

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

№1 2022

**Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
выпуск №1, 2022,**

Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Фізика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, механіко-математичного факультетів, факультету радіофізики, електроніки та комп’ютерних систем і факультету комп’ютерних наук та кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора, кандидата наук і PhD за спеціальностями 111, 112, 113, 104, 105 (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1188 від 24.09.2020) та за спеціальностями 121, 122, 123, 124 (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1471 від 26.11.2020), та реферується в Реферативному журналі Zentralblatt MATH, JournalTOCs, Crossref, ICI World of Journals, Road, Google Scholar і Науковій періодиці України.

Редакційна колегія:

Моклячук Михайло Павлович, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор**;
Розора Ірина Василівна, д.ф.-м.н., доц., **заст. головного редактора**;
Bartlova Milada, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;
Bavula Vladimir, Prof., University of Sheffield, Great Britain;
Beghin Luisa, Prof., Sapienza Università di Roma, Italy;
Futorny Vyacheslav, Prof., Universidade de São Paulo, Brazil;
Giuliano Rita, Prof., Università di Pisa, Italy;
Gorlatch Sergei, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;
Hudak Stefan, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;
Kukhtarev Nickolai, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;
Leonenko Nikolay, Prof., Cardiff University, Great Britain;
Medvids Arturs, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;
Olenko Andriy, Prof., La Trobe University, Australia;
Orsingher Enzo, Prof., Sapienza University of Rome, Italy;
Ostrovsky Eugene, Prof., Bar-Ilan University, Israel;
Pogany Tibor, Prof., University of Rijeka, Croatia;
Rontó Miklós, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;
Silvestrov Dmitrii, Prof., Stockholms universitet, Sweden;
Sottinen Tommi, Prof., University of Vaasa, Finland;
Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;
Trofimchuk Sergey, Prof., Universidad de Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;
Volodin Andrei, Prof., University of Regina, Canada;
Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;
Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Безущак Оксана Омелянівна, д.ф.-м.н., проф.;
Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;
Гарашенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;
Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;
Жук Ярослав Олександрович, д.ф.-м.н., проф.;
Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., проф.;
Курченко Олександр Олексійович, д.ф.-м.н., проф;

Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;
Львов Віктор Анатолійович, д.ф.-м.н., проф.;
Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;
Майборода Ростислав Євгенович, д.ф.-м.н., проф.;
Мішура Юлія Степанівна, д.ф.-м.н., проф.;
Пашко Анатолій Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Петравчук Анатолій Петрович, д.ф.-м.н., проф.;
Погорілий Сергій Дем'янович, д.т.н., проф.;
Савенков Сергій Миколайович, д.ф.-м.н., доц.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.;
Сливка-Тилищак Ганна Іванівна, д.ф.-м.н., проф.;
Хусаїнов Денис Ях'євич, д.ф.-м.н., проф.;

Редакційний відділ:

Затула Дмитро Васильович, **відповідальний секретар**;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
П'ятецька Олена Василівна, visnyk.phys-math@ukr.net;
Отто Георгій Костянтинович, **технічний редактор**, ottogk@gmail.com.

Адреса редакційної колегії:

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03022 Тел. (044) 259-01-49
bphm@knu.ua, fm.visnyk@ukr.net

ISSN 1812-5409

Засновник: Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Свідоцтво про державну реєстрацію: КВ №16299-4771Р від 11.12.2009 року

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/1>

Безкоштовно

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics
No. 1, 2022.

The journal contains results of new research in various fields of mathematics, computer science, mechanics, physics and radiophysics for researchers, academic staff, postgraduates, engineers and students. It is published on the recommendation of the Academic Councils of Faculty of Physics, Faculty of Radiophysics, Electronics and Computer Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics and the Faculty of Computer Science and Cybernetics.

Journal "Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics" is included in the List of scientific professional publications of Ukraine, in which the results of the theses for obtaining the scientific degrees of a doctor and a candidate of sciences (PhD) in specialties 111, 112, 113, 104, 105, 121, 122, 123 and 124 can be published (approved by the orders of the Ministry of Education and Science of Ukraine No. 1188 dated September 24, 2020 and No. 1471 dated November 26, 2020).

Journal is referenced in the abstract journal **Zentralblatt MATH (zbMATH), JournalTOCs, Crossref, ICI World of Journals, Road, Google Scholar and Scientific periodicals of Ukraine.**

Editorial Board

Moklyachuk Mikhail Pavlovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine,
Editor in Chief;

Rozora Iryna Vasylyvna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Ukraine, Deputy Editor in Chief;

Bartlova Milada, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;

Bavula Vladimir, Prof., University of Sheffield, Great Britain;

Beghin Luisa, Prof., Sapienza Università di Roma, Italy;

Futorny Vyacheslav, Prof., Universidade de São Paulo, Brazil;

Giuliano Rita, Prof., Università di Pisa, Italy;

Gorlatch Sergei, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;

Hudak Stefan, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;

Kukhtarev Nikolai, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;

Leonenko Nikolay, Prof., Cardiff University, Great Britain;

Medvids Arturs, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;

Olenko Andriy, Prof., La Trobe University, Australia;

Orsingher Enzo, Prof., Sapienza University of Rome, Italy;

Ostrovsky Eugene, Prof., Bar-Ilan University, Israel;

Pog'any Tibor, Prof., University of Rijeka, Croatia;

Rontó Miklós, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;

Silvestrov Dmitrii, Prof., Stockholm University, Sweden;

Sottinen Tommi, Prof., University of Vaasa, Finland;

Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;

Trofimchuk Sergey, Prof., Universidad de Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;

Volodin Andrei, Prof., University of Regina, Canada;

Akimenko Vitaliy Vladimirovich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Anisimov Igor Alekseevich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Anisimov Anatoliy Vasyl'ovych, Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Bezuschak Oksana Omelyanivna, Dr., Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Voloshin Aleksey Fedorovich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Garaschenko Fedir Georgievich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Yezhov Stanislav Nikolaevich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Zhuk Yaroslav Aleksandrovich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Zaslav's'kyj Volodymyr Anatolijovych, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Kurchenko Oleksandr Oleksijovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Kudin Volodymyr Ivanovich, Dr. Sci., Sr. Sci. Researcher, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Lvov Victor Anatolijovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Makarets' Nikolay Vladimirovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Maiboroda Rostyslav Yevhenovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Mishura Yuliya Stepanivna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Pashko Anatolij Oleksijovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Perestyuk Mykola Oleksijovych, Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Petravchuk Anatolij Petrovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Pogorily Serhiy Demyanovych, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Savenkov Serhij Mykolajovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Skrzyevsky Valery Antonovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Slyvka-Tylyshchak Anna Ivanivna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Uzhhorod National University, Uzhhorod, Ukraine;
Husainov Denys Yah'yevych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine.

ISSN: 2218-2055 (on-line version)

ISSN: 1812-5409 (printed version)

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/1>

Founders: Taras Shevchenko National University of Kyiv

Foundation year: 1991 (series of bulletins of Kyiv University "Mathematics and Mechanics", "Physics", "Modeling and Optimization of Complex Systems" was reorganized into "Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics").

Certificate of state registration: KB № 16299-4771 P dated 11.12.2009

Issued: 4 times a year

Mailing Address

Taras Shevchenko National University of Kyiv
Faculty of Computer Science and Cybernetics,
03022, Ukraine, Kyiv, 4d Academician Glushkov avenue
Phone: (044) 259-01-49
bphm@knu.ua, fm.visnyk@ukr.net

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Мішура Ю.С., Гопкало О.М., Железняк Г.С. Елементи дробового аналізу. Дробові інтеграли	11
Масютка О.Ю., Голіченко І.І., Моклячук М.П. Про задачу оцінювання стаціонарних процесів неперервного часу за спостереженнями у спеціальних множинах точок	20
Волошина В.О. Про точну сталу в нерівності Дзядика для похідної від алгебраїчного полінома	34

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Батюк Л. В., Кізілова Н. М. Моделювання осциляції поверхонь клітин крові як заповнених рідиною багатопарових в'язкопружних оболонок	40
Вовк І. В., Малюга В. С., Духновський В. Ю. Автоколивання потоку при обтіканні кругового циліндра зі спліттером	44
Савельєва К. В., Дашко О.Г. Взаємодія плоских пружних хвиль. Врахування квадратичної та кубічної нелінійності.	50

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Аскеров І.М. Про визначення граничної функції в початково-крайовій задачі для гіперболічного рівняння другого порядку	56
Ваврик П.Р. Про один підхід до формалізації процесу поширення інформації на основі агрегації, що обмежена дифузією	61
Хусаїнов Д.Я., Шакотько Т.І. Оцінки стійкості в нелінійних диференціальних рівняннях спеціального виду	67

CONTENTS

ALGEBRA, GEOMETRY AND PROBABILITY THEORY

Mishura Yu.S., Hopkalo O.M., Zhelezniak H.S. Elements of fractional calculus. Fractional integrals	11
Masyutka O. Yu., Golichenko I. I., Moklyachuk M. P. On estimation problem for continuous time stationary processes from observations in special sets of points	20
Voloshyna V.O. On exact constant in Dzyadyk inequality for the derivative of an algebraic polynomial	34

DIFFERENTIAL EQUATIONS, MATHEMATICAL PHYSICS AND MECHANICS

Batyuk L. V., Kizilova N. M. Modeling of blood cell surface oscillations as fluid-filled multilayer viscoelastic shells	40
Vovk I. V., Malyuga V. S., Duhnovsky V. Yu. Self-sustained oscillations in the flow past a circular cylinder with splitter plate	44
Savelieva K.V., Dashko O.G. Plane elastic wave interaction. Considering of quadratically and cubically nonlinearity	50

COMPUTER SCIENCES AND INFORMATICS

Askerov I.M. On a determination of the boundary function in the initial-boundary value problem for the second order hyperbolic equation	56
Vavryk P. R. One approach to formalizing the process of information dissemination based on diffusion-limited aggregation	61
Khusainov D.Ya., Shakotko T.I. Stability estimates in nonlinear differential equations of a special kind	67

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ ТА ТЕОРИЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 519.21

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/1.1>

Ю.С. Мішура¹, *д.ф.-м.н., професор*
О.М. Гопкало², *д-р філософії, асистент*
Г.С. Железняк³, *аспірант*

Елементи дробового аналізу. Дробові інтеграли

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, e-mail: yuliyamishura@knu.ua

²Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, e-mail: hopkalo.olha@gmail.com

³Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, e-mail: hanna.zhelezniak@gmail.com

Yu.S.Mishura¹, *Dr., Professor*
O.M. Hopkalo², *PhD, Assistant of Professor*
H.S. Zhelezniak³, *PhD student*

Elements of fractional calculus. Fractional integrals

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st., e-mail: yuliyamishura@knu.ua

²Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st., e-mail: hopkalo.olha@gmail.com

³Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st., e-mail: hanna.zhelezniak@gmail.com

Статтю присвячено базовим властивостям дробових інтегралів. Доведено їхню гельдеровість, неперервність за індексом інтегрування, властивості звужень дробових інтегралів. Наведено деякі приклади обчислення дробових інтегралів, дробові інтеграли від квадратично-інтегрованих функцій.

Ключові слова: дробовий інтеграл, гельдеровість, неперервність за індексом інтегрування

The paper is devoted to the basic properties of fractional integrals. It is a survey of the well-known properties of fractional integrals, however, the authors tried to present the known information about fractional integrals as short and transparently as possible. We introduce fractional integrals on the compact interval and on the semi-axes, consider the famous Hardy-Littlewood theorem and other properties of integrability of fractional integrals. Among other basic properties, we consider Hölder continuity and establish to what extent fractional integration increases the smoothness of the integrand. Also, we establish continuity of fractional integrals according to the index of fractional integration, both at strictly positive value and at zero. Then we consider properties of restrictions of fractional integrals from semi-axes on the compact interval. Generalized Minkowsky inequality is applied as one of the important tools. Some examples of calculating fractional integrals are provided.

Key Words: fractional integral, Hölder property, continuity according to the fractional index.

1 Вступ

У цій статті викладено базові властивості дробових інтегралів. Стаття в основному має реферативний характер, але ми постарались викласти відомі властивості дробових інтегралів, разом з доведеннями, у максимально компактному та прозорому вигляді. Робота складається зі вступу та семи розділів, які містять означення та загальні властивості дробових інтегралів, гельдерову властивість дробових інтегралів, властивості звуження дробових інтегралів з прямої на компактний інтервал, неперервність дробових інтегралів відносно індексу інтегрування та деякі приклади обчислення дробових інтегралів.

2 Означення та загальні властивості дробових інтегралів

Нехай функція $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ та $\alpha > 0$. У більшості випадків нижче $\alpha < 1$, хоча це не є обов'язковою умовою. Визначимо лівосторонні та правосторонні дробові інтеграли Рімана-Ліувілля на (a, b) порядку α як

$$(I_{a+}^{\alpha} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt,$$

та

$$(I_{b-}^{\alpha} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt,$$

відповідно.

Будемо казати, що функція $f \in \mathcal{D}(I_{a+(b-)}^{\alpha})$ (символ $\mathcal{D}(\cdot)$ позначає область відповідного оператора), якщо відповідні інтеграли збігаються майже для всіх $x \in (a, b)$ (відносно міри Лебега). У цьому випадку також можна сказати, що ці інтеграли (або інші функції) збігаються м.с. (майже скрізь) відносно міри Лебега. Нехай $\mathbb{H}$ – деякий клас функцій. Кажуть, що $f \in \mathbb{H}_{a+(b-)}^{\alpha}$ якщо $f(x) = (I_{a+(b-)}^{\alpha} h)(x)$, $x \in [a, b]$ м.с. відносно міри Лебега, та $h \in \mathbb{H}$. Відповідні класи функцій, визначені на $\mathbb{R}$, позначаються як $\mathbb{H}_{\pm}^{\alpha}(\mathbb{H})$.

Перше природне запитання: які функції належать до класу $\mathcal{D}(I_{a+(b-)}^{\alpha})$? Відповідь дає наступна лема.

Лема 2.1. Нехай $f \in L_1([a, b])$. Тоді

$$(i) \quad f \in \mathcal{D}(I_{a+(b-)}^{\alpha}).$$

$$(ii) \quad I_{a+(b-)}^{\alpha} f \in L_1([a, b]).$$

$$(iii) \quad \|I_{a+(b-)}^{\alpha} f\|_{L_1([a, b])} \leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_{L_1([a, b])}.$$

Доведення. Нехай $f \in L_1([a, b])$. Для будь-якого $n \geq 1$ розглянемо $f_n(x) = (f(x) \wedge n) \vee (-n)$. Тоді $|f_n(x)| \leq |f(x)| \wedge n$ і ми можемо застосувати теорему Фубіні:

$$\begin{aligned} \int_a^b |(I_{a+}^{\alpha} f_n)(x)| dx &= \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \left| \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f_n(t) dt \right| dx \leq \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} |f_n(t)| dt dx = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f_n(t)| \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} dx dt \leq \\ &\leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \|f_n\|_{L_1([a, b])} \leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_{L_1([a, b])}. \end{aligned}$$

За теоремою Лебега про монотонну збіжність, $(I_{a+}^{\alpha} f_n)(x) \uparrow (I_{a+}^{\alpha} f)(x)$ майже всюди відносно міри Лебега, а також за лемою Фату

$$\begin{aligned} \int_a^b |(I_{a+}^{\alpha} f)(x)| dx &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |(I_{a+}^{\alpha} f_n)(x)| dx \leq \\ &\leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_{L_1([a, b])}. \end{aligned}$$

Аналогічним чином розглядається випадок з інтегралом $I_{b-}^{\alpha} f$. $\square$

Зауваження 2.1. Лема 2.1 є частковим випадком більш загального результату. Дійсно, розглянемо, наприклад, дробовий інтеграл $(I_{a+}^{\alpha} f)(x) = \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$. Ми можемо розглядати дробовий інтеграл як згортку функцій $f(t) \mathbb{I}_{[a, b]}(t)$ та $g(t) = t^{\alpha-1}$. Тоді використовуючи теорему 1.3 з [6] можна довести наступний результат.

Лема 2.2. Нехай $f \in L_p([a, b])$, $p \geq 1$, та $\alpha > 0$. Тоді $I_{a+(b-)}^{\alpha} f \in L_p([a, b])$, та

$$\|I_{a+(b-)}^{\alpha} f\|_{L_p([a, b])} \leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_{L_p([a, b])}.$$

Доведення. Очевидно,

$$\begin{aligned} (I_{a+}^{\alpha} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} f(x-t) t^{\alpha-1} dt \leq \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} |f(x-t)| t^{\alpha-1} dt, \end{aligned}$$

звідки за допомогою узагальненої інтегральної нерівності Мінковського отримуємо, що

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b |(I_{a+}^{\alpha} f)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_a^b \left| \int_0^{x-a} |f(x-t)| t^{\alpha-1} dt \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{b-a} \left\{ \int_{a+t}^b |f(x-t)|^p t^{(\alpha-1)p} dx \right\}^{\frac{1}{p}} dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{b-a} t^{\alpha-1} dt \left\{ \int_a^{b-t} |f(y)|^p dy \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_{L_p([a, b])}. \end{aligned}$$

$\square$

Дробові інтеграли Рімана-Ліувілья на $\mathbb{R}$ визначаються як

$$(I_{+}^{\alpha} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x f(t) (x-t)^{\alpha-1} dt,$$

та

$$(I_{-}^{\alpha} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} f(t) (t-x)^{\alpha-1} dt,$$

відповідно.

Функція $f \in \mathcal{D}(I_{\pm}^{\alpha})$, якщо відповідні інтеграли збігаються майже для всіх $x \in \mathbb{R}$. Відповідно до [4], маємо включення $L_p(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}(I_{\pm}^{\alpha})$, $1 \leq p < \frac{1}{\alpha}$. Більше того, виконується теорема Харді-Літлвуда.

Теорема 2.1 ([4]). Нехай $1 \leq p, q < \infty$, $0 < \alpha < 1$. Тоді оператори $I_{\pm}^{\alpha}$ обмежені від $L_p(\mathbb{R})$ до $L_q(\mathbb{R})$ тоді і тільки тоді, коли $1 < p < \frac{1}{\alpha}$ та $q = p(1 - \alpha p)^{-1}$. Це означає, зокрема, що для будь-якого $1 < p < \frac{1}{\alpha}$ і $q = \frac{p}{1 - \alpha p}$, існує константа $C_{p,q,\alpha}$ така, що

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(u)| |x - u|^{\alpha-1} du \right)^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C_{p,q,\alpha} \|f\|_{L_p(\mathbb{R})}. \quad (2.1)$$

Теорема 2.2. Нехай $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – вимірна функція.

(i) Дробове інтегрування має таку напівгрупу властивість:

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} f = I_{a+}^{\alpha+\beta} f, \quad I_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\beta} f = I_{b-}^{\alpha+\beta} f$$

для $f \in L_1([a, b])$. Якщо $\alpha + \beta \geq 1$, тоді ці рівності виконуються в будь-якій точці $x \in (a, b)$, в протилежному випадку вони виконуються для майже всіх $x \in (a, b)$.

(ii)

$$I_{\pm}^{\alpha} I_{\pm}^{\beta} = I_{\pm}^{\alpha+\beta} f$$

для $f \in L_p(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta > 0$ та $\alpha + \beta < \frac{1}{p}$.

(iii) Нехай $f \in L_p([a, b])$, $g \in L_q([a, b])$, $p, q \geq 1$ і $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + \alpha$, або нехай $p > 1$, $q > 1$ та $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \alpha$. Тоді маємо наведену нижче формулу інтегрування частинами для дробових інтегралів:

$$\int_a^b g(x) (I_{a+}^{\alpha} f)(x) dx = \int_a^b f(x) (I_{b-}^{\alpha} g)(x) dx.$$

Нехай $f \in L_p(\mathbb{R})$, $g \in L_q(\mathbb{R})$, $p > 1$, $q > 1$ та $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \alpha$. Тоді

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) (I_{+}^{\alpha} f)(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) (I_{-}^{\alpha} g)(x) dx. \quad (2.2)$$

Доведення. Всі ці формули можна довести подібним чином, тому доведемо лише одну з напівгрупових властивостей:

$$\begin{aligned} & (I_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} f)(x) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\beta-1} \int_a^t (t-u)^{\alpha-1} f(u) du = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) \int_u^x (x-t)^{\beta-1} (t-u)^{\alpha-1} dt du = \\ &= \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(x)(x-u)^{\alpha+\beta-1} du = \\ &= (I_{a+}^{\alpha+\beta} f)(x). \end{aligned}$$

Лема 2.3. Нехай $0 < \alpha < 1$, $f \in L_p(\mathbb{R})(L_p([a, b]))$, $p \geq 1$ та $I_{\pm}^{\alpha} f = 0$. Тоді $f(x) = 0$ майже для всіх $x \in \mathbb{R}$ ($x \in [a, b]$).

Доведення. Розглянемо інтервал $[a, b]$. Нехай $\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt = 0$ майже для всіх $x \in [a, b]$. Тоді для будь-якого $r \in [a, b]$ за теоремою Фубіні

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^r (r-z)^{-\alpha} \int_a^z (z-t)^{\alpha-1} f(t) dt dz = \\ &= \int_a^r f(t) \int_t^r (r-z)^{-\alpha} (z-t)^{\alpha-1} dz dt = \\ &= \int_a^r f(t) dt \cdot B(\alpha, 1-\alpha), \end{aligned}$$

де $\int_a^r f(t) dt = 0$, отже, $f(t) = 0$ майже для всіх $x \in [a, b]$. $\square$

3 Гельдерова властивість дробових інтегралів

Нехай $C^{\lambda}([a, b])$ – множина гелдерових неперервних функцій $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ порядку λ , тобто

$$\begin{aligned} C^{\lambda}([a, b]) &= \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \|f\|_{\lambda} := \sup_{t \in [a, b]} |f(t)| \right. \\ &\quad \left. + \sup_{s, t \in [a, b]} |f(s) - f(t)| (t-s)^{-\lambda} < \infty \right\}. \end{aligned}$$

Іноді λ називають індексом Гельдера відповідної функції. Очевидно, що будь-яка функція індексу Гельдера λ на деякому інтервалі є одночасно функцією будь-якого меншого індексу Гельдера на цьому інтервалі (але не навпаки). Якщо індекс Гельдера дорівнює 1, то відповідна функція називається функцією Ліпшиця. Простір функцій Ліпшиця на інтервалі $[a, b]$ будемо позначати $Lip([a, b]) (= C^1([a, b]))$, щоб не плутати його з простором $C^{(1)}([a, b])$ неперервно диференційовних функцій. Індекс Гельдера не може перевищувати 1, крім випадку, коли функція є деякою сталою.

Спочатку доведемо, що дробовий інтеграл перетворює інтегровну функцію у функцію Гельдера. Точніше, справедливий наступний результат.

Лема 3.1. Нехай $1 \leq p \leq \infty$ та $\alpha \geq \frac{1}{p}$. Тоді $\mathbb{I}_{\pm}^{\alpha}(L_p([a, b])) \subset \mathbb{C}^{\lambda}([a, b])$ для будь-яких $-\infty < a < b < \infty$ та $0 < \lambda \leq \alpha - \frac{1}{p}$, якщо $\alpha \leq \frac{1}{p} + 1$ та $\mathbb{I}_{\pm}^{\alpha}(L_p([a, b])) \subset Lip([a, b])$, якщо $\alpha \geq \frac{1}{p} + 1$.

Доведення. Нехай $a \leq t_1 < t_2 \leq b$. Тоді, враховуючи, що припущення $\alpha p > 1$ еквівалентне нерівності $(\alpha - 1)q > -1$, тоді як припущення $\alpha \leq 1 + \frac{1}{p}$ еквівалентне нерівності $\alpha q - 2q + 1 < 0$, а також той факт, що для $\alpha q - 2q + 1 < 0$ $(u - t_1)^{\alpha q - 2q + 1} > u^{\alpha q - 2q + 1}$ і навпаки, ми можемо застосувати нерівності

$$\int_0^{t_1} (u - s)^{(\alpha - 2)q} ds \leq \frac{(u - t_1)^{\alpha q - 2q + 1}}{\alpha q - 2q + 1},$$

$$\alpha q - 2q + 1 < 0,$$

та

$$\int_0^{t_1} (u - s)^{(\alpha - 2)q} ds \leq \frac{u^{\alpha q - 2q + 1}}{\alpha q - 2q + 1},$$

$$\alpha q - 2q + 1 \geq 0,$$

та застосувати узагальнену нерівність Мінковського. Тоді у випадку $\alpha q - 2q + 1 < 0$ отримаємо оцінку

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha - 1} f(s) ds - \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha - 1} f(s) ds \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha - 1} f(s) ds \right| + \\ & + \left| \int_0^{t_1} ((t_2 - s)^{\alpha - 1} - (t_1 - s)^{\alpha - 1}) f(s) ds \right| \leq \\ & \leq \left(\int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{(\alpha - 1)q} ds \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L_p([a, b])} + \\ & + |1 - \alpha| \int_0^{t_1} \left(\int_{t_1}^{t_2} (u - s)^{\alpha - 2} du \right) |f(s)| ds \leq \\ & \leq \frac{(t_2 - t_1)^{\alpha - 1 + \frac{1}{q}}}{((\alpha - 1)q + 1)^{\frac{1}{q}}} \|f\|_{L_p([a, b])} + |1 - \alpha| \times \\ & \times \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^{t_1} (u - s)^{(\alpha - 2)q} ds \right)^{\frac{1}{q}} du \|f\|_{L_p([a, b])} \leq \\ & \leq \left(\frac{1}{((\alpha - 1)q + 1)^{\frac{1}{q}}} + \frac{|1 - \alpha|}{|(\alpha - 2)q + 1|^{\frac{1}{q}} \left(\alpha - \frac{1}{p} \right)} \right) \\ & \times (t_2 - t_1)^{\alpha - \frac{1}{p}} \|f\|_{L_p([a, b])}, \end{aligned}$$

а у випадку $\alpha q - 2q + 1 \geq 0$ отримуємо, що

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha - 1} f(s) ds - \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha - 1} f(s) ds \right| \leq \\ & \leq \left(\frac{(t_2 - t_1)^{\alpha - \frac{1}{p}}}{((\alpha - 1)q + 1)^{\frac{1}{q}}} + \frac{|1 - \alpha| b^{\alpha - 1 - 1/p}}{|(\alpha - 2)q + 1|^{\frac{1}{q}}} (t_2 - t_1) \right) \\ & \times \|f\|_{L_p([a, b])}. \end{aligned}$$

Порівнюючи степені $(t_2 - t_1)^{\alpha - \frac{1}{p}}$ та $t_2 - t_1$ маємо, що в цьому випадку

$$\left| \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha - 1} f(s) ds - \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha - 1} f(s) ds \right| \leq C(t_2 - t_1)$$

для деякого $C > 0$. $\square$

Тепер доведемо, що дробовий інтеграл збільшує індекс Гельдера функції, тобто має місце наступний результат.

Теорема 3.1. Нехай функція $\varphi \in \mathbb{C}^{\lambda}([a, b])$. Тоді для будь-якого $\alpha > 0$

$$I_{a+}^{\alpha}(\varphi(\cdot) - \varphi(a)) \in \mathbb{C}^{\lambda + \alpha}([a, b])$$

якщо $\lambda + \alpha \leq 1$ та

$$I_{a+}^{\alpha}(\varphi(\cdot) - \varphi(a)) \in Lip([a, b])$$

якщо $\lambda + \alpha > 1$.

Доведення. Нехтуючи сталим множником, розглянемо функцію

$$g(x) = \int_a^x (x - u)^{\alpha - 1} (\varphi(u) - \varphi(a)) du.$$

Тоді для будь-якого $a \leq x < y \leq b$ ми можемо вивести

$$\begin{aligned} g(y) - g(x) &= \int_x^y (y - u)^{\alpha - 1} (\varphi(u) - \varphi(x)) du + \\ &+ \int_x^y [-(z - x)^{\alpha - 1} (\varphi(x) - \varphi(z)) + \\ &+ (z - a)^{\alpha - 1} (\varphi(a) - \varphi(z)) + \\ &+ (\alpha - 1) \int_a^x (z - t)^{\alpha - 2} (\varphi(t) - \varphi(z)) dt] dz. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Отже, враховуючи, що для будь-яких $u \leq x \leq y$ та $\beta > 0$ маємо нерівності $(y - u)^{\beta} - (x - u)^{\beta} \leq (y - x)^{\beta}$ для $0 < \beta \leq 1$ та $(y - u)^{\beta} - (x -$

$u)^\beta \leq \beta(y-u)^{\beta-1}(y-x)$ для $1 < \beta$, ми можемо діяти наступним чином:

$$\begin{aligned} |g(y) - g(x)| &\leq C \int_x^y (y-u)^{\alpha-1}(u-x)du + \\ &+ C \int_x^y (z-x)^{\alpha-1}(z-x)^\lambda dz + \\ &+ C \int_x^y (z-a)^{\alpha-1}(z-a)^\lambda dz + \\ &+ C \int_x^y \int_a^x (z-t)^{\alpha-2}(z-t)^\lambda dt dz \leq \\ &\leq C(y-x)^{\alpha+\lambda} + C \int_x^y (z-a)^{\alpha+\lambda-1} dz + \\ &+ C \int_x^y \left| (z-x)^{\alpha+\lambda-1} - (z-a)^{\alpha+\lambda-1} \right| dz \leq \\ &\leq C(y-x)^{\alpha+\lambda} + C \left| (y-a)^{\alpha+\lambda} - (x-a)^{\alpha+\lambda} \right| \leq \\ &\begin{cases} \leq C(y-x)^{\alpha+\lambda}, & \text{if } \lambda + \alpha \leq 1 \\ \leq C(y-x)^{\alpha+\lambda}, & \text{if } \lambda + \alpha > 1, \end{cases} \end{aligned}$$

і теорему доведено. $\square$

4 Дробові інтеграли від квадратично-інтегровних функцій

Звертаємо увагу читача на те, що результати цього підрозділу сформульовані для $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$.

Лема 4.1. Нехай $f \in \mathbb{C}^{(1)}([a, b])$. Тоді для деякого $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ існує така функція $\varphi \in L_2([a, b])$ що $f = I_{a+(b-)}^\alpha \varphi$, тобто $\mathbb{C}^{(1)}([a, b]) \subset \mathbb{I}_{a+(b-)}^\alpha(L_2([a, b]))$. Те саме вірно, якщо ми замінімо $[a, b]$ на $\mathbb{R}$.

Доведення. Розглянемо компактний інтервал $[a, b]$. Запишемо формально співвідношення

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt, \quad (4.4)$$

помножимо на $(z-x)^{-\alpha}$ і проінтегруємо:

$$\begin{aligned} \int_a^z (z-x)^{-\alpha} f(x) dx &= \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^z (z-x)^{-\alpha} dx \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^z \varphi(t) \int_t^z (z-x)^{-\alpha} (x-t)^{\alpha-1} dx dt = \\ &= \frac{B(\alpha, 1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \varphi(t) dt = \Gamma(1-\alpha) \int_0^z \varphi(t) dt, \end{aligned}$$

звідки для майже всіх z

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dz} \left(\int_a^z (z-x)^{-\alpha} f(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dz} \left(\frac{(z-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} f(a) + \right. \\ &\quad \left. \int_a^z \frac{(z-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} f'(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(a)}{(z-a)^\alpha} + \int_a^z (z-x)^{-\alpha} f'(x) dx \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Якщо $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ тоді $\varphi \in L_2([a, b])$, відповідно до леми Lemma 2.2. Тому, дійсно, виконується (4.4), $\mathbb{C}^{(1)}([a, b]) \subset \mathbb{I}_{a+(b-)}^\alpha(L_2([a, b]))$. $\square$

Наслідок 4.1. Оскільки $\mathbb{C}^{(1)}([a, b])$ є щільним у $L_2([a, b])$, маємо, що простори $\mathbb{I}_{a+(b-)}^\alpha(L_2([a, b]))$ є щільними в $L_2([a, b])$ для будь-якого $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

Позначимо $\mathbb{H}_+^\alpha([a, b]) = \mathbb{I}_{a+}^\alpha(L_2([a, b]))$ ($\mathbb{H}_-^\alpha([a, b]) = \mathbb{I}_{b-}^\alpha(L_2([a, b]))$) розглядається аналогічно. Визначимо в $\mathbb{H}_\pm^\alpha([a, b])$ норму

$$\|I_{a+(b-)}^\alpha h\|_{\mathbb{H}_\pm^\alpha([a, b])} := \|h\|_{L_2([a, b])}.$$

Лема 4.2. Для всіх $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ простори $\mathbb{H}_\pm^\alpha([a, b])$ з нормою $\|\cdot\|_{\mathbb{H}_\pm^\alpha([a, b])}$ є гільбертовими.

Доведення. Досить розглянути деяку послідовність Коші, наприклад, $I_{a+}^\alpha h_n$, і встановити її збіжність. Ми маємо, що h_n є послідовністю Коші в $L_2([a, b])$, отже, існує $f \in L_2([a, b])$ така що $\|f_n - f\|_{L_2([a, b])} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Тоді $I_{a+}^\alpha f \in \mathbb{H}_+^\alpha([a, b])$ та $I_{a+}^\alpha f_n \rightarrow I_{a+}^\alpha f, n \rightarrow \infty$ в $\mathbb{H}_+^\alpha([a, b])$. $\square$

5 Звуження дробових інтегралів

Нехай $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – вимірна функція. Розглянемо її звуження на деякий інтервал $[a, b]$, де $-\infty \leq a < b \leq \infty$:

$$\varphi_{a,b}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Зокрема, позначимо $\varphi_+(x) = \varphi_{0,+\infty}(x)$.

Теорема 5.1. Нехай $\varphi \in L_p(\mathbb{R})$ для деякого $p \in (1, \frac{1}{\alpha})$. Тоді

$$(I_+^\alpha \varphi)_+(x) = (I_+^\alpha \varphi)(x), x \in \mathbb{R},$$

де $\phi \in L_p(\mathbb{R})$ і має вигляд

$$\phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) + \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{t}{x}\right)^\alpha \frac{\varphi(-t)}{x+t} dt, & x > 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Доведення. Для початку, доведемо, що така функція $\phi \in L_p(\mathbb{R})$. Дійсно,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\phi(x)|^p dx &\leq C \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^p dx + \\ &+ C \int_0^\infty x^{-\alpha p} \left| \int_0^\infty \frac{t^\alpha \varphi(-t)}{t+x} dt \right|^p dx. \end{aligned}$$

Тепер достатньо знайти скінченну верхню межу для другого інтеграла. З цією метою застосуємо до нього узагальнену нерівність Мінковського. Враховуючи, що $\alpha < 1/p$, отримуємо наступну оцінку:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{-\alpha p} dx \left(\int_0^\infty \frac{t^\alpha |\varphi(-t)| dt}{t+x} \right)^p &= \\ &= \int_0^\infty dx \left(\int_0^\infty \frac{z^\alpha |\varphi(-xz)| dz}{1+z} \right)^p \leq \\ &\leq C \left(\int_0^\infty \frac{z^\alpha}{1+z} \left(\int_0^\infty |\varphi(-xz)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p \\ &= C \left(\int_0^\infty \frac{z^{\alpha-\frac{1}{p}}}{1+z} dz \right)^p \|\varphi\|_{L_p(\mathbb{R})}^p < \infty. \end{aligned}$$

Крім того, $(I_+^\alpha \phi)(x) = 0$ для $x \leq 0$. Розглянемо $x > 0$ і використаємо співвідношення (7.10):

$$\begin{aligned} (I_+^\alpha \phi)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt = \\ &+ \frac{\sin \alpha \pi}{\pi \Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \left(\int_0^\infty \left(\frac{z}{t}\right)^\alpha \frac{\varphi(-z)}{z+t} dz \right) dt \\ &= (I_{0+}^\alpha \varphi) + \frac{\sin \pi \alpha}{\pi \Gamma(\alpha)} \times \\ &\times \int_{-\infty}^0 (-z)^\alpha \varphi(z) dz \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1} t^{-\alpha}}{t-z} dt = \\ &= (I_{0+}^\alpha \varphi) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^0 (-z)^\alpha \varphi(z) \frac{(x-z)^{\alpha-1}}{(-z)^\alpha} dz = \\ &= (I_{0+}^\alpha \varphi) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^0 (x-z)^{\alpha-1} \varphi(z) dz = \\ &= (I_+^\alpha \varphi)(x). \end{aligned}$$

6 Неперервність дробових інтегралів відносно α

Розглянемо поведінку дробових інтегралів як функцій від α .

Теорема 6.1. Нехай $\varphi \in L_p([a, b])$ для деякого $p \geq 1$. Тоді дробові інтеграли $(I_{a+(b-)}^\alpha \varphi)$ неперервні по α на $[0, \infty)$ в $L_p([a, b])$. Більше того, вони неперервні на $(0, \infty)$ як функції з $L_p([a, b])$ в $L_p([a, b])$.

Доведення. Нехай $\alpha, \alpha_0 > 0$. Розглянемо різницю

$$\begin{aligned} (I_{a+}^{\alpha_0} \varphi)(x) - (I_{a+}^\alpha \varphi)(x) &= \\ &= \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right) \int_a^x \varphi(t) (x-t)^{\alpha_0-1} dt + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x ((x-t)^{\alpha_0-1} - (x-t)^{\alpha-1}) \varphi(t) dt =: \\ &=: (I\varphi)(x) + (J\varphi)(x). \end{aligned}$$

Оцінимо окремо $\|(I\varphi)\|_{L_p([a,b])}$ та $\|(J\varphi)\|_{L_p([a,b])}$. Згідно з лемою 2.2,

$$\|(I\varphi)\|_{L_p([a,b])} \leq \left| 1 - \frac{\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha)} \right| \frac{(b-a)^{\alpha_0}}{\Gamma(1+\alpha_0)} \|\varphi\|_{L_p([a,b])}. \quad (6.6)$$

Не обмежуючи загальності, припустимо, що функція φ набуває значення 0 за межами інтервалу $[a, b]$. Тоді

$$\begin{aligned} |J(x)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{x-a} (z^{\alpha_0-1} - z^{\alpha-1}) \varphi(x-z) dz \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{b-a} z^{\alpha_0-1} |1 - z^{\alpha-\alpha_0}| |\varphi(x-z)| dz. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Використовуючи нерівність Мінковського, отримаємо оцінку

$$\begin{aligned} \|(J\varphi)\|_{L_p([a,b])} &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{b-a} |1 - z^{\alpha-\alpha_0}| z^{\alpha_0-1} dz \times \\ &\times \left(\int_a^b |\varphi(x-z)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{b-a} |1 - z^{\alpha-\alpha_0}| z^{\alpha_0-1} dt \|\varphi\|_{L_p([a,b])}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

З (6.6) та (6.8) маємо

$$\begin{aligned} \|((I_{a+}^\alpha - I_{a+}^{\alpha_0})\varphi)\|_{L_p([a,b])} &\leq \\ &\leq \left| 1 - \frac{\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha)} \right| \frac{(b-a)^{\alpha_0}}{\Gamma(1+\alpha_0)} \|\varphi\|_{L_p([a,b])} + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{b-a} |1 - z^{\alpha-\alpha_0}| z^{\alpha_0-1} dz \|\varphi\|_{L_p([a,b])}. \end{aligned}$$

□

За теоремою Лебега про мажоровану збіжність в останньому інтегралі можна здійснити граничний перехід при $\alpha \rightarrow \alpha_0$. Очевидно, $\left|1 - \frac{\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha)}\right| \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow \alpha_0$. Отже,

$$\frac{\|(I_{a+}^\alpha - I_{a+}^{\alpha_0})\|_{L_p([a,b])}}{\|\varphi\|_{L_p([a,b])}} = 0.$$

Нехай тепер $\alpha_0 = 0$. Наше завдання – довести, що

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|(I_{a+}^\alpha \varphi) - \varphi\|_{L_p([a,b])} = 0.$$

Справді, аналогічно (6.7), перепишемо різницю наступним чином:

$$\begin{aligned} (I_{a+}^\alpha \varphi)(x) - \varphi(x) &= \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} t^{\alpha-1} \varphi(x-t) dt - \varphi(x) = \\ &= \frac{\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^{x-a} (\varphi(x-t) - \varphi(x)) t^{\alpha-1} dt + \\ &+ \varphi(x) \left(\frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - 1 \right) = (K\varphi)(x) + (L\varphi)(x), \end{aligned}$$

звідси $\|(I_{a+}^\alpha \varphi) - \varphi\|_{L_p([a,b])} \leq \|(K\varphi)\|_{L_p([a,b])} + \|(L\varphi)\|_{L_p([a,b])}$. Очевидно,

$$\|(L\varphi)\|_{L_p([a,b])}^p \leq \int_a^b |\varphi(x)|^p \left| \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - 1 \right|^p dx.$$

За теоремою Лебега про мажоровану збіжність в останньому інтегралі можна здійснити граничний перехід при $\alpha \rightarrow 0$. Отже, $\lim_{\alpha \rightarrow 0+} \|(L\varphi)\|_{L_p([a,b])}^p = 0$. Щоб оцінити $(K\varphi)$, припустимо, що φ – неперервно диференційовна. Тоді

$$|(K\varphi)(x)| \leq \frac{\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^{b-a} t^\alpha \max_{t \in [a,b]} |\varphi'(t)| dt \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0$$

рівномірно по x . Крім того, можна апроксимувати функцію $\varphi(x)$ послідовністю неперервно диференційовних функцій $\varphi_n(x)$ за нормою в $L_p([a,b])$. Тоді

$$\begin{aligned} \|(K\varphi)\|_{L_p([a,b])} &\leq \|(K(\varphi - \varphi_n))\|_{L_p([a,b])} + \\ &+ \|(K\varphi_n)\|_{L_p([a,b])}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Застосуємо узагальнену нерівність Мінковського до першого доданка в (6.9), матимемо

$$\|K(\varphi - \varphi_n)\|_{L_p([a,b])} \leq \frac{2(b-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \|\varphi - \varphi_n\|_{L_p([a,b])} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, рівномірно при $\alpha \in [0, 1]$. Щодо другого доданка, то для довільного $x \in [a, b]$ та для довільного фіксованого n маємо

$$\begin{aligned} |(K\varphi_n)(x)| &\leq \frac{\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \times \\ &\times \int_0^{b-a} t^\alpha \max |\varphi'_n(t)| dt \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

при $\alpha \rightarrow 0$, звідки $\|(K\varphi_n)\|_{L_p([a,b])} \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$, що й доводить теорему. $\square$

Зауваження 6.1. За теоремою 2.7 [4], збіжність

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (I_{a+}^\alpha \varphi)(x) = \varphi(x)$$

виконується для майже всіх $x \in [a, b]$.

Розглянемо деякі приклади обчислення дробових інтегралів.

7 Обчислення деяких дробових інтегралів

Приклад 7.1. Нехай $f(x) = x^\beta, \beta > -1$. Тоді

$$\begin{aligned} (I_{0+}^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^\beta dt = \\ &= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Приклад 7.2. Нехай $f(x) = e^{\lambda x}, \lambda > 0$. Тоді

$$\begin{aligned} (I_{+}^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{\alpha-1} e^{\lambda t} dt = \\ &= \frac{e^{\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-\lambda z} z^{\alpha-1} dz = \\ &= \frac{e^{\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{\alpha-1} d\left(\frac{u}{\lambda}\right) = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^\alpha}. \end{aligned}$$

Приклад 7.3. Нехай $a = 0, b = 1, \beta > 0, \gamma > \beta$, $f(s) = s^{\beta-1}(1-s)^{-\gamma}$. Тоді для довільного $t \in$

(0, 1) мають місце наступні перетворення:

$$\begin{aligned}
 (I_{0+}^{\gamma-\beta} f)(t) &= \\
 &= \int_0^t (t-s)^{\gamma-\beta-1} s^{\beta-1} (1-s)^{-\gamma} ds = |s=tz| = \\
 &= t^{-1} \int_0^1 (1-z)^{\gamma-\beta-1} z^{\beta-1} \left(\frac{1}{t} - z\right)^{-\gamma} dz = \\
 &= \left| z = \frac{u/t}{1/t - 1 + u} \right| = \\
 &= t^{-1} \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{1-t+tu}\right)^{\gamma-\beta-1} \times \\
 &\times \left(\frac{u}{1-t+tu}\right)^{\beta-1} \left(\frac{1}{t} \frac{u}{1-t+tu}\right)^{-\gamma} \times \\
 &\times \frac{1-t+tu-ut}{(1-t+tu)^2} du = \\
 &= t^{-1} \int_0^1 \left(\frac{1-t+tu-u}{1-t+tu}\right)^{\gamma-\beta-1} \times \\
 &\times \frac{u^{\beta-1}}{(1-t+tu)^{\beta-1}} \frac{(1-t)^\gamma}{t^{-\gamma}(1-t+tu)^{-\gamma}} \times \\
 &\times \frac{1-t}{(1-t+tu)^2} du = t^{\gamma-1} \times \\
 &\times \int_0^1 (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-u)^{\gamma-\beta-1} u^{\beta-1} (1-t)^{-\gamma+1} \times \\
 &\times t^\gamma (1-t+tu)^{-\gamma+\beta+1-\beta+1+\gamma-2} du = \\
 &= t^{\gamma-1} (1-t)^{-\beta} \int_0^1 (1-u)^{\gamma-\beta-1} u^{\beta-1} du = \\
 &= t^{\gamma-1} (1-t)^{-\beta} B(\gamma-\beta, \beta) = \\
 &= \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)} \frac{t^{\gamma-1}}{(1-t)^\beta}.
 \end{aligned}$$

Як наслідок, для $f(s) = s^{\beta-1}(b-s)^{-\gamma}$, $b > 1$

$$\begin{aligned}
 &\int_0^1 (1-s)^{\gamma-\beta-1} s^{\beta-1} (b-s)^{-\gamma} ds = \\
 &= b^{-1} \int_0^{1/b} (1-z)^{-\gamma} z^{\beta-1} (1/b-s)^{\gamma-\beta-1} dz \\
 &= b^{-1} B(\gamma-\beta, \beta) \frac{(1/b)^{\gamma-1}}{(1-1/b)^\beta} = \\
 &= b^{\beta-\gamma} (b-1)^{-\beta} B(\gamma-\beta, \beta).
 \end{aligned}$$

Тому для довільних $x > 0, a > 0, 0 < \alpha < 1$

$$\begin{aligned}
 &\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{-\alpha} (t+a)^{-1} dt = \\
 &= x^{-1} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} (s+a/x)^{-1} ds \\
 &= x^{-1} \int_0^1 (1-s)^{-\alpha} s^{\alpha-1} (a/x + 1-s)^{-1} ds = \\
 &= |\gamma=1, \beta=\alpha, b=a/x+1| \\
 &= x^{-1} (a/x+1)^{\alpha-1} \left(\frac{a}{x}\right)^{-\alpha} B(1-\alpha, \alpha) = \\
 &= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \frac{(a+x)^{\alpha-1}}{a^\alpha}.
 \end{aligned} \tag{7.10}$$

Приклад 7.4. Нехай $W = \{W_t, t \geq 0\}$ – вінерівський процес. Оскільки траєкторії W неперервні м. н., для довільного $\alpha > 0$ існує дробовий інтеграл

$$\begin{aligned}
 (I_{0+}^\alpha W)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} W_t dt = \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^x (x-t)^\alpha dW_t, x \geq 0,
 \end{aligned}$$

і останній інтеграл є вінерівським, тобто інтегралом від не випадкової функції відносно вінерівського процесу. Це гауссовий процес з середнім

$$E(I_{0+}^\alpha W)(x) = 0$$

і коваріацією

$$\begin{aligned}
 cov((I_{0+}^\alpha W)(x), (I_{0+}^\alpha W)(y)) &= \\
 &= \frac{1}{\Gamma^2(\alpha+1)} \int_0^{x \wedge y} (x-t)^\alpha (y-t)^\alpha dt,
 \end{aligned}$$

для довільних $x, y \geq 0$.

Інтеграл $(I_{0+}^\alpha W)$ – частковий випадок гауссовських процесів, які є інтегралами з сингулярними ядрами. Детально вони розглянуті в роботах [1, 2, 3, 5]. Крім того, випадковий процес $X_x = \int_0^x (x-t)^\alpha dW_t, x \geq 0$ існує не тільки для $\alpha > 0$, але і для $\alpha > -1/2$, оскільки його існування залежить від збіжності інтеграла $\int_0^x (x-t)^{2\alpha} dt$. Процес X називається дробовим броунівським рухом Ліувілля.

Висновки

В статті розглянуто базові властивості дробових інтегралів, причому доведення наведено у найбільш простій і прозорій формі. Для подальшого знайомства з темою рекомендуємо книги та статті [4] – [10].

Список використаних джерел

1. *Baudoin F.* Equivalence of Volterra processes / F. Baudoin, D. Nualart // *Stochastic Process. Appl.* (107), 2003. – 2. – P. 327–350.
2. *Mishura Yu.* Gaussian processes with Volterra kernels / Yu. Mishura, G. Shevchenko, S. Shklyar // URL: <https://arxiv.org/pdf/2001.03405.pdfmath>.
3. *Mishura Yu.* Gaussian Volterra processes with power-type kernels / Yu. Mishura, S. Shklyar // *Mod. Stoch. Theory Appl.*, 2022.
4. *Samko S. G.* Fractional integrals and derivatives (Vol. 1) / S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev. – Yverdon-les-Bains, Switzerland: Gordon and Breach science publishers, 1993.
5. *Sottinen T.* Stochastic Analysis of Gaussian Processes via Fredholm Representation / T. Sottinen, L. Viitasaari // *Int. Journ. of Stoch. An.* 2016. – DOI: 10.1155/2016/8694365, URL: <http://dx.doi.org/10.1155/2016/8694365>.
6. *Stein E. M.* Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces (PMS-32), Volume 32 / E. M. Stein, G. Weiss. – Princeton University press, 2016.
7. *Das S.* Functional Fractional Calculus – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Springer, Berlin, Heidelberg, 2011. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-20545-3>
8. *Butzer P.L.* An introduction to fractional calculus / P.L. Butzer, U. Westphal // *Applications of Fractional Calculus in Physics*, pp. 1-85, 2000. URL: <https://doi.org/10.1142/9789812817747.0001>
9. *Anastassiou G. A.* Constructive Fractional Analysis with Applications – Springer Nature, 2021.
10. *Anastassiou G. A.* Generalized Fractional Calculus: New Advancements and Applications – Springer, 2021.

References

1. *BAUDOIN, F., NUALART, D.* (2003) Equivalence of Volterra processes // *Stochastic Processes and their Applications*. Vol. 107, No. 2, p. 327–350.
2. *MISHURA, YU., SHEVCHENKO, G., SHKLYAR, S.* Gaussian processes with Volterra kernels. URL: <https://arxiv.org/pdf/2001.03405.pdfmath>.
3. *MISHURA, YU., SHKLYAR, S.* (2022) Gaussian Volterra processes with power-type kernels. // *Mod. Stoch. Theory Appl.*
4. *SAMKO, S. G., KILBAS, A. A., MARICHEV, O. I.* (1993) Fractional integrals and derivatives (Vol. 1). *Yverdon-les-Bains, Switzerland: Gordon and Breach science.*
5. *SOTTINEN, T., VIITASAARI, L.* (2016) Stochastic Analysis of Gaussian Processes via Fredholm Representation // *International Journal of Stochastic Analysis*. DOI: 10.1155/2016/8694365, URL: <http://dx.doi.org/10.1155/2016/8694365>.
6. *STEIN, E. M., WEISS, G.* (2016) Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces (PMS-32), Volume 32. *Princeton University press.*
7. *DAS S.* (2011) Functional Fractional Calculus. – *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2011. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-20545-3>
8. *BUTZER, P.L., WESTPHAL, U.* (2000) An introduction to fractional calculus // *Applications of Fractional Calculus in Physics*, pp. 1-85. URL: <https://doi.org/10.1142/9789812817747.0001>
9. *ANASTASSIOUS, G. A.* (2021) Constructive Fractional Analysis with Applications. *Springer Nature.*
10. *ANASTASSIOUS, G. A.* (2021) Generalized Fractional Calculus: New Advancements and Applications. *Springer.*

Received: 11.01.2022

УДК 519.21

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/1.2>

О. Ю. Масютка¹, к. ф.-м. н.
І. І. Голіченко², к. ф.-м. н.
М. П. Моклячук¹, д. ф.-м. н., проф.

Про задачу оцінювання стаціонарних процесів неперервного часу за спостереженнями у спеціальних множинах точок

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул. Володимирська 64

e-mail: omasyutka@gmail.com

e-mail: moklyachuk@gmail.com

² Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут Ігоря Сікорського", м. Київ 03056, Україна

e-mail: idubovetska@gmail.com

O. Yu. Masyutka¹, Ph.D
I. I. Golichenko², Ph.D
M. P. Moklyachuk¹, Dr.Sci., Prof.

On estimation problem for continuous time stationary processes from observations in special sets of points

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 64 Volodymyrska Str., Kyiv 01601, Ukraine

e-mail: omasyutka@gmail.com

e-mail: moklyachuk@gmail.com

² National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv 03056, Ukraine

e-mail: idubovetska@gmail.com

Досліджується задача оптимального оцінювання лінійних функціоналів від невідомих значень стаціонарного стохастичного процесу за спостереженнями процесу у спеціальних множинах точок. Знайдені формули для обчислення значення середньокваратичної похибки та спектральної характеристики оптимальної лінійної оцінки функціоналів за умови спектральної визначеності, коли спектральна щільність процесу точно відома. У випадку, коли спектральна щільність процесу точно невідома, а задаються лише деякі класи допустимих спектральних щільностей, застосовується мінімаксно-робастний метод. Знайдені формули для визначення найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксних спектральних характеристик для оптимального лінійного оцінювання функціоналів для конкретних класів спектральних щільностей.

Ключові слова: стаціонарний стохастичний процес, мінімаксно-робастна оцінка, найменш сприятлива спектральна щільність, мінімаксно-робастні спектральні характеристики.

The problem of the mean-square optimal estimation of the linear functionals which depend on the unknown values of a stochastic stationary process from observations of the process with missings is considered. Formulas for calculating the mean-square error and the spectral characteristic of the optimal linear estimate of the functionals are derived under the condition of spectral certainty, where the spectral density of the process is exactly known. The minimax (robust) method of estimation is applied in the case where the spectral density of the process is not known exactly while some sets of admissible spectral densities are given. Formulas that determine the least favourable spectral densities and the minimax spectral characteristics are derived for some special sets of admissible densities.

Key Words: stationary stochastic process, minimax-robust estimate, least favorable spectral density, minimax-robust spectral characteristics.

Introduction

Investigation of the properties of stationary stochastic processes plays an important role both in the theory of stochastic processes and application it to the practice. A great number of scientific papers deals with the problem of estimation of unknown values of a stationary process. The formulation and effective methods of solution

of the problems of interpolation, extrapolation and filtering of stationary sequences and processes belong to A. N. Kolmogorov [16]. Further analysis can be found in the works by Yu. A. Rozanov [37] and E. J. Hannan [11]. A significant contribution to the theory of forecasting was made by H. Wold [41, 42], T. Nakazi [33]. Constructive methods of solution of estimation problems for stationary

stochastic sequences and processes were developed by N. Wiener [40] and A. M. Yaglom [43].

The basic assumption of most of the methods of estimation of the unobserved values of stochastic processes is that the spectral densities of the considered stochastic processes are exactly known. However, in practice, these methods are not applicable since the complete information on the spectral densities is impossible in most cases. In order to solve the problem parametric or nonparametric estimates of the unknown spectral densities are found. Then, one of traditional estimation methods is applied, provided that the selected densities are the true ones. This procedure can result in significant increasing of the value of error as K. S. Vastola and H. V. Poor [39] have demonstrated with the help of some examples. To avoid this effect one can search the estimates which are optimal for all densities from a certain class of admissible spectral densities. These estimates are called minimax since they minimize the maximum value of the error. The paper by Ulf Grenander [10] should be marked as the first one where this approach to extrapolation problem for stationary processes was proposed.

Several models of spectral uncertainty and minimax-robust methods of data processing can be found in the survey paper by S. A. Kassam and H. V. Poor [15]. J. Franke [5], J. Franke and H. V. Poor [6] investigated the minimax extrapolation and filtering problems for stationary sequences with the help of convex optimization methods. This approach makes it possible to find equations that determine the least favorable spectral densities for different classes of densities.

A great amount of papers by M. Moklyachuk [22] – [25] is dedicated to the investigation of problems of the optimal linear estimation of functionals which depend on unknown values of stationary sequences and processes. In papers by M. Moklyachuk and A. Masyutka a minimax technique of the estimation for vector-valued stationary stochastic processes is proposed [21], [26]–[28]. Methods of solution of problems of interpolation, extrapolation and filtering problems for periodically correlated stochastic processes were developed by M. Moklyachuk and I. Dubovetska [4, 8]. Estimation problems for functionals which depend on unknown values of stochastic processes with stationary increments were investigated by M. Luz and M. Moklyachuk

[17]–[20]. The problem of interpolation of a stationary sequence with missing values was investigated by M. Moklyachuk and M. Sidei [29] – [32].

Prediction of stationary processes with missing observations was investigated in papers by P. Bondon [1, 2], Y. Kasahara, M. Pourahmadi and A. Inoue [14, 34], R. Cheng, A. G. Miamee, M. Pourahmadi [3]. The problem of interpolation of stationary sequences was considered in the paper of H. Salehi [38].

In this paper we deal with the problem of the mean-square optimal linear estimation of the functionals

$$\begin{aligned} A_1\xi &= \int_{-\infty}^{-M} a(t)\xi(t)dt + \int_0^T a(t)\xi(t)dt, \\ A_2\xi &= \int_0^T a(t)\xi(t)dt + \int_{T+N}^{\infty} a(t)\xi(t)dt, \\ A_3\xi &= \int_{-\infty}^{-M} a(t)\xi(t)dt + \int_0^T a(t)\xi(t)dt + \int_{T+N}^{\infty} a(t)\xi(t)dt, \\ A_4\xi &= \int_{-M-M_1}^{-M} a(t)\xi(t)dt + \int_0^T a(t)\xi(t)dt, \\ A_5\xi &= \int_0^T a(t)\xi(t)dt + \int_{T+N}^{T+N+N_1} a(t)\xi(t)dt, \\ A_6\xi &= \int_{-M-M_1}^{-M} a(t)\xi(t)dt + \\ &+ \int_0^T a(t)\xi(t)dt + \int_{T+N}^{T+N+N_1} a(t)\xi(t)dt, \end{aligned}$$

which depend on the unknown values of a stochastic stationary process $\xi(t)$ from observations of the process $\xi(t) + \eta(t)$ at points $t \in \mathbb{R} \setminus S_k$, respectively, where

$$S_1 = [-\infty; -M] \cup [0; T], \quad S_2 = [0; T] \cup [T+N; \infty],$$

$$S_3 = S_1 \cup S_2, \quad S_4 = [-M-M_1; -M] \cup [0; T],$$

$$S_5 = [0; T] \cup [T+N; T+N+N_1], \quad S_6 = S_4 \cup S_5.$$

The case of spectral certainty as well as the case of spectral uncertainty are considered. Formulas for calculating the spectral characteristic and the mean square error of the optimal linear estimate

of the functionals are derived under the condition that spectral densities of the processes are exactly known. In the case of spectral uncertainty, where the spectral densities are not exactly known but a set of admissible spectral densities is given, the minimax method is applied. Formulas for determination the least favorable spectral densities and the minimax-robust spectral characteristics of the optimal estimates of the functionals are proposed for some specific classes of admissible spectral densities.

1 Classical interpolation problem for stationary processes

Let $\xi(t), t \in \mathbb{R}$, and $\eta(t), t \in \mathbb{R}$, be uncorrelated stationary stochastic processes with zero first moments $E\xi(t) = 0$, $E\eta(t) = 0$. Correlation functions

$$R_\xi(t) = E\xi(t+s)\overline{\xi(s)}, \quad R_\eta(t) = E\eta(t+s)\overline{\eta(s)}$$

of stationary processes $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ and $\eta(t), t \in \mathbb{R}$, respectively, admit the spectral decomposition [7]

$$R_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} F(d\lambda), \quad R_\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} G(d\lambda),$$

where $F(d\lambda)$ and $G(d\lambda)$ are spectral measures of processes $\xi(t)$ and $\eta(t)$, respectively. Consider stationary stochastic processes $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ and $\eta(t), t \in \mathbb{R}$ with absolutely continuous spectral measures $F(d\lambda)$, $G(d\lambda)$ and correlation functions of the form

$$R_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} f(\lambda) d\lambda, \quad R_\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} g(\lambda) d\lambda,$$

where $f(\lambda)$ and $g(\lambda)$ are spectral densities of processes $\xi(t)$ and $\eta(t)$, respectively, and the minimality condition holds true

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\gamma_k(\lambda)|^2}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda < \infty, \quad (1)$$

where

$$\begin{aligned} \gamma_1(\lambda) &= \int_{-\infty}^{-M} \alpha_1(t) e^{it\lambda} dt + \int_0^T \alpha_1(t) e^{it\lambda} dt, \\ \gamma_2(\lambda) &= \int_0^T \alpha_2(t) e^{it\lambda} dt + \int_{T+N}^{\infty} \alpha_2(t) e^{it\lambda} dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_3(\lambda) &= \int_{-\infty}^{-M} \alpha_3(t) e^{it\lambda} dt + \\ &+ \int_0^T \alpha_3(t) e^{it\lambda} dt + \int_{T+N}^{\infty} \alpha_3(t) e^{it\lambda} dt, \end{aligned}$$

$$\gamma_4(\lambda) = \int_{-M-M_1}^{-M} \alpha_4(t) e^{it\lambda} dt + \int_0^T \alpha_4(t) e^{it\lambda} dt,$$

$$\gamma_5(\lambda) = \int_0^T \alpha_5(t) e^{it\lambda} dt + \int_{T+N}^{T+N+N_1} \alpha_5(t) e^{it\lambda} dt,$$

$$\begin{aligned} \gamma_6(\lambda) &= \int_{-M-M_1}^{-M} \alpha_6(t) e^{it\lambda} dt + \\ &+ \int_0^T \alpha_6(t) e^{it\lambda} dt + \int_{T+N}^{T+N+N_1} \alpha_6(t) e^{it\lambda} dt \end{aligned}$$

are nontrivial functions of the exponential type. Under this condition the error-free estimation is impossible (see, for example, [37]).

Processes $\xi(t)$ and $\eta(t)$ admit the spectral decomposition [13]

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} Z_\xi(d\lambda), \quad \eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} Z_\eta(d\lambda), \quad (2)$$

where $Z_\xi(d\lambda)$ and $Z_\eta(d\lambda)$ are the orthogonal stochastic measures that correspond to spectral functions $F(d\lambda)$ and $G(d\lambda)$. The following properties hold true

$$EZ_\xi(\Delta_1)\overline{Z_\xi(\Delta_2)} = F(\Delta_1 \cap \Delta_2) = \int_{\Delta_1 \cap \Delta_2} f(\lambda) d\lambda,$$

$$EZ_\eta(\Delta_1)\overline{Z_\eta(\Delta_2)} = G(\Delta_1 \cap \Delta_2) = \int_{\Delta_1 \cap \Delta_2} g(\lambda) d\lambda.$$

Consider the problem of the mean-square optimal linear estimation of the functionals

$$A_1\xi = \int_{-\infty}^{-M} a(t)\xi(t)dt + \int_0^T a(t)\xi(t)dt,$$

$$A_2\xi = \int_0^T a(t)\xi(t)dt + \int_{T+N}^{\infty} a(t)\xi(t)dt,$$

$$\begin{aligned}
 A_3\xi &= \int_{-\infty}^{-M} a(t)\xi(t)dt + \int_0^T a(t)\xi(t)dt + \int_{T+N}^{\infty} a(t)\xi(t)dt, & A_6(\lambda) &= \int_{-M-M_1}^{-M} a(t)e^{it\lambda}dt + \\
 A_4\xi &= \int_{-M-M_1}^{-M} a(t)\xi(t)dt + \int_0^T a(t)\xi(t)dt, & &+ \int_0^T a(t)e^{it\lambda}dt + \int_{T+N}^{T+N+N_1} a(t)e^{it\lambda}dt. \\
 A_5\xi &= \int_0^T a(t)\xi(t)dt + \int_{T+N}^{T+N+N_1} a(t)\xi(t)dt, \\
 A_6\xi &= \int_{-M-M_1}^{-M} a(t)\xi(t)dt + \\
 &+ \int_0^T a(t)\xi(t)dt + \int_{T+N}^{T+N+N_1} a(t)\xi(t)dt,
 \end{aligned}$$

which depend on the unknown values of a stochastic stationary process $\xi(t)$ from observations of the process $\xi(t) + \eta(t)$ at points $t \in \mathbb{R} \setminus S_k$, respectively, where

$$\begin{aligned}
 S_1 &= [-\infty; -M] \cup [0; T], \quad S_2 = [0; T] \cup [T+N; \infty], \\
 S_3 &= S_1 \cup S_2, \quad S_4 = [-M-M_1; -M] \cup [0; T], \\
 S_5 &= [0; T] \cup [T+N; T+N+N_1], \quad S_6 = S_4 \cup S_5.
 \end{aligned}$$

Making use of spectral decomposition (2) of stationary process $\xi(t)$ we can write the functionals $A_k\xi$ in the following form $A_k\xi = \int_{-\infty}^{\infty} A_k(\lambda)Z_\xi(d\lambda)$ where

$$\begin{aligned}
 A_1(\lambda) &= \int_{-\infty}^{-M} a(t)e^{it\lambda}dt + \int_0^T a(t)e^{it\lambda}dt, \\
 A_2(\lambda) &= \int_0^T a(t)e^{it\lambda}dt + \int_{T+N}^{\infty} a(t)e^{it\lambda}dt, \\
 A_3(\lambda) &= \int_{-\infty}^{-M} a(t)e^{it\lambda}dt + \int_0^T a(t)e^{it\lambda}dt + \int_{T+N}^{\infty} a(t)e^{it\lambda}dt, \\
 A_4(\lambda) &= \int_{-M-M_1}^{-M} a(t)e^{it\lambda}dt + \int_0^T a(t)e^{it\lambda}dt, \\
 A_5(\lambda) &= \int_0^T a(t)e^{it\lambda}dt + \int_{T+N}^{T+N+N_1} a(t)e^{it\lambda}dt,
 \end{aligned}$$

Denote by $\hat{A}_k\xi$ the optimal linear estimate of the functional $A_k\xi$ from observations of the process $\xi(t) + \eta(t)$ at points $t \in \mathbb{R} \setminus S_k$ and by $\Delta_k(F, G) = E|A_k\xi - \hat{A}_k\xi|^2$ the mean-square error of the estimate $\hat{A}_k\xi$. Since spectral densities of stationary processes $\xi(t)$ and $\eta(t)$ are known, we can use the method of orthogonal projections in Hilbert spaces [16] to find the estimate $\hat{A}_k\xi$.

Consider values $\xi(t)$ and $\eta(t)$ as elements of the Hilbert space $H = L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ generated by random variables ξ with 0 mathematical expectations, $E\xi = 0$, finite variations, $E|\xi|^2 < \infty$, and inner product $(\xi, \eta) = E\xi\bar{\eta}$. Denote by $H^k(\xi + \eta)$ the closed linear subspace generated by elements $\{\xi(t) + \eta(t) : t \in \mathbb{R} \setminus S_k\}$ in the Hilbert space $H = L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Denote by $L_2(f + g)$ the Hilbert space of functions $a(\lambda)$ such that

$$\int_{-\infty}^{\infty} |a(\lambda)|^2(f(\lambda) + g(\lambda))d\lambda < \infty.$$

Denote by $L_2^k(f + g)$ the subspace of $L_2(f + g)$ generated by functions $\{e^{it\lambda}, t \in \mathbb{R} \setminus S_k\}$.

The mean-square optimal linear estimate $\hat{A}_k\xi$ of the functional $A_k\xi$ can be represented in the form

$$\hat{A}_k\xi = \int_{-\infty}^{\infty} h_k(\lambda)(Z_\xi(d\lambda) + Z_\eta(d\lambda)),$$

where $h_k(\lambda) \in L_2^k(f + g)$ is the spectral characteristic of the estimate.

The mean-square error $\Delta(h_k; f, g)$ of the estimate $\hat{A}_k\xi$ is given by the formula

$$\begin{aligned}
 \Delta(h_k; f, g) &= E|A_k\xi - \hat{A}_k\xi|^2 = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} |A_k(\lambda) - h_k(\lambda)|^2 f(\lambda)d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} |h_k(\lambda)|^2 g(\lambda)d\lambda.
 \end{aligned}$$

According to the Hilbert space projection method proposed by A. N. Kolmogorov [16], the optimal estimation of the functional $A_k\xi$ is a projection of the element $A_k\xi$ of the space H on

the space $H^k(\xi + \eta)$. It can be found from the following conditions:

- 1) $\hat{A}_k \xi \in H^k(\xi + \eta)$,
- 2) $A_k \xi - \hat{A}_k \xi \perp H^k(\xi + \eta)$.

It follows from the second condition that the spectral characteristic $h_k(\lambda)$ of the optimal linear estimate $\hat{A}_k \xi$ for any $t \in \mathbb{R} \setminus S_k$ satisfies equations

$$\int_{-\infty}^{\infty} (A_k(\lambda)f(\lambda) - h_k(\lambda)(f(\lambda) + g(\lambda))e^{-it\lambda})d\lambda = 0. \quad (3)$$

Define the function $C_k(\lambda) = A_k(\lambda)f(\lambda) - h_k(\lambda)(f(\lambda) + g(\lambda))$ and its Fourier transformation

$$c_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_k(\lambda)e^{-it\lambda}d\lambda, \quad t \in \mathbb{R}.$$

It follows from the condition (3) that the function $c_k(t)$ is nonzero only on the set S_k . Hence,

$$C_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{-M} c_1(t)e^{it\lambda}dt + \int_0^T c_1(t)e^{it\lambda}dt,$$

$$C_2(\lambda) = \int_0^T c_2(t)e^{it\lambda}dt + \int_{T+N}^{\infty} c_2(t)e^{it\lambda}dt,$$

$$C_3(\lambda) = \int_{-\infty}^{-M} c_3(t)e^{it\lambda}dt + \int_0^T c_3(t)e^{it\lambda}dt + \int_{T+N}^{\infty} c_3(t)e^{it\lambda}dt,$$

$$C_4(\lambda) = \int_{-M-M_1}^{-M} c_4(t)e^{it\lambda}dt + \int_0^T c_4(t)e^{it\lambda}dt,$$

$$C_5(\lambda) = \int_0^T c_5(t)e^{it\lambda}dt + \int_{T+N}^{T+N+N_1} c_5(t)e^{it\lambda}dt,$$

$$C_6(\lambda) = \int_{-M-M_1}^{-M} c_6(t)e^{it\lambda}dt + \int_0^T c_6(t)e^{it\lambda}dt + \int_{T+N}^{T+N+N_1} c_6(t)e^{it\lambda}dt$$

and the spectral characteristic of the estimate $\hat{A}_k \xi$ is of the form

$$h_k(\lambda) = A_k(\lambda)f(\lambda)(f(\lambda) + g(\lambda))^{-1} - C_k(\lambda)(f(\lambda) + g(\lambda))^{-1}. \quad (4)$$

It follows from the first condition, $\hat{A}_k \xi \in H^k(\xi + \eta)$, which determine the optimal linear estimate of the functional $A_k \xi$, that for some function $v_k(t) \in L_2^k(f + g)$

$$h_k(\lambda) = \int_{\mathbb{R} \setminus S_k} v_k(t)e^{it\lambda}d\lambda,$$

therefore for any $t \in S_k$, the following relation holds true

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[A_k(\lambda)f(\lambda)(f(\lambda) + g(\lambda))^{-1} - C_k(\lambda)(f(\lambda) + g(\lambda))^{-1} \right] e^{-it\lambda}d\lambda = 0. \quad (5)$$

The last relation can be represented in terms of linear operators in the space $L_2^k(f + g)$. Let us define operators

$$(\mathbf{B}_k \mathbf{a})(t) = \int_{S_k} \int_{-\infty}^{\infty} a(u)(f(\lambda) + g(\lambda))^{-1} e^{i\lambda(u-t)} d\lambda du,$$

$$(\mathbf{R}_k \mathbf{a})(t) = \int_{S_k} \int_{-\infty}^{\infty} a(u)f(\lambda)(f(\lambda) + g(\lambda))^{-1} e^{i\lambda(u-t)} d\lambda du,$$

$$(\mathbf{Q}_k \mathbf{a})(t) = \int_{S_k} \int_{-\infty}^{\infty} a(u)f(\lambda)(f(\lambda) + g(\lambda))^{-1} g(\lambda) e^{i\lambda(u-t)} d\lambda du,$$

$$a(t) \in L_2^k(f + g), \quad t \in S_k.$$

The relation (5) can be rewritten in the form

$$(\mathbf{R}_k \mathbf{a})(t) = (\mathbf{B}_k \mathbf{c}_k)(t), \quad t \in S_k. \quad (6)$$

Consider the operator $\mathbf{B}_k$ is invertible. Then the function $c_k(t)$ can be calculated by the formula

$$c_k(t) = (\mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{R}_k \mathbf{a})(t), \quad t \in S_k.$$

Consequently, the spectral characteristic $h_k(\lambda)$ of the estimate $\hat{A}_k\xi$ is calculated by the formula

$$h_k(\lambda) = h_k(f, g) = A_k(\lambda)f(\lambda)(f(\lambda) + g(\lambda))^{-1} - C_k(\lambda)(f(\lambda) + g(\lambda))^{-1}, \quad (7)$$

$$C_k(\lambda) = \int_{S_k} (\mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{R}_k \mathbf{a})(t) e^{it\lambda} dt.$$

The mean-square error of the estimate $\hat{A}_k\xi$ can be calculated by the formula

$$\begin{aligned} \Delta_k(f, g) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |A_k(\lambda)g(\lambda) + C_k(\lambda)|^2 ((f(\lambda) + g(\lambda))^2)^{-1} f(\lambda) d\lambda \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} |A_k(\lambda)f(\lambda) - C_k(\lambda)|^2 ((f(\lambda) + g(\lambda))^2)^{-1} g(\lambda) d\lambda \\ &= \langle (\mathbf{R}_k \mathbf{a})(t), (\mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{R}_k \mathbf{a})(t) \rangle + \langle (\mathbf{Q}_k \mathbf{a})(t), a(t) \rangle, \end{aligned} \quad (8)$$

where $\langle a(t), b(t) \rangle$ is the inner product in the space $L_2^k(f + g)$.

Let us summarize results and present them in the form of a theorem.

Theorem 1.1. *Let $\xi(t)$ and $\eta(t)$ be uncorrelated stationary processes with spectral densities $f(\lambda)$ and $g(\lambda)$ which satisfy the minimality condition (1). The spectral characteristics $h_k(\lambda)$ and the mean-square error $\Delta_k(F, G)$ of the optimal linear estimate of the functional $A_k\xi$ which depends on the unknown values of the process $\xi(t)$ based on observations of the process $\xi(t) + \eta(t)$, $t \in \mathbb{R} \setminus S_k$ can be calculated by formulas (7), (8).*

Consider the case when the stationary process $\xi(t)$ is observed without noise. Then the spectral characteristic of the estimate $\hat{A}_k\xi$ is of the form

$$\begin{aligned} h_k(\lambda) &= A_k(\lambda) - C_k(\lambda)(f(\lambda))^{-1}, \\ C_k(\lambda) &= \int_{S_k} c_k(t) e^{it\lambda} dt, \end{aligned} \quad (9)$$

the relation (6) is of the form

$$a(t) = (\mathbf{B}_k \mathbf{c}_k)(t), \quad t \in S_k. \quad (10)$$

If the operator $\mathbf{B}_k$ is invertible then the unknown function $c_k(t)$ can be calculated by the formula

$$c_k(t) = (\mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{a})(t), \quad t \in S_k,$$

and the spectral characteristic of the estimate $\hat{A}_k\xi$ is of the form

$$\begin{aligned} h_k(\lambda) &= h_k(f) = A_k(\lambda) - C_k(\lambda)(f(\lambda))^{-1}, \\ C_k(\lambda) &= \int_{S_k} (\mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{a})(t) e^{it\lambda} dt. \end{aligned} \quad (11)$$

The mean-square error of the estimate can be calculated by the formula

$$\Delta_k(f) = \langle \mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{a}, a(t) \rangle. \quad (12)$$

The following theorem holds true.

Theorem 1.2. *Let $\xi(t)$ be a stationary stochastic process with the spectral density $f(\lambda)$, which satisfies the minimality condition*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\gamma_k(\lambda)|^2}{f(\lambda)} d\lambda < \infty, \quad (13)$$

for some nonzero function of the exponential type. The spectral characteristic $h_k(\lambda)$ and the mean-square error $\Delta_k(f)$ of the optimal linear estimate of the functional $A_k\xi$ which depends on the unknown values of the process $\xi(t)$ based on observations of the process $\xi(t)$ at time points $t \in \mathbb{R} \setminus S_k$ where

$$S_1 = [-\infty; -M] \cup [0; T], \quad S_2 = [0; T] \cup [T + N; \infty],$$

$$S_3 = S_1 \cup S_2, \quad S_4 = [-M - M_1; -M] \cup [0; T],$$

$$S_5 = [0; T] \cup [T + N; T + N + N_1], \quad S_6 = S_4 \cup S_5$$

can be calculated by formulas (11), (12).

2 Minimax method of interpolation

Derived Theorem 1.1 and Theorem 1.2 can be used only in the case of spectral certainty, when spectral densities of processes are exactly known. However, in practice, this case is not common, we do not have the exact values of spectral densities. If there is given a class of admissible spectral densities where spectral densities of the processes belong to, minimax method can be used to estimate the functionals. This method allows us to find estimates that minimize the maximum values of the mean-square errors of the estimates for all spectral densities from the given class of admissible spectral densities.

Definition 2.1. For a given class of spectral densities $D = D_f \times D_g$ the spectral densities $f_k^0(\lambda) \in D_f$, $g_k^0(\lambda) \in D_g$ are called least favorable in the class D for the optimal linear interpolation of the functional $A_k \xi$ if the following relation holds true

$$\begin{aligned} \Delta(f_k^0, g_k^0) &= \Delta(h_k(f_k^0, g_k^0); f_k^0, g_k^0) = \\ &= \max_{(f, g) \in D_f \times D_g} \Delta(h_k(f, g); f, g). \end{aligned}$$

Definition 2.2. For a given class of spectral densities $D = D_f \times D_g$ the spectral characteristic $h_k^0(\lambda)$ of the optimal linear interpolation of the functional $A_k \xi$ is called minimax-robust if there are satisfied conditions

$$\begin{aligned} h_k^0(\lambda) \in H_D^k &= \bigcap_{(f, g) \in D_f \times D_g} L_2^k(f + g), \\ \min_{h \in H_D^k} \max_{(f, g) \in D} \Delta(h; f, g) &= \max_{(f, g) \in D} \Delta(h_k^0; f, g). \end{aligned}$$

From the introduced definitions and formulas derived in previous section we can obtain the following statements.

Lemma 1. Spectral densities $f_k^0(\lambda) \in D_f$, $g_k^0(\lambda) \in D_g$ satisfying the minimality condition (1) are the least favorable in the class $D = D_f \times D_g$ for the optimal linear interpolation of the functional $A_k \xi$ if the Fourier coefficients of the functions

$$\begin{aligned} (f_k^0(\lambda) + g_k^0(\lambda))^{-1}, f_k^0(\lambda)(f_k^0(\lambda) + g_k^0(\lambda))^{-1}, \\ f_k^0(\lambda)(f_k^0(\lambda) + g_k^0(\lambda))^{-1}g_k^0(\lambda) \end{aligned}$$

determine the operators $\mathbf{B}_k^0, \mathbf{R}_k^0, \mathbf{Q}_k^0$, which determine a solution to the constrain optimization problem

$$\begin{aligned} \max_{(f, g) \in D_f \times D_g} \langle (\mathbf{R}_k \mathbf{a})(t), (\mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{R}_k \mathbf{a})(t) \rangle + \\ + \langle (\mathbf{Q}_k \mathbf{a})(t), a(t) \rangle = \\ = \langle (\mathbf{R}_k^0 \mathbf{a})(t), ((\mathbf{B}_k^0)^{-1} \mathbf{R}_k^0 \mathbf{a})(t) \rangle + \langle (\mathbf{Q}_k^0 \mathbf{a})(t), a(t) \rangle. \end{aligned} \quad (14)$$

The minimax spectral characteristic $h_k^0 = h_k(f_k^0, g_k^0)$ is determined by the formula (7) if $h(f_k^0, g_k^0) \in H_D^k$.

Corollary 2.1. Let the spectral density $f_k^0(\lambda) \in D_f$ satisfy the minimality condition (13). The spectral density $f_k^0(\lambda) \in D_f$ is the least favorable in the class D_f for the optimal linear interpolation of the functional $A_k \xi$ from the observation of the

process $\xi(t)$ at time points $t \in \mathbb{R} \setminus S_k$ if the Fourier coefficients of the function $(f_k^0(\lambda))^{-1}$ determine the operator $\mathbf{B}_k^0$ which determines a solution to the constrain optimization problem

$$\max_{f \in D_f} \langle (\mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{a})(t), a(t) \rangle = \langle ((\mathbf{B}_k^0)^{-1} \mathbf{a})(t), a(t) \rangle. \quad (15)$$

The minimax spectral characteristic $h_k^0 = h_k(f_k^0)$ is determined by the formula (11) if $h_k(f_k^0) \in H_{D_f}^k$.

The least favorable spectral densities $f_k^0(\lambda)$, $g_k^0(\lambda)$ and the minimax spectral characteristic $h_k^0 = h_k(f_k^0, g_k^0)$ form a saddle point of the function $\Delta(h; f, g)$ on the set $H_D^k \times D$. The saddle point inequalities

$$\Delta(h_k^0; f, g) \leq \Delta(h_k^0; f_k^0, g_k^0) \leq \Delta(h; f_k^0, g_k^0),$$

$$\forall h \in H_D^k, \forall f \in D_f, \forall g \in D_g,$$

hold true if $h_k^0 = h_k(f_k^0, g_k^0)$ and $h_k(f_k^0, g_k^0) \in H_D^k$, where (f_k^0, g_k^0) is a solution to the constrained optimization problem

$$\begin{aligned} \sup_{(f, g) \in D_f \times D_g} \Delta(h_k(f_k^0, g_k^0); f, g) = \\ = \Delta(h_k(f_k^0, g_k^0); f_k^0, g_k^0), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\Delta(h_k(f_k^0, g_k^0); f, g) =$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |A_k(\lambda)g_k^0(\lambda) + C_k^0(\lambda)|^2 ((f_k^0(\lambda) + g_k^0(\lambda))^2)^{-1} f(\lambda) d\lambda + \\ \int_{-\infty}^{\infty} |A_k(\lambda)f_k^0(\lambda) - C_k^0(\lambda)|^2 ((f_k^0(\lambda) + g_k^0(\lambda))^2)^{-1} g(\lambda) d\lambda, \end{aligned}$$

$$C_k^0(\lambda) = \int_{S_k} ((\mathbf{B}_k^0)^{-1} \mathbf{R}_k^0 \mathbf{a})(t) e^{it\lambda} dt.$$

The constrained optimization problem (16) is equivalent to the unconstrained optimization problem [35]:

$$\begin{aligned} \Delta_D(f, g) = \\ -\Delta(h_k(f_k^0, g_k^0); f, g) + \delta((f, g) | D_f \times D_g) \rightarrow \inf, \end{aligned} \quad (17)$$

where $\delta((f, g) | D_f \times D_g)$ is the indicator function of the set $D = D_f \times D_g$. Solution of the problem (17) is characterized by the condition $0 \in \partial \Delta_D(f_k^0, g_k^0)$, where $\partial \Delta_D(f_k^0, g_k^0)$ is the subdifferential of the convex functional $\Delta_D(f, g)$ at point (f_k^0, g_k^0) [36].

The form of the functional $\Delta(h_k(f_k^0, g_k^0); f, g)$ admits finding the derivatives and differentials of the functional in the space $L_1 \times L_1$. Therefore the complexity of the optimization problem (17) is determined by the complexity of calculating the subdifferential of the indicator functions $\delta((f, g)|D_f \times D_g)$ of the sets $D_f \times D_g$ [12].

Lemma 2. Let (f_k^0, g_k^0) be a solution to the optimization problem (17). The spectral densities $f_k^0(\lambda)$, $g_k^0(\lambda)$ are the least favorable in the class $D = D_f \times D_g$ and the spectral characteristic $h_k^0 = h_k(f_k^0, g_k^0)$ is the minimax of the optimal linear estimate of the functional $A_k \xi$ if $h_k(f_k^0, g_k^0) \in H_D^k$.

3 Least favorable spectral densities in the class $D = D_0 \times D_\varepsilon$

Consider the problem of the mean-square optimal interpolation of the functional $A_k \xi$ in the case when spectral densities of processes belong to the class of admissible spectral densities $D = D_0 \times D_\varepsilon$,

$$D_0 = \left\{ f(\lambda) \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\lambda = p \right. \right\},$$

$$D_\varepsilon = \left\{ g(\lambda) \left| g(\lambda) = (1 - \varepsilon)g_1(\lambda) + \varepsilon w(\lambda), \right. \right. \\ \left. \left. \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) d\lambda = q \right. \right\},$$

where $g_1(\lambda)$ is known and fixed spectral density, $w(\lambda)$ is unknown spectral density.

From the condition $0 \in \partial \Delta_D(f_k^0, g_k^0)$ we find the following equations which determine the least favourable spectral densities for these given sets of admissible spectral densities

$$|A_k(\lambda)g_k^0(\lambda) + C_k^0(\lambda)| = \alpha^2(f_k^0(\lambda) + g_k^0(\lambda)), \quad (18)$$

$$|A_k(\lambda)f_k^0(\lambda) - C_k^0(\lambda)| = (\beta^2 + \gamma(\lambda))(f_k^0(\lambda) + g_k^0(\lambda)), \quad (19)$$

where $\gamma(\lambda) \leq 0$ and $\gamma(\lambda) = 0$ if $g_k^0(\lambda) > (1 - \varepsilon)g_1(\lambda)$, and α^2, β^2 are unknown Lagrange multipliers.

Thus, the following statements hold true.

Theorem 3.1. Let the minimality condition (1) hold true. The least favorable spectral densities $f_k^0(\lambda)$, $g_k^0(\lambda)$ in the class $D_0 \times D_\varepsilon$ for the optimal linear interpolation of the functional $A_k \xi$

are determined by relations (18), (19), constrained optimization problem (14) and restrictions on densities from the class $D_0 \times D_\varepsilon$. The minimax-robust spectral characteristic of the optimal estimate of the functional $A_k \xi$ is determined by the formula (7).

Theorem 3.2. Let the spectral densities $f_k^0(\lambda) \in D_0^f$, $g_k^0(\lambda) \in D_0^g$ where

$$D_0^f = \left\{ f(\lambda) \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\lambda = p \right. \right\},$$

$$D_0^g = \left\{ g(\lambda) \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) d\lambda = q \right. \right\},$$

and the minimality condition (1) hold true. The least favorable spectral densities $f_k^0(\lambda)$, $g_k^0(\lambda)$ in the class $D_0^f \times D_0^g$ for the optimal linear interpolation of the functional $A_k \xi$ are determined by relations

$$|A_k(\lambda)g_k^0(\lambda) + C_k^0(\lambda)| = \alpha^2(f_k^0(\lambda) + g_k^0(\lambda)), \quad (20)$$

$$|A_k(\lambda)f_k^0(\lambda) - C_k^0(\lambda)| = \beta^2(f_k^0(\lambda) + g_k^0(\lambda)), \quad (21)$$

constrained optimization problem (14) and restrictions on densities from the class $D_0^f \times D_0^g$. The minimax-robust spectral characteristic of the optimal estimate of the functional $A_k \xi$ is determined by the formula (7).

Corollary 3.1. Let the minimality condition (13) hold true. The least favorable spectral densities $f_k^0(\lambda)$ in the class D_0^f for the optimal linear interpolation of the functional $A_k \xi$, which depends on the unknown values of the process $\xi(t)$ based on observations of the process $\xi(t)$ at time points $t \in \mathbb{R} \setminus S_k$, are determined by the following equation

$$|C_k^0(\lambda)| = \alpha^2(f_k^0(\lambda)), \quad (22)$$

constrained optimization problem (15) and restrictions on densities from the class D_0^f . The minimax spectral characteristic of the optimal estimate of the functional $A_k \xi$ is determined by the formula (11).

Corollary 3.2. Let the minimality condition (13) hold true. The least favorable spectral densities $f_k^0(\lambda)$ in the class

$$D_\varepsilon^f = \left\{ f(\lambda) \left| f(\lambda) = (1 - \varepsilon)f_1(\lambda) + \varepsilon w(\lambda), \right. \right. \\ \left. \left. \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\lambda = p \right. \right\}$$

for the optimal linear interpolation of the functional $A_k \xi$, which depends on the unknown values

of the process $\xi(t)$ based on observations of the process $\xi(t)$ at time points $t \in \mathbb{R} \setminus S_k$, are determined by the following equation

$$|C_k^0(\lambda)| = (\alpha^2 + \gamma(\lambda))(f_k^0(\lambda)), \quad (23)$$

where $\gamma(\lambda) \leq 0$ and $\gamma(\lambda) = 0$ if $f_k^0(\lambda) > (1 - \varepsilon)f_1(\lambda)$, constrained optimization problem (15) and restrictions on densities from the class D_ε^f . The minimax spectral characteristic of the optimal estimate of the functional $A_k\xi$ is determined by the formula (11).

4 Least favorable spectral densities in the class $D = D_v^u \times D_{2\delta}$

Consider the problem of mean square optimal interpolation of the functional $A_k\xi$ in the case when spectral densities of the processes belong to the class of admissible spectral densities $D = D_v^u \times D_{2\delta}$,

$$D_v^u = \left\{ f(\lambda) \left| v(\lambda) \leq f(\lambda) \leq u(\lambda), \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\lambda = p \right. \right\}, \text{ constrained optimization problem (15) and restrictions on densities from the class } D_v^u. \text{ The minimax spectral characteristic of the optimal estimate of the functional } A_k\xi \text{ is determined by the formula (11).}$$

$$D_{2\delta} = \left\{ g(\lambda) \left| \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda) - g_1(\lambda)|^2 d\lambda \leq \delta \right. \right\},$$

where spectral densities $v(\lambda), u(\lambda), g_1(\lambda)$ are known and fixed. The class D_v^u describes the "strip" model of stochastic processes, $D_{2\delta}$ describes " δ -district" in the space L_2 of the given bounded spectral density $g_1(\lambda)$.

From the condition $0 \in \partial\Delta_D(f_k^0, g_k^0)$ we find the following equations which determine the least favourable spectral densities for these given sets of admissible spectral densities

$$|A_k(\lambda)g_k^0(\lambda) + C_k^0(\lambda)| = (\alpha^2 + \gamma_1(\lambda) + \gamma_2(\lambda))(f_k^0(\lambda) + g_k^0(\lambda)), \quad (24)$$

$$|A_k(\lambda)f_k^0(\lambda) - C_k^0(\lambda)|^2 = \beta^2(g_k^0(\lambda) - g_1(\lambda))(f_k^0(\lambda) + g_k^0(\lambda))^2, \quad (25)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_k^0(\lambda) - g_1(\lambda)|^2 d\lambda = \delta, \quad (26)$$

where $\gamma_1(\lambda) \leq 0$ and $\gamma_1(\lambda) = 0$ if $f_k^0(\lambda) > v(\lambda)$, $\gamma_2(\lambda) \geq 0$ and $\gamma_2(\lambda) = 0$ if $f_k^0(\lambda) < u(\lambda)$, and α^2, β^2 are unknown Lagrange multipliers.

The following theorem and corollaries hold true.

Theorem 4.1. *Let the minimality condition (1) hold true. The least favorable spectral densities $f_k^0(\lambda), g_k^0(\lambda)$ in the class $D = D_v^u \times D_{2\delta}$ for the optimal linear interpolation of the functional $A_k\xi$ are determined by relations (24) – (26), constrained optimization problem (14) and restrictions on densities from the corresponding classes $D = D_v^u \times D_{2\delta}$. The minimax-robust spectral characteristic of the optimal estimate of the functional $A_k\xi$ is determined by the formula (7).*

Corollary 4.1. *Let the minimality condition (13) hold true. The least favorable spectral densities $f_k^0(\lambda)$ in the classes D_v^u for the optimal linear estimation of the functional $A_k\xi$, which depends on the unknown values of the process $\xi(t)$ based on observations of the process $\xi(t)$ at time points $t \in \mathbb{R} \setminus S_k$, are determined by the following equation*

$$|C_k^0(\lambda)| = (\alpha^2 + \gamma_1(\lambda) + \gamma_2(\lambda))f_k^0(\lambda), \quad (27)$$

Corollary 4.2. *Let the minimality condition (13) hold true. The least favorable spectral densities $f_k^0(\lambda)$ in the class*

$$D_{2\delta} = \left\{ f(\lambda) \left| \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda) - f_1(\lambda)|^2 d\lambda \leq \delta \right. \right\}$$

for the optimal linear estimation of the functional $A_k\xi$, which depends on the unknown values of the process $\xi(t)$ based on observations of the process $\xi(t)$ at time points $t \in \mathbb{R} \setminus S_k$, are determined by the following equations

$$|C_k^0(\lambda)|^2 = \beta^2(f_k^0(\lambda) - f_1(\lambda))(f_k^0(\lambda))^2, \quad (28)$$

constrained optimization problem (15) and the following restrictions on densities from the class $D_{2\delta}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_k^0(\lambda) - f_1(\lambda)|^2 d\lambda = \delta. \quad (29)$$

The minimax spectral characteristic of the optimal estimate of the functional $A_k\xi$ is determined by the formula (11).

5 Conclusions

In the article we propose the methods of the mean-square optimal linear interpolation of the functionals which depend on the unknown values of the process based on observed data of the process with noise and missing values. Under condition of spectral certainty when the spectral densities of the stationary processes are known we derive formulas for calculating the spectral characteristics and the mean-square errors of the estimates of the functionals. Analogous results are derived for the case of observations of the process without noise. In the case of spectral uncertainty when certain sets of admissible densities are given we derive the relations which the least spectral densities satisfy.

References

1. *Bondon P.* Influence of missing values on the prediction of a stationary time series/ P. Bondon// J. Time Ser. Anal. — 2005. — Vol. 26, No. 4. — P. 519–525.
2. *Bondon P.* Prediction with incomplete past of a stationary process/ P. Bondon// Stoch. Process Their Appl. — 2002. — Vol.98. — P. 67–76.
3. *Cheng R.* Some extremal problems in $L^p(w)$ / R. Cheng, A.G. Miamiee, M. Pourahmadi// Proc. Am. Math. Soc. — 1998. — Vol.126. — P. 2333–2340.
4. *Dubovets'ka I. I.* Interpolation of periodically correlated stochastic sequences/ I.I. Dubovets'ka, A.Yu. Masyutka, M.P. Moklyachuk// Theory Probab. Math. Stat. — 2012. — Vol. 84. — P. 43–55.
5. *Franke J.* Minimax-robust prediction of discrete time series/ J. Franke// Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verv. Geb. — 1985. — Vol. 68. — P. 337–364.
6. *Franke J.* Minimax-robust filtering and finite-length robust predictors/ J. Franke, H. V. Poor// Lecture Notes in Statist. — 1984. — Vol. 26. — P. 87–126.
7. *Gikhman I. I.* The theory of stochastic processes. I./ I. I. Gikhman, A. V. Skorokhod. — Berlin: Springer, 2004. — 574 p.
8. *Golichenko I.* Periodically correlated processes estimates/ I. Golichenko, M. Moklyachuk. — LAP Lambert Academic Publishing, 2016. — 308 p.
9. *Golichenko I.I.* Extrapolation problem for periodically correlated stochastic sequences with missing observations/ I.I. Golichenko, O.Yu. Masyutka, M.P. Moklyachuk// Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv. Univ. Im. Tarasa Shevchenka. — 2021. — No. 2. — P. 39–52.
10. *Grenander U.* A prediction problem in game theory/ U. Grenander// Ark. Mat. — 1957. — Vol. 3. — P. 371–379.
11. *Hannan E. J.* Multiple time series/ E.J. Hannan. — New York: Wiley, 1970. — 536 p.
12. *Ioffe A.D.* Theory of extremal problems/ A.D. Ioffe, V. M. Tihomirov. — Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 6. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland Publishing Company. XII, 1979. — 459 p.
13. *Karhunen K.* Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung/ K. Karhunen// Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I. — 1947. — Vol. 37. — P. 1–79.
14. *Kasahara Y.* Duals of random vectors and processes with applications to prediction problems with missing values/ Y. Kasahara, M. Pourahmadi, A. Inoue// Statist. Probab. Lett. — 2009. — Vol. 79, No. 14. — P. 1637–1646.
15. *Kassam S. A.* Robust techniques for signal processing: A survey/ S.A. Kassam, H.V. Poor// Proc. IEEE. — 1985. — Vol. 73, No. 3. — P. 433–481.
16. *Kolmogorov A. N.* Selected works by A. N. Kolmogorov. Vol. II: Probability theory and mathematical statistics/ A. N. Shirayev (Ed.). — Kluwer Academic Publications, 1992. — 611p.
17. *Luz M.* Robust extrapolation problem for stochastic processes with stationary increments/ M. Luz, M. Moklyachuk// Math. Stat. — 2014. — Vol. 1, No. 2. — P. 78–88.

18. Luz M. Minimax interpolation problem for random processes with stationary increments/ M. Luz, M. Moklyachuk// Stat. Optim. Inf. Comput. — 2015. — Vol. 3. — P. 30–41.
19. Luz M. Estimation of Stochastic Processes with Stationary Increments and Cointegrated Sequences/ M. Luz, M. Moklyachuk. — London: ISTE; Hoboken, NJ: John Wiley and Sons, 2019 — 308 p.
20. Luz M. Minimax-robust estimation problems for sequences with periodically stationary increments observed with noise/ M. Luz, M. Moklyachuk// Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv. Univ. Im. Tarasa Shevchenka. — 2020. — No. 3. — P. 68–83.
21. Masyutka O. Yu. On a problem of minimax interpolation of stationary sequences/ O.Yu. Masyutka, M.P. Moklyachuk// Cybernet. Systems Anal. — 2022. — Vol. 58, No 2. — P. 128–142.
22. Moklyachuk M.P. Robust procedures in time series analysis/ M. P. Moklyachuk// Theory Stoch. Process. — 2000. — Vol. 6, No. 3–4. — P. 127–147.
23. Moklyachuk M.P. Game theory and convex optimization methods in robust estimation problems/ M. P. Moklyachuk// Theory Stoch. Process. — 2001. — Vol. 7, No. 1–2. — P. 253–264.
24. Moklyachuk M.P. Robust estimations of functionals of stochastic processes/ M. P. Moklyachuk. — Kyiv University, Kyiv, 2008.
25. Moklyachuk M. P. Minimax-robust estimation problems for stationary stochastic sequences/ M.P.Moklyachuk// Stat., Optim. Inf. Comput. — 2015.— Vol. 3, No. 4. — P. 348–419.
26. Moklyachuk M. P. Robust filtering of stochastic processes/ M.P. Moklyachuk, O.Yu. Masyutka// Theory Stoch. Process. — 2007. — Vol. 13, No. 1–2. — P. 166–181.
27. Moklyachuk M. P. Minimax prediction problem for multidimensional stationary stochastic processes/ M.P. Moklyachuk, O.Yu. Masyutka// Commun. Stat., Theory Methods. — 2011. — Vol. 40, No. 19–20. — P. 3700–3710.
28. Moklyachuk M. P. Minimax-robust estimation technique for stationary stochastic processes/ M.P. Moklyachuk, O.Yu. Masyutka. — LAP Lambert Academic Publishing, 2012.
29. Moklyachuk M. P. Interpolation of stationary sequences observed with a noise/ M.P. Moklyachuk, M.I. Sidei// Theory Probab. Math. Statist. — 2016. — Vol. 93. — P. 153–167.
30. Moklyachuk M. P. Interpolation problem for stationary sequences with missing observations/ M. Moklyachuk, M. Sidei// Stat., Optim. Inf. Comput. — 2015. — Vol. 3, No. 3. — P. 259–275.
31. Moklyachuk M. P. Filtering problem for stationary sequences with missing observations/ M. Moklyachuk, M. Sidei// Stat., Optim. Inf. Comput. Computing. — 2016. — Vol. 4, No. 4. — P. 308–325.
32. Moklyachuk M. P. Estimation of stochastic processes with missing observations/ M.P. Moklyachuk, M.I. Sidei, O.Yu. Masyutka. — New York, NY: Nova Science Publishers, 2019 — 334 p.
33. Nakazi T. Two problems in prediction theory/ T. Nakazi// Studia Math. — 1984. — Vol. 78. — P. 7–14.
34. Pourahmadi M. A prediction problem in $L^2(w)$ / M. Pourahmadi, A. Inoue, Y. Kasahara// Proc. Amer. Math. Soc. — 2007. — Vol. 135, No. 4. — P. 1233–1239.
35. Pshenichnyj B.N. Necessary conditions of an extremum/ B. N. Pshenichnyj. — Pure and Applied mathematics. 4. New York: Marcel Dekker, 1971.
36. Rockafellar R. T. Convex Analysis/ R.T. Rockafellar. — Princeton: Princeton University Press, 1997. — 472 p.
37. Rozanov Yu.A. Stationary stochastic processes/ Yu.A. Rozanov. — San Francisco-Cambridge-London-Amsterdam: Holden-Day, 1967.

38. Salehi H. Algorithms for linear interpolator and interpolation error for minimal stationary stochastic processes/ H. Salehi// Ann. Probab. — 1979. — Vol. 7, No. 5. — P. 840–846.
39. Vastola S. K. Robust Wiener-Kolmogorov theory/ S.K. Vastola, H.V. Poor// IEEE Trans. Inform. Theory. — 1984. — Vol. 30, No. 2. — P. 316–327.
40. Wiener N. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. With engineering applications/ N. Wiener. — The M. I. T. Press, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., 1966.
41. Wold H. A study in the analysis of stationary time series / H. Wold. — Thesis University of Stockholm, 1938.
42. Wold H. On prediction in stationary time series/ H. Wold// Ann. Math. Stat. — 1948. — Vol. 19, No. 4. — P. 558–567.
43. Yaglom A. M. Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 1: Basic results, Vol. 2: Supplementary notes and references/ A.M. Yaglom. — Springer Series in Statistics. New York etc.: Springer-Verlag, 1987.
6. FRANKE, J. and POOR, H.V. (1984) Minimax-robust filtering and finite-length robust predictors. *Lecture Notes in Statist.* 26. p. 87–126.
7. GIKHMAN, I. I. and SKOROKHOD, A. V. (2004) *The theory of stochastic processes. I.* Springer, Berlin.
8. GOLICHENKO, I. I. and MOKLYACHUK, M. P. (2016) *Periodically correlated processes estimates.* LAP Lambert Academic Publishing.
9. GOLICHENKO, I. I., MASYUTKA, A. YU. and MOKLYACHUK, M. P. (2021) Extrapolation problem for periodically correlated stochastic sequences with missing observations. *Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv. Univ. Im. Tarasa Shevchenka.* 2. p. 39–52.
10. GRENANDER, U. (1957) A prediction problem in game theory. *Ark. Mat.* 6. p. 371–379.
11. HANNAN, E. J. (1970) *Multiple time series.* Wiley, New York.
12. IOFFE, A.D. and TIHOMIROV, V.M. (1979) *Theory of extremal problems.* North-Holland Publishing Company.
13. KARHUNEN, K. (1947) Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I.* 37. p. 1–79.
14. KASAHARA, Y., POURAHMADI, M. and INOUE, A. (2009) Duals of random vectors and processes with applications to prediction problems with missing values. *Statist. Probab. Lett.* 79(14). p. 1637–1646.
15. KASSAM, S. A. and POOR, H. V. (1985) Robust techniques for signal processing: A survey. *Proc. IEEE.* 73(3). p. 433–481.
16. KOLMOGOROV, A. N. (1992) In: Shiryayev A. N. (Ed.) *Selected works by A. N. Kolmogorov. Vol. II: Probability theory and mathematical statistics* Kluwer, Dordrecht etc.

References

17. LUZ, M. and MOKLYACHUK, M. (2014) Robust extrapolation problem for stochastic processes with stationary increments. *Math. Stat.* 1(2). p. 78–88.
18. LUZ, M. and MOKLYACHUK, M. (2015) Minimax interpolation problem for random processes with stationary increments. *Stat. Optim. Inf. Comput.* 3. p. 30–41.
19. LUZ, M., MOKLYACHUK, M. (2019) *Estimation of Stochastic Processes with Stationary Increments and Cointegrated Sequences*. London: ISTE; Hoboken, NJ: John Wiley & Sons .
20. LUZ, M., MOKLYACHUK, M. (2020) Minimax-robust estimation problems for sequences with periodically stationary increments observed with noise. *Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv. Univ. Im. Tarasa Shevchenka*. 3. p. 68–83.
21. MASYUTKA, A. YU. and MOKLYACHUK, M. P. (2022) On a problem of minimax interpolation of stationary sequences. *Cybernet. Systems Anal.* 58(2). p. 128–142.
22. MOKLYACHUK, M. P. (2000) Robust procedures in time series analysis. *Theory Stoch. Process.* 6(3–4). p. 127–147.
23. MOKLYACHUK, M. P. (2001) Game theory and convex optimization methods in robust estimation problems. *Theory Stoch. Process.* 7(1–2). p. 253–264.
24. MOKLYACHUK, M. P. (2008) *Robust estimations of functionals of stochastic processes*. Kyiv University, Kyiv.
25. MOKLYACHUK, M. P. (2015) Minimax-robust estimation problems for stationary stochastic sequences. *Stat., Optim. Inf. Comput.* 3(4). p. 348–419.
26. MOKLYACHUK, M. P. and MASYUTKA, A. YU. (2007) Robust filtering of stochastic processes. *Theory Stoch. Process.* 13(1–2). p. 166–181.
27. MOKLYACHUK, M. P. and MASYUTKA, A. YU. (2011) Minimax prediction problem for multidimensional stationary stochastic processes. *Commun. Stat., Theory Methods*. 40(19–20). p. 3700–3710.
28. MOKLYACHUK, M. P. and MASYUTKA, A. YU. (2012) *Minimax-robust estimation technique for stationary stochastic processes*. LAP LAMBERT Academic Publishing.
29. MOKLYACHUK, M. P. and SIDEI, M. I. (2016) Interpolation of stationary sequences observed with a noise. *Theory Probab. Math. Statist.* 93. p.153–167.
30. MOKLYACHUK, M. P. and SIDEI, M. I. (2015) Interpolation problem for stationary sequences with missing observations. *Stat., Optim. Inf. Comput.* 3(3). p. 259–275.
31. MOKLYACHUK, M. P. and SIDEI, M. I. (2016) Filtering problem for stationary sequences with missing observations. *Stat., Optim. Inf. Comput. Computing*. 4(4). p. 308–325.
32. MOKLYACHUK, M. P., SIDEI, M. I. and MASYUTKA, O. YU. (2019) *Estimation of stochastic processes with missing observations*. New York, NY: Nova Science Publishers.
33. NAKAZI, T. (1984) Two problems in prediction theory. *Studia Math.* 78. p. 7–14.
34. POURAHMADI, M., INOUE, A. and KASAHARA, Y. (2007) A prediction problem in $L^2(w)$. *Proc. Amer. Math. Soc.* 135(4). p. 1233–1239.
35. PSHENICHNYI, B.N. (1971) *Necessary conditions of an extremum*. New York: Marcel Dekker.
36. ROCKAFELLAR, R. T. (1997) *Convex Analysis*. Princeton University Press.
37. ROZANOV, YU.A. (1967) *Stationary stochastic processes*. San Francisco-Cambridge-London-Amsterdam: Holden-Day.
38. SALEHI, H. (1979) Algorithms for linear interpolator and interpolation error for minimal stationary stochastic processes. *Ann. Probab.* 7(5). p. 840–846.
39. VASTOLA, S. K. and POOR, H. V. (1984) Robust Wiener-Kolmogorov theory. *IEEE Trans. Inform. Theory*. 30(2). p. 316–327.

40. WIENER, N. (1966) *Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. With engineering applications*. The M. I. T. Press, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge.
41. WOLD, H. (1938) *A study in the analysis of stationary time series*. Thesis University of Stockholm, 1938.
42. WOLD, H. (1948) On prediction in stationary time series / H. Wold // *Ann. Math. Stat.* 19(4). p. 558–567.
43. YAGLOM, A. M. (1987) *Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 1: Basic results; Vol. 2: Supplementary notes and references*. Springer-Verlag, New York etc..

Received: 11.02.2022

УДК 517.51

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/1.3>

В.О. Волошина¹, аспірант

**Про точну сталу в нерівності Дзядика
для похідної від алгебраїчного полінома**

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глу-
шкова 4д,

e-mail: victoria.voloshyna@yahoo.com

V.O. Voloshyna¹, PhD student

**On exact constant in Dzyadyk inequality
for the derivative of an algebraic
polynomial**

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, 4d Glushkova str.,
e-mail: victoria.voloshyna@yahoo.com

Анотація. *Нерівність Бернштейна*

$$\|T'_n\|_{C(R)} \leq n\|T_n\|_{C(R)}$$

уможливила отримання конструктивної характеристики наближення періодичних функцій тригонометричними поліномами T_n степеня n . Натомість, наслідок цієї нерівності для алгебраїчних поліномів P_n степеня n , а саме, нерівність

$$\|\varphi P'_n\| \leq n\|P_n\|,$$

де $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{C([-1,1])}$ та $\varphi(x) := \sqrt{1-x^2}$, не розв'язує задачу отримання конструктивної характеристики наближення неперервних на відрізку функцій алгебраїчними поліномами. Так само не розв'язує цю задачу і нерівність Маркова

$$\|P'_n\| \leq n^2\|P_n\|.$$

Більше того, не достатньо навіть наслідку нерівностей Бернштейна і Маркова:

$$\|\varphi_n P'_n\| \leq 2n\|P_n\|,$$

$$\text{де } \varphi_n(x) := \sqrt{1-x^2 + \frac{1}{n^2}}.$$

Вказану задачу, як і ряд інших теоретичних і практичних задач, розв'язує нерівність Дзядика

$$\|\varphi_n^{1-s} P'_n\| \leq c(s)n\|\varphi_n^{-s} P_n\|,$$

справедлива для кожного $s \in \mathbb{R}$. На відміну від нерівностей Бернштейна та Маркова, точна стала в нерівності Дзядика невідома для всіх $s \in \mathbb{R}$, але відома асимптотично точна стала для натуральних s : $c(s) = 1 + s + s^2$; а для $n \geq 2s, s \in \mathbb{N}$, відома навіть точна стала

$$c(n, s) = \left(1 + s \frac{\sqrt{1+n^2}-1}{n}\right)^2 - s.$$

В нашій замітці цей результат поширено на випадок $s \leq n < 2s$.

Ключові слова: Точна стала, нерівність Дзядика, алгебраїчні поліноми.

Abstract. *Bernstein inequality*

$$\|T'_n\|_{C(R)} \leq n\|T_n\|_{C(R)}$$

made it possible to obtain a constructive characterization of the approximation of periodic functions by trigonometric polynomials T_n of degree n . Instead, the corollary of this inequality for algebraic polynomials P_n of degree n , namely, the inequality

$$\|\varphi P'_n\| \leq n\|P_n\|,$$

where $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{[-1,1]}$ and $\varphi(x) := \sqrt{1-x^2}$, does not solve the problem obtaining a constructive characterization of the approximation of continuous functions on a segment by algebraic polynomials. Markov inequality

$$\|P'_n\| \leq n^2 \|P_n\|.$$

does not solve this problem as well. Moreover, even the corollary

$$\|\varphi_n P'_n\| \leq 2n \|P_n\|,$$

$$\text{where } \varphi_n(x) := \sqrt{1-x^2 + \frac{1}{n^2}}$$

of Bernstein and Markov inequalities is not enough. This problem, like a number of other theoretical and practical problems, is solved by Dzyadyk inequality

$$\|\varphi_n^{1-s} P'_n\| \leq c(s)n \|\varphi_n^{-s} P_n\|,$$

valid for each $s \in \mathbb{R}$. In contrast to the Bernstein and Markov inequalities, the exact constant in the Dzyadyk inequality is unknown for all $s \in \mathbb{R}$, whereas the asymptotically exact constant for natural s is known: $c(s) = 1 + s + s^2$; and for $n \geq 2s, s \in \mathbb{N}$, even the exact constant is known:

$$c(n, s) = \left(1 + s \frac{\sqrt{1+n^2-1}}{n}\right)^2 - s.$$

In our note, this result is extended to the case $s \leq n < 2s$.

Key Words: Exact constant, Dzyadyk inequality, algebraic polynomials.

Статтю представив д.ф.-м.н., чл.-кор. НАН України, Шевчук І.О.

1 Вступ

Нехай $\mathcal{P}_n$ – простір алгебраїчних поліномів степеня $\leq n$, з дійсними коефіцієнтами, $\|f\| := \|f\|_{C[-1,1]} = \max_{x \in [-1,1]} |f(x)|$ – рівномірна норма функції $f \in C[-1,1]$, k – натуральне число,

$$c(n, k) = \left(1 + k \frac{\sqrt{1+n^2-1}}{n}\right)^2 - k$$

та

$$\varphi_n(x) := \sqrt{1-x^2 + \frac{1}{n^2}}$$

Для $n \geq 2k$ в роботі [1] доведена наступна теорема 1.1.

В нашій замітці показано, що теорема 1.1 справедлива також для $n \geq k$.

Теорема 1.1. Для кожних натуральних чисел k і $n \geq k$ та кожного полінома $P_n \in \mathcal{P}_n$ виконується нерівність

$$\|P'_n \varphi_n^{1-k}\| \leq c(n, k)n \|P_n \varphi_n^{-k}\|. \quad (1)$$

В нерівності Дзядика [2, 3] (с. 262) стала $c(n, k)$ є точною, оскільки справедлива теорема 1.2. Теорема 1.2 доведена у [1], хоча сформульована там лише для $n \geq 2k$.

Теорема 1.2 ([1]). Для кожних натуральних чисел k і $n \geq k$ знайдеться поліном $P_n \in \mathcal{P}$ такий, що

$$\|P'_n \varphi_n^{1-k}\| = (n, k)n \|P_n \varphi_n^{-k}\|. \quad (2)$$

Нарешті зауважимо, що

$$c(n, k) \leq 1 + k + k^2 \quad \text{і що}$$

$$c(n, k) \rightarrow 1 + k + k^2 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

2 Обґрунтування справедливості теореми 1.1

Зафіксуємо $a \in (0, 1), k \in \mathbb{N}$ та $n \in \mathbb{N}, n \geq k$. Позначимо через $\mathcal{T}_n$ – простір тригонометричних поліномів

$$T_n = a_0 + \sum_{m=1}^n (a_m \cos mt + b_m \sin mt)$$

степеня $\leq n$ з дійсними коефіцієнтами. Нехай $w = e^{it}, t \in \mathbb{R}$.

Слідуючи [1], позначимо

$$\rho(t) := |w^2 - a| = \sqrt{(1-a)^2 + 4a \sin^2 t}, \quad (3)$$

$$S(w) := w^{n-2k}(w^2 - a)^k$$

та

$$Q(t) := \operatorname{Re} S(e^{it}),$$

- тригонометричний поліном степеня n , також

$$A(t) := \left| e^{2it} - \left(1 - \frac{2k}{n}\right)a \right| =$$

$$\sqrt{\left(1 - \left(1 - \frac{2k}{n}\right)a\right)^2 + 4a\left(1 - \frac{2k}{n}\right)\sin^2 t}.$$

Сформулюємо наступну лему.

Лема 2.1 ([1]). Для полінома Q справджуються нерівності

$$|Q(t)| \leq |S(e^{it})| = \rho^k(t), t \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

$$|Q'_{2n}(t)| \leq \left| \frac{d}{dt} S_n(e^{it}) \right| = n\rho^{k-1}(t)A(t), t \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

Буде потрібне наступне уточнення теореми Бернштейна [1, стор. 498]. Нехай H_l – алгебраїчний поліном степеня l , який не має нулів зовні одиничного круга.

Теорема 2.1. Якщо тригонометричний поліном T_n степеня $n \geq l/2$ задовольняє нерівність

$$|T_n(t)| \leq |H_l(e^{it})|$$

для всіх дійсних значень t , то

$$|T'_n(t)| \leq |(n-l)H_l(e^{it}) + e^{it}H'_l(e^{it})|.$$

С. Н. Бернштейн [1, стор. 498] отримав цю теорему для випадку $n \geq l$, а для всіх $n \geq l/2$, теорема 2.1 випливає з теореми 2.2.

Теорема 2.2 ([4]). Нехай $R(z)$ – алгебраїчний поліном степеня n , що має всі нулі у $|z| \leq 1$ та $P(z)$ – алгебраїчний поліном степеня не вищого за степінь $P(z)$. Якщо

$$|P(z)| \leq |R(z)| \quad (6)$$

для $|z| = 1$, то для довільного $|\beta| \leq 1$ маємо

$$\left| \frac{zP'(z)}{n} + \beta \frac{P(z)}{2} \right| \leq \left| \frac{zR'(z)}{n} + \beta \frac{R(z)}{2} \right|, \quad (7)$$

для $|z| = 1$.

Доведення теореми 2.1. Ми застосовуємо наступні аргументи Тамас Ерделі та дякуємо професору Дану Левиатан за те, що він звернув на них нашу увагу. Отже, нехай P_{2n} та R_{2n} – алгебраїчні поліноми степеня $2n$, означені відповідно рівностями

$$T_n(t) = \frac{P_{2n}(z)}{z^n} \quad \text{для } z = e^{it}, \quad \text{та}$$

$$R_{2n}(z) := z^{2n-l}H_l(z).$$

При цьому зауважимо, що R_{2n} є алгебраїчним поліномом, оскільки за умовою $n \geq l/2$. Зрозуміло, $|T_n(t)| \equiv |P_{2n}(e^{it})|$ та $|H_l(e^{it})| \equiv |R_{2n}(e^{it})|$, тому для поліномів P_{2n} та R_{2n} виконується умова (6) теореми 2.2. Далі, оскільки, при $z = e^{it}$

$$T'_n(t) = iz \left(\frac{P'_{2n}(z)}{z^n} - \frac{nP_{2n}(z)}{z^{n+1}} \right) \quad \text{та}$$

$$\frac{zR'_{2n}(z)}{2n} - \frac{R_{2n}(z)}{2} =$$

$$\frac{1}{2n} \left(H'_l(z)z^{2n-l+1} + (n-l)H_l(z)z^{2n-l} \right),$$

то за теоремою 2.2 з $\beta = -1$ отримуємо

$$|T'_n(t)| = 2n \left| \frac{zP'_{2n}(z)}{2n} - \frac{P_{2n}(z)}{2} \right| \leq$$

$$2n \left| \frac{zR'_{2n}(z)}{n} + \beta \frac{R_{2n}(z)}{2} \right| =$$

$$|(n-l)H_l(e^{it}) + e^{it}H'_l(e^{it})|.$$

□

Список використаних джерел

1. Галан В.Д., Шевчук І. О. Точна стала в нерівності Дзядика для похідної від алгебраїчного полінома // Український математичний журнал. – 2017. – №5, Т.69. – С. 624-630.
2. Дзядык В. К. О конструктивной характеристике функций, удовлетворяющих условию Лира ($0 < \alpha < 1$) на конечном отрезке действительной оси // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1966. – 20. – С. 623 – 642.
3. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.

4. Malik M.A., Vong M.C. Inequalities concerning the derivative of polynomials. – Rendiconti del circolo matematico di Palermo, Serie II, Tomo XXXIV (1985), pp. 422-426.

References

1. HALAN, V.D. and SHEVCHUK, I.O. (2017). Exact Constant in Dzyadyk's Inequality for the Derivative of an Algebraic Polynomial. Ukrainian Mathematical Journal, 69(5), pp.624-630.
2. DZYADYK, V.K. (1966). О конструктивной характеристике функций, удовлетворяющих условию $\text{Lip}\alpha$ ($0 < \alpha < 1$) на конечном отрезке действительной оси. Изв. АН ССРСР. Сер. мат., 20, pp.623-642.
3. DZYADYK, V.K. (1977). Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. Москва: Наука.
4. MALIK, M.A. and VONG, M.C. (1985). Inequalities concerning the derivative of polynomials. Rendiconti del circolo matematico di Palermo, Serie II, Tomo XXXIV, pp.422-426.

Надійшла до редколегії 15.10.2021

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ,
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА
ТА МЕХАНІКА**

УДК 532.5+539.3

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/1.4>

Батюк Л. В.¹, к. ф.-м. н., доцент,
Кізілова Н. М.², д. ф.-м. н., проф.

L. V. Batyuk¹, PhD, docent,
N. M. Kizilova², DSc, prof.

**Моделювання осциляції поверхонь клітин
крові як заповнених рідиною
багатошарових в'язкопружних оболонок**

**Modeling of blood cell surface oscillations as
fluid-filled multilayer viscoelastic shells**

¹ Харківський національний медичний
університет, 61022, м. Харків, пл. Свободи, 2,

² Харківський національний університет
ім. В.Н. Каразіна, 61022, м. Харків,
пл. Свободи, 4, e-mail: n.kizilova@gmail.com
liliyabatyuk24@gmail.com

¹ Kharkov National Medical University, 61022,
Kharkov, Nauki av., 2,

² V.N. Karazin Kharkov National University, 61022,
Kharkov, Svobody sq., 4,

e-mail: n.kizilova@gmail.com
liliyabatyuk24@gmail.com

Запропонована нова реологічна модель еритроцита як багатошарової оболонки, яка включає цитоскелет, ліпідний шар, глікокалікс і гідратний шар як в'язкопружні тіла Максвелла. Досліджені властивості моделі при ізотонічних, ізометричних і динамічних експериментах. Досліджуються осциляції поверхонь еритроцитів або інших клітин крові у наближенні заповнених в'язкою рідиною багатошарових оболонок з в'язкопружних матеріалів. Розглянута задача про розповсюдження малих збурень вздовж поверхні клітини. Отримані розв'язки задачі у вигляді хвиль Юнга і Ламе. Запропонований метод ідентифікації параметрів еритроцитів із даних експериментальних вимірювань розповсюдження хвиль на основі запропонованої моделі для цілей клінічної діагностики захворювань з використанням мікрокраплі крові пацієнта.

Ключові слова: Еритроцити, Математичне моделювання, Багатошарові оболонки, Вільні коливання, Вимушені коливання.

Rheological properties of the red blood cells (RBC) determine their movement in the larger and smaller blood vessels, oxygen and carbon dioxide delivery to/from the cells. Those properties vary significantly with age and health state of an organism. In this paper a new rheological model of RBC as a thin multilayer shell, which includes the cytoskeleton, lipid bilayer, glycocalyx, and hydrate shell as Maxwell's viscoelastic bodies is proposed. Mechanical properties of the rheological model in isotonic, isometric and dynamic experiments are studied. The oscillations of the surfaces of erythrocytes or other cells in the approximation of multilayer viscoelastic shell filled with a viscous fluid are investigated. The expressions for the dynamic Young's modules and viscosity/fluidity coefficients as functions of the viscoelastic and geometric parameters of the layers are obtained. The problem of propagation of small perturbations along the cell surface is considered. The solutions of the problem in the form of Young and Lamé waves are obtained. The method of identification of the erythrocyte parameters from the experimental measurements of the wave propagation on the basis of the developed mathematical model for the purposes of clinical diagnostics of diseases with use of a microdrop of blood of the patient is proposed.

Key Words: Erythrocytes, Mathematical modeling, Multilayer shells, Free oscillations, Forced oscillations.

Статтю представив член-кореспондент НАН України Жук Я.О

1. Вступ. Еритроцити крові людини являють собою в'язкопружні оболонки, які заповнені концентрованим розчином гемоглобіну з в'язкістю $\mu_{\text{тб}} = 7 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$ [1]. Форма еритроцитів залежить від різних факторів і може бути

двовігнутою, дископодібною, сферичною або напівсферичною. Численні експериментальні дослідження показали, що пружні модулі E_{1-3} , модулі зсуву G_{1-3} і

в'язкості мембрани η_m і розчину гемоглобіну усередині є важливими показниками для діагностики захворювань [2]. З часом мембрани стають більш жорсткими, а еритроцити – менш деформівними, тому пружні властивості використовуються, наприклад, для відбраковування «старих» еритроцитів з донорської крові перед її використанням [3]. Оскільки еритроцити часто більші за діаметр капілярів, важливими визначальними факторами мікроциркуляторної функції є деформація поверхні еритроцитів та її зміни з такими патологіями, як серповидноклітинна хвороба та малярія. Було показано, що коливання мембран еритроцитів під час руху залежать від концентрації глюкози в крові, що різко впливає на діелектричні та електричні властивості еритроцитів. В експериментах частота цих коливань експоненціально зменшувалась від 1,2 до 0,85 кГц зі зміною концентрації глюкози від 85 мг/дл до 346,1 мг/дл [4]. Таким чином, параметри коливань еритроцитів, так само як їх діелектричні та електричні властивості можна використовувати для точнішої діагностики цукрового діабету [5]. Важливість пружних властивостей мембран для прикладних застосувань вже давно обговорюється, але останніми роками стало зрозумілим, що в'язкість мембран є дуже важливою для правильного відтворення часу релаксації мембрани на зовнішні стимули [6], що відповідає попереднім теоретичним результатам для сферичних оболонок і рідких крапель [7], у тому числі в зовнішньому ультразвуковому полі [8].

2. Реологічна модель еритроцита. Оскільки еритроцити мають не тільки мембрану, але й цитоскелет, поверхневі структури (глікокалікс) і

де точки позначають похідну за часом,
 $a_1 = \mu_m \mu_g \mu_h (E_c + E_m + E_g + E_h) / a$, $a = E_m E_g E_h$,
 $a_2 = (E_{cgh} E_m \mu_g \mu_h + E_{cmh} E_g \mu_m \mu_h + E_{cmg} E_h \mu_g \mu_m) / a$,
 $a_3 = (E_{ch} E_m E_g \mu_h + E_{cg} E_m E_h \mu_g + E_{cm} E_g E_h \mu_m) / a$,
 $b_1 = (E_m \mu_g \mu_h + E_m \mu_h \mu_g + E_h \mu_g \mu_m) / a$,
 $b_2 = (E_m E_g \mu_h + E_m E_h \mu_g + E_h E_g \mu_m) / a$, $E_{ij} = E_i + E_j$,
 $E_{ijk} = E_i + E_j + E_k$.

При ізотонічному навантаженні $\sigma = \sigma^*$ рівняння (1) дає для деформації мембрани

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^*}{E_c} + C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t) + C_3 \exp(\lambda_3 t), \quad (2)$$

де $\lambda_{1,2,3}$ - корені алгебраїчного рівняння

гідратні оболонки складної структури, для обробки і біомеханічної інтерпретації даних експериментів найбільш важливі відповідні багаточарові моделі еритроцитів, які дозволяють адекватно описати не тільки механічні, але й електричні біофізичні властивості клітин [5]. В даній роботі запропоновані нова реологічна модель поверхні еритроцита як паралельного поєднання пружного шару цитоскелету (E_c) з в'язкопружними шарами ліпідного біслоя (E_1, μ_1), глікокаліксу з адсорбованими іонами плазми крові або фізрозчину (E_g, μ_g), і структурованої гідратної оболонки з адсорбованими частинками (E_h, μ_h) (Рис.1).

Ця шарувата поверхня розташована між двох рідин, а саме внутрішнім (in) вмістом клітини ($Hb + H_2O$) і зовнішнім (out) середовищем (плазма крові або фізрозчин). Механічні властивості цієї поверхні можна дослідити в ізометричних (постійне механічне напруження $\sigma = const$), ізотонічних (постійна деформація $\varepsilon = const$) і динамічних (періодична зовнішня сила $f(t) \sim e^{i\omega t}$).

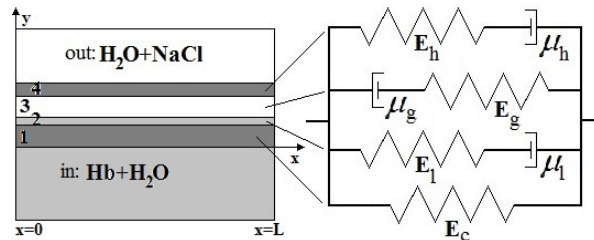


Рис.1. Шарувата схема будови і реологічна модель еритроцита.

Рівняння реологічної моделі (Рис.1) є

$$a_1 \ddot{\varepsilon} + a_2 \dot{\varepsilon} + a_3 \varepsilon + E_c \varepsilon = b_1 \ddot{\sigma} + b_2 \dot{\sigma} + \sigma,$$

$$a_1 \lambda^3 \frac{d^3 \varepsilon}{dt^3} + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + E_c = 0, \quad (3)$$

а константи $C_{1,2,3}$ обчислюються як

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\sigma^* / E_c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При ізометричному навантаженні $\varepsilon = \varepsilon^*$ рівняння (1) дає для напружень в матеріалі

$$\sigma(t) = \frac{E_c \varepsilon^* \lambda_3}{\lambda_4 - \lambda_5} \exp(\lambda_4 t) + \frac{E_c \varepsilon^* \lambda_4}{\lambda_5 - \lambda_4} \exp(\lambda_5 t) + E_c \varepsilon^*, \quad (4)$$

де $\lambda_{4,5}$ - корені алгебраїчного рівняння $b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + 1 = 0$.

При динамічному навантаженні (1) отримуємо для коливань напружень в матеріалі

$$\sigma(t) = \sigma_0 E(\omega) \exp(i\omega t + i\varphi), \quad (5)$$

де динамічний модуль пружності має вигляд

$$E(\omega) = \frac{\sqrt{A^2 + \omega^2 B^2}}{(1 - b_1 \omega^2)^2 + b_2^2 \omega^2}, \quad (6)$$

де $A = E_c + (b_2 a_3 - a_2 - b_1 E_c) \omega^2 + (a_2 b_1 - a_1 b_2) \omega^4$,

$B = a_3 - E_c b_2 + (a_2 b_2 - a_3 b_1 - a_1) \omega^2 + a_1 b_1 \omega^4$, а зсув фаз між осциляціями напружень і деформацій $\varphi = \arctg(B/A)$.

3. Постановка задачі. Динамічна поведінка нестисливого в'язкопружного матеріалу описується рівняннями [9].

$$\operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \quad (7)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \operatorname{div} \hat{\Sigma} + \vec{F}, \quad (8)$$

де $\vec{u}$ - вектор переміщень, ρ і $\hat{\Sigma} = -p\hat{\delta} + \hat{\sigma}$ - густина і повний тензор напружень, p - гідростатичний тиск, $\hat{\delta}$ - одиничний тензор, $\hat{\sigma}$ - тензор в'язкопружних напружень, $\vec{F}$ - зовнішні сили.

Підставляємо (1) в (8) і з урахуванням (7) отримуємо рівняння у переміщеннях ($\vec{F} = 0$)

$$\left[b_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + b_2 \frac{\partial}{\partial t} + I \right] \left[\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + \nabla p \right] = \left[a_1 \frac{\partial^3}{\partial t^3} + a_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + a_3 \frac{\partial}{\partial t} + E_c \right] \Delta \vec{u}, \quad (9)$$

Розглянемо полосу матеріалу $\{x \in [0, L], y \in [0, H]\}$ (Рис.1), на кінці $x=0$ якої генерується мале збурення $p_0(t), u_0(t)$, яке Ньютона. Розв'язки (11) відповідали двом швидким рідинним модам (хвилі Юнга) і двом повільним пружним модам (хвилі Ламе). Усі обчислені залежності із задовільною точністю (<5.4%) відповідають даним експериментів [6-8].

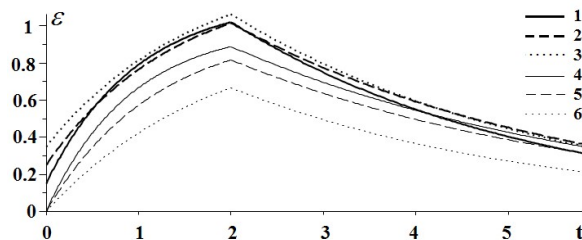


Рис.2. Залежності $\varepsilon(t)$ при навантаженні ($\sigma = \sigma^*$) і

розвантаженні ($\sigma = 0$) моделі для $E_c = 10^8$ (1-3) і

$E_c = 10^6$ (4-6), $E_m = 10^6, \mu_m = 10^{-2}$ (1,4),

$E_m = 10^7, \mu_m = 0.1$ (2,5), $E_m = 10^8, \mu_m = 1$ (3,6).

$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \exp(i\omega t)$ (вимушені коливання) із моделі розповсюджується вздовж полоси у вигляді хвилі, що біжить $\{\vec{u}(t, x, y) = u(y) \exp(i\omega(t - x/c)) \vec{e}, p(t, x, y) = p_0 \exp(i\omega(t - x/c))\}$. Підстановка цих виразів у (9) дає ЗДР другого порядку для $u(y)$

$$u'' + u \left(\rho \omega^2 [A + iB] - \frac{\omega^2}{c^2} \right) = -\frac{i\omega}{c} [A + iB] p_0, \quad (9)$$

де $A + iB = \frac{(1 - b_1 \omega^2) + i\omega b_2}{(E_c - a_2 \omega^2) + i\omega(a_3 - a_1 \omega^2)}$, розв'язок якого з урахуванням кінематичних граничних умов на поверхнях розділу є

$$u(y) = ((d_1 + d_2 \lambda_6) e^{\lambda_6 y} - (d_1 - d_2 \lambda_6) e^{-\lambda_6 y} - 2\lambda_6 d_2) / 2\lambda_6, \quad (10)$$

$$\text{де } d_1 = \frac{u_0 \mu_{Hb}}{H a_3}, \quad d_2 = \frac{i\omega c [A + iB] p_0}{\rho \omega^2 c^2 [A + iB] - \omega^2},$$

$\lambda_6 = \sqrt{(\omega^2 - \rho \omega^2 c^2 [A + iB])} / c$, а для визначення

швидкості розповсюдження хвилі маємо дисперсійне співвідношення $c = c(\omega)$ у вигляді

$$(d_1 - d_2 \lambda_6) = (d_1 + d_2 \lambda_6) \exp(2\lambda_6 H). \quad (11)$$

4. Результати і обговорення. Чисельні розрахунки кривих навантаження-розвантаження (2), (4), вимушених коливань (5), а також частотної залежності динамічного модуля пружності (6) і швидкості розповсюдження малих збурень (11) проводилися з використанням значень $\{E_c, E_l, E_g, E_h, \mu_l, \mu_g, \mu_h, H\}$, властивих компонентам поверхні еритроцитів в фізіологічних діапазонах $E_j \in [10^3; 10^8]$ Па, $\mu_j \in [10^{-3}; 10^1]$ Па·с. Рівняння (11) є алгебраїчним рівнянням 4-го порядку, розв'язки якого обчислювалися модифікованим методом

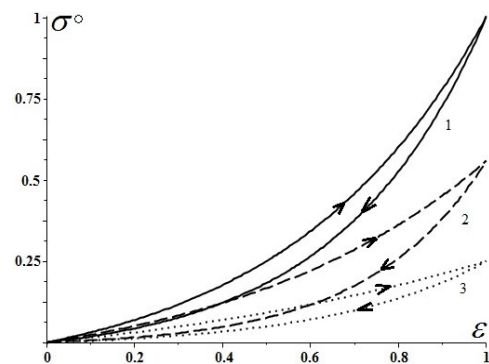


Рис.3. Залежності $\sigma(\varepsilon)$ при навантаженні-розвантаженні моделі для $E_{c,g,h} = 10^4$ (1), 10^6 (2), 10^8 (3).

5. Висновки. Запропонована модель описує в'язкопружну поведінку мембран еритроцитів як шаруватих оболонок і дозволяє виявити вплив змін пружностей і в'язкостей кожного

шару у зв'язку з будь-якими змінами стану швидкостей хвиль Юнга і Ламе на різних частотах можуть використовуватися для вимірювань в'язко пружних параметрів поодиноких еритроцитів для цілей медичної діагностики захворювань і впливу проведеного лікування на стан пацієнта. Подальша розробка деталей методу і його перевірка на результатах

і учасникам конференції за увагу до роботи і стимулююче обговорення результатів.

організму людини. Отримані значення експериментів складе тему наступних досліджень авторів.

Результати роботи були викладені у доповіді на VI Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки» (Київ, 30–31 серпня 2021 р.). Автори щиро вдячні організаторам

Список використаних джерел

1. Formaggia L. Cardiovascular Mathematics. Modeling and Simulation of the Circulatory System / L. Formaggia, A. Quarteroni, A. Veneziani – Springer-Verlag Mairland, 2009. – 522 p.
2. Puig-de-Morales-Marinkovic M. Viscoelasticity of the human red blood cell / M. Puig-de-Morales-Marinkovic, K.T. Turner, J.P. Butler, et al. // Am. J. Physiol. – 2007. – Vol.293. – P.597–605.
3. Islamzada E. Deformability based sorting of stored red blood cells reveals donor-dependent aging curves / E. Islamzada, K. Matthews, Q. Guo, et al. // Lab Chip. – 2020. – Vol.20. –P. 226-235.
4. Abdalla S. Effect of erythrocytes oscillations on dielectric properties of human diabetic-blood / S. Abdalla // AIP Advances. – 2011. – Vol. 1, 012104.
5. Batyuk L. Modeling of dielectric permittivity of the erythrocytes membrane as a three-layer model / L. Batyuk, N. Kizilova // In: *Development trends in medical science and practice*. Riga: “Baltija Publishing”. – 2018. –P. 18-37.
6. Guglietta F. On the effects of membrane viscosity on transient red blood cell dynamics / Guglietta F., Behr M., Biferale L., et al.// Soft Matter. – 2020. – Vol. 16. – P. 6191-6205.
7. Su T.C. The effect of viscosity on free oscillations of fluid-filled spherical shells / T.C. Su // Journal of Sound and Vibration. –1981. – Vol.74. – P. 205-220.
8. Johansen K. Theory of red blood cell oscillations in an ultrasound field // K. Johansen, E. Kimmel, M. Postema – Archives of Acoustics. – 2017. – Vol. 42. – P. 121–126.
9. Dill E.H. Continuum Mechanics. Elasticity, Plasticity, Viscoelasticity/ E.H. Dill. – CRC Press. –2006. –368 p.

References

- 1.FORMAGGIA, L., QUARTERONI, A., VENEZIANI, A. (Eds.) (2009) *Cardiovascular Mathematics. Modeling and Simulation of the Circulatory System*. Springer-Verlag.
- 2.PUIG-DE-MORALES-MARINKOVIC, M., TURNER, K.T., BUTLER, J.P., et al. (2007) Viscoelasticity of the Human Red Blood Cell. *Am. J. Physiol.* Vol.293. P.597–605.
- 3.ISLAMZADA, E., MATTHEWS, K., GUO, Q., et al. (2020) Deformability based sorting of stored red blood cells reveals donor-dependent aging curves. *Lab Chip*. Vol.20. P. 226-235.
- 4.ABDALLA, S. (2011) Effect of erythrocytes oscillations on dielectric properties of human diabetic-blood. *AIP Advances*. Vol. 1, 012104.
- 5.BATYUK, L., KIZILOVA, N. (2018) Modeling of dielectric permittivity of the erythrocytes membrane as a three-layer model. In: *Development trends in medical science and practice*. Riga: “Baltija Publishing”. P. 18-37.
- 6.GUGLIETTA, F., BEHR, M., BIFERALE L., et al. (2020) On the effects of membrane viscosity on transient red blood cell dynamics. *Soft Matter*. Vol. 16. P. 6191-6205.
- 7.SU, T.C. (1981) The effect of viscosity on free oscillations of fluid-filled spherical shells. *Journal of Sound and Vibration*. Vol.74. P. 205-220.
- 8.JOHANSEN, K., KIMMEL, E., POSTEMA, M. (2017) Theory of red blood cell oscillations in an ultrasound field. *Archives of Acoustics*. Vol. 42. P. 121–126.
- 9.DILL, E.H. (2006) *Continuum Mechanics. Elasticity, Plasticity, Viscoelasticity*. CRC Press.

Надійшла до редколегії 17.12.2021

УДК 532.516

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/1.5>

Вовк І. В.¹, д.ф.-м.н., проф.
Малюга В. С.¹, д.ф.-м.н., пров.н.с.,
Духновський В. Ю.², аспірант

Vovk I. V.¹, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof.
Malyuga V. S.¹, Dr. Sci. (Phys.–Math.), L. R. F.,
Duhnovsky V. Yu.², postgraduate student,

Автоколивання потоку при обтіканні кругового циліндра зі спліттером

Self-sustained oscillations in the flow past a circular cylinder with splitter plate

¹ Інститут гідромеханіки, Національна
академія наук України, 03057, м. Київ, вул.
Марії Капніст, 8/4,
e-mail: malyuga@nas.gov.ua
² Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: vasduhnov@gmail.com

¹ Institute of Hydromechanics, National Academy of
Sciences of Ukraine, 03057, Kyiv, Marii Kapnist str.,
8/4,
e-mail: malyuga@nas.gov.ua
² Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkov ave, 4d,
e-mail: vasduhnov@gmail.com

Чисельно розв'язано задачу про генерацію автоколивань в потоці при обтіканні кругового циліндра з розділювальною пластинною (спліттером). Автоколивання полів швидкості і тиску викликані періодичним формуванням та відривом вихорів за циліндром. Показано еволюцію поля завихренності і сил, що діють на обтічне тіло, за різної довжини пластини спліттера.

Ключові слова: обтікання циліндра, спліттер, автоколивання, відрив вихорів, вихровий слід.

The problem of generation of self-sustained oscillations in the flow past a circular cylinder with a splitter plate is solved numerically. At the initial moment the fluid is at rest. We investigate both the transient process and the steady periodic vortex formation and shedding behind the cylinder. The evolution of the vorticity field is shown for various length of the splitter plate. It is demonstrated that the splitter oriented along the flow direction significantly reduces the forces applied to the cylinder. With increasing splitter length the average value of the drag force decreases monotonically but the amplitudes of oscillation of the forces applied to the body change nonmonotonically. In this paper we offer our explanation of this phenomenon. It is shown that when turning the splitter plate at some angle from the flow direction the process of vortex formation and shedding behind the cylinder is no longer strictly regular and periodic at the range of Reynolds number considered in the paper.

Key Words: flow past cylinder, vortex shedding, splitter plate, vortex wake, OpenFOAM.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Since vortex shedding in a flow behind a cylinder can lead to undesirable vibrations [1], it is necessary to be able to control this process. A simple way to decrease the drag and the oscillating lift force consists in positioning a splitter plate in the wake. The flow past a cylinder with a splitter plate has been the subject of many computational and experimental works [2-8]. In the experimental work [2] the models with comparatively small splitters ($h/d \leq 2$, where h is a length of the splitter plate, d is a diameter of the cylinder) were considered at the Reynolds number in the range $10^4 < Re < 5 \times 10^4$. It was concluded that splitter plates reduce the drag by stabilizing the separation points. They produce a wake narrower than that of a plain cylinder. Even a very short splitter

plate markedly reduce the drag coefficient C_d . For example, $h/d=1/16$ effects the 9% reduction and $h/d=1/8$ effects the 16% reduction. C_d may be reduced by as much as 31% with a plate of $h/d=1$. The vortex shedding frequency varies by $\pm 10\%$ within the range $h/d \leq 2$. In [3] a discrete vortex model was developed to investigate the unsteady flow in the wake of a cylinder with a splitter plate. It was established that even the short splitter plate produces a significant change of the fluctuating lift: 80% reduction of the fluctuating lift for the plate of $h/d=1/16$. In [4] the control over the vortex shedding with splitter plates was numerically simulated at the Reynolds numbers of 80-160. Prediction of the vortex shedding was in close agreement with the experimental

data by Williamson [5]. The experimental results in [6, 9, 10] were very similar to the numerical results in [4] at $Re = 120-160$. The net drag was significantly reduced by the splitter plate. There existed an optimum length of the plate for minimum drag at a given Reynolds number. In [7] an experimental study was carried out to investigate the effect of a splitter plate. The splitter plate length h/d varied from 0 to 1.5 and the Reynolds number was assumed to be 2400 and 3000. The experimental results showed that the splitter plate had an effect on stabilization of wake turbulences. For splitter plate length of $h/d=0.5$ and 0.75 , the flow structure was significantly modified. The vortex shedding frequency decreased as compared to the bare cylinder case. For higher splitter plate length of $h/d=1, 1.25$ and 1.5 , the generation of a secondary vortex was observed. It was determined that the splitter plate length of $h/d=1$ was optimal for suppression of the velocity fluctuations. The stabilizing effect of the splitter plate was more obvious at $Re=3000$. In [8] the flow around a cylinder with a splitter plate was numerically investigated using the finite volume method. The problem was considered in frames of Reynolds Averaged Navier-Stokes approximation. It was revealed that the vortex shedding behind a cylinder is completely suppressed when the splitter plate length is longer than some critical value which was proportional to the Reynolds number. When the splitter plate length was similar to the diameter of the cylinder, the vortex frequency, drag, and oscillation of the lift coefficient reached local minimum.

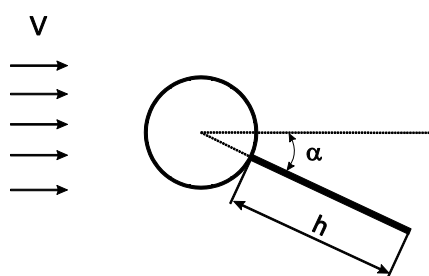


Fig. 1. Geometry of the problem

In this paper we described the hydrodynamic feedback channel which causes the periodic process of vortex shedding. The numerical simulation of the steady process of vortex shedding is performed for the splitter length in the range from $h=d/2$ to $h=11d/2$ but only for $Re=200$. It is shown that a splitter plate oriented along the flow significantly reduces the average drag force and the amplitude of oscillation of the forces applied to the body. With increasing splitter length the average value of the drag decreases monotonically. The amplitudes of oscillation of the forces applied to the body change nonmono-

tonically. We give our explanation of this phenomenon. In the present paper the problem of viscous incompressible fluid flow past a cylinder with a splitter plate is solved numerically by using Direct Numerical Simulation (DNS) technique.

Statement of the problem. The algorithm for its numerical solution

Let us consider the problem of a flow of viscous incompressible fluid past a stationary circular cylinder with a flat splitter attached behind the cylinder. The splitter is an absolutely rigid thin plate. It can be oriented along the flow or at some angle to the flow direction. The computational domain and the accepted designations are shown in fig. 1. The computational domain occupies the rectangle $0 < x < L_1$, $0 < y < L_2$. The fluid enters the domain through the left side ($x=0$) with the constant velocity V . Then the flow runs against a circular cylinder of diameter d with a thin splitter plate of length h located behind it and leaves the computational domain through the right boundary ($x=L_1$).

The problem is formulated within the framework of the model of viscous incompressible Newtonian fluid. Such flow is described by the nonstationary system of Navier-Stokes equations. To bring the governing equations to the dimensionless form, the cylinder diameter d was taken as the length scale, the velocity of the uniform flow V at a sufficiently large distance from the cylinder was taken as the velocity scale. Then the time scale is the magnitude d/V , the pressure scale is the double pressure head ρV^2 . The key parameter of the problem which enters into the governing equations is the Reynolds number $Re = Vd / \nu$, where ν is the kinematic viscosity of the medium.

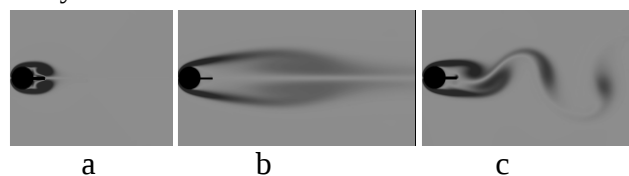


Fig. 2. Vorticity field during the transient process $Re=200$, $\alpha = 0$, $h=d/2$: a) $t=2.5$, b) $t=41$, c) $t=140$

The boundary conditions for the velocity were specified as follows: the uniform flow at the inlet ($x=0$), the non-slip condition at the solid surface of the cylinder and the splitter, the zero normal gradient at the outlet ($x=L_1$). For pressure, the condition of zero normal gradient was formulated all over the boundary except for the outlet. At the outlet a constant pressure was prescribed. In this paper, we per-

formed numerical calculations for $Re = 200$ while the splitter length h varied from $0.5d$ to $5.5d$.

The algorithm for numerical solution of the formulated problem is described in detail in [11]. It is based on the finite volume method, which is the most popular numerical approach in computational fluid mechanics. The toolbox with open code OpenFOAM was used for calculations. The spatial discretization was performed on a structured O-type grid with nodes concentrated near the solid surface of the cylinder and the splitter. The length of a control volume's side did not exceed 10^{-4} in the immediate vicinity of the surface. The second-order schemes were used both for spatial and temporal discretization. In particular, the TVD scheme implemented in OpenFOAM was used to discretize the convective terms. For the discretization of the time derivative we used an implicit three-point asymmetric second-order scheme with backward steps (backward differencing scheme). In order to verify the constructed numerical algorithm, the classical problem of nonstationary flow separation behind a circular cylinder was solved numerically [1]. The obtained results were compared with the numerical and experimental data of other authors. To parallelize the computations, we used MPI technology and the parallelization method known as the solution domain decomposition which is based on the geometric parallelism. The calculations were performed on the cluster supercomputer of the Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine.

Analysis of the numerical results

First we consider the transient process for the case that the splitter length is equal to the cylinder's radius $h = d/2$ and $\alpha = 0$. The flow develops in time from rest. Once the motion begins, a pair of vortices that have vorticity equal in absolute value but opposite in sign arises behind the cylinder. In other

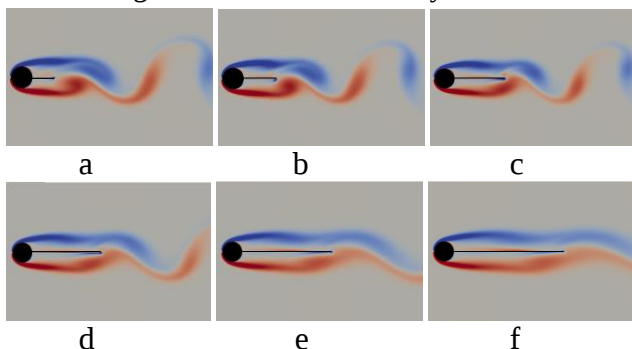


Fig. 3. Vorticity field for the steady process of vortex shedding ($Re=200$, $\alpha = 0$): a) $h=d$, b) $h=3d/2$, c) $h=5d/2$, d) $h=7d/2$, e) $h=9d/2$, f) $h=11d/2$

words, two symmetric vortices that rotate in opposite directions appear at the rear. Figs. 2 demonstrate the vorticity field at three moments of time. In fig. 2a the vortex pair behind the cylinder has just arisen. The horizontal size of the vortices only slightly exceeds the diameter of the cylinder. As time goes on, the

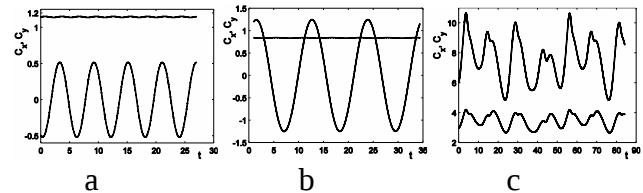


Fig. 4. Periodic oscillations of the force coefficients acting on the solid body: a) for $h=d/2$, $\alpha = 0$, the upper curve is the drag coefficient C_x , the lower curve is the lift coefficient C_y , b) for $h=11d/2$, $\alpha = 0$, the curve with a small amplitude of oscillations is C_x , the curve with the high amplitude is C_y , c) for $h=11d/2$, $\alpha = 20^\circ$, the upper curve is C_y , the lower curve is C_x

extent of the vortex pair grows and reaches a certain maximum value at the time approximately $t=41$. The vorticity field at that moment of time is shown in fig. 2b. At the boundary of this stationary vortex pair the expanding mixing layer is formed, i.e. the shear flow layer, that is characterized by significant transverse velocity gradients. High transverse gradients lead to flow instability. On further increase of the vortex pair, the symmetry of the flow is violated. At the moment $t = 57$ the flow symmetry begins to collapse. As time goes on, the flow symmetry behind the cylinder completely collapses and the flow passes into the regime of periodic vortex shedding. The upper and lower vortices detach in turn. This regime is demonstrated in fig. 2c for the time $t = 140$.

Now let us consider the steady process of self-sustained oscillations of the flow behind the cylinder. The vorticity fields are represented in fig. 3 for various lengths of the splitter plate. The splitter is positioned along the flow. It can be seen that the vortices are formed not immediately behind the cylinder surface, as it was in the flow past a circular cylinder without a splitter [1], but at some distance from the rear of the cylinder. It means that the vortices interact not so much with the cylinder, but rather with the splitter plate. For $h=d$ the shear layers formed on the cylinder surface separate from the cylinder and move along the splitter. The formation of large eddies in the wake occurs behind the rear point of the splitter. Consequently, the large vortices formed in the flow interact with the rear part of the

splitter rather than with the cylinder surface. As the splitter length increases, the interaction of the rear part of the splitter with the large vortices formed in the shear layers increases. At splitter length $h=5d/2$ the large eddies are formed before the rear part of the splitter. With further splitter elongation ($h=9d/2$ and $h=11d/2$), the large eddies in the wake are no longer observed. The separated shear layers simply take a wavy form. Thus, the elongation of the splitter has a

ter length increases the drag force slightly decreases, whereas the amplitude of the lift force variation increases more than twice. Fig. 4c corresponds to the case when the splitter is turned at the angle $\alpha = 20^\circ$ to the flow direction. In this case, the average value of the lift force becomes nonzero due to the deviation of the splitter. Moreover, the curve of the lifting force lies higher than the curve of the drag force. So,

Таблиця 1

The periodic flow characteristics for various values of the splitter length h ($Re=200$, $\alpha=0$). The following denotations are used: T is the oscillation period, St is the Strouhal number, C_x^c is the average value of the drag coefficient, A_x is the amplitude of the drag coefficient oscillation, A_y is the amplitude of the lift coefficient oscillation, $N = A_x / A_y$ is the ratio of the oscillation amplitudes of the coefficients C_x^0 , C_y^0

h	0	r	$2r$	$3r$	$5r$	$7r$	$9r$	$11r$
T	5.082	5.89	6.30	5.72	5.78	7.22	9.11	11.2
St	0.197	0.170	0.159	0.175	0.173	0.139	0.110	0.089
C_x^c	1.343	1.146	1.044	1.039	0.997	0.927	0.875	0.840
A_x	$5 \cdot 10^{-2}$	$7.2 \cdot 10^{-3}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$	$6.2 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$5.2 \cdot 10^{-3}$	$4.4 \cdot 10^{-3}$	$4.9 \cdot 10^{-3}$
A_y	0.686	0.518	0.333	0.416	0.949	1.150	1.241	1.249
N	$7.3 \cdot 10^{-2}$	$1.39 \cdot 10^{-2}$	$0.72 \cdot 10^{-2}$	$1.49 \cdot 10^{-2}$	$1.16 \cdot 10^{-2}$	$0.45 \cdot 10^{-2}$	$0.35 \cdot 10^{-2}$	$0.39 \cdot 10^{-2}$

generally stabilizing effect on the flow.

The periodic nature of the flow in the cylinder's wake leads to the fact that the forces applied to the cylinder change periodically as well. The interaction of the vortices has practically no effect on the front critical point, because of its remoteness from the vortex separation region. Fig. 4a shows the time evolution of both the drag coefficient C_x and the lift coefficient C_y for $h = d/2$, $\alpha = 0$. Obviously, the forces change periodically. The period of drag variation is half the period of lift force variation. In other words, the oscillation frequency of the force acting on the cylinder and the splitter in the horizontal direction is twice as large as the oscillation frequency of the force in the vertical direction. The same effect occurs in the flow past a circular cylinder without a splitter [1]. The other two fig. 4 show the time variation of the force coefficients for the splitter length $h = 11d/2$. Fig. 4b corresponds to the case when the splitter is positioned along the flow direction. In this case, due to the symmetric geometry of the problem, the lift force oscillates around zero, and the frequency of the drag force oscillation is twice higher than the frequency of the lift force oscillation. It worth noting that with elongation of the splitter plate the amplitude of lifting force variation grows so much that its peak values exceed the drag force. At the same time, the drag force decreases slightly. Thus, comparing fig. 4a and 4b we can see that as the split-

ter length increases the drag force slightly decreases, whereas the amplitude of the lift force variation increases more than twice. Fig. 4c corresponds to the case when the splitter is turned at the angle $\alpha = 20^\circ$ to the flow direction. In this case, the average value of the lift force becomes nonzero due to the deviation of the splitter. Moreover, the curve of the lifting force lies higher than the curve of the drag force. So,

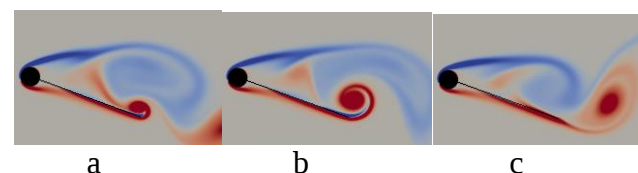


Fig. 5. The vorticity field during the vortex shedding period T ($Re=200$, $\alpha = 20^\circ$, $h=11d/2$): a) at some time $t = t_0$, b) at $t = t_0 + T/4$, c) at $t = t_0 + 3T/4$

located near the solid surface up to the splitter tip. The separation of the lower shear layer and the formation of a large vortex occur behind the splitter. Thus, the oscillations of the upper and lower shear layers are of different nature and differ in frequency.

This reasoning explains the violation of strict regularity and periodicity of the oscillation process of the forces applied to the cylinder and the splitter. In other words, the process of vortex formation and shedding from the body surface continues but the strict regularity and periodicity of this process is no longer observed.

The forces applied to the cylinder and the splitter can be represented as a sum of constant and oscillating parts $\mathbf{F} = \mathbf{F}^c + \mathbf{F}^o$. It is obvious that if the splitter plate is positioned along the incoming flow direction, $C_y^c = 0$, if the splitter deviates by some angle α , a nonzero mean value of the lift force arises $C_y^c \neq 0$. Table 1 shows the values of the constant component C_x^c , the amplitudes of the oscillating components C_x^o , C_y^o and the ratio of these amplitudes for various splitter lengths. In addition, the table shows the period of the oscillation and the corresponding Strouhal number. It is evident that the splitter plate behind the cylinder substantially reduces the average value of the drag coefficient. Moreover, the drag coefficient continues to decrease as the splitter length increases. This happens apparently because the vortex formation behind the cylinder leads to appearance of some reverse motion zones near the surface of the splitter plate. The reverse flow near the body reduces the drag. It should also be noted that the splitter plate substantially decreases the amplitude of the drag coefficient oscillation. Thus, in the flow around a cylinder without a splitter ($h=0$) the amplitude of the drag coefficient oscillation is $5 \cdot 10^{-2}$. In the presence of even a small splitter plate, whose length is equal to the radius of the cylinder, the amplitude of the drag coefficient oscillation decreases to $0.72 \cdot 10^{-2}$. With further elongation of the splitter plate, the oscillation amplitude of C_x^o behaves nonmonotonically. First, it decreases as h grows up to $h=d$, then it increases for h up to $h=5d/2$, then it decreases again for h up to $h=9d/2$ and then increases again. This apparently depends on how many vortices detached from the cylinder surface can be located along the splitter. It should also be noted that in the presence of a splitter plate the oscillation period, that is the time between shedding two adjacent vortices, increases substantially. On further elongation the splitter plate the period of vortex formation increases as well. However, this process is nonmonotonic. Thus, if the splitter plate length changes from $h=d$ to $h=3d/2$, the period sharply decreases. Figs. 6 show instantaneous streamline patterns at various splitter plate lengths. It is easy to see that there are large vortex structures on both sides of

the splitter. As a consequence, some zones of reverse flow occur at the surface of the splitter. As already noted above, this leads to the fact that the average drag force and the oscillation amplitude of the drag coefficient decrease sharply in the presence of a splitter. With a further increase in the splitter length, not one but several large vortices can be located at each splitter side. The fact that a different number of

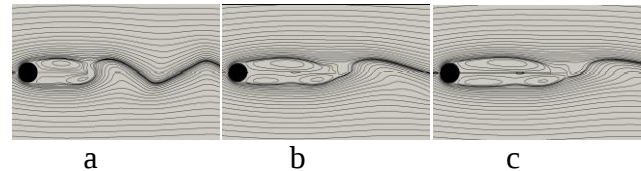


Fig. 6. Instantaneous streamlines ($Re=200$, $\alpha=0$): a) $h=5d/2$, b) $h=9d/2$, c) $h=11d/2$

the vortices are observed along the splitters of different length explains why the amplitude of the drag coefficient oscillation behaves nonmonotonically with increase in the splitter length. First, it decreases as h increases up to $h=d$. With such values of the splitter length there is one vortex near each side. The vortices lead to the decrease in both the average value of the drag coefficient and the amplitude of drag oscillations. Then, as the splitter length increases to $h=5d/2$, these vortices grow, which leads to reduction in the flow stability. As a consequence, the amplitude of the drag force oscillation increases with the splitter extension to $h=5d/2$. At $h=5d/2$ two large vortices arise alternately near the splitter sides. As the splitter length increases from $h=5d/2$ to $h=9d/2$, the amplitude of oscillation of the drag coefficient decreases. With a further elongation the splitter plate the size of the vortices near the splitter sides increases. This again leads to the instability of such a system. Therefore, as the splitter length increases above $h=9d/2$, the amplitude of oscillation of the drag force increases again. However the average value of the drag coefficient decreases monotonically with increasing splitter length h .

Conclusion

The flow past a circular cylinder with a flat splitter plate is numerically simulated. The self-sustained oscillations of the flow caused by the periodic vortex shedding are studied. The calculated data for the main flow characteristics at various splitter lengths are represented. The case when the splitter is turned at some angle to the flow direction is also considered. It is shown that a splitter plate oriented along the flow direction reduces significantly the average drag and the amplitude of oscillation of the forces. With increasing splitter length the average drag decreases monotonically.

The amplitudes of oscillation of the forces change nonmonotonically. If the splitter plate is turned at the angle $\alpha = 20^\circ$, the process of vortex shedding is also observed, but such a process is no longer regular and

periodic. In conclusion it should be said that the periodic change in pressure on the side of the body is a source of sound oscillations of the dipole type.

Список використаних джерел

1. Вовк І. В. Об одном методе оценки звукового поля эоловых тонов / И. В. Вовк, В. С. Малюга // Акуст. вісн. - 2010. - 13, N 2. - С. 3-19.
2. Apelt C. J. The effects of wake splitter plates on the flow past a circular cylinder in the range $10^4 < R < 5 \times 10^4$ / C. J. Apelt, G. S. West, A. A. Szewczyk // J. Fluid Mech. - 1973. - 61. - P. 187-198.
3. Kawai H. Discrete vortex simulation for flow around a circular cylinder with a splitter plate / H. Kawai // J. Wind Eng. Indust. Aerodyn. - 1990. - 33. - P. 153-160.
4. Kwon K. Control of laminar vortex shedding behind a circular cylinder using splitter plates / K. Kwon, H. Choi // Phys. Fluids. - 1996. - 8. - P. 479-486.
5. Williamson C. H. K. Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of a circular cylinder at low Reynolds numbers / C. H. K. Williamson // J. Fluid Mech. - 1989. - 206. - P. 579-627.
6. Cimbalá J. M. Flow in the Wake of a Freely Rotatable Cylinder with Splitter Plate / J. M. Cimbalá, S. Garg // AIAA J. - 1991. - 29. - P. 1001-1003.
7. Liu K. Experimental study on the confined flow over a circular cylinder with a splitter plate / K. Liu, J. Deng, M. Mei // Flow Meas. Instrum. - 2016. - 51. - P. 95-104.
8. Vu H. C. Numerical investigation of flow around circular cylinder with splitter plate / H. C. Vu, J. Ahn, J. H. Hwang // KSCE J. Civ. Eng. - 2016. - 20. - P. 2559-2568.
9. Gerrard J. H. The mechanics of the formation region of vortices behind bluff bodies. / J. H. Gerrard // J. Fluid Mech. - 1966. - 25. - P. 401-413.
10. Apelt C. J. The effects of wake splitter plates on bluff body flow in the range $10^4 < R < 5 \times 10^4$. / C. J. Apelt, G. S. West // J. Fluid Mech. - 1975. - 71. - P. 145-160.
11. Малюга В. С. Численное исследование течения в канале с двумя последовательно расположенными стенозами. Алгоритм решения / В. С. Малюга // Прикл. гідромех. - 2010. - 12, N 4. - С. 45-62.

References

1. VOVK, I. V. & MALYUGA, V. S. (2010) On one method for estimation of the sound field of Aeolian tones. *Acoustic bull.* 13 (2). p. 3-19 [in Russian].
2. APELT, C. J., WEST, G. S., SZEWCZYK, A. A. (1973) The effects of wake splitter plates on the flow past a circular cylinder in the range $10^4 < R < 5 \times 10^4$. *J. Fluid Mech.* 61. p. 187-198.
3. KAWAI, H. (1990) Discrete vortex simulation for flow around a circular cylinder with a splitter plate. *J. Wind Eng. Indust. Aerodyn.* 33. p. 153-160.
4. KWON, K. & CHOI, H. (1996) Control of laminar vortex shedding behind a circular cylinder using splitter plates. *Phys. Fluids.* 8. p. 479-486.
5. WILLIAMSON, C. H. K. (1989) Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of a circular cylinder at low Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* - 206. p. 579-627.
6. CIMBALA, J. M. & GARG, S. (1991) Flow in the Wake of a Freely Rotatable Cylinder with Splitter Plate. *AIAA J.* 29. p. 1001-1003.
7. LIU, K., DENG, J., MEI, M. (2016) Experimental study on the confined flow over a circular cylinder with a splitter plate. *Flow Meas. Instrum.* 51. p. 95-104.
8. VU, H. C., AHN, J., HWANG, J. H. (2016) Numerical investigation of flow around circular cylinder with splitter plate. *KSCE J. Civ. Eng.* 20. p. 2559-2568.
9. GERRARD, J. H. (1966) The mechanics of the formation region of vortices behind bluff bodies. *J. Fluid Mech.* 25. p. 401-413.
10. APELT, C. J., WEST, G. S. (1975) The effects of wake splitter plates on bluff body flow in the range $10^4 < R < 5 \times 10^4$. *J. Fluid Mech.* 71. p. 145-160.
11. MALYUGA, V. S. (2010) Numerical investigation of the flow in a canal with two consecutive stenoses. Algorithm of solution. *Appl. Hydromech.* 12 (4). p. 45-62.

Надійшла до редколегії 24.01.22

УДК 539.3

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/1.6>

Савельєва К. В.¹, к. ф.-м. н., доц.,
Дашко О.Г.¹, к. ф.-м. н.

K.V. Savelieva¹, Ph.D. (Phys.-Math.), Sci. Researcher
O.G. Dashko¹, Ph.D. (Phys.-Math.), Sci. Researcher

**Взаємодія плоских пружних хвиль.
Врахування квадратичної та кубічної
нелінійності.**

**Plane elastic wave interaction.
Considering of quadratically and cubically
nonlinearity**

¹ Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН
України, 03057 м. Київ, вул. П. Нестерова, 3,
e-mail: katerina1971s@gmail.com

¹S. P. Timoshenko Institute of Mechanics NAS of
Ukraine, 03057, Kyiv, P. Nesterov str., 3
e-mail: katerina1971s@gmail.com

Теоретично досліджується взаємодія пружних плоских гармонічних хвиль в матеріалі, нелінійні властивості якого описуються пружним потенціалом Мурнагана. Завдяки урахуванню залежності вектора переміщень тільки від однієї просторової змінної та часу, записується та використовується запис повної системи рівнянь для плоских хвиль, що поширюються вздовж осі абсцис. Розглядається взаємодія поздовжніх хвиль з окремим урахуванням кубічної нелінійності. На основі кубічного рівняння руху вивчається взаємодія чотирьох гармонічних хвиль. Застосовується метод повільно змінних амплітуд, отримуються вкороченні та еволюційні рівняння, перші інтеграли цих рівнянь та запис закону збереження для комплексу чотирьох взаємодіючих хвиль. Проводиться аналогія між досліджуваними при урахуванні взаємодії трьох хвиль триплетами та квадруплетами, досліджуваними в розглянутому випадку, з урахуванням чотирьоххвильової взаємодії.

Ключові слова: гармонічна хвиля, кубічна нелінійність, пружний потенціал, плоска хвиля, квадруплет, чотирьоххвильова взаємодія.

The interaction of elastic plane harmonic waves in the material, the nonlinear properties of which are described by the elastic potential of Murnaghan, is investigated theoretically. The displacement vector is depended of only one spatial variable and time, a record of the complete system of equations for plane waves moves along the abscissa axis is recorded and used. The interaction of longitudinal waves with a separate considering cubic nonlinearity is investigated. On the basis of the cubic equation of motion, the interaction of four harmonic waves is studied. The method of slowly variable amplitudes is used. Firstly the two-wave interaction is investigated, then the interaction of four waves is described. Shorten and evolutionary equations are obtained, the first integrals of these equations and the record of the law of conservation for a set of four interacting waves are obtained. An analogy is made between the triplets studied when taking into account the interaction of three waves and the triplets investigated in the case under consideration, taking into account the four-wave interaction, quadruplets.

Key Words: harmonic wave, cubic nonlinearity, elastic potential, plane wave, quadruplet, four-wave interaction

Статтю представив член-кореспондент НАН України Жук Я.О.

Вступ. Постановка задачі

Предметом публікації є результати теоретичного дослідження нелінійного спотворення пружних плоских хвиль при їх поширенні у гіперпружному матеріалі. Для опису нелінійності деформування матеріалу було використано пружний потенціал Мурнагана [1,2,3] у вигляді

$$W = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)(u_{1,1})^2 + \frac{1}{2}\mu[(u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2] + \left(\mu + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{3}A + B + \frac{1}{3}C\right)(u_{1,1})^3 + \frac{1}{2}(\lambda + B)u_{1,1}[(u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2] + \quad (1)$$

$$+ \frac{1}{8}(\lambda + 2\mu + A + 2B) \left[(u_{1,1})^2 + (u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2 \right]^2 + \\ + \frac{1}{8}(3A + 10B + 4C)(u_{1,1})^2 \left[(u_{1,1})^2 + (u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2 \right],$$

де λ, μ – пружні сталі Ляме (другого порядку), A, B, C – сталі Мурнагана (третього порядку). Таке представлення пружного потенціалу з урахуванням доданків четвертого порядку, як відомо [4,5], дозволяє досліджувати квадратично і кубічно нелінійні хвильові ефекти в гіперпружному матеріалі [4,5], виходячи з повної системи рівнянь для плоских хвиль, що складається з трьох взаємопов'язаних рівнянь. Залежність вектора переміщень тільки від однієї просторової змінної x_1 та часу t дає можливість подальшого запису повної системи рівнянь для плоских хвиль, що поширюються вздовж осі Ox_1 . Нижче наведене і використовується тільки одне з них: для поздовжньої хвилі. При цьому вважається, що поперечні хвилі початково не збуджуються, і генерація цих хвиль поздовжніми не вивчається.

При окремому врахуванні виключно кубічної нелінійності (при цьому квадратичні ефекти взаємодії вважаються відомими і докладно описаними [1]), нелінійне хвильові рівняння для поздовжніх хвиль, згідно [4], має вигляд

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu)u_{1,11} = N_3 u_{1,11} (u_{1,1})^2, \quad (2)$$

$$\text{де } N_3 = \frac{3}{2}(\lambda + 2\mu) + 6(A + 3B + C).$$

Подібно до того, як у квадратично нелінійних середовищах при трихвильовій взаємодії можуть утворюватися при деяких умовах хвильові триплети, в кубічно нелінійних середовищах при чотирехвильових взаємодіях можуть утворюватися за деяких умов хвильові квадруплети. Отже, розглядається взаємодія поздовжніх пружних хвиль, поширення яких описується рівнянням (2) при умові узгодженості частот.

Аналіз поздовжніх хвиль за методом повільно змінних амплітуд. Вкорочені та еволюційні рівняння для двоххвильової взаємодії

Загальна умова узгодженості частот, яка забезпечує взаємодію хвиль, має вигляд

$$\omega_4 = \pm \omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3. \quad (3)$$

Умова узгодженості хвильових векторів:

$$k_4 = \pm k_1 \pm k_2 \pm k_3. \quad (4)$$

Схема взаємодії хвиль із зазначеними загальними умовами узгодженості зазвичай коментується у нелінійній оптиці як генерація нової хвилі трьома різними хвилями накачування (pumping wave) або за будь-якою іншою схемою, яких, взагалі кажучи, може бути безліч. Зокрема, існує схема, що передбачає такий характер взаємодіючих хвиль: дві хвилі накачування, одна сигнальна та одна холоста хвиля (тут використовується термінологія нелінійної оптики, що відповідає так званій схемі обертання хвильового фронту). Починається розглядання схеми з дослідження двоххвильової взаємодії для двох протилежно спрямованих однаково потужних хвиль великої амплітуди. Поширюючись в нелінійному середовищі, хвилі взаємодіють, що розглядається в рамках двоххвильової взаємодії. Одночасно перпендикулярно до цих двох хвиль (вздовж осі апікат) задається слабкий сигнал малої амплітуди. Слабкі хвилі аналізуються в рамках чотирехвильової взаємодії. Ефект загальної взаємодії полягає в тому, що амплітуди слабких хвиль зростають із часом необмежено.

Розглядання хвильової взаємодії відбувається на основі двох гіпотез:

По-перше, дві слабкі хвилі (signal waves) не впливають на дві потужні хвилі накачування (pumping waves). Тому потужні хвилі можуть розглядатися незалежно.

По-друге, потужні хвилі накачування впливають на слабкі сигнальні, і в аналізі взаємодії сигнальних хвиль необхідно враховувати усі чотири хвилі, з яких дві хвилі накачування вважаються вже відомими.

Таким чином, спочатку розглядається двоххвильова взаємодія поздовжніх пружних хвиль. Розв'язок рівняння (2) записується у вигляді

$$u(x_1, t) = A(x_1) e^{i(k_A x_1 - \omega_A t)} - B(x_1) e^{i(k_B x_1 + \omega_B t)}. \quad (5)$$

Далі, за стандартною процедурою, треба: підставити (5) до (2); врахувати, що (5) – розв'язок рівняння (2) для будь-якої амплітуди; знехтувати другими похідними амплітуд, з міркувань відсутності зовнішнього припливу енергії у систему. Отримане вкорочене рівняння розділяється, врахуючи те, що впливом хвилі самої на себе можна знехтувати, враховуючи більш важливий взаємний вплив двох заданих хвиль. Вкорочене рівняння записується як два рівняння, шляхом окремого запису дійсної та

увної частини, при цьому враховується умова частотного синхронізму. В результаті маємо рівняння:

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dx_1} &= k_A k_B (2k_A + k_B) A^2 B e^{i(k_A + k_B)x_1}; \\ \frac{dB}{dx_1} &= k_A k_B (k_A + 2k_B) A B^2 e^{i(k_A + k_B)x_1}.\end{aligned}\quad (6)$$

Далі, з урахуванням умов фазового синхронізму

$$k_A + k_B = 0,$$

записуються еволюційні рівняння

$$\frac{dA}{dx_1} = k_A^3 A^2 B, \quad \frac{dB}{dx_1} = k_A^3 A B^2.$$

Далі, з урахуванням рівності початкових амплітуд обох хвиль

$$A(x_1 = 0) = B(x_1 = 0) = A(x_3),$$

розв'язок нелінійної системи (4) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}A(x_1) &= A^o(x_3) e^{-k_A^3 (A^o(x_3))^2 x_1}; \\ B(x_1) &= A^o(x_3) e^{k_A^3 (A^o(x_3))^2 x_1}.\end{aligned}\quad (7)$$

Залежність амплітуд хвиль від координати x_3 означає, що в схемі дослідження розглядається пучок хвиль, і вздовж перетину цього пучка амплітуда хвилі неоднакова. З отриманого розв'язку витікає, що поздовжні хвилі зустрічаються в перетині $x_1 = 0$, в результаті чого відбувається їх взаємодія, по ходу якої частоти $\omega_A = \omega_B$ і швидкості хвиль зберігаються, а амплітуди змінюються синусоїдально з максимальною амплітудою A^o і періодом $T = \pi(\lambda + 2\mu) / N_3 k_A^3 (A^o)^2$.

Хвиля накачування, таким чином, - це хвиля із сталою амплітудою, що зберігається за рахунок постійного накачування до неї енергії іншими хвилями-учасниками чотирихвильової взаємодії, яка досліджується окремо.

Аналіз чотирихвильової взаємодії поздовжніх хвиль за методом повільно змінних амплітуд.

Далі розв'язок представляється у вигляді чотирьох поздовжніх хвиль з різними амплітудами, хвильовими числами та частотами

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^4 A_n(x_1) e^{i\varphi_n}, \quad \varphi_n = k_n x - \omega_n t. \quad (8)$$

Вкорочене рівняння має вигляд

$$\sum_{n=1}^4 k_n \frac{dA_n}{dx} e^{i\varphi_n} = \frac{-iN_3}{2(\lambda + 2\mu)} \sum_{m=1}^4 \sum_{k=1}^4 k_k^2 k_m^2 A_k^2 A_m e^{i(2\varphi_k + \varphi_m)}. \quad (9)$$

Після цього вкорочені рівняння розділяються з урахуванням умови частотного синхронізму (3). Далі, послідовно, використовується умова синхронізму за хвильовими числами (4). В результаті записуються еволюційні рівняння, для яких приймається гіпотеза, згідно якій ефект самогенерації кожної з хвиль є менш значним, ніж хвильовий взаємовплив. В результаті отримуються еволюційні рівняння вигляду

$$\begin{aligned}A'_1 &= K_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 A_4, \quad A'_2 = K_2 \bar{A}_1 \bar{A}_3 A_4, \\ A'_3 &= K_3 A_1 A_2 \bar{A}_4, \quad A'_4 = K_4 A_1 A_2 \bar{A}_3.\end{aligned}\quad (10)$$

В рамках реалізації схеми чотирихвильової взаємодії на основі результатів, отриманих вище за схемою двохвильової взаємодії, використовуються два останні рівняння з (10), і вони приймають більш простий вигляд, за формулою (7), звідки

$$\begin{aligned}A_1 A_2 &= |A_1^o|^2; \\ A'_3 &= K_3 (A_1^o)^2 \bar{A}_4; \quad A'_4 = K_4 (A_1^o)^2 \bar{A}_3.\end{aligned}$$

Шляхом ряду перетворень отриманих таким чином рівнянь, їх комплексного спряження та додавання, отримуються рівняння вигляду

$$\begin{aligned}I'_1 &= K_1 (\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 A_4 - A_1 A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4), \\ I'_2 &= K_{12} (\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 A_4 - A_1 A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4), \\ I'_3 &= K_3 (-\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 A_4 + A_1 A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4), \\ I'_4 &= K_4 (-\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 A_4 + A_1 A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4).\end{aligned}\quad (11)$$

Тут здійснено перехід від амплітуд до інтенсивності хвиль з використанням позначення для інтенсивності окремої хвилі вигляду

$$\bar{A}_1 A'_1 + A_1 \bar{A}'_1 = \left(|A_1^o|^2 \right)' = I'_1.$$

Можливість отримання перших інтегралів системи нелінійних еволюційних рівнянь (10) - співвідношень типу Менлі-Рова, та загального інтегралу енергії здійснюється за відомою

процедурою. Загальний закон збереження енергії отримується у вигляді

$$\sum_{n=1}^4 \left(\frac{\omega_m}{K_m} \right) I_m = \text{const}$$

шляхом множення m -го рівняння системи (11) на відповідну частоту ω_m та додавання результатів. Таким чином, у дослідженні отримано базу для подальших досліджень багатьох конкретних

задач чотиривхвильової взаємодії у кубічно нелінійному гіперпружному середовищі.

Подібно до того, як у квадратично нелінійних середовищах при трихвильовій взаємодії можуть утворюватися при деяких умовах хвильові триплети, в кубічно нелінійних середовищах при чотиривхвильових взаємодіях можуть утворюватися за деяких умов хвильові квадруплети.

Список використаних джерел

1. Руцицький Я. Я. Хвилі в матеріалах з мікроструктурою / Я.Я. Руцицький, С.І. Цурпал. – К.: Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка, 1998. – 377 с.
2. Achenbach J. D. Wave Propagation in Elastic Solids / J. D. Achenbach. – Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1973. – 425 p.
3. Cattani C. Wavelet and Wave Analysis as Applied to Materials with Micro or Nanostructure / C. Cattani, J. J. Rushchitsky. – Singapore-London: World Scientific, 2007. – 466 p.
4. Rushchitsky J.J. On the Self-Switching Hypersonic Waves in Cubic Nonlinear Hyperelastic Nanocomposites / J.J. Rushchitsky // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, N 1. – P.73–93.
5. Гузь А.Н. Введение в механику нанокомпозитов / А.Н. Гузь, Я.Я. Руцицкий, И.А. Гузь. – К.: Академперіодика, 2010. – 398 с.
6. Shen Y.R. The principles of nonlinear optics / Y.R. Shen– New York: John Wiley, 1984.-560 p.
7. Rushchitsky J. J. Nonlinear Elastic Waves in Materials / J. J. Rushchitsky– Heidelberg: Springer, 2014. – 454 p.
8. Rushchitsky J. J. Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – derivation of wave equations. Plane strain state / J.J. Rushchitsky // Int. Appl. Mech. – 2005. – Vol. 41, № 5. – P. 701–712.
9. Rushchitsky J. J. Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – derivation of wave equations. Axisymmetric and other states / J. J. Rushchitsky // Int. Appl. Mech.– 2005.– Vol. 41, № 6. – P. 831–840.
10. Rushchitsky J. J. Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – primary analysis of evolution / J. J. Rushchitsky // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 7. – P. 825 – 833.
11. Rushchitsky J. J. On the Self-Switching Hypersonic Waves in Cubic Nonlinear Hyperelastic Nanocomposites / J. J. Rushchitsky // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, N 1. – P.73–93.

References

1. RUSHCHITSKY, J. J., TSURPAL, S.I. (1998) *Hvili v materialah z mikrostrukuroyu*. Kyiv: Institut mehaniki im. S. P. Timoshenko.
2. ACHENBACH, J. D. (1973) *Wave Propagation in Elastic Solids*. Amsterdam: North Holland Publishing Company.
3. CATTANI, C., RUSHCHITSKY, J. J. (2007) *Wavelet and Wave Analysis as Applied to Materials with Micro or Nanostructure*. Singapore-London: World Scientific.
4. RUSHCHITSKY, J. J. (2009) On the Self-Switching Hypersonic Waves in Cubic Nonlinear Hyperelastic Nanocomposites. *Int. Appl. Mech.* 45 (1). pp. 73–93.
5. GUZ A.N., RUSHICKIJ J.J., GUZ I.A. (2010) *Vvedenie v mehaniku nanokompozitov*. Kyiv: Akadempіodika.
6. SHEN Y.R. (1984) *The principles of nonlinear optics*. New York: John Wiley.
7. RUSHCHITSKY, J. J. (2014) *Nonlinear Elastic Waves in Materials*. Heidelberg: Springer.
8. RUSHCHITSKY, J. J. (2005) Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – derivation of wave equations. Plane strain state. *Int. Appl. Mech.* 41 (5). pp. 701–712.
9. RUSHCHITSKY, J. J. (2005) Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – derivation of wave equations. Axisymmetric and other states. *Int. Appl. Mech.* 41 (6). pp. 831–840.
10. RUSHCHITSKY, J. J. (2005) Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – primary analysis of evolution. *Int. Appl. Mech.* 41 (7). p. 825–833.
11. RUSHCHITSKY, J. J. (2009) On the Self-Switching Hypersonic Waves in Cubic Nonlinear Hyperelastic Nanocomposites. *Int. Appl. Mech.* 45 (1). pp. 73–93.

Надійшла до редколегії 31.01.2022

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 517.977.5

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/1.7>

I.M. Askerov, k.m.n., доцент

I.M. Askerov, PhD (Math.), Assoc.Prof.

Про визначення граничної функції в початково-крайовій задачі для гіперболічного рівняння другого порядку

On a determination of the boundary function in the initial-boundary value problem for the second order hyperbolic equation

Ланкаранський державний університет,
пр-т Генерала Ази Асланова, 50, Ланкаран,
Азербайджанська Республіка, AZ4200
e-mail: idrakasgerov@gmail.com

Lankaran State University,
General Hazi Aslanov Ave., 50, Lankaran,
Azerbaijan Republic, AZ4200
e-mail: idrakasgerov@gmail.com

У статті досліджується задача визначення граничної функції в початково-крайовій задачі, що описується гіперболічним рівнянням другого порядку. За допомогою додаткової умови будується функціонал, а розглянута задача зводиться до задачі оптимального керування. Розраховано диференціал функції, доведено необхідну і достатню умову оптимальності. Ключові слова: гіперболічне рівняння, обернена задача, оптимальне керування, умова оптимальності.

In the paper the problem of determination of the boundary function is studied in the initial boundary value problem described by the second order hyperbolic equation. With the help of the additional condition, the functional is constructed, and the problem under consideration is reduced to the optimal control problem. The differential of the function is calculated, a necessary and sufficient condition for optimality is proved.

Keywords: Hyperbolic equation, inverse problem, optimal control, optimality condition.

Статтю представив д.ф.-м.н. Хусайнов Д.Я.

I. INTRODUCTION

Recently, the study of the inverse problems for the partial derivative differential equations has become more intensive [4]. The reason for this is their strong application in in medicine, physics, geophysics, astronomy, biology and ect. With the implementation of the modern computer technologies, the application of inverse problems has led to a further expansion of its areas. Different types of inverse and ill-posed problems have been considered in [2, 4, 8]. It is known that there are many methods to solve such problems [1, 3, 4, 8]. One of these methods is to reduce the problem under consideration to the optimal control problem with the help of the inconsistency function constructed using additional condition or

conditions and to study the new problem using the methods of optimal control theory [2,4,7]. This way of solution of the inverse problems is traditionally called a variational or optimization solution method. In [1, 4] some inverse problems in variational formulation have been investigated for the partial differential equations. In many cases this method was used to solve such problems for the parabolic type equations [11]. Hyperbolic type equations are the less studied by this method class of equations [10].

Therefore in this work we investigate the problem of determination of the boundary function in the mixed problem for the second order hyperbolic type equation.

II. PROBLEM FORMULATION

In the domain $Q = \Omega \times (0, T)$ consider the following boundary value problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u|_{S^1} = 0, \quad u|_{S^2} = \mathcal{G}(s, t), \quad (s, t) \in S^2, \quad (3)$$

$$\varphi_0|_{S^1} = 0, \quad \varphi_0|_{S^2} = \mathcal{G}|_{t=0}.$$

Here Ω is a bounded domain from R^n with smooth boundary Γ ; $S = \Gamma \times (0, T)$ is a lateral surface of the cylinder Q ; $S = S^1 \cup S^2$, $S^1 \cap S^2 = \emptyset$, $\text{mes } S^i > 0, i = 1, 2$, $S^1 = \Gamma^1 \times (0, T)$, $S^2 = \Gamma^2 \times (0, T)$, $\Gamma = \Gamma^1 \cup \Gamma^2$, $\Gamma^1 \cap \Gamma^2 = \emptyset$; $\varphi_0 \in W_2^1(\Omega)$, $\varphi_1 \in L_2(\Omega)$, $f \in L_2(Q)$,

$$Au = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right),$$

the function $a_{ij}(x, t) \in C^1(\bar{Q})$ satisfies in Q the conditions:

$$a_{ij}(x, t) = a_{ji}(x, t),$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq \alpha \cdot \sum_{k=1}^n \xi_k^2, \quad \alpha > 0, \quad \alpha = \text{const}.$$

In condition (3) $\mathcal{G}(s, t)$ is an unknown function. To find this function we set the following additional condition

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} \Big|_{S^1} = a(s, t), \quad (s, t) \in S^1. \quad (4)$$

Here

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i)$$

is a conormal derivative, $a(s, t) \in L_2(S^1)$ is a given function.

To solve the considered problem we reduce it to the following minimization problem [1],[4]:

To find a function $\mathcal{G}(s, t) \in V_m \subset W_2^1(S^2)$ that gives minimum to the functional

$$J(\mathcal{G}) = \frac{1}{2} \int_{S^1} \left[\frac{\partial u(s, t; \mathcal{G})}{\partial \nu_A} - a(s, t) \right]^2 ds dt \quad (5)$$

together with the solution of problem (1)-(3).

Here the function $u(x, t; \mathcal{G})$ is a solution of problem (1)-(3) corresponding to the function $\mathcal{G}(x, t)$. By closed convex set V_m we denote the class of admissible controls [7]. Since $u \in C([0, T]; W_2^1(\Omega))$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in C([0, T]; L_2(\Omega))$ for each control $\mathcal{G} \in V_m$ problem (1)-(3) has a unique solution from $W_2^1(Q)$ [9].

As a solution of problem (1)-(3) we take the function $u(x, t; \mathcal{G}) \in W_2^1(Q)$ that satisfies the integral identity

$$\int_Q \left[- \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right] dx dt - \int_{\Omega} \varphi_1(x) \eta(x, 0) dx = \int_Q f \eta dx dt \quad (6)$$

and a.e. the conditions $u(x, 0) = \varphi_0(x)$ and $u|_{S^2} = \mathcal{G}(s, t)$ for $\forall \eta \in W_2^1(Q)$, $\eta(x, T) = 0$.

III. CALCULATION OF THE DIFFERENTIAL OF FUNCTIONAL (5) AND OPTIMALITY CONDITION

Let us show that functional (5) is differentiable in V_m . Take two admissible controls $\mathcal{G}, \mathcal{G} + \delta \mathcal{G} \in V_m$ and denote by $u(x, t; \mathcal{G})$

and $u(x, t; \mathcal{G} + \delta\mathcal{G})$ corresponding solutions of problem (1)-(3).

Let $\delta u(x, t) = u(x, t; \mathcal{G} + \delta\mathcal{G}) - u(x, t; \mathcal{G})$. It is clear that the function $\delta u(x, t)$ is a generalised solution of the boundary value problem

$$\frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial \delta u}{\partial x_j} \right) = 0, \quad (x, t) \in Q, \quad (7)$$

$$\delta u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \delta u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (8)$$

$$\delta u|_{S^1} = 0, \quad \delta u|_{S^2} = \delta\mathcal{G}(s, t), \quad (s, t) \in S^2. \quad (9)$$

As a generalised solution of boundary value problem (7)-(9) we understand the function $\delta u(x, t) \in W_2^1(Q)$ that satisfies for $\forall \eta \in W_2^1(Q)$, $\eta(x, T) = 0$, $\eta|_{S^2} = 0$ the integral identity

$$\int_Q \left[-\frac{\partial \delta u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial \delta u}{\partial x_j} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right] dx dt + \int_{S^1} \frac{\partial \delta u}{\partial \nu_A} \eta ds dt = 0 \quad (10)$$

and a.e. the conditions $\delta u(x, 0) = 0$ and $\delta u|_{S^2} = \delta\mathcal{G}(s, t)$.

Suppose that the function $\psi = \psi(x, t; \mathcal{G})$ is a generalised solution from $W_2^1(Q)$ to the adjoint problem [6]

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) = 0, \quad (x, t) \in Q \quad (11)$$

$$\psi(x, T) = 0, \quad \psi_t(x, T) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (12)$$

$$\psi|_{S^1} = \frac{\partial u(s, t; \mathcal{G})}{\partial \nu_A} - a(s, t), \quad \psi|_{S^2} = 0 \quad (13)$$

By virtue of [9] we can state that boundary value problem (11)-(13) has a unique generalised solution for each fixed $\mathcal{G} \in W_2^1(S^2)$.

As a generalised solution to adjoint problem (11)-(13) we understand the function $\psi(x, t; \mathcal{G}) \in W_2^1(Q)$ that for $\forall \mathcal{G} \in W_2^1(Q)$, $g(x, 0) = 0$, $g|_{S^1} = 0$ satisfies the integral identity

$$\int_Q \left[-\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right] ds dt + \int_{S^2} \frac{\partial \psi}{\partial \nu_A} g ds dt = 0 \quad (14)$$

and a.e. the conditions $\psi(x, T) = 0$ and

$$\psi|_{S^1} = \frac{\partial u(s, t; \mathcal{G})}{\partial \nu_A} - a(s, t).$$

Now to show the differentiability of the functional $J(\mathcal{G})$ we calculate its increment

$$\begin{aligned} \Delta J(\mathcal{G}) &= J(\mathcal{G} + \delta\mathcal{G}) - J(\mathcal{G}) = \\ &= \frac{1}{2} \int_{S^1} \left\{ \left[\frac{\partial u(s, t; \mathcal{G} + \delta\mathcal{G})}{\partial \nu_A} - a(s, t) \right]^2 - \left[\frac{\partial u(s, t; \mathcal{G})}{\partial \nu_A} - a(s, t) \right]^2 \right\} ds dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{S^1} \left\{ \left[\frac{\partial u(s, t; \mathcal{G}) + \partial \delta u(s, t)}{\partial \nu_A} - a(s, t) \right]^2 - \left[\frac{\partial u(s, t; \mathcal{G})}{\partial \nu_A} - a(s, t) \right]^2 \right\} ds dt = \\ &= \int_{S^1} \left[\frac{\partial u(s, t; \mathcal{G})}{\partial \nu_A} - a(s, t) \right] \frac{\partial \delta u(s, t; \mathcal{G})}{\partial \nu_A} ds dt + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{S^1} \left(\frac{\partial \delta u(s, t; \mathcal{G})}{\partial \nu_A} \right)^2 ds dt, \\ \Delta J(\mathcal{G}) &= \int_{S^1} \left[\frac{\partial u(s, t; \mathcal{G})}{\partial \nu_A} - a(s, t) \right] \frac{\partial \delta u(s, t; \mathcal{G})}{\partial \nu_A} ds dt + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{S^1} \left(\frac{\partial \delta u(s, t; \mathcal{G})}{\partial \nu_A} \right)^2 ds dt \quad (15) \end{aligned}$$

If take $\eta(x, t) = \psi(x, t)$ in identity (10) and Let
 $g(x, t) = \delta u(x, t)$ in (14) and subtract them we
get

$$\int_{S^2} \frac{\partial \psi}{\partial v_A} \delta g ds dt - \int_{S^1} \frac{\partial \delta u}{\partial v_A} \left[\frac{\partial u(s, t; g)}{\partial v_A} - a(s, t) \right] ds dt = 0 \quad (16)$$

Considering the last one in (15) we obtain

$$\Delta J(g) = \int_{S^2} \frac{\partial \psi}{\partial v_A} \delta g ds dt + R, \quad (17) \text{ or}$$

where

$$R = \frac{1}{2} \int_{S^1} \left[\frac{\partial \delta u(s, t; g)}{\partial v_A} \right]^2 ds dt$$

is a remainder term. It is clear that first
summand of right side in formula (17) is
differential of functional (5)

$$\delta J(v) = \int_{S^2} \frac{\partial \psi}{\partial v_A} \delta g ds dt$$

and gradient of functional (5) is

$$J'(g) = \frac{\partial \psi}{\partial v_A} \Big|_{S_2}.$$

Список використаних джерел

1. Alifanov O.M. Extremal methods for solving ill-posed problems / O.M. Alifanov, E.A. Artyukhin, S.V. Rumyantsev. – M.: Nauka, 1988.
2. Vasilev F.P. Methods for solving extremal problems / F.P. Vasilev. – M.: Nauka, 1981.
3. Glasko V.B. Inverse problems of mathematical physics / V.B. Glasko. – M.: Moscow State University, 1984.
4. Kabanikhin S.I. Inverse and ill-posed problems/ S.I. Kabanikhin. – Novosibirsk, 2009.
5. Kolmogorov A.N. Elements of the theory of functions and functional analysis/ A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin. – M.: Nauka, 1981.
6. Ladyzhenskaya O.A. Boundary value problems of mathematical physics / O.A. Ladyzhenskaya. – Moscow: Nauka, 1973.

$$\left\| \frac{\partial \delta u}{\partial v_A} \right\|_{L_2(S^1)}^2 \leq c \|\delta g\|_{W_2^1(S^2)}^2 \quad (18)$$

Then the function $J(g)$ is Frechet differentiable
in V_m . If the function $g_0(s, t) \in V_m$ gives
minimum to functional (5), then $\Delta J(g_0) \geq 0$ [5].
From relations (17) and (18) we get

$$\int_{S^2} \frac{\partial \psi(s, t)}{\partial v_A} \delta g ds dt \geq 0$$

$$\int_{S^2} \frac{\partial \psi(s, t)}{\partial v_A} (g(s, t) - g_0(s, t)) ds dt \geq 0, \quad (19)$$

$\forall g \in V_m$.

IV. CONCLUSIONS

Thus the following theorem is proved.

Theorem. Let the above conditions on the data
of problem (1)-(3), (5) are fulfilled. Then the
necessary and sufficient condition the control
 $g_0 \in V_m$ to be optimal control in problem (1)-
(3), (5) is fulfilment of variational inequality
(19).

References

1. ALIFANOV, O.M., ARTYUKHIN, E.A., RUMYANTSEV, S.V. (1988) *Extremal methods for solving ill-posed problems*, M., Nauka.
2. VASILEV, F.P. (1981) *Methods for solving extremal problems*, M., Nauka, 1981.
3. GLASKO, V.B. (1984) *Inverse problems of mathematical physics*, M., Moscow State University.
4. KABANIKHIN, S.I. (2009) *Inverse and ill-posed problems*, Novosibirsk.
5. KOLMOGOROV, A.N., FOMIN, S.V. (1981) *Elements of the theory of functions and functional analysis*, M., Nauka.
6. LADYZHENSKAYA, O.A. (1973) *Boundary value problems of mathematical physics*, M., Nauka.

7. Lions J.-L. Optimal control of systems described by partial differential equations / J.-L. Lions. – M.: Mir, 1972.
8. Tikhonov A.N. Methods for solving ill-posed problems/ A.N. Tikhonov, V.Ya. Arsenin. – M.: Nauka, 1974.
9. Lasiecka L. Non homogeneous boundary value problems for second order hyperbolic operators / L. Lasiecka, J.-L. Lions, R. Triggiani // J. Math. pures et appl. – 1986. – Vol. 65. – P. 149-192.
10. Guliyev H.F. On a determination of the initial functions from the observed values of the boundary functions for the second-order hyperbolic equation / H.F. Guliyev, V.N. Nasibzadeh // Advanced Mathematical Models & Applications. – 2018. – Vol.3, №3. – P. 215-222.
11. Tagiev R. K. Variational formulation of an inverse problem for a parabolic equation with integral conditions / R.K. Tagiev, Sh.I. Maharramli // Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Un-ta. Ser. Matem. Mekh. Fiz. – 2020. – Vol. 12, Iss. 3. – P.34–40.
7. LYONS, J.-L. (1972) *Optimal control of systems described by partial differential equations*, M., Mir.
8. TIKHONOV, A.N., ARSENIN, V.Ya. (1974) *Methods for solving ill-posed problems*, M., Nauka.
9. LASIECKA, L., LIONS, J.-L., TRIGGIANI, R. (1986) “Non homogeneous boundary value problems for second order hyperbolic operators”, *J. Math. pures et appl.*, vol. 65, p. 149-192.
10. GULIYEV, H.F., NASIBZADEH, V.N. (2018) “On a determination of the initial functions from the observed values of the boundary functions for the second-order hyperbolic equation”, *Advanced Mathematical Models & Applications*, vol. 3, №3, p.215-222.
11. TAGIEV, R. K., MAHARRAMLI, Sh. I. (2020) “Variational formulation of an inverse problem for a parabolic equation with integral conditions”, *Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Un-ta. Ser. Matem. Mekh. Fiz.*, vol. 12, iss. 3, p. 34–40.

Надійшла до редколегії 19.05.2021

УДК 519.72

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/1.8>

Ваврик П.Р., аспірант

P. R. Vavryk, post-graduate

Про один підхід до формалізації процесу поширення інформації на основі агрегації, що обмежена дифузією

One approach to formalizing the process of information dissemination based on diffusion-limited aggregation

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м.Київ, Глушкова 4д,
e-mail: petro.vavryk@gmail.com

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: petro.vavryk@gmail.com

У цій статті розглядається один з підходів до формалізації процесів інформаційного поширення на основі моделі агрегації, що обмежена дифузією, з застосуванням елементів клітинних автоматів та їх аналогів. Модель описує динаміку процесу розповсюдження інформації без впливу засобів мас-медіа, шляхом врахування фактів обміну інформацією, який відбувається при комунікації між учасниками довільної цільової аудиторії. Вважається, що процес характеризується властивістю само подібності. Запропоновано підхід, який дозволяє досліджувати динаміку процесів інформаційного поширення з урахуванням ставлення учасників групи один до одного та ставлення учасників до вхідної інформації. В якості результату отримано оцінку ефективності процесу розповсюдження інформації, яка дає можливість зробити висновки щодо успішності заходів просування інформації. Для демонстрації змодельованих на основі підходу процесів поширення інформації наведено результати чисельних експериментів, у яких реалізація процедури обміну інформацією кожної особи обмежена трьома учасниками цільової групи.

Ключові слова: інформація, моделі розповсюдження, агрегація, дифузія, оцінка ефективності.

This article examines one of the approaches to the formalization of information dissemination processes based on the diffusion-limited aggregation model, using elements of cellular automata and their analogs. The model describes the dynamics of the information dissemination process without the influence of the mass media by taking into account the facts of information exchange that occurs during communication between participants of an arbitrary target audience. It is believed that the process is characterized by the property of self-similarity. An approach is proposed that makes it possible to study the dynamics of information dissemination processes, taking into account the attitude of the group members to each other and the attitude of the participants to the input information. As a result, an assessment of the effectiveness of the information dissemination process was obtained, which allows drawing conclusions regarding the success of information promotion measures. To demonstrate the processes of information dissemination modeled on the basis of the approach, the results of numerical experiments are presented, in which the implementation of the information exchange procedure for each person is limited to three members of the target group.

Key words: information, distribution models, aggregation, diffusion, efficiency evaluation.

Статтю представив д.т.н. Кудін В.І.

Вступ. У сучасному інформаційному суспільстві обсяги та вплив потоків інформації на хід соціальної еволюції надзвичайно зросли. Можна по-різному трактувати поняття «інформація». Різноманіття визначень означає, що наразі загальноприйнятого немає, а сутність поняття залежить від специфіки області дослідження.

Інформаційні потоки представляють собою процеси, що генерують інформацію, яка розрахована на конкретного споживача, має, як

правило, чітко задану предметну або цільову направленість, що визначається областю інтересів людини. При цьому ступінь сприйняття (впливу) інформації формується на основі рівнів запам'ятовування конкретно обраного варіанту з декількох можливих і рівноправних [1].

При цьому потрібно відмітити, що в інформаційних процесах часто підкреслюється наявність хаотичного перемішування шарів [2]. Воно утворюється в процесі розповсюдження інформації, коли у системі, яка знаходиться в певному впорядкованому режимі, виникає

хаотичний режим, котрий потім знову змінюється впорядкованим режимом, що відрізняється від вихідного наявністю, в першу чергу, більшої кількості інформації. Наявність шару перемішування є необхідною умовою розвитку інформаційного впливу. Тому він має місце у всіх процесах виникнення цінної інформації: біологічної еволюції, розвитку організму та, зрозуміло, людського суспільства.

З іншого боку, кількість отриманої інформації суттєво перевищує наші споживчі можливості. Різні варіанти ідей та думок повинні конкурувати за обмежену увагу споживача, враховуючи складні зміни в споживчій середі. І, як наслідок, особливий інтерес отримують методи, що досліджують та використовують моделі динаміки для опису процесів розповсюдження інформації.

Задачі аналітичної обробки інформаційних потоків і їх впливів потребують розв'язання задач дослідження динаміки процесів розповсюдження інформації на основі засобів імітаційного моделювання і прогнозування. Розробка моделей та методів для імітації інформаційних впливів з урахуванням динаміки в інформаційних процесах дозволяє ефективно вирішувати важливі комунікаційні проблеми, істотно підвищити рівень інформаційної безпеки держави, тактично і стратегічно прогнозувати розвиток подій інформаційного протистояння.

Для формалізації і дослідження процесів розвитку в часі інформаційного розповсюдження та впливу на соціум необхідно використовувати принципово новий інструментарій, який дозволить адекватно відображати стан динамічної складової процесу розповсюдження інформації [3]. При цьому, розробка нових підходів не скасовує методик використання класичних способів аналізу та обробки динамічних процесів, що формулюється у вигляді так званого механістичного підходу і ґрунтується на ідеї застосування методу аналогій [4–6].

Багато процесів, що відбуваються у природі та суспільстві, характеризуються хаотичною динамікою, моделювання якої призводить до появи нових математичних структур, яким властива статистична (неповна) повторюваність. Важливе місце серед цих структур займають фрактальні кластери [7], для дослідження яких активно застосовується модель агрегації, обмеженої дифузією (diffusion limited aggregation, DLA) [8], що описує процедуру об'єднання окремих частинок у самоподібні агрегати в умовах їх випадкового блукання.

При реалізації алгоритмів моделювання DLA розрахунки потребують значних витрат часу. Тому для подальшого використання даної методики необхідна розробка варіантів оптимізації роботи цих алгоритмів, а також створення нових методів формалізації процесів, що відбуваються у явищах агрегації, обмеженої дифузією. Впровадження пропонованого підходу є особливо важливим для дослідження впливу засобів соціальних мереж на інформаційні процеси у сучасному суспільстві.

Одним з підходів для формалізації процесів інформаційного поширення є застосування клітинних автоматів або деяких їх аналогів. Розглянемо один з варіантів моделювання процесів розповсюдження інформації на основі моделі DLA у середовищі довільної цільової аудиторії. Модель описує динаміку процесу поширення інформації без впливу засобів мас-медіа, шляхом врахування фактів обміну інформацією, який відбувається при комунікації між учасниками групи.

Користувачі цільової групи, спілкуючись між собою, надають один іншому інформацію про деякий об'єкт (наприклад, про продукцію, що рекламується), для поширення даних про який здійснюються інформаційні (рекламні) заходи з метою зацікавлення у ньому якомога більше нових людей. Розповсюдження інформації можна змодельовати на основі принципів агрегації DLA, використовуючи для опису інформаційного поширення (проникнення) нейроподібну модель обміну даними у соціальній мережі.

Розглянемо модель розповсюдження інформаційного потоку та його впливу на цільову аудиторію, що характеризується властивістю самоподібності. Маємо групу, що складається з N осіб, об'єднаних у соціальну мережу. Кожна особа знайома або має можливість спілкуватися з певною кількістю n_i , $i = \overline{1, N}$ інших осіб з цієї аудиторії. Без обмеження загальності вважається можливим, що існують такі номери $k = \overline{1, N}$ користувачів соцмережі, для яких $n_k = N - 1$. З іншого боку, зрозуміло, що, якщо користувач i знайомий з користувачем j , то й j буде знайомий з i . Таку структуру представимо графом, де кожна вершина графа представляє собою користувача мережі, а ребро між двома вершинами означає те, що ці люди знайомі або спілкуються між собою. Цей граф можна задати симетричною матрицею R зв'язності розмірності $N \times N$, що складається з 0 та 1, де 1 на позиції (i, j) означає, що учасник групи i спілкується з

користувачем j , а 0 – навпаки, у випадку відсутності контактів з користувачем j .

Крім цього, кожна особа з цільової аудиторії характеризується набором додаткових параметрів. По-перше, кожен неоднаково ставиться до побаченої/почутої інформації, в даній моделі кожен учасник має свій коефіцієнт I_i , $i = \overline{1, N}$, що відображає рівень його ставлення (сприйнятливості) до інформації. По-друге, кожен по-різному враховує думки своїх знайомих. В рамках моделі визначимо вектор T_i , що задає рівень довіри i -ї людини до її знайомих. Для зручності використання запишемо цей вектор у вигляді $T_i = (t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{iN})$, де $t_{ij} \in [0, 1]$, $t_{ij} = 0$, якщо відповідне $r_{ij} = 0$, r_{ij} – j -й елемент i -го рядка матриці R , $t_{ij} = 1$, $j = \overline{1, N}$.

Припустимо, що на початку процесу моделювання поширення інформації проведено певну інформаційну кампанію. Розглянемо, яким чином будуть формуватися рівні розповсюдження інформації в середовищі певної цільової аудиторії, застосовуючи модель DLA для формалізації функціонування мережі обміну інформацією, що складається з нейроподібних елементів.

Задамо певний поріг L ставлення учасників групи до вхідної інформації, $L \in [0, 1]$. При цьому, будемо вважати, що інформація ефективно впливає на особу i , якщо її рівень сприйняття $I_i \geq L$, $i = \overline{1, N}$. Введемо вектор H_0 , $H_0 = (h_1, h_2, \dots, h_N)$, де $h_i = 0$, якщо $I_i < L$ та $h_i = 1$ при $I_i \geq L$, $i = \overline{1, N}$. Зрозуміло, що вектор H_0 дозволяє охарактеризувати усіх осіб з цільової аудиторії щодо їх сприйняття інформації на момент спілкування (наприклад, в результаті зовнішнього впливу).

Далі вважаємо, що у мережі відбувається спілкування між собою. Рівень сприйняття інформації у кожного учасника може з часом змінюватись як наслідок впливу з боку оточення. Зміну рівня сприйняття за часом будемо описувати моделлю нейроподібного елемента вигляду

$$\frac{dI_i(t)}{dt} = \frac{1}{n_i + 1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N t_{ij} I_j(t) - I_i(t), \quad i = \overline{1, N}. \quad (1)$$

Зміна ставлення кожної особи з цільової аудиторії спостерігається дискретно. Поклавши без обмеження загальності інтервал дискретизації $\Delta t = 1$, отримуємо рівняння наступного вигляду:

$$I_i(t+1) - I_i(t) = \frac{1}{n_i + 1} \sum_{j=1}^N t_{ij} I_j(t) - I_i(t),$$

або, остаточно,

$$I_i(t+1) = \frac{1}{n_i + 1} \sum_{j=1}^N t_{ij} I_j(t), \quad (2)$$

$$i = \overline{1, N}, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Тобто, у кожен момент часу перераховуються коефіцієнти ставлення до інформації усіх учасників цільової аудиторії за допомогою середнього значення думки кожного з оточення особи з урахуванням рівня довіри до кожного з оточення.

Таким чином, на кожному кроці в якості результату отримуємо набір значень $I_i(t)$, $i = \overline{1, N}$, $t = 0, 1, 2, \dots$. Обчислюємо вектор $H(t)$, $H(0) = H_0$, відповідно до порогу L .

Якщо на деякому кроці виконується співвідношення $H(t) = H(t-1)$, тобто інформаційний потік більше не впливає на жодну особу з цільової аудиторії, або, якщо вектор $H(t) = (1, 1, \dots, 1)$, тобто усі особи вже знаходяться під впливом зовнішнього потоку інформації, – процедура моделювання динаміки процесу розповсюдження інформації за наведеною схемою зупиняється.

Ускладнимо модель впливу та розповсюдження інформації в межах цільової аудиторії припущенням, що не всі люди позитивно ставляться до вхідного інформаційного потоку, а їх відношення може змінюватись не лише від нейтральності до позитивності. Для відображення переходу до негативного ефекту в процесі розповсюдження реклами будемо використовувати наступний підхід.

Аналогічно порогу сприйнятливості реклами L введемо поріг рівня Z , що відповідає за негативне відношення до вхідної інформації (реклами). Якщо на певному кроці сприйнятливості i -ї особи до впливу інформації (реклами) $I_i(t)$, $i = \overline{1, N}$, стає меншою за Z ($I_i(t) \leq Z$), то вважаємо, що дана особа починає негативно ставитися до змісту інформаційного потоку. Врахування негативного ставлення до інформації суттєво не змінює запропоновану схему алгоритму моделювання процесу поширення інформації. З тим самим інтервалом дискретизації $\Delta t = 1$, як і було розглянуто вище, на кожному кроці відбувається зміна вектору $H(t)$, $t > 0$, що

характеризує вплив інформації на осіб з цільової аудиторії. Використовуючи поріг Z , можна спостерігати за зміною негативного ставлення до процесу розповсюдження інформації.

Таким чином, на кожній ітерації можна порахувати кількість осіб, що перейшли до позитивного ставлення, та кількість осіб, що стали негативно ставитися до вхідної інформації. Позначимо через $E^+(t)$, $t > 0$, – кількість осіб, для яких у проміжок часу $[t-1, t]$ справедливі нерівності $h_i(t) > h_i(t-1)$, $i = \overline{1, N}$, а через $E^-(t)$, $t > 0$, – відповідно, кількість осіб, для яких $h_i(t) < h_i(t-1)$, $i = \overline{1, N}$.

За допомогою величин $E^+(t)$ та $E^-(t)$, $t > 0$, запишемо оцінку ефективності процесу поширення інформації, яка фактично є аналогом рентабельності витрачених для проведення інформаційної кампанії ресурсів

$$E(t) = 1 + \frac{E^+(t) - E^-(t)}{N}, \quad t > 0. \quad (3)$$

Ця величина дозволяє у довільний момент часу $t > 0$ зробити висновки щодо оцінки ефективності організації та проведення заходів з просування інформації; визначити ефективність заходів за певний інтервал часу, як середню зважену оцінку, що базується на значеннях даного критерію в кожний момент часу з цього проміжку; та, порівнюючи між собою значення ефективності на різних інтервалах часу, зробити загальні висновки щодо розвитку та успішності заходів рекламного характеру.

З формули (3) зрозуміло, що усі значення показника належать проміжку $[0, 2]$. Величина $E(t) = 1$ означає, що ефективність заходів поширення інформації має нейтральний ефект (викликає рівну кількість позитивних та негативних відгуків) у цільовій аудиторії. При значеннях $E(t) > (<) 1$ ефективність заходів характеризується відповідними позитивними (негативними) наслідками.

Необхідно також звернути увагу на залежність схеми алгоритму від вибору порогових значень L та Z , а також від величин рівнів взаємної довіри, що подаються векторами T_i , $i = \overline{1, N}$. Відповідні дослідження можливі з використанням, наприклад, елементів теорії динамічного соціального впливу Латане [9] або процесів динаміки думок у соціальних мережах [10].

На рис.1-4 наведено приклади динаміки поширення інформаційного впливу за різних

умов ставлення контингенту групи до вхідної інформації та з урахуванням способів реалізації взаємозв'язків між учасниками цільової групи.

Інформаційний вплив, який починається з залучення однієї особи (позначено червоним трикутником), розповсюджується у часі за однакового позитивного ставлення учасників до вхідної інформації (рис.1), за умов рівномірного розподілу позитивного та негативного ставлення до інформації (рис. 2). Учасники цільової групи задаються у вигляді трикутників, що визначає спосіб реалізації процедури обміну інформацією: кожна особа спілкується лише з трьома зі свого оточення.

На рис.3 та 4 наведено випадки динаміки з врахуванням різного стану довіри учасників один до одного (рис.3 – за умови лише позитивного ставлення, рис.4 – за наявності позитивного та негативного ставлення до інформації).

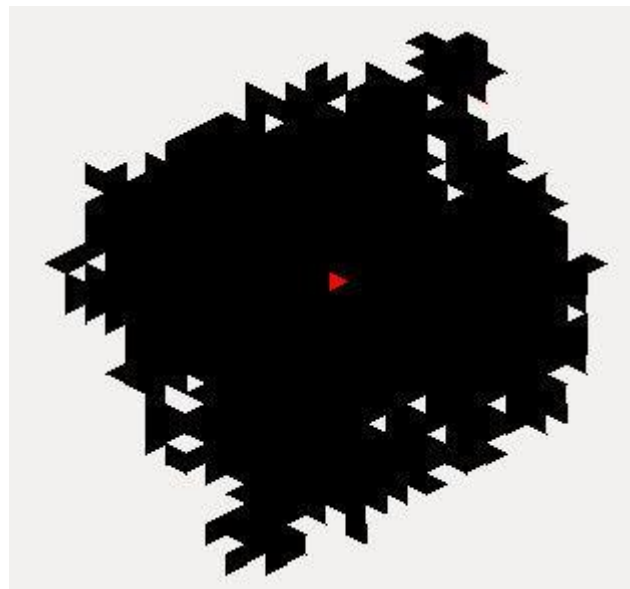


Рис.1

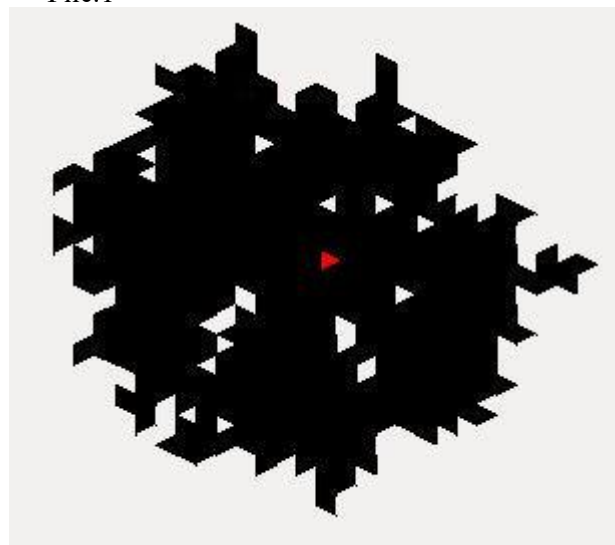


Рис.2



Рис.3



Рис.4

Висновки

У роботі розглянуто один з підходів до формалізації процесів інформаційного поширення на основі моделі агрегації, що обмежена дифузією, з застосуванням елементів клітинних автоматів та їх аналогів. Модель описує динаміку процесу розповсюдження інформації без впливу засобів мас-медіа, шляхом врахування фактів обміну інформацією, який відбувається при комунікації між учасниками довільної цільової аудиторії. Вважається, що процес поширення характеризується властивістю самоподібності. Запропонований підхід дозволяє досліджувати та аналізувати динаміку процесів інформаційного поширення з урахуванням ставлення учасників групи один до одного та ставлення учасників до вхідної інформації. Отримано оцінку ефективності процесу розповсюдження інформації, яка дає можливість зробити висновки щодо успішності заходів з просування інформації. Наведено результати чисельних експериментів, у яких реалізація процедури обміну інформацією кожної особи обмежена трьома учасниками цільової групи.

Зроблено висновки про необхідність подальших досліджень з використанням елементів теорії динамічного соціального впливу та врахування процесів зміни думок на основі даних соціальних мереж.

Список використаних джерел

1. Кастлер Г. Возникновение биологической организации. – М.: Мир, 1967. – 91с
2. Чернавский Д.С. Синергетика и информация: Динамическая теория информации. – М.: Наука, 2001. – 244с.
3. Брайчевский С.М. Современные информационные потоки: актуальная проблематика /С.М. Брайчевский, Д.В. Ландэ / Научно-техническая информация. – 2005. – Сер.1. – Вып. 11. – С. 21-33.
4. Ивохин Е.В. О формализации процессов распространения информации на основе гибридных моделей диффузии/ Е.В. Ивохин, Ю.А.Науменко// Проблемы управления и информатики. – 2018. – №4. – С. 121-128.
5. Івохін Є.В. Про деякі математичні моделі формалізації соціо-інформаційних потоків /Є.В.Івохін, Л.Т.Адзубей, О.В.Гавриленко //Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія ФМН. – 2017. – Вип.2. – С.70-73.
6. Ivohin E.V. About audience overlaps in the social media /E.V. Ivohin, P.R. Vavryk, N.V. Rudoman //Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія ФМН. – 2021. – Вип.1. – С.69-73.
7. Батюков А.М. О модификации модели агрегации, ограниченной диффузией А.М.Батюков, Н.Б.Ампилова/ Научно-техн. ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. – 2013. – Вып.3 (174). – С.233-238.
8. Смирнов Б.М. Физика фрактальных кластеров. – М.: Наука, 1991. – 136с.
9. Latané B. The psychology of social impact// American Psychologist. – 1981. – V. 36. – P.343-356.
10. Weituo Zhang. Analytical approach for opinion dynamics on social networks// Thesis of PhD. Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York. – 2012. – 68 p.

References

1. QUASTLER, H. (1967) *The emergence of biological organization.*- New Haven and London Yale University Press. - 91p.
2. CHERNAVSKIY, D.S. (2001) *Synergetika I informatsiya: Dynamicheskaya teoriya informatsiyi.* – M., Nauka. – 244p.
3. BRAYCHEVSKIY, S.M., LANDE D.V. (2005) *Sovremennye informatsyonnye potoki: aktualnaya problematika* // Nauchno-tehnicheskaya informatsiya. - 1. – Iss.11. – Pp.21-33.
4. IVOHIN, E.V. and NAUMENKO, Yu.A. (2018) *O formalizatsiyi processov rasprostraneniya informatsiyi na osnove gibrydnykh modeley diffuziyi* // Problemy upravleniya i informatiki. - 4. – Pp.121-128.
5. IVOHIN, E.V., ADZHUBEI, L.T. and GAVRYLENKO O.V. (2017) *Pro deyaki matematychni modeli formalizatsiyi socio-informatsyinykh potokiv* // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. – Iss.2. – Pp.70-73.
6. IVOHIN, E.V., VAVRYK, P.R. and RUDOMAN N.V. (2021) *About audience overlaps in the social media* // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. – Iss.1. – Pp.69-73.
7. BATUKOV, A.M. and AMPILOVA N.B. (2013) *O modifikatsiyi modeli argegatsiyi, ogranitchennoy diffuziyi* // Nauchno-techn. vedomosti SPb GPU. – Iss.3 (174). – Pp. 233-238.
8. SMIRNOV B.M. (1991) *Fizika fraktalnykh klasterov.* – M.: Nauka. – 136с.
9. LATANÉ B. (1981) *The psychology of social impact*// American Psychologist. – V.36. – Pp. 343-356.
10. WEITUO ZHANG (2012) *Analytical approach for opinion dynamics on social networks*// Thesis of PhD. Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York. – 2012. – 68 p.

Надійшла до редколегії 20.12.2021

УДК 517.929.4

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/1.9>

Хусаїнов Д.Я., д.ф.-м.н., проф.,
Шакотько Т.І., асистент

D.Ya. Khusainov, PhD., Prof.,
T.I. Shakotko., assistant

ОЦІНКИ СТІЙКОСТІ В НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯННЯХ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИДУ

STABILITY ESTIMATES IN NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF A SPECIAL KIND

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр.-т.
Глушкова, 4д,
e-mail: dkh@unicyb.kiev.ua
trachuk_85@ukr.net

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: dkh@unicyb.kiev.ua,
trachuk_85@ukr.net

Проблемами теорії стійкості і, в частковому, використанню для цього другого методу Ляпунова, присвячено достатньо багато робіт. Із основних можна відмітити наступні [1-7]. Основну увагу в цих роботах приділяється отриманню умов стійкості. В той же час при розв'язуванні практичних задач важливим є отримання кількісних характеристик збіжності розв'язку до положення стійкості. В даній роботі розглядаються нелінійні скалярні диференціальні рівняння з нелінійністю спеціального виду (слабо нелінійні рівняння). Такого типу диференціальні рівняння зустрічаються при дослідженні процесів в нейродинаміці [8,9]. В даній роботі отриманні умови стійкості стаціонарного розв'язку скалярних рівнянь такого типу. А також знайдені характеристики збіжності процесу. Показано, що розв'язок задач стійкості тісно пов'язані з задачами оптимізації [10-12].

Quite a lot of works have been devoted to problems of stability theory and, in particular, to the use of the second Lyapunov method for this. The main ones are the following [1-7]. The main attention in these works is paid to obtaining stability conditions. At the same time, when solving practical problems, it is important to obtain quantitative characteristics of the convergence of solutions to an equilibrium position. In this paper, we consider nonlinear scalar differential equations with nonlinearity of a special form (weakly nonlinear equations). Differential equations of this type are encountered in the study of processes in neurodynamics [8,9]. In this paper, we obtain stability conditions for a stationary solution of scalar equations of this type. And also the characteristics of the convergence of the process are calculated. It is shown that the solution of stability problems is closely related to optimization problems [10-12]. Key words: mathematical model, stability, Lyapunov's second method, convergence, quadratic form.

Статтю представила д.ф.-м.н., доц. Розора І.В.

1. Квадратична функція Ляпунова.

Стійкість. Розглянемо скалярне диференціальне рівняння виду

$$\dot{x} = -ax + bF(x), \quad a > 0. \quad (1.1)$$

Функція $F(x)$ неперервна і задовольняє умовам “лінійного” обмеження

$$|F(x)| \leq K|x|. \quad (1.2)$$

Дослідження стійкості нульового положення рівноваги можна проводити за допомогою квадратичної функції Ляпунова

$$V(x) = hx^2, \quad h > 0.$$

Повна похідна функції Ляпунова в силу (1.1) має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x) &= \\ &= -2hax^2 + 2hxbF(x) \leq 2h(-a + |b|K)x^2. \end{aligned}$$

І, при виконанні умов

$$a - |b|K > 0,$$

повна похідна функції Ляпунова в силу рівняння (1.1) буде від'ємно визначеною і нульовий розв'язок глобально асимптотично стійким.

2. Оцінки збіжності. Нехай повна похідна функції Ляпунова від'ємно визначена. Тоді для неї має місце нерівність

$$\frac{d}{dt}V(x) \leq -2h(a - |b|K)x^2 = -2(a - |b|K)V(x).$$

Звідси отримуємо диференціальну нерівність

$$\frac{dV(x(t))}{V(x(t))} \leq -2(a - |b|K)dt.$$

Проінтегруємо її і отримаємо

$$V(x(t)) \leq V(x(t_0))e^{-2(a-|b|K)(t-t_0)}.$$

Звідси випливає експоненційна оцінка збіжності розв'язків рівняння (1.1)

$$|x(t)| \leq |x(t_0)|e^{-(a-|b|K)(t-t_0)}.$$

3. Функція Ляпунова типу Лур'є-Постнікова.

Нехай функція $F(x)$ задовольняє так звані «умови сектора»

$$0 < F(x) < Lx, \text{ при } x > 0,$$

$$Lx < F(x) < 0, \text{ при } x < 0, F(0) = 0, \quad (3.1)$$

Такими функціями можуть бути, наприклад,

$$F(x) = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 + e^{-\lambda x}}, \quad F(x) = \arctg x.$$

Умови (3.1) можна записати в більш компактному вигляді однієї нерівності

$$[Lx - F(x)]F(x) > 0, \quad (3.2)$$

В цьому випадку функцію Ляпунова можна брати у вигляді типу Лур'є-Постнікова.

$$V(x) = hx^2 + \gamma \int_0^x F(s)ds, \quad \gamma > 0. \quad (3.3)$$

Має місце наступне твердження.

Теорема 3.1. Нехай існують параметри $h > 0, \gamma > 0, k > 0$, при яких виконуються нерівності

$$2ha + (k - \gamma b) > 0,$$

$$2ha + (k - \gamma b) > \left(\frac{1}{2}\gamma a - hb - \frac{1}{2}kL\right)^2 \quad (3.4)$$

Тоді нульовий розв'язок $x(t) \equiv 0$ рівняння (1.1) буде асимптотично стійким.

Доведення. Неважко помітити, що функція $V(x)$ задовольняє двохстороннім нерівностям

$$hx^2 \leq V(x) \leq \left(h + \frac{1}{2}\gamma L\right)x^2, \quad (3.5)$$

тобто є додатньо визначеною функцією. Обрахуємо її повну похідну в силу (1.1). Отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t)) &= [2hx(t) + \gamma F(x(t))]\dot{x}(t) = \\ &= [2hx(t) + \gamma F(x(t))] \times [-ax(t) + bF(x(t))] = \\ &= -2hax^2(t) - \gamma aF(x(t))x(t) + 2hx(t)bF(x(t)) \\ &+ \gamma bF^2(x(t)) = -(x(t), F(x(t))) \times \\ &\times \begin{bmatrix} 2ha & \frac{1}{2}\gamma a - hb \\ \frac{1}{2}\gamma a - hb & -\gamma b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ F(x(t)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким чином, отримали квадратичну форму

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = -z^T(t)C_1z(t), \quad z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ F(x(t)) \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 2ha & \frac{1}{2}\gamma a - hb \\ \frac{1}{2}\gamma a - hb & -\gamma b \end{bmatrix}.$$

Для симетричної матриці

$$C_1 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix}$$

умовою додатньо визначеною є невід'ємність її власних чисел. Оскільки

$$\begin{aligned} \det C_1 &= \begin{vmatrix} c_{11} - \lambda & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \\ &= (c_{11} + c_{22})\lambda + (c_{11}c_{22} - c_{12}^2), \\ \text{то } \lambda_{1,2}(C_1) &= \frac{1}{2}[(c_{11} + c_{22}) \pm \\ &\pm \sqrt{(c_{11} - c_{22})^2 + 4c_{12}^2}]. \end{aligned}$$

І умови додатньої визначеності

мають вигляд

$$c_{11} + c_{22} > 0, \quad c_{11}c_{22} > c_{12}^2. \quad (3.6)$$

Для симетричної матриці

$$C_1 = \begin{bmatrix} 2ha & \frac{1}{2}\gamma a - hb \\ \frac{1}{2}\gamma a - hb & -\gamma b \end{bmatrix}$$

вони мають вигляд

$$2ha - \gamma b > 0, \quad -2h\gamma b > \left(\frac{1}{2}\gamma a - hb\right)^2.$$

Другу умову можна переписати у вигляді

$$(\gamma a + 2hb)^2 < 0$$

і вона не виконується. Таким чином, матриця C_1 не може бути додатньо визначеною.

Щоб зробити її додатньо визначеною, використаємо властивості (3.1) нелінійної функції $F(x)$ і представим повну похідну функції Ляпунова у вигляді

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) =$$

$$= -(x(t), F(x(t))) \begin{bmatrix} 2ha & \frac{1}{2}\gamma a - hb \\ \frac{1}{2}\gamma a - hb & -\gamma b \end{bmatrix} * \\ * \begin{pmatrix} x(t) \\ F(x(t)) \end{pmatrix} + \\ + k[Lx(t) - F(x(t))]F(x(t)) - \\ - k[Lx(t) - F(x(t))]F(x(t)), k > 0.$$

Введемо перший доданок в квадратичну форму. Отримаємо

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \\ = -(x(t), F(x(t))) * \\ * \begin{bmatrix} 2ha & \frac{1}{2}\gamma a - hb - \frac{1}{2}kL \\ \frac{1}{2}\gamma a - hb - \frac{1}{2}kL & -\gamma b + k \end{bmatrix} * \\ * \begin{pmatrix} x(t) \\ F(x(t)) \end{pmatrix} - k[Lx(t) - Fx(t)]F(x(t)).$$

Використаємо “умови сектора” (3.2) і, відкинувши другий доданок, отримаємо

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \leq \\ \leq -(x(t), F(x(t))) * \\ * \begin{bmatrix} 2ha & \frac{1}{2}\gamma a - hb - \frac{1}{2}kL \\ \frac{1}{2}\gamma a - hb - \frac{1}{2}kL & -\gamma b + k \end{bmatrix} * \\ * \begin{pmatrix} x(t) \\ F(x(t)) \end{pmatrix}$$

Таким чином, якщо матриця

$$C_2 = \begin{bmatrix} 2ha & \frac{1}{2}\gamma a - hb - \frac{1}{2}kL \\ \frac{1}{2}\gamma a - hb - \frac{1}{2}kL & -\gamma b + k \end{bmatrix}$$

буде додатньо визначеною, то повна похідна функції Ляпунова (3.3) буде від’ємно визначеною і на основі другої теореми Ляпунова положення рівноваги $x(t) \equiv 0$ буде асимптотично стійким.

А для цього необхідно і достатньо, щоб виконувались нерівності

$$2ha + (k - \gamma b) > 0 \\ 2ha(k - \gamma b) > \left(\frac{1}{2}\gamma a - hb - \frac{1}{2}kL\right)^2 \quad (3.7)$$

Зауваження 3.1 Неважко побачити, що

суттєве значення, яке впливає на умови стійкості, має знак постійної b , який визначає зворотній зв’язок нелінійності.

Приклад 3.1. Розглянемо рівняння (1.1) з параметрами $k > 0$, і нелінійної функції $F(x) = \arctg x$. Припустимо $h = 10$ $\gamma = 2$. В цьому випадку $L = 1/2$, а функція Ляпунова має вигляд

$$V(x) = 10x^2 + 2 \int_0^{x_1} \arctg x(s) ds.$$

Мажоранті обмеження для неї мають вигляд

$$10x^2 \leq V(x) \leq 12x^2.$$

Її повна похідна вздовж розв’язків рівняння має вигляд

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = [20x(t) + 2\arctg x(t)]x'(t) = \\ = [20x(t) + 2\arctg x(t)] \times [-10x(t) + b\arctg x(t)]$$

Якщо її представити у вигляді квадратичної форми, то отримаємо

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \\ = -(x(t), \arctg x(t)) \begin{bmatrix} 200 & 0 \\ 0 & -2b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \arctg x(t) \end{pmatrix}.$$

При $b < 0$ вона буде від’ємно визначеною квадратичною формою (це відповідає методу лінійного наближення). І положення рівноваги буде асимптотично стійким.

Нехай $b > 0$. Тоді квадратична форма не буде від’ємно визначеною. Представимо її у вигляді

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t)) = -(x(t), \arctg x(t)) \begin{bmatrix} 200 & 0 \\ 0 & -2b \end{bmatrix} * \\ * \begin{pmatrix} x(t) \\ \arctg x(t) \end{pmatrix} + \\ + k \left[\frac{1}{2}x(t) - F(x(t)) \right] F(x(t)) - k \left[\frac{1}{2}x(t) - F(x(t)) \right] * \\ * F(x(t)), k > 0$$

Введемо перший доданок в квадратичну форму

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \leq -\left(x(t), F(x(t))\right) \begin{bmatrix} 200 & -\frac{1}{4}k \\ -\frac{1}{4}k & -2b+k \end{bmatrix} * \\ * \begin{pmatrix} x(t) \\ F(x(t)) \end{pmatrix} - k[x(t) - F(x(t))]F(x(t)).$$

Використовуючи умови сектора і відкинувши другий доданок, отримаємо

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \leq -\left(x(t), F(x(t))\right) \begin{bmatrix} 200 & -\frac{1}{4}k \\ -\frac{1}{4}k & -2b+k \end{bmatrix} * \\ * \begin{pmatrix} x(t) \\ \arctg x(t) \end{pmatrix}.$$

Як впливає із (3.4) для додатньо визначеної матриці необхідно і достатньо виконання нерівностей

$$200 - 2b + k > 0 \\ 200(k - 2b) > \frac{1}{16}k^2$$

Зауваження 2.2. Розглянемо вплив параметрів функції Ляпунова (3.3) і диференціального рівняння (1.1) на стійкість нульового розв'язку. Тут заданими (фіксованими) є параметри $a > 0$, $L > 0$, b , а параметрами (за рахунок яких можна задовольнити нерівність) є $h > 0$, $\gamma > 0$, $k > 0$. І задача дослідження стійкості зводиться до задачі оптимізації функції

$$\Phi(h, \gamma, k) = 2ha(k - \gamma b) - \left(\frac{1}{2}\gamma a - hb - \frac{1}{2}kL\right)^2$$

→ max

при обмеженнях

$$h > 0, \gamma > 0, 2ha + k - \gamma b > 0, k > 0.$$

4. Оптимізація. Розглянемо вплив параметрів функції рівняння (1.1) на визначення стійкості нульового розв'язку. Параметрами фіксованими, (заданими) є параметри системи, тобто. $a > 0$ і $L > 0$, а параметрами змінних, тобто. за рахунок яких можна задовольнити нерівність (3.4), є $h > 0$, $\gamma > 0$, $k > 0$. І задача дослідження стійкості зводиться до задачі знаходження цих параметрів, при яких максимізується функція змінних $h > 0$, $\gamma > 0$, $k > 0$, тобто розглядається задача

$$\Phi(h, \gamma, k) = 2ha(k - \gamma) - \\ ((\gamma a - kL)/2 - h)^2 \rightarrow \max$$

при обмеженнях

$$h > 0, \gamma > 0, k > 0,$$

Якщо існують параметри $h > 0$, $\gamma > 0$, $k > 0$, при яких квадратична функція $\Phi(h, \gamma, k)$ буде додатньою, то нульовий розв'язок рівняння (1) буде асимптотично стійким.

В загальному випадку для задач великої розмірності умовам від'ємно визначеності функції Ляпунова є додатність відповідної матриці C , яка входить в матричне рівняння Ляпунова. Таким чином, як випливає із [10] отримуємо задачу квадратичної оптимізації з обмеженнями [10,11]. Для систем великої розмірності умови від'ємно визначеності повної похідної функції Ляпунова має вид додатності мінімального власного числа матриці, яке входить в рівняння Ляпунова. Як випливає із [12], мінімальне власне число симетричної додатньо визначеності матриці є опуклою функцією її елементів. Тому задача отримання умов стійкості зводиться до задачі випуклої оптимізації.

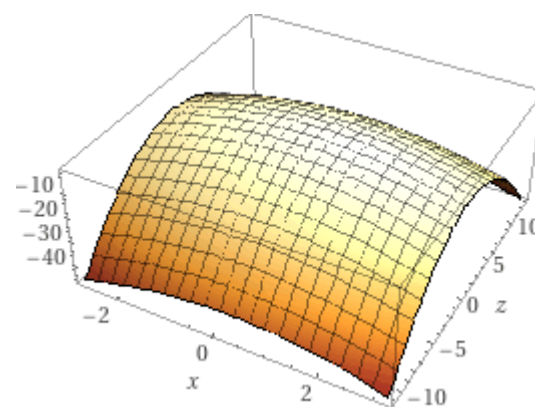


Рис.4.1

Повернемося до прикладу 3.1. Для нього функція $\Phi(h, \gamma, k)$ має вигляд

$$\Phi(h, \gamma, k) = 2ha(k - \gamma) - \left(\frac{\gamma a - kL}{2} - h\right)^2.$$

Як бачимо, навіть для одновимірного випадку побудувати графік не можливо. Для того, щоб продемонструвати, те що задача дослідження стійкості з отриманої функції Ляпунова можна поступити наступним чином

Фіксуємо величину $\gamma = 0.1$ і отримаємо залежність

$$\Phi(h, 0.1, k) = -h^2 - 0.25 - \frac{1}{4k^2} + 15hk + 0.5k$$

Графік даної функції зображено на рисю 4.1.
де $\Phi=z$, $h=x$, $k=y$.

Неважко помітити, що функція в області
 $y > 0, k > 0$ має додатні значення. Таким
чином нульове положення рівноваги
асимптотично стійке.

Література

1. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. – М., Наука, 1967. – 224,
2. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. – М., Наука, 1970. – 240 с.
3. Валеєв К.Г. Построение функций Ляпунова. – Киев, наукова думка, 1981. – 412 с.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М., Наука, 1967. – 472 с.
5. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.-Л., Гос. издат. тех.-теор. лит., 1950. – 471 с.
6. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. – М., Наука, 1966. – 532 с.
7. Перестюк М.О., Чернікова О.С. Теорія стійкості. – ВПЦ «Київський університет», 2012. – 103 с.
8. Архангельский В.И. Нейронные сети в системах автоматизации/ В.И. Архангельский, И.Н. Богаенко, Г.Г. Грабовский, Н.А. Рюмшин. – Киев: «Техника», 1999. – 364 с. (ВА 590706)
9. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс, 2-е издание / С. Хайкин. М: Издательский дом «Вильямс», 2006. – 1104 с.
10. Шор Н.З., Стеценко С.И. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация – К., Наукова думка, 1989. – 208 с.
11. Werner Kratz. Quadratic Functionals in Variational Analysis and Control Theory/ - Berlin: Akademie Verlag GmbH, 1995. – 293 pp.
12. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М., Наука, 1976. – 352 с.

REFERENCES

1. BARBASHIN EA (1967) Introduction to the theory of sustainability. - M., Nauka, 224p..
2. BARBASHIN EA (1970) Lyapunov functions. M., Nauka, 240 p.
3. VALEEV KG (1981) Construction of Lyapunov functions. - Kiev, Scientific Opinion, 412 p.
4. DEMIDOVICH BP (1967) Lectures on the mathematical theory of stability. - M., Nauka, 472 p.
5. LYAPUNOV AM (1950) The general problem of stability of movement. - M.-L., Gos. issue. Tech.-Theory Lit., 1950. - 471 p.
6. MALKIN IG (1966) Theory of stability of motion. M., Nauka, 532 p.
7. PERESTYUK MO, CHERNIKOVA OS (2012) Sustainability theory. - Ukrainian Orthodox Church "Kyiv University", 103 p.
8. ARKHANGELSKY VI (1999) Neural networks in automation systems Rum-shin. - Kiev: "Technology", 364 p. (VA 590706)
9. HAIKIN S. (2006) Neural networks: full course, 2nd edition M: Williams Publishing House, 1104 p.
10. SHORE NZ, STETSENKO SI (1989) Quadratic extremal problems and undifferentiable optimization, K., Naukova Dumka, 208 p.
11. WERNER KRATZ (1995) Quadratic Functionals in Variational Analysis and Control Theory, Berlin: Akademie Verlag GmbH, 293 pp.
12. BELLMAN R. (1976) Introduction to the theory of matrices. M., Nauka, 352 p.

Надійшло до редколегії 10.11.2021 р.