

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

№1 2023

**Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
випуск №1, 2023**

Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Фізика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, механіко-математичного факультетів, факультету радіофізики, електроніки та комп’ютерних систем і факультету комп’ютерних наук та кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора, кандидата наук і PhD за спеціальностями 111, 112, 113, 104, 105 (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1188 від 24.09.2020) та за спеціальностями 121, 122, 123, 124 (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1471 від 26.11.2020), та реферується в Реферативному журналі Zentralblatt MATH, JournalTOCs, Crossref, ICI World of Journals, Road, Google Scholar і Науковій періодиці України.

Редакційна колегія:

Моклячук Михайло Павлович, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор**;
Розора Ірина Василівна, д.ф.-м.н., доц., **заст. головного редактора**;
Bartlova Milada, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;
Bavula Vladimir, Prof., University of Sheffield, Great Britain;
Beghin Luisa, Prof., Sapienza Università di Roma, Italy;
Futorny Vyacheslav, Prof., Universidade de São Paulo, Brazil;
Giuliano Rita, Prof., Università di Pisa, Italy;
Gorlatch Sergei, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;
Hudak Stefan, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;
Kukhtarev Nickolai, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;
Leonenko Nikolay, Prof., Cardiff University, Great Britain;
Medvids Arturs, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;
Olenko Andriy, Prof., La Trobe University, Australia;
Orsingher Enzo, Prof., Sapienza University of Rome, Italy;
Ostrovsky Eugene, Prof., Bar-Ilan University, Israel;
Pogany Tibor, Prof., University of Rijeka, Croatia;
Rontó Miklós, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;
Silvestrov Dmitrii, Prof., Stockholms universitet, Sweden;
Sottinen Tommi, Prof., University of Vaasa, Finland;
Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;
Trofimchuk Sergey, Prof., Universidad de Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;
Volodin Andrei, Prof., University of Regina, Canada;
Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;
Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Безущак Оксана Омелянівна, д.ф.-м.н., проф.;
Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;
Гарашенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;
Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;
Жук Ярослав Олександрович, д.ф.-м.н., проф.;
Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., проф.;
Курченко Олександр Олексійович, д.ф.-м.н., проф;

Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;
Львов Віктор Анатолійович, д.ф.-м.н., проф.;
Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;
Майборода Ростислав Євгенович, д.ф.-м.н., проф.;
Мішура Юлія Степанівна, д.ф.-м.н., проф.;
Пашко Анатолій Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Петравчук Анатолій Петрович, д.ф.-м.н., проф.;
Погорілий Сергій Дем'янович, д.т.н., проф.;
Савенков Сергій Миколайович, д.ф.-м.н., доц.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.;
Сливка-Тилищак Ганна Іванівна, д.ф.-м.н., проф.;
Хусаїнов Денис Ях'євич, д.ф.-м.н., проф.;

Редакційний відділ:

Затула Дмитро Васильович, **відповідальний секретар**;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
П'ятецька Олена Василівна, visnyk.phys-math@ukr.net;
Отто Георгій Костянтинович, **технічний редактор**, ottogk@gmail.com.

Адреса редакційної колегії:

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03022 Тел. (044) 259-01-49
bphm@knu.ua, fm.visnyk@ukr.net

ISSN 1812-5409

Засновник: Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Свідectво про державну реєстрацію: КВ №16299-4771Р від 11.12.2009 року

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/1>

Безкоштовно

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics
No. 1, 2023.

The journal contains results of new research in various fields of mathematics, computer science, mechanics, physics and radiophysics for researchers, academic staff, postgraduates, engineers and students. It is published on the recommendation of the Academic Councils of Faculty of Physics, Faculty of Radiophysics, Electronics and Computer Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics and the Faculty of Computer Science and Cybernetics.

Journal "Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics" is included in the List of scientific professional publications of Ukraine, in which the results of the theses for obtaining the scientific degrees of a doctor and a candidate of sciences (PhD) in specialties 111, 112, 113, 104, 105, 121, 122, 123 and 124 can be published (approved by the orders of the Ministry of Education and Science of Ukraine No. 1188 dated September 24, 2020 and No. 1471 dated November 26, 2020).

Journal is referenced in the abstract journal **Zentralblatt MATH (zbMATH), JournalTOCs, Crossref, ICI World of Journals, Road, Google Scholar and Scientific periodicals of Ukraine.**

Editorial Board

Moklyachuk Mikhail Pavlovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine,
Editor in Chief;

Rozora Iryna Vasylyivna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Ukraine, Deputy Editor in Chief;

Bartlova Milada, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;

Bavula Vladimir, Prof., University of Sheffield, Great Britain;

Beghin Luisa, Prof., Sapienza Università di Roma, Italy;

Futorny Vyacheslav, Prof., Universidade de São Paulo, Brazil;

Giuliano Rita, Prof., Università di Pisa, Italy;

Gorlatch Sergei, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;

Hudak Stefan, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;

Kukhtarev Nikolai, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;

Leonenko Nikolay, Prof., Cardiff University, Great Britain;

Medvids Arturs, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;

Olenko Andriy, Prof., La Trobe University, Australia;

Orsingher Enzo, Prof., Sapienza University of Rome, Italy;

Ostrovsky Eugene, Prof., Bar-Ilan University, Israel;

Pog'any Tibor, Prof., University of Rijeka, Croatia;

Rontó Miklós, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;

Silvestrov Dmitrii, Prof., Stockholm University, Sweden;

Sottinen Tommi, Prof., University of Vaasa, Finland;

Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;

Trofimchuk Sergey, Prof., Universidad de Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;

Volodin Andrei, Prof., University of Regina, Canada;

Akimenko Vitaliy Vladimirovich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Anisimov Igor Alekseevich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Anisimov Anatoliy Vasylovych, Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Bezushchak Oksana Omelyanivna, Dr., Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Voloshin Aleksey Fedorovich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Garaschenko Fedir Georgievich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Yezhov Stanislav Nikolaevich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Zhuk Yaroslav Aleksandrovich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Zaslavskiy Volodymyr Anatolijovych, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Kurchenko Oleksandr Oleksijovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Kudin Volodymyr Ivanovich, Dr. Sci., Sr. Sci. Researcher, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Lvov Victor Anatolijovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Makarets' Nikolay Vladimirovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Maiboroda Rostyslav Yevhenovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Mishura Yuliya Stepanivna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Pashko Anatolij Oleksijovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Perestyuk Mykola Oleksijovych, Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Petravchuk Anatolij Petrovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Pogorily Serhiy Demyanovych, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Savenkov Serhij Mykolajovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Skrzyeysky Valery Antonovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Slyvka-Tylyshchak Anna Ivanivna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Uzhhorod National University, Uzhhorod, Ukraine;
Husainov Denys Yah'yevych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine.

ISSN: 2218-2055 (on-line version)

ISSN: 1812-5409 (printed version)

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/1>

Founders: Taras Shevchenko National University of Kyiv

Foundation year: 1991 (series of bulletins of Kyiv University "Mathematics and Mechanics", "Physics", "Modeling and Optimization of Complex Systems" was reorganized into "Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics").

Certificate of state registration: KB № 16299-4771 P dated 11.12.2009

Issued: 4 times a year

Mailing Address

Taras Shevchenko National University of Kyiv
Faculty of Computer Science and Cybernetics,
03022, Ukraine, Kyiv, 4d Academician Glushkov avenue
Phone: (044) 259-01-49
bphm@knu.ua, fm.visnyk@ukr.net

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Арський Н. О. Теоретико-числові функції для цілих гаусових чисел	11
Безущак Д.І., Безущак О.О., Диференціювання нескінченно вимірних супералгебр Лі	21
Бондаренко В.М. Доповнення до статті «Козображення матричних алгебр Манна»	26
Борисенко О.Д., Борисенко О.В. Вимирання та виживання у залежній від щільності популяції хижака стохастичній моделі хижак-жертва із стрибками	30
Горбунов Д. Д., Майборода Р. Є. Крос-валідація у локально-лінійній регресії для спостережень з суміші	37
Зубченко В.П., Александрова П.В. Математичне моделювання динаміки страхової компанії на основі макропоказників	44
Іванов О. В., Орловський І. В. Виявлення прихованих періодичностей в моделях з дискретним часом та сильно залежним випадковим шумом	48

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Жук О.П., Жук Я.О., Клімчук Т.В. Про взаємодію сферичних крапель рідини в радіаційному полі акустичної хвилі	61
Білий В.О., Білий О. Г. Порівняльна динаміка витікання рідини із ємностей певних геометричних форм в залежності від зміни осі обертання	65

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Врублевський В.Н., Марченко О. О. Огляд підходів до розв'язання задач ідентифікації парафраз	71
Зуєв А.М. Пошук рядка в тексті. Актуальні досягнення та дослідження	79
Ліпський Д. О. Розробка платформи для автоматизації тестування веб-додатків	89
Ількун О.П. Вебзастосунки як один із сучасних способів реалізації систем підтримки прийняття рішень	94
Москанова О.Ф. Геометрична рекурентність процесу неоднорідної гауссівської авторегресії	101

СУЧАСНА ФІЗИКА

Андреев В.О., Розрахунок магнітної сприйнятливості виродженого ідеального газу електронів у випадку анізотропної ефективної маси	108
Андреев В.О., Чолій Я.В., Макарець М.В. Розрахунок кумулянтів і параметрів функції розподілу методом монте-карло та із рівняння для неї	112
Колесник С. І., Максютя М. В., Обуховський В. В. Порівняльний аналіз деяких систем ПРО/ППО за допомогою теорії нечітких множин	116

CONTENTS

ALGEBRA, GEOMETRY AND PROBABILITY THEORY

Arskiy N. O. Number-theoretic functions for Gaussian integers	11
Bezushchak D.I., Bezushchak O.O., Derivations of infinite-dimensional Lie superalgebras	21
Bondarenko V. M. Addendum to the paper "Corepresentations of Munn matrix algebras".	26
Borysenko O. D., Borysenko O. V. Extinction and persistence in stochastic predator population density-dependent predator-prey model with jumps	30
Horbunov D. D., Maiboroda R. E. Cross-validation for local-linear regression by observations from mixture	37
Zubchenko V.P., Aleksandrova P.V. Mathematical modeling of the dynamics of an insurance company based on macro indicators	44
Ivanov A. V., Orlovskiy I. V. Detection of hidden periodicities in models with discrete time and long range dependent random noise	48

DIFFERENTIAL EQUATIONS, MATHEMATICAL PHYSICS AND MECHANICS

Zhuk O.P., Zhuk Y.A., Klimchuk T.V. On interaction of liquid drops located in radiation field of the acoustic wave	61
Bilyi V. O., Bilyi O. G. Comparative dynamics of liquid outflow from containers of certain geometric shapes depending on the change in the axis of rotation	65

COMPUTER SCIENCES AND INFORMATICS

Vrublevskiy V. N., A. A. Marchenko, Review of approaches for paraphrase identification	71
Zuiev A.M. Exact pattern matching. Current achievements and research	79
Lipskiy D. O. Development of a Web Application Testing Automation Platform	89
Ilkun O. P. Web applications as one of the modern ways of implementing decision support systems	94
Moskanova O.F. Geometric recurrence of inhomogeneous Gaussian autoregression process	101

MODERN PHYSICS

Andreyev V.O., Calculation of the magnetic susceptibility of a degenerate ideal gas of electrons in the case of anisotropic effective mass	108
Andreyev V.O., Choliy Ya.V., Makarets M.V. Cumulants and parameters calculation of distribution function by monte carlo and from the equation for it.	112
Kolesnyk S. I., Maksyuta M. V., Obukhovskiy V. V. Comparative analysis of some anti-missile defense/air defense systems using fuzzy set theory	116

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ ТА ТЕОРИЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 511.1

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/1.1>

Н. О. Арський

Теоретико-числові функції для цілих гаусових чисел

Український фізико-математичний ліцей Ки-
ївського національного університету імені Та-
раса Шевченка, 03022, м. Київ, пр-т Глушкова
6,
e-mail: nikita.arskiy.25@gmail.com

N. O. Arskiy

Number-theoretic functions for Gaussian integers

Ukrainian Physical and Mathematical Lyceum of
Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03022, Kyiv, 6 Hlushkova Avenue,
e-mail: nikita.arskiy.25@gmail.com

Класичні теоретико-числові функції: кількість дільників $\tau(n)$, сума дільників $\sigma(n)$ і добуток дільників $\pi(n)$ числа n — узагальнюються на кільце $\mathbb{Z}[i]$ цілих гаусових чисел. Для обчислення відповідних функцій $\tau^*(\alpha)$, $\sigma_m^*(\alpha)$ і $\pi^*(\alpha)$ одержано явні формули, що використовують канонічний розклад числа α . Досліджено ряд властивостей цих функцій, зокрема, оцінки згори для функцій $\tau^*(\alpha)$ і $\sigma_m^*(\alpha)$ та властивості, пов'язані із подільністю значень цих функцій на ті чи інші числа. Досліджуються також властивості сум добутків степенів дільників числа $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$.

Ключові слова: цілі гаусові числа, дільник, кількість дільників, сума дільників, добуток дільників.

The classical number-theoretic functions—a number of divisors $\tau(n)$, sum of the divisors $\sigma(n)$ and product of the divisors $\pi(n)$ of a positive integer n —were generalized to the ring $\mathbb{Z}[i]$ of Gaussian integers. For the evaluation of the corresponding functions $\tau^*(\alpha)$, $\sigma_m^*(\alpha)$ and $\pi^*(\alpha)$, obtained were the explicit formulae that use the canonical representation of α . A number of properties of these functions were studied, in particular, estimates from above for the functions $\tau^*(\alpha)$ and $\sigma_m^*(\alpha)$ and the properties connected with divisibility of their values by certain numbers. Researched are also sums of products of powers of the divisors for $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$.

Key Words: Gaussian integers, divisor, number of divisors, sum of the divisors, product of the divisors.

Communicated by prof. Bezushchak O.O.

Introduction

Gaussian integers, i.e. complex numbers of the form $a + bi$, where $a, b \in \mathbb{Z}$, were introduced by Gauss in the late 1820s in his studies of the law of biquadratic reciprocity [1]. Then he explored a number of their properties: relation of divisibility, unit divisors, primality criteria for Gaussian integers, residue classes, multiplicative orders, primitive roots, and proved an analogue of the fundamental theorem of arithmetic [2]. After Gauss, these numbers were used in studying of multiple number-theoretic issues (particularly effectively for researching solvability of certain classes of diophantine equations), as well as in other mathematical branches, for instance, in the theory of elliptic functions. However, there was in fact no systematic research of the ring $\mathbb{Z}[i]$, especially since in the middle of the XIX century the much more general theory of algebraic numbers

began to develop. In particular, for $\mathbb{Z}[i]$ there was no study of the properties of the natural number-theoretic functions—the number, sum and product of the divisors—that play a great role in classical number theory. In this paper, we partially complete this gap.

The ring $\mathbb{Z}[i]$ of Gaussian integers

The ring $\mathbb{Z}[i]$ of Gaussian integers is a subset

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

of the field $\mathbb{C}$ of complex numbers. Further we present (without proof) only a few properties of this ring that we need (one may have a more detailed view of these properties in [3], [4], [5]).

The invertible elements of the ring $\mathbb{Z}[i]$ are called units. There are exactly four of them: $1, -1, i, -i$. Gaussian integers α and β are called associates (which is denoted by $\alpha \sim \beta$) if $\beta = \gamma\alpha$,

where γ is a unit. Note that associates have the same divisors.

For a Gaussian integer $\alpha = a + bi$, the number $N(\alpha) = a^2 + b^2$ is called the norm of α . The complex conjugate $a - bi$ of α is denoted by $\bar{\alpha}$.

They say that a Gaussian integer α is divisible by a non-zero Gaussian integer β (or, equivalently, β is said to divide α , which is denoted by $\beta \mid \alpha$) if there exists a Gaussian integer γ such that $\alpha = \beta\gamma$. In this case, β is called a divisor of α .

Proposition 1. *A Gaussian integer β divides a Gaussian integer α if and only if $\bar{\beta}$ divides $\bar{\alpha}$.*

The divisors of α of the form $\pm 1, \pm i, \pm \alpha, \pm i\alpha$ are called trivial. All the other divisors are called non-trivial. Gaussian integers ± 1 and $\pm i$ have exactly 4 divisors each. All the other non-zero Gaussian integers have at least 8 divisors.

A common divisor of two Gaussian integers α and β that is divisible by all their common divisors is called a greatest common divisor. Every two Gaussian integers α and β have exactly 4 greatest common divisors, and these divisors are associates. A non-zero Gaussian integer is said to be prime if all of its divisors are units or its associates.

Two Gaussian integers are said to be relatively prime if their greatest common divisors are units.

Theorem 1. *Every Gaussian integer α with $N(\alpha) > 1$ can be factorized into primes in a unique way up to the order of the factors and their associativity.*

Proposition 2. *A Gaussian integer $a + bi$ is divisible by $1 + i$ if and only if the numbers a and b are of the same parity.*

Theorem 2. *Every Gaussian prime ρ satisfies one of the following conditions:*

- 1) ρ is an associate of $1 + i$;
- 2) ρ is an associate of a prime positive integer $p \equiv 3 \pmod{4}$;
- 3) the norm $N(\rho)$ is a prime positive integer $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Proposition 3. *Two non-zero Gaussian integers α and $\bar{\alpha}$ are associates if and only if one of the following conditions is satisfied:*

- Re $\alpha = 0$; (1)
- Im $\alpha = 0$; (2)
- Re $\alpha = \text{Im } \alpha$; (3)
- Re $\alpha = -\text{Im } \alpha$. (4)

Proposition 4. *A Gaussian integer $\alpha \neq 0$ is an associate of its conjugate if and only if there exists a positive integer m such that $\alpha^m \in \mathbb{Z}$.*

The number of divisors of a Gaussian integer

Consider $\alpha \in \mathbb{Z}[i], N(\alpha) > 1$. By theorem 1, there exists a representation $\alpha = \mu \rho_1^{a_1} \rho_2^{a_2} \cdots \rho_k^{a_k}$, where μ is a unit and $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$ are non-associate Gaussian primes. We call this representation canonical.

By $\tau^*(\alpha) = \sum_{\delta \mid \alpha} 1$ we denote the number of divisors of $\alpha \neq 0$.

Theorem 3. *If $\alpha = \mu \rho_1^{a_1} \rho_2^{a_2} \cdots \rho_k^{a_k}$ is the canonical representation of α , then*

$$\tau^*(\alpha) = 4 \prod_{j=1}^k (a_j + 1). \quad (5)$$

Доведення. Taking into account the uniqueness of the prime representation (theorem 1), one can rewrite every divisor δ of the number α uniquely as follows: $\delta = \nu \rho_1^{c_1} \rho_2^{c_2} \cdots \rho_k^{c_k}$, where $\nu \in \{\pm 1; \pm i\}$ and $0 \leq c_j \leq a_j$ for all j . $\square$

Proposition 5 (properties of the τ^* function).

- (a) $\tau^*(\alpha)$ is divisible by 4;
- (b) $\tau^*(\alpha) = 4$ if and only if α is a unit;
- (c) $\tau^*(\alpha) = 8$ if and only if α is a Gaussian prime;
- (d) $\tau^*(\alpha) = 12$ if and only if α is an associate of a square of a Gaussian prime;
- (e) if α is a Gaussian prime and $c \in \mathbb{N}, \mu \sim 1$, then $\tau^*(\mu\alpha^c) = 4(c + 1)$;
- (f) for every positive integer c that is not equal to 1, there exist infinitely many numbers α , such that $\tau^*(\alpha) = 4c$;
- (g) $\tau^*(\bar{\alpha}) = \tau^*(\alpha)$.

Доведення. Propositions (a)-(f) follow from the definition of the τ^* function and theorem 3. Proposition (g) follows from proposition 1. $\square$

Proposition 6. $\tau^*(\alpha)$ is not divisible by 8 if and only if α is an associate of a square of a non-zero Gaussian integer.

Доведення. *Necessity.* Suppose $\alpha = \mu \rho_1^{a_1} \rho_2^{a_2} \cdots \rho_k^{a_k}$. If $8 \nmid \tau^*(\alpha)$, then in (5), all the factors $a_1 + 1, a_2 + 1, \dots, a_k + 1$ are odd. Hence, $a_1, a_2, \dots, a_k$ are even, and α is an associate of $\left(\rho_1^{a_1/2} \rho_2^{a_2/2} \cdots \rho_k^{a_k/2}\right)^2$.

Sufficiency follows immediately from equality (5). $\square$

Proposition 7. For every Gaussian integer α that is divisible by $1 + i$, the following inequality holds:

$$\tau^*(\alpha) \leq 6|\alpha|$$

with equality if and only if $\alpha \sim 2$.

Lemma 1. For all positive integers n , the inequality $\frac{3(\sqrt{2})^n}{2} \geq n + 1$ holds with equality if and only if $n = 2$.

Доведення. For $n \leq 3$ the statement of the lemma can be easily checked. The next part of the proof is done using induction. Since $(n + 1) \cdot \sqrt{2} > n + 2$ for all $n \geq 3$, we have

$$\begin{aligned} \frac{3(\sqrt{2})^{n+1}}{2} &= \frac{3(\sqrt{2})^n}{2} \cdot \sqrt{2} > \\ &> (n + 1) \cdot \sqrt{2} > n + 2. \end{aligned} \quad \square$$

Lemma 2. For all non-negative integers n , the inequality $(\sqrt{5})^c \geq n + 1$ holds with equality if and only if $n = 0$.

Доведення. For $n = 0$, the statement of the lemma is true. The next part of the proof is done using induction:

$$\begin{aligned} (\sqrt{5})^{n+1} &= (\sqrt{5})^n \cdot \sqrt{5} > \\ &> (n + 1) \cdot \sqrt{5} > n + 2. \end{aligned} \quad \square$$

Proof of proposition 7. Let α be divisible by $1 + i$. Then the canonical representation of α is of the form $\mu(1 + i)^a \rho_1^{a_1} \rho_2^{a_2} \cdots \rho_k^{a_k}$, where $a > 0$.

If ρ is a Gaussian prime that is not an associate of $1 + i$, then theorem 2 implies that $N(\rho) \geq 5$. For this reason, $|\rho_j| \geq \sqrt{5}$ for all $j = \overline{1, k}$. Applying lemmas 1 and 2 we obtain:

$$\begin{aligned} 6|\alpha| &= 6|1 + i|^a |\rho_1^{a_1}| |\rho_2^{a_2}| \cdots |\rho_k^{a_k}| \geq \\ &\geq 4 \cdot \frac{3(\sqrt{2})^a}{2} \cdot (\sqrt{5})^{a_1} (\sqrt{5})^{a_2} \cdots (\sqrt{5})^{a_k} \geq \\ &\geq 4(a + 1)(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1) = \tau^*(\alpha). \end{aligned}$$

In the foregoing inequalities, equality holds if and only if $a = 2$ and $k = 0$, i.e. if $\alpha = \mu(1 + i)^2 \sim 2$. $\square$

Proposition 8. For every Gaussian integer α that is not divisible by $1 + i$, the inequality

$$\tau^*(\alpha) \leq 4|\alpha|$$

holds with equality if and only if $\alpha \sim 1$.

The proof of this proposition is analogous to the previous one.

Theorem 4. For any non-zero Gaussian integers α and β the inequality

$$\tau^*(\alpha\beta) \leq \frac{1}{4}\tau^*(\alpha)\tau^*(\beta)$$

holds with equality if and only if α and β are relatively prime.

Доведення. The statement of the theorem is true if at least one of the numbers α and β is a unit. Now suppose none of α and β is a unit and

$$\alpha = \mu\rho_1^{a_1}\rho_2^{a_2} \cdots \rho_k^{a_k}, \quad \beta = \nu\rho_1^{b_1}\rho_2^{b_2} \cdots \rho_k^{b_k}$$

are their canonical representations. Then $\alpha\beta = \vartheta\rho_1^{a_1+b_1}\rho_2^{a_2+b_2} \cdots \rho_k^{a_k+b_k}$, where $\vartheta = \mu\nu \sim 1$.

Since the exponents are non-negative, we have $(a_j + 1)(b_j + 1) = a_j b_j + a_j + b_j + 1 \geq a_j + b_j + 1$ with equality if and only if $a_j = 0$ or $b_j = 0$, which implies:

$$\begin{aligned} \tau^*(\alpha\beta) &= \tau^*\left(\rho_1^{a_1+b_1}\rho_2^{a_2+b_2} \cdots \rho_k^{a_k+b_k}\right) = \\ &= 4 \prod_{j=1}^k (a_j + b_j + 1) \leq 4 \prod_{j=1}^k (a_j + 1)(b_j + 1) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot 4 \prod_{j=1}^k (a_j + 1) \cdot 4 \prod_{t=1}^k (b_t + 1) = \frac{1}{4}\tau^*(\alpha)\tau^*(\beta). \end{aligned}$$

Equality holds if and only if for all j , either $a_j = 0$ or $b_j = 0$, i.e. if α and β are relatively prime. $\square$

Corollary 1. Two non-zero Gaussian integers α and β are relatively prime if and only if $\tau^*(\alpha\beta) = \frac{1}{4}\tau^*(\alpha)\tau^*(\beta)$.

Corollary 2. If $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ are relatively prime Gaussian integers, then $\tau^*(\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n) = \frac{1}{4^{n-1}}\tau^*(\alpha_1)\tau^*(\alpha_2) \cdots \tau^*(\alpha_n)$.

Corollary 3. For every positive integer m , the inequality

$$\tau^*(\alpha^m) \leq \frac{1}{4^{m-1}}(\tau^*(\alpha))^m$$

holds with equality if and only if $\alpha \sim 1$ or $m = 1$.

The sum of the divisors of a Gaussian integer

For a Gaussian integer $\alpha \neq 0$ and a positive integer m by $\sigma_m^*(\alpha)$ we denote the sum $\sigma_m^*(\alpha) = \sum_{\delta|\alpha} \delta^m$ of the m -th powers of the divisors of α .

Proposition 9. *If m is not divisible by 4, then $\sigma_m^*(\alpha) = 0$.*

Доведення. If β is a divisor of α , so are $-\beta$, $i\beta$ and $-i\beta$. Hence, the set of divisors of α breaks down into quadruples: $(\delta_1, -\delta_1, i\delta_1, -i\delta_1)$, $(\delta_2, -\delta_2, i\delta_2, -i\delta_2)$, $\dots$, $(\delta_k, -\delta_k, i\delta_k, -i\delta_k)$, where $k = \frac{1}{4}\tau^*(\alpha)$. If m is not divisible by 4, then the sum of the m -th powers of each quadruple is equal to 0. $\square$

Theorem 5. *Suppose $\alpha \not\sim 1$. If the canonical representation of α is of the form $\alpha = \mu\rho_1^{a_1}\rho_2^{a_2}\dots\rho_k^{a_k}$, then for every positive integer m ,*

$$\sigma_{4m}^*(\alpha) = 4 \prod_{j=1}^k \frac{\rho_j^{4m(a_j+1)} - 1}{\rho_j^{4m} - 1}. \quad (6)$$

Доведення. Every divisor of α is of the form $\nu\rho_1^{c_1}\rho_2^{c_2}\dots\rho_k^{c_k}$, where $\nu \in \{\pm 1; \pm i\}$ and $0 \leq c_j \leq a_j$ for all j . Note that $\nu^{4m} = 1$.

The right-hand side of the equality (6) can be rewritten as follows:

$$(1 + 1 + 1 + 1) \prod_{j=1}^k (1 + \rho_j^{4m} + \rho_j^{8m} + \dots + \rho_j^{4a_j m}).$$

After opening the brackets, we obtain the sum of all numbers of the form

$$\nu^{4m} \rho_1^{4mc_1} \rho_2^{4mc_2} \dots \rho_k^{4mc_k},$$

where $0 \leq c_j \leq a_j$ for all j , i.e. the sum of the m -th powers of the divisors of α . $\square$

Note that (6) implies that if $\alpha \sim \beta$, then $\sigma_{4m}^*(\alpha) = \sigma_{4m}^*(\beta)$.

$$1 + \rho_j^{4m} + \dots + \rho_j^{4a_j m} = \begin{cases} (1 + \rho_j^{4m})(1 + \rho_j^{8m} + \dots + \rho_j^{4(a_j-2)m}) + \rho_j^{4a_j m} & \text{if } 2 \mid a_j; \\ (1 + \rho_j^{4m})(1 + \rho_j^{8m} + \dots + \rho_j^{4(a_j-1)m}) & \text{if } 2 \nmid a_j. \end{cases}$$

From this we obtain that the sum $1 + \rho_j^{4m} + \rho_j^{8m} + \dots + \rho_j^{4a_j m}$ is not divisible by $1+i$ if and only if the number a_j is even. Hence, $4(1+i) \nmid \sigma_{4m}^*(\alpha)$ if and only if in the canonical representati-

Proposition 10 (properties of the σ_{4m}^* function).

- (a) $\sigma_{4m}^*(\alpha)$ is divisible by 4;
- (b) $\sigma_{4m}^*(\alpha) = 4$ if and only if $\alpha \sim 1$;
- (c) if α is a Gaussian prime, then $\sigma_{4m}^*(\alpha) = 4(\alpha^{4m} + 1)$;
- (d) if α is a Gaussian prime, then $\sigma_{4m}^*((\mu\alpha)^c) = \sigma_{4m}^*(\alpha^c)$ for any $c \in \mathbb{N}$ and $\mu \sim 1$;
- (e) $\sigma_{4m}^*(\bar{\alpha}) = \overline{\sigma_{4m}^*(\alpha)}$;
- (f) if α and $\bar{\alpha}$ are associates, then $\sigma_{4m}^*(\alpha) \in \mathbb{Z}$.

Доведення. Propositions (a)-(d) from the definition of the σ_{4m}^* function and theorem 5.

(e) This follows from proposition 1.

(f) Applying propositions 10.e and 10.d, we obtain:

$$\overline{\sigma_{4m}^*(\alpha)} = \sigma_{4m}^*(\bar{\alpha}) = \sigma_{4m}^*(\mu\alpha) = \sigma_{4m}^*(\alpha).$$

Hence, $\sigma_{4m}^*(\alpha) \in \mathbb{Z}$. $\square$

Proposition 11. $\sigma_{4m}^*(\alpha)$ is not divisible by $4(1+i)$ if and only if either α or $(1+i)\alpha$ is an associate of a square of a Gaussian integer.

Proof. It can be easily seen that for $\alpha \sim 1$, this proposition holds. Now suppose $\alpha \not\sim 1$ and $\alpha = \mu\rho_1^{a_1}\rho_2^{a_2}\dots\rho_k^{a_k}$ is the canonical representation of α .

From formula (6), we see that the number $\sigma_{4m}^*(\alpha)$ is not divisible by $4(1+i)$ if and only if for all j , the sum $1 + \rho_j^{4m} + \rho_j^{8m} + \dots + \rho_j^{4a_j m}$ is not divisible by $1+i$. If $\rho_j \sim 1+i$, then this sum is not divisible by $1+i$. Hence, the divisibility of the number $\sigma_{4m}^*(\alpha)$ by $4(1+i)$ is influenced only by the exponents of those primes from the canonical representation of α that are not associates of $1+i$.

If $\rho_j \not\sim 1+i$, then $(1+i) \nmid \rho_j^{4m}$. Suppose $\rho_j^{4m} = s_j + t_j i$, where $s_j, t_j \in \mathbb{Z}$. Then by proposition 2, the numbers s_j and t_j do not have the same parity; hence, the numbers $s_j + 1$ and t_j are of the same parity. Thus, by proposition 2, $(1+i) \mid (\rho_j^{4m} + 1)$. Notice that

on of α , all the primes that are not associates of $1+i$ have even exponents, i.e. if and only if there exists β such that $\mu\rho_1^{a_1}\rho_2^{a_2}\dots\rho_k^{a_k} \sim \beta^2$, or, equivalently, $\alpha \sim (1+i)\beta^2$. $\square$

Proposition 12. $\sigma_{4m}^*(\alpha)$ is divisible by 8 if and only if neither α nor $(1+i)\alpha$ is an associate of a square of a non-zero Gaussian integer.

Доведення. Necessity follows from the previous proposition and the fact that $4(1+i)|8$.

Sufficiency. Suppose neither α nor $(1+i)\alpha$ is an associate of a square of a non-zero Gaussian integer and the canonical representation of α is of the form $\mu\rho_1^{a_1}\rho_2^{a_2}\cdots\rho_k^{a_k}$. Then there exists a number l such that $\rho_l \approx 1+i$ and the exponent a_l is odd. The odd parity of a_l implies that for any positive integer m the following equality holds:

$$1 + \rho_l^{4m} + \rho_l^{8m} + \cdots + \rho_l^{4a_lm} = (1 + \rho_l^{4m})(1 + \rho_l^{8m} + \rho_l^{16m} + \cdots + \rho_l^{4(a_l-1)m}).$$

$$\text{Hence, } (1 + \rho_l^{4m}) \mid (1 + \rho_l^{4m} + \rho_l^{8m} + \cdots + \rho_l^{4a_lm}).$$

Suppose $\rho_l^m = s + ti$, where $s, t \in \mathbb{Z}$. Since $(1+i) \nmid \rho_l^m$, by proposition 2, the numbers s and t do not have the same parity. Therefore, on the right-hand side of the equality

$$1 + \rho_l^{4m} = 1 + (s + ti)^4 = (1 + s^4 + t^4) - 6s^2t^2 + (4s^3t - 4st^3)i,$$

each of the numbers $1 + s^4 + t^4$ and $4s^3t - 4st^3$ is divisible by 2. Thus, $2 \mid (1 + \rho_l^{4m})$, which implies that $2 \mid (1 + \rho_l^{4m} + \rho_l^{8m} + \cdots + \rho_l^{4a_lm})$.

Therefore, on the right-hand side of (6), aside from 4, there is one more factor that is divisible by 2. Hence, $\sigma_{4m}^*(\alpha)$ is divisible by 8. $\square$

Proposition 13. For all non-zero Gaussian integers α and positive integers m , the following inequality holds:

$$|\sigma_{4m}^*(\alpha)| \leq |\alpha|^{4m}(\tau^*(\alpha) - 4) + 4. \quad (7)$$

In (7), equality holds only for $\alpha \sim 1$ or $\alpha \sim p$, where p is a prime positive integer of the form $4k+3$; and when m is even, it also holds for $\alpha \sim (1+i)$.

Доведення. If $\alpha \sim 1$, then for all positive integers m , we have:

$$|\sigma_{4m}^*(\alpha)| = 4 = |\alpha|^{4m}(\tau^*(\alpha) - 4) + 4. \quad (8)$$

Now suppose $\alpha \approx 1$. Then the number α has exactly four divisors whose absolute values are equal to 1, and the absolute values of each of the rest (there are $\tau^*(\alpha) - 4$ of them) do not exceed $|\alpha|$. Hence,

$$\begin{aligned} |\sigma_{4m}^*(\alpha)| &= \left| \sum_{\delta|\alpha} \delta^{4m} \right| \leq \\ &\leq \sum_{\delta|\alpha} |\delta|^{4m} \leq |\alpha|^{4m}(\tau^*(\alpha) - 4) + 4. \end{aligned} \quad (9)$$

To prove the second part of the proposition, we only need to consider the case when $\alpha \approx 1$. Note that for each divisor δ of a Gaussian integer α , the inequality $|\delta| \leq |\alpha|$ holds with equality if and only if $\delta \sim \alpha$. Hence, in inequality (9), equality holds if and only if the divisors of α are the units and the associates of α only, i.e. if α is prime.

Therefore, it only remains to check for what primes α equality (8) holds. Since α is a Gaussian prime, then (8) implies that

$$|\sigma_{4m}^*(\alpha)| = |4\alpha^{4m} + 4| = 4|\alpha|^{4m} + 4.$$

This and the triangle inequality for complex numbers imply that $\alpha^{4m} \in \mathbb{Z}$. By theorem 2, this is possible only if $\alpha \sim p$, where p is a prime positive integer of the form $4k+3$, or if $\alpha \sim 1+i$.

It can be easily checked that in the first case, the equality in (7) holds always, and in the second case, $\alpha^{4m} = (-4)^m = (-1)^m 4^m$. Hence, $|\sigma_{4m}^*(\alpha)| = |(-1)^m 4^{m+1} + 4|$, while $|\alpha|^{4m}(\tau^*(\alpha) - 4) + 4 = 4^{m+1} + 4$. Therefore, the equality in (7) holds only if m is even. $\square$

Theorem 6. For any relatively prime Gaussian integers α and β ,

$$\sigma_{4m}^*(\alpha\beta) = \frac{1}{4}\sigma_{4m}^*(\alpha)\sigma_{4m}^*(\beta).$$

Доведення. The statement of the theorem is true if at least one of the numbers α and β is a unit.

Now suppose $\alpha = \mu\rho_1^{a_1}\rho_2^{a_2}\cdots\rho_k^{a_k}$ and $\beta = \nu\xi_1^{b_1}\xi_2^{b_2}\cdots\xi_l^{b_l}$ are the canonical representations of α and β . Since α and β are relatively prime, all the prime numbers $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$ and $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l$ are non-associate. Hence, every divisor of the number $\alpha\beta$ is of the form $\vartheta\rho_1^{a_1}\rho_2^{a_2}\cdots\rho_k^{a_k} \cdot \xi_1^{b_1}\xi_2^{b_2}\cdots\xi_l^{b_l}$, where $\vartheta \sim 1$. Then we have:

$$\begin{aligned} \sigma_{4m}^*(\alpha\beta) &= 4 \prod_{j=1}^k \frac{\rho_j^{4m(a_j+1)} - 1}{\rho_j^{4m} - 1} \cdot \prod_{t=1}^l \frac{\xi_t^{4m(b_t+1)} - 1}{\xi_t^{4m} - 1} = \\ &= \frac{1}{4}\sigma_{4m}^*(\alpha)\sigma_{4m}^*(\beta). \end{aligned} \quad \square$$

Corollary 4. If $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ are n relatively prime Gaussian integers, then $\sigma_{4m}^*(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n) = \frac{1}{4^{n-1}}\sigma_{4m}^*(\alpha_1)\sigma_{4m}^*(\alpha_2)\cdots\sigma_{4m}^*(\alpha_n)$.

The product of the divisors of a Gaussian integer

For a Gaussian integer $\alpha \neq 0$, by $\pi^*(\alpha)$ we denote the product $\pi^*(\alpha) = \prod_{\delta|\alpha} \delta$ of its divisors. Note that if α and β are associates, then $\pi^*(\alpha) = \pi^*(\beta)$.

Theorem 7.

$$\pi^*(\alpha) = \begin{cases} \alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)} & \text{if } \alpha \text{ is not a square of a Gaussian integer;} \\ -\alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)} & \text{if } \alpha \text{ is a square of a Gaussian integer.} \end{cases}$$

Доведення. If β is a divisor of α , so is α/β . Let $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\tau^*(\alpha)}$ be all the divisors of α . Then we have:

$$\pi^*(\alpha) = \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_{\tau^*(\alpha)} = \frac{\alpha}{\beta_1} \cdot \frac{\alpha}{\beta_2} \cdots \frac{\alpha}{\beta_{\tau^*(\alpha)}}.$$

Hence,

$$\begin{aligned} (\pi^*(\alpha))^2 &= \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_{\tau^*(\alpha)} \cdot \frac{\alpha}{\beta_1} \cdot \frac{\alpha}{\beta_2} \cdots \frac{\alpha}{\beta_{\tau^*(\alpha)}} = \\ &= \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{\tau^*(\alpha)} = \alpha^{\tau^*(\alpha)}. \end{aligned}$$

By theorem 3, the number $\tau^*(\alpha)$ is always even. Therefore,

$$\pi^*(\alpha) = \alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)} \quad \text{or} \quad \pi^*(\alpha) = -\alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)}. \quad (10)$$

The set of divisors of α naturally breaks down into quadruples:

$(\delta_1, -\delta_1, i\delta_1, -i\delta_1), (\delta_2, -\delta_2, i\delta_2, -i\delta_2), \dots,$
 $(\delta_k, -\delta_k, i\delta_k, -i\delta_k)$, where $k = \frac{1}{4}\tau^*(\alpha)$. Suppose $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_{\frac{1}{4}\tau^*(\alpha)} = \gamma$. Then

$$\begin{aligned} \pi^*(\alpha) &= \prod_{j=1}^{\frac{1}{4}\tau^*(\alpha)} ((\delta_j) \cdot (-\delta_j) \cdot (i\delta_j) \cdot (-i\delta_j)) = \\ &= (-1)^{\frac{1}{4}\tau^*(\alpha)} \gamma^4. \end{aligned} \quad (11)$$

Now we consider 3 cases:

1) α is not an associate of a square of a Gaussian integer. Then, by proposition 6, $8 \nmid \tau^*(\alpha)$, so the number $\frac{1}{4}\tau^*(\alpha)$ is even. Hence, (11) implies that $\pi^*(\alpha) = \gamma^4$, and from (10), we obtain either $\gamma^4 = \alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)}$ or $\gamma^4 = -\alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)}$. The second equality is impossible, since -1 is not a fourth power of a Gaussian integer.

Thus, in this case, $\pi^*(\alpha) = \alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)}$.

2) $\alpha = i\omega^2$ (that is, α is an associate of a square, but is not itself a square). Propositions 5.a and 6 imply that $4 \mid \tau^*(\alpha)$, but $8 \nmid \tau^*(\alpha)$. Hence, the number $\frac{1}{4}\tau^*(\alpha)$ is odd and (11) implies that $\pi^*(\alpha) = -\gamma^4$. Besides, $\alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)} = i^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)} \omega^{\tau^*(\alpha)} = -\omega^{\tau^*(\alpha)}$. Therefore, it follows from (10) that it is either $-\gamma^4 = -\omega^{\tau^*(\alpha)}$ or $-\gamma^4 = \omega^{\tau^*(\alpha)}$. The second equality is impossible, since $\omega^{\tau^*(\alpha)}$ is a fourth power of a Gaussian integer, while -1 is not.

Hence, in this case, $\pi^*(\alpha) = \alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)}$ as well.

3) $\alpha = \omega^2$. By proposition 6, $8 \nmid \tau^*(\alpha)$, so the number $\frac{1}{4}\tau^*(\alpha)$ is odd and (11) implies that $\pi^*(\alpha) = -\gamma^4$. Relation (10) now takes the following form: $-\gamma^4 = \alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)}$ or $-\gamma^4 = -\alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)}$. By analogous reasoning, we now obtain that the first equality is impossible.

Thus, in this case, $\pi^*(\alpha) = -\alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)}$. $\square$

Proposition 14 (properties of the π^* function).

- (a) $\pi^*(\alpha) = -1$ if and only if α is a unit;
- (b) $\pi^*(\alpha) = \alpha^4$ if and only if α is a Gaussian prime;
- (c) $\pi^*(\bar{\alpha}) = \overline{\pi^*(\alpha)}$.

Доведення. Propositions (a) and (b) follow from the definition of the π^* function and theorem 7.

(c) If the divisors of α are $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{\tau^*(\alpha)}$, then by proposition 1, the divisors of $\bar{\alpha}$ are $\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \dots, \bar{\delta}_{\tau^*(\alpha)}$. Hence,

$$\pi^*(\bar{\alpha}) = \prod_{j=1}^{\tau^*(\alpha)} \bar{\delta}_j = \overline{\prod_{j=1}^{\tau^*(\alpha)} \delta_j} = \overline{\pi^*(\alpha)}. \quad \square$$

Proposition 15. $\pi^*(\alpha) = \pi^*(\beta)$ if and only if α and β are associates.

Доведення. Sufficiency follows from the fact that α and β have the same divisors.

Necessity. Suppose $\pi^*(\alpha) = \pi^*(\beta)$. Then, in particular, every prime divisor of α is a divisor of β , and vice versa. Hence, the canonical representations of α and β are of the form $\alpha = \mu \rho_1^{a_1} \rho_2^{a_2} \cdots \rho_k^{a_k}$ and $\beta = \nu \rho_1^{b_1} \rho_2^{b_2} \cdots \rho_k^{b_k}$, where all the exponents are positive. Since $\alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)} = \beta^{\frac{1}{2}\tau^*(\beta)}$ or $\alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)} = -\beta^{\frac{1}{2}\tau^*(\beta)}$, then

$$\begin{aligned} \alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)} &= \mu^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)} \rho_1^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)a_1} \cdots \rho_k^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)a_k} = \\ &= \pm \nu^{\frac{1}{2}\tau^*(\beta)} \rho_1^{\frac{1}{2}\tau^*(\beta)b_1} \cdots \rho_k^{\frac{1}{2}\tau^*(\beta)b_k}. \end{aligned}$$

Thus, for each $j = \overline{1, k}$, the equality $a_j \tau^*(\alpha) = b_j \tau^*(\beta)$ holds. Hence, $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_k}{b_k} = \frac{\tau^*(\beta)}{\tau^*(\alpha)}$. If the inequality $\frac{\tau^*(\beta)}{\tau^*(\alpha)} > 1$ were true, then for each $j = \overline{1, k}$, the inequality $a_j > b_j$ would hold. But then, contrary to the initial condition, $\tau^*(\alpha) > \tau^*(\beta)$. In the same way, an assumption

that $\frac{\tau^*(\beta)}{\tau^*(\alpha)} < 1$ leads to a contradiction. Thus, $a_1 = b_1, \dots, a_k = b_k$, and $\alpha \sim \beta$. $\square$

Proposition 16. $\pi^*(\alpha) \in \mathbb{Z}$ if and only if $\alpha \sim \bar{\alpha}$.

Доведення. By propositions 14.c and 15, we have:

$$\pi^*(\alpha) = \overline{\pi^*(\alpha)} \iff \pi^*(\alpha) = \pi^*(\bar{\alpha}) \iff \alpha \sim \bar{\alpha}. \square$$

Sums of products of divisors of a Gaussian integer

In this subsection, numbers $k, m, n, u, v, w, a, b, c, a_1, a_2, \dots, a_k$ are positive integers, $\alpha \neq 0$, and $k \leq \tau^*(\alpha)$. We fix the divisors of α in a certain order $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{\tau^*(\alpha)}$, and introduce the following notation:

$$s_{k,m}^*(\alpha) = \sum_{1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq \tau^*(\alpha)} \delta_{a_1}^m \delta_{a_2}^m \dots \delta_{a_k}^m;$$

$$p_{k,m}^*(\alpha) = \sum_{1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq \tau^*(\alpha)} \frac{1}{\delta_{a_1}^m \delta_{a_2}^m \dots \delta_{a_k}^m}.$$

Note that $s_{1,m}^*(\alpha) = \sigma_m^*(\alpha)$, $s_{\tau^*(\alpha),m}^*(\alpha) = (\pi^*(\alpha))^m$, $p_{\tau^*(\alpha),m}^*(\alpha) = \frac{1}{(\pi^*(\alpha))^m}$.

Proposition 17.

$$\sum_{\substack{1 \leq a, b \leq \tau^*(\alpha) \\ a \neq b}} \delta_a^u \delta_b^v = \sigma_u^*(\alpha) \sigma_v^*(\alpha) - \sigma_{u+v}^*(\alpha).$$

Доведення. This follows from the equalities below:

$$\begin{aligned} \sigma_u^*(\alpha) \sigma_v^*(\alpha) &= \sum_{\delta|\alpha} \delta^u \cdot \sum_{\delta|\alpha} \delta^v = \\ &= \sum_{\delta|\alpha} \delta^{u+v} + \sum_{\substack{1 \leq a, b \leq \tau^*(\alpha) \\ a \neq b}} \delta_a^u \delta_b^v = \\ &= \sigma_{u+v}^*(\alpha) + \sum_{\substack{1 \leq a, b \leq \tau^*(\alpha) \\ a \neq b}} \delta_a^u \delta_b^v. \end{aligned}$$

Corollary 5.

$$\sum_{1 \leq a, b \leq \tau^*(\alpha), a \neq b} \frac{1}{\delta_a^u \delta_b^v} = \frac{\sigma_u^*(\alpha) \sigma_v^*(\alpha) - \sigma_{u+v}^*(\alpha)}{\alpha^{u+v}}.$$

Propositions 17 and 9 imply

Corollary 6. $s_{2,m}^*(\alpha) = \frac{(\sigma_m^*(\alpha))^2 - \sigma_{2m}^*(\alpha)}{2} =$

$$= \begin{cases} 0 & \text{if } m = 2n - 1; \\ -\frac{\sigma_{2m}^*(\alpha)}{2} & \text{if } m = 4n - 2; \\ \frac{(\sigma_m^*(\alpha))^2 - \sigma_{2m}^*(\alpha)}{2} & \text{if } m = 4n. \end{cases}$$

Proposition 18.

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq a, b, c \leq \tau^*(\alpha) \\ a \neq b, b \neq c, c \neq a}} \delta_a^u \delta_b^v \delta_c^w &= \sigma_u^*(\alpha) \sigma_v^*(\alpha) \sigma_w^*(\alpha) - \\ &- \sigma_{u+v}^*(\alpha) \sigma_w^*(\alpha) - \sigma_{u+w}^*(\alpha) \sigma_v^*(\alpha) - \\ &- \sigma_{v+w}^*(\alpha) \sigma_u^*(\alpha) + 2\sigma_{u+v+w}^*(\alpha). \end{aligned}$$

Доведення. This follows from proposition 17 and the chain of equalities:

$$\begin{aligned} &\sigma_w^*(\alpha) (\sigma_u^*(\alpha) \sigma_v^*(\alpha) - \sigma_{u+v}^*(\alpha)) = \\ &= \sum_{\delta|\alpha} \delta^w \cdot \sum_{\substack{1 \leq a, b \leq \tau^*(\alpha) \\ a \neq b}} \delta_a^u \delta_b^v = \sum_{\substack{1 \leq a, b \leq \tau^*(\alpha) \\ a \neq b}} \delta_a^{u+w} \delta_b^v + \\ &+ \sum_{\substack{1 \leq a, b \leq \tau^*(\alpha) \\ a \neq b}} \delta_a^u \delta_b^{v+w} + \sum_{\substack{1 \leq a, b, c \leq \tau^*(\alpha) \\ a \neq b, b \neq c, c \neq a}} \delta_a^u \delta_b^v \delta_c^w = \\ &= \sigma_{u+w}^*(\alpha) \sigma_v^*(\alpha) - \sigma_{u+v+w}^*(\alpha) + \sigma_u^*(\alpha) \sigma_{v+w}^*(\alpha) - \\ &- \sigma_{u+v+w}^*(\alpha) + \sum_{\substack{1 \leq a, b, c \leq \tau^*(\alpha) \\ a \neq b, b \neq c, c \neq a}} \delta_a^u \delta_b^v \delta_c^w. \end{aligned} \quad \square$$

Corollary 7.

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq a, b, c \leq \tau^*(\alpha) \\ a \neq b, b \neq c, c \neq a}} \frac{1}{\delta_a^u \delta_b^v \delta_c^w} &= \frac{1}{\alpha^{u+v+w}} (\sigma_u^*(\alpha) \sigma_v^*(\alpha) \sigma_w^*(\alpha) - \\ &- \sigma_{u+v}^*(\alpha) \sigma_w^*(\alpha) - \sigma_{u+w}^*(\alpha) \sigma_v^*(\alpha) - \\ &- \sigma_{v+w}^*(\alpha) \sigma_u^*(\alpha) + 2\sigma_{u+v+w}^*(\alpha)). \end{aligned}$$

Corollary 8.

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq a < b \leq \tau^*(\alpha) \\ 1 \leq c \leq \tau^*(\alpha) \\ c \neq a, c \neq b}} \delta_a^u \delta_b^u \delta_c^v &= \frac{1}{2} ((\sigma_u^*(\alpha))^2 \sigma_v^*(\alpha) - \\ &- 2\sigma_u^*(\alpha) \sigma_{u+v}^*(\alpha) - \sigma_{2u}^*(\alpha) \sigma_v^*(\alpha) + 2\sigma_{2u+v}^*(\alpha)). \end{aligned}$$

Corollary 9.

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq a < b \leq \tau^*(\alpha) \\ 1 \leq c \leq \tau^*(\alpha) \\ c \neq a, c \neq b}} \frac{1}{\delta_a^u \delta_b^u \delta_c^v} &= \frac{1}{2\alpha^{2u+v}} ((\sigma_u^*(\alpha))^2 \sigma_v^*(\alpha) - \\ &- 2\sigma_u^*(\alpha) \sigma_{u+v}^*(\alpha) - \sigma_{2u}^*(\alpha) \sigma_v^*(\alpha) + 2\sigma_{2u+v}^*(\alpha)). \end{aligned}$$

Propositions 18 and 9 imply

Corollary 10.

$$\begin{aligned} s_{3,m}^*(\alpha) &= \\ &= \frac{(\sigma_m^*(\alpha))^3 - 3\sigma_m^*(\alpha) \sigma_{2m}^*(\alpha) + 2\sigma_{3m}^*(\alpha)}{6} = \\ &= \begin{cases} \frac{(\sigma_m^*(\alpha))^3 - 3\sigma_m^*(\alpha) \sigma_{2m}^*(\alpha) + 2\sigma_{3m}^*(\alpha)}{6} & \text{if } m = 4n; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

Proposition 19.

$$\begin{aligned} (a) \quad & p_{k,m}^*(\alpha) = \frac{s_{k,m}^*(\alpha)}{\alpha^{km}}; \\ (b) \quad & \text{if } \tau^*(\alpha) > k, k \in \mathbb{N}, \text{ then} \\ & s_{k,m}^*(\alpha) = \frac{(\alpha)^{km} s_{\tau^*(\alpha)-k,m}^*(\alpha)}{(\pi(\alpha))^m}; \\ (c) \quad & \text{if } \tau^*(\alpha) > k, k \in \mathbb{N}, \text{ then} \\ & p_{k,m}^*(\alpha) = \frac{(\alpha)^{km} p_{\tau^*(\alpha)-k,m}^*(\alpha)}{(\pi(\alpha))^m}. \end{aligned}$$

Доведення. (a) If δ is a divisor of α , so is $\frac{\alpha}{\delta}$. Hence,

$$\begin{aligned} \frac{s_{k,m}^*(\alpha)}{\alpha^{km}} &= \sum_{1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq \tau^*(\alpha)} \frac{\delta_{a_1}^m \delta_{a_2}^m \dots \delta_{a_k}^m}{\alpha^{km}} = \\ &= \sum_{1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq \tau^*(\alpha)} \frac{1}{\delta_{a_1}^m \delta_{a_2}^m \dots \delta_{a_k}^m} = p_{k,m}^*(\alpha). \end{aligned}$$

Proposition 20 (the recurrence formula for $s_{k,m}^*$).

$$s_{k+1,m}^*(\alpha) = \frac{1}{k+1} \left((-1)^k \sigma_{(k+1)m}^*(\alpha) + \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l s_{k-l,m}^*(\alpha) \sigma_{(l+1)m}^*(\alpha) \right). \quad (12)$$

Доведення. Let $b_1, b_2, \dots, b_k$ be distinct positive integers, where $1 \leq b_1, b_2, \dots, b_k \leq \tau^*(\alpha)$. By $q_{k,c,m}^*(\alpha)$, where $c \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, we denote the following sum:

$$q_{k,c,m}^*(\alpha) = \sum_{\substack{1 \leq b_2 < b_3 < \dots < b_k \leq \tau^*(\alpha) \\ 1 \leq b_1 \leq \tau^*(\alpha) \\ b_1 \neq b_2, b_1 \neq b_3, \dots, b_1 \neq b_k}} \delta_{b_1}^{cm} \delta_{b_2}^m \delta_{b_3}^m \dots \delta_{b_k}^m.$$

Note that $q_{1,c,m}^*(\alpha) = \sigma_{cm}^*(\alpha)$. Then we have:

$$\begin{aligned} s_{k,m}^*(\alpha) \sigma_m^*(\alpha) &= \\ &= \left(\sum_{1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq \tau^*(\alpha)} \delta_{a_1}^m \delta_{a_2}^m \dots \delta_{a_k}^m \right) \times \\ &\times \left(\sum_{\delta|\alpha} \delta^m \right) = (k+1) s_{k+1,m}^*(\alpha) + q_{k,2,m}^*(\alpha). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{k,m}^*(\alpha) \sigma_{cm}^*(\alpha) &= \left(\sum_{\delta|\alpha} \delta^{cm} \right) \times \\ &\times \left(\sum_{1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq \tau^*(\alpha)} \delta_{a_1}^m \delta_{a_2}^m \dots \delta_{a_k}^m \right) = \\ &= \sum_{\substack{1 \leq b_2 < b_3 < \dots < b_k \leq \tau^*(\alpha) \\ 1 \leq b_1 \leq \tau^*(\alpha) \\ b_1 \neq b_2, b_1 \neq b_3, \dots, b_1 \neq b_k}} \delta_{b_1}^{(c+1)m} \delta_{b_2}^m \delta_{b_3}^m \dots \delta_{b_k}^m + \\ &+ \sum_{\substack{1 \leq b_2 < b_3 < \dots < b_{k+1} \leq \tau^*(\alpha) \\ 1 \leq b_1 \leq \tau^*(\alpha) \\ b_1 \neq b_2, b_1 \neq b_3, \dots, b_1 \neq b_{k+1}}} \delta_{b_1}^{cm} \delta_{b_2}^m \delta_{b_3}^m \dots \delta_{b_{k+1}}^m = \\ &= q_{k,c+1,m}^*(\alpha) + q_{k+1,c,m}^*(\alpha). \end{aligned}$$

(b) This follows from (a) and the chain of equalities:

$$\begin{aligned} \frac{(\pi(\alpha))^m s_{k,m}^*(\alpha)}{\alpha^{km}} &= \\ &= \sum_{1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq \tau^*(\alpha)} \frac{\delta_{a_1}^m \delta_{a_2}^m \dots \delta_{a_k}^m}{\delta_{a_1}^m \delta_{a_2}^m \dots \delta_{a_k}^m} = \\ &= \sum_{1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{\tau^*(\alpha)-k} \leq \tau^*(\alpha)} \delta_{a_1}^m \delta_{a_2}^m \dots \delta_{a_{\tau^*(\alpha)-k}}^m = \\ &= s_{\tau^*(\alpha)-k,m}^*(\alpha). \end{aligned}$$

Proposition (c) follows from (a) and (b). $\square$

From this, we obtain the following equalities:

$$\begin{aligned} s_{k,m}^*(\alpha) \sigma_m^*(\alpha) &= (k+1) s_{k+1,m}^*(\alpha) + q_{k,2,m}^*(\alpha); \\ s_{k-1,m}^*(\alpha) \sigma_{2m}^*(\alpha) &= q_{k-1,3,m}^*(\alpha) + q_{k,2,m}^*(\alpha); \\ s_{k-2,m}^*(\alpha) \sigma_{3m}^*(\alpha) &= q_{k-2,4,m}^*(\alpha) + q_{k-1,3,m}^*(\alpha); \\ &\dots \\ s_{1,m}^*(\alpha) \sigma_{km}^*(\alpha) &= q_{1,k+1,m}^*(\alpha) + q_{2,k,m}^*(\alpha), \end{aligned}$$

which imply:

$$\begin{aligned} s_{k,m}^*(\alpha) \sigma_m^*(\alpha) - s_{k-1,m}^*(\alpha) \sigma_{2m}^*(\alpha) + \dots + \\ + (-1)^{k-1} s_{1,m}^*(\alpha) \sigma_{km}^*(\alpha) &= (k+1) s_{k+1,m}^*(\alpha) + \\ + (-1)^{k-1} q_{1,k+1,m}^*(\alpha) &= (k+1) s_{k+1,m}^*(\alpha) + \\ + (-1)^{k-1} \sigma_{(k+1)m}^*(\alpha). \end{aligned}$$

Hence,

$$\begin{aligned} (k+1) s_{k+1,m}^*(\alpha) &= s_{k,m}^*(\alpha) \sigma_m^*(\alpha) - \\ &- s_{k-1,m}^*(\alpha) \sigma_{2m}^*(\alpha) + \dots \\ \dots + (-1)^{k-1} s_{1,m}^*(\alpha) \sigma_{km}^*(\alpha) &+ (-1)^k \sigma_{(k+1)m}^*(\alpha), \end{aligned}$$

which immediately implies (12). $\square$

Proposition 21 (the recurrence formula for $p_{k,m}^*$).

$$p_{k+1,m}^*(\alpha) = \frac{1}{k+1} \left(\frac{(-1)^k \sigma_{(k+1)m}^*(\alpha)}{\alpha^{(k+1)m}} + \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(-1)^l p_{k-l,m}^*(\alpha) \sigma_{(l+1)m}^*(\alpha)}{\alpha^{(l+1)m}} \right).$$

Доведення. Propositions 19.a and 20 imply:

$$\begin{aligned} p_{k+1,m}^*(\alpha) &= \frac{s_{k+1,m}^*(\alpha)}{\alpha^{(k+1)m}} = \\ &= \frac{1}{(k+1)\alpha^{(k+1)m}} \left((-1)^k \sigma_{(k+1)m}^*(\alpha) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l s_{k-l,m}^*(\alpha) \sigma_{(l+1)m}^*(\alpha) \right) = \\ &= \frac{1}{(k+1)\alpha^{(k+1)m}} \left((-1)^k \sigma_{(k+1)m}^*(\alpha) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \alpha^{(k-l)m} p_{k-l,m}^*(\alpha) \sigma_{(l+1)m}^*(\alpha) \right) = \\ &= \frac{1}{k+1} \left(\frac{(-1)^k \sigma_{(k+1)m}^*(\alpha)}{\alpha^{(k+1)m}} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(-1)^l p_{k-l,m}^*(\alpha) \sigma_{(l+1)m}^*(\alpha)}{\alpha^{(l+1)m}} \right). \quad \square \end{aligned}$$

The definitions of the $s_{k,m}^*$ and $p_{k,m}^*$ functions immediately imply

Proposition 22. If the numbers α and β are associates, then

$$s_{k,m}^*(\alpha) = s_{k,m}^*(\beta) \quad \text{and} \quad p_{k,m}^*(\alpha) = p_{k,m}^*(\beta).$$

Proposition 23. For all α $s_{k,m}^*(\bar{\alpha}) = \overline{s_{k,m}^*(\alpha)}$ and $p_{k,m}^*(\bar{\alpha}) = \overline{p_{k,m}^*(\alpha)}$.

Доведення. This follows from the fact that if the divisors of α are $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{\tau^*(\alpha)}$, then the divisors of $\bar{\alpha}$ are $\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \dots, \bar{\delta}_{\tau^*(\alpha)}$. $\square$

Proposition 24. If α and $\bar{\alpha}$ are associates, then $s_{k,m}^*(\alpha) \in \mathbb{Z}$ and $p_{k,m}^*(\alpha) \in \mathbb{Q}$.

The proof is analogous to the proofs of propositions 10.g and 16.

Proposition 25. If m is odd k is not divisible by 4, then $s_{k,m}^*(\alpha) = 0$ and $p_{k,m}^*(\alpha) = 0$

Доведення. Let m be odd. Consider the following polynomial:

$$P(x) = \prod_{\delta|\alpha} (x - \delta^m).$$

By Vieta's theorem,

$$P(x) = x^{\tau^*(\alpha)} + \sum_{j=1}^{\tau^*(\alpha)} (-1)^j s_{j,m}^*(\alpha) x^{\tau^*(\alpha)-j}.$$

Since the set of divisors of α breaks down into quadruples:

$$(\delta_1, -\delta_1, i\delta_1, -i\delta_1), (\delta_2, -\delta_2, i\delta_2, -i\delta_2), \dots, (\delta_k, -\delta_k, i\delta_k, -i\delta_k),$$

where $k = \frac{1}{4}\tau^*(\alpha)$, then the polynomial $P(x)$ can be rewritten as follows:

$$\begin{aligned} P(x) &= \prod_{j=1}^{\frac{1}{4}\tau^*(\alpha)} ((x - \delta_j^m)(x - (-\delta_j)^m) \times \\ &\quad \times (x - (i\delta_j)^m)(x - (-i\delta_j)^m)). \end{aligned}$$

The odd parity of m implies that

$$\begin{aligned} (x - \delta_j^m)(x - (-\delta_j)^m)(x - (i\delta_j)^m)(x - (-i\delta_j)^m) &= \\ &= x^4 - \delta_j^{4m}. \end{aligned}$$

Hence,

$$\begin{aligned} P(x) &= x^{\tau^*(\alpha)} + \sum_{j=1}^{\tau^*(\alpha)} (-1)^j s_{j,m}^*(\alpha) x^{\tau^*(\alpha)-j} = \\ &= \prod_{j=1}^{\frac{1}{4}\tau^*(\alpha)} (x^4 - \delta_j^{4m}). \end{aligned}$$

Thus, in the polynomial $P(x)$, coefficients of the terms whose exponent of x is not divisible by 4, are equal to 0. Hence, if $4 \nmid k$, then $s_{k,m}^*(\alpha) = 0$. By proposition 19.a, $p_{k,m}^*(\alpha) = 0$ as well. $\square$

Proposition 26. If $m \equiv 2 \pmod{4}$ and k is odd, then $s_{k,m}^*(\alpha) = 0$ and $p_{k,m}^*(\alpha) = 0$.

The proof of this proposition is analogous to the previous one.

Proposition 27. Suppose $\beta \mid \alpha$. If $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{\tau(\frac{\alpha}{\beta})}$ are all the divisors of α that are divisible by β , then

$$(a) \quad \sum_{1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq \tau^*(\frac{\alpha}{\beta})} \delta_{a_1}^m \delta_{a_2}^m \dots \delta_{a_k}^m = \\ = \beta^{km} s_{k,m}^* \left(\frac{\alpha}{\beta} \right);$$

$$(b) \quad \sum_{1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq \tau^*(\frac{\alpha}{\beta})} \frac{1}{\delta_{a_1}^m \delta_{a_2}^m \dots \delta_{a_k}^m} = \frac{p_{k,m}^*(\frac{\alpha}{\beta})}{\beta^{km}}.$$

The proof follows from the fact that if $\alpha = \beta\gamma$, then all the divisors of α that are divisible by β are of the form $\beta\delta$, where $\delta \mid \gamma$. $\square$

Acknowledgements

I warmly thank my supervisor O. G. Ganyushkin for assistance in carrying out the research.

Список використаних джерел

1. *Stillwell J.* Mathematics and Its History / J. Stillwell // Undergraduate Texts in Mathematics, Springer Science+Business Media, LLC 2010. — 662 p.
2. *Gauss C. F.* Theoria residuorum biquadraticorum. Commentatio secunda. Comm. Soc. Reg. Sci. Göttingen 7: 89-148; reprinted in Werke, Georg Olms Verlag, Hildesheim. — 1973. — P. 93–148.
3. *Calcut, J. S.* Gaussian Integers and Arctangent Identities for π / J. S. Calcut // The American Mathematical Monthly. — 2009. — V. **116(6)**. — P. 515-530
4. *Stillwell J.* Elements of Number Theory / J. Stillwell // Springer Science+Business Media New York. — 2003. — 256 p.
5. *Willerdig M. F.* Divisibility and factorization of Gaussian integers / M. F. Willerdig // The Mathematics Teacher. — 1966. — V. **59(7)**. — P. 634-637.

References

1. STILLWELL, J. (2010) *Mathematics and Its History*. New York: Undergraduate Texts in Mathematics, Springer Science+Business Media.
2. GAUSS, C. F. (1973) *Theoria residuorum biquadraticorum. Commentatio secunda*. Comm. Soc. Reg. Sci. Göttingen 7: 89-148; reprinted in Werke, Hildesheim: Georg Olms Verlag. p. 93–148.
3. CALCUT, J. S. (2009) Gaussian Integers and Arctangent Identities for π . *The American Mathematical Monthly*. V. **116(6)**. p. 515-530
4. STILLWELL, J. (2003) *Elements of Number Theory*. New York: Springer Science+Business Media.
5. WILLERDING, M. F. (1966) Divisibility and factorization of Gaussian integers. *The Mathematics Teacher*. V. **59(7)**. p. 634-637.

Received: 03.02.2023

УДК 512.554.37

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/1.2>

Д.І. Безущак¹, аспірант
О.О. Безущак², д.ф.-м.н., проф.

D.I. Bezushchak¹, PhD student
O.O. Bezushchak², Dr Sci., Prof.

Диференціювання нескінченно вимірних супералгебр Лі

Derivations of infinite-dimensional Lie superalgebras

^{1,2} Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Воло-
димирська, 60,
e-mail: ¹ bezushchak@gmail.com.ua,
² bezushchak@knu.ua

^{1,2} Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 01033, Kyiv, 60 Volodymyrska str.,
e-mail: ¹ bezushchak@gmail.com.ua,
² bezushchak@knu.ua

Вивчаються нескінченно вимірні аналоги класичних супералгебр Лі над алгебрично замкну-
тим полем нульової характеристики. Нехай I – нескінченна множина. У роботі розглядаю-
ться алгебри $M_\infty(I)$ нескінченних $I \times I$ матриць над полем $\mathbb{F}$, які містять лише скінченну
кількість ненульових елементів, та пов'язані з ними супералгебри Лі $\mathfrak{gl}_\infty(I_1, I_2)$ та $\mathfrak{sl}_\infty(I_1, I_2)$,
яка є комутатором алгебри $\mathfrak{gl}_\infty(I_1, I_2)$, для непорожніх підмножин I_1 та I_2 множини I , що не
перетинаються. А також описуються диференціювання супералгебри Лі $\mathfrak{sl}_\infty(I_1, I_2)$.

Ключові слова: Диференціювання, нескінченно вимірні алгебра, супералгебра Лі.

We study infinite-dimensional analogs of classical Lie superalgebras over an algebraically closed
field $\mathbb{F}$ of zero characteristic. Let I be an infinite set. For an algebra $M_\infty(I)$ of infinite $I \times I$ matrices
over a ground field $\mathbb{F}$ having finitely many nonzero entries, we consider the related Lie superalgebra
 $\mathfrak{gl}_\infty(I_1, I_2)$ and its commutator $\mathfrak{sl}_\infty(I_1, I_2)$ for a disjoint union of nonempty subsets I_1 and I_2 of the
set I ; and we describe derivations of the Lie superalgebra $\mathfrak{sl}_\infty(I_1, I_2)$.

Key Words: Derivations, infinite-dimensional algebra, Lie superalgebra.

Communicated by Anatolii Petravchuk

Throughout the paper all vector spaces are
considered over a ground field $\mathbb{F}$ of characteristic 0.

By a superalgebra, we mean an algebra

$$A = A_0 + A_1$$

graded by the cyclic group of order 2, and

$$A_i A_j \subseteq A_{i+j}; \quad i, j = 0 \quad \text{or} \quad 1.$$

For a homogeneous element $a \in A_0 \cup A_1$, let $|a|$
denote its parity, $|a| = 0$ or 1 . The superalgebra A
is associative if it is associative as an algebra.

A superalgebra is a Lie superalgebra if it sati-
sfies graded identities:

- (1) $[a, b] = -(-1)^{|a| \cdot |b|} [b, a];$
- (2) $[[a, b], c] + (-1)^{|a| \cdot (|b| + |c|)} [[b, c], a] +$

$$(-1)^{|c| \cdot (|a| + |b|)} [[c, a], b] = 0.$$

C.T.C.Wall [9] proved that for an algebrai-
cally closed field $\mathbb{F}$ every finite-dimensional simple

associative superalgebra is isomorphic to one of
the following superalgebras: a superalgebra

$$M(m, n) = \left(\begin{array}{c|c} * & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & * \end{array} \right)_m + \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & * \\ \hline * & \mathbf{0} \end{array} \right)_n$$

of $(m + n) \times (m + n)$ matrices divided into blocks
and

$$Q(n) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ b & a \end{array} \right) \mid a, b \in M_n(\mathbb{F}) \right\}.$$

V.G.Kac [6] classified all simple finite-
dimensional Lie superalgebras over an algebrai-
cally closed field of zero characteristic. For more
information about Lie superalgebras, see [6, 8].

If A is an associative superalgebra, then the
new multiplication

$$[a, b] = ab - (-1)^{|a| \cdot |b|} ba$$

defines a structure of a Lie superalgebra on A . We
will denote it as $A^{(-)}$.

²The third author was supported by MES of Ukraine: Grant for the perspective development of the scientific direction
“Mathematical sciences and natural sciences” at TSNUK.

In particular, $\mathfrak{gl}(m, n) = M(m, n)^{(-)}$ is a Lie superalgebra. The Lie superalgebra

$$\mathfrak{sl}(m, n) = [\mathfrak{gl}(m, n), \mathfrak{gl}(m, n)] =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \middle| x \in M_m(\mathbb{F}), t \in M_n(\mathbb{F}), \right.$$

$$\left. y \in M_{m \times n}(\mathbb{F}), z \in M_{n \times m}(\mathbb{F}), \text{tr}(x) = \text{tr}(t) \right\}$$

is simple for $n \neq m$. For $n = m$ the superalgebra $\mathfrak{sl}(m, n)/\mathbb{F} \cdot I_{m+n}$ is simple.

Now, let us discuss infinite-dimensional analogs of the algebras and superalgebras above.

Let I be an infinite set. Let $M(I)$ be the associative algebra of all $I \times I$ matrices over a ground field $\mathbb{F}$ having finitely many nonzero entries in each column. The algebra $M(I)$ is isomorphic to the algebra of linear transformations on a vector space of dimension $|I|$.

Let $M_\infty(I)$ be the subalgebra of $M(I)$ that consists of $I \times I$ matrices over a ground field $\mathbb{F}$ having finitely many nonzero entries. The algebra $M_\infty(I)$ gives rise to Lie algebras

$$\mathfrak{gl}_\infty(I) = M_\infty(I)^{(-)}$$

and

$$\mathfrak{sl}_\infty(I) = [\mathfrak{gl}_\infty(I), \mathfrak{gl}_\infty(I)].$$

Let $M_{rcf}(I)$ be the subalgebra of $M(I)$ that consists of $I \times I$ matrices over a ground field $\mathbb{F}$ having finitely many nonzero entries in each column and in each row.

Consider a decomposition of the set I into a disjoint union of nonempty subsets I_1 and I_2 . This decomposition defines the block structure of $I \times I$ matrices

$$M(I) = \begin{pmatrix} M(I_1) & M(I_1 \times I_2) \\ M(I_2 \times I_1) & M(I_2) \end{pmatrix}$$

and the $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -grading

$$M(I) = M(I)_{\bar{0}} + M(I)_{\bar{1}},$$

$$M(I)_{\bar{0}} = \begin{pmatrix} M(I_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M(I_2) \end{pmatrix},$$

$$M(I)_{\bar{1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & M(I_1 \times I_2) \\ M(I_2 \times I_1) & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Clearly, $M_\infty(I)$ and $M_{rcf}(I)$ are graded subalgebras of $M(\mathbb{Z})$. Hence, they give rise to associative superalgebras that we denote as $M_\infty(I_1, I_2)$ and $M_{rcf}(I_1, I_2)$, respectively. Clearly,

$M_\infty(I)$ is an ideal in $M_{rcf}(I)$ and $M_\infty(I_1, I_2)$ is an ideal in $M_{rcf}(I_1, I_2)$.

Consider Lie superalgebras

$$\mathfrak{gl}_\infty(I_1, I_2) = M_\infty(I_1, I_2)^{(-)},$$

$$\mathfrak{sl}_\infty(I_1, I_2) = [\mathfrak{gl}_\infty(I_1, I_2), \mathfrak{gl}_\infty(I_1, I_2)]$$

and

$$\mathfrak{gl}_{rcf}(I_1, I_2) = M_{rcf}(I_1, I_2)^{(-)}.$$

A linear mapping d on an algebra A is called a *derivation* if

$$d(ab) = d(a)b + ad(b)$$

for arbitrary elements $a, b \in A$.

A linear mapping $d : A \rightarrow A$ on a superalgebra A is called an *even derivation* if

$$d : A_{\bar{i}} \rightarrow A_{\bar{i}},$$

$i = 0$ or 1 , and d is a derivation of the algebra A . Let $D_0(A)$ denote the vector space of all even derivations of A .

A linear mapping $d : A \rightarrow A$ is called an *odd derivation* if

$$d(A_{\bar{0}}) \subseteq A_{\bar{1}}, \quad d(A_{\bar{1}}) \subseteq A_{\bar{0}}$$

and

$$d(ab) = d(a)b + (-1)^{|a|}ad(b)$$

for all homogeneous elements $a, b \in A_{\bar{0}} \cup A_{\bar{1}}$. Let $D_1(A)$ be the vector space of all odd derivations of A . The direct sum

$$D(A) = D_0(A) \oplus D_1(A)$$

is a Lie superalgebra.

K.-F.Neeb [7] showed that an arbitrary derivation of a Lie algebra $\mathfrak{sl}_\infty(I)$ over a field of zero characteristic is a commutation with an element from $M_{rcf}(I)$. In [4], we extended this result to fields of positive characteristics $\neq 2$, using the proof of Herstein's Conjectures by K.I.Beidar, M.Brešar, M.A.Chebotar and W.S.Martindale [1, 2, 3].

In this paper, we describe derivations of Lie superalgebras $\mathfrak{sl}_\infty(I_1, I_2)$.

Theorem 1. An arbitrary (even or odd) derivation of a Lie superalgebra $L = \mathfrak{sl}_\infty(I_1, I_2)$ is of the type

$$\text{ad}(u) : x \rightarrow ux - (-1)^{|u||x|}xu,$$

$x \in L_{\bar{0}} \cup L_{\bar{1}}$, where u is a homogeneous element from $\mathfrak{gl}_{rcf}(I_1, I_2)$.

Since Herstein's Conjectures have not been extended to superalgebras, we give a straightforward proof and assume that $\text{char } \mathbb{F} = 0$.

By passing to scalar extensions, if necessary, we will assume that the field $\mathbb{F}$ is algebraically closed.

The direct sum

$$\mathfrak{sl}_\infty(I_1) \oplus \mathfrak{sl}_\infty(I_2)$$

is obviously a subalgebra of the even part of $L = \mathfrak{sl}_\infty(I_1, I_2)$. If $|I_i| = 1$, then $\mathfrak{sl}_\infty(I_i) = (0)$.

Let d be an even derivation of L . Since $\mathfrak{sl}_\infty(I_i)$, $i = 1, 2$, are ideals of $L_{\bar{0}}$ and

$$\mathfrak{sl}_\infty(I_i) = [\mathfrak{sl}_\infty(I_i), \mathfrak{sl}_\infty(I_i)],$$

it follows that $\mathfrak{sl}_\infty(I_i)$ is invariant with respect to d . By the theorem of K.-F.Neeb [7], there exist elements $u_i \in M_{rcf}(I_i)$ such that

$$(d - \text{ad}(u_i))\mathfrak{sl}_\infty(I_i) = (0), \quad i = 1, 2.$$

Considering

$$d - \text{ad}(u_1) - \text{ad}(u_2)$$

instead of d , we will assume that

$$d(\mathfrak{sl}_\infty(I_1) \oplus \mathfrak{sl}_\infty(I_2)) = (0).$$

Let $M_\infty(I_1 \times I_2)$ (resp. $M_\infty(I_2 \times I_1)$) be the vector space of $I_1 \times I_2$ (resp. $I_2 \times I_1$) matrices over a field $\mathbb{F}$ with finitely many nonzero entries.

Lemma 1. $M_\infty(I_1 \times I_2)$ is an irreducible module over the Lie algebra $\mathfrak{sl}_\infty(I_1) \oplus \mathfrak{sl}_\infty(I_2)$.

Доведення. The assertion immediately follows from the fact that the vector space of $m \times n$ matrices over $\mathbb{F}$ is an irreducible module over $\mathfrak{sl}(m) \oplus \mathfrak{sl}(n)$; $m, n \geq 1$. $\square$

Lemma 2. Let $|I_1| \geq 3$. Then the $\mathfrak{sl}(I_1)$ -modules $M_\infty(I_1 \times I_2)$ and $M_\infty(I_2 \times I_1)$ are not isomorphic.

Доведення. Let $i_1, i_2, i_3 \in I_1$ be distinct elements. A matrix unit $e_{i_1 j}$, $j \in I_2$, is equal to $e_{i_1 j} = [e_{i_1 i_2}, e_{i_2 j}]$. Hence, the whole i_1 -th row of $M_\infty(I_1 \times I_2)$ lies in

$$[e_{i_1 i_2}, M_\infty(I_1 \times I_2)].$$

Let $\pi : M_\infty(I_1 \times I_2) \rightarrow M_\infty(I_2 \times I_1)$ be an isomorphism of $\mathfrak{sl}(I_1)$ -modules. Then

$$\pi(e_{i_1 j}) \in [e_{i_1 i_2}, M_\infty(I_2 \times I_1)] = M_\infty(I_2, I_1)e_{i_1 i_2}.$$

We proved that π maps the i_1 -th row of $M_\infty(I_1 \times I_2)$ to the i_2 -th column of $M_\infty(I_2 \times I_1)$. In the same way, we could show that π maps the i_1 -th row of $M_\infty(I_1 \times I_2)$ to the i_3 -th column of $M_\infty(I_2 \times I_1)$. Hence $\pi = 0$. This completes the proof of the lemma. $\square$

Since $d(\mathfrak{sl}_\infty(I_1) \oplus \mathfrak{sl}_\infty(I_2)) = (0)$, it follows that the even derivation d is a module endomorphism of the $\mathfrak{sl}_\infty(I_1) \oplus \mathfrak{sl}_\infty(I_2)$ -module

$$L_{\bar{1}} = M_\infty(I_1 \times I_2) + M_\infty(I_2 \times I_1).$$

For an element $a \in M_\infty(I_1 \times I_2)$, let

$$d(a) = \pi_{11}(a) + \pi_{12}(a),$$

where

$$\pi_{11}(a) \in M_\infty(I_1 \times I_2), \quad \pi_{12}(a) \in M_\infty(I_2 \times I_1),$$

and similarly for an element

$$b \in M_\infty(I_2 \times I_1)$$

let

$$d(b) = \pi_{21}(b) + \pi_{22}(b),$$

where

$$\pi_{21}(b) \in M_\infty(I_1 \times I_2), \quad \pi_{22}(b) \in M_\infty(I_2 \times I_1).$$

The mappings π_{ij} , $1 \leq i, j \leq 2$, are $\mathfrak{sl}(I_1) \oplus \mathfrak{sl}(I_2)$ -module homomorphisms. By Lemmas 1, 2, $\pi_{12} = 0$, $\pi_{21} = 0$. By Schur's Lemma, π_{11} and π_{22} are scalar multiplications by $\alpha \in \mathbb{F}$ and $\beta \in \mathbb{F}$, respectively.

We have $L_{\bar{0}} = [L_{\bar{1}}, L_{\bar{1}}]$. Hence, the restriction of d to $L_{\bar{0}}$ is a scalar multiplication by $\alpha + \beta$. Hence, $\alpha + \beta = 0$.

Consider the diagonal $I \times I$ matrix D having 1 at a position (i, i) , $i \in I_1$, and -1 at a position (j, j) , $j \in I_2$. Clearly,

$$D \in M_{rcf}(I_1, I_2)_{\bar{0}}, \quad d = \alpha \text{ad}(D).$$

We proved the theorem for even derivations.

Now, let d be an odd derivation of $L = \mathfrak{sl}_\infty(I_1, I_2)$.

Let $X \subseteq I_1$, $Y \subseteq I_2$ be nonempty finite subsets, $|X| \geq 2$. The subalgebra $\mathfrak{sl}_\infty(X) \oplus \mathfrak{sl}_\infty(Y)$ is naturally embedded in $\mathfrak{sl}_\infty(I_1) \oplus \mathfrak{sl}_\infty(I_2)$. There exist finite subsets

$$X \subseteq \tilde{X} \subseteq I_1, \quad Y \subseteq \tilde{Y} \subseteq I_2$$

such that all entries of matrices from $d(\mathfrak{sl}_\infty(X) \oplus \mathfrak{sl}_\infty(Y))$ lying outside of the square $(\tilde{X} \cup \tilde{Y}) \times (\tilde{X} \cup \tilde{Y})$ are equal to zero, so

$$d(\mathfrak{sl}_\infty(X) \oplus \mathfrak{sl}_\infty(Y)) \subseteq M(\tilde{X}, \tilde{Y}).$$

Every derivation of a finite-dimensional semi-simple Lie algebra into a finite-dimensional modulo is inner; see [5]. Hence, there exists an element

$$u_{X,Y} \in M(\tilde{X} \times \tilde{Y}) + M(\tilde{Y} \times \tilde{X})$$

such that $d(a) = [u_{X,Y}, a]$ for all elements $a \in \mathfrak{sl}_\infty(X) \oplus \mathfrak{sl}_\infty(Y)$.

If

$$X \subseteq X' \subseteq I_1, \quad Y \subseteq Y' \subseteq I_2$$

are finite subsets containing X , Y , respectively, then

$$[\mathfrak{sl}_\infty(X) \oplus \mathfrak{sl}_\infty(Y), u_{X,Y} - u_{X',Y'}] = (0).$$

Lemma 3. Let $X \subset I_1$ be a finite subset, $|X| \geq 2$. Let

$$u = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & u' \\ u'' & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in L_{\bar{1}},$$

where u' , u'' are $I_1 \times I_2$ and $I_2 \times I_1$ matrices, respectively. Suppose that $[\mathfrak{sl}_\infty(X), u] = (0)$. Then for any $i \in X$ the i -th row of u' and the i -th column of u'' are equal to zero.

Доведення. Choose an invertible $|X| \times |X|$ matrix $a \in \mathfrak{sl}_\infty(X)$. We have

$$[a, u] = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & au' \\ -u''a & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Hence, $au' = 0$, $u''a = 0$. This immediately implies the claim. $\square$

Without loss of generality, we assume that the set I_1 is infinite.

Let $i \in I_1$, $j \in I_2$. Choose arbitrary finite subsets $i \in X \subset I_1$, $j \in Y \subset I_2$, $|X| \geq 2$. Find a matrix

$$u_{X,Y} \in \begin{pmatrix} \mathbf{0} & M(I_1 \times I_2) \\ M(I_2 \times I_1) & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

such that $d(a) = [u_{X,Y}, a]$ for all elements $a \in \mathfrak{sl}_\infty(X) \oplus \mathfrak{sl}_\infty(Y)$. If $|I_2| = 1$, then $|Y| = 1$ and $\mathfrak{sl}_\infty(Y) = (0)$.

Let $\alpha_{ij} = (u_{X,Y})_{ij} \in \mathbb{F}$, $\alpha_{ji} = (u_{X,Y})_{ji} \in \mathbb{F}$. By Lemma 3, the elements α_{ij} , α_{ji} do not depend on a choice of the subsets X , Y .

Consider the matrix

$$u \in \begin{pmatrix} \mathbf{0} & M(I_1 \times I_2) \\ M(I_2 \times I_1) & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$u_{ij} = \alpha_{ij}$, $u_{ji} = \alpha_{ji}$, $i \in I_1$, $j \in I_2$. By the construction of the matrix u , we have $d(a) = [u, a]$ for all elements $a \in \mathfrak{sl}_\infty(I_1) \oplus \mathfrak{sl}_\infty(I_2)$.

Lemma 4. $d(b) = [u, b]$ for all elements $b \in L_{\bar{0}}$.

Доведення. The subalgebra $\mathfrak{sl}_\infty(I_1)$ is an ideal in $L_{\bar{0}}$. Choose arbitrary elements $a \in \mathfrak{sl}_\infty(I_1)$, $b \in L_{\bar{0}}$. Then

$$d([a, b]) = [u, [a, b]].$$

On the other hand,

$$d([a, b]) = [d(a), b] + [a, d(b)] = [[u, a], b] + [a, d(b)].$$

This implies

$$[a, d(b)] - [u, b] = 0.$$

Since the centralizer of $\mathfrak{sl}_\infty(I_1)$ in $L_{\bar{1}}$ is zero, we conclude that $d(b) = [u, b]$. This completes the proof of the lemma. $\square$

For arbitrary indices $i \in I_1$, $j \in I_2$ the matrix $e_{ii} + e_{jj}$ lies in $L_{\bar{0}}$.

Lemma 5. If

$$u \in \begin{pmatrix} \mathbf{0} & M(I_1, I_2) \\ M(I_2, I_1) & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

and $[u, e_{ii} - e_{jj}] \in \mathfrak{sl}_\infty(I)$ for all $i \in I_1$, $j \in I_2$, then $u \in M_{ref}(I)$.

Доведення. Chose $i \in I_1$, $j \in I_2$. For any $k \in I_2$, $k \neq j$, we have

$$[u, e_{ii} + e_{jj}]_{ik} = -u_{ik}.$$

It implies that the i -th row of the matrix u has finitely many nonzero entries. Similarly, for any $q \in I_1$, $q \neq i$, we have

$$[u, e_{ii} + e_{jj}]_{jq} = -u_{jq},$$

which implies that the j -th row of the matrix u has finitely many nonzero entries. This completes the proof of the lemma. $\square$

Now, Theorem 1 follows from Lemmas 4 and 5.

Список використаних джерел

References

1. *Beidar K.I.* On Herstein's Lie map conjectures I / K. I. Beidar, M. Brešar, M. A. Chebotar, W. S. Martindale // Trans. Amer. Math. Soc.–**353** (2001).–P.4235-4260.
2. *Beidar K.I.* On Herstein's Lie map conjectures II / K. I. Beidar, M. Brešar, M. A. Chebotar, W. S. Martindale // J. Algebra.–**238** (2001).–P.239-264.
3. *Beidar K.I.* On Herstein's Lie map conjectures III / K. I. Beidar, M. Brešar, M. A. Chebotar, W. S. Martindale // J. Algebra.–**249** (2002).–P.59-94.
4. *Bezushchak O.* Automorphisms and derivations of algebras of infinite matrices / O. Bezushchak // Linear Algebra Appl.–**650** (2022).–P.42-59.
5. *Jacobson N.* Lie algebras / N. Jacobson / Dover Publications, Inc. New-York, 1979.
6. *Kac V.G* Lie superalgebras / V. G. Kac // Adv. Math.–**16** (1977).–P.8-96.
7. *Neeb K.-H.* Derivations of locally simple Lie algebras / K.-H. Neeb // J. Lie Theory.–**15** (2005).–P.589-594.
8. *Scheunert M.* The Theory of Lie superalgebras. Lecture Notes in Mathematics / M. Scheunert / Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1979.
9. *Wall C.T.C.* Graded Brauer groups / C. T. C. Wall // J. Reine Angew. Math.–**213** (1963/64).–P.187-199.
1. BEIDAR, K. I., BREŠAR, M., CHEBOTAR, M. A., MARTINDALE, W. S. (2001) "On Herstein's Lie map conjectures I", Trans. Amer. Math. Soc. **353**, pp.4235–4260.
2. BEIDAR, K. I., BREŠAR, M., CHEBOTAR, M. A., MARTINDALE, W. S. (2001) "On Herstein's Lie map conjectures II", J. Algebra **238**, pp.239–264.
3. BEIDAR, K. I., BREŠAR, M., CHEBOTAR, M. A., MARTINDALE, W. S. (2002) "On Herstein's Lie map conjectures III", J. Algebra **249**, pp.59–94.
4. BEZUSHCHAK, O. (2022) "Automorphisms and derivations of algebras of infinite matrices", Linear Algebra Appl. **650**, pp.42–59.
5. JACOBSON, N. (1979) "Lie algebras", Dover Publications, Inc. New-York.
6. KAC, V. G. (1977) "Lie superalgebras", Adv. Math. **16**, pp.8–96.
7. NEEB, K.-H. (2005) "Derivations of locally simple Lie algebras", J. Lie Theory **15**, pp.589–594.
8. Scheunert, M. (1979) "The Theory of Lie superalgebras", Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.
9. Wall, C. T. C. (1963/64) "Graded Brauer groups", J. Reine Angew. Math. **213**, pp.187–199.

Received: 15.05.2023

УДК 512.552

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/1.3>

Бондаренко В. М., д. ф.-м. н., проф.

Bondarenko V. M., Dr. Sci., Prof.

Доповнення до статті “Козображення матричних алгебр Манна”

Addendum to the paper “Corepresentations of Munn matrix algebras”.

Інститут математики НАН України,
01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3,
e-mail: vitalij.bond@gmail.com

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine,
01024 Kyiv, Tereshchenkivska str., 3,
vitalij.bond@gmail.com

Ця стаття є доповненням до статті, опублікованої у Віснику Київського національного університету імені Тараса Шевченка (Серія. фіз.-мат. науки), 2022, 3, с. 42-44.

У оригінальному варіанті не приведено чітке означення козображення алгебри з одиницею, що привело до деяких формальних неточностей (щодо позначень, запису визначальних співвідношень, тощо). Усі результати оригінальної статті по суті правильні, але в останній частині доведення теореми 1 допущена помилка, яка не впливає на правильність ідеї доведення, проте вимагає розширених міркувань.

У цьому доповненні автор надає детальну інформацію про все, що стосується тверджень про твірні елементи і визначальні співвідношення алгебр Манна над алгебрами з одиницею.

Ключові слова: козображення, твірні елементи та визначальні співвідношення, вільна асоціативна алгебра, некомутативний поліном, алгебра Манна, напівгрупа Ріса, регулярна сендвіч-матриця.

This paper is an addendum to the paper, published in Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv (Series: Physics & Mathematics), 2022, No. 3, pp. 42-44.

In the original version does not given a clear definition of the corepresentation of an algebra with identity what led to some formal inaccuracies (regarding notations, writing of defining relations, etc.). All the results of the original paper are essentially correct, but an error was made in the last part of the proof of Theorem 1, which does not affect the correctness of the idea of proof, but requires extended considerations.

In this addendum the author provides detailed information on everything related to statements about the generating elements and defining relations of the Munn algebras over algebras with identity.

Key Words: corepresentation, generators and defining relations, free associative algebra, non-commutative polynomial, Mann algebra, Rees semigroup, regular sandwich matrix.

1 Introduction

In this addendum to the paper [1] the author provide more details concerning Theorem 1 on corepresentations (in other words, presentations) of Munn matrix algebras over finite-dimensional K -algebras, where K is any field.

Munn matrix algebras arose as generalizations of semigroup algebras of Rees matrix semigroups, which in turn are closely related to 0-simple semigroups (see the book [2] and the original variant [1] of this paper).

For a finite-dimensional (associative) K -algebra $\mathcal{A}$ with identity, natural numbers m, n and a

fixed $n \times m$ matrix $P = (p_{ji})$ over $\mathcal{A}$, the K -vector space $\mathcal{M}(\mathcal{A}; m, n; P)$ of all $m \times n$ matrices over $\mathcal{A}$ can be made into an algebra with respect to the following operation $\circ: B \circ C = BPC$ with the ordinary matrix multiplication on the right side of the equality. This algebra is called the *Munn $m \times n$ matrix algebra over $\mathcal{A}$ with sandwich matrix P* .

By analogy with the Rees semigroups (taking into account the fact that the Munn algebras for equivalent sandwich matrices are isomorphic) we called in [1] a sandwich matrix *regular* if at least one its entry is invertible, and (by the same fact) assumed without loss of generality that p_{11} is equal

to the identity element of $\mathcal{A}$, and the remaining entries of the first row and first column are equal to zero. We denoted sandwich matrices of such form by P_0 and further considered in [1], and will consider here, only such sandwich matrices.

We emphasize that, in contrast to the case of semigroups (when the regularity of sandwich matrices is directly related to the regularity of semigroups), the regularity of sandwich matrix for algebras is not associated with the regularity of algebras, and it is defined only as a formal generalization.

Thus, we study the Munn matrix algebras $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{A}; m, n; P)$ over finite-dimensional K -algebras $\mathcal{A}$, and as in [1], we are interested in the problem of determining their corepresentations.

2 Corepresentations of the Munn matrix algebras

Throughout the paper K denotes arbitrary field, and all algebras (which are assumed to be associative) are considered over K and are finite-dimensional (except for 2.4). Since the Mann algebras over a unital algebra $\mathcal{A}$ does not always have an identity (see [2, Lemma 5.18]), we consider both unital and non-unital algebras. If an algebra is unital, its identity is usually denoted by e (leaving the symbol 1 for fields and free algebras).

2.1 Generators and defining relations

In discussing this topic, we use the books [3, 4].

Let $\text{Alg}(K)$, $\text{Alg}^1(K)$ denotes, respectively, the class of all or only unit K -algebras.

Definition 1. Let X be a finite set. The free K -algebra $F = K\langle X \rangle$ in the class $\text{Alg}(K)$ (respectively, $F = K^1\langle X \rangle$ in the class $\text{Alg}^1(K)$) is defined by the universal mapping property: there exists a map $i : X \rightarrow F$ such that every map α from X into another K -algebra from the same class can be uniquely factored by i (i.e. there exists a unique homomorphism α' between the K -algebras such that (in right-handed notation) $\alpha = i\alpha'$).

These algebras exists and are uniquely, up to isomorphism, defined by the field K and the set X . There is simple normal forms for elements of the free algebras $F = K\langle X \rangle$ and $F = K^1\langle X \rangle$. Namely, considering the set X as an alphabet, $F = K\langle X \rangle$ is the algebra with K -basis the set

X^+ of all finite words $x_1 \dots x_n$ of length $n \geq 1$ in the case of $\text{Alg}(K)$ and the set X^* of all finite words $x_1 \dots x_n$ of length $n \geq 0$ (i.e. including the empty word) in the case $\text{Alg}^1(K)$, and with juxtaposition as multiplication, i.e. multiplying $x_{i_1} \dots x_{i_n}$ by $x_{j_1} \dots x_{j_m}$ is $x_{i_1} \dots x_{i_n} x_{j_1} \dots x_{j_m}$. If one denotes a word $x_{i_1} \dots x_{i_n}$ by x_I with I to be the sequence $(i_1, \dots, i_n)$, its elements are uniquely expressible in the form $f = \sum a_I x_I$, where $a_I \in K$, almost all is equal to 0. The empty word (in the case of $\text{Alg}^1(K)$) represents the identity of the free algebra F , which is denoted by 1. So $K^1\langle X \rangle = K\langle X \rangle \cup 1$.

The set X is called a *free generating set* of the algebra F .

Free algebra $F = K^1\langle X \rangle$ is often called the algebra of non-commutative polynomials in variables X . In the case $F = K\langle X \rangle$ one needs to take the polynomials with zero free term.

Definition 2. Let $\mathcal{B}$ be a non-unital (respectively, unital) finite-dimensional algebra. It is said to be defined by the presentation $\langle X | R \rangle$ with R being a subset of the free algebra $K\langle X \rangle$ (respectively, $K^1\langle X \rangle$), if there exists an isomorphism $\varphi : K\langle X \rangle / I \rightarrow \mathcal{B}$ (respectively, $K^1\langle X \rangle / I \rightarrow \mathcal{B}$) of non-unital (respectively, unital) algebras, where I is the ideal generated by R .

Let $X = \{x_1, \dots, x_s\}$. One often considers instead of the elements $x_i \in X$ and polynomials $f(x_1, \dots, x_s) \in R$, respectively, the elements $b_i = \varphi(x_i + I)$ of $\mathcal{B}$ and equalities $f(b_1, \dots, b_s) = 0$. Then the set $B = \{b_1, \dots, b_s\}$ is a system of generators of the algebra $\mathcal{B}$, and the equalities $f(b_1, \dots, b_s) = 0$ with $f \in R$ are called the defining relations of $\mathcal{B}$ with respect to the system of generators B . In this case, one means by R the set of all equalities $f(b_1, \dots, b_s) = 0$, calls $\langle B | R \rangle_K$ the presentation of $\mathcal{B}$ and writes $\mathcal{B} = \langle B | R \rangle_K$ or simply $\mathcal{B} = \langle B | R \rangle$ if K is fixed (when the multiplication in $\mathcal{B}$ is denoted by some symbol, say, Δ , then it is placed as an upper index, i.e. $\langle B | R \rangle_K^\Delta$ and, respectively, $\langle B | R \rangle^\Delta$). The author will adhere to this point of view.

From definition 2 it follows that the identity element of a unital algebra never enters a system of generators.

Let's compare two simple examples.

Example 1. Let $\mathcal{B}$ be the two-dimensional non-unital K -algebra with basis b_1, b_2 and the

following multiplication table:

	b_1	b_2
b_1	b_2	0
b_2	0	0

Then $\mathcal{B} = \langle b_1 | b_1^3 = 0 \rangle$ since the homomorphism $\varphi : K\langle x \rangle \rightarrow \mathcal{B}$ with $\varphi(x) = b_1$ is an epimorphism with the kernel to be generated (as an ideal) by the polynomial $f(x) = x^3$.

Example 2. Let $\mathcal{B}$ be the two-dimensional unital K -algebra with basis e, b_1 and the following multiplication table:

	e	b_1
e	e	b_1
b_1	b_1	e

Then $\mathcal{B} = \langle b_1 | b_1^2 = e \rangle$ since the homomorphism $\varphi : K^1\langle x \rangle \rightarrow \mathcal{B}$ with $\varphi(1) = e$, $\varphi(x) = b_1$ is an epimorphism with the kernel to be generated (as an ideal) by the polynomial $f(x) = x^2 - 1$.

2.2 Formulation of the main theorem

By the above, a corepresentation of an algebra $\mathcal{A}$ is by definition, a pair $\langle A | R \rangle$, where A is a set of generators and R a set of defining relations for the given set of generators. For convenience, the relations (non-commutative polynomials in elements of A) will be written not only in the form $f = 0$, but also in the form $f_1 = f_2$ (if $f = f_1 - f_2$).

The following theorem defines a corepresentation of any Munn algebras $\mathcal{M}(\mathcal{A}; m, n; P)$ with a regular sandwich matrix.

Theorem 1. *Let $\mathcal{A}$ be a finite-dimensional algebra with identity e over a field K and $\langle A | R \rangle$ be its corepresentation with*

$$A = \{a_1, \dots, a_s\},$$

$$R = \{f_1 = g_1, \dots, f_r = g_r\},$$

where $f_i = f_i(a_1, \dots, a_s)$, $g_i = g_i(a_1, \dots, a_s)$ are non-commutative polynomials over K .

For m, n , introduce the sets

$$\Gamma = \{\gamma_2, \dots, \gamma_m\}, \quad \Lambda = \{\lambda_2, \dots, \lambda_n\}.$$

We have the corepresentation $\langle M | \bar{R} \rangle^\circ$ of a Munn algebra $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{A}; m, n; P_0)$ with a regular $P_0 = (p_{ji})$, where $M = A \cup \{e\} \cup \Gamma \cup \Lambda$ and $\bar{R}$ consists of the following relations:

- (1) the relations from R ;
- (2) $e \circ e = e$, $e \circ a_i = a_i$,
 $a_i \circ e = a_i$ ($i = 1, \dots, s$);
- (3) $e \circ \gamma_i = 0$, $\gamma_i \circ e = \gamma_i$ ($i = 2, \dots, m$);
- (4) $e \circ \lambda_j = \lambda_j$, $\lambda_j \circ e = 0$ ($j = 2, \dots, n$);
- (5) $\gamma_i \circ \gamma_{i'} = 0$ ($i, i' = 2, \dots, m$);
- (6) $\lambda_j \circ \lambda_{j'} = 0$ ($j, j' = 2, \dots, n$);
- (7) $\lambda_j \circ \gamma_i = p_{ji}$ ($i = 2, \dots, m$; $j = 2, \dots, n$).

2.3 Proof of the theorem

First, indicate which element of $\mathcal{M}$ corresponds to each generator.

For $x \in \mathcal{A}$ and $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, denote by $(x)_{ij}$ the matrix from $\mathcal{M}$ with its (i, j) th entry being x , and its remaining entries being 0; the expression $(0)_{ij}$ means the $m \times n$ zero matrix 0. Then, by the above definition of $\circ$,

$$(b)_{ij} \circ (c)_{i'j'} = (bp_{ji'}c)_{ij'}$$

and in particular (taking into account the equality $p_{11} = 1$)

$$(bc)_{ij} = (b)_{i1} \circ (c)_{1j}. \quad (*)$$

As the generators of $\mathcal{M}$ indicated in the condition of the theorem, we take the following matrices:

$$\begin{aligned} e &= (e)_{11}, \quad a_k = (a_k)_{11}, \\ \gamma_i &= (e)_{i1}, \quad \lambda_j = (e)_{1j} \end{aligned} \quad (**)$$

for $k \in \{1, \dots, s\}$, $i \in \{2, \dots, m\}$, $j \in \{2, \dots, n\}$.

Prove that these elements form a system of generators of $\mathcal{M}$.

From (*) it follows that the homomorphism, as non-unital algebras, $i_0 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$, given by the equality $i_0(x) = (x)_{11}$ for any $x \in \mathcal{A}$ is an embedding, and we identify the corresponding elements of both algebras. Hence the set of generators A together with e is a subset of the set of generators M .

With the help of matrix multiplication (as elements of the Munn matrix algebra), it is easy to verify that conditions (3)-(7) of the theorem are satisfied, and the equalities $(a)_{i1} = \gamma_i \circ (a)_{11}$, $(a)_{1j} = (a)_{11} \circ \lambda_j$, $(a)_{ij} = (a)_{i1} \circ (e)_{1j}$, which follow from (*) and (**), show that the indicated matrices $(e)_{11}$, $(a)_{11}$, γ_i , λ_j , where $a \in A$, $i = 2, \dots, m$; $j = 2, \dots, n$, form a system of generators of the algebra $\mathcal{M}$.

Now we show that the set of relations $\bar{R}$ defines the algebra $\mathcal{M}$ (this is the only place where a mistake was made in the paper [1]). In other words, there is no relation between generators from the set M which would not follow from the relations

of $\bar{R}$. Assume the contrary and let F be a non-commutative polynomial in variables from M such that $F = 0$ and it is not a consequence of the relations from the set $\bar{R}$.

We first find out what form a word over M can have. Denote by $\bar{A}$ and $\bar{M}$ the sets of all finite words from A and M (with respect to multiplication $\circ$). In addition to conditions (1)-(7), we will use the equalities

$$(3') \quad a_k \circ \gamma_i = 0 \quad (k = 2, \dots, m);$$

$$(4') \quad \lambda_j \circ a_s = 0 \quad (s = 2, \dots, n);$$

they follow from condition (2) and, respectively, conditions (3), (4), namely $a_k \circ \gamma_i = (a_k \circ e) \circ \gamma_i = a_k \circ (e \circ \gamma_i)$ and $\lambda_j \circ a_s = \lambda_j \circ (e \circ a_s) = (\lambda_j \circ e) \circ a_s$.

Let a non-empty word $w = w_1 \cdots w_q \neq e$. Then

(a) it can be assumed by (2)-(4) that all w_i are not equal e ;

(b) $w_t = a_k$ implies by (3') that $w_{t+1} = a_s$ or $w_{t+1} = \lambda_j$;

(c) $w_t = a_s$ implies by (4') that $w_{t-1} = a_k$ or $w_{t-1} = \gamma_i$;

(d) $w_t = \lambda_j$ implies by (4') and (6) that $w_{t+1} = \gamma_i$, and therefore by (7) $w_t w_{t+1} \in \bar{A}$;

(e) $w_t = \gamma_i$ implies by (3') and (5) that $w_{t-1} = \lambda_j$, and therefore by (7) $w_{t-1} w_t \in \bar{A}$;

From (a)-(e) it follows that any non-empty word $w \in \bar{M} \setminus (\bar{A} \cup \{e\})$, is equal to $\bar{a}_1 \circ \lambda_j$ or $\gamma_i \circ \bar{a}_2$ or $\gamma_i \circ \bar{a}_3 \circ \lambda_j$ with $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3 \in \bar{A}$.

Thus, the polynomial F introduced above has

the following form: $F = f_0 +$

$$\sum_{2 \leq i \leq m} \gamma_i \circ f_{1i} + \sum_{2 \leq j \leq n} f_{2j} \circ \lambda_j + \sum_{\substack{2 \leq i \leq m \\ 2 \leq j \leq n}} \gamma_i \circ f_{3ij} \circ \lambda_j = 0,$$

where $f_0, f_{1i}, f_{2j}, f_{3ij}$ are polynomials in variables $a \in A$.

The non-zero parts of the matrices that correspond (according to the definitions of the generators from M) the terms of the polynomial F do not intersect, since by the definition of the embedding i_0 and (**)

$$f_0 = (f_0)_{11}, \quad \gamma_i \circ f_{1i} = (f_{1i})_{i1},$$

$$f_{2j} \circ \lambda_j = (f_{2j})_{1j}, \quad \gamma_i \circ f_{3ij} \circ \lambda_j = (f_{3ij})_{ij}.$$

Therefore the equality $F = 0$ is equivalent to the following system of the equalities in variables from A :

$$f_0 = 0, \quad f_{1i} = 0, \quad f_{2j} = 0, \quad f_{3ij} = 0,$$

where $i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$.

We have come to a contradiction because these relations are consequences of the relations from R . Theorem 1 is proved.

2.4 Remark

Since we did not use the finite dimensionality of the algebra $\mathcal{A}$ in the proof of the theorem (and the definitions of a free algebra and a corepresentation are naturally generalized to the infinite-dimensional case), Theorem 1 is also true for an infinite-dimensional algebra $\mathcal{A}$.

Список використаних джерел

1. Bondarenko V. M. Corepresentations of Munn matrix algebras / V. M. Bondarenko // Bulletin of University of Kiev (Series: Physics & Mathematics). – 2022. – No. 3. – pp. 42-44.
2. Clifford A. H., Preston G. B. The algebraic theory of semigroups (volume) / A. H. Clifford, G. B. Preston // American Mathematical Society, Providence RI, 1961. – XV+254 pp.
3. Cohn P. M. Free Algebras and its Relstions / P. M. Cohn // Academic Press Inc, 1985. – XXii+588 pp.
4. Drensky V. Free Algebras and PI-Algebras / V. Drensky // Springer-Verlag, 1999. – X+271 pp.

References

1. BONDARENKO V. M. (2022) Corepresentations of Munn matrix algebras. *Bulletin of University of Kiev (Series: Physics & Mathematics)*. No. 3. pp. 42-44.
2. CLIFFORD A. H., PRESTON G. B. (1961) *The algebraic theory of semigroups. Vol. 1*, American Mathematical Society, Providence, RI, XV+254 pp.
3. COHN P. M. (1985) *Free Algebras and its Relstions*, Academic Press Inc, XXii+588 pp.
4. DRENSKY V. (1999) *Free Algebras and PI-Algebras*, Springer-Verlag, X+271 pp.

Надійшла до редколегії 14.01.2023

УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/1.4>

О. Д. Борисенко¹, к.ф.-м.н., доц.
О. В. Борисенко², к.ф.-м.н., доц.

**Вимирання та виживання у залежній
від щільності популяції хижака
стохастичній моделі хижак-жертва із
стрибками**

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64.

e-mail: borysenko13101953@gmail.com

² Національний технічний університет України "КПІ" 03056, г.Київ-56, проспект Перемоги, 37

e-mail: oborisenko1373@gmail.com

O. D. Borysenko¹, Ph.D., Associate Professor
O. V. Borysenko², Ph.D., Associate Professor

**Extinction and persistence in stochastic
predator population density-dependent
predator-prey model with jumps**

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.

e-mail: borysenko13101953@gmail.com

²National Technical University of Ukraine "KPI", 37 Prospect Peremogy, Kyiv 03056

e-mail: oborisenko1373@gmail.com

Одержано достатні умови вимирання, не виживання у середньому, слабкого та сильного виживання у середньому популяцій у стохастичній, залежній від щільності хижаків моделі хижак-жертва з функціональною відповіддю типу Холлінг II.

Ключові слова: стохастична модель хижак-жертва, залежність від щільності хижаків, вимирання, не виживання у середньому, слабке та сильне виживання у середньому.

The non-autonomous stochastic density dependent predator-prey model with Holling-type II functional response disturbed by white noise, centered and non-centered Poisson noises is investigated. Corresponding system of stochastic differential equations has a unique, positive, global (no explosions in a finite time) solution. Sufficient conditions are obtained for extinction, non-persistence in the mean, weak and strong persistence in the mean of a predator and prey population densities in the considered stochastic predator-prey model.

Key Words: stochastic predator-prey model, predator density dependence, extinction, non-persistence in the mean, weak and strong persistence in the mean.

Communicated by Prof. Moklyachuk M.P.

1 Introduction

The deterministic autonomous Rosenzweig-Mac'Arthur predator-prey model ([1]) has a form

$$\begin{aligned} dx_1(t) &= x_1(t) \left(a_1 - b_1 x_1(t) - \frac{cx_2(t)}{1+mx_1(t)} \right) dt, \\ dx_2(t) &= x_2(t) \left(-a_2 + \frac{\kappa cx_1(t)}{1+mx_1(t)} \right) dt, \end{aligned} \quad (1)$$

where $x_1(t)$ and $x_2(t)$ are the prey and predator population densities at time t , respectively; $a_1 > 0$ is the growth rate of prey x_1 ; $b_1 > 0$ measures the strength of competition among individuals of species x_1 ; c is the maximum ingestion rate; $m > 0$ is the half-saturation; $a_2 > 0$ is the death rate of predator x_2 , and $\kappa > 0$ is the conversion factor.

In the paper [2] the stochastic version of model (1) is considered. The authors studied the non-autonomous density dependent predator-prey

model with Holling-type II functional response, disturbed by white noise and jumps generated by centered and non-centered Poisson measures. So the authors take into account the influence on the predator-prey model of the predator population density dependence and of such random factors as fires, earthquakes, hurricanes etc. This model is driven by the system of stochastic differential equations

$$\begin{aligned} dx_i(t) &= x_i(t) \left[(-1)^{i-1} \left(a_i(t) - \frac{c_i(t)x_{3-i}(t)}{1+m(t)x_1(t)} \right) - b_i(t)x_i(t) \right] dt + \sigma_i(t)x_i(t)dw_i(t) \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \gamma_i(t, z)x_i(t^-)\tilde{\nu}_1(dt, dz) \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \delta_i(t, z)x_i(t^-)\nu_2(dt, dz), \\ x_i(0) &= x_{i0} > 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (2)$$

where $x_1(t)$ and $x_2(t)$ are the prey and predator

population densities at time t , respectively, $x_i(t^-)$, $i = 1, 2$ is a left limit of $x_i(t)$, $i = 1, 2$, $b_2(t) > 0$ is the predator density dependence rate at time t , $c_2(t) = \kappa c_1(t)$, $w_i(t)$, $i = 1, 2$ are independent standard one-dimensional Wiener processes, $\nu_i(t, A)$, $i = 1, 2$ are independent Poisson measures, which are independent on $w_i(t)$, $i = 1, 2$, $\tilde{\nu}_1(t, A) = \nu_1(t, A) - t\Pi_1(A)$, $E[\nu_i(t, A)] = t\Pi_i(A)$, $i = 1, 2$, $\Pi_i(A)$, $i = 1, 2$ are finite measures on the Borel sets A in $\mathbb{R}$. In [2] the authors proved that there is a unique positive global (no explosion in a finite time) solution to the system (2) and that this solution is stochastically ultimately bounded. It is deduced the sufficient conditions for stochastic permanence of the system (2).

The impact of centered and non-centered Poisson noises to the stochastic non-autonomous predator-prey models is studied in the papers [3], [4].

In this paper, we derive the sufficient conditions for the extinction, weak and strong persistence in the mean of predator and prey population densities, driven by system (2).

In the following we will use the notations $X(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $X_0 = (x_{10}, x_{20})$, $|X(t)| = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}$, $\mathbb{R}_+^2 = \{X \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$,

$$\beta_i(t) = \frac{\sigma_i^2(t)}{2} + \int_{\mathbb{R}} [\gamma_i(t, z) - \ln(1 + \gamma_i(t, z))] \Pi_1(dz) - \int_{\mathbb{R}} \ln(1 + \delta_i(t, z)) \Pi_2(dz), i = 1, 2.$$

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds,$$

$$f_* = \liminf_{t \rightarrow \infty} f(t), f^* = \limsup_{t \rightarrow \infty} f(t).$$

For the bounded, continuous functions $f_i(t)$, $t \in [0, +\infty)$, $i = 1, 2$, let us denote

$$f_{i \sup} = \sup_{t \geq 0} f_i(t), f_{i \inf} = \inf_{t \geq 0} f_i(t), i = 1, 2.$$

2 Auxiliary results

Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ be a probability space, $w_i(t)$, $i = 1, 2$, $t \geq 0$ are independent standard one-dimensional Wiener processes on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, and $\nu_i(t, A)$, $i = 1, 2$ are independent Poisson measures defined on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ independent on $w_i(t)$, $i = 1, 2$. Here $E[\nu_i(t, A)] = t\Pi_i(A)$, $i = 1, 2$, $\tilde{\nu}_i(t, A) = \nu_i(t, A) - t\Pi_i(A)$, $i = 1, 2$, $\Pi_i(\cdot)$, $i = 1, 2$ are finite

measures on the Borel sets in $\mathbb{R}$. On the probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ we consider an increasing, right continuous family of complete sub- σ -algebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, where $\mathcal{F}_t = \sigma\{w_i(s), \nu_i(s, A), s \leq t, i = 1, 2\}$.

We need the following assumption.

Assumption 1. It is assumed, that $a_i(t)$, $b_i(t)$, $c_i(t)$, $\sigma_i(t)$, $\gamma_i(t, z)$, $\delta_i(t, z)$, $i = 1, 2$, $m(t)$ are bounded, continuous on t functions, $a_i(t) > 0$, $i = 1, 2$, $b_{i \inf} > 0$, $c_{i \inf} > 0$, $i = 1, 2$, $m_{\inf} > 0$, and $\ln(1 + \gamma_i(t, z))$, $\ln(1 + \delta_i(t, z))$, $i = 1, 2$ are bounded, $\Pi_i(\mathbb{R}) < \infty$, $i = 1, 2$.

In what follows we will assume that Assumption 1 holds. In [2] the following result is proved.

Lemma 2.1. (Theorem 2.1, [2]) *There exists a unique global solution $X(t)$ to the system (2) for any initial value $X(0) = X_0 \in \mathbb{R}_+^2$, and $\mathbf{P}\{X(t) \in \mathbb{R}_+^2\} = 1$.*

Lemma 2.2. *For the density of the population $x_i(t)$, $i = 1, 2$ we have*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x_i(t)}{t} \leq 0, i = 1, 2 \quad a.s.$$

Proof. By the Itô's formula we have for $i = 1, 2$

$$e^t \ln x_i(t) - \ln x_{i0} = \int_0^t e^s \left\{ \ln x_i(s) + (-1)^{i-1} \left[a_i(s) - \frac{c_i(s)x_{3-i}(s)}{1+m(s)x_1(s)} - b_i(s)x_i(s) - \frac{\sigma_i^2(s)}{2} \right] + \int_{\mathbb{R}} [\ln(1 + \gamma_i(s, z)) - \gamma_i(s, z)] \Pi_1(dz) \right\} ds + \psi_i(t), \quad (3)$$

where

$$\begin{aligned} \psi_i(t) = & \int_0^t e^s \sigma_i(s) dw_i(s) \\ & + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^s \ln(1 + \gamma_i(s, z)) \tilde{\nu}_1(ds, dz) \\ & + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^s \ln(1 + \delta_i(s, z)) \nu_2(ds, dz), i = 1, 2. \end{aligned}$$

From the exponential inequality ([5], Lemma 2.2) we have

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \zeta_i(\mu, t) > \beta \right\} \leq e^{-\mu\beta}, \quad \forall 0 < \mu \leq 1, \beta > 0, i = 1, 2$$

where

$$\begin{aligned}\zeta_i(\mu, t) &= \psi_i(t) - \frac{\mu}{2} \int_0^t e^{2s} \sigma_i^2(s) ds \\ &- \frac{1}{\mu} \iint_{0\mathbb{R}} [(1 + \gamma_i(s, z))^{\mu e^s} - 1 \\ &- \mu e^s \ln(1 + \gamma_i(s, z))] \Pi_1(dz) ds \\ &- \frac{1}{\mu} \iint_{0\mathbb{R}} [(1 + \delta_i(s, z))^{\mu e^s} - 1] \Pi_2(dz) ds,\end{aligned}$$

$i = 1, 2$.

Choosing $T = k\tau, k \in \mathbb{N}, \tau > 0, \mu = e^{-k\tau}, \beta = \theta e^{k\tau} \ln k, \theta > 1$ we get

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq k\tau} \zeta_i(\mu, t) > \theta e^{k\tau} \ln k \right\} \leq \frac{1}{k^\theta},$$

$i = 1, 2$. By the Borel-Cantelli lemma for almost all $\omega \in \Omega$, there is a random integer $k_0(\omega)$, such that for $\forall k \geq k_0(\omega)$ and $0 \leq t \leq k\tau$

$$\begin{aligned}\psi_i(t) &\leq \frac{1}{2e^{k\tau}} \int_0^t e^{2s} \sigma_i^2(s) ds \\ &+ e^{k\tau} \iint_{0\mathbb{R}} [(1 + \gamma_i(s, z))^{e^{s-k\tau}} - 1 - e^{s-k\tau} \\ &\times \ln(1 + \gamma_i(s, z))] \Pi_1(dz) ds \\ &+ e^{k\tau} \iint_{0\mathbb{R}} [(1 + \delta_i(s, z))^{e^{s-k\tau}} - 1] \Pi_2(dz) ds \\ &+ \theta e^{k\tau} \ln k, \quad i = 1, 2.\end{aligned}\tag{4}$$

Applying the inequality $x^r \leq 1 + r(x - 1), \forall x \geq 0, 0 \leq r \leq 1$ with $x = 1 + \gamma_i(s, z), r = e^{s-k\tau}$, then with $x = 1 + \delta_i(s, z), r = e^{s-k\tau}$, we derive from (4) the estimate

$$\begin{aligned}\psi_i(t) &\leq \frac{1}{2e^{k\tau}} \int_0^t e^{2s} \sigma_i^2(s) ds \\ &+ \iint_{0\mathbb{R}} e^s [\gamma_i(s, z) - \ln(1 + \gamma_i(s, z))] \Pi_1(dz) ds \\ &+ \iint_{0\mathbb{R}} e^s \delta_i(s, z) \Pi_2(dz) ds + \theta e^{k\tau} \ln k,\end{aligned}\tag{5}$$

$i = 1, 2$. So from (3) and (5) we get for $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}e^t \ln x_i(t) &\leq \ln x_{i0} + \int_0^t e^s \{ \ln x_i(s) \\ &+ (-1)^{i-1} \left[a_i(s) - \frac{c_i(s)x_{3-i}(s)}{1+m(s)x_1(s)} \right] - b_i(s)x_i(s) \\ &- \frac{\sigma_i^2(s)}{2} (1 - e^{s-k\tau}) + \int_{\mathbb{R}} \delta_i(s, z) \Pi_2(dz) \} ds \\ &+ \theta e^{k\tau} \ln k \leq \ln x_{i0} + \int_0^t e^s [\ln x_i(s) - b_{i\inf} x_i(s) \\ &+ K_i] ds + \theta e^{k\tau} \ln k \leq \ln x_{i0} + L(e^t - 1) \\ &+ \theta e^{k\tau} \ln k, \forall k \geq k_0(\omega), 0 \leq t \leq k\tau,\end{aligned}$$

for some constant $L > 0$, where

$$K_1 = \alpha_{1\sup}, K_2 = \sup_{t \geq 0} \int_{\mathbb{R}} \delta_2(t, z) \Pi_2(dz) + \frac{c_{2\sup}}{m_{\inf}}.$$

So for any $(k-1)\tau \leq t \leq k\tau, \forall k \geq k_0(\omega)$ we have

$$\begin{aligned}\frac{\ln x_i(t)}{\ln t} &\leq e^{-t} \frac{\ln x_{i0}}{\ln t} + \frac{L}{\ln t} (1 - e^{-t}) \\ &+ \frac{\theta e^{k\tau} \ln k}{e^{(k-1)\tau} \ln(k-1)\tau}, i = 1, 2 \quad \text{a.s.}\end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned}\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x_i(t)}{\ln t} &\leq \theta e^\tau, \\ i = 1, 2, \forall \theta > 1, \forall \tau > 0, \quad \text{a.s.}\end{aligned}$$

If $\theta \downarrow 1, \tau \downarrow 0$, then we obtain

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x_i(t)}{\ln t} \leq 1, \quad i = 1, 2 \quad \text{a.s.}$$

So

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x_i(t)}{t} \leq 0, \quad i = 1, 2 \quad \text{a.s.}$$

The lemma is proved.

3 Persistence and extinction

Definition 3.1. The solution $X(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $t \geq 0$ to the system (2) will be said extinct if for every initial data $X_0 \in \mathbb{R}_+^2$, we have $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$ a.s., $i = 1, 2$.

Theorem 3.1. If

$$\bar{q}_i^* = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t q_i(s) ds < 0,$$

where

$$q_1(t) = a_1(t) - \beta_1(t), \quad q_2(t) = -a_2(t) + \frac{c_2(t)}{m(t)} - \beta_2(t)$$

then the solution $X(t)$ to the system (2) with the initial condition $X_0 \in \mathbb{R}_+^2$ will be extinct.

Proof. Under Assumption 1 there exists a unique global solution $X(t)$ to the system (2) for any initial value $X(0) = X_0 > 0$, and $\mathbf{P}\{X(t) \in \mathbb{R}_+^2\} = 1$ (Lemma 2.1). By the Itô's formula, we have

$$\begin{aligned}\ln x_i(t) &= \ln x_{i0} + \int_0^t \left\{ (-1)^{i-1} \left[a_i(s) - \frac{c_i(s)x_{3-i}(s)}{1+m(s)x_1(s)} \right] - \beta_i(s) - b_i(s)x_i(s) \right\} ds \\ &+ M_i(t) \leq \ln x_{i0} + \int_0^t q_i(s) ds + M_i(t),\end{aligned}\tag{6}$$

$i = 1, 2$, where the martingale

$$\begin{aligned} M_i(t) &= \int_0^t \sigma_i(s) dw_i(s) \\ &+ \iint_{\mathbb{R}} \ln(1 + \gamma_i(s, z)) \tilde{\nu}_1(ds, dz) \\ &+ \iint_{\mathbb{R}} \ln(1 + \delta_i(s, z)) \tilde{\nu}_2(ds, dz), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (7)$$

has quadratic variation

$$\begin{aligned} \langle M_i, M_i \rangle(t) &= \int_0^t \sigma_i^2(s) ds \\ &+ \iint_{\mathbb{R}} \ln^2(1 + \gamma_i(s, z)) \Pi_1(dz) ds \\ &+ \iint_{\mathbb{R}} \ln^2(1 + \delta_i(s, z)) \Pi_2(dz) ds \leq Kt, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Then from the strong law of large numbers for local martingales ([6]) we have

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M_i(t)/t = 0, \quad i = 1, 2 \text{ a.s.}$$

Therefore, from (6) we obtain

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x_i(t)}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t q_i(s) ds < 0, \quad \text{a.s.}$$

So $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0, i = 1, 2$ a.s. The theorem is proved.

Definition 3.2. ([7]) The solution $X(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $t \geq 0$ to the system (2) will be said non-persistent in the mean if for every initial data $X_0 \in \mathbb{R}_+^2$, we have

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x_i(s) ds = 0 \text{ a.s., } i = 1, 2.$$

Theorem 3.2. If $\bar{q}_i^* = 0, i = 1, 2$, then the solution $X(t) = (x_1(t), x_2(t))$ to the system (2) with the initial value $X_0 \in \mathbb{R}_+^2$ will be non-persistent in the mean.

Proof. From the first equality in (6) we have

$$\begin{aligned} \ln x_i(t) &\leq \ln x_{i0} + \int_0^t q_i(s) ds \\ &- b_{i \inf} \int_0^t x_i(s) ds + M_i(t), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (8)$$

where martingales $M_i(t), i = 1, 2$ are defined in (7). From the definition of $\bar{q}_i^*, i = 1, 2$ and the strong law of large numbers for $M_i(t), i = 1, 2$ it follows, that $\forall \varepsilon > 0, \exists t_0 \geq 0$, and $\exists \Omega_\varepsilon \subset \Omega, \mathbf{P}(\Omega_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ such that

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t q_i(s) ds &\leq \bar{q}_i^* + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \frac{M_i(t)}{t} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \\ i = 1, 2, \quad \forall t \geq t_0, \quad \omega \in \Omega_\varepsilon. \end{aligned}$$

So, from (8) we derive

$$\begin{aligned} \ln x_i(t) - \ln x_{i0} &\leq t(\bar{q}_i^* + \varepsilon) - b_{i \inf} \int_0^t x_i(s) ds \\ &= t\varepsilon - b_{i \inf} \int_0^t x_i(s) ds, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (9)$$

$\forall t \geq t_0, \omega \in \Omega_\varepsilon$.

Let $y_i(t) = \int_0^t x_i(s) ds, i = 1, 2$, then from (9) we have for $i = 1, 2$

$$\ln \left(\frac{dy_i(t)}{dt} \right) \leq \varepsilon t - b_{i \inf} y_i(t) + \ln x_{i0}, \quad \forall t \geq t_0, \omega \in \Omega_\varepsilon.$$

Therefore

$$e^{b_{i \inf} y_i(t)} \frac{dy_i(t)}{dt} \leq x_{i0} e^{\varepsilon t}, \quad i = 1, 2, \quad \forall t \geq t_0, \omega \in \Omega_\varepsilon.$$

By integrating the last inequality from t_0 to t we obtain

$$e^{b_{i \inf} y_i(t)} \leq \frac{b_{i \inf} x_{i0}}{\varepsilon} (e^{\varepsilon t} - e^{\varepsilon t_0}) + e^{b_{i \inf} y_i(t_0)},$$

$i = 1, 2, \forall t \geq t_0, \omega \in \Omega_\varepsilon$. So

$$y_i(t) \leq \frac{1}{b_{i \inf}} \ln \left[e^{b_{i \inf} y_i(t_0)} + \frac{b_{i \inf} x_{i0}}{\varepsilon} (e^{\varepsilon t} - e^{\varepsilon t_0}) \right],$$

$i = 1, 2, \forall t \geq t_0, \omega \in \Omega_\varepsilon$, and therefore

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x_i(s) ds \leq \frac{\varepsilon}{b_{i \inf}}, \quad i = 1, 2, \quad \forall \omega \in \Omega_\varepsilon.$$

Since $\varepsilon > 0$ is arbitrary and $x_i(t) > 0, i = 1, 2$ a.s., we have for $i = 1, 2$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x_i(s) ds = 0 \text{ a.s.}$$

The theorem is proved.

Definition 3.3. ([7]) The population $x_i(t), i = 1, 2$ will be said weakly persistent in the mean if for every initial data $x_{i0} > 0, i = 1, 2$, we have

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x_i(s) ds > 0, \text{ a.s., } i = 1, 2$$

Theorem 3.3. If $\bar{p}_2^* > 0$, where $p_2(t) = -a_2(t) - \beta_2(t)$, then the predator population density $x_2(t)$ with the initial condition $x_{20} > 0$ will be weakly persistence in the mean.

Proof. If the assertion of theorem is not true, then $\mathbf{P}\{\omega \in \Omega \mid \bar{x}_2^* = 0\} > 0$. From the first equality in (6) we get

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t}(\ln x_2(t) - \ln x_{20}) + \frac{1}{t} \int_0^t b_2(s)x_2(s)ds \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t p_2(s)ds + \frac{1}{t} \int_0^t \frac{c_2(s)x_1(s)}{1 + m(s)x_1(s)}ds \\ &+ \frac{M_2(t)}{t} \geq \frac{1}{t} \int_0^t p_2(s)ds + \frac{M_2(t)}{t}, \end{aligned}$$

where martingale $M_2(t)$ is defined in (7). For $\forall \omega \in \{\omega \in \Omega \mid \bar{x}_2^* = 0\}$ in virtue of the strong law of large numbers for martingale $M_2(t)$ we have

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x_2(t)}{t} \geq \bar{p}_2^* > 0.$$

Therefore

$$\mathbf{P}\left\{\omega \in \Omega \mid \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x_2(t)}{t} > 0\right\} > 0.$$

But from Lemma 2.2 we have

$$\mathbf{P}\left\{\omega \in \Omega \mid \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x_2(t)}{t} \leq 0\right\} = 1.$$

This is a contradiction. The theorem is proved.

Theorem 3.4. If $\bar{q}_1^* > 0$ and $\bar{q}_2^* \leq 0$, then the prey population density $x_1(t)$ with initial condition $x_{10} > 0$ will be weakly persistence in the mean.

Proof. Let $\mathbf{P}\{\bar{x}_1^* = 0\} > 0$. From the first equality in (6) we get

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t}(\ln x_1(t) - \ln x_{10}) + \frac{1}{t} \int_0^t b_1(s)x_1(s)ds \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t q_1(s)ds - \frac{1}{t} \int_0^t \frac{c_1(s)x_2(s)}{m(s) + x_1(s)}ds + \frac{M_1(t)}{t} \quad (10) \\ &\geq \frac{1}{t} \int_0^t q_1(s)ds - \frac{c_{1\sup}}{m_{\inf}t} \int_0^t x_2(s)ds + \frac{M_1(t)}{t} \end{aligned}$$

where martingale $M_1(t)$ is defined in (7). From the strong law of large numbers for martingale $M_1(t)$ and the results of Theorem 3.1 and Theorem 3.2 for the predator population density $x_2(t)$ we obtain from (10)

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x_1(t)}{t} \geq \bar{q}_1^* > 0$$

for $\forall \omega \in \{\omega \in \Omega \mid \bar{x}_2^* = 0\}$. Therefore

$$\mathbf{P}\left\{\omega \in \Omega \mid \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x_1(t)}{t} > 0\right\} > 0.$$

But from Lemma 2.2 we have

$$\mathbf{P}\left\{\omega \in \Omega \mid \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x_1(t)}{t} \leq 0\right\} = 1.$$

So we have a contradiction. The theorem is proved.

Definition 3.4. ([7]) The population density $x(t), t \geq 0$ is said to be strongly persistence in the mean if for every initial data $x(0) > 0$, we have $\bar{x}_* > 0$ a.s.

Theorem 3.5. If

$$\bar{p}_{2*} = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t p_2(s) ds > 0,$$

then for every initial data $x_{20} > 0$ we have

$$\bar{x}_{2*} = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x_2(s)ds \geq \frac{\bar{p}_{2*}}{b_{2\sup}}, \text{ a.s.} \quad (11)$$

Therefore predator population density $x_2(t)$ will be strongly persistence in the mean.

Proof. Applying the Itô's formula to the process $\ln x_2(t)$, we obtain

$$\begin{aligned} \ln x_2(t) &= \ln x_{20} + \int_0^t p_2(s)ds \\ &+ \int_0^t \frac{c_2(s)x_2(s)}{1 + m(s)x_1(s)}ds - \int_0^t b_2(s)x_2(s)ds \\ &+ M_2(t) \geq \ln x_{20} + \int_0^t p_2(s)ds \\ &- b_{2\sup} \int_0^t x_2(s)ds + M_2(t), \end{aligned} \quad (12)$$

where martingale $M_1(t)$ is defined in (7).

From definition of $\bar{p}_{2*}$, strong law of large numbers for $M_2(t)$ it follows that $\forall \varepsilon > 0, \exists t_0 \geq 0, \exists \Omega_\varepsilon \subset \Omega$, such that $\mathbf{P}(\Omega_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$,

$$\frac{1}{t} \int_0^t p_2(s)ds \geq \bar{p}_{2*} - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{M_2(t)}{t} \geq -\frac{\varepsilon}{2},$$

$\forall t \geq t_0, \forall \omega \in \Omega_\varepsilon$. So from (12) we have

$$\ln x_2(t) \geq \ln x_{20} + t(\bar{p}_{2*} - \varepsilon) - b_{2\sup} \int_0^t x_2(s) ds$$

$\forall t \geq t_0, \forall \omega \in \Omega_\varepsilon$. Therefore for the process

$$y_2(t) = \int_0^t x_2(s) ds$$

we have inequality

$$\ln \left(\frac{dy_2(t)}{dt} \right) \geq (\bar{p}_{2*} - \varepsilon)t - b_{2\sup} y_2(t) + \ln x_{20},$$

$\forall t \geq t_0, \forall \omega \in \Omega_\varepsilon$.

Hence

$$e^{b_{2\sup} y_2(t)} \frac{dy_2(t)}{dt} \geq x_{20} e^{(\bar{p}_{2*} - \varepsilon)t},$$

$\forall t \geq t_0, \forall \omega \in \Omega_\varepsilon$. Integrating the last inequality from t_0 to t and using obvious calculations, yields

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t x_2(s) ds &\geq \frac{1}{b_{2\sup} t} \ln \left[e^{b_{2\sup} y_2(t_0)} \right. \\ &\left. + \frac{b_{2\sup} x_{20}}{\bar{p}_{2*} - \varepsilon} \left(e^{(\bar{p}_{2*} - \varepsilon)t} - e^{(\bar{p}_{2*} - \varepsilon)t_0} \right) \right] \end{aligned}$$

$\forall t \geq t_0, \forall \omega \in \Omega_\varepsilon$. So

$$\bar{x}_{2*} = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x_2(s) ds \geq \frac{\bar{p}_{2*} - \varepsilon}{b_{2\sup}}, \quad \forall \omega \in \Omega_\varepsilon.$$

Using the arbitrariness of $\varepsilon > 0$, we get (11). The theorem is proved.

Theorem 3.6. If $\bar{q}_{1*} > 0$ and $\bar{q}_2^* \leq 0$, then

$$\bar{x}_{1*} = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x_1(s) ds \geq \frac{\bar{q}_{1*}}{b_{1\sup}} \quad a.s. \quad (13)$$

Hence the prey population density $x_1(t)$ will be strongly persistence in the mean.

Proof. By the Itô's formula for the process $\ln x_1(t)$, we obtain

$$\begin{aligned} \ln x_1(t) &= \ln x_{10} + \int_0^t q_1(s) ds - \int_0^t b_1(s) x_1(s) ds \\ &- \int_0^t \frac{c_1(s) x_2(s)}{1 + m(s) x_1(s)} ds + M_1(t) \geq \ln x_{10} \\ &+ \int_0^t q_1(s) ds - b_{1\sup} \int_0^t x_1(s) ds \\ &- c_{1\sup} \int_0^t x_2(s) ds + M_1(t), \end{aligned} \quad (14)$$

where martingale $M_1(t)$ is defined in (7).

From definition of $\bar{q}_{1*}$, strong law of large numbers for $M_1(t)$, Theorem 3.1 and Theorem 3.2 it follows that $\forall \varepsilon > 0, \exists t_0 \geq 0, \exists \Omega_\varepsilon \subset \Omega$, such that $\mathbf{P}(\Omega_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t q_1(s) ds &\geq \bar{q}_{1*} - \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{M_1(t)}{t} \geq -\frac{\varepsilon}{3}, \\ \frac{1}{t} \int_0^t x_2(s) ds &\leq \frac{\varepsilon}{3c_{2\sup}} \end{aligned}$$

$\forall t \geq t_0, \forall \omega \in \Omega_\varepsilon$. So from (14) we have

$$\ln x_1(t) \geq \ln x_{10} + t(\bar{q}_{1*} - \varepsilon) - b_{1\sup} \int_0^t x_1(s) ds$$

$\forall t \geq t_0, \forall \omega \in \Omega_\varepsilon$. Therefore for the process

$$y_1(t) = \int_0^t x_1(s) ds$$

we have inequality

$$\ln \left(\frac{dy_1(t)}{dt} \right) \geq (\bar{q}_{1*} - \varepsilon)t - b_{1\sup} y_1(t) + \ln x_{10},$$

$\forall t \geq t_0, \forall \omega \in \Omega_\varepsilon$.

Hence

$$e^{b_{1\sup} y_1(t)} \frac{dy_1(t)}{dt} \geq x_{10} e^{(\bar{q}_{1*} - \varepsilon)t},$$

$\forall t \geq t_0, \forall \omega \in \Omega_\varepsilon$. Integrating the last inequality from t_0 to t we obtaine

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t x_1(s) ds &\geq \frac{1}{b_{1\sup} t} \ln \left[e^{b_{1\sup} y_1(t_0)} \right. \\ &\left. + \frac{b_{1\sup} x_{10}}{\bar{q}_{1*} - \varepsilon} \left(e^{(\bar{q}_{1*} - \varepsilon)t} - e^{(\bar{q}_{1*} - \varepsilon)t_0} \right) \right] \end{aligned}$$

$\forall t \geq t_0, \forall \omega \in \Omega_\varepsilon$. So

$$\bar{x}_{1*} = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x_1(s) ds \geq \frac{\bar{q}_{1*} - \varepsilon}{b_{1\sup}}, \quad \forall \omega \in \Omega_\varepsilon.$$

From the arbitrariness of $\varepsilon > 0$, we get (13). The theorem is proved.

4 Conclusion

In this paper we derive the sufficient conditions for the extinction, non-persistence in the mean, weak and strong persistence in the mean of predator and prey populations in the non-autonomous stochastic density dependent predator-prey model with Holling-type II functional response driven by the system of stochastic differential equations with white noise, centered and non-centered

Poisson noises. So, in this model we take into account levels of predator density dependence and not only “small” jumps, corresponding to the centered Poisson measure, but also the “large” jumps, corresponding to the non-centered Poisson measure. Under the weak persistence in the mean $\liminf_{t \rightarrow \infty} \bar{x}_i(t) = 0, i = 1, 2$ is allowed but is not allowed under the strong persistence in the mean, which means that the survival in Theorem 3.5 and in Theorem 3.6 is stronger than in Theorem 3.3 and Theorem 3.4.

Список використаних джерел

1. *Iannelli M.* An Introduction to Mathematical Population Dynamics / M. Iannelli, A. Pugliese — Springer, 2014. — 338 p.
2. *Borysenko O.* A stochastic predator-prey model that depends on the population density of the predator / O. Borysenko, Olg. Borysenko // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series: Physics & Mathematics. — 2022. — no.4. — pp.11 – 17.
3. *Borysenko Olg.* Long-time behavior of a non-autonomous stochastic predator-prey model with jumps / Olg. Borysenko, O. Borysenko // Modern Stochastics: Theory and Applications. — 2021. — 8(1). — p.17-39.
4. *Borysenko O.* Long-Time Behavior of Stochastic Models of Population Dynamics with Jumps / O. Borysenko, Olg. Borysenko // In: Stochastic Processes: Fundamentals and Emerging Applications Ed. by Mikhail Moklyachuk. New York, NY: Nova Science Publishers — 2022. — pp. 37-63.
5. *Borysenko O.D.* Persistence and extinction in stochastic nonautonomous logistic model of population dynamics / O.D. Borysenko, D.O. Borysenko // Theory of Probability and Mathematical Statistics. — 2018. — 2(99). — pp. 63–70.
6. *Lipster R.* A strong law of large numbers for local martingales / R. Lipster // Stochastics — 1980. — vol. 3. — pp. 217–228.
7. *Liu M.* Persistence and extinction in stochastic non-autonomous logistic systems / M. Liu, K. Wanga // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2011. — 375. — pp. 443–457.
1. IANNELLI, M., PUGLIESE, A. (2014) *An Introduction to Mathematical Population Dynamics*. Springer.
2. BORYSENKO, O. and BORYSENKO, OLG. (2022) A stochastic predator-prey model that depends on the population density of the predator. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series: Physics & Mathematics*. no.4. pp.11 – 17.
3. BORYSENKO, OLG. and BORYSENKO, O. (2021) Long-time behavior of a non-autonomous stochastic predator-prey model with jumps *Modern Stochastics: Theory and Applications*. 8(1). p.17 – 39.
4. BORYSENKO, O. and BORYSENKO, OLG. (2022) Long-Time Behavior of Stochastic Models of Population Dynamics with Jumps. *Stochastic Processes: Fundamentals and Emerging Applications*. Ed. by Mikhail Moklyachuk. New York, NY: Nova Science Publishers. pp. 37 – 63.
5. BORYSENKO, O.D. and BORYSENKO, D.O. (2018) Persistence and extinction in stochastic nonautonomous logistic model of population dynamics. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*. 2(99), pp.63 – 70.
6. LIPSTER, R. (1980) A strong law of large numbers for local martingales. *Stochastics*. vol. 3. pp. 217 – 228.
7. LIU, M., WANGA, K. (2011) Persistence and extinction in stochastic non-autonomous logistic systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 375, pp. 443–457.

Received: 20.01.2023

УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/1.5>

Д. Д. Горбунів¹, студ. магістратури
Р. Є. Майборода², д-р. наук, проф.

D. D. Horbunov¹, M. Sc. Student
R. E. Maiboroda², Dr of Sci., Prof.

Крос-валідація у локально-лінійній регресії для спостережень з суміші

Cross-validation for local-linear regression by observations from mixture

¹Кафедра теорії ймовірностей, статистики та
актуарної математики, Київський національ-
ний університет імені Тараса Шевченка, 64/13,
вул.Володимирська, 01601 Київ, Україна
e-mail: danielhorbunov@knu.ua

¹Department of Probability Theory, Statistics
and Actuarial Mathematics, Taras Shevchenko
National University of Kyiv, 64/13, Volodymyrska
Street, 01601 Kyiv, Ukraine
e-mail: danielhorbunov@knu.ua

²Кафедра теорії ймовірностей, статистики та
актуарної математики, Київський національ-
ний університет імені Тараса Шевченка, 64/13,
вул.Володимирська, 01601 Київ, Україна
e-mail: rostmaiboroda@gmail.com

²Department of Probability Theory, Statistics
and Actuarial Mathematics, Taras Shevchenko
National University of Kyiv, 64/13, Volodymyrska
Street, 01601 Kyiv, Ukraine
e-mail: rostmaiboroda@gmail.com

Запропоновано модифікацію оцінок локально-лінійної регресії для оцінювання невідомих функцій регресії компонент суміші зі змінними концентраціями. Досліджуються можливості техніки крос-валідації для вибору параметра згладжування оцінки. Якість отриманих оцінок порівнюється у імітаційних експериментах з якістю модифікованих оцінок Надарая-Ватсона.

Ключові слова: Модель суміші зі змінними концентраціями, непараметрична регресія, техніка крос-валідації, локально-лінійна регресія.

We consider a generalization of local-linear regression for estimation of components' regression functions by observations from mixture with varying concentrations. A cross-validation technique is developed for the bandwidth selection, based on minimization of conditional integrated mean squared error. For the simulations, two approaches on bandwidth selection are used: the naive method, based on the optimal choice for the modified Nadaraya-Watson estimator, and cross-validation technique, mentioned earlier. Performance of the obtained estimator is compared with the modified Nadaraya-Watson estimator performance by simulations. Simulations show that the modified local-linear estimator overcomes boundary effect inherent in the Nadaraya-Watson estimator and its modification for the mixture with varying concentrations.

Key Words: Mixture with varying concentrations, nonparametric regression, cross-validation technique, local-linear regression.

Communicated by Rozora I.V.

1 Вступ

Моделі сумішей зі змінними концентраціями природно виникають в задачах аналізу даних медико-біологічних та соціологічних досліджень [1]. Про можливості застосування цієї моделі у аналізі нейробіологічних даних див. [2].

Для багатовимірних даних залежність між змінними для різних компонент суміші часто буває природно описувати різними регресійними моделями. У роботі [3], запропоновано модифікацію класичної непараметричної оцін-

ки Надарая-Ватсона [4],[5] на випадок спостережень з суміші. Але ці оцінки, як і оцінки Надарая-Ватсона для однорідних вибірок, виявляють так званий крайовий ефект: надзвичайно велике зміщення на кінцях інтервалу зміни незалежної змінної. Одним з можливих способів усунення цього ефекту є використання техніки локально-лінійної регресії [6].

У даній роботі запропонована модифікація локально лінійного оцінювання, яка дозволяє будувати оцінки функції регресії для кожної компоненти суміші окремо. При цьому виникає проблема вибору параметра згладжування

оцінки. Для її розв'язання пропонується модифікація техніки крос-валідації. Якість роботи отриманої оцінки при фіксованих значеннях за-

лежної змінної порівнюється із якістю оцінок Надарая-Ватсона у імітаційних експериментах.

2 Постановка задачі

Розглянемо дані, що описуються моделлю суміші зі змінними концентраціями. Кожен спостережуваний об'єкт належить до однієї з M популяцій (компонент суміші). Розподіл спостережуваної характеристики $\xi_j = (X_j, Y_j)$ j -го об'єкта визначається непараметричною регресійною моделлю:

$$Y_j = g^{(\kappa_j)}(X_j) + \varepsilon_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (1)$$

де κ_j є номером компоненти, до якої належить j -ий об'єкт, $g^{(m)}$ є невідомою функцією регресії для m -ої компоненти, ε_j є центрованою похибкою з скінченною дисперсією $\sigma_{(m)}^2$ для m -ої компоненти. Справжні значення номерів κ_j є невідомими, але відомі ймовірності змішування (концентрації) $p_{j:n}^{(m)} = \mathbf{P}\{\kappa_j = m\}$, $j = \overline{1, n}$, $m = \overline{1, M}$. Розподіли регресорів X_j є абсолютно неперервними відносно міри Лебега, при цьому існують щільності розподілу регресора для всіх компонент суміші $f^{(m)}$, $m = 1, \dots, M$. Ці щільності є невідомими. Випадкові величини X_j, ε_j $j = 1, \dots, n$ вважаються незалежними в сукупності при фіксованій послідовності κ_j .

Потрібно оцінити невідомі функції регресії $g^{(m)}$ для кожної компоненти суміші, $m = \overline{1, M}$.

3 Побудова оцінки

Нагадаємо схему побудови локально лінійних оцінок у випадку однорідної вибірки, тобто коли у моделі (1) є лише одна компонента ($M = 1$) і функція регресії $g^{(m)}(x) = g(x)$ є спільною для всіх спостережень. Для того, щоб оцінити $g(x)$ в фіксованій точці $x = x_0$, розглядають лінійне наближення $g(x) \approx a + b(x - x_0)$ і підганяють невідомі коефіцієнти a і b , мінімізуючи локальний функціонал методу найменших квадратів (2.1) [6]:

$$J(a, b) = \sum_{j=1}^n K\left(\frac{x_0 - X_j}{h}\right) (Y_j - a - b(X_j - x_0))^2,$$

де K — ядро (інтегровна функція з невід'ємними значеннями), $h > 0$ — параметр згладжування. Чим меншим обрано h , тим

ближче до x_0 повинно потрапити X_j для того, щоб вплив j -того спостереження на підігнані значення був помітним. Локально-лінійною оцінкою $\hat{g}(x_0)$ для $g(x_0)$ є координата $\hat{a}$ точки мінімуму $(\hat{a}, \hat{b})$ функціоналу J . Формули (2.1)-(2.4) [6] дають явний вигляд цієї оцінки.

Для узагальнення цих формул ми введемо додаткове навантаження мінімаксними ваговими коефіцієнтами щоб виділити певну компоненту. Ці коефіцієнти описані у [1]. У [3] вони використані для модифікації оцінок Надарая-Ватсона.

Введемо спочатку деякі позначення. Для масивів концентрацій $\mathbf{p} = (p_{j:n}^m, j = \overline{1, n}, m = \overline{1, M}, n \geq 1)$ та вагових коефіцієнтів $\mathbf{a} = (a_{j:n}^m, j = \overline{1, n}, m = \overline{1, M}, n \geq 1)$ будемо позначати $\mathbf{p}^m = (p_{1:n}^m, \dots, p_{n:n}^m)^T$ вектор-стовпець концентрацій m -ої компоненти для всіх спостережень і, аналогічно, $\mathbf{a}^m = (a_{1:n}^m, \dots, a_{n:n}^m)^T$.

Операцію усереднення по всій вибірці позначимо кутовими дужками:

$$\langle \mathbf{p}^m \rangle_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n p_{j:n}^m.$$

Всі арифметичні операції над векторами, які вказані в кутових дужках, визначаються поелементно. Будемо позначати $\langle \mathbf{p}^m \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \mathbf{p}^m \rangle_n$, якщо така границя існує. Зауважимо, що операція усереднення $\langle \mathbf{a}^k \mathbf{p}^m \rangle_n$ задає скалярний добуток $\mathbf{a}^k$ та $\mathbf{p}^m$ у $\mathbb{R}^n$.

Розглянемо матрицю Грама на основі операції усереднення по добуткам покомпонентних векторів концентрацій: $\Gamma_n = (\langle \mathbf{p}^k \mathbf{p}^l \rangle_n)_{k,l=1}^M$. Надалі будемо припускати, що $\{\mathbf{p}^m\}_{m=1}^M$ є лінійно незалежними, а тому $\det \Gamma_n \neq 0$. Вагові коефіцієнти $\mathbf{a}_{j:n}^m$, визначені за правилом

$$a_{j:n}^m = \frac{1}{\det \Gamma_n} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+k} \gamma_{km} p_{j:n}^m,$$

де γ_{km} є k, m -им мінором матриці Γ_n , називають мінімаксними ваговими коефіцієнтами. З властивостями отриманих коефіцієнтів можна ознайомитися у [1].

Оцінка локально-лінійної регресії із наван-

таженням на m -ту компоненту має вигляд:

$$\hat{g}^{(m)}(x_0) = \frac{\sum_{j=1}^n \tilde{w}_{j:n}^m Y_j}{\sum_{j=1}^n \tilde{w}_{j:n}^m}, \quad (2)$$

де

$$\tilde{w}_{j:n}^m = (\hat{s}_2^m(x_0) - \hat{s}_1^m(x_0)(X_j - x_0))a_{j:n}^m w_{j:n}^{x_0}, \quad (3)$$

$$\hat{s}_l^m(x_0) = \sum_{j=1}^n a_{j:n}^m w_{j:n}^{x_0} (X_j - x_0)^l, \quad (4)$$

$l = 1, 2$, та $w_{j:n}^{x_0} = K((X_j - x_0)/h)$.

Якщо в формулах (2)-(4) покласти $a_j^m = 1$, отримуємо звичайні формули локально-лінійної оцінки для однорідної вибірки (2.1)-(2.4) [6]. Якщо у (2) вагові коефіцієнти $\tilde{w}_{j:n}^m$ з (3) замінити на $a_{j:n}^m w_{j:n}^{x_0}$, отримаємо модифіковані оцінки Надарая-Ватсона, що розглядались у [3].

4 Вибір параметра згладжування

Наївний вибір параметра згладжування.

У роботі [3] показано, що узагальнена оцінка Надарая-Ватсона є конзистентною та асимптотично нормальною, коли параметр згладжування вибирається в залежності від обсягу вибірки як $h = h_n = Hn^{-1/5}$, при $n \rightarrow +\infty$. З точки зору мінімізації асимптотичної проінтегрованої середньоквадратичної похибки, теоретично оптимальним значенням $H \in H_{opt}$, що визначається наступним чином:

$$H_{opt} = \left(\frac{d^2 L_2}{4D^2 L_1} \right)^{1/5}, \quad \text{де}$$

$$D = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 K(u) du, \quad d^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (K(u))^2 du,$$

$$L_1 = \left(\frac{(g^{(m)})'(x_0)(f^{(m)})'(x_0)}{f^{(m)}(x_0)} + \frac{(g^{(m)})''(x_0)}{2} \right)^2,$$

$$L_2 = \frac{1}{(f^{(m)}(x_0))^2} \sum_{k=1}^M f^{(k)}(x_0) \langle (a^m)^2 p^k \rangle \Delta_{m,k},$$

$$\Delta_{m,k} = (\sigma_{(k)}^2 + (g^{(m)}(x_0) - g^{(k)}(x_0))^2).$$

Зрозуміло, що це значення не можна безпосередньо використовувати для оцінювання за реальними даними, оскільки для його обчислення потрібно знати невідомі параметри моделі. У даній роботі воно використовується для порівняння можливостей локально-лінійних оцінок та оцінок Надарая-Ватсона. Надалі будемо

називати наївним підходом вибір для локально лінійних оцінок параметра згладжування $h = H_{opt}n^{-1/5}$, тобто теоретично-оптимальний для оцінок Надарая-Ватсона.

Вибір параметра згладжування на основі крос-валідації. Визначимо теоретичну проінтегровану середньоквадратичну похибку із навантаженням на m -ту компоненту як:

$$\text{ISE}(h; m) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{g}_n^{(m)}(x) - g^{(m)}(x))^2 f^{(m)}(x) dx$$

Будемо шукати значення $h > 0$, яке забезпечує (наближену) мінімізацію $\text{ISE}(h; m)$. Оскільки $g^{(m)}$ та $f^{(m)}$ невідомі, побудуємо оцінку для $\text{ISE}(h; m)$. Запишемо $\text{ISE}(h; m)$:

$$\text{ISE}(h; m) = I_1^{(m)} - 2 \cdot I_2^{(m)} + I_3^{(m)},$$

$$I_1^{(m)} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{g}_n^{(m)}(x))^2 f^{(m)}(x) dx,$$

$$I_2^{(m)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}_n^{(m)}(x) g^{(m)}(x) f^{(m)}(x) dx,$$

$$I_3^{(m)} = \int_{-\infty}^{+\infty} (g^{(m)}(x))^2 f^{(m)}(x) dx.$$

Інтеграл $I_3^{(m)}$ не залежить від h , а тому не впливає на мінімізацію. Відкинувши його, маємо функціонал, еквівалентний до $\text{ISE}(h; m)$:

$$\text{CV}^*(h; m) = I_1 - 2 \cdot I_2$$

Оцінимо інтеграли в $\text{CV}^*(h; m)$ наступним чином. Якщо ввести додаткове спостереження $(X^{(m)}, Y^{(m)})$, розподіл першої координати якого має щільність $f^{(m)}$, незалежне від вибірки $\mathbb{X} = \{(X_j, Y_j)\}_{j=1}^n$, то:

$$\mathbb{E}[(\hat{g}_n^{(m)}(X^{(m)}))^2 | \mathbb{X}] = I_1,$$

$$\mathbb{E}[g^{(m)}(X^{(m)}) \hat{g}_n^{(m)}(X^{(m)}) | \mathbb{X}] = I_2$$

Тобто інтеграли $I_1^{(m)}$ та $I_2^{(m)}$ можна було б наближити зваженими вибірковими середніми, якби у нас були додаткові спостереження незалежні від тих, по яких будувалась оцінка. В таких випадках для оцінювання використовують техніку крос-валідації.

Введемо наступні оцінки для інтегралів:

$$I_1^{(m)} \approx \hat{I}_1^{(m)} = \sum_{j=1}^n a_{j:n}^m (\hat{g}_{j-}^{(m)}(X_j))^2,$$

$$I_2^{(m)} \approx \hat{I}_2^{(m)} = \sum_{j=1}^n a_{j:n}^m g^{(m)}(X_j) \hat{g}_{j-}^{(m)}(X_j),$$

де $\hat{g}_{j-}^{(m)}$ є оцінкою для $g^{(m)}$ на основі всіх спостережень, окрім j -го. Проблема виникає в оцінюванні $g^{(m)}$ в $\hat{I}_2^{(m)}$. Якщо використовувати для оцінювання всю вибірку, то $g^{(m)}$ і $\hat{g}_{j-}^{(m)}(X_j)$ будуть залежними між собою. Щоб усунути цю залежність, розіб'ємо вибірку на дві половини з приблизно однаковою кількістю спостережень: перша частина вибірки іде на обчислення оцінок крос-валідації, а друга використовується для оцінювання функції регресії $g^{(m)}$.

Підставляючи замість інтегралів побудовані оцінки, отримуємо оцінку для $CV^*(h; m)$:

$$\widehat{CV}(h; m) = \sum_{j=1}^{[n/2]} a_{j:[n/2]}^m (\hat{g}_{j-}^{(m)}(X_j))^2 -$$

$$- 2 \cdot \sum_{j=1}^{[n/2]} a_{j:[n/2]}^m \hat{g}_{n-[n/2]}^{(m)}(X_j) \hat{g}_{j-}^{(m)}(X_j),$$

де $\hat{g}_{j-}^{(m)}(x)$ підраховується за першими $[n/2]$ спостереженнями з вибірки (за виключенням j -го), а $\hat{g}_{n-[n/2]}^{(m)}(x)$ на основі тих спостережень, що залишилися. Оцінка параметра згладжування на основі техніки крос-валідації визначається як точка мінімуму оціненого функціоналу:

$$h_{\widehat{CV}}^{(m)} = \arg \min_{h>0} \widehat{CV}(h; m)$$

5 Імітаційний експеримент

Проаналізуємо поведінку оцінки, порівнюючи запропоновані оцінки з узагальненою оцінкою Надарая-Ватсона з [3] для одного модельного розподілу даних. Імітаційні експерименти було проведено на вибірках обсягу $n = 100, 250, 500, 750, 1000$. Для кожного обсягу вибірки було згенеровано по $B = 1000$ незалежних копій вибірок, по яких будувались оцінки.

Розглядалась двокомпонентна суміш, тобто $M = 2$. Ймовірності змішування визначені як

$$\mathbf{P}\{\kappa_j = 1\} = \frac{j}{n}, \mathbf{P}\{\kappa_j = 2\} = 1 - \frac{j}{n}, j = \overline{1, n}.$$

Розподіл регресора є рівномірним на $[0, 1]$. Розподіл похибок є центрованим гауссовим з дисперсією 1.25, тобто $\varepsilon_j \sim N(0, 1.25)$. Функції регресії визначені як

$$g^{(m)}(x) = (-1)^m x(1-x), m = 1, 2.$$

В якості ядра оцінки береться ядро Єпанечнікова $K(x) = 3/4(1-x^2)\mathbf{1}_{|x| \leq 1}$. Якість поточної збіжності оцінок характеризується зміщенням $\text{Bias}(\hat{g}^{(m)}(x_0)) = \mathbb{E}[\hat{g}^{(m)}(x_0) - g^{(m)}(x_0)]$ та дисперсією $\mathbb{D}[\hat{g}^{(m)}(x_0)]$, котрі оцінюються за вибіровим середнім та вибірковою дисперсією по значеннях оцінок на модельованих вибірках. Зобразимо значення поточкових характеристик відносно збільшення обсягу вибірки:

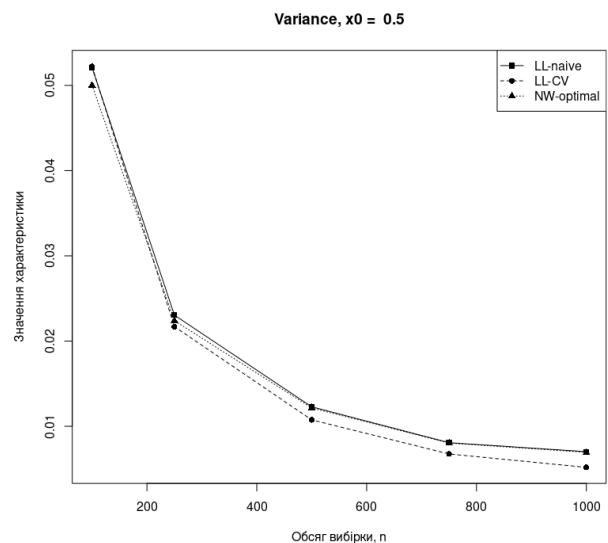
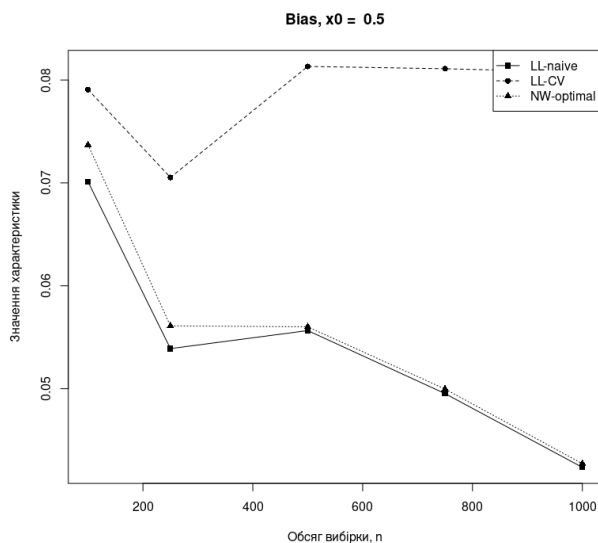


Рис. 1: Зміщення та дисперсія оцінок для $g^{(1)}(x_0)$, $x_0 = 0.5$.

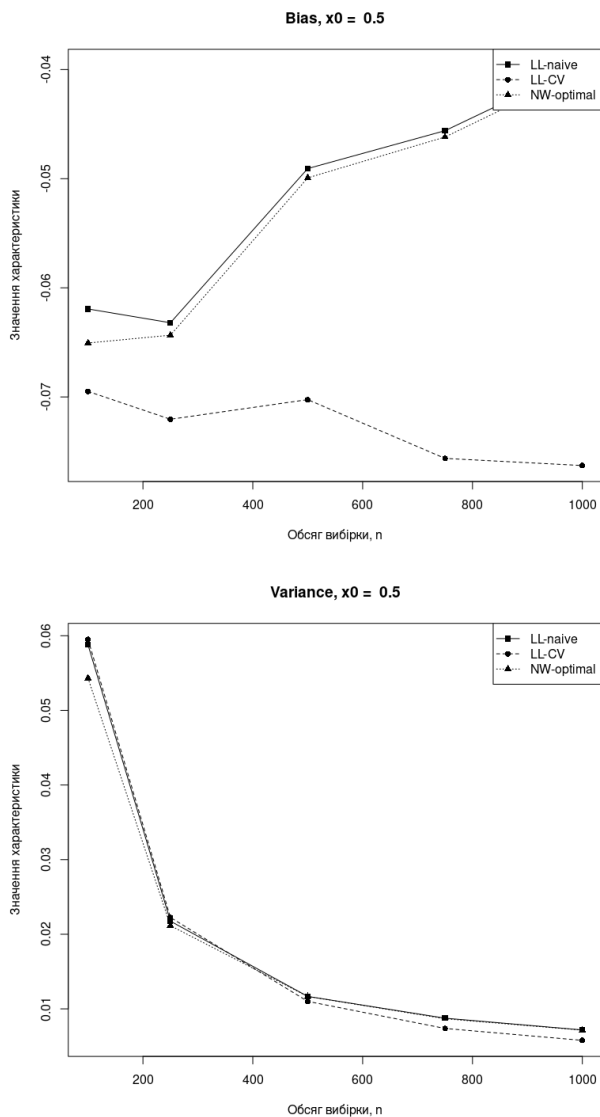


Рис. 2: Зміщення та дисперсія оцінок для $g^{(2)}(x_0)$, $x_0 = 0.5$.

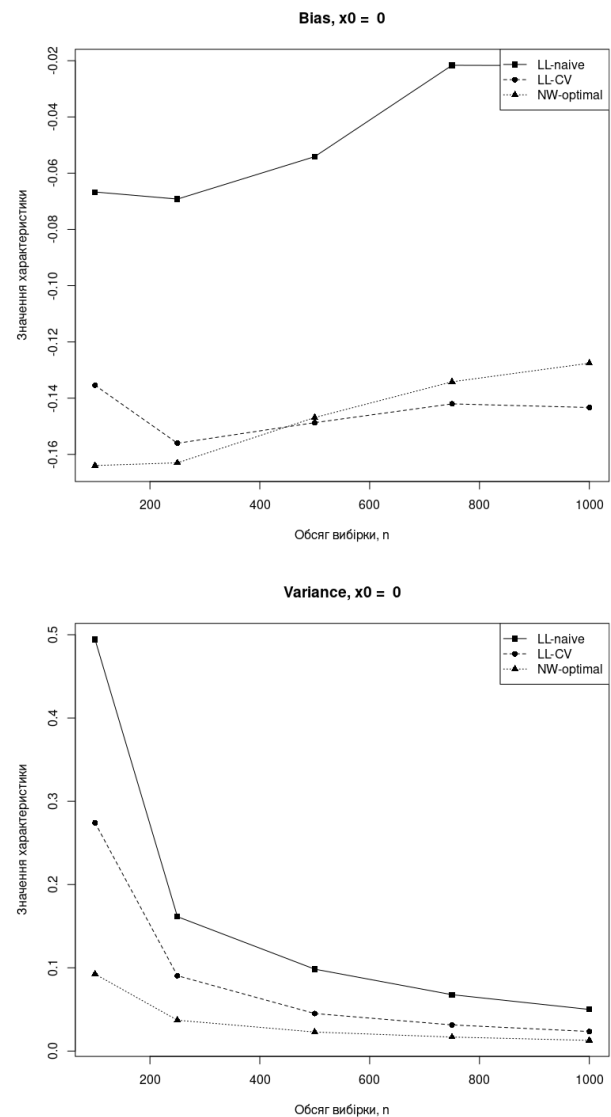


Рис. 3: Зміщення та дисперсія оцінок для $g^{(1)}(x_0)$, $x_0 = 0$.

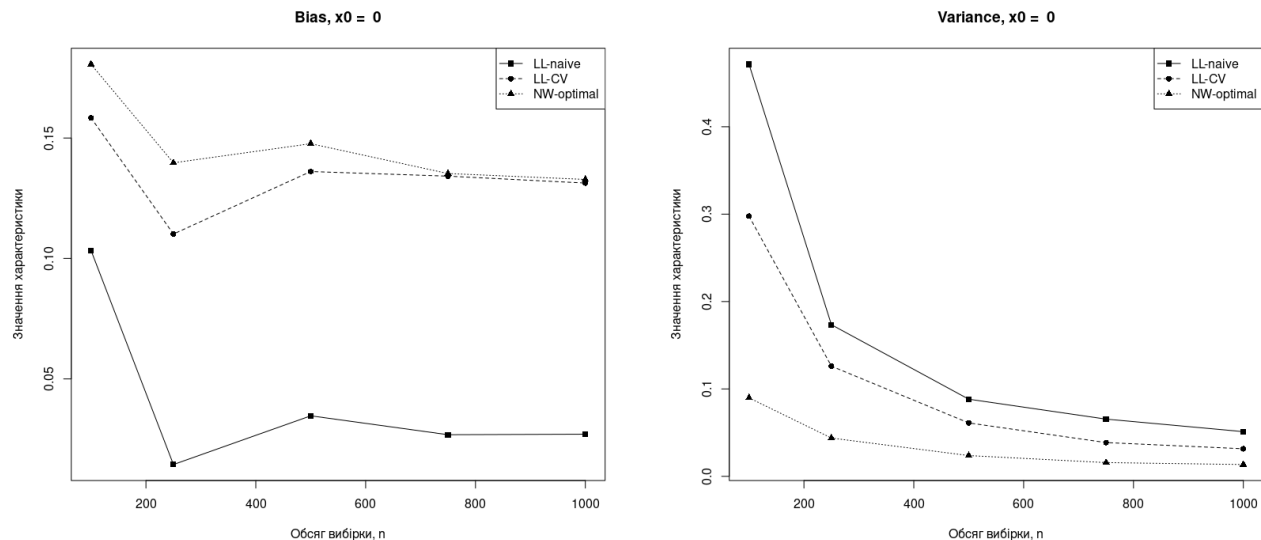


Рис. 4: Зміщення та дисперсія оцінок для $g^{(2)}(x_0)$, $x_0 = 0$.

6 Висновки

У проведених експериментах побудована модифікація оцінки локально-лінійної регресії для моделі суміші з декількома регресіями демонструє кращу поведінку в граничній точці носія регресора ($x_0 = 0$). З наведених вище рисунків це добре видно порівняно меншим зміщен-

ням та дисперсією відносно оцінки Надарая-Ватсона. В інших імітаційних експериментах, які використовують інші розподіли регресорів та функції регресії, поведінка може бути гіршою.

Теоретичне дослідження асимптотичної поведінки запропонованих оцінок має бути предметом подальшої роботи.

Список використаних джерел

1. Майборода Р.Є., Сугакова О.В. "Оцінювання та класифікація за спостереженнями із суміші". К.: ВПЦ "Київський університет", 213 p. - 2008
2. A. Pidnebesna, I. Fajnerová, J. Horáček, J. Hlinka. Mixture Components Inference for Sparse Regression: Introduction and Application for Estimation of Neuronal Signal from fMRI BOLD. *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 116 (2023), p. 735-748.
3. H. Dychko, R. Maiboroda. A generalized Nadaraya-Watson estimator for observations obtained from a mixture. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, Vol. 100 (2020), p. 61-76, DOI: 10.1090/tpms/1098.
4. E. A. Nadaraya. On Estimating Regression. *Theory of Probability and its Applications*, Vol. 9 (1964), No. 1, p. 141-142.

5. G. S. Watson. Smooth regression analysis. *Sankhya: The Indian Journal of Statistics, Series A*, Vol. 26 (1964), No. 4, p. 359-372.
6. J. Fan. Local Linear Regression Smoothers and their minimax efficiencies. *The Annals of Statistics*, Vol. 21 (1993), No. 1, p. 196-216.

References

1. MAIBORODA R., SUGAKOVA O. (2008) *Otsiniuvannia ta klasyfikatsiia za sposterezhenniamy iz sumishi*. Kyiv: Kyivskyi universytet, 213 p.
2. A. PIDNEBESNA, I. FAJNEROVÁ, J. HORÁČEK, J. HLINKA. (2023) *Mixture Components Inference for Sparse Regression: Introduction and Application for Estimation of Neuronal Signal from fMRI BOLD*. In *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 116, p. 735-748.

3. DYCHKO H., MAIBORODA R. (2020) *A generalized Nadaraya–Watson estimator for observations obtained from a mixture*. In Theory of Probability and Mathematical Statistics, Vol. 100, p. 61-76, DOI: 10.1090/tpms/1098.
 4. NADARAYA E. (1964) *On Estimating Regression*. In Theory of Probability and its Applications, Vol. 9, No. 1, p. 141-142.
 5. WATSON G. (1964) *Smooth regression analysis*. In Sankhya: The Indian Journal of Statistics, Series A, Vol. 26, No. 4, p. 359-372.
 6. FAN J. (1993) *Local Linear Regression Smoothers and their minimax efficiencies*. In The Annals of Statistics, Vol. 21, No. 1, p. 196-216.
- Надійшла до редколегії 01.06.2023

УДК 519.21:519.6

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/1.6>

Зубченко В.П.¹, к.ф.-м.н, доц.
Александрова П.В.²

Zubchenko V.P.¹, PhD, Associate Professor
Aleksandrova P.V.²

**Математичне моделювання динаміки
страхової компанії на основі
макропоказників**

**Mathematical modeling of the dynamics of an
insurance company based on macro indicators**

^{1,2}Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Академіка Глушкова 4д,
e-mail: ¹volodymyr.zubchenko@knu.ua
²aleksandrova.polina@knu.ua

^{1,2}Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,

e-mail: ¹volodymyr.zubchenko@knu.ua

²aleksandrova.polina@knu.ua

В роботі досліджується динаміка страхової компанії зі страхування життя в залежності від зміни макропоказників. Для дослідження чутливості проводиться тестування прибутковості для середньостатистичного договору накопичувального страхування життя. Проведення тестування прибутковості базується на оцінці очікуваної сучасної вартості майбутніх грошових потоків. Досліджуються різні підходи до вибору ставок дисконтування. Обґрунтовується вибір стратегії використання ставок кривої безкупонної доходності, побудованої за гривневими облігаціями внутрішньої державної позики (далі – ОВДП). Показано залежність кривої безкупонної доходності від зміни облікової ставки. Розглянуто динаміку моделі при різних рівнях відсоткової ставки: гарантований інвестиційний дохід, середня прибутковість інвестиційної діяльності, облікова ставка. Розглянуто сценарій прогнозованого зменшення облікової ставки на етапі післявоєнної відбудови України. Проведено тестування прибутковості страхової компанії на основі макропараметрів вказаного сценарію. Показано доцільність використання обраного підходу для дослідження динаміки страхової компанії зі страхування життя в умовах поточної високої волатильності економіки України.

Ключові слова: страхова компанія, профіт-тест, модель Свенссона, дисконтування, облікова ставка.

In the paper we investigate the dynamics of a life insurance company depending on changes in macro indicators. For the sensitivity study, profitability testing is performed for the average life insurance contract. Profitability testing is based on an estimate of the expected present value of future cash flows. Various approaches to the choice of discount rates are investigated. The choice of strategy for using the rates of the zero-coupon yield curve built on the UAH domestic government bonds is substantiated. The dependence of the zero-coupon yield curve on the change in the key rate is shown. The dynamics of the model at different levels of the interest rates, namely guaranteed investment income, average profitability of investment activity, key rate, is considered. The scenario of the predicted decrease in the key rate at the stage of post-war reconstruction of Ukraine is considered. The profitability of the insurance company was tested based on the macro parameters of the specified scenarios. The expediency of using the chosen approach for researching the dynamics of a life insurance company in the conditions of the current high volatility of the Ukrainian economy is shown.

Key words: insurance company, profit test, Svensson model, discounting, key rate.

Вступ

У сучасному світі існує багато викликів та стресових для економіки ситуацій, які можуть призводити до неочікуваної поведінки динаміки «життя» страхових контрактів. Особливо, якщо мова йде про довгострокові продукти, які вимагають прогнозування на 10 і більше років вперед. Перш за все це необхідно для самих страхових компаній – для оцінки ризиків та прибутковості того чи іншого портфелю, продуктів, бізнесу в цілому. Для цього прогнозування зазвичай застосовуються певні припущення, як, наприклад, значення ставок, під яку правильніше дисконтувати майбутні потоки доходів та витрат, адже від цього залежить адекватність кінцевого результату на початковий момент часу і відповідних кроків страхової компанії в подальшому.

Теоретична частина

Для оцінювання прибутковості певного продукту страхові компанії (далі – СК) використовують profit test. Він будується наступним чином: описується поняття середньостатистичного договору (умовно кажучи обирається найпоширеніший строк дії договору, стандартний набір ризиків, середня премія, вік та стать застрахованої особи також, зазвичай, найбільш поширені по портфелю або з розуміння своєї цільової аудиторії компанією). Далі для цього договору будується модель, яка показуватиме, як буде поводити себе договір протягом років його дії в розрізі доходів та витрат компанії. Очевидно, що для цього закладаються певні припущення щодо, наприклад, зміни витрат СК, рівня розривів договорів страхування тощо. І в результаті – вираховується прибуток від цього договору для кожного року і приводиться до моменту початку дії договору – таким чином ми знаходимо прибутковість продукту. Виникає складність і, власне, це є одним із припущень, - під яку ставку потрібно дисконтувати потоки. НБУ, як регулятор, чітко не регламентує вибір ставки дисконтування, відповідно кожна СК обирає для себе той підхід, який вважає для своєї ситуації найбільш вдалим. Серед таких підходів є: дисконтувати під відсоток гарантованого інвестиційного доходу (4%, наприклад), дисконтувати під відсоток прибутковості по депозиту, який діє на момент часу укладення договору та кілька інших. Але ці підходи не можуть коректно відтворити реальний стан ринку, оскільки, очевидно, економіка змінна

протягом часу, тим паче якщо ми говоримо про страхування життя, яке є довготривалим продуктом, а отже, і дисконтувати правильно під різні ставки в кожен конкретний рік. Отже, як зрозуміло із вищезазначеного, ці ставки мають корелювати із зміною економіки. Тобто, наприклад, зміною курсу валют, облікової ставки тощо. Тобто потрібно знайти такий показник, який залежатиме від зміни макроекономічних показників і відображатиме реальний стан ринку. Таким показником є крива безкупонної доходності – графічна інтерпретація доходності однорідних безкупонних боргових цінних паперів з різними періодами до погашення. Базова крива безкупонної доходності будується за державними облігаціями [1]. Залежність кривої від макропоказників досліджена в нашій попередній роботі [2].

Практична частина

Реалізація profit-test зроблена в Microsoft Excel. При тестуванні моделі для різних ставок дисконтування бачимо, що результат значно змінюється, тобто залежно від вибору підходу до визначення ставки дисконтування може значно занижуватись або завищуватись результативність продукту СК з точки зору його прибутковості. Щоб визначити ставки, скористаємось кривою безкупонної доходності, побудованою за гривневими ОВДП за моделлю Свенссона. Для цього використаємо формулу моделі Свенссона, яка залежить від 6 параметрів, які оновлюються НБУ на щотижневій основі.

$$S_p = \beta_0 + \beta_1 ((1 - e^{-p/\tau}) / (p/\tau)) + \beta_2 ((1 - e^{-p/\tau}) / (p/\tau) - e^{-p/\tau}) + \beta_3 ((1 - e^{-p/\tau_1}) / (p/\tau_1) - e^{-p/\tau_1})$$

Використовуючи цю формулу, ми можемо на будь-який строк порахувати значення ставки. І відповідно використати ці ставки для дисконтування потоків в profit-test, отримавши результати найбільш наближені до реального стану ринку.

Розглянемо контракт накопичувального страхування життя, що включає в себе ризики смерті та дожиття до завершення строку дії договору страхування для жінки 35 років, який укладений на 20 років. Ми закладаємо певні припущення щодо рівня розривів, адміністративних витрат, аквізиції тощо, але найбільше нас цікавить припущення щодо вибору ставки дисконтування потоків доходів та витрат СК протягом терміну дії договору.

Розглянемо кілька припущень вибору ставки: 4% (гарантований інвестиційний дохід), 12% (прибутковість інвестиційної діяльності), 25% (облікова ставка).

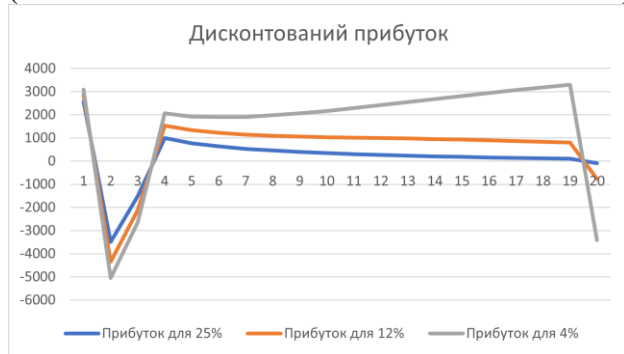


Рис. 1 Динаміка дисконтованого прибутку для різних ставок дисконтування

Таким чином за результатами проведення профіт-тесту ми отримали такі значення ставок прибутковості 7%, 18.1% та 33.3% для ставок 25%, 12% та 4% відповідно. Як бачимо, вибір ставки значно впливає на результат оцінки прибутковості продукту.

Тепер візьмемо параметри для моделі Свенссона станом на 13.06.2023 року та порахуємо значення на всі дні на термін дії досліджуваного договору.

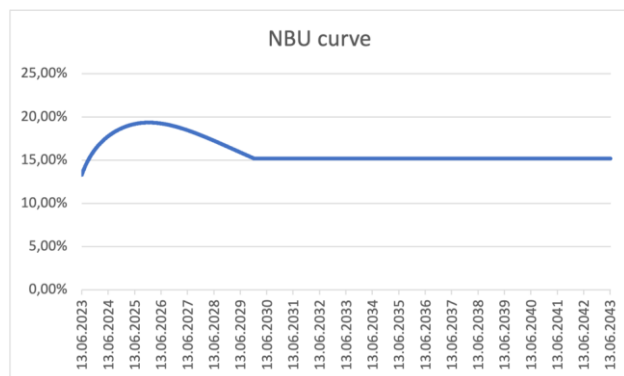


Рис. 2 Крива значень ставок доходності ОВДП

Така поведінка кривої пояснюється тим, що вона релевантна для ОВДП станом на 10 років, але ми продовжуємо її до 20 років.

Дисконтуємо прибуток під ставки з цієї кривої і отримуємо маржинальність 12.8%.

Далі нас цікавить як зміниться поведінка профіт-тесту при зміні облікової ставки. В попередній роботі була доведена залежність кривої безкупонної доходності від облікової ставки. Візьмемо значення ставок по кривій і облікової ставки до повномасштабного вторгнення, тобто до 24.02.2022, тому що там спостерігались

регулярні залежності ставок і відповідно можна побудувати лінійну регресію базуючись на історичному наборі даних. Використавши функції Excel, знаходимо, що

Середнє значення ставки на кривій безкупонної доходності = $0.582 \cdot \text{значення облікової ставки у відповідний рік} + 6.7\%$.

Тобто з кожним підняттям облікової ставки на 1% значення ставок на кривій безкупонної доходності зростає на 0.582%.

Отримуємо, що при теперішній обліковій ставці 25% прибутковість продукту, який ми розглядаємо, складає 12.8%. На етапі післявоєнної відбудови прогнозується зниження облікової ставки до 15%. І вже для цього значення, підставивши відповідні значення ставок кривої в профіт-тест, отримуємо прибутковість страхового продукту 20.1%.

Висновки

Страхові компанії, які працюють з довгостроковими продуктами, мають з обережністю підходити до вибору ставок для дисконтування майбутніх потоків доходів та витрат компанії при підрахунку результативності її діяльності або певного продукту, адже це досить суттєво впливає на результат. Найбільш оптимальним та логічним з точки зору економіки підходом є дисконтування за ставками кривої безкупонної доходності, побудованої за гривневими ОВДП за моделлю Свенссона, тому що вона реалістично відображає динаміку ринку умовно безризикових фінансових інструментів – ОВДП. Також він дозволяє динамічно перебудовувати прогноз, оскільки параметри для даної моделі змінюються досить часто і є чутливими до змін ринку, наприклад як зміни облікової ставки, курсу валют та інших макроекономічних показників. А знаючи зміну облікової ставки, ми можемо прогнозувати динаміку ставок на кривій безкупонної доходності, а отже, прогнозувати і зміни прибутковості продукту або портфелю страхової компанії.

Список використаних джерел

1.
https://zakononline.com.ua/documents/show/366367_693185
2. Зубченко В.П., Александрова П.В. Дослідження динаміки інструменту своєї процентної ставки із використанням методів машинного навчання / Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, випуск No3, 2022, Серія фізико-математичні науки / 2022 – ст. 37-41
3. Зубченко В.П. «Математичні основи страхування життя». Київ, ВПЦ «Київський університет», 223 с. - 2016
4. Закон України «Про страхування»
5. Базилевич В.Д., Базилевич К.С. Страхова справа. - К.: «Знання», 2005. - 351 с.

References

1.
https://zakononline.com.ua/documents/show/366367_693185
2. Zubchenko V.P., Aleksandrova P.V. Study of the dynamics of the interest rate swap instrument using machine learning methods / Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, No. 3, 2022, Series Physics & Mathematics / 2022 - st. 37-41
3. Zubchenko V.P. "Mathematical foundations of life insurance". Kyiv, VOC "Kyiv University", 223 p. - 2016
4. Law of Ukraine "About Insurance"
5. Bazilevich V.D., Bazilevich K.S. Insurance cases. - K.: "Znanja", 2005. - 351 p.

Надійшла до редакції: 10.06.2023

УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/1.7>

О. В. Иванов¹, д.ф.-м.н., проф.
І. В. Орловський², к.ф.-м.н., доц.

A. V. Ivanov¹, Dr of Sci., Prof.
I. V. Orlovskiy², Ph.D., Associate Professor

**Виявлення прихованих періодичностей
в моделях з дискретним часом та
сильно залежним випадковим шумом**

**Detection of hidden periodicities in
models with discrete time and long range
dependent random noise**

Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут імені Іго-
ря Сікорського", Україна, 03056, м. Київ, пр-т
Перемоги, 37
e-mail: ¹ alexntuu@gmail.com,
² orlovskiy@matan.kpi.ua

National Technical University of Ukraine "Igor
Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute" Ukraine,
03056, Kyiv, Peremogi avenue 37
e-mail: ¹ alexntuu@gmail.com
² orlovskiy@matan.kpi.ua

У статті отримано достатні умови консистентності періодограмної оцінки амплітуди та кутової частоти тригонометричної моделі регресії з дискретним часом та сильно залежним випадковим шумом.

Ключові слова: тригонометрична модель регресії, сильно залежний випадковий шум, сингулярний спектр, періодограмна оцінка, сильна консистентність.

Trigonometric regression models take a special place among various models of nonlinear regression analysis and signal processing theory. The problem of estimating the parameters of such models is called the problem of detecting hidden periodicities, and it has many applications in natural and technical sciences.

The paper is devoted to the study of the problem of detecting hidden periodicities in the case when we observe only one harmonic oscillation with discrete time, where random noise is a local functional of Gaussian random sequence with singular spectrum. In particular, the random sequence in the model can be strongly dependent.

For estimation of unknown parameters the periodogram estimator is chosen. Sufficient conditions of the consistency of the amplitude and angular frequency periodogram estimator of the model described above are obtained in the paper.

The proof of Lemmas 1 and 2 gave an important asymptotic properties of the random noise functional related to the periodogram estimator which necessary for the proof of the main results. Series expansion of random noise in terms of Hermite polynomials and the Diagram formula are main tools that were used to obtain this lemmas.

Key Words: trigonometric regression model, long-range dependent random noise, singular spectrum, periodogram estimator, strong consistency.

Статтю представив д.ф.-м.н. Розора І.В.

Вступ

Тригонометричні моделі регресії займають особливе місце серед різноманітних моделей нелінійного регресійного аналізу та теорії обробки сигналів. Задача оцінювання параметрів таких моделей називається задачею виявлення прихованих періодичностей, яка має багато застосувань в природничих та технічних науках.

Задачі виявлення прихованих періодичностей розв'язуються протягом сторіч та ма-

ють велику бібліографію.

Важливе місце у теорії оцінювання параметрів тригонометричних моделей займають періодограмні оцінки, які вперше розглядав А. Шустер [1, 2], якому і належить сам термін "періодограма". Асимптотичні властивості періодограмних оцінок параметрів тригонометричної моделі вивчалися багатьма авторами і ми зішлемось тільки на значно пізніші роботи Г.П. Гречки та А.Я. Дороговцева [3], Б.Г. Квіна та Е.Дж. Хеннана [4], П.С. Кнопова [5], О.В. Іванова та Б.М. Жу-

раковського [6].

Окрім періодограмного підходу в оцінюванні амплітуд та кутових частот тригонометричної моделі широко використовуються оцінки найменших квадратів. Зішлемось тут на роботи П. Уїтла [7], А.М. Уолкера [8], Е.Дж. Хеннана [9] для моделей з дискретним часом, та роботи О.В. Іванова [10, 11], О.В. Іванова та Б.М. Жураковського [12], О.В. Іванова, М.М. Леоненка, М.Д. Руйз-Медіни та Б.М. Жураковського [13] для моделей з неперервним часом.

У статті розглядаються періодограмні оцінки кутової частоти та амплітуди гармонічного коливання у моделі спостережень з дискретним часом та випадковим шумом, що має сингулярний спектр. Зокрема, цей випадковий шум може бути сильно залежним. Результати статті продовжують дослідження роботи О.В. Іванова та Б.М. Жураковського [6], розширюючи її на випадок дискретного часу.

1 Постановка задачі

На ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ розглянемо модель регресії

$$X_j = A_0 \cos \varphi_0 j + \varepsilon_j, \quad j = \overline{1, N}, \quad (1)$$

де $A_0 \neq 0$, $\varphi_0 \in (\varphi, \overline{\varphi})$, $0 < \varphi < \overline{\varphi} < \pi$, а випадковий шум ε задовольняє наступній умові.

A₁. ε_j , $j \in \mathbb{Z}$, є локальним функціоналом від гауссівської стаціонарної послідовності ξ_j , $j \in \mathbb{Z}$, з нульовим середнім, тобто $\varepsilon_j = G(\xi_j)$, де $G(x)$, $x \in \mathbb{R}$, така борелева функція, що $E\varepsilon_0 = 0$, $E\varepsilon_0^4 < \infty$.

За умови **A₁** функція $G(x)$ розкладається в ряд

$$G(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{m!} H_m(x), \quad (2)$$

де

$$C_m = \int_{\mathbb{R}} G(x) H_m(x) \varphi(x) dx, \quad m \geq 1,$$

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

в гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R}, \varphi(x) dx)$ за поліномами Чебишева-Ерміта

$$H_m(x) = (-1)^m e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^m}{dx^m} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (3)$$

Тоді

$$\varepsilon_j = G(\xi_j) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{m!} H_m(\xi_j), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Означення 1.1. Періодограмною оцінкою частоти φ_0 назовемо таку випадкову величину $\varphi_N \in (\varphi, \overline{\varphi})$, для якої

$$Q_N(\varphi_N) = \sup_{\varphi_N \in (\varphi, \overline{\varphi})} Q_N(\varphi),$$

де

$$Q_N(\varphi) = \left| \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N X_j e^{i\varphi j} \right|^2.$$

В свою чергу, оцінку амплітуди A_0 знаходимо як значення $A_N = Q_N^{\frac{1}{2}}(\varphi_N)$.

2 Діаграмна формула

Розглянемо наступний допоміжний результат, необхідний для отримання результатів статті. Більш детальну інформацію щодо діаграмної формули можна знайти у [14].

Означення 2.1. Діаграмою порядку $(l_1, \dots, l_p)$ будемо називати граф Γ з $l_1 + \dots + l_p$ вершинами, якщо:

- множина вершин Γ зображається у вигляді $V = \bigcup_{j=1}^p W_j$, де $W_j = \{(j, k) : k = \overline{1, l_j}\}$ – j -й рівень Γ , $j = \overline{1, p}$;
- кожна з вершин має ступінь 1;
- якщо ребро $((j_1, k_1), (j_2, k_2)) \in \Gamma$, тоді $j_1 \neq j_2$, тобто ребра Γ проходять між різними рівнями.

Позначимо через $L = L(l_1, \dots, l_p)$ множину всіх діаграм Γ порядку $(l_1, \dots, l_p)$, а через $R(V)$ множину ребер графа $\Gamma \in L$. Для ребра

$$\omega = ((j_1, k_1); (j_2, k_2)) \in R(V), \quad j_1 < j_2,$$

покладемо $d_1(\omega) = j_1$, $d_2(\omega) = j_2$.

Означення 2.2. Діаграма Γ називається регулярною, якщо всі її рівні можна розбити на пари так, щоб не було такого ребра, яке проходить між рівнями, що належать різним парам. Множина регулярних діаграм позначимо $L^* \subset L$. Якщо діаграма $\Gamma \in L \setminus L^*$, тоді її називають нерегулярною.

Діаграмна формула

Нехай $(\xi_1, \dots, \xi_p)$ - гаусівський вектор з нульовим середнім, $E\xi_i\xi_j = B(i, j)$, $i, j = \overline{1, p}$; $H_{l_1}(x), \dots, H_{l_p}(x)$ - поліноми Чебишева-Ерміта порядків $l_1, \dots, l_p$. Тоді

$$E \left(\prod_{j=1}^p H_{l_j}(\xi_j) \right) = \sum_{\Gamma \in L} \prod_{\omega \in R(V)} B(d_1(\omega), d_2(\omega)).$$

3 Випадкові послідовності, які мають сингулярний спектр

Припустимо додатково, що

A₂. ξ_j , $j \in \mathbb{Z}$, - стаціонарна гаусівська послідовність з коваріаційною функцією (к.ф.)

$$B(n) = E\xi_0\xi_n = \sum_{k=0}^r a_k B_{\alpha_k, \varkappa_k}(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (5)$$

де $r \geq 0$,

$$B_{\alpha_k, \varkappa_k}(n) = \frac{\cos(\varkappa_k n)}{(1 + n^2)^{\alpha_k/2}},$$

$$0 \leq \varkappa_0 < \varkappa_1 < \dots < \varkappa_r < \pi, \quad 0 < \alpha_k < 1, \quad k = \overline{0, r},$$

$$\sum_{k=0}^r a_k = 1, \quad a_k > 0.$$

Таку модель к.ф., для неперервного часу, було введено у роботі [15] з метою отримання прикладу спектральної щільності, що має хоч і складний, але явний вигляд, а також, можливо, сингулярності, розташовані не в нулі, як у випадку сильно залежного процесу. Умова **A₂** також використовувалася з тією ж метою в роботах [16, 13, 17, 18]. Представлення спектральної щільності такого процесу у випадку дискретного часу можна знайти у роботах [16, 18].

Розглянемо деякі асимптотичні властивості випадкових послідовностей, що мають сингулярний спектр, які необхідні для отримання основних результатів статті.

Введемо позначення

$$\eta_N = \frac{1}{N} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left| \sum_{j=1}^N e^{-i\lambda j} \varepsilon_j \right|. \quad (6)$$

Lemma 1. Якщо виконуються умови **A₁** та **A₂**, то

$$E\eta_N^2 \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Доведення. Оскільки

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^N e^{-i\lambda j} \varepsilon_j \right|^2 &= \sum_{j,k=1}^N e^{-i\lambda(j-k)} \varepsilon_j \varepsilon_k = \\ &= \sum_{j=1}^N \varepsilon_j^2 + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N 2 \cos \lambda(k-j) \varepsilon_j \varepsilon_k = \\ &= \sum_{j=1}^N \varepsilon_j^2 + 2 \sum_{j=1}^{N-1} \cos \lambda j \sum_{k=1}^{N-j} \varepsilon_{k+j} \varepsilon_k, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} E\eta_N^2 &= \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N E\varepsilon_j^2 + \\ &+ 2E \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \sum_{j=1}^{N-1} \cos \lambda j \sum_{k=1}^{N-j} \varepsilon_{k+j} \varepsilon_k \leq \\ &\leq \frac{1}{N} E\varepsilon_1^2 + \frac{2}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} E \left| \sum_{k=1}^{N-j} \varepsilon_{k+j} \varepsilon_k \right|. \quad (7) \end{aligned}$$

Використовуючи представлення (4) випадкової послідовності ε_j через поліноми Чебишева-Ерміта та співвідношення (див., наприклад [14])

$$E H_m(\xi_j) H_l(\xi_k) = \delta_k^l m! B^m(j-k),$$

де δ_k^l - символ Кронекера, отримаємо

$$E\varepsilon_j^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m^2}{(m!)^2} E H_m^2(\xi_j) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m^2}{(m!)} < \infty. \quad (8)$$

З (8) випливає, що для будь-якого $\epsilon > 0$ можна вказати $n = n(\epsilon)$ таке, що

$$G(x) = G_1(x) + G_2(x), \quad (9)$$

$$G_1(x) = \sum_{m=1}^n \frac{C_m}{m!} H_m(x),$$

$$G_2(x) = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{C_m}{m!} H_m(x),$$

причому

$$E G_2^2(\xi) = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{C_m^2}{m!} \leq \epsilon^2. \quad (10)$$

Використовуючи (9), можна переписати (7) у вигляді

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \eta_N^2 &\leq \frac{1}{N} \mathbb{E} \varepsilon_1^2 + \\ &+ \frac{2}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} \mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^{N-j} (G_1(\xi_{k+j}) + G_2(\xi_{k+j})) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot (G_1(\xi_k) + G_2(\xi_k)) \right| \leq \frac{1}{N} \mathbb{E} \varepsilon_1^2 + \\ &+ \sum_{i,l=1}^2 \frac{2}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} \mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^{N-j} G_i(\xi_{k+j}) G_l(\xi_k) \right| = \\ &= \frac{1}{N} \mathbb{E} \varepsilon_1^2 + S_{11,N} + S_{12,N} + S_{21,N} + S_{22,N}. \end{aligned}$$

Застосовуючи нерівність Коші-Буняковського та (10), отримуємо

$$\begin{aligned} S_{12,N} &= \frac{2}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} \mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^{N-j} G_1(\xi_{k+j}) G_2(\xi_k) \right| \leq \\ &\leq \frac{2}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-j} \mathbb{E} |G_1(\xi_{k+j}) G_2(\xi_k)| \leq \\ &\leq \frac{2}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-j} (\mathbb{E} G_1^2(\xi_{k+j}))^{\frac{1}{2}} (\mathbb{E} G_2^2(\xi_k))^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{2}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j) (\mathbb{E} G_1^2(\xi_1))^{\frac{1}{2}} (\mathbb{E} G_2^2(\xi_1))^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{(N-1)}{N} \epsilon (\mathbb{E} G_1^2(\xi_1))^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon (\mathbb{E} G_1^2(\xi_1))^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Аналогічним чином можна отримати нерівності для $S_{21,N}$ та $S_{22,N}$:

$$\begin{aligned} S_{21,N} &\leq \epsilon (\mathbb{E} G_1^2(\xi_k))^{\frac{1}{2}}, \\ S_{22,N} &\leq \epsilon^2. \end{aligned}$$

Перейдемо до розгляду $S_{11,N}$:

$$\begin{aligned} S_{11,N} &= \frac{2}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} \mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^{N-j} G_1(\xi_{k+j}) G_1(\xi_k) \right| \leq \\ &\leq \frac{2}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^{N-j} G_1(\xi_{k+j}) G_1(\xi_k) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{2}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{s_1, s_2, s_3, s_4=1}^n \left(\prod_{q=1}^4 \frac{C_{s_q}}{s_q!} \right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \sum_{k,l=1}^{N-j} \mathbb{E} H_{s_1}(\xi_{k+j}) H_{s_2}(\xi_{l+j}) H_{s_3}(\xi_k) H_{s_4}(\xi_l) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Застосовуючи діаграмну формулу при $p = 4$, отримуємо

$$\begin{aligned} S_{11,N} &\leq \frac{2}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{s_1, s_2, s_3, s_4=1}^n \left(\prod_{q=1}^4 \frac{C_{s_q}}{s_q!} \right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \sum_{k,l=1}^{N-j} \sum_{\Gamma \in L} \prod_{\omega \in R(V)} B(d_1(\omega), d_2(\omega)) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq 2 \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4=1}^n \left(\prod_{q=1}^4 \frac{C_{s_q}}{s_q!} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\Gamma \in L} \frac{1}{N^2} \cdot \\ &\quad \cdot \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{k,l=1}^{N-j} \prod_{\omega \in R(V)} B(d_1(\omega), d_2(\omega)) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Оскільки n – фіксоване, то кількість наборів $s_i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i = 1, 2, 3, 4$, обмежена та для кожного набору (s_1, s_2, s_3, s_4) кількість діаграм скінчена, тоді достатньо оцінити доданки

$$\frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{k,l=1}^{N-j} \prod_{\omega \in R(V)} B(d_1(\omega), d_2(\omega)) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

Зауважимо, що

$$\begin{aligned} |B(j)| &= \left| \sum_{j=0}^r D_j B_{\alpha_j, \kappa_j}(j) \right| \leq \\ &\leq (1 + j^2)^{-\frac{\alpha}{2}} = \tilde{B}(j), \end{aligned} \quad (13)$$

де $\alpha = \min(\alpha_0, \dots, \alpha_r)$.

Розглянемо можливі типи діаграм Γ , що входять у суму (11).

I. Нехай $\Gamma \in L^*(s_1, s_2, s_3, s_4)$. Оскільки Γ має чотири рівні $(1, 2, 3, 4)$, то, для регулярної діаграми, можливі три випадки розбиття на пари

- (i) $(1, 2), (3, 4)$;
- (ii) $(1, 3), (2, 4)$;
- (iii) $(1, 4), (2, 3)$.

Розглянемо окремо кожен з них, враховуючи, що

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (\xi_{k+j}, \xi_{l+j}, \xi_k, \xi_l).$$

(i). При цьому розбитті $s_1 = s_2 = r_1$, $s_3 = s_4 = r_2$ та (12) має вигляд

$$W_{1,N} = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{k,l=1}^{N-j} B^{r_1+r_2}(k-l) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \leq \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{k,l=1}^{N-j} B^2(k-l) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

З (13) випливає, що

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^{N-j} B^2(k-l) &= \sum_{t=-(N-j-1)}^{N-j-1} (N-j-|t|) B^2(t) \leq \\ &\leq (N-j) \sum_{t=-(N-j-1)}^{N-j-1} \tilde{B}(t) \leq \\ &\leq (N-j) \left(1 + 2 \sum_{t=1}^{N-j-1} t^{-\alpha} \right) \leq \\ &\leq (N-j) \left(1 + 2 \int_0^{N-j} t^{-\alpha} dt \right) = \\ &= (N-j) \left(1 + \frac{2(N-j)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) = \\ &= (N-j)^{2-\alpha} \left(\frac{2}{1-\alpha} + (N-j)^{-(1-\alpha)} \right) \leq \\ &\leq \frac{3-\alpha}{1-\alpha} (N-j)^{2-\alpha} < \frac{3}{1-\alpha} (N-j)^{2-\alpha}. \end{aligned}$$

Тоді, підставляючи отриманий результат в (14), отримаємо

$$\begin{aligned} W_{1,N} &\leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-\alpha}} \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j)^{1-\frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-\alpha}} \frac{1}{N^{\frac{\alpha}{2}}} \sum_{j=1}^{N-1} \left(1 - \frac{j}{N} \right)^{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{N}. \end{aligned} \quad (15)$$

Функція $g(t) = (1-t)^{1-\frac{\alpha}{2}}$, $t \in [0, 1]$, є монотонно спадною. В свою чергу, права частина рівності (15) є інтегральною сумою для функції $g(t)$. Тому

$$\begin{aligned} W_{1,N} &\leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-\alpha}} \frac{1}{N^{\frac{\alpha}{2}}} \int_0^1 (1-t)^{1-\frac{\alpha}{2}} dt = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-\alpha}(2-\frac{\alpha}{2})} \frac{1}{N^{\frac{\alpha}{2}}}. \end{aligned} \quad (16)$$

(ii). Для даного розбиття $s_1 = s_3 = r_1$, $s_2 = s_4 = r_2$, і (12) прийме вигляд

$$\begin{aligned} W_{2,N} &= \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{k,l=1}^{N-j} B^{r_1+r_2}(j) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j) |B(j)| \leq \\ &\leq \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j) \tilde{B}(j) \leq \\ &\leq \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j) j^{-\alpha} = \\ &= \frac{1}{N^{\alpha}} \sum_{j=1}^{N-1} \left(1 - \frac{j}{N} \right) \left(\frac{j}{N} \right)^{-\alpha} \frac{1}{N}. \end{aligned}$$

Маємо, в правій частині останньої рівності, інтегральну суму функції $g(t) = (1-t)t^{-\alpha}$ на відрізьку $[0, 1]$. Оскільки функція $g(t)$ є монотонно спадною на $(0, 1]$, то

$$\begin{aligned} W_{2,N} &\leq \frac{1}{N^{\alpha}} \int_0^1 (1-t)t^{-\alpha} dt = \\ &= \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)} \cdot \frac{1}{N^{\alpha}}. \end{aligned} \quad (17)$$

(iii). В цьому випадку $s_1 = s_4 = r_1$, $s_2 = s_3 = r_2$ та доданок $W_{3,N}$ суми (12) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} W_{3,N} &= \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{k,l=1}^{N-j} B^{r_1}(k-l+j) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot B^{r_2}(k-l-j) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Розглянемо суму

$$\begin{aligned}
 S_{4,N} &= \sum_{k,l=1}^{N-j} B^{r_1}(k-l+j) B^{r_2}(k-l-j) \leq \\
 &\leq \sum_{k,l=1}^{N-j} \tilde{B}(k-l+j) \tilde{B}(k-l-j) \leq \\
 &= \sum_{t=-(N-j-1)}^{N-j-1} (N-j-|t|) \tilde{B}(t+j) \tilde{B}(t-j) \leq \\
 &\leq (N-j) \left(\tilde{B}^2(j) + \sum_{t=1}^{N-j-1} \tilde{B}(t+j) \tilde{B}(t-j) + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{t=-(N-j-1)}^{-1} \tilde{B}(t+j) \tilde{B}(t-j) \right) \leq \\
 &\leq (N-j) \left(\tilde{B}(j) + \sum_{k=j+1}^{N-1} \tilde{B}(k) + \sum_{k=-N+1}^{-1-j} \tilde{B}(k) \right) \\
 &\leq 2(N-j) \sum_{k=j}^{N-1} \tilde{B}(k) \leq 2(N-j) \sum_{k=j}^{N-1} k^{-\alpha} \leq \\
 &\leq 2(N-j) N^{1-\alpha} \sum_{k=j}^{N-1} \left(\frac{k}{N} \right)^{-\alpha} \frac{1}{N} \leq \\
 &\leq 2(N-j) N^{1-\alpha} \int_0^1 t^{-\alpha} dt = \frac{2(N-j) N^{1-\alpha}}{1-\alpha}.
 \end{aligned}$$

Використовуючи знайдену оцінку $S_{4,N}$ до (18), будемо мати

$$\begin{aligned}
 W_{3,N} &\leq \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\alpha}} (N-j)^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1-\alpha}{2}} = \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\alpha}} \frac{1}{N^{\frac{\alpha}{2}}} \sum_{j=1}^{N-1} \left(1 - \frac{j}{N} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \leq \\
 &\leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\alpha}} \frac{1}{N^{\frac{\alpha}{2}}} \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{2}} dt = \\
 &= \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{1-\alpha}} \frac{1}{N^{\frac{\alpha}{2}}}.
 \end{aligned}$$

В результаті отримуємо, що, у випадку регулярних діаграм, $S_{11,N}$ прямує до нуля при $N \rightarrow \infty$.

II. Нехай Γ є нерегулярною діаграмою. Тоді в добутку суми (12) завжди буде присутній множник $B(k-l)$, який з'являється в результаті з'єднання ребер 1 і 2 чи 3 і 4, або множник $B(j)$, який з'являється в результаті з'єднання ребер 1 і 3 чи 2 і 4. Якщо діаграма Γ не буде мати вказаних множників, тоді діаграма є регулярною, що протирічить сформульованому припущенню.

Оскільки $B(0) = 1$, то добуток в сумі (12) можна мажорувати $B(k-l)$ або $B(j)$.

При наявності множника $B(k-l)$, отримаємо оцінку, аналогічну (15), а саме:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} \left[\sum_{k,l=1}^{N-j} |B(k-l)| \right]^{\frac{1}{2}} &\leq \\
 &\leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-\alpha(2-\frac{\alpha}{2})}} \frac{1}{N^{\frac{\alpha}{2}}}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Для $B(j)$ оцінка знаходиться аналогічно. $\square$

Покажемо, що результати лемми 1 є вірними і в тому випадку, коли в умові A_2 α_k можуть набувати довільних додатних значень.

Якщо $\alpha = \min(\alpha_0, \dots, \alpha_r) < 1$, то доведення повністю повторює доведення лемми 1.

Нехай $\alpha > 1$. Тоді нам достатньо показати, що $S_{11,N} \rightarrow 0$, при $N \rightarrow \infty$.

Розглянемо відповідні доданки в (13) при можливих випадках регулярної діаграми Γ . Враховуючи (12) та міркування при доведенні лемми 1, маємо

$$\begin{aligned}
 W_{1,N} &\leq \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{k,l=1}^{N-j} B^2(k-l) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
 &\leq \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j)^{\frac{1}{2}} \left(1 + 2 \sum_{t=1}^{N-j-1} t^{-\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
 &\leq \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j)^{\frac{1}{2}} \left(1 + 2 \sum_{t=1}^{\infty} t^{-\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} = \\
 &= c_1 \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=1}^{N-1} \left(1 - \frac{j}{N} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \leq \\
 &\leq c_1 \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{2}} dt = \tilde{c}_1 \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}},
 \end{aligned}$$

де

$$\tilde{c}_1 = \frac{2}{3} c_1 = \frac{2}{3} (1 + 2\zeta(\alpha)),$$

$$\zeta(\alpha) = \sum_{t=1}^{\infty} t^{-\alpha}. \text{ Аналогічно маємо}$$

$$W_{2,N} \leq \tilde{c}_2 \frac{1}{N}, \quad \tilde{c}_2 = \zeta(\alpha),$$

$$W_{3,N} \leq \tilde{c}_3 \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}, \quad \tilde{c}_3 = \frac{2}{3} (\zeta(\alpha))^{\frac{1}{2}}.$$

Доведення для нерегулярних діаграм є аналогічним до відповідного доведення у леммі 1.

Нехай $\alpha = 1$. Тоді оцінки та висновки для $W_{1,N}, W_{2,N}, W_{3,N}$ отримуються аналогічно. Проведемо, наприклад, доведення для $W_{1,N}$.

Розглянемо представлення часткових сум гармонічного ряду

$$\sum_{j=1}^N j^{-1} = \ln N + \gamma + \epsilon_N,$$

де $\gamma = 0,577\dots$ - постійна Ейлера-Маскерони, $\epsilon_N \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$. Тоді для $N > N_0$

$$\sum_{j=1}^N j^{-1} \leq \ln N + \gamma + 1. \quad (20)$$

Із (20) маємо

$$\begin{aligned} W_{1,N} &\leq \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j)^{\frac{1}{2}} \left(1 + 2 \sum_{t=1}^{N-j-1} t^{-1} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j)^{\frac{1}{2}} (3 + 2\gamma + 2 \ln N)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \sqrt{3} \frac{(\ln N)^{\frac{1}{2}}}{N^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=1}^{N-1} \left(1 - \frac{j}{N} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \leq \\ &\leq \frac{2\sqrt{3} (\ln N)^{\frac{1}{2}}}{3} \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

З даних оцінок випливає, що сума (12) прямує до нуля при $N \rightarrow \infty$, тобто $E\eta^2(N) \rightarrow 0$.

4 Випадкові процеси, що задовольняють умові сильної залежності

Введемо умову сильної залежності.

A₃. $\xi_j, j \in \mathbb{Z}$, - стаціонарна гауссівська послідовність з к.ф. вигляду

$$B(j) = \frac{L(|j|)}{|j|^\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1), \quad B(0) = 1,$$

де $L(t), t \geq 0$, - монотонна, неспадна, повільно змінна на нескінченності функція.

Lemma 2. Якщо для моделі (1) виконуються умови **A₁**, **A₃**, тоді

$$E\eta_N^2 \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty,$$

де η_N задано (6).

Доведення. Доведення для випадкового шуму, що задовольняє умовам **A₁**, **A₃** повністю повторює доведення леми 1.

Присутні відмінності в доведенні $S_{11,N} \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$. Тому продемонструємо ці відмінності на доданку $W_{1,N}$.

$$\begin{aligned} W_{1,N} &\leq \\ &\leq \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j)^{\frac{1}{2}} \left(1 + 2 \sum_{t=1}^{N-j-1} L(t)t^{-\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j)^{\frac{1}{2}} \left(1 + 2L(N) \sum_{t=1}^{N-j-1} t^{-\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{L^{\frac{1}{2}}(N)}{N^2} \left(1 + \frac{2}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j)^{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \\ &\leq \frac{L^{\frac{1}{2}}(N)}{N^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-\alpha} (2-\frac{\alpha}{2})}. \end{aligned}$$

Доведення для $W_{2,N}, W_{3,N}$ та нерегулярних діаграм є аналогічними.

Тоді маємо, що $E\eta^2(N) \rightarrow 0$, при $N \rightarrow \infty$. $\square$

5 Консистентність

Theorem 5.1. Якщо для моделі (1) виконуються умови **A₁**, **A₂** або **A₁**, **A₃**, тоді

$$\varphi_N \xrightarrow{P} \varphi_0, \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Доведення. Зафіксуємо φ та розглянемо поведінку $Q_N(\varphi)$, при $N \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} Q_N(\varphi) &= \frac{4A_0^2}{N^2} \left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi j} \right|^2 + \\ &+ \frac{8A_0}{N^2} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi j} \sum_{j=1}^N \varepsilon_j e^{-i\varphi j} \right\} + \quad (21) \\ &+ \frac{4}{N^2} \left| \sum_{j=1}^N \varepsilon_j e^{i\varphi j} \right|^2 = S_{5,N} + S_{6,N} + S_{7,N}. \end{aligned}$$

З лем 1, 2 та нерівності

$$\frac{1}{N} \left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi j} \right| \leq 1,$$

випливає, що

$$S_{6,N} \xrightarrow{P} 0, \quad S_{7,N} \xrightarrow{P} 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Розглянемо поведінку $\frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi j}$ у 3 (22) та наступних випадках:

1. Якщо $\varphi \neq \varphi_0$, то

$$\begin{aligned} \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi j} &= \\ &= \frac{e^{i(\varphi+\varphi_0)(N+1)} - 1}{N(e^{i(\varphi+\varphi_0)} - 1)} + \frac{e^{i(\varphi-\varphi_0)(N+1)} - 1}{N(e^{i(\varphi-\varphi_0)} - 1)}. \end{aligned} \quad (22)$$

2. Якщо $\varphi = \varphi_0$, то

$$\frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi j} = \frac{e^{2i\varphi_0(N+1)} - 1}{N(e^{2i\varphi_0} - 1)} + 1. \quad (23)$$

Зафіксуємо $r > 0$. Тоді, враховуючи (21),

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{|Q_N(\varphi_0) - A_0^2| > r\} &\leq \\ &\leq \mathbf{P}\left\{|S_{5,N} - A_0^2| > \frac{r}{3}\right\} + \\ &+ \mathbf{P}\left\{|S_{6,N}| > \frac{r}{3}\right\} + \mathbf{P}\left\{|S_{7,N}| > \frac{r}{3}\right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

З (23) та того, що, при $N > N_0$,

$$\begin{aligned} |S_{5,N} - A_0^2| &= A_0^2 \left(\left| \frac{e^{2i\varphi_0(N+1)} - 1}{N(e^{2i\varphi_0} - 1)} \right|^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2 \left| \frac{e^{2i\varphi_0(N+1)} - 1}{N(e^{2i\varphi_0} - 1)} \right| \right) \leq \\ &\leq \frac{8A_0^2}{\min\{|e^{2i\underline{\varphi}} - 1|^2, |e^{2i\overline{\varphi}} - 1|^2\}} \frac{1}{N} < r, \end{aligned} \quad (25)$$

де $\varphi_0 \in (\underline{\varphi}, \overline{\varphi})$, $0 < \underline{\varphi} < \overline{\varphi} < \pi$, випливає

$$\mathbf{P}\{|Q_N(\varphi_0) - A_0^2| > r\} < \varepsilon.$$

Тому

$$Q_N(\varphi_0) \xrightarrow{P} A_0^2, \quad N \rightarrow \infty. \quad (26)$$

Розглянемо множини

$$\Phi_\delta = \{\varphi \in [\underline{\varphi}, \overline{\varphi}] : |\varphi - \varphi_0| \geq \delta\}, \quad \delta > 0,$$

та деяке фіксоване $r > 0$. Тоді

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\sup_{\varphi \in \Phi_\delta} |Q_N(\varphi)| > r\right\} &\leq \\ &\leq \mathbf{P}\left\{\sup_{\varphi \in \Phi_\delta} |S_{5,N}| > \frac{r}{3}\right\} + \\ &+ \mathbf{P}\left\{\sup_{\varphi \in \Phi_\delta} |S_{6,N}| > \frac{r}{3}\right\} + \mathbf{P}\left\{\sup_{\varphi \in \Phi_\delta} |S_{7,N}| > \frac{r}{3}\right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |S_{5,N}| &= \frac{2}{N} \left(\left| \frac{e^{i(\varphi+\varphi_0)(N+1)} - 1}{e^{i(\varphi+\varphi_0)} - 1} \right|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{e^{i(\varphi-\varphi_0)(N+1)} - 1}{e^{i(\varphi-\varphi_0)} - 1} \right|^2 \right) \leq \\ &\leq \frac{4}{N} \left(\frac{1}{\min\{|e^{2i\underline{\varphi}} - 1|^2, |e^{2i\overline{\varphi}} - 1|^2\}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{|e^{i\delta} - 1|^2} \right) < r, \end{aligned} \quad (27)$$

при $N > N_0$, випливає, що

$$Q_N(\varphi) \xrightarrow{P} 0, \quad N \rightarrow \infty$$

рівномірно на Φ_δ .

За означенням оцінки φ_N

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|\varphi_N - \varphi_0| \geq \delta) &= \\ &= \mathbf{P}(|\varphi_N - \varphi_0| \geq \delta, Q_N(\varphi_N) \geq Q_N(\varphi_0)) \leq \\ &\leq \mathbf{P}\left(\sup_{\varphi_N \in \Phi_\delta} Q_N(\varphi_N) \geq Q_N(\varphi_0)\right) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

при $N \rightarrow \infty$. $\square$

Lemma 3. Якщо для моделі (1) виконуються умови $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ або $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_3$, тоді

$$A_N^2 = Q_N(\varphi_N) \xrightarrow{P} A_0^2, \quad N \rightarrow \infty. \quad (28)$$

Доведення. Розглянемо

$$\begin{aligned} 0 \leq Q_N(\varphi_N) - Q_N(\varphi_0) &= \\ &= 4A_0^2 \frac{1}{N^2} \left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi_N j} \right|^2 - \\ &\quad - 4A_0^2 \frac{1}{N^2} \left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi_0 j} \right|^2 + \Lambda_N, \\ \Lambda_N &\xrightarrow{P} 0, \quad N \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

Зауважимо, що

$$\left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi_N j} \right| \leq \left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi_N^* j} \right|,$$

де $\varphi_N^* \in [\varphi, \bar{\varphi}]$ – точка максимуму. Якщо $\varphi_N^* \neq \varphi_0$, то з (21) та (27) випливає, що

$$\begin{aligned} \frac{2}{N} \left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi_N^* j} \right| &\leq \\ &\leq \frac{2}{N} \left(\frac{1}{\min\{|e^{2i\varphi} - 1|^2, |e^{2i\bar{\varphi}} - 1|^2\}} + \frac{1}{|e^{i\delta} - 1|^2} \right) < r. \end{aligned}$$

Якщо $\varphi_N^* = \varphi_0$, то з (23) та (25) маємо аналогічну оцінку:

$$\begin{aligned} \frac{2}{N} \left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi_0 j} \right| &\leq \\ &\leq \frac{4A_0^2}{\min\{|e^{2i\varphi} - 1|^2, |e^{2i\bar{\varphi}} - 1|^2\}} \frac{1}{N} < r. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \max_{\varphi \in [\varphi, \bar{\varphi}]} \frac{4}{N^2} \left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi j} \right|^2 \leq 1.$$

З іншого боку,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{4}{N^2} \left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi_0 j} \right|^2 = 1.$$

З цих співвідношень випливає, що

$$Q_N(\varphi_N) - Q_N(\varphi_0) \xrightarrow{P} 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Враховуючи (26), отримуємо (28), і лему доведено. $\square$

Theorem 5.2. Якщо для моделі (1) виконуються умови A_1, A_2 , або A_1, A_3 , тоді

$$N(\varphi_N - \varphi_0) \xrightarrow{P} 0, \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (29)$$

Список використаних джерел

- Schuster A. On the investigation of hidden periodicities with application to a supposed 26 day period of meteorological phenomena / A. Schuster // *Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity*. – 1898. – Vol. 3. – P. 13-41.
- Schuster A. The periodogram and its optical analogue / A. Schuster // *Proceed Roy. Soc.* – 1906. – Vol. 77. – 136 p.

Доведення. З леми 3 випливає, що

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^2} \left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi_N j} \right|^2 - \\ - \frac{1}{N^2} \left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi_0 j} \right|^2 \xrightarrow{P} 0, \quad N \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (30)$$

Але (30) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{i(\varphi_N + \varphi_0)(N+1)} - 1}{N(e^{i(\varphi_N + \varphi_0)} - 1)} + \frac{e^{i(\varphi_N - \varphi_0)(N+1)} - 1}{N(e^{i(\varphi_N - \varphi_0)} - 1)} \right|^2 - \\ - \left| \frac{e^{2i\varphi_0(N+1)} - 1}{N(e^{2i\varphi_0} - 1)} + 1 \right|^2 \xrightarrow{P} 0, \quad \text{при } N \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

$$\text{або } \frac{\sin \frac{(N+1)(\varphi_N - \varphi_0)}{2}}{(N+1) \sin \frac{\varphi_N - \varphi_0}{2}} \xrightarrow{P} 1, \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

За умов теореми, останнє твердження еквівалентне

$$\frac{\sin \frac{N(\varphi_N - \varphi_0)}{2}}{\frac{N(\varphi_N - \varphi_0)}{2}} \xrightarrow{P} 1, \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

В силу монотонного зростання функції $1 - \frac{\sin x}{x}$, $x \geq 0$, в околі точки нуль, для $\epsilon \in (0, 1)$, отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \frac{N|\varphi_N - \varphi_0|}{2} > \epsilon \right\} &\leq \\ &\leq \mathbf{P} \left\{ 1 - \frac{\sin \frac{N(\varphi_N - \varphi_0)}{2}}{\frac{N(\varphi_N - \varphi_0)}{2}} > 1 - \frac{\sin \epsilon}{\epsilon} \right\} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

при $N \rightarrow \infty$, що і доводить теорему 5.2. $\square$

- Гречка Г.П. Об асимптотических свойствах периодограмной оценки частоты и амплитуды гармонического колебания / Г.П. Гречка, А.Я. Дороговцев // *Вычисл. и прикл. математика*. – 1975. – №28. – С. 18-31.
- Quinn B.G. The Estimation and Tracking of Frequency / B.G. Quinn, E.J. Hannan. – Cambridge Univ. Press. – 2001. – 266 p.
- Кнопов П.С. Оптимальные оценки параме-

- тров стохастических систем / П.С. Кнопов. — К.: Наукова думка. — 1980. — 151 с.
6. Ivanov A.V. *Consistency and asymptotic normality of periodogram estimator of harmonic oscillation parameters* / A.V. Ivanov, B.M. Zhurakovskiy // *Theory of Probability and Mathematical Statistics*. — 2013. — Vol. 89. — P. 30-39.
7. Whittle P. *The simultaneous estimation of a time series harmonic components and covariance structure* / P. Whittle // *Trabajos Estadistica*. — 1952. — Vol. 3. — P. 43-47.
8. Walker A.M. *On the estimation of a harmonic component in a time series with stationary dependent residuals* / A.M. Walker // *Adv. Appl. Probab.* — 1973. — Vol. 5. — P. 217-241.
9. Hannan E.J. *The estimation of frequency* / E.J. Hannan // *J. Appl. Probab.* — 1973. — Vol. 10. — P. 510-519.
10. Іванов А.В. Одно решение задачи о выявлении скрытых периодичностей / А.В. Иванов // *Теория Вероят. и Матем. Статист.* — 1979. — №20. — С. 44-59.
11. Іванов О.В. Конзистентність оцінки найменших квадратів амплітуд та кутових частот суми гармонійних коливань у моделях з сильною залежністю / О.В. Іванов // *Теорія ймовір. та матем. статист.* — 2009. — Вип. 80. — С. 55-62.
12. Жураковський Б.М. Конзистентність оцінки найменших квадратів параметрів суми гармонічних коливань у моделях із сильнозалежним шумом / Б.М. Жураковський, О.В. Іванов // *Наук. вісті НТУУ "КПІ"*. — 2010. — №4. — С. 60-66.
13. Ivanov A.V. *Estimation of harmonic component in regression with cyclically dependent errors* / A.V. Ivanov, N.N. Leonenko, M.D. Ruiz-Medina, B.M. Zhurakovsky // *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*. — 2015. — V. 49, 1. — P. 156-186.
14. Ivanov A.V. *Statistical Analysis of Random Fields* / A.V. Ivanov, N.N. Leonenko. — Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. — 1989. — 244 p.
15. Anh V.V. *Continuous-time stochastic processes with cyclical long-range dependence* / V.V. Anh, V.P. Knopova, N.N. Leonenko // *Aust. NZ J. Stat.* — 2004. — Vol. 46. — P. 275-296.
16. Ivanov A.V. *Limit theorems for weighted non-linear transformations of Gaussian processes with singular spectra* / A.V. Ivanov, N.N. Leonenko, M.D. Ruiz-Medina, I.N. Savych // *Ann. Probab.* — 2013. — Vol. 41, № 2. — P. 1088-1114.
17. Іванов О.В. Асимптотичні властивості М-оцінок параметрів нелінійної регресії з випадковим шумом, що має сингулярний спектр / О.В. Іванов, І.В. Орловський // *Теорія ймовір. та матем. статист.* — 2015. — Вип. 93. — С. 34-49.
18. Іванов О.В. Асимптотичні властивості М-оцінок параметрів нелінійної регресії з дискретним часом та сингулярним спектром / О.В. Іванов, І.В. Орловський // *Український математичний журнал*. — 2017. — т. 69, № 1. — С. 28-51.

References

1. Schuster A. *On the investigation of hidden periodicities with application to a supposed 26 day period of meteorological phenomena* / A. Schuster // *Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity*. — 1898. — Vol. 3. — P. 13-41.
2. Schuster A. *The periodogram and its optical analogie* / A. Schuster // *Proceed Roy. Soc.* — 1906. — Vol. 77. — 136 p.
3. Grechka G.P. *On the asymptotic properties of the periodogram estimator of the frequency and amplitude of a harmonic oscillation* / G.P. Grechka, A.Ya. Dorogoutsev // *Vychisl. i prikl. matematika*. — 1975. — №28. — P. 18-31.
4. Quinn B.G. *The Estimation and Tracking of Frequency* / B.G. Quinn, E.J. Hannan. — Cambridge Univ. Press. — 2001. — 266 p.

5. Knopov P.S. *Optimal estimators of the stochastic systems parameters* / P.S. Knopov. — K.: Naukova dumka. — 1980. — 151 p.
6. Ivanov A.V. *Consistency and asymptotic normality of periodogram estimator of harmonic oscillation parameters* / A.V. Ivanov, B.M. Zhurakovskiy // *Theory of Probability and Mathematical Statistics*. — 2013. — Vol. 89. — P. 30-39.
7. Whittle P. *The simultaneous estimation of a time series harmonic components and covariance structure* / P. Whittle // *Trabajos Estadística*. — 1952. — Vol. 3. — P. 43-47.
8. Walker A.M. *On the estimation of a harmonic component in a time series with stationary dependent residuals* / A.M. Walker // *Adv. Appl. Probab.* — 1973. — Vol. 5. — P. 217-241.
9. Hannan E.J. *The estimation of frequency* / E.J. Hannan // *J. Appl. Probab.* — 1973. — Vol. 10. — P. 510-519.
10. Ivanov A.V. *A solution of the problem of detecting hidden periodicities* / A.V. Ivanov // *Theory Probab. Math. Statist.* — 1980. — №20. — P. 51-68.
11. Ivanov A.V. *Consistency of the least squares estimator of the amplitudes and angular frequencies of a sum of harmonic oscillations in models with long-range dependence* / A.V. Ivanov // *Theor. Probability and Math. Statist.* — 2010. — №80. — P. 61-69.
12. Zhurakovskiy B.M. *Consistency of the least squares estimator of the sum of harmonic oscillations parameters in the models with strongly dependent noise* / B.M. Zhurakovskiy, O.V. Ivanov // *Naukovi Visti NTUU "KPI"*. — 2010. — №4. — P. 60-66.
13. Ivanov A.V. *Estimation of harmonic component in regression with cyclically dependent errors* / A.V. Ivanov, N.N. Leonenko, M.D. Ruiz-Medina, B.M. Zhurakovskiy // *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*. — 2015. — V. 49, 1. — P. 156-186.
14. Ivanov A.V. *Statistical Analysis of Random Fields* / A.V. Ivanov, N.N. Leonenko. — Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. — 1989. — 244 p.
15. Anh V.V. *Continuous-time stochastic processes with cyclical long-range dependence* / V.V. Anh, V.P. Knopova, N.N. Leonenko // *Aust. NZ J. Stat.* — 2004. — Vol. 46. — P. 275-296.
16. Ivanov A.V. *Limit theorems for weighted nonlinear transformations of Gaussian processes with singular spectra* / A.V. Ivanov, N.N. Leonenko, M.D. Ruiz-Medina, I.N. Savych // *Ann. Probab.* — 2013. — Vol. 41, № 2. — P. 1088-1114.
17. Ivanov A.V. *Asymptotic properties of M-estimators of parameters of a nonlinear regression model with a random noise whose spectrum is singular* / A.V. Ivanov, I.V. Orlovskiy // *Theor. Probability and Math. Statist.* — 2016. — № 93. — P. 33-49.
18. Ivanov O.V. *Asymptotic Properties of the M-Estimates of Parameters in a Nonlinear Regression Model with Discrete Time and Singular Spectrum* / O.V. Ivanov, I.V. Orlovskiy // *Ukrainian Mathematical Journal*. — 2017. — Vol. 69, № 1. — P. 32-61.

Надійшла до редколегії 02.06.2023

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ,
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА
ТА МЕХАНІКА**

УДК 532.59: 534.29

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/1.8>

Жук О.П.¹, д.ф.-м.н., пров.н.с.
Жук Я.О.², чл.-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф.
Клімчук² Т.В., к.ф.-м.н.

O.P. Zhuk¹, Dr.Sci., Leading Researcher.
Y.A. Zhuk², Dr.Sci. (Phys.–Math.)
T.V. Klimchuk², Ph.D.

Про взаємодію сферичних крапель рідини в радіаційному полі акустичної хвилі

On interaction of liquid drops located in radiation field of the acoustic wave

¹Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, 03057, м. Київ, вул. Петра Нестерова, 3
e-mail: opzhuk1939@gmail.com

¹Timoshenko Institute of Mechanics, NAS of Ukraine,
3, Petr Nesterov str., Kyiv 03057

e-mail: opzhuk1939@gmail.com

²Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е,
e-mail: y.zhuk@i.ua

²Taras Shevchenko National University of Kyiv, 4e,
Glushkov ave., Kyiv 03680

e-mail: y.zhuk@i.ua

Розглянуто випадок поширення плоскої акустичної хвилі вздовж лінії центрів двох сферичних крапель рідини, які знаходяться в іншій рідині, що заповнює весь простір. Розроблено підхід, який дозволяє встановити характер взаємодії крапель, обумовлений дією на краплі акустичних радіаційних сил – сталих в часі складових гідродинамічних сил, що діють в рідині на краплі. Дослідження дії на краплі акустичних радіаційних сил звукового поля проведено у два етапи: перший – розв’язання лінійної задачі розсіювання первинної хвилі на рідких краплях; другий – обчислення гідродинамічних сил, які діють на кожен сферичну краплю, з наступним осередненням їх в часі. Виведено формулу для обчислення акустичної радіаційної сили для досліджуваного випадку.

Ключові слова: ідеальна рідина, плоска акустична хвиля, рідка сферична крапля, гідродинамічна сила, акустична радіаційна сила.

Propagation of the plane acoustic wave along the center line of two liquid spherical drops placed into a space filled with another liquid is under investigation. An approach is elaborated to characterize the interaction between the liquid drops caused by the acoustic radiation forces that are the time-constant components of hydrodynamic forces acting upon the drops located in the outer liquid. Investigation of the acoustic radiation forces influencing the drops in the acoustic field is performed in the frame of two-step procedure. The first step comprises solution of the linear problem of incident wave diffraction on the drops while the second one is calculation of the hydrodynamic forces acting upon each spherical drop followed by time averaging of forces determined. The analytical formula for the acoustic radiation force calculation is derived for the case under consideration.

Key Words: ideal liquid, plane acoustic wave, liquid spherical drop, hydrodynamic force, acoustic radiation force.

Статтю представив академік НАН України Перестюк М.О.

1. Вступ

При дослідженні використовується підхід [1], що ґрунтується на розв’язуванні рівнянь гідродинаміки ідеальної стисливої рідини з наступним обчисленням гідродинамічних сил, що діють на краплі, і осередненням їх в часі. Отже радіаційні сили у відповідності з методом дослідження визначаються як незалежні від часу складові гідродинамічних сил, вихислених з точністю до величин другого порядку малості. Відзначимо характерну особливість методу.

Якщо при обчисленні тиску в рідині обмежитися величинами другого порядку малості, то він може бути вихислений через потенціал поля швидкості, який визначено в акустичному наближенні [1,2].

2. Постановка задачі дифракції та її розв’язування

Будемо розглядати в рідині, яка заповнює весь простір, систему двох крапель іншої рідини.

Краплі мають радіуси R_1 і R_2 , відповідно швидкість звуку в рідинах крапель a_1 і a_2 , а густини рідин крапель ρ_1 і ρ_2 . Для зовнішньої рідини покладемо: густина ρ_0 , швидкість звуку a_0 . Введемо декартову прямокутну систему координат $Oxyz$, вісь Oz якої виберемо вздовж лінії центрів крапель в напрямі до краплі №2, а початок координат - посередині між центрами крапель, віддалених одна від одної на відстань l . Введемо також локальні сферичні системи координат $(r_s, \theta_s, \varphi_s)$ ($s=1, 2$), як показано на рис. 1.

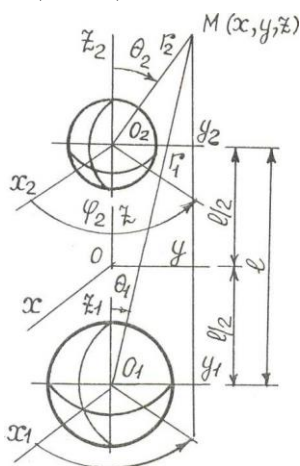


Рис.1. Дві краплі в акустичному полі

У відповідності з методом дослідження [1,2] потенціал Φ акустичного поля є розв'язком лінійного хвильового рівняння

$$\Delta\Phi - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

У зв'язку з цим потенціал первинної (падаючої) акустичної хвилі задамо співвідношенням

$$\Phi_i = A \exp[i(kz - \omega t)], \quad (2)$$

де A – амплітуда, ω – кругова частота, $k = \omega/a_0$ – хвильове число.

Потенціал Φ_d розсіяного на сферичних краплях акустичного поля визначимо розв'язавши відповідно з [1] лінійну задачу дифракції акустичної хвилі (2) на системі двох сферичних крапель.

3. Визначення потенціалу хвильового поля, розсіяного на краплях

Розв'язування задачі дифракції проведемо методом розділення змінних в сферичних системах координат [3]. Розв'язок задачі дифракції запишемо у вигляді

$$\Phi_d = \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(s)} h_n^{(1)}(kr_s) P_n(\cos \theta_s) e^{-i\omega t}, \quad s=1, 2, \quad (3)$$

де $A_n^{(s)}$ – довільні сталі у s -й локальній системі координат, $h_n^{(1)}(kr_s)$ – сферичні функції Ганкеля, $P_n(\cos \theta_s)$ – ортонормовані поліноми Лежандра.

Потенціали розсіяних на краплях хвиль задовольняють умови випромінювання на нескінченності.

Потенціал $\Psi^{(s)}$ хвильового поля в s -й краплі, що є також розв'язком рівняння (1), обмежений в краплі. Його запишемо в такому вигляді

$$\Psi^{(s)} = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_n^{(s)} j_n(\bar{k}_s \bar{r}_s) P_n(\cos \theta_s) e^{-i\omega t}, \quad s=1, 2 \quad (4)$$

У формулі (4) $j_n(\bar{k}_s \bar{r}_s)$ – сферичні функції Бесселя. Риска над символом позначає величини, які стосуються краплі.

Довільні сталі $A_n^{(s)}$ і $\bar{A}_n^{(s)}$ визначимо із граничних умов на поверхнях сферичних крапель, які вимагають при переході через поверхні крапель неперервності радіальних компонент швидкості зовнішньої і внутрішньої рідини і неперервності величини тиску:

$$v_r^{(s)} \Big|_{r_s=R_s} = \bar{v}_r^{(s)} \Big|_{r_s=R_s}, \quad p^{(s)} \Big|_{r_s=R_s} = \bar{p}^{(s)} \Big|_{r_s=R_s}, \quad s=1, 2. \quad (5)$$

Для того, щоб потенціал звукового поля в зовнішній рідині

$$\Phi = \Phi_i + \Phi_d = \Phi_i + \sum_{s=1}^2 \Phi_d^{(s)} \quad (6)$$

записати в кожній з локальних сферичних систем координат скористаємося теоремами додавання для сферичних хвильових функцій [3]. Взявши при цьому до уваги формулу для потенціалу первинної акустичної хвилі (2), поданий у s -й сферичній системі координат у вигляді

$$\Phi_i^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} 2A e^{(-1)^s ikl/2} i^n j_n(kr_s) P_n(\cos \theta_s) e^{-i\omega t}, \quad (7)$$

одержимо в кожній з локальних систем координат формулу для потенціалу звукового поля (6)

$$\Phi^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[2A e^{(-1)^s ikl/2} i^n j_n(kr_s) + A_n^{(s)} h_n^{(1)}(kr_s) + S_n^{(s)} j_n(kr_s) \right] P_n(\cos \theta_s) e^{-i\omega t}, \quad s=1, 2. \quad (8)$$

$$S_n^{(s)} = \sum_{p=0}^{\infty} A_p^{(q)} Q_{0n0p}^{(s,q)}(kR_{sq}, \theta_{sq}); \quad s, q=1, 2; \quad s \neq q;$$

$$R_{sq} = R_{qs} = l.$$

Зауважимо, що координати центру O_s s -ї краплі в q -й сферичній системі координат позначаємо як r_{qs} , θ_{qs} , φ_{qs} .

Співвідношення для $Q_{0n0p}^{(s,q)}(kR_{sq}, \theta_{sq})$ обчислюється за формулою, приведеною в [3].

Із граничних умов (5), взявши до уваги формули:

$$\begin{aligned} v_{r_s}^{(s)} &= \frac{\partial \Phi^{(s)}}{\partial r_s}, & p^{(s)} &= -\rho_0 \frac{\partial \Phi^{(s)}}{\partial t}, \\ \bar{v}_{r_s}^{(s)} &= \frac{\partial \Psi^{(s)}}{\partial r_s}, & \bar{p}^{(s)} &= -\rho_s \frac{\partial \Psi^{(s)}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (9)$$

одержуємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь для обчислення сталих коефіцієнтів $A_n^{(s)}$ і $\bar{A}_n^{(s)}$ в потенціалах акустичних хвиль

$$\begin{aligned} kh_n^{(1)'}(kR_s)A_n^{(s)} - k_s j_n'(k_s R_s)\bar{A}_n^{(s)} + kS_n^{(s)}j_n'(kR_s) &= \\ &= -2Ake^{(-1)^s ikl/2} i^n j_n'(kR_s); \quad (10) \\ \rho_0 h_n^{(1)}(kR_s)A_n^{(s)} - \rho_s j_n(k_s R_s)\bar{A}_n^{(s)} + \rho_0 S_n^{(s)}j_n(kR_s) &= \\ &= -2A\rho_0 e^{(-1)^s ikl/2} i^n j_n(kR_s), \quad s=1,2 \end{aligned}$$

Одержана система алгебраїчних рівнянь задовольняє умовам єдиності розв'язку, який знаходимо методом редукції. Обчислені коефіцієнти визначають потенціал акустичного поля.

4. Обчислення акустичних радіаційних сил, які обумовлюють взаємодію крапель

Обчислення радіаційної сили, яка діє на краплю в рідині, зводиться до осереднення в часі (за період первинної хвилі) гідродинамічної сили. У зв'язку з симетрією хвильового поля відносно осі Oz гідродинамічна сила направлена вздовж цієї осі:

$$F_z^{(s)} = - \iint_S p^{(s)} \cos \theta_s dS \quad (11)$$

У формулі (11) S – площа поверхні сферичної краплі.

При обчисленні гідродинамічних сил (11), які діють на краплі, відповідно з прийнятим методом дослідження, збурення тиску в рідині будемо визначати по формулі [1], [2]

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho_0 (grad \Phi)^2 + \frac{\rho_0}{2 a_0^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2. \quad (12)$$

Зауважимо, що у формулі для тиску (12) необхідно використовувати дійсну частину співвідношення для потенціалу (8) звукового поля. Подано її в такому вигляді

$$\text{Re } \Phi^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(K_n^{(s)} \cos \omega t + L_n^{(s)} \sin \omega t \right) P_n(\cos \theta_s). \quad (13)$$

У формулі (13) використано такі позначення:

$$K_n^{(s)} = B_{1n}^{(s)} + C_{1n}^{(s)} + D_{1n}^{(s)}; \quad L_n^{(s)} = B_{2n}^{(s)} + C_{2n}^{(s)} + D_{2n}^{(s)};$$

$$\begin{aligned} B_{1n}^{(s)} &= 2A \left[\cos \left(n \frac{\pi}{2} \right) \cos \left(k \frac{l}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - (-1)^s \sin \left(n \frac{\pi}{2} \right) \sin \left(k \frac{l}{2} \right) \right] j_n(kr_s); \\ B_{2n}^{(s)} &= 2A \left[\sin \left(n \frac{\pi}{2} \right) \cos \left(k \frac{l}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^s \cos \left(n \frac{\pi}{2} \right) \sin \left(k \frac{l}{2} \right) \right] j_n(kr_s); \end{aligned}$$

$$C_{1n}^{(s)} = A_{1n}^{(s)} j_n(kr_s) - A_{2n}^{(s)} y_n(kr_s);$$

$$C_{2n}^{(s)} = A_{1n}^{(s)} y_n(kr_s) + A_{2n}^{(s)} j_n(kr_s);$$

$$A_n^{(s)} = \text{Re } A_n^{(s)} + i \text{Im } A_n^{(s)} = A_{1n}^{(s)} + i \text{Im } A_{2n}^{(s)};$$

$$D_{1n}^{(s)} = \text{Re } S_n^{(s)} j_n(kr_s); \quad D_{2n}^{(s)} = \text{Im } S_n^{(s)} j_n(kr_s).$$

В подальшому при позначенні дійсної частини потенціалу $\Phi^{(s)}$ символ Re вказувати не будемо.

Складова гідродинамічної сили (11), яка обумовлена першим доданком у формулі для тиску (12), при осередненні гідродинамічної сили за часом дорівнює нулю, тому при обчисленні гідродинамічної сили перший доданок у формулі для тиску враховувати не будемо, маючи на увазі наступне осереднення гідродинамічної сили за часом. Отже,

$$\begin{aligned} p^{(s)} &= \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{a_0^2} \left(\frac{\partial \Phi^{(s)}}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{\partial \Phi^{(s)}}{\partial r_s} \right)^2 - \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{r_s^2} \left(\frac{\partial \Phi^{(s)}}{\partial \theta_s} \right)^2 \end{aligned} \quad (14)$$

При цьому тиск обчислюється при умові $r_s = R_s$.

Визначимо внесок у величину гідродинамічної сили, яка діє на краплю, кожного з доданків у формулі (14) для тиску в акустичній хвилі. Внесок першого доданка у величину гідродинамічної сили $F_z^{(s)}$ визначається інтегралом

$$F_{z1}^{(s)} = -\frac{\pi \rho_0 R_s^2}{a_0^2} \int_0^\pi \left(\frac{\partial \Phi^{(s)}}{\partial t} \right)^2 \sin \theta_s \cos \theta_s d\theta_s, s=1,2 \quad (15)$$

Після інтегрування (15) одержуємо формулу

$$F_{z1}^{(s)} = -4\pi \rho_0 \alpha_s^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} \times \\ \times \left[K_n^{(s)} K_{n+1}^{(s)} \sin^2 \omega t + L_n^{(s)} L_{n+1}^{(s)} \cos^2 \omega t \right], \alpha_s = kR_s. \quad (16)$$

У формулі (16) не враховано доданки, які після осереднення за часом дорівнюють нулю. Після осереднення за часом співвідношення (16), знаходимо

$$\langle F_{s1}^{(s)} \rangle = -2\pi \rho_0 \alpha_s^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} \times \\ \times \left[K_n^{(s)} K_{n+1}^{(s)} + L_n^{(s)} L_{n+1}^{(s)} \right] \quad (17)$$

Внесок другого доданку формули (14) визначається інтегралом

$$F_{z2}^{(s)} = \pi \rho_0 R_s^2 \int_0^\pi \left(\frac{\partial \Phi^{(s)}}{\partial r} \right)^2 \cos \theta_s \sin \theta_s d\theta_s, s=1,2. \quad (18)$$

Інтегрування (18) дає внесок другого доданку з (14)

$$F_{z2}^{(s)} = 4\pi \rho_0 \alpha_s^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} \times \\ \times \left(K_n^{(s)} K_{n+1}^{(s)} \cos^2 \omega t + L_n^{(s)} L_{n+1}^{(s)} \sin^2 \omega t \right). \quad (19)$$

Після осереднення (19) за часом одержуємо внесок в радіаційну силу другого доданку з (14)

$$\langle F_{z2}^{(s)} \rangle = 2\pi \rho_0 (kR_s)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} \times \\ \times \left(K_n^{(s)} K_{n+1}^{(s)} + L_n^{(s)} L_{n+1}^{(s)} \right). \quad (20)$$

Список використаних джерел

1. Zhuk A.P. Hydrodynamic interaction of two spherical particles from sound waves // Sov. Appl. Mech. – 1984. – **20**, №9. – P. 875-880.
2. King L.V. On the Acoustic Radiation Pressure on Spheres // Proc.Roy. Soc. Ser. A. 1934. – **147**, №861. – P. 212-240.
3. Гузь А.Н., Головчан В.Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах. – Киев: Наук. думка, 1972. – 254 с.

Діючи аналогічним чином, знаходимо внесок третього доданку з формули (14) у радіаційну силу, яка діє на s -у краплю,

$$\langle F_{z3}^{(s)} \rangle = 2\pi \rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} \left(K_n^{(s)} K_{n+1}^{(s)} + L_n^{(s)} L_{n+1}^{(s)} \right).$$

Отже, після осереднення в часі гідродинамічної сили (11), одержано формулу для обчислення акустичних радіаційних сил, які діють на кожному з крапель:

$$\langle F_z^{(s)} \rangle = \langle F_{z1}^{(s)} \rangle + \langle F_{z2}^{(s)} \rangle + \langle F_{z3}^{(s)} \rangle, s=1,2.. \quad (23)$$

Величини радіаційних сил, які діють на кожному з крапель, та їх напрям дії, визначають поведінку крапель в рідині – вони віддаляються чи зближуються, що може бути застосовано при розробці технологічних процесів, основаних на використанні акустичних полів.

Досліджено задачу про дію середньої в часі гідродинамічної (радіаційної) сили на краплі іншої рідини, ніж зовнішня, і розроблено метод її розв'язування, який дозволяє досліджувати поведінку рідких сферичних крапель під дією акустичних полів. В даній роботі запропоновано підхід, який включає постановку задачі в загальній формі незалежно від відношення довжини акустичної хвилі до розмірів об'єктів і до відстані між ними.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за фінансової підтримки Національного фонду досліджень України (Проект 0120U105260 «Дифракційні процеси і радіаційні сили в обмежених гідропружних системах»)

References

1. ZHUK, A.P. (1984) Hydrodynamic interaction of two spherical particles from sound waves. *Sov. Appl. Mech.* **20**(9). p. 875-880.
2. KING, L.V. (1934) On the Acoustic Radiation Pressure on Spheres. *Proc.Roy. Soc. Ser. A.* **147**(861). p. 212-240.
3. GUZ, A.N. and GOLOVCHAN, V.T. (1972) *Difraktsiya uprugikh voln v mnogosvyaznykh telakh*. Kiev: Naukova dumka.

Надійшла до редколегії 11.03.23

УДК 531/534

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/1.9>

Білий В.О.¹, к.ф.-м.н.
Білий О. Г.², ст. викладач

V. O. Bilyi¹, Ph.D.
O. G. Bilyi², Senior Lecturer.

**Порівняльна динаміка витікання
рідини із ємностей певних геометричних
форм в залежності від зміни осі
обертання.**

**Comparative dynamics of liquid outflow from
containers of certain geometric shapes
depending on the change in the axis of
rotation.**

¹ Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря
Сікорського», 03056, м. Київ, проспект
Берестейський, 37.
e-mail: valeri_y@ukr.net

¹ National Technical University of Ukraine “Igor
Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, 03056, Kyiv,
Beresteysky Avenue, 37.
e-mail: valeri_y@ukr.net

² Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря
Сікорського», 03056, м. Київ, проспект
Берестейський, 37.
e-mail: belyi.oleksandr@gmail.com

² National Technical University of Ukraine “Igor
Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, 03056, Kyiv,
Beresteysky Avenue, 37.
e-mail: belyi.oleksandr@gmail.com

В металургійних підприємствах, на деяких заводах та фабриках в технологічних процесах застосовується розливання різного роду рідин (чавун, сталь, золото, срібло, шоколад тощо) із великих ємностей різних геометричних форм в менші стандартні форми методом повороту ємності відносно закріпленої точки або фіксованої осі і виливанні через край. Важливо, щоб при цьому потік рідини був рівномірним, що в дійсності не справджується навіть при постійній кутовій швидкості обертання. В даній роботі розглянуто процес розливу із ємностей конічної та параболічної форм – найбільш уживаних на практиці. В розвиток робіт авторів по цій темі, розглянуто інший механізм повороту, що часто зустрічається, а саме, поворот відносно діаметра верхньої частини котла. Отримані результати вивчення динаміки зміни розходу рідини в залежності від кута нахилу, аналізуємо в порівнянні з результатами попередніх робіт авторів і подаємо висновок-рекомендації. Враховуючи ці теоретичні дослідження, роботу поворотних механізмів в кожному конкретному випадку можна підкорегувати, виробивши алгоритм послідовних дій, що забезпечують рівномірність процесу виливання.

Ключові слова: геометрична форма, обертання відносно закріпленої точки або осі, кутова швидкість обертання, кут нахилу, розхід рідини при розливі, динаміка витікання, рівномірний витік

In metallurgical enterprises, in some plants and factories, in technological processes, pouring of various types of liquids (cast iron, steel, gold, silver, chocolate, etc.) from large containers of various geometric shapes into smaller standard forms by the method of turning the container relative to a fixed point or a fixed axis and pouring over the edge. It is important that the flow of liquid is uniform, which in reality is not true even at a constant angular speed of rotation. This paper examines the process of pouring from containers of conical and parabolic shapes, which are the most widely used in practice. In the development of the authors' works on this topic, another mechanism of rotation, which is often found, is considered, namely, rotation relative to the diameter of the upper part of the boiler. We analyze the obtained results of the study of the dynamics of changes in fluid consumption depending on the angle of inclination in comparison with the results of the previous works of the authors and provide conclusions and recommendations. Taking into account these theoretical studies, the operation of rotary mechanisms in each specific case can be adjusted by developing an algorithm of sequential actions that ensure the uniformity of the pouring process.

Key Words: geometric shape, rotation relative to a fixed point or axis, angular speed of rotation, angle of inclination, liquid flow during pouring, flow dynamics, uniform flow.

Вступ

В роботах [1] та [2] розглянуто динаміку промислового розливу рідини із ємностей певних геометричних форм при повороті відносно осі, що проходить через нижню точку ємності. Розглянемо тут динаміку витікання, якщо вісь обертання це діаметр верхньої частини геометричної форми.

Основна частина

I. Нехай ємність – це **конус** з параметрами R та H , наповнений рідиною і повертається відносно закріпленої осі FQ з постійною кутовою швидкістю ω . На Рис. 1, L – коло дотику рідини на початку нахилу конуса, L' – після нахилу на кут φ , A – точка виливу.

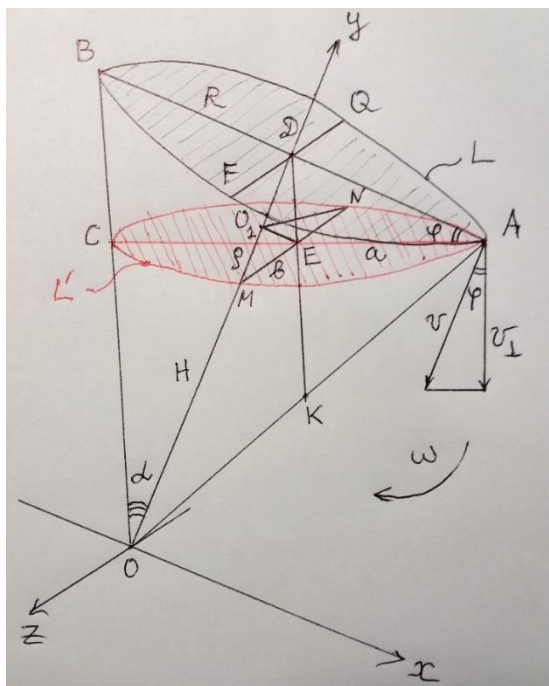


Рис. 1 Конічна ємність

Ясно, що L' – еліпс, параметри якого a та b змінюються в залежності від φ .

E – центр еліпса лежить на лінії центрів еліпсів, DK – середня лінія $\triangle OAB$, $AC = 2a$ – велика вісь, $MN = 2b$ – мала вісь. В системі координат, вибраній як на Рис. 1, в площині XOY кутовий коефіцієнт прямої AC буде

$$k_{AC} = k = \operatorname{tg} \varphi, \quad \frac{R}{H} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Неважко бачити [1], якщо $C(x_c, y_c)$, то $x_c = R \frac{kR-H}{kR+H}$, $y_c = H \frac{H-kR}{kR+H}$, $AC = 2a = \frac{2RH\sqrt{1+k^2}}{kR+H}$. Знайдемо тепер b . На лінії MN перетинаються

круг з центром в точці O_1 радіуса ρ та еліпс, велика вісь якого $AC = 2a$. Тоді із $\triangle O_1EM$ маємо, $b^2 = \rho^2 - (O_1E)^2$, де $O_1E = x_E = \frac{x_A+x_C}{2} = \frac{kR^2}{kR+H}$, $\rho = \frac{R}{H} y_E = \frac{R}{H} \frac{y_A+y_C}{2} = \frac{RH}{kR+H}$. Тобто $b = R \sqrt{\frac{H-kR}{H+kR}}$, $H - kR \geq 0$, $k = \operatorname{tg} \varphi \leq \frac{H}{R} = \operatorname{ctg} \alpha$.

Таким чином,

$$S_{L'} = \pi ab = \pi R^2 H \sqrt{\frac{(H-kR)(1+k^2)}{(H+kR)^3}}.$$

Тут $S_{L'}$ – площа поверхні рідини після нахилу на кут φ .

Знайдемо розхід рідини P_φ , який визначається як об'єм витікаючої рідини за одиницю часу і дорівнює добутку площі поверхні витіку рідини на вертикальну складову $v_\perp$ швидкості руху точки A відносно осі обертання FQ .

Маємо, $v = \omega R$, $v_\perp = v \cos \varphi = \omega R \cos \varphi$, тобто

$$\begin{aligned} P_\varphi &= S_{L'} \cdot v_\perp = \\ &= \pi R^2 H \omega R \sqrt{\frac{(H-kR)(1+k^2)}{(H+kR)^3}} \cos \varphi = \\ &= \pi R^3 \omega \cos \alpha \sqrt{\frac{\cos(\alpha+\varphi) \cos^2 \varphi}{\cos^3(\alpha-\varphi)}}. \end{aligned}$$

Дослідимо P_φ на екстремум, маємо

$$\begin{aligned} \left(\frac{\cos(\alpha+\varphi) \cos^2 \varphi}{\cos^3(\alpha-\varphi)} \right)' &= \frac{\cos \varphi}{\cos^4(\alpha-\varphi)} \times \\ &\times (-3 \sin(\alpha-\varphi) \cos(\alpha+\varphi) \cos \varphi - \\ &- 2 \sin \varphi \cos(\alpha-\varphi) \cos(\alpha+\varphi) - \\ &- \cos \varphi \cos(\alpha-\varphi) \sin(\alpha+\varphi)) = 0. \end{aligned}$$

Або

$$\begin{aligned} &\cos \varphi (-3 \sin(\alpha-\varphi) \cos(\alpha+\varphi) - \\ &- \cos(\alpha-\varphi) \sin(\alpha+\varphi)) - \\ &- 2 \sin \varphi \cos(\alpha-\varphi) \cos(\alpha+\varphi) = \\ &= \cos \varphi (\sin 2\varphi - 2 \sin 2\alpha) - \\ &- \sin \varphi (\cos 2\alpha + \cos 2\varphi) = \\ &= \sin \varphi - 2 \cos \varphi \sin 2\alpha - \sin \varphi \cos 2\alpha = \\ &= \sin \varphi (1 - \cos 2\alpha) - 2 \cos \varphi \sin 2\alpha = 0, \end{aligned}$$

тобто

$$\operatorname{tg} \varphi = 2 \frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = 2 \operatorname{ctg} \alpha,$$

що неможливо, бо $\operatorname{tg} \varphi \leq \operatorname{ctg} \alpha$.

Також $\cos \varphi \neq 0$, бо $\varphi \leq \frac{\pi}{2} - \alpha$, аналогічно $\cos(\alpha-\varphi) \neq 0$. Таким чином, $P_\varphi' < 0$ для $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} - \alpha$ і P_φ – **монотонно спадає** від

$$0 \leq \varphi_1 = \arctg \left(\frac{2H^2 + R^2}{3RH} \right) < \\ < \varphi_{\max} = \arctg \frac{2H}{R}, \\ P_{\max} = \frac{\pi R^2}{4H^2} \omega \sqrt{R^2 + H^2} \frac{(2H - R \operatorname{tg} \varphi_1)^2}{\cos \varphi_1} \times \\ \times \cos \left(\arctg \frac{H}{R} - \varphi_1 \right).$$

При $H \geq R$,

$$P_{\max} = P(\varphi = 0) = \pi R^2 \omega \sqrt{R^2 + H^2} \times \\ \times \cos \left(\arctg \frac{H}{R} \right), \\ P_{\min} = P(\varphi_{\max}) = 0.$$

2. Якщо обертання буде відносно діаметра FQ , то

$$P_{\varphi} = \pi \omega R^3 \left(1 - \frac{R}{2H} \operatorname{tg} \varphi \right)^2 - \text{монотонно спадає і} \\ P_{\max} = P(\varphi = 0) = \pi \omega R^3,$$

Список використаних джерел

1. Білий В.О., Білий О.Г. Динаміка витікання рідини із ємностей класичних геометричних форм. Частина I. Znanstvena Misel Journal, 2022, 70, 24–28. <https://doi.org/10.5281/zenodo.7095676>
2. Білий В.О., Білий О.Г. Динаміка витікання рідини із ємностей класичних геометричних форм. Частина II. Znanstvena Misel Journal, 2022, 71, 38–44. <https://DOI: 10.5281/zenodo.7248072>

$$P_{\min} = P(\varphi_{\max}) = 0.$$

Висновки

Маючи ці дані про динаміку розходу рідини для ємностей різних геометричних форм при різних способах виливу, можна в кожному конкретному випадку виробити алгоритм послідовних дій управління механізмів, які забезпечують процес виливання так, що він стає достатньо рівномірним.

На завершення висловлюємо подяку професору Василюк О.І. за увагу та корисні поради.

References

1. Bilyi V., Bilyi O. (2022). DYNAMICS OF LIQUID OUTFLOW FROM CONTAINERS OF CLASSIC GEOMETRIC SHAPES. PART I. Znanstvena Misel Journal, 70, 24–28. <https://doi.org/10.5281/zenodo.7095676>
2. Bilyi V., Bilyi O. (2022). DYNAMICS OF LIQUID OUTFLOW FROM CONTAINERS OF CLASSIC GEOMETRIC SHAPES. PART II. Znanstvena Misel Journal, 71, 38–44. <https://DOI: 10.5281/zenodo.7248072>

Надійшла до редколегії 15.05.23

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 004.891

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/1.10>

Врублевський В.Н.¹, аспірант,
Марченко О. О.¹, д.ф.-м.н., проф.

V. N. Vrublevskiy, Post-graduate,
A. A. Marchenko¹, Dr. Sci., Prof.

Огляд підходів до розв'язання задач ідентифікації парафраз

Review of approaches for paraphrase identification

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова
4д,
e-mail: vitalii.vrublevskiy@gmail.com
rozenkrans17@gmail.com

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,

e-mail: vitalii.vrublevskiy@gmail.com
rozenkrans17@gmail.com

Стаття присвячена огляду підходів до розв'язання задачі ідентифікації парафраз. Описується актуальність та використання даної задачі у таких задачах як виявлення плагіату, спрощення тексту та пошук інформації. Було розглянуто декілька класів вирішення даної задачі. Перший підхід заснований на ручних правилах - використовує вручну підібрані особливості базуючись на базових властивостях парафраз. Другий підхід заснований на лексичній подібності та різноманітних базах даних і онтології. Підходи, засновані на машинному навчанні також представлені у даній статті та описує архітектури, які можуть бути використані для ідентифікації парафраз. Останній підхід який розглянуто базується на глибокому навчанні та сучасних моделях трансформерів.

Також зроблено порівняльний аналіз корпусів даних, які використовують для розв'язання задачі ідентифікації.

Ключові слова: обробка природної мови, ідентифікація парафраз, машинне навчання.

The article is devoted to a review of approaches to solving the problem of identifying paraphrases. This problem's relevance and use in tasks such as plagiarism detection, text simplification, and information search are described. Several classes of solutions were considered. The first approach is based on manual rules - it uses manually selected features based on the fundamental properties of paraphrases. The second approach is based on lexical similarity and various databases and ontologies. Machine learning-based approaches are also presented in this paper and describe different architectures that can be used to identify paraphrases. The last approach considered is based on deep learning and modern models of transformers.

A comparative analysis of data corpora, which are used to solve the problem of identification paraphrases, is also done.

Keywords: natural language processing, paraphrase identification, machine learning.

Актуальність

Обробка природної мови стає все більш важливою в сферах технологій і бізнесу, оскільки задачі, які вона вирішує дозволяють обчислювальним системам ефективніше обробляти та розуміти людську мову.

Моделі природної мови є важливими для забезпечення ефективного спілкування між

людьми, які розмовляють різними мовами. Системи машинного перекладу, розпізнавання мовлення - це лише декілька задач з цієї галузі, що допомагають покращувати нашу комунікацію.

Багато компаній використовують різні моделі природної мови для покращення обслуговування клієнтів: створення чат-ботів і віртуальних помічників. Вони розуміють запити клієнтів і

відповідають на них у режимі реального часу, наприклад Amazon Alexa [1]

Завдяки обробці природної мови ми можемо користуватися пошуковими системами і системами рекомендацій, що допомагають знаходити найбільш відповідні результати на наші запити.

Розпізнавання парафразів - важлива задача обробки природної мови, що має багато практичних застосувань.

- Виявлення плагіату. Ідентифікацію парафразів можна використовувати для виявлення випадків плагіату шляхом порівняння підозрілого тексту з великою базою корпусів, щоб побачити, чи містять вони перефразовані речення та фрази.

- Спрощення тексту. Парафрази використовують для заміни складних речень і фраз на простіші, які передають те саме значення. Це корисно як для обчислювальних систем, що неефективно працюють із важкими структурами тексту, так і для людей.

- Пошук інформації. Ідентифікацію парафразів використовують для підвищення якості пошукових систем. Вони ідентифікують документи, які містять не лише оригінальний пошуковий запит, а і його парафрази.

Тому розпізнавання парафразів є важливим завданням в обробці природної мови. Воно допомагає підвищити точність і ефективність програм, які покладаються на розуміння сенсу тексту.

Задача ідентифікації парафраз

Ідентифікація парафраз — це завдання визначення того, чи два тексти мають однакове або схоже значення, навіть якщо вони сформульовані по-різному.

Прикладом парафраз можуть слугувати такі речення:

- *Він розлютив мене, коли проявив свою невихованість за вечерю.*
- *Його невічливість, плітки та загальна відсутність поваги за вечерю розлютили мене.*

У контексті обробки природної мови ідентифікація парафразу зазвичай розглядається як завдання бінарної класифікації, де вхідними даними є пара речень, а виходом є булеве значення, що вказує, чи є два речення парафразами, чи ні.

Вхідні речення можна представити різними способами залежно від конкретного завдання та наявних даних. Наприклад, їх можна представити

у вигляді необробленого тексту або можуть бути попередньо оброблені та перетворені в більш структуроване представлення, таке як послідовність токенизованих слів або синтаксичне дерево речення.

Для розв'язання цієї задачі існують різноманітні алгоритми машинного навчання, включаючи традиційні моделі, такі як дерева рішень, метод опорних векторів (SVM)[2] логістична регресія, а також сучасні моделі глибокого навчання, такі як рекурентні нейронні мережі (RNN) [3] і моделі трансформатори на основі BERT [4] і GPT[5].

Ефективність моделей зазвичай оцінюється стандартними показниками, такими як точність, повнота, F1.

Загалом ідентифікація парафразу є складним завданням, яке вимагає глибокого розуміння семантики природної мови. Однак, за останні роки було досягнуто значного прогресу, і найсучасніші моделі досягають високого рівня точності на різних контрольних наборах даних.

Підходи до розв'язання задачі ідентифікації парафраз

Методи виявлення парафраз значно вдосконалилися протягом останніх років завдяки прогресу в обробці природної мови і машинному навчанні. Розглядаючи цю еволюцію можна виділити такі етапи, або класи методів.

- Підходи, засновані на ручних правилах: на початку досліджень багато систем базувалися на правилах та евристичних створених вручну. Ці методи спиралися на синтаксичні та семантичні шаблони для ідентифікації парафраз і часто були обмежені їх залежністю від конкретних мовних особливостей.

- Використання лексичної подібності: дослідники почали використовувати лексичну подібність використовуючи такі системи як WordNet[6] і латентний семантичний аналіз (LSA)[7], для ідентифікації парафраз. Ці методи базувалися на ідеї, що слова зі схожими значеннями, як правило, зустрічаються в подібних контекстах.

- Контрольоване машинне навчання: оскільки методи машинного навчання стали більш популярними в обробці природної мови, дослідники почали розробляти контрольовані моделі навчання для виявлення парафраз. Ці моделі зазвичай використовують розмічені дані. Вони вивчають шаблони та особливості, які вказують на парафрази.

- Глибоке навчання: в останнє десятиліття глибоке навчання стало панівним підходом у машинному навчанні і застосовувалося для широкого кола завдань, включаючи виявлення парафраз. Моделі глибокого навчання, такі як нейронні мережі та трансформери, показали виняткову продуктивність у різних тестах.

Для того аби краще зрозуміти різні ідеї та алгоритми, ми розглянемо декілька підходів з кожного класу.

Досить складно знайти чи виділити підходи, які будуть використовувати лише один з вище наведених класів, тому при виборі алгоритмів ми класифікували їх за основною ідеєю.

Підходи, засновані на ручних правилах

Одним з прикладів підходу, який базується на ручних правилах слів є система iSTART [8]

Вона використовує різноманітні лексичні, синтаксичні та семантичні особливості для ідентифікації парафраз.

Для того визначити структуру парафраза, розглядається декілька підходів їх побудови:

- 1) Синоніми: заміна слів їх синонімами.
- 2) Тип речення: зміна типу речення з активного на пасивний або навпаки.
- 3) Словоформа/частина мови: зміна форми слова в іншу, наприклад змінити іменник на дієслово, прислівник або прикметник.
- 4) Розбиття речення: довге речення розбивається на маленькі.
- 5) Визначення: замінити слово на його визначення.
- 6) Структура речення: зміна структури речення.

В основі алгоритму лежить поняття графів концептів[9]. Для кожного речення будується свій граф і після цього відбувається порівняння графів двох кандидатів.

Процес порівняння полягає в тому, щоб знайти якомога більше збігів між трійками "поняття-відношення-поняття".

Речення перетворюється на граф концептів за допомогою аналізатора Link Grammar [10].

Даний алгоритм було реалізовано і частина з описаних вище структур була використана для визначення парафраз, проте автори не використовували власний корпус даних для аналізу і не опублікували своїх результатів.

Підходи, засновані на лексичній подібності

Хорошим прикладом методу, де поєднана лексична та семантична подібність є система

розроблена Раду Міхалчем та Андраш Чомай [11], яка була опублікована у 2006 році.

У ньому поєднано два різних підходи до вимірювання семантичної подібності між двома частинами тексту: вимірювання на основі корпусу та вимірювання на основі знань. Властивості, засновані на корпусі, покладаються на статистичний аналіз великих текстових корпусів, тоді як властивості, засновані на знаннях, використовують зовнішні ресурси, такі як лексичні бази даних і онтології.

Автори презентують дві характеристики семантичної подібності на основі корпусу, засновані на дистрибутивній подібності та латентному семантичному аналізі.

Однією з них є характеристика PMI-IR. Вона базується на семантичній подібності слів у великому корпусі, була запропонована Терні [12].

$$PMI - IR(w_1, w_2) = \log_2 \frac{p(w_1 \& w_2)}{p(w_1) * p(w_2)}$$

Щоб слова вважалися близькими у корпусі використали вікно довжиною десять слів, як баланс між точністю та продуктивністю.

Також вони вводять шість характеристик, засновані на базі знань WordNet[6]. Наведемо декілька з них:

- Подібність за Лікокам і Ходоровом [13] базується на нормалізованій довжині шляху з урахуванням глибини загальної ієрархії

$$LH(w_1, w_2) = \log_2 \frac{len(w_1, w_2)}{2D},$$

де D – максимальна глибина ієрархії в базі знань.

- Подібність за Ву і Палмером [14] враховує глибину найменшого спільного предка концептів в ієрархії:

$$WP(w_1, w_2) = -\log_2 \frac{depth(LSO(w_1, w_2))}{depth(w_1) + depth(w_2)},$$

де LSO – найменший спільний предок концептів пари слів.

Результати експериментів показують, що властивості як на основі корпусу, так і на основі знань можуть бути ефективними для ідентифікації парафраз.

Автори оцінюють систему використовуючи Microsoft Research Paraphrase Corpus[15]. Результати показують, що даний метод досягає точності 70.3% та F1 81.3 %.

Підходи, засновані на машинному навчанні

Варто зазначити, що більшість підходів так чи інакше використовують різний інструментарій машинного навчання, в цьому розділі ми розглянемо метод, де це є основою алгоритму.

У своїй статті Нітін Маднані та Джоель Тетро [16] пропонують новий підхід до оцінки моделей ідентифікації парафразів. Вони перепрофілюють чинні метрики машинного перекладу. Автори стверджують, що теперішні метрики машинного перекладу, такі як BLEU, METEOR і TER, добре підходять для побудови моделей ідентифікації парафраз.

Розглянемо декілька таких метрик:

1. BLEU [17] одна з найбільш часто використовуваних метрик для оцінки машинного перекладу. Вона базується на кількості однакових n -грам різних довжин у двох реченнях.

$$BLEU(s_1, s_2) = BP(s_1, s_2) \exp \left[\sum_{n=1}^N \frac{1}{N} \log(p_n) \right],$$

$$BP(s_1, s_2) = \exp \left[\min \left[1 - \frac{|s_1|}{|s_2|}, 1 \right] \right],$$

$$p_n = \frac{\sum_{x \in NGram(s_1, n)} count(x, NGram(s_1, n) \cap NGram(s_2, n))}{\sum_{x \in NGram(s_1, n)} count(x, NGram(s_1, n))},$$

$$count(x, S) = |\{el \mid el \in S \ \& \ el = x\}|,$$

N – максимальна довжина n – грами

де BP – коефіцієнт стислості, призначений для штрафування речень, якщо одне коротше за інше.

2. NIST[18] є варіантом BLEU, яка використовує середнє арифметичне кількості однакових n -грам, а не середнє геометричне. Ця метрика також зважає кожен n -грам відповідно до його інформативності, використовуючи її частоту.
3. TER[19] визначається як кількість редагувань, необхідних для того, аби з одного речення зробити інше використовуючи операції вставки, видалення та заміни та зсуву.

Ансамбль декількох класифікаторів використовується для вирішення поставленої задачі. На верхньому рівні – простий мета класифікатор, який використовував результати класифікації декількох інших класифікаторів нижнього рівня: логістичну регресію, метод опорних векторів та класифікатор на основі алгоритму найближчого сусіда [20].

Автори оцінюють систему використовуючи Microsoft Research Paraphrase Corpus [15]. Результати показують, що метод досягає точності 77.4% та F1 84.1%.

Підходи, засновані на глибокому навчанні

Більшість сучасних підходів використовують переваги великих розмічених корпусів даних. Нейронні мережі й трансформери застосовують в якості алгоритмічного фундаменту.

Одним з яскравих представників таких алгоритмів є система Sentence-BERT [21]

У цій статті пропонується новий метод створення високоякісних представлень речень за допомогою сіамської мережі та BERT.

Представлення речення – це вектор фіксованої довжини, який використовується для того, аби описати семантичне значення речення у багатовимірному векторному просторі. Вони застосовуються в різних завданнях обробки природної мови, включаючи ідентифікацію парафразів, класифікацію тексту та пошук інформації.

Автори починають із зауваження, що наявні методи генерації вбудованих речень зазвичай використовують неконтрольовані підходи, такі як усереднення представлення слів та інші. Однак ці методи часто призводять до низькоякісних представлень через природну складність захоплення семантичного значення речення з простого набору слів.

Мережа приймає як вхідні дані два речення та виводить оцінку схожості між ними, яку можна використовувати для створення високоякісних векторів, що будуть описувати речення.

Автори спочатку навчають сіамську мережу BERT на великому наборі даних пар речень, позначених бінарними мітками, використовуючи функцію втрат. Функція втрати мінімізує відстань між парафразами та максимізує відстань між не-парафразами у просторі.

Після навчання Нітін Маднані та Джоель Тетро використовують мережу BERT для створення представлення речень для різноманітних завдань, включаючи ідентифікацію парафразів. Результати показують, що модель Sentence-BERT перевершує чинні найсучасніші методи на більшості контрольних наборів даних.

Корпуси даних

Таблиця 1

Корпуси даних

Назва корпусу	Рік створення	Джерела даних	Розмір
Microsoft Research Paraphrase Corpus [15]	2005	Статті новин, енциклопедій і веб-сторінки	5,801
PPDB [22]	2013	Статті новин, веб-сторінки і державні документи	220,000,000
Sentences Involving Compositional Knowledge [23]	2014	Статті про політику, науку та розваги.	10,000
Пари запитань Quora [24]	2017	Пари запитань з веб-ресурсу	404,289
ParaNMT-50M [25]	2017	Статті новин, веб-сторінки і державні документи	51,409,585

Існує досить багато різних корпусів, які зазвичай використовуються для задачі ідентифікації парафразу. Наведемо деякі з них:

- 1) Microsoft Research Paraphrase Corpus (MSRPC) [15] – це корпус пар речень, для яких вручну зазначили чи є вони парафразами. Долан і Брокетт створили його у Microsoft Research і він став одним із найпоширеніших наборів даних для даної задачі. Корпус містить 5801 пару речень, які взяті з різних джерел, включаючи статті новин, статті в енциклопедіях і веб-сторінки. Щоб забезпечити якість міток, для кожної пари речень використовували кілька анотаторів, а розбіжності вирішувалися більшістю голосів.
- 2) PPDB [22]- це масштабна база даних, з понад 220 мільйонів пар парафраз. Вона містить багато фразових та лексичних парафразів.
- 3) SICK (Sentences Involving Compositional Knowledge) [23] — це корпус для задач семантичної близькості. Він містить 10,000 пар речень політичні, наукові та розважальні теми. Пари були підібрані таким чином, щоб вони мали різний ступінь семантичної спорідненості, починаючи від дуже схожих до зовсім не пов'язаних. Семантичний зв'язок між парами речень оцінюється за безперервною шкалою від 1 (зовсім не пов'язані) до 5 (семантично еквівалентні).

- 4) Пари запитань Quora [24] - це набір даних пар запитань із веб-сайту Quora. Мета набору даних — визначити, чи є два запитання семантично еквівалентними. Питання охоплюють широкий спектр тем, зокрема науку, технології, політику та розваги. Він містить понад 400 000 пар запитань і є одним із найбільших корпусів, доступних для ідентифікації парафраз.
- 5) ParaNMT-50M [25]: це великий корпус паралельних речень із різних джерел. Він містить понад 50 мільйонів пар речень і є одним із найбільших доступних наборів даних. Пари речень у ParaNMT-50M узяті з різних джерел, у тому числі з новинних статей, вебсторінок і державних документів. Корпус згенерований автоматично за допомогою перекладу частини декількох чесько-англійських корпусів.

Вище ми навели корпуси, що найчастіше використовуються для вирішення цієї задачі. Вибір набору даних часто залежить від конкретного завдання та контексту, у якому використовуватиметься модель, а також від обчислювальних потужностей, які є в дослідників.

Список використаних джерел

1. Chatbots in Call Centers [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу:

- <https://aws.amazon.com/chatbots-in-call-centers/>.
2. Cortes C. Support-vector networks / C. Cortes, V. Vapnik. // Mach Learn. – 1995. – №20. – С. 273–297. <https://doi.org/10.1007/BF00994018>
 3. Yin, W., Kann, K., Yu, M., Schutze, H. Comparative Study of CNN and RNN for Natural Language Processing – Режим доступу до статті: <https://arxiv.org/abs/1702.01923>
 4. Devlin J., Chang M.-W., Lee K., Toutanova K. BERT: Pre-training of deep bidirectional transformers for language understanding – Режим доступу до статті: <https://arxiv.org/pdf/1810.04805.pdf>
 5. Radford A., Narasimhan K. Improving Language Understanding by Generative Pre-Training
 6. Fellbaum C. WordNet: An Electronic Lexical Database / Christiane Fellbaum., 1998. – (The MIT Press). <https://doi.org/10.7551/mitpress/7287.001.0001>
 7. Landauer, T., Foltz, P., & Laham, D. An Introduction to Latent Semantic Analysis – Режим доступу до статті: <https://doi.org/10.1080/01638539809545028>
 8. Boonthum, C. iSTART: Paraphrase Recognition – Режим доступу до статті: <https://aclanthology.org/P04-2006.pdf>
 9. Sowa, J. F. Conceptual graphs as a universal knowledge representation – Режим доступу до статті: <https://core.ac.uk/download/pdf/82803127.pdf>
 10. Sleator, D., & Temperley, D. Parsing English with a Link Grammar. – Режим доступу до статті: https://www.researchgate.net/publication/220482445_Parsing_English_with_a_Link_Grammar
 11. Mihalcea, R., Corley, C., & Strapparava, C. Corpus-based and Knowledge-based Measures of Text Semantic Similarity – Режим доступу до статті: <https://cdn.aaai.org/AAAI/2006/AAAI06-123.pdf>
 12. Turney, P. D. Mining the Web for Synonyms: PMI-IR versus LSA on TOEFL – Режим доступу до статті: <https://arxiv.org/abs/cs/0212033>
 13. Leacock, C., Chodorow, M., & Miller, G. A. Using Corpus Statistics and WordNet Relations for Sense Identification – Режим доступу до статті: <https://aclanthology.org/J98-1006>
 14. Wu Z. and Palmer M. Verb semantics and lexical selection // 32nd Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics. – New Mexico State University, Las Cruces, New Mexico. – 1994. – С. 133 – 138.
 15. Dolan, B., Quirk, C., & Brockett, C. Unsupervised Construction of Large Paraphrase Corpora: Exploiting Massively Parallel News Sources – Режим доступу до статті: <https://aclanthology.org/C04-1051.pdf>
 16. Madnani, N., Tetreault, J., & Chodorow, M. Re-examining Machine Translation Metrics for Paraphrase Identification – Режим доступу до статті: <https://aclanthology.org/N12-1019.pdf>
 17. Papineni K., Roukos S., Ward T., Zhu W. BLEU: a Method for Automatic Evaluation of Machine Translation – Режим доступу до статті: <https://www.aclweb.org/anthology/P02-1040.pdf>
 18. Doddington G. Automatic Evaluation of Machine Translation Quality using N-gram Co-occurrence Statistics / Doddington. // Proceedings of the second international conference on Human Language Technology Research. – 2002. – С. 138–145.
 19. Snover, M., Dorr, B., Schwartz, R., Micciulla, L., & Makhoul, J. A Study of Translation Edit Rate with Targeted Human Annotation – Режим доступу до статті: <https://aclanthology.org/2006.amta-papers.25>
 20. Aha, D. W., Kibler, D., & Albert, M. K. Instance-based learning algorithms – Режим доступу до статті: https://www.researchgate.net/publication/220343419_Instance-Based_Learning_Algorithms
 21. Reimers, N., & Gurevych, I. Sentence-BERT: Sentence Embeddings using Siamese BERT – Режим доступу до статті: <https://aclanthology.org/D19-1410.pdf>
 22. Ganitkevitch, J., Van Durme, B., & Callison-Burch, C. PPDB: The Paraphrase Database – Режим доступу до статті: <https://aclanthology.org/N13-1092.pdf>
 23. Marelli, M., Bentivogli, L., Baroni, M., Bernardi, R., Menini, S., & Zamparelli, R. SemEval-2014 Task 1: Evaluation of Compositional Distributional Semantic Models on Full Sentences through Semantic Relatedness and Textual Entailment – Режим

доступу до статті:
<https://aclanthology.org/S14-2001.pdf>

24. Quora Duplicate Questions | Kaggle [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://www.kaggle.com/aymenmouelhi/quora-duplicate-questions>
25. Wieting, J., & Gimpel, K. ParaNMT-50M: Pushing the Limits of Paraphrastic Sentence Embeddings with Millions of Machine Translations – Режим доступу до статті: <https://aclanthology.org/P18-1042.pdf>

References

1. AMAZON WEB SERVICES, INC. (2019). Chatbots in Call Centers – Amazon Web Services (AWS). [online] Available at: <https://aws.amazon.com/chatbots-in-call-centers/>.
2. CORTES, C. and VAPNIK V. (1995). Support-vector networks. *Machine learning*, 20(3), pp.273–297.
3. YIN, W., KANN, K., YU, M., & SCHÜTZE, H. (2017). Comparative Study of CNN and RNN for Natural Language Processing.
4. DEVLIN, J., CHANG, M.-W., LEE, K., & TOUTANOVA, K. (2018). BERT: Pre-training of Deep Bidirectional Transformers for Language Understanding. *arXiv*. <https://doi.org/10.48550/ARXIV.1810.04805>
5. RADFORD, A., & NARASIMHAN, K. (2018). Improving Language Understanding by Generative Pre-Training.
6. FELLBAUM, C. (1998). WordNet. An Electronic Lexical Database.
7. LANDAUER, T., FOLTZ, P., & LAHAM, D. (1998). An Introduction to Latent Semantic Analysis. *Discourse Processes*, 25, 259–284. <https://doi.org/10.1080/01638539809545028>
8. BOONTHUM, C. (2004). iSTART: Paraphrase Recognition. *Proceedings of the ACL Student Research Workshop*, 31–36. <https://aclanthology.org/P04-2006>
9. SOWA, J. F. (1992). Conceptual graphs as a universal knowledge representation. *Computers & Mathematics with Applications*, 23(2), 75–93.
10. SLEATOR, D., & TEMPERLEY, D. (1995). Parsing English with a Link Grammar. *CoRR*, abs/cmp-lg/9508004.
11. MIHALCEA, R., CORLEY, C., & STRAPPARAVA, C. (2006). Corpus-based and Knowledge-based Measures of Text Semantic Similarity. *Proceedings of the National Conference on Artificial Intelligence*, 1.
12. TURNEY, P. D. (2001). Mining the Web for Synonyms: PMI-IR versus LSA on TOEFL. *Proceedings of the 12th European Conference on Machine Learning*, 491–502.
13. LEACOCK, C., CHODOROW, M., & MILLER, G. A. (1998). Using Corpus Statistics and WordNet Relations for Sense Identification. *Computational Linguistics*, 24(1), 147–165. <https://aclanthology.org/J98-1006>
14. WU, Z., & PALMER, M. (1994). Verb Semantics and Lexical Selection. *32nd Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics*, 133–138. <https://doi.org/10.3115/981732.981751>
15. DOLAN, B., QUIRK, C., & BROCKETT, C. (2004). Unsupervised Construction of Large Paraphrase Corpora: Exploiting Massively Parallel News Sources. *COLING 2004: Proceedings of the 20th International Conference on Computational Linguistics*, 350–356. <https://aclanthology.org/C04-1051>
16. MADNANI, N., TETREAU, J., & CHODOROW, M. (2012). Re-examining Machine Translation Metrics for Paraphrase Identification. *Proceedings of the 2012 Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics: Human Language Technologies*, 182–190. <https://aclanthology.org/N12-1019>
17. PAPINENI, K., ROUKOS, S., WARD, T., & ZHU, W.-J. (2002). Bleu: a Method for Automatic Evaluation of Machine Translation. *Proceedings of the 40th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics*, 311–318. <https://doi.org/10.3115/1073083.1073135>
18. DODDINGTON, G. R. (2002). Automatic evaluation of machine translation quality using n-gram co-occurrence statistics.
19. SNOVER, M., DORR, B., SCHWARTZ, R., MICCIULLA, L., & MAKHOUL, J. (2006). A Study of Translation Edit Rate with Targeted Human Annotation. *Proceedings of the 7th Conference of the Association for Machine Translation in the Americas: Technical Papers*, 223–231. <https://aclanthology.org/2006.amta-papers.25>
20. AHA, D. W., KIBLER, D., & ALBERT, M. K. (1991). Instance-based learning algorithms. *Machine Learning*, 6(1), 37–66.

21. REIMERS, N., & GUREVYCH, I. (2019). Sentence-BERT: Sentence Embeddings using Siamese BERT-Networks. Proceedings of the 2019 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing and the 9th International Joint Conference on Natural Language Processing (EMNLP-IJCNLP), 3982–3992. <https://doi.org/10.18653/v1/D19-1410>
22. GANITKEVITCH, J., VAN DURME, B., & CALLISON-BURCH, C. (2013). PPDB: The Paraphrase Database. Proceedings of the 2013 Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics: Human Language Technologies, 758–764. <https://aclanthology.org/N13-1092>
23. MARELLI, M., BENTIVOGLI, L., BARONI, M., BERNARDI, R., MENINI, S., & ZAMPARELLI, R. (2014). SemEval-2014 Task 1: Evaluation of Compositional Distributional Semantic Models on Full Sentences through Semantic Relatedness and Textual Entailment. Proceedings of the 8th International Workshop on Semantic Evaluation (SemEval 2014), 1–8. <https://doi.org/10.3115/v1/S14-2001>
24. KAGGLE. (2017) Quora Duplicate Questions [Online] – Available from: <https://www.kaggle.com/aymenmouelhi/quora-duplicate-questions>.
25. WIETING, J., & GIMPEL, K. (2018). ParaNMT-50M: Pushing the Limits of Paraphrastic Sentence Embeddings with Millions of Machine Translations. Proceedings of the 56th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics (Volume 1: Long Papers), 451–462. <https://doi.org/10.18653/v1/P18-1042>

Надійшла до редколегії 15.04.2023

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/1.11>

Зуєв А.М.¹, аспірант

Anton Zuiev¹, postgraduate

Пошук рядка в тексті.

Exact pattern matching.

Актуальні досягнення та дослідження

Current achievements and research.

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глу-
шкова 4д,
e-mail: ant0n3uev@gmail.com

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, 4d Glushkova str.,
e-mail: ant0n3uev@gmail.com

Задача пошуку рядка в тексті є дуже важливою задачею програмування. На різних алгоритмах розв'язання даної задачі базуються пошукові системи, системи контролю версій, текстові редактори, аналізатори ДНК та багато інших систем. Дана робота розглядає, не претендуючи на повноту, набір алгоритмів що є актуальними для розв'язання цієї задачі для різної специфіки вхідних даних та пояснює закономірності у зміні швидкостей роботи алгоритмів в залежності від специфіки вхідних даних.

Ключові слова: пошук підрядка в рядку, точний пошук підрядка в рядку, алгоритми на рядках, обробка текстів.

The problem of exact pattern matching is an essential programming problem. Different algorithms that solve this problem are core elements of search engines, version control systems, text editors, DNA analyzers, and many others. For simplification reasons articles usually denote pattern as P or p and pattern length as M or m . Similarly, the text is usually denoted as T or t and its length - N or n . Alphabet is denoted Σ and its length - $|\Sigma|$. Based on these notations the problem of pattern matching can be written as follows:

Find all positions/ amount of i , such that $P[0...m] = T[i...i + m]$, or: Find all positions i in text for which substring starting at position i of the text of length m is equal to the pattern.

The main parameters of this problem are pattern length and alphabet size. The length of the text usually doesn't matter because, for any long enough text of a specific structure, the run time of the algorithm per character will be close to constant. Besides that, the specifics of the input data and text may also impact the performances of the algorithms. All of that makes the problem both very nuanced and interesting to investigate. This problem features a lot of different existing solutions developed over the course of the last 5 decades. The main part of the work provides short descriptions and analyses of a set of algorithms that are still relevant in the field. Besides that, some remarks are made on the topic of their theoretical regions of efficiency and how they depend on the specifics of the input. The results of the practical experimentation on the variety of randomly generated test data are provided. The conclusion provides some analysis of the received results and algorithms' class efficiency based on the input as well as a visual representation of the received results in a form of a table representing the most efficient algorithm for each pair of pattern length and alphabet size.

Key Words: pattern matching, exact pattern matching, string algorithms, text processing.

Сімейство алгоритмів пошуку підрядка в рядку з використанням суміжних вікон пошуку

Дана робота демонструє алгоритм MAW22, що базується на наступній ідеї використання декількох суміжних вікон пошуку які зміщуються одночасно доки одне з них не досягне потенційної точки збігу. Це дозволяє трохи оптимізувати час роботи, адже кожна ітерація циклу є досить затратною, а використання декількох вікон пошуку дозволяє зменшити кількість ітера-

цій (приблизно) у стільки разів, скільки вікон пошуку використано. Використання суміжних вікон дозволяє уникнути суттєвих ускладнень логіки усередині циклу, але натомість створює необхідність конструювання загальної таблиці зсувів. Розмір цієї таблиці складатиме $|\Sigma|w * l$, де $|\Sigma|$ - розмір алфавіту, w - кількістю суміжних вікон, l - довжина кожного з вікон. На жаль, збільшення будь-якого з параметрів призводитиме до суттєвого збільшення у споживанні пам'яті що, своєю чергою сповільнюватиме пошук. Результати, продемонстровані у ро-

боті показують високу ефективність алгоритму MAW22 (2 вікна пошуку, 2 символи для кожного з вікон) для алфавітів розміром 4-8 та довжин патернів 3-72. Дана робота є демонстрацією використання специфіки вхідних даних для отримання кращого для них алгоритму. Крім цього, робота демонструє метод для отримання стиснутої таблиці зсувів що дозволить використання даного підходу до алфавітів більшого розміру (алгоритм MAWP22).

Швидкий пошук підрядка в рядку з використанням бітового представлення символів

У цій статті обговорюються алгоритми, що базуються на ідеї пошуку максимального можливого зсуву для заданого вікна пошуку. Дослідження зосереджується на наступних методах покращення продуктивності: 1. Використання 1,5-байтового зчитування замість 1-байтового або 2-байтового зчитування 2. Використання прапорця наявності зсуву замість довжини зсуву 3. Мультивіконний пошук Перший метод передбачає модифікацію таблиці зсуву, що використовується в алгоритмі, яка визначає, наскільки далеко зсунути патерн у разі невідповідності з текстом. Пропонується використовувати 1,5-байтове зчитування, де два послідовні байти тексту використовуються для обчислення зсуву. Цей підхід більш ефективний, ніж використання 1-байтового зчитування, коли шаблон довгий і 1-байтовий зсув недостатній, але потребує менше пам'яті, ніж використання 2-байтового зчитування, при цьому втрата довжини зсуву є порівняно невеликою. Використовуючи бітову маску, 1,5-байтове читання може досягти продуктивності, подібної до 2-байтового читання, з меншим використанням пам'яті (що також може позитивно вплинути на швидкість виконання). Другий метод полягає в тому, щоб використати так званий "fast loop". Виконувати порівняння патерну з вікном пошуку необхідно лише у випадку якщо виконується деяка попередня передумова (для даних алгоритмів це збіг деякої кількості символів патерну з відповідними символами в тексті). У іншому випадку необхідності заходити у цикл порівняння немає. Також, замість того щоб зберігати довжину зсуву для кожної позиції буде зберігатися лише факт можливості зсуву на максимальну довжину. У випадку, коли часто мо-

жливність зсуву означає можливість максимального зсуву дана методика дозволить прискорити виконання алгоритму. Можна піти далі, та після перевірки можливості зсуву у позиції і також перевірити можливості зсуву у позиції (i-1). Така перевірка значно збільшує ймовірністю виконати зсув на максимальну довжину навіть у випадках якщо перша перевірка мала негативний результат. Третій метод використовує той факт що цикли є найбільш повільною частиною програми та намагається мінімізувати кількість їх запусків. Для цього замість пошуку однієї позиції для збігу шукається одразу декілька. Текст розбивається на декілька шматків, традиційно рівної довжини. Після цього, по кожному з цих шматків рухається вказівник, який перевіряє на потенціал збігу (використовуючи оптимізації з методів 1 та 2). Якщо хоч одна з позицій є позицією потенційного збігу то для усіх позицій будуть виконані додаткові перевірки, після чого рух усіх вікон пошуку відновлюється. Даний підхід приводить до отримання алгоритму RZk. Також наявна можливість виконувати перегляд тексту з кінця в початок що дозволяє дещо змінити імплементацію та отримати алгоритм Zk. У роботі представлені експериментальні результати (у тому числі для багатовіконних версій алгоритмів), що демонструють ефективність розроблених алгоритмів на випадкових шаблонах і текстах різного розміру. Вони показують що сукупність методів представлених у роботі разом утворюють досить ефективний алгоритм для специфічної області даних. Також, оскільки розроблений алгоритм оперує на нецілій кількості біт, його також природно застосувати до задачі пошуку підрядка в рядку для якої розмір символу алфавіту виражається кількістю біт не кратною 8. Дана область є порівняно малодослідженою, утім результати, показані у роботі суттєво перевищують у швидкості інші наявні підходи. Також робота розглядає алгоритм Bricks-wq, що використовує ідею побітового суміщення декількох останніх символів патерну, суміщення декількох останніх символів тексту та їх подальше порівняння для знаходження можливості зсуву. Даний алгоритм є ефективним у випадку, коли ймовірність зсуву по одному символу досить низька - а саме для малих алфавітів.

Бітопаралельні алгоритми пошуку для довгих патернів

Як зрозуміло з назви, робота присвячена розробці алгоритмів для довгих патернів. У роботі продемонстровано 3 різних алгоритми. BXS - BNDMq з розширеними зсувами (BNDMq with eXtended Shift). Патерн поділяється на $\lceil \frac{m}{w'} \rceil$ послідовних шматків, кожен з них довжини w' (крім, можливо, останнього). Після цього шматки накладаються одне на одного для отримання одного модифікованого (у роботі використовується термін “накладений”) патерну довжини w' . При порівнянні модифікованого патерну з текстом збіг з символом будь-якого зі шматків, що утворюють модифікований патерн вважається збігом з відповідним символом модифікованого патерну. Далі відбувається ініціалізація масиву B таким же чином як і у BNDM, але для модифікованого патерну. А от при підрахунку D буде відбуватися циклічний зсув замість звичайного зсуву у BNDM. Це, з одного боку зменшить необхідну кількість біт для зберігання D, а з іншого призведе до потреби додавати додаткову перевірку чи не було уже пройдено m символів тексту. Утім практичні результати його використання є досить гарними. BQL Довгий BNDMq (BNDMq Long). BQL збільшує ефективний розмір алфавіту, використовуючи q-грами, що перекриваються, наприклад, при використанні 3-грамового патерну «ACCTGGT» обробляється як «ACC-CCCTG-TGG-GGT». Таким чином, ми ефективно шукаємо патерн із $m - q + 1$ q-грам, що перекриваються. Подібно до BXS ми поділяємо шаблон q-грами на $\lceil \frac{m-q+1}{w'} \rceil$ частин і накладаємо їх один на одного. Потім вектор B ініціалізуються для шаблону накладеної q-грами за принципами як у BNDM. На етапі пошуку ми використовуємо модифікацію Simplified BNDM, яка дозволяє нам завжди зрушувати на $m - q + 1$, але все ще використовувати лише w' біт для бітових векторів B і D. Ми розбиваємо текст на неперекриваючісь вікна пошуку довжиною $m - q + 1$ і в кожному вікні ми виконуємо BNDM справа наліво. Щоразу, коли встановлено старший біт у D, ми перевіряємо всі можливі зсуви на збіг шаблону з текстом. Коли вектор D стає нульовим, ми завжди зсуваємо на $m - q + 1$. QF - Алгоритм фільтрування q-грам. m. На етапі препроцесингу для кожної фази i , $0 \leq i < q$, ми зберігаємо які q-грами входять до патерну у тій фазі, тобто починаються у позиції $i + jq$ для деякого j . Для зберігання цієї інформації вектор B буде

ініціалізовано для кожної з q-грам, i-тий біт буде рівний 1 якщо q-грама є у патерні в фазі i . Під час пошуку ми читаємо послідовні q-грами у вікні пошуку та відстежуємо активні фази, тобто таких фаз, для яких усі зчитані q-грами знаходяться в патерні у цій фазі.

Швидкий пошук збігів на основі фільтра з використанням інструкцій SIMD

Дана робота присвячена використанню інструкцій SIMD для розробки алгоритму SSEF. Ці інструкції дозволяють виконувати декілька однакових операцій виконавши лише одну процесорну операцію. Робота фокусується на довгих патернах $m \geq 32$. Для них виконуються операції над 16 байтними числами, кожне з яких відповідатиме 16 символам з патерну або тексту. Спочатку для патерну відбувається передпідрахунок на базі послідовних 16 символів патерну. Після цього відбувається фаза пошуку у тексті, яка дозволяє виконати швидку перевірку на збіг для заданої позиції (насправді для множини послідовних позицій) тексту та зсунутися на довжину патерну. На машинах що підтримують вищезгадані інструкції даний алгоритм і справді показує себе у вищому степені ефективно.

Швидкий алгоритм пошуку підрядка в рядку (на основі хешування)

Ідея нового алгоритму полягає в розгляді підрядків довжини q . Підрядки такої довжини хешується за допомогою функції h для значень $0 \leq c \leq 255$. Етап передобробки цього алгоритму полягає в обчисленні зсуву для усіх можливих рядків довжини q .

$$\text{shift}[c] = \begin{cases} m - 1 - i & \text{with } i = \max\{0 \leq j \leq m - q + 1 \mid \\ & h(x[j..j + q - 1]) = c\} \\ m - q & \text{якщо таке } i \text{ не існує.} \end{cases} \quad (1)$$

Фаза пошуку алгоритму полягає в читанні підрядків довжини q . Якщо $\text{shift}[h(B)] > 0$ тоді застосовується зсув довжини $\text{shift}[h(B)]$. Якщо $\text{shift}[h(B)] = 0$ то перевіряється збіг шаблону з підрядком, починаючи з даної позиції в тексті. У цьому випадку застосовується зсув

стандартної довжини, що базується на хеші патерну. Даний алгоритм дозволяє експериментувати з різними довжинами рядків для хешування. Дана робота показує як застосування хешування може бути ефективним для невеликих патернів та розмірів алфавіту. Пошук підрядка з поглядом вперед Forward-SBNDM — це варіант алгоритму BNDM для розв'язання задачі пошуку підрядка в рядку. Forward-SBNDM перевіряє 2-грами в тексті так, що перший символ є останнім у вікні пошуку, а другий знаходиться одразу за вікном. У роботі [6] представлено узагальнення цього підходу, що полягає у перевірці кількох символів одразу за межами вікна пошуку. Крім того, у роботі представлено жадібний цикл пропуску для SBNDM2, що дозволяє виконати стрибки на відстань до $2m$. Параметер q та кількість символів за межами вікна пошуку створюють 2 можливих параметри для пошуку оптимальної конфігурації алгоритму. У роботі ці імплементації показано у форматі FSB(q, f), де q - параметр аналогічний BNDM $_q$, а f - кількість символів. В результаті отримано кілька нових варіацій SBNDM $_q$.

Ефективні варіанти алгоритму зворотного пошуку з Оракулом - EBOM, FBOM

Ідея швидкого циклу була описана для алгоритму [1]. Швидкий цикл, який було використано у цій роботі було вперше представлено в алгоритмі Tuned-Boyer-Moore та зазвичай використовується у варіаціях алгоритму Босера-Мура. Зазвичай швидкий цикл реалізується шляхом ітерації за евристикою поганого символу в циклі без інших перевірок для того, щоб швидко знайти позицію найправішого символу патерну у тексті. Робота пропонує застосувати ідею швидкого циклу до автоматних переходів. Це полягає у зсуві патерну вздовж тексту без додаткових перевірок доки не знайдено визначений перехід з останнього символу вікна пошуку. Запропонована варіація алгоритму намагається виконати два послідовні переходи для кожної ітерації швидкого циклу з метою знайти з більшою ймовірністю невизначений перехід. Це дозволяє отримати алгоритм EBOM. Крім цього алгоритм використовує наступне спостереження: коли під час порівняння шаблону зустрічається символ, що не відповідає символу з поточного вікна пошуку у тексті

$t[s..s+m-1]$ шаблон завжди зсувається вправо принаймні на один символ, але ніколи не більше ніж на m символів. Таким чином, символ $t[s+m]$ завжди бере участь обрахунку наступного потенційного вікна пошуку. Таким чином символ що іде одразу після вікна пошуку також можна подавати на вхід автомата, виконавши деякі попередні модифікації його конструювання. Це, разом із попереднім спостереженням дозволяє отримати алгоритм FBOM.

Альтернативні методи бітопаралельного пошуку підрядка в рядку

Дана робота розглядає варіації алгоритму BNDM. Окрім TNDM, у роботі розглянуто три варіанти BNDM. Перший з алгоритмів є двосторонньою модифікацією BNDM. Його назва TNDM. Якщо символ тексту, вирівняний з кінцем шаблону не є збігом, BNDM сканує текст у зворотному напрямку на наявність незбігу в іншому місці шаблону. У цьому випадку TNDM зможе продовжити сканування вперед, тобто продовжуватиме перевірку тексту після вирівнювання. Другий з них має простіше обчислення зсуву, ніж BNDM. Цей алгоритм називається SBNDM. У SBNDM у випадку збігу зсув виконується як у BNDM. Але якщо $T_h T_i$ не з'являються в патерні, ми пропускаємо перевірку префіксів і встановлюємо $h+1$ як початок наступного вікна пошуку. Це зменшує середню довжину зсуву, але з іншого боку внутрішній цикл алгоритму стає простішим. Надані у роботі експерименти показують, що даний підхід справді є пришвидшенням порівняно з BNDM у більшості випадків. Третій пропонує техніку, для покращення швидкості роботи на довгих патернах. Цей алгоритм називається Long BNDM або LBNDM. LBNDM здатен робити довгі зсуви. Шаблон розділено на $\lfloor \frac{m}{k} \rfloor$ послідовних частин, кожна з яких складається з $k = \lfloor \frac{m-1}{w} \rfloor + 1$ символів. Залишкові символи залишаються на початку патерну. Цей поділ передбачає k підпослідовностей шаблону, у i -тий з яких входить i -й символ кожної частини. Ідея полягає в тому, щоб спочатку шукати накладений шаблон цих послідовностей, щоб перевіряти лише кожен k -й символ. Це фаза фільтрації виконується за стандартним алгоритмом BNDM. Кожен випадок збігу модифікованого шаблону є потенційним збігом з оригінальним шаблоном та потребує додаткової перевірки.

Швидкий пошук підрядка в рядку з використанням двох вікон пошуку

TSW являє собою один з перших та базових алгоритмів паралельного пошуку. Сама назва TSW - two sliding windows, гарно репрезентує, що його ідея базується на використанні двох вікон пошуку. Одне з вікон встановлюється на початку патерну, а інше в кінці, після чого обидва вікна рухаються до середини патерну та перевіряють на збіг. Ліве вікно перевіряє наявність збігу справа наліво, праве - зліва направо. Таким чином після знаходження частково або повного збігу виконується зсув та продовжується процес зсування вікон пошуку доки вони не зустрінуться. Цей алгоритм є досить простим, утім навіть зараз він здатний показувати пристойні результати.

Ефективний пошук підрядка в бінарному рядку

У цій статті розглядається задача пошуку підрядка в рядку, коли обидва рядки побудовані над двійковим алфавітом, і кожен символ патерну та тексту представлено 1 бітом. Таким чином простір, необхідний для представлення патерну та тексту, становить відповідно $\lceil \frac{n}{8} \rceil$ та $\lceil \frac{m}{8} \rceil$ байт. Ідея алгоритму q-Hash полягає у врахуванні підрядків патерну довжини q . Кожен підрядок w такої довжини q хешується за допомогою хеш-функції у ціле значення в межах від 0 до 255. Фаза пошуку алгоритму складається з читання для кожної позиції вікна пошуку s підрядка $w = t[s + m - q..s + m - 1]$ довжини q . Якщо $H_s(\text{hash}(w)) > 0$, тоді застосовується зсув довжини $H_s(\text{hash}(w))$. Інакше коли $H_s(\text{hash}(w)) = 0$ виконується перевірка на входження патерну в текст. У цьому випадку застосовується зсув довжини $(m - 1 - i)$, де i - початкова позиція крайнього правого входження $p[j..j + q - 1]$ в патерн, для якого такого, що $\text{hash}(p[j..j + q - 1]) = \text{hash}(p[m - q + 1..m - 1])$.

Експериментальні результати

Тут наведено результати тестування більшості розглянутих алгоритмів на локальній машині. Також, багато алгоритмів мають різні версії, у цьому випадку було вибрано одну з них для репрезентації загальної поведінки алгоритму. Генерація даних для експерименту відбувалася наступним чином - генерується текст та патерн з використанням псевдовипадкових чи-

сел, після цього до тексту 10 разів додається входження патерну у випадкову позицію та після кожного з додавань запускається кожен алгоритм пошуку. Наведені результати - середній час виконання у процесорних тіках з використанням функції QueryPerformanceCounter. Розмір тексту 500 000 символів. OS Windows 10. Процесор AMD Ryzen 5 5600H.

Табл. 1: $|\Sigma| = 2$

algo	2	4	8	16	32	64	128	256	512
MAW22	1643.7	1568.6	1568.27	1147.6	1632.27	1317.27	1273.2	1259.53	1306.27
Bricks43		901.13	851.67	712.67	920.2	923.53	1176.8	1036.67	1034.33
qf33		1254.07	1645.67	1476.27	3278.53	3734.13	6547.4	10703.5	19649.7
bxs4		913.67	668.33	404.33	205.13	253.8	674.73	67088	219410
hash3		1372.8	665.6	451.73	424.53	357.73	416.4	390.2	450.47
hash8			2595.13	296.93	109.53	51.47	27.73	23.33	44.47
fsbndmq41		875.2	662	376.8	192.6	193.13	197.33	195.8	205.07
fsbndmq61			350.33	195.07	139.87	149.67	153.07	139.87	164.93
ebom	1350	1433.07	1282.73	695.93	400.73	225.47	128.6	77.07	48.53
sbndm2	1316.0	1269	882.2	426.33	206.27	191.87	197.93	195.53	202.33
tsw	1157.2	1303.53	1431.4	1018	1269.27	1389.47	1144.67	1484.33	1367.4
z13-w5	878.53	1545.13	1635.13	1851.67	2336.13	2147.67	2314.4	2431.8	2029.67

Табл. 2: $|\Sigma| = 4$

algo	2	4	8	16	32	64	128	256	512
MAW22	1914	511.13	311.2	218.13	181.47	170.8	195.13	170.13	161
Bricks43		287.4	142.93	118.33	123.07	100.13	110.53	282.27	504.27
qf33		356.6	156.73	107.33	109.27	84.4	133.6	4839.73	18388.8
bxs4		568	123.73	62.47	41	86.07	71.4	137.27	588.6
hash3		1152.33	418.87	213.33	155.47	117.73	108	103.8	111.13
hash8			2602.4	294.8	112.07	52.33	27.53	21.33	22.2
fsbndmq41		355.6	117.67	64.2	41.93	41.47	42.27	41.53	43.53
fsbndmq61			181.47	61.47	28.67	28.87	28.87	29.47	30.4
ebom	519.87	485.73	445.8	283.93	168.07	95.07	57.93	34	23.27
sbndm2	552.53	471.6	405.8	219.07	115.27	109.13	108.87	112.93	110.67
tsw	1036.4	786.2	497.33	329.13	276.2	210.8	216.93	188.2	213.53
z13-w5	460.93	471.67	401.4	353.27	309.53	395.13	514.4	637.53	586

Табл. 3: $|\Sigma| = 8$

algo	2	4	8	16	32	64	128	256	512
Bricks43		160.07	59.87	33.2	21.27	16.93	14.8	15.47	16.47
qf33		161	62.67	30.27	19.47	15.53	12.67	13.27	10.53
bxs4		473.8	94.87	38.67	18.73	17.2	36.6	35.8	71
hash3		1018.53	348.6	171.33	95.07	65.33	50.8	46.27	41.53
hash8			2538.93	294	109.67	53.13	27.07	21.6	20.07
fsbndmq41		251.93	84.07	37.13	19.67	19.53	19.27	19.13	19.07
fsbndmq61			175.67	60.07	27.33	27.87	26.47	27.2	27
ebom	334.47	161.47	111.67	84.4	72.53	47.8	25.07	18.13	13.67
sbndm2	331.2	164.13	110.8	85.67	66.93	70.67	72.47	66.93	69.2
tsw	574.13	383.53	225.53	133.33	80.27	49.47	35.6	32.4	29.47
z13-w5	228.33	152.8	123.67	99.13	100.53	85.93	66.8	107.93	160.27

Табл. 4: $|\Sigma| = 16$

algo	2	4	8	16	32	64	128	256	512
Bricks43		150.13	51.13	23.8	11.6	7.67	5.53	3.67	3.13
qf33		159.93	62.27	29.87	18.67	14.73	11.53	11.33	9.87
bxs4		476.4	95.53	36.4	16.8	9	9.07	17	16.73
fsbndmq41		249.73	82.27	35.33	17	17	17	17.27	17.6
fsbndmq61			179.33	60.07	26.13	26.53	26.6	26.6	26.87
ebom	276.8	104.47	55.87	34.53	24.53	18	15.93	12.6	11.07
sbndm2	276.2	104.6	55.27	34.47	24.13	25.6	25.27	25.47	25.8
tsw	393.8	261.73	157.6	90.2	49.4	27.6	16.13	12.07	11.2
z13-w5	168.27	70.73	42.13	31.8	25.67	21.47	23.2	21.53	19.53

Табл. 5: $|\Sigma| = 32$

algo	2	4	8	16	32	64	128	256	512
qf33		153.47	60	31.4	18.2	13.4	10.6	10.87	10.27
bxs4		468.93	94	37	16.87	9.27	6	4.67	3.73
fsbndmq41		242.53	81.07	36.13	17	17	17.13	19.73	18.33
fsbndmq61			177.13	60.2	26.8	27	27.33	30.4	27.8
ebom	269.13	90.4	39.4	20	12.6	9.07	8.47	7.6	10.07
sbndm2	256.4	85.07	37.4	18.27	9.8	10.07	10.6	12.87	11.4
tsw	369.4	245.73	147.93	84.73	45.67	24.07	13	11.33	6.4
z13-w5	152.47	55.4	28.87	14.8	9.6	7.27	6.73	6.13	7

Табл. 6: $|\Sigma| = 64$

algo	2	4	8	16	32	64	128	256	512
qf33		154.13	73.73	29.33	18.6	13.53	11.07	12.33	8.67
bxs4		476.93	108.73	36.47	17.4	9.13	6.2	4.13	3.4
fsbndmq41		249.33	94.4	35.2	17	17.13	17.2	18.33	18.6
fsbndmq61			202.8	59.6	26.93	27.13	27	28	28.07
ebom	267.53	88.67	49.2	20.6	12.6	10.53	8.6	7.2	11.4
sbndm2	257.47	85.93	42.33	17.27	9.2	11.07	10.07	10.4	10.73
tsw	382.2	254.27	164.93	86.8	47.87	26.67	15.2	12.87	9.07
z13-w5	151.8	53.6	24	12.2	7.6	5.67	4.6	4.33	3.47

Табл. 7: $|\Sigma| = 128$

algo	2	4	8	16	32	64	128	256	512
qf33		158.27	60.8	29.8	17.87	13.67	11.47	10	10.8
bxs4		482.93	93.33	37.13	16.73	9.13	6.73	4.47	3.67
fsbndmq41		251.4	80.8	35.07	17.87	17	17.87	17.8	22.6
fsbndmq61			176.47	60.67	26.93	27.2	29.47	27.73	32.53
ebom	265.07	91.47	45.13	19.13	12.6	9.53	8.73	7.8	13.4
sbndm2	252.87	86.93	37.4	18.2	9.13	9.93	10.73	10.33	15.07
tsw	380.33	258.73	151.4	88.27	47.93	28.2	16.27	12.93	9.93
z13-w5	159.07	55	25	12.87	8	5.33	5.87	2.53	2.33

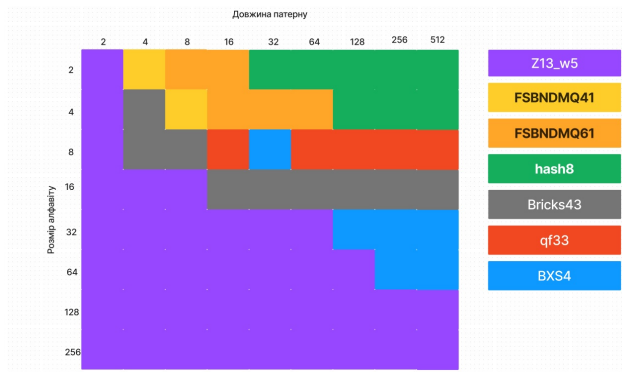
Табл. 8: $|\Sigma| = 256$

algo	2	4	8	16	32	64	128	256	512
qf33		154.47	57.93	30.27	19.47	14.27	18.4	19.53	10.53
bxs4		476.53	94.6	38.6	18.13	10.13	15	8.47	3.73
fsbndmq41		248.47	82.2	35.13	17.47	17.4	22.87	28.13	20.53
fsbndmq61			180.4	62.2	27.87	27.47	36	36	29.6
ebom	272.13	91.8	43.8	23.27	16.6	13	16.33	15.47	15.47
sbndm2	252.6	86.53	37.2	17.67	10.47	11.6	16.6	20.73	14.47
tsw	567.53	385.4	240.13	139.87	90.53	50.4	27.47	37.2	13
z13-w5	153	51.73	22.33	11	6.33	5.07	3.73	2.07	1.6

Висновок

Нижче наведено візуальну репрезентацію найкращих результатів на базі отриманих результатів. Варто зазначити, що список алгоритмів розглянутих у роботі є далеко не вичерпним, у порівнянні брали участь далеко не всі версії алгоритмів та результати можуть залежати від специфіки методів генерації вхідних даних. Для початку варто зазначити, що алгоритми дуже ефективні для патернів довжини 2 не були включені у порівняння тому для цієї довжини результати не є актуальними та включені виключно для ілюстративності. Утім, навіть даний результат дозволяє помітити певні тенденції залежності типу ефективних алгоритмів від параметрів вхідних даних. Правий верхній кут - довгий патерн короткий текст є зоною де домінують алгоритми на базі хешування, адже вони за даних умов по суті дозволяють виконувати зсуви суттєвої довжини, адже збіг хешів за даних умов порівняно мало ймовірний за відсутності збігу відповідних множин символів. У регіоні середньо-коротких патернів та малих алфавітів домінують похідні алгоритми FSBNDM, адже вони дозволяють ефективно виконувати декілька порівнянь одночасно, які у випадку інших алгоритмів доводилося б

порівнювати окремими операціями. Збільшуючи розміри текстів та довжини патернів ефективність множинного порівняння дещо знижується та алгоритми що використовують для початкового порівняння деяку функцію від підрядка патерну та відповідного підрядка тексту стають значно ефективнішими. У даній роботі це qf33, BXS4, Bricks43. Усі вищеперераховані алгоритми займають шматок нижче головної діагоналі. Для випадків коли розмір алфавіту є досить суттєвим та перевищує розмір патерну ефективність зсуву по множині символів майже не перевищує ефективності зсуву виконаного за одним символом, але витрачає більше часу на порівняння. Тому дану зону займатимуть алгоритми що ефективно комбінують підходи зсуву за одним символом та кілька вікон пошуку. У нашому випадку даним алгоритмом є розглянутий у роботі z13-w5.



Список використаних джерел

1. Zavadskyi, I.O. A family of exact pattern matching algorithms with multiple adjacent search windows. Proceedings of the Prague Stringology Conference, p.152–166. J. Holub and J. Zdarek, Eds. Czech Technical University in Prague, Czech Republic (2017)
2. Zavadskyi, I.O. Fast Exact Pattern Matching by the Means of a Character Bit Representation. SN Computer Science. 3. Springer (2022)
3. Durian, B., Peltola, H., Salmela, L., Tarhio, J. Bit-parallel search algorithms for long patterns. 9th International Symposium on Experimental Algorithms. Ischia Island, Naples, Italy., pp. 129–140. Springer (2010)
4. Kulekci, M. Filter based fast matching of long patterns by using simd instructions. Proceedings of the Prague Stringology Conference, pp. 118–128. J. Holub and J. Zdarek, Eds. Czech Technical University in Prague, Czech Republic (2009)
5. Lecroq, T. Fast exact string matching algorithms. Information Processing Letters 102(6), 229–235 (2007)
6. Peltola, H., Tarhio, J. String matching with lookahead. Discrete Applied Mathematics 163, 352–360 (2014)
7. Faro, S., Lecroq, T. Efficient variants of the backward-oracle-matching algorithm. Proceedings of the Prague Stringology Conference, pp. 146–160. J. Holub and J. Zdarek, Eds. Czech Technical University in Prague, Czech Republic (2008). DOI 10.1142/S0129054109006991

8. Peltola, H., Tarhio, J. Alternative algorithms for bit-parallel string matching. pp.80–94 (2003)
9. Hudaib, A., Al-khalid, R., Suleiman, D., Itriq, M.A.A., Al-Anani, A. A fast pattern matching algorithm with two sliding windows (tsw). Journal of Computer Science 4(5), 393–401. DOI 10.3844/jcssp.2008.393.401
10. Faro, S., Lecroq, T. Efficient pattern matching on binary strings. 35th International Conference on Current Trends in Theory and Practice of Computer Science, p. Poster (2009)
11. Zavadskyi, I.O. Fast exact pattern matching in a bitstream and 256-ary strings

References

1. ZAVADSKYI, I.O. A family of exact pattern matching algorithms with multiple adjacent search windows. Proceedings of the Prague Stringology Conference, p.152–166. J. Holub and J. Zdarek, Eds. Czech Technical University in Prague, Czech Republic (2017)
2. ZAVADSKYI, I.O. Fast exact pattern matching by the means of a character bit representation SN Computer Science. 3. Springer (2022)
3. DURIAN, B., PELTOLA, H., SALMELA, L., TARHIO, J. Bit-parallel search algorithms for long patterns. 9th International Symposium on Experimental Algorithms. Ischia Island, Naples, Italy., pp. 129–140. Springer (2010)
4. KULEKCI, M. Filter based fast matching of long patterns by using simd instructions. Proceedings of the Prague Stringology Conference, pp. 118–128. J. Holub and J. Zdarek, Eds. Czech Technical University in Prague, Czech Republic (2009)
5. LECROQ, T. Fast exact string matching algorithms. Information Processing Letters 102(6), 229–235 (2007)
6. PELTOLA, H., TARHIO, J. String matching with lookahead. Discrete Applied Mathematics 163, 352–360 (2014)

7. FARO, S., LECROQ, T. *Efficient variants of the backward-oracle-matching algorithm*. Proceedings of the Prague Stringology Conference, pp. 146–160. J. Holub and J. Zdarek, Eds. Czech Technical University in Prague, Czech Republic (2008). DOI 10.1142/S0129054109006991
8. PELTOLA, H., TARHIO, J. *Alternative algorithms for bit-parallel string matching*. pp.80–94 (2003)
9. HUDAIB, A., AL-KHALID, R., SULEIMAN, D., ITRIQ, M.A.A., AL-ANANI, A. *A fast pattern matching algorithm with two sliding windows (tsw)*. Journal of Computer Science 4(5), 393–401. DOI 10.3844/jcssp.2008.393.401
10. FARO, S., LECROQ, T. *Efficient pattern matching on binary strings*. 35th International Conference on Current Trends in Theory and Practice of Computer Science, p. Poster (2009)
11. ZAVADSKYI, I.O. *Fast exact pattern matching in a bitstream and 256-ary strings*

Надійшла до редколегії 29.01.2023

УДК 519.9

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/1.12>

Ліпський Д. О.¹

Розробка платформи для автоматизації тестування веб-додатків

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: lipsky@knu.ua

D. O. Lipskyi¹

Development of a Web Application Testing Automation Platform

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: lipsky@knu.ua

У сучасному швидкому світі розробки веб-технологій, автоматизоване тестування веб-додатків стає невід'ємною частиною процесу розробки програмного забезпечення. Ця стаття пропонує опис платформи для автоматизації тестування веб-додатків, яка спрощує процес створення, виконання та аналізу автоматизованих тестів.

Одним з основних компонентів цієї платформи є модуль взаємодії з веб-додатком, який надає зручний спосіб контролювати браузер та виконувати дії на веб-сторінках, такі як навігація, заповнення форм, клікання на елементи, тощо. Це дозволяє автоматизовано перевіряти різні аспекти функціональності та коректності веб-додатків.

Другим важливим компонентом є модуль звітності, який забезпечує збір та збереження результатів тестування. Він дозволяє створювати детальні звіти про виконані тести, виявлені помилки та іншу корисну інформацію. Цей модуль допомагає зрозуміти стан програмного забезпечення, сприяє виявленню його проблем та полегшує відтворення помилок.

Третій модуль для створення тестових даних, який може бути корисним для генерації випадкових даних, завантаження тестових наборів з бази даних або зовнішніх файлів. Це дозволяє розробникам створювати різноманітні сценарії тестування та виконувати їх на різних наборах даних.

Однією з ключових переваг розглянутої платформи є можливість налаштовувати параметри тестування для різних проектів та середовищ. Розробники можуть встановлювати різні налаштування, такі як типи браузерів, версії, розширення, утиліти, що використовуються, для кожного окремого проекту. Це дозволяє підлаштувати тестування під конкретні потреби та забезпечити максимальну сумісність.

Також платформа містить додаткові утиліти для полегшення процесу тестування, такі як інтеграція з системами збереження коду, засобами контролю версій, засобами автоматизації збірки та розгортання. Це сприяє швидкому та ефективному виконанню тестів, спрощує їх інтеграцію в процес розробки та забезпечує покращення загальної якості програмного забезпечення.

Платформа автоматизації тестування веб-додатків надає розробникам зручні інструменти, що спрощують процес тестування, забезпечують високу якість програмного забезпечення та сприяють швидкому впровадженню веб-додатків.

Ключові слова: автоматизація, веб-технології, платформа, тестування.

In the modern fast-paced world of web development, automated testing of web applications has become an integral part of the software development process. This article provides an overview of a platform for automating web application testing, which simplifies the process of creating, executing, and analyzing automated tests. The main components of the platform, their functional capabilities, and advantages are discussed.

One of the key components of this platform is a module for interacting with the web application, which provides a convenient way to control the browser and perform actions on web pages, such as navigation, form filling, clicking on elements, and more. This enables automated verification of various aspects of web application functionality and correctness.

Another important component is the reporting module, which ensures the collection and storage of test results. It allows for the creation of detailed reports on executed tests, identified errors, and other useful information. This module helps understand the state of the software, facilitates the detection of issues, and simplifies error reproduction.

The platform also includes a module for creating test data, which can be useful for generating random data, loading test datasets from databases or external files. This allows developers to create various testing scenarios and execute them on different data sets.

One of the key advantages of this platform is the ability to configure testing parameters for different projects and environments. Developers can set different configurations, such as browser types, versions, extensions, and utilities used, for each individual project. This allows for customization of testing according to specific needs and ensures maximum compatibility.

The platform also provides additional utilities to facilitate the testing process, such as integration with code repositories, version control systems, build automation, and deployment tools. This contributes to fast and efficient test execution, simplifies their integration into the development process, and improves overall software quality.

Overall, this web application testing automation platform provides developers with convenient tools that simplify the testing process, ensure high-quality software, and facilitate the rapid deployment of web applications.

Key Words: automating, web technologies, platform, testing.

Вступ

Сучасний розвиток веб-технологій призводить до появи все складніших веб-додатків, що вимагають швидкої доставки на ринок. Однак, разом зі зростанням складності додатків з'являються виклики щодо забезпечення їх якості та надійності. Тестування є одним з основних компонентів циклу розробки програмного забезпечення. Точність та ефективність процесу тестування стають критичними для успішної розробки програмного забезпечення.

Автоматизація тестування веб-додатків виявляється ключовим рішенням для забезпечення якості продукту та прискорення процесу його розробки. Вона дозволяє розробникам ефективно перевіряти функціональність, стабільність та взаємодію веб-додатків з різними компонентами та середовищами.

Автоматизація тестування веб-додатків має кілька переваг. По-перше, вона забезпечує прискорення та підвищення продуктивності процесу тестування. Замість ручного виконання тестів, розробники можуть використовувати автоматизовані скрипти, які виконуються швидше та більш точно. Це дозволяє виявити помилки та проблеми швидше, що сприяє збільшенню швидкості розробки та доставки продукту на ринок.

По-друге, автоматизація тестування дозволяє знизити витрати на тестування. Вона допомагає заощаджувати час та зусилля розробників, оскільки багато рутинних тестових сценаріїв можуть бути автоматизовані. Це дозволяє звільнити ресурси та перерозподілити їх на більш складні аспекти тестування, такі як тестування безпеки, взаємодії з користувачами та інтеграцію з іншими системами.

Крім того, автоматизоване тестування забезпечує більшу точність результатів, оскільки воно усуває людський фактор та помилки, пов'язані з недосконалістю ручного тестування. Автоматичні скрипти можуть виконувати однакові тестові сценарії з однаковою послідовністю кроків, що забезпечує більш стабільні та надійні результати.

Отже, автоматизація тестування веб-додатків є необхідним етапом розробки програмного забезпечення в сучасному світі. Вона дозволяє забезпечити якісну перевірку функціональності та стабільності додатків, знизити витрати та забезпечити більшу точність результатів. У даній статті буде представлено розробку платформи для автоматизації тестування веб-додатків, що спрощує процес створення, виконання та аналізу автоматизованих тестів. Будуть

описані основні компоненти платформи, їх функціональні можливості та переваги.

Методологія

Для розробки створеної платформи використано відомі інструменти, такі як Selenium, Specflow та NUnit. Ця платформа розроблена з урахуванням модульної архітектури, що надає можливість додавати нові компоненти та розширювати функціонал системи.

Одним із ключових інструментів, використаних у розробці платформи, є Selenium, Specflow та NUnit. Selenium - це відкрите програмне забезпечення, яке дозволяє автоматизувати веб-браузер та виконувати дії, які зазвичай виконує користувач. За допомогою Selenium можна створювати тестові сценарії, які взаємодіють з елементами веб-сторінок, виконують різні дії та перевіряють очікувані результати.

Фреймворк Specflow - це інструмент для тестування, який дозволяє описувати поведінку програми в природній мові, такий як англійська. Він базується на методології Behavior Driven Development (BDD) і дозволяє описувати вимоги та сценарії тестування у форматі, зрозумілому не тільки розробникам, але й бізнес-аналітикам та іншим учасникам проекту. Specflow інтегрується з Selenium, що дозволяє створювати тестові сценарії, які легко зрозуміти та підтримувати.

NUnit - це популярний фреймворк для тестування в програмній мові .NET. Він надає зручні механізми для створення, виконання та аналізу автоматизованих тестів. NUnit дозволяє структурувати тестові сценарії, групувати їх та виконувати з різними конфігураціями.

Використання NUnit у поєднанні з Selenium та Specflow надає потужні засоби для створення та управління автоматизованими тестами веб-додатків.

Платформа для автоматизації тестування веб-додатків, що розглядається в даній статті, має модульну архітектуру, що дозволяє розширювати її функціонал. Це означає, що можна додавати нові компоненти та інтегрувати їх з існуючими, щоб розширити можливості платформи. Наприклад, можна додати компонент для генерації звітів про результати тестування або для автоматичного виконання тестів у хмарних середовищах.

Такий підхід дозволяє побудувати гнучку та розширювану систему для автоматизованого тестування веб-додатків.

У наступних розділах статті будуть детально описані основні компоненти платформи для автоматизації тестування веб-додатків, їх функціональні можливості та переваги. Також будуть надані переваги застосування платформи з використанням Selenium, Specflow та NUnit для створення та виконання автоматизованих тестів веб-додатків.

Основні компоненти платформи

Основні компоненти платформи для автоматизації тестування веб-додатків включають наступні модулі:

1. Модуль Base. Цей компонент є фундаментом платформи і надає базові функціональні можливості для розробки автоматизованих тестів. Він включає загальні класи та функції, які використовуються в інших компонентах. Модуль Base також відповідає за управління конфігурацією платформи та завантаження необхідних ресурсів.
2. Модуль Config. Цей компонент дозволяє налаштовувати поведінку платформи шляхом конфігурації різних параметрів. Він забезпечує можливість задавати налаштування, такі як URL веб-додатку, облікові дані для входу, параметри браузера тощо. Модуль Config дозволяє зручно керувати конфігурацією тестів і забезпечує гнучкість при роботі з різними середовищами.
3. Модуль Helpers. Цей компонент використовується для генерації звітностей про виконання тестування, роботи з базами даних та API. Він надає зручні функції для створення звітів з результатами тестування, що дозволяє аналізувати та відстежувати прогрес тестування. Крім того, модуль Helpers забезпечує можливість взаємодії з базами даних та виконання API-запитів, що робить його важливим компонентом для взаємодії з різними джерелами даних.
4. Модуль Extensions. Цей компонент надає функціонал для роботи зі складними елементами веб-сторінок. Він включає розширені методи та класи, які дозволяють взаємодіяти зі складними елементами,

такими як таблиці, фрейми, вкладки, модальні вікна тощо. Модуль Extensions полегшує роботу зі складними веб-елементами та надає більш гнучкий інструментарій для тестування веб-додатків.

Ці компоненти взаємодіють між собою, створюючи потужну платформу для автоматизації тестування веб-додатків. Вони спрощують розробку тестів, забезпечують гнучкість та розширюваність, а також допомагають підвищити якість та продуктивність процесу тестування.

Переваги платформи

Переваги платформи для автоматизації тестування веб-додатків:

1. Інтеграція з іншими інструментами. Платформа для автоматизації тестування веб-додатків може бути легко інтегрована з іншими інструментами розробки, такими як системи контролю версій, засоби неперервної інтеграції та постачання програмного забезпечення (CI/CD), що забезпечує плавний та автоматизований процес розробки, тестування та впровадження веб-додатків.
2. Підтримка регресійного тестування. Автоматизовані тести можуть бути легко виконані для перевірки регресії, тобто виявлення впроваджених помилок після внесення змін у веб-додаток. Це дозволяє швидко виявляти та виправляти помилки, які можуть з'явитися при розширенні функціональності чи вносі змін у додаток.
3. Масштабованість. Платформа для автоматизації тестування веб-додатків забезпечує можливість масштабувати тести для великих та складних проєктів. Вона дозволяє ефективно виконувати тести навіть у великих масштабах і забезпечує стабільність та швидкість виконання навіть при значній кількості тестів.
4. Підтримка паралельного виконання. Платформа дозволяє виконувати тести паралельно на різних пристроях, браузерах чи операційних системах. Це дозволяє прискорити процес тестування і отримати результати швидше, що особливо важливо для веб-додатків, які мають багатофункціональний характер і підтримують різні платформи.

5. Покращення співпраці між командами. Платформа дозволяє розробникам і тестувальникам працювати в спільному середовищі, спрощуючи комунікацію і спільне вирішення проблем. Вона надає зручні засоби для обміну даними, спільного доступу до результатів тестування та співпраці над виявленням та виправленням помилок.
6. Усі ці переваги платформи для автоматизації тестування веб-додатків допомагають покращити ефективність, якість та продуктивність процесу тестування, а також зменшити ризик помилок та витрат на ручне тестування. Вона стає незамінним інструментом для розробників та тестувальників, які прагнуть забезпечити високу якість своїх веб-додатків.

Висновки

Значення розробленої платформи для автоматизації тестування полягає у підвищенні якості, продуктивності та надійності процесу розробки. Застосування автоматизації тестування має багато переваг, які роблять цей підхід незамінним у сучасних умовах розвитку технологій.

Однією з основних переваг платформи для автоматизації тестування є зниження витрат на ручне тестування. Автоматизовані тести дозволяють ефективно виконувати тести, що зменшує необхідний час і зусилля, і в результаті забезпечує економію ресурсів компанії.

Підвищення ефективності тестування є ще однією значною перевагою автоматизації. Завдяки автоматичному виконанню тестів можна швидше та точніше виявляти помилки та недоліки, що допомагає забезпечити високу якість веб-додатків.

Більше покриття тестами є іншою вагомою перевагою платформи для автоматизації тестування. Автоматизовані тести можуть бути виконані на великій кількості конфігурацій браузерів, операційних систем і пристроїв, що дозволяє забезпечити широке покриття тестами і переконатися, що веб-додаток працює на різних платформах коректно.

Ще одним важливим аспектом є збільшення швидкості тестування. Автоматизація дозволяє виконувати тести

швидше, порівняно з ручним тестуванням, завдяки можливості паралельного виконання тестів. Це дозволяє отримувати швидкі результати тестування і прискорює процес розробки веб-додатків.

Точність тестування також покращується завдяки автоматизованим тестам. Вони виконуються з високою ефективністю і повторюваністю, що допомагає виявити та виправити потенційні проблеми швидше. Це дозволяє покращити якість веб-додатків і забезпечити задекларовану функціональність.

Нарешті, платформа для автоматизації тестування веб-додатків надає зручний механізм управління тестами. Вона забезпечує зручне управління тестовими сценаріями, запуском, моніторингом і збереженням

результатів. Це дозволяє команді розробників та тестувальників ефективно організувати процес тестування і забезпечити легке відстеження прогресу тестування.

Отже, розробка платформи для автоматизації тестування веб-додатків полегшує розробку програмного забезпечення. Вона допомагає підвищити якість, продуктивність та ефективність процесу тестування, а також знизити витрати на ручне тестування. Для подальшого розвитку платформи можуть бути проведені роботи, спрямовані на розширення її функціоналу, враховуючи нові технологічні вимоги та інструменти для автоматизації тестування.

Список використаних джерел

1. Гундеча У. "Selenium WebDriver 3 Practical Guide: Практичний посібник з автоматизації тестування веб- та мобільних браузерів з використанням Selenium WebDriver, 2-ге видання".
2. Альбахарі Д., Альбахарі Б. "C# 7.0 in a Nutshell: Повна довідка з C# 7.0".
3. Нагі Г., Роуз С. "SpecFlow: Автоматизоване тестування для .NET".
4. Гарг Н. "Test Automation using Selenium WebDriver with Java: Посібник крок за кроком з автоматизації тестування за допомогою Selenium WebDriver з використанням Java".
5. Коллін М. "Mastering Selenium WebDriver 3.0: Підвищення продуктивності та надійності автоматизованих перевірок шляхом володіння Selenium WebDriver, 2-ге видання".

References

1. GUNDECHA, U. "Selenium WebDriver 3 Practical Guide: Практичний посібник з автоматизації тестування веб- та мобільних браузерів з використанням Selenium WebDriver, 2-ге видання".
2. ALBAHARI, J., and ALBAHARI, B. "C# 7.0 in a Nutshell: Повна довідка з C# 7.0".
3. NAGY, G., and ROSE, S. "SpecFlow: Автоматизоване тестування для .NET".
4. GARG, N. "Test Automation using Selenium WebDriver with Java: Посібник крок за кроком з автоматизації тестування за допомогою Selenium WebDriver з використанням Java".
5. COLLIN, M. "Mastering Selenium WebDriver 3.0: Підвищення продуктивності та надійності автоматизованих перевірок шляхом володіння Selenium WebDriver, 2-ге видання".

Надійшла до редколегії 28.04.23

УДК 004.4, 004.6, 004.7, 510.6

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/1.13>

О. П. Ількун, аспірант

Вебзастосунки як один із сучасних способів реалізації систем підтримки прийняття рішень

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03022, м. Київ,
пр-т. Академіка Глушкова 4д,
e-mail: alexander.ilkun@gmail.com

O. P. Ilkun, PhD student

Web applications as one of the modern ways of implementing decision support systems

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03022, Kyiv,
4D, Academician Glushkov ave.,
e-mail: alexander.ilkun@gmail.com

Системи прийняття рішень мають широкий діапазон застосувань у різних сферах, включаючи, але не обмежуючись, комерційну діяльність, медичинські установи, освітні заклади, наукові дослідження, інженерію, а також урядові установи. Ці системи підтримують ефективну обробку інформації з різноманітних джерел, використовуючи множинну методологічних підходів, що включає статистичний аналіз, аналіз даних, методи машинного навчання, оптимізацію та багато інших.

З огляду на вищезазначені особливості, виникає важливе питання розробки ефективних систем прийняття рішень, які відповідали б потребам сучасних організацій. Ця стаття розглядає актуальні підходи до розробки програмного забезпечення, в тому числі аналізує потенційну архітектуру для реалізації системи прийняття рішень, орієнтованої на діагностику пацієнтів з використанням нечіткої логіки.

Ключові слова: системи прийняття рішень, нечітка логіка, архітектура вебзастосунків, моделювання баз даних.

Decision support systems have a wide range of applications in various fields, including but not limited to commercial activities, medical institutions, educational institutions, scientific research, engineering, and government agencies. These systems support efficient processing of information from various sources using a variety of methodological approaches, including statistical analysis, data analysis, machine learning methods, optimization, and many others.

In view of the above-mentioned features, there is an important issue of developing effective decision support systems that would meet the needs of modern organizations. This article reviews current approaches to software development, including analyzing a potential architecture for implementing a decision support system focused on patient diagnosis using fuzzy logic.

Key Words: decision support systems, fuzzy logic, web application architecture, database modeling.

Вступ

В сучасному глобалізованому світі, де інформація є важливим активом, системи прийняття рішень відіграють критичну роль [1]. Ці системи допомагають в управлінні, аналізі та інтерпретації великих обсягів даних, що сприяє кращому розумінню бізнес-процесів та підвищенню ефективності управління.

Системи прийняття рішень використовуються в різних галузях діяльності, включаючи бізнес, медицину, освіту, науку, інженерію та урядові структури. Вони забезпечують обробку інформації з різних джерел і можуть використовувати різноманітні методики, включаю-

чи статистичний аналіз, аналіз даних, машинне навчання, оптимізацію та інше.

Постає питання побудови ефективних систем прийняття рішень, що відповідають потребам сучасних організацій. В рамках статті проаналізовані сучасні підходи до розробки програмних застосунків, розглядається можлива архітектура реалізації системи прийняття рішень для діагностики захворювань пацієнтів [2] з використанням нечіткої логіки [3].

Огляд основних класів програмного забезпечення

До основних класів сучасного програмного

забезпечення можна віднести десктопні та веборієнтовані програми. Розглянемо кожен з цих класів програм окремо.

Десктопні програми - це програми, які розробляються для встановлення та використання на локальному комп'ютері або ноутбукі, що працює під операційною системою, такою як Windows, MacOS чи Linux. Класичний приклад десктопної програми - текстовий редактор, який дозволяє створювати та редагувати документи, що зберігаються на локальному диску. Інші приклади десктопних програм включають графічні редактори, програми для обробки відео та звуку, браузері, клієнти електронної пошти, різноманітні ігри, програми для налаштування системи, тощо.

Основна перевага десктопних програм полягає в тому, що вони працюють безпосередньо на комп'ютері, що дає можливість отримати більшу продуктивність та функціональність, ніж в вебпрограмах. Крім того, десктопні програми можуть працювати в автономному режимі, не потребуючи постійного з'єднання з Інтернетом, що робить їх більш зручними для користувачів, які працюють у зоні з обмеженим доступом до Інтернету або у віддалених місцях.

Однак десктопні програми мають свої недоліки, зокрема вони потребують встановлення та налаштування на кожному комп'ютері, на якому вони повинні працювати. Крім того, вони не можуть бути використані на інших пристроях без встановлення на кожному з них, що робить їх менш зручними для користувачів, які працюють з різних місць.

Вебзастосунки - це клас програмного забезпечення, які використовують вебтехнології для забезпечення доступу до різних функцій через браузер. Вони можуть бути доступні як локально на сервері, так і в мережі Інтернет.

Основні компоненти вебсистем включають вебсервер, базу даних та фронтенд. Вебсервер відповідає за обробку запитів від клієнтів та відправку відповіді. База даних використовується для зберігання даних, які використовуються в системі. Фронтенд - це один із можливих інтерфейсів користувача, який відображається в браузері та дозволяє користувачам взаємодіяти з системою. Крім інтерфейсу в браузері, універсальні протоколи передачі даних дозволяють реалізовувати клієнтську частину на широкому колі пристроїв - від звичайних

комп'ютерів та смартфонів до вбудованих систем або суперкомп'ютерів.

Однією з головних переваг створення вебсистем є їх доступність з будь-якого місця, де є Інтернет-з'єднання. Користувач може отримати доступ до вебсистеми зі свого персонального пристрою. В цьому випадку не потрібно встановлювати окремі додатки на кожен пристрій, що значно спрощує процес розгортання та підтримки системи.

Іншою важливою перевагою є можливість оновлення системи з використанням централізованих серверів. Користувачам не потрібно завантажувати нову версію системи на свій комп'ютер, оскільки оновлення відбуваються на сервері. Це зменшує ризик помилок та вразливостей, що можуть виникнути при локальному оновленні десктопної програми.

Також вебсистеми зазвичай мають більш простий інтерфейс, який дозволяє користувачам легко розуміти та використовувати систему без необхідності вивчення складних інструкцій. Більш того, вебсистеми можуть бути більш гнучкими та модульними, що дозволяє змінювати функціональність та додавати нові можливості в систему без необхідності встановлення нових версій на локальні комп'ютери.

Нарешті, створення вебсистем може бути більш ефективним з точки зору вартості, оскільки вони можуть бути створені з використанням відкритих технологій та безкоштовних програмних засобів. Це може знизити вартість розробки та підтримки системи, зокрема у порівнянні з десктопними додатками, які часто потребують дорогих ліцензій на програмне забезпечення та обладнання.

Отже, створення вебсистем має багато переваг порівняно з десктопними додатками. Вебсистеми є більш доступними, оскільки вони можуть бути запуснені на будь-якому пристрої з доступом до Інтернету. Крім того, вебсистеми можуть бути оновлені централізовано на сервері, тим самим зменшуючи зусилля з оновлення на кожному пристрої окремо.

Крім того, вебсистеми є більш зручними і ефективним способом для створення програмного забезпечення, оскільки вони дозволяють знизити витрати на розробку, зберігання та підтримку програмного забезпечення. Відтак, вебсистеми стають все більш популярними у сучасному світі, де швидкість і доступність є ключовими факторами успіху.

човими факторами успіху.

Таким чином, найкращим класом, для реалізації сучасної програмної системи для підтримки прийняття рішень є вебсистема.

Вимоги до сучасних вебсистем

Сучасні вебсистеми мають високі апаратні та програмні вимоги, щоб відповідати вимогам користувачів. Для успішної роботи вебсистеми необхідне забезпечення достатньої швидкодії, безпеки, надійності та масштабованості.

Перш за все, необхідність масштабованості приводить до вимог до серверного обладнання, яке повинно забезпечувати високу продуктивність та надійність. Вебсистема повинна бути здатна працювати з великою кількістю користувачів та обробляти великі обсяги даних. Тому, серверне обладнання повинно мати достатньо ресурсів для забезпечення продуктивності та можливості масштабування.

Друге, вимога до безпеки системи є дуже важливою, оскільки вебсистеми можуть зберігати велику кількість конфіденційної інформації, такої як особисті дані користувачів, банківські реквізити, інформацію про платежі тощо. Для забезпечення безпеки, вебсистема повинна мати вбудовану систему безпеки, яка забезпечує шифрування та автентифікацію користувачів, перевірку прав доступу, захист від атак та вірусів.

Третє, вимога до швидкодії вебсистеми є важливою, оскільки користувачі очікують, що система буде працювати швидко та ефективно. Швидкодія вебсистеми залежить від багатьох чинників, таких як швидкість серверного обладнання, кількість запитів до бази даних, оптимізація коду програмного забезпечення тощо.

Існує безліч високорівневих архітектур для вебзастосунків. До найбільш відомого типу можна віднести трирівневу архітектуру [4].

В рамках статті розглянемо розширену архітектуру програмного забезпечення вебзастосунку, яка враховує вимоги масштабованості, швидкодії та безпеки в контексті наступних основних рівнів:

- 1) Рівень інфраструктури
- 2) Презентаційний рівень
- 3) Рівень бізнес-логіки
- 4) Рівень моніторингу

5) Рівень зберігання даних

Рівень інфраструктури - це основа, на якій працює вся вебсистема. Він включає всі аспекти фізичної та віртуальної інфраструктури, необхідні для підтримки роботи вебсистеми.

Фізична інфраструктура може бути розміщена у власному дата-центрі або може бути орендована від постачальників хмарних сервісів. У сенсі управління інфраструктурою також потрібно чітко відрізнити *внутрішню інфраструктуру*, яка знаходиться у зоні відповідальності команди розробників, і *зовнішню інфраструктуру*, за яку відповідає зовнішній постачальник. Окремим важливим компонентом зовнішньої інфраструктури є так звана *мережа розповсюдження контенту*, що має на меті оптимізацію доправлення та розповсюдження відповідей вебзастосунку.

В якості конкретних технологій для реалізації інфраструктурного рівня для системи діагностики пацієнтів пропонується використовувати Hetzner Cloud [5], Kubernetes [6] та Cloudflare [7].

Презентаційний рівень - це перший рівень архітектури, з яким безпосередньо взаємодіє користувач. Його головною метою є надання користувачам зрозумілого, ефективного та приємного інтерфейсу для взаємодії з системою. Презентаційний рівень включає в себе елементи дизайну інтерфейсу, технології фронтенду та процеси, що забезпечують відображення даних та збір вводу від користувача.

До основних модулів презентаційного рівня відносяться *шлюз API*, що зв'яже кінцевих клієнтів з набором внутрішніх сервісів, а також *фронтенд сервіс*, який виконує логіку інтерфейсної частини вебзастосунку у браузері.

З метою побудови презентаційного рівня для системи діагностики стану здоров'я пацієнтів, пропонується використати такі технології як SvelteKit [8] та Spring Cloud Gateway [9].

Рівень бізнес-логіки - це серце будь-якої вебсистеми. Цей рівень містить в собі код, який виконує ключові функції системи, обробляє вхідні дані від презентаційного рівня та взаємодіє з рівнем зберігання даних для зберігання та отримання інформації.

Основними модулями рівня бізнес-логіки є *сервіс предметної області*, що оперує сутностями та функціоналом деякої предметної області

(в нашому випадку системою діагностики захворювань), а також *сервіс підтримки прийняття рішень*, який здійснює обчислення результату відповідно до деякої математичної моделі (у нашому випадку це нечітка логіка).

Для гарантування і виконання основних вимог системи діагностики пацієнтів пропонується застосувати технології та супутні бібліотеки мов програмування Java [10] та Python [11].

Рівень моніторингу - це критичний компонент архітектури будь-якої вебсистеми, який дозволяє командам відстежувати роботу системи в реальному часі та виявляти проблеми ще до того, як вони вплинуть на користувачів. Він також допомагає аналізувати ефективність системи та планувати майбутнє масштабування.

Рівень моніторингу складається з трьох основних модулів: *сервіс логування*, який дозволяє агрегувати та здійснювати пошук логів, *збірник метрик*, що допомагає відстежувати основні показники та стан процесів, та *ві-*

зуалізатор метрик, який спрощує обробку та сприйняття ключових метрик системи.

Для впровадження ефективного рівня моніторингу нашої системи пропонується використати наступні технології - ELK Stack [13], Prometheus [11] та Grafana [14].

Рівень зберігання даних - це надважливий компонент архітектури будь-якої вебсистеми. Цей рівень відповідає за зберігання, відновлення та управління даними, які використовуються системою. Надамо загальний опис спільних модулів цього рівня, який притаманний більшості систем.

При побудові високопродуктивної бази даних має сенс використовувати схему з *головним вузлом*, який може здійснювати будь-які операції на базі даних, та *вузлом читання*, який оптимізований для операцій отримання інформації. Пропонується використати PostgreSQL [15].

Схематично всі рівні вебзастосунку можна представити діаграмою на Рис. 1.

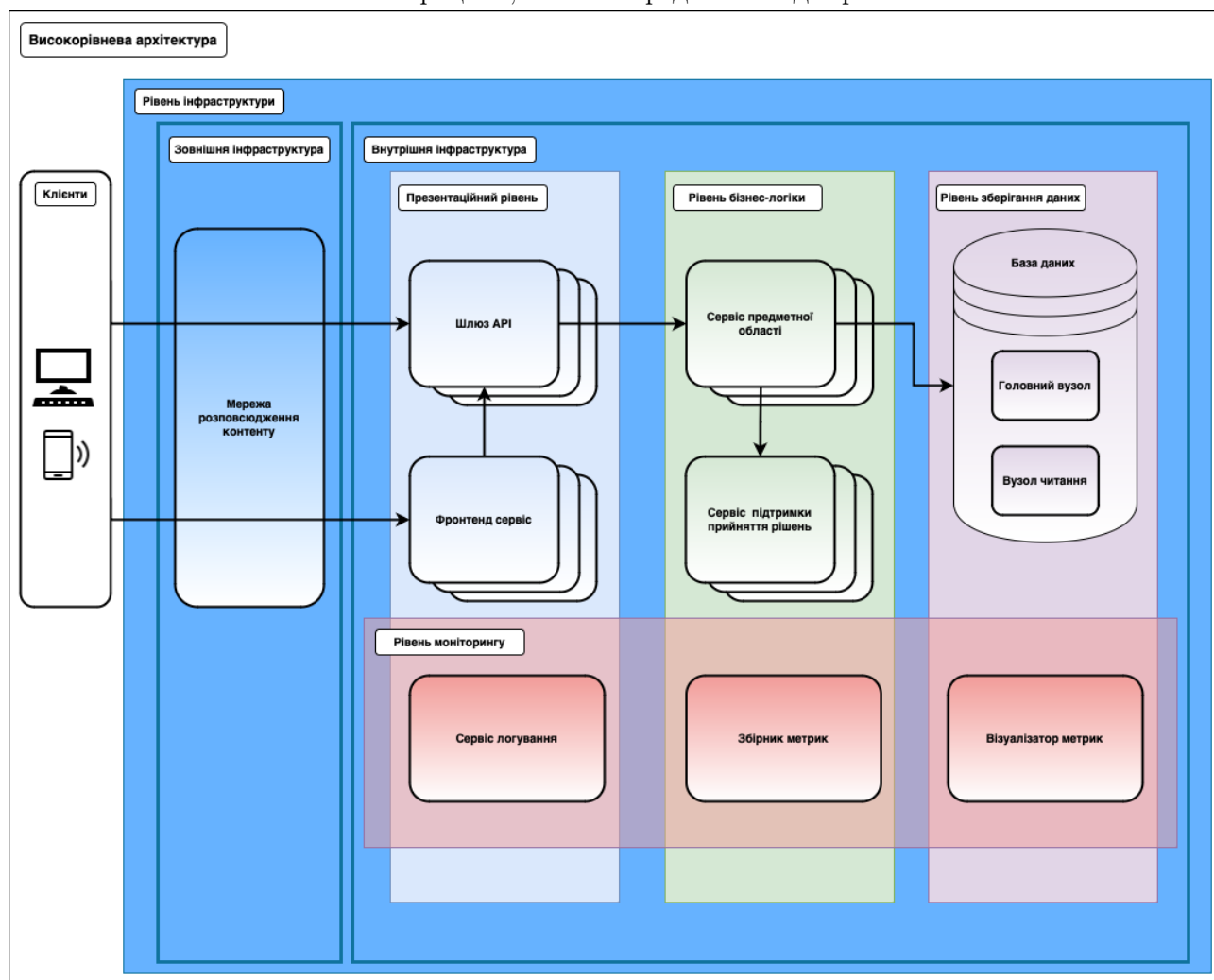


Рис. 1: Високорівнева архітектура вебзастосунку для системи підтримки прийняття рішень

Моделювання рівня зберігання даних відповідно до предметної області

Необхідно зазначити, що моделювання даних має суттєво предметно-орієнтований характер. Концептуальні сутності, які репрезентують структуру даних, які обробляються системою, суттєво залежать від специфіки предметної області та цілей самої системи.

Важливо підкреслити, що кількість, типи та взаємозв'язки сутностей предметної області можуть значно відрізнятись, коли ми переходимо від одного проекту до іншого. Це робить моделювання даних складним адаптивним про-

цесом, який вимагає глибокого розуміння предметної області та потреб користувачів.

Беручи до уваги конкретні вимоги до системи діагностики медичних станів пацієнтів, пропонується наступна схема даних, представлена на Рис. 2.

Ця схема була розроблена з урахуванням унікальних потреб цієї системи, зокрема потреби в ефективній організації та обробці великих обсягів медичних даних. Вона відображає ключові сутності та їх взаємозв'язки в контексті цієї системи, забезпечуючи таким чином спрощення процесу обробки даних та підвищення загальної ефективності системи.



Рис. 2: База даних для системи діагностики захворювань пацієнтів

Серед усіх сутностей у цій схемі даних особливої уваги заслуговує сутність *rules*, яка відповідає за правила логічного виведення нечітких множин.

Наприклад, найбільш спрощена нечітка система логічного виведення може бути представлена у наступній формі вхідних даних, умов та вихідних даних [2]:

вхід (x)

якщо $x \in A$, то $y \in B$

вихід (y)

де A , B - нечіткі множини, а x , y є лінгвістичними змінними.

Висновки

Системи прийняття рішень відіграють визначальну роль в широкому спектрі промислових, академічних, державних та соціальних сфер. Одна з ключових характеристик цих систем полягає у їхній здатності ефективно обробляти великі обсяги інформації за допомогою широкого діапазону методологічних технік. Ці техніки включають статистичний аналіз, аналіз даних, машинне навчання, оптимізацію, нечіткі множини та багато інших.

У світлі вищевикладеного, проблема розробки високоефективних систем прийняття рішень, які відповідали б потребам сучасних організацій, є особливо актуальною. У цій статті було розглянуто найновіші методи розроб-

ки програмного забезпечення та запропоновано потенційну архітектуру для реалізації систем прийняття рішень, яка може бути адаптована до широкого спектра задач.

Було продемонстровано застосування цієї архітектури на прикладі конкретної системи підтримки прийняття рішень, розробленої для діагностики медичних станів пацієнтів.

Додатково, було розглянуто виклики, пов'язані з моделюванням даних у великомасштабних інформаційних системах, зокрема з урахуванням специфіки предметної області. Було акцентовано увагу на тому, що кількість та типи сутностей предметної області можуть значно відрізнятися залежно від специфіки задачі.

В основній частині статті, було висвітлено ряд сучасних технологій, які мають потенціал підтримувати вимоги до масштабованості, безпеки і швидкодії, необхідні для ефективної реалізації вебзастосунка з запропонованою архітектурою

Розвиток та удосконалення систем підтримки прийняття рішень не лише збільшує ефективність діяльності організацій, але також створює нові методи для суттєвого прогресу. Значна кількість сучасних індустрій уже залежать від використання аналітики даних, що робить системи підтримки прийняття рішень важливими компонентами успіху, заслуговуючого подальшого вивчення.

Список використаних джерел

1. *Filip, F.G.* Decision Support Systems / Filip, F.G., Zamfirescu, CB., Ciurea, C. — Cham: Springer, 2017. — P. 31–69.
2. *Саввакін В.Д.* Діагностична система на основі нечітких знань / В.Д. Саввакін, О.І. Проватар // Комп'ютерна математика — Київ: Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2019. — С. 56-63.
3. *Проватар А.И.* О некоторых подходах к вычислению неопределенностей / А.И. Проватар, А.В. Лапко // Проблемы программирования — Київ: Інститут програмних систем НАН України, 2010. — С. 22-27.
4. *Tie J.* Study on application model of three-tiered architecture /J. Tie, J. Jin, X. Wang // 2011 Second International Conference on

Mechanic Automation and Control Engineering, 2011, Inner Mongolia, China. — 2011. — P. 7715-7718.

5. *Hetzner Cloud Docs* [Електронний ресурс] — Режим доступу до ресурсу: <https://docs.hetzner.com/cloud/>.
6. *Kubernetes Documentation* [Електронний ресурс] — Режим доступу до ресурсу: <https://kubernetes.io/docs/home/>.
7. *Cloudflare Docs* [Електронний ресурс] — Режим доступу до ресурсу: <https://developers.cloudflare.com>.
8. *Docs SvelteKit* [Електронний ресурс] — Режим доступу до ресурсу: <https://kit.svelte.dev/docs/introduction>.
9. *Spring Cloud Gateway reference* [Електронний ресурс] — Режим доступу до ресурсу: <https://docs.spring.io/spring-cloud-gateway/docs/current/reference/html/>.
10. *Java Documentation* [Електронний ресурс] — Режим доступу до ресурсу: <https://docs.oracle.com/en/java/>.
11. *Python 3.10 documentation* [Електронний ресурс] — Режим доступу до ресурсу: <https://docs.python.org/3/>.
12. *ELK Stack documentation* [Електронний ресурс] — Режим доступу до ресурсу: <https://elastic-stack.readthedocs.io/en/latest/>.
13. *Prometheus Documentation* [Електронний ресурс] — Режим доступу до ресурсу: <https://prometheus.io/docs/introduction/>.
14. *Documentation Grafana Labs* [Електронний ресурс] — Режим доступу до ресурсу: <https://grafana.com/docs/>.
15. *PostgreSQL Documentation* [Електронний ресурс] — Режим доступу до ресурсу: <https://www.postgresql.org/docs/>.

References

1. FILIP, F., ZAMFIRESCU, CB. and CIUREA, C. (2017) *Decision Support Systems*. Cham: Springer.

2. SAVVAKIN, V., PROVOTAR O. (2019) Di-ahnostychna systema na osnovi nechitkykh znan. *Kompiuterna matematika*. — pp. 56-63.
3. PROVOTAR, A., LAPKO, A. (2010) O nekotorykh podhodah k vyichisleniyu neopredelennostey. *Problemy prohranuvannia*. — pp. 22-27.
4. TIE, J., JIN, J., WANG X. (2011) Study on application model of three-tiered architecture. In *2011 Second International Conference on Mechanic Automation and Control Engineering*. Inner Mongolia, China. — 2011. — pp. 7715-7718.
5. HETZNER. (2023) *Hetzner Cloud Docs* [Online] Available from: <https://docs.hetzner.com/cloud/>. [Accessed: 8th of January 2023].
6. KUBERNETES. (2023) *Kubernetes Documentation* [Online] Available from: <https://kubernetes.io/docs/home/>. [Accessed: 8th of January 2023].
7. CLOUDFLARE. (2023) *Cloudflare Docs* [Online] Available from: <https://developers.cloudflare.com>. [Accessed: 8th of January 2023].
8. SVELTEKIT. (2023) *SvelteKit Docs* [Online] Available from: <https://kit.svelte.dev/docs/introduction>. [Accessed: 8th of January 2023].
9. SPRING. (2023) *Spring Cloud Gateway reference* [Online] Available from: <https://docs.spring.io/spring-cloud-gateway/docs/current/reference/html/>. [Accessed: 8th of January 2023].
10. ORACLE. (2023) *Java Documentation* [Online] Available from: <https://docs.oracle.com/en/java/>. [Accessed: 8th of January 2023].
11. PYTHON. (2023) *Python 3.10 documentation* [Online] Available from: <https://docs.python.org/3/>. [Accessed: 8th of January 2023].
12. ELK. (2023) *ELK Stack documentation* [Online] Available from: <https://elastic-stack.readthedocs.io/en/latest/>. [Accessed: 8th of January 2023].
13. PROMETHEUS. (2023) *Prometheus Documentation* [Online] Available from: <https://prometheus.io/docs/introduction/>. [Accessed: 8th of January 2023].
14. GRAFANA. (2023) *Grafana Labs Documentation* [Online] Available from: <https://grafana.com/docs/>. [Accessed: 8th of January 2023].
15. POSTGRESQL. (2023) *PostgreSQL Documentation* [Online] Available from: <https://www.postgresql.org/docs/>. [Accessed: 8th of January 2023].

Надійшла до редколегії 21.03.2023

УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/1.14>

О.Ф. Москанова¹, студентка магістратури

O. Moskanova¹, M.Sc. student

Геометрична рекурентність процесу неоднорідної гауссівської авторегресії

Geometric recurrence of inhomogeneous Gaussian autoregression process

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глу-
шкова 4д,
e-mail: olga.moskanova@knu.ua

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, 4d Glushkova str.,
e-mail: olga.moskanova@knu.ua

У цій роботі досліджено гауссівську авторегресію вигляду $X_{n+1} = \alpha_{n+1}X_n + W_{n+1}$ з не-
однорідними в часі центрованими нормально розподіленими приростами W_n і коефіцієнтами
стиску α_n . Отримано верхню межу для математичного сподівання експоненційного моменту
першого повернення ланцюгу в компакт $[-c; c]$ та верхню межу сподівання функції коефіцієнтів
стиску від вказаного моменту.

Ключові слова: гауссівська авторегресія, неоднорідний ланцюг Маркова

In this paper we study Gaussian autoregression model of the form $X_{n+1} = \alpha_{n+1}X_n + W_{n+1}$. It has
time-inhomogeneous centered normal increments W_n and control ratios α_n . We obtained upper bounds
for expectation of exponential return time to the compact $[-c; c]$ and for expectation of the function of
compressing ratios and the mentioned moment.

Key Words: Gaussian autoregression, Inhomogeneous Markov chain

Communicated by Prof. Moklyachuk M.P.

1 Introduction

sequence of compression ratios $(\alpha_n \geq 0)_{n \in \mathbb{N}}$:

Gaussian autoregression process is a base for
models with a wide range of practical use. Someti-
mes dynamic systems we study using this model
are not homogeneous in time. Instead of being
constant, some controls can fluctuate around the
known value. This makes it harder to establish the
bounds for the variables of interest, such as return
times.

In this paper we study Gaussian autoregressi-
on of the form $X_{n+1} = \alpha_{n+1}X_n + W_{n+1}$, where
(W_n) are centered and normally distributed. In our
case the controls fluctuate in the interval $(0; 1)$ wi-
th rare exceptions. We introduce computable upper
bounds for exponential return time to the compact
 $[-c; c]$ and provide three simple examples of its
use by applying numeric and random sequences as
(α_n) controls or modifying (W_n) with random vari-
ance.

$$X_{n+1} = \alpha_{n+1}X_n + W_{n+1}, \quad (1)$$

where $W_n \sim N(0, \sigma_n^2)$ are the independent
normal increments. We denote their distribution
and density functions as Φ_n and ϕ_n respectively.
We also use the following notation: $P_x^n(A)$ is a
probability measure generated by $(X_{n+k})_{k \geq 0}$ and
 $\mathbb{E}_x^n$ is the corresponding expectation.

We aim to develop stability conditions for the
defined process. Our goal is to show that for certain
family of constants $c > 0$ and for all $x \in \mathbb{R}$ we
can bind the expectation $\mathbb{E}_x^n[\psi_{\sigma_C}^{-1}]$, where $\sigma_C =$
 $\inf\{n \geq 1 | X_n \in C\}$ is the first return time to the
set $C = [-c; c]$ and ψ_n is dependent on α_n . Consi-
der the following theorem.

Theorem. Assume that the following condi-
tions hold:

1. Exists $\sigma > 0$ such that

$$\sigma = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sigma_n \quad (2)$$

2 Main result

Consider a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ and
define on it a time-inhomogeneous Gaussian
autoregression process $(X_n)_{n \geq 0}$, controlled by a

2. Exists $\epsilon \in (0; 1)$ such that only a fini-
te number of $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lies outside the half-open
interval $(0; \epsilon]$.

Define

$$\psi_n := \prod_{k=1}^n \left(\alpha_k + \frac{1-\epsilon}{2} \right) \quad (3)$$

Then for any constant $c \geq \max\{1, \frac{2K}{1-\epsilon}\}$ and for all $x \in \mathbb{R}$ and for all $n \geq 0$:

$$\mathbb{E}_x^n [\psi_{\sigma_C}^{-1}] \leq 1 + |x| + \left(K - \frac{1-\epsilon}{2} \right) \mathbb{I}_C(x), \quad (4)$$

where

$$K = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} + 1. \quad (5)$$

Proof. We denote $\delta = (1-\epsilon)/2$. Then for all $\alpha_n \in (0; \epsilon]$ holds $\alpha_n + \delta < 1$. Thus $\forall n$

$$\prod_{k=1}^n \max\{\alpha_k + \delta, 1\} \geq 1 \quad (6)$$

From (6) immediately follows that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^n \max\{\alpha_k + \delta, 1\} \right) (1 - \alpha_n - \delta)^+ = \infty \quad (7)$$

Next, we show that exists

$$G = \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}_x^n [W_n^+] < \infty \quad (8)$$

Let us calculate the expectation in (8):

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} y \Phi_n(dy) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \int_0^{+\infty} y \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_n^2}\right) dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_n^2}\right) d\left(\frac{y^2}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \int_0^{+\infty} \exp(-t/\sigma_n^2) dt = \\ &= \frac{\sigma_n}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned} \quad (9)$$

From the first condition of the theorem we obtain:

$$\begin{aligned} G &= \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}_x^n [W_n^+] = \\ &= \sup_{n \geq 0} \frac{\sigma_n}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned} \quad (10)$$

Since (7) and (8) hold true, we can apply Theorem 1 from [4] and get the desired boundary for $\mathbb{E}_x^n [\psi_{\sigma_C}^{-1}]$: for any constant $c \geq \max\{1, K/\delta\}$, for all $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ holds:

$$\mathbb{E}_x^n [\psi_{\sigma_C}^{-1}] \leq 1 + |x| + \left(K - \frac{1-\epsilon}{2} \right) \mathbb{I}_C(x), \quad (11)$$

where $C = [-c; c]$ and $K = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} + 1$. $\square$

We can go a bit further by setting a stricter condition for (α_n) . Observe:

Corollary. Suppose $0 < \epsilon = \sup\{\alpha_n\} < 1$. Set $\psi = (\frac{\epsilon+1}{2})^{-1}$, then for all $x \in \mathbb{R}$ holds:

$$\mathbb{E}_x^n [\psi^{\sigma_C}] \leq 1 + |x| + \left(K - \frac{1-\epsilon}{2} \right) \mathbb{I}_C(x) \quad (12)$$

Proof. The setup of ψ obviously meets the condition of the Corollary 1 from [4]:

$$\psi_n = \prod_{k=1}^n (\alpha_k + \delta) \leq \psi^{-n}. \quad \square \quad (13)$$

Let us now take a look on examples.

3 Examples

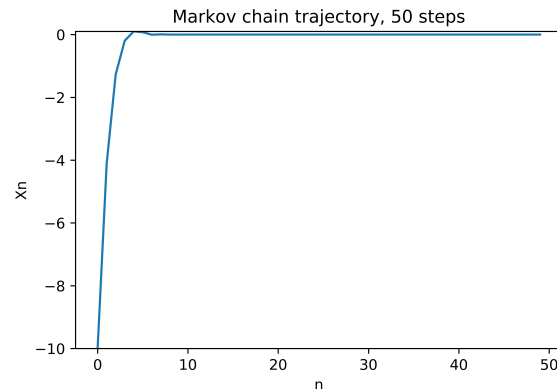
In this section we provide results of simulations to approve the Theorem statement. We consider 3 examples. The code is available via the link: <https://github.com/gamble27/geometric-recurrence-inhomogenous-gaussian-autoregression>

Example 1. Control by numeric sequences. Consider first the simplest model, where the control is maintained by clearly decreasing sequences of variances and compression ratios:

$$X_{n+1} = \alpha_{n+1} X_n + W_{n+1},$$

where $X_0 = -10$, $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$, $\sigma_n = 2^{-n}$. From our initial conditions we obtain $\epsilon = \sigma = \frac{1}{2}$, hence $c = 1.67 \geq 4 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + 1 \right)$

We generate 10^4 trajectories, which look like the one on image 1.



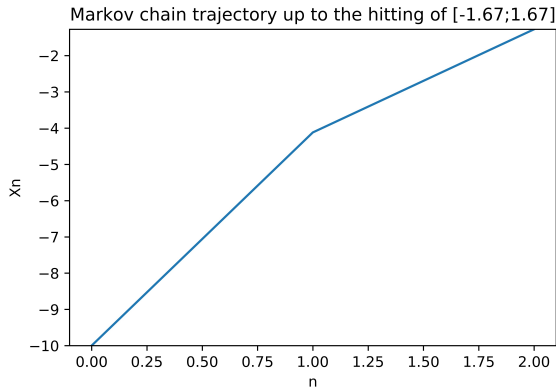


Fig. 1: Single trajectory of the Markov chain
We would also like to take a look on distribution of the first return time. See image [2].

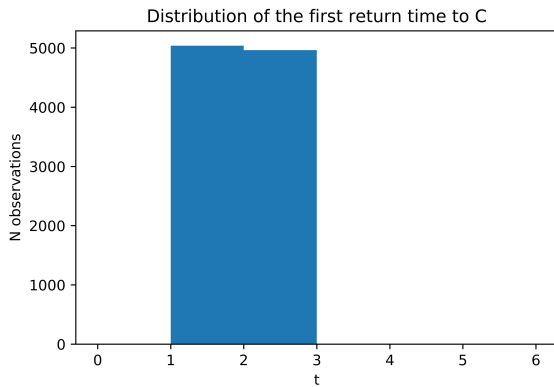


Fig. 2: Distribution of the first return time of the chain to the compact $[-1; 1]$

Lastly, we would like to vary X_0 values and see how the exponential moment of first return would act and compare it to the Corollary. In this case we get: $\psi = \frac{4}{3}$, $K = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + 1$ and

$$\mathbb{E}_x^n \left(\frac{4}{3} \right)^{\sigma_C} \leq 1 + |x| + \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{4} \right) \mathbb{I}_C(x)$$

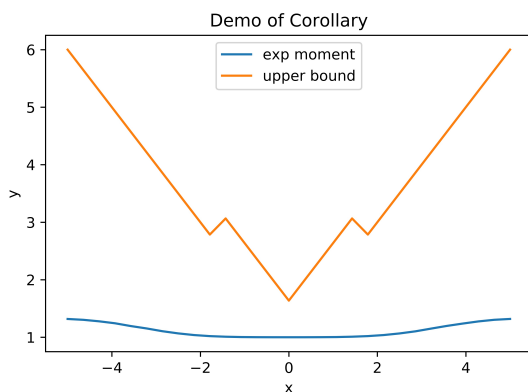


Fig. 3: Demonstration of the Corollary

As we can see on the picture [3], the upper bound works correctly: the horizontal axis x is a

chosen starting point X_0 , while the vertical axis y are functions of the argument X_0 - exponential moment of the first return time to C and its upper bound.

Example 2. Control with random variance.

We take the next step and introduce some randomness in the model controls. In equation [1] we set compress ratios again as a sequence: $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$ and $\sigma_n \sim U[\{5, 3, 1\}]$. We take $\epsilon = \frac{1}{2}$ and $\sigma = 5$. Let us choose c :

$$c = 16 \geq 4 \left(\frac{10}{\sqrt{2\pi}} + 1 \right)$$

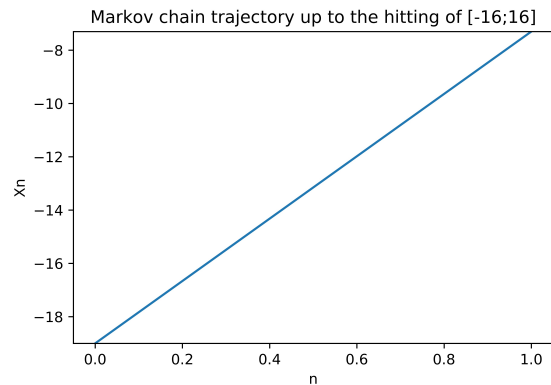
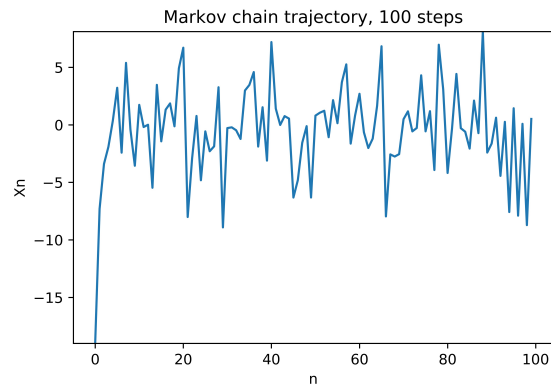


Fig. 4: Single trajectory of the Markov chain
In the simulation we vary the starting point X_0 from 0 to 25; sample trajectories can be found on picture [6]. Then the Corollary holds again for $\phi = \frac{2}{3}$ and $K = \frac{10}{\sqrt{2\pi}} + 1$:

$$\mathbb{E}_x^n \left(\frac{2}{3} \right)^{\sigma_C} \leq 1 + |x| + \left(\frac{10}{\sqrt{2\pi}} - 3 \right) \mathbb{I}_C(x) \quad (14)$$

We can clearly see it on the picture [5]:

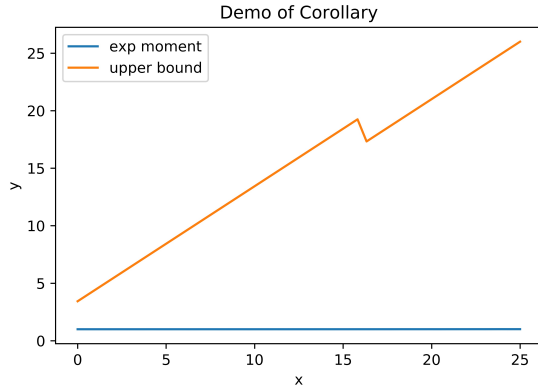


Fig. 5: Demonstration of inequality (14)

Example 3. Control with random compression. In this example we consider the random coefficient autoregressive process (RCA), defined in example 2.1.7 [2]:

$$X_{n+1} = \alpha_{n+1}X_n + W_{n+1},$$

where $\alpha_n \sim U[0.1; 0.9]$, $\sigma_n = 1 + 0.03 \frac{n}{n+1}$. Thus we have constants $\sigma = 1.03$ and $\epsilon = 0.9$. It gives us

$$c = 17 \geq 20 \left(\frac{2.06}{\sqrt{2\pi}} + 1 \right)$$

Again we generate 10^4 trajectories to explore the behavior of given Markov chain.

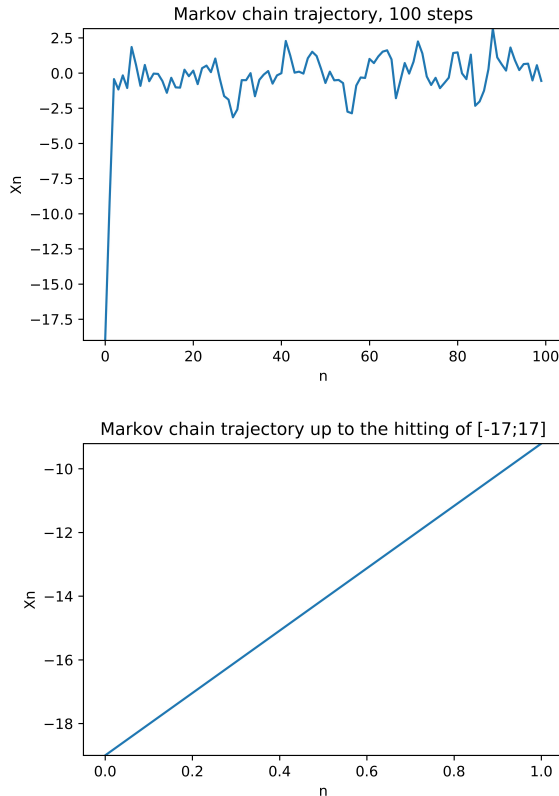


Fig. 6: Single trajectory of the Markov chain

We can clearly see that the return time to the set $C = [-17; 17]$ is exponentially bounded. To show that more explicitly, we generate a pool of trajectories, which start at $X_0 = -19$ and consider the return time distribution. Let us take a look on the time of the first return to set $C = [-17; 17]$. For this, we run 10^4 trajectory simulations and figure out the first return time to C .

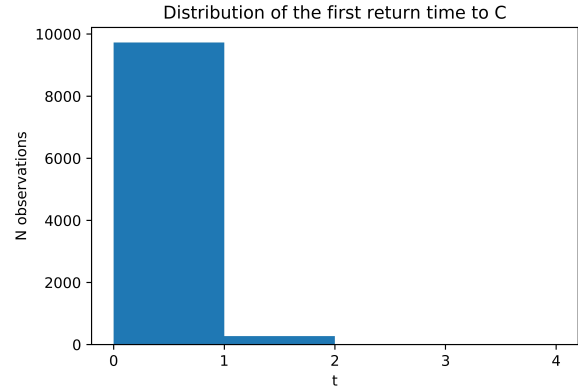


Fig. 7: Distribution of the first return time of the chain to the compact $[-1; 1]$

On picture (7) we can see the distribution of the return time to C . Now we vary the starting point X_0 in simulation and show that Corollary holds on the picture (8): on the horizontal axis we can see the starting point and on vertical - exponential moment and its upper bound, just as it holds theoretically. In this example to obtain $\phi = \frac{20}{19}$ and $K = \frac{2.06}{\sqrt{2\pi}} + 1$. Then the following holds:

$$\mathbb{E}_x^n \left(\frac{20}{19} \right)^{\sigma_C} \leq 1 + |x| + \left(\frac{2.06}{\sqrt{2\pi}} + \frac{19}{20} \right) \mathbb{I}_C(x) \quad (15)$$

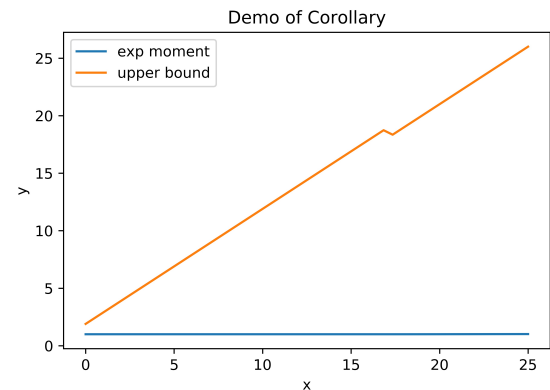


Fig. 8: Demonstration of inequality (15)

4 Conclusion

In this paper we developed the upper bound for time-inhomogeneous Gaussian autoregression in

general and in a simplified form under stricter condition. We have shown that our results can be applied to simple models with known controls as well as to their random variance and RCA extensions. However, developed bound is not very sharp, except its value at 0.

References

1. GOLOMOZIY, V. (2023) *On geometric recurrence for time-inhomogeneous*

autoregression. In print, Modern Stochastics: Theory and Applications, 2023

2. DOUC, R. et al.(2018) *Markov Chains. Springer Nature Switzerland*
3. MEYN, S.P., TWEEDIE, R.L.(1993) *Markov Chains and Stochastic Stability. Springer-Verlag London Limited*

Надійшла до редакції 08.04.2023

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 537.6

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/1.15>

Андреев В.О., к.ф.-м.н, доц.

V.O. Andreyev, PhD.

Розрахунок магнітної сприйнятливості виродженого ідеального газу електронів у випадку анізотропної ефективної маси

Calculation of the magnetic susceptibility of a degenerate ideal gas of electrons in the case of anisotropic effective mass

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13,
e-mail: volodymyr.andreev@knu.ua

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13.
e-mail: volodymyr.andreev@knu.ua

Розглянуто вплив анізотропії ефективної маси на компоненти тензора діамagnetної сприйнятливості виродженого ідеального газу електронів провідності у кристалах. Обраховано залежність цих компонент від орієнтації магнітного поля відносно кристалічних висей. Отримані результати можуть бути використані для відокремлення діамagnetної сприйнятливості електронів провідності від сприйнятливостей обумовлених іншими механізмами.

Ключові слова: ідеальний газ електронів, магнітна сприйнятливість, ефективна маса.

Dependence of the diamagnetic susceptibility of a degenerate ideal gas of electrons on the orientation of the magnetic field strength vector relative to the crystal axes, which is due to the anisotropy of the effective mass of electrons is considered. The presence of a diamagnetic susceptibility of a degenerate ideal gas of electrons is one of the fundamental results of the application of quantum mechanics and statistical physics to the description of magnetic phenomena. For an ideal gas of electrons in vacuum, the magnetic susceptibility has diamagnetic and paramagnetic components, the origin of which is due to different mechanisms. At low values of the magnetic field strength and high temperatures, their values are proportional to each other. Since the total value of the susceptibility is measured, it is impossible to separate them. Moreover, when measuring the magnetic susceptibility of a crystal, the contribution of conduction electrons cannot be separated from the contributions of the electrons of atoms, unless some features of the behavior of the magnetic susceptibility of conduction electrons are known. In this article, the calculation of the angular dependence of the effective mass of electrons due to the anisotropy is carried out. The angular dependence of the diamagnetic susceptibility is calculated for the practically important case when the distances between the nearest magnetic levels are small compared to the temperature. It is shown that the angular dependence of the diamagnetic susceptibility coincides with the angular dependence of the cyclotron mass squared, which can be determined from independent cyclotron resonance experiments. It is proposed to use the results obtained to separate the diamagnetic susceptibility of conduction electrons from susceptibilities due to other mechanisms.

Key words: ideal electron gas, magnetic susceptibility, effective mass.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Макарець М.В.

1. Вступ

Як було показано Ландау, у зовнішньому магнітному полі виникає квантування орбіт електронів [3]. Це квантування приводить до появи діамagnetизму ідеального газу електронів, який неможна описати у межах класичної фізики [4].

Практично важливим прикладом системи де можна спостерігати ефекти, пов'язані з діамagnetизмом Ландау, є газ електронів провідності у металах та вироджених напівпровідниках, в яких при великих значеннях напруженості магнітного поля та низьких температурах, квантування орбіт електронів приводить до осциляцій магнітної сприйнятливості. В інших випадках діамagnetизм Ландау на експерименті маскується внесками сприйнятливостей, обумовлених іншими механізмами. Тому, щоб відокремити діамagnetну сприйнятливість Ландау від сприйнятливостей, обумовлених іншими механізмами важливо знати її специфічні

властивості, наприклад, її залежність від орієнтації зовнішнього магнітного поля, яка вивчається в цій роботі.

2. Опис моделі

Для проведення розрахунків магнітної сприйнятливості потрібно знати спектр енергій електрону провідності, який розглядається у наближенні ефективної маси [1, 5], причому часто вважають, що за відсутності магнітного поля залежність енергії електрона від хвильового вектору, у квадратичному наближенні, має вигляд:

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \sum_{j=x,y,z} \frac{\hbar^2 k_j^2}{2m_j^*}, \quad (1)$$

де m_j^* - компоненти тензора ефективна маса електрону, які подані у власній системі координат, зв'язаної з висями кристалу.

З розрахунків [1], випливає, при наявності магнітного поля рівні енергії електрона у випадку анізотропної ефективної маси описуються співвідношенням, яке має вигляд подібний до випадку вільних електронів у вакуумі:

$$\varepsilon(k_H, n, M) = \frac{\hbar^2 k_H^2}{2m_H} + \hbar\omega_s M + \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (2)$$

де $n = 0, 1, 2, \dots$ - індекс рівня Ландау, k_H - проекція хвильового вектору, а $M = \pm 1/2$ - значення проекції спіну електрону на напрямок вектору напруженості магнітного поля $\mathbf{H}$, H - величина цього вектору, m_H - відповідна компонента тензору ефективної маси

$$\omega_z = \frac{|e|H}{cm_e}, \quad (3)$$

частота, пов'язана з розчепленням спінових рівнів енергії електрону,

$$\omega_c = \frac{|e|H}{cm_c}, \quad (4)$$

циклотронна частота. В останніх формулах e та m_e - заряд та маса електрону, а m_c - циклотронна маса, яка у межах даної моделі описується виразом

$$m_c(\mathbf{n}) = \left(\frac{n_1^2}{m_2^* m_3^*} + \frac{n_2^2}{m_3^* m_1^*} + \frac{n_3^2}{m_1^* m_2^*} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (5)$$

в якому n_i - проекції вектору $\mathbf{n} = \mathbf{H}/H$ на напрямки власних векторів тензору ефективної маси.

Зауважимо також, що для вільних електронів у вакуумі, $m_j^* = m_e$ і некої кутової залежності циклотронної частоти немає.

Згідно до результатів [1] рівні Ландау є виродженими зі ступеню виродження яка не залежить від значення квантового числа n і описується формулою

$$g = \frac{m_c(\mathbf{n})}{2\pi\hbar} \omega_c S, \quad (6)$$

де S - площа системи у напрямку перпендикулярному до $\mathbf{H}$.

3. Розрахунок магнітної сприйнятливості

Для аналізу властивостей ідеального газу Ферміонів звичайно використовують великий канонічний розподіл Гіббса [1]. При цьому вираз для великого потенціалу має вигляд

$$\Omega(T, V, \mu, H) = -\frac{1}{\beta} \sum_r \ln(e^{-\beta(\varepsilon_r - \mu)}), \quad (7)$$

де μ - хімічний потенціал, $\beta = 1/k_B T$, ε_r - енергія стані, який нумерується індексом r . У випадку, який розглядається в цій роботі, ε_r описується виразом (2), тому великий потенціал залежить від напруженості магнітного поля. З термодинаміки відомо, що

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \Omega(T, V, \mu, H) = -N(T, V, \mu, H), \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial H} \Omega(T, V, \mu, H) = -M(T, V, \mu, H), \quad (9)$$

де N та M - кількість частинок та магнітний момент газу, з виразу для якого і визначається магнітна сприйнятливості $\chi = M/VH$.

Зауважимо, що кінцеві результати необхідно подати через контрольовані на експерименті параметри системи (T, V, N, H) . Для цього використовують вираз для вільної енергії

$$F = N\mu(T, V, N, H) + \Omega(T, V, \mu(T, V, N, H), H), \quad (10)$$

Оскільки

$$N \frac{\partial}{\partial H} \mu + \frac{\partial}{\partial \mu} \Omega(T, V, \mu, H) \frac{\partial}{\partial H} \mu = 0, \quad (11)$$

то

$$M(T, V, N, H) = M(T, V, \mu(T, V, N, H), H). \quad (12)$$

Тобто, магнітний момент у змінних (T, V, N, H) отримується з виразу для $M(T, V, \mu, H)$, який обчислюється з рівняння (9), підстановкою хімічного потенціалу $\mu(T, V, N, H)$, який неявно заданий рівнянням (8) при фіксованій кількості частинок N .

З вигляду спектру енергії (2) випливає, що великий потенціал можна подати у вигляді

$$\Omega(T, V, \mu, H) = \sum_{n=0}^{\infty} F\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (13)$$

де

$$F(x) = -\frac{\hbar\omega_c}{2} \sum_M f(\mu - \hbar\omega_z M - \hbar\omega_c x), \quad (14)$$

і

$$f(y) = -\frac{Vm_c}{2\beta\pi^2\hbar^2} \int \ln\left(1 + e^{-\beta\left(\frac{\hbar^2 k_H^2}{2m_H} - y\right)}\right) dk_H, \quad (15)$$

Нехай значення H і T такі, що $\beta\hbar\omega_s \ll 1$ та $\beta\hbar\omega_c \ll 1$, а $\beta\mu \gg 1$. Тобто, величина хімічного

потенціалу є великою і газ електронів провідності є виродженим.

За цих умов $F(x)$ мало змінюється, при змінах аргументу на одиницю і для підсумування у формулі (13) застосовують формулу Ейлера-Маклорена [4,6] у вигляді

$$\sum_{n=0}^{\infty} F\left(n + \frac{1}{2}\right) \approx \int_0^{\infty} F(x) dx + \frac{1}{24} \left(\frac{dF}{dx}\right)_{x=0}. \quad (16)$$

Обчислення величин, які входять у праву частину виразу (16) дає

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} F(x) dx &= -\frac{\hbar\omega_c}{2} \sum_M \int_0^{\infty} f(\mu - \hbar\omega_s M - \hbar\omega_o x) dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_M \int_{\mu - \hbar\omega_s M}^{\mu} f(y) dy \\ &\approx \int_{-\infty}^{\mu} f(y) dy + \frac{\partial f(\mu)}{\partial \mu} \left(\frac{\hbar\omega_s}{2}\right)^2, \end{aligned} \quad (17)$$

і

$$\begin{aligned} \left(\frac{dF}{dx}\right)_{x=0} &= \frac{\hbar\omega_o}{2} \sum_M \left(\frac{d}{dx} f(\mu - \hbar\omega_s M - \hbar\omega_o x)\right)_{x=0} \\ &= -\frac{(\hbar\omega_o)^2}{2} \sum_M \frac{\partial f(\mu - \hbar\omega_s M)}{\partial \mu} \\ &\approx -2(\hbar\omega_o)^2 \frac{\partial f(\mu)}{\partial \mu}. \end{aligned} \quad (18)$$

Оскільки

$$\int_{-\infty}^{\mu} f(y) dy = \Omega(T, V, \mu, 0), \quad (19)$$

то з формули (19) випливає, що

$$\frac{\partial}{\partial \mu} f(\mu) = \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \Omega(T, V, \mu, 0) = -\frac{\partial}{\partial \mu} N(T, V, \mu, 0), \quad (20).$$

При цьому

$$\begin{aligned} \Omega(T, V, \mu, H) &= \Omega(T, V, \mu, 0) \\ &\quad - \frac{\hbar^2}{4} \left(\omega_z^2 - \frac{1}{3}\omega_c^2\right) \frac{\partial}{\partial \mu} N(T, V, \mu, 0), \end{aligned} \quad (21)$$

а для магнітного моменту газу справедливе рівняння

$$M(T, V, \mu, H) = \frac{\hbar^2}{4} \frac{\partial}{\partial \mu} N(T, V, \mu, 0) \frac{\partial}{\partial H} \left(\omega_z^2 - \frac{1}{3}\omega_c^2\right). \quad (22)$$

Таким чином,

$$\chi = \frac{1}{2} \left(\frac{e\hbar}{c}\right)^2 \left(\frac{1}{m_e^2} - \frac{1}{3m_c^2}\right) = \chi_P + \chi_D. \quad (23)$$

Перша частина в виразі (23) описує парамагнітну сприйнятливості (парамагнетизм Паулі), яка не залежить від орієнтації H а друга відповідає діамагнітній складовій Ландау.

З точністю до величин порядку $\left(\frac{\hbar\omega_c}{\varepsilon_F}\right)^2$ і

$\left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F}\right)^2$ можна покласти

$$\mu(T, V, N, H) = \mu(0, V, N, 0) = \varepsilon_F, \quad (24)$$

де ε_F – енергія Фермі газу електронів провідності при $H = 0$, яка описується виразом

$$\varepsilon_F = \left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2(m_1^* m_2^* m_3^*)^{1/3}}, \quad (25)$$

Таким чином, з формул (5),(22),(25) випливає, що у випадку анізотропної ефективної маси діамагнітна сприйнятливості виродженого ідеального газу електронів описується формулою

$$\chi_D(\mathbf{n}) = -\frac{2N}{3V\varepsilon_F} \left(\frac{e\hbar}{3c}\right)^2 \left(\frac{n_1^2}{m_2^* m_3^*} + \frac{n_2^2}{m_3^* m_1^*} + \frac{n_3^2}{m_1^* m_2^*}\right), \quad (26)$$

4. Висновки

У наслідок анізотропії ефективної маси, χ_D залежить від напрямку, який утворює вектор напруженості магнітного поля з вісями кристалу. Кутова залежність $\chi_D(\mathbf{n})$ пов'язана з кутовою залежністю циклотронної маси (5), яка звичайно вимірюється за допомогою циклотронного резонансу з метою отримання значень компонент тензору ефективної маси [5]. Таким чином, при порівнянні результатів вимірювання магнітної сприйнятливості з результатами циклотронного резонансу можна виділити діамагнітну сприйнятливості Ландау на фоні інших механізмів, які дають внесок у магнітну сприйнятливості металу.

Список використаних джерел

1. Bassani F. Electronic States and Optical Transitions in Solids / F. Bassani and G. Pastori Parravicini. Edited by R. A. Ballinger // Pergamon Press, -1975. 300 p.
2. Боровик Е.С. Лекции по магнетизму / Е.С.Боровик, В.В.Еременко, А.С.Мильнер // М.: ФИЗМАТЛИТ. - 2005. - 512 с.
3. Ландау Л.Д. Теоретическая физика: Т.III: Квантовая механика. Нерелятивистская теория / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц // М.: Наука. - 1974. -768 с.
4. Ландау Л.Д. Теоретическая физика: Т.V: Статистическая физика: Ч.1./ Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц // М.: Наука. - 1976.-584 с.
5. Пінкевич І.П. Теорія твердого тіла / І.П. Пінкевич, В.Й. Сугаков // К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет". - 2006. - 334 с.
6. Shoenberg D. Magnetic oscillation in metals / D.Shoenberg // Cambridge University Press. — 1984. - 680 p.

References

1. BASSANI F., PASTORI PARRAVICINI G.(1975) *Electronic States and Optical Transitions in Solids*. Pergamon Press. - 300 p.
2. BOROVIK E.S., EREMENKO V.V., MILNER A.S. (2005) *Lectures on magnetism*. Fizmatlit Publishing House. - 512 p.
3. LANDAU L. D. LIFSHITS E.M. (1974). *Theoretical physics: Volume III: Quantum mechanics. Non-relativistic theory*. Nauka Publishing House -768 p.
4. LANDAU L. D. LIFSHITS E.M. (1974). *Theoretical physics: T.V: Statistical physics: Part 1* . Nauka Publishing House -584 p.
5. PINKTVICH I.P., SUGAKOV V.Y. (2006). *Solid State Theory*. Kyiv University Publishing and Printing Center. - 334 p.
6. SHOENBERG D.(1984) *Magnetic oscillation in metals*. Cambridge University Press. — 680 p.

Надійшла до редакції 2.06.2023

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/1.16>

УДК 537.6

Андреев В.О., к.ф.-м.н., доц.
Чолій Я.В., начальник сектору
Макарець М.В., д.ф.-м.н., проф.

V.O. Andreyev, Ph.D., Associate Professor
Ya.V. Choliy, Head of sector
M.V. Makarets, Dr. of Sci., Prof.

РОЗРАХУНОК КУМУЛЯНТІВ І ПАРАМЕТРІВ ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ МЕТОДОМ МОНТЕ- КАРЛО ТА ІЗ РІВНЯННЯ ДЛЯ НЕЇ

CUMULANTS AND PARAMETERS CALCULATION OF DISTRIBUTION FUNCTION BY MONTE CARLO AND FROM THE EQUATION FOR IT

Київський національний університет імені Тараса
Шевченка, 01601, м. Київ, Володимирська, 64/13,
e-mail: volodymyr.andreev@knu.ua

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13.
e-mail: volodymyr.andreev@knu.ua

Проаналізовано результати розрахунку моментів, центральних моментів, кумулянтів та параметрів функції розподілу пучка іонів імплантованих у тверде тіло. Для аналізу відмінностей між результатами моделювання цього процесу методом Монте-Карло, який широко використовується для практично важливих мішеней, та результатами розв'язку інтегродиференціальних рівнянь, які його описують аналітично, розглянуто випадок осової симетрії пучка іонів, коли всі моменти непарного порядку по поперечній декартовій координаті рівні нулю в силу симетрії задачі. Показано, що ці ж самі моменти, отримані методом Монте-Карло повільно спадають до нуля із збільшенням кількості іонів, як і передбачається статистикою, і залишаються приблизно сталими.

Ключові слова: моменти розподілу, енергетичні іони, тверде тіло, метод Монте-Карло.

Calculations results of the moments, central moments, cumulants and parameters of the distribution function of a beam of ions implanted in a solid body were analyzed. To analyze the differences between the results of modeling this process by the Monte Carlo method, which is widely used for practically important targets, and the results of the solution of the corresponding integrodifferential equations that describe ions distribution analytically, in the simple case of axial symmetry of the ion beam, when all moments of odd order along the transverse Cartesian coordinate is considered equal to zero due to the symmetry of the problem. It is shown that the same moments obtained by the Monte Carlo method is not exactly equal to zero, but slowly decrease with an increase in the number of ions, as predicted by statistics, and then remain approximately constant. Increasing the number of ions for Monte Carlo simulation reduces the statistical component of this error, but does not affect on the component arising from the application of a simplified model of ion-atom collisions.

Key words: moments of distribution, energetical ions, solid body, Monte Carlo method.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Макарець М. В.

1. Вступ

Функції розподілу відіграють важливу роль у статистичній фізиці [1] як для класичних так і для статистичних систем. Для низки прикладних задач вони залишаються невідомими, оскільки формуються процесами, які термалізують первинно нерівноважну систему.

В роботі розглянуто просторовий розподіл швидких іонів, які проникаючи у тверде тіло втрачають енергію і зупиняються. Якщо пучок енергетичних іонів, які стартують в ізотропній нескінченній мішені має осову симетрію, то і їх розподіл після зупинки матиме цю ж симетрію, а його просторові моменти непарного порядку по поперечній декартовій координаті будуть рівні нулю. Наприклад, якщо іони стартують вздовж осі Oz , то їх поздовжній пробіг буде відмінний від нуля, але поперечні відхилення вздовж осей Ox та Oy будуть рівними нулю. Цей очевидний результат дають і рівняння для моментів [2].

У моделюванні проникнення іона у мішень методом Монте-Карло розігруються випадкові умови зіткнення іона із атомом мішені, зокрема, прицільна відстань і взаємне положення цих партнерів всередині мішені [3, 4]. Після кожної події енергія іона зменшується залежно від її умов і після досягнення ним енергії порядку кількох десятків еВ іон вважається нерухомим, а його траєкторія запам'ятовується. Якщо вибірка іонів достатньо велика – десятки і сотні тисяч, то тоді можна побудувати гістограми функції просторового розподілу іонів у твердому тілі, за якими можна знайти її моменти, центральні моменти, кумулянти і параметри (скісності, ексцеси і т.д.). При цьому очікується, що просторові моменти непарного порядку по поперечній декартовій координаті повинні бути малими і прямувати до нуля при збільшенні виборки.

Задача цієї роботи з'ясувати як виконується ця умова і яку точність мають вищі параметри

функції розподілу отримані методом Монте-Карло.

2. Основні рівняння і припущення

Просторовий розподіл іонів, імплантованих у тверде тіло, задається рівнянням [2]:

$$\Pi(\vec{r}, E) = \int_0^{\infty} \int_{T_{\min}}^{T_{\max}} \int_0^{2\pi} \Pi(\vec{r}', E') f_1 dl \frac{d\sigma_n}{\sigma_n} \frac{d\varphi}{2\pi} \quad (1)$$

де $\Pi(\vec{r}, E)$ – функція просторового розподілу іонів у точці $\vec{r}$, які стартували з енергією E вздовж $\vec{k}$ з початку координат, $\vec{r}' = \hat{A}(\vec{r} - \vec{k}l)$ – координата точки зупинки іона у системі координат, зміщеної на вектор $\vec{k}l$ відносно точки старту і повернутій на кути φ навколо осі Oz і θ навколо осі Oy , $\hat{A}(\theta, \varphi)$ – матриця цих поворотів, $d\sigma_n(E - T_e, T_n)$ – диференціальний переріз пружного розсіяння іона з енергією $E - T_e$ на атомі мішені, у якому він втрачає енергію T_n , а T_e – втрати енергії іона у неперервних зіткненнях з електронним газом на шляху l до першого пружного зіткнення.

Аналітичний розв'язок (1) не вдається знайти, а кілька спроб його числового інтегрування і

визначення $\Pi(\vec{r}, E)$ проведені лише для частинних випадків.

Проте із (1) можна отримати рівняння для моментів функції розподілу, а також різних їх комбінацій: центральних моментів, кумулянтів, параметрів, зокрема скісностей і ексцесів. Окрім цього моделювання руху іона у твердому тілі вдається провести методом Монте-Карло, який дає всю траєкторію іона до його зупинки у твердому тілі.

Обидва ці два підходи мають важливе практичне значення, оскільки дають достатньо точні величин, які вимірюються на експерименті і які мають просту інтерпретацію. А саме: розподіл зупинених іонів середніх енергій (приблизно від десятків до сотень кеВ) близький до гаусового, а його невеликі відхилення задаються скісністю та ексцесом.

Після низки перетворень (1) у [3-5] були отримані рівняння для кумулянтів до шостого порядку включно. Тут наведено кілька перших, найменш громіздких рівнянь для так званих арзацкумулянтів 1-3-го порядку $\chi_{kl}(\varepsilon)$, які є такими лінійними комбінаціями традиційних кумулянтів, що перетворюють систему інтегральних рівнянь у їх ланцюжок:

$$\begin{aligned} \frac{\chi_{01} - \chi'_{01}}{\lambda_1} - \frac{1}{\gamma} \int_0^{\gamma\varepsilon'} \tilde{\sigma}_n \frac{\partial}{\partial \tau} \{ \chi''_{01} P_1 \} d\tau &= 1, \\ \frac{\chi_{02} - \chi'_{02}}{\lambda_1} - \frac{1}{\gamma} \int_0^{\gamma\varepsilon'} \tilde{\sigma}_n \frac{\partial}{\partial \tau} \{ \chi''_{02} P_2 \} d\tau &= \frac{\tilde{\chi}_{01}'^2 - \chi_{01}^2}{\lambda_1} + \frac{1}{\gamma} \int_0^{\gamma\varepsilon'} \tilde{\sigma}_n \frac{\partial}{\partial \tau} \{ \chi_{01}''^2 P_2 + 2\lambda_1 \chi''_{01} P_1 \} d\tau, \\ \frac{\chi_{20} - \chi'_{20}}{\lambda_1} - \frac{1}{\gamma} \int_0^{\gamma\varepsilon'} \tilde{\sigma}_n \frac{\partial}{\partial \tau} \{ \chi''_{20} \} d\tau &= \frac{\tilde{\chi}_{01}'^2 - \chi_{01}^2}{\lambda_1} + \frac{1}{\gamma} \int_0^{\gamma\varepsilon'} \tilde{\sigma}_n \frac{\partial}{\partial \tau} \{ \chi_{01}''^2 + 2\lambda_1 \chi''_{01} P_1 \} d\tau, \\ \frac{\chi_{03} - \chi'_{03}}{\lambda_1} - \frac{1}{\gamma} \int_0^{\gamma\varepsilon'} \tilde{\sigma}_n \frac{\partial}{\partial \tau} \{ \chi''_{03} P_3 \} d\tau &= \frac{\tilde{\chi}_{01}'^3 - \chi_{01}^3 + 3\tilde{\chi}_{01}' \chi'_{02} - 3\chi_{02} \chi_{01}}{\lambda_1} + \\ &+ \frac{1}{\gamma} \int_0^{\gamma\varepsilon'} \tilde{\sigma}_n \frac{\partial}{\partial \tau} \{ \chi_{01}'' (\chi_{01}''^2 + 3\chi_{02}'') P_3 + 3(\chi_{01}''^2 + \chi_{02}'') \lambda_1 P_2 + 3\chi_{01}'' \lambda_1^2 P_1 \} d\tau, \end{aligned} \quad (2)$$

Рівняння (2) інтегральні, неоднорідні, а права частина кожного із них, починаючи із другого, виражається через розв'язки попередніх, тому вони утворюють не систему, а ланцюжок рівнянь, у якому наступне рівняння розв'язується після розв'язку всіх попередніх. Перший доданок у їх лівих частинах при $l \rightarrow 0$ (нескінченно малий пробіг між пружними зіткненнями) дає похідну від ерзацкумулянта $\chi_{kl}(\varepsilon)$ по безрозмірній енергії ε [5].

Ланцюжок аналогічних рівнянь для перших 15-и ерзацкумулянтів по 6-ий порядок включно, утворених із просторових моментів (їх 83), розв'язувався чисельно, а із загальновідомих виразів [7], знаходили моменти функції розподілу та її параметри: скісності і ексцеси до другого порядку, як описано у [5, 6]. Оскільки (2) отримані для осової симетрії пучка, то просторові моменти непарні по поперечній декартовій координаті тотожно рівні нулю. Для визначення точності знайдених розв'язків змінювали параметри чисельної схеми, наприклад кількість

її вузлів, і шукали різницю отриманих результатів. Було встановлено, що відносно відхилення було не вище четвертого порядку малості. На підставі цих оцінок вважали, що саме результати розв'язку ланцюжка рівнянь (2) можна використати для оцінки точності результатів моделювання методом Монте-Карло.

В методі Монте-Карло [4] використовується низка фізичних наближень [3] для опису двох механізмів сповільнення швидких іонів у твердому тілі, а саме: а) у електронному газі мішені іон гальмується неперервно, втрачає енергію і не змінює напрям руху; б) з атомними ядрами він випадково стикається пружно і близько, змінює напрям руху і передає частину енергії атомному ядру; в) на шляху l між пружними зіткненнями іон лише гальмується в електронному газі. Ці ж самі припущення прийняті і при виведенні рівнянь (2).

Саме випадкові пружні зіткнення моделюються методом Монте-Карло, у якому задаються три випадкові величини: а) прицільна відстань зіткнення (вона має верхню межу – міжатомну відстань у мішені); б) два кути орієнтації підлітної вітки траєкторії іона відносно положення атома у твердому тілі. Після випадкового задання цих трьох параметрів, траєкторія іона розраховується як у задачі двох тіл і вважається, що іон після зіткнення рухається по асимптоті цієї задачі з відомим напрямом. Варто підкреслити, що спрощений розгляд іон-атомних зіткнень може бути причиною виникнення систематичних помилок, які спотворюють фізичний результат. Зокрема, припущення, що іон відділяється від атома вздовж асимптоти розсіяння, передбачає, що відстань між ними вже достатньо велика, і їх взаємодією можна знехтувати. Але ця відстань може перевищувати міжатомну, особливо при зіткненнях коли прицільна відстань близька до міжатомної. Тому це припущення завищує кут розсіяння іона на атомі і робить розподіл більш широким. Інша помилка має статистичне походження, бо залежить від величини виборки N , тобто від кількості розіграних траєкторій. З теорії ймовірностей [8] відомо, що статистичне відхилення результатів моделювання від їх середніх значень при $N \rightarrow \infty$, спадає як $1/\sqrt{N}$, тому можуть мати відносне значення порядку кількох процентів при $N \leq 10000$. Але і точність експериментальних даних також має такий же порядок, тому для моделювання потрібно брати достатньо велику кількість іонів.

3. Порівняння результатів розрахунку та моделювання.

В роботі були проведені розрахунки моментів просторового розподілу зупинених іонів для комбінацій іон-мішень із відношеннями їх мас рівними: 1) $\mu \hat{=} M_1/M_2 \approx 6.53 \cdot 10^{-2}$ для $C \rightarrow W$ – легкий іон і важкий атом мішені; 2) $\mu \approx 1.07$ для $As \rightarrow Ga$ – співрозмірні маси іона і атома мішені; 3) $\mu \approx 5.91$ для $Er \rightarrow Si$ – важкий іон і легкий атом мішені.

Потім порівнювали між собою результати цих розрахунків отримані числовим методом із (2) та при моделюванні методом Монте-Карло 40 тисяч траєкторій.

В першу чергу аналізували ті моменти, які потенційно рівні нулю в силу осьової симетрії задачі, оскільки при моделюванні вони всі виявляються відмінними від нуля.

Нас цікавило питання як швидко ці моменти спадають до нуля із ростом кількості іонів у вибірці. Для цього із повної вибірки траєкторій іона брали менші вибірки, зокрема по 1-ій і по 10 тисяч іонів і розраховували всі моменти їх розподілу. Виявилось, що зі збільшенням вибірки у 4 і у 36 разів, значення потенційно нульових моментів спадають за величиною, як і повинно бути згідно законів статистики. Проте зменшення обернено пропорційне квадратному кореню із числа іонів, якщо припустити, що випадкові відхилення від нуля мають малу складову, що не залежить від кількості іонів у вибірці.

Однією із причин появи такого доданку, на нашу думку може бути використання наближення парних зіткнень при моделюванні, коли вважається, що іон і атом мішені до і після зіткнення рухаються по асимптотам задачі двох тіл. Це відрізняється від дійсної траєкторії іона у твердому тілі, де атоми мішені розміщені настільки щільно, що вихід іона на асимптоту після першого зіткнення ще не відбувається до початку наступного зіткнення. Тобто парність зіткнень порушується. Це повинно бути помітним при низькій енергії легкого іона, коли колективний потенціал ядер і електронів остова не дозволяє близьких парних зіткнень. Для важких іонів високої енергії кути відхилення малі, а тому пружні зіткнення достатньо віддалені одне від одного і тому помилка від використання асимптотичних траєкторій буде малою.

Кут розсіяння іона після виходу на асимптоту задачі двох тіл максимальний і тому його використання робить пучок іонів ширшим ніж він є насправді. Це відбувається тому, що середнє значення вибірки випадкових кутів, наприклад, в межах від $-\pi$ до π більше як сума випадкових чисел більшої амплітуди. Це підтверджує моделювання розподілу іонів для трьох значень відношення їх маси до маси атома мішені. Для легкого іона (випадок $C \rightarrow W$) розподіл у

поперечному напрямі ширший ніж дає розв'язок рівняння (2), а для важкого іона у легку мішень (випадок $E \rightarrow Si$), їх відношення протилежне.

4. Висновки

Порівняння результатів розв'язків рівнянь (2) та моделювання траєкторій іонів методом Монте-Карло показали, що:

а) точність моментів розподілу, отриманих методом Монте-Карло спадає із ростом порядку моменту від першого до шостого від приблизно 0.1% до 30-50%;

б) моменти розподілу непарного порядку по поперечній координаті, які рівні нулю в силу симетрії функції розподілу, виявляються відмінними від нуля при моделюванні методом

Монте-Карло і можуть досягати 50% від значення ненульових вищих моментів;

в) асиметрія розподілу відносно його двох моментного, нормального наближення, яка описується так званою скісністю, отримана при моделюванні розподілу зупинених швидких іонів у твердому тілі методом Монте-Карло, має точність до десятків процентів;

г) збільшення кількості іонів для моделювання методом Монте-Карло зменшує статистичну складову цієї помилки, проте не впливає на складову, яка виникає внаслідок застосування спрощеної моделі іон-атомних зіткнень.

Список використаних джерел

1. Ландау Л.Д. Теоретическая физика: Т. V: Статистическая физика: Ч. 1. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц // М.: Наука. - 1976. - 584 с.
2. Макарець М.В., Юхименко О. Рівняння для функції розподілу імплантованих іонів та його кумулянтів. (2011) // Вісник Київського університету. Сер. Фізика. 2011, №12, с. 34-40.
3. Ziegler J.E. (1999) // The Stopping of Energetic Light Ions in Elemental Matter // *Appl. Phys. Rev. J. Appl. Phys.*-1999.-Vol.85.- p. 1249-1272.
4. <http://www.srim.org/> James F. Ziegler. The Stopping and Range of Ions in Matter // Software. SRIM-2013
5. Ilyina V.V., Makarets M.V. (2010) // Distribution of energy losses by fast ions along their propagation paths in solids. // *Ukr. J. Phys.* 2010, v.55, N2, p.235-242.
6. Чолій Я.В., Макарець М.В. Рівняння для кумулянтів просторового розподілу імплантованих іонів. // Вісник Київського університету. Сер. фізико-математичні науки. 2013, 4, с. 255-259.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по высшей математике (для научных работников и инженеров) // М.: Наука. - 1974. - 832 с.

References

1. LANDAU L.D., LIFSHITS E.M. (1976) *Statistical physics: Part 1.* M.: Nauka.
2. MAKARETS M.V., YUKHYMENKO O. (2011) *Equations for the distribution function of implanted ions and their cumulants.* (2011) // *Bulletin of Kyiv University. Ser. Physics.*, No. 12, p. 34-40.
3. ZIEGLER J.E. (1999) // *The Stopping of Energetic Light Ions in Elemental Matter* // *Appl. Phys. Rev. J. Appl. Phys.*-1999.-Vol.85.- p. 1249-1272.
4. <http://www.srim.org/> JAMES F. ZIEGLER. *The Stopping and Range of Ions in Matter* // Software. SRIM-2013
5. ILYINA V.V., MAKARETS M.V. (2010) *Distribution of energy losses by fast ions along their propagation paths in solids.* *Ukrainian J. Phys.*, v.55, N2, p.235-242.
6. CHOLIY Y.V., MAKARETS M.V. (2013) *The equation for the cumulants of the spatial distribution of implanted ions.* *Bulletin of Kyiv University. Ser. physical and mathematical sciences.*, 4, p. 255-259.
7. KORN G., KORN T. (1974) *Mathematical Handbook (for scientists and engineers)*, M.: Nauka.

Надійшла до редакції 2.06.2023

УДК 510.22, 330.42

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/1.17>

С. І. Колесник¹, студ.
М. В. Максютя¹, к.ф.-м.н., доц.
В. В. Обуховський¹, д.ф.-м.н., проф.

S. I. Kolesnyk¹, Stud.
M. V. Maksyuta¹, PhD., Associate Professor
V. V. Obukhovsky¹, Dr. of Sci., Professor

Порівняльний аналіз деяких систем ПРО/ППО за допомогою теорії нечітких множин

Comparative analysis of some anti-missile defense/air defense systems using fuzzy set theory

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03187, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4г,
e-mail: ua.serhii.kolesnyk@gmail.com
e-mail: maksyuta.nik@gmail.com
e-mail: obukhovsky.v@gmail.com

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03187, Kyiv, Glushkova avenue, 4g,
e-mail: ua.serhii.kolesnyk@gmail.com
e-mail: maksyuta.nik@gmail.com
e-mail: obukhovsky.v@gmail.com

Стаття присвячена проблемі використання систем ПРО/ППО для захисту критичної та військової інфраструктури під час військових дій. Звертається увага на те, що ці системи можуть піддаватися атакам та пошкодженням, що може призводити до значних втрат критичної інфраструктури. Для запобігання (або зменшення) цих втрат у даній роботі пропонується використовувати інформацію, яку можна одержати на основі порівняльного аналізу тактико-технічних характеристик використовуваних систем ПРО/ППО. Зокрема, на прикладі п'яти систем ПРО/ППО продемонстровано як можна здійснювати цей порівняльний аналіз за допомогою теорії нечітких множин.

Ключові слова: системи ПРО/ППО; критична та військова інфраструктура; зенітно-ракетний комплекс; техніко-економічний аналіз; нечіткі множини.

The article is devoted to the problem of using air defense / missile defense systems to protect critical and military infrastructure during hostilities. Attention is drawn to the fact that these systems can be attacked and damaged, which can lead to significant losses of critical infrastructure. To prevent (or reduce) these losses, this paper proposes to use information that can be obtained on the basis of a comparative analysis of the performance characteristics of the used air defense / missile defense systems. In particular, on the example of five such systems, it is demonstrated how this comparative analysis can be carried out using the theory of fuzzy sets (for this, the work considered inclusion operations, dominance relations, calculated the so-called linear and quadratic fuzzy indices, and also constructed various sets of α -levels).

Keywords: anti-missile defense/air defense systems; critical and military infrastructure; anti-aircraft missile complex; technical and economic analysis; fuzzy sets.

Статтю представив д.ф.-м.н., професор Савенков С.М.

Вступ

Проблема захисту критичної та військової інфраструктури за використанням систем протиракетної оборони/протиповітряної оборони (ПРО/ППО) стає основним завданням під час будь-яких військових дій. Внаслідок таких дій, розпочатих 24 лютого 2022 року, протиракетна оборонна система в Україні зазнала пошкоджень, що призвело до втрат радіолокаційних станцій та зенітно-ракетних комплексів (ЗРК). Такі втрати

не можна компенсувати швидко, тому що на створення такого складного обладнання, як радіолокаційна станція, потрібно приблизно півтора року. Незважаючи на це, системи ПРО/ППО все-таки працюють і надають певний рівень захисту критичної інфраструктури. Проте для цього потрібно використовувати різні комплекси для відповідного збиття цілей.

З метою оптимального вибору відповідних систем ПРО/ППО в роботі показується як можна здійснювати порівняльний аналіз їх тактико-

технічних характеристик за допомогою теорії нечітких множин. Вибір такої формальної мови, у першу чергу, обумовлений нечіткістю інформації (частіше її засекреченістю) щодо необхідних для проведення порівняльного аналізу техніко-економічних характеристик.

Необхідно зазначити, що результати цього аналізу можуть бути використані для покращення наявних систем ПРО/ППО та розробки нових. Наприклад, в результаті аналізу можна визначати найбільш ефективні комплекси. Крім того, можна визначати слабкі місця наявних систем, що дозволить спрямувати зусилля на їхнє поліпшення та підвищення надійності.

Отже, проведення технічного-економічного аналізу систем ПРО/ППО та подібних комплексів за допомогою теорії нечітких множин є актуальним та необхідним для забезпечення ефективного захисту критичної та військової інфраструктури. Результати аналізу можуть бути використані для покращення наявних систем та розробки нових, що дозволить забезпечити надійний захист від ворожих атак.

Оскільки інформація щодо систем ППО/ПРО не є загальнопоширеною, то літературних джерел недостатньо багато. Ми черпали інформацію із відкритих інтернет-ресурсів (проте достовірність цієї інформації може бути сумнівною). Стосовно ж літератури по використанню теорії нечітких множин для розглядуваного у даній статті аналізу, то авторам взагалі нічого не відомо.

Таким чином, тут вперше проводиться порівнювальний аналіз деяких систем ПРО/ППО на основі використання їх тактико-технічних характеристик (а також їх вартостей).

Короткий опис п'яти систем ПРО/ППО

Першою для розгляду вибираємо систему (або комплекс) "IRIS-T" SLM [1, 2]. Це – найсучасніша система ППО німецького виробництва. Її не мають ще навіть німецькі збройні сили. Цей комплекс розроблений німецькою оборонною компанією Diehl Defence. "IRIS-T" – комплекс ЗРК середнього радіусу дії, який призначений для знищення крилатих та балістичних ракет, а також літаків, гелікоптерів та безпілотних літальних апаратів. Основою ЗРК є модифіковані авіаційні ракети "IRIS-T" класу

"повітря-повітря". Пускові установки можуть мати колісне або гусеничне шасі та містять 4 направляючих або 8 контейнерів з ракетами для вертикального пуску (див. рис. 1а).

Другим нехай буде ЗРК "NASAMS" [3], до складу якого входять пускові установки, радіолокаційні станції (РЛС) Raytheon AN/MPQ-64F1 Sentinel від консорціуму Raytheon і Kongsberg. Фактично – це система ППО малої дальності й вона може збивати все в небі: від безпілотників до балістичних ракет і винищувачів. Кожна пересувна пускова установка має шість контейнерів із зенітними ракетами. Основним засобом виявлення повітряних об'єктів є РЛС "AN/MPQ-64", яка виявляє повітряні цілі на відстані до 40 км. Цей ЗРК показаний на рис. 1б.

Третім ЗРК вважатимемо мобільний ракетний комплекс ПРО/ППО "MIM-23 HAWK" [4], який є комплексом середньої дальності. Він має три пускові установки M192 з трьома зенітними керованими ракетами MIM – 23В на кожній. Крім того, до його складу входять імпульсна РЛС вказівки AN/MPQ-50, радіолокаційний далекомір AN/MPQ – 51 тощо (див. рис. 1в).

Останнім із ЗРК, але не останнім з розглядуваних є ЗРК "Stormer HVM" (High Velocity Missile) [5] – ЗРК малої дальності. Він являє собою пускову установку ракет Starstreak або Martlet LMM з 8 контейнерами, що встановлені на броньовану гусеничну платформу Stormer. На даху машини встановлений панорамний (всеракурсний) приціл і система попередження про повітряну загрозу для розпізнавання цілей та визначення їх пріоритетності (рис. 1г).

Останнім комплексом для розгляду буде зенітна самохідна установка (ЗСУ) "Gepard" [6, 7]. Це – німецька установка, яка має автоматизовану систему управління ведення вогню. Вона під час стрільби враховує атмосферний тиск, температуру та вологість повітря, а також швидкість і напрямок вітру. Установка призначена для прикриття важливих об'єктів інфраструктури та військових підрозділів від атак гелікоптерів та літаків на малих і надмалих висотах. "Gepard" базується на шасі танка "Leopard 1" (див. рис. 1д).

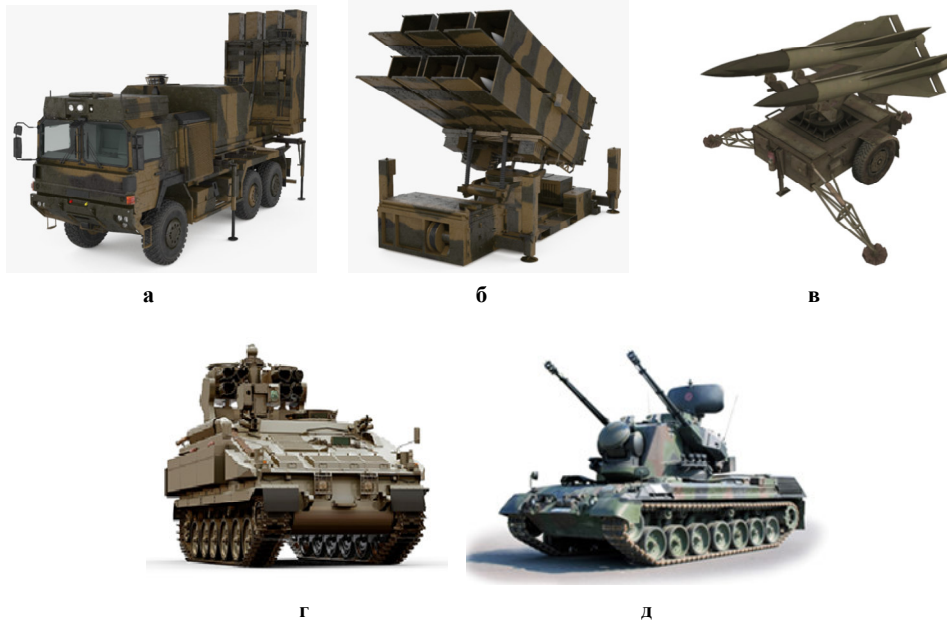


Рис. 1. Системи ПРО/ППО: а – ЗПК “IRIS-T” SLM, б – ЗПК “NASAMS”, в – ЗПК “MIM-23 HAWK”, г – ЗПК “Stormer HVM”, д – ЗСУ “Gepard”

З метою проведення порівняльного аналізу наводимо в табл. 1 їх тактико-технічні показаних на рис. 1 систем ПРО/ППО за характеристики та їх вартості. допомогою використання теорії нечітких множин

Таблиця 1

Тактико-технічні характеристики та вартість ЗПК/ЗСУ

Характеристики \ ЗПК/ЗСУ	ЗПК “IRIS-T”	ЗПК “NASAMS”	ЗПК “MIM- 23 HAWK”	ЗПК “Stormer HVM”	ЗСУ “Gepard”
Дальня межа зони поразки, км	40	40	40	7	4
Ближня межа зони поразки, км	2,5	2,5	1	0,1	0,1
Мінімальна висота поразки, км	0,015	0,03	0,03	0,03	0,1
Максимальна висота поразки, км	20	16	18	7	3
Імовірність поразки однією ЗР	0,9 – 0,95	0,85	0,85	0,95	0,9
Швидкість цілі, м/с	1020	1000	900	1360	400
Кількість супроводжуваних цілей	8	6	3	1	1
Кількість ПУ у комплексі	3	3	3	6	4
Приблизна вартість, млн. дол.	156	202	109	200	54

Переходимо тепер до порівняльного розгляду цих систем ПРО/ППО за допомогою теорії нечітких множин, які вперше були введені в роботу [8].

Утворення нечітких підмножин для п'яти систем ПРО/ППО

Застосовуємо тепер теорію нечітких множин до тактико-технічних та вартісних характеристик (множина із дев'яти параметрів) розглядуваних п'яти систем ПРО/ППО. Для цього вводимо позначення для описаних вище систем ПРО/ППО

за використання перших великих літер латинського алфавіту: **A** – ЗПК “IRIS – T”; **B** – ЗПК “NASAMS”; **C** – ЗПК “MIM –23 HAWK”; **D** – ЗПК Stormer HVM”; **E** – ЗСУ “Gepard”.

Наступний крок пов'язаний із введенням позначень для тактико-технічних та вартісних характеристик. При цьому наводяться і найкращі числові значення цих параметрів, на яких

характеристичній функції приналежності (див. [1]) присвоюється максимальне значення 1 з інтервалу приналежності $[0, 1]$. Слід зазначити, що, якщо найкраще числове значення – це максимум серед однойменних характеристик, то характеристична функція на даному числовому інтервалі набуває одиничне значення. Якщо ж найкращим значенням вважатиметься мінімальне значення серед всіх однойменних характеристик, то тоді характеристичній функції присвоюється одиничне значення на оберненій числовій величині.

Отже, як видно з табл. 1, найкращими значеннями у множині тактико-технічних та вартісних характеристик є такі: 1) x_1 – дальня зона поразки аеродинамічної цілі – 40 км; 2) x_2 – ближня зона поразки аеродинамічної цілі – 0,1 км; 3) x_3 – максимальна висота поразки

аеродинамічної цілі – 20 км; 4) x_4 – мінімальна висота поразки аеродинамічної цілі – 0,015 км; 5) x_5 – імовірність поразки однією ЗР аеродинамічної цілі – 0,95; 6) x_6 – швидкість цілі, яку можна поразити – 1360 м/с; 7) x_7 – кількість супроводжуваних та обстрілюваних цілей – 8; 8) x_8 – кількість ПУ у комплексі – 6; 9) x_9 – вартість системи ПРО/ППО – 54 млн. дол.

З урахуванням цих позначень після розрахунку характеристичних функцій приналежностей $\mu_{\tilde{A}}(x_i)$, $\mu_{\tilde{B}}(x_i)$, $\mu_{\tilde{C}}(x_i)$,

$\mu_{\tilde{D}}(x_i)$, $\mu_{\tilde{E}}(x_i)$ (обчислюються прості пропорції)

для кожної із дев'яти характеристик кожній із п'яти систем ПРО/ППО зіставляються такі нечіткі підмножини:

$$\tilde{A} = \{(x_1 | 1), (x_2 | 0,04), (x_3 | 1), (x_4 | 1), (x_5 | 0,97), (x_6 | 0,75), (x_7 | 1), (x_8 | 0,5), (x_9 | 0,33)\}. \quad (1)$$

$$\tilde{B} = \{(x_1 | 1), (x_2 | 0,04), (x_3 | 0,5), (x_4 | 0,8), (x_5 | 0,9), (x_6 | 0,74), (x_7 | 0,75), (x_8 | 0,5), (x_9 | 0,27)\}. \quad (2)$$

$$\tilde{C} = \{(x_1 | 1), (x_2 | 0,1), (x_3 | 0,5), (x_4 | 0,9), (x_5 | 0,9), (x_6 | 0,66), (x_7 | 0,38), (x_8 | 0,5), (x_9 | 0,5)\}. \quad (3)$$

$$\tilde{D} = \{(x_1 | 0,18), (x_2 | 1), (x_3 | 0,5), (x_4 | 0,35), (x_5 | 1), (x_6 | 1), (x_7 | 0,13), (x_8 | 1), (x_9 | 0,27)\}. \quad (4)$$

$$\tilde{E} = \{(x_1 | 0,1), (x_2 | 1), (x_3 | 0,15), (x_4 | 0,15), (x_5 | 95), (x_6 | 29), (x_7 | 0,13), (x_8 | 67), (x_9 | 1)\}. \quad (5)$$

Далі буде продемонстровано, що за допомогою одержаних нечітких підмножин (1) – (5) набагато легше та швидше порівнювати тактико-технічні характеристики різних систем ПРО/ППО (як із урахуванням характеристики вартості, так і без неї) у порівнянні з неформалізованим аналізом. Інший аргумент використання нечітких множин (особливо у військовій справі) пов'язаний з тим, що часто інформація щодо деяких характеристик має наближений (імовірнісний, а у деяких випадках і засекречений характер). У наступному пункті за використанням простих операцій (див. попередній пункт) і проводиться порівняльний аналіз розглядуваних систем ПРО/ППО, яким зіставляються нечіткі підмножини (1) – (5).

Порівняльний аналіз систем ПРО/ППО за допомогою операцій із теорії нечітких множин

Достатньо простий аналіз систем ПРО/ППО за допомогою теорії нечітких множин вже можна провести за допомогою простої операції включення, пов'язаної безпосередньо з відношенням домінування [9]. Як видно з формул

(1) і (2), підмножина $\tilde{B}$ строго включається у множину $\tilde{A}$, тобто $\tilde{B} \subset \tilde{A}$. Це, дійсно, так, оскільки серед нерівностей $\mu_{\tilde{B}}(x_i) \leq \mu_{\tilde{A}}(x_i)$ є й строги (ще говорять, що множина $\tilde{A}$ домінує над множиною $\tilde{B}$). З іншими ж нечіткими підмножинами підмножину $\tilde{A}$ не можна порівнювати.

Інших відношень домінувань між нечіткими підмножинами $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, $\tilde{D}$, $\tilde{E}$ не спостерігається.

Це означає, що ідеальний комплекс може існувати лише теоретично. Із цього короткого аналізу слідує, що комплекс $\tilde{A}$ (далі будемо комплекси називати коротко, користуючись введеними для них позначеннями) може виконувати ті ж самі задачі краще, ніж комплекс $\tilde{B}$, маючи при цьому меншу вартість.

Із формул (1) – (5) можна також бачити, що для нечітких підмножин $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, $\tilde{D}$, $\tilde{E}$, із яких виключені, наприклад, елементи x_6 , x_7 , x_8 , з'являється ще одне відношення домінування:

тепер і комплекс **С** домінує над комплексом **В**, маючи при цьому меншу вартість, ніж комплекс **А**. Якщо ж виключити і елемент x_9 , який є характеристикою вартості, то з'являється ще домінування комплексу **Д** над комплексом **Е**. Таким чином, і в цих випадках абсолютне домінування одного комплексу над усіма іншими не існує.

Можна і далі розглядати різні варіанти щодо пошуку нових домінувань. Проте існують й інші операції маніпулювання з нечіткими підмножинами, які є більш чутливими до значень характеристичних функцій приналежностей на елементах x_i .

Розраховуємо, наприклад, лінійні та квадратичні індекси нечіткостей. Для цього, у відповідності з критерієм

$$\mu_{\underline{A}}(x_i) = \begin{cases} 0, & \mu_{\underline{A}}(x_i) < 0,5, \\ 1, & \mu_{\underline{A}}(x_i) > 0,5, \\ 0 \text{ або } 1, & \mu_{\underline{A}}(x_i) = 0,5, \end{cases}$$

(див. [9]), виписуємо звичайні підмножини $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$ і $\underline{E}$, які розташовані на найменших евклідових відстанях від відповідних нечітких підмножин $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, $\tilde{D}$ і $\tilde{E}$.

$$\underline{A} = \{(x_1 | 1), (x_2 | 0), (x_3 | 1), (x_4 | 1), (x_5 | 1), (x_6 | 1), (x_7 | 1), (x_8 | 1), (x_9 | 0)\}. \quad (6)$$

$$\underline{B} = \{(x_1 | 1), (x_2 | 0), (x_3 | 1), (x_4 | 1), (x_5 | 1), (x_6 | 1), (x_7 | 1), (x_8 | 1), (x_9 | 0)\}. \quad (7)$$

$$\underline{C} = \{(x_1 | 1), (x_2 | 0), (x_3 | 1), (x_4 | 1), (x_5 | 1), (x_6 | 1), (x_7 | 0), (x_8 | 1), (x_9 | 1)\}. \quad (8)$$

$$\underline{D} = \{(x_1 | 0), (x_2 | 1), (x_3 | 1), (x_4 | 0), (x_5 | 1), (x_6 | 1), (x_7 | 0), (x_8 | 1), (x_9 | 0)\}. \quad (9)$$

$$\underline{E} = \{(x_1 | 0), (x_2 | 1), (x_3 | 0), (x_4 | 0), (x_5 | 1), (x_6 | 0), (x_7 | 0), (x_8 | 1), (x_9 | 1)\}. \quad (10)$$

За формулами $d(\underline{A}, \underline{B}) = \sum_{i=1}^n |\mu_{\underline{A}}(x_i) - \mu_{\underline{B}}(x_i)|$ і $e(\underline{A}, \underline{B}) = \sum_{i=1}^n [\mu_{\underline{A}}(x_i) - \mu_{\underline{B}}(x_i)]^2$ знаходимо відстані Хеммінга та евклідові відстані між відповідними підмножинами $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$, $\underline{E}$ та $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, $\tilde{D}$, $\tilde{E}$ [9]. Після цього за формулами $v(\tilde{A}) = \frac{2}{n} d(\underline{A}, \tilde{A})$ і $\eta(\tilde{A}) = \frac{2}{\sqrt{n}} e(\underline{A}, \tilde{A})$ (див. [9]) обчислюємо лінійні $v(\tilde{A})$, $v(\tilde{B})$, $v(\tilde{C})$, $v(\tilde{D})$, $v(\tilde{E})$ та квадратичні $\eta(\tilde{A})$, $\eta(\tilde{B})$, $\eta(\tilde{C})$, $\eta(\tilde{D})$, $\eta(\tilde{E})$ індекси нечіткостей (див. табл. 2).

Таблиця 2

Лінійні та квадратичні індекси нечіткостей для використовуваних систем ПРО/ППО

Комплекси ПРО/ППО	ЗПК “IRIS – Т”	ЗПК “NASAMS”	ЗПК “MIM – 23 HAWK”	ЗПК “Stormer HVM”	ЗСУ “Gepard”
v	0,26	0,47	0,56	0,32	0,27
η	0,43	0,53	0,67	0,47	0,34

Як видно із табл. 2, лінійні індекси нечіткостей для ЗПК “IRIS – Т” і ЗСУ “Gepard” майже збігаються. Задаємось запитанням: на що

це може вказувати? Як впливає із теорії нечітких множин [9], має місце така цікава властивість:

$$\forall x_i \in E: \left| \mu_{\underline{A}}(x_i) - \mu_{\underline{A}}(x_i) \right| = \mu_{\underline{A} \cap \bar{A}}(x_i). \quad (11)$$

Очевидно, що з рівності (11) випливають ще дві такі еквівалентні формули для розрахунку лінійного індексу нечіткості:

$$v(\tilde{A}) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{A}}(x_i), \quad (12)$$

$$v(\tilde{A}) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \min(\mu_{\tilde{A}}(x_i), \mu_{\tilde{A}}(x_i)). \quad (13)$$

Із формули (12) видно, що має місце така (важлива для нашого подальшого аналізу) формула:

$$v(\tilde{A}) = v(\tilde{A}). \quad (14)$$

Отже, на основі формули (14) можна констатувати, що між комплексами **A** і **E** проявляється відношення достатньо близького взаємного доповнення, незважаючи на те, що строгого доповнення нечіткої підмножини **A** до нечіткої підмножини **E** (і навпаки), як видно із формул (1) і (5), не існує. Також, як видно із табл. 2, у якійсь мірі, взаємно доповнюють один одного і зенітно-ракетні комплекси “NASAMS” та “MIM – 23 HAWK”.

Для встановлення нових властивостей нечітких підмножин **A**, **B**, **C**, **D** і **E** необхідно побудувати для них так звані звичайні підмножини α -рівнів. Наприклад, для нечіткої підмножини **A** підмножина α -рівня визначається так:

$$A_{\alpha} = \left\{ x_i \mid \mu_{\tilde{A}}(x_i) \geq \alpha \right\}. \quad (15)$$

Аналогічно будуються й інші підмножини **B** $_{\alpha}$,

$$C_{\alpha}, D_{\alpha} \text{ і } E_{\alpha}.$$

Для значень $\alpha \in \{0,25; 0,5; 0,75\}$ на рис. 2 побудовані гістограми, за допомогою яких можна проводити наглядний аналіз поведінки нечітких підмножин **A**, **B**, **C**, **D** і **E** щодо обмежень (вимог), які задаються відповідними α -рівнями.

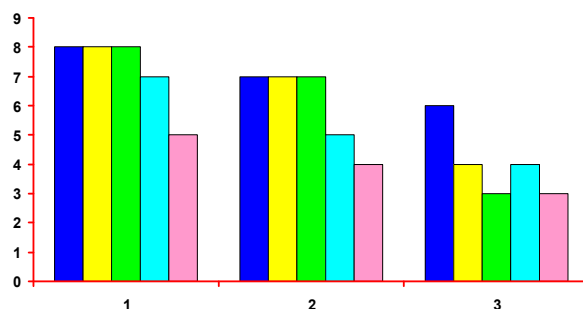


Рис. 2. Гістограми візуалізації звичайних підмножин α -рівнів – (1), α -рівнів – (2) і α -рівнів – (3), побудованих на нечітких підмножинах **A**, **B**, **C**, **D** і **E** (по осі ординат указуються кількості елементів, що долають відповідні рівні)

Як видно із рис. 2, при зростанні α не всі розглядані нечіткі підмножини (системи ПРО/ППО) поведуть себе однакою чином. При $\alpha = 0,25$ у підмножинах **A**, **B**, **C** не долає цього бар'єру лише один елемент x_2 . При цьому підмножина **D** на цьому рівні втрачає два елементи (x_1 і x_7), а підмножина **E** чотири елементи (x_1 , x_3 , x_4 і x_7). На рівні $\alpha = 0,5$ підмножини **A**, **B**, **C** продовжують зберігати свою відносну стабільність щодо зміни α , втрачаючи ще лише по одному елементу (x_9 підмножини **A**, **B** і x_7 підмножини **C**). Підмножина ж **D** на цьому рівні втрачає ще два

елементи (x_4 і x_9), але підмножина **E** не дораховується лише одного елемента x_6 . Нарешті, на рівні $\alpha = 0,75$ однакою стабільність, як видно із гістограм на рис. 1, мають тільки підмножини **A** і **E** (порівнюючи числові дані в табл. 2 з гістограмами на рис. 2, можна помітити між ними кореляцію).

Якщо проведений аналіз перевести на мову комплексів, то можна переконливо стверджувати, що комплекс “IRIS – T” є одним з найкращих. Показано, що з ним у зв'язці бажано працювати ЗСУ “Gepard”. У випадку ж форс-мажорних ситуацій може використовуватись і зв'язка ЗРК “NASAMS” із ЗРК “MIM – 23 HAWK”.

Висновки

На основі вибору восьми тактико-технічних характеристик (з включенням вартості) для п'яти систем ПРО/ППО, а саме ЗРК "IRIS – T", "NASAMS", "MIM – 23 HAWK", "Stormer HVM" і ЗСУ "Gepard", були утворені п'ять нечітких підмножин $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, $\tilde{D}$, $\tilde{E}$.

За допомогою операцій над цими нечіткими підмножинами був проведений порівняльний аналіз. У результаті розрахунку лінійних та квадратичних індексів нечіткостей встановлені наближені відношення доповнень між п'ятьма комплексами ПРО/ППО. Розраховані та досліджені також звичайні підмножини 0,25; 0,5; 0,75 – рівнів з метою встановлення нових властивостей між нечіткими підмножинами $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, $\tilde{D}$, $\tilde{E}$. На основі цього зроблені попередні оцінювання можливостей досліджуваних п'яти систем ПРО/ППО.

Зазначимо, що за використанням так званої неймовірнісної ентропії [10] та різних нечітких відношень [9] порівняльний аналіз може стати ще більш витонченим.

Список використаних джерел

1. IRIS – T – Вікіпедія – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://uk.wikipedia.org/wiki/IRIS-T>.
2. Німецький комплекс для української ППО – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://mil.in.ua/uk/blogs/nimetskyj-kompleks-dlya-ukrayinskoyi-protypovityranoyi-oborony/>.
3. Zenitnyy raketnyy kompleks NASAMS, Raketna tekhnika – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://missilery.info/missile/nasams>.
4. ЗРК Improved Hawk (MIM 23B), Raketna tekhnika – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://missilery.info/missile/ihawk>.
5. Alvis Stormer HVM CVRT For Sale – Tracked Fighting Vehicle – [Internet resource] – Access: <https://tanks-alot.co.uk/product/alvis-stormer-hvm/>.
6. Гепард (ЗСУ) – Вікіпедія – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://surl.li/dxyrx>.
7. Zenitni ustanovky "Gepard" працюють на Харківщині – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://mil.in.ua/uk/news/zenitni-ustanovky-gepard-pratsyuyut-na-harkivshhyni/>.
8. Zadeh L.A. Fuzzy Sets / L.A. Zadeh // Inform. and Control – 1965. – V. 8. – P. 338-353.
9. Kaufmann A. Introduction a la theorie des sous-ensembles flous (Fuzzy Set Theory) / A. Kaufmann. – Paris-New York-Barcelone-Milan: Masson, 1977. – 334 p.

10. De Luca A., Termini S. A Definition of a Nonprobabilistic Entropy in the Setting of Fuzzy Sets Theory / L.A. Zadeh, S. Termini // Inform. and Control – 1972. – V. 20. – P. 301-312.

References

1. Lawrence M.S., IRIS – T – Vikipediya [IRIS – T – Wikipedia]. Available at: <https://uk.wikipedia.org/wiki/IRIS-T> [Accessed 24 April 2023].
2. Chmut T.M., Nimets'kyi kompleks dlya ukrayins'koyi PPO [German complex for Ukrainian air defense]. Available at: <https://mil.in.ua/uk/blogs/nimetskyj-kompleks-dlya-ukrayinskoyi-protypovityranoyi-oborony/> [Accessed 24 April 2023].
3. Gurov S.N., Zenitnyy raketnyy kompleks NASAMS, Raketna tekhnika [NASAMS anti-aircraft missile system, Missile technology]. Available at: <https://missilery.info/missile/nasams> [Accessed 24 April 2023].
4. Gurov S.N., ZRK Improved Hawk (MIM 23B), Raketna tekhnika [Improved Hawk air defense system (MIM 23B), Missile technology]. Available at: <https://missilery.info/missile/ihawk> [Accessed 24 April 2023].
5. "Tanks-a lot", Alvis Stormer HVM CVRT For Sale – Tracked Fighting Vehicle. Available at: <https://tanks-alot.co.uk/product/alvis-stormer-hvm/> [Accessed 24 April 2023].
6. Lawrence M.S., Gepard (ZSU) – Vikipediya [Flakpanzer Gepard Wikipedia]. Available at: <http://surl.li/dxyrx> [Accessed 24 April 2023].
7. Chmut T.M., Zenitni ustanovky "Gepard" pratsyuyut na Kharkivshchyni ["Gepard" anti-aircraft installations operate in Kharkiv region]. Available at: <https://mil.in.ua/uk/news/zenitni-ustanovky-gepard-pratsyuyut-na-harkivshhyni/> [Accessed 24 April 2023].
8. Zadeh L.A., 1965, Fuzzy Sets. Information and Control, no. 8, pp. 3383 – 53.
9. Kaufmann A., 1977. Introduction a la theorie des sous-ensembles flous (Fuzzy set theory). Paris-New York-Barcelone-Milan: Masson
10. De Luca A., Termini S., 1972. A Definition of a Nonprobabilistic Entropy in the Setting of Fuzzy Sets Theory. Information and Control, no. 20, pp. 301 – 312.

Надійшла до редакції: 23.04.2023