П. Методы теории случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микронеоднородных сред / Л.П. Хорошун // Прикладная механика. – 1978. – 14, № 2. – С. 3-17.
3. Хорошун Л.П. Метод условных моментов в задачах механики композитных материалов / Л.П. Хорошун // Прикладная механика. – 1987. – 23, № 10. – С. 100-108.
4. Хорошун Л.П. Механика композитов: В 12-х т. / под общ. ред. А.Н.Гузя / Т.3 Статистическая механика и эффективные свойства материалов. / Л.П. Хорошун, Б.П. Маслов, Е.Н. Шикла, Л.В. Назаренко. – Киев: Наукова думка, 1993. – 390 с.
5. Гузь А.Н. Механика композитных материалов и элементов конструкций В 3-х т. / под общ. ред. А.Н.Гузя / Т. 1. Механика материалов. / А.Н. Гузь, Л.П. Хорошун, Г.А. Ванин и др. – Киев: Наукова думка, 1982. – 368 с.
6. Креггерс А.Ф. Математическое моделирование термического расширения пространственно армированных композитов / А.Ф. Креггерс // Механика композитных материалов. – 1988. – № 3. С. 433-441.

References

1. VULF B.K., ROMADIN K.P. (1967) *Aviatsionnoye materialovedeniye* Moskva: Mashinostroyeniye.
2. KHOROSHUN L.P. (1978) *Metodyi teorii sluchaynykh funktsiy v zadachah o makroskopicheskikh svoystvakh mkroneodnorodnykh sred. Prikladnaya mehanika.* 14 (2). p. 3-17.
3. KHOROSHUN L.P. *Metod uslovnykh momentov v zadachah mehaniki kompozitnykh materialov. Prikladnaya mehanika.* 23 (10). p. 100-108.
4. KHOROSHUN L.P., MASLOV B.P., SHIKULA E.N., NAZARENKO L.V. (1993) *Mehanika kompozitov. (Vols. 1-12). Vol. 3. Statisticheskaya mehanika i effektivnyie svoystva materialov.* Kiev: Naukova dumka.
5. GUZ A.N., KHOROSHUN L.P., MIHAYLOVA M.I., BABICH D.V., SHIKULA E.N. (2003) *Mehanika kompozitov. (Vols. 1-12). Vol. 12. Prikladnyie issledovaniya.* K: «A.S.K.»
6. KREGERS A.F. (1988) *Matematicheskoe modelirovanie termicheskogo rasshireniya prostranstvenno armirovannykh kompozitov Mehanika kompozitnykh materialov.* 3. P. 433-441.

Надійшла до редколегії 25.08.23

УДК 539.3

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.31>

Юрчук В.М.¹, к.ф.-м.н., ст.н.с.
Сінчило С.В.², к.ф.-м.н., ст.н.с.

V.M.Yurchuk¹, Ph.D., Senior Researcher Worker.
S.V.Sinchilo², Ph.D., Senior Researcher Worker.

Крутильні пружні хвилі. Деякі аспекти нелінійного аналізу

Torsional elastic waves. Some aspects of nonlinear analysis

¹Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН
України, 03057, м. Київ, вул. Петра Нестерова, 3
e-mail: vasil_2008@ukr.net

¹Timoshenko Institute of Mechanics, NAS of Ukraine,
3, Petr Nesterov str., Kyiv 03057
e-mail: vasil_2008@ukr.net

²Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН
України, 03057, м. Київ, вул. Петра Нестерова, 3
e-mail: rheol@inmech.kiev.ua

²Timoshenko Institute of Mechanics, NAS of Ukraine,
3, Petro Nesterov str., Kyiv 03057
e-mail: rheol@inmech.kiev.ua

Проаналізовано особливості використання граничних умов у нелінійній задачі поширення крутильної хвилі для середовища, що пружно деформується, та має зовнішню межу. Коротко описано постановку та хвильовий аналіз у лінійному (класичному) підході, оскільки лінійний розв'язок використовується в роботі як перше наближення у нелінійному підході. Першою особливістю для крутильної хвилі є суттєве ускладнення при нелінійному підході граничних умов через різницю між формою границі до і після деформації (при лінійному підході форма границі не змінюється). Другою особливістю є значне ускладнення математичного представлення граничних умов за рахунок появи додаткових нелінійних членів. Для крутильної хвилі виявлено, що використання умови відсутності напружень на граничній поверхні (припущення вільної межі) може бути не зовсім коректним.

Ключові слова: граничні умови; нелінійна крутильна хвиля; п'ятиконстантний потенціал Мурнагана; особливості аналізу граничних умов.

The features of the use of boundary conditions in the nonlinear problem of torsional wave propagation for an elastically deformable medium with an external boundary are analyzed. The formulation and wave analysis in the linear (classical) approach are briefly described, since the linear solution is used in the work as a first approximation in the nonlinear approach. The first feature for a torsional wave is a significant complication in the nonlinear approach of the boundary conditions due to the difference between the shape of the boundary before and after the deformation (in the linear approach, the shape of the boundary does not change). The second feature is the significant complication of the mathematical representation of the boundary conditions due to the appearance of additional nonlinear terms. For a torsional wave, it was found that the use of the condition of absence of stresses on the boundary surface (assumption of a free boundary) may not be completely correct.

Keywords: boundary conditions; nonlinear torsional wave; five-constant Murnaghan potential; peculiarities of analysis of boundary conditions.

Статтю представив член-кореспондент НАН України Жук Я.О.

1. Вступ

Предметом проведеного дослідження є граничні умови, які необхідно задовольняти при аналізі поширення крутильної хвилі в пружних матеріалах у рамках лінійного та нелінійного підходів. Історичний досвід аналізу пружних хвиль

у матеріалах з-поміж спостережених багатьох загальних важливих фактів [1 - 4] містить два, які є суттєвими для проведеного дослідження. Перший полягає у тому, що постановка задачі і отриманий при лінійному підході розв'язок складають, як правило, основу в реалізації нелінійного підходу. Другий стосується хронології аналізу

нелінійних хвиль у матеріалах – спочатку досліджувалися вільні (біжучі) хвилі, які за означенням поширюються в пружних середовищах (матеріалах), що не мають внутрішніх чи зовнішніх границь, і лише згодом вивчалися хвилі в пружних середовищах з границями. Тому так сталося, що нелінійні пружні хвилі в середовищах з границями вивчені менше.

Нелінійний підхід починається з вибору нелінійної моделі деформування. Найбільш поширеною моделлю є п'ятиконстантна модель Мернагана [3].

2. Необхідна інформація щодо нелінійної моделі Мернагана.

У даному дослідженні модель Мернагана має наступний потенціал

$$W = \frac{1}{2} \lambda (\varepsilon_{mm})^2 + \mu (\varepsilon_{ik})^2 + \frac{1}{3} A \varepsilon_{ik} \varepsilon_{im} \varepsilon_{km} + B (\varepsilon_{ik})^2 \varepsilon_{mm} + \frac{1}{3} C (\varepsilon_{mm})^3 \quad (1)$$

де λ, μ – пружні константи другого порядку (константи Ляме); A, B, C – пружні константи третього порядку (константи Мернагана). В потенціалі (1) використано записаний через вектор деформації $\vec{u} = \{u_k\}$ нелінійний тензор деформації Коші – Гріна у вигляді

$$\varepsilon_{nm} = \frac{1}{2} (u_{n,m} + u_{m,n} + u_{n,i} u_{i,m}) \quad (2)$$

Розглянемо необхідну інформація щодо класичної задачі теорії пружності про поширення крутильної хвилі.

3. Класична крутильна хвиля.

Гармонічна крутильна хвиля збуджується імпульсом $u_g(t) = u_g^0 e^{i\omega t}$ у напрямку осі симетрії Oz кругового поперечного перерізу циліндра $z = 0$. В циліндрі виникає гармонічна у часі крутильна хвиля, яка поширюється вздовж його осі. Для лінійної крутильної хвилі в пружному циліндрі потрібно наступне: циліндричні координати (r, ϑ, z) , деформований стан є осесиметричним і тому не залежить від координати, а також відсутність радіальних і осьових зміщення $u_r(r, z, t) = u_z(r, z, t) = 0$ (ці ж особливості зберігаються і при нелінійному описі). Тоді система з трьох рівнянь руху циліндра спрощується до вигляду

$$u_{g,rr} + (1/r) u_{g,r} - (1/r^2) u_g + u_{g,zz} - (1/v_T^2) u_{g,tt} = 0. \quad (3)$$

Припустимо, що колове зміщення u_θ є гармонічним у часі і просторі

$$u_g(r, z, t) = \tilde{u}_g(r) e^{i(k_z z - \omega t)} \quad (4)$$

Тоді розв'язок (4) є гармонічною крутильною хвилею, оскільки кожен поперечний переріз циліндра здійснює гармонічне коливання у коловому напрямку з заданою частотою ω у часі і за просторовою координатою z рухається хвиля з довжиною $\lambda = (2\pi/k_z)$ та хвильовим числом k_z .

З постановки задачі випливає, що необхідні компоненти тензорів напружень та деформацій є такими:

$$\sigma_{rr} = 2\mu \varepsilon_{rr} + \lambda e = 0; \quad \sigma_{rg} = 2\mu \varepsilon_{rg}; \quad \sigma_{rz} = 2\mu \varepsilon_{rz} = 0; \\ \varepsilon_{rr} = 0; \quad \varepsilon_{rg} = (1/2) [u_{g,r} - (1/r) u_g]; \quad \varepsilon_{rz} = 0; \quad e = 0.$$

Далі амплітуда хвилі, що залежить від радіуса, визначається з рівняння

$$u_{g,rr} + (1/r) u_{g,r} + [k_z^2 - k_T^2 - (1/r^2)] u_g^0 = 0. \quad (5)$$

Розв'язок рівняння (5) виражається через функцію Бесселя 1-го роду і 1-го індексу $\tilde{u}(r) = \tilde{u}^0 J_1(\beta r)$, $\beta = \sqrt{k_z^2 - k_T^2}$ і розв'язок (4) у вигляді крутильної хвилі набуває вигляду

$$u_g(r, z, t) = \tilde{u}_g^0 J_1(\beta r) e^{i(k_z z - \omega t)}. \quad (6)$$

Невідоме хвильове число k_z і відповідна швидкість $v_z = (\omega/k_z)$ визначаються з умови відсутності напружень на боковій поверхні циліндра $r = r^0$

$$\sigma_{rr}(r^0, z, t) = \sigma_{rg}(r^0, z, t) = \sigma_{rz}(r^0, z, t) = 0. \quad (7)$$

При підстановці розв'язку (6) у граничну умову $\sigma_{rg}(r^0, z, t) = 0$ отримують трансцендентне рівняння $\beta r^0 J_0(\beta r^0) = 2 J_1(\beta r^0)$ для знаходження хвильового числа k_z .

4. Нелінійний підхід до аналізу крутильної хвилі.

Процедура отримання основного нелінійного хвильового рівняння полягає у використанні циліндричних координат $\theta^1 = r$, $\theta^2 = \vartheta$, $\theta^3 = z$ і виборі відповідної конфігурації. Такою конфігурацією є осесиметрична конфігурація з віссю симетрії Oz , яка залежить від координат r, z і не залежить від координати ϑ .

Із класичного рівняння руху $\nabla_k [\sigma^k_i (\delta_i^n + \nabla_i u^n)] = \rho \ddot{u}^i$ і визначальних рівнянь, які відповідають

п'ятиконстантній моделі Мернагана, отримується нове скорочене нелінійне хвильове рівняння [2]

$$(v_T)^2 \left[Lu_g \equiv \left(u_{g,rr} + (1/r)u_{g,r} - (1/r^2)u_g + u_{g,zz} \right) \right] - u_{g,rr} = \frac{B}{2\mu} \left[(u_{g,r})^2 + \frac{1}{r}u_{g,r}u_g + \frac{2}{r^2}u_g^2 + (u_{g,z})^2 \right] Lu_g. \quad (8)$$

Відзначимо необхідні властивості рівняння (8): у лівій частині воно повністю співпадає з лінійним хвильовим рівнянням для крутильної хвилі [5], у правій частині містить доданки, які є кубічно нелінійними щодо зміщення і тому крутильні хвилі є виключно кубічно нелінійними в рамках реалізованого підходу. Наступною особливістю рівняння (8) є те, що нелінійна частина цього рівняння включає лише одну з трьох пружних констант третього порядку – B .

У нелінійній теорії пружності розрізняють два типи нелінійностей в основних рівняннях – геометричну і фізичну. Геометрична виникає, коли в записі тензора деформації враховуються квадратично нелінійні доданки, тобто доданки з множниками у вигляді пружних констант Ляме μ , λ . З хвильового рівняння (8) і конститутивних рівнянь, випливає, що такі доданки відсутні. Присутні лише нелінійні доданки з множниками у вигляді пружних констант Мернагана A , B , що свідчить про фізичну нелінійність.

Наостанок, можна застосувати до аналізу наближеного розв'язку рівняння (8) метод обмеження на градієнт зміщення [6].

Розв'язок рівняння (8) представляється у вигляді хвилі з невідомим хвильовим числом і невідомою амплітудою

$$u_g(r, z, t) = \tilde{u}_g(r) e^{i(k_z z - \omega t)}. \quad (9)$$

У результаті нелінійне хвильове рівняння (8) перетворюється на якомусь лінійне рівняння зі змінною швидкістю хвилі v_K

$$u_{g,rr} + (1/r)u_{g,r} + \left((k_z)^2 - (k_K)^2 - (1/r^2) \right) u_g = 0, \quad (10)$$

де

$$v_K = c_T \sqrt{1 - \frac{B}{2\mu} \left[(u_{g,r})^2 + \frac{1}{r}u_{g,r}u_g + \frac{2}{r^2}u_g^2 + (u_{g,z})^2 \right]}, \quad k_K = (\omega/v_K), \quad (11)$$

За методом обмеження на градієнт зміщення, вводять обмеження на змінну швидкість (11)

$$\frac{B}{2\mu} M(u_g) \ll 1, \quad M(u_g) = \left[(u_{g,r})^2 + \frac{1}{r}u_{g,r}u_g + \frac{2}{r^2}u_g^2 + (u_{g,z})^2 \right]. \quad (12)$$

Використаємо лінійний розв'язку (6) у записі через функцію Бесселя

$$u_g(r, z, t) = \tilde{u}^o J_1(\beta_K r) e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad \beta_K = \sqrt{k_K^2 - k_z^2}. \quad (13)$$

Далі метод використовує ще одне обмеження

$$\delta = r \frac{B k_z^2}{4\mu} M(u_g) \quad (14)$$

і наближене представлення функції Бесселя $J_1(\sqrt{k_K^2 - k_z^2} r)$, в результаті чого з (13) отримується наближений розв'язок у такому вигляді

$$u_g(r, z, t) = \tilde{u}_g^o e^{i(k_z z - \omega t)} \left\{ J_1\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) - r\left(\tilde{u}_g^o\right)^3 \frac{B k_T^2}{8\mu} \times \right. \\ \times e^{2i(k_z z - \omega t)} \times \left[r^2(k_T^2 - k_z^2) + r\sqrt{k_T^2 - k_z^2} + 2 - (k_z)^2 \right] \times \\ \left. \times \left[J_0\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) - J_2\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \right] \left[J_1\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \right]^2 \right\}. \quad (15)$$

В аналізі крутильної хвилі відбуваються два види спотворення. Одне показує еволюцію хвилі при зміні відстані від центру до поверхні циліндра (додаток містить r як множник). Друге спотворення пов'язане з тим, що на поверхні циліндра лінійна гармонічна хвиля отримує постійну добавку у вигляді третьої гармоніки, тобто, хвиля спотворюється до вигляду модульованої хвилі, але ця добавка не змінюється з відстанню поширення хвилі в осьовому напрямку.

5. Граничні умови

Для граничних умов в нелінійній задачі про крутильні хвилі, визначимо, як і в лінійній задачі, хвильове число k_z і швидкість хвилі $v_z = (\omega/k_z)$ з умови відсутності напружень на бічній поверхні циліндра $r = r^o$

$$\sigma_{rr}(r^o, z, t) = \sigma_{r\theta}(r^o, z, t) = \sigma_{rz}(r^o, z, t) = 0. \quad (16)$$

Далі слід вираховувати напруження з (16) через деформації і зміщення. Формула для нормального напруження σ_{rr} через зміщення не показана нижче з тих міркувань, що в ній немає доданків першого порядку, але є доданки другого і четвертого порядків. Формули для дотичних напружень є такими:

$$\sigma_{r\theta} = \mu \left(u_{g,1} + \frac{u_g}{r} \right) + \left(\frac{1}{12}A + \frac{1}{2}B \right) (u_{g,r})^3 - \\ - \left(\frac{1}{4}A - B \right) \frac{u_g}{r} (u_{g,z})^2 + \frac{1}{2}B \left[u_{g,r} (u_{g,z})^2 + \frac{u_g}{r} (u_{g,r})^2 \right]$$

$$\begin{aligned}\sigma_{rz} = & \left(2\mu + \frac{1}{12}A\right)u_{g,r}u_{g,z} + \left(2\mu - \frac{1}{12}A\right)\frac{1}{r}u_g u_{g,z} - \\ & - \frac{1}{6}A\left(\frac{1}{r^2}(u_g)^2 u_{g,r}u_{g,z} - \frac{1}{r^3}(u_g)^3 u_{g,z}\right) + \\ & + \frac{1}{2}B\left[\left((u_{g,r})^3 u_{g,z} - \frac{1}{r}u_g u_{g,z}(u_{g,r})^2\right) + \right. \\ & \left. + \left(u_{g,r}(u_{g,z})^3 - \frac{1}{r}u_g(u_{g,z})^3\right)\right].\end{aligned}\quad (18)$$

Формула (17) включає лінійну частину, яка відповідає лінійному класичному підходу, і чотири доданки, які є кубічно нелінійними. Формула (18) включає два доданки другого порядку нелінійності та шість доданків четвертого порядку.

Всі три напруження на поверхні циліндра включають нелінійні доданки і не можуть прирівнюватись до нуля, так, як у такому випадку для знаходження хвильового числа задаються три рівняння. Тоді задача стає переозначеною.

Виникає питання про перехід від лінійної задачі до спорідненої з нею нелінійної. У лінійній впливає, що два напруження з граничних умов є нульовими завжди і всюди.

Тому раціонально зберегти в граничних умовах одну граничну умову щодо дотичного напруження σ_{rg} , характерного для крутильної хвилі. Щодо нормального σ_{rr} та дотичного σ_{rz} напружень на поверхні циліндра в нелінійній постановці можна вважати, що вони не будуть нульовими і можуть бути вираховані при відомому хвильовому числі.

Тому, поява в задачі нормального напруження σ_{rr} , яке лише нелінійно залежить від зміщення u_g , узгоджується з результатами відповідної задачі статки.

Загальні висновки.

Особливістю для крутильної хвилі є ускладнення в нелінійному підході граничних умов внаслідок відмінності між формою границі до і після деформування. В лінійному підході форма границі не змінюється. Також значне ускладнення математичного запису граничних умов через появу додаткових нелінійних доданків.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано у цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

Список використаних джерел

1. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах / И.А. Викторов. – Москва: Наука, 1981. – 288 с.
2. *Гузь А.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 2. Волны в частичноограниченных телах / А.Гузь. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 505 с.
3. *Зарембо Л.К.* Введение в нелинейную акустику / Л.К.Зарембо, В.А. Красильников. – Москва: Наука, 1966. – 519 с.
4. *Крылов В.В.* Введение в физическую акустику / В.В. Крылов, В.А. Красильников– Москва: Наука, 1986. – 432 с.
5. *Рушицький Я.Я.* Пружна крутильна хвиля і відповідне нелінійне хвильове рівняння / Я.Я. Рушицький // Доп. НАН України. – 2022. – № 2. – С. 39 – 45.
6. *Rushchitsky J.J.* Effect of the Third Approximation in the Analysis of the Evolution of a Nonlinear Elastic P-wave. Part 1/ J.J. Rushchitsky, J.J., V.M. Yurchuk // Int. Appl. Mech. – 2020. – 56, N 5. – P. 581 – 589

References

1. *VIKTOROV, I. A.* (1981) *Zvukovyye poverhnostny volnyi v tverdyih telah*. Moscow: Science.
2. *GUZ, A.* (2016) *Uprugie volnyi v telah s nachalnymi (ostatochnymi) napryazheniyami: v 2-h chastyakh. Ch. 1. Obschie voprosy. Volnyi v beskonechnykh telah i poverhnostnyie volnyi v nelineynuyu akustiku*. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing.
3. *ZAREMBO, L.K., KRASILNIKOV, V.A.* (1966) *Vvedenie v nelineynuyu akustiku*. Moscow: Nauka.
4. *KRYLOV, V.V., KRASILNIKOV, V.A.* (1986) *Vvedenie v fizicheskuyu akustiku*. Moscow: Nauka.
5. *RUSCHITSKY, J.J.* (2022) *Pruzhna krutylna khvylya i vidpovidne nelineiine khvylove rivniannia*. In *Dop. NAN of Ukraine*. No. 2. pp. 39 - 45
6. *RUSHCHITSKY, J.J., YURCHUK, V.M.* (2020) *Effect of the Third Approximation in the Analysis of the Evolution of a Nonlinear Elastic P-wave. Part 1* In *Int. Appl. Mech.* 56, N 5. pp. 581 – 589

Надійшла до редколегії 15.08.2023

УДК 539.3

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.32>

Яковенко Н.Д.¹, к.ф.-м.н.
Якименко С.М.², к.ф.-м.н.

¹Yakovenko N.D., Cand. Sci. (Phys.-Math.),
²Yakymenko S.M., Cand. Sci. (Phys.-Math.)

Дослідження напружено-деформованого стану циліндра з мікроструктурними перетвореннями за умов імпульсного навантаження

Investigation of the stress-strain state of a cylinder with microstructural transformations under pulse loading

¹Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, 03057, м. Київ, Україна, вул. Нестерова, 3, e-mail: ndoksenchuk@gmail.com

¹S. P. Timoshenko Institute of mechanics of National Academy of Sciences of Ukraine, 03057, Kyiv, Ukraine, 3, Nesterova e-mail: ndoksenchuk@gmail.com

²Центральноукраїнський національний технічний університет, м. Кропивницький, Університетський проспект, 8, Україна, e-mail: yasm@i.ua

²Central Ukrainian National Technical University, Kropyvnytskyi, Ukraine, 25006, Prospekt Universytetskyi, 8, e-mail: yasm@i.ua

Розглядається осесиметрична задача про імпульсне термомеханічне навантаження сталевого циліндра. Враховуються об'ємні деформації, які супроводжують мікроструктурні перетворення мартенситного типу при охолодженні тіл, а також залежність непружних характеристик матеріалу від фазового складу. Термомеханічна поведінка ізотропного матеріалу описується моделлю течії Боднера-Партома. Задача розв'язується чисельно методом покрокового неявного інтегрування за часом, ітераційним методом та методом скінченних елементів. За допомогою чисельного моделювання проводиться дослідження напружено-деформованого стану за умов врахування залежності параметрів моделі від мікроструктури матеріалу. Встановлено, що мікроструктурні перетворення суттєво зменшують залишкові деформації та сприяють появі стискальних напружень. Отримані результати можуть бути використані в інженерних розрахунках на міцність елементів конструкцій, а також параметрів технологій поверхневого зміцнення.

Ключові слова: імпульсне навантаження, модель течії, мікроструктурні перетворення

Axisymmetric dynamic problem of thermomechanical loading of a steel cylinder is considered. Volume strain caused by the microstructural transformations of the martensitic type under cooling solids as well as into consideration and dependence inelastic characteristics of material for multiphase state are taken. The thermomechanical nonlinear behavior of an isotropic material is described by unified flow model generalized for the case of multiphase material state. The problem is solved numerically by the implicit step-by-step time integration method, by the iterative method and by the finite element method. The investigation of the stress-strain state of an inelastic material with regard for the dependence of parameters of the flow model on the phase composition of a material is carried out by using of numerical simulation. We established that microstructural transformations significantly reduce residual inelastic strain and promote the appearance of compressive stresses. The results obtained in the work can be used in calculations of parameters of surface hardening technologies.

Key words: pulse loading, model of flow, microstructural transformations

Статтю представив член-кореспондент НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Чисельне моделювання динамічних термомеханічних процесів у циліндричних непружних тілах з мікроструктурними перетвореннями (далі МСП) за умов імпульсного опромінення є досить вагомим під час

проектування елементів конструкцій та викликає значний теоретичний і практичний інтерес для аналізу та оцінки міцності деталей [1]. Врахування МСП важливе для сталей, в яких відбувається найбільш суттєві зміни вільних об'ємів та непружних характеристик.

У даній роботі за допомогою скінченно-елементної методики досліджується залишковий напружено-деформівний стан за умов термо-механічного імпульсного навантаження циліндра з мікроструктурними перетвореннями.

Постановка задачі

Розглядається динамічна осесиметрична зв'язана задача термомеханіки для кругового циліндра. В циліндричній системі координат $Orz\phi$ геометричні розміри задаються наступним чином: $0 < z < L$, $0 < r < R$. За умов термомеханічного навантаження на тіло одночасно діють термічне і механічне навантаження, що супроводжуються взаємодією парціальних термомеханічних процесів.

Постановка задачі включає – рівняння Коші

$$\begin{aligned}\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{u_r}{r}, \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right),\end{aligned}\quad (1)$$

– рівняння руху

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} &= \rho \ddot{u}_{rr}, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho \ddot{u}_{zz}.\end{aligned}\quad (2)$$

В рівняннях (1) – (2) прийнято наступні позначення: u_r і u_z – компоненти вектора переміщень; ε_{rr} , ε_{zz} , ε_{rz} і $\varepsilon_{\phi\phi}$ – компоненти тензора деформації; σ_{rr} , σ_{zz} , σ_{rz} і $\sigma_{\phi\phi}$ – компоненти тензора напружень; ρ – густина матеріалу.

Також до постановки задачі входить рівняння теплопровідності, яке має вид

$$\begin{aligned}c_V \dot{\theta} + 3\alpha \theta K_V (\dot{\varepsilon}_{kk} - 3\alpha \dot{\theta}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rk \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - D' = r_s.\end{aligned}\quad (3)$$

Тут θ – температура; α , c_V і k – коефіцієнти лінійного теплового розширення, теплоємності при сталому об'ємі і теплопровідності відповідно; K_V – модуль об'ємного стиску; $\dot{\varepsilon}_{kk} = \dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{zz} + \dot{\varepsilon}_{\phi\phi}$; D' – швидкість дисипації; θ – абсолютна температура; c_V , k – об'ємна теплоємність та коефіцієнт теплопровідності; r_s – потужність заданих внутрішніх джерел тепла.

У рівнянні теплопровідності (3) третій доданок визначає ефект зміни об'єму,

зумовлений змінами температури та фазового складу матеріалу, четвертий доданок – ефект прихованої теплоти, а п'ятий – швидкість дисипації механічної енергії.

Початкові умови задачі наступні

$$u_r = \dot{u}_r = 0; \quad u_z = \dot{u}_z = 0; \quad \theta = \theta_0, \quad t = 0.$$

Граничні умови на торці $z = 0$ мають вид

$$\begin{aligned}q &= \begin{cases} q_0 \sin \frac{\pi}{t_q} t, & t \leq t_q, \\ 0, & t > t_q, \end{cases} \\ \sigma_{zz} &= \begin{cases} -p_0 \sin \frac{\pi}{t_\sigma} t, & t \leq t_\sigma, \\ 0, & t > t_\sigma, \end{cases}\end{aligned}$$

де θ_0 – початкова температура; q_0 і p_0 – задані параметри теплового та механічного навантаження відповідно; t_q , t_σ – часові параметри навантаження – терміни дії імпульсів, між якими приймається співвідношення $t_\sigma = 2t_q$. Вся інша поверхня циліндра вважається теплоізолюваною і вільною від навантажень.

Для моделювання нелінійної термомеханічної поведінки при швидкісному деформуванні ізотропного матеріалу в статті використана модель течії Боднера–Партома, узагальнена на випадок багатозфазового складу матеріалу. Для врахування впливу поточного фазового складу на непружні характеристики для визначення коефіцієнтів моделі течії, що відповідають за границю текучості та тимчасовий опір матеріалу, було використано лінійне правило сумішей. Основні рівняння моделі Боднера – Партома представлено в роботі [2].

Мікроструктурні перетворення враховуються через зміни об'єму та залежність границі текучості і тимчасового опору від фазового складу матеріалу.

Зміна об'єму матеріалу визначається під час фазових перетворень термотраснсформаційною деформацією ε_{ij}^{0ph} [3]

$$\varepsilon_{ij}^{0ph}(\theta, \theta_r, C^\xi) = \frac{V^\xi(\theta)C^\xi(\theta) - V^\xi(\theta_r)C^\xi(\theta_r)}{3V^\xi(\theta_r)C^\xi(\theta_r)} \delta_{ij}.$$

Тут C^ξ – концентрація фази ξ , θ – поточна температура; $V^\xi(\theta)$ – питомий об'єм фази ξ для температури θ .

Метод розв'язування

Задача, що розглядається, є нелінійною та розв'язується чисельно методом покровоного

інтегрування за часом, ітераційного методу та методу скінченних елементів. Алгоритм розв'язування задачі викладено в роботі [4].

Результати розрахунків

Розрахунки проводились за наступних параметрів: $L = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $R = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$. Параметр теплового навантаження дорівнює $q_0 = 2 \cdot 10^8 \text{ кВт/м}^2$, а параметр механічного навантаження – $p_0 = 1 \text{ ГПа}$. Тривалість теплового та механічного імпульсів відповідно рівна $t = 10^{-7} \text{ с}$ та $t = 2 \cdot 10^{-7} \text{ с}$. За час формування залишкового стану приймається $t = 5 \cdot 10^{-7} \text{ с}$. Початкова температура циліндра θ_0 дорівнює 20°C . Початкова структура сталі наступна: $C^a = 0$, $C^b = 0,79$, $C^{f,p} = 0,11$, $C^m = 0,10$, де a – аустеніт, b – бейніт, f – ферит, p – перліт, m – мартенсит. Має місце швидкий розігрів (до 1300°C).

На рис. 1 зображені залишкові просторові розподіли інтенсивності непружної деформації ϵ_i^{in} , максимальне значення якої у смугі $r \leq 4,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}$, $z \leq 1 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ за умов комбінованого термомеханічного навантаження дорівнює $\epsilon_i^{in \max} = 0,06$.

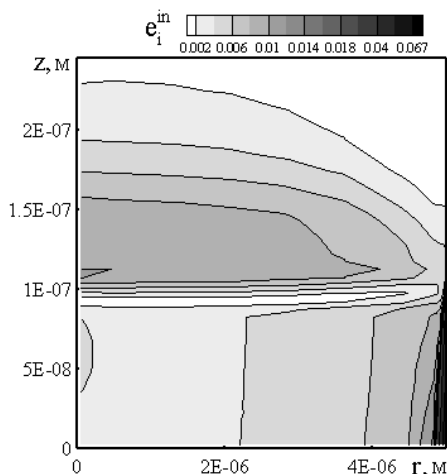


Рис. 1 Залишкові просторові розподіли

інтенсивності непружної деформації ϵ_i^{in} за умов комбінованого термомеханічного навантаження

Для порівняння на рис. 2 наведено аналогічні розподіли лише за умов імпульсного термічного навантаження. Видно, що в тій же смугі інтенсивність непружної деформації значно менша $\epsilon_i^{in \max} = 0,01$. Це пояснюється тим, що за комбінованого термомеханічного навантаження

приторцева область циліндра суттєво змінюється за рахунок механічного навантаження в умовах її розігріву термічним імпульсом.

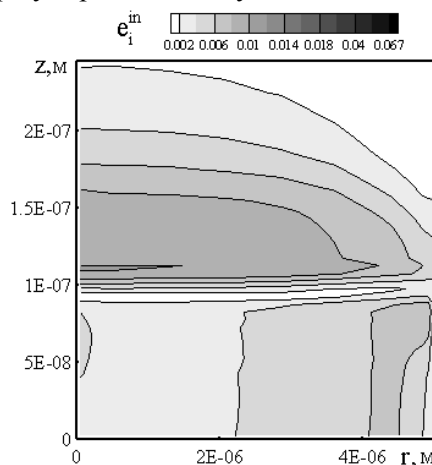


Рис. 2 Залишкові просторові розподіли інтенсивності непружної деформації за умов термічного навантаження

На рис. 3 та рис. 4 ілюструються відповідно залишкові осьові розподіли компоненти радіальних напружень σ_{rr} та інтенсивності непружної деформації ϵ_i^{in} . Тут суцільна лінія –

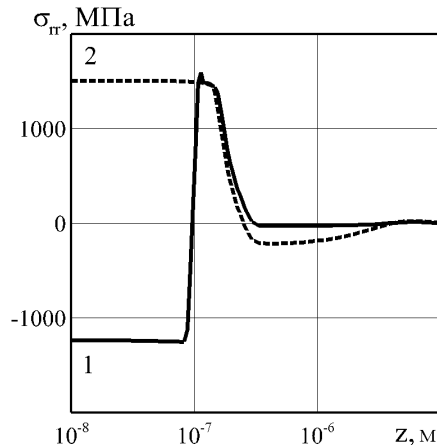


Рис. 3 Залишкові осьові розподіли компоненти радіальних напружень σ_{rr} за умов комбінованого термомеханічного навантаження

розрахунок із врахуванням залежності непружних характеристик від фазового складу матеріалу, штрихова лінія – розрахунок без врахування мікроструктурних перетворень.

Порівняння штрихової і суцільної кривих свідчить про те, що врахування МСП істотно впливає на рівень і знак напружень, але не впливає на товщину мартенситного шару, який визначається термічними факторами.

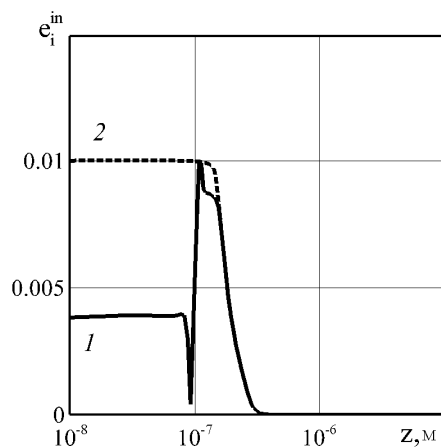


Рис. 4 Залишкові осеві розподіли інтенсивності
непружної деформації e_i^{in} за умов
термомеханічного навантаження

На рисунках 3 та 4 бачимо, що рівень залишкових радіальних напружень та інтенсивність непружної деформації за умов врахування МСП становить відповідно

$\sigma_{rr} = -1440 \text{ МПа}$, $e_i^{in} \approx 0,003$, а без врахування МСП – $\sigma_{rr} = 1500 \text{ МПа}$, $e_i^{in} \approx 0,01$.

Трансформація напружень із розтягувальних в стискальні пояснюється тим, що у фазі мартенситу сталь має більший питомий об'єм ніж у інших фазах [3]. Також на зміну знаку залишкових напружень впливає врахування залежності параметрів моделі, що відповідають за непружні характеристики, від фазового складу матеріалу. Даний ефект носить не лише кількісний, але і якісний характер: поява залишкових стискальних напружень сприяє поверхневого зміцненню матеріалу.

Параметричний аналіз розв'язку задачі дозволяє управляти залишковими напруженнями та мікроструктурою за допомогою вибору тривалості імпульсу та парціальними вкладками механічного та теплового потоку в ньому. Результати роботи можуть бути використані в інженерних розрахунках на міцність елементів конструкцій, деталей машин та механізмів, а також формування елементів конструкцій.

Список використаних джерел

1. Yilbas B. S. Laser-shock processing of steels [Електронний ресурс] / B. S. Yilbas, S. Z. Shuja, A. Arif, M. A. Gondal // Journal of Materials Processing Technology. – 2003. – Vol. 135. – P. 6–17. – Режим доступу до журн.: [https://doi.org/10.1016/S0924-0136\(02\)00813-0](https://doi.org/10.1016/S0924-0136(02)00813-0)
2. Senchenkov I. K. Modeling of a nonisothermal flow with regard for the dependence of plastic properties on the microstructure of a material [Електронний ресурс] / I. K. Senchenkov, N. D. Oksenchuk // J. Math. Sci. – 2013. – V. 190, N 6. – P. 796 – 803. – Режим доступу до журн.: <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1289-6>
3. Leblond J. B. A theoretical and numerical approach to the plastic behavior of steel during phase transformation. – I. Derivation of general relations [Електронний ресурс] / J. B. Leblond, G. Mottet, J. C. Devaux // J. Mech. Phys. Solids. – 1986. – Vol. 34, № 4. – P. 395–409. – Режим дост. до журн.: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(86\)90009-8](https://doi.org/10.1016/0022-5096(86)90009-8)
4. Zhuk Y.A. Axisymmetric dynamic problem of coupled thermoviscoplasticity [Електрон. ресурс] / Y.A. Zhuk, I.K. Senchenkov, V.I. Kozlov, G. A. Tabieva // Int. Appl. Mech. – 2001. 37, No.10. – P. 1311–1317. – Режим доступу до журн.: <https://doi.org/10.1023/A:1013976219144>

References

1. YILBAS, B. S., SHUJA, S. Z., ARIF, A., GONDAL, M. A. (2003). Laser-shock processing of steels. *J. Mater. Process. Technol.* [Online] 135. p. 6–17. Available from: [https://doi.org/10.1016/S0924-0136\(02\)00813-0](https://doi.org/10.1016/S0924-0136(02)00813-0)
2. SENCHENKOV, I. K., OKSENCHUK, N. D. (2013) Modeling of a nonisothermal flow with regard for the dependence of plastic properties on the microstructure of a material. *J. Math. Sci.* [Online] 190 (6). p. 796-803. Available from: <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1289-6>
3. LEBLOND, J. B., MOTTET, G., DEVAUX, J. C. (1986). A theoretical and numerical approach to the plastic behavior of steel during phase transformation. – I. Derivation of general relations. *J. Mech. Phys. Solids.* [Online] 34 (4). p. 395–409. Available from: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(86\)90009-8](https://doi.org/10.1016/0022-5096(86)90009-8)
4. ZHUK, Y. A., SENCHENKOV, I. K., KOZLOV, V. I., TABIEVA, G. A. (2001). Axisymmetric dynamic problem of coupled thermoviscoplasticity. *International Applied Mechanics.* [Online] 37 (10). p. 1311–1317. Available from: <https://doi.org/10.1023/A:1013976219144>

Надійшла до редколегії 11.08.2023

УДК 539.3

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.33>

Ящук В. М.¹, д. ф.-м. н., проф.,
Гребіник А.Г.², к.б.н., с.н.с.,
Лебедева І.В.¹, к. ф.-м. н., доц.,
Ващіліна О. В.¹, к. ф.-м. н., доц.,
Лосицький М.Ю.¹, к. ф.-м. н., с.н.с.,
Навозенко О.М.¹, к. ф.-м. н., м.н.с.

V. M. Yashchuk¹, Dr.Sci (Phys.-Math.), Prof.,
A.G. Grebinyk, Ph.D. (Biology), S. Researcher,
I. V. Lebedyeva¹, Ph.D. (Phys.-Math.), As.Prof.,
O. V. Vashchilina¹, Ph.D. (Phys.-Math.), As.Prof.,
M. Yu. Losytskyi¹, (Phys.-Math.), S. Researcher,
O. M. Navozenko¹, (Phys.-Math.), Y. Researcher

Сенсорні системи з оптичним відгуком

Sensor Systems with Optical Reponse

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01033, м. Київ, вул. Воло-
димирська, 60,
e-mail: yashchukvaleriy@gmail.com
² Німецький Електронний-Синхротрон DESY,
Платаналле 6, 15738 Цойтен, Німеччина,
e-mail: anna.grebinyk@desy.de

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
04116, Kyiv, 60 Volodymyrska Street, Kyiv,
Ukraine, 01033
e-mail: yashchukvaleriy@gmail.com
² Deutsches Elektronen-Synchrotron DESY,
Platanenallee 6, 15738 Zeuthen, Germany:
e-mail: anna.grebinyk@desy.de

У даній роботі, що має реферативний характер, розглянуто основні принципи дії сенсорних систем з оптичним відгуком двох типів. Зокрема, розглянуто дві спектроскопічні технології для зондування деяких об'єктів або подій у неживих (синтетичних) або біологічних середовищах. У першій частині роботи розглянуто сенсорні технології, пов'язані з використанням спеціально введених у сенсорну систему зондів з оптичним відгуком. Як правило, ці зонди є спеціально створеними системами, спектральні властивості яких істотно змінюються при взаємодії з об'єктом зондування. Друга частина роботи присвячена застосуванню механізмів аутосенсорики (випадку, коли застосовуються власні оптичні центри середовища для детекції процесів, що відбуваються в біологічних чи синтетичних системах).

Ключові слова: сенсорні системи, оптичний відгук, аутосенсорика.

This paper is a review of the scientific works of the co-authors. In the paper, the basic principles of action of sensor systems with optical response of two types are considered. In particular, two spectroscopic technologies for probing some objects or events in non-living (synthetic) or biological environments are considered. In the first part of the work, sensor technologies related to the use of probes with optical response specially introduced into the sensor system are analyzed. As a rule, these probes are specially developed systems, the spectral properties of which change significantly under interaction with the object of probing. In the first part of the work, sensors of the first type are considered. In particular, the main ideas used in this type of sensors are given and specific examples of the use of such sensors are analyzed: specially created molecules that have a low fluorescence quantum yield due to a significant number of mechanical intramolecular degrees of freedom. The intercalation of such probes to large biomolecules leads to a change in the spectral characteristics of these probes, in particular, to a significant increase in fluorescence (up to 1000 times). The case of two-photon absorption of molecular probes in the transparency window of biological tissues is examined. Semiconductor and metal nanoparticles whose absorption and fluorescence spectra depend on their sizes were also proposed as probes of the first type (as sensors of elastic vibrations of the environment). The second part of the paper is devoted to the mechanisms of autosensing (the case when the medium's own optical centers are used to detect processes occurring in biological or synthetic systems). The main ideas that underlie the operation of sensors with optical response of this type were analyzed, and examples of such use were also given. In particular, the use of the own spectral properties of biomacromolecules and some coenzymes for changes in the external environment is considered. The use of the optical response of synthetic macromolecules on the value of their molecular weight was also analyzed.

Key Words: sensor systems, optical response, autosensory.

Статтю представив член-кореспондент НАН України Жук Я.О.

1. Вступ

Сенсори (плівки, кристали, молекули тощо), які змінюють свої оптичні властивості в результаті взаємодії з тими чи іншими зовнішніми чинниками, називаються *сенсорами з оптичним відгуком*. Як правило, це первинні датчики у пристроях контролю цих змін. Як виявилось, сенсорні системи з оптичним відгуком є найбільш чутливими та експресними. Їх застосування є надзвичайно актуальним і в умовах війни для детекції малих кількостей вибухових речовин [1].

У даній роботі розглянуто сенсорні системи з оптичним відгуком на основі органічних та неорганічних матеріалів.

Існують дві спектроскопічні технології для зондування деяких об'єктів або подій у неживих (синтетичних) або біологічних середовищах. Ці чутливі технології пов'язані, по-перше, з використанням спеціальних молекулярних або наночастинкових зондів з оптичним відгуком. Як правило, ці зонди є спеціально сконструйованими та синтезованими системами, спектральні властивості яких істотно змінюються при взаємодії з різними об'єктами. По-друге, – з оптичними властивостями та їх реакцією на деякі зміни у навколишніх середовищах, які є компонентами чутливих об'єктів. Основною перевагою цієї технології зондування є відсутність збурень у навколишньому середовищі. Розглянуто основні принципи дії сенсорних систем двох зазначених вище типів. Зокрема, проаналізовано основні фізичні причини, що призводять до зростання інтенсивності флюоресценції зондів-сенсорів при їх зв'язуванні з різними об'єктами. Розглянуто застосування молекулярних флюоресцентних зондів у вікні прозорості біологічних тканин за рахунок їх двофотонного збудження.

Друга частина роботи присвячена механізмам аутосенсорики (випадку, коли застосовуються власні оптичні центри систем для детекції процесів, що відбуваються в різного типу середовищах, у тому числі, живих біологічних клітинах чи організмах. Зокрема, розглянуто можливості детекції біополімерів з функціонуванням деяких ферментів у клітинах. Також розглянуто оптичний відгук об'єктів, які спеціально інкорпоровані в середовище.

2. Сенсорні системи з оптичним відгуком першого типу

Даного типу сенсори можуть бути спеціально розробленими та синтезованими системами, спектральні властивості яких (спектри оптичного поглинання, флюоресценції та фосфоресценції, їх інтенсивності, поляризація, час згасання тощо)

істотно змінюються в результаті взаємодії з об'єктом зондування.

Розглянемо взаємодії, які призводять до суттєвого зростання інтенсивності флюоресценції. Основні ідеї, що використовуються в даному випадку, полягають у застосуванні спеціально створених молекул, що мають низький квантовий вихід флюоресценції завдяки значному числу механічних внутрішньо-молекулярних ступенів вільності, притаманних даним молекулярній системі (відносна рухливість окремих груп атомів складної молекули) при електронному збудженні, що виникає в результаті поглинання фотону, ймовірність деактивації такого збудження внаслідок випромінювання може бути значно меншою за одиницю. Зв'язування такої молекули з масивною макромолекулою, наприклад, ДНК, призводить до заморожування механічних ступенів вільності, через які збудження може бути «скинуто», коли молекула перебуває в розчині. У результаті такого зв'язування найбільш ймовірним процесом деактивації збудження є випромінювання.

Наведемо деякі приклади.

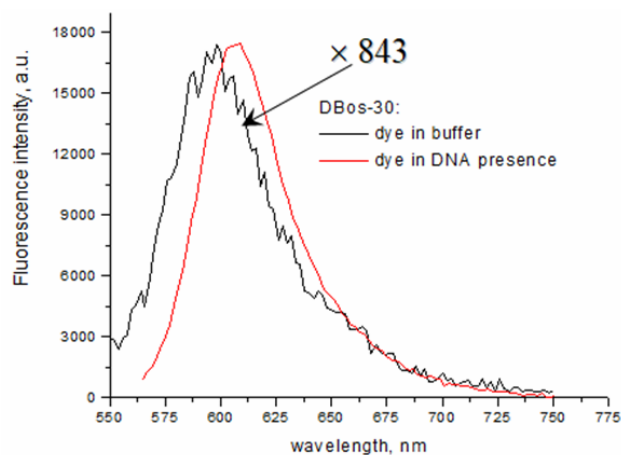


Рис. 1. Спектри флюоресценції стирілових барвників (5×10^6 М пар основ) у водному розчині та в присутності ДНК (6×10^5 М молекул барвника на кількість пар основ) [2].

Як видно з рис. 1, зв'язування молекули зонда з ДНК призводить до зростання інтенсивності його флюоресценції майже у 1000 (843) разів (фактично мала молекула зв'язується з масивним тілом-макромолекулою. Крім зростання флюоресценції можуть бути використані інші спектральні характеристики).

Флюоресцентні зонди можуть бути підібрані таким чином, що вони є селективними до певних молекул, які містяться у клітинах, у конкретних

клітинних утвореннях (наприклад, у ядерцях). Прикладом такого зонду є зонд Cyap-40 [3].

На рис.2 наведено флюоресцентне зображення клітини, в якій молекула-зонд проникла в ядерця та зв'язалася там з транспортною РНК. Результатом є інтенсивне світіння даних утворень в клітині.

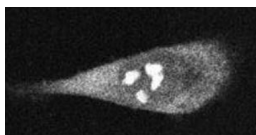


Рис. 2. Клітина карциноми, у якій флюоресцентний зонд Cyap-40 підсвічує ядерця.

У випадку необхідності проникнення зонда глибоко в біологічну тканину використовують двофотонне збудження у спектральній області прозорості біологічних тканин (800-1000 нм)

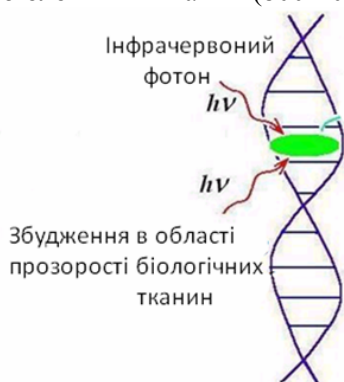


Рис. 3. Основний принцип двофотонної детекції ДНК.

До першого типу сенсорів з оптичним відгуком можуть бути віднесені напівпровідникові або металеві наночастинки, інкорпоровані в певні суцільні середовища. Основна ідея їх застосування пов'язана з тим фактом, що за певних розмірів наночастинок проявляється ефект просторового обмеження руху електронів у них, що, в свою чергу, призводить до появи дискретної енергетичної структури та залежності довжини хвилі поглинання від розміру наночастинок. Коливання такої наночастинок призводять до зміни її кольору (спектра поглинання), а також випромінювання. У роботі [4] показано, що закон осциляції кольору наночастинок визначається формулою

$$\lambda_{\max}[R(t)] = \frac{hcm^*(R_0 + C_1 j_1(\kappa R_0) e^{i\omega t})^2}{2\pi^2 h^2 (2n + l + 2)^2}.$$

Використовуючи такого типу наночастинок, що інкорпоровані у пружне середовище, можна реєструвати пружні хвилі, які виникають у такому середовищі, реєструючи зміну поглинання або флюоресценції даних наночастинок.

Сенсорними середовищами з оптичним відгуком, на наш погляд, можуть бути пружні п'єзоелектричні середовища зі спеціально включеними туди порожнинами. Зміна форми такої порожнини, спричинена механічними коливаннями середовища, куди вона введена, має супроводжуватися електромагнітним випромінюванням, що може бути зареєстровано зовнішніми пристроями. Такі порожнини можуть трансформуватися в тріщини, розвиток яких призведе до виникнення електромагнітного випромінювання, але вже на інших частотах.

3. Сенсорні системи з оптичним відгуком другого типу. Аутосенсори з оптичним відгуком

Основна ідея аутосенсорики полягає у використанні оптичного відгуку власних компонент синтетичних або біологічних систем на зміни у навколишньому середовищі. До таких сенсорів можна віднести біологічні молекули, які первинно присутні в клітинах, і реагують на зміни, що відбуваються навколо них. Прикладами таких молекул можуть бути ДНК, РНК, білки, ферменти, а також малі біологічні молекули. Зміна їхніх спектральних властивостей при взаємодії (наприклад, утворення комплексів між ними) з іншими молекулами клітинного середовища використовуються для детекції різноманітних процесів [5,6]. Яскравим прикладом такого процесу може бути конвертація кофермента NADH (що характеризується яскравою зелено-блакитною флюоресценцією) в NAD^+ (де відповідна смуга поглинання і флюоресценція зовсім відсутні через відповідні хімічні перетворення). У випадку загибелі клітини цей процес зупиняється, і ця клітина вже не флюоресцює. Такий природний зонд може бути індикатором відносної кількості мертвих та живих клітин або організмів у біологічній системі. Іншим прикладом є використання власних спектральних характеристик вірусів для експресного визначення їх складу.

Наведемо ще один приклад використання оптичного відгуку синтетичних макромолекул на величину їхньої молекулярної маси. Виявляється, що перенесення триплетних збуджень у макромолекулах призводить до локалізації цих збуджень у кінцевих ланках макромолекули, що, в свою чергу, проявляється у спектрах фосфоресценції. Для опису цього процесу застосовано кінетичне рівняння з дифузійним та анігіляційним членами. Враховуючи основний вклад анігіляційного члена, отримано залежність інтенсивнос-

ті фосфоресценції від молекулярної маси макро-молекули (сенсор на молекулярну масу) [7]:

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = I_0 + D \frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2} - Pn(x,t) - \gamma n^2(x,t).$$

4. Основні результати та висновки

У роботі здійснено огляд та аналіз двох типів сенсорних систем з оптичним відгуком. Розглянуто основні ідеї, що лежать в основі реалізації

сенсорики зі спеціально введеними сенсорними системами як біологічного, так і синтетичного походження, а також аутосенсорики, де застосовуються власні оптичні властивості органічних та неорганічних середовищ. Розглянуто конкретні приклади застосування сенсорів з оптичним відгуком, в тому числі ті, що висвітлені в роботах авторів. Показано, що доцільність застосування кожного з вказаних вище сенсорів з оптичним відгуком залежить від конкретної ситуації.

Список використаних джерел

1. Li D. A Highly Efficient Fluorescent Sensor Based on AIEgen for Detection of Nitrophenolic Explosives / Li, D. Lv, P. Han, X.-W. Jia, Z. et al // *Molecules*. – 2023. – 28(1). – C.181.
2. Tokar V.P. Peculiarities of the DNA-Styryl-cyanine dye system luminescence / Tokar V.P., Losytskyy M.Yu., Yashchuk V.M. // *Ukrainian Journal of Physics*. – 2008. – V.53, No.12. – P.1149-1154.
3. Ohulchansky T.Y. A monomethine cyanine dye Cyan 40 for two-photon excited fluorescence detection of nucleic acids and their visualization in live cells / Ohulchansky T.Y., Pudavar H.E., Yarmoluk S.M., et al // *Photochem. Photobiol.* – 2003. – Vol.77(2). – P.138-145.
4. Lebedyeva I. Elastic vibrations of silicon and germanium nanoparticles and the influence on their optical properties / Lebedyeva I., Boryseiko O., Yashchuk V. // *J. Functional Materials*. – 2020. – 27 (3). – P. 463–467.
5. Yashchuk V.M. Optical biomedical diagnostics: sensors with optical response based on two-photon excited luminescent dyes for biomolecules detection / Yashchuk V.M., Yarmoluk S.M., Kudrya V.Yu. et al // *Advances in Optical Technologies*. – 2008. – V.2008, ID 908246.
6. Yashchuk V.M. Optical Response of the Polynucleotides-Proteins Interaction / Yashchuk V.M., Kudrya V.Yu., Levchenko et al // *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* – 2011. – V.535. – P.93-110
7. Yashchuk V.M. Some peculiarities of triplet excitations dynamics in organic macromolecules and crystals / Yashchuk V.M., Galunov M. Z., Lebedyeva I.V. et al // *J. Molecular Crystals and Liquid Crystals*. – 2022. – 747(1). –P. 3-13.

References

1. LI, D. LV, P. HAN, X.-W. JIA, Z. et al (2023) Highly Efficient Fluorescent Sensor Based on AIEgen for Detection of Nitrophenolic Explosives. *Molecules* V.28(1), p.181.
2. TOKAR, V.P., LOSYTSKY, M.YU., YASHCHUK, V.M. (2008) Peculiarities of the DNA-Styryl-cyanine dye system luminescence. *Ukrainian Journal of Physics*. V.53, №.12. P.1149-1154.
3. OHULCHANSKY, T.Y., PUDAVAR, H.E., YARMOLUK, S.M., YASHCHUK, V.M., et al (2003) Cyan 40 for two-photon excited fluorescence detection of nucleic acids and their visualization in live cells. *Photochem. Photobiol.* 77(2). p.138–145.
4. LEBEDYEVA, I.V., BORYSEIKO, O.V., YASHCHUK, V.M. (2020) Elastic vibrations of silicon and germanium nanoparticles and the influence on their optical properties. *J. Functional Materials*. 27 (3). p. 463–467.
5. YASHCHUK, V.M., YARMOLUK, S.M., KUDRYA, V.YU., et al (2008) *Advances in Optical Technologies*. – №.2008, ID 908246.
6. YASHCHUK, V.M., KUDRYA, V.YU., LEVCHENKO, S.M., et al (2011) Optical Response of the Polynucleotides-Proteins Interaction. *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* 535. p.93-110
7. YASHCHUK, V.M., GALUNOV M.Z., LEBEDYEVA I.V., et al (2022) Some peculiarities of triplet excitations dynamics in organic macromolecules and crystals. *J. Molecular Crystals and Liquid Crystals*. 747(1), p. 3-13.

Надійшла до редколегії 08.08.23

УДК 519.925.51

Собчук В.В.¹, д.т.н., Проф.
Зеленська І.О.², Асп.

Побудова асимптотики розв'язку для системи сингулярно збурених рівнянь методом істотно особливих функцій

^{1,2}Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ,
пр-т Глушкова, 4д

¹e-mail: sobchuk@knu.ua

¹e-mail: kopchuk@gmail.com

V.V. Sobchuk¹, Dr. Sci., (Engin.) Prof.
I.O. Zelenska², Postgraduate Student.

Construction of asymptotics of the solution for a system of singularly perturbed equations by the method of essentially singular functions

^{1,2}Taras Shevchenko National University of Kyiv,
4d, Glushkov ave., Kyiv, 03068,
e-mail: sobchuk@knu.ua

¹ORCID ID: 0000-0002-4002-8206

²ORCID ID: 0000-0002-7784-1030

Сингулярно збурені задачі з точками звороту виникають як математичні моделі для різних фізичних явищ. Задача з внутрішньою точкою звороту є одновимірною версією стаціонарної конвекційно-дифузійної задачі з домінуючим конвективним членом і полем швидкості, яке змінює свій знак у водозбірнику. Задачі з граничними точками звороту, з іншого боку, виникають у геофізиці та при моделюванні теплових прикордонних шарів у ламінарному потоці. У роботі проведено аналіз результатів з асимптотичного аналізу сингулярно збурених задач з точками звороту. Для однорідної системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з малим параметром при старшій похідній і точкою звороту, одержані умови для побудови рівномірної асимптотики розв'язку. Розглядається випадок, коли спектр граничного оператора містить кратні і тотожно рівні нулю елементи. Асимптотику побудовано методом істотно особливих функцій, який дозволяє в околі точки звороту використати модельний оператор Ейрі. Конструкція асимптотичних розв'язків містить довільні сталі, які визначаються однозначно під час розв'язання ітераційних рівнянь. Водночас отримано умови існування розв'язку системи диференціальних з малим параметром при старшій похідній та при наявності точки звороту, за умови, що точка звороту міститься на інтервалі $[0; l]$. Наведено приклад побудови асимптотики однорідної системи диференціальних рівнянь.

Ключові слова: малий параметр, точка звороту, система сингулярно збурених рівнянь, функції Ейрі, рівняння Ліувілля.

Singularly perturbed problems with turning points arise as mathematical models for various physical phenomena. The internal turning point problem is a one-dimensional version of the steady-state convection-diffusion problem with a dominant convective term and a velocity field that changes sign in the reservoir. Boundary turning point problems, on the other hand, arise in geophysics and in the modeling of thermal boundary layers in laminar flow. The paper analyzes the results from the asymptotic analysis of singularly perturbed problems with turning points. For a homogeneous system of singularly perturbed differential equations with a small parameter at the highest derivative and a turning point, the conditions for constructing a uniform asymptotic solution are obtained. We consider the case when the spectrum of the limit operator contains multiple and identically zero elements. The asymptotics are constructed by the method of essentially singular functions, which allows using the Airy model operator in the vicinity of the turning point. The construction of asymptotic solutions contains arbitrary constants, which are determined uniquely during the solution of the iterative equations. At the same time, the conditions for the existence of a solution of a system of differentials with a small parameter for the highest derivative and for the presence of a turning point are obtained, provided that the turning point is located on the interval $[0; l]$. An example of constructing the asymptotic of a homogeneous system of differential equations is given.

Keywords: small parameter, turning point, singular perturbations, Airy functions, Liouville equation.

Статтю представив академік НАН України Перестюк М.О.

1. Вступ

Багато процесів в природі, фізиці, інженерній справі характеризуються різкою зміною характеру поведінки системи. При описі таких систем застосовуються математичні моделі, які описуються сингулярно збуреними диференціальними рівняннями. Такі рівняння мають сингулярні точки, де коефіцієнти або функції стають невизначеними або руйнуються, що призводить до суттєвих труднощів у їх аналізі та розв'язанні. Більше того, розв'язування таких рівнянь може вимагати спеціалізованих методів та аналізу, щоб врахувати особливості сингулярних точок та збурень.

Історично такі задачі виникли у небесній механіці при дослідженні поведінки зірок, силових впливів планет та інших небесних тіл тощо. В подальшому сингулярно збурені диференціальні рівняння почали широко застосовувати у задачах оптимального керування; фізиці руйнування матеріалів – при вивченні поведінки матеріалів під впливом зовнішніх навантажень, таких як напруження та температурні зміни, коли можуть виникати диференціальні рівняння зі сингулярними коефіцієнтами у точках локального руйнування матеріалу; у моделях екологічних систем та дослідженнях біологічних процесів, пов'язаних з ростом та розвиток організмів в умовах нестачі ресурсів або інших обмежень і т.і.

Загальний клас задач на власні значення з двоточковими граничними умовами на кінцевому інтервалі, породжених диференціальним рівнянням з невизначеною ваговою функцією, яка має кілька нулів або полюсів досліджено у [1]. Робота [2] ілюструє, як за допомогою перетворення Ліувіля диференціальне рівняння зводиться до однієї з чотирьох стандартних форм із неперервними коефіцієнтами. Після чого будуються асимптотичні наближення для розв'язків у термінах функцій параболічного циліндра. Наведено основні властивості функцій параболічного циліндра. Для кожного наближення дано строгі обґрунтовані оцінки похибок.

В роботі [3] запропоновано два підходи: короткохвильове граничне наближення та довгохвильове граничне наближення для побудови асимптотики розв'язку рівняння Орра-Зоммерфельда. Процедура полягає у

перетворенні рівняння Орра-Зоммерфельда в систему двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку для яких власні значення та власні функції можуть бути апроксимовані

У роботі [4] досліджується спектральна теорія несамопряженого двоточкового диференціального оператора n -го порядку L у комплексному гільбертовому просторі. Встановлено умову повноти для дискретних операторів Гільберта-Шмідта. Основні особливості спектральної теорії для L включають асимптотичні формули для характеристичного визначника та функції Гріна; класифікацію граничних значень: регулярні, нерегулярні або вироджені; обчислення власних значень і відповідні алгебраїчні кратності та сходження.

Окремої уваги заслуговує сингулярно збурене диференціальне рівняння Ліувілля, яке відіграє важливу роль у різних областях фізики, хімії та математики, сприяючи розвитку теоретичних моделей та розумінню властивостей фізичних систем.

Класичне рівняння Ліувілля є частинним випадком рівняння виду

$$\varepsilon^3 y'''(x, \varepsilon) + x \tilde{a}(x) y'(x, \varepsilon) + b(x) y(x, \varepsilon) = h(x) \quad (1)$$

при $b(x) \equiv 0$. Для рівнянь вищих порядків та їх систем додаються нові особливості і труднощі при їх дослідженні, оскільки спектр виродженого оператора складається з двох груп елементів: стабільних і нестабільних [5-7].

В цій роботі опишемо алгоритм методу істотно особливих функцій для побудови розв'язку і сформулюємо умови його існування на інтервалі $[0, 1]$ для системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту.

2. Постановка задачі

Нехай задана система сингулярно збурених диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon Y'(x, \varepsilon) - A(x, \varepsilon) Y(x, \varepsilon) = H(x) \quad (2)$$

$$\text{де } \varepsilon \rightarrow +0, \quad x \in [0; 1], \quad \text{де } A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_0(x) + \varepsilon A_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -b(x) & -a(x) & 0 \end{pmatrix} \quad - \quad \text{відома}$$

$$\text{матриця, } Y(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} y_1(x, \varepsilon) \\ y_2(x, \varepsilon) \\ y_3(x, \varepsilon) \end{pmatrix} \quad - \quad \text{шукана вектор-}$$

функція, $H(x) = \text{colomn}(0, 0, h(x))$ – задана вектор-функція [8].

Систему (2) будемо досліджувати за таких умов:

$$\text{C1. } a(x), b(x), h(x) \in C^\infty[0, l]$$

$$\text{C2. } a(x) = x\tilde{a}(x), \tilde{a}(x) \neq 0, b(x) \neq 0.$$

3. Методика побудови асимптотики розв'язку системи

Рівномірну асимптотику розв'язку для задачі (1) побудуємо методом істотно особливих функцій [9, 10]. Алгоритм цього методу можна подати у вигляді.

I крок. Розширення сингулярно збуреної задачі.

В сингулярно збуреній задачі з точкою звороту поряд із незалежною змінною x вводиться нова вектор-змінна $t = \varepsilon^{-p} \cdot \varphi(x)$. Тоді замість шуканої вектор-функції $Y(x, \varepsilon)$ вивчається нова «розширена вектор-функція» $\tilde{Y}(x, t, \varepsilon)$. При чому розширення проводиться таким чином, щоб виконувалась умова як в методі регуляризації

$$\tilde{Y}_k(x, t, \varepsilon) \Big|_{t=\varepsilon^{-p} \cdot \varphi(x)} \equiv Y_k(x, \varepsilon).$$

p і $\varphi(x)$ визначається для кожного конкретного випадку. Відбувається перехід від задачі з однією змінною до задачі з двома змінними.

II крок. Простір безрезонансних розв'язків.

Для регуляризації вводиться вибраний простір функцій, який називають простором безрезонансних розв'язків і для кожної конкретної задачі цей простір має свою специфіку.

$$\tilde{Y}_k(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^2 D_{ik}(x, t, \varepsilon) + B(x, t, \varepsilon) + \omega(x, \varepsilon),$$

$$D_{ik}(x, t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \alpha_{i1}(x, \varepsilon) \\ \alpha_{i2}(x, \varepsilon) \\ \alpha_{i3}(x, \varepsilon) \end{pmatrix} U_i(t) + \mu \begin{pmatrix} \beta_{i1}(x, \varepsilon) \\ \beta_{i2}(x, \varepsilon) \\ \beta_{i3}(x, \varepsilon) \end{pmatrix} U_i'(t),$$

$$B(x, t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} f_1(x, \varepsilon) \\ f_2(x, \varepsilon) \\ f_3(x, \varepsilon) \end{pmatrix} \psi(t) + \mu \begin{pmatrix} g_1(x, \varepsilon) \\ g_2(x, \varepsilon) \\ g_3(x, \varepsilon) \end{pmatrix} \psi'(t).$$

III крок. Регуляризація сингулярно збуреної задачі.

Розширена задача вивчається у просторі безрезонансних розв'язків і зводиться до рівняння, у який малий параметр $\varepsilon > 0$ входить регулярно.

IV крок. Формалізм побудови розв'язку задачі.

Оскільки розширена задача є регулярно збуреною відносно малого параметра в ПБР, то розв'язок задачі будемо шукати у вигляді ряду

$$\tilde{Y}_k(x, t, \mu) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r Y_{\text{hom.}}(x) + \sum_{r=-2}^{\infty} \mu^r Y^{\text{part.}}(x),$$

де $\mu = \sqrt[3]{\varepsilon}$.

Побудову асимптотичного ряду частинного розв'язку розпочинаємо з від'ємних степенів малого параметра з метою одержання рівномірної асимптотики розв'язку ССЗДР. Права частина буде мати розрив другого роду в точці звороту. Тому в загальному випадку вона не належатиме множині значень головного розширеного оператора L_ε [5].

V крок. Побудова формальних розв'язків однорідної розширеної системи.

Покажемо, що ця система рівнянь є асимптотично коректною у ПБР D_k . На цьому етапі розробляється теорія існування ітераційного рівняння виду

$$\Phi(x) \cdot Z_{kr}(x) = F \cdot Z_{kr}(x),$$

де $\Phi(x)$ – матриця, $Z_{kr}(x)$ – вектор-стовпець складений з аналітичних функцій

$$\theta(x, \varepsilon) \equiv \{\alpha_{ik}(x, \varepsilon), \beta_{ik}(x, \varepsilon)\}.$$

При цьому будуються перші члени асимптотичного розв'язку однорідної досліджуваної задачі.

VI крок. Побудова формальних розв'язків неоднорідної розширеної системи.

На даному кроці будується розв'язок неоднорідної задачі за допомогою рекурентного рівняння

$$\Phi(x) \cdot Z_{kr}(x) = F \cdot Z_{kr}(x),$$

де $\Phi(x)$ – матриця, $Z_{kr}(x)$ – вектор-стовпець складений з аналітичних функцій

$$\theta_2 = \{f_k(x, \varepsilon), g_k(x, \varepsilon), \omega_k(x, \varepsilon)\}.$$

VII крок. Оцінка залишкових членів асимптотики розв'язку.

На цьому етапі проводимо оцінку залишкових членів

$$\varepsilon^{1+q} \xi_{k\alpha(q+1)}(x, \varepsilon)$$

$$\varepsilon^{1+q} \xi_{k\beta(q+1)}(x, \varepsilon)$$

одержаних розв'язків.

VIII крок. Побудова загального розв'язку системи (2):

$$Y(x, \varepsilon) = Y_{\text{hom}}(x, \varepsilon) + Y^{\text{part}}(x, \varepsilon).$$

Справедлива теорема.

Теорема 1. Нехай система сингулярно збурених диференціальних рівнянь (2) задовольняє умови:

$$1) H(x) \in C^\infty[0; l];$$

$$2) a(x) = x\tilde{a}(x), \quad \tilde{a}(x) > 0, \quad b(x) < 0.$$

Тоді при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon > 0$ методом істотно особливих функцій можна побудувати асимптотику розв'язку $Y(x, t, \varepsilon)$ даної системи у вигляді асимптотичного ряду

$$\begin{aligned} Y(x, t, \varepsilon) = & \sum_{k=1}^2 \left\{ \sum_{r=0}^q \varepsilon^r \alpha_{kr}(x) + O(\varepsilon^{q+1}) \right\} U_k(\varepsilon^{-2/3} \cdot \varphi(x)) + \\ & + \varepsilon^{1/3} \left\{ \sum_{r=0}^q \varepsilon^r \beta_{kr}(x) + O(\varepsilon^{q+1}) \right\} \frac{dU_k(\varepsilon^{-2/3} \cdot \varphi(x))}{d(\varepsilon^{-2/3} \cdot \varphi(x))} + \\ & + \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \omega_r(x) + O(\varepsilon^{q+1}) + \left[\sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r f_r(x) + O(\varepsilon^{q+1}) \right] \psi(\varepsilon^{-2/3} \cdot \varphi(x)) + \\ & + \varepsilon^{1/3} \left[\sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r g_r(x) + \frac{d\psi(\varepsilon^{-2/3} \cdot \varphi(x))}{d(\varepsilon^{-2/3} \cdot \varphi(x))} \right] \frac{d\nu(\varepsilon^{-2/3} \cdot \varphi(x))}{d(\varepsilon^{-2/3} \cdot \varphi(x))} + \\ & + \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \omega_r(x) + O(\varepsilon^{q+1}). \end{aligned}$$

4. Приклад побудови асимптотики розв'язку однорідної системи

Проілюструємо використання описаного підходу до побудови асимптотики розв'язку систему

$$\varepsilon Y'(x, \varepsilon) - A(x, \varepsilon)Y(x, \varepsilon) = H(x) \quad (3)$$

$$\text{де } \varepsilon \rightarrow +0, \quad x \in [0; 1], \quad \text{де } A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_0(x) + \varepsilon A_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4x+4 & -4x & 0 \end{pmatrix}$$

Систему (3) будемо досліджувати за таких умов:

$$\mathbf{Q1.} \quad a(x) \text{ і } b(x) \in C^\infty[0, 1]$$

$$\mathbf{Q2.} \quad a(x) = x\tilde{a}(x), \quad \tilde{a}(x) = 4, \quad b(x) = -(4x+4), \\ h(x) = 0.$$

Тобто знайдемо $Y_{\text{hom}}(x, \varepsilon)$ для системи (3).

Дана система відповідає сингулярно збуреному диференціальному рівнянню третього порядку

$$\varepsilon^3 y'''(x, \varepsilon) + 4x \cdot y'(x, \varepsilon) - (4x+4) \cdot y(x, \varepsilon) = 0. \quad (4)$$

Вироджене рівняння, що відповідає системі (3) має вигляд

$$4x \cdot \omega'(x) + \omega(x) = 0. \quad (5)$$

Характеристичне рівняння запишеться таким способом:

$$|A(x, 0) + \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 4x+4 & -4x & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 4x \cdot \lambda.$$

Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = 0$ і $\lambda_{2,3} = \pm 2\sqrt{x}i$.

Згідно алгоритму введемо регуляризуючу змінну $t = \varepsilon^{-p} \cdot \varphi(x)$, де показник p і функцію $\varphi(x)$ необхідно визначити.

Для визначення “розширеної” функції одержимо “розширене” векторне рівняння

$$\begin{aligned} L_\varepsilon \cdot Y_{\text{hom}}(x, t, \varepsilon) \equiv & \varepsilon^{1-p} \varphi'(x) \frac{\partial Y_{\text{hom}}(x, t, \varepsilon)}{\partial t} + \\ & + \varepsilon \frac{\partial Y_{\text{hom}}(x, t, \varepsilon)}{\partial x} - A(x) Y_{\text{hom}}(x, t, \varepsilon) = H(x) \end{aligned} \quad (6)$$

Асимптотику розв'язку розширеного рівняння (6) будемо у вигляді ряду

$$\begin{aligned} Y_{\text{hom}}(x, t, \varepsilon) = & \sum_{k=1}^2 \left[\alpha_{ik}(x, \varepsilon) U_i(t) + \varepsilon^\gamma \beta_{ik}(x, \varepsilon) U_i'(t) \right] + \\ & + \omega_k(x, \varepsilon), \end{aligned}$$

де $\theta(x, \varepsilon) \equiv \{\alpha_k(x, \varepsilon), \beta_k(x, \varepsilon), \omega_k(x, \varepsilon)\}$ – аналітичні функції відносно малого параметра $\varepsilon > 0$.

Прирівняємо коефіцієнти при ІОФ в одержаній системі. Будемо мати такі векторні рівняння ($i = 1, 2; k = \overline{1, 3}$)

$$\begin{aligned} U_i'(t) : & \varepsilon^{1-\mu} \alpha(x, \varepsilon) \varphi'(x) - \\ & - A(x) \varepsilon^\gamma \beta(x, \varepsilon) + \varepsilon \beta(x, \varepsilon) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$U_i(t) : \varepsilon^{1+\gamma-2\mu} \beta(x, \varepsilon) \varphi(x) \varphi'(x) - \\ - A(x) \alpha(x, \varepsilon) + \varepsilon \alpha(x, \varepsilon) = 0.$$

При

$$p = \frac{2}{3}, \quad \gamma = \frac{1}{3}$$

векторні рівняння (7) запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} \varphi'(x) \alpha_{i1}(x, \varepsilon) = \mu^3 [\beta_{i2}(x, \varepsilon) - \beta'_{i1}(x, \varepsilon)] \\ \varphi'(x) \alpha_{i2}(x, \varepsilon) - \beta_{i3}(x, \varepsilon) = -\mu^3 \beta'_{i2}(x, \varepsilon), \\ \varphi'(x) \alpha_{i3}(x, \varepsilon) - (4x+4) \beta_{i1}(x, \varepsilon) + 4x \beta_{i2}(x, \varepsilon) = -\mu^3 \beta'_{i3}(x, \varepsilon), \\ \varphi(x) \varphi'(x) \beta_{i1}(x, \varepsilon) = \mu^3 [\alpha'_{i1}(x, \varepsilon) - \alpha_{i2}(x, \varepsilon)] \\ \varphi(x) \varphi'(x) \beta_{i2}(x, \varepsilon) + \alpha_{i3}(x, \varepsilon) = \mu^3 \alpha'_{i2}(x, \varepsilon), \\ \varphi(x) \varphi'(x) \beta_{i3}(x, \varepsilon) + (4x+4) \alpha_{i1}(x, \varepsilon) - 4x \alpha_{i2}(x, \varepsilon) = \mu^3 \alpha'_{i3}(x, \varepsilon), \end{cases} \quad (8)$$

де $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{3}}$. Таким способом, одримали регулярно збурену систему.

Розв'язки однорідної розширеної системи (8) побудуємо у вигляді рядів

$$\alpha_{ik}(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \alpha_{ikr}(x), \quad \beta_{ik}(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \beta_{ikr}(x). \quad (9)$$

Підставимо ряди (9) в (8). Тоді для визначення вектор-функцій

$$\alpha_{ikr}(x) = \text{colomn}(\alpha_{i1r}(x), \alpha_{i2r}(x), \alpha_{i3r}(x)), \\ \beta_{ikr}(x) = \text{colomn}(\beta_{i1r}(x), \beta_{i2r}(x), \beta_{i3r}(x))$$

ми одержимо наступні рекурентні системи рівнянь:

$$\begin{aligned} \Phi(x) \cdot Z_{ik0}(x) &= 0, \quad r = 0, 1, 2, \\ \Phi(x) \cdot Z_{ikr}(x) &= -Z'_{ik(r-1)}(x), \quad r \geq 3, \end{aligned} \quad (10)$$

де

$$Z_{ikr}(x) = \text{colomn}(\alpha_{i1r}(x), \alpha_{i2r}(x), \alpha_{i3r}(x), \beta_{i1r}(x), \beta_{i2r}(x), \beta_{i3r}(x))$$

, а

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \varphi'(x) & -(4x+4) & 4x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) & 0 \\ 4x+4 & -4x & 0 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) \end{pmatrix} \quad (11)$$

Обчислимо визначник матриці (11). В результаті одержимо:

$$\det \Phi(x) =$$

$$= (a^2(x) + 2a(x)\varphi(x)\varphi'^2(x) + \varphi^2(x)\varphi'^4(x)) \cdot \varphi(x)\varphi'^2(x). \\ \text{На даний момент регуляризуюча функція } \varphi(x)$$

ще не визначена. Тому визначимо її як розв'язок задачі

$$16x^2 + 8x\varphi(x)\varphi'^2(x) + \varphi^2(x)\varphi'^4(x) = 0,$$

$$(4x + \varphi(x)\varphi'^2(x))^2 = 0,$$

$$\varphi(x)\varphi'^2(x) = -4x(x).$$

Отже,

$$\varphi(x)\varphi'^2(x) = -4x \equiv \det A(x), \quad \varphi(0) = 0. \quad (12)$$

Перш ніж продовжити дослідження і написати розв'язок задачі (8) необхідно розібратися із знаком правої частини рівняння. При виконанні умови

$$\det A(x) = -a(x) > 0$$

розв'язком буде функція

$$\varphi(x) \cdot \varphi(x)^2 = -4x,$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 \cdot \varphi(x) = -4x,$$

$$\frac{d\varphi}{dx} \cdot \sqrt{\varphi(x)} = \sqrt{-4x},$$

$$\int \varphi^{\frac{1}{2}}(x) d\varphi = \int_0^x \sqrt{-4x} dx,$$

$$\frac{2}{3} \varphi^{\frac{3}{2}}(x) = \int_0^x \sqrt{-4x} dx,$$

$$\varphi^{\frac{3}{2}}(x) = \frac{3}{2} \int_0^x \sqrt{-4x} dx,$$

$$\varphi(x) = \left(\frac{3}{2} \int_0^x \sqrt{-4x} dx \right)^{\frac{2}{3}}.$$

$$\varphi(x) = \sqrt[3]{4x}.$$

$$\varphi'(x) = \sqrt[3]{4}.$$

Оскільки $\det \Phi(x) \equiv 0$, то існує нетривіальний розв'язок системи (8) вигляду

$$Z_{kr}(x) = \quad (13)$$

$$= \text{colomn} \left(0, \frac{1}{\varphi(x)} \beta_{i30}(x), -\frac{a(x)}{\varphi'(x)} \beta_{i20}(x), 0, \beta_{i20}(x), \beta_{i30}(x) \right)$$

де $\beta_{ik0}(x)$, $r = \overline{0,2}$; $i = 1,2$; $k = \overline{1,3}$ – до певного моменту вільні, достатньо гладкі функції при $x \in [-0;1]$.

З явного вигляду матриці (11) і розв'язку (13) видно, що систему (8) можна розбити на дві системи

$$\begin{cases} \sqrt[3]{4}\alpha_{i2r}(x) - \beta_{i3r}(x) = \alpha'_{i2(r-1)}(x) \\ 4x \cdot \alpha_{i2r}(x) + \sqrt[3]{16}x\beta_{i3r}(x) = \beta_{i3(r-1)}(x) \end{cases} \quad (14)$$

і

$$\begin{cases} \sqrt[3]{4}\alpha_{i3r}(x) + 4x \cdot \beta_{i2r}(x) = \alpha'_{i3(r-1)}(x) \\ -\alpha_{i3r}(x) + \sqrt[3]{16}x\beta'_{i2r} = \beta_{i2(r-1)} \end{cases} \quad (15)$$

Ці системи незалежні одна від одної. Але при побудові асимптотики розв'язку розширеного рівняння вони беруть участь одночасно на кожному ітераційному кроці.

Розв'яжемо дані системи. Спочатку розглянемо ці системи при $r = 3$. Врахувавши, одержаний розв'язок (13), з систем (14) і (15) одержимо

$$\begin{cases} \sqrt[3]{4}\alpha_{i23}(x) - \beta_{i33}(x) = \alpha'_{i20}(x) \equiv \left(\frac{1}{\varphi} \beta_{i30}\right), \\ 4x \cdot \alpha_{i23}(x) + \sqrt[3]{16}x\beta_{i33}(x) = \beta_{i30}(x). \end{cases} \quad (16)$$

і

$$\begin{cases} \sqrt[3]{4}\alpha_{i33}(x) + 4x \cdot \beta_{i23}(x) = \left(-\frac{a}{\varphi} \beta_{i20}\right), \\ -\alpha_{i33}(x) + \sqrt[3]{16}x\beta'_{i23} = \beta'_{i20}. \end{cases} \quad (17)$$

Дослідити більш детально праві частини систем (16) і (17). Для того, щоб існував нетривіальний розв'язок систем (16) і (17) необхідно і досить, щоб ранги розширених матриць співпадали з відповідними рангами матриць цих систем [8]. Для виконання цих умов скористаємось довільністю функцій $\beta_{ik0}(x)$:

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{4x} \equiv \frac{1}{\sqrt[3]{16}x} = \frac{\left(\frac{1}{\varphi'}(x) \beta_{i30}(x)\right)}{\beta'_{i30}(x)}, \quad i = 1, 2 \quad (18)$$

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{-1} \equiv \frac{4x}{\sqrt[3]{16}x} = \frac{\left(-\frac{4x}{\sqrt[3]{4}} \beta_{i20}(x)\right)}{\beta'_{i20}(x)}, \quad i = 1, 2 \quad (19)$$

З (18) при фіксованих $i = 1, 2$ одержимо диференціальне рівняння

$$2\beta'_{i30}(x) - \frac{4x+4}{4x} \cdot \beta_{i30}(x) = 0. \quad (20)$$

З (19) при фіксованих $i = 1, 2$ одержимо диференціальне рівняння

$$-8x \cdot \beta'_{i20} - (8+4x)\beta_{i20} = 0. \quad (21)$$

В (18) і (19) гладкими розв'язками будуть функції $\beta_{ik0}(x) = \beta_{ik0}^0 \cdot \tilde{\beta}_{ik0}(x)$, $k = \overline{1,3}$, $i = 1, 2$, де $\beta_{ik0}^0(x)$ – довільні сталі, $\tilde{\beta}_{ik0}(x)$ – частинні, достатньо гладкі для всіх $x \in [0;1]$, розв'язки однорідних рівнянь (10).

При такому визначенні вектор-функцій $Z_{k0}(x)$ існують розв'язки неоднорідних систем алгебраїчних рівнянь (16) і (17) вигляду

$$Z_{kr}(x) = \text{column} \begin{pmatrix} 0, \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \frac{\sqrt{e^{C_{i30}}}}{\sqrt{e^x} \cdot \sqrt{x}}, -\frac{4x}{\sqrt[3]{4}} \frac{e^{C_{i20}}}{e^x \cdot e^{\frac{1}{4}x}}, \\ 0, \frac{e^{C_{i20}}}{e^x \cdot e^{\frac{1}{4}x}}, \frac{\sqrt{e^{C_{i30}}}}{\sqrt{e^x} \cdot \sqrt{x}} \end{pmatrix} \quad (22)$$

де $\beta_{ikr}(x)$, $i = 1,2$, $k = \overline{1,3}$ до певного часу довільні, достатньо гладкі для всіх $x \in [0;1]$.

Продовжуючи далі розв'язувати ітераційні системи алгебраїчних рівнянь (16) і (17) при $r > 3$, методом математичної індукції можна показати, що ці системи рівнянь асимптотично коректні в такому смислі. Якщо вимагати існування розв'язків систем рівнянь (16) і (17) при $r = 0; q$, то кожна з цих систем при $r = 0; q-1$, визначається з точністю до двох довільних скалярних множників $\beta_{ik0}^0(x)$, які утворюють довільний вектор $\beta_{ikr}^0 = \text{column}(\beta_{i2r}^0, \beta_{i3r}^0)$.

Третій формальний розв'язок розширеної системи (6)

$$\omega_k(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \mu^r \omega_{kr}(x). \quad (23)$$

Для визначення вектор-функцій $\omega_{kr}(x)$ одержимо рекурентні системи рівнянь

$$\begin{aligned} A_0(x) \cdot \omega_0(x) &= 0, \\ A_r(x) \cdot \omega_r(x) &= A_1(x) \cdot \omega_{(r-1)}(x) - \omega'_{(r-1)}(x), \quad r \geq 1. \end{aligned} \quad (24)$$

де $\omega_r(x) = \text{column}(\omega_{1r}(x), \omega_{2r}(x), \omega_{3r}(x))$ – невідома вектор-функція.

Дослідимо розв'язок однорідного рівняння $A_0(x) \cdot \omega_0(x) = 0$. В результаті отримаємо $\omega_{30}(x) = 0$ і систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} \omega'_{10}(x) - \omega_{20}(x) = 0, \\ 4x \cdot \omega_{20}(x) - (4x + 4) \omega_{10}(x) = 0. \end{cases}$$

З цієї системи отримаємо наступне диференціальне рівняння

$$4x \cdot \omega'_{10}(x) - (4x + 4) \omega_{10}(x) = 0. \quad (25)$$

Розв'язок рівняння (25) запишемо у вигляді:

$$\omega_{10}(x) = \omega_{10}^0 \cdot x \cdot e^x,$$

де ω_{10}^0 – довільна стала.

На наступному кроці ми отримаємо неоднорідну систему рівнянь. Її розв'язок також буде містити одну довільну сталу ω_{11}^0 . Продовжуючи далі розв'язувати системи рівнянь (24) будемо третій формальний розв'язок системи (6) у вигляді ряду

Таким чином ми побудували три лінійно незалежні розв'язки для системи (2) у вигляді формального ряду

$$Y_{\text{hom}}(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \left[\sum_{i=1}^2 \left[\alpha_{ik}(x) U_i(t) + \varepsilon^{1/3} \beta_{kr}(x) U'_i(t) \right] \right] + \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \omega_r(x). \quad (25)$$

Звуження (25) при

$$t = \varepsilon^{-2/3} \cdot \sqrt[3]{4x},$$

Тобто, ряд

$$Y_{\text{hom}}(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \left[\sum_{i=1}^2 \left[\alpha_{ik}(x) U_i \left(\varepsilon^{-2/3} \cdot \sqrt[3]{4x} \right) + \varepsilon^{1/3} \beta_{kr}(x) \frac{dU_i(\varepsilon^{-2/3} \cdot \sqrt[3]{4x})}{d(\varepsilon^{-2/3} \cdot \sqrt[3]{4x})} \right] \right] + \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \omega_r(x).$$

є формальним розв'язком системи (3).

Таким способом, тепер можемо записати асимптотику для загального розв'язку системи (3).

Висновок 1. Асимптотику розв'язку однорідної системи (3) при виконанні умов Q1 та Q2 можна записати у вигляді ряду

$$Y_{\text{hom}}(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^2 \left\{ \left[\sum_{r=0}^q \varepsilon^r \alpha_{kr}(x) + O(\varepsilon^{q+1}) \right] U_k(\varepsilon^{-2/3} \cdot \varphi(x)) + \varepsilon^{1/3} \left[\sum_{r=0}^q \varepsilon^r \beta_{kr}(x) + O(\varepsilon^{q+1}) \right] \frac{dU_k(\varepsilon^{-2/3} \cdot \varphi(x))}{d(\varepsilon^{-2/3} \cdot \varphi(x))} + \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \omega_r(x) + O(\varepsilon^{q+1}) \right\} \quad (26)$$

Підставивши знайдені розв'язки у (26) отримуємо:

$$Y_{\text{hom}}(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^2 \left\{ \left[\sum_{r=0}^q \varepsilon^r \left(\frac{0}{\sqrt[3]{4} \sqrt{e^{Cx30}}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4} \sqrt{e^x \sqrt{x}}} \frac{1}{4x e^{Cx20}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4} e^x e^{4x}} \right) + \varepsilon^1 \left(\frac{0}{\sqrt[3]{4} \sqrt{e^{Cx30}}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4} \sqrt{e^x \sqrt{x}}} \frac{1}{4x e^{Cx20}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4} e^x e^{4x}} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{0}{\sqrt[3]{4} \sqrt{e^{Cx30}}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4} \sqrt{e^x \sqrt{x}}} \frac{1}{4x e^{Cx20}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4} e^x e^{4x}} \right) + O(\varepsilon^{q+1}) \right] \times U_i \left(\varepsilon^{-2/3} \cdot \sqrt[3]{4x} \right) + \varepsilon^{1/3} \times \left[\sum_{r=0}^q \varepsilon^r \left(\frac{0}{\sqrt{e^{Cx20}}} \frac{1}{e^x e^{4x}} + \frac{0}{\sqrt{e^{Cx20}}} \frac{1}{e^x e^{4x}} + \frac{0}{\sqrt{e^{Cx20}}} \frac{1}{e^x e^{4x}} \right) + O(\varepsilon^{q+1}) \right] \frac{dU_i(\varepsilon^{-2/3} \cdot \sqrt[3]{4x})}{d(\varepsilon^{-2/3} \cdot \sqrt[3]{4x})} \right\} + \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \left(\frac{0}{\sqrt[3]{4} \sqrt{e^{Cx30}}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4} \sqrt{e^x \sqrt{x}}} \frac{1}{4x e^{Cx20}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4} e^x e^{4x}} \right) + O(\varepsilon^{q+1})$$

5. Висновки

Таким способом в роботі проведено аналіз результатів з асимптотичного аналізу сингулярно збурених задач з точками звороту. Для однорідної системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з малим параметром при старшій похідній і точкою звороту (2), одержані умови для побудови рівномірної асимптотики розв'язку.

Розглянуто випадок, коли спектр граничного оператора містить кратні і тотожно рівні нулю елементи. Асимптотика розв'язку будується методом істотно особливих функцій, який дозволяє в околі точки звороту використати модельний оператор Ейрі.

Конструкція асимптотичних розв'язків містить довільні сталі, які визначаються однозначно під час розв'язання ітераційних рівнянь. Теоремою 1 визначено умови існування розв'язку системи диференціальних з малим параметром при старшій похідній та при наявності точки звороту, за умови, що точка звороту міститься на інтервалі $[0; l]$. Розглянуто

приклад побудови асимптотики однорідної системи диференціальних рівнянь (3) з відповідними умовами на коефіцієнти.

Список використаних джерел

1. Eberhard W., Freiling G. and Wilcken K. Indefinite eigenvalue problems with several singular points and turning points./ W. Eberhard, G. Freiling and K. Wilcken // *Math. Nachr.*, 229, pp. 51-71, 2001. doi: 10.1002/1522-2616(200109)229:13.0.CO;2-4.
2. Langer R.E. The asymptotic solutions of a linear differential equations of the second order with two turning points/ R. Langer // *Trans. Amer. Math. Soc.* V. 90, pp.113–142, 1959.
3. Nijimbere V. Asymptotic “Approximation of the Eigenvalues and the Eigenfunctions for the Orr-Sommerfeld Equation on Infinite Intervals /V. Nijimbere // *Advances in Pure Mathematics*, 9, pp. 967-989, 2019. DOI: 10.4236/apm.2019.912049.
4. Locker J. Spectral Theory of Non-Self-Adjoint Two-Point Differential Operators, Mathematical Surveys and Monographs/J. Locker// American Mathematical Society, Rhode Island, 2000, vol. 73, doi: 10.1090/surv/073
5. Бобочко В.М., Перестюк М.О. Асимптотичне інтегрування рівняння Ліувілля з точками звороту/В.М.Бобочко, М.О.Перестюк // Київ: Наукова думка. 310 с.
6. Самойленко А.М., Ключник І.Г. Про асимптотичне інтегрування лінійної системи диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних/А.М.Самойленко, І.Г. Ключник // *Нелінійні коливання*. (2009). Т.12, № 2.- С. 208-234.
7. Самойленко А. М., Самусенко П. Ф. Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних рівнянь з точками повороту. /І. А.М. Самойленко, П.Ф. Самусенко// *Український математичний журнал*, вип. 72, вип. 12, Грудень 2020, с. 1669-1681
8. Zelenska I. System of singularly perturbed equations with differential turning point of the first kind /I. Zelenska// *Russ Math.* 2015.- 59. – P.55–65.
<https://doi.org/10.3103/S1066369X15030068>
9. Собчук В. В., Зеленська І.О. Побудова асимптотики розв’язку системи СЗДР 4-го порядку з диференціальною точкою звороту методом істотно особливих функцій/В.В.Собчук, І.О.Зеленська// *Науковий вісник Ужгородського університету*, 2022. 41(2). С. 78-90. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41\(2\).78-90](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).78-90)
10. Sobchuk V., Laptiev O., Zelenska I. Algorithm for solution of systems of singularly perturbed differential equations with a differential turning point/ V. Sobchuk, O. Laptiev, I. Zelenska// *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, Vol. 71(3), 2023, Article number: e145682 DOI: 10.24425/bpasts.2023.145682

References

1. EBERHARD, W., FREILING, G., WILCKEN, K. (2001) Indefinite eigenvalue problems with several singular points and turning points. *Math. Nachr.*, 229, pp. 51-71. doi: 10.1002/15222616(200109)229:13.0.CO;2-4.
2. LANGER, R.E. (1959) The asymptotic solutions of a linear differential equations of the second order with two turning points. *Trans. Amer. Math. Soc.* V. 90, pp.113–142.
3. NIJIMBERE, V. (2019) Asymptotic approximation of the eigenvalues and the eigenfunctions for the Orr-Sommerfeld equation on infinite intervals”. *Advances in Pure Mathematics*, 9, pp. 967-989. DOI: 10.4236/apm.2019.912049.
4. LOCKER, J. (2000) Spectral Theory of Non-Self-Adjoint Two-Point Differential Operators, Mathematical Surveys and Monographs. *American Mathematical Society, Rhode Island*, V. 73, doi: 10.1090/surv/073
5. BOBOCHKO V., PERESTYUK M. (2002) *Asymptotic integration of the Liouville equation with turning points*. Kyiv: Scientific opinion.

6. SAMOILENKO, A., KLYUCHNYK, I. (2009) On the asymptotic integration of a linear system of differential equations with a small parameter with partial derivatives". *Nonlinear oscillations*. V. 12(2). pp. 208-234.
7. SAMOILENKO, A., SAMUSENKO, P. (2020) Asymptotic Integration of Singularly Perturbed Differential Algebraic Equations With Turning Points. Part I. *Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal*, V 72(12), pp. 1669-81, doi:10.37863/umzh.v72i12.6261.
8. ZELENSKA, I. (2015) System of singularly perturbed equations with differential turning point of the first kind. *Russ Math.* 2015.- 59. – p.55–65. <https://doi.org/10.3103/S1066369X15030068>
9. SOBCHUK, V., ZELENSKA, I (2022) Construction of the asymptotics of the solution of the 4th-order SZDR system with a differential turning point by the method of essentially singular functions. *Scientific Bulletin of the Uzhhorod University*, V. 41(2), p. 78-90. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41\(2\).78-90](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).78-90) (in Ukrainian).
10. SOBCHUK, V., LAPTIEV, O., ZELENSKA, I. (2023) Algorithm for solution of systems of singularly perturbed differential equations with a differential turning point. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, V. 71(3). pp. Article number: e145682 DOI: 10.24425/bpasts.2023.145682

Надійшла до редколегії 10.09.2023