

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

№4 2022

**Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
випуск №4, 2022,**

Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Фізика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, механіко-математичного факультетів, факультету радіофізики, електроніки та комп’ютерних систем і факультету комп’ютерних наук та кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора, кандидата наук і PhD за спеціальностями 111, 112, 113, 104, 105 (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1188 від 24.09.2020) та за спеціальностями 121, 122, 123, 124 (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1471 від 26.11.2020), та реферується в Реферативному журналі Zentralblatt MATH, JournalTOCs, Crossref, ICI World of Journals, Road, Google Scholar і Науковій періодиці України.

Редакційна колегія:

Моклячук Михайло Павлович, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор**;
Розора Ірина Василівна, д.ф.-м.н., доц., **заст. головного редактора**;
Bartlova Milada, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;
Bavula Vladimir, Prof., University of Sheffield, Great Britain;
Beghin Luisa, Prof., Sapienza Università di Roma, Italy;
Futorny Vyacheslav, Prof., Universidade de São Paulo, Brazil;
Giuliano Rita, Prof., Università di Pisa, Italy;
Gorlatch Sergei, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;
Hudak Stefan, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;
Kukhtarev Nickolai, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;
Leonenko Nikolay, Prof., Cardiff University, Great Britain;
Medvids Arturs, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;
Olenko Andriy, Prof., La Trobe University, Australia;
Orsingher Enzo, Prof., Sapienza University of Rome, Italy;
Ostrovsky Eugene, Prof., Bar- Ilan University, Israel;
Pogany Tibor, Prof., University of Rijeka, Croatia;
Rontó Miklós, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;
Silvestrov Dmitrii, Prof., Stockholms universitet, Sweden;
Sottinen Tommi, Prof., University of Vaasa, Finland;
Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;
Trofimchuk Sergey, Prof., Universidadde Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;
Volodin Andrei, Prof., University of Regina, Canada;
Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;
Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Безущак Оксана Омелянівна, д.ф.-м.н., проф.;
Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;
Гарашенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;
Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;
Жук Ярослав Олександрович, д.ф.-м.н., проф.;
Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., проф.;
Курченко Олександр Олексійович, д.ф.-м.н., проф;

Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;
Львов Віктор Анатолійович, д.ф.-м.н., проф.;
Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;
Майборода Ростислав Євгенович, д.ф.-м.н., проф.;
Мішура Юлія Степанівна, д.ф.-м.н., проф.;
Пашко Анатолій Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Петравчук Анатолій Петрович, д.ф.-м.н., проф.;
Погорілий Сергій Дем'янович, д.т.н., проф.;
Савенков Сергій Миколайович, д.ф.-м.н., доц.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.;
Сливка-Тилищак Ганна Іванівна, д.ф.-м.н., проф.;
Хусаїнов Денис Ях'євич, д.ф.-м.н., проф.;

Редакційний відділ:

Затула Дмитро Васильович, **відповідальний секретар**;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
П'ятецька Олена Василівна, visnyk.phys-math@ukr.net;
Отто Георгій Костянтинівич, **технічний редактор**, ottogk@gmail.com.

Адреса редакційної колегії:

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03022 Тел. (044) 259-01-49
bphm@knu.ua, fm.visnyk@ukr.net

ISSN 1812-5409

Засновник: Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Свідоцтво про державну реєстрацію: КВ №16299-4771Р від 11.12.2009 року

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/4>

Безкоштовно

The journal contains results of new research in various fields of mathematics, computer science, mechanics, physics and radiophysics for researchers, academic staff, postgraduates, engineers and students. It is published on the recommendation of the Academic Councils of Faculty of Physics, Faculty of Radiophysics, Electronics and Computer Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics and the Faculty of Computer Science and Cybernetics.

Journal "Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics" is included in the List of scientific professional publications of Ukraine, in which the results of the theses for obtaining the scientific degrees of a doctor and a candidate of sciences (PhD) in specialties 111, 112, 113, 104, 105, 121, 122, 123 and 124 can be published (approved by the orders of the Ministry of Education and Science of Ukraine No. 1188 dated September 24, 2020 and No. 1471 dated November 26, 2020).

Journal is referenced in the abstract journal **Zentralblatt MATH (zbMATH), JournalTOCs, Crossref, ICI World of Journals, Road, Google Scholar and Scientific periodicals of Ukraine.**

Editorial Board

Moklyachuk Mikhail Pavlovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine,
Editor in Chief;

Rozora Iryna Vasylyvna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Ukraine, Deputy Editor in Chief;

Bartlova Milada, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;

Bavula Vladimir, Prof., University of Sheffield, Great Britain;

Beghin Luisa, Prof., Sapienza Università di Roma, Italy;

Futorny Vyacheslav, Prof., Universidade de São Paulo, Brazil;

Giuliano Rita, Prof., Università di Pisa, Italy;

Gorlatch Sergei, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;

Hudak Stefan, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;

Kukhtarev Nikolai, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;

Leonenko Nikolay, Prof., Cardiff University, Great Britain;

Medvids Arturs, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;

Olenko Andriy, Prof., La Trobe University, Australia;

Orsingher Enzo, Prof., Sapienza University of Rome, Italy;

Ostrovsky Eugene, Prof., Bar-Ilan University, Israel;

Pog'any Tibor, Prof., University of Rijeka, Croatia;

Rontó Miklós, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;

Silvestrov Dmitrii, Prof., Stockholm University, Sweden;

Sottinen Tommi, Prof., University of Vaasa, Finland;

Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;

Trofimchuk Sergey, Prof., Universidad de Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;

Volodin Andrei, Prof., University of Regina, Canada;

Akimenko Vitaliy Vladimirovich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Anisimov Igor Alekseevich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Anisimov Anatoliy Vasyl'ovych, Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Bezuschak Oksana Omelyanivna, Dr., Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Voloshin Aleksey Fedorovich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Garaschenko Fedir Georgievich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Yezhov Stanislav Nikolaevich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Zhuk Yaroslav Aleksandrovich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Zaslav's'kyj Volodymyr Anatolijovych, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Kurchenko Oleksandr Oleksijovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Kudin Volodymyr Ivanovich, Dr. Sci., Sr. Sci. Researcher, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Lvov Victor Anatolijovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Makarets' Nikolay Vladimirovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Maiboroda Rostyslav Yevhenovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Mishura Yuliya Stepanivna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Pashko Anatolij Oleksijovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Perestyuk Mykola Oleksijovych, Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Petravchuk Anatolij Petrovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Pogorily Serhiy Demyanovych, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Savenkov Serhij Mykolajovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Skrzyevsky Valery Antonovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Slyvka-Tylyshchak Anna Ivanivna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Uzhhorod National University, Uzhhorod, Ukraine;
Husainov Denys Yah'yevych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine.

ISSN: 2218-2055 (on-line version)

ISSN: 1812-5409 (printed version)

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/4>

Founders: Taras Shevchenko National University of Kyiv

Foundation year: 1991 (series of bulletins of Kyiv University "Mathematics and Mechanics", "Physics", "Modeling and Optimization of Complex Systems" was reorganized into "Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics").

Certificate of state registration: KB № 16299-4771 P dated 11.12.2009

Issued: 4 times a year

Mailing Address

Taras Shevchenko National University of Kyiv
Faculty of Computer Science and Cybernetics,
03022, Ukraine, Kyiv, 4d Academician Glushkov avenue
Phone: (044) 259-01-49
bphm@knu.ua, fm.visnyk@ukr.net

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Борисенко О.Д., Борисенко О.В. Стохастична модель хижак-жертва, що залежить від щільності популяції хижака	11
Маляренко А., Мішура Ю. С., Рудик Є. А. О. Наближення дробових інтегралів гелдерових функцій	18
Приходько О.Д., Ральченко К.В. Строго конзистентне оцінювання всіх параметрів моделі Васічека за дискретними спостереженнями	26
Симонов Д.І., Горбачук В.М. Метод пошуку рішень у динамічній моделі управління запасами за невизначеності	31

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Капустян О.В., Ю.В. Федоренко, Циганівська І.М. ω -граничні множини для імпульсно-збуреного параболічного рівняння в просторі неперервних функцій	42
--	----

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Кулян В.Р., Юнькова О.О., Коробова М. В. Чутливість розв'язків при моделюванні динаміки інвестицій	51
Круковець Д.Ю. Багатоетапний алгоритм з DTW та кластеризацією для прогнозування середньої депозитної ставки в Україні	55
Михайлов Н. О. Класифікація користувачів на онлайн платформах методами машинного навчання	66
Пікульський Р. М., Кулябко П. П. Стан та перспективи подальших досліджень сфери обчислення глобального освітлення у реальному часі	72
Шарапов М.М., До питання щодо триноміальних функціоналів	80

CONTENTS

ALGEBRA, GEOMETRY AND PROBABILITY THEORY

Borysenko O.D., Borysenko O. V. A stochastic predator-prey model that depends on the population density of the predator	11
Malyarenko A., Mishura Yu. S., Rudyk Y. A. O. Approximation of fractional integrals of Hölder functions	18
Prykhodko O.D., Ralchenko K.V. Strongly consistent estimation of all parameters in the Vasicek model by discrete observations	26
Symonov D.I., Gorbachuk V.M. A method of finding solutions in a dynamic model of inventory management under uncertainty	31

DIFFERENTIAL EQUATIONS, MATHEMATICAL PHYSICS AND MECHANICS

Kapustyan O.V., Fedorenko J.V., Tsygansvska I.M. ω - limit sets for impulsive-perturbed parabolic equation in the space of continuous functions	42
--	----

COMPUTER SCIENCES AND INFORMATICS

Kulian V.R., Yunkova O.O., Korobova M.V. Solutions sensitivity when modeling of investment dynamics	51
Krukovets D.Yu. Multi-stage approach with DTW and clustering for forecasting of average deposit rate in Ukraine	55
Mykhailov N. O. Classifications of users on online platforms using machine learning techniques	66
Pikulsky R. M., Kuliabko P. P. Real-time global illumination computation status and further research prospects	72
Sharapov M.M. To the question of trinomial functionals	80

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ ТА ТЕОРИЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/4.1>

О. Д. Борисенко¹, к.ф.-м.н., доц.
О. В. Борисенко², к.ф.-м.н., доц.

O. D. Borysenko¹, Ph.D., Associate Professor
O. V. Borysenko², Ph.D., Associate Professor

Стохастична модель хижак-жертва, що залежить від щільності популяції хижака

A stochastic predator-prey model that depends on the population density of the predator

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64.

e-mail: borysenko13101953@gmail.com

² Національний технічний університет України "КПІ" 03056, г.Київ-56, проспект Перемоги, 37

e-mail: oborisenko1373@gmail.com

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.

e-mail: borysenko13101953@gmail.com

²National Technical University of Ukraine "KPI", 37 Prospect Peremogy, Kyiv 03056

e-mail: oborisenko1373@gmail.com

Доведено існування і єдиність додатного, глобального розв'язку системи стохастичних диференціальних рівнянь, яка описує динаміку популяцій у стохастичній, залежній від щільності хижаків моделі хижак-жертва з функціональною відповіддю типу Холлінг II. Одержано достатні умови граничної стохастичної обмеженості і стохастичної перманентності даної моделі.

Ключові слова: стохастична модель хижак-жертва, залежність від щільності хижаків, глобальний розв'язок, гранична стохастична обмеженість, стохастична перманентність.

The system of stochastic differential equations describing a nonautonomous stochastic density-dependent predator-prey model with Holling-type II functional response disturbed by white noise, centered and non-centered Poisson noises is considered. So, in this model we take into account levels of predator density dependence and jumps, corresponding to the centered and non-centered Poisson measures. The existence and uniqueness theorem for the positive, global (no explosions in the finite time) solution of the considered system is proved. We obtain sufficient conditions of stochastic ultimate boundedness and stochastic permanence in the considered stochastic predator-prey model.

Key Words: stochastic predator-prey model, predator density dependence, existence and uniqueness of global positive solution, ultimate boundedness, stochastic permanence.

Communicated by Prof. Moklyachuk M.P.

1 Introduction

Predator-prey interaction is a basic mechanism for two species dynamics. The predator-prey model usually described by the system of differential equations

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= x_1(t)(a_1 - b_1 x_1(t)) - f(x_1(t), x_2(t))x_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -x_2(t)a_2 + \kappa f(x_1(t), x_2(t))x_2(t),\end{aligned}$$

where $x_1(t)$, $x_2(t)$ represent the population density of prey and predator respectively at time t , $a_1 > 0$ is the growth rate of prey, $b_1 > 0$ measures the strength of competition among individuals of species x_1 , $a_2 > 0$ is the death rate of predator x_2 , $\kappa > 0$ denotes the conversion coefficient, $f(x_1, x_2)$ is the functional response

of the predator. The deterministic autonomous Rosenzweig-Mac'Arthur model ([1]) has a form

$$\begin{aligned}dx_1(t) &= x_1(t) \left(a_1 - b_1 x_1(t) - \frac{cx_2(t)}{1+mx_1(t)} \right) dt, \\ dx_2(t) &= x_2(t) \left(-a_2 + \frac{\kappa cx_1(t)}{1+mx_1(t)} \right) dt,\end{aligned}\tag{1}$$

c is the maximum ingestion rate; $m > 0$ is the half-saturation.

In the paper [2] the stochastic version of predator-prey model (1) is considered in the following form

$$\begin{aligned}dx_1(t) &= x_1(t) \left(a_1 - b_1 x_1(t) - \frac{cx_2(t)}{1+mx_1(t)} \right) dt \\ &\quad + \sigma_1 x_1(t) dw_1(t), \\ dx_2(t) &= x_2(t) \left(-a_2 + \frac{\kappa cx_1(t)}{1+mx_1(t)} \right) dt \\ &\quad + \sigma_2 x_2(t) dw_2(t),\end{aligned}\tag{2}$$

where $w_1(t)$ and $w_2(t)$ are mutually independent Wiener processes. In [2] the authors proved that there is a unique positive solution to the system (2), deduced the conditions that there is a stationary distribution of the system, which implies that the system is permanent and obtained the sufficient conditions for the system that is going to be extinct.

Population systems may suffer abrupt environmental perturbations, such as fires, hurricanes, earthquakes, etc. So it is natural to introduce Poisson noises into the population model for describing such discontinuous systems. There are considerable pieces of evidence in nature that predator species may be density-dependent. So we need to take into account levels of predator density dependence.

In this paper, we consider the non-autonomous density-dependent predator-prey model with Holling-type II functional response, disturbed by white noise and jumps generated by centered and non-centered Poisson measures. This model is driven by the system of stochastic differential equations

$$\begin{aligned} dx_i(t) = & x_i(t) \left[(-1)^{i-1} \left(a_i(t) - \frac{c_i(t)x_{3-i}(t)}{1+m(t)x_1(t)} \right) \right. \\ & \left. - b_i(t)x_i(t) \right] dt + \sigma_i(t)x_i(t)dw_i(t) \\ & + \int_{\mathbb{R}} \gamma_i(t, z)x_i(t^-)\tilde{\nu}_1(dt, dz) \\ & + \int_{\mathbb{R}} \delta_i(t, z)x_i(t^-)\nu_2(dt, dz), \\ & x_i(0) = x_{i0} > 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (3)$$

where $x_i(t^-)$, $i = 1, 2$ is a left limit of $x_i(t)$, $i = 1, 2$, $b_2(t) > 0$ is the predator density dependence rate, $c_2(t) = \kappa c_1(t)$, $w_i(t)$, $i = 1, 2$ are independent standard one-dimensional Wiener processes, $\nu_i(t, A)$, $i = 1, 2$ are independent Poisson measures, which are independent on $w_i(t)$, $i = 1, 2$, $\tilde{\nu}_1(t, A) = \nu_1(t, A) - t\Pi_1(A)$, $E[\nu_i(t, A)] = t\Pi_i(A)$, $i = 1, 2$, $\Pi_i(A)$, $i = 1, 2$ are finite measures on the Borel sets A in $\mathbb{R}$.

To the best of our knowledge, there have been no papers devoted to the dynamic properties of the stochastic predator-prey model (3).

In this paper, we prove that the system (3) has a unique, positive, global (no explosion in a finite time) solution for any positive initial value, and that this solution is stochastically ultimately bounded. The sufficient conditions for stochastic permanence is deduced. It is worth noting that the impact of centered and non-centered Poisson

noises to the stochastic non-autonomous predator-prey models is studied in the papers [3] – [5].

In the following we will use the notations

$$\begin{aligned} X(t) &= (x_1(t), x_2(t)), X_0 = (x_{10}, x_{20}), \\ |X(t)| &= \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}, \\ \mathbb{R}_+^2 &= \{X \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}, \\ \alpha_i(t) &= a_i(t) + \int_{\mathbb{R}} \delta_i(t, z)\Pi_2(dz), \\ \beta_i(t) &= \frac{\sigma_i^2(t)}{2} + \int_{\mathbb{R}} [\gamma_i(t, z) - \ln(1 + \gamma_i(t, z))]\Pi_1(dz) \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}} \ln(1 + \delta_i(t, z))\Pi_2(dz), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds,$$

$$f_* = \liminf_{t \rightarrow \infty} f(t), \quad f^* = \limsup_{t \rightarrow \infty} f(t).$$

For the bounded, continuous functions $f_i(t)$, $t \in [0, +\infty)$, $i = 1, 2$, let us denote

$$f_{i \sup} = \sup_{t \geq 0} f_i(t), \quad f_{i \inf} = \inf_{t \geq 0} f_i(t), \quad i = 1, 2.$$

2 Existence and uniqueness of global solution

Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ be a probability space, $w_i(t)$, $i = 1, 2$, $t \geq 0$ are independent standard one-dimensional Wiener processes on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, and $\nu_i(t, A)$, $i = 1, 2$ are independent Poisson measures defined on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ independent on $w_i(t)$, $i = 1, 2$. Here $E[\nu_i(t, A)] = t\Pi_i(A)$, $i = 1, 2$, $\tilde{\nu}_i(t, A) = \nu_i(t, A) - t\Pi_i(A)$, $i = 1, 2$, $\Pi_i(\cdot)$, $i = 1, 2$ are finite measures on the Borel sets in $\mathbb{R}$. On the probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ we consider an increasing, right continuous family of complete sub- σ -algebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, where $\mathcal{F}_t = \sigma\{w_i(s), \nu_i(s, A), s \leq t, i = 1, 2\}$.

We need the following assumption.

Assumption 1. It is assumed, that $a_i(t)$, $b_i(t)$, $c_i(t)$, $\sigma_i(t)$, $\gamma_i(t, z)$, $\delta_i(t, z)$, $i = 1, 2$, $m(t)$ are bounded, continuous on t functions, $a_i(t) > 0$, $i = 1, 2$, $b_{i \inf} > 0$, $c_{i \inf} > 0$, $i = 1, 2$, $m_{\inf} > 0$, and $\ln(1 + \gamma_i(t, z))$, $\ln(1 + \delta_i(t, z))$, $i = 1, 2$ are bounded, $\Pi_i(\mathbb{R}) < \infty$, $i = 1, 2$.

In what follows we will assume that Assumption 1 holds.

Theorem 2.1. *There exists a unique global solution $X(t)$ to the system (3) for any initial value $X(0) = X_0 \in \mathbb{R}_+^2$, and $\mathbf{P}\{X(t) \in \mathbb{R}_+^2\} = 1$.*

Proof. Let us consider the system of stochastic differential equations

$$\begin{aligned} d\xi_i(t) = & \left[(-1)^{i-1} \left(a_i(t) - \frac{c_i(t) \exp\{\xi_{3-i}(t)\}}{1+m(t) \exp\{\xi_1(t)\}} \right) \right. \\ & \left. - b_i(t) \exp\{\xi_i(t)\} - \beta_i(t) \right] dt + \sigma_i(t) dw_i(t) \\ & + \int_{\mathbb{R}} \ln(1 + \gamma_i(t, z)) \tilde{\nu}_1(dt, dz) \\ & + \int_{\mathbb{R}} \ln(1 + \delta_i(t, z)) \tilde{\nu}_2(dt, dz), \\ \xi_i(0) = & \ln x_{i0}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (4)$$

The coefficients of the system (4) are local Lipschitz continuous. So, for any initial value $(\xi_1(0), \xi_2(0))$ there exists a unique local solution $\Xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$ on $[0, \tau_e)$, where $\sup_{t < \tau_e} |\Xi(t)| = +\infty$ (cf. Theorem 6, p.246, [6]). Therefore, from the Itô's formula, we derive that the process $X(t) = (\exp\{\xi_1(t)\}, \exp\{\xi_2(t)\})$ is a unique, positive local solution to the system (3). To show this solution is global, we need to show that $\tau_e = +\infty$ a.s. Let $n_0 \in \mathbb{N}$ be sufficiently large for $x_{i0} \in [1/n_0, n_0], i = 1, 2$. For any $n \geq n_0$ we define the stopping time

$$\tau_n = \inf \left\{ t \in [0, \tau_e) : X(t) \notin \left(\frac{1}{n}, n \right) \times \left(\frac{1}{n}, n \right) \right\}.$$

It is easy to see that τ_n is increasing as $n \rightarrow +\infty$. Denote $\tau_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n$, whence $\tau_\infty \leq \tau_e$ a.s. If we prove that $\tau_\infty = \infty$ a.s., then $\tau_e = \infty$ a.s. and $X(t) \in \mathbb{R}_+^2$ a.s. for all $t \in [0, +\infty)$. So we need to show that $\tau_\infty = \infty$ a.s. If it is not true, there are constants $T > 0$ and $\varepsilon \in (0, 1)$, such that $\mathbf{P}\{\tau_\infty < T\} > \varepsilon$. Hence, there is $n_1 \geq n_0$ such that

$$\mathbf{P}\{\tau_n < T\} > \varepsilon, \quad \forall n \geq n_1. \quad (5)$$

For the non-negative function

$$V(X) = \sum_{i=1}^2 k_i (x_i - 1 - \ln x_i),$$

$X = (x_1, x_2)$, $x_i > 0$, $k_i > 0$, $i = 1, 2$ by the Itô's formula we obtain

$$\begin{aligned} dV(X(t)) = & \sum_{i=1}^2 k_i \left\{ (-1)^{i-1} (x_i(t) - 1) \left(a_i(t) - \frac{c_i(t) x_{3-i}(t)}{1+m(t) x_1(t)} \right) - b_i(t) x_i(t) (x_i(t) - 1) + \beta_i(t) \right. \\ & \left. + \int_{\mathbb{R}} \delta_i(t, z) x_i(t) \Pi_2(dz) \right\} dt \\ & + \sum_{i=1}^2 k_i \left\{ (x_i(t) - 1) \sigma_i(t) dw_i(t) \right. \\ & \left. + \int_{\mathbb{R}} [\gamma_i(t, z) x_i(t^-) - \ln(1 + \gamma_i(t, z))] \tilde{\nu}_1(dt, dz) \right. \\ & \left. + \int_{\mathbb{R}} [\delta_i(t, z) x_i(t^-) - \ln(1 + \delta_i(t, z))] \tilde{\nu}_2(dt, dz) \right\} \end{aligned}$$

Let us consider the function

$$\begin{aligned} f(t, x_1, x_2) = & -k_1 b_1(t) x_1^2 + k_1 (\alpha_1(t) + b_1(t)) x_1 \\ & + k_1 (\beta_1(t) - a_1(t)) - k_2 b_2(t) x_2^2 + k_2 (-a_2(t) \\ & + b_2(t) + \int_{\mathbb{R}} \delta_2(t, z) \Pi_2(dz)) x_2 + k_2 (\beta_2(t) + a_2(t)) \\ & + \frac{k_2 (x_2 - 1) c_2(t) x_1 - k_1 (x_1 - 1) c_1(t) x_2}{1+m(t) x_1}, \quad x_i > 0, i = 1, 2. \end{aligned}$$

We have estimate

$$\begin{aligned} f(t, x_1, x_2) \leq & \sum_{i=1}^2 k_i (-b_{i \inf} x_i^2 + (\alpha_{i \sup} \\ & + b_{i \sup}) x_i) + k_1 c_{1 \sup} x_2 + k_1 (\beta_{1 \sup} - a_{1 \inf}) \\ & + k_2 (\beta_{2 \sup} + a_{2 \sup}) + \frac{c_1(t) x_1 x_2 (k_2 \kappa - k_1)}{1+m(t) x_1} \end{aligned}$$

So for $k_2 = k_1/\kappa$ there is a constant $L(k_1, k_2) > 0$, such that $f(t, x_1, x_2) \leq L(k_1, k_2)$. From (6) we obtain by integrating

$$\begin{aligned} V(X(T \wedge \tau_n)) \leq & V(X_0) + L(k_1, k_2)(T \wedge \tau_n) \\ & + \sum_{i=1}^2 k_i \left\{ \int_0^{T \wedge \tau_n} (x_i(t) - 1) \sigma_i(t) dw_i(t) \right. \\ & \left. + \int_0^{T \wedge \tau_n} \int_{\mathbb{R}} [\gamma_i(t, z) x_i(t^-) - \ln(1 + \gamma_i(t, z))] \tilde{\nu}_1(dt, dz) \right. \\ & \left. + \int_0^{T \wedge \tau_n} \int_{\mathbb{R}} [\delta_i(t, z) x_i(t^-) - \ln(1 + \delta_i(t, z))] \tilde{\nu}_2(dt, dz) \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

Taking expectations we derive from (7)

$$\mathbf{E}[V(X(T \wedge \tau_n))] \leq V(X_0) + L(k_1, k_2)T. \quad (8)$$

Set $\Omega_n = \{\tau_n \leq T\}$ for $n \geq n_1$. Then by (5), $\mathbf{P}(\Omega_n) = \mathbf{P}\{\tau_n \leq T\} > \varepsilon$, $\forall n \geq n_1$. Note that for every $\omega \in \Omega_n$ at least one of $x_1(\tau_n, \omega)$ and $x_2(\tau_n, \omega)$ equals either n or $1/n$. So

$$\begin{aligned} V(X(\tau_n)) \geq & \min\{k_1, k_2\} \\ & \times \min \left\{ n - 1 - \ln n, \frac{1}{n} - 1 + \ln n \right\}. \end{aligned}$$

From (8) it follows

$$\begin{aligned} V(X_0) + L(k_1, k_2)T \geq & \mathbf{E}[\mathbf{1}_{\Omega_n} V(X(\tau_n))] \\ \geq & \varepsilon \min\{k_1, k_2\} \min \left\{ n - 1 - \ln n, \frac{1}{n} - 1 + \ln n \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

where $\mathbf{1}_{\Omega_n}$ is the indicator function of Ω_n . Letting $n \rightarrow \infty$ leads to the contradiction $\infty > V(X_0) + L(k_1, k_2)T = \infty$. This completes the proof of the theorem.

3 Long-time behavior

Lemma 3.1. *Let $p > 0$. Then for any initial value $x_{i0} > 0, i = 1, 2$ we have*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} E[x_i^p(t)] \leq K_i(p), \quad i = 1, 2,$$

where $K_i(p) > 0, i = 1, 2$ are some constants depending on p .

Proof. Let τ_n be the stopping time defined in Theorem 2.1. Applying the Itô's formula to the process $V(t, x_i(t)) = e^t x_i^p(t), i = 1, 2, p > 0$, we obtain for $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} V(t \wedge \tau_n, x_i(t \wedge \tau_n)) &= x_{i0}^p \\ &+ \int_0^{t \wedge \tau_n} e^s x_i^p(s) \left\{ 1 + p \left[(-1)^{i-1} (a_i(s) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{c_i(s)x_{3-i}(s)}{1+m(s)x_1(s)} \right) - b_i(s)x_i(s) + \frac{p(p-1)\sigma_i^2(s)}{2} \right] \\ &+ \int_{\mathbb{R}} [(1 + \gamma_i(s, z))^p - 1 - p\gamma_i(s, z)] \Pi_1(dz) \\ &+ \int_{\mathbb{R}} [(1 + \delta_i(s, z))^p - 1] \Pi_2(dz) \Big\} ds \\ &+ \int_0^{t \wedge \tau_n} p e^s x_i^p(s) \sigma_i(s) dw_i(s) \\ &+ \int_0^{t \wedge \tau_n} \int_{\mathbb{R}} e^s x_i^p(s^-) [(1 + \gamma_i(s, z))^p - 1] \tilde{\nu}_1(ds, dz) \\ &+ \int_0^{t \wedge \tau_n} \int_{\mathbb{R}} e^s x_i^p(s^-) [(1 + \delta_i(s, z))^p - 1] \tilde{\nu}_2(ds, dz). \end{aligned} \quad (9)$$

Under Assumption 1 there are constants $K_i(p) > 0, i = 1, 2$, such that

$$\begin{aligned} e^s x_i^p(s) \left\{ 1 + p \left[(-1)^{i-1} \left(a_i(s) - \frac{c_i(s)x_{3-i}(s)}{1+m(s)x_1(s)} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - b_i(s)x_i(s) + \frac{p(p-1)\sigma_i^2(s)}{2} + \int_{\mathbb{R}} [(1 + \gamma_i(s, z))^p \right. \right. \\ \left. \left. - 1 - p\gamma_i(s, z)] \Pi_1(dz) + \int_{\mathbb{R}} [(1 + \delta_i(s, z))^p \right. \right. \\ \left. \left. - 1] \Pi_2(dz) \right\} \leq e^s K_i(p) \end{aligned} \quad (10)$$

From (9) and (10), taking the expectation, we obtain

$$E[V(t \wedge \tau_n, x_i(t \wedge \tau_n))] \leq x_{i0}^p + K_i(p)e^t, \quad i = 1, 2.$$

If $n \rightarrow \infty$, then we get

$$e^t E[x_i^p(t)] \leq x_{i0}^p + K_i(p)e^t, \quad i = 1, 2.$$

Hence

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} E[x_i^p(t)] \leq K_i(p), \quad i = 1, 2.$$

Lemma 3.2. *If $p_{2\inf} > 0$, where $p_2(t) = -a_2(t) - \beta_2(t)$, then for any initial value $x_{20} > 0$, the predator population density $x_2(t)$ has the property that*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} E \left[\left(\frac{1}{x_2(t)} \right)^\theta \right] \leq K(\theta), \quad 0 < \theta < 1, \quad (11)$$

Proof. For the process $U(t) = 1/x_2(t)$ by the Itô's formula we have

$$\begin{aligned} U(t) &= U(0) + \int_0^t U(s) \left[a_2(s) - \frac{c_2(s)x_1(s)}{1+m(s)x_1(s)} \right. \\ &\quad \left. + b_2(s)x_2(s) + \sigma_2^2(s) + \int_{\mathbb{R}} \frac{\gamma_2^2(s, z)}{1+\gamma_2(s, z)} \Pi_1(dz) \right] ds \\ &\quad - \int_0^t U(s) \sigma_2(s) dw_2(s) - \iint_{\mathbb{R}} U(s^-) \frac{\gamma_2(s, z)}{1+\gamma_2(s, z)} \tilde{\nu}_1(ds, dz) \\ &\quad - \iint_{\mathbb{R}} U(s^-) \frac{\delta_2(s, z)}{1+\delta_2(s, z)} \nu_2(ds, dz). \end{aligned}$$

Then by the Itô's formula we obtain for

$$0 < \theta < 1$$

$$\begin{aligned} (1 + U(t))^\theta &= (1 + U(0))^\theta + \int_0^t \theta (1 + U(s))^{\theta-2} \\ &\quad \times \left\{ (1 + U(s)) U(s) \left[a_2(s) - \frac{c_2(s)x_1(s)}{1+m(s)x_1(s)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + b_2(s)x_2(s) + \sigma_2^2(s) + \int_{\mathbb{R}} \frac{\gamma_2^2(s, z)}{1+\gamma_2(s, z)} \Pi_1(dz) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\theta-1}{2} U^2(s) \sigma_2^2(s) + \frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}} [(1 + U(s))]^2 \right. \\ &\quad \times \left(\left(\frac{1+U(s)+\gamma_2(s, z)}{(1+\gamma_2(s, z))(1+U(s))} \right)^\theta - 1 \right) \\ &\quad \left. + \theta (1 + U(s)) \frac{U(s)\gamma_2(s, z)}{1+\gamma_2(s, z)} \Pi_1(dz) \right. \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}} (1 + U(s))^2 \left[\left(\frac{1+U(s)+\delta_2(s, z)}{(1+\delta_2(s, z))(1+U(s))} \right)^\theta \right. \\ &\quad \left. - 1 \right] \Pi_2(dz) \Big\} ds - \int_0^t \theta (1 + U(s))^{\theta-1} U(s) \sigma_2(s) dw_2(s) \\ &+ \iint_{\mathbb{R}} \left[\left(1 + \frac{U(s^-)}{1+\gamma_2(s, z)} \right)^\theta - (1 + U(s^-))^\theta \right] \tilde{\nu}_1(ds, dz) \\ &+ \iint_{\mathbb{R}} \left[\left(1 + \frac{U(s^-)}{1+\delta_2(s, z)} \right)^\theta - (1 + U(s^-))^\theta \right] \tilde{\nu}_2(ds, dz) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (1 + U(0))^\theta + \int_0^t \theta (1 + U(s))^{\theta-2} J(s) ds \\ &\quad - I_{1, \text{stoch}}(t) + I_{2, \text{stoch}}(t) + I_{3, \text{stoch}}(t), \end{aligned}$$

where $I_{j, \text{stoch}}(t), j = \overline{1, 3}$ are corresponding stochastic integrals in (12). Under Assumption 1 there exist constants $|K_1(\theta)| < \infty, |K_2(\theta)| < \infty$

such, that for the process $J(t)$ we have the estimate

$$\begin{aligned} J(t) &\leq (1 + U(t))U(t) \left[a_2(t) + b_2(t)U^{-1}(t) \right. \\ &\quad \left. + \sigma_2^2(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma_2(s, z) \Pi_1(dz) \right] + \frac{\theta-1}{2} U^2(s) \sigma_2^2(s) \\ &\quad + \frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}} (1 + U(s))^2 \left[\left(\frac{1}{1 + \gamma_2(s, z)} + \frac{1}{1 + U(s)} \right)^\theta - 1 \right] \Pi_1(dz) \\ &\quad + \frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}} (1 + U(s))^2 \left[\left(\frac{1}{1 + \delta_2(s, z)} + \frac{1}{1 + U(s)} \right)^\theta - 1 \right] \Pi_2(dz) \\ &\leq U^2(t) \left[a_2(t) + \frac{\sigma_2^2(t)}{2} + \int_{\mathbb{R}} \gamma_2(t, z) \Pi_1(dz) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\theta}{2} \sigma_2^2(t) + \frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}} [(1 + \gamma_2(t, z))^{-\theta} - 1] \Pi_1(dz) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}} [(1 + \delta_2(t, z))^{-\theta} - 1] \Pi_2(dz) \right] + K_1(\theta)U(t) \\ &\quad + K_2(\theta) = -K_0(t, \theta)U^2(t) + K_1(\theta)U(t) + K_2(\theta). \end{aligned}$$

Here we used the inequality $(x+y)^\theta \leq x^\theta + \theta x^{\theta-1}y$, $0 < \theta < 1$, $x, y > 0$, in the first integral term for $x = (1 + \gamma_2(s, z))^{-1}$, $y = (1 + U(s))^{-1}$, and then in the second integral term for $x = (1 + \delta_2(s, z))^{-1}$, $y = (1 + U(s))^{-1}$. From

$$\begin{aligned} &\lim_{\theta \rightarrow 0+} \left[\frac{\theta}{2} \sigma_i^2(t) + \frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}} [(1 + \gamma_i(t, z))^{-\theta} - 1] \Pi_1(dz) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}} [(1 + \delta_i(t, z))^{-\theta} - 1] \Pi_2(dz) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}} \ln(1 + \gamma_i(t, z)) \Pi_1(dz) + \int_{\mathbb{R}} \ln(1 + \delta_i(t, z)) \Pi_2(dz) \right] \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \Delta(\theta, t) = 0, \end{aligned}$$

and the condition $p_{2\inf} > 0$ we can choose a sufficiently small $0 < \theta < 1$ so that

$$K_0(\theta) = \inf_{t \geq 0} K_0(t, \theta) = \inf_{t \geq 0} [p_2(t) - \Delta(\theta, t)] > 0$$

is satisfied. So from (12) and the estimate for $J(t)$ we derive

$$\begin{aligned} d[(1 + U(t))^\theta] &\leq \theta(1 + U(t))^{\theta-2} [-K_0(\theta)U^2(t) \\ &\quad + K_1(\theta)U(t) + K_2(\theta)]dt \\ &\quad - \theta(1 + U(t))^{\theta-1} U(t) \sigma_2(t) dw_2(t) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \left[\left(1 + \frac{U(t^-)}{1 + \gamma_2(t, z)} \right)^\theta - (1 + U(t^-))^\theta \right] \tilde{\nu}_1(dt, dz) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \left[\left(1 + \frac{U(t^-)}{1 + \delta_2(t, z)} \right)^\theta - (1 + U(t^-))^\theta \right] \tilde{\nu}_2(dt, dz). \end{aligned} \quad (13)$$

By the Itô's formula and (13) we have

$$\begin{aligned} d[e^{\lambda t}(1 + U(t))^\theta] &= \lambda e^{\lambda t}(1 + U(t))^\theta dt \\ &\quad + e^{\lambda t} d[(1 + U(t))^\theta] \leq e^{\lambda t} \theta(1 + U(t))^{\theta-2} \\ &\quad \times \left[-\left(K_0(\theta) - \frac{\lambda}{\theta} \right) U^2(t) + \left(K_1(\theta) + \frac{2\lambda}{\theta} \right) U(t) \right. \\ &\quad \left. + K_2(\theta) + \frac{\lambda}{\theta} \right] dt - \theta e^{\lambda t}(1 + U(t))^{\theta-1} \\ &\quad \times U(t) \sigma_2(t) dw_2(t) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} &+ e^{\lambda t} \int_{\mathbb{R}} \left[\left(1 + \frac{U(t^-)}{1 + \gamma_2(t, z)} \right)^\theta - (1 + U(t^-))^\theta \right] \tilde{\nu}_1(dt, dz) \\ &+ e^{\lambda t} \int_{\mathbb{R}} \left[\left(1 + \frac{U(t^-)}{1 + \delta_2(t, z)} \right)^\theta - (1 + U(t^-))^\theta \right] \tilde{\nu}_2(dt, dz). \end{aligned}$$

Let us choose $\lambda = \lambda(\theta) > 0$ such, that $K_0(\theta) - \lambda/\theta > 0$. Then there is a constant $K > 0$, such that

$$\begin{aligned} &(1 + U(t))^{\theta-2} \left[-\left(K_0(\theta) - \frac{\lambda}{\theta} \right) U^2(t) \right. \\ &\quad \left. + \left(K_1(\theta) + \frac{2\lambda}{\theta} \right) U(t) + K_2(\theta) + \frac{\lambda}{\theta} \right] \leq K. \end{aligned} \quad (15)$$

Let τ_n be the stopping time defined in the Theorem 2.1. Then by integrating (14), using (15) and taking the expectation we obtain

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[e^{\lambda(t \wedge \tau_n)} (1 + U(t \wedge \tau_n))^\theta \right] \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{x_{20}} \right)^\theta + \frac{\theta}{\lambda} K (e^{\lambda t} - 1). \end{aligned}$$

Letting $n \rightarrow \infty$ leads to the estimate

$$\begin{aligned} &e^t \mathbb{E} [(1 + U(t))^\theta] \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{x_{20}} \right)^\theta + \frac{\theta}{\lambda} K (e^{\lambda t} - 1). \end{aligned} \quad (16)$$

From (16) we obtain

$$\begin{aligned} &\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{x_2(t)} \right)^\theta \right] = \limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} [U^\theta(t)] \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} [(1 + U(t))^\theta] \leq \frac{\theta}{\lambda(\theta)} K, \end{aligned}$$

this implies (11).

Definition 3.1. ([8]) The solution $X(t)$ to the system (3) will be said stochastically ultimately bounded, if for any $\varepsilon \in (0, 1)$, there is a positive constant $\chi = \chi(\varepsilon) > 0$, such that for any initial value $X_0 \in \mathbb{R}_+^2$, the solution to the system (3) has the property that

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ |X(t)| > \chi \} < \varepsilon.$$

Theorem 3.1. The solution $X(t)$ to the system (3) is stochastically ultimately bounded for any initial value $X_0 \in \mathbb{R}_+^2$.

Proof. From Lemma 3.1 we have an estimate

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} E[x_i(t)] \leq K_i, \quad i = 1, 2. \quad (17)$$

For $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$ we have $|X| \leq x_1 + x_2$, therefore, from (17) we obtain

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} E[|X(t)|] \leq L = K_1 + K_2.$$

Let $\chi > L/\varepsilon$, $\forall \varepsilon \in (0, 1)$. Then applying the Chebyshev inequality yields

$$\begin{aligned} & \limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|X(t)| > \chi\} \\ & \leq \frac{1}{\chi} \limsup_{t \rightarrow \infty} E[|X(t)|] \leq \frac{L}{\chi} < \varepsilon. \end{aligned}$$

The theorem is proved.

Definition 3.2. The population density $x(t)$ will be said stochastically permanent if for any $\varepsilon > 0$, there are positive constants $H = H(\varepsilon)$, $h = h(\varepsilon)$ such that

$$\begin{aligned} & \liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{x(t) \leq H\} \geq 1 - \varepsilon, \\ & \liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{x(t) \geq h\} \geq 1 - \varepsilon, \end{aligned}$$

for any initial value $x(0) = x_0 > 0$.

Theorem 3.2. If $p_{2\inf} > 0$, where $p_2(t) = -a_2(t) - \beta_2(t)$, then for any initial value $x_{20} > 0$, the predator population density $x_2(t)$ is stochastically permanent.

Proof. From Lemma 3.1 we have an estimate

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} E[x_2(t)] \leq K.$$

Thus for any given $\varepsilon > 0$, let $H = K/\varepsilon$, by virtue of Chebyshev's inequality, we can derive that

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{x_2(t) \geq H\} \leq \frac{1}{H} \limsup_{t \rightarrow \infty} E[x_2(t)] \leq \varepsilon.$$

Consequently

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{x_2(t) \leq H\} \geq 1 - \varepsilon.$$

From Lemma 3.2 we have the estimate

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[\left(\frac{1}{x_2(t)} \right)^\theta \right] \leq K(\theta), \quad 0 < \theta < 1.$$

For any given $\varepsilon > 0$, let $h = (\varepsilon/K(\theta))^{1/\theta}$, then by Chebyshev's inequality, we have

$$\begin{aligned} & \limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{x_2(t) < h\} \\ & \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \left(\frac{1}{x_2(t)} \right)^\theta > h^{-\theta} \right\} \\ & \leq h^\theta \limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[\left(\frac{1}{x_2(t)} \right)^\theta \right] \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Consequently

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{x_2(t) \geq h\} \geq 1 - \varepsilon.$$

The theorem is proved.

If the predator is absent, i.e. $x_2(t) \equiv 0$ a.s., then the equation for the prey population is the non-autonomous stochastic logistic differential equation. The sufficient conditions for the stochastic permanence of the solution to the stochastic logistic differential equation are obtained in [3]:

Theorem 3.3. If the predator is absent, i.e. $x_2(t) \equiv 0$ a.s., and $p_{1\inf} > 0$, where $p_1(t) = a_1(t) - \beta_1(t)$, then for any initial value $x_{10} > 0$, the prey population density $x_1(t)$ is stochastically permanent.

4 Conclusions

In this paper, we consider the non-autonomous stochastic density-dependent predator-prey model with Holling-type II functional response driven by the system of stochastic differential equations with white noise, centered and non-centered Poisson noises. So, we take into account levels of predator density dependence, “small” jumps, corresponding to the centered Poisson measure, and the “large” jumps, corresponding to the non-centered Poisson measure. For the considered system, sufficient criteria for the existence and uniqueness of a global positive solution is obtained. We derive sufficient conditions of stochastic ultimate boundedness and stochastic permanence in the considered stochastic predator-prey model.

Список використаних джерел

1. Iannelli M. An Introduction to Mathematical Population Dynamics / M. Iannelli, A. Pugliese — Springer, 2014. — 338 p.
2. Liu Zh. The asymptotic behavior of a stochastic predator-prey system with Holling II functional response / Zh. Liu, N. Shi, D. Jiang, Ch. Ji // Abstract and Applied Analysis. — 2012. — **2012**, article ID 801812, 14 p. — Режим доступу до журн.: <http://dx.doi.org/10.1155/2012/801812>

3. *Borysenko Olg.* Long-time behavior of a non-autonomous stochastic predator-prey model with jumps / Olg. Borysenko, O. Borysenko // *Modern Stochastics: Theory and Applications.* — 2021. — 8(1). — p.17-39.
4. *Borysenko O.* Long-Time Behavior of Stochastic Models of Population Dynamics with Jumps / O. Borysenko, Olg. Borysenko // In: *Stochastic Processes: Fundamentals and Emerging Applications* Ed. by Mikhail Moklyachuk. New York, NY: Nova Science Publishers — 2022. — pp. 37-63.
5. *Borysenko Olg.* Dynamics of the predator-prey model with Beddington-DeAngelis functional response perturbed by Lévy noise / Olg. Borysenko, O. Borysenko // *Statistics, Optimization and Information Computing.* — 2022. — 14 p. — Режим доступу до журн.: <http://www.iapress.org/index.php/soic/article/view/1189>
6. *Гихман, И.И.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения / И.И. Гихман, А.В. Скороход. — Киев: Наукова думка, 1982. — 611 с.
7. *Lipster R.* A strong law of large numbers for local martingales / R. Lipster // *Stochastics* — 1980. — vol. 3. — pp. 217–228.
8. *Li, X.* Population Dynamical Behavior of Non-Autonomous Lotka-Volterra Competitive System with Random Perturbation / X. Li, X. Mao // *Discrete & Continuous Dynamical Systems.* — 2009. — 24. — p.523 – 545.
3. *BORYSENKO, OLG. and BORYSENKO, O.* (2021) Long-time behavior of a non-autonomous stochastic predator-prey model with jumps *Modern Stochastics: Theory and Applications.* 8(1). p.17-39.
4. *BORYSENKO, O. and BORYSENKO, OLG.* (2022) Long-Time Behavior of Stochastic Models of Population Dynamics with Jumps. *Stochastic Processes: Fundamentals and Emerging Applications.* Ed. by Mikhail Moklyachuk. New York, NY: Nova Science Publishers. pp. 37-63.
5. *BORYSENKO OLG. and BORYSENKO O.* (2022) Dynamics of the predator-prey model with Beddington-DeAngelis functional response perturbed by Lévy noise, *Statistics, Optimization and Information Computing.* [Online], 14p. — Available from: <http://www.iapress.org/index.php/soic/article/view/1189>
6. *GIKHMEN, I.I. and SKOROKHOD, A.V.* (1982) *Stochastic Differential Equations and its Applications.* Kyiv, Naukova Dumka.
7. *LIPSTER, R.* (1980) A strong law of large numbers for local martingales. *Stochastics.* vol. 3. pp. 217–228.
8. *LI, X. and MAO, X.* (2009) Population Dynamical Behavior of Non-Autonomous Lotka-Volterra Competitive System with Random Perturbation. *Discrete & Continuous Dynamical Systems.* 24. p.523 – 545.

References

1. *IANNELLI, M., PUGLIESE, A.* (2014) *An Introduction to Mathematical Population Dynamics.* Springer.
2. *LIU, ZH., SHI, N., JIANG, D. AND JI, CH.* (2012) The asymptotic behavior

Received: 29.12.2022

УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/4.2>

А. Малярєнко¹, *д-р. наук, проф.*
Ю. С. Мішура², *д-р. наук, проф.*
Є. А. О. Рудик³, *студ.*

Наближення дробових інтегралів гельдерових функцій

¹ Факультет математики та фізики, університет Мелардален, 721 23 Вестерос, Швеція
e-mail: anatoliy.malyarenko@mdu.se

² Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 64/13, вул.Володимирська, 01601 Київ, Україна
e-mail: yuliyamishura@knu.ua

³ Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 64/13, вул.Володимирська, 01601 Київ, Україна
e-mail: rudykyao@knu.ua

A. Malyarenko¹, *PhD, Prof.*
Yu. S. Mishura², *Dr of Sci., Prof.*
Y. A. O. Rudyk³, *Stud.*

Approximation of fractional integrals of Hölder functions

¹Division of Mathematics and Physics, Mälardalen University, 721 23 Västerås, Sweden
e-mail: anatoliy.malyarenko@mdu.se

²Department of Probability Theory, Statistics and Actuarial Mathematics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, 64/13, Volodymyrska Street, 01601 Kyiv, Ukraine
e-mail: yuliyamishura@knu.ua

³ Department of Probability Theory, Statistics and Actuarial Mathematics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, 64/13, Volodymyrska Street, 01601 Kyiv, Ukraine
e-mail: rudykyao@knu.ua

Статтю присвячено дослідженню швидкості збіжності інтегральних сум двох типів до дробового інтегралу. В першій теоремі доведено гельдерівську властивість дробових інтегралів від функцій з різних інтегральних просторів. Потім ми оцінюємо швидкість збіжності інтегральних сум, побудованих за гельдерівськими функціями, до відповідних дробових інтегралів. Отримані результати проілюстровано декількома чисельними прикладами.

Ключові слова: дробовий інтеграл, інтегральні суми, наближення, гельдеровість. The paper is devoted to the rate of convergence of integral sums of two different types to fractional integrals. The first theorem proves the Hölder property of fractional integrals of functions from various integral spaces. Then we estimate the rate of convergence of the integral sums of two types corresponding to the Hölder functions, to the respective fractional integrals. We illustrate the obtained results by several figures.

Key Words: fractional integral, integral sums, approximation, Hölder property.

1 Introduction

Fractional integrals as the basic elements of fractional calculus are widely used for solving fractional differential equations, both nonrandom and stochastic, and for construction of various fractional processes. At the same time, unfortunately, it is impossible to calculate fractional integrals explicitly even for many elementary functions. Naturally, the problem of approximation of fractional integrals appears. In this research we discover Hölder properties of fractional integrals and then the rate at which integral sums approximate fractional integrals. To solve this problem, we use the properties of fractional integrals presented in the classical book [1] and discussed in [2]. At the moment, the approximation of fractional integrals

is of great interest, we note only the works [3]–[6].

2 Main definitions

Definition 1. Let $[a, b]$ be a finite interval. The function $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfies the Hölder condition of order λ on $[a, b]$ if there exists such $C > 0$ that

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq C|x_1 - x_2|^\lambda \quad (1)$$

for any $x_1, x_2 \in [a, b]$, where λ is the Hölder exponent. Denote Hölder constant

$$C_\lambda = \sup_{x_1, x_2 \in [a, b], x_1 \neq x_2} \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|}.$$

It is clear that the function f is continuous on $[a, b]$ if it satisfies the Hölder condition of any positive order on this interval.

Definition 2. Let function $\varphi \in L_1(a, b)$. The integrals

$$(I_{a+}^{\alpha} \varphi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > a, \quad (2)$$

$$(I_{b-}^{\alpha} \varphi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, \quad x < b, \quad (3)$$

where $\alpha > 0$, are called fractional integrals of the order α , or, more precisely, the Riemann-Liouville fractional integrals. Sometimes they are called left-sided and right-sided fractional integrals, respectively.

3 Hölder properties of fractional integrals

In this section we consider $\alpha \in (0, 1)$, and for technical simplicity restrict ourselves with left-sided fractional integrals because right-sided integrals can be considered similarly.

Theorem 3.1.

1) Let function $f \in L_p[a, b]$ for some $p \in (1, \infty)$. Then for any $\alpha \in (\frac{1}{p}, 1)$:

$$I_{0+}^{\alpha} f \in C^{\alpha-1/p}[a, b] \quad \text{and}$$

$$|(I_{a+}^{\alpha} f)(t) - (I_{a+}^{\alpha} f)(s)| \leq C(t-s)^{\alpha-1/p},$$

$$\text{where } C = \frac{\|f\|_{L_p[a,b]}}{\Gamma(\alpha)} *$$

$$* \left(1 + \left(\int_0^{+\infty} |(1+y)^{\alpha-1} - y^{\alpha-1}|^q dy \right)^{1/q} \right),$$

$$a \leq s < t \leq b.$$

2) Let function $f \in L_{\infty}[a, b]$. Then for any $\alpha \in (0, 1)$

$$I_{a+}^{\alpha} f \in C^{\alpha}[a, b] \quad \text{and}$$

$$|(I_{a+}^{\alpha} f)(t) - (I_{a+}^{\alpha} f)(s)| \leq C(t-s)^{\alpha},$$

$$\text{where } C = \frac{3\|f\|_{\infty}}{\alpha\Gamma(\alpha)}, \quad a \leq s < t \leq b.$$

Proof.

1) Let $a \leq s < t \leq b$. We can bound

$$\Delta_{s,t} = |(I_{a+}^{\alpha} f)(t) - (I_{a+}^{\alpha} f)(s)|$$

as follows:

$$\Delta_{s,t} \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\mathfrak{I}_1(s, t) + \mathfrak{I}_2(s, t)),$$

where

$$\mathfrak{I}_1(s, t) = \left| \int_s^t (t-u)^{\alpha-1} f(u) du \right|,$$

and

$$\mathfrak{I}_2(s, t) = \left| \int_0^s ((t-u)^{\alpha-1} - (s-u)^{\alpha-1}) f(u) du \right|.$$

Consider $\mathfrak{I}_1(s, t)$, and let $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Then

$$\mathfrak{I}_1(s, t) \leq \left(\int_s^t (t-u)^{q(\alpha-1)} du \right)^{1/q} \|f\|_{L_p[a,b]},$$

and

$$\begin{aligned} \left(\int_s^t (t-u)^{q(\alpha-1)} du \right)^{1/q} &= \frac{(t-s)^{\alpha-1+1/q}}{q(\alpha-1)+1} \\ &= \frac{(t-s)^{\alpha-1/p}}{q\alpha - q/p}. \end{aligned}$$

Furthermore,

$$\mathfrak{I}_2(s, t) \leq \mathfrak{I}_3(s, t) \|f\|_{L_p[a,b]},$$

where

$$\mathfrak{I}_3(s, t) = \left(\int_0^s |(t-u)^{\alpha-1} - (s-u)^{\alpha-1}|^q du \right)^{1/q}.$$

Let's evaluate $\mathfrak{I}_3(s, t)$, changing the variables as follows: $s-u = (t-s)y$. Then $t-u = (t-s)(1+y)$, and

$$\mathfrak{I}_3(s, t) =$$

$$\begin{aligned} &= (t-s)^{\alpha-1/p} \left(\int_0^{s/(t-s)} |(1+y)^{\alpha-1} - y^{\alpha-1}|^q dy \right)^{1/q} \\ &\leq (t-s)^{\alpha-1/p} \left(\int_0^{\infty} |(1+y)^{\alpha-1} - y^{\alpha-1}|^q dy \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Now our goal is to prove that the latter integral converges. Indeed, it equals

$$\int_0^\infty y^{(\alpha-1)q} \left| \frac{1}{(1+1/y)^{1-\alpha}} - 1 \right|^q dy$$

On the one hand, it is easy to see that $(\alpha - 1)q > -1$. Therefore the integral converges at zero. On the other hand, note that at infinity

$$\begin{aligned} (1+1/y)^{1-\alpha} &= 1 + \frac{1-\alpha}{y} + \frac{(1-\alpha)(-\alpha)}{2y^2} + o\left(\frac{1}{y^2}\right), \\ &\sim -\frac{1-\alpha}{y} \quad \text{as } y \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

therefore

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(1+1/y)^{1-\alpha}} - 1 \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1-\alpha}{y} - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2y^2} + o(\frac{1}{y^2})} - 1 \\ &\sim -\frac{1-\alpha}{y} \quad \text{as } y \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Finally,

$$\begin{aligned} &y^{(\alpha-1)q} \left| \frac{1}{(1+1/y)^{1-\alpha}} - 1 \right|^q \\ &\sim (1-\alpha)^q y^{(\alpha-1)q} y^{-q} = (1-\alpha)^q y^{(\alpha-2)q} \\ &= (1-\alpha)^q y^{(\alpha-2)p/(p-1)}. \end{aligned}$$

Recall that $\alpha < 1$, therefore $\frac{(\alpha-2)p}{p-1} < \alpha-2 < -1$, and integral converges at infinity.

- 2) Recall that now $f \in L_{\infty[a,b]}$, and $\|f\|_{\infty} = \text{ess sup}_{t \in [a,b]} |f| < \infty$. Applying the inequality

$$t^{\alpha} - s^{\alpha} \leq (t-s)^{\alpha},$$

where $s < t$, $0 < \alpha < 1$, we get that

$$\begin{aligned} &|(I_{a+}^{\alpha} f)(t) - (I_{a+}^{\alpha} f)(s)| \\ &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(u)}{(t-u)^{1-\alpha}} du - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^s \frac{f(u)}{(s-u)^{1-\alpha}} du \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_a^s |(t-u)^{\alpha-1} - (s-u)^{\alpha-1}| |f(u)| du + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_s^t (t-u)^{\alpha-1} |f(u)| du \right) \\ &\leq \frac{\|f\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_a^s |(t-u)^{\alpha-1} - (s-u)^{\alpha-1}| du + \frac{|t-s|^{\alpha}}{\alpha} \right) \\ &= \frac{\|f\|_{\infty}}{\alpha \Gamma(\alpha)} |(t-s)^{\alpha} - (t-a)^{\alpha} - (s-s)^{\alpha} + (s-a)^{\alpha} + |t-s|^{\alpha}| \\ &\leq \frac{3\|f\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot (t-s)^{\alpha}. \end{aligned}$$

4 Approximation rate

Now our goal is to apply obtained formulas to approximate fractional integrals by integral sums, applying, in particular, Theorem 3.1. For technical simplicity, consider $[a, b] = [0, T]$ and create the sequence of uniform partitions π_n of the interval $[0, T]$ consisting of points $t_k = \frac{kT}{n}$, $0 \leq k \leq n$. By $\frac{k_t T}{n}$ we denote the point of partition, which is closest to t being less or equal to t . Without loss of generality, we shall approximate only left-sided integrals, considering sums of two types:

$$S_{1,n}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{k_t-1} \left(\frac{k_t T}{n} - \frac{jT}{n} \right)^{\alpha-1} f\left(\frac{jT}{n}\right) \frac{T}{n},$$

and

$$\begin{aligned} S_{2,n}(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{j=0}^{k_t-1} \left(\left(\frac{k_t T}{n} - \frac{(j+1)T}{n} \right)^{\alpha} - \left(\frac{k_t T}{n} - \frac{jT}{n} \right)^{\alpha} \right) f\left(\frac{jT}{n}\right). \end{aligned}$$

To achieve our goal we will evaluate the difference between fractional integrals at the points of partition π_n because the difference between fractional integrals in other points is estimated in Theorem

3.1 and can be reformulated in the following statement. In the point $\frac{kT}{n}$ we have that

$$S_{1,n} \left(\frac{kT}{n} \right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{kT}{n} - \frac{jT}{n} \right)^{\alpha-1} f \left(\frac{jT}{n} \right) \frac{T}{n},$$

and

$$S_{2,n} \left(\frac{kT}{n} \right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\left(\frac{kT}{n} - \frac{(j+1)T}{n} \right)^{\alpha} - \left(\frac{kT}{n} - \frac{jT}{n} \right)^{\alpha} \right) f \left(\frac{jT}{n} \right).$$

Corollary 1. Let function $f \in L_{\infty}[0, T]$. Then for any $\alpha \in (0, 1)$

$$\left| (I_{0+}^{\alpha} f)(t) - (I_{0+}^{\alpha} f) \left(\frac{k_t T}{n} \right) \right| \leq \frac{3 \|f\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot \left(\frac{T}{n} \right)^{\alpha}.$$

Proof. That is the particular case of the Theorem 3.1, part 2. Here we have $s = k_t T/n$ and $t - k_t T/n \leq \frac{T}{n}$.

It should be noted that a problem of approximation of fractional integrals needs particular discovery because of singularity at the upper (lower) bound of integration. Let's formulate the main result.

Theorem 4.1. Assume that $f \in C^{\beta}[0, T]$ with Hölder constant C_{β} , and $\alpha + \beta > 1$. For approximation the fractional integral by the sequences $S_{i,n}, i = 1, 2$ we have the upper bounds

$$\max_{k \in [0, n]} \left| (I_{0+}^{\alpha} f) \left(\frac{kT}{n} \right) - S_{i,n} \left(\frac{kT}{n} \right) \right| \leq C_i n^{1-\alpha-\beta},$$

where $C_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{C_{\beta} T^{\alpha+\beta}}{\alpha} + \|f\|_{C[0, T]} T^{\alpha} \right)$, $C_2 = \frac{C_{\beta} T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+1)}$.

Proof.

(i) Denote

$$\Delta_n = \sup_{0 \leq s \leq t \leq (s+T/n) \wedge T} |f(s) - f(t)|.$$

Obviously, $\Delta_n \leq \left(\frac{T}{n} \right)^{\beta} \wedge 2 \|f\|_{C[0, T]}$. Consider separately the last term

$$\mathfrak{S}_{k,n} := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_{(k-1)T/n}^{kT/n} \left(\frac{kT}{n} - s \right)^{\alpha-1} f(s) ds - \left(\frac{T}{n} \right)^{\alpha} f \left(\frac{(k-1)T}{n} \right) \right|,$$

and all other terms:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{j,n} &:= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_{jT/n}^{(j+1)T/n} \left(\frac{kT}{n} - s \right)^{\alpha-1} f(s) ds - \int_{jT/n}^{(j+1)T/n} \left(\frac{kT}{n} - \frac{jT}{n} \right)^{\alpha-1} f \left(\frac{jT}{n} \right) ds \right|, \\ &0 \leq j \leq k-2. \end{aligned}$$

For the last term we have an upper bound

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{k,n} &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{(k-1)T/n}^{kT/n} \left(\frac{kT}{n} - s \right)^{\alpha-1} |f(s) - f \left(\frac{(k-1)T}{n} \right)| ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} * \\ &* \int_{(k-1)T/n}^{kT/n} \left[\left(\frac{kT}{n} - s \right)^{\alpha-1} - \left(\frac{T}{n} \right)^{\alpha-1} \right] ds \sup_{t \in [0, T]} |f(s)| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{\alpha} \Delta_n \left(\frac{T}{n} \right)^{\alpha} + \|f\|_{C[0, T]} \left(-1 + \frac{1}{\alpha} \right) \left(\frac{T}{n} \right)^{\alpha} \right) \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|f\|_{C[0, T]} \left(\frac{3}{\alpha} - 1 \right) \left(\frac{T}{n} \right)^{\alpha}. \end{aligned}$$

Now, let $0 \leq j \leq k-2$. Taking into account that

$$\begin{aligned} &\left(\frac{kT}{n} - s \right)^{\alpha-1} - \left(\frac{kT}{n} - \frac{jT}{n} \right)^{\alpha-1} \\ &= (1-\alpha) \left(\frac{kT}{n} - \theta_s \right)^{\alpha-2} \left(s - \frac{jT}{n} \right) \\ &\leq (1-\alpha) \left(\frac{kT}{n} - s \right)^{\alpha-2} \frac{T}{n}, \end{aligned}$$

where $\theta_s \in [\frac{jT}{n}, s]$, we get the upper bound for the difference of integrals:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{jT/n}^{(j+1)T/n} \left(\frac{kT}{n} - s \right)^{\alpha-1} ds - \frac{T}{n} \left(\frac{kT}{n} - \frac{jT}{n} \right)^{\alpha-1} \right| \\ &\leq (1-\alpha) \frac{T}{n} \int_{jT/n}^{(j+1)T/n} \left(\frac{kT}{n} - s \right)^{\alpha-2} ds, \end{aligned}$$

and from now on we can proceed similarly to (4):

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{S}_{j,n} &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Delta_n \int_{jT/n}^{(j+1)T/n} \left(\frac{kT}{n} - s \right)^{\alpha-1} ds \\
 &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|f\|_{C[0,T]} \left| \int_{jT/n}^{(j+1)T/n} \left(\frac{kT}{n} - s \right)^{\alpha-1} ds \right. \\
 &\quad \left. - \frac{T}{n} \left(\frac{kT}{n} - \frac{jT}{n} \right)^{\alpha-1} \right| \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{T}{n} \|f\|_{C[0,T]} (1-\alpha)^* \right. \\
 &\quad * \int_{jT/n}^{(j+1)T/n} \left(\frac{kT}{n} - s \right)^{\alpha-2} ds + \frac{1}{\alpha} \Delta_n \left(\frac{T}{n} \right)^\alpha \Bigg) \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{T}{n} \|f\|_{C[0,T]} (1-\alpha)^* \right. \\
 &\quad * \int_{jT/n}^{(j+1)T/n} \left(\frac{kT}{n} - s \right)^{\alpha-2} ds + \frac{C_\beta}{\alpha} \left(\frac{T}{n} \right)^{\alpha+\beta} \Bigg).
 \end{aligned}$$

Taking a sum of integrals over $0 \leq j \leq k-2$, we get the upper bound

$$\int_0^{(k-1)T/n} \left(\frac{kT}{n} - s \right)^{\alpha-2} ds \leq \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{T}{n} \right)^{\alpha-1}.$$

Finally,

$$\begin{aligned}
 &\left| (I_{0+}^\alpha f) \left(\frac{kT}{n} \right) - S_{1,n} \left(\frac{kT}{n} \right) \right| \\
 &\leq \mathfrak{S}_{k,n} + \sum_{j=0}^{k-2} \mathfrak{S}_{j,n} \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{\alpha} C_\beta \left(\frac{T}{n} \right)^\beta \left(\frac{T}{n} \right)^\alpha \right. \\
 &\quad + \|f\|_{C[0,T]} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \left(\frac{T}{n} \right)^\alpha \Bigg) \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{C_\beta}{\alpha} \left(\frac{T}{n} \right)^{\alpha+\beta} (n-1) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{T}{n} \|f\|_{C[0,T]} (1-\alpha) \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{T}{n} \right)^{\alpha-1} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{C_\beta}{\alpha} \left(\frac{T}{n} \right)^{\alpha+\beta} n \right. \\
 &\quad \left. + \|f\|_{C[0,T]} \left(\frac{T}{n} \right)^\alpha \left(\frac{1}{\alpha} - 1 + 1 \right) \right) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{C_\beta T^{\alpha+\beta}}{\alpha} n^{1-\alpha-\beta} + \|f\|_{C[0,T]} T^\alpha n^{-\alpha} \right)
 \end{aligned}$$

Since $1 - \beta > 0$, we have $1 - \alpha - \beta > -\alpha$, $n^{-\alpha} < n^{1-\alpha-\beta}$ and respectively the upper bound is

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{C_\beta T^{\alpha+\beta}}{\alpha} + \|f\|_{C[0,T]} T^\alpha \right) n^{1-\alpha-\beta}$$

(ii) These upper bounds are even simpler. Indeed, we again divide the difference

$$\left| (I_{0+}^\alpha f) \left(\frac{kT}{n} \right) - S_{2,n} \left(\frac{kT}{n} \right) \right|$$

into the sum of respective differences on the subsequent intervals of the partition, and in this case for any $0 \leq j \leq k-1$ we can estimate these differences as follows:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_{jT/n}^{(j+1)T/n} \left(\frac{kT}{n} - s \right)^{\alpha-1} f(s) ds \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\alpha} \left(\left(\frac{kT}{n} - \frac{(j+1)T}{n} \right)^\alpha - \left(\frac{kT}{n} - \frac{jT}{n} \right)^\alpha \right) f \left(\frac{jT}{n} \right) \right| \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_{jT/n}^{(j+1)T/n} \left(\frac{kT}{n} - s \right)^{\alpha-1} \left| f(s) - f \left(\frac{jT}{n} \right) \right| ds \right. \\
 &\quad \left. \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \Delta_n \left(\frac{T}{n} \right)^\alpha \leq \frac{C_\beta}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{T}{n} \right)^{\alpha+\beta}, \right.
 \end{aligned}$$

whence the proof immediately follows.

5 Graphical illustrations of convergence rate

Consider several examples illustrating the convergence of integral sums for various functions and various number of intervals of partition. We always consider interval $[0, 1]$. The values of integrals are received with the help of standard functions integral from MATLAB. It is clear that

the sums $S_{2,n}$ give the better approximation.

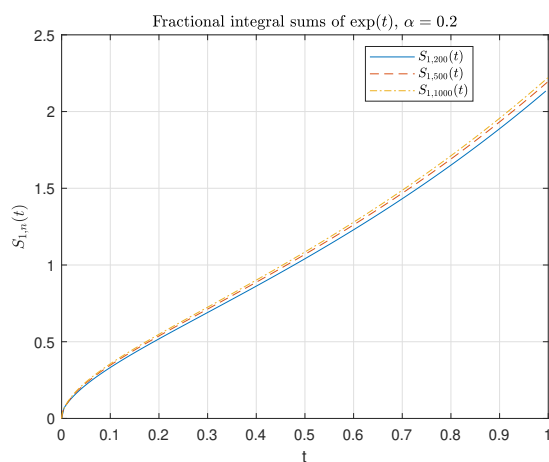


Рис. 1

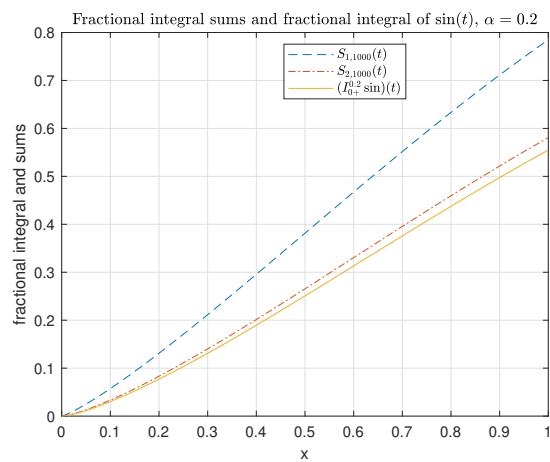


Рис. 4

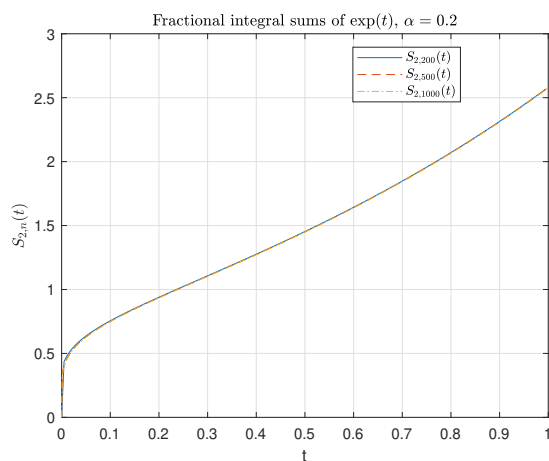


Рис. 2

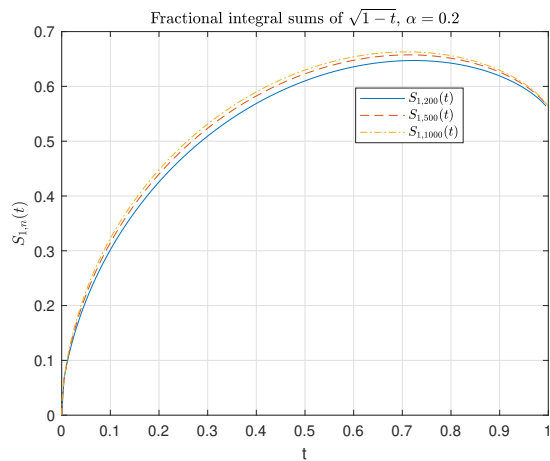


Рис. 5

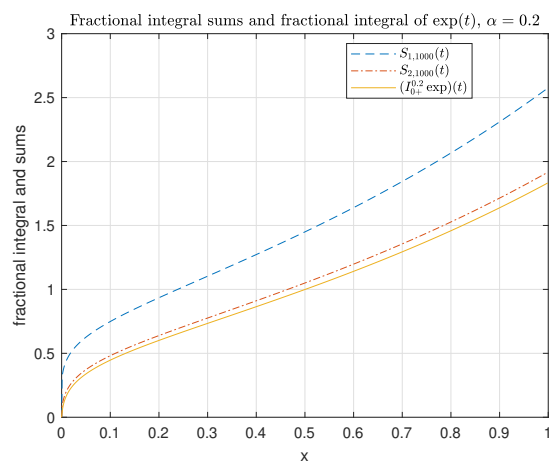


Рис. 3

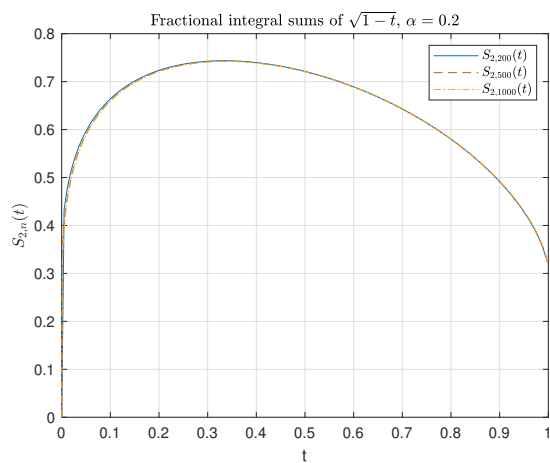


Рис. 6

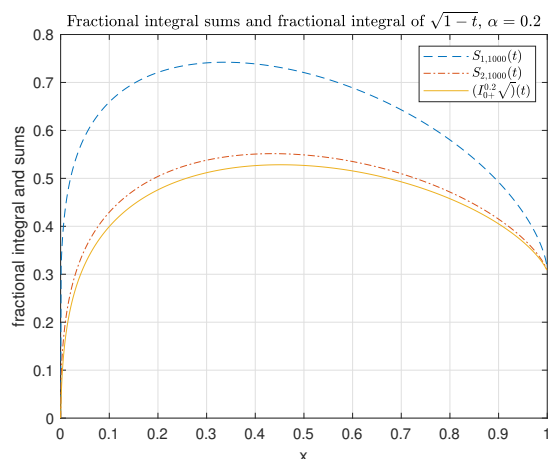


Рис. 7

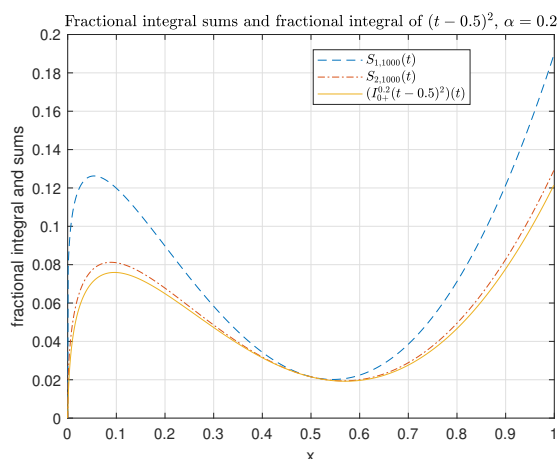


Рис. 10

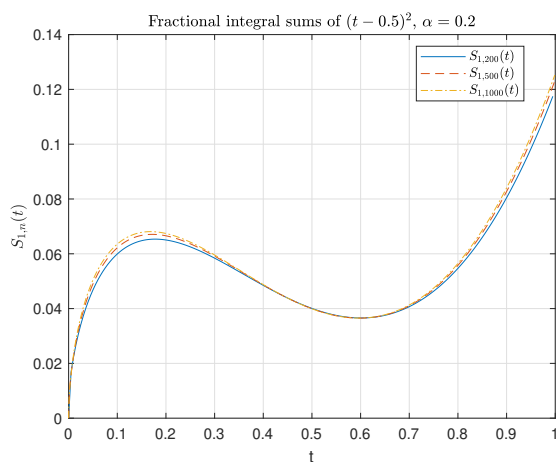


Рис. 8

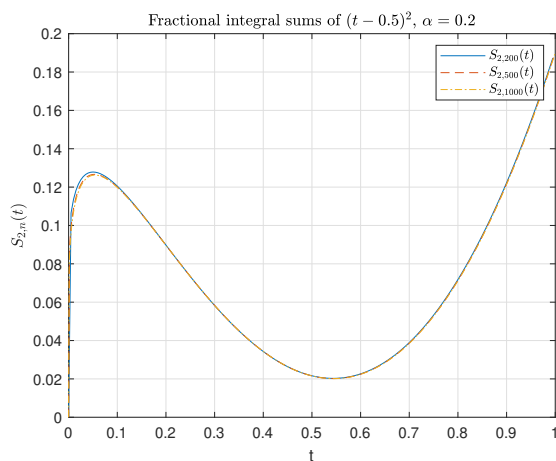


Рис. 9

Список використаних джерел

1. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Fractional integrals and derivatives (Vol. 1). 1993. Yverdon-les-Bains, Switzerland: Gordon and Breach science.
2. Mishura YU. S., Hopkalo O.M., Zhelezniak H.S. Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics. 2022. No.1// Elements of fractional calculus. Fractional integrals p.11-19// DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/1>
3. Odibat, Z. Approximations of fractional integrals and Caputo fractional derivatives. Applied Mathematics and Computation, 2006, 178(2), 527-533.
4. Pooseh S., Almeida R., Torres D. F. Approximation of fractional integrals by means of derivatives. Computers and Mathematics with Applications, 2012, 64(10), 3090-3100.
5. Min Cai, Changpin Li Theory and numerical approximations of fractional integrals and derivatives. Society for Industrial and Applied Mathematics. 2019.
6. Min Cai, Changpin Li. Numerical Approaches to Fractional Integrals and Derivatives: A Review// Mathematics, 2020, 8(1), 43// DOI: <https://doi.org/10.3390/math8010043>

References

1. SAMKO S. G., KILBAS A. A., MARICHEV, O. I. (1993). Fractional integrals and derivatives (Vol. 1). Yverdon-les-Bains, Switzerland: Gordon and Breach science.
2. MISHURA YU. S., HOPKALO O.M., ZHELEZNIAK H.S. (2022). Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics. No.1// Elements of fractional calculus. Fractional integrals p.11-19// DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/1>
3. ODIBAT, Z. (2006). Approximations of fractional integrals and Caputo fractional derivatives. Applied Mathematics and Computation, 178(2), 527-533.
4. POOSEH S., ALMEIDA R., TORRES D. F. (2012). Approximation of fractional integrals by means of derivatives. Computers and Mathematics with Applications, 64(10), 3090-3100.
5. MIN CAI, CHANGPIN LI (2019). Theory and numerical approximations of fractional integrals and derivatives. Society for Industrial and Applied Mathematics.
6. MIN CAI, CHANGPIN LI (2020). Numerical Approaches to Fractional Integrals and Derivatives: A Review// Mathematics, 8(1), 43// DOI: <https://doi.org/10.3390/math8010043>

Надійшла до редколегії 20.12.2022

УДК 519.246

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/4.3>

О.Д. Приходько¹, аспірант
К.В. Ральченко², д.ф.-м.н., доц.

**Строго консистентне оцінювання всіх
параметрів моделі Васічека за
дискретними спостереженнями**

^{1,2}Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул. Воло-
димирська, 64/13

²Sydney Mathematical Research Institute, The
University of Sydney, Sydney NSW 2006, Aus-
tralia

¹e-mail: prykhodkood@gmail.com

²e-mail: kostiantynralchenko@knu.ua

O.D. Prykhodko¹, PhD student
K.V. Ralchenko², Dr. Sci., Associate Professor

**Strongly consistent estimation of all
parameters in the Vasicek model by
discrete observations**

^{1,2}Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st.

²Sydney Mathematical Research Institute, The
University of Sydney, Sydney NSW 2006, Aus-
tralia

¹e-mail: prykhodkood@gmail.com

²e-mail: kostiantynralchenko@knu.ua

Побудовано оцінки для всіх трьох невідомих параметрів у моделі Васічека на основі дискретних спостережень та доведено їхню строгою консистентність. Теоретичні результати проілюстровано за допомогою моделювання.

Ключові слова: стохастичне диференціальне рівняння, модель відсоткової ставки, низько-частотні дані, ергодична теорема.

We construct estimators of all three unknown parameters in the Vasicek interest rate model based on discrete observations and prove their strong consistency. Theoretical results are illustrated by simulations.

Key words: stochastic differential equation, interest rate model, low-frequency data, ergodic theorem.

1 Introduction

In 1977 O. Vasicek [1] proposed a mathematical model for the interest rate, which was later named after him. It is described by the following stochastic differential equation

$$dX_t = (\alpha - \beta X_t) dt + \gamma dW_t,$$

where α, β, γ are constants and W is a standard Brownian motion. This model is widely used in the economics and in the mathematical finance; however, it also has applications in various other fields. Usually, it is assumed that $\beta > 0$. In this case the process X has ergodic properties and the property of mean reversion, which is important for financial applications. We will discuss them below. From the financial point of view, the model parameters have the following interpretation: β corresponds to the speed of recovery, the ratio α/β is the long-term average interest rate, and γ represents the stochastic volatility.

For practical applications of this model, parameter estimation methods are required. If

continuous-time observations for a whole trajectory of the process $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$ are available, then usually the diffusion parameter γ is assumed to be known, since it can be evaluated almost surely with the help of realized quadratic variations. The drift parameters α and β are estimated using the maximum likelihood method or the least squares method. Both approaches lead to the same estimators, namely

$$\hat{\alpha} = \frac{(X_T - X_0) \int_0^T X_t^2 dt - \int_0^T X_t dX_t \int_0^T X_t dt}{T \int_0^T X_t^2 dt - \left(\int_0^T X_t dt \right)^2}, \quad (1)$$

$$\hat{\beta} = \frac{(X_T - X_0) \int_0^T X_t dt - T \int_0^T X_t dX_t}{T \int_0^T X_t^2 dt - \left(\int_0^T X_t dt \right)^2}, \quad (2)$$

see Example 1.35 in the monograph [2].

In practice, a trajectory of the process can be observed only at some discrete time instants, for example $t_k = kh$, $k = 0, 1, 2, \dots$, with a fixed step h . If h is close to zero, then it can be assumed that the process is observed continuously, so we

can use the above-mentioned approach to parameter estimation. If h is considerably large (the case of low-frequency data), then we cannot assume that the observations are continuous. Moreover, the coefficient γ cannot be calculated using realized quadratic variations, and integrals in formulas (1) and (2) cannot be well-approximated by integral sums. So, a problem of simultaneously estimation of three parameters α, β, γ by the discrete low-frequency data arises. This paper is devoted to construction of strongly consistent estimators of these three parameters.

2 Problem formulation

Let the process X be a solution to the following stochastic differential equation

$$dX_t = (\alpha - \beta X_t)dt + \gamma dW_t, \quad X_0 = x_0 \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

where $W = \{W_t, t \geq 0\}$ is a Wiener process. The parameters $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ and $\gamma > 0$ are assumed to be fixed, but unknown.

It is well known, that the equation (3) has a unique solution, which can be found explicitly:

$$X_t = \frac{\alpha}{\beta} + e^{-\beta t} \left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta} \right) + \gamma \int_0^t e^{-\beta(t-s)} dW_s,$$

see, e. g., [3, Eq. (9.7)].

Let $h > 0$ be fixed. Assume that the following values are observed:

$$X_0, X_h, X_{2h}, \dots, X_{nh}.$$

The aim of this paper is to construct strongly consistent estimators of all three unknown parameters α, β and γ .

3 Convergence of statistics

For parameter estimation we will use the following three statistics:

$$\xi_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_{kh}, \quad (4)$$

$$\eta_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_{kh}^2, \quad (5)$$

$$\zeta_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_{kh} X_{(k+1)h}. \quad (6)$$

In this section we will investigate their asymptotic behavior.

Put

$$Z_t = \gamma \int_0^t e^{-\beta(t-s)} dW_s,$$

$$Y_t = \gamma \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-s)} dW_s.$$

Then

$$X_t = \frac{\alpha}{\beta} + e^{-\beta t} \left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta} \right) + Z_t, \quad (7)$$

$$Z_t = Y_t - e^{-\beta t} Y_0. \quad (8)$$

The process $\{Y_t, t \geq 0\}$ is a two-sided Ornstein–Uhlenbeck process, restricted to the positive half-axis. It is known, that it is stationary and ergodic, see, for example, [4]. It follows from ergodicity that for any measurable function $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, such that $\mathbf{E}|g(Y_0, Y_h)| < \infty$, the following convergence holds:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(Y_{kh}, Y_{(k+1)h}) \rightarrow g(Y_0, Y_h) \quad (9)$$

a.s., as $n \rightarrow \infty$.

Let us start with establishing several auxiliary results.

Lemma 1. *The following convergences hold:*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Y_{kh} \rightarrow 0,$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Y_{kh}^2 \rightarrow \frac{\gamma^2}{2\beta},$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Y_{kh} X_{(k+1)h} \rightarrow \frac{\gamma^2}{2\beta} e^{-\beta h},$$

a.s., as $n \rightarrow \infty$.

Proof. 1. Using (9) with the function $g(x, y) = x$, we get

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Y_{kh} \rightarrow \mathbf{E}Y_0 = \gamma \mathbf{E} \int_{-\infty}^0 e^{\beta s} dW_s = 0,$$

a.s., as $n \rightarrow \infty$.

2. Applying (9) with the function $g(x, y) = x^2$ and Itô isometry, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Y_{kh}^2 &\rightarrow \mathbf{E}Y_0^2 = \gamma^2 \mathbf{E} \left(\int_{-\infty}^0 e^{\beta s} dW_s \right)^2 \\ &= \gamma^2 \int_{-\infty}^0 e^{2\beta s} ds = \frac{\gamma^2}{2\beta}. \end{aligned}$$

3. It follows from (9) with $g(x, y) = xy$ and from the properties of the Itô integral that

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Y_{kh} X_{(k+1)h} &\rightarrow \mathbb{E} Y_0 Y_h \\ &= \gamma^2 \mathbb{E} \left(\int_{-\infty}^0 e^{\beta s} dW_s \cdot \int_{-\infty}^h e^{\beta(s-h)} dW_s \right) \\ &= \gamma^2 e^{-\beta h} \int_{-\infty}^0 e^{2\beta s} ds = \frac{\gamma^2}{2\beta} e^{-\beta h}. \quad \square \end{aligned}$$

Now let us prove similar convergences for the process Z .

Lemma 2. *The following convergencies hold:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Z_{kh} &\rightarrow 0, \\ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Z_{kh}^2 &\rightarrow \frac{\gamma^2}{2\beta}, \\ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Z_{kh} Z_{(k+1)h} &\rightarrow \frac{\gamma^2}{2\beta} e^{-\beta h}, \end{aligned}$$

a.s., as $n \rightarrow \infty$.

Proof. 1. By (8), we get

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Z_{kh} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Y_{kh} - \frac{1}{n} Y_0 \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\beta kh} \rightarrow 0,$$

a.s., as $n \rightarrow \infty$, since the first term tends to zero by Lemma 1, and the sum $\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\beta kh}$ in the second term has the finite limit $\frac{1}{1-e^{-\beta h}}$, because it is the sum of a decreasing geometric sequence.

2. Using (8), we may write

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Z_{kh}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(Y_{kh} - e^{-\beta kh} Y_0 \right)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Y_{kh}^2 + \frac{1}{n} Y_0^2 \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\beta kh} \\ &\quad - \frac{2}{n} Y_0 \sum_{k=0}^{n-1} Y_{kh} e^{-\beta kh}. \end{aligned}$$

In this case, the first term converges to $\frac{\gamma^2}{2\beta}$ by Lemma 1. The second term vanishes as $n \rightarrow \infty$, because the sum $\sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\beta kh}$ is a sum of decreasing geometric sequence, therefore this sum has the finite limit $\frac{1}{1-e^{-2\beta h}}$. The third term also converges

to zero, since it can be bounded by the first two terms due to the Cauchy–Schwarz inequality:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Y_{kh} e^{-\beta kh} \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Y_{kh}^2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\beta kh}}.$$

3. In the same way, we obtain the third convergence of Lemma 2. Using (8), we get

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Z_{kh} Z_{(k+1)h} &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(Y_{kh} - e^{-\beta kh} Y_0 \right) \\ &\quad \times \left(Y_{(k+1)h} - e^{-\beta(k+1)h} Y_0 \right) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Y_{kh} Y_{(k+1)h} + \frac{1}{n} Y_0^2 \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\beta kh - \beta h} \\ &\quad - \frac{1}{n} Y_0 \sum_{k=0}^{n-1} Y_{(k+1)h} e^{-\beta kh} - \frac{1}{n} Y_0 \sum_{k=0}^{n-1} Y_{kh} e^{-\beta(k+1)h}. \end{aligned}$$

The first term converges a.s. to $\frac{\gamma^2}{2\beta} e^{-\beta h}$ by Lemma 1. Similarly to the previous part of the proof, we obtain the convergence to zero for the remaining terms. $\square$

Now we are ready to establish convergence of the statistics ξ_n , η_n and ζ_n , defined by (4)–(6).

Lemma 3. *The following convergences hold:*

$$\xi_n \rightarrow \frac{\alpha}{\beta}, \quad (10)$$

$$\eta_n \rightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\gamma^2}{2\beta}, \quad (11)$$

$$\zeta_n \rightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\gamma^2}{2\beta} e^{-\beta h} \quad (12)$$

a.s., as $n \rightarrow \infty$.

Proof. In order to prove the convergence (10), let us consider the definition of ξ_n and express X in terms of Z using the equality (7). We get

$$\begin{aligned} \xi_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_{kh} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\alpha}{\beta} + e^{-\beta kh} \left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta} \right) + Z_{kh} \right) \\ &= \frac{\alpha}{\beta} + \left(x_0 - \frac{\alpha}{\beta} \right) \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\beta kh} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Z_{kh}. \end{aligned}$$

By Lemma 2, the last term in this equality converges to 0 a.s. The second term also tends to

0, this fact was proved in the previous lemma (see part 1 of its proof). Thus, $\xi_n \rightarrow \frac{\alpha}{\beta}$ a. s., as $n \rightarrow \infty$.

The convergences in (11) and (12) can be deduced from Lemma 2 by similar arguments. $\square$

4 Construction of strongly consistent estimators

Lemma 3 gives us an idea for construction of the strongly consistent estimators of α , β , γ . It consists in replacing the sign “ $\rightarrow$ ” with “ $=$ ” in convergences (10)–(12) and solving the obtained system of three equations with respect to α , β and γ . The solutions will be strongly consistent estimators of unknown parameters.

The system of estimating equations has the form

$$\begin{cases} \xi_n = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}, \\ \eta_n = \frac{\hat{\alpha}^2}{\hat{\beta}^2} + \frac{\hat{\gamma}^2}{2\hat{\beta}}, \\ \zeta_n = \frac{\hat{\alpha}^2}{\hat{\beta}^2} + \frac{\hat{\gamma}^2}{2\hat{\beta}} e^{-\hat{\beta}h}. \end{cases}$$

It can be rewritten as

$$\begin{cases} \xi_n \hat{\beta} = \hat{\alpha}, \\ \eta_n - \xi_n^2 = \frac{\hat{\gamma}^2}{2\hat{\beta}}, \\ \zeta_n - \xi_n^2 = \frac{\hat{\gamma}^2}{2\hat{\beta}} e^{-\hat{\beta}h}. \end{cases}$$

Now, by dividing the second equation by the third one, we get a relation for β . After that, substituting β in the first and the second equations, we immediately obtain α and γ respectively. As a result, we arrive at the following estimators

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_n &= \frac{1}{h} \log^+ \frac{\eta_n - \xi_n^2}{\zeta_n - \xi_n^2}, \\ \hat{\alpha}_n &= \xi_n \hat{\beta}_n, \quad \hat{\gamma}_n^2 = 2\hat{\beta}_n(\eta_n - \xi_n^2), \end{aligned} \quad (13)$$

where, for the sake of definiteness, we use the following function $\log^+$ instead of $\log$:

$$\log^+ x = \begin{cases} \log x, & x > 1, \\ 0, & x \leq 1. \end{cases}$$

The following theorem is the main result of the paper.

Theorem 1. *The following convergences hold a. s. as $n \rightarrow \infty$:*

$$\hat{\alpha}_n \rightarrow \alpha, \quad \hat{\beta}_n \rightarrow \beta, \quad \hat{\gamma}_n \rightarrow \gamma,$$

i. e., $\hat{\alpha}_n$, $\hat{\beta}_n$, $\hat{\gamma}_n$ are strongly consistent estimators of the parameters α , β , γ respectively.

Proof. The proof follows immediately from the equalities (13) and Lemma 3. $\square$

5 Simulations

In this section we illustrate the quality of the estimators with the help of simulation experiments. We fix the following true values of the parameters: $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$, and choose the initial value $x_0 = 1$. We generate 1000 trajectories of the process X as a solution to the stochastic differential equation (3), using the Euler–Maruyama approximations with the discretization step 0.001. Then we compute means and standard deviations of the estimates for three values of sampling intervals ($h = 1$, $h = 0.1$ and $h = 0.01$), and for various sample sizes ($n = 100, 500, 1000, 1500, 2000$). The results are reported in Tables 1–3.

We observe that the means of the estimates converge to the true values of the parameters, and their standard deviations tend to zero. Thus, the numerical results confirm theoretical conclusions about the strong consistency of the estimators. It is worth mentioning that the estimators $\hat{\gamma}_n$ demonstrate much better rate of convergence compared to $\hat{\alpha}_n$ and $\hat{\beta}_n$. Note that the estimators of β converge too slowly.

Table 1: Estimation results of the sampling interval $h = 1$

	$n = 100$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 1500$	$n = 2000$
Mean of $\hat{\alpha}_n$	1.0193	1.0683	1.0393	1.0280	1.0204
Mean of $\hat{\beta}_n$	1.9983	2.1324	2.0763	2.0555	2.0404
Mean of $\hat{\gamma}_n$	0.8896	1.0257	1.0168	1.0123	1.0095
S. Dev. of $\hat{\alpha}_n$	0.6647	0.2278	0.1368	0.1073	0.0897
S. Dev. of $\hat{\beta}_n$	1.2577	0.4404	0.2634	0.2059	0.1715
S. Dev. of $\hat{\gamma}_n$	0.4391	0.1073	0.0627	0.0505	0.0421

Table 2: Estimation results of the sampling interval $h = 0.1$

	$n = 100$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 1500$	$n = 2000$
Mean of $\hat{\alpha}_n$	1.5712	1.1057	1.0547	1.0372	1.0265
Mean of $\hat{\beta}_n$	2.9459	2.1681	2.0846	2.0553	2.0410
Mean of $\hat{\gamma}_n$	1.1017	1.0201	1.0107	1.0080	1.0064
S. Dev. of $\hat{\alpha}_n$	0.7631	0.2324	0.1567	0.1301	0.1061
S. Dev. of $\hat{\beta}_n$	1.0773	0.3407	0.2295	0.1836	0.1563
S. Dev. of $\hat{\gamma}_n$	0.0873	0.0364	0.0242	0.0203	0.0178

Table 3: Estimation results of the sampling interval $h = 0.01$

	$n = 100$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 1500$	$n = 2000$
Mean of $\hat{\alpha}_n$	18.3085	2.0973	1.4760	1.3065	1.2248
Mean of $\hat{\beta}_n$	22.0864	3.7253	2.7878	2.5089	2.3657
Mean of $\hat{\gamma}_n$	1.6720	1.1439	1.0772	1.0520	1.0384
S. Dev. of $\hat{\alpha}_n$	24.5680	1.5446	0.8856	0.6552	0.5347
S. Dev. of $\hat{\beta}_n$	22.9114	1.3237	0.6480	0.4836	0.3850
S. Dev. of $\hat{\gamma}_n$	0.2649	0.0603	0.0363	0.0255	0.0210

We also observe that the results for $h = 1$ and $h = 0.1$ for fixed n are quite similar. However, if we compare the results for the same horizon of observations $T = nh$, we will see the clear advantage of more dense partition of the interval $[0, T]$.

At the same time, the results for $h = 0.01$ are substantially worse. Only the estimator of γ is useful in this case. We suppose that this is due to small horizon of observations. As a conclusion,

the horizon of observations T is more important for the quality of estimators of α and β , that the sampling interval h .

Acknowledgments

KR was supported by the Sydney Mathematical Research Institute under Ukrainian Visitors Program.

Список використаних джерел

1. Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure // Journal of Financial Economics. 1977. Vol. 5, no. 2. P. 177–188.
2. Kutoyants Y. A. Statistical inference for ergodic diffusion processes. London : Springer-Verlag, 2004. 482 p.
3. Mishura Y., Shevchenko G. Theory and statistical applications of stochastic processes. London: ISTE, 2017. 373 p.
4. Cheridito P., Kawaguchi H., Maejima M. Fractional Ornstein–Uhlenbeck processes // Electronic Journal of Probability. 2003. Vol. 8. P. 1 – 14.

References

1. VASICEK, O. (1977) An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of Financial Economics*, 5(2), pp. 177–188.
2. KUTOYANTS, Y. A. (2004) *Statistical inference for ergodic diffusion processes*. London: Springer-Verlag.
3. MISHURA, Y. and SHEVCHENKO, G. (2017) *Theory and statistical applications of stochastic processes*. London: ISTE.
4. CHERIDITO, P., KAWAGUCHI, H. and MAEJIMA, M. (2003) Fractional Ornstein–Uhlenbeck processes, *Electronic Journal of Probability*, 8, pp. 1 – 14.

Надійшла до редколегії 10.10.2022

УДК 519.8

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/4.4>

Д.І. Симонов¹, м.н.с.
В.М. Горбачук², д.ф.-м.н., с.н.с.

D.I. Symonov¹
V.M. Gorbachuk², Dr.Sci.

Метод пошуку рішень у динамічній моделі управління запасами за невизначеності

A method of finding solutions in a dynamic model of inventory management under uncertainty

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 03187, Україна, м. Київ, пр-т Академіка Глушкова, 40
e-mail: ⁽¹⁾ denys.symonov@gmail.com,
orcid.org/0000-0002-6648-4736
⁽²⁾ GorbachukVasyl@netscape.net ,
orcid.org/0000-0001-5619-6979

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 03187, Ukraine, Kyiv, Academician Glushkov Avenue, 40
e-mail: ⁽¹⁾ denys.symonov@gmail.com,
orcid.org/0000-0002-6648-4736
⁽²⁾ GorbachukVasyl@netscape.net ,
orcid.org/0000-0001-5619-6979

В статті розглядається метод пошуку рішень у динамічній моделі управління запасами за невизначеності. Запропоновано алгоритм формулювання оптимальної стратегії управління запасами за допомогою розробленого методу визначення розміру оптимальної партії замовлення та формування оптимального плану постачання в умовах стохастичності попиту.

Розроблене рішення спрямовано на забезпечення максимізації прибутку в операціях постачання товарів за рахунок оптимізації витрат на обслуговування запасів, підвищення коефіцієнту обіговості запасів, зменшенню витрат на обслуговування зворотного капіталу та інше. Моделювання виконано з урахуванням монопродуктової стратегії, рівномірного розподілу продаж в циклі та миттєвого постачання товару в момент початку циклу. В якості обмежень моделі були наведені найбільш поширені змінні, що дозволяє продемонструвати роботу алгоритму. В роботі виконано порівняння результатів моделювання альтернативних методів планування процесу управління запасами. Наведені результати свідчать про перевагу запропонованої моделі.

Ключові слова: система управління запасами, розмір оптимальної партії замовлення, лінійна регресія, функція Лагранжа.

The article considers the method of finding solutions in the dynamic model of inventory management under uncertainty. An algorithm for formulating an optimal inventory management strategy is proposed using the developed method of determining the size of the optimal order lot and forming an optimal supply plan under conditions of stochastic demand. The developed solution is aimed at ensuring profit maximization in goods supply operations due to the optimization of inventory maintenance costs, an increase in inventory turnover ratio, a reduction of working capital maintenance costs, etc. The modelling was performed considering the mono-product strategy, the even distribution of sales in the cycle, and the instant supply of goods at the beginning of the cycle. The most common variables were listed as limitations of the model, which allows for a demonstration of the operation of the algorithm. The paper compares the simulation results of alternative methods of planning the inventory management process. The given results indicate the superiority of the proposed model.

Key Words: inventory management system, size of the optimal order lot, linear regression, Lagrange function.

Вступ

Будь-яка організація, що здійснює господарську діяльність, стикається з необхідністю управління запасами. Формування якісної стратегії управління запасами є стратегічним завданням організацій [1].

Тимчасова відсутність можливості задовольнити попит може бути причиною втрати клієнтів [2]. Інтегровані ланцюги постачання передбачають планування та координацію потоків матеріалів і інформації між усіма ланками [3], а формування складських запасів дозволяє керувати ризиками

виникнення дефіциту в наслідок коливань обсягів пропозиції та попиту. В [4] описано застосування оптимальних стратегій управління запасами з нелінійною функцією витрат, що є актуальним при плануванні процесів зі значними коливаннями показників. Однак, останнім часом досить багато проблем в ланцюгах постачання виникає в наслідок необхідності балансування між вимогами постачальника та можливостям покупця в баченні оптимального розміру партії товару та впливу факторів невизначеності [5]. Управлінські рішення щодо запасів повинні прийматися на рівні окремих продуктів, що ускладнює проблему загального використання наявних ресурсів та визначення пріоритетів [6]. Глобалізація та уніфікація товарів підвищує вимоги до забезпечення стабільності циклів постачання [7] по ланкам та вимоги до економічної ефективності операцій на усіх ланках процесу постачання.

Постановка цілі та задачі дослідження

Ціль дослідження є розробка моделі управління запасами з метою максимізації прибутку в процесі постачання товарів за допомогою оптимізації витрат на обслуговування запасів. Використання моделі дозволить мінімізувати витрати на зберігання товарів, підвищити рівень обслуговування клієнтів і тим самим знизити об'єм недоотриманого прибутку, зменшити вимоги до розміру складу та інше.

Для досягнення цілі вирішуються наступні задачі:

- визначення оптимального розміру партії замовлення;
- визначення оптимального плану постачання;
- формулювання оптимальної стратегії управління запасами;
- порівняльний аналіз результативності роботи запропонованої моделі.

Визначення оптимального розміру партії замовлення

Для комерційних організацій критерієм ефективності стратегії функціонування є забезпечення прибутку від своєї діяльності [8-11] на який, безпосередньо, впливає розмір операційних витрат. Одна з основних статей витрат пов'язана з обслуговуванням системи

управління запасами: закупівлі, технологічні коефіцієнти переробки, обслуговування залишків та інше [12]. На рівень витрат значний вплив має обертання складських запасів, яке залежить від якості прогнозування попиту, розміру партій замовлень та циклічності поставок.

При розрахунку оптимального розміру партії замовлення x_i^{ord} необхідно враховувати, що замовлений товар повинен бути на складі на момент початку циклу t_i , но бажано не раніше, так як це негативно впливає на значення цільової функції в наслідок збільшення витрат на зберігання товару.

Розглянемо керовану систему управління запасами з дискретним часом t_i циклу постачання i та одним продуктом у портфелі постачання. Зробимо припущення, що функція попиту в циклі має рівномірний розподіл $f_i(D)$, $D \in [a, b]$, а постачання партії товару здійснюється миттєво в момент початку циклу t_i . Цільова функція, що визначає якість функціонування системи управління запасами [13-14], можливо записати у вигляді:

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m F_{ij}^{pr} - \sum_{j=m+1}^M F_{ij}^{ov} \right) \right\} \rightarrow \max, \quad (1)$$
$$i = \overline{1, n}, j = \overline{1, M},$$

де F_{ij}^{pr} – дохід від реалізації товару в циклі t_i ;

F_{ij}^{ov} – витрати в циклі t_i .

Робота системи постачання повинна забезпечити максимальний рівень різниці між доходною частиною F_{ij}^{pr} та витратами F_{ij}^{ov} , за умови, що $F_{ij}^{pr} \geq F_{ij}^{ov}$. Проаналізуємо кожний компонент цільової функції.

Доходна частина може складатися з багатьох факторів, але в межах дослідження розглянемо чотири, найбільш впливові, компоненти: дохід від реалізації замовлень, що виникли і циклі t_i і товар для їх виконання в повному обсязі міститься на складі; замовлень, що виникли в циклі t_i і товар для їх реалізації є дефіцитними, але які

були узгоджені з клієнтами, що їх відвантаження відбудеться в циклі t_{i+1} а оплата здійсниться в циклі t_i ; замовлень, що виникли в циклі t_i , товар для їх реалізації є дефіцитними, але які були узгоджені з клієнтами, що їх відвантаження і оплата відбудуться в циклі t_{i+1} ; залишки минулих циклів, що реалізують в циклі t_i , тобто товар вже сплачено. Для визначення інтервалу обмежень $D \in [a, b]$ можливо використати декілька варіантів:

1. Проаналізувати накопичені данні та присвоїти значення для

$$a_i = \min_{\forall i} \{x_i^s\}, i = \overline{1, n},$$
 для

$$b_i = \max_{\forall i} \{x_i^s\}, i = \overline{1, n},$$
 де x_i^s – фактичний об'єм реалізації товару в циклі t_i .
2. Використати регресійну модель. Наприклад, визначити прогнозне значення продаж товару x_i^p за допомогою лінійної регресії:

$$x_i^p = b_0 + b_1 \cdot x_i^s, i = \overline{1, n},$$
 де b_0 – вільний член рівняння регресії; b_1 – коефіцієнт рівняння; x_i^s – незалежна змінна, та присвоїти значення для

$$a_i = x_i^p - t_\gamma \frac{\sigma_{x_i^s}}{\sqrt{n_i}}, i = \overline{1, n},$$
 для

$$b_i = x_i^p + t_\gamma \frac{\sigma_{x_i^s}}{\sqrt{n_i}}, i = \overline{1, n}.$$

Модель «доходної» частини цільової функції, з урахуванням обмежень щодо факторів впливу на систему, буде мати вигляд [15-16]:

$$\begin{aligned} F_{ij}^{pr} = & \int_{a_i}^{x_i^{ord}} p_i^s \cdot D_i \cdot f(D) dD + \\ & + \int_{x_i^{ord}}^{\infty} p_i^s \cdot (1 + (1-r)) \cdot x_i^{ord} \cdot f(D) dD + \\ & + \int_0^{\infty} r \cdot p_i^c \cdot (x_i^{ord} - D) \cdot f(D) dD + \\ & + \int_{x_i^{ord}}^{\infty} r \cdot p_i^s \cdot (D - x_i^{ord}) \cdot f(D) dD, \end{aligned} \quad (2)$$

де x_i^{ord} – оптимальний об'єм замовлення товару на цикл t_i ; p_i^s – ціна реалізації товару в циклі t_i ; p_i^c – ціна закупівлі товару в циклі t_i ; x_i^0 – залишок товару на початок циклу t_i ; r – коефіцієнт дисконтування.

На «витратну» частину рівняння (1) також впливає багато факторів, але розглянемо декілька з них: витрати на закупівлю товару в обсязі x_i^{ord} ; вартість зберігання товару; втрати в наслідок відмови клієнтів очікувати поставки товару (штраф); вартість грошей, витрачених на закупівлю товару. Відповідно, витратна частина буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} F_{ij}^{ov} = & p_i^c \cdot (x_i^{ord} - x_i^0) + \\ & + \int_{a_i}^{x_i^{ord}} p_i^{stock} \cdot (x_i^{ord} - D_i) \cdot f(D) dD + \\ & + \int_{x_i^{ord}}^{\infty} p_i^s \cdot (D_i - x_i^{ord}) \cdot f(D) dD, \end{aligned} \quad (3)$$

де p_i^{stock} – вартість зберігання одиниці товару в циклі t_i .

Враховуючи (2)-(3), узагальнена модель пошуку оптимального розміру партії замовлення буде мати вигляд:

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{a_i}^{x_i^{ord}} p_i^s \cdot D_i \cdot f(D) dD + \\ & + \int_{x_i^{ord}}^{\infty} p_i^s \cdot (2-r) \cdot x_i^{ord} \cdot f(D) dD + \\ & + \int_0^{\infty} r \cdot p_i^c \cdot (x_i^{ord} - D) \cdot f(D) dD + \\ & + \int_{x_i^{ord}}^{\infty} r \cdot p_i^s \cdot (D - x_i^{ord}) \cdot f(D) dD - \\ & - p_i^c \cdot (x_i^{ord} - x_i^0) - \\ & - \int_{a_i}^{x_i^{ord}} p_i^{stock} \cdot (x_i^{ord} - D_i) \cdot f(D) dD - \\ & - \int_{x_i^{ord}}^{\infty} p_i^s \cdot (D_i - x_i^{ord}) \cdot f(D) dD \end{aligned} \right\} \rightarrow \max, \quad (4)$$

$i = \overline{1, n}.$

Оскільки функція доходу є угнутою, то оптимальне значення можливо визначити як:

$$\frac{(\cdot)}{dx_i^{ord}} = p_i^s \cdot (2-r) \int_{x_i^{ord}}^{\infty} f(D) dD + r \cdot p_i^c \cdot \int_0^{\infty} f(D) dD - \\ - r \cdot p_i^s \cdot \int_{x_i^{ord}}^{\infty} f(D) dD - p_i^c - p_i^{stock} \cdot \int_{a_i}^{x_i^{ord}} f(D) dD + \\ + p_i^s \cdot \int_{x_i^{ord}}^{\infty} f(D) dD = 0.$$

Виконаємо ймовірнісне перетворення:

$$\frac{(\cdot)}{dx_i^{ord}} = p_i^s \cdot (2-r) \left(1 - \int_a^{x_i^{ord}} f(D) dD \right) + \\ + r \cdot p_i^c \cdot \int_0^{\infty} f(D) dD - \\ - r \cdot p_i^s \cdot \left(1 - \int_a^{x_i^{ord}} f(D) dD \right) - \\ - p_i^c - p_i^{stock} \cdot \int_{a_i}^{x_i^{ord}} f(D) dD + \\ + p_i^s \cdot \left(1 - \int_a^{x_i^{ord}} f(D) dD \right).$$

отримаємо:

$$p_i^s \cdot (2-r) - r \cdot p_i^s - p_i^c + p_i^s + r \cdot p_i^c \int_0^{\infty} f(D) dD = \\ = (p_i^s \cdot (2-r) - r \cdot p_i^s + p_i^{stock} + p_i^s) \int_{a_i}^{x_i^{ord}} f(D) dD.$$

Оптимальний об'єм замовлення товару в циклі t_i можливо отримати з рівняння:

$$\int_{a_i}^{x_i^{ord}} f(D) dD = \frac{p_i^s \cdot (3-2r) - p_i^c \cdot (1-r)}{p_i^s \cdot (3-2r) + p_i^{stock}}, \quad (5)$$

проінтегрувавши, отримаємо,

$$\frac{x_i^{ord} - a_i}{b_i - a_i} = \frac{p_i^s \cdot (3-2r) - p_i^c \cdot (1-r)}{p_i^s \cdot (3-2r) + p_i^{stock}},$$

відповідно,

$$x_i^{ord} = a_i + \frac{(b_i - a_i) \cdot (p_i^s \cdot (3-2r) - p_i^c \cdot (1-r))}{p_i^s \cdot (3-2r) + p_i^{stock}}. \quad (6)$$

На рисунку 1 зображена динаміка впливу змін вартості грошей і вартості зберігання на розмір оптимальної партії замовлення x_i^{ord} .

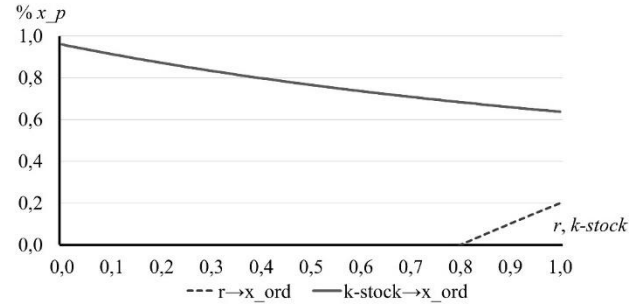


Рис. 1. Вплив вартості грошей і вартості зберігання на об'єм замовлення

Як можливо побачити на рисунку 1, існує суттєвий, майже лінійний, вплив вартості грошей на економічно-обґрунтований розмір партії замовлення. Здійснювати закупку товару доцільно при умові, що $p_i^c / p_i^s \leq r$. Вартість зберігання товару на складі має менш суттєвий вплив на економічно-обґрунтований розмір партії замовлення $\lim_{k-stock \rightarrow \infty} x_i^{ord} = 0$, де $k-stock = p_i^{stock} / p_i^c$, але вже при $p_i^{stock} \approx p_i^c$ скорочується об'єм партії замовлення до $0.62x^p$. Таким чином, коефіцієнт дисконтування r та співвідношення вартість зберігання p_i^{stock} і вартості товару p_i^c стають додатковими обмеженнями цільової функції.

Визначення оптимального плану постачання

Зробимо декілька припущень: 1. об'єм доступного на ринку товару в будь-який момент часу не є обмеженим; 2. Розмір партії товару, що постачається, визначено точно та дорівнює x_i^{ord} , а попит – випадкова невід'ємна величина з визначеним певним законом розподілу [17]; 3. витрати на корегування плану продажів x_i^p являють собою опуклу функцію відхилень від x_i^p та x_i^s .

Сформулюємо математичну модель задачі управління запасами:

$$\left\{ \sum_{i \in I} p_i^c \cdot x_i^p + M \left[\sum_{i \in I} f_i(\xi_i - x_i^p) \right] \right\} \rightarrow \min, \quad (7)$$

за умов

$$\sum_{i \in I} k_{ij} \cdot x_i^p \leq h_{ij}, i \in I, j \in J, h \in H, \quad (8)$$

$$x_i^p \geq 0, i \in I,$$

де k_{ij} – вектор операційних коефіцієнтів; h_{ij} – вектор обмежень (наприклад, $p_i^c \cdot x_i^p \leq B_i$ – обмеження щодо бюджету на закупівлі товару B_i , або $v^x \cdot x_i^p \leq V$ – обмеження на кількість товару, що зберігається на складі через обмеження розміру складу V та розміру товару v^x , та інші); ξ_i – випадкова величина i -го циклу; $f_i(\cdot)$ – функція витрат, що пов'язані з впливом ξ_i .

Розглянемо функцію Лагранжа, ввівши вектор множників Лагранжа $\lambda = \{\lambda_h\}$, та виконаємо заміну $M[f_i(\xi_i - x_i^p)] = \varphi_i(x_i^p)$. Отримаємо:

$$L(x, \lambda) = \sum_{i \in I} p_i^c \cdot x_i^p + \sum_{i \in I} \varphi_i(x_i^p) + \sum_{h \in H} \lambda_h \cdot \left(\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} k_{ij} \cdot x_i^p - h_{ij} \right), \quad (9)$$

Визначимо вектор $x = \{x_i^p\}$, та

$\tilde{p}_i^c(\lambda) = \min \left\{ p_i^c + \sum_{h \in H} k_{ij} \cdot \lambda_h \right\}$, то мінімальне значення можливо отримати при досягненні наступних умов:

$$\bar{x}_i(x) = \begin{cases} x_i^p, \text{ якщо } : \tilde{p}_i^c(\lambda) = p_i^c + \sum_{h \in H} k_{ij} \cdot \lambda_h \\ 0, \text{ інші} \end{cases}, \quad (10)$$

Якщо значення дорівнює x_i^p , то індекс стану призначимо як $i^*(i, \lambda)$. Визначимо через $\psi(x, \lambda)$ (9):

$$\begin{aligned} \psi(x, \lambda) &= \sum_{i \in I} \tilde{p}_i^c(\lambda) \cdot x_i^p - \\ &- \sum_{h \in H} \lambda_h \cdot h_{ij} + \sum_{i \in I} \varphi_i(x_i^p) = \\ &= \sum_{i \in I} (\tilde{p}_i^c(\lambda) \cdot x_i^p + \varphi_i(x_i^p)) - \sum_{h \in H} \lambda_h \cdot h_{ij}, \end{aligned} \quad (11)$$

відповідно,

$$\begin{aligned} \psi(\lambda) &= \min \{ \psi(x, \lambda) \} = \\ &= \sum_{i \in I} \left(\min (\tilde{p}_i^c(\lambda) \cdot x_i^p + \varphi_i(x_i^p)) \right) - \sum_{h \in H} \lambda_h \cdot h_{ij}, \end{aligned} \quad (12)$$

Таким чином, задача пошуку оптимального закупівельного плану зводиться до задачі оптимізації:

$$\{ \tilde{p}_i^c(\lambda) \cdot x_i^p + \varphi_i(x_i^p) \} \rightarrow \min, x_i^p \geq 0, i \in I. \quad (13)$$

Для розв'язання задачі оптимізації оптимальне значення множників Лагранжа можливо визначити за допомогою пошуку узагальненого градієнту:

$$g_\psi(\lambda) = \{ g_\psi^h(\lambda) \} = \sum_{i \in I} k_{i^*(i, \lambda)j} \cdot x_i^p(\lambda). \quad (14)$$

Формулювання оптимальної стратегії управління запасами

На рисунку 2 наведено модель функціонування процесу забезпечення організації запасами. Модель функціонування передбачає циклічне замовлення економічно-обґрунтованих партій товару x_i^{ord} в циклі планування t_i . Забезпечення запланованого об'єму продаж x_i^p може відбуватися за допомогою декілька ітерацій постачання в циклі t_i . Кількість поставок в циклі t_i залежить від вартості грошей та витрат на зберігання товару, розраховується за формулою: $n = (x_i^p - x_i^0) / x_i^{ord}$.

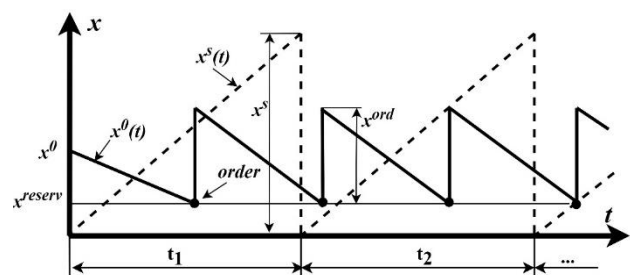


Рис. 2. Стан системи управління запасами

Оптимальна закупівельна стратегія для кожного циклу t_i полягає у наступному алгоритмі:

1. визначення рівня страхового запасу x^{reserv} , що дозволяє компенсувати

- потребу в товарі на ймовірний час затримки в постачанні товару з урахуванням оптимального розміру партії замовлення x_i^{ord} ;
2. визначення рівня залишків x_i^0 на початок циклу t_i ;
 3. якщо поточні залишки $x_i^0 \leq x^{reserv}$, то необхідно зробити замовлення на партію розміром x_i^{ord} , якщо залишки $x_i^0 > x^{reserv}$, то замовлення робити не потрібно.

Порівняльний аналіз роботи запропонованої моделі

Приклад 1. Умови взято в [15, с. 627], завдання 16.20. Обмеження задачі: для перевірки роботи алгоритму використаємо інформацію щодо попиту $0 \leq D \leq 5$, а щільність розподілу будемо використовувати для ситуації рівномірно розподіленого попиту. Задано наступні змінні: ціна продаж: 10 дол., ціна закупки – 8 дол., вартість зберігання – 1 дол., штраф за дефіцит – 10 дол., коефіцієнт дисконтування – 0,9. Потрібно визначити оптимальну партію замовлення за умови миттєвого здійснення поставки, а незадовільнений попит накопичується, тобто буде реалізовано в наступних періодах. Зробимо розрахунки за допомогою (6):

$$x_i^{ord} = \frac{5 \cdot (10 \cdot (3 - 2 \cdot 0,9) - 8 \cdot (1 - 0,9))}{10 \cdot (3 - 2 \cdot 0,9) + 1} = 4,31.$$

Отже, оптимальна партія замовлення – 4,31 одиниця.

Якщо використати задану в завданні 16.20 щільність попиту $f(D) = 0.08D$, то отримаємо наступний результат:

$$x_i^{ord} = \sqrt{\frac{10 \cdot (3 - 2 \cdot 0,9) - 8 \cdot (1 - 0,9)}{10 \cdot (3 - 2 \cdot 0,9) + 1} \cdot 0,04} = 4,64.$$

Отриманий результат відповідає наведеному в [15], але модель більш чутлива к кореляції між ціною закупки та реалізації, чутлива к вартості грошей та витратам на зберігання товару на складі.

Приклад 2. Для аналізу якості роботи запропонованої моделі використаємо приклад, що наведено на сайті Kaggle Inc. – платформи для змагань з аналітики та передбачувального моделювання. Завдання передбачає моделювання продаж швидкопсувних товарів великого екваторського роздрібного продавця продуктів харчування Corporación Favorita. Компанія заснована 1952 році та працює на ринках Еквадору, Коста-Ріки, Чилі, Панами, Парагваю та Перу [18].

В якості альтернативного методу прогнозування x_i^p використано лінійну регресію, як найбільш простий та поширений метод прогнозування. На рисунку 3 зображено моделювання за лінійною регресією даних з [18].

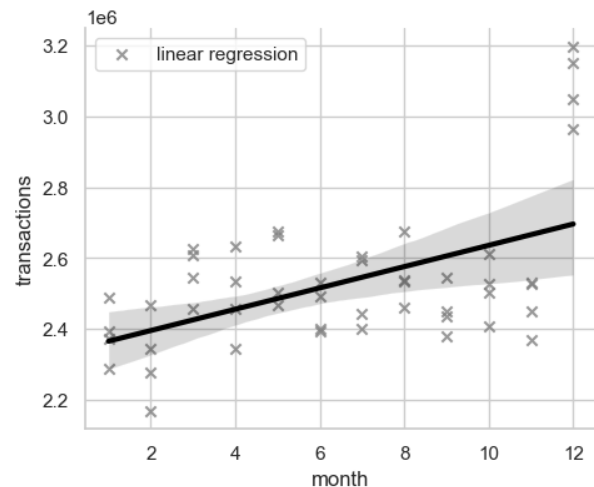


Рис. 3. Прогноз за лінійною регресією

Як можливо побачити на рисунку 3, модель регресії має низку прогностичну якість, це означає що рівняння регресії не дозволяє охопити значну частину можливих значень показників продаж.

Для моделювання використані наступні припущення:

- змінні: $p_i^c = 0,8$ у.о., $p_i^s = 1,0$ у.о., $p_i^{stock} = 0,001$ у.о., $r = 0,95$;

- моделювання відбувалося за умови накопичення дефіциту, тобто дефіцит, що виникає в поточному циклі, має бути відвантажено в наступному.

На рисунку 4 наведено порівняння рівня складських запасів та їх реалізація для двох варіантів моделювання роботи декілька циклів постачання.

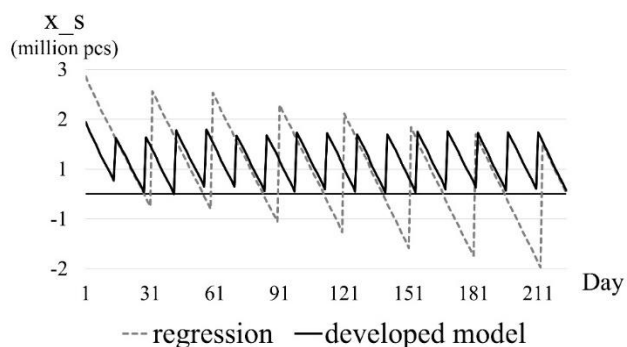


Рис. 4. Порівняння динаміки запасів

Як можливо побачити з рисунка 4, розроблена модель дозволяє зменшити рівень складських залишків, та за допомогою збільшення циклів постачання, що обумовлено використанням оптимального розміру партії поставки, мати бездефіцитний характер. Необхідно зазначити, що використання в якості альтернативного методу порівняння лінійної регресії має певні обмеження, які можливо уникнути, наприклад, використавши запропоновані методи [19].

Аналізуючи результати моделювання за допомогою регресійної моделі і запропонованої моделі, можливо зробити висновок, що за рахунок запропонованого алгоритму планування та управління, результативність процесу управління запасами може покращитися по наступним статтям: зберігання товару – до 40 відсотків, що обумовлено, окрім вищенаведеного,

зниженням витрат на зберігання товару (зниження вимог до площі складу не враховано); зниження витрат на обслуговування оборотного капіталу – до 20 відсотків, за рахунок зниження потреб в оборотному капіталі, та зростанні коефіцієнту обіговості; зниження втрат внаслідок відсутності товару – в наслідок відсутності інформації про вимоги клієнтів щодо задовільних термінів очікувань, розрахувати зростання показника викликає труднощі, але необхідно зазначити, що скорочення циклу постачання сприяє скороченню термінів очікування покупцями дефіцитного товару.

Висновки

В роботі запропонована модель системи управління запасами з використанням оптимального розміру партії замовлення та прогнозування попиту на цикл продажів з урахуванням невизначеності попиту. Розроблений алгоритм дозволяє підвищити якість планування закупівельних операцій, особливо в порівнянні з традиційними методами прогнозування – моделями лінійної регресії. Наведена модель має резерв для покращення, наприклад, зазвичай організації використовують мультипродуктовий підхід до управління продажами, це додає значне обмеження на використання складських приміщень з урахуванням пріоритетів в товарних групах. Необхідно зазначити, що ускладнення математичної моделі може негативно вплинути на можливість її інтерпретації серед менеджерів, що відповідають за процес забезпечення організації товарами, а це сприяє зростанню спротиву до впровадження моделі в технологічні процеси. Введення додаткових змінних в модель може сприяти необхідності визначення пріоритетів, що, в свою чергу, також ускладнить модель.

Список використаних джерел

1. Hao, Z., Li, J., Cai, J. Allocation of inventory responsibilities in overconfident supply chains. Eur. J. Oper. Res. Volume 305, 2022, pp. 207-221. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2022.05.042>

2. Shaia X., Xioigb S., Zhaigc C. Mitigating supply disruption risks by diversifying competing suppliers and using sales effort. International Journal of Production Economics. Volume 255, 2022. N. pages.

<https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2022.108637>

3. Ambroszkiewicz S., Bylka S. Relatively optimal policies for stock management in a supply chain with option for inventory space limitation. *Applied Mathematical Modelling*. Volume 114, 2022. N. pages.

<https://doi.org/10.1016/j.apm.2022.09.033>

4. Демченко С.С., Кнопов А.П., Пенеляев В.А. Оптимальные стратегии для систем управления запасами с выпуклой функцией издержек. *Кибернетика и системный анализ* - 2000. № 6. С. 113-120.

5. Симонов Д.І. Оптимізація динамічних процесів при адмініструванні ланцюгів постачання. Mechanism for economic development in the context of global changes: international experience. Рига, Латвія. 2021. С. 65-70. <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-081-0-15>

6. Silver A. Edward, David F. Pyke, Douglas J. Thomas. Inventory and production management in supply chains. Fourth edition. Boca Raton, Calif.: CRC Press, 2017. 812 pages.

7. Raa B., Aouam T. A shortfall modelling-based solution approach for stochastic cyclic inventory routing. *Eur. J. Oper. Res.*, Volume 305, 2022. Pp. 674-684.

<https://doi.org/10.1016/j.ejor.2022.06.001>

8. Кнопов П.С., Пенеляева Т.В., Демченко И.Ю. Об одной полумарковской модели управления запасами. *Кибернетика и системный анализ*, том 52, № 5, 2016. С. 81-88.

9. Nita H. Shah, Mandeep Mittal. Optimization and inventory management. Singapore: Springer, 2020. 470 pages.

10. Steven M. Bragg. Inventory accounting: a comprehensive guide. Hoboken, NJ: J. Wiley, 2005. 243 pages.

11. Waters D. Inventory control and management. 2nd ed. Chichester, England: John Wiley & Sons Inc (Verlag), 2003. 391 pages.

12. Леонтьев В., Холлис В. Ченери, Пауль Г. Кларк [и др.]. Исследования структуры американской экономики: теоретич. и эмпирич. анализ по схеме затраты-выпуск. Пер. с англ. А. С. Игнатьева; Под ред. А. А. Конюса. - Москва: Госстатиздат, 1958. - 640 с.

13. Гуляницький Л.Ф. Агрегована задача управління виробництвом та зберіганням

продукції. *Комп'ютерна математика*, № 1, 2017. С. 36-44.

14. Норкин В.И., Гайворонский А.А., Заславский В.А., Кнопов П.С. Модели оптимального распределения ресурсов для защиты объектов критической инфраструктуры. *Кибернетика и системный анализ*, Т. 54, № 5. – 2018. – С. 13-26.

15. Hamdy A. Taha. Operations Research: An Introduction, Global Edition (10th Edition). England, Harlow: Pearson Education Limited, 2017. 849 pages.

16. Hadley, G. and Whitin, T. Analysis of Inventory Systems. NJ, Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1963. 452 pages

17. Михалевич В.С., Трубин В.А., Шор Н.З. Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования: Модели, методы, алгоритмы. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 264 с.

18. Сайт "Kaggle Inc.". Store Sales - Time Series Forecasting. Use machine learning to predict grocery sales. Режим доступа: <https://www.kaggle.com/competitions/store-sales-time-series-forecasting/data>. [Доступ: 24 червня 2022].

19. Єршов С.В., Лико Т.І. Методи побудови регресійних моделей на основі нечітких даних. *Комп'ютерна математика*, № 1, 2015. С. 43-49.

References

1. HAO, Z., LI, J., CAI, J. (2022). Allocation of inventory responsibilities in overconfident supply chains. *Eur. J. Oper. Res.*, 305. p. 207-221. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2022.05.042>

2. SHAIA, X., XIOIGB, S., ZHAIGC, C. (2022). Mitigating supply disruption risks by diversifying competing suppliers and using sales effort. *International Journal of Production Economics*. 255. n. pages.

<https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2022.108637>

3. AMBROSZKIEWICZ, S., BYLKA, S. (2022). Relatively optimal policies for stock management in a supply chain with option for inventory space limitation. *Applied Mathematical Modelling*. 114. n. pages.

<https://doi.org/10.1016/j.apm.2022.09.033>

4. DEMCHENKO, S., KNOPOV, A., PEPELYAEV, V. (2000) *Optimalnyie strategii dlya sistem upravleniya zapasami s vyipukloy funktsiei izderzhkek*. Kibernetika i sistemnyi analiz. 6. p. 113-120.
5. SYMONOV, D. (2021) Optimizatsiya dinamichnih protsesiv pri administruvanni lantsyugiv postachannya. Mechanism for economic development in the context of global changes: international experience. Riga, LatvIya. p. 65-70. <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-081-0-15>
6. SILVER A. EDWARD, DAVID F. PYKE, DOUGLAS J. THOMAS. (2017) *Inventory and production management in supply chains*. Fourth edition. Boca Raton, Calif.: CRC Press. 812 pages.
7. RAA, B., AOUAM, T. (2022). *A shortfall modelling-based solution approach for stochastic cyclic inventory routing*. Eur. J. Oper. Res., 305, p. 674-684. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2022.06.001>
8. KNOPOV, P., PEPELYAEVA, T., DEMCHENKO, I. (2016) *Ob odnoy polumarkovskoy modeli upravleniya zapasami*. Kibernetika i sistemnyi analiz, 52(5). p. 81-88.
9. NITA H. SHAH, MANDEEP MITTAL. (2020) *Optimization and inventory management*. Singapore: Springer. 470 pages.
10. STEVEN M. BRAGG. (2005) *Inventory accounting: a comprehensive guide*. Hoboken, NJ: J. Wiley. 243 pages.
11. WATERS, D. (2003) *Inventory control and management*. 2nd ed. Chichester, England: John Wiley & Sons Inc (Verlag). 391 pages.
12. LEONTEV, V., HOLLIS V. CHENERI, PAUL G. KLARK [i dr.]. (1958) *Issledovaniya strukturyi amerikanskoy ekonomiki: teoretich. i empirich. analiz po sheme zatraty-vyipusk*. Per. s angl. A. S. Ignateva; Pod red. A. A. Konyusa. - Moskva : Gosstatizdat. p. 640.
13. GULYANITSKIY, L. (2017) *Agregovana zadacha upravlinnya virobnitstvom ta zberigannyam produktsiyi*. Kompyuternaya matematika, 1. p. 36-44.
14. NORKIN, V., GAYVORONSKIY, A., ZASLAVSKIY, V., KNOPOV, P. (2018) *Modeli optimalnogo raspredeleniya resursov dlya zaschityi ob'ektov kriticheskoy infrastrukturyi*. Kibernetika i sistemnyi analiz, 54(5). p. 13-26.
15. HAMDY A. TAHA. (2017) *Operations Research: An Introduction, Global Edition* (10th Edition). England, Harlow: Pearson Education Limited. 849 pages.
16. HADLEY, G. AND WHITIN, T. (1963) *Analysis of Inventory Systems*. NJ, Upper Saddle River: Prentice-Hall. 452 pages.
17. MIHALEVICH, V., TRUBIN, V., SHOR, N. (1986) *Optimizatsionnye zadachi proizvodstvenno-transportnogo planirovaniya: Modeli, metody, algoritmy*. – M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit. 264 pages.
18. Sait "Kaggle Inc.". Store Sales - Time Series Forecasting. Use machine learning to predict grocery sales. Retrieved from <https://www.kaggle.com/competitions/store-sales-time-series-forecasting/data>. [Accesses: 2022, June 24].
19. ERSHOV, S., LIKO, T. (2015) *Metodi pobudovi regresylnih modeley na osnovi nechItkih danih*. Kompyuternaya matematika, 1. p. 43-49.

Надійшла до редакції: 02.12.2022

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ,
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА
ТА МЕХАНІКА**

УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/4.5>

О. В. Капустян¹ д.ф.-м.н., професор
Ю. В. Федоренко², асистент
І. М. Циганівська³, к.ф.-м.н., доцент

ω -граничні множини для
імпульсно-збуреного параболічного
рівняння в просторі неперервних
функцій

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, e-mail: kapustyan@knu.ua

²Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, e-mail: juliamfed@gmail.com

³Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, e-mail: itsy8009@knu.ua

O.V. Kapustyan¹, Dr. of Sci., Full Professor
J.V. Fedorenko², Assistant
I.M. Tsygansvska³, Ph.D., Associate Professor

ω - limit sets for impulsive-perturbed
parabolic equation in the space of
continuous functions

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st., e-mail: kapustyan@knu.ua

²Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st., e-mail: juliamfed@gmail.com

³Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st., e-mail: itsy8009@knu.ua

В роботі розглядається імпульсно-збурена нескінченновимірна задача, яка складається з параболічного рівняння, розв'язки якого зазнають імпульсного збурення при досягненні інтегральним функціоналом певного порогового значення. Доведено, що при певних умовах на коефіцієнти така задача в фазовому просторі неперервних функцій породжує імпульсну динамічну систему, кожна траєкторія якої в $\sup$ -нормі притягується до компактної ω -граничної множини.

Ключові слова: параболічне рівняння, імпульсне збурення, притягуюча множина

We consider an important class of disturbed infinite-dimensional systems provided by evolutionary equations with impulsive effects. An impulsive dynamical system acting in the phase space H is a hybrid system described by an evolutionary equation together with impulsive disturbances which, in turn, are characterized by a closed set $M \subset H$ (impulsive set) and a mapping $I : M \mapsto H$ (impulsive mapping). A solution of such a system, by definition, is a left-continuous function y satisfying evolutionary equation for all times t for which $y(t) \notin M$ and jumping to a new state $I(y(t))$ at all times t for which $y(t)$ reaches M . The main problem in the study of qualitative behavior of impulsive dynamical systems by classical methods is that solutions usually do not depend continuously on initial data. A number of examples illustrate already in the finite-dimensional case that new complex scenarios of possible limit behaviors of impulsive trajectories can occur, which are fundamentally impossible in the non-impulsive case. Results concerning attracting sets for infinite-dimensional impulsive systems have appeared only a few years ago. But all those results concern the limit behavior of impulsive semiflows in Hilbert space and the presence of scalar product played crucial role in those construction. In this paper we want to investigate ω -limit attracting sets for impulsive-disturbed parabolic system in the $\sup$ -norm of Banach space of continuous functions.

Key Words: parabolic equation, impulsive perturbation, attracting set

1 Вступ

Якісному аналізу імпульсних динамічних систем в скінченновимірних просторах присвячено роботи [1]-[4]. Перші результати щодо дослідження притягуючих множин імпульсних динамічних систем в нескінченновимірних фазових просторах з'явилися порівняно недавно [5],[6] і на сьогодні мають застосування до широко-

го кола еволюційних задач в гільбертових просторах [7],[8]. Це пов'язано як з добре розвинутою теорією слабких розв'язків нелінійних задач, так і з можливістю задання імпульсних параметрів через скалярний добуток в фазовому просторі. Саме тому є лише окремі результати щодо якісної поведінки розв'язків параболічних імпульсно-збурених рівнянь в $\sup$ -

нормах [9], [10]. В даній роботі ми розглядаємо імпульсно-збурену нескінченновимірну задачу, яка складається з параболічного рівняння, розв'язки якого зазнають імпульсного збурення при досягненні інтегральним функціоналом певного порогового значення. Доведено, що при певних умовах на коефіцієнти така задача в фазовому просторі неперервних функцій породжує імпульсну динамічну систему, кожна траєкторія якої в $\sup$ -нормі притягується до компактної ω -граничної множини.

2 Постановка задачі:

Відносно невідомої функції $u = u(t, x)$, $t > 0$, $x \in (0, l)$ розглядаємо задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}) + q(x)u + h(x), \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \end{cases} \quad (1)$$

де $p \in C^1([0, l])$, $p(x) \geq p_0 > 0$, $q \in C([0, l])$, $q(x) \leq 0$, $h \in C([0, l])$ - задані функції, $u_0 \in X := \{u \in C([0, l]) \mid u(0) = u(l) = 0\}$ - фазовий простір з нормою $\|u\| = \sup_{x \in [0, l]} |u(x)|$.

Розглянемо функціонал

$$\psi(u) = \int_0^l u(x) dx. \quad (2)$$

Імпульсна задача формулюється наступним чином: якщо в деякий момент часу $t > 0$ на розв'язку (1) функціонал (2) досягає фіксованого значення $\psi_0 > 0$, система миттєво переходить у нове положення

$$u(t, x) + \alpha(x), \quad (3)$$

де $\alpha \in X$, $\alpha(x) \geq 0$ - задана функція, $\int_0^l \alpha(x) dx = \alpha_0 > 0$. В роботі доводиться, що задача (1)-(3) породжує в X імпульсну динамічну систему $\tilde{V} : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X$ (див. Озн.1), для якої $\forall u_0 \in X$ ω -гранична множина $\tilde{\omega}(u_0)$ є непорожньою, компактною, і

$$\text{dist}_X(\tilde{V}(t, u_0), \tilde{\omega}(u_0)) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

3 Основні результати

Спочатку опишемо загальну конструкцію імпульсної динамічної системи. Згідно [5], імпульсна динамічна система будується на основі неперервної напівгрупи $V : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X$ (породжується розв'язками автономного рівняння),

траєкторії якої при досягненні ними фіксованої підмножини $M \subset X$ (імпульсна множина) переводяться відображенням $I : M \rightarrow X$ (імпульсне відображення) в нове положення $u^+ = Iu$.

Для коректної постановки такої задачі мають бути виконаними умов:

$$V : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X - \text{напівгрупа},$$

$$\text{тобто } \forall u \in X \quad \forall t, s \geq 0$$

$$V(0, u) = u, V(t + s, u) = V(t, V(s, u)) \quad (4)$$

відображення $V : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X$ - неперервне,
 $M \subset X$ - замкнена, $M \cap IM = \emptyset$

$$\forall u \in M \quad \exists \tau = \tau(u) > 0 \quad \forall t \in (0, \tau) \quad V(t, u) \notin M$$

За умов (4) відомо [5], що якщо для $u \in X$

$$M^+(u) := (\cup_{t>0} V(t, u)) \cap M \neq \emptyset,$$

то

$$\exists \tilde{s} = \tilde{s}(u) > 0 \quad \forall t \in (0, \tilde{s})$$

$$V(t, u) \notin M, \quad V(\tilde{s}, u) \in M. \quad (5)$$

Тоді для кожного $u_0 \in X$ імпульсна траєкторія $\tilde{V}(t, u_0)$ будується наступним чином:

якщо $M^+(u_0) = \emptyset$, то $\tilde{V}(t, u_0) = V(t, u_0)$, $t \geq 0$;

якщо $M^+(u_0) \neq \emptyset$, то для $s_0 := \tilde{s}(u_0)$, $u_1 := V(s_0, u_0)$

$$\tilde{V}(t, u_0) = \begin{cases} V(t, u_0), & t \in [0, s_0), \\ u_1^+, & t = s_0; \end{cases}$$

якщо $M^+(u_1^+) = \emptyset$, то $\tilde{V}(t, u_0) = V(t - s_0, u_1^+)$, $t \geq s_0$;

якщо $M^+(u_1^+) \neq \emptyset$, то для $s_1 = \tilde{s}(u_1^+)$, $u_2 := V(s_1, (u_1^+))$,

$$\tilde{V}(t, u_0) = \begin{cases} V(t - s_0, u_1^+), & t \in [s_0, s_0 + s_1), \\ u_2^+, & t = s_0 + s_1; \end{cases}$$

і т.д. Продовжуючи цей процес, ми отримаємо скінченну або нескінченну кількість імпульсних точок $\{u_{n+1}^+ = IV(s_n, u_n^+), u_0^+ = u_0\}$ і відповідну послідовність моментів часу

$$T_{n+1} := \sum_{k=1}^n s_k, \quad T_0 := 0$$

При цьому $\tilde{V}$ задається формулою

$$\tilde{V}(t, u_0) = \begin{cases} V(t - T_n, u_n^+), & t \in [T_n, T_{n+1}), \\ u_{n+1}^+, & t = T_{n+1}. \end{cases} \quad (6)$$

Щоб уникнути ефекту "биття"[1], тобто руйнування імпульсної траєкторії за скінченний час, робимо припущення:

для $\forall u_0 \in X$ або імпульсних точок немає, або їх скінченна кількість, або

$$T_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Умова (7) гарантує, що $\forall u_0 \in X$ функція $t \rightarrow \tilde{V}(t, u_0)$ з (6), визначена на $[0, +\infty)$.

Означення 1. Відображення $\tilde{V} : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X$ називається імпульсною динамічною системою.

Будемо казати, що $\{V, M, I\}$ породжують імпульсну динамічну систему, якщо виконуються умови (4), (7).

Відомо, що за виконання (4), (7) $\tilde{V} : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X$ є напівгрупою, траєкторії якої є неперервними зправа.

Крім того, за побудовою $\forall u_0 \in X \forall t > 0$

$$\tilde{V}(t, u_0) \cap M = \emptyset.$$

Основним об'єктом вивчення є ω - гранична множина напівгрупи $\tilde{V}$

$$\tilde{\omega}(u_0) = \{\xi = \lim_{t_n \rightarrow \infty} \tilde{V}(t_n, u_0)\}. \quad (8)$$

Лема 1. Нехай $\{V, M, I\}$ породжують імпульсну динамічну систему $\tilde{V}$, і для $u_0 \in X$ виконуються умови:

$$\tilde{\gamma} := \bigcup_{t \geq 0} \tilde{V}(t, u_0) - \text{обмежена}; \quad (9)$$

$$\forall \tau > 0 \ V(\tau, \tilde{\gamma}) - \text{предкомпактна}; \quad (10)$$

$$I : M \rightarrow X - \text{переводить предкомпактну послідовність в предкомпактну}; \quad (11)$$

якщо $\tilde{\gamma}$ має нескінченну кількість імпульсних точок, то

$$\inf_{k \geq 1} s_k > 0. \quad (12)$$

Тоді $\tilde{\omega}(u_0) \neq \emptyset$, компакт, і $\text{dist}_x(\tilde{V}(t, u_0), \tilde{\omega}(u_0)) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$.

Доведення.

Відомо [5], що достатньо довести предкомпактність послідовності

$$\{\xi_m = \tilde{V}(t_m, u_0) | t_m \rightarrow \infty\}.$$

Розглянемо можливі випадки:

якщо $M^+(u_0) = \emptyset$, то $\tilde{V}(t_m, u_0) = V(t_m, u_0) = V(1, V(t_m - 1, u_0)) \subset V(1, \tilde{\gamma})$ - предкомпактна в силу (10);

якщо $M^+(u_0) \neq \emptyset$, і імпульсних точок скінченна кількість $\{u_1^+, \dots, u_p^+\}$, то для достатньо великих m маємо $t_m > T_p + 1$, отже

$$\begin{aligned} \xi_m &= \tilde{V}(t_m, u_0) = V(t_m - T_p, u_p^+) = \\ &= V(1, V(t_m - T_p - 1, u_p^+)) \subset V(1, \tilde{\gamma}) - \end{aligned}$$

предкомпактна в силу (10).

Тепер нехай $M^+(u_0) \neq \emptyset$, і імпульсних точок $\{u_n^+\}_{n \geq 0}$ нескінченна кількість, $\{T_n\}_{n \geq 1}, T_n \rightarrow \infty$ - відповідні моменти часу.

Тоді для $t_m \rightarrow \infty$ для кожного $m \geq 1$ існує

$$n(m) : t_m \in [T_{n(m)}, T_{n(m)+1}), n(m) \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty.$$

Отже, $\xi_m = \tilde{V}(t_m, u_0) = V(t_m - T_{n(m)}, u_{n(m)}^+)$, якщо $t_m - T_{n(m)} \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$, то для достатньо великих m маємо:

$$\xi_m = V(1, V(t_m - T_{n(m)} - 1, u_{n(m)}^+)) \subset V(1, \tilde{\gamma}) -$$

предкомпактна в силу (10).

Інакше по підпослідовності $t_m - T_{n(m)} \rightarrow \tau \geq 0$. Якщо $\tau > 0$, то для достатньо великих m маємо:

$$\xi_m = V(\frac{\tau}{2}, V(t_m - T_{n(m)} - \frac{\tau}{2}, u_{n(m)}^+)) \subset V(\frac{\tau}{2}, \tilde{\gamma}) -$$

предкомпактна в силу (10.)

Якщо $\tau = 0$, то

$$\xi_m = V(t_m - T_{n(m)}, u_{n(m)}^+),$$

$$u_{n(m)}^+ = IV(s_{n(m)-1}, u_{n(m)-1}^+),$$

$$V(s_{n(m)-1}, u_{n(m)-1}^+) =$$

$$= V(\frac{\bar{s}}{2}, V(s_{n(m)-1} - \frac{\bar{s}}{2}, u_{n(m)-1}^+)) \subset V(\frac{\bar{s}}{2}, \tilde{\gamma}),$$

де $\bar{s} := \inf_{k \geq 1} s_k > 0$ - з умови (12). Тоді $\{u_{n(m)}^+\}$ - предкомпактна в силу (11), і предкомпактність $\{\xi_m\}$ слідує із неперервності V . Лема доведена.

Зауваження 1. Умову (12) можна не накладати, якщо припускати, що множина імпульсних точок $\{u_n^+\}$ - предкомпактна. Це, зокрема, буде мати місце у випадку, коли $(\bigcup_{t > 0} V(t, \tilde{\gamma})) \cap M$ - предкомпакт.

Зауваження 2. Умова (9) виконується, якщо припускати виконання нерівностей:

$$\begin{aligned} \|V(t, u)\| &\leq \|u\|e^{-\delta t} + C_1, \\ \|Iu\| &\leq \|u\| + C_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Дійсно, в цьому випадку в силу (12), (13):

$$\|u_n^+\| \leq \|u_0\|e^{-\delta n\bar{s}} + (C_1 + C_2)(1 + e^{-\delta\bar{s}} + e^{-2\delta\bar{s}} + \dots + e^{-(n-1)\delta\bar{s}}) \leq \|u_0\| + \frac{C_1 + C_2}{1 - e^{-\delta\bar{s}}}. \quad (14)$$

Тоді з (6) і (14) маємо: для $\forall t \geq 0$

$$\|\tilde{V}(t, u_0)\| \leq \|u_0\| + \frac{C_1 + C_2}{1 - e^{-\delta\bar{s}}} + C_1. \quad (15)$$

Лема 2. Нехай $h(x) \leq 0, x \in [0, l]$, $\alpha(x) = O(x)$, $x \rightarrow 0$, $\alpha(x) = O(l-x)$, $x \rightarrow l$. Тоді задача (1)-(3) породжує імпульсну динамічну систему.

Доведення.

Відомо, що (1) породжує неперервну напівгрупу $V : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X$

$$V(t, u_0) = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k^0 e^{-\lambda_k t} + \frac{h_k}{\lambda_k} (1 - e^{-\lambda_k t})) \psi_k(x), \quad (16)$$

де $\{\psi_k\}, \{\lambda_k\}$ - розв'язки спектральної задачі

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(p(x) \frac{\partial \psi}{\partial x}) + q(x)\psi = -\lambda\psi \\ \psi|_{x=0} = \psi|_{x=l} = 0, \end{cases} \quad (17)$$

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots, \lambda_k \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty,$$

$$u_k^0 = \int_0^l u_0(x) \psi_k(x) dx, \quad h_k = \int_0^l h(x) \psi_k(x) dx.$$

Покладемо

$$M = \{u \in X | u(x) \geq 0, \psi(u) = \psi_0\}, \quad (18)$$

$$I : M \rightarrow X,$$

$$(Iu)(x) = u(x) + \alpha(x). \quad (19)$$

Доведемо, що $\{V, M, I\}$ з (16), (18), (19) породжують імпульсну динамічну систему $\tilde{V}$, тобто виконуються умови (4), (7).

Множина M є замкненою в X , для $u \in M$

$$\psi(Iu) = \int_0^l (u(x) + \alpha(x)) dx = \psi_0 + \alpha_0 > \psi_0,$$

отже $M \cap IM = \emptyset$. Для доведення останньої властивості з (4) покажемо, що для $u_0 \in M$, $t > 0$

$$\psi(V(t, u_0)) < \psi_0. \quad (20)$$

Дійсно, в силу рівняння (1) для розв'язку $u = u(t, x)$ з $u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \neq 0$ маємо

$$u(t, x) = v(t, x) + \omega(t, x),$$

де v — розв'язок (1) з $h(x) \equiv 0$, ω — розв'язок (1) з $u_0(x) \equiv 0$

Для ω в силу принципу максимуму [11] маємо:

$$\omega(t, x) \leq 0,$$

а отже $\psi(\omega(t)) \leq 0, \forall t \geq 0$. Для v в силу принципу максимуму $v(t, x) > 0, \forall t > 0, \forall x \in (0, l)$. Крім того, для $t > 0$

$$\frac{d}{dt} \psi(v(t)) \leq p(l)v_x(t, l) - p(0)v_x(t, 0) \leq 0,$$

оскільки $v(t, 0) = v(t, l) = 0$, $v(t, x) > 0 \forall x \in (0, l)$. Отже, $\forall t_2 > t_1 > 0$

$$\psi(v(t_2)) \leq \psi(v(t_1)).$$

Доведемо, що ця нерівність строга. Припустимо, що для деяких $\forall t_2 > t_1 > 0$

$$\int_0^l v(t_2, x) dx = \int_0^l v(t_1, x) dx$$

Тоді з (1):

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^l (v(t_2, x) - v(t_1, x)) dx \leq \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} (p(l)v_x(t, l) - p(0)v_x(t, 0)) dt. \end{aligned}$$

Оскільки підінтегральний вираз правої частини недодатний $\forall t \in [t_1, t_2]$, то з останньої нерівності виводимо $\forall t \in [t_1, t_2]$ $v_x(t, l) = v_x(t, 0) = 0$. Це протирічить тому, що $u_0(x) \neq 0$

Отже, для $t > 0$ $\int_0^l v(t, x) dx < \int_0^l v(0, x) dx = \psi(u_0)$, і тому $\psi(u(t)) = \psi(\omega(t)) + \psi(v(t)) < \psi(u_0)$. Зокрема, виконується остання властивість (4).

Доведемо (7). Нехай імпульсних точок буде нескінченно багато. Покажемо, що

$$T_{n+1} = \sum_{k=1}^n s_k \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$$

Отже, нехай для $u_0 \in X$, $u_1^+ = Iu(s_0)$ — перша імпульсна точка.

$$u_1^+(x) = u(s_0, x) + \alpha(x), \psi(u_1^+) = \psi_0 + \alpha_0$$

Нехай $s_1 = \tilde{s}(u_1^+)$.

Зауважимо, що в силу [11] без обмеження загальності можемо вважати, що власна функція $\psi(x) := \psi_1(x)$, що відповідає λ_1 , задовольняє властивості:

$$\psi \in C^1([0, l]), \psi(x) > 0 \forall x \in (0, l), \psi'(0) \neq 0, \psi'(l) \neq 0.$$

Тоді в силу умов на функцію $\alpha(x)$ можемо стверджувати, що

$$\exists C_1 > 0 : \alpha(x) \leq C_1 \psi(x), x \in [0, l].$$

Оскільки $\exists C_2 = C_2(u_0) > 0$ таке, що

$$V(s_0, x) \leq C_2 \psi(x),$$

то для u_1^+ маємо

$$u_1^+(x) \leq (C_1 + C_2) \psi(x), \forall x \in [0, l].$$

Тоді з принципу максимуму для розв'язку задачі

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(p(x) \frac{\partial v}{\partial x}) + q(x)v, \\ v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0, \\ v|_{t=0} = u_1^+(x), \end{cases} \quad (21)$$

враховуючи (17), одержуємо:

$$v(t, x) \leq (C_1 + C_2) \psi(x) e^{-\lambda_1 t}. \quad (22)$$

Тоді

$$\begin{aligned} p(l)v_x(t, l) - p(0)v_x(t, 0) &\geq \\ &\geq (C_1 + C_2)e^{-\lambda_1 t}(p(l)\psi'(l) - p(0)\psi'(0)) \end{aligned}$$

Отже

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi(v(t)) &\geq (C_1 + C_2)e^{-\lambda_1 t}(p(l)\psi'(l) - p(0)\psi'(0) + \\ &+ \int_0^l q(x)\psi(x)) = -\lambda_1(C_1 + C_2)e^{-\lambda_1 t} \int_0^l \psi(x)dx. \end{aligned} \quad (23)$$

Звідси, якщо $u(s_1) = v(s_1) + \omega(s_1) \in M$, то з (23)

$$\begin{aligned} \psi_0 - \psi(\omega(s_1)) &\geq \psi_0 + \alpha_0 - \\ &- (C_1 + C_2)(1 - e^{-\lambda_1 s_1}) \int_0^l \psi(x)dx. \end{aligned}$$

Оскільки в силу (16)

$$\exists C_3 > 0 \quad \forall t \geq 0 \quad |\psi(\omega(t))| \leq C_3 t,$$

то маємо оцінку:

$$(C_1 + C_2) \int_0^l \psi(x)dx (1 - e^{-\lambda_1 s_1}) + C_3 s_1 \geq \alpha_0 \quad (24)$$

З (24) виводимо, що

$$s_1 \geq \tau_1,$$

де $\tau_1 > 0$ — єдиний розв'язок рівняння

$$(C_1 + C_2) \int_0^l \psi(x)dx (1 - e^{-\lambda \tau}) + C_3 \tau = \alpha_0 \quad (25)$$

Враховуючи оцінку $1 - e^{-\lambda_1 x} \leq \lambda_1 x$, $x \geq 0$, з (25) маємо:

$$s_1 \geq \frac{\alpha_0}{\lambda_1(C_1 + C_2) \int_0^l \psi(x)dx} + C_3$$

Далі для $u_2^+(x) = IV(s_1, u_1^+) = v(s_1, x) + w(s_1, x) + \alpha(x)$

$$\begin{aligned} u_2^+(x) &\leq (C_1 + C_2) \psi(x) e^{-\lambda_1 s_1} + \\ &+ C_1 \psi(x) \leq (2C_1 + C_2) \psi(x). \end{aligned}$$

Тоді, повторюючи попередні міркування (21)-(24), для $s_2 = \tilde{s}(u_2^+)$ маємо оцінку:

$$s_2 \geq \frac{\alpha_0}{\lambda_1(2C_1 + C_2) \int_0^l \psi(x)dx + C_3}$$

Отже на n -тому кроці

$$s_n \geq \frac{\alpha_0}{\lambda_1(nC_1 + C_2) \int_0^l \psi(x)dx + C_3}. \quad (26)$$

З (26) виводимо $\sum_{n=0}^{\infty} s_n = \infty$, що означає виконання (7). Лема доведена.

Тепер розглянемо для $R > 0$ множину

$$M_R := \{u \in X | u(x) \geq 0, \psi(u) = \psi_0,$$

$$\int_0^l u^2(x)dx \leq R^2\}.$$

Оскільки M_R — замкнена, $M_R \subset M$, то з леми 2 випливає, що $\{V, M_R, I\}$ також породжують імпульсну динамічну систему $\tilde{V}_R : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X$.

Теорема. За умов леми 2 для $\forall u_0 \in X$ ω -гранична множина

$$\tilde{\omega}_R(u_0) = \bigcap_{T>0} \overline{\bigcup_{t \geq T} \tilde{V}_R(t, u_0)}$$

непорожня, компактна і

$$\text{dist}_X(\tilde{V}_R(t, u_0), \tilde{\omega}_R(u_0)) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty.$$

Доведення.

Встановимо оцінку на моменти імпульсного збурення, яка дозволить встановити властивість (12) леми 1. Отже, нехай $u_0 \in IM_R$ і $s > 0$ момент першого потрапляння $u(t) = V(t, u_0)$ на множину M_R . Без обмеження загальності вважаємо $s \leq 1$. Розглянемо (1) на $(0, s)$.

Візьмемо

$$\eta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, x \in [\varepsilon, l - \varepsilon], \\ \frac{x}{\varepsilon}, x \in [0, \varepsilon], \\ -\frac{x}{\varepsilon} + \frac{l}{\varepsilon}, x \in [l - \varepsilon, l]. \end{cases}$$

Домножимо (1) на η_ε і проінтегруємо по $[0, l]$

$$\begin{aligned} \int_0^l u_t \eta_\varepsilon &= \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) \eta_\varepsilon + \int_0^l q u \eta_\varepsilon + \int_0^l h \eta_\varepsilon \\ \frac{d}{dt} \psi(u(t)) - \int_0^\varepsilon u_t &- \int_{l-\varepsilon}^l u_t + \frac{d}{dt} \int_0^\varepsilon u \eta_\varepsilon + \\ + \frac{d}{dt} \int_{l-\varepsilon}^l u \eta_\varepsilon &= - \int_0^l p \frac{\partial u}{\partial x} \eta'_\varepsilon + \int_0^l q u \eta_\varepsilon + \int_0^l h \eta_\varepsilon \end{aligned}$$

Після інтегрування по $t \in [0, s]$ одержуємо:

$$\begin{aligned} -\alpha_0 - \int_0^s u(t, \varepsilon) dt - \int_0^s u(t, l - \varepsilon) dt + \\ + \int_0^\varepsilon u(s, x) \eta_\varepsilon - \int_0^\varepsilon u_0(x) \eta_\varepsilon + \\ + \int_{l-\varepsilon}^l u(s, x) \eta_\varepsilon - \int_{l-\varepsilon}^l u_0(x) \eta_\varepsilon = \\ = - \int_0^s \int_0^l p \frac{\partial u}{\partial x} \eta'_\varepsilon + \int_0^s \int_0^l q u \eta_\varepsilon + s \int_0^l h \eta_\varepsilon \\ \alpha_0 = - \int_0^s u(t, \varepsilon) dt - \int_0^s u(t, l - \varepsilon) dt + \\ + \int_0^\varepsilon u(s, x) \eta_\varepsilon + \int_{l-\varepsilon}^l u(s, x) \eta_\varepsilon - \int_0^\varepsilon u_0(x) \eta_\varepsilon - \\ - \int_{l-\varepsilon}^l u_0(x) \eta_\varepsilon + \int_0^s \int_0^l p \frac{\partial u}{\partial x} \eta'_\varepsilon - \\ - \int_0^s \int_0^l q u \eta_\varepsilon - s \int_0^l h \eta_\varepsilon \end{aligned} \quad (27)$$

Маємо $u(t, x) = v(t, x) + w(t, x)$, (див. доведення леми 2), де $v(t, x) \geq 0$, $|\omega(t, x)| \leq C(h)$.

Крім того виконується оцінка:

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^2}^2 + 2p_0 \int_0^t \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx dt \leq \|u_0\|_{L^2}^2 + \\ + 2 \int_0^t \|h\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \end{aligned} \quad (28)$$

Отже, для $t \in [0, 1]$, $x \in [0, l]$, враховуючи $u_0 \in IM_R$ та нерівність Пуанкаре, маємо:

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx dt \leq C(R). \quad (29)$$

Тоді з (27) виводимо:

$$\begin{aligned} \alpha_0 \leq 2C(h)s + 2 \|u(s)\|_{L^2} \sqrt{\varepsilon} + \\ + \|p\| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{s} \left(\int_0^s \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \end{aligned}$$

$$+ s \|q\| \sqrt{l} \|u(s)\|_{L^2} + s \|h\| l. \quad (30)$$

Враховуючи (29), з (30) одержуємо:
 $\exists \varepsilon = \varepsilon(R) > 0 \exists C = C(\varepsilon, R) > 0$ такі що

$$\frac{\alpha_0}{2} \leq C \sqrt{s} \quad (31)$$

Таким чином, для будь-якої імпульсної траєкторії одержуємо (12). Перевіримо інші умови Леми 1. Оскільки $Iu = u + \alpha$, то виконується (11).

Умова (10) впливає з оцінки [12]: для $t > 0$

$$\|V(t, u_0)\|_{H^1} \leq K(r) \left(1 + t + \frac{1}{t}\right), \quad (32)$$

де $K(r)$ — додатна константа, що залежить від r , $\|u_0\|_{L^2} \leq r$.

Тоді якщо $\tilde{\gamma}$ обмежена в X , то $\tilde{\gamma}$ — обмежена в $L^2(0, l)$, і з компактності вкладення $H^1(0, l) \subset C([0, l])$ одержуємо (10).

Доведемо обмеженість $\tilde{\gamma} = \bigcup_{t \geq 0} \tilde{V}_R(t, u_0)$.

З оцінки

$$\forall t \geq 0, \|V(t, u_0)\| \leq M_1 \|u_0\| e^{-\lambda_1 t} + M_2 \quad (33)$$

одержуємо обмеженість $\tilde{\gamma}$ в X для траєкторій з не більш як скінченною кількістю імпульсних збурень.

Нехай імпульсних точок нескінченна кількість. З (12) маємо

$$\exists \bar{s} > 0 \forall n \geq 1 \quad s_n \geq \bar{s}.$$

Повторюючи міркування Леми 2, маємо:

$$\begin{aligned} 0 \leq u_1^+(x) &\leq (C_1 + C_2) \psi(x) \\ 0 \leq u(s_1, x) &\leq (C_1 + C_2) \psi(x) e^{-\lambda_1 \bar{s}} \\ 0 \leq u_2^+(x) &\leq (C_1 + C_2) \psi(x) e^{-\lambda_1 \bar{s}} + C_1 \psi(x) \end{aligned}$$

Продовжуючи цей процес, на n -тому кроці одержуємо: $\forall x \in [0, l]$

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n^+(x) &\leq C_2 \psi(x) e^{-(n-1)\lambda_1 \bar{s}} + \\ + C_1 \psi(x) (1 + e^{-\lambda_1 \bar{s}} + \dots + e^{-(n-1)\lambda_1 \bar{s}}) &\leq \\ \leq C_2 \|\psi\| + \frac{C_1 \|\psi\|}{1 - e^{-\lambda_1 \bar{s}}}. \end{aligned} \quad (34)$$

Об'єднуючи (33) і (34), одержуємо шукану обмеженість $\tilde{\gamma}$. Тоді з Леми 1 маємо твердження теореми.

Теорема доведена.

Зауваження. Нехай $\tilde{\gamma}$ — обмежена траєкторія імпульсної динамічної системи $\tilde{V} = \{V, M, I\}$, що стартує з $u_0 \in X$. Тоді для деякого $R > 0 \forall t \geq 0 \| \tilde{V}(t, u_0) \|_{L^2} \leq R$.

Отже, $\tilde{V}$ співпадає з $\tilde{V}_R$ і за доведеною теоремою, $\tilde{\omega}(u_0) \neq \emptyset$, компакт, і $\text{dist}_X(\tilde{V}(t, u_0), \tilde{\omega}(u_0)) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$.

Список використаних джерел

1. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. / A. M. Samoilenko and N. A. Perestyuk // Singapore: World Scientific – 1995. doi: 10.1142/2892.
2. *Kaul S. K.* Stability and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems. / S. K. Kaul // J. Appl. Stochast. Anal. – 1994. – Vol. 7, no. 4. – P. 509–523. doi: 10.1155/S1048953394000390.
3. *Ciesielski K.* On stability in impulsive dynamical systems. / K. Ciesielski // Bull. Pol. Acad. Sci. Math. – 2004. – Vol. 52. – P. 81–91. doi: 10.4064/ba52-1-9.
4. *Akhmet M. U.* Perturbations and Hopf bifurcation of the planar discontinuous dynamical system. / M. U. Akhmet // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods – 2005. – Vol. 60, no. 1, pp. 163–178 doi: 10.1016/j.na.2004.08.029.
5. *Kapustian O. V., Perestyuk M. O.* Global attractors in impulsive infinite-dimensional systems. / O. V. Kapustian, M. O. Perestyuk // Ukr. Math. J. – 2016. – Vol. 68, no. 4. – P. 583–597. doi: 10.1007/s11253-016-1243-0.
6. *Bonotto E. M., Bortolan M. C., Carvalho A. N., Czaja R.* Global attractors for impulsive dynamical systems - a precompact approach. / E. M. Bonotto, M. C. Bortolan, A. N. Carvalho, and R. Czaja // J. Differ. Equations. – 2015. – Vol. 259, no. 7, – P. 2602–2625, doi: 10.1016/j.jde.2015.03.033.
7. *Dashkovskiy S., Feketa P., Kapustyan O., Romaniuk I.* Existence and invariance of global attractors for impulsive parabolic system without uniqueness. / S. Dashkovskiy, P. Feketa, O. Kapustyan, and I. Romaniuk // JMAA. – 2019. – Vol. 458, – P. 57–78. doi: 10.1007/978-3-319-96755-4-4.
8. *Dashkovskiy S., Kapustyan O., Romaniuk I.* Global attractors of impulsive parabolic inclusions. / S. Dashkovskiy, O. Kapustyan, I. Romaniuk // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B – 2017. – Vol. 22, no. 5. – P. 1875–1886. doi: 10.3934/dcdsb.2017111.
9. *Myshkis A. D.* Heat conductivity with self-regulated pulse maintenance. / A. D. Myshkis // J. Autom. Remote Control – 1995. – Vol. 56, no. 2. – P. 179–186.
10. *Kirilich V. M., Myshkis A. D., Prokhorenko M. V.* Oscillations of a diaphragm under the action of pulse forces / V. M. Kirilich, A. D. Myshkis, M. V. Prokhorenko // Ukr. Math. J. – 2009. – Vol. 61, no. 8. – P. 1357–1363. doi: 10.1007/s11253-010-0281-2.
11. *Evans L.C.* / Partial Differential Equations // AMS, 1997
12. *Haraux A., Kirane M.* Estimations C1 pour des problemes paraboliques semi-lineaires. / A. Haraux and M. Kirane // Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math. – 1983. – Vol. 5. – P. 265–280.

Received: 14.12.2022

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 519.925.51

Кулян В.Р.¹, к.т.н.
Юнькова О.О.², к.ф.-м.н.
Коробова М. В.¹, к.ф.-м.н.

V.R. Kulian¹, Ph.D.
O.O. Yunkova², Ph.D.
M.V. Korobova¹, Ph.D.

Чутливість розв'язків при моделюванні динаміки інвестицій

Solutions sensitivity when modeling of investment dynamics

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03127, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д

e-mail: v.kulyan@gmail.com

²Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана, м. Київ, 03680, пр-т Перемоги, 54/1

e-mail: olenayunkova@gmail.com

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03068, Kyiv, Glushkova ave., 4d

e-mail: v.kulyan@gmail.com

²Vadym Getman National Economics University of Kyiv, 03680, Kyiv, Peremogy ave., 54/1

e-mail: olenayunkova@gmail.com

Розглядається математична задача чутливості розв'язків диференціальних рівнянь, що описують динаміку портфеля акцій на ринку цінних паперів.

Ключові слова: математична модель, оптимальне інвестування, портфель акцій, чутливість розв'язків.

The efforts of researchers for analysis of the financial investment market are largely aimed at considering multi-criteria problems with a large number of criteria, studying and solving investment management problems in static and dynamic settings, building procedures for an adequate description of random processes of market price changes, developing applied numerical methods and algorithms for solving large-scale problems. These problems as tasks of management under conditions of uncertainty refer equally to the fundamental problems of the applied theory of decision-making. The researches of R. Bellman, J. Danzig, R. Merton, and G. Markowitz [1] are aimed at establishing the fundamental foundations and studying various meaningful interpretations of financial analysis processes. Thus, in the static case, they obtained fundamental results that had a wide practical application. The property of the distribution of the optimal portfolio into risk-free and risky components for the case of the presence of a risk-free asset on the market was established, and the fundamental properties of the equilibrium market of optimal portfolios were investigated. Dynamic models of asset and liability management have found the most successful application in the field of long-term financial planning, where the need for repeated decision-making is determined by the essence of the process.

Key words: mathematical model, optimal investment, stock portfolio, sensitivity of solutions

Статтю представив д.ф.-м.н., професор Хусаїнов Д.Я.

ЗАДАЧА ПРО ПОБУДОВУ ФУНКЦІЙ ЧУТЛИВОСТІ МОДЕЛІ РИНКОВОЇ ВАРТОСТІ АКЦІЇ

Розглянемо задачу про побудову функцій чутливості для моделей ціноутворення однієї акції та портфеля акцій.

Скористаємось, наведеною у роботі [2], динамічною моделлю формування ринкової вартості акції. За структурою вона відповідає відомій моделі У. Шарпа і може бути записана так:

$$\frac{dr_i(t)}{dt} = (\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t))r_i(t) + \sum_{j=1}^N \beta_j r_j(t), \quad (1)$$

$$i = \overline{1, n}, t \in [t_0, T]$$

Тут: $r_i(t)$ – ринкова ціна акції у момент часу $t \in [t_0, T]$; α_1, α_2 – невідомі параметри моделі;

$SM_{ind}(t)$ – функція індексу фондового ринку; $I(t)$ – функція індексу інфляції. Для зручності перетворень праву частину (1) позначимо через $f(t, r, \alpha)$, де $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Вважатимемо також, що мають місце початкові умови

$r(t_0) = r_0 = r_0(\alpha)$, $t_0 = t_0(\alpha)$, а також, що $\alpha = \alpha_1$ скаляр, оскільки при короткотерміновому моделюванні динаміки формування ціни акції α_2 близька до сталої. У такій постановці β_j – коефіцієнти кореляції між акціями, які можна обчислити на основі відомої статистичної інформації. Згідно [2], за умови, що права частина (1) неперервна за своїми аргументами і неперервно-диференційована за r, α , а також за неперервної диференційованості функцій r_0, t_0 за α_1 існує неперервна похідна $u(t, \alpha_1) = \frac{\partial r(t, \alpha_1)}{\partial \alpha_1}$.

Ця похідна задовольняє диференціальному рівнянню

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f(r, t, \alpha_1)}{\partial r} u + \frac{\partial f(r, t, \alpha_1)}{\partial \alpha_1} \quad (2)$$

за початкової умови

$$u(t_0) = \frac{dr_0(\alpha_1)}{d\alpha_1} + f(r_0(\alpha_1), t_0(\alpha_1), \alpha_1) \frac{dt_0(\alpha_1)}{d\alpha_1}.$$

Рівняння (2) отримано прямим диференціюванням (1) за α_1 , а початкова умова – із диференціювання інтегрального рівняння

$$r(t, \alpha_1) = \int_{t_0(\alpha_1)}^t f(r(\tau, \alpha_1), \tau, \alpha_1) d\tau + r_0(t_0, \alpha_1)$$

і має вигляд

$$u(t, \alpha_1) = \frac{\partial r(t, \alpha_1)}{\partial \alpha_1} = \int_{t_0(\alpha_1)}^t \left[\frac{\partial f(r(\tau, \alpha_1), \tau, \alpha_1)}{\partial r} u(\tau, \alpha_1) + \frac{\partial f(r(\tau, \alpha_1), \tau, \alpha_1)}{\partial \alpha_1} \right] d\tau + \frac{dr_0(\alpha_1)}{d\alpha_1} - f(r(t_0(\alpha_1), \alpha_1), t_0(\alpha_1), \alpha_1) \frac{dt_0(\alpha_1)}{d\alpha_1}. \quad (3)$$

Початкову умову для функції чутливості $u(t_0)$ отримаємо, поклавши в (3) $t = t_0$. Таким чином, для (1) побудовано функцію чутливості, що описує залежність ціни акції від параметра α_1 , а також початкову умову. У подальшому нею можна скористатись при розв'язанні задачі ідентифікації параметрів моделі (1).

ЗАДАЧА ПРО ПОБУДОВУ ФУНКЦІЙ ЧУТЛИВОСТІ МОДЕЛІ РИНКОВОЇ ВАРТОСТІ ПОРТФЕЛЯ АКЦІЙ

Оскільки метою моделювання є опис та аналіз динаміки формування ринкової вартості портфеля акцій, динаміку його складових запишемо так

$$\frac{dr_i(t)}{dt} = (\alpha_{i1} SM_{ind}(t) + \alpha_{i2} I(t)) r_i(t) + \sum_{j=1}^N \beta_{ij} r_j(t),$$

$$i = \overline{1, N}, t \in [t_0, T]$$

Математична модель формування ринкової вартості портфеля, який складається з N акцій має вигляд

$$\begin{pmatrix} \frac{dr_1}{dt} \\ \frac{dr_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dr_N}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & A_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{1N} \\ \beta_{21} & 0 & \beta_{23} & \beta_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{N1} & \beta_{N2} & \beta_{N3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_N \end{pmatrix},$$

де $A_i = \alpha_{i1} SM_{ind}(t) + \alpha_{i2} I(t)$.

Для загального випадку система матиме такий векторно-матричний вигляд

$$\frac{dr}{dt} = (B^{(1)} + b(t)\Lambda^{(1)} + c(t)\Lambda^{(2)})r(t), t \in [t_0, T], \quad (4)$$

де:

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{1N} \\ \beta_{21} & 0 & \beta_{23} & \beta_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{N1} & \beta_{N2} & \beta_{N3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$b(t) = SM_{ind}(t), c(t) = I(t),$$

$$\Lambda^{(1)} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{(1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_N^{(1)} \end{pmatrix}, \Lambda^{(2)} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{(2)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_N^{(2)} \end{pmatrix},$$

$$\lambda^{(1)T} = (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{N1}), \lambda^{(2)T} = (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{N2}).$$

Системі звичайних диференціальних рівнянь (4) відповідають початкові умови $r(t_0, \Lambda) = r_0(\Lambda), t_0 = t_0(\Lambda)$, де Λ – об'єднана матриця параметрів моделі.

У подальшому вважаємо, що $r(t, \Lambda)$ – вектор фазових координат; $r_0(\Lambda), t_0(\Lambda)$ – неперервно-диференційовані функції. Систему (4) будемо досліджувати на замкнутих обмежених множинах фазового простору, які описують з одного боку обмеженість інвестиційного ресурсу, а з іншого – обмеженість очікуваної прибутковості або ринкової вартості акції на реальному ринку

$$\Phi_t \cong \Gamma_t = \left\{ r : \left| l_s^T(t)r \right| \leq 1, s=1,2,\dots,N \right\}, t \in [t_0, T],$$

$$\Phi_t \cong \Psi_t = \{ r : \psi(r,t) \leq 1 \}, t \in [t_0, T],$$

де $l_s(t)$ – задані кусково-неперервні вектор-функції розмірності N ; $\psi(r,t)$ – скалярна функція, неперервна за t разом зі своїми частинними похідними за компонентами вектора r ; Ψ_t – замкнута опукла множина, що містить внутрішню точку $r = 0$ для всіх $t \in [t_0, T]$.

АНАЛІЗ ДИНАМІКИ РИНКОВОЇ ВАРТОСТІ ПОРТФЕЛЯ АКЦІЙ

Для дослідження поведінки розв'язків системи (4) скористаємось методом функцій Ляпунова за умови їх однозначності і неперервності разом з частинними похідними на множинах визначення. Основним методом дослідження поведінки збурених траєкторій у теорії чутливості є застосування функцій чутливості [3], які у нашому випадку матимуть такий загальний вигляд:

$$U_i^1(t, \bar{\Lambda}^{(1)}, \bar{\Lambda}^{(2)}) = \frac{\partial r_i(\bar{\Lambda}^{(1)}, \bar{\Lambda}^{(2)}, t)}{\partial \Lambda_i^{(1)}}, i = \overline{1, N},$$

де $\Lambda_i^{(1)} = \alpha_{i1}$ і у відповідній матриці розміщений на місці (i, i) .

$$U_i^2(t, \bar{\Lambda}^{(1)}, \bar{\Lambda}^{(2)}) = \frac{\partial r_i(\bar{\Lambda}^{(1)}, \bar{\Lambda}^{(2)}, t)}{\partial \Lambda_i^{(2)}}, i = \overline{1, N},$$

де $\Lambda_i^{(2)} = \alpha_{i2}$ і у відповідній матриці розміщений на місці (i, i) .

Тут $U^1(t, \bar{\Lambda}^{(1)}, \bar{\Lambda}^{(2)})$, $U^2(t, \bar{\Lambda}^{(1)}, \bar{\Lambda}^{(2)})$ – N –мірні вектори функцій чутливості, що характеризують величину швидкості зміни збуреного руху в залежності від збурення i -го параметра відносно розрахункових значень $\bar{\Lambda}^{(1)}, \bar{\Lambda}^{(2)}$.

Далі приходимо до розв'язання відповідних задач Коші.

Тут $\bar{\Lambda}^{(1)}, \bar{\Lambda}^{(2)}, r(\bar{\Lambda}^{(1)}, \bar{\Lambda}^{(2)}, t)$ – матриці параметрів і траєкторія системи (4). Для визначення початкових умов необхідно продиференціювати за $\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}$ інтегральне рівняння:

$$r(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, t) = \int_{t_0}^t \left[(B^{(1)} + b(\tau)\bar{\Lambda}^{(1)} + c(\tau)\bar{\Lambda}^{(2)})^* \right] d\tau + r_0(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}).$$

У результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} U_i^1(t, \Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}) &= \frac{\partial r(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, t)}{\partial \Lambda_i^{(1)}} = \\ &= \int_{t_0}^t \left[(B^{(1)} + b(\tau)\bar{\Lambda}^{(1)} + c(\tau)\bar{\Lambda}^{(2)}) U_i^1(t, \Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}) + \right. \\ &\quad \left. b(\tau)r(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, \tau) \right] d\tau + \frac{dr_0(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, t)}{d\Lambda^{(1)}} - \\ &\quad \left[(B^{(1)} + b(t_0)\bar{\Lambda}^{(1)} + c(t_0)\bar{\Lambda}^{(2)})r(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, t_0) \right] \frac{dt_0(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)})}{d\Lambda^{(1)}}, \\ U_i^2(t, \Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}) &= \frac{\partial r(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, t)}{\partial \Lambda_i^{(2)}} = \\ &= \int_{t_0}^t \left[(B^{(1)} + b(\tau)\bar{\Lambda}^{(1)} + c(\tau)\bar{\Lambda}^{(2)}) U_i^2(t, \Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}) + \right. \\ &\quad \left. c(\tau)r(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, \tau) \right] d\tau + \\ &\quad + \frac{dr_0(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, t)}{d\Lambda^{(2)}} - \left[(B^{(1)} + b(t_0)\bar{\Lambda}^{(1)} + c(t_0)\bar{\Lambda}^{(2)})^* \right] \\ &\quad \left[r(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, t_0) \right] \frac{dt_0(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)})}{d\Lambda^{(2)}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Взявши у останньому рівнянні $t = t_0$, побудуємо вираз для визначення початкових умов матриць функцій чутливості.

Система (5) повністю визначає функції чутливості для (4), а також характеризує чутливість її розв'язків до зміни параметрів, що обумовлюють динаміку стану фондового ринку і процеси ціноутворення на ньому.

ЗВ'ЯЗОК МІЖ ФУНКЦІЯМИ ЧУТЛИВОСТІ ТА РУХОМ ПРИБУТКОВОСТІ ПОРТФЕЛЯ

Для встановлення зв'язку між функціями чутливості і рухом прибутковості застосуємо диференціали вищих порядків функції багатьох змінних [2]. Під рухом прибутковості розуміємо вектор

$$\Delta r(\bar{\Lambda}^{(1)}, \bar{\Lambda}^{(2)}, t) = r(\bar{\Lambda}^{(1)} + \Delta \Lambda^{(1)}, \bar{\Lambda}^{(2)} + \Delta \Lambda^{(2)}, t) - r(t, \bar{\Lambda}^{(1)}, \bar{\Lambda}^{(2)}, t) = r - \bar{r}$$

що характеризує зміну ринкової вартості цінного папера r і визначає величину відхилення тренду акції від прогнозованої. Першим наближенням для руху прибутковості буде вираз:

$$\begin{aligned} \Delta_1 r(\bar{\Lambda}^{(1)}, \bar{\Lambda}^{(2)}, t) &= U_1^1(\bar{\Lambda}^{(1)}, \bar{\Lambda}^{(2)}, t) \Delta \Lambda_1^{(1)} + \dots \\ &+ U_N^1(\bar{\Lambda}^{(1)}, \bar{\Lambda}^{(2)}, t) \Delta \Lambda_N^{(1)} + \\ &+ U_1^2(\bar{\Lambda}^{(1)}, \bar{\Lambda}^{(2)}, t) \Delta \Lambda_1^{(2)} + \dots \\ &+ U_N^2(\bar{\Lambda}^{(1)}, \bar{\Lambda}^{(2)}, t) \Delta \Lambda_N^{(2)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Вираз (6) є лінійним відносно приросту параметрів і функцій чутливості. Для динамічної моделі (4) розглянемо задачу максимізації за параметрами норми ринкової вартості портфеля цінних паперів.

$$I(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}) = \max_{\substack{\Lambda^{(1)} \in G_{\Lambda}, \\ \Lambda^{(2)} \in G_{\Lambda}}} [\Phi(r(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, T))].$$

Задачу розглянемо за наявності обмежень на функції чутливості [2]:

$$U(t, \Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}) \in G_t =$$

$$\left\{ \begin{aligned} &U^1(t, \Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}): \\ &\left| \sum_{i=1}^N l_{s_1}^{(i)T}(t) U_i^1(t, \Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}) \right| \leq 1, \\ &s_1 = 1, 2, \dots, N_1, N_1 \in N \\ &U^2(t, \Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}): \\ &\left| \sum_{i=1}^N l_{s_2}^{(i)T}(t) U_i^2(t, \Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}) \right| \leq 1, \\ &s_2 = 1, 2, \dots, N_2, N_2 \in N \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

$$U(t, \Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}) \in \Psi_t =$$

$$\left\{ \begin{aligned} &U^1(t, \Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}): \Psi(U^1(t, \Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}), t) = \\ &\Psi(U_1^1(t, \Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}), \dots, U_N^1(t, \Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}), t) \leq 1 \\ &U^2(t, \Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}): \Psi(U^2(t, \Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}), t) = \\ &\Psi(U_1^2(t, \Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}), \dots, U_N^2(t, \Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}), t) \leq 1 \end{aligned} \right\}. \quad (8)$$

Список використаних джерел

1. Шарп У. Инвестиции / Уильям Ф. Шарп, Гордон Дж. Александер, Джеффри В. Бэйли. – Инфра-М, 1999. – с.1027.
2. Гаращенко Ф.Г. Качественный анализ математических моделей инвестиционного менеджмента / Кулян В.Р., Рутицкая В.В. // Кибернетика и вычислительная техника. – 2005. – № 148. – с. 3-10.
3. Гаращенко Ф.Г. Моделирование динамики и диверсификация портфеля акций / Кулян В.Р., Петрович В.Н., Юнькова Е.А. // Проблемы управления и информатики. – 2016. – № 4. – с. 124-132.

Для її розв'язання застосуємо ітераційну схему градієнтного спуску:

$$\Lambda_i^{(k+1)} = P_{G_{\Lambda}^{(k)}} \left\{ \Lambda_i^{(k)} - \rho_k * \text{grad}_r^T \Phi(r(\Lambda^{(1)(k)}, \Lambda^{(2)(k)}), T) \right\},$$

$$i = \overline{1, 2N}, k = 0, 1, 2, \dots$$

де P – операція проектування вектора параметрів Λ на множину $G_{\Lambda}^{(k)} \subset G_{\Lambda}$, ρ_k – крок спуску. Множина початкових умов:

$$G_0 = \left\{ U(t_0) : \sum_{k=1}^N U^{(k)T}(t_0) D U^{(k)}(t_0) \leq c^2 \right\}.$$

Вона описує область, в якій для функцій чутливості будуть виконуватись обмеження (7) і (8) при фіксованому Λ . Параметри Λ на $(k+1)$ -ій ітерації вибираємо із множини:

$$G_{\lambda^{(k)}} = G_{\lambda} \cap \left\{ \lambda : \sum_{i=1}^N \left[\frac{dr_0(\Lambda)}{d\Lambda_i} - ((B^{(1)} + b(t_0)\Lambda^{(1)} + c(t_0)\Lambda^{(2)}) \cdot r(t_0(\Lambda), \Lambda)) \right]^T * \right. \\ \left. * D * \left[\frac{dr_0(\Lambda)}{d\Lambda_i} - ((B^{(1)} + b(t_0)\Lambda^{(1)} + c(t_0)\Lambda^{(2)}) \cdot r(t_0(\Lambda), \Lambda)) \frac{dt_0(\Lambda)}{d\Lambda_i} \right] \right\} \leq c^2.$$

Наведений вище аналіз є необхідним конструктивним інструментом для виконання наступного етапу у загальній схемі активного управління портфелем акцій, який пов'язаний із розв'язанням задач прогнозування ринкової вартості та ефективної диверсифікації - як найбільш важливих задач теорії та практики прикладного портфельного аналізу.

Reference

1. SHARPE, W., ALEXANDER, G. and BAILEY, J. (1995) *Investments*. New Jersey: Prentice Hall.
2. GARASHCHENKO, F., KULYAN, V. and RUTITSKAYA, V. (2005) Quality analysis of mathematical models of investment management: *Cybernetics and computing eng.* 148. p. 3-10.
3. GARASHCHENKO FEDIR, KULIAN VICTOR and YUNKOVA OLENA (2016) Simulation of the Dynamics and Diversification of Stock Portfolio *Journal of Automation and Information Sciences*. - New York, Connecticut. - v. 48, issue 7. - P. 28-40.

Надійшла до редколегії: 10.12.2022 р.

УДК 004.4, 004.6, 004.942, 004.021: 519.6, 336.71

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/4.7>

Д.Ю.Круковець, аспірант

D.Krukovets, PhD student

Багатоетапний алгоритм з DTW та кластеризацією для прогнозування середньої депозитної ставки в Україні

Multi-stage approach with DTW and clustering for forecasting of average deposit rate in Ukraine

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна, 03022, м.Київ, просп. Академіка Глушкова, 4Д, 03022
e-mail: dkrukovets@kse.org.ua

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 4D, Academician Glushkov ave., Kyiv, Ukraine, 03022
e-mail: dkrukovets@kse.org.ua

[Уведіть текст тут](#)

Стаття присвячена розробці багатоетапного методу прогнозування, котрий базується на методах *Dynamic Time Warping*, кластеризації та *AutoARIMA*, що порівнюється з кількома традиційними методами на унікальному наборі даних.

Мета полягає в тому, щоб спрогнозувати середню ставку за депозитами в Україні, використовуючи дані, зібрані з веб-сайтів банків про їхні індивідуальні ставки за депозитами на щоденній основі. З цього багатого набору даних, стаття зосереджена лише на 12-місячних депозитних ставках у гривні для кожного банку. Більшість проблем, що є традиційними для підходу веб-скрепінгу, не мають значення в нашому випадку через особливості набору даних.

Ці показники об'єднуються в групи за схожістю в динаміці, прогнозуються окремо за допомогою *AutoARIMA* моделі і, нарешті, об'єднуються в загальний прогноз з використанням вагових коефіцієнтів, отриманих за допомогою оцінки *OLS*.

У статті представлено результат і порівняння з кількома іншими моделями, починаючи від простого випадкового блукання, кількох специфікацій *ARIMA* та простого випадкового лісу. Багатоетапний підхід перевершує бенчмарки за оцінкою *RMSE* та графічним аналізом за останній період даних.

Ключові слова: *Dynamic Time Warping*, Кластеризація, *ARIMA*, Випадковий ліс, Депозитні ставки, Веб-скрепінг

The paper is dedicated to the development of the multi-stage forecasting method that is based on *Dynamic Time Warping*, *Clustering* and *AutoARIMA* techniques, which is compared with several traditional benchmarks on the unique dataset.

The goal is to forecast an average deposit rate in Ukraine using data that has been scrapped from banks' websites about their individual deposit rates on the daily basis. From this rich dataset the paper focuses only on 12-month deposits, UAH, for each bank. Most of the issues that are traditional for web-scraping approach are irrelevant in our case due to the dataset features.

These rates are aggregated into groups by similarity in dynamics, forecasted separately with an *AutoARIMA* routine and finally aggregated into the entire forecast using weights that have been obtained with an *OLS* estimation.

The paper presents the result and comparison with several benchmarks, starting from simple *Random Walk*, a few specifications of *ARIMA* and simple *Random Forest*. The multi-stage approach outperforms benchmarks by an *RMSE* and graphical analysis over the latter period of the data.

Keywords: *Dynamic Time Warping*, *Clustering*, *ARIMA*, *Random Forest*, *Deposit rates*, *Web-scraping*

1. Introduction

The development of computer technologies opens a wide field for alternative datasets and seeks advanced methods for forecasting that can use such datasets. In the paper, we'll investigate a new dataset with deposit rates from all Ukrainian banks and the ability to forecast their average using the maximum of

the available information. While traditional methods are concentrated on utilizing several aggregated time series, we'll have a look at more advanced methods that are able to squeeze more data from such a rich dataset.

In the second section, an overview of the data will be presented. A web-scraping approach was used to extract the abovementioned dataset and it has many

advantages over other, more traditional methods of data collection. It provides the data faster than traditional methods, like reports from state offices that may publish the information with a significant delay.

However, there are some downfalls that may affect the quality of the data. Some of them may be solved only with the addition of data from other sources, such as the inability to aggregate rates by the deposit volumes as long as it's a type of data that is unable to be scrapped. Others are technical problems such as changes on banks' websites that lead to issues with data scrapping until the problem is fixed manually. This creates gaps in the data, however, in this particular case, such a problem is not that critical due to the features of the data.

In the third section, there will be a description of the models' pool that is taken as a benchmark for our key model. The pool is quite natural and standard, it includes a Random Walk model, a few specifications of the ARIMA model, and a Random Forest model. The first is the simplest possible model which just says that the next value will be equal to the last available. The second approach is more interesting and complex, it better explains the dynamics, however, it's unable to work with large datasets as long as it suffers from overfitting. The last approach is the simplest Data Science model that is more able to work with big datasets simultaneously and is less prone to overfitting.

Our key model is a multi-stage approach. The first stage is to take deposit rates from all banks and estimate distances between each pair using Dynamic Time Warping. It's an advanced method to find distances and count for any stretches, and reaction delays in data, which is a common problem for this dataset. Then the matrix with all distances is built and transformed into a two-dimensional graph. Every point in the graph corresponds to the bank and the distance between two points is an approximation of the distance from the matrix.

The second stage is to use a K-Means approach to divide banks into several groups by their dynamics and obtain an average deposit rate for each group. Then the third stage with an AutoARIMA approach is used to produce forecasts for each group's rate. An AutoARIMA is a method that iteratively finds the best ARIMA specification and forecasts with this ARIMA. The last stage is to aggregate forecasts using OLS estimated weights for each group.

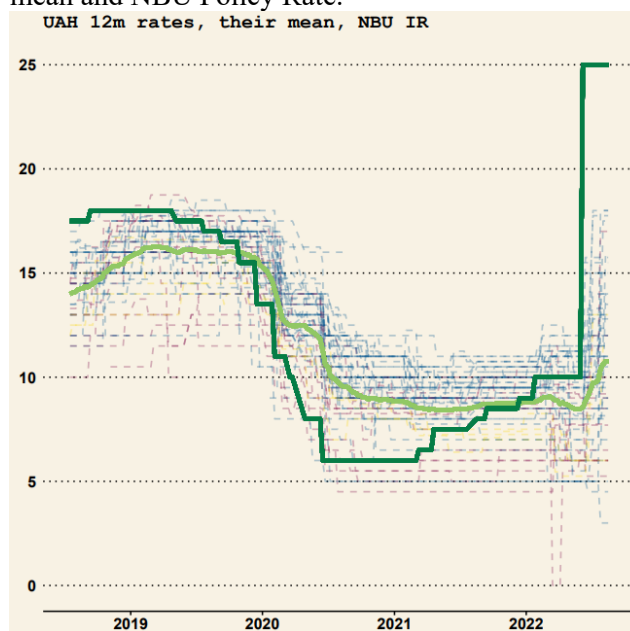
Such an approach allows us to find more complex relations between banks and improve the quality of the forecast significantly, which can be seen from the section with results. The evaluation will be performed on the last month of the data while all other data is

used to train the model. Results will be discussed based on the graphical analysis and Root Mean Squared Error value for each model.

2. Data

This paper presents a dataset of deposit rates from all banks in Ukraine, collected using web-scrapping tools from the banks' websites. The methodology is described in the original paper by Khalil and Fakir, 2017. The data was collected from the beginning of 2018 and has no missing or inaccurate data due to the features of the methodology. The dataset is quite rich and consists of rates for most of the possible terms, from 1 to 36 months, and in all major currencies: UAH, USD, EUR and even CHF. For the sake of more consistent and simple-to-interpret results, we will concentrate on one of the most popular types of deposits – 12 months deposit rate in UAH. To investigate the overall dynamics of banks as long as the dynamics of mean and NBU Policy Rate (which is connected to the dynamics of deposit rates) the one may refer to Picture 1.

Picture 1. Deposit rates from different banks, their mean and NBU Policy Rate.



Web scraping tools can be useful for collecting data from websites, however, they are not always reliable. They may fail to capture certain data fields or fail to adapt to changes in the website structure if it was changed at some point in time. Regularly, in such a case, since the tool used to collect the data is not perfect, we cannot be completely sure of its reliability. This issue is discussed in the paper by Khder, 2021. However, we can assess its reliability because of the

data nature. Deposit rates are not changed on a regular basis which gives the ability to fill in the missing data if any problems arise in most cases.

One of the features of the tool is that it cannot collect data on the popularity of particular deposits or different rates for various types of customers. It dismisses the ability to weigh different deposit rates between each other based on volumes of those deposits thus making it hardly possible to obtain aggregated data from the scrapped one. The same story goes for the difference in volumes of deposits between banks. However, the assumption about the similar role of all banks as market players are able to be made thus the research will provide us with beneficial results, being open to further improvement and deeper analysis with the data from bank reports about their deposit volumes.

There is a key hypothesis that the dynamics of rates between banks in the same group by ownership (state-owned banks, banks with private capital, and banks with foreign capital), by client type (consumers-oriented, business-oriented) or by another feature are closer to each other than the dynamics between banks in different groups. Further analysis will be done to test this hypothesis and investigate the potential reasons for such similarities or differences. This opens a wide field for using combinations of time series distance measuring and clustering techniques, one of which will be used for forecasting in this paper.

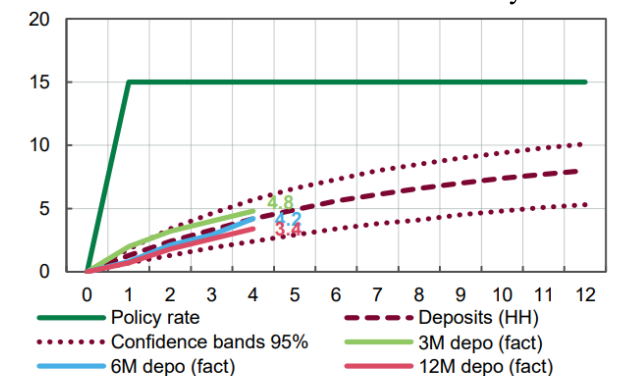
Another interesting issue that will be discussed in the upcoming paper is that deposit rates may change infrequently, resulting in long periods with similar values, which can be problematic for similarity measures, such as the Dynamic Time Warping (DTW) algorithm, that is used to find similarities between time series. This point will be discussed to a more extent in the model section.

There should be a connection between the deposit rates and the monetary policy of the central bank, with a lag between changes in the policy rate and changes in deposit rates. This is because the central bank policy rate affects the cost of funds for banks and, thus, the rates they offer on deposits. Therefore, analyzing the data in the context of the central bank policy rate could provide insight into the behaviour of banks and the broader macroeconomic environment. Counting for such an effect will help to adapt the dynamics of each particular bank and extract the similarity based on this particular factor which will open a field to study similarities that are based on other reasons, for example, the bank type.

This paragraph enhances yet another possibility of potential additions to the data and the pool of models respectively. Such a relationship was investigated by

many institutions and researchers, including National Bank of Ukraine economists using the ARDL model by Pesaran and Shin (1995). The results can be seen in Picture 2, which is taken from the Inflation Report, October 2022 by the National Bank of Ukraine.

Picture 2. Change of deposit rates as a response to the shock in NBU Policy Rate



* NBU estimates for the period 2015–2021 are based on the ARDL model of Pesaran and Shin (1995);

** 5-day (working days) moving average UIRD.

Source: NBU.

3. Model

In this research, we analyze five forecasting models for deposit rates:

- Random Walk,
- ARIMA(1,1,1)
- ARIMA(7,0,7)
- Random Forest
- Multi-stage key model

The first four models are, to some extent, traditional benchmarks to compare with the final and the most interesting model. The idea is to show that the DTW/Clustering routine is superior and gives a lot of additional information for both analysis and forecasting purposes. This will also support the initiative for further development of the methodology to fit such problematic data in the upcoming research.

3.1. Random Walk

The Random Walk model (RW) supposes that the potential value of a series will be the same as its most recent value. This approach is frequently used as a benchmark for other prediction models because of its simple nature of use and lack of assumptions about the underlying data generation process. Mathematically, RW can be expressed as:

$$y_{t+1} = y_t$$

where y_t is observed variable at the time t and y_{t+1} is the predicted at the time $t+1$. A prediction for the further horizon can be built iteratively.

The Random Walk model ignores any other variables that can have an impact on the series, such as some seasonality, shocks from other variables, or dynamics that are not linear since it assumes that the future value of the series will be identical to the last known value of the series. As a result, this model is frequently used as a primitive forecasting model or as a benchmark against which to measure how well more sophisticated models perform. However, there is also a great field to study the model deeper with different additions like in the paper by Dshalalow, 2021.

3.2. ARIMA

The ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average) model is a time-series statistical model that is frequently applied. It is a framework with several orders of autoregressive (AR) and moving average (MA) components, as well as differencing terms. The model's autoregressive term captures the linear connection between an observation and its previous values, while the moving average term captures the linear relationship between an observation and its prior errors. The differencing term is used to eliminate any patterns or seasonality in the series, which is required for the model to be valid.

Mathematically, the ARIMA($m,0,n$) model can be described with the following formula:

$$y_t = \beta_1 y_{t-1} + \dots + \beta_m y_{t-m} + \gamma_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \gamma_n \varepsilon_{t-n} + \varepsilon_t$$

where y_t is a variable at the time t , ε_t is an error term at time t , β_k and γ_k are estimated coefficients. A middle, differencing term describes whether we're using y_t or its difference of the corresponding degree.

There are some limitations to the ARIMA model. One of the most significant constrictions is the inability to seize dependencies with other variables. The model only considers the series' historical values and neglects any other variables that may influence the series. If other variables have a strong relationship with the series but are not included in the model, this can be a major drawback.

Another limitation of the ARIMA model is its incapability to detect non-linear data patterns. The model presumes a linear connection between the series and its previous values and errors. If there are non-linear patterns in the data, such as exponential growth or decay, the model may not be able to capture these patterns accurately. More advanced issues that arise with such type of a model and corresponding tests are discussed in the article by Gandhi, 2020.

Two specifications have been chosen for this research based on the results of a wider set of models for such a type. The ARIMA(1,1,1) model is the most straightforward choice and a great benchmark which is not far away by its properties and capabilities from the previous model. It's relatively simple to interpret and gives better results than the previous approach. The ARIMA(7,0,7) model is another ARIMA-based model, which is more complex than the ARIMA(1,1,1) and is capable of capturing more complex patterns in the data, based on the dynamics during the last week. This may be important as long as deposit rates may change due to some shock, but with a minor delay which can't be captured well with one lag only.

The ARIMA model is traditional for econometrics and time series analysis which leads to its usage on yearly, quarterly or monthly data. Usage of ARIMA on daily data may lead to many additional problems such as the inability to work with yearly seasonality. However, when there is a necessity for short-term forecasts, it performs relatively well according to a number of researches, especially in the area of stock price forecasting like in the paper by Almasarweh and Al Wadi, 2018.

With such a methodology we cannot directly dig out all of the available information from all the banks and are limited to working with an average rate only. This means that there is a huge field for further improvement that will be utilized by the following two models that will give an additional advantage and possible improvement of the result.

3.3. Random Forest

The Random Forest is a powerful Machine Learning algorithm that is often used for regression and classification tasks. It is an ensemble learning method that combines the predictions of multiple decision trees to improve the accuracy and robustness of the model. The spike in the popularity of Data Science techniques has led to many papers with Random Forest as a main or secondary (benchmark) model for financial and even macroeconomic series. For example, Yoon studied Random Forest for Real GDP forecasting in 2021.

RF is particularly useful for capturing overall dynamics and non-linearity in the data. Unlike linear models such as ARIMA, the Random Forest model can capture complex non-linear relationships between the features and the target variable which might be the case for the current dataset. This is due to the model's use of decision trees, which can simulate non-linear relationships and feature interactions. Because RF can

process data in parallel and does not require the same level of preprocessing as ARIMA, it can handle larger datasets more efficiently. Our goal is to forecast the average rate across all banks in Ukraine, but the dataset includes rates from individual banks. While ARIMA is limited to a single time series and may not be able to capture the overall dynamics of the dataset, RF models can use that information to make more accurate predictions of the average rate.

Each decision tree in the RF model is trained on a randomly selected subset of the attributes and a stochastic subset of the training data. This diminishes overfitting and raises model diversity, improving generalization ability. Averaging the predictions from each of the decision trees in the forest yields the final prediction.

A random subset of the training data is chosen for each tree in the forest at each stage of the training process. This helps to avoid overfitting and improves tree variety. For each tree in the forest, a random subset of the features is selected to use for splitting the nodes of the tree. This helps to reduce the correlation between the trees and improve the generalization ability of the model. Each tree in the forest is built using a recursive process of binary splits, where each node of the tree represents a test on one of the selected features. The tree is grown until some stopping criteria are met, such as a minimum number of samples per leaf node. The final prediction of the model is made by aggregating the predictions of all the decision trees in the forest by taking the mean in our case.

The RF is trained using an ensemble of decision trees, each of which is trained to minimize the variance of the target variable. The variance of the target variable y is defined as:

$$Var(y) = E((y - E(y))^2)$$

where $E(y)$ is the expected value of y . The goal of the RF is to minimize the variance of the target variable by creating an ensemble of decision trees that have low correlation and high individual predictive power.

The splitting criteria used for each node of the decision tree is based on the Gini impurity, which quantifies the homogeneity of the samples at each node and is used to select the feature and split point that maximizes the information gain of the split.

The Gini impurity index measures the degree or probability of a particular data point being misclassified when it is randomly labelled according to the class distributions in the dataset. The Gini impurity index ranges from 0 to 1, where a value of 0 indicates a perfectly pure node (all samples belong to the same class), and a value of 1 indicates a

completely impure node (samples are evenly distributed among all classes). It is given with the formula:

$$Gini = 1 - \sum(p_i^2)$$

where p_i is the probability of the i -th class.

The Gini impurity index is used to assess the quality of each potential split when building a decision tree. The Gini impurity is computed for each possible split, and the split with the lowest Gini impurity is chosen. This process is repeated for each successive split until a stopping criterion is met (e.g., a maximum depth is reached, or the number of samples in a node falls below a specified threshold).

When making a prediction for a new sample, each tree in the forest returns a prediction, and the final prediction is determined by a majority vote. This approach helps to reduce overfitting and improve the generalization performance of the model. The formula can be written as:

$$\hat{y} = \frac{1}{N} * \sum(\hat{y}_i)$$

where $\hat{y}_i$ is the predicted value of the i -th decision tree in the forest, and N is the total number of trees in the forest.

Key parts of the RF algorithm are focused on making a generalized and robust forecast, capturing potential non-linearities by aggregating many models with different responses to the same shocks. Also, it works well with huge datasets without overfitting which is crucial for the particular work. For more discussion about the properties, advantages and drawbacks of the algorithm the one can refer to the paper by Biau, 2012.

3.4. Multi-stage key model

For the final model, there is a multi-stage approach that takes all rates, aggregates them into groups with Dynamic Time Warping (DTW) and clustering, then forecasts each group separately with ARIMA and, finally, aggregates it with weights, obtained using OLS estimation. Such an approach allows squeezing the maximum of the information from the dataset and opens a wide field for analysis both from the economic and data analysis points of view.

3.4.1. DTW

Let's cover the algorithm step-by-step. The first part is to find a similarity in dynamics between deposit rates. There are several main approaches for this stage that are described in the paper by Krukovets, 2020. In this particular paper, we'll focus on the DTW only, the most advanced and the one, that is suitable

for signals that vary in speed because they do not consider the time-axis. The last point is important because rates in different banks may react to shocks with a significant delay.

We can compute the distance matrix between the two signals, D , where $D(i, j)$ represents the distance between x_i and y_j . We can calculate a distance between two series with a variety of methods, including a Euclidean distance, Manhattan distance, or Minkowski distance. The idea of DTW is to find a path, P , through this distance matrix that minimizes the total distance between the two signals. The path is constrained to start at $(1, 1)$ and end at (n, m) . It can only move to adjacent cells in the matrix or by diagonal, which doesn't allow any jumps or gaps in correspondence.

To find the optimal path, we use a dynamic programming approach. We define a cost matrix, C , where $C(i, j)$ represents the minimum cost of the path that ends at (i, j) . We can compute $C(i, j)$ recursively using the following equation:

$$C(i, j) \leftarrow D(i, j) + \min(C(i-1, j), C(i, j-1), C(i-1, j-1))$$

The intuition behind this equation is that the cost of the path that ends at (i, j) is equal to the distance between x_i and y_j , plus the minimum costs of the three possible paths that could have led to (i, j) . The proof that the total distance is minimized is trivial using mathematical induction.

The Dynamic Time Warping (DTW) algorithm is sensitive to the length and magnitude of similarities between the time series data. In the case of long periods with similar deposit rate values, this may result in misleading similarity measurements. One way to address this issue is by aggregating the data on a weekly or monthly basis, instead of daily. Such an approach will reduce the impact of long periods with similar values and increase the sensitivity of the DTW algorithm to shorter-term variations in the data. Alternatively, a modified version of the DTW algorithm that takes into account long stretches of similar values can be used. However, this topic will be studied and clarified in the upcoming paper.

An important point is that the adaptation of the DTW algorithm called FastDTW will be used. It is quite consequentially that the algorithm is focused on adaptations that allow working faster than the original one. While both algorithms find the optimal warping path between two time series by calculating the distance between each pair of points in the series, FastDTW achieves this goal by using a lower-resolution version of the series and then iteratively

refining the warping path using increasingly higher resolutions. This allows FastDTW to reduce the number of comparisons required to find the optimal warping path, making it faster than DTW but sacrificing some accuracy. FastDTW also employs a technique called "masking" to further reduce the number of comparisons required to find the optimal warping path. Masking works by dividing the time series into subseries and computing the distance between only certain points in each subseries, ignoring others. This is achieved by creating a binary mask that specifies which points in each subseries should be considered when computing the distance. The mask is created by finding the median point in each subseries and selecting a range of points around it, with the size of the range depending on a user-defined parameter called the "radius." By using masks, FastDTW is able to limit the number of comparisons required to find the optimal warping path, making it even faster than the standard FastDTW algorithm. However, the trade-off is that the accuracy of the warping path may be reduced, especially if the radius parameter is set too large. In more detail, it is discussed in the original paper by Salvador and Chan, 2004.

The used DTW version is made in a package for R, which is described by the library author in the paper Giorgino, 2009. It consists built-in FastDTW algorithm and several additional features that make work with an algorithm simpler.

After finding distances between all deposit rates in the previous exercise, we're building a matrix that will be translated into a 2D graph with approximately the same distances using affine transformations. The explanation and proof of the minimization for approximation error is quite cumbersome and can be accessed from chapter 5 of the book by Datorro, 2019.

3.4.2. Clustering with K-Means

The next part of the routine is a clustering exercise. The methodology was chosen using a graphical analysis of the graph based on the distance matrix from the previous exercise, which will be described in the next chapter. A simple K-means algorithm was chosen. It is an unsupervised machine learning algorithm used to cluster data points into K distinct groups or clusters. The algorithm works by iteratively assigning data points to the nearest cluster center, and then updating the cluster centers based on the newly assigned data points. The algorithm converges when the assignments and the cluster centers no longer change or a maximum number of iterations is reached.

Given a set of N data points $X = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ and a number of clusters K , the algorithm seeks to minimize the sum of squared distances between each data point and its assigned cluster center. This is known as the within-cluster sum of squares (WCSS) and can be expressed as:

$$WCSS = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \|x_j - c_i\|^2$$

where n_i is the number of data points assigned to the i -th cluster, c_i is the center of the i -th cluster, and $\|\cdot\|^2$ denotes the Euclidean distance.

To find the optimal cluster centers that minimize the WCSS, the K-Means algorithm uses an iterative approach known as Lloyd's algorithm. In each iteration, the algorithm first assigns each data point to the nearest cluster center using the following formula:

$$\operatorname{argmin} \|x_j - c_i\|$$

where argmin is the function that returns the index of the cluster center that minimizes the distance to the data point x_j .

Once all data points have been assigned to a cluster, the algorithm updates the cluster centers by computing the mean of all data points assigned to that cluster using the following formula:

$$c_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_j$$

where n_i is the number of data points assigned to the i -th cluster, and x_j is the j -th data point assigned to the i -th cluster.

The algorithm repeats these steps until the assignments and the cluster centers no longer change or a maximum number of iterations is reached.

In more detail, the explanation and discussion may be accessed from the paper by Jie et al., 2020.

Instead of the exercise above, with DTW and clustering, we can assume that the dynamics in groups are divided by some features (bank ownership, such as state, private or foreign; client type orientation such as consumers, small or large business). Such an approach has many downfalls, such as a necessity for a deeper understanding of economic strategies and the relationship of individual banks. As long as the focus of the paper is on the usage of advanced forecasting techniques, the algorithm-based solution for grouping seems to be a more viable option.

In the end, we've got several groups of banks. Their rates are aggregated as an average in each group which will give multiple series that will be used in the following stages.

3.4.3. AutoARIMA

To forecast average rates for each group of banks, we'll use an advanced version of the traditional ARIMA. It's called an AutoARIMA and, as it comes from the name, the algorithm automatically selects the best ARIMA model for a given time series data. It estimates the parameters of the ARIMA model by maximizing the Akaike Information Criterion (AIC).

AIC is a statistical measure that evaluates the goodness of fit of a model while taking into account the complexity of the model. The AIC is calculated as a combination of two terms: the first term measures the goodness of fit of the model to the data, while the second term penalizes the model for its complexity. The formula for AIC is:

$$AIC = -2 * \log(L) + 2 * k$$

where L is the maximum likelihood of the model; k is the number of parameters in the model.

In AIC, a lower value is better, meaning the model with the lowest AIC value is preferred. A difference in AIC values of two or more between models suggests strong evidence for the model with the lower AIC value.

The AutoARIMA algorithm uses a stepwise approach to select the optimal ARIMA model. First, it selects the best ARIMA model with no differencing (i.e., $d=0$) going through all possible parameters (grid search) and evaluating AIC. Then, it evaluates the AIC for ARIMA models with differencing (i.e., $d=1$ or $d=2$) and selects the best model. Finally, it selects the best seasonal ARIMA (SARIMA) model if the time series data exhibit seasonality. For more details and how they're made in R, the one may read the paper by Hyndman and Khandakar, 2008.

At the end of this stage, there will be a single ARIMA model for each group that will be able to produce a forecast.

3.4.4. OLS-based aggregation

The final stage is a model, that will help to aggregate forecasts from the previous stage into a single average rate. For this, we'll use a simple OLS approach that is evaluated on the historical aggregated rates. Such an approach, as many other and more difficult ones, is overviewed in the paper by McAndrew et al., 2020. The formula is simple:

$$y_t = \beta_1 y_{t,1} + \dots + \beta_k y_{t,k} + \varepsilon_t$$

where y_t is an average rate for all banks at the moment t ; $y_{t,k}$ is an average rate for all banks from group k .

This allows us to check the importance of the dynamics of a particular group in the overall dynamics, because groups may have only a few banks

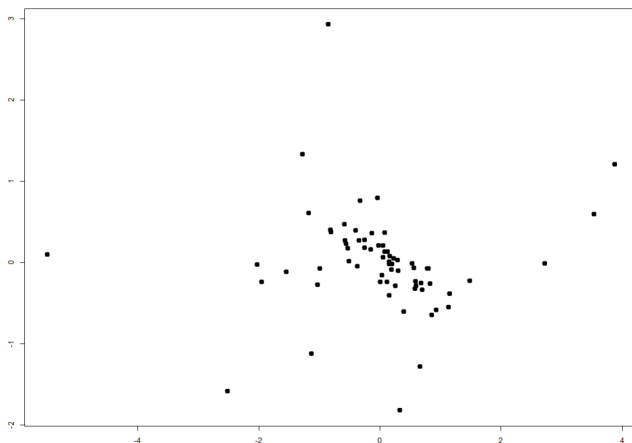
(outliers) or a majority of banks. Such an approach will be even more beneficial for further investigation in the case when the data of bank size is used, thus some particular banks may have way more weight on the overall dynamics than others which will be reflected in the coefficients of the linear regression.

Results

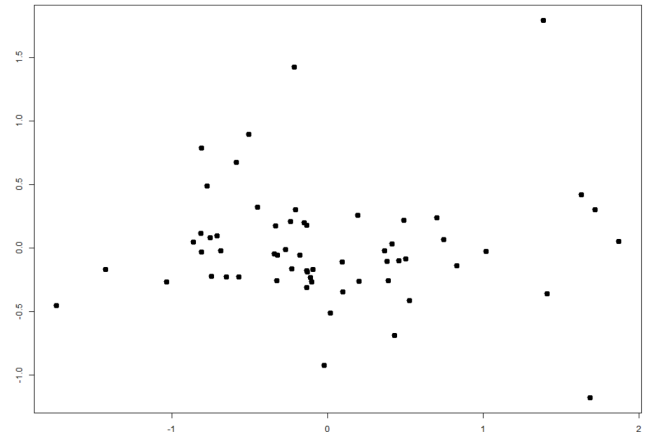
This section will show the results of the five models described above based on the data, that is described in the data section. While for benchmark models the forecasting process is relatively straightforward, our key method requires multiple stages to produce the final result.

The result of the DTW approach is given in Picture 3. Each point represents a particular bank and distances between points are approximated to the ones from the distance matrix based on DTW distances. The result shows a number of outliers that will decrease the quality of the next stage. Moreover, such a difference in dynamics can be explained by the economic conditions and strategies, some of the banks are frauds that were removed from the market at some point in time. Thus, in further analysis, we've removed those banks and re-run the exercise. The result is given in Picture 4 and will be passed further on to the next stage.

Picture 3. Banks, distances between which are calculated with DTW.

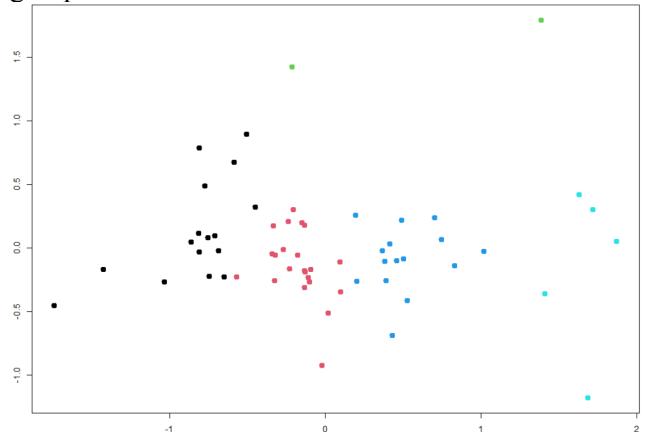


Picture 4. Cleaned from outliers pool of banks, distances between which are calculated with DTW.



The clustering stage contains a K-Means approach based on the result from Picture 4. It will divide these points into several groups. The amount of groups is defined by the graphical analysis of the results and common logic, which states that a number of groups can't be too small or too large. It was found that the optimal number of groups is five and the resulting picture is given in Picture 5.

Picture 5. A cleaned pool of banks divided into groups with K-Means.



Then the AutoARIMA finds optimal coefficients that will minimize the AIC. Thus, we may be sure that we'll obtain a forecast with good quality for each individual group. Then these groups are aggregated with an OLS method. Key statistics, including the number of banks in a group, ARIMA specification and weight according to OLS may be seen in Table 1.

Table 1. Specifications for each group.

Group number	1	2	3	4	5
Number of banks	16	22	2	15	5

ARIMA specification	(1,1,2)	(1,1,1)	(0,1,0)	(2,1,3)	(0,1,0)
OLS weight	0.267	0.367	0.033	0.250	0.083

To evaluate the quality of the forecasts, according to the amount of available data, we've decided to simply forecast the last month of rates and compare it with the real values both graphically and with Root Mean Squared Error (RMSE), a traditional way to evaluate the quality of the forecast. RMSE is given with the formula:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} * \sum ((y_i - \hat{y}_i)^2)}$$

where n is the total number of observations; y_i is the actual value of the i -th observation; $\hat{y}_i$ is the predicted value of the i -th observation.

The graph with the historical average rate and forecasts for each model can be seen in Picture 6. Corresponding RMSEs are provided in Table 2.

Picture 6. Average deposit rate and its forecast according to the estimated models.

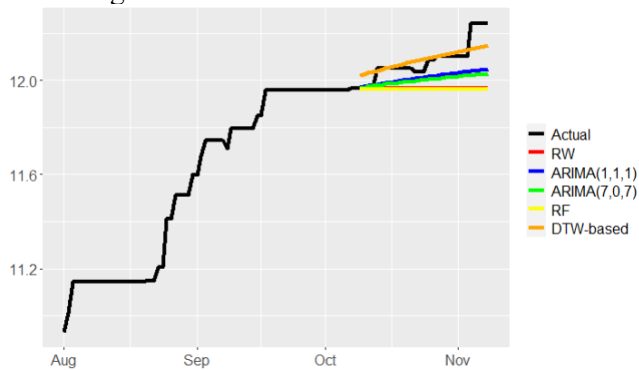


Table 2. RMSE for all models, calculated on the last available month.

Model	RW	ARIMA (1,1,1)	ARIMA (7,0,7)	RF	DTW-based
RMSE	0.143	0.095	0.107	0.146	0.050

Several key results can be dug out from the graph and table. Our key algorithm, which is based on the DTW routine, outperforms all other methods. ARIMA models work pretty well too. Random Forest

was unable to outperform Random Walk and gives bad results.

Graphical analysis shows that on the current dataset, all models were able to produce lines with relatively small deviations. Such a result is acceptable for models that do not have information about the future (exogenous variables, assumptions). For even better and more robust results another approach for model quality evaluation such as rolling pseudo-out-of-sample forecasts may be used in the following research. Despite poor results in this exercise, Random Forest is able to give good results and find non-linearities still. However, it needs more fitting (because in this paper it was a simple benchmark model) and will also benefit from another method of evaluation.

Conclusion

The paper shows how a novel multi-stage approach outperforms several traditional benchmarks on the unique dataset, which consists of deposit rates of Ukrainian banks that were scrapped from the abovementioned banks' websites. Despite the mostly technical focus of the paper and model design, it opens a wide field for further improvements with area-specific adjustments to the model, and additional data that may explain some part of the variation due to the economic interconnection. Moreover, such an approach provides us with the tool for the economics-oriented paper that will study new insights that have been caught with a DTW and clustering approach.

The work highlights a promising way to improve the model by solving one of the problems that the model faces. The data consists of series that are given on the daily basis but vary rather rarely creating long sequences with zero variance. It may be harmful to the DTW algorithm due to its design, thus an upcoming work dedicated to the issue will be favourable.

Also, there are multiple ways to improve and evolve the current results of the paper with the usage of other mechanisms to evaluate the model quality and by spending more time to fit the RF model, which wasn't a key point of interest in the current paper.

References

1. KHALIL, S., FAKIR, M. (2017): *RCrawler: An R Package for Parallel Web Crawling and Scraping*. "SoftwareX", Volume 6, pp.98-106.
2. KHDHER, M. (2021): *Web Scraping or Web Crawling: State of Art, Techniques, Approaches and Application*. International Journal of Advances in Soft Computing and its Applications, 13(3), pp.145-168.
3. PESARAN, H., SHIN, Y. (1995): *An Autoregressive Distributed Lag Modeling Approach to Co-integration Analysis*. "In S. Strøm (Ed.), Econometrics and Economic Theory in the 20th Century: The Ragnar Frisch Centennial Symposium (Econometric Society Monographs), Cambridge: Cambridge University Press", pp. 371-413.
4. NATIONAL BANK OF UKRAINE (2022): *Inflation Report, October 2022*.
5. DSHALALOW, J., WHITE, R. (2021): *Current Trends in Random Walks on Random Lattices*. "Mathematics", 9(10), pp. 11-48.
6. GANDHI, P. (2020): *7 Statistical Tests to validate and help to fit ARIMA model*.
7. ALMASARWEH, M., WADI, S. (2018): *ARIMA Model in Predicting Banking Stock Market Data*. "Modern Applied Science", Vol. 12, No. 11.
8. YOON, J. (2020): *Forecasting of Real GDP Growth Using Machine Learning Models: Gradient Boosting and Random Forest Approach*. "Computational Economics", volume 57, pp. 247-265.
9. BIAU, G. (2012): *Analysis of a Random Forests Model*. "Journal of Machine Learning", Volume 13, pp. 1063-1095.
10. KRUKOVETS, D. (2020): *Analysis of similarity between artificially simulated time series with Dynamic Time Warping*. "Proceedings of Workshop on Intelligent Information Systems WIIS2020", pp.97-108.
11. SALVADOR, S., CHAN, P. (2004): *FastDTW: Toward Accurate Dynamic Time Warping in Linear Time and Space*. "Intelligent Data Analysis", 11(5), pp.70-80.

Список використаних джерел

1. Khalil, S. RCrawler: An R Package for Parallel Web Crawling and Scraping. / S. Khalil, M. Fakir, // SoftwareX. – 2017. – Volume 6 – P. 98-106.
2. Khder, M. Web Scraping or Web Crawling: State of Art, Techniques, Approaches and Application. / M. Khder // International Journal of Advances in Soft Computing and its Applications. – 2021. – Volume 13 – Issue 3 – P. 145-168.
3. Pesaran, H. An Autoregressive Distributed Lag Modeling Approach to Co-integration Analysis. / H. Pesaran, Y. Shin // In S. Strøm (Ed.), Econometrics and Economic Theory in the 20th Century: The Ragnar Frisch Centennial Symposium (Econometric Society Monographs). – Cambridge University Press – 1995 – P. 371-413.
4. National Bank of Ukraine. Inflation Report, October 2022. – 2022
5. Dshalalow, J. Current Trends in Random Walks on Random Lattices. / J. Dshalalow, R. White // Mathematics. – 2021. – Volume 9 – Issue 10 – P. 11-48.
6. Gandhi, P. 7 Statistical Tests to validate and help to fit ARIMA model. / P. Gandhi // 2020
7. Almasarweh, M. ARIMA Model in Predicting Banking Stock Market Data. / M. Almasarweh, S. Wadi // Modern Applied Science. – 2018. – Volume 12 – Issue 11
8. Yoon, J. Forecasting of Real GDP Growth Using Machine Learning Models: Gradient Boosting and Random Forest Approach. / J. Yoon // Computational Economics. – 2020. – Volume 57 – P. 247-265.
9. Biau, G. Analysis of a Random Forests Model. / G. Biau // Journal of Machine Learning. – 2012. – Volume 13 – P. 1063-1095.
10. Krukovets, D. Analysis of similarity between artificially simulated time series with Dynamic Time Warping. / D. Krukovets // Proceedings of Workshop on Intelligent Information Systems WIIS2020. – 2020. – P. 97-108.
11. Salvador, S., Chan, P. FastDTW: Toward Accurate Dynamic Time Warping in Linear Time and Space. / S. Salvador, P. Chan // Intelligent Data Analysis. – 2004. – Volume 11 – Issue 5 – P. 70-80.

12. GIORGINO, T. (2009): *Computing and Visualizing Dynamic Time Warping Alignments in R: The dtw Package*. "Journal of Statistical Software", 31(7), pp. 1–24.
13. DATORRO, J. (2019): *Convex optimization and Euclidean distance geometry*.
14. JIE, C., JIYUE, Z., JUNHUI, W., YUSHENG, W., HUIPING, S., KAIYAN, L. (2020): *Review on the Research of K-means Clustering Algorithm in Big Data*. "2020 IEEE 3rd International Conference on Electronics and Communication Engineering (ICECE)", Xi'An, China, 107-111.
15. HYNDMAN, R., KHANDAKAR, Y. (2008): *Automatic Time Series Forecasting: The forecast Package for R*. "Journal of Statistical Software", 27(3), 1-22.
16. MCANDREW, T., WATTANACHIT, N., GIBSON, GC., REICH, NG. (2021): *Aggregating predictions from experts: a review of statistical methods, experiments, and applications*. Wiley Interdiscip Rev Comput Stat, 13(2), e1514.
12. Giorgino, T. Computing and Visualizing Dynamic Time Warping Alignments in R: The dtw Package. / T. Giorgino // Journal of Statistical Software. – 2009. – Volume 31 – Issue 7 – P. 1-24.
13. Datorro, J. Convex optimization and Euclidean distance geometry. / J. Datorro .
14. Jie, C. Review on the Research of K-means Clustering Algorithm in Big Data. / C. Jie, Z. Jiyue, W. Junhui, W. Yusheng, S. Huiping, L. Kaiyan // 2020 IEEE 3rd International Conference on Electronics and Communication Engineering (ICECE), Xi'An, China. – 2020. – P. 107-111.
15. Hyndman, R. Automatic Time Series Forecasting: The forecast Package for R. / R. Hyndman, Y. Khandakar // Journal of Statistical Software. – 2008. – Volume 27 – Issue 3 – P. 1-22.
16. McAndrew, T. Aggregating predictions from experts: a review of statistical methods, experiments, and applications. / T. McAndrew, N. Wattanachit, GC. Gibson, NG. Reich // Wiley Interdiscip Rev Comput Stat. – 2021. – Volume 13 – Issue 2

Надійшла до друку 30.09.2022

УДК 004.4, 004.6, 004.942, 004.021: 519.6, 616.12

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/4.8>

Н. О. Михайлов, аспірант

N. O. Mykhailov, PhD student

**Класифікація
користувачів на онлайн платформах
методами машинного навчання**

**Classifications of users on
online platforms using
machine learning techniques**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, Україна, 03022, м.Київ,
просп. Академіка Глушкова, 4Д, 03022
e-mail: nikmikhailov13@gmail.com

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
4D, Academician Glushkov ave.,
Kyiv, Ukraine, 03022
e-mail: nikmikhailov13@gmail.com

Онлайн-платформи стали невід'ємною частиною нашого життя, а кількість інтернет користувачів зростає з кожним днем. Від платформ соціальних медіа до веб-сайтів електронної комерції, цими платформами користуються мільйони людей у всьому світі. З такою великою базою юзерів цим платформам важливо класифікувати своїх користувачів на основі їх поведінки, уподобань та інтересів. У цій статті досліджується, як машинне навчання можна використовувати для класифікації користувачів на онлайн-платформах.

Класифікуючи користувачів, їх поділяють на різні категорії на основі їхніх характеристик. Аналізуючи поведінку та вподобання користувачів, онлайн-платформи можуть персоналізувати свої послуги та забезпечувати кращий досвід користувачів. Методи машинного навчання можуть допомогти онлайн-платформам автоматизувати процес класифікації та зменшити людські зусилля. У цій статті буде детально розглянута поведінкова класифікація користувачів на онлайн-платформах.

Ключові слова: класифікація користувачів, аналіз користувачів, кластеризація, правила асоціацій, нейронні мережі.

Online platforms have become an integral part of our lives, and the number of users is increasing by the day. From social media platforms to e-commerce websites, these platforms are used by millions of people around the world. With such a large user base, it is essential for these platforms to classify their users based on their behavior, preferences, and interests. This paper explores how machine learning can be used to classify users on online platforms.

When classifying users, they are divided into different categories based on their characteristics. By analyzing user behavior and preferences, online platforms can personalize their services and provide a better user experience. Machine learning techniques can help online platforms automate the classification process and reduce human effort. In this article, the behavioral classification of users on online platforms will be discussed in detail.

Keywords: user classification, user analysis, cluster analysis, association rules, neural networks.

Вступ

Зі збільшенням кількості користувачів на онлайн платформах стало надзвичайно важливо класифікувати користувачів на основі їх поведінки, уподобань та інтересів. Алгоритми штучного інтелекту довели свою ефективність у автоматизації процесу класифікації користувачів і наданні користувачам персоналізованого досвіду.

На сьогоднішній день існує велика кількість алгоритмів штучного інтелекту (ШІ), які використовуються для класифікації користувачів на онлайн-платформах, включаючи демографічну класифікацію, класифікацію поведінки та класифікацію настрою. У цій статті в центрі уваги буде поведінкова класифікація.

Поведінкова класифікація

Поведінкова класифікація — це процес класифікації користувачів на основі їх поведінки на онлайн-платформі. Ця класифікація базується на активності користувачів, наприклад відвідуваних ними сторінках, продуктах, які вони купують, публікаціях, якими вони діляться, і часу, який вони проводять на платформі.

Онлайн-платформи використовують поведінкову класифікацію, щоб персоналізувати свої послуги для користувачів, надавати кращі рекомендації та покращувати залучення користувачів.

Алгоритми штучного інтелекту, такі як кластеризація, правила асоціації та нейронні мережі, зазвичай використовуються для даної класифікації. Ці алгоритми аналізують дані користувачів і створюють моделі, які можуть передбачати поведінку та вподобання користувачів на основі їхньої минулої активності на платформі.

Кластеризація

Кластерний аналіз або кластеризація — це групування набору об'єктів таким чином, щоб об'єкти в одній групі (які називаються кластерами) були більш схожими один на одного (у певному сенсі), ніж об'єкти в інших групах

(кластерах). Це головне завдання дослідницького аналізу даних і загальна техніка статистичного аналізу даних, яка використовується в багатьох галузях, включаючи розпізнавання образів, аналіз зображень, пошук інформації, біоінформатику, стиснення даних, комп'ютерну графіку та машинне навчання [1].

Сам по собі кластерний аналіз - це не конкретний алгоритм, а загальне завдання, яке необхідно вирішити. Його можна вирішити різними алгоритмами, які суттєво відрізняються у розумінні того, що таке кластер і як його ефективно знаходити. Загальні поняття кластерів включають групи з малими відстанями між членами кластерів, щільні області простору даних, інтервали або певні статистичні розподіли. Тому кластеризація може бути сформульована як багатоцільова задача оптимізації [2]. Відповідний алгоритм кластеризації та налаштування параметрів (включаючи такі параметри, як функція відстані для використання, поріг щільності або кількість очікуваних кластерів) залежать від конкретного набору даних і передбачуваного використання результатів. Кластерний аналіз як такий не є автоматичним завданням, а повторюваним процесом виявлення знань або інтерактивної багатоцільової оптимізації, яка передбачає спроби та помилки. Часто необхідно змінювати попередню обробку даних і параметри моделі, поки результат не матиме бажаних властивостей.

На додаток до терміну кластеризація існує ряд термінів зі схожими значеннями, включаючи автоматичну класифікацію, числову таксономію, ботріологію, типологічний аналіз і виявлення спільноти. Незначні відмінності часто полягають у використанні результатів: у той час як при інтелектуальному аналізі даних цікавлять отримані групи, при автоматичній класифікації цікавить результуюча відмінність [3].

Кластерний аналіз був розроблений в антропології Драйвером і Кробером в 1932 році і введений в психологію Джозефом Зубіним в 1938 році і Робертом Трайном в 1939 році. Його прославив Кеттелл, який використовував його для класифікації рис у психології особистості з 1943 року [4].

Правила асоціації

Навчання правилам асоціації — це метод машинного навчання на основі правил для виявлення цікавих зв'язків між змінними у великих базах даних. Він використовується для визначення сильних правил, виявлених у базах даних, за допомогою певних показників цікавості. У будь-якій транзакції з великою кількістю елементів правила асоціації призначені для виявлення правил, які визначають, як і чому певні елементи пов'язані [5].

Базуючись на концепції сильних правил, Ракеш Агравал, Томаш Імелінські та Арун Свамі запровадили правила асоціації, щоб виявити закономірності між продуктами у даних великих транзакцій, записаних касовими системами в супермаркетах. Наприклад, правило «цибуля, картопля — гамбургери», знайдене в даних про продажі в супермаркеті, означатиме, що клієнт, який купує разом цибулю та картоплю, швидше за все, купить гамбургери. Така інформація може бути використана як основа для прийняття рішень щодо маркетингових заходів, таких як ціни на рекламу або розміщення продуктів [6].

На додаток до прикладу аналізу кошика для покупок, наведеного вище, правила асоціації тепер використовуються в багатьох областях застосування, таких як оцінка використання веб-сайтів, безперервне виробництво та біоінформатика. На відміну від інтелектуального аналізу послідовностей, навчання правил асоціації зазвичай не враховує порядок елементів у транзакції чи між транзакціями [7].

Нейронні мережі

Нейронна мережа — це мережа або схема, що є або біологічною нейронною мережею, що складається з біологічних нейронів, або штучною нейронною мережею, яка використовується для вирішення проблем штучного інтелекту. Зв'язки біологічного нейрона моделюються в штучних нейронних мережах як ваги між вузлами. Позитивна вага являє собою збудливий зв'язок, тоді як негативні значення означають гальмівний зв'язок. Усі вхідні дані модифікуються за вагою та

підсумовуються [8]. Ця діяльність називається лінійною комбінацією. Нарешті, функція активації контролює амплітуду вихідного сигналу. Наприклад, прийнятний діапазон для виведення зазвичай становить від 0 до 1 або може бути від -1 до 1.

Ці штучні мережі можна використовувати для прогнозного моделювання, адаптивного керування та додатків, де їх можна навчати на наборі даних. Мережі можуть самонавчатися і робити висновки зі складного та, здавалося б, непов'язаного набору інформації. [9]

Кластеризація методом к-середніх

Кластеризація методом к-середніх — популярний метод кластеризації, впорядкування множини об'єктів в порівняно однорідні групи. Винайдений в 1950-х роках математиком Гуго Штайнгаузом і майже одночасно Стюартом Ллойдом.

Мета методу — розділити n спостережень на k кластерів, так щоб кожне спостереження належало до кластера з найближчим до нього середнім значенням. Метод базується на мінімізації суми квадратів відстаней між кожним спостереженням та центром його кластера.

У цій статті буде продемонстрована робота алгоритму к-середніх на основі синтетичного датасету що складається з тисячі умовних користувачів онлайн платформи, які мають дві довільні характеристики. Кількість ознак користувачів була обрана для поліпшення сприйняття алгоритму та полегшення зображення користувачів на системі координат. Датасет було сгенеровано використовуючи бібліотеку NumPy мови програмування Python [10].

NumPy — це потужна бібліотека на Python, яка використовується для чисельних обчислень та надає набір потужних інструментів і структур даних для роботи з масивами і матрицями. NumPy використовується для виконання складних математичних операцій, таких як лінійна алгебра, перетворення Фур'є та генерація випадкових чисел. Ця бібліотека надає велику кількість математичних функцій і операторів, які працюють

з багатовимірними масивами, що робить її цінним інструментом для наукових обчислень [11].

Розміщення датасету на графіку виглядає наступним чином (див. рис. 1).

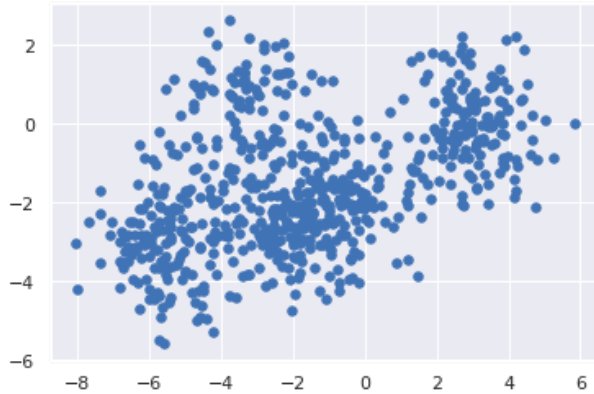


Рис. 1. Датасет користувачів онлайн платформи

K-Means — це дуже простий алгоритм, який об'єднує дані в K кластерів. Припустимо, що ми маємо вхідні дані $X_1, X_2, X_3 \dots X_n$ і значення K :

1. Виберемо K випадкових точок як центри кластерів, які називаються центроїдами
2. Примовимо кожен X_i найближчому кластеру, обчисливши його відстань до кожного центроїда
3. Знайдемо новий центр кластера, взявши середнє значення призначених точок
4. Повторимо кроки 2 і 3, доки центри нових кластерів більше не будуть змінюватись.

На першій ітерації алгоритму центроїди будуть знаходитися в наступних місцях (див. рис. 2):

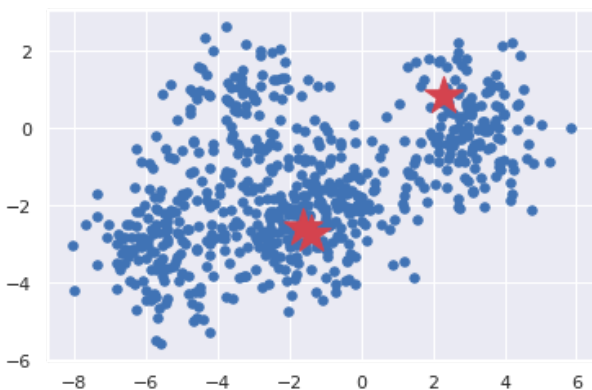


Рис. 3. Розміщення центроїдів на першій ітерації
Фінальний результат роботи алгоритму можна побачити на рис. 3.

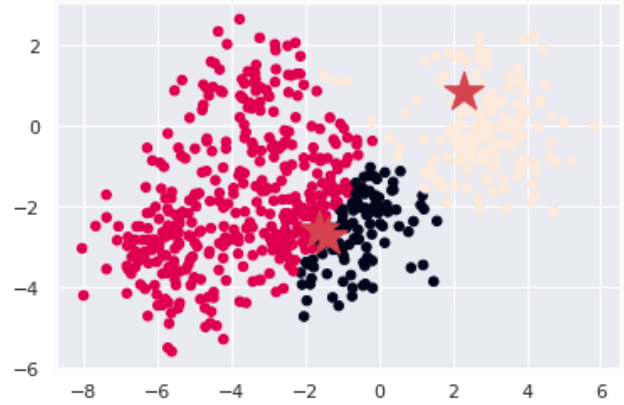


Рис. 3. Результат роботи алгоритму

Для перевірки коректності роботи алгоритму і правильності визначення кількості кластерів K ми можемо скористатися методом "Elbow". Для цього нам потрібно обчислити середню суму квадратів відстані між точками та центроїдом всередині кластера. З графіку на рис. 4 видно що $K=3$ є оптимальним значенням для даного датасету.

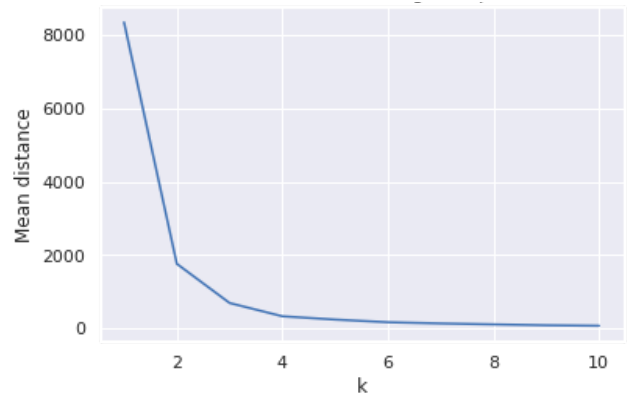


Рис. 4. Графік оптимальності вибору K за методом "Elbow"

Висновки

Використовуючи можливості розглянутих алгоритмів машинного навчання, онлайн сервіси та платформи можуть надавати персоналізовані послуги, покращувати взаємодію з клієнтами, виявляти і попереджувати шахрайство та спам

тим самим стаючи впевненими лідерами у своєму сегменті.

Розглянутий алгоритм K-Means — це потужний алгоритм кластеризації, який можна використовувати для класифікації користувачів на онлайн-платформах.

Однією з ключових переваг алгоритму K-Means є його здатність автоматично групувати користувачів у кластери на основі їхньої поведінки чи вподобань. Це означає, що його можна використовувати для ідентифікації груп користувачів, які мають подібні характеристики, наприклад історію веб-перегляду, поведінку при купівлі або демографічну інформацію.

Ще одна перевага використання алгоритму K-Means для класифікації користувачів полягає в тому, що він може допомогти покращити взаємодію з користувачем на онлайн-платформах. Групуючи користувачів у кластери на основі їхніх уподобань, платформи можуть надавати персоналізовані рекомендації та контент користувачам.

Загалом, алгоритм K-Means є важливим інструментом для онлайн-платформ, які прагнуть краще зрозуміти своїх користувачів і покращити взаємодію з ними.

Продуктивність алгоритму K-Means, нейронних мереж і правил асоціації може відрізнятись залежно від характеру даних, їх розміру і складності проблеми класифікації.

Алгоритм K-Means є обчислювально ефективним, особливо при роботі з великими наборами даних, і його легко інтерпретувати та візуалізувати результати. Однак він обмежений лінійними межами і не може обробляти складні нелінійні розподіли даних.

З іншого боку, нейронні мережі — це потужні алгоритми машинного навчання, які можуть вивчати складні патерни в даних і добре виконувати широкий спектр завдань класифікації, включаючи класифікацію користувачів. Однак нейронні мережі є дорогими в обчислювальному плані, потребують багато даних для навчання та можуть бути складними для інтерпретації.

Правила асоціації — це ще один тип алгоритму машинного навчання, який можна використовувати для класифікації користувачів. Правила асоціації працюють шляхом виявлення частих шаблонів у даних і створення правил, які фіксують зв'язки між різними змінними. Правила асоціації прості для інтерпретації та можуть добре працювати для наборів даних із великою кількістю змінних. Однак вони можуть бути чутливими до шуму та аномалій у даних і можуть показувати некоректні результати при роботі з даними великої розмірності.

Отже, вибір алгоритму для класифікації користувачів на онлайн-платформах залежить від конкретних характеристик набору даних і проблеми класифікації.

Список використаних джерел

1. Driver and Kroeber. Quantitative Expression of Cultural Relationships // University of California Publications in American Archaeology and Ethnology. Berkeley, CA: University of California Press. Quantitative Expression of Cultural Relationships. – 1932. – P. 211–256.
2. Zubin, Joseph. A technique for measuring like-mindedness // The Journal of Abnormal and Social Psychology. – 1938.–P. 508–516.

References

1. Driver and Kroeber (1932). "Quantitative Expression of Cultural Relationships". University of California Publications in American Archaeology and Ethnology. Berkeley, CA: University of California Press. Quantitative Expression of Cultural Relationships: – P. 211–256.
2. Zubin, Joseph (1938). "A technique for measuring like-mindedness". The Journal of Abnormal and Social Psychology. – P. 508–516.

3. Tryon, Robert C. Cluster Analysis: Correlation Profile and Orthometric (factor) Analysis for the Isolation of Unities in Mind and Personality // Edwards Brothers.–1939.
4. Cattell, R. B. The description of personality: Basic traits resolved into clusters // Journal of Abnormal and Social Psychology. – 1943.– P. 476–506.
5. Piatetsky-Shapiro, Gregory. Discovery, analysis, and presentation of strong rules // Piatetsky-Shapiro, Gregory; and Frawley, William J.; eds., Knowledge Discovery in Databases. – AAAI/MIT Press, Cambridge, MA. – 1991.
6. Agrawal, R. Imieliński, T. Swami. Mining association rules between sets of items in large databases // Proceedings of the 1993 ACM SIGMOD international conference on Management of data – SIGMOD '93. – 1993.– P. 207.
7. Garcia, Enrique. Drawbacks and solutions of applying association rule mining in learning management systems // Sci2s. Archived (PDF) from the original. – 2007.
8. Hopfield, J. J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities // Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. – 1982. – P. 2554–2558.
9. Neural Net or Neural Network // Gartner IT Glossary. URL: www.gartner.com.
10. Travis Oliphant. Python for Scientific Computing // Computing in Science and Engineering. – 2007.
11. Charles R Harris; K. Jarrod Millman; Stéfan J. van der Walt; et al. Array programming with NumPy (PDF) // 585 (7825): 357–362. ISSN 1476-4687. – 2020.
3. Tryon, Robert C. (1939). Cluster Analysis: Correlation Profile and Orthometric (factor) Analysis for the Isolation of Unities in Mind and Personality. Edwards Brothers.
4. Cattell, R. B. (1943). "The description of personality: Basic traits resolved into clusters". Journal of Abnormal and Social Psychology. – P. 476–506.
5. Piatetsky-Shapiro, Gregory (1991), Discovery, analysis, and presentation of strong rules, in Piatetsky-Shapiro, Gregory; and Frawley, William J.; eds., Knowledge Discovery in Databases, AAAI/MIT Press, Cambridge, MA.
6. Agrawal, R.; Imieliński, T.; Swami, A. (1993). "Mining association rules between sets of items in large databases". Proceedings of the 1993 ACM SIGMOD international conference on Management of data - SIGMOD '93. – P. 207.
7. Garcia, Enrique (2007). "Drawbacks and solutions of applying association rule mining in learning management systems" (PDF). Sci2s. Archived (PDF) from the original.
8. Hopfield, J. J. (1982). "Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities". Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. – P. 2554–2558.
9. "Neural Net or Neural Network – Gartner IT Glossary". www.gartner.com.
10. Travis Oliphant (2007). "Python for Scientific Computing" (PDF). Computing in Science and Engineering.
11. Charles R Harris; K. Jarrod Millman; Stéfan J. van der Walt; et al. (2020). "Array programming with NumPy" (PDF). // 585 (7825): 357–362.

Надійшла до друку 20.09.2022

УДК 004.92

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/4.9>

Пікульський Р. М.¹, аспірант,
Кулябко П. П.², к.ф.-м.н., доц.

R. M. Pikulsky¹,
P. P. Kuliabko², Dr. Sci.

**Стан та перспективи подальших
досліджень сфери обчислення
глобального освітлення у реальному
часі**

**Real-time global illumination computation
status and further research prospects**

^{1,2} Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: ¹rostyslav.pikulsky@gmail.com,
²kpp1@ukr.net

^{1,2} Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: ¹rostyslav.pikulsky@gmail.com,
²kpp1@ukr.net

У статті розглядається така проблема сучасної комп'ютерної графіки як обчислення глобального освітлення в реальному часі. Глобальне освітлення є невід'ємною частиною фотореалістичного рендерінгу, але його підрахунок потребує доволі об'ємних обчислень. Через це на даний момент якісне глобальне освітлення існує лише у неінтерактивних рендерах (наприклад, у мультиплікаційних фільмах), а у реальному часі (наприклад, комп'ютерному моделюванні або симуляціях, комп'ютерних іграх) зазвичай використовуються певні наближення, які хоч і надають зображенню певну природність, але все одно мають вкрай помітні неточності. Але останнім часом дана тема набуває все більшого розвитку за рахунок удосконалення відеопроцесорів. Крім значного підвищення їх швидкодії та збільшення кількості ядер досить велику роль грає поява апаратного прискорення трасування променів. В даній роботі проводиться теоретичне дослідження проблеми глобального освітлення, наводяться існуючі підходи та розробки для вирішення даної проблеми та аналізуються перспективи подальших досліджень та розробки нових методів обчислення глобального освітлення в реальному часі з урахуванням новітніх апаратних можливостей обчислювальної техніки.

Ключові слова: комп'ютерна графіка, фотореалістичний рендерінг, рендерінг у реальному часі, глобальне освітлення, трасування променів, метод стохастичного трасування променів.

Currently, computer graphics is a very important part of computer science. Graphics-related developments have been used in many different situations, for example, in animated and cinema movie productions, in computer graphics applications, modeling, and simulation systems, for different visualizations in medicine, mathematics, physics, etc. One of the main problems of computer graphics is the task of transforming the information of some imaginary scene and its observer into a photorealistic image of this scene for them. Solving this problem is very important, but right now obtaining a good quality result is possible only in a non-interactive scenario (for example, in animated films), while in real-time (for example, in computer modeling or simulations, in computer games) it is usually necessary to use some approximate algorithms. Although these algorithms are often able to provide a natural-looking result, they still have plenty of very noticeable inaccuracies. However, this topic is gaining more and more development recently due to the improvement of graphics processors. In addition to a significant increase in computation speed and the number of cores, the appearance of ray tracing hardware acceleration plays a large role.

Global illumination computation is an inseparable part of photorealistic image generation. This paper is focused on solving this problem in real-time, which means developing a system capable of generating such images at a speed sufficient for the resulting sequence to be perceived by a person as a smooth animation. We give the theoretical information required for understanding this problem and describe existing methods and algorithms for solving it with their advantages and disadvantages. Also based on an overview of the topic's current state, we analyze further research prospects and directions for improving existing and developing new methods of real-time global illumination calculation, while considering compute power and technologies of the latest graphics hardware.

Keywords: computer graphics, photorealistic rendering, real-time rendering, global illumination, ray tracing, stochastic ray tracing method.

Вступ

На сьогоднішній день комп'ютерна графіка – дуже важлива область комп'ютерних наук. Рендерінг фотореалістичних зображень є вкрай необхідною частиною багатьох програмних пакетів, починаючи з програм моделювання та комп'ютерних симуляцій і закінчуючи комп'ютерними іграми. При цьому часто дуже важливо вміти генерувати фотореалістичне зображення динамічного середовища в інтерактивному режимі – щоб користувач міг споглядати анімовану демонстраційну сцену з різних позицій та напрямків.

Невід'ємною частиною фотореалістичності зображення є глобальне освітлення. Це метод освітлення, коли крім освітлення безпосередньо з джерел світла враховується також світло, відбите або розсіяне певними поверхнями. Для того, щоб оцінити важливість глобального освітлення, можна уявити світлу кімнату з вікном, у яке світить сонце. Якщо враховувати лише пряме світло, то освітленою у кімнаті буде лише невелика частина поверхні, що не закрита від сонця стінами або стелею, а всі інші поверхні будуть абсолютно чорними; натомість, при глобальному освітленні завдяки відбиванню світла від стін уся поверхня кімнати буде відбивати певну частину світла у точку спостереження (як це і буває в реальному світі).

Таким чином, розробка методів глобального освітлення у реальному часі є досить актуальною.

1. Теоретичні відомості

Глобальне освітлення [15] – це загальна назва для технік освітлення, які враховують не тільки пряме світло від джерела, але і відбите і розсіяне світло від різних поверхонь і протяжних джерел світла.

Для того, щоб обчислити освітленість точки при спостереженні її з певного напрямку, використовується так зване рівняння рендерінгу:

$$L(\omega_0) = L_0(\omega_0) + \int_{\Omega} f(\omega_0, \omega) L_i(\omega) (\omega \cdot n) d\omega,$$

де ω_0 – напрям променя від точки до спостерігача, $L_0(\omega_0)$ – освітлення, що випромінює точка у напрямку ω_0 , Ω – півсфера, орієнтована вздовж нормалі поверхні n у точці, $f(\omega_0, \omega)$ – двонаправлена функція відбивної здатності (bidirectional reflectance distribution function, BRDF), $L_i(\omega)$ – освітлення, що надходить до

точки з напрямку ω , $\cdot$ – скалярний добуток векторів.

Двонаправлена функція відбивної здатності – це функція чотирьох дійсних змінних, яка визначає, як світло відбивається на непрозорій поверхні. Функція приймає вихідний вектор ω_0 та вхідний вектор ω , взяті в системі координат, де нормаль поверхні n лежить вздовж осі Z і повертає відношення відбитого світла, що виходить уздовж ω_0 , до опромінення поверхні з напрямку ω . Кожен напрямок сам по собі параметризується азимутальним кутом φ та зенітним кутом θ , тому BRDF в цілому є функцією 4 змінних. BRDF має одиниці sr^{-1} , при цьомустерадіан (sr) є одиницею виміру тілесного кута.

Зазвичай принцип відбивання світла від поверхні можна поділити на два типи: дифузне та дзеркальне. Дифузне відбивання – це ситуація, коли світло, що попадає на поверхню, практично рівномірно відбивається у напрямках, що належать напівсфері, орієнтованій вздовж нормалі поверхні. Натомість у випадку дзеркального відбиття світло в основному відбивається у напрямку, дзеркальному до напрямку падіння. Практично всі непрозорі поверхні відбивають світло за такими законами або певним чином комбінують ці типи відбивання, і цей факт використовується при дизайні алгоритмів обчислення глобального освітлення.

Найбільшою складністю у розв'язанні рівняння рендерінгу є обчислення інтегралу на півсфері. Якщо враховувати лише пряме освітлення, цей інтеграл можна перетворити на суму на множині джерел світла (бо освітленість з інших напрямків вважається рівною нулю), але при глобальному освітленні потрібно враховувати відбите та розсіяне світло, яке фактично може надходити з будь-якого напрямку. Отже, для кожного напрямку з точки з деякою дискретизацією ми маємо визначити поверхню, що випромінює світло на поточну точку в даному, обчислити значення підінтегральної функції, та просумувати всі результати. Ясна річ, це потребує великої кількості обчислень.

2. Трасування променів

Для обчислення глобального освітлення так чи інакше використовуються алгоритми трасування променів.

В широкому розумінні, трасування променів – це знаходження перетину заданого променя у тривимірному просторі з деяким об'єктом заданої сцени. Якщо промінь перетинається з об'єктами сцени у декількох місцях, зазвичай мається на увазі найближчий до вершини променя перетин. Під представленням сцени та її об'єктів мається на увазі повна інформація про розташування, форму та оптичні властивості поверхні об'єктів сцени. Формат такого представлення може бути досить різноманітним, і на його основі будуються конкретні алгоритми трасування променів. Разом із форматами точного представлення сцени, існують також формати наближеного представлення для яких неможливо провести точне трасування променів. Перевагами таких форматів зазвичай є зменшення обсягу необхідної пам'яті для зберігання сцени та/або збільшена швидкодія алгоритмів трасування променів – через це такі формати можуть стати в нагоді у випадках, коли їх точність є задовільною.

Класичним методом представлення форми поверхні є її апроксимація у вигляді сітки трикутників. Вона не є точним представленням, але точність можна регулювати шляхом збільшення або зменшення кількості трикутників, таким чином можна досягти задовільного компромісу. Сама сітка також може бути представлена по-різному; найпростішим представленням є звичайна неупорядкована множина трикутників, але існують також інші структури, зокрема такі, що добре пристосовані саме для трасування променів, наприклад, BSP-дерево (binary space partitioning tree), octree (octal tree), BVH (bounding volume hierarchy).

Крім сітки трикутників, існують також інші представлення поверхні, наприклад, сплайни, хмари точок (point clouds), воксельні структури.

Властивості поверхні зазвичай поділяються на рівномірні та нерівномірні. Рівномірні – це такі, що є доволі сталими для геометричних форм і їх не має сенсу розрізняти в межах одного об'єкту (в разі їх різноманітності у межах деякого об'єкту можна просто розділити об'єкт на декілька), вони можуть задаватися як мета-інформація об'єкта. Зазвичай до них відносять лише BRDF поверхні, хоча в деяких випадках певні нерівномірні властивості також можна вважати рівномірними в межах певної сцени. Нерівномірні – такі, що можуть змінюватися в межах об'єкта (наприклад, колір поверхні, гладкість тощо), їх формат залежить від формату представлення форми поверхні. Для сіток трикутників зазвичай використовуються текстури – двовимірні

карти/зображення, куди заносяться конкретні значення властивостей; вершини сітки при цьому містять спеціальні двовимірні координати, за якими відбувається семплінг значень з текстур.

3. Стохастичний алгоритм обчислення відбитого світла

Для створення фотореалістичного зображення необхідно на основі даних про положення та властивості камери для кожного пікселя зображення обчислити промінь камери (або множину променів), вздовж якого освітлюється даний піксель. Тоді значенням пікселя має бути енергетична яскравість (radiance) світла, що потрапляє у камеру вздовж даного променя або їх множини. Для її обчислення потрібно обчислити світло з усіх видимих поверхонь, що перетинає промінь (їх може бути декілька, якщо деякі з них напівпрозорі), що робиться обчисленням рівняння рендерінгу, де у свою чергу вимагається освітленість поточної точки простору вздовж променів напівсфери інтегрування і т. д.

Найпростішим алгоритмом обчислення якісного наближення освітленості точки з урахуванням глобального освітлення є метод стохастичного трасування променів [19, 22]. Він базується на обчисленні інтегралу рівняння рендерінгу методом Монте-Карло – це означає, що відбувається трасування множини випадкових променів з точки, обчислюються відбите світло, що надійшло з даних напрямків і обчислюється середній результат. Опишемо алгоритм трасування одного променя.

1. Нехай маємо: точка p – та, для якої треба порахувати освітлення, n – нормаль у даній точці, ω_0 – напрям, у якому відбивається світло, величину якого потрібно обчислити. Також приймемо що L – поточний результат (початкове значення нульове), F – поточний BRDF-множник (початкове значення – 1).

2. Додаємо до результату величину випроміненого світла з точки p , враховуючи BRDF-множник (воно буде ненульовим у випадку якщо точка є джерелом світла):

$$L := L + F * L_0(\omega_0)$$

3. Стохастично обираємо напрям ω з напівсфери, орієнтованої вздовж нормалі n .

4. Здійснюємо трасування променя (p, ω) у сцені, знаходимо точку p' перетину; нехай n' – нормаль у цій точці.

5. Додаємо у BRDF-множник вплив BRDF даної точки:

$$F := F * f_p(\omega_0, \omega)(\omega \cdot n)$$

6. Переходимо до пункту 2, оновивши поточні дані:

$$p := p'; n := n'; \omega_0 := -\omega$$

Цикл продовжується допоки F не буде достатньо малим для того, щоб подальші обчислення не впливали на значущі цифри результату. Також часто вводять додаткові обмеження на кількість ітерацій для збільшення швидкодії.

Цей метод є дуже важливим, оскільки за умови достатньої кількості вибірок дає точний результат глобального освітлення. Це означає, що його можна використовувати як еталонний результат для оцінки якості та порівняння різних алгоритмів обчислення глобального освітлення. Зазвичай при вивченні деякого алгоритму вибираються деякі умови рендерінгу (сцена, динаміка об'єктів та камери тощо), які подаються на вхід цьому алгоритму та методу стохастичного трасування променів, що запускається з достатньо великою кількістю трасувань. Отримані результати порівнюють між собою певними метриками. Серед поширених метрик можна виділити наступні:

1. MSE (mean squared error, середньоквадратичне відхилення):

$$MSE(R, T) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} (R(i, j) - T(i, j))^2,$$

де m, n – розміри зображення, R, T – результуючі зображення двох алгоритмів відповідно.

2. PSNR (peak signal-to-noise ratio, пікове співвідношення сигналу до шуму):

$$PSNR(R, T) = 20 \log_{10} \left(\frac{M}{\sqrt{MSE(R, T)}} \right),$$

де M – максимальне значення серед усіх пікселів обох зображень.

Також даний алгоритм широко використовується для обчислення глобального освітлення за необхідності якнайточнішого результату – наприклад, у мультиплікації та кінематографічній графіці. На жаль, застосувати цей метод в умовах реального часу доволі важко – для отримання точного результату зазвичай потрібно обчислити дуже багато трасувань, а для цього потрібно дуже багато обчислювальних ресурсів.

4. Методи обчислення глобального освітлення в реальному часі

На даний момент розроблено багато алгоритмів/структур даних обчислення глобального освітлення в реальному часі. Загалом їх можна поділити на дві групи: статичні передобчислені структури [4, 12-13, 16, 18] та методи наближеного динамічного обчислення [3, 6-7, 9-10].

Статичні передобчислені структури – спеціальні структури даних, що певним чином зберігають інформацію про глобальне освітлення або інформацію, яка призначена для швидкого обчислення глобального освітлення. Найпоширенішими є такі структури:

1. Карта освітлення (lightmap) [4, 13, 18] – це структура даних, при використанні якої освітленість поверхонь у віртуальній сцені попередньо обчислюється та зберігається у текстурах для подальшого використання. Карти освітлення складаються з люмелів (lumel, lumen element), по аналогії до текселів (texel, texture element), елементів текстур. Менші люмелі дають карту освітлення з більш високою роздільною здатністю, забезпечуючи більшу деталізацію освітленості ціною зниження продуктивності та збільшення використання пам'яті. Таким чином, використовуючи цю техніку, дизайнерам рівнів та 3D-художникам часто доводиться йти на компроміс між продуктивністю та якістю; якщо одночасно використовувати достатньо багато карт освітлення з високою роздільною здатністю, їх об'єм може перевищити об'єм пам'яті відеокарти, що може знизити продуктивність програми або призвести до неможливості її виконання на даному апаратному забезпеченні. Значення люмелів карти освітлення можуть бути обчислені за допомогою певного алгоритму обчислення глобального освітлення; зазвичай використовується алгоритм стохастичного трасування променів. Карти освітлення добре підходять для збереження дифузного освітлення (освітлення дифузних поверхонь), оскільки воно не залежить від напрямку падіння світла, а є звичайною скалярною характеристикою точки поверхні. Але очевидно, що вони працюють лише у повністю статичних сценах – при будь-яких змінах у сцені карти освітлення втрачають релевантність.

2. Light probes [12] – це структура даних, що зберігає освітлення, що надходить у певну точку простору у сцені з усіх напрямків. Метод зберігання може бути різним; найчастіше використовуються кубічні текстери (так називають масив з шести текстур, кожна з яких відповідає одній з граней уявного куба з центром

у даній точці) або спеціальні апроксимації на кшталт сферичних гармонік (spherical harmonics) [1, 8, 17]. Текстури дозволяють зберігати результат з високою дискретизацією, тож добре підходять для створення чітких віддзеркалень, в той час як сферичні гармоніки менш точні, але мають властивості, що дозволяють використовувати їх для обчислення глобального освітлення дифузних поверхонь. Перевагою light probes перед картами освітлення є те, що вони прив'язані не до об'єктів сцени, а до певної точки простору, тож можуть використовуватися не тільки для статичних, а й для динамічних об'єктів. З іншого боку, дані структури є менш точними ніж карти освітлення та призводять до графічних артефактів (неточностей), які дуже складно приховати.

Дані методи дозволяють досягнути задовільного результату освітлення поверхні. Але очевидно, що вони мають серйозні недоліки. По-перше, вони є приблизними – для досягнення високої точності необхідно виділити значні обсяги пам'яті. По-друге, їх використання вимагає значної дизайнерської роботи – вони призводять до графічних артефактів, що зазвичай унеможлиблює їх автоматичне використання, натомість ускладнює роботу 3D-дизайнерам, які мусять вдаватися до різних хитрощів для того, щоб зробити їх невидимими до користувача. По-третє, вони не можуть працювати у повністю динамічних середовищах – для попереднього обчислення вмісту таких структур зазвичай використовується метод стохастичного трасування променів, і тому у випадку певних змін у середовищі швидко оновлення таких структур є практично неможливим.

Методи наближеного динамічного обчислення класифікувати складно – існує багато їх варіацій та реалізацій. Одним з найперших можна вважати воксельне трасування конусів (voxel cone tracing) [3, 6]. Цей метод полягає у побудові наближеної структури сцени у вигляді дерева вокселів та трасуванні конусів (тобто трасуванні одночасно усіх променів з певної точки, що утворюють з певним центральним променем кут, менший за заданий) за допомогою цього дерева. Воксель – це абстракція підмножини простору у вигляді паралелепіпеда, кожне ребро якого паралельне одній з координатних осей простору та перпендикулярне двом іншим. Суміжні вокселі (ті, що мають спільні грані) утворюють воксельні сітки – тривимірні масиви вокселів, що покривають паралелепіпедну підмножину простору; воксельним деревом зазвичай

називають множину воксельних сіток різної точності, що покривають паралелепіпеди різних розмірів, але зі спільним центром. Подібні структури можуть порівняно швидко оновлюватися згідно зі змінами у сцені та дозволяють здійснювати швидко наближене трасування, що і дає можливість застосовувати такий алгоритм у реальному часі для динамічних сцен. З іншого боку, його результат так само містить серйозні графічні артефакти, виправити які дуже нелегко. Також варто зазначити, що він має невисоку точність, а для її покращення потрібно підвищувати розмірність воксельних сіток, що призводить до значного збільшення необхідного об'єму пам'яті.

Таким чином, можливості наявних методів обчислення глобального освітлення в реальному часі досить обмежені, хоч і застосовні у деяких умовах. Також всі вони мають обмежену точність та призводять до появи графічних дефектів.

5. Застосування стохастичного трасування променів у реальному часі

Важливим моментом у розвитку комп'ютерної графіки стала поява апаратної підтримки трасування променів у сучасних графічних адаптерах. А саме, до драйверів GPU було додано спеціальні програмні засоби побудови певних допоміжних структур для трасування променів, а до самих відеопроцесорів – спеціальні обчислювальні блоки, що прискорюють трасування променя по цим допоміжним структурам. Ця зміна відкриває багато нових можливостей у сфері комп'ютерної графіки, і одна з них – це застосування стохастичного трасування променів у реальному часі.

Станом на зараз апаратне прискорення трасування променів не дозволяє застосовувати класичний метод стохастичного трасування променів у інтерактивному режимі – незважаючи на значне прискорення операції трасування, обчислення глобального освітлення все одно потребує багато стохастичних семплів, обчислення яких займає значний час. Тому замість того, щоб обчислювати повне освітлення точки за один кадр, його обчислюють поступово, здійснюючи один або декілька семплів за кадр і генеруючи результуюче зображення для поточного кадру на основі результатів семплів поточного та минулих кадрів за допомогою спеціалізованих алгоритмів. Такі алгоритми зазвичай виконують дві основні задачі:

1. Комбінація результату стохастичних семплів поточного кадру з результатами

попередніх кадрів. Для цього алгоритм зазвичай передбачає збереження деяких значень з минулого кадру, які суміщаються з результатами поточного кадру і використовуються у наступному. Тут важливо врахувати зміни, які відбулися на сцені з минулого кадру, такі як зміщення/повороти камери та/або об'єктів сцени, певні деформації об'єктів та зміни джерел світла, оскільки такі зміни роблять деяку частину збережених результатів нерелевантною;

2. Видалення шуму (деноїзінг, denoising) – в умовах недостатньої кількості семплів отримане зображення буде містити шум та неточності – дана стадія видаляє шум та згладжує отримане зображення ціною втрати деяких деталей та появи інших неточностей у результаті.

Алгоритмів комбінації існує багато; часто розроблюються окремі алгоритми для рероекції та деноїзінгу, які потім комбінуються разом. Одним з найдосконаліших таких алгоритмів станом на зараз можна вважати алгоритм SVGF (spatiotemporal variance guided filtering) [20] з деякими модифікаціями, що зменшують дефекти від динамічних об'єктів [21].

Даний метод є одним з головних напрямків досліджень у сфері глобального освітлення та комп'ютерної графіки в цілому. Він має серйозні переваги – разом з потужним алгоритмом комбінації результатів обчислення стохастичних вибірок він дозволяє отримати досить якісний результат. Також дуже важливо те, що даний алгоритм може працювати у повністю динамічних сценах – оновлення допоміжних структур для трасування зазвичай не дуже дороге порівняно із самим трасуванням (враховуючи те, що зазвичай потрібно здійснити багато трасувань за кадр). На жаль, він також має недоліки. Основним є те, що результат алгоритму зазвичай сильно страждає від нестачі обрахованих вибірок. Якщо камера та середовище статичні, то через деяку кількість кадрів зображення зможе накопичити достатню кількість семплів, але за умов динамічного середовища інформація про освітлення буде часто втрачатися, що призводитиме до погіршення якості зображення. Цю проблему частково вирішують алгоритми видалення шуму, але в загальному випадку вони не можуть згенерувати ідеальний результат за умови відсутності необхідної інформації.

6. Перспективи подальших досліджень

На основі викладених відомостей та аналізу задачі глобального освітлення можна виділити

декілька основних перспективних напрямків подальших досліджень.

Одним з найперспективніших та найпопулярніших станом на зараз напрямків є вдосконалення та розробка модифікацій методу стохастичного трасування променів. З появою апаратної підтримки трасування променів у графічних процесорах застосовність даного методу у реальному часі різко зросла, що разом з його перевагами (основною з яких є те, що математичне очікування результату алгоритму є точним значенням освітлення, тобто, за достатньої ефективної кількості вибірок алгоритм дає саме коректний результат в межах заданої точності, а не певне схильне до нерівномірних похибок наближення) робить його вкрай привабливим для якнайширшого впровадження. До того ж, для багатьох інших алгоритмів даний метод також необхідний для виконання певних попередніх обчислень, пришвидшення яких полегшить роботу користувачів бібліотеки графічних алгоритмів.

Одним з головних способів вдосконалення методу стохастичного трасування променів є застосування різних моделей вибірки за значимістю (importance sampling) [5]. Це загальна техніка для алгоритмів на основі методу Монте-Карло, що полягає у зменшенні дисперсії результату обчислюваної функції шляхом модифікації розподілу випадкових чисел, що використовується для вибірки аргументів функції. При цій зміні для збереження математичного очікування замість обчислення середнього значення функції обчислюється середня частка значення функції та значення функції щільності розподілу, що дозволяє зменшити дисперсію шляхом підбору розподілу таким чином, щоб функція його щільності була графічно «схожа» на обчислювану функцію. Зменшення дисперсії результату дозволяє зменшити необхідну кількість вибірок для отримання результату необхідної точності, отже, зменшується час, необхідний для даного обчислення.

У випадку алгоритму стохастичного трасування променів підбір розподілу для вибірки напрямків є доволі непростим, оскільки на результат функції впливає декілька чинників (енергетична яскравість світла, що надходить у точку з даного напрямку, значення BRDF), і їх вплив дуже складно оцінити, тож вдосконалення підбору даних розподілів є цікавим напрямком для дослідження. Для цього існує декілька технік комбінування та покращення розподілу, наприклад, multiple importance sampling (MIS),

filtered importance sampling (FIS), resampled importance sampling (RIS) тощо [5]. Однією з найновіших розробок у сфері покращення семплінгу є метод ReSTIR [2], що покращує вибірку вхідних параметрів для обчислення освітлення у конкретному пікселі результуючого зображення, використовуючи дані про аналогічну вибірку, виконану для сусідніх пікселів зображення та цього ж пікселя у попередніх кадрах. Даний метод також дозволяє значно зменшити дисперсію результату обчислення глобального освітлення, і його вдосконалення та застосування у різних ситуаціях є досить перспективним.

Іншим перспективним напрямком дослідження є вдосконалення алгоритмів деноїзінгу. Зазвичай використання методу стохастичного трасування променів на сучасних графічних адаптерах у реальному часі призводить до наявності шуму у результаті за рахунок нестачі кількості випадкових вибірок. Також є інші методи (наприклад, light propagation volumes), вихідний результат яких містить графічні артефакти, що потребують корекції. Тому в багатьох випадках алгоритми видалення шуму є невід'ємною частиною процедури рендерінгу, тож їх вдосконалення та розробка нових алгоритмів для специфічного використання є дуже важливими.

Ще одним важливим напрямком досліджень є вдосконалення алгоритмів трасування променів. Ця процедура є однією з фундаментальних складових будь-якого алгоритму глобального

освітлення і у багатьох випадках її виконання забирає найбільше часу. Тому доволі актуальним є вдосконалення процедури трасування променів, розробка різноманітних структур для її прискорення та різних способів представлення геометрії сцени, що дозволяють оптимізувати час її виконання та обсяг необхідної пам'яті.

Розробка та вдосконалення структур для динамічного обчислення глобального освітлення також залишається перспективною, особливо в контексті обчислення дифузного глобального освітлення. Продуктивність та об'єм оперативної пам'яті відеоадапторів зростають, і це дає простір для модифікації та збільшення точності таких методів, що розширює межі їх застосування. Особливо цікаво їх дослідження у поєднанні з апаратною підтримкою трасування променів у новітніх графічних картах.

Висновок

Обчислення глобального освітлення у реальному часі – дуже актуальна задача комп'ютерної графіки, яка станом на сьогодні не має однозначного якісного та стабільного розв'язання. Тому дослідження у цьому напрямку є дуже важливими. В даній статті було надано теоретичні відомості про проблему обчислення глобального освітлення, описано популярні підходи та розробки для вирішення даної задачі та проаналізовано найперспективніші напрямки подальших досліджень у цій сфері.

References

1. Tomas Annen, T. , Kautz, J., Durand, F., and Seidel, H.-P.: Spherical Harmonic Gradients for Mid-Range Illumination, Proceedings of Eurographics Symposium on Rendering, June 2004.
2. Benedikt Bitterli, Chris Wyman, Matt Pharr, Peter Shirley, Aaron Lefohn, Wojciech Jarosz. Spatiotemporal reservoir resampling for real-time ray tracing with dynamic direct lighting. ACM Transactions on Graphics (Proceedings of SIGGRAPH), 39(4), July 2020.
3. Bing-Yu Chen, Jan Kautz, Tong-Yee Lee, and Ming C. Lin: Interactive Indirect Illumination Using Voxel Cone Tracing
4. Hao Chen. 2008. Lighting and Materials of Halo3. In Game Developers Conference
5. Colbert M., Premoz S., Fran G.: Importance sampling for production rendering. SIGGRAPH 2010 Course Notes (2010)
6. Crassin C.: Voxel Cone Tracing and Sparse Voxel Octree for Real-time Global Illumination. GTC 2013
7. Dachsbacher C., Stamminger M.: Reflective shadow maps. In Proceedings of the 2005 symposium on Interactive 3D graphics and games (New York, NY, USA, 2005), I3D'05, ACM, pp. 203–231.
8. Green, R.: Spherical Harmonic Lighting: The Gritty Details, 2003.
9. Kaplanyan A.: Light propagation volumes in CryEngine 3, 2009.
10. Kaplanyan A., Dachsbacher C.: Cascaded light propagation volumes for real-time indirect illumination, 2010.
11. McGuire, M., Luebke, D.: Hardware-accelerated global illumination by image space photon mapping. In HPG '09: Proceedings of the Conference on High Performance Graphics 2009, 77–89.

12. Morgan McGuire, Mike Mara, Derek Nowrouzezahrai, David Luebke: Real-Time Global Illumination using Precomputed Light Field Probes
13. Gary McTaggart. 2004. Half-Life 2 source shading. In Game Developers Conference.
14. Oat, C.: Irradiance volumes for real-time rendering. ShaderX 5: Advanced Rendering Techniques.
15. Pharr, M., Humphreys, G., Morgan Kaufmann: Physically Based Rendering, 2004.
16. Ramamoorthi, R., and Hanrahan, P.: An Efficient Representation for Irradiance Environment Maps, SIGGRAPH 2001, 497-500.
17. Sloan, P.-P.: Stupid spherical harmonics tricks. Presentation, Game Developer Conference (GDC2008), San Francisco, CA.
18. Peter-Pike Sloan and Ari Silvennoinen. 2018. Directional Lightmap Encoding Insights. In SIGGRAPH Asia 2018 Technical Briefs (SA '18 Technical Briefs), December 4–7, 2018, Tokyo, Japan. ACM, New York, NY, USA, 3 pages.
19. Rupard, Jason, "Ray Tracing And Global Illumination" (2003)
20. Christoph Schied, Anton Kaplanyan, Chris Wyman, Anjul Patney, Chakravarty R. Alla Chaitanya, John Burgess, Shiqiu Liu, Carsten Dachsbacher, Aaron Lefohn, and Marco Salvi. 2017. Spatiotemporal Variance-Guided Filtering: Real-Time Reconstruction for Path-Traced Global Illumination. In Proceedings of HPG '17, Los Angeles, CA, USA, July 28-30, 2017, 12 pages. DOI: 10.1145/3105762.3105770
21. Christoph Schied, Christoph Peters, and Carsten Dachsbacher. 2018. Gradient Estimation for Real-Time Adaptive Temporal Filtering. Proc. ACM Comput. Graph. Interact. Tech. 1, 2, Article 24 (August 2018), 16 pages.
22. Ingo Wald, Timothy J. Purcell, Jörg Schmittler, Carsten Benthin, Philipp Slusallek: Realtime Ray Tracing and its use for Interactive Global Illumination
23. Wang, R., Wang, R., Zhou, K., Pan, M., Bao, H.: An efficient gpu-based approach for interactive global illumination. ACM Transactions on Graphics (Proc. of SIGGRAPH 2009) 28, 3, 1–8.

Надійшла до редакції 11.12.2022

УДК 519.25, 378.146

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/4.10>

Шарапов М.М., к.ф.-м. н., доцент

M.M. Sharapov, PhD, Associate Prof.

До питання щодо триноміальних функціоналів

To the question of trinomial functionals

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Академіка Глушкова 4д,

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,

e-mail: sharapov@unicyb.kiev.ua

e-mail: sharapov@unicyb.kiev.ua

В статті розглядаються властивості функціоналів від триноміального розподілу, які з'являються в задачах статистичному корегування результатів IDK-тестів та оцінювання якості знань. Для одного з таких функціоналів запропоновані варіанти визначення його у «нульовій» точці та показано, як один спосіб визначення може бути корисним при обчисленні математичного сподівання такого функціоналу, а інший спосіб визначення в «нульовій точці» є корисним при обчисленні реалізацій цього функціоналу в рамках задачі оцінювання якості знань. Запропонований показник якості знань оцінює впевненість студента у правильності відповідей при тестуванні і цим суттєво відрізняється від усіх існуючих методів оцінювання, які оцінюють або кількість знань, або стосуються швидше оцінювання вмінь чи навичок, але не якості набутих знань. Показано, як методика оцінювання якості знань пов'язана з політикою доброчесності в освітньому середовищі. Методи оцінювання можуть як спонукати студента до відгадування правильних відповідей, так і утримувати від порушення основ академічної доброчесності.

Ключові слова: функціонал від триноміального розподілу, оцінювання тестів, статистичне корегування, показники якості знань, політика доброчесності.

The article considers the properties of functionals from the trinomial distribution that appear in the tasks of statistical correction of the results of IDK-tests and knowledge quality estimation. For one of these functionals, variants of its definition at the "zero" point are proposed, and it is shown how one method of definition can be useful in calculating the mathematical expectation of such a functional, and another method of definition is useful in calculating the realizations of the functional within the task of knowledge quality estimation. The proposed indicator of the quality of knowledge assesses the student's confidence in the correctness of the answers during testing, and thus differs significantly from all existing assessment methods, which assess either the amount of knowledge, or rather relate to the assessment of abilities or skills, but not the quality of acquired knowledge. It is shown how the method of assessing the quality of knowledge is related to the policy of academic integrity in the educational environment. Assessment methods can both encourage the student to guess the correct answers and prevent them from violating the basics of academic integrity.

Keywords — functional of the trinomial distribution, tests assessment, statistical correction, knowledge quality estimation, the policy of academic integrity.

1 Introduction

Some ideas of statistical correction of test results have been introduced in article [1]. Two types of tests were considered. First, a classic test where there are several answer options for each question. The idea of correcting the results of such testing was to estimate the number of correctly guessed answers. Secondly, a modification of the classic test, where the "I don't know" option is added to the answer options, which the student must choose if he does not know the correct answer. We call such tests IDK-tests. The purpose of using IDK-tests is directly related to the implementation of ideas of academic integrity to our life. Using such tests, on the one hand, enables the student to honestly choose IDK-option, and on the other hand, enables the teacher to statistically evaluate not only the amount of knowledge acquired by the student, but also its strength. It is clear that quantity has a strong correlation with quality, but this is far from always the case.

Let us emphasize that when we talk about the strength of knowledge, we do not mean its quantity, but rather its quality, that is, the degree of confidence of the student in his knowledge. Instead, in most sources (e.g. [2]-[4]), when it comes to assessing the quality of knowledge, what is really meant is either the quantity of knowledge or the skills and abilities that are based on that knowledge. We will consider the quality of knowledge rather as its strength, as a measure of the student's confidence in the part of knowledge he can rely on. Method of assessing the quality of knowledge is related to the policy of academic integrity in the educational environment ([5], [6]). Whatever these methods are, they must have more than just a control function. but also encourage the student to observe the basic principles of academic integrity.

2 Notations and definitions

Suppose the test consists of N questions with $n > 1$ variants of answer each while student gave C correct answers, I incorrect ones has chosen D times the IDK-option ($C + I + D = N$). Each question has got $n+1$ options of answer (n real variants and the IDK one).

Within such a model, we have the following notations.

- N Number of questions in a test.
- n Number of options (variants) of answer per question, $n > 1$, apart from IDK-option.
- C Number of given correct answers in a test; a

random variable.

- I Number of given incorrect answers in a test; a random variable.
- D Number of given IDK-answers in a test; a random variable.
- α The share of the material studied by the student (testee), $\alpha \in [0;1]$. In other words, it is the probability that the student knows the answer to a particular question.
- β An indicator of student honesty, $\beta \in [0;1]$. This is the probability that the student, not knowing the correct answer, will try to guess the answer, ignoring the IDK option.

Now, it is important to distinguish the random variables of this model from ordinary coefficients, although often realizations of random variables or functions of them can be coefficients. At the same time, the coefficients under other conditions can be random values.

It is easy to see that random variables C, I, D have got binomial distributions with corresponding parameters

$$C \sim \text{Bin}(N, p_C), p_C = \alpha + \frac{\beta(1-\alpha)}{n},$$

$$D \sim \text{Bin}(N, p_D), p_D = (1-\alpha)(1-\beta),$$

$$I \sim \text{Bin}(N, p_I), p_I = \frac{\beta(1-\alpha)(n-1)}{n},$$

$$p_I + p_C + p_D = 1,$$

$$C + I + D = N,$$

and the random vector (C, I, D) has a multinomial, more precisely, a trinomial distribution. In article [1], a quite logical coefficient

$$K = \frac{Cn - (N - D)}{(n-1)(N - D)}, \quad 0 < \frac{N - D}{n} < C \leq N - D,$$

was proposed for assessing the quality of knowledge, but seven years of its application in practice revealed some shortcomings. In particular, the expectation $E[K]$ of this coefficient for some values of $\alpha \in [0;1]$ was not a monotonic function in $\beta \in [0;1]$ as shown in the following figure 1.

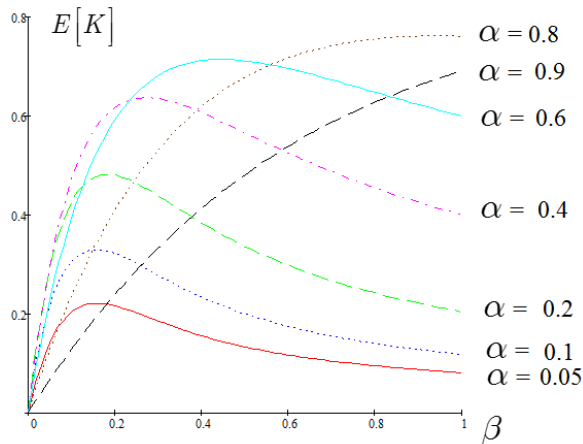


Fig. 1

This meant that at a low level of knowledge, it was more profitable for the student to try to guess the correct answers, rather than honestly choose IDK option. And this is not just a mathematical problem, in fact, the previously proposed model inclines students to dishonest behavior, which is not entirely good. To solve this problem, note that most of the mentioned coefficient variations will be linear

functions of the fraction $\frac{C}{N-D} = \frac{C}{I+C}$. But the fraction itself is not defined when $D = N$. An attempt to define this fraction by zero on the basis of logical considerations led to the mentioned problem of a moral and ethical nature. Oddly enough, now we will try to extend this fraction by $x = \frac{p_C}{1-p_D}$. This

extended definition has a rather specific character, because the expression $\frac{p_C}{1-p_D} = \frac{\alpha n + \beta(1-\alpha)}{n(\alpha + \beta(1-\alpha))}$ depends on unknown variables α and β , but formally these variables are simply parameters of our model and we have the right to take such a step. Will the logic suffer? The answer is negative. If a student essentially says that he knows nothing, then he is at least honest, and at the maximum he also understands that he does not know the material. Does this improve our model? The answer is positive. Indeed, the conditional distribution

$$C_D \sim \text{Bin}\left(N-D, \frac{p_C}{1-p_D}\right)$$

therefore, according to the conditional expectation property,

$$\tilde{E}\left[\frac{C}{N-D}\right] = \tilde{E}\left[\tilde{E}\left[\frac{C}{N-D} \middle| D\right]\right] =$$

$$\begin{aligned} &= \tilde{E}\left[\frac{\left(N-D\right)\frac{p_C}{1-p_D}}{N-D}\right] = \frac{p_C}{1-p_D} = \\ &= \frac{\alpha n + \beta(1-\alpha)}{n(\alpha + \beta(1-\alpha))}. \end{aligned}$$

The tilde-sign over the mathematical expectation symbol here means that when calculating, we define the value of the fraction at $N = D$ by the value x . If these calculations do not explicitly show exactly where and how we extended the value of the fraction, then we can get the same result in a longer way by explicitly calculating the mathematical expectation.

3 Main results and their proofs

Lemma The sum

$$\sum_{c=1}^N \sum_{d=0}^{N-c} \frac{N!}{(N-d)(c-1)!d!(N-c-d)!} \times \\ \times y^{c-1}t^d(1-y-t)^{N-c-d} = \frac{1-t^N}{1-t}$$

doesn't depend upon y for all $N \in \mathbb{N}$, $y, t \geq 0$, $y+t < 1$.

Proof. Not complicated but rather lengthy calculations show that the derivative with respect to y will be equal to 0. Consider a more elegant proof. Since

$$\sum_{c=1}^N \sum_{d=0}^{N-c} f_{c,d} = \sum_{d=0}^{N-1} \sum_{c=1}^{N-d} f_{c,d},$$

then

$$\begin{aligned} &\sum_{c=1}^N \sum_{d=0}^{N-c} \frac{N!}{(N-d)(c-1)!d!(N-c-d)!} \times \\ &\times y^{c-1}t^d(1-y-t)^{N-c-d} = \\ &= \sum_{d=0}^{N-1} \sum_{c=1}^{N-d} \frac{N!}{(N-d)(c-1)!d!(N-c-d)!} \times \\ &\times y^{c-1}t^d(1-y-t)^{N-c-d} = \\ &= N!(1-y-t)^{N-1} \sum_{d=0}^{N-1} \frac{t^d(1-y-t)^{-d}}{(N-d)d!} \times \\ &\times \sum_{c=1}^{N-d} \frac{\left(\frac{y}{1-y-t}\right)^{c-1}}{(c-1)!(N-c-d)!}. \end{aligned}$$

Let us temporarily denote $s = \frac{y}{1-y-t}$, only for the inner sum and continue the transformations

$$\begin{aligned}
 & N!(1-y-t)^{N-1} \sum_{d=0}^{N-1} \frac{t^d (1-y-t)^{-d}}{(N-d)d!} \times \\
 & \times \sum_{c=1}^{N-d} \frac{s^{c-1}}{(c-1)!(N-c-d)!} = \\
 & = N!(1-y-t)^{N-1} \sum_{d=0}^{N-1} \frac{t^d (1-y-t)^{-d}}{(N-d)d!(N-d)!} \times \\
 & \times \frac{d}{ds} \left((1+s)^{N-d} - 1 \right) = \\
 & = N!(1-y-t)^{N-1} \sum_{d=0}^{N-1} \frac{t^d (1-y-t)^{-d}}{d!(N-d)!} \times \\
 & \times \left(\frac{1-t}{1-y-t} \right)^{N-d-1} = \\
 & = N!(1-t)^{N-1} \sum_{d=0}^{N-1} \frac{t^d}{d!(N-d)!} (1-t)^{-d} = \\
 & = (1-t)^{N-1} \left(\left(\frac{1}{1-t} \right)^N - \left(\frac{t}{1-t} \right)^N \right) = \frac{1-t^N}{1-t},
 \end{aligned}$$

which was required to be shown.

Theorem Under the introduced notation, the following equality holds

$$\tilde{E} \left[\frac{C}{N-D} \right] = \frac{p_C}{1-p_D} = \frac{\alpha n + \beta(1-\alpha)}{n(\alpha + \beta(1-\alpha))}.$$

Proof

$$\begin{aligned}
 \tilde{E} \left[\frac{C}{N-D} \right] &= \sum_{c=0}^N \sum_{d=0}^{N-c} \left\{ \frac{c}{N-d}, d \neq N \right\} \times \\
 & \times \frac{N!}{c!d!(N-c-d)!} p_C^c p_D^d p_I^{N-c-d} = \\
 & = \sum_{d=0}^N \left\{ 0, d \neq N \right\} \frac{N!}{d!(N-d)!} p_D^d p_I^{N-d} + \\
 & + \sum_{c=1}^N \sum_{d=0}^{N-c} \frac{c}{N-d} \frac{N!}{c!d!(N-c-d)!} p_C^c p_D^d p_I^{N-c-d} = \\
 & = x p_D^N + \sum_{c=1}^N \sum_{d=0}^{N-c} \frac{c}{N-d} \frac{N!}{c!d!(N-c-d)!} p_C^c p_D^d p_I^{N-c-d} = \\
 & = x p_D^N + N! p_I^N \sum_{c=1}^N \frac{p_C^c p_I^{-c}}{(c-1)!} \sum_{d=0}^{N-c} \frac{p_D^d p_I^{-d}}{(N-d)d!(N-c-d)!}.
 \end{aligned}$$

Let us prove that the following equality holds.

$$\begin{aligned}
 & x p_D^N + \sum_{c=1}^N \sum_{d=0}^{N-c} \frac{c}{N-d} \frac{N!}{c!d!(N-c-d)!} p_C^c p_D^d p_I^{N-c-d} = \\
 & = \frac{p_C}{1-p_D}. \\
 & \sum_{c=1}^N \sum_{d=0}^{N-c} \frac{N!}{(N-d)(c-1)!d!(N-c-d)!} \times \\
 & \times p_C^{c-1} p_D^d (1-p_C-p_D)^{N-c-d} = \frac{1-p_D^N}{1-p_D}.
 \end{aligned}$$

It follows from Lemma that the left-hand side of this equality does not depend on p_C and is equal to the right-hand side of this equality. The theorem is proved.

Corollary If the value of the fraction

$$F = \frac{C}{N-D} = \frac{C}{I+C}$$

is considered only at its domain, that is, only when the denominator is not equal to zero, then its mathematical expectation

$$\begin{aligned}
 E \left[\frac{C}{N-D} \right] &= \sum_{c=1}^N \sum_{d=0}^{N-c} \frac{c}{N-d} \frac{N!}{c!d!(N-c-d)!} \times \\
 & \times p_C^c p_D^d p_I^{N-c-d} = \tilde{E} \left[\frac{C}{N-D} \right] - x p_D^N = \\
 & = \frac{p_C}{1-p_D} - x p_D^N = \frac{p_C (1-p_D^N)}{1-p_D} = \\
 & = \frac{\alpha n + \beta(1-\alpha)}{n(\alpha + \beta(1-\alpha))} \left(1 - ((1-\alpha)(1-\beta))^N \right)
 \end{aligned}$$

and for sufficiently large N on condition $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ it is easy to see that

$$E \left[\frac{C}{N-D} \right] \approx \tilde{E} \left[\frac{C}{N-D} \right].$$

Note that the fraction $F = \frac{C}{N-D} = \frac{C}{I+C}$ has got rather good properties as a function of $C = 0, N-D$, for a fixed D it monotonically grows from 0 to 1. And, as a function of two variables $F(I, C) = \frac{C}{I+C}$, $I, C \geq 0$, $0 < I+C \leq N$ it also has the “suitable” monotonicity (see fig. 2), and also takes values from 0 up to 1.

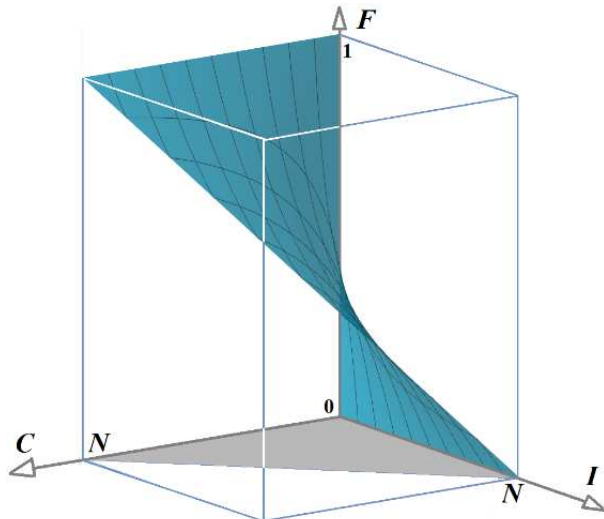


Fig. 2

Let us remind once again that $F(I, C) = \frac{C}{I + C}$ is not just undefined at the point $(C, I) = (0, 0)$, but also cannot be determined by monotonicity, because the limit $\lim_{\substack{C \rightarrow 0 \\ I \rightarrow 0}} \frac{C}{C + I}$ does not exist. On the other

hand, if the rate of convergence to zero is chosen in proportion to the corresponding probabilities $C = t \cdot p_C$, and $I = t \cdot p_I$, $t \rightarrow 0$, then

$$\lim_{\substack{C \rightarrow 0 \\ I \rightarrow 0}} \frac{C}{C + I} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot p_C}{t \cdot p_C + t \cdot p_I} = \frac{p_C}{p_C + p_I} = \frac{p_C}{1 - p_D}.$$

We will not justify the appropriateness of choosing such speeds because, from a practical point of view, we only need to learn to choose the value of $F(0, 0)$. In contrast to the way it was done in the theorem, we

$$\text{cannot choose } F(0, 0) = \frac{p_C}{1 - p_D} = \frac{\alpha n + \beta(1 - \alpha)}{n(\alpha + \beta(1 - \alpha))}$$

at least because the parameters α, β are unknown in advance. The fact that we can estimate α, β by values $\hat{\alpha} = 0$ and $\hat{\beta} = 0$ also does not improve the situation. However, we suggest the following approach.

- If we consider the **indicator of knowledge strength** (IKS) $k = F(I, C) = \frac{C}{I + C}$ as the

final result of research, then in the case of $(C, I) = (0, 0)$ we can assign it a non-numerical value "no knowledge detected", or put it equal to 0, it will no longer have a fundamental

meaning, it is enough to understand what exactly this value means according to our agreement.

- If k should take a numerical value and will be used in the construction of further assessments, for example, when combining with an assessment of the amount of knowledge, then we will "take a step towards the student" and choose $\beta = 0$, $\alpha = \varepsilon > 0$, then $F(0, 0) = 1$.

The graph of function $\tilde{E}[k]$ is shown in Figure 3.

A gap of $\frac{1}{n}$ does not interest us at all, although it brings in a certain imbalance.

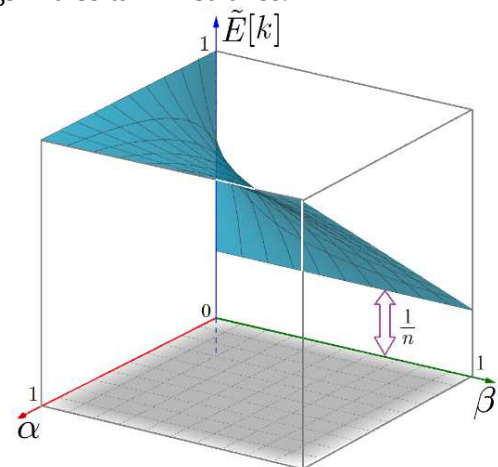


Fig. 3

This nuance can be reconciled, taking into account more important aspects.

- First, for each fixed $\alpha \in [0, 1]$, the function $f(\alpha, \beta) = \tilde{E}[k(\alpha, \beta)]$ monotonically decreases along β . This means that guessing becomes simply not profitable.
- Second, the closer α gets to zero, the more sharply the function decreases along β . This means that with a low level of knowledge, it is absolutely not profitable to try to guess the answers. The closer α gets to 1, the smaller the dependence on β becomes, i.e. with a high level of knowledge, it makes no sense to guess the answers (see fig. 4).

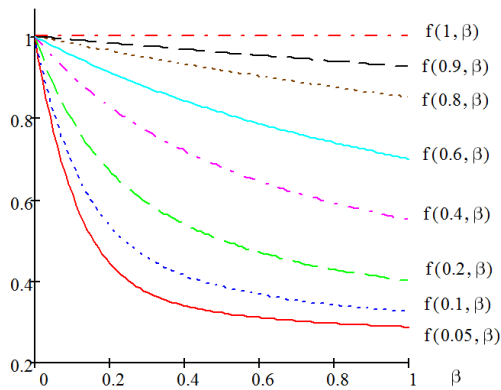


Fig. 4

Список використаних джерел

1. Sharapov M. Statistical correction of test results, *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics*, 2015, 2, pp. 199-202.
2. Aas G.H., Askling B, Dittrich K., Froestad W., Haug P., Lycke K.H., Moitus S., Pyykkö R., Sørskår A.K. Assessing educational quality: Knowledge production and the role of experts. ENQA Workshop report 6, 2009, Helsinki, Finland.
3. Rech J., Decker B., Ras E., Jedlitschka A., Feldmann R.L. The Quality of Knowledge: Knowledge Patterns and Knowledge Refactorings. *International Journal of Knowledge Management (IJKM)*, 2009, IGI Publishing, Vol. 3, Iss. 3, pp. 74-103. DOI: 10.4018/jkm.2007070105
4. Kai Mertins, Peter Heisig (Ed.); Vorbeck, Jens (Ed.). *Knowledge Management. Concepts and Best Practices* (2nd ed.). 2003, Berlin: Springer-Verlag.
5. Holden O.L., Norris M.E. and Kuhlmeier V.A. Academic Integrity in Online Assessment: A Research Review. 2021, *Front. Educ.* 6:639814. doi: 10.3389/educ.2021.639814
6. Morris E.J. Academic integrity matters: five considerations for addressing contract cheating. *Int J Educ Integr* 14, 15 (2018). <https://doi.org/10.1007/s40979-018-0038-5>

The described methods and obtained results can be generalized in the future within the framework of setting new tasks for evaluating tests. The first and main such task is the construction of a functional from quantitative and qualitative indicators of knowledge. Such an integral indicator can be built, taking into account the extent to which we combine the indicator of the amount of knowledge and the indicator of the strength of knowledge. The second task of future research is the study of the statistical and probabilistic characteristics of the constructed functionals, in particular, the calculation of their point and interval estimates.

References

1. SHARAPOV, M. (2015) Statistical correction of test results, *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*. (2). pp. 199-202.
2. AAS, G.H., ASKLING, B., DITTRICH, K., FROESTAD, W., HAUG, P., LYCKE, K.H., MOITUS, S., PYYKKÖ, R., SØRSKÅR, A.K. (2009) *Assessing educational quality: Knowledge production and the role of experts*. ENQA Workshop report 6, Helsinki, Finland.
3. RECH, J., DECKER, B., RAS, E., JEDLITSCHKA, A., FELDMANN, R.L. (2009) *The Quality of Knowledge: Knowledge Patterns and Knowledge Refactorings*. *International Journal of Knowledge Management (IJKM)*, IGI Publishing, Vol. 3, Iss. 3, pp. 74-103. DOI: 10.4018/jkm.2007070105
4. MERTINS, K., HEISIG, P. (Ed.); VORBECK, J. (Ed.) (2003) *Knowledge Management. Concepts and Best Practices* (2nd ed.). Berlin: Springer-Verlag.
5. HOLDEN, O.L., NORRIS, M.E. and KUHLMIEIER, V.A. (2021) *Academic Integrity in Online Assessment: A Research Review*. *Front. Educ.* 6:639814. doi: 10.3389/educ.2021.639814
6. MORRIS, E.J. (2018) *Academic integrity matters: five considerations for addressing contract cheating*. *Int J Educ Integr* 14, 15. <https://doi.org/10.1007/s40979-018-0038-5>

Надійшла до редколегії 12.12.2022