

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

№4 2021

**Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
випуск №4, 2021,**

Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Фізика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, механіко-математичного факультетів, факультету радіофізики, електроніки та комп’ютерних систем і факультету комп’ютерних наук та кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора, кандидата наук і PhD за спеціальностями 111, 112, 113, 104, 105 (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1188 від 24.09.2020) та за спеціальностями 121, 122, 123, 124 (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1471 від 26.11.2020), та реферується в Реферативному журналі Zentralblatt MATH, JournalTOCs, Crossref, ICI World of Journals, Road, Google Scholar і Науковій періодиці України.

Редакційна колегія:

Моклячук Михайло Павлович, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор**;
Розора Ірина Василівна, д.ф.-м.н., доц., **заст. головного редактора**;
Bartlova Milada, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;
Bavula Vladimir, Prof., University of Sheffield, Great Britain;
Beghin Luisa, Prof., Sapienza Università di Roma, Italy;
Futorny Vyacheslav, Prof., Universidade de São Paulo, Brazil;
Giuliano Rita, Prof., Università di Pisa, Italy;
Gorlatch Sergei, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;
Hudak Stefan, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;
Kukhtarev Nickolai, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;
Leonenko Nikolay, Prof., Cardiff University, Great Britain;
Medvids Arturs, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;
Olenko Andriy, Prof., La Trobe University, Australia;
Orsingher Enzo, Prof., Sapienza University of Rome, Italy;
Ostrovsky Eugene, Prof., Bar-Ilan University, Israel;
Pogany Tibor, Prof., University of Rijeka, Croatia;
Rontó Miklós, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;
Silvestrov Dmitrii, Prof., Stockholms universitet, Sweden;
Sottinen Tommi, Prof., University of Vaasa, Finland;
Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;
Trofimchuk Sergey, Prof., Universidad de Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;
Volodin Andrei, Prof., University of Regina, Canada;
Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;
Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Безущак Оксана Омелянівна, д.ф.-м.н., проф.;
Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;
Гарашенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;
Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;
Жук Ярослав Олександрович, д.ф.-м.н., проф.;
Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., проф.;
Курченко Олександр Олексійович, д.ф.-м.н., проф.

Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;
Львов Віктор Анатолійович, д.ф.-м.н., проф.;
Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;
Майборода Ростислав Євгенович, д.ф.-м.н., проф.;
Мішура Юлія Степанівна, д.ф.-м.н., проф.;
Пашко Анатолій Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Петравчук Анатолій Петрович, д.ф.-м.н., проф.;
Погорілий Сергій Дем'янович, д.т.н., проф.;
Савенков Сергій Миколайович, д.ф.-м.н., доц.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.;
Сливка-Тилищак Ганна Іванівна, д.ф.-м.н., проф.;
Хусаїнов Денис Ях'євич, д.ф.-м.н., проф.;

Редакційний відділ:

Затула Дмитро Васильович, **відповідальний секретар**;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
П'ятецька Олена Василівна, visnyk.phys-math@ukr.net;
Отто Георгій Костянтинович, **технічний редактор**, ottogk@gmail.com.

Адреса редакційної колегії:

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03022 Тел. (044) 259-01-49
fm.visnyk@ukr.net

ISSN 1812-5409

Засновник: Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Свідоцтво про державну реєстрацію: КВ №16299-4771Р від 11.12.2009 року

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/4>

Безкоштовно

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics
No. 4, 2021.

The journal contains results of new research in various fields of mathematics, computer science, mechanics, physics and radiophysics for researchers, academic staff, postgraduates, engineers and students. It is published on the recommendation of the Academic Councils of Faculty of Physics, Faculty of Radiophysics, Electronics and Computer Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics and the Faculty of Computer Science and Cybernetics.

Journal "Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics" is included in the List of scientific professional publications of Ukraine, in which the results of the theses for obtaining the scientific degrees of a doctor and a candidate of sciences (PhD) in specialties 111, 112, 113, 104, 105, 121, 122, 123 and 124 can be published (approved by the orders of the Ministry of Education and Science of Ukraine No. 1188 dated September 24, 2020 and No. 1471 dated November 26, 2020).

Journal is referenced in the abstract journal **Zentralblatt MATH (zbMATH), JournalTOCs, Crossref, ICI World of Journals, Road, Google Scholar and Scientific periodicals of Ukraine.**

Editorial Board

Moklyachuk Mikhail Pavlovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine,
Editor in Chief;

Rozora Iryna Vasylyvna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Ukraine, Deputy Editor in Chief;

Bartlova Milada, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;

Bavula Vladimir, Prof., University of Sheffield, Great Britain;

Beghin Luisa, Prof., Sapienza Università di Roma, Italy;

Futorny Vyacheslav, Prof., Universidade de São Paulo, Brazil;

Giuliano Rita, Prof., Università di Pisa, Italy;

Gorlatch Sergei, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;

Hudak Stefan, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;

Kukhtarev Nickolai, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;

Leonenko Nikolay, Prof., Cardiff University, Great Britain;

Medvids Arturs, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;

Olenko Andriy, Prof., La Trobe University, Australia;

Orsingher Enzo, Prof., Sapienza University of Rome, Italy;

Ostrovsky Eugene, Prof., Bar-Ilan University, Israel;

Pog'any Tibor, Prof., University of Rijeka, Croatia;

Rontó Miklós, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;

Silvestrov Dmitrii, Prof., Stockholm University, Sweden;

Sottinen Tommi, Prof., University of Vaasa, Finland;

Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;

Trofimchuk Sergey, Prof., Universidadde Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;

Volodin Andrei, Prof., University of Regina, Canada;

Akimenko Vitaliy Vladimirovich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Anisimov Igor Alekseevich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Anisimov Anatoliy Vasyl'ovych, Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Bezuschak Oksana Omelyanivna, Dr., Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Voloshin Aleksey Fedorovich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Garaschenko Fedir Georgievich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Yezhov Stanislav Nikolaevich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Zhuk Yaroslav Aleksandrovich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Zaslav'skyj Volodymyr Anatolijovych, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Kurchenko Oleksandr Oleksijovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Kudin Volodymyr Ivanovich, Dr. Sci., Sr. Sci. Researcher, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Lvov Victor Anatolijovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Makarets' Nikolay Vladimirovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Maiboroda Rostyslav Yevhenovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Mishura Yuliya Stepanivna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Pashko Anatolij Oleksijovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Perestyuk Mykola Oleksijovych, Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Petravchuk Anatolij Petrovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Pogorily Serhiy Demyanovych, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Savenkov Serhij Mykolajovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Skrzyeysky Valery Antonovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Slyvka-Tylyshchak Anna Ivanivna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Uzhhorod National University, Uzhhorod, Ukraine;
Husainov Denys Yah'yevych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine.

ISSN: 2218-2055 (on-line version)

ISSN: 1812-5409 (printed version)

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/4>

Founders: Taras Shevchenko National University of Kyiv

Foundation year: 1991 (series of bulletins of Kyiv University "Mathematics and Mechanics", "Physics", "Modeling and Optimization of Complex Systems" was reorganized into "Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics").

Certificate of state registration: KB № 16299-4771 P dated 11.12.2009

Issued: 4 times a year

Mailing Address

Taras Shevchenko National University of Kyiv
Faculty of Computer Science and Cybernetics,
03022, Ukraine, Kyiv, 4d Academician Glushkov avenue
Phone: (044) 259-01-49
fm.visnyk@ukr.net

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Ольшевський М.С. Нижня межа діаметру груп парних підстановок	11
--	----

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Воскобійник В.А., Воскобойник О.А., Терещенко Л.М., Воскобійник А.В. Вихрова динаміка сполучених течій	23
Голуб В.П. Щодо розрахунку релаксації напружень в тонкостінних циліндричних оболонках із лінійно-в'язкопружних матеріалів	29
Зражевський Г.М., Зражевська В.Ф. Комбінування детермінованого та стохастичного методів до розв'язання задачі дефектоскопії пружного стрижня	35
Кізілова Н.М., Ричак Н.Л. Математичне моделювання впливу шквального вітру на технічні та рослинні структури на урбанізованих територіях	39
Кобзар Ю.М. Моделювання процесу руйнування циліндричних стержнів за умов багато циклового симетричного кручення	46
Можаровський В.В., Кузьменков Д.С., Москальова М.В., Киргинцева С.В. Реалізація методики розрахунку контактної взаємодії зубів зубчатих коліс з композиційних матеріалів	50
Новицький В.В., Новицький В.В. (мол.) Математична модель руху еритроцита в капілярі	56
Павлюк Я.В. Моделювання деформацій циклічної повзучості нелінійно-в'язкопружних матеріалів за допомогою функції Хевісайда	62
Романов О.В. Щодо впливу напруженого стану на деформування конструкційних матеріалів	66
Сенченков І.К., Юрженко М.В., Червінко О.П., Доля О.В. Чисельне моделювання термо-напружено-деформованого стану елементів у процесі 3D друку	70
Троценко Я.П., Курилко О.Б. Течія рідини в циліндричному каналі з діафрагмами прямокутного профілю	76
Улітко І.А., Курилко О.Б., Затхей Визначення параметрів первинної моди твердотілого гіроскопу камертонного типу	82
Хорошев К.Г., Кикоть С.В. Власні частоти та власні форми регулярних ланцюгових коливальних систем	88
Яковенко Н.Д., Червінко О.П., Якименко С.М. Порівняльний аналіз лінійного та нелінійного правил сумішей при моделюванні напруженого стану півпростору	94
Рудницький О. Г., Рудницька М. О., Ткаченко Л.В., Ітеративний метод корекції артефактів при оптоакустичній реконструкції	98

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Капустян О.А., Петленко Ю. В. Моделювання та керування складною освітньою системою	110
Собчук В. В., Замрій І.В., Барабаш О. В., Мусієнко А. П. Методологія побудови функціонально стійкої інтелектуальної інформаційної системи виробничого підприємства	116

CONTENTS

ALGEBRA, GEOMETRY AND PROBABILITY THEORY

Olshevskiy M.S. The lower bound of diameter of Alternating groups	11
---	----

DIFFERENTIAL EQUATIONS, MATHEMATICAL PHYSICS AND MECHANICS

Voskoboinick V.A., Voskoboinyk O.A., Tereshchenko L.M., Voskobiinyk A.V. Vortex dynamics of junction flows	23
Golub V.P. Towards the analysis of stress relaxation in thin-walled cylindrical shells made of linear viscoelastic materials	29
Zrazhevsky G.M., Zrazhevskaya V.F. Deterministic and stochastic methods combining while solving the problem of defectoscopy of an elastic rod	35
Kizilova N.M., Rychak N.L. Mathematical modeling of influence of strong winds on technical and plant structures on urban areas	39
Kobzar Yu.M. Simulation of cylindrical rod destruction process under multi-cyclic semmetric torsion	46
Mozharovsky V.V., Kuzmenkov D.S., Moskaleva M.V., Kirhintsava S.V. Implementation of the methodology for calculating the contact interaction of teeth of gear wheels made of composite materials	50
Novytskyi V.V., Novytskyi V.V. (Jr.) Mathematical model of erythrocyte in the capillary motion	56
Pavlyuk Y.V. Modelling of cyclic creep deformations of nonlinear viscoelastic materials using Heaviside function	62
Romanov O.V. On the influence of the stress state on the deformation of construction materials	66
Senchenkov I.K., Jurzhenko M.V., Chervinko O.P., Dolia O.V. Numerical simulation of the thermo-stress-strain state of elements under 3D printing	70
Trotsenko Ya.P., Kurylko O.B. The flow of a liquid in a cylindrical duct with diaphragms of a rectangular profile	76
Ulitko I.A., Kurylko O.B., Zathej M.B. Determination of parameters of the primary mode of the tuning fork type solid-state gyroscope	82
Khoroshev K.G., Kykot S.V. Eigenfrequencies and eigenforms of regular chain oscillatory systems	88
Yakovenko N.D., Chervinko O.P., Yakymenko S.M. Comparative analysis of the linear and nonlinear rules of mixtures in modeling the stress state of a half-space	94
Rudnitskii A.G., Rudnytska M.A., Tkachenko L.V. Correction of artifacts in optoacoustic imaging using an iterative approach	98

COMPUTER SCIENCES AND INFORMATICS

Kapustian O.A., Petlenko Y. V. Modeling and Control for Complicated Education Systems	110
Sobchuk V. V., Zamrii I. V., Barabash O. V., Musienko A. P. Methodology for building a functionally stable intelligent information system of a manufacturing enterprise	116

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ ТА ТЕОРИЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/4.1>

М. С. Ольшевський¹, аспірант

Нижня межа діаметру груп парних підстановок

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул. Володимирська 64/13,
e-mail: msolshevskiy@gmail.com

M. Olshevskiy¹, graduate student

The lower bound of diameter of Alternating groups

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st,
e-mail: msolshevskiy@gmail.com

В даній роботі розглядається задача пошуку діаметру групи парних підстановок по заданій системі твірних. Вводиться поняття збалансованої парної підстановки та обчислюються довжини елементів, що є збалансованими чи близькими до збалансованих. За допомогою отриманих довжин було отримано основний результат роботи — нижню оцінку діаметра знакозмінної групи по заданій системі твірних.

Ключові слова: граф Келі, діаметр графа, система твірних, група парних підстановок.

In this paper we consider a specific case of the diameter search problem for finite groups, the case where the system of generators is fixed. This problem is well-known and can be formulated in the following way: find the diameter of a group over its system of generators. The diameter of the corresponding Cayley graph is the diameter of a group over its specific system of generators.

The main object of the research is the alternating group with the system of generators consisting of cycles having length three and the form $(1, 2, k)$. This system of generators is a classical irreducible system of generators of the alternating group. It is introduced the property of even permutations to be balanced. We consider the set of balanced permutations and permutations close enough to balanced and find minimum decompositions of them over defined system of generators.

The main result of the paper is the lower bound of the diameter of Alternating group over considered system of generators. The estimation is achieved using minimal decompositions of balanced permutations.

Key Words: Cayley graph, diameter of graph, system of generators, alternating group.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. А. П. Петравчук

Introduction

The diameter search problem for a finite group G can be formulated as follows. Find maximum of diameters $D_S(G)$ for all system of generators S of G . The interest to this problem was stimulated by the paper of L. Babai and A. Seress [2]. Recent results obtained in this direction can be found in [3], [4], [5], [6].

One closely related problem is the minimum-length generators sequence. This search problem can be formulated in the following way: for a finite group G , its system of generators S and an element $g \in G$ find the shortest generators sequence realizing g . It was shown in [7] that this problem is NP-hard for permutations groups.

A partial case of the diameter search problem is the diameter search problem with respect to a fixed system of generators. An exact formula of the diameter of the symmetric group $Sym(n)$

with respect to the classical irreducible system of generators $\{(1, k)\}$, $k = 2, \dots, n$ in obtained in [1].

In this work it is considered the alternating group $Alt(n)$ of degree $n \geq 3$ and its classical irreducible system of generators $(1, 2, k)$, $k = 3, \dots, n$. We introduced a specific type of even permutations that we call balanced permutations. For balanced even permutations and close to balanced even permutations it is constructed their minimal decomposition. These minimal decompositions are used to estimate the lower bound of the diameter of $Alt(n)$ with respected to the mentioned system of generators.

Unless otherwise specified in the paper we denote a finite group by G and a system of generators of G by S .

1 Preliminaries

In this section we recall basic definitions, that cor-

respond to decompositions of elements. The definitions of strictly growing systems of generators and groups-generators series were introduced in [8].

The main object of research of the paper is the alternating group $Alt(n)$ of degree n with its system of generators $((1, 2, 3), \dots, (1, 2, n)), n \geq 3$. We consider some useful elementary properties of this system of generators and recall the trajectory of a point over permutation's decomposition. This notion will be intensively used in the sequel.

1.1 Basic definitions, notations and properties

Every element g of G can be decomposed as a product

$$g = \prod_{k=1}^l s_k$$

of generators from S for some natural l . The tuple of generators $(s_1, \dots, s_k)$ will be called a *decomposition of the element g over S* . The *length $|g|_S$ of the element g over S* is the length of the shortest decomposition of g over S . The diameter $D_S(G)$ of G with respect to S is the maximum of lengths $|g|_S$, $g \in G$. An element $g \in G$ such that $|g|_S = D_S(G)$ is called a diameter element.

Let us introduce the operation of concatenation over tuples of generators. Let π, τ be elements from G and $D = (d_1, \dots, d_m), T = (t_1, \dots, t_u)$ be its decompositions over S correspondingly. Then the concatenation of D and T is the decomposition $(d_1, \dots, d_m, t_1, \dots, t_u)$ of the element $\pi \cdot \tau$.

In this paper we consider the right rule of permutation's multiplication: for every permutation π, τ and for every natural number x we have:

$$(\pi \cdot \tau)(x) = \tau(\pi(x)).$$

As usual, the support of a permutation π in $Sym(n)$ will be denoted by $supp(\pi)$, i.e. $supp(\pi) = \{x \in \overline{1, n} : \pi(x) \neq x\}$ for some natural number n .

Fix a natural number $n \geq 3$. The group $A = Alt(n)$ is a permutation group on the set $\overline{1, n} = \{1, 2, \dots, n\}$. The elements of this set will be called *points*. Let $S = SoG(n) = \{s_3, \dots, s_n\}$, where $s_k = (1, 2, k)$, $k \geq 3$.

Let $D = (i_1, \dots, i_m)$ be a tuple of $m \geq 1$ natural numbers, each greater or equal than 3. We

will use notation $[i_1, \dots, i_m]_S$ for the product

$$\prod_{k=1}^m s_{i_k} = \prod_{k=1}^m (1, 2, i_k).$$

For simplicity we will identify the tuple $D = (i_1, \dots, i_m)$ of indices with the tuple $(s_{i_1}, \dots, s_{i_m})$ of generators. Note, that the later forms a decomposition of the permutation $[i_1, \dots, i_m]_S$ over S .

We will use notation $\overbrace{a \rightarrow b}^{\pi}$ for $\pi \in A$ and $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$ such that $\pi(a) = b$. Moreover, if for some permutation $\tau \in A$ and a point c additional equality $\tau(b) = c$ holds then we use the following notation:

$$\overbrace{a \rightarrow b}^{\pi} \Rightarrow \overbrace{b \rightarrow c}^{\tau}.$$

This notation can be naturally generalized for products of arbitrary number of permutations.

1.2 The trajectory of a point over a decomposition

Let $\pi \in A$ be a permutation. Fix a decomposition $D = (i_1, \dots, i_m)$ of π over S . We assume that $m \geq 3$. Let $a \in \{1, 2, i_1, \dots, i_m\}$. We will define the trajectory of a over the decomposition D as follows.

For arbitrary points c, d and $k \in \overline{1, m}$ such that $s_{i_k}(c) = d$ we will use notation

$$c \xrightarrow{k} d.$$

Then in the graph of the action of the generating system S on $\overline{1, n}$ the decomposition D defines the unique path of the form

$$a = a_0 \xrightarrow{1} a_1 \xrightarrow{2} a_2 \xrightarrow{3} \dots \xrightarrow{m} a_m = \pi(a).$$

Definition 1.1. The trajectory of the point a in the permutation π over the decomposition D is a tuple $Tr(a, \pi, D) := (j_1, \dots, j_t)$ of all indices from D , such that exactly one condition

$$a_{j_k} = 1 \text{ or } a_{j_k-1} = 2$$

holds, $1 \leq k \leq t$.

In other words, the trajectory of a is the tuple of all positions in D , such that in the graph of the action corresponding generator defines the arrow that either starts in 2 or terminates at 1. Since $m \geq 3$ the trajectory is well defined.

In many cases we can use more compact form of the path of a point. For arbitrary $k, l \in \overline{1, m}$,

$k < l$, such that $2 = s_{i_k}^{-1}(a_k) \neq a_k = \dots = a_{l-1} \neq s_{i_l}(a_{l-1}) = 1$, $a_k \neq 1, 2$, we will use notation

$$a_k \xrightarrow{k,l} a_k.$$

Note that in this case both $k, l \in Tr(a, \pi, D)$.

The following properties of the trajectory $Tr(a, \pi, D) = (j_1, \dots, j_t)$ hold:

- 1) $a_{j_k} \neq 2$ for every $k \in \overline{1, t}$;
- 2) $a_{j_k} = a_{j_{k+1}-1}$ if and only if $a_{j_k} \xrightarrow{j_k, j_{k+1}} a_{j_k}$ is well defined in the path of a over D .

We will omit the following parts of the path of a in π over D :

- 1) the initial part of the path up to the first occurrence of a , if $a \neq 1, 2$;
- 2) the closing part of the path after the last occurrence of $\pi(a)$, if $\pi(a) \neq 1, 2$.

Let $\pi \in A$ be a permutation with decomposition $D = (d_1, \dots, d_m)$ over S , $m \geq 3$ and p be a point from $\{1, 2, d_1, \dots, d_m\}$. We will say that the point p has *trivial path in π over D* if $|Tr(p, \pi, D)| \leq 2$.

2 Length of permutation over S

In this section we provide estimations of lengths of permutations over system of generators S . We introduce the special type of permutations, which we call balanced. We show that the minimum length is reached for balanced permutations and permutations, which are close to balanced, according to number of unfixed points.

We also provide the minimum decomposition classification for special permutations: odd cycles, products of two odd or even cycles, some cases of products of three cycles. We separately consider cases according to action on points $1, 2$.

In this section we fix some natural number $n \geq 5$ and consider permutations from the alternating group A .

2.1 Length estimations over system of generators S

Let $\pi \in A$ be a permutation, $D = (d_1, \dots, d_m)$ be its decomposition over S , p be some point from $\{d_1, \dots, d_m\}$. Note that if the point p has trivial

path in π over D , then, based on [9, Proposition 2], the path of the point p over D has the form

$$p \xrightarrow{1} p \xrightarrow{2} \dots \xrightarrow{x-1} p \xrightarrow{x} \dots \xrightarrow{x+1} 2 \xrightarrow{x+2} \pi(p) \xrightarrow{x+3} \dots \xrightarrow{m} \pi(p),$$

where x is the first position of p in $\{d_1, \dots, d_m\}$ and $x + 2$ is the last position of $\pi(p)$ in $\{d_1, \dots, d_m\}$.

Let $\pi \in A$ be a permutation with the decomposition $D = (d_1, \dots, d_m)$ over S , $p \in \{d_1, \dots, d_m\}$ be a point.

Definition 2.1. We will say that the point p is *mixing point* in π over D if there are two consequence positions $j_1, j_2 \in \overline{1, m}$, $j_1 < j_2$ of the point p such that:

$$j_2 - j_1 - \text{odd number}$$

Let $\pi \in A$ be a permutation. Recall that every permutation π can be decomposed into the unique product of independent cycles up to its multiplication order. In this article we consider cycles with the length greater or equal 2. We denote the set of independent cycles of π by $IC(\pi)$.

Let c be a cycle from $IC(\pi)$ and D be a decomposition of π over A . Denote $\{d \in D | d \in \text{supp}(c)\}$ by $P(c, D)$ — the set of positions of points from cycle c in the decomposition D , which are not equal to $1, 2$.

Proposition 1. Let $\pi \in A$ be a permutation, $c \in IC(\pi)$ be a cycle with the length ≥ 2 and $1, 2 \notin \text{supp}(c)$. Then:

$$|P(c, D)| \geq |c| + 1.$$

Moreover, if $|P(c, d)| = |c| + 1$ then every point from c appears only once in D , except only one point, which is appeared twice. One of this double-point's positions is the minimum and another is the maximum over the positions of points of cycle c over D .

Proof. Let $D = (d_1, \dots, d_m)$ be the decomposition of π and $c = (i_1, \dots, i_l)$. Then there is the sequence $\{j_{k,1}, j_{k,2} : k \in \overline{1, r}\}$ of positions of points from D such that for every $k \in \overline{1, l}$:

$$Tr(i_k, \pi, D) = (j_{k,1}, \dots, j_{k,2}),$$

where $d_{j_{k,1}} = i_k$, $d_{j_{k,2}} = i_{k+1}$. The minimum count of positions in D , which are represented points from $(i_1, \dots, i_l)$, can be archived only if the end of one trajectory will be the begin of another:

$$\dots < j_{k-1,2} = j_{k,1} < j_{k,2} = j_{k+1,1} < \dots$$

Note, that this sequence is ordered as natural numbers. Hence, there is one $t \in \overline{1, l}$: $j_{t-1,2} \neq j_{t,1}$ ($j_{l,2} \neq j_{1,1}$ in case $t = 1$).

The last means, that for the cycle c , the decomposition D should consist at least $l + 1$ points such that:

- 1) only one point from $i_1, \dots, i_l$ will be presented twice and has the minimum and the maximum position over positions of points from $i_1, \dots, i_l$;
- 2) other points from $i_1, \dots, i_l$ will be presented in decomposition only once.

As the result, we have:

$$|P(c, D)| \geq l + 1.$$

The proof is complete. $\square$

Corollary 1. Let $\pi \in A$ be a permutation, $c_1, \dots, c_r \in IC(\pi)$ be cycles and $1, 2 \notin \text{supp}(c_i)$, $i \in \overline{1, r}$. Then:

$$\sum_{i=1}^r |P(c_i, D)| \geq \sum_{i=1}^r |c_i| + r.$$

Moreover, if $\sum_{i=1}^r |P(c_i, D)| = \sum_{i=1}^r |c_i| + r$ then the decomposition D will have exactly $|c_i| + 1$ positions for points from c_i , $i \in \overline{1, r}$.

Proof. Directly implies from Proposition 1. $\square$

Corollary 2. Let $\pi \in A$ be some permutation, $\{c_1, \dots, c_r\} = IC(\pi)$ and $1, 2 \notin \text{supp}(\pi)$. Then:

$$|\pi|_S \geq \sum_{i=1}^r |c_i| + r.$$

Moreover, if $|\pi|_S = \sum_{i=1}^r |c_i| + r$ then the decomposition D will have exactly $|c_i| + 1$ positions for points from c_i , $i \in \overline{1, r}$.

Proof. Directly implies from Corollary 1 $\square$

Proposition 2. Let $\pi \in A$ be a permutation with the decomposition $D = (d_1, \dots, d_m)$, $c_1, \dots, c_r \in IC(\pi)$ be cycles, $1, 2 \notin \text{supp}(c_i)$, $i \in \overline{1, r}$.

Let the following conditions are hold:

- 1) the decomposition D contains exactly $\sum_{i=1}^r |c_i| + r$ positions of points from $c_1, \dots, c_r$;

- 2) every point from $(d_1, \dots, d_m)$, which is different from points of c_i , $i \in \overline{1, r}$, is not the mixing point in π over D .

Then all positions from $P(c_i, D)$ are odd or even at the same time for every $i \in \overline{1, r}$.

Proof. Let $c = (i_1, \dots, i_l)$ be one of cycles from $c_1, \dots, c_r$ with the length $l \geq 2$. Note, that cycle c has exactly $l + 1$ positions in D , based on condition 1. Similar to proof of Proposition 1 we have sequence of positions $\{(j_{k,1}, j_{k,2}) : k \in \overline{1, r}\}$ such that:

$$Tr(i_k, \pi, D) = (j_{k,1}, \dots, j_{k,2}),$$

$$\dots < j_{k-1,2} = j_{k,1} < j_{k,2} = j_{k+1,1} < \dots$$

Without losing of generality, we can assume that the point i_1 appears twice in D .

Suppose, that positions of points of c are not all odd or even. Then there is at least one $t \in \overline{1, r}$ that $j_{t,1}, j_{t,2}$ have different parity. The last means that there is at least one mixing point p with positions u_1, u_2 in π over D such that:

$$Tr(i_t, \pi, D) = (j_{t,1}, \dots, u_1, u_2, \dots, j_{t,2}),$$

where $p = d_{u_1} = d_{u_2}$. Condition 2 states that there is another cycle g from $c_1, \dots, c_r$ that g has mixing point p . Based on Condition 1 and Proposition 1: u_1, u_2 are the first and the last positions of points of g . Note, that they also have different parity. Similar to cycle c , there will be found another mixing point for g , which will correspond to another cycle.

It is enough to note, that:

- 1) every cycle, which positions of points are not all odd or even, requires to have another cycle with mixing point in the range of its positions;
- 2) on each step, range of positions is decreasing;

$$\{j_{1,1}, \dots, j_{l,2}\} \supset \{u_1, \dots, u_2\} \supset \dots;$$

- 3) number of cycles are limited.

From this we have, that at some moment there is no mixing point for cycle, which positions of points are not all odd or even. Contradiction.

As the result, all positions of cycle c_i are even or odd at the same time for every $i \in \overline{1, r}$. $\square$

2.2 Balanced permutations

Let C be the set of pairwise different cycles with length greater or equal 2. The value $\sum_{c \in C} |c| + |C|$ we denote by $L(C)$.

Note that if π is a permutation from A , then value $L(IC(\pi))$ is even number, because:

1) if π consists of odd cycles

(a) and its number is even, then $\sum_{c \in IC(\pi)} |c|$ and $|IC(\pi)|$ are even numbers, so, its sum is also even;

(b) and its number is odd, then $\sum_{c \in IC(\pi)} |c|$ and $|IC(\pi)|$ are odd numbers, so, its sum is even number.

2) if π consists of even cycles, then the number of even cycles are even, so, $\sum_{c \in IC(\pi)} |c| + |IC(\pi)|$ is even number;

3) all other cases is a combination of the previous two.

Let π be a permutation, $1, 2 \notin \text{supp}(\pi)$.

Definition 2.2. We say that π be *balanced* permutation if $1, 2 \notin \text{supp}(\pi)$ and there exists separation $IC(\pi)$ into uncrossed sub-sets C_1, C_2 such that:

$$L(C_1) = L(C_2).$$

Proposition 3. Let $\pi \in A$ be a permutation. Then the permutation π be *balanced* permutation if and only if:

$$|\pi|_S = L(IC(\pi)).$$

Proof. Necessity. Based on Corollary 2:

$$|\pi|_S \geq L(IC(\pi)).$$

For every cycle $c = (i_1, \dots, i_x)$ we have its representation in the permutation's decomposition in the following way:

$$[\dots, i_1, t_1, i_2, t_2, \dots, i_x, t_x, i_1, t_{x+1}, \dots]_S,$$

where $c \in IC(\pi)$ and $\{t_1, t_2, \dots, t_{x+1}\}$ are some points. We identify cycle $c_l = (i_1^{(l)}, \dots, i_l^{(l)}) \in IC(\pi)$ with every $c_l \in IC(\pi)$. Let $C_1 = (c_{l_1}, \dots, c_{l_{m_1}})$, $C_2 = (c_{r_1}, \dots, c_{r_{m_2}})$ be sub-sets from definition of balanced permutations. We use

the similar form of cycle's decomposition, as it was in Proposition 1.

Then π can be decomposed over S in the following way (without losing of generality, we assume here that $l_1 < r_1$):

$$\pi = [i_1^{(l_1)}, i_1^{(r_1)}, \dots, i_{l_1}^{(l_1)}, i_{r_1}^{(r_1)}, i_1^{(l_1)}, i_{r_1+1}^{(r_1)}, \dots, i_{l_{m_1}}^{(l_{m_1})}, i_{r_{m_2}}^{(r_{m_2})}, i_1^{(l_{m_1})}, i_1^{(r_{m_2})}]_S.$$

The last means that the statement is correct, because proposed decomposition is a decomposition of π with length:

$$L(C_1) + L(C_2) = \sum_{c \in IC(\pi)} |c| + |IC(\pi)|.$$

Sufficiency. Let D be a decomposition of π such that the length of D equals $\sum_{c \in IC(\pi)} |c| + |IC(\pi)|$. Note that the permutation π satisfies conditions of Proposition 2 with all cycles from $IC(\pi)$ and no other points, different from them. From Proposition 2 it follows that all positions of points of cycle c are odd or even at the same time for every c from $IC(\pi)$. Construct the sub-sets C_1, C_2 in the following way: if cycle c has odd positions of its points in D , then we put c into C_1 , otherwise — into C_2 .

As the result:

- $\sum_{c \in C_1} |c| + |C_1|$ — number of odd positions;
- $\sum_{c \in C_2} |c| + |C_2|$ — number of even positions.

In the end, it is enough to note that $\sum_{c \in IC(\pi)} |c| + |IC(\pi)| = \sum_{c \in C_1} |c| + |C_1| + \sum_{c \in C_2} |c| + |C_2|$ is always even number for any permutation from A . As the result:

$$\sum_{c \in C_1} |c| + |C_1| = \sum_{c \in C_2} |c| + |C_2|,$$

which means that the permutation π is balanced. $\square$

Lemma 1. Let π be some balanced permutation, p be a natural number greater 2 and $p \notin \text{supp}(\pi)$. Then if there exists separation $IC(\pi)$ into uncrossed sub-sets C_1, C_2 such that:

$$L(C_1) = \frac{|\pi|_S}{2} + 1 \text{ and } L(C_2) = \frac{|\pi|_S}{2} - 1 \quad (1)$$

then:

$$|\pi \cdot s_p^2|_S = |\pi|_S + 1.$$

Otherwise:

$$|\pi \cdot s_p^2|_S = |\pi|_S + 2.$$

Proof. Note that $|\pi \cdot s_p^2|_S \geq |\pi|_S + 1$ based on Proposition 1. Also note that $\pi \cdot s_p^2 = [\pi]_S \cdot [p, p]$ with the length equals $|\pi|_S + 2$, so: $|\pi \cdot p^2|_S \leq |\pi|_S + 2$. Let $|\pi|_S = m$.

Suppose that there exists the decomposition $D = (d_1, \dots, d_m, d_{m+1})$ of $\pi \cdot s_p^2$. Note that $p \notin \text{supp}(\pi)$ and π is balanced, so, there exist paths:

$$1 \rightarrow \dots \rightarrow p, p \rightarrow \dots \rightarrow 2 \text{ and } 2 \rightarrow \dots \rightarrow 1.$$

Based on [9, Lemma 9], the point p can be placed on the m th position without increasing decomposition's length:

$$\pi \cdot s_p^2 = [d_1, \dots, d_{m-1}, p, d_{m+1}]_S,$$

where there is no other p in $d_1, \dots, d_{m-1}$.

Consider different cases of value of d_{m+1} .

- 1) Let $d_{m+1} = p$. Based on [9, Proposition 1], we have:

$$\pi = [d_1, \dots, d_{m-1}, p, p]_S \cdot [p]_S = [d_1, \dots, d_{m-1}]_S \circ r$$

which means that $|\pi|_S \leq m - 1$ — contradiction.

- 2) Let $d_{m+1} \neq p$. Note that there are exactly m positions for cycles of π . From Proposition 2 it follows that all positions of points of cycle in D should be even or odd numbers at the same time for every cycle from $IC(\pi)$.

Let C_1 be the set of cycles, which are placed on odd positions and C_2 be set of cycles, which are placed on even positions in D . Note that there are exactly $\frac{m}{2} + 1$ positions for C_1 and $\frac{m}{2} - 1$ for C_2 . It is enough to note, that:

- (a) cycles from C_1 can be placed in decomposition on odd positions;
- (b) cycles from C_2 can be placed in decomposition on even positions

if and only if the equality (1) is hold. In this case, we have (without losing the generality, we assume that $l_1 < r_1$):

$$\begin{aligned} \pi = & [i_1^{(l_1)}, i_1^{(r_1)}, i_2^{(l_1)}, i_2^{(r_1)}, \dots, i_{l_1}^{(l_1)}, i_{l_1}^{(r_1)}, \\ & i_1^{(l_1)}, i_{l_1+1}^{(r_1)}, i_1^{(l_2)}, i_{l_1+2}^{(r_1)}, \dots, i_{l_{m_1}-1}^{(l_{m_1})}, i_1^{(r_{m_2})}, \\ & i_{l_{m_1}}^{(l_{m_1})}, p, i_1^{(l_{m_1})}]_S, \end{aligned}$$

which prove that:

$$|\pi \cdot p^2|_S = m + 1 = |\pi|_S + 1.$$

If there are no such separation of $IC(\pi)$ into C_1, C_2 , then there is no decomposition D of $\pi \cdot p^2$ with length $m + 1$. As the result:

$$|\pi \cdot p^2|_S = m + 2 = |\pi|_S + 2.$$

The proof is complete. $\square$

Lemma 2. Let π be an balanced permutation, $p_1, p_2 \geq 3$, $p_1 \neq p_2$, such that $p_1, p_2 \notin \text{supp}(\pi)$. If there exists a separation $IC(\pi)$ into uncrossed sub-sets C_1, C_2 such that

$$L(C_1) = \frac{|\pi|_S}{2} + 2 \text{ and } L(C_2) = \frac{|\pi|_S}{2} - 2 \quad (2)$$

$$L(C_1) = \frac{|\pi|_S}{2} - 1 \text{ and } L(C_2) = \frac{|\pi|_S}{2} + 1 \quad (3)$$

then

$$|\pi \cdot (1, 2)(p_1, p_2)|_S = |\pi|_S + 3.$$

Otherwise

$$|\pi \cdot (1, 2)(p_1, p_2)|_S = |\pi|_S + 4.$$

Proof. Let $|\pi|_S = m$. Then $|\pi \cdot (1, 2)(p_1, p_2)|_S \geq m + 3$ based on Proposition 1 and Corollary 1. Also note that $\pi \cdot (1, 2)(p_1, p_2) = \pi \cdot [p_1, p_2, p_2, p_1]_S$ with the length equals $m + 4$, so: $|\pi \cdot p^2|_S \leq m + 4$.

Suppose that there exists the decomposition $D = (d_1, \dots, d_{m+3})$ of $\pi \cdot (1, 2)(p_1, p_2)$ over S . Note that $p_1, p_2 \notin \text{supp}(\pi)$ and π is balanced, so, there exists paths:

$$p_1 \rightarrow \dots \rightarrow p_2 \text{ and } p_2 \rightarrow \dots \rightarrow p_1.$$

Based on [9, Lemma 9], the points p_1, p_2 can be placed on the last positions of decomposition. There are 2 possible options:

- 1) $\pi \cdot (1, 2)(p_1, p_2) = [d_1, \dots, d_{m-3}, p_1, d_{m-1}, p_2, d_{m+1}, p_1, d_{m+3}]_S$;
- 2) $\pi \cdot (1, 2)(p_1, p_2) = [d_1, \dots, d_{m-2}, p_1, d_m, p_2, d_{m+2}, p_1]_S$.

Note that there are no other p_1, p_2 in decomposition. We consider each case separately.

Case 1. There are exactly m positions for cycles of π . Based on Proposition 2, all positions of points of the cycle in D should be odd or even numbers at the same time for every cycle from $IC(\pi)$.

Let C_1 be the set of cycles, which are placed on odd positions and C_2 be the set of cycles, which are placed on even positions. Note that there are exactly $\frac{m}{2} + 2$ positions for C_1 and $\frac{m}{2} - 2$ for C_2 . The last one take place if and only if the equation (2) is hold.

If such C_1, C_2 exist, then, similar to previous proves (without losing the generality, we assume that $l_1 < l_2$) we have the following decomposition:

$$\begin{aligned} \pi = [i_1^{(l_1)}, i_1^{(r_1)}, i_2^{(l_1)}, i_2^{(r_1)}, \dots, i_{l_1}^{(l_1)}, i_{l_1}^{(r_1)}, i_1^{(l_1)}, i_{l_1+1}^{(r_1)}, \\ i_1^{(l_2)}, i_{l_1+2}^{(r_1)}, \dots, i_{l_{m_1}-3}^{(l_{m_1})}, i_1^{(l_{m_2})}, i_{l_{m_1}-2}^{(l_{m_1})}, p_1, i_{l_{m_1}-1}^{(l_{m_1})}, p_2, \\ i_{l_{m_1}}^{(l_{m_1})}, p_1, i_1^{(l_{m_1})}]_S, \end{aligned}$$

which prove that:

$$|\pi \cdot (1, 2)(p_1, p_2)|_S = m + 3 = |\pi|_S + 3.$$

If there are no such sub-sets C_1, C_2 , then there is no decomposition D of $\pi \cdot (1, 2)(p_1, p_2)$ with the length $m + 3$ over S . As the result, we have:

$$|\pi \cdot (1, 2)(p_1, p_2)|_S = m + 4 = |\pi|_S + 4.$$

Case 2. There are exactly m positions for cycles from $IC(\pi)$. Based on Proposition 2, all positions of points of cycle in D should be even or odd for every cycle from $IC(\pi)$.

Let C_1 be set of cycles presented on odd positions and C_2 be set of cycles presented on even positions. Note that for C_1 there are exactly $\frac{m}{2} - 1$ positions and $\frac{m}{2} + 1$ for C_2 . The last one take place if and only if the equation (3) is hold.

If such C_1, C_2 exist, then, similar to previous proves (without losing the generality, we assume that $l_1 < l_2$) we have the following decomposition:

$$\begin{aligned} \pi = [i_1^{(l_1)}, i_1^{(r_1)}, i_2^{(l_1)}, i_2^{(r_1)}, \dots, i_{l_1}^{(l_1)}, i_{l_1}^{(r_1)}, i_1^{(l_1)}, i_{l_1+1}^{(r_1)}, \\ i_1^{(l_2)}, i_{l_1+2}^{(r_1)}, \dots, i_1^{(l_{m_1})}, i_{l_{m_2}-1}^{(r_{m_2})}, p_1, i_{r_{m_2}}^{(r_{m_2})}, \\ p_2, i_1^{(r_{m_2})}, p_1]_S, \end{aligned}$$

which prove that:

$$|\pi \cdot (1, 2)(p_1, p_2)|_S = m + 3 = |\pi|_S + 3$$

If there are no such sub-sets C_1, C_2 , then there is no decomposition D of $\pi \cdot (1, 2)(p_1, p_2)$ over S with length $m + 3$. As the result, we have:

$$|\pi \cdot (1, 2)(p_1, p_2)|_S = m + 4 = |\pi|_S + 4$$

□

Lemma 3. Let π be some balanced permutation, $p_1, p_2, p_3 \geq 3$ be pairwise different natural numbers such that $p_1, p_2, p_3 \notin \text{supp}(\pi)$. If there exists a separation $IC(\pi)$ into uncrossed sub-sets C_1, C_2 such that:

$$L(C_1) = \frac{|\pi|_S}{2} + 2 \text{ and } L(C_2) = \frac{|\pi|_S}{2} - 2$$

or:

$$L(C_1) = \frac{|\pi|_S}{2} - 1 \text{ and } L(C_2) = \frac{|\pi|_S}{2} + 1$$

then:

$$|\pi \cdot (1, p_1)(p_2, p_3)|_S = |\pi|_S + 4$$

Otherwise:

$$|\pi \cdot (1, p_1)(p_2, p_3)|_S = |\pi|_S + 5$$

Proof. It is enough to note that:

$$\pi \cdot (1, 2)(p_2, p_3) \cdot (1, 2, p_1) = \pi \cdot (1, p_1)(p_2, p_3),$$

so based on strong growing propositions from [9]:

$$|\pi \cdot (1, p_1)(p_2, p_3)|_S = |\pi \cdot (1, 2)(p_2, p_3)|_S + 1$$

If Lemma's conditions are succeed, then, based on Lemma 2 we have:

$$|\pi \cdot (1, 2)(p_2, p_3)|_S = |\pi|_S + 3,$$

which means that:

$$|\pi \cdot (1, p_1)(p_2, p_3)|_S = |\pi|_S + 4$$

If Lemma's conditions are succeed, then, based on Lemma 2:

$$|\pi \cdot (1, 2)(p_2, p_3)|_S = |\pi|_S + 4,$$

which means that:

$$|\pi \cdot (1, p_1)(p_2, p_3)|_S = |\pi|_S + 5$$

□

Lemma 4. Let π be a balanced permutation, $p_1, p_2, p_3 \geq 3$ be pairwise different natural numbers such that $p_1, p_2, p_3 \notin \text{supp}(\pi)$. If there exists continuous separation $IC(\pi)$ into uncrossed sub-sets C_1, C_2 such that:

$$L(C_1) = \frac{|\pi|_S}{2} + 2 \text{ and } L(C_2) = \frac{|\pi|_S}{2} - 2$$

or:

$$L(C_1) = \frac{|\pi|_S}{2} - 1 \text{ and } L(C_2) = \frac{|\pi|_S}{2} + 1$$

then:

$$|\pi \cdot (2, p_1)(p_2, p_3)|_S = |\pi|_S + 4$$

Otherwise:

$$|\pi \cdot (2, p_1)(p_2, p_3)|_S = |\pi|_S + 5$$

Proof. It is enough to note that:

$$(1, 2, p_1) \cdot \pi \cdot (1, 2)(p_2, p_3) = \pi \cdot (1, p_1)(p_2, p_3),$$

so based on strong growing propositions from [9]:

$$|\pi \cdot (2, p_1)(p_2, p_3)|_S = |\pi \cdot (1, 2)(p_2, p_3)|_S + 1$$

If the conditions of the lemma are satisfied, then, based on Lemma 2 we have:

$$|\pi \cdot (1, 2)(p_2, p_3)|_S = |\pi|_S + 3$$

The last means, that:

$$|\pi \cdot (2, p_1)(p_2, p_3)|_S = |\pi|_S + 4$$

If conditions of the lemma aren't satisfied, then, based on Lemma 2, we have:

$$|\pi \cdot (1, 2)(p_2, p_3)|_S = |\pi|_S + 4$$

The last means, that:

$$|\pi \cdot (2, p_1)(p_2, p_3)|_S = |\pi|_S + 5$$

□

Lemma 5. Let π be balanced permutation, $p_1, p_2, p_3, p_4 \geq 2$ be pairwise different natural numbers such that $p_1, p_2, p_3, p_4 \notin \text{supp}(\pi)$. If there exists a separation $IC(\pi)$ into uncrossed sub-sets C_1, C_2 such that:

$$L(C_1) = \frac{|\pi|_S}{2} + 2 \text{ and } L(C_2) = \frac{|\pi|_S}{2} - 2$$

or:

$$L(C_1) = \frac{|\pi|_S}{2} - 1 \text{ and } L(C_2) = \frac{|\pi|_S}{2} + 1$$

then:

$$|\pi \cdot (1, p_1, 2, p_2)(p_3, p_4)|_S = |\pi|_S + 5$$

Otherwise:

$$|\pi \cdot (1, p_1, 2, p_2)(p_3, p_4)|_S = |\pi|_S + 6$$

Proof. It is enough to note that:

$$\pi \cdot (1, p_1)(p_3, p_4) \cdot (1, 2, p_2) = \pi \cdot (1, p_1, 2, p_2)(p_3, p_4),$$

so based on strong growing propositions from [9]:

$$|\pi \cdot (1, p_1, 2, p_2)(p_3, p_4)|_S = |\pi \cdot (1, p_1)(p_3, p_4)|_S + 1$$

If the conditions of the lemma are satisfied, then, based on Lemma 3:

$$|\pi \cdot (1, p_1)(p_3, p_4)|_S = |\pi|_S + 4,$$

The last means, that:

$$|\pi \cdot (1, p_1, 2, p_2)(p_3, p_4)|_S = |\pi|_S + 5$$

If the conditions of lemma aren't satisfied, then, based on Lemma 3:

$$|\pi \cdot (1, p_1)(p_3, p_4)|_S = |\pi|_S + 5,$$

The last means, that:

$$|\pi \cdot (1, p_1, 2, p_2)(p_3, p_4)|_S = |\pi|_S + 6$$

□

Lemma 6. Let π be a balanced permutation, $p_1, p_2, p_3, p_4 \geq 3$ be pairwise different natural numbers such that $p_1, p_2, p_3, p_4 \notin \text{supp}(\pi)$. If there exists a separation $IC(\pi)$ into uncrossed sub-sequences C_1, C_2 such that:

$$L(C_1) = \frac{|\pi|_S}{2} + 2 \text{ and } L(C_2) = \frac{|\pi|_S}{2} - 2$$

or:

$$L(C_1) = \frac{|\pi|_S}{2} - 1 \text{ and } L(C_2) = \frac{|\pi|_S}{2} + 1$$

then:

$$|\pi \cdot (1, 2, p_1, p_2)(p_3, p_4)|_S = |\pi|_S + 5$$

Otherwise:

$$|\pi \cdot (1, 2, p_1, p_2)(p_3, p_4)|_S = |\pi|_S + 6$$

Proof. It is enough to note that:

$$\pi \cdot (2, p_2)(p_3, p_4) \cdot (1, 2, p_1) = \pi \cdot (1, 2, p_1, p_2)(p_3, p_4),$$

so based on strong growing propositions from [9]:

$$|\pi \cdot (1, 2, p_1, p_2)(p_3, p_4)|_S = |\pi \cdot (2, p_2)(p_3, p_4)|_S + 1$$

If the conditions of the lemma are satisfied, then, based on Lemma 4 we have:

$$|\pi \cdot (2, p_2)(p_3, p_4)|_S = |\pi|_S + 4$$

The last means, that:

$$|\pi \cdot (1, 2, p_1, p_2)(p_3, p_4)|_S = |\pi|_S + 5$$

If the conditions of the lemma aren't satisfied, then, based on Lemma 4 we have:

$$|\pi \cdot (2, p_2)(p_3, p_4)|_S = |\pi|_S + 5$$

The last means, that:

$$|\pi \cdot (1, 2, p_1, p_2)(p_3, p_4)|_S = |\pi|_S + 6$$

□

Lemma 7. Let π be a balanced permutation, c be odd cycle with length u , c is independent to π and $1, 2 \notin \text{supp}(c)$. Then if there exists a separation $IC(\pi)$ into uncrossed sub-sets C_1, C_2 such that

$$L(C_1) = \frac{|\pi|_S}{2} + \frac{u+1}{2} \text{ and } L(C_2) = \frac{|\pi|_S}{2} - \frac{u+1}{2}$$

then

$$|\pi \cdot c|_S = |\pi|_S + (u+1).$$

Otherwise

$$|\pi \cdot c|_S = |\pi|_S + (u+2).$$

Proof. Note that $|\pi \cdot c|_S \geq |\pi|_S + (u+1)$ based on Corollary 1. Also note that:

$$|\pi \cdot p^2|_S \leq |\pi|_S + |c|_S = |\pi|_S + (u+2),$$

as product of two elements of A .

Suppose that there exists decomposition $D = (d_1, \dots, d_m, d_{m+1}, \dots, d_{m+u+1})$ of $\pi \cdot c$ with $|\pi|_S = m$. Note that c is independent to π , $1, 2 \notin c$ and π is balanced. Then, without losing of generality, we can assume that for cycle $c = (c_1, \dots, c_u)$: c_i has trivial path in $\pi \cdot c$ over D .

Based on rules of Multiplication of permutations by generators [9]: all points of cycle c can be placed on the last positions of decomposition, corresponding to its cycle order. As the result, we have the 2 options:

$$1) \pi \cdot c = [d_1, \dots, d_{m-u}, c_1, d_{m-u+2}, c_2, \dots, d_{m+u-2}, c_u, d_{m+u}, c_1]_S.$$

$$2) \pi \cdot c = [d_1, \dots, d_{m-u}, d_{m-u+1}, c_1, d_{m-u+3}, \dots, c_u, d_{m+u-1}, c_1, d_{m+u+1}]_S.$$

Note that there are no other points of c in decomposition, based on Corollary 1. In both cases there are exactly m positions for cycles of π . Based on Corollary 2: every cycle from $IC(\pi)$ should be presented only on odd or even positions in decomposition D .

Let C_1 be set of cycles presented on odd positions and C_2 be set of cycles presented on even positions. Note that there are exactly $\frac{m}{2} + (u+1)$ positions for C_1 and $\frac{m}{2} - (u+1)$ for C_2 . The last one takes place only if there exist sub-sets C_1, C_2 from lemma's condition. We will show that in case if the first lemma's conditions are satisfied, then can be constructed the decomposition of π with corresponding length. The second case can be similar constructed.

If such C_1, C_2 exist, then similar to previous proves:

$$\pi = [i_1^{(l_1)}, i_1^{(r_1)}, i_2^{(l_1)}, i_2^{(r_1)}, \dots, i_{l_1}^{(l_1)}, i_{l_1}^{(r_1)}, i_1^{(l_2)}, i_1^{(r_2)}, \dots, i_x^{(l_y)}, i_x^{(r_{m_2})}, i_{x+1}^{(l_y)}, i_{x+1}^{(r_{m_1})}, c_u, i_1^{(l_{m_1})}, c_1]_S,$$

where x some position for cycle in group C_1 with length y . Provided decomposition proves that:

$$|\pi \cdot c|_S = m + (u+1) = |\pi|_S + (u+1)$$

If there are no such sub-sets C_1, C_2 , then there is no such decomposition D of $\pi \cdot c$ with length $m + (u+1)$. As the result, we have:

$$|\pi \cdot c|_S = m + (u+2) = |\pi|_S + (u+2)$$

□

Lemma 8. Let π be balanced permutation, c be odd cycle with length u , c is independent to π , $1, 2 \notin \text{supp}(c)$ and p be some natural number greater 2, $p \notin \text{supp}(\pi), \text{supp}(c)$. If there exists a separation $IC(\pi)$ into uncrossed sub-sets C_1, C_2 such that:

$$L(C_1) = \frac{|\pi|_S}{2} + \frac{u+1}{2} \text{ and } L(C_2) = \frac{|\pi|_S}{2} - \frac{u+1}{2}$$

then:

$$|\pi \cdot c \cdot (1, 2, p)|_S = |\pi|_S + (u+1) + 1$$

Otherwise:

$$|\pi \cdot c \cdot (1, 2, p)|_S = |\pi|_S + (u+2) + 1$$

Proof. It is enough to note that from strong growing propositions of [9] it follows:

$$|\pi \cdot c \cdot (1, 2, p)|_S = |\pi \cdot c|_S + 1$$

If the conditions of the lemma are satisfied, then based on Lemma 7 we have:

$$|\pi \cdot c|_S = |\pi|_S + (u + 1)$$

The last means, that:

$$|\pi \cdot c \cdot (1, 2, p)|_S = |\pi|_S + (u + 1) + 1$$

If the conditions of the lemma aren't satisfied, then based on Lemma 2 we have:

$$|\pi \cdot c|_S = |\pi|_S + (u + 2)$$

The last means, that:

$$|\pi \cdot c \cdot (1, 2, p)|_S = |\pi|_S + (u + 2) + 1$$

□

3 Lower bound of diameter of alternating group

Theorem 3.1. *Let n be a natural number, $n \geq 7$. Then:*

$$D_{SoG(n)}(Alt(n)) \geq \begin{cases} \lfloor \frac{n-2}{4} \rfloor \cdot 6 + 2 & \text{if } n \bmod 4 = 3 \\ \lfloor \frac{n-2}{4} \rfloor \cdot 6 + 4 & \text{if } n \bmod 4 = 0 \\ \lfloor \frac{n-2}{4} \rfloor \cdot 6 + 5 & \text{if } n \bmod 4 = 1 \\ \lfloor \frac{n-2}{4} \rfloor \cdot 6 & \text{if } n \bmod 4 = 2 \end{cases}$$

Proof. Remind that series of subgroups $Alt(n)$ with system of generators $SoG(n)$ are stable and strong growing according to properties of $SoG(n)$ described in [9]. The last means that diameter elements can be found only in case if every generator from $SoG(n)$ will be presented in its decomposition. So, the diameter element should move non-identical every point from 3 to n . Consider every case separately.

- 1) Let $n \bmod 4 = 3$. The last means that count of points from 3 to n can be presented as: $n - 2 = 4 \cdot k + 1$ for $k = \frac{n-2}{4}$. Consider the following element:

$$a = (1, i_1, 2) \cdot (i_2, i_3)(i_4, i_5) \dots \\ (i_{n-5}, i_{n-4})(i_{n-3}, i_{n-2}),$$

with some combination $(i_1, \dots, i_{n-2})$ from $(3, \dots, n)$. Remind that series of subgroups $Alt(n)$ with system of generators $SoG(n)$ are homogeneous according to properties of $SoG(n)$ in [9]. So, without losing of generality, the chosen of combination has no effect on its length over $SoG(n)$.

Note that $b = (i_2, i_3) \dots (i_{n-3}, i_{n-2})$ is balanced permutation as a product of $2k$ transpositions with length 2. So,

$$|b|_S = 2 \cdot 2k + 2k = 3 \cdot 2k = 6 \cdot k$$

Moreover, every cycle has the length 2, so it cannot achieved condition for L_1, L_2 in Lemma 1. Hence, for $a = (1, i_1, 2) \cdot b$ by Lemma 1:

$$|a|_S = |b|_S + 2 = 6 \cdot k + 2$$

- 2) Let $n \bmod 4 = 0$. The last means that count of points from 3 to n can be presented as: $n - 2 = 4 \cdot k + 2$ for $k = \frac{n-2}{4}$. Consider the following element:

$$a = (1, 2)(i_1, i_2) \cdot (i_3, i_4)(i_5, i_6) \dots \\ s(i_{n-5}, i_{n-4})(i_{n-3}, i_{n-2}),$$

with some combination $(i_1, \dots, i_{n-2})$ from $(3, \dots, n)$. Remind that series of subgroups $Alt(n)$ with system of generators $SoG(n)$ are homogeneous according to properties of $SoG(n)$ in [9]. Without losing of generality, the chosen of combination has no effect on its length over $SoG(n)$.

The permutation $b = (i_3, i_4)(i_5, i_6) \dots (i_{n-5}, i_{n-4})(i_{n-3}, i_{n-2})$ is balanced, $|b|_S = 6 \cdot k$ and cannot archived condition for L_1, L_2 in Lemma 2. Hence, for $a = (1, 2)(i_1, i_2) \cdot b$ by Lemma 2:

$$|a|_S = |b|_S + 2 = 6 \cdot k + 4$$

- 3) Let $n \bmod 4 = 1$. The last means that count of points from 3 to n can be presented as: $n - 2 = 4 \cdot k + 3$ for $k = \frac{n-2}{4}$. Consider the following elements:

$$a_1 = (1, i_1)(i_2, i_3) \cdot (i_4, i_5)(i_6, i_7) \dots \\ (i_{n-5}, i_{n-4})(i_{n-3}, i_{n-2}), \\ a_2 = (2, i_1)(i_2, i_3) \cdot (i_4, i_5)(i_6, i_7) \dots \\ (i_{n-5}, i_{n-4})(i_{n-3}, i_{n-2}), \\ a_3 = (i_1, i_2, i_3) \cdot (i_4, i_5)(i_6, i_7) \dots$$

$$(i_{n-5}, i_{n-4})(i_{n-3}, i_{n-2}),$$

with some combination $(i_1, \dots, i_{n-2})$ from $(3, \dots, n)$. Remind that series of subgroups $Alt(n)$ with system of generators $SoG(n)$ are homogeneous according to properties of $SoG(n)$ in [9], so without losing of generality, the chosen of combination has no effect on its length over $SoG(n)$.

The permutation $b = (i_4, i_5)(i_6, i_7) \dots (i_{n-5}, i_{n-4})(i_{n-3}, i_{n-2})$ is balanced, $|b|_S = 6 \cdot k$ and cannot archived condition for L_1, L_2 in Lemmas 3, 4 and 7. As the result, we have:

$$|a_1|_S = |(1, i_1)(i_2, i_3) \cdot b|_S = 6 \cdot k + 5$$

$$|a_2|_S = |(2, i_1)(i_2, i_3) \cdot b|_S = 6 \cdot k + 5$$

$$|a_3|_S = |(i_1, i_2, i_3) \cdot b|_S = 6 \cdot k + 5$$

- 4) Let $n \bmod 4 = 2$. The last means that count of points from 3 to n can be presented as: $n - 2 = 4 \cdot k$ for $k = \frac{n-2}{4}$. Consider the following elements:

$$a_1 = (1, i_1, 2, i_2)(i_3, i_4) \cdot (i_5, i_6)(i_7, i_8) \dots$$

$$(i_{n-5}, i_{n-4})(i_{n-3}, i_{n-2}),$$

$$a_2 = (1, 2, i_1, i_2)(i_3, i_4) \cdot (i_5, i_6)(i_7, i_8) \dots$$

$$(i_{n-5}, i_{n-4})(i_{n-3}, i_{n-2}),$$

$$a_3 = (1, 2, i_1)(i_2, i_3, i_4) \cdot (i_5, i_6)(i_7, i_8) \dots$$

$$(i_{n-5}, i_{n-4})(i_{n-3}, i_{n-2}),$$

$$a_4 = (i_1, i_2)(i_3, i_4) \cdot (i_5, i_6)(i_7, i_8) \dots$$

$$(i_{n-5}, i_{n-4})(i_{n-3}, i_{n-2}),$$

with some combination $(i_1, \dots, i_{n-2})$ from $(3, \dots, n)$. Remind that series of subgroups $Alt(n)$ with system of generators $SoG(n)$ are homogeneous according to properties of $SoG(n)$ in [9], so without losing of generality, the chosen of combination has no effect on its length over $SoG(n)$.

Again, $b = (i_5, i_6)(i_7, i_8) \dots (i_{n-5}, i_{n-4})(i_{n-3}, i_{n-2})$ is balanced, $|b|_S = 6 \cdot (k - 1)$ and cannot archived condition for L_1, L_2 in Lemmas 5, 6 and 8. As the result, we have:

$$|a_1|_S = |(1, i_1, 2, i_2)(i_3, i_4) \cdot b|_S = 6 \cdot k$$

$$|a_2|_S = |(1, 2, i_1, i_2)(i_3, i_4) \cdot b|_S = 6 \cdot k$$

$$|a_3|_S = |(1, 2, i_1)(i_2, i_3, i_4) \cdot b|_S = 6 \cdot k$$

$$|a_4|_S = |(i_1, i_2)(i_3, i_4) \cdot b|_S = 6 \cdot k$$

Note that in case $n = 10$ there is element

$$a_5 = (1, 2)(i_1, i_2)(i_3, i_4, i_5)(i_6, i_7, i_8) \in Alt(n)$$

with same length as for a_1, a_2, a_3, a_4 , $|a_5|_S = 10$ by Lemma 2. □

Список використаних джерел

1. S. Akers The Star Graph: An Attractive Alternative to the n-Cube. / B. Krishnamurthy, D. Harel // International Conference on Parallel Processing: international conference, 15-19 August 1994, North Carolina, United States: abstracts. — Raleigh. — 1994.
2. L. Babai On the diameter of permutation groups / A. Seress // European Journal of Combinatorics, 1992. — Vol. 13, N4, pp.231-243.
3. E. Breuillard Approximate subgroups of linear groups [Електронний ресурс] / B. Green, T. Tao // arXiv. — Електронні дані. — Режим доступу: <https://arxiv.org/abs/1005.1881>. — Дата публікації: 11.05.2010.
4. L. Pyber Growth in finite simple groups of Lie type of bounded rank [Електронний ресурс] / E. Szabo // arXiv. — Електронні дані. — Режим доступу: <https://arxiv.org/abs/1005.1858>. — Дата публікації: 8.04.2011.
5. H. Helfgott On the diameter of permutation groups / A. Seress // Annals of Mathematics, 2014. — Vol. 199, N2, pp.611-658.
6. J. Bajpai D. DONA and H. HELFGOTT (2021) Growth estimates and diameter bounds for classical Chevalley groups [Електронний ресурс] / D. Dona, H. Helfgott // arXiv. — Електронні дані. — Режим доступу: <https://arxiv.org/abs/2110.02942>. — Дата публікації: 06.10.2021.
7. S. Even The minimum-length generator sequence problem is NP-hard / O. Goldreich // Journal of Algorithms, 1981. — Vol. 2, N3, pp.311-313.
8. M. Olshevskiy Diameter search algorithms for directed Cayley graphs // Mohyla Mathematical Journal, 2021. — N4, pp.614-625.
9. M. Olshevskiy Metric properties of Cayley graphs of Alternating groups // Carpathian Mathematical Publications, 2021. — Vol. 13, N2, pp.545-581.

References

1. S. AKERS, B. KRISHNAMURTHY and D. HAREL (1994) *The Star Graph: An Attractive Alternative to the n-Cube*. In *International Conference on Parallel Processing*. Raleigh, North Carolina, Monday 15th to Friday 19th August 1994. North Carolina State University.
2. L. BABAI and A. SERESS (1992) *On the diameter of permutation groups*. *European Journal of Combinatorics*. 13 (4). p.231-243.
3. E. BREUILLARD, B. GREEN and T. TAO (2010) *Approximate subgroups of linear groups* [Online] Available from: <https://arxiv.org/abs/1005.1881> m. [Accessed: 11th May 2010].
4. L. PYBER and E. SZABO (2011) *Growth in finite simple groups of Lie type of bounded rank*. [Online] Available from: <https://arxiv.org/abs/1005.1858> m. [Accessed: 8th April 2011].
5. H. HELFHOTT and A. SERESS (2014) *On the diameter of permutation groups*. *Annals of Mathematics*. 199 (2). p.611-658.
6. J. BAJPAI, D. DONA and H. HELFGOTT (2021) *Growth estimates and diameter bounds for classical Chevalley groups*. [Online] Available from: <https://arxiv.org/abs/2110.02942> m. [Accessed: 6th October 2021].
7. S. EVEN and O. GOLDRICH (1981) *The minimum-length generator sequence problem is NP-hard*. *Journal of Algorithms*. 2 (3). p.311-313.
8. M. OLSHEVSKYI (2021) *Diameter search algorithms for directed Cayley graphs*. *Mohyla Mathematical Journal*. (4). p.614-625.
9. M. OLSHEVSKYI (2021) *Metric properties of Cayley graphs of Alternating groups*. *Carpathian Mathematical Publications*. 13 (2). -p.545-581.

Надійшла до редколегії 23.11.2021

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ,
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА
ТА МЕХАНІКА**

УДК 532.5

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/4.2>

Воскобійник В. А., д.т.н., с.н.с.,
Воскобойник О. А. к.т.н.,
Терещенко Л. М., к.ф.-м.н., с.н.с.,
Воскобійник А. В., к.т.н., с.н.с.

V. A. Voskoboinick, Dr.Sc.,
O. A. Voskoboinyk, PhD,
L. M. Tereshchenko, PhD,
A. V. Voskobiinyk, PhD

Вихрова динаміка сполучених течій

Vortex dynamics of junction flows

Інститут гідромеханіки НАН України, 03057,
м. Київ, вул. Марії Капніст, 8/4,
e-mail: vlad.vsk@gmail.com

Institute of Hydromechanics NAS Ukraine, 03057,
Kyiv, Marii Kapnist str., 8/4,
e-mail: vlad.vsk@gmail.com

Групові конструкції погано обтічних тіл широко використовуються у мостобудівній практиці. Сполучені течії таких конструкцій характеризуються значною складністю, нестационарністю та нестійкістю. В околі погано обтічних тіл формуються системи підковоподібних вихрових структур, зсувні шари, відривні області, струменеві течії, слідні вихори та вихрові доріжки Кармана. Мета роботи – визначення особливостей вихрової та струменевої течії в області сполучення трирядного пального ростверку з жорсткою плоскою поверхнею. Проведені експериментальні дослідження в лабораторних умовах за допомогою візуалізації та вимірювання полів швидкості сполученої течії. Визначено механізм генерації та еволюції вихрових і струменевих течій. Отримані інтегральні та спектральні характеристики поля швидкості в околі передньої групи циліндрів трирядного ростверку.

Ключові слова: сполучена течія, вихрова структура, трирядний ростверк, поле швидкості.

Group constructions of bluff bodies are widely used in bridge construction practice. The junction flows of such structures are characterized by considerable complexity, nonstationarity and instability. In the vicinity of bluff bodies, systems of horseshoe vortex structures, shear layers, separated regions, jet flows, wake vortices and vortex Karman's streets are formed. The study of the features of the generation and evolution of vortex and jet flows, the mechanisms of interaction of these flows with streamlined surfaces requires considerable effort during numerical and physical modeling. The purpose of the work is to determine the features of vortex and jet flow in the region of junction of three-row pile grillage with a rigid flat surface. Experimental studies were carried out in laboratory conditions in a hydrodynamic channel, where the three-row group of cylinders was installed on the hydraulically smooth rigid surface. Visual investigations and measurements of the velocity field were carried out inside and around the three-row grillage. The features of the formation and evolution of vortex and jet flows inside and near the cylindrical group were established. Integral and spectral characteristics of the velocity fluctuation field were obtained.

Key Words: junction flow, vortex structure, three-row grillage, velocity field.

Статтю представив член-кор. НАН України Жук Я.О.

Вступ

Складні опори, групи паль або погано обтічних тіл знаходять все більше застосування в будівництві мостових переходів, гідротехнічних споруд, в теплоенергетиці, на морських бурових платформах і вітрогенеруючих станціях та інших галузях з геотехнічних, екологічних, економічних і ресурсозберігаючих причин [1, 2]. Однак застосування результатів досліджень для одиночних

перешкод стає проблематичним через взаємодію вихрових і струменевих течій між елементами групової конструкції, а також слідних вихорів і вихрових доріжок Кармана. Це вимагає проведення окремих наукових досліджень особливостей течії в групах погано обтічних тіл і, зокрема, мостових опор у місцях їх сполучення з дном. Мета досліджень – визначення особливостей вихрової та струменевої течії в області сполучен-

ня трирядного пального ростверку з жорсткою плоскою поверхнею.

Програма та методика досліджень

Експериментальні дослідження проводилися у гідродинамічному каналі в гідравлічній лабораторії Інституту гідромеханіки НАН України. Довжина каналу була 14 м, ширина 1 м і глибина 0.8 м. Вимірювальна ділянка розташовувалася на відстані 6 м від входу в канал. Вода подавалася в канал за допомогою насосів через відстійник, дифузор, хонейкомби та решітки, які спрямовували та турбулізували потік. Вода скидалася з гідродинамічного каналу через екрани та клапани, що регулювали рівень, а також через конфузор та пристрої, які спрямовували потік та поглинали його шум [3, 4].

Модель трирядного циліндричного ростверку встановлювалася на спеціально виготовленій гідравлічно гладкій плоскій пластині. Під час візуальних експериментів на пластину наносили шар контрастного покриття, який змивався потоком. Пластина мала ширину 0.6 м і довжину 2 м. Модель трирядної циліндричної групи складалася з 31 циліндричної палі діаметром $d = 0.027$ м. Палі розташовувались у три ряди у шаховому порядку. Ширина трирядної циліндричної групи становила 0.1 м, а довжина - 0.6 м. Ростверк розташовувався посередині пластини. Рівень води над пластиною був 0.2 м, а швидкість потоку була від 0.06 м/с до 0.25 м/с.

Візуалізацію проводили за допомогою водорозчинних фарб і барвників, які вводили в досліджувану зону потоку через мініатюрні трубки, а також нанесенням контрастних покриттів, які змивалися потоком води з обтічної поверхні. Кінематичні характеристики сполученої течії вимірювали мініатюрними термісторними датчиками швидкості. Датчики мали діаметр чутливої поверхні $0.8 \cdot 10^{-3}$ м.

Всі контрольно-вимірювальні пристрої та реєстраційне обладнання були протестовані та відкалібровані. Датчики були сертифіковані та перевірені абсолютними та відносними методами на спеціалізованих стендах із відповідним обладнанням. Похибка вимірювання середньої швидкості не перевищувала 4% (за надійності 0.95 або 2σ), пульсації швидкості вимірювали з похибкою до 6%, а спектральні характеристики вимірювали з похибкою не більше 2 дБ в діапазоні частот від 0.2 Гц до 1250 Гц.

Результати досліджень

Результати візуальних експериментів сполученої течії навколо трирядного циліндричного

ростверку показали, що перед циліндрами утворювалися підковоподібні вихрові структури, які мали деяку відмінність від вихорів, що спостерігалися під час обтікання одиночних циліндрів. В умовах трирядного розташування циліндрів на рівній поверхні перед кожним з обтічних циліндрів утворювалися інтенсивні локальні підковоподібні вихрові структури (рис. 1).

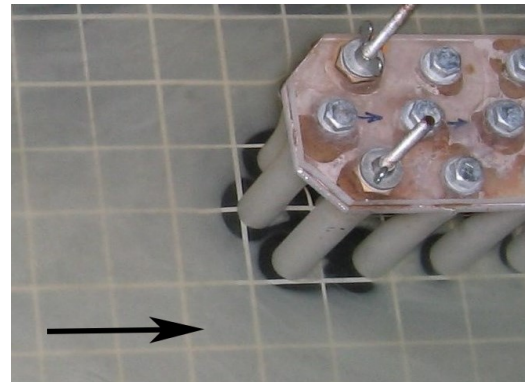


Рис. 1 Локальний розмив контрастного покриття

Розмив контрастного покриття починався поблизу передньої групи циліндрів внаслідок спадаючої течії, яка мала місце на фронтальній поверхні кожного циліндра, і дії підковоподібних вихрових структур перед кожним циліндром. Взаємодія вихрових структур і спадаючої течії призводило до значних дотичних напружень в області сполучення циліндрів з жорсткою пластиною. Результати досліджень показали, що найбільший розмив контрастного покриття спостерігався поблизу других бічних циліндрів трирядної конструкції. Тут додатково до підковоподібних вихрових структур і спадаючої течії додалися струменеві течії. Струменеві течії виникали внаслідок відривів зсувних шарів і формування слідних вихорів з циліндрів, що знаходилися вище за потоком. У середній частині циліндричної групи розмив контрастного покриття був мінімальним через гальмуючу дію групової конструкції на поле течії. У кормовій частині трирядної групи спостерігався інтенсивний розмив покриття, так як в цій частині конструкції швидкість течії і пристінні дотичні напруження між циліндрами збільшилися. Разом з локальними підковоподібними вихорами перед трирядною циліндричною групою виникала великомасштабна система підковоподібних вихрових структур, яка мала низьку

інтенсивність. Ця вихрова система охоплювала трирядний ростверк, як цілісну конструкцію.

Вимірювання швидкості мініатюрними термісторними датчиками дозволили визначити інтегральні і просторово-часові характеристики поля швидкості всередині і поблизу трирядної циліндричної групи в області сполучення її з жорсткою плоскою поверхнею. Результати дослідження показали, що ядро підковоподібного вихору перед першим центральним циліндром оберталося з лінійною швидкістю близько $0,41U$, а його периферія оберталося з лінійною швидкістю близько $0,57U$. Підковоподібний вихор перед другим бічним циліндром обертався з лінійною швидкістю в ядрі $0,53U$ і на периферії $0,77U$. На периферії підковоподібних вихрових структур осереднені та пульсаційні складові швидкості в кілька разів вищі, ніж в ядрі цих вихрових структур.

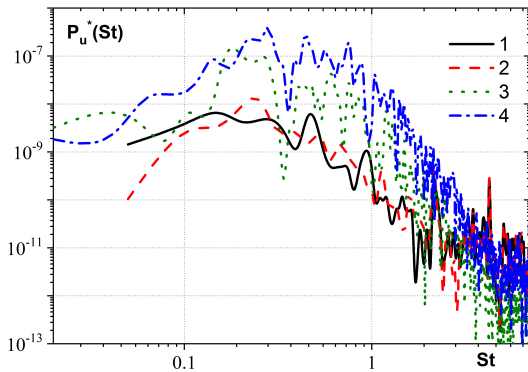


Рис. 2 Спектральні густини потужності пульсацій швидкості перед другим рядом циліндрів трирядного ростверку

Дослідження показали, що закон розподілу ймовірності значень пульсацій швидкості перед першим центральним циліндром швидкості у ядрі вихору близький до гаусівського або нормального закону розподілу. Однак максимум функції щільності ймовірності дещо зміщений в сторону негативних значень пульсацій швидкості у ядрі вихору перед першим центральним циліндром і в сторону позитивних значень у ядрі вихору перед другим боковим циліндром (вплив струменевої течії). Осцилюючий рух системи підковоподібних вихрових структур та періодичні відриви зсувних шарів і слідних вихорів призвели до бімодального характеру розподілу ймовірності пульсацій швидкості перед першим центральним циліндром [5, 6].

Спектральні характеристики поля пульсацій швидкості в області формування квазістійких

підковоподібних вихрових структур перед циліндрами трирядної групової конструкції представлені на рис. 2. Тут спектральні щільності потужності пульсацій швидкості представлені в залежності від числа Струхаля $St = fd / U$. Спектри нормовані наступним чином: $P_u^*(f) = P^2(f) d / U q^2$, де $q = \rho U^2 / 2$ — динамічний тиск і ρ — щільність води. Крива 1 виміряна в ядрі і крива 2 на периферії підковоподібного вихору перед другим центральним циліндром. Крива 3 виміряна в ядрі і крива 4 на периферії підковоподібного вихору перед другим бічним циліндром. Результати досліджень показали, що максимальні рівні пульсацій швидкості в ядрі квазістійкого підковоподібного вихору перед другим центральним циліндром спостерігалися на частоті $f = 0.56$ Гц, якій відповідало число Струхаля $St \approx 0.15$. Максимальні значення спектральних рівнів пульсацій швидкості на периферії цього вихору спостерігалися на частоті $f = 0.89$ Гц або $St \approx 0.24$. Максимуми спектрів перед другим бічним циліндром спостерігалися в ядрі підковоподібної вихрової структури на частоті $f = 0.67$ Гц або $St \approx 0.18$ і на периферії цього вихору максимуми спектральних рівнів спостерігалися на частоті $f = 1.04$ Гц або $St \approx 0.28$. Найбільші рівні спектральних щільностей потужності пульсацій швидкості спостерігалися перед другим бічним циліндром, де поряд з підковоподібною вихровою структурою мала місце струменева течія. Виявлено, що максимальні значення спектральних рівнів пульсацій швидкості спостерігалися на більш високих частотах на периферії підковоподібних вихрових структур, ніж в їх ядрах.

Висновки

Результати експериментальних досліджень показали, що обтікання групи циліндрів мало складний нестационарний характер, який обумовлений взаємодією вихрової та струменевої течії з трирядним циліндричним ростверком, який розташовувався на жорсткій плоскій поверхні.

Установлено, що перед кожним циліндром формувалися підковоподібні вихрові структури, а перед всією групою циліндрів генерувалася система великомасштабних підковоподібних вихорів. Між циліндрами трирядної конструкції виникали струменеві течії, які мали найбільшу інтенсивність в передній і кормовій групах циліндрів. Результати візуалізації течії показали

особливості генерації вихрових і струменевих течій, їх еволюцію та взаємодію між собою та обтічною поверхнею.

Вимірювання поля швидкості всередині та поблизу передньої групи циліндрів трирядного ростверку дозволили визначити інтегральні та спектральні характеристики поля швидкості. Виявлено, що поле швидкості в сполученій течії мало бімодальний характер, який обумовлений осциляціями підковоподібних вихрових структур в просторі і в часі та їх взаємодією з

нестационарною струменевою течією між циліндрами. Визначено, що спектральні щільності потужності пульсацій швидкості мали більші рівні на периферії квазістійких підковоподібних вихорів, ніж в їх ядрах. Максимальні рівні спектрів пульсацій швидкості спостерігалися перед другим бічним циліндром трирядного ростверку, де відбувалося взаємодія вихрової та струменевої течії.

Список використаних джерел

1. Singh N.B. The local scour around bridge piers—a review of remedial techniques / N.B. Singh, T.T. Devi, B. Kumar // *ISH Journal of Hydraulic Eng.* – 2020. – Vol. 27. P. 1-14.
2. Simpson R.L. Junction flows. / R.L. Simpson // *Annual Review of Fluid Mechanics.* – 2001. – Vol. 33. – P. 415-443.
3. Voskoboinick V.A. Junction flow around cylinder group on flat plate / V.A. Voskoboinick, I.M. Gorban, A.A. Voskoboinick [et al.] // In: Sadovnichiy V.A., Zgurovsky M.Z. (eds) *Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics. Understanding Complex Systems.* Springer, Cham. – 2021. – P. 35-50.
4. Voskobijnyk A.V. Feature of the vortex and the jet flows around and inside the three-row cylindrical group / A.V. Voskobijnyk, V.A. Voskoboinick, O.A. Voskoboinyk [et al.] // *Proc. 8th International Conference on Scour and Erosion (ICSE 2016)* Oxford, UK, 2016. – P. 897-903.
5. Voskoboinick V. Study of near wall coherent flow structures on dimpled surfaces using unsteady pressure measurements / V. Voskoboinick, N. Kornev, J. Turnow // *Flow Turbulence Combust.* – 2013. – Vol. 90, №4. – P. 709-722.
6. Voskoboinick A. Interaction of group of bridge piers on scour / A. Voskoboinick, V. Voskoboinick, V. Turick [et al.] // In: Hu Z., Petoukhov S., Dychka I., He M. (eds) *Advances in Computer Science for Engineering and Education III. ICCSEEA 2020. Advances in Intelligent Systems and Computing*, Vol. 1247. Springer, Cham. – 2021. – P. 3-17.

References

1. SINGH, N.B., DEVI, T.T. and KUMAR, B. (2020) The local scour around bridge piers—a review of remedial techniques. *ISH Journal of Hydraulic Eng.* 27. p.1-14.
2. SIMPSON, R.L. (2001) Junction flows. *Annual Review of Fluid Mechanics.* 33. p.415-443.
3. VOSKOBOINICK, V.A. et al. (2021) Junction flow around cylinder group on flat plate. In: Sadovnichiy, V.A., Zgurovsky, M.Z. (eds) *Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics. Understanding Complex Systems.* Springer, Cham. pp. 35-50.
4. VOSKOBIJNYK, A.V. et al. (2016) Feature of the vortex and the jet flows around and inside the three-row cylindrical group. *Proc. 8th International Conference on Scour and Erosion (ICSE 2016)* 12-15 September 2016 Oxford, UK, pp. 897-903.
5. VOSKOBOINICK, V., KORNEV, N. and TURNOW, J. (2013) Study of near wall coherent flow structures on dimpled surfaces using unsteady pressure measurements. *Flow Turbulence Combust.* 90 (4). p.709-722.
6. VOSKOBOINICK, A. et al. (2021) Interaction of group of bridge piers on scour. In: Hu, Z., Petoukhov, S., Dychka, I., He, M. (eds) *Advances in Computer Science for Engineering and Education III. ICCSEEA 2020. Advances in Intelligent Systems and Computing*, Vol. 1247. Springer, Cham. pp. 3-17.

Надійшла до редколегії 29.08.21

УДК 539.376

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/4.3>

Голуб В. П., д.т.н, проф.

V. P. Golub, D. Sci., Prof.

**Щодо розрахунку релаксації напружень
в тонкостінних циліндричних оболонках
із лінійно-в'язкопружних матеріалів**

**Towards the analysis of stress relaxation in
thin-walled cylindrical shells made of linear
viscoelastic materials**

Національна академія наук України, Інститут
механіки ім. С.П.Тимошенка, 303057, м. Київ,
вул. Несторова, 3
e-mail: creep@inmech.kiev.ua

National Academy of Sciences of Ukraine,
S.P.Timoshenko Institute of Mechanics, 03057, Kyiv,
Nesterov str., 3,
e-mail: creep@inmech.kiev.ua

Розв'язуються задачі розрахунку релаксації напружень у тонкостінних циліндричних оболонках з лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов одновісного та двовісного навантаження. Розв'язки будуються на основі тривимірної моделі в'язкопружності виходячи з гіпотези пропорційності девіаторів. В'язкопружні властивості матеріалу задаються співвідношеннями, що встановлюють залежність між інтенсивностями напружень і деформацій та між середнім напруженням й об'ємною деформацією у формі Boltzmann-Volterra. Ядра інтенсивності релаксації та об'ємної релаксації задаються дробово-експоненціальними функціями Работнова. Параметри ядер релаксації визначаються за результатами випробувань на повзучість із використанням залежностей між ядрами повзучості за умов складного напруженого стану і ядрами повзучості за умов одновимірного напруженого стану. Розв'язано та експериментально апробовано задачі розрахунку релаксації нормальних та дотичних напружень у тонкостінних циліндричних оболонках з „поліетилену високої щільності ПЕВД” за умов одновісного розтягу, чистого кручення та комбінованого навантаження розтягом із крученням.

Ключові слова: тонкостінні циліндричні оболонки, лінійно-в'язкопружні матеріали, двовісне навантаження, релаксація напружень.

The problems of stress relaxation analysis in thin-walled cylindrical shells made of linear viscoelastic materials under uniaxial and biaxial loading have been solved. The analysis is based on a three-dimensional model of viscoelasticity starting from the hypothesis of the deviators proportionality. The viscoelastic properties of a material are given with relationships that establish the dependence between stress and strain intensities as well as between the mean stress and volumetric strain by the Boltzmann-Volterra type equation. The kernels of relaxation intensity and volumetric relaxation are given with the Rabotnov exponential-fractional functions. The parameters of relaxation kernels are determined from creep test result using the relationships between creep kernels under the complex stress state and creep kernels under the one-dimensional stress state. The problems of the analysis of normal and tangential stresses relaxation in thin-walled cylindrical shells made of high density polyethylene "ПЕВД" under uniaxial tension, pure torsion and combined tension with torsion loading have been solved and experimentally approved.

Key Words: thin-walled cylindrical shells, linear viscoelastic materials, biaxial loading, stress relaxation .

Статтю представив член-кор. НАН України Жук Я.О.

Вступ

Зазвичай вважається, що в задачах теорії повзучості, де потрібно оцінити величину деформацій, що розвиваються за часом, навантаження, як правило, постійне або задане.

Однак існує інший клас важливих практичних задач, коли фіксується не навантаження, а переміщення, так що повзучість у цих задачах призводить до зменшення навантаження, необхідного для підтримки заданого

переміщення. Це явище відомо як процес релаксації напружень при постійних деформаціях і реалізується як в області підвищених, так і в області кімнатних температур. Релаксація напружень викликає, наприклад, падіння напружень затягування в болтових з'єднаннях, зменшення сприятливих залишкових напружень після застосування технологій для зміцнення, знижує щільність посадки диска на вал в умовах його роботи при підвищеній температурі.

У роботах [1, 2] розв'язано низку задач релаксації напружень у найпростіших елементах конструкцій на основі технічних теорій повзучості. У роботі [3] задача розрахунку релаксації напружень розв'язується із використанням рівнянь Boltzmann-Volterra у формі суперпозиції зсувної і об'ємної повзучості. У даній роботі розв'язок задачі розрахунку релаксації напружень будуватиметься на основі гіпотези пропорційності дівіаторів.

1. Постановка задачі

Розглядається процес релаксації напружень у тонкостінній циліндричній оболонці з лінійно-в'язкопружного матеріалу із середнім діаметром D і товщиною стінки h (рис. 1). Товщина стінки

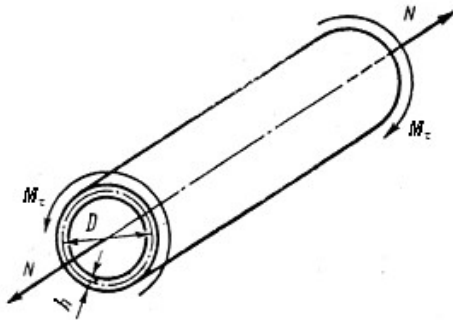


Рис. 1. Геометрія оболонки

$h \ll D$. Оболонка навантажується постійними за часом крутним моментом M_t і осьовою силою N , що розтягує.

Напружений стан оболонки двовісний, однорідний й статично визначений. Нормальне σ_{11} й дотичне τ_{21} напруження як у межах, так і за межами пружності визначаються за формулами [1]

$$\sigma_{11} = \frac{N}{\pi D h}, \quad \tau_{21} = \frac{2 M_t}{\pi D^2 h}. \quad (1.1)$$

Залежність між компонентами тензора напружень σ_{ij} , тензора деформацій ε_{ij} і часом t

задається, виходячи з гіпотези пропорційності дівіаторів, системою рівнянь [4]

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t) - \delta_{ij} \sigma_0(t) &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i(t, \varepsilon_i)}{\varepsilon_i(t)} \left(\varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v(t) \right); \\ \sigma_i(\varepsilon_i, t) &= \frac{3E}{2(1+\nu)} \left(\varepsilon_i(t) - \lambda_i \int_0^t R_i(t-\tau) \varepsilon_i(\tau) d\tau \right); \\ \sigma_0(\varepsilon_v, t) &= \frac{E}{3(1-2\nu)} \left(\varepsilon_v(t) + \lambda_v \int_0^t R_v(t-\tau) \varepsilon_v(\tau) d\tau \right), \end{aligned} \quad (1.2)$$

де $\varepsilon_v(t)$ і $\varepsilon_i(\sigma_i, t)$ – об'ємна деформація і інтенсивність деформацій повзучості; $\sigma_0(t)$ і $\sigma_i(\varepsilon_i, t)$ – середнє напруження й інтенсивність напружень; $R_i(t-\tau)$ і $R_v(t-\tau)$ – ядра інтенсивності релаксації й об'ємної релаксації; E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуассона; λ_i , λ_v – реологічні параметри; δ_{ij} – одинична функція Кронекера.

Ядра інтенсивності релаксації $R_i(t-\tau)$ й об'ємної релаксації $R_v(t-\tau)$ задаються дробово-експоненціальними функціями, так що

$$R_i(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha_i}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda_i + \beta_i)^n (t-\tau)^{n(1+\alpha_i)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha_i)]} \quad (1.3)$$

і відповідно

$$R_v(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha_v}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda_v + \beta_v)^n (t-\tau)^{n(1+\alpha_v)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha_v)]}, \quad (1.4)$$

де α_i , β_i , λ_i , α_v , β_v , λ_v – параметри ядер, що визначаються експериментально; $\Gamma[\cdot]$ – гамма-функція Ейлера.

Задача полягає у визначенні параметрів ядер інтенсивності релаксації й об'ємної релаксації лінійно-в'язкопружних матеріалів і у розв'язку задач розрахунку релаксації напружень у тонкостінних циліндричних оболонках за умов двовісного навантаження розтягом із крученням.

2. Визначення параметрів ядер релаксації

Параметри α , β , λ ядер релаксації в (1.3) і (1.4), виходячи з інтегрального зв'язку між ядрами релаксації $R(t)$ і ядрами повзучості $K(t)$

$$R(t) - K(t) = \lambda \int_0^t K(t - \tau) d\tau, \quad (2.1)$$

збігаються за величиною з відповідними параметрами ядер повзучості.

Параметри α , β , λ ядер повзучості визначаються за результатами апроксимації дискретних значень ядер дробово-експоненційними функціями. Дискретні значення ядер повзучості розраховуються за співвідношеннями, що встановлюють залежність між ядрами повзучості за умов складного напруженого стану і ядрами повзучості за умов одновимірних напружених станів. Одновимірні напружені стани розглядаються як базові.

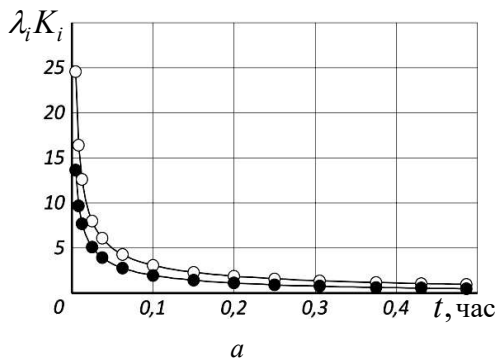
У якості базових напружених станів обрано одновісний розтяг з виміром поздовжніх і поперечних деформацій повзучості, а також одновісний розтяг й чисте кручення з виміром поздовжніх і зсувних деформацій повзучості.

Залежність між ядрами повзучості $K_i(t)$ й $K_v(t)$ за умов складного напруженого стану і ядрами повзучості $K_{11}(t)$, $K_{22}(t)$, $K_{21}(t)$ за умов одновимірних базових напружених станів задається співвідношеннями

$$\begin{aligned} \lambda_i K_i(t) &= \frac{\lambda_{11} K_{11}(t) + \nu \lambda_{22} K_{22}(t)}{1 + \nu} \\ \lambda_v K_v(t) &= \frac{\lambda_{11} K_{11}(t) - 2\nu \lambda_{22} K_{22}(t)}{1 - 2\nu} \end{aligned} \quad (2.2)$$

і відповідно співвідношеннями

$$\begin{aligned} \lambda_i K_i(t) &= \lambda_{21} K_{21}(t) \\ \lambda_v K_v(t) &= \frac{3\lambda_{11} K_{11}(t) - 2(1 + \nu)\lambda_{21} K_{21}(t)}{1 - 2\nu}. \end{aligned} \quad (2.3)$$



Тут $K_{11}(t)$, $K_{22}(t)$, $K_{21}(t)$ – ядра поздовжньої, поперечної й зсувної повзучості за умов одновимірних напружених станів; ν – коефіцієнт Пуассона.

3. Релаксація напружень в оболонках

Розв'язується задача розрахунку релаксації нормальних та дотичних напружень в тонкостінних циліндричних оболонках із лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов одновісного розтягу, чистого кручення та комбінованого навантаження розтягом із крученням.

3.1. Матеріал оболонок. Матеріальні константи. Релаксація напружень розраховується в тонкостінних циліндричних оболонках із „поліетилену високої щільності ПЕВД”. Діаметр серединної поверхні оболонки $D = 46$ мм, товщина стінки $h = 5$ мм. Значення пружних констант „поліетилену ПЕВД”, а також експериментальні дані по повзучості й релаксації напружень в оболонках з „поліетилену ПЕВД” запозичені з [5].

Дискретні значення ядер інтенсивності деформацій повзучості $K_i(t)$ й об'ємної повзучості $K_v(t)$ поліетилену високої щільності („поліетилену високої щільності ПЕВД”) у лінійній області деформування, що розраховані за рівняннями (2.2) і (2.3), нанесені на рис. 2, а й 2, б відповідно точками. Лініями нанесена апроксимація дискретних значень ядер повзучості резольвентами дробово-експоненційних функцій (1.3) і (1.4).

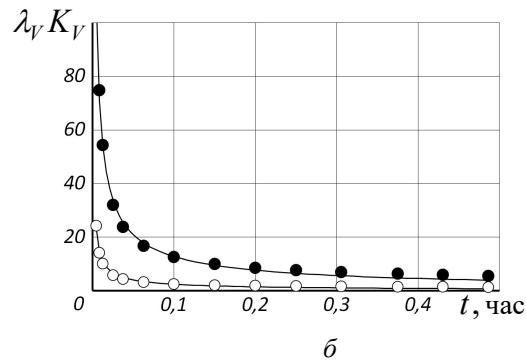


Рис. 2. Дискретні значення (точки) та їх апроксимація (лінії) ядер інтенсивності деформацій повзучості (а) та об'ємної повзучості (б) поліетилену високої щільності.

Значення пружних констант і параметрів ядер наведені у таблиці
спадковості поліетилену високої щільності

Таблиця

Значення пружних постійних і параметрів ядер спадковості поліетилену високої щільності.

Матеріал			E , МПа			G , МПа			B , МПа			ν
„Полиетилен ПЭВП”			867,0			321,0			963,3			0,35
Базовий експеримент: одновісна поздовжня й поперечна повзучість												
$K_{11}(t)$, година ⁻¹			$K_{22}(t)$, година ⁻¹			$K_i(t)$; $R_i(t)$, година ⁻¹			$K_v(t)$; $R_v(t)$, година ⁻¹			
α_{11}	β_{11}	λ_{11}	α_{22}	β_{22}	λ_{22}	α_i	β_i	λ_i	α_v	β_v	λ_v	
-0,6460	-0,1398	1,9439	-0,5158	-1,0137	3,1427	-0,6191	0,2764	2,1493	-0,6988	0,1229	1,6334	
Базовий експеримент: одновісна поздовжня повзучість і зсувна повзучість												
$K_{11}(t)$, година ⁻¹			$K_{21}(t)$, година ⁻¹			$K_i(t)$; $R_i(t)$, година ⁻¹			$K_v(t)$; $R_v(t)$, година ⁻¹			
α_{11}	β_{11}	λ_{11}	α_{21}	β_{21}	λ_{21}	α_i	β_i	λ_i	α_v	β_v	λ_v	
-0,6460	-0,1398	1,9439	-0,4700	-1,2467	2,0197	-0,4706	1,2402	2,0155	-0,6334	0,2971	9,1396	

3.2. Релаксація нормальних напружень. напружень $\sigma_{11}(t)$ при $\varepsilon_{11} = const$,
Розраховується релаксація нормальних $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = const$ і $\varepsilon_{21} = const$ за рівнянням

$$\sigma_{11}(t) = \frac{2}{3} E \varepsilon_{11} \left(1 - \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda_i + \beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma(1 + (1+n)(1+\alpha_i))} \right) + \frac{1}{3} E \varepsilon_{11} \left(1 - \lambda_v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda_v + \beta_v)^n t^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma(1 + (1+n)(1+\alpha_v))} \right), \quad (3.1)$$

що отримано із (1.2) із врахуванням (1.3) і (1.4).

Результати розрахунків релаксації нормальних напружень $\sigma_{11}(t)$, що виконані за рівнянням (3.1) із використанням наведених у таблиці матеріальних констант, зіставлені на рис. 3, а з

експериментальними даними. Штриховими лініями нанесені результати розрахунків з використанням системи базових експериментів в (2.2), а штрих-пунктирними лініями – в (2.3).

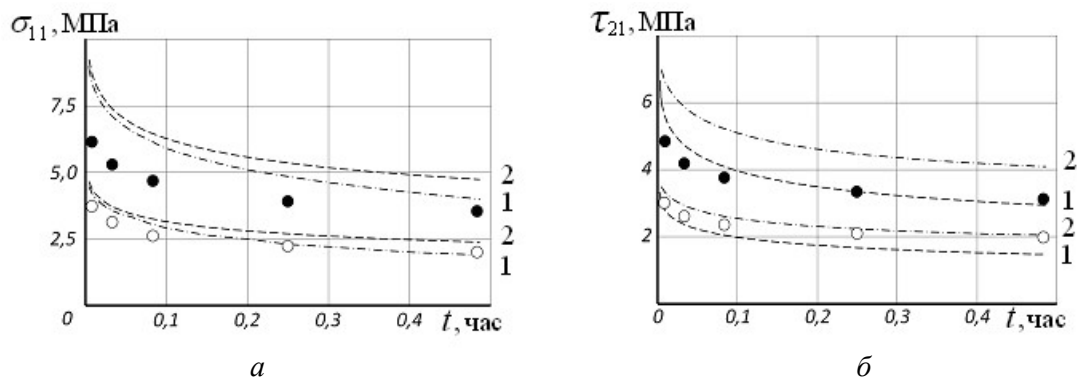


Рис. 3. Розрахункові (лінії) і експериментальні (точки) значення нормальних (а) і дотичних (б) напружень в тонкостінних циліндричних оболонках із „поліетилену високої щільності ПЭВП”: $\varepsilon_{11} = 0,71$; $\varepsilon_{21} = 0,61\%$ (криві 1; $\circ$); $\varepsilon_{11} = 1,41$; $\varepsilon_{21} = 1,22\%$ (криві 2; $\bullet$).

Релаксація дотичних напружень. $\tau_{21}(t)$ при $\varepsilon_{11} = const$, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = const$ і
Розраховується релаксація дотичних напружень $\varepsilon_{21} = const$ за рівнянням

$$\tau_{21}(t) = 2G\varepsilon_{21} \left(1 - \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda_i + \beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma(1 + (1+n)(1+\alpha_i))} \right), \quad (3.2)$$

що отримано із (1.2) із врахуванням (1.3) і (1.4).

Результати розрахунків (лінії) релаксації дотичних напружень $\tau_{21}(t)$, що виконані за рівнянням (3.2) з використанням наведених у таблиці значень матеріальних констант, зіставлені на рис. 3,б з експериментальними даними (точки).

4. Аналіз отриманих результатів

Ефективність підходу до розв'язку задач релаксації напружень у тонкостінних циліндричних оболонках із лінійно-в'язкопружних матеріалів, що заснований на гіпотезі пропорційності девіаторів, апробується експериментально на задачах розрахунку релаксації напружень при навантаженні оболонок розтягом із крученням. Розраховується релаксація нормальних і дотичних напружень в оболонках із „поліетилену високої щільності ПЭВП”.

У цілому, як свідчать дані, що наведені на фіг. 3, отримано цілком задовільне узгодження результатів розрахунку релаксації напружень в оболонках з „поліетилену високої щільності ПЭВП” із експериментальними даними. Максимальна похибка не перевищує 20% і отримана для напружень кручення $\tau_{21}(t)$. Характерно, що результати розрахунків практично не залежать від системи базових експериментів, використаних для визначення параметрів ядер повзучості й відповідно ядер релаксації.

Розв'язок задачі розрахунку релаксації напружень в оболонках за умов комбінованого навантаження розтягом із крученням будується в роботі на основі гіпотези пропорційності девіаторів. У рамках такого підходу, як і у випадку використання принципу суперпозиції зсувної та об'ємної повзучості [3], взаємовплив постійних за часом повздовжньої й зсувної повзучості на процес релаксації нормальних і дотичних напружень не враховується. Цей ефект у випадку дії постійних за часом деформацій пояснюється збігом структур розв'язкових рівнянь лінійної теорії в'язкопружності, що побудовані виходячи із принципу суперпозиції зсувної і об'ємної повзучості й на основі гіпотези пропорційності девіаторів.

Дійсно, з огляду на те, що

$$\varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v(t) = e_{ij}(t),$$

де $e_{ij}(t)$ – девіатор напруження, а

$$(1 + \nu_0) = \frac{E}{2G}; \quad (1 - 2\nu_0) = \frac{E}{3B}$$

і, з огляду на те, що $\varepsilon_i = \text{const}$, $e_{ij} = \text{const}$, $\varepsilon_v = \text{const}$, з (1.2) одержуємо рівняння

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{E}{1 + \nu} \left[1 - \lambda_i \int_0^t R_i(t - \tau) d\tau \right] \left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v \right] + \delta_{ij} \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \left[1 + \lambda_v \int_0^t R_v(t - \tau) d\tau \right] \varepsilon_v,$$

яке за структурою збігається з рівнянням

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{E}{1 + \nu} \left[1 - \lambda_s \int_0^t R_s(t - \tau) d\tau \right] \left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v \right] + \delta_{ij} \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \left[1 + \lambda_v \int_0^t R_v(t - \tau) d\tau \right] \varepsilon_v,$$

отриманим виходячи із принципу суперпозиції зсувної і об'ємної повзучості [3].

У дійсності, як це виходить із експериментальних даних, наведених в [5], накладення зсувної компоненти деформації ε_{21} прискорює процес релаксації нормальних напружень σ_{11} , а накладення повздовжньої деформації ε_{11} прискорює процес релаксації дотичних напружень τ_{21} . У деяких випадках таке прискорення може становити 80%. Особливо істотно на процес релаксації напружень впливає накладення повздовжніх деформацій.

Висновок

Коректний розв'язок задач релаксації напружень в елементах конструкцій із лінійно-в'язкопружних матеріалів при комбінованому навантаженні постійними за часом нормальними й дотичними напруженнями не може бути побудований на основі моделей в'язкопружності у формі суперпозиції зсувної і об'ємної повзучості або у формі пропорційності девіаторів. Ці моделі треба відкоректувати шляхом введення додаткових складових, які б одночасно залежали від повздовжніх і зсувних компонент деформації. Як перше наближення

може бути використана інтенсивність
деформацій повзучості.

Список використаних джерел

1. *Малинин Н.Н.* Прикладная теория решеток / Н.Н. Малинин.— Москва: Машиностроение, 1975. — 400 с.
2. *Бойл Дж.* Анализ напряжений в конструкциях при ползучести / Дж.Бойл, Дж.Спенс. — Москва: Мир, 1986. — 360 с.
3. *Голуб В.П.* Расчет деформаций ползучести и релаксации напряжений в тонкостенных трубчатых элементах из линейно-вязкоупругих материалов. 1. Суперпозиция сдвиговой и объемной ползучести / В.П.Голуб, Я.В.Павлюк, В.С.Резник. — Киев: Прикладная механика, 2020. — **56**, №2. — С. 156-169.
4. *Голуб В.П.* Идентификация ядер наследственности изотропных линейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии. 2. Случай пропорциональности девиаторов / В.П.Голуб, Б.П.Маслов, П.В.Фернати. — Киев: Прикл. механика, 2016. — **52**, № 6. — С. 111-125.
5. *Крегерс А.Ф.* Комплексное исследование полиэтилена высокой плотности в условиях нелинейной ползучести и релаксации напряжений / А.Ф.Крегерс, М.Р.Килевиц. — Механика композитных материалов, 1985. — №2. — С. 195-201.

References

1. MALININ, N.N. (1975) *Prikladnaya teoriya reshetok*. Moskva: Mashinostroenie.
2. BOYL, J., SPENS, J. (1986) *Analiz napryazheniy v konstrukciyah pri polzuchesti*. Moskva: Mir.
3. GOLUB, V.P., PAVLYUK, Ya.V., REZNIK V.S. (2020) Raschet deformatsiy polzuchesti i relaxacii napryazheniy v tonkostennykh trubchatykh elementakh iz lineyno-vyazkoupругikh materialov. 1. *Superpoziciya sdvigovoy i ob'emnoy polzuchesti*, 56(2). pp. 111-125.
4. GOLUB, V.P., MASLOV, B.P., FERNATI, P.V. (2016) Identifikatsiya jader nasledstvennosti izotropnykh linejno-vyazkoupругikh materialov pri slozhnom napryazhennom sostojanii. 2. *Sluchaj proporcional'nosti deviatorov*, Prikl. mehanika, 52(6). pp. 111-125.
5. KREGERS, A.F., KILEVIC, M.R. (1985) *Kompleksnoe issledovanie polietilena vysokoy plotnosti v usloviyah nelineynoy polzuchesti i relaksacii napryazhenij*, Mechanika kompozitnykh materialov, N2, pp. 195-201.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми „Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень” (КПКВК 6541230).

Надійшла до редколегії 29.08.21

УДК 539.375

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/4.4>

Зражевський Г.М.¹, к.ф.-м.н., доцент,
Зражевська В.Ф.², к.ф.-м.н., доцент.

G.M. Zrazhevsky¹, PhD,
V.F. Zrazhevskaya², PhD.

**Комбінування детермінованого та
стохастичного методів до розв'язання
задачі дефектоскопії пружного стрижня**

**Deterministic and stochastic methods
combining while solving the problem of
defectoscopy of an elastic rod**

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: zgrig@univ.kiev.ua

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: zgrig@univ.kiev.ua

² Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря
Сікорського», 03056, м. Київ, пр-т. Перемоги,
37,
e-mail: vera.zrazhevskaya@gmail.com

² National Technical University of Ukraine "Igor
Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", 03056, Kyiv,
Peremogi av., 37,
e-mail: vera.zrazhevskaya@gmail.com

У роботі розглянута задача про власні гармонійні коливання пружного стрижня з вільними від напружень торцями при наявності в ньому одного або сукупності дефектів. Дефекти моделюються неоднорідністю модуля Юнга. За параметри дефектів прийняті їх розташування, геометричні розміри, що вважаються малими, та зміни пружних властивостей. Предметом дослідження є аналіз зсувів власних частот коливань, що спричинені дефектністю стрижня. Метою роботи є математичне обґрунтування для побудови швидких та стійких алгоритмів визначення параметрів дефектності пружних тіл шляхом аналізу вільних коливань. У роботі використовуються та порівнюються принципово різні методи дослідження. Перші методи є класичними математичними методами механіки, що застосовуються до аналізу детермінованих систем та базуються на аналітичних дослідженнях, поєднаних з чисельною реалізацією. На противагу їм, для розв'язання оберненої задачі використаний Bootstrap-aggregated Regression Trees (BART) - метаалгоритм композиційного машинного навчання, що стандартним чином застосовується в статистичній класифікації та регресуванні.

Ключові слова: гармонійні коливання стрижня, власні частоти, дефектоскопія, Bootstrap-aggregated Regression Trees.

The paper considers the problem of natural harmonic oscillations of an elastic rod with stress-free ends in the presence of one or a set of defects. Defects are modeled by the inhomogeneity of the Young's modulus. The location of the defects, their geometric size, which is considered small, and the change in elastic properties are the parameters of the defects. The analysis of natural frequency shifts caused by the defect of the rod is the subject of the study. The aim of the work is a mathematical substantiation for the construction of fast and stable algorithms for determining the defect parameters of elastic bodies by analyzing free oscillations. The paper uses and compares fundamentally different research methods. The first methods are classical mathematical methods of mechanics, applied to the analysis of deterministic systems and based on analytical studies combined with numerical implementation. In contrast, a composite machine learning meta-algorithm used in standard statistical classification and regression - Bootstrap-aggregated Regression Trees (BART) - is used to solve the inverse problem. When comparing the constructed algorithms, the statistical method Sampling was used, which allowed to quantify the accuracy and stability of the algorithms.

Key words: harmonic rod oscillations, natural frequencies, flaw detection, Bootstrap-aggregated Regression Trees.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. , член-кор. НАН України Жук Я.О.

Вступ

Дослідження, в яких розглядаються коливання фізично і геометрично неоднорідних механічних систем, є предметом численних публікацій [1-7]. Це пояснюється широким використанням таких систем в інженерних конструкціях. При цьому метою дослідження може бути як розрахунок і моделювання поведінки таких систем [1,4,7], так і розробка методів діагностики функціональної здатності виробів і конструкцій [2,3,5,6]. У багатьох випадках метою дослідження коливання об'єктів є визначення характеристик спектрів коливань, наприклад, визначення власних частот вільних гармонійних коливань і їх залежність від типу і властивостей неоднорідностей. Дослідження охоплюють випадки неперервної зміни характеристик уздовж стрижня [1,5,6], стрибкоподібної [2,3] і кусково-неперервної [1,4,5,7]. При цьому використовуються точні аналітичні методи дослідження [2,3], чисельні [3] і аналітично наближені [3,5,6,10].

У статті розглядається задача визначення зсувів власних частот і зміна форм вільних коливань для одновимірної моделі лінійно-пружного стрижня, що містить локальні ступінчасті неоднорідності (дефекти). Передбачається, що дефекти мають малі в порівнянні з довжиною стрижня лінійні розміри і характеризуються зміною модуля Юнга.

Постановка задачі

Розглянемо задачу про власні гармонійні коливання пружного стрижня з вільними від напружень торцями при наявності в ньому одного або сукупності дефектів. Дефекти моделюються неоднорідністю модуля Юнга.

При наявності єдиного дефекту задача в безрозмірній постановці має вигляд:

$$\begin{cases} \varphi''(x) + k^2 \pi^2 \varphi(x) = 0, x \in (0, X-l) \cup (X+l, 1) \\ \varphi''(x) + \frac{k^2 \pi^2}{1-\kappa} \varphi(x) = 0, x \in (X-l, X+l) \end{cases} \quad (1)$$

де $X \in (0, 1/2)$ - розташування дефекту, $2l \ll 1$

величина дефекту, $\kappa = \frac{\Delta E}{E_0} \in (-\infty, 1)$ - зміна модуля Юнга в області дефекту. Торці стрижня вважаємо вільними від напружень, що визначає граничні умови:

$$\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0. \quad (2)$$

Повинні бути також виконані умови зшивання на межах дефекту:

$$\begin{cases} \varphi(X-l-0) = \varphi(X-l+0) \\ \varphi(X+l-0) = \varphi(X+l+0) \\ \varphi'(X-l-0) = \varphi'(X-l+0) \\ \varphi'(X+l-0) = \varphi'(X+l+0) \end{cases} \quad (3)$$

Побудова розв'язку

Задача знаходження власних частот коливань (1) - (3) може бути зведена до знаходження коренів трансцендентного рівняння [9, 10]

$$F(s, X, l, \kappa) = 0, \quad (4)$$

при відомих характеристиках дефекту (X, l, κ) .

В силу нормування (1)-(3), (4) має очевидний частковий розв'язок:

$$F(s, X, 0, \kappa) = 0, s = 1, 2, \dots, X \in (0, 1/2), \kappa \in (-\infty, 1/2)$$

$$F(s, X, l, 0) = 0, s = 1, 2, \dots, X \in (0, 1/2), l \in (0, +\infty)$$

що відповідає відсутності дефекту.

Припущення $l \ll 1$ дозволяє спростити задачу (1) - (3) шляхом розв'язання наближеної задачі. В [6] показано, що задача (1) - (3) може бути зведена до рекурентного набору задач шляхом розвинення розв'язку в асимптотичний ряд по малому параметру. Відповідно до такого розвинення, рівняння (4) також може бути зведене до послідовності рівнянь, що дозволяє контролювати похибку наближення розв'язку.

Легко показати, що

$$F^{(1)}(x, X, l, \kappa) = \frac{\kappa \pi l}{1-\kappa} (\cos k\pi - \cos(k\pi(1-2X)))$$

$$+ \sin k\pi,$$

$$F^{(2)}(x, X, l, \kappa) = F^{(1)}(x, X, l, \kappa)$$

$$F^{(3)}(x, X, l, \kappa) = \frac{\kappa \pi l}{1-\kappa} (\cos k\pi - \cos(k\pi(1-2X))) \cdot (5)$$

$$-2 \frac{k^3 \kappa \pi^3 l^3}{3(1-\kappa)^2} (\kappa \cos k\pi - \cos(k\pi(1-2X))) + \sin k\pi$$

В [6] наведені характеристики наближень (5) рівняння (4). Зокрема, показано, що вже перше наближення забезпечує точність визначення власних частот коливань з відносною точністю, меншою за один відсоток.

Обернена задача передбачає визначення характеристик дефекту (X, l, κ) при відомих зсувах частот власних коливань Δk_s ($k_s = s + \Delta k_s$). Безпосередній розв'язок (4) методами з сімейства ньютонівих є нестійкий і вимагає задати точне початкове наближення. Це пов'язано з тим, що, відповідно до (5), другий член

розкладу тотожно дорівнює нулю. Перше наближення в (5) не дозволяє визначити l та κ (лише $\kappa\pi/(1-\kappa)$), отже, для розв'язання оберненої задачі потрібно проводити обчислення з малими порядку l^3 . Окрім того, легко бачити, що рівняння (4) та послідовність рівнянь (5) мають нефізичні розв'язки.

Перші наближення розв'язку (4) можуть бути отримані з використанням асимптотичного аналізу. Зокрема, перше наближення з (5) дозволяє отримати:

$$\Delta k_s = -2s \frac{l\kappa_0}{1-\kappa_0} \sin^2 \pi s X_0, s = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Вираз (6) може бути покладено в основу визначення комбінованих характеристик дефекту ($X, l\kappa/(1-\kappa)$) в першому наближенні, що можуть бути використані в системах діагностики, а також, як початкові значення ітераційних методів для розв'язання (4). В той же час, чисельні розрахунки свідчать, що початкові наближення отримані з (6) в силу топології $F(s, X, l, \kappa)$ не дозволяють отримати фізичний розв'язок для 20% випадків незалежного випадкового розподілення характеристик дефектів.

На противагу детермінованому методу розв'язання оберненої задачі в роботі запропонований статистичний метод Bootstrap-aggregated regression trees (BART) - метаалгоритм композиційного навчання машин, що використовується в теорії статистичної класифікації і регресування. Цей метод застосовується в різних областях. Перша проблема використання BART в даній задачі полягає в тому, що стандартна його реалізація є скалярною. Вихідна задача векторна. Однак, проведені дослідження показують, що в другому наближенні невідомі можуть бути розділені. Друга проблема полягає в тому, що для реалізації BART потрібна навчальна вибірка значного обсягу. Ця проблема (скорочення обсягу навчальної вибірки) може бути вирішена методами статистичного моделювання (наприклад, [5]). В якості навчальної вибірки використовувалися 1000 сценаріїв з випадково розподіленими значеннями: $X \sim U(0, 1/2)$, $l \sim U(0, 0.1)$, $\kappa \sim U(-1, 0.5)$, на яких виконувалися налаштування скалярних моделей для визначення параметрів дефекту. В якості пояснювальних змінних використовувалися точні значення зсувів частот власних коливань. Перевірка моделей виконувалася на 100 сценаріях, побудованих

незалежно від навчальної вибірки (екстраполяція). Результати чисельного моделювання у цьому випадку суттєво перевищили результати, отримані детермінованим методом. Окрім того, в порівнянні з напіваналітичним розв'язанням, застосування BART звелось до використання стандартного модуля TreeBagger системи MATLAB практично без модифікування та налаштування. Звичайно, застосування BART дозволяє отримати лише наближене розв'язання (5), але його точність на порядок перевищила точність отриману з (6), фізичні розв'язки були отримані в 100% сценаріїв. Використання отриманих за BART результатів в якості початкових значень при розв'язанні задачі в детермінованій постановці забезпечило точність на рівні машинної похибки, а фізичні розв'язки були отримані в 100% сценаріїв. Таким чином, при практичному застосуванні в системах діагностики найбільш ефективним є використання систем машинного навчання, при наукових дослідженнях доцільним є використання комбінованого методу, в якому початкові наближення отримуються з використанням статистичних методів, а точний розв'язок будується методами чисельного розв'язання.

Використання статистичних методів дозволяє (на відміну від детермінованих методів) розв'язувати обернену задачу визначення дефектності стрижня при наявності множинних дефектів. У цьому випадку комплексною характеристикою дефектності стрижня зручно вважати величину: $C = 2 \sum_s \frac{l_s \kappa_s}{1 - \kappa_s}$. З практичної

точки зору, важливими характеристиками дефектності є також $C^\pm = 2 \sum_s \frac{l_s \kappa_s^\pm}{1 - \kappa_s^\pm}$,

$\kappa_s^+ = \max(\kappa_s, 0)$, $\kappa_s^- = \min(\kappa_s, 0)$, оскільки $\kappa > 0$ та $\kappa < 0$ визначають випадки ослаблення (наприклад, тріщина) і посилення (наприклад, жорстка вставка) перерізу стрижня. Моделювання множинних дефектів зводиться до розв'язання рекурсивної сукупності задач та описане в [6,7]. В практичних застосуваннях таке моделювання виконується лише в першому наближенні (хоча теорія, розвинута в [7] дозволяє отримати наближення довільного порядку). В детермінованій постановці визначення дефектності при наявності множинних дефектів не має сенсу ні в постановці задачі, ні в її розв'язанні, але легко може бути реалізоване при використанні BART.

Список використаних джерел

1. Kaplunov, J., Prikazchikov, D., Sergushova, O. / J. Kaplunov, D. Prikazchikov, O. Sergushova. Multi-parametric analysis of the lowest natural frequencies of strongly inhomogeneous elastic rods // *Journal of Sound and Vibration*, 2016, 366, pp. 264–276. Режим доступу до журн.: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.12.008>
2. Rubio, L., Fernández-Sáez, J., Morassi, A. The full nonlinear crack detection problem in uniform vibrating rods / L. Rubio, J. Fernández-Sáez, A. Morassi // *Journal of Sound and Vibration*, 2015, 339, pp. 99–111. Режим доступу до журн.: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.11.011>
3. Soloviev A.N., Parinov I.A., Cherpakov A.V., Chaika Yu.A., Rozhkov E.V. Analysis of oscillation forms at defect identification in node of truss based on finite element modeling / A.N. Soloviev, I.A. Parinov, A.V. Cherpakov, Yu.A. Chaika, E.V. Rozhkov // *Materials Physics and Mechanics*, 2018, 37, pp. 192–197.
4. Zrazhevsky, G., Zrazhevskaya, V. Obtaining and investigation of the integral representation of solution and boundary integral equation for the non-stationary problem of thermal conductivity / Zrazhevsky, G., Zrazhevskaya, V. // *Eureka: Physics and Engineering*, 2016, 6, pp. 53–58. doi: 10.21303/2461-4262.2016.00216
5. Zrazhevsky, G., Golodnikov, A., Uryasev, S. Mathematical Methods to Find Optimal Control of Oscillations of a Hinged Beam (Deterministic Case). / G. Zrazhevsky, A. Golodnikov, S. Uryasev, // *Cybernetics and Systems Analysis*, 2019, 55 (6), p. 1009–1026. doi: 10.1007/s10559-019-00211-x
6. Zrazhevsky, G., Zrazhevskaya, V. The extension method for solving boundary value problems of the theory of oscillations of bodies with heterogeneity / G. Zrazhevsky, V. Zrazhevskaya. // *World Journal of Engineering Research and Technology* 2020 6 (2), pp. 503–514.
7. Зражевський Г.М., Зражевська В.Ф. Моделювання скінченних неоднорідностей дискретними особливостями / Г.М. Зражевський, В.Ф. Зражевська // *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. 2021, 1 (135) с. 138–144.

References

1. KAPLUNOV, J., PRIKAZCHIKOV, D., SERGUSHOVA, O. (2016). *Journal of Sound and Vibration*, 366, p. 264 – 276. Available from: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.12.008>
2. RUBIO, L., FERNÁNDEZ-SÁEZ, J., MORASSI, A. (2015). The full nonlinear crack detection problem in uniform vibrating rods. *Journal of Sound and Vibration*, 339, p. 99–111. Available from: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.11.011>
3. SOLOVIEV A.N., PARINOV I.A., CHERPAKOV A.V., CHAIKA YU.A., ROZHKOVA E.V. Analysis of oscillation forms at defect identification in node of truss based on finite element modeling (2018). *Materials Physics and Mechanics*, 37, p. 192–197.
4. ZRAZHEVSKY, G., ZRAZHEVSKAYA, V. Obtaining and investigation of the integral representation of solution and boundary integral equation for the non-stationary problem of thermal conductivity (2016). *Eureka: Physics and Engineering*, 6, p. 53–58. doi: 10.21303/2461-4262.2016.00216
5. ZRAZHEVSKY, G., GOLODNIKOV, A., URYASEV, S. (2019). Mathematical Methods to Find Optimal Control of Oscillations of a Hinged Beam (Deterministic Case). *Cybernetics and Systems Analysis*, 55 (6), p. 1009–1026. doi: 10.1007/s10559-019-00211-x
6. ZRAZHEVSKY, G., ZRAZHEVSKAYA, V. (2020). The extension method for solving boundary value problems of the theory of oscillations of bodies with heterogeneity *World Journal of Engineering Research and Technology* 6 (2), p. 503–514.
7. ZRAZHEVSKY G.M., ZRAZHEVSKAYA V.F. (2021) Modeling of Finite Inhomogeneities by Discrete Singularities. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1 (135) p. 138–144.

Надійшла до редколегії 25.08.2021

УДК 532.5+51-7

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/4.5>

Кізілова Н. М., д. ф.-м. н., проф.
Ричак Н. Л., к. геогр. н., доцент

N. M. Kizilova, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.
N. L. Rychak, PhD (Geogr.), docent

**Математичне моделювання впливу
шквального вітру на технічні та
рослинні структури на урбанізованих
територіях**

**Mathematical modeling of influence of strong
winds on technical and plant structures on
urban areas**

¹Харківський національний університет
ім. В.Н. Каразіна, Харків, Україна,
e-mail: n.kizilova@gmail.com

²Харківський національний університет
ім. В.Н. Каразіна, Харків, пл. Свободи, 4,
e-mail: rychak@ukr.net

¹V.N. Karazin Kharkiv National University, 61022,
Kharkov, Svobody sq., 4,
e-mail: n.kizilova@gmail.com

²V.N. Karazin Kharkov National University,
61022, Kharkov, Svobody sq., 4,
e-mail: rychak@ukr.net

Штормові події останніх років показали, що особливу загрозу складає руйнівний вплив вітру на міські технічні споруди та рослини насаджень. В доній роботі наведений огляд математичних моделей і підходів до експериментального і теоретичного дослідження проблем, пов'язаних з впливом шквального вітру і торнадо на урбанізованих територіях. Наведені комп'ютерні симуляції вітрової дії на стандартні багатоповерхівки мікрорайонів України. Обчислені коефіцієнти нормальних та зсувних компонент сил і моментів сил, які діють на поверхні будинків, а також вихрові сліди та території мікрорайонів при різних швидкостях вітру від помірних до шквальних. Розрахунки проведені методом скінчених елементів з використанням моделі турбулентної течії повітря в пакеті AnSys2020. Показано, як за допомогою незначної зміни форми (дахи, додаткові проходи, щити) можна зменшити руйнівний вплив вітру на будинки і загрозу життю людей.

Ключові слова: глобальні зміни клімату, шквальний вітер, торнадо, математичне моделювання, руйнування конструкцій.

Stormy events in recent years have shown that the destructive effects of wind on urban technical structures and plants pose a special threat. The paper provides an overview of mathematical models and approaches to experimental and theoretical studies of the problems associated with the effects of wind gusts and tornadoes on urban areas. Computer simulations of wind action on standard multistorey buildings in Ukraine are given. The coefficients of normal and shear components of forces and moments of forces acting on the surface of buildings, as well as vortex tracks over the residential complex at different wind speeds from moderate to severe have been computed. The calculations were performed by the finite element method using the model of turbulent air flow in the package AnSys2020. It is shown how with the help of a slight change in shape (roofs, additional passages, shields) the destructive effects of wind on the buildings and plants, as well as the threat to human life can be reduced.

Key words: global climate change, gusts of wind, tornadoes, mathematical modeling, destruction of structures.

Статтю представив член-кореспондент НАН України Жук Я. О.

1. Вступ

Глобальні зміни клімату, які поступово відбуваються в останні роки за рахунок природних та антропогенних факторів, призвели до підвищення середньорічної температури атмосфери, випаровування води з океанів, температури і солоності річок, озер, морів, прискорення танення глетчерів Антарктиди і Гренландії. Це викликає раптові

зміни тиску і температури, підвищення швидкості вітру, кількості опадів, негативно впливає як на здоров'я людини, так і на існування цілих видів тварин і рослин, які не пристосовані до нових природних умов [1]. Значну роль у прогнозуванні несприятливих атмосферних явищ та розробці мір їх попередження грає математичне моделювання

як на рівні локальних територій і річкових систем [2,3], так і на рівні країн, земель, материків і планети в цілому. Особливо велике значення має дослідження впливу різких змін температури, тиску і шквальних вітрів на територіях міст, в яких зараз мешкає більше 50% населення Землі, а в 2050 р. цей показник прогнозується на рівні 70% [1].

В роботі наведений стислий огляд сучасних математичних моделей динаміки рідини для аналізу впливу сильного вітру на міські технічні споруди і масиви дерев, які виконані для конкретних ділянок на території м. Харкова та їх геометричних моделей з використанням даних сервісу GoogleEarth.

2. Огляд математичних моделей і підходів

Аеродинаміка грає фундаментальну роль у дослідженні вітрових навантажень, починаючи з піонерських досліджень [4], де було показано, що спричинене вітром механічне навантаження можна визначити в частотній області шляхом поєднання місцевої «троянди вітрів», локального вітру (вплив топографії місцевості), структурних аеродинамічних характеристик (густина, висота і форма будівель, Рис.1) та структурні динамічні властивості (розподіли маси, жорсткості, коефіцієнтів амортизації локальної «шорсткості» приміського шару повітря). В результаті поєднання всіх факторів (ланцюг Девенпорта) можна отримати сили $\vec{F}(t, \vec{r})$, які діють в даній локації (місцевість і геометрія міста). Цей підхід був використаний в якості базової аеродинамічної теорії для вітротехніки [5], механічних навантажень на малоповерхові [6] і високі призматичні будинки [7,8], і найбільш критичні випадків коли напрям вітру перпендикулярний до однієї з вертикальних граней будівлі, у наближеннях лінійної пружної [9] або нелінійної непружної структурної реакції [10], стаціонарного або змінного вітрового навантаження [11]. Більш складні моделі враховують не тільки потоки повітря, але й конвективних переніс опадів (дощ, сніг), вологість повітря, сонячну радіацію і забруднення [12,13], включаючи несподівано сильні дощі з вітром [14].

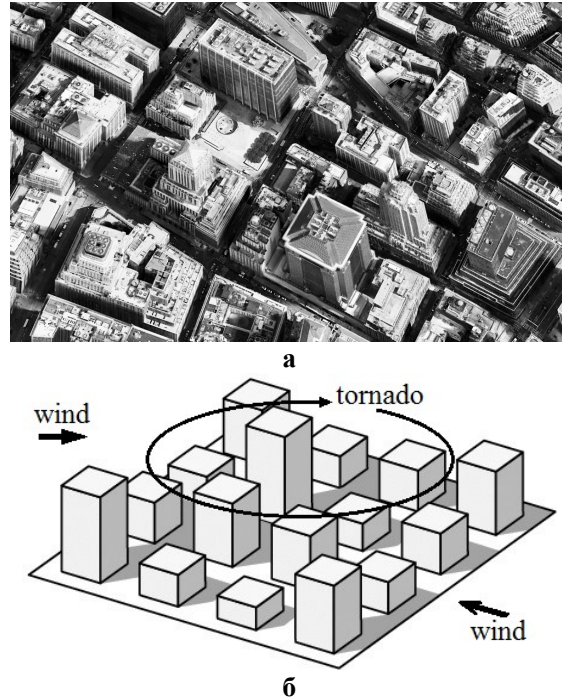


Рис.1. Масштабовані дані міської забудови (а) і відповідні блочні моделі (б).

Вітрове навантаження є випадковим процесом, і тому під час моделювання часто використовуються спектральні методи в частотній області і теорія випадкових вібрацій з можливістю використання результатів вимірювань в аеродинамічній трубі з різними режимами течій повітря. Для врахування несподіваних поривів вітру використовують різні апроксимації функції щільності ймовірності швидкості вітру [15]. Дані вимірювань на поверхнях будинків і їх моделях в аеродинамічній трубі, в симуляторах торнадо (tornado simulators) і мікропоривчастих вітрів (microburst simulators) показали, що ймовірнісні властивості вітрового тиску можуть сильно відрізнятися для різних геометрій і режимів вітру [15,16]. Значний вплив оказують турбулентні вихори, а також вихрові сліди, які виникають поза кожним з будинків і взаємодіють між собою. Нелінійні взаємодії цих слідів можуть призводити до формування когерентних (в просторі і за часом) структур, що веде до значного підсилення вітрового навантаження [17]. Як показали дослідження, вихровий слід будинку можна мати вигляд однієї пари вихрів, що обертаються протилежно (дипольний слід), або двох пар (квадрупольний слід), переходи між якими відбуваються зі зміною напрямку і сили вітру (Рис.2). Руйнівна

сила вітру часто пов'язана зі зриванням дахів, а її величина сильно залежить від висоти і форми даху [18]. За рахунок модифікації геометрії міської забудови можна досягнути ефект захисту від вихрів, які викликані несподіваними сильними поривами вітру [19].

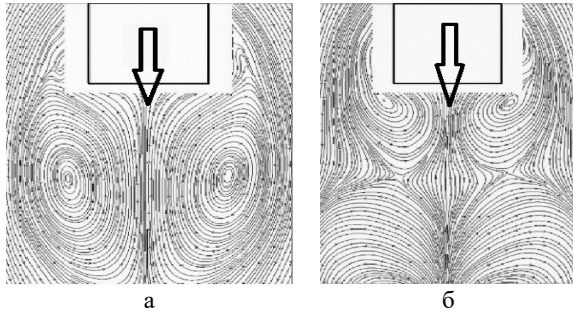


Рис.2. Вихрові сліди у повітрі за будинком у вигляді однієї (а) і двох (б) пар вихрів.

В останні роки у зв'язку з підвищенням цін на землю і прогресом будівельних технологій, світовим трендом стало будівництво висотних і надвисотних будинків, які є вразливими до вітрового навантаження через свою висоту і гнучкість. Використання легких будівельних матеріалів зробило їх ще більш сприйнятливими до вітрової вібрації, причому остатня стала основною проблемою для проектувальників, оскільки вона може пошкодити конструкції і викликати дискомфорт у мешканців. Неможливість обмежити цю вібрацію під час екстремальних вітрових штормів і торнадо може призвести до катастрофічних наслідків [16].

З класичної структурної динамічної теорії рівняння імпульсів для механічної структури має загальний вигляд [10]

$$[M] \cdot \frac{d^2 \bar{\theta}}{dt^2} + [C] \cdot \frac{d \bar{\theta}}{dt} + [N] \cdot \bar{\theta} = \bar{F}(t, \bar{r}), \quad (1)$$

де $\bar{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T$ - вектор деформацій, T - транспонування, $[M]$, $[C]$ і $[N]$ - матриці мас-інерційних, коріолісових і гравітаційних коефіцієнтів.

Для оцінки впливу вітрового навантаження використовують коефіцієнти тертя $C_D = F_D / qA$, підйомної сили $C_L = F_L / qA$ і руйнівного моменту сил $C_M = F_M / qA$, де F_L і F_D - інтеграли нормальних і тангенціальних компонент сил, які діють на поверхню споруди, F_M - відповідні моменти сил, A - характерний поперечний переріз споруди, $q = \rho V^2 / 2$, ρ - густина повітря, V - характерна швидкість потоку повітря.

Найбільш популярними для розрахунків вітрових і температурних навантажень на міські споруди є методи скінчених елементів і граничних об'ємів, які дозволяють робити детальні чисельні розрахунки на складних геометрії (Рис.1) з використанням різних моделей турбулентності, а саме k-ε моделі Колмогорова та її модифікацій, Steady Reynolds Averaged Navier-Stokes, Large Eddy Simulation і Detached Eddy Simulation [20-23].

3. Постановка задачі і чисельні розрахунки

Розглядається вітрове навантаження на житлові багатоповерхівки з різною висотою і різними способами їх розташування на території на прикладі м. Харкова (Рис.3а) з відомою «розою вітрів» (Рис.3б). Схема розташування з відкритого ресурсу Google-maps розмішувалася в моделі аеродинамічної труби у вигляді паралелепіпеду з розмірами $x20 \times x100$ висотою і довжиною відповідно (Рис.3в). Розмір сітки складав 10×10 см з використанням функції inflation до усіх поверхонь будинків.

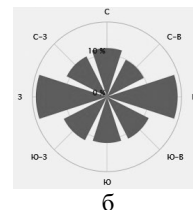
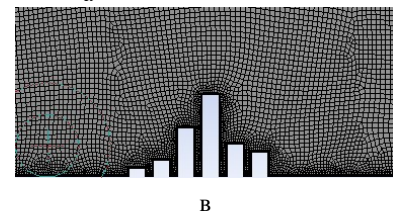


Рис.3. Типовий житловий мікрорайон м. Харкова (а) і напрямки вітру на місцевості (б).

Рівняння $k-\omega$ моделі турбулентного руху, яка описує турбулентний пристінний шар з достатньою точністю без введення додаткових демпфуючих функцій, мають вигляд

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + (\bar{u} \nabla)(\rho k) = \text{div}((\mu + \sigma_k \mu_t) \nabla k) + P - \beta^* \rho \omega k, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + (\bar{u} \nabla)(\rho \omega) = \text{div}((\mu + \sigma_\omega \mu_t) \nabla \omega) + \frac{\alpha \omega}{k} P - \beta \rho \omega^2,$$

де $\mu_t = \rho k / \omega$ - турбулентна в'язкість, $P = \tau_{ik} \partial u_i / \partial x_k$, τ_{ik} - тензор в'язких напружень, $\alpha = 5/9$, $\beta^* = 0.09$, $\beta = 0.075$, $\sigma_k = 0.5$, $\sigma_\omega = 0.5$.

Чисельні розрахунки проводились в пакеті AnSys Fluent 2020 R2 (ansys.com/ academic). Значення густини ρ і в'язкості μ повітря (air) обрані з бази даних Fluent database. Розрахунки значень k, ω і v_x, v_y, v_z проводилися за чисельними схемами 2-го порядку точності, а значень тиску – першого порядку. Градієнти функцій облічувалися за схемою least-square method. Ітерації проводилися до досягнення точності 10^{-4} . Якість сітки контролювалася функціями якості Fluent. Кількість скінченних елементів сітки складала $>2 \cdot 10^6$. На вході (inlet) задавалася постійна швидкість вітру $v_x=3.5-8$ м/с, що відповідає слабкому і помірному вітру, а на виході (outlet) – тиск $p=0$

4. Обговорення результатів розрахунків

Результати розрахунків гідродинамічного тиску в потоці повітря, яке діє на стінки будинків, наведені на Рис.4. Якщо стіни всіх будинків орієнтовані нормально до напрямку повітря, на фронтальні стіни першого ряду будинків діє максимальна сила. На стіни будинків другого та подальших рядів діють значно менші сили (Рис.4а). При ромбоєдричному порядку розташування будинків (Рис.4б) стіни всіх конструкцій зазнають значно менший силовий вплив. Оскільки на місцевості завжди мають місто кілька головних напрямків вітру (Рис.3б), розташування Рис.4а і Рис.4б можуть стати ромбоєдричним для нормальним діагональних напрямків вітру, відповідно.

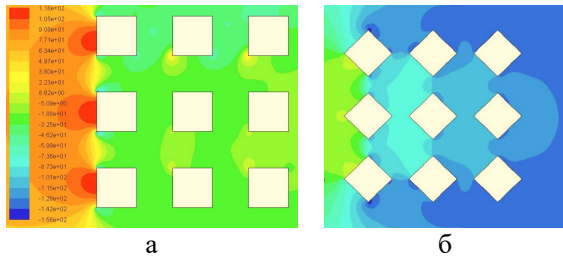


Рис.4. Контурні графіки розподілення тиску в потоці повітря при нормальному (а) і ромбоєдричному (б) розташуванні будинків.

Враховуючи різну вірогідність вітрів різних напрямків (Рис.3б), а також незвичних, статистично неочікуваних напрямків штормових вітрів, планування розташування будинків у нових мікрорайонах повинно проводитися з урахуванням майбутніх змін клімату і викликаних ними підсилення швидкості вітру в деяких напрямках. Попередні розрахунки на 3D моделях нових мікрорайонів дозволять

мінімізувати ризики пошкодження конструкцій, дерев, і шкоди здоров'ю і життю мешканців.

На Рис.5 наведені векторні графіки швидкості вітру, який обтікає будинки та простір між ними. Високий будинок, який знаходиться в перших рядах відносно напрямку вітру, приймає на себе головний силовий вплив, який для сильного шквального вітру може стати руйнівним для даху, а також вікон і балконів верхніх поверхів (Рис.5а). Розташування в перших рядах кількох будинків середньої поверховості приводить до більш рівномірного розподілення сили вітру на них і меншого силового впливу на найбільш високі будинки (Рис.5б). У просторі перед найвищим будинком утворюються потужні циркуляції вітру (вторинні течії повітря між будинками) на Рис.5а,б, які теж можуть мати негативний силовий вплив на рослини і людей.

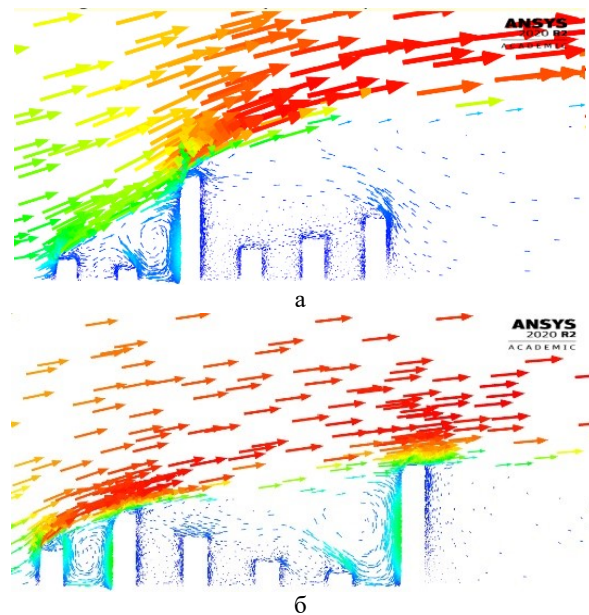


Рис.5. Векторні розподілення швидкості повітря при різних способах розташування найбільш високих будинків на території району.

Більш детально лінії току і вихрові зони між будинками наведені на Рис.6. Для випадку розташування (Рис.5а) перед найвищим будинком знаходиться велика зона відносно слабкої циркуляції (Рис.6а), в той час як для розташування (Рис.5б) перед другим будинком зліва утворюється невелика зона потужнішої циркуляції (Рис.6б). У першому випадку ця зона розповсюджуються на велику відстань і виконує функції підсилення вентиляції, особливо в жарку погоду, а в другому випадку локальна зона циркуляції при слабкому вітрі сприяє локальному накопиченню забруднень

у повітрі і ґрунті, а при сильному може стати небезпечною.

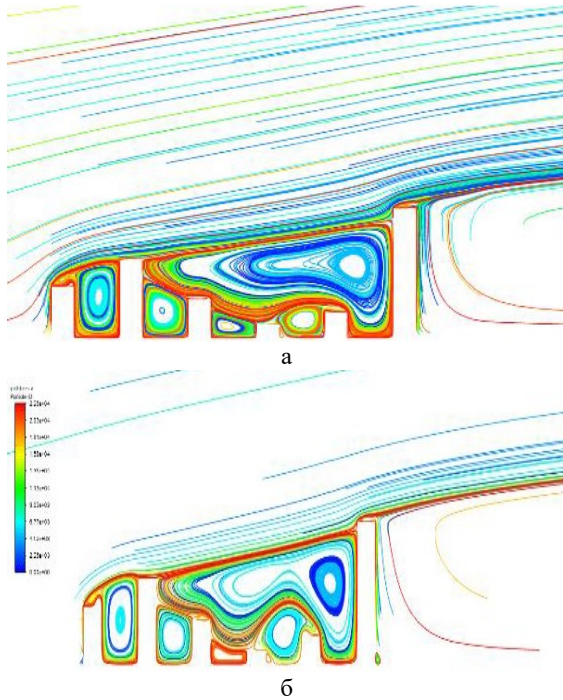


Рис.6. Графіки ліній току повітря для різних типів розташування будинків (як на Рис.5).

Другий цикл розрахунків проводився на тих самих геометріях для $v_x=10-20$ м/с в якості граничних умов, що відповідає штормовим вітрам. Оцінки показали, що відповідний силовий вплив при цьому зростає в 4.2-7.5 разів. За наявності в центрі мікрорайону торнадо з діаметрами (на рівні поверхні землі) $d=2-6$ м силовий вплив зростає ще на порядок за рахунок зсувних напружень і турбулентних коливань динамічного тиску. Для виявлення можливої руйнівної дії такого вітру на споруди і рослини потрібні дані про механічні властивості відповідних технічних і природних матеріалів.

4. Висновки.

Результати розрахунків показують, що для будь-яких способів розташування будинків

мікрорайону існує складна картина взаємодії потоків, які відбиваються від стін найвищих будинків, з відривними течіями між будинками та над дахами менш високих з них. Комп'ютерні симуляції дозволяють уникнути найбільш небезпечних способів розташування, при яких високі будинки розташовані нормально до напрямку домінуючих вітрів, а відстані між будинками занадто малі для забезпечення достатньої циркуляції повітря.

Небажаним слід вважати композиції 8-10 поверхових будинків з невисокою аркою між ними, оскільки вітер навіть середньої сили (6-9 м/с) викликає потоки значної сили, які запобігають руху людей і генерують підйомні сили, які викликають додаткові динамічні навантаження споруд. Подібні композиції повинні мати додаткові арки, як це прийнято для більш високих споруд (15 поверхів і вище) [4,5]. Оскільки у зв'язку з поступовим потеплінням клімату і посиленням швидких хвиль тепла наявність і швидкість сильних, поривчатих і шквальних вітрів буде зростати, відповідні міри протидії повинні розроблюватися на основі чисельних розрахунків. Для нових мікрорайонів і будинків це можуть бути рішення відносно висоти і орієнтації будинків один до одного і до напрямку домінуючого і додаткових вітрів на даній місцевості. Для вже існуючих мікрорайонів відповідні рішення можуть включати густі рослинні насадження, дахи спеціальної форми, щити та інші конструкційні можливості.

Результати роботи були докладені на VI Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки» (Київ, 30–31 серпня 2021 р.). Автори щиро вдячні організаторам і учасникам конференції за увагу до роботи і стимулююче обговорення результатів.

Список використаних джерел

1. John A. How to incorporate climate change into modelling environmental water outcomes: a review / A.John, R. Nathan, A. Horne et al. // J. Water&Climate Change. – 2020. – Vol.11. – P. 327–340.
2. Кізілова Н.М., Ричак Н.Л. Інформаційне супроводження системи менеджменту водними ресурсами на урбанізованих територіях / Н.М. Кізілова, Н.Л. Ричак // Системи обробки

References

1. JOHN A., NATHAN R., HORNE A., et al. (2020) How to incorporate climate change into modelling environmental water outcomes: a review. *J. Water&Climate Change*. Vol.11. p. 327–340.
2. KIZILOVA N., RYCHAK N. (2020) Informatsiyne suprovodzhennya systemy menedzhmentu vodnymi resursamy na urbanizovanyh terytoriyah. *Systemy obrobky*

інформації. – 2020. – №4(163). – С.37-47.

3. Кізілова Н.М., Ричак Н.Л. Імовірнісні моделі менеджменту водними ресурсами на урбанізованих територіях. / Н.М. Кізілова, Н.Л. Ричак // Вісник КНУ імені Т.Г.Шевченка. Сер. «Фізико-математичні науки». – 2020. – N4. – С. 20-27.

4. Davenport A.G. A Statistical approach to the treatment of wind loading on tall masts and suspension bridges / A.G. Davenport. – University of Bristol, UK. - 1961.

5. Ciampoli M. Performance-based wind engineering: Towards a general procedure. / M. Ciampoli, F. Petrini, G. Augusti // Struct. Saf. - 2011. – Vol.33. – P. 367–378.

6. Ellingwood B. Fragility assessment of light-frame wood construction subjected to wind and earthquake hazards. / B. Ellingwood, D. Rosowsky, Y. Li, J. Kim // J. Struct. Eng. - 2004. – Vol.130. – P. 1921–1930.

7. Smith M.A., Caracoglia L. A Monte Carlo based method for the dynamic fragility analysis of tall buildings under turbulent wind loading / M.A. Smith, L.Caracoglia // Eng. Struct. - 2011. – Vol.33. – P. 410–420.

8. Fernandez-Caban P.L. Cyber-physical design and optimization of tall building dynamics using aeroelastic wind tunnel modeling. / P.L. Fernandez-Caban, M.L. Whiteman, B.M. Phillips et al. // J. Wind Eng. Ind. Aerodyn. – 2020. – Vol.198. – P. 104092.

9. Spence S.M. Performance-based design and optimization of uncertain wind-excited dynamic building systems. / S.M. Spence, A. Kareem // Eng. Struct. - 2014. – Vol.78. – P. 133–144.

10. Cui W. A fully-coupled generalized model for multi-directional wind loads on tall buildings: A development of the quasi-steady theory / W. Cui, L. Caracoglia // J. Fluids&Struct. – 2018. – Vol.78 – P. 52–68.

11. Chuang W. A performance-based design framework for the integrated collapse and non-collapse assessment of wind excited buildings. / W. Chuang, S.A. Spence // Eng. Struct. - 2017. – Vol. 150. – P. 746–758.

12. Ричак Н.Л. Математичний аналіз забруднення повітря на території України з використанням даних з відкритих джерел. / Н.Л. Ричак, Н.М. Кізілова, В.А. Майструк, О.С. Макаренко, О.С. Прогнімак // Вісник Вінницького політехнічного інституту. - 2021.- №4(157).- С. 20-31.

13. Kubilay A. Coupling of physical phenomena in urban microclimate: A model integrating air flow,

informatics. Vol. 163. p.37-47.

3. KIZILOVA N., RYCHAK N. (2020) Imovirnostni modeli menedzhmentu vodnymy resursamy na urbanizovanyh terytoriyah. T.G.Shevchenko Kyiv National Univ. Visnyk, ser. Physics&Math. N4. p. 20-27.

4. DAVENPORT A.G. (1961) A Statistical approach to the treatment of wind loading on tall masts and suspension bridges. University of Bristol, UK.

5. CIAMPOLI M., PETRINI F., AUGUSTI G. (2011) Performance-based wind engineering: Towards a general procedure. Struct. Saf. Vol.33. p. 367–378.

6. ELLINGWOOD B., ROSOWSKY D., LI Y., KIM J. (2004) Fragility assessment of light-frame wood construction subjected to wind and earthquake hazards. J. Struct. Eng. Vol.130. p. 1921–1930.

7. SMITH M.A., CARACOGLIA L. (2011) A Monte Carlo based method for the dynamic fragility analysis of tall buildings under turbulent wind loading. Eng. Struct. Vol.33. p. 410–420.

8. FERNANDEZ-CABAN P.L., WHITEMAN M.L., PHILLIPS B.M., et al. (2020) Cyber-physical design and optimization of tall building dynamics using aeroelastic wind tunnel modeling. J. Wind Eng. Ind. Aerodyn. Vol.198. 104092.

9. SPENCE S.M., KAREEM A. Performance-based design and optimization of uncertain wind-excited dynamic building systems. // Eng. Struct. - 2014. – Vol.78. – P. 133–144.

10. CUI W., CARACOGLIA L. A fully-coupled generalized model for multi-directional wind loads on tall buildings: A development of the quasi-steady theory. // J. Fluids&Struct. – 2018. – Vol.78 – P. 52–68.

11. CHUANG W., SPENCE S. A performance-based design framework for the integrated collapse and non-collapse assessment of wind excited buildings. // Eng. Struct. - 2017. – Vol. 150. – P. 746–758.

12. RYCHAK N., KIZILOVA N., MAJSTRUK V., MAKARENKO O., PROGNYMAK O. (2021) Matematychnyy analiz zabrudnennya povitrya na terytorii Ukrainy z vykorystannyam danyh z vidkrytyh dzherel. Visnyk Vinnytskogo politehnichnogo instytutu. 4(157). p. 20-31.

13. KUBILAY A., DEROMEB D., CARMELIET J. (2017) Coupling of physical phenomena in urban microclimate: A model integrating air flow, wind-driven rain, radiation and transport in building materials. Urban Climate. Vol. 24. p.398-418.

14. WANG H., HOU X., DENG Y. (2015) Numerical simulations of wind-driven rain on

- wind-driven rain, radiation and transport in building materials. / A. Kubilay, D. Deromeb, J. Carmeliet // *Urban Climate*. - 2017. - Vol. 24. - P.398-418.
14. Wang H., Hou X., Deng Y. Numerical simulations of wind-driven rain on building facades under various oblique winds based on Eulerian multiphase model / H. Wang, X. Hou, Y. Deng // *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.* - 2015. - Vol.142. - P. 82-92.
15. Yang L. Probabilistic modeling of wind pressure on low-rise buildings / L. Yang, K.R. Gurley, D.O. Prevatt // *J. Wind Eng. Ind. Aerod.* - 2013. - Vol.114. - P. 18-26.
16. Hou F., Sarkar P.P. Aeroelastic model tests to study tall building vibration in boundary-layer and tornado winds. / F. Hou, P.P. Sarkar. // *Engin. Struct.* - 2020. - Vol. 207. - 110259.
17. Wang F. Coherent structures and wind force generation of square-section building model. / F. Wang, K.M. Lam, G.B. Zu, L. Cheng // *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.* - 2019. - Vol.188. - P. 175-193.
18. Xing F. Study on localised wind pressure development in gable roof buildings having different roof pitches with experiments, RANS and LES simulation models / F. Xing, D. Mohotti, K. Chauhan // *Building&Envir.* - 2018. - Vol.143. - P. 240-257.
19. Le T.-H., Caracoglia L. Modeling vortex-shedding effects for the stochastic response of tall buildings in non-synoptic winds / Le T.-H., Caracoglia L. // *J. Fluids&Struct.* - 2016. - Vol. 61. - P. 461-491.
20. Lia B. Evaluation of CFD Simulation using various turbulence models for wind pressure on buildings based on wind tunnel experiments / B. Lia, J. Liua, F. Luoa, X. Manc // *Procedia Engin.* - 2015. - Vol. 121. - P. 2209 - 2216.
21. Liu J., Niu J. CFD simulation of the wind environment around an isolated high-rise building / Liu J., Niu J. // *Building&Envir.* - 2016. - Vol. 96. - P. 91-106.
22. Mohottia D. A comparison of Reynolds averaging Navier-Stokes (RANS) turbulent models in predicting wind pressure on tall buildings / D. Mohottia, K. Wijesooriyaa, D. A. Dias-da-Costa // *J. Building Engin.* - 2019. - Vol. 21. - P. 1-17.
23. Zhang Y. An experimental study on wind loads acting on a high-rise building model induced by microburst-like winds / Zhang Y., Sarkar P., Hu H. // *J. Fluids&Struct.* - 2014. - Vol. 50. - P. 547-564.
- building facades under various oblique winds based on Eulerian multiphase model. *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.* Vol.142. p. 82-92.
15. YANG L., GURLEY K.R., PREVATT D.O. (2013) Probabilistic modeling of wind pressure on low-rise buildings. *J. Wind Eng. Ind. Aerod.* Vol.114. p. 18-26.
16. HOU F., SARKAR P.P. (2020) Aeroelastic model tests to study tall building vibration in boundary-layer and tornado winds. *Engin. Struct.* Vol. 207. 110259.
17. WANG F., LAM K.M., ZU G.B., CHENG L. (2019) Coherent structures and wind force generation of square-section building model. *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.* Vol.188. p. 175-193.
18. XING F., MOHOTTI D., CHAUHAN K. (2018) Study on localised wind pressure development in gable roof buildings having different roof pitches with experiments, RANS and LES simulation models. *Building&Envir.* Vol.143. p. 240-257.
19. LE T.-H., CARACOGLIA L. (2016) Modeling vortex-shedding effects for the stochastic response of tall buildings in non-synoptic winds. *J. Fluids&Struct.* Vol. 61. p. 461-491.
20. LIA B., LIUA J., LUOA F., MANC X. (2015) Evaluation of CFD Simulation using various turbulence models for wind pressure on buildings based on wind tunnel experiments. *Procedia Engin.* Vol. 121. p. 2209 - 2216.
21. LIU J., NIU J. (2016) CFD simulation of the wind environment around an isolated high-rise building. *Building&Envir.* Vol. 96. p. 91-106.
22. MOHOTTIA D., WIJESORIYAA K., DIAS-DA-COSTA D. (2019) A comparison of Reynolds averaging Navier-Stokes (RANS) turbulent models in predicting wind pressure on tall buildings. *J. Building Engin.* Vol. 21. p. 1-17.
23. ZHANG Y., SARKAR P., HU H. (2014) An experimental study on wind loads acting on a high-rise building model induced by microburst-like winds. *J. Fluids&Struct.* Vol. 50. p. 547-564.

Надійшла до редколегії 29.10.2021 р.

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/4.6>

УДК 539.376

Кобзар Ю.М., к.ф.-м.н., с.н.с.

**МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ РУЙНУВАННЯ
ЦИЛІНДРИЧНИХ СТЕРЖНІВ ЗА УМОВ БАГАТО
ЦИКЛОВОГО СИМЕТРИЧНОГО КРУЧЕННЯ**

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН
України, 03057, Київ, вул. П.Нестерова, 3,
e-mail: creep@inmech.kiev.ua

Kobzar Yu.M., Ph.D. (Phys.-Math.)

**SIMULATION OF CYLINDRICAL ROD
DESTRUCTION PROCESS UNDER MULTI-CYCLIC
SYMMETRIC TORSION**

Institute of Mechanics. SP Tymoshenko NAS
of Ukraine, 03057, Kyiv, P. Nesterova str., 3,
e-mail: creep@inmech.kiev.ua

Запропоновано модель втоми стрижня, в основу якої покладено зменшення несучої маси речовини в першій чверті циклу та збільшення її щільності в другій чверті циклу кручення стрижня проти годинникової стрілки, а також зменшення несучої маси речовини в третій чверті циклу та збільшення її щільності в четвертій чверті циклу кручення за годинниковою стрілкою. Дотичне напруження та кут зсуву зв'язані лінійною залежністю Гука. В залежності від початкових фізико-механічних властивостей стрижня, контролюються його структурні зміни, які кількісно відображають зміни маси, щільності, напружень, модуля зсуву, обчислення яких відбувається на кожному циклі. Прийнято, що крихке руйнування стрижня відбувається в циклі, в якому не виконується нерівність початкової енергії руйнування та потенційної пружної енергії, запомпованої на цьому циклі. Критерієм досягнення межі втоми є невиконання нерівності за межею прийнятої бази випробувань. Алгоритм моделі реалізовується в програмному середовищі комп'ютерної алгебри.

Ключові слова: симетричне кручення, модель втоми, межа втоми, енергетичний критерій руйнування при втомі.

A fatigue model based on a decrease in the carrier mass of a substance in the first quarter of a cycle. Also a fatigue model based on an increase in its density in the second quarter of a counterclockwise rotation cycle. As well as this model based a decrease in a carrier mass in a third quarter cycle and an increase in its density in a fourth quarter of a clockwise rotation cycle. The tangential stress and shear angle are related by the Hooke linear relationship. Depending on the initial physical and mechanical properties of the rod, its structural changes are controlled, which quantitatively reflect the changes in mass, density, stresses, shear modulus, which are calculated on each cycle. It is accepted that the brittle fracture of the rod occurs in a cycle in which the inequality of the initial fracture energies and the potential elastic energy pumped on this cycle is not fulfilled. The criterion for achieving the limit of fatigue is not to fulfill the inequality outside the accepted test base. The model algorithm is implemented in the software environment of computer algebra.

Key Words: symmetrical torsion, fatigue model, fatigue limit, energy criterion of destruction at fatigue.

Статтю представив член-кор. НАН України Жук Я.О.

Прогнози руйнування в умовах багато циклової втоми у випадку симетричного навантаження невідомі. В даній роботі запропонована модель втоми стрижня під дією симетричного кручення. У рамках моделі досліджується руйнування матеріалів, коли змінюється несучий об'єм зразка і не враховуються малі зміни форми. Визначаються на кожному циклі структурні зміни, які спричиняють зміни маси, щільності, напруження, модуля зсуву. Прийнято, що втомне руйнування

стрижня відбувається на тому циклі, на якому не виконується нерівність, яка характеризує процес. Ця нерівність отримана з балансу енергій – зовнішньої, викликаної циклічним моментом, та пружної енергії стрижня, що з'явилась в ньому внаслідок прикладання моменту. Цей підхід є розвитком моделі руйнування при багато цикловому симетричному розтязі - стискові [1,2].

Нехай на ізотропний стержень з коефіцієнтом Пуассона μ , межею міцності σ_0 і початко-

вими – модулем зсуву G_1 , масою m_1 , щільністю ρ_1 , довжиною L , площею перерізу F_1 , діє симетричний періодичний обертальний момент M_i з амплітудним значенням $M_a = \text{const}$. Початкове дотичне напруження $\tau_0 = \frac{M_a}{\pi R_0^3}$ менше межі пропорційності σ_{nc} . Циклічні дотичні напруження

$$\tau(i) = \tau_a(i) \sin \Omega t, \quad (1)$$

де $\tau_a(i) = M_a / W_p(i)$; $W_p(i)$ – амплітудні значення полярного моменту опору поперечного перерізу стрижня, що виникають в стрижні з початковим об'ємом $V_1 = m_1 / \rho_1$, викликають на кожному i -тому циклі стиск у першій $j=1$, третій $j=3$ та розтяг в другій $j=2$ і 4 чвертях.

Початкова пружна енергія, що накопичується в стрижні з амплітудою в одиниці об'єму при крученні буде

$$U = W_1 V_1 = \frac{\tau_k^2}{4G_2(0)} \frac{m}{\rho}. \quad (2)$$

Найбільша потенційна енергія U , що прикладена ззовні при циклічному крученні стрижня, дорівнює половині добутку коефіцієнту жорсткості $k = m\omega_0^2$ гармонічного моменту з частотою Ω на квадрат найбільшого кута закручування $\varphi = -\frac{M_a L}{m\omega_0^2}$, де ω – початкова

власна частота стрижня при співвідношенні $\Omega \ll \omega$ між частотами, і рівна

$$U = \frac{1}{2} \frac{M_a^2 L^2}{m\omega_0^2}. \quad (3)$$

Ці енергії (2), (3), при найбільших кутах закручування, рівні між собою

$$U = \frac{1}{2} \frac{M_a^2 L^2}{m\omega_0^2} = \frac{\tau_k^2}{4G_2(0)} \frac{m}{\rho}. \quad (4)$$

З балансу енергій (4), знаходимо початкову власну частоту $\omega_0 = \frac{M_a L}{m\tau_k} \sqrt{2G_2(0)\rho}$ стрижня.

Прийнято, що зовнішні амплітудні значення

руйнуючого моменту є $M_e = \frac{m\tau_e\omega_0}{L\sqrt{2G_2(0)\rho}}$, а

енергія руйнування $U_0 = \frac{1}{2} \frac{M_e^2 L^2}{m\omega_0^2}$. Критерієм

крихкого руйнування є виконання нерівності

$$\frac{M_e^2 L^2}{m_1\omega_0^2} - \frac{\tau_{aj}(i)^2}{2G_j(i)} \frac{m_j(i)}{\rho_j(i)} < 0, \quad (5)$$

на j -ій чверті i -го циклу і цей цикл $i = N_a < N_0$ є межею циклічної довговічності при початковому дотичному напруженні τ_1 , викликаного циклічним симетричним моментом M_a . Критерієм досягнення межі втоми є невиконання нерівності (5) для $i \geq N_0$ за межею прийнятої бази випробувань N_0 .

Розглянемо рекурентний процес накопичення втоми на довільному i -му циклі. В першій чверті $j=1$ циклу при стискові проти годинникової стрілки прийнято, що довжина L та щільність $\rho_4(i-1) = \rho_1(i)$ не змінюються. Стан стрижня в цій чверті циклу i та четвертій чверті попереднього циклу $i-1$ зв'язують рівності

$$1 = \frac{\rho_4(i-1)\pi(R_4(i-1))^2 L}{m_4(i-1)} = \frac{\rho_1(i)\pi(R_1(i))^2 L}{m_1(i)}, \quad (6)$$

де $m_1(i)$ – несуча маса стрижня; $R_1(i)$ – його радіус.

За допомогою рівнянь (6) залежність між масами та радіусами буде

$$\frac{m_1(i)}{m_4(i-1)} = \frac{(R_1(i))^2}{(R_4(i-1))^2}, \quad (7)$$

де $m_1(i)$ – невідома маса. Баланс енергій цієї чверті циклу $j=1$ даного i -го циклу має вигляд

$$U = \frac{1}{2} \frac{M_a^2 L^2}{m_1(i)\omega_0^2} = \frac{(\tau_{a1}(i))^2}{4G_1(i)} \frac{m_1(i)}{\rho_1(i)}. \quad (8)$$

Максимальне амплітудне напруження є

$$\tau_{a1}(i) = G_1(i)\gamma_1(i). \quad (9)$$

Відношення радіусів через напруження та кут зсуву попереднього циклу представляється як

$$\left(\frac{R_1(i)}{R_4(i-1)}\right)^4 = \frac{\tau_{a4}(i-1)}{G_1(i)\gamma_4(i-1)}. \quad (10)$$

Тоді, відношення початкового радіусу до попереднього, враховуючи (7), (9), (10) з балансу енергій (8), буде

$$\left(\frac{R_1(i)}{R_4(i-1)}\right)^2 = \frac{2\rho_4(i-1)M_a^2L^2}{\omega_0^2m_4(i-1)^2\gamma_4(i-1)\tau_4(i-1)}. \quad (11)$$

Знаючи відношення радіусів (11), визначимо новий модуль зсуву з (10), який дорівнює

$$G_1(i) = \frac{\tau_4(i-1)}{\gamma_4(i-1)} \left(\frac{R_4(i-1)}{R_1(i)}\right)^4 \quad (12)$$

та кут зсуву

$$\gamma_1(i) = \gamma_4(i-1) \frac{R_1(i)}{R_4(i-1)}. \quad (13)$$

Маса (7), напруження (9) та модуль зсуву (12), знайдені в цій чверті циклу, стають початковими даними для наступної чверті цього циклу.

У другій $j=2$ чверті циклу при крученні проти годинникової стрілки прийнято, що стрижень розтягується, а його маса, довжина та модуль зсуву не змінюються, але змінюються щільність та об'єм.

У другій чверті циклу стан стержня зв'язаний з його станом в попередній чверті цього циклу рівняннями

$$1 = \frac{\rho_1(i)\pi(R_1(i))^2L}{m_1(i)} = \frac{\rho_2(i)\pi(R_2(i))^2L}{m_2(i)}, \quad (14)$$

де $\rho_2(i)$ – істинна щільність і $R_2(i)$ – радіус стрижня в кінці циклу. Залежність між істинною щільністю цієї чверті циклу $\rho_2(i)$ і радіусом стержня $R_2(i)$ виходячи з рівності (14) буде

$$\frac{\rho_2(i)}{\rho_1(i)} = \frac{(R_1(i))^2}{(R_2(i))^2}. \quad (15)$$

Максимальне напруження в кінці попередньої чверті циклу досягається біля поверхні стержня радіус якої $R_1(i)$ та має вигляд

$$\tau_1(i) = \frac{M_a}{\pi R_1^3(i)}, \quad (16)$$

і є початковим для даного циклу.

Максимальне напруження в цій чверті циклу досягається в точках перетину біля поверхні стержня радіус якої $R_2(i)$

$$\tau_2(i) = \frac{M_a}{\pi(R_2(i))^3}. \quad (17)$$

З іншого боку максимальне напруження представляється, як

$$\tau_2(i) = G_1(i)\gamma_2(i). \quad (18)$$

Виходячи з рівнянь (16), (17), (18) має місце залежність

$$\frac{(R_1(i))^3}{(R_2(i))^3} \tau_1(i) = G_1(i)\gamma_2(i). \quad (19)$$

Кути зсуву сусідніх чвертей $j=1, j=2$ циклу i зв'язані рівнянням

$$\gamma_2(i) = \gamma_1(i) \frac{R_2(i)}{R_1(i)}, \quad (20)$$

і беручи до уваги (20), напруження (18) буде

$$\tau_{a2}(i) = G_1(i)\gamma_1(i) \frac{R_2(i)}{R_1(i)}. \quad (21)$$

З виразів (19) та (20) отримуємо

$$\frac{R_1(i)^3}{(R_2(i))^3} \tau_1(i) = G_1(i)\gamma_1(i) \frac{R_2(i)}{R_1(i)}, \quad (22)$$

$$\text{звідки} \quad R_2(i) = \left(\frac{\tau_1(i)}{G_1(i)\gamma_1(i)}\right)^{\frac{1}{4}} R_1(i). \quad (23)$$

Залежність (23) визначає радіус та дозволяє знайти кут зсуву (20), напруження (21), щільність (15) через значення попередньої чверті циклу, які є початкові для наступної чверті циклу. В цій чверті $j=2$ при розтязі, згідно припущення, маса не змінювалась $m_1(i) = m_2(i)$ і модуль зсуву не перераховувався. Далі перевіряється нерівність (5): якщо вона виконується, руйнування відбулося, розрахунки припиняються, в протилежному випадку обчислення продовжуються. У процесі кручення стрижня за годинниковою стрілкою в третій чверті $j=3$ циклу він стискається, змінюються його загальна несуча маса, об'єм, але зберігаються його довжина L та щільність $\rho_2(i) = \rho_3(i)$. Стан стрижня в попередній та даній, третій $j=3$, чвертях зв'язують рівності

$$1 = \frac{\rho_2(i)\pi(R_2(i))^2L}{m_2(i)} = \frac{\rho_3(i)\pi(R_3(i))^2L}{m_3(i)}, \quad (24)$$

де $m_3(i)$ – несуча маса стрижня; $R_3(i)$ – його радіус. Залежність між істинною масою цієї чверті циклу $m_3(i)$ і радіусом стрижня $R_3(i)$, виходячи з рівності (24), буде

$$\frac{m_3(i)}{m_2(i)} = \frac{(R_3(i))^2}{(R_2(i))^2}. \quad (25)$$

Максимальне початкове напруження цієї чверті циклу буде (17). Максимальне напруження в кінці чверті буде

$$\tau_{a3}(i) = \frac{M_a}{\pi(R_3(i))^3}, \quad (26)$$

З іншої сторони його можна представити як

$$\tau_{a3}(i) = G_3(i)\gamma_3(i). \quad (27)$$

З рівнянь (17), (26), (27) випливає залежність

$$\frac{R_2(i)^3}{(R_3(i))^3} \tau_2(i) = G_3(i)\gamma_3(i). \quad (28)$$

Кути зсуву сусідніх чвертей $j = 2, j = 3$ для циклу i зв'язані рівняннями

$$\gamma_3(i) = \gamma_2(i) \frac{R_3(i)}{R_2(i)}, \quad (29)$$

і тоді (27), врахувавши (29), буде

$$\tau_{a3}(i) = G_3(i)\gamma_2(i) \frac{R_3(i)}{R_2(i)}. \quad (30)$$

З (28) і (29) отримуємо

$$\frac{R_2(i)^3}{(R_3(i))^3} \tau_2(i) = G_3(i)\gamma_2(i) \frac{R_3(i)}{R_2(i)}, \quad (31)$$

звідки залежність між радіусами буде

$$R_3(i) = \left(\frac{\tau_2(i)}{G_3(i)\gamma_2(i)} \right)^{\frac{1}{4}} R_2(i). \quad (32)$$

Список використаних джерел

1. Кобзарь Ю.М. К оценке усталостной долговечности гладких цилиндрических стержней при одноосном симметричном растяжении сжатии / Ю.М. Кобзарь // Авиационно-космическая техника и технология. Харьков: «ХАИ». – 2015. – №9 (126). – С. 6–14.
2. Кобзар Ю.М. Модель структурних змін та руйнування гладких циліндричних стрижнів при одноосному симетричному розтязистиску / Ю.М. Кобзар // Матеріали XX МНТК „Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта”. – Київ: ММІ НТУУ «КПІ» ім. І. Сікорського, 10–13 вересня 2019 року. – С. 46–49.

Баланс енергій цієї чверті $j = 3$ цього циклу i має вигляд

$$U = \frac{1}{2} \frac{M_a^2 L^2}{m_3(i)\omega_0^2} = \frac{(\tau_{a3}(i))^2}{4G_3(i)} \frac{m_3(i)}{\rho_3(i)}. \quad (33)$$

Скориставшись значеннями $\tau_{a3}(i)$ з (30), $m_3(i)/m_3(i)$ з (25) в балансі енергій (33) та виразом (32) для $(R_3(i)/R_2(i))^4$, отримаємо відношення невідомого та початкового радіусів

$$\left(\frac{R_3(i)}{R_2(i)} \right)^2 = \frac{2\rho_2(i)M_a^2 L^2}{\omega_0^2 m_2(i)^2 \gamma_2(i) \tau_2(i)}. \quad (34)$$

Через відомі відношення радіусів (34) визначаються модуль зсуву з (32), який буде

$$G_3(i) = \frac{\tau_2(i)}{\gamma_2(i)} \left(\frac{R_2(i)}{R_3(i)} \right)^4, \quad (35)$$

кут зсуву (29), напруження (30), маса (25), радіус (34), які є початковими даними для останньої чверті даного циклу. Такі ж рекурентні обчислення проводяться для кожної чверті наступних циклів. Апробація моделі знаходиться в стадії розробки і реалізується в доступній системі комп'ютерної алгебри. Запропонована модель вперше прогнозує руйнування від втоми при симетричному циклічному крученні стрижня, не використовуючи при цьому результатів лабораторних випробувань на втому.

References

1. KOBZAR, Yu. (2015) K otsenke ustalostnoi dolhovechnosti hladkykh Tsilindricheskikh sterzhnei pri odnoosnom simmetrichnom rastiazhenii szhatii. In *Aviation and Space Engineering and Technology*. 2015. Kharkiv: "KhAI" named after N. Zhukovsky. №9 (126). pp. 6-14.
2. KOBZAR, Yu. (2019) Model strukturnykh zmin ta ruinuvannya hladkykh tsylindrychnykh stryzhniv pry odnovisnomu sumetrychnomu rozhtiazystysku. *Materials of XX ISTC "Progressive Engineering, Technology and Engineering Education"*. September 10-13, 2019. Kyiv: MMI NTUU "KPI" them. I. Sikorsky. pp. 46-49.

Надійшла до редколегії 29.08.21

УДК 539.3

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/4.7>

Можаровський В.В., д. т. н., проф.,
Кузьменков Д.С., к. ф.-м. н., доц.,
Москальова М.В.,
Киргинцева С.В.

V. V. Mozharovsky, Dr. Sci. (Tech.), Prof.,
D. S. Kuzmenkov, Ph.D. (Phys.-Math.), Assoc.Prof.
M. V. Moskaeva,
S. V. Kirhintsava

Реалізація методики розрахунку контактної взаємодії зубів зубчастих коліс з композиційних матеріалів

Implementation of the methodology for calculating the contact interaction of teeth of gear wheels made of composite materials

Гомельський державний університет ім. Ф. Ско-
рини, 246019, м. Гомель, вул. Советская, 104,
e-mail: mozh@gsu.by

Francisk Skorina Gomel State Univetsity, 246019,
Gomel, Sovetskaya str., 104
e-mail: mozh@gsu.by

На підставі рішень контактних задач для волокнистих матеріалів і покриттів з композиційних матеріалів у статті розглядається реалізація методики розрахунку податливості зубчастих коліс з композиційних матеріалів, визначення параметрів контакту покриттів з волокнистих матеріалів. Для розрахунку контактних деформацій зубчастих коліс з металів і композитів розроблено програму в середовищі Delphi, яка дає можливість реалізувати розрахунок коефіцієнтів контактної деформації зуба зубчастого колеса, а також розрахунок контактних деформацій для зуба з волокнистим покриттям. Представлено інтегральне рівняння, яке дає розв'язок контактної задачі про вдавлювання штампів в ортотропне покриття. Для дослідження впливу властивостей матеріалу і товщини покриття на параметри контакту було складено програму обчислення на ЕОМ, за якою проводився розрахунок для різних товщин.

Ключові слова: зубчасте колесо, композит, зона контакту, контактне переміщення.

Based on the solutions of contact problems for fibrous materials and coatings of composite materials, the article considers the implementation of the method of calculating the pliability of gears of composite materials, determining the contact parameters of coatings of fibrous materials. To calculate the contact deformations of gears made of metals and composites, a program was developed in the Delphi environment, which makes it possible to calculate the coefficients of contact deformation of the gear tooth, as well as the calculation of contact deformations for a tooth with a fibrous coating. An integral equation is presented, which gives a solution of the contact problem of pressing a stamp into an orthotropic coating. To study the influence of the properties of the material and the thickness of the coating on the contact parameters, a computer program was compiled, which was used to calculate for different thicknesses.

Key words: gear, composite, contact zone, contact movement.

Статтю представив член-кор. НАН України Жук Я.О.

1. Вступ

Застосування у світовій практиці високошвидкісного і надійного промислового транспорту (автомобілів, електронавантажувачів, підвісних канатних доріг, ескалаторів метро і ін.), а також удосконалення нових способів передачі рухів вимагає створення нових армуючих матеріалів та інженерних методик розрахунку. Наприклад, при дослідженні контактної взаємодії пружних тіл із композитів [1,2,3] виникає необхідність створювати нові методики розрахунку міцності і зносу зубів зубчастих коліс [4]. Композитні матеріали (КМ) забезпечують достатню міцність при зни-

женні ваги, і вони стали кращою заміною металевим зубчастим колесам. У цій статті представлений інженерний розрахунок контактних параметрів при взаємодії сталевих зубчастих коліс і шестерні з композиту. Для цього розробляються математичні моделі і комп'ютерні програми розрахунку напружень при контакті індентора з пружним тілом (або покриттям) з композиту за різних фізичних параметрів взаємодії. Слід зазначити, що до теперішнього часу недостатньо вивчено вплив конструктивної анізотропії і функціонально-градієнтних властивостей матеріалів (ФГМ) для взаємодіючих елементів конструкцій

на їх напружено-деформований стан, а також вплив властивостей покриттів, нанесених на робочу поверхню зубчастого колеса (для зменшення тертя, зносу матеріалів і збільшення працездатності зубчастої передачі). На рисунку 1 і рисунку 2 представлені схеми контактної взаємодії зубів з композиту (рис.1) (для покриття з композиту, рис.2) зубчастих коліс з металевими зубами.

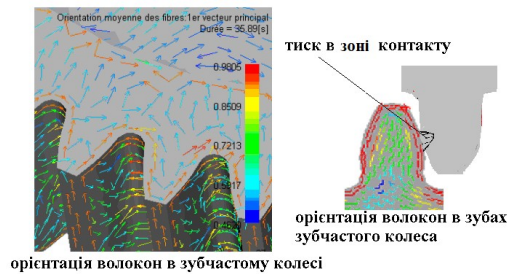


Рис. 1 Модель контакту зубів шестерні з КМ ([1])

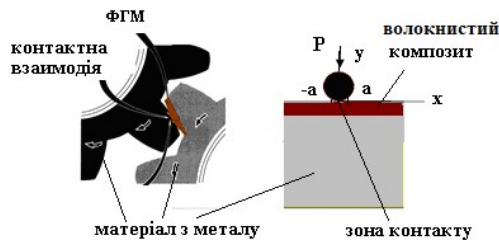


Рис. 2 Механіко-математична схема реальної передачі для зубів з покриттями

2. Розрахунок податливості зубчастих коліс з композиційних матеріалів

Переміщення зубів зубчастих коліс з композитів, що перебувають у зачепленні, є одним з істотних факторів, які необхідно враховувати при розрахунку і проектуванні зубчастих передач з КМ. Так, для успішного вирішення низки завдань щодо врахування розподілу навантаження між одночасно зачепленими зубами, визначення фактичного коефіцієнта перекриття, динамічного навантаження в зачепленні та ін. - потрібно знати переміщення зубів. З існуючих конструкцій зубчастих коліс з КМ, закріплених на металевій основі, також коліс, металеві зуби яких покриті тонким шаром полімеру (композиту), істотно збільшують жорсткість і згинну міцність зубів. Сучасний метод знаходження переміщення зубів зубчастих коліс полягає в поділі і поетапному визначенні переміщень δ_n (згину) [4], δ_{ai} - переміщень основи; δ_n - контактних переміщень [2].

Визначення переміщень згину і переміщень основи добре відображено в роботах [2,4,6], де розв'язується задача теорії пружності про згин клина з урахуванням форми зубів з КМ, тому перейдемо безпосередньо до контактних переміщень.

3. Розрахунок контактних переміщень зубів з композиційних матеріалів

Розглянемо задачу про взаємодію циліндрів з волокнистого композиційного матеріалу і металевого матеріалу. Для розробки математичних моделей, що враховують наявність волокон у контактуючих тілах, використовуємо математичну теорію пружності анізотропного середовища, застосовуючи концепцію макромеханіки. При визначенні параметрів контакту, використовуються характеристики матеріалів - об'ємна частка волокна в матриці (вважаючи її матеріал ізотропним), модулі пружності, коефіцієнт Пуассона і межі міцності в різних напрямках для волокна. Зв'язок між напруженнями і деформаціями, використовуючи узагальнений закон Гука [3], запишемо у вигляді:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon^{el}\} \quad \text{або} \quad \{\varepsilon^{el}\} = [D]^{-1}\{\sigma\},$$

де σ, ε^{el} - компоненти тензорів напружень і деформацій;

$$[D]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{23})}{E_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}.$$

Для визначення контактного напруження при взаємодії ортотропних циліндрів величина зони контакту (напівширина) a (мм) визначається за формулою [2]:

$$a = \sqrt{\frac{2PR_1R_2}{\pi m L(R_1 + R_2)}}, \quad (1)$$

де P - сила тиску двох циліндрів (Н); L - осьова довжина циліндрів (товщина циліндрів) (мм); R_1 і R_2 - радіуси двох взаємодіючих циліндрів (мм);

параметр $m = [((\beta_1 + \beta_2)S_{22})^{(1)} + ((\beta_1 + \beta_2)S_{22})^{(2)}]^{-1}$,
індекси (1) і (2) характеризують матеріали двох
циліндрів (якщо два циліндра волокнисті), а для
металевого циліндра візьмемо $\beta_1 = \beta_2 = 1$,
 $S_{22} = (2(1 - \nu^2)/E)^{(2)}$, величини $\beta_{1,2}$ обчислюють-
ся за формулами [2]

$$\beta_{1,2} = \left(\frac{S_{66} + 2S_{12} \pm \sqrt{(S_{66} + 2S_{12})^2 - 4S_{11}S_{22}}}{2S_{11}} \right)^{-1},$$

де сталі S_{ij} при плоскій деформації визначають-
ся з [2] наступним чином:

$$S_{11} = (1 - \nu_{13}\nu_{31})/E_1, S_{12} = -(\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{31})/E_1,$$

$$S_{22} = (1 - \nu_{32}\nu_{23})/E_2, S_{66} = 1/G_{12},$$

індекси i, j технічних сталей матеріалів цилінд-
рів (модуля пружності E (МПа), коефіцієнта
Пуассона ν і модуля зсуву G (МПа)) характе-
ризують різні напрямки і обчислюються за фор-
мулами (правилом сумішей):

$$E_1 = VE_f + (1 - V)E_m, E_2 = \frac{E_m(1 + \eta V)}{1 - \eta V},$$

$$G_{12} = G_m \frac{G_f(1 + V) + G_m(1 - V)}{G_f(1 - V) + G_m(1 + V)},$$

де $\eta = (E_f - E_m)/(E_f + E_m)$;

$$\nu_{12} = \nu_{13} = V\nu_f + (1 - V)\nu_m, \nu_{21} = \nu_{31} = E_2/E_1 \cdot \nu_{12},$$

$$\nu_{23} = \nu_{32} = 1 - \nu_{21} - E_2/(3K),$$

де

$$K = K_f K_m / (VK_m + (1 - V)K_f), K_f = E_f / (3 - 6\nu_f),$$

$$K_m = E_m / (3 - 6\nu_m);$$

індекси f і m позначають волокно і матрицю
відповідно; V – об'ємна частка волокна в матри-
ці матеріалу; K_f, K_m – об'ємні модулі пружності
волокна і матриці.

Рівняння, яке описує тиск $p(x)$ в зоні конта-
кту a , має вигляд [2]:

$$p(x) = m \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \sqrt{a^2 - x^2}, -a \leq x \leq a.$$

Максимальні контактні напруження визна-
чаються за формулою:

$$\sigma_c = \frac{2P}{\pi a L}. \quad (2)$$

Якщо матеріал зубів коліс має властивості
ортотропії, то контактні переміщення v (мм) ви-
значаються за залежністю [2]

$$v = -\frac{P}{\pi} \left\{ \frac{S_{22}(\beta_1 + \beta_2)}{\beta_1 - \beta_2} \left[\ln \frac{a}{2q} - \frac{1}{2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{S_{22}}{\beta_1 - \beta_2} (\beta_1^2 \ln \beta_1 - \beta_2^2 \ln \beta_2) + \frac{S_{12}}{\beta_1 - \beta_2} \ln \frac{\beta_2}{\beta_1} \right\}, \quad (3)$$

де q – міра контактного зближення відстані
(мм), що дорівнює, наприклад, $20a$.

Дана залежність легко перетворюється у фо-
рмулу для визначення контактного зближення
ізотропного циліндра при $\beta_1 = \beta_2 = 1$ і має вигляд
[2, 5]

$$v_1 = -\frac{2(1 - \nu^2)}{\pi E} P \left[\ln \frac{a}{2q} + \frac{\nu}{2(1 - \nu)} \right].$$

Зближення двох контактуючих зубів (мм) яв-
ляє собою суму контактних перемішень кожного
зуба.

Для визначення контактних перемішень зу-
бів з однорідного ізотропного полімерного ко-
леса, що перебуває в зачепленні, дістанемо з перет-
ворених формул Герца-Беляєва, які наведені, на-
приклад, у [5, 6]. Існуючі підходи до вибору ба-
зових точок рекомендують приймати відстані q
від 10 до $20a$, де $2a$ – зона контакту. Експериме-
нти з визначення δ , проведені для випадку мета-
лополімерного контакту, коли практично виклю-
чається контактне переміщення металевого зуба,
показали, що для пластмас в міру віддалення від
точки контакту згасання деформації відбувається
повільніше, ніж для випадку контакту зуба мета-
левих коліс, і величина q може коливатися в
межах $(15 - 20)a$. З огляду на це, приймемо за
міру контактного зближення відстань q в $20a$.
Тоді, вважаючи що для пластмас коефіцієнт Пу-
ассона $\nu = 0,4$, остаточно маємо коефіцієнт кон-
тактних перемішень: $\kappa_k = \frac{\delta_c E}{P} = 1,8$.

Для прикладу розглянемо металеве зубча-
сте колесо, яке зчеплюється з колесом, на зуби якого
нанесено полімерне облицювання однакової за
висотою товщини (а.с. СРСР № 644992) [7]. Як
уже зазначалося, з урахуванням різниці модулів
пружності металу і пластмаси, можна прийняти,

що металевий зуб і арматура, що срiплюється з ним, облицьованого полімером, є абсолютні жорсткими. Тому сумарне переміщення зубів у процесі контакту визначається тільки контактними переміщеннями полімерного облицьовання. Для визначення контактної переміщення полімерного облицьовання скористаємося перетвореними формулами, представленими у [2]

$$\kappa_k = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi} \left[\ln \frac{h}{a} - d_0 + \frac{4}{3} - 0,2d_1 \left(\frac{a}{h} \right)^2 - 0,086d_2 \left(\frac{a}{h} \right)^4 \right].$$

Для $\nu = 0,4$

$$\kappa_k = 0,535 \left[\ln \frac{h}{a} + 0,64 + 0,166 \left(\frac{a}{h} \right)^2 - 0,026 \left(\frac{a}{h} \right)^4 \right].$$

У таблиці 1 наведені значення переміщень κ_k для деяких значень h/a (при $\nu = 0,4$). Тут параметр h виступає як базова відстань q (яка було введена раніше). Якщо прийmemo $q = 20a$, то розрахунок за запропонованою формулою дає $\kappa_k = 1,95$. Цей результат підтверджує можливість використовувати наведену формулу для визначення контактних переміщень цілісних зубчастих коліс. Якщо $h/a < 1$ (тобто полімерне облицьовання дуже тонке), то використовуємо асимптотичний розв'язок. Аналогічно визначаємо контактні переміщення для волокнистого покриття.

Таблиця 1

Значення коефіцієнта переміщення

κ_k в залежності від h/a

h/a	1,5	2	2,5	3	10
κ_k	0,601	0,74	0,852	0,945	1,58

4. Методика визначення параметрів контакту

Для розв'язання задач контактної взаємодії, з точки зору трибології, для покриттів з волокнистих матеріалів необхідно скласти математичну модель, яку визначають вдавлюванням штампа в ортотропну смугу. Розглянемо покриття на жорсткій основі, армованого волокнами, які орієнтовані в напрямку однієї з осей x або y (рис.2). Використовуючи методику, запропоновану в книзі [2], зводимо контактну задачу (опускаючи проміжні викладки) про вдавлювання циліндричного штампа в ортотропне покриття до інтегрального рівняння. За допомогою методів операційного числення легко показати, що розв'язання контактної задачі про вдавлювання штампа в ортотроп-

не покриття зводиться до розв'язку інтегрального рівняння:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a p(t) K(x-t) dt = f(x), \quad |x| < a,$$

де для $h/a \geq 1$

$$K\left(\frac{x}{h}\right) = -\frac{S_{22}}{\pi} (\beta_1 + \beta_2) \ln \frac{|x|}{h} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left(\frac{x}{h} \right)^{2k}.$$

Розв'язок інтегрального рівняння шукаємо у вигляді ряду

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{h} \right)^{2k} p_k(x).$$

Так, у разі вдавлювання циліндричного штампа, отримуємо наступні залежності для визначення тиску

$$p(x) = \frac{P}{\pi} \sqrt{a^2 - x^2} \left\{ 1 - \frac{2d_1}{h|a|^2} \left(0,5 - \frac{x^2}{a^2} \right) - \frac{4d_2}{(h/a)^4} \times \right. \\ \times \left(\frac{7}{8} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^4}{a^4} \right) + \frac{1}{S_{22}} (\beta_1 - \beta_2) \frac{a^2}{R\sqrt{a^2 - x^2}} \times \\ \left. \times \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{a^2} \right) \left(1 + \frac{3}{2} \frac{d_2}{h^4/a^4} \right) \right\}.$$

Напівширину площадки контакту визначимо з рівняння

$$P = \int_{-a}^a p(x) dx = \frac{a^2}{S_{22}(\beta_1 + \beta_2)2R} \left(1 - \frac{d_1}{\left(\frac{h}{a} \right)^2} - \frac{3d_2 - d_1}{\left(\frac{h}{a} \right)^4} \right).$$

Невідомі коефіцієнти d_i визначаються чисельно інтегруванням, як у випадку ізотропної смуги

$$d_0 = \int_0^{\infty} (N(\beta) - e^{-\beta}) \frac{d\beta}{\beta}, \quad N(\beta) = 1 + L(\beta),$$

$$d_j = \frac{(-1)^j}{(2j)!} \int_0^{\infty} [1 + L(\beta)] e^{2j-1} d\beta.$$

Вирази для L представлені в книзі [2].

Якщо покриття на пружній основі, то можна зробити розрахунок за асимптотичними формулами, враховуючи, що відношення модуля зсуву покриття до модуля зсуву основи має бути меншим за 1 (аналогічно, як це представлено у [2]), $r < 1$).

Розглянемо випадок контакту циліндричного індентора з ортотропним покриттям на пружній ізотропній основі. На підставі раніше розробленої теорії розрахунку покриттів з композитів [2] побудована методика, визначення параметрів контакту індентора з ортотропним покриттям на пружній ізотропній основі, яку можна легко застосувати для оцінки параметрів контакту для різних товщин покриття і матеріалів. Для дослідження впливу властивостей матеріалу і товщини покриття на параметри контакту була складена програма на ЕОМ, за якою проводився розрахунок для різних товщин. Слід зазначити, що дослідження про вплив ізотропної основи на ізотропне покриття було представлено у багатьох роботах, але вплив ізотропної основи для ортотропних покриттів представлено в [2, 8]. Звичайно, на параметри контакту ортотропного покриття впливають як усі модулі пружності, що входять у фізичні співвідношення між деформаціями і напруженнями, так і пружні сталі основи. Як параметр, що характеризує пружні властивості ортотропного покриття і пружні властивості ізотропної основи, вводиться параметр E_2/E , де E_2 – модуль пружності в напрямку, ортогональному до волокон (вісь у); E – модуль пружності ізотропної основи. На рисунках 3 і 4 наведені залежності зміни параметрів контакту тиску $\tilde{p} = p_m/p_0$ і зони контакту $\tilde{a} = a/a_0$ від

$$\tilde{p} = p_m/p_0, \text{ де } a_0 = \sqrt{\frac{2PR}{\pi m}}, \quad m = [((\beta_1 + \beta_2)S_{22})^{(4)}]^{-1},$$

p_0, a_0 – тиск і зона контакту (задача типу Герца), p_m – максимальний тиск. Представлені результати є оціночними, вони показують якісний вплив пружних властивостей матеріалів і їх співвідношень на параметри контакту, і можуть застосовуватися в інженерних розрахунках.

Таким чином, використовуючи рисунок 3 і рисунок 4, можна легко знайти параметри контакту (зону контакту і тиск) для жорсткого циліндра, що вдавлюють у покриття з КМ. Наприклад, при заданих модулях пружності покриття, основи і навантаження, визначаємо зону контакту $2a_0$ (за формулою Герца), потім знаходимо реальну зону контакту $2a$ і максимальні напруження (2) і переміщення (3). Напружений стан у покритті знаходимо за комп'ютерною програмою, аналогічною до [9], для програмного модуля розрахунку напружень в смугі.

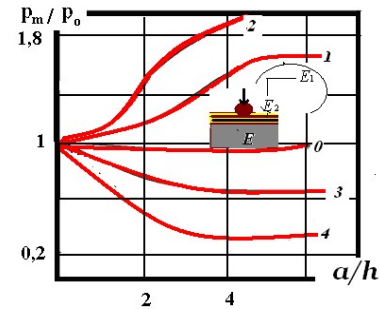


Рис. 3 Залежність відносного тиску p_m/p_0 від a/h при вдавлюванні жорсткого циліндричного штампа в ортотропних покриття з модулями пружності E_2 для різних відношень пружних сталей покриття і основи:

$$0 - \frac{E_2}{E} = 1; 1 - \frac{E_2}{E} = 0, 2; 2 - \frac{E_2}{E} = 0, 05; 3 - \frac{E_2}{E} = 2, 5; 4 - \frac{E_2}{E} = 8$$

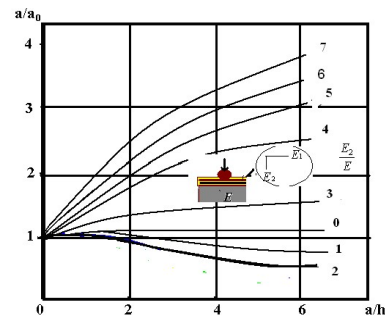


Рис. 4 Залежність відносної півширини площадки контакту a/a_0 від a/h .

Умови та позначення ті ж, що на рисунку 3.

Висновки

Згідно з поданою методикою при заданих навантаженнях, товщинах покриттів і модулях пружності покриття й основи визначаємо зону контакту (рис.4) металевого циліндра з волокнистим покриттям (яке математично моделює взаємодії зуба з волокнистого композиту), а потім за обраними параметрами визначаємо тиск (рис. 3), згідно з відомими методиками деталей машин [6], будемо інженерні залежності розрахунку зубів з волокнистих покриттів на контактну міцність.

Список використаних джерел

1. Cathelin, J. Loaded behavior of gears made of fiber-reinforced PA6 / J. Cathelin, et al. // *Geartechnology*. – July 2014. – P. 54-60.
2. Можаровский, В.В. Прикладная механика слоистых тел из композитов / В.В. Можаровский, В.Е. Старжинский. – Минск: Наука и техника, 1988. – 280 с.
3. Hossan, M.R. Strength evaluation of polymer composite spur gear by finite element analysis / M. R Hossan, Z. Hu // *International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Boston*. – 2008. – P. 1-8.
4. Можаровский, В.В. Расчет изгибных перемещений зубьев зубчатых колес из композитов / В.В. Можаровский, М.В. Москалева, Д.С. Кузьменков // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2019. – №4(41). – С. 59-65.
5. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
6. Белый, В.А. Металло-полимерные зубчатые передачи / В.А. Белый, В.Е. Старжинский, С.В. Щербаков. – Минск: Наука и техника, 1981. – 352 с.
7. Армированное зубчатое колесо: пат. 644992 СССР: М.Кл2 F 16H 55/16. Армированное зубчатое колесо / Можаровский В.В., Старжинский В.Е., Осипенко С.А.; заявитель и патентообладатель Институт механики металлополимерных систем АН Белорусской ССР. – № 2882156/25-28; заявл. 07.07.76; опубл. 30.01.79, Бюл. № 4. – 3 с.
8. Можаровский, В.В. Методика определения параметров контакта индентора с ортотропным покрытием на упругом изотропном основании / В.В. Можаровский, Д.С. Кузьменков // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2016. – №4(29). – С. 74-81.
9. Москалева М. В. Реализация расчета напряжения в полосе / М. В. Москалева // *Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XXIV Республиканской научной конференции студентов и аспирантов, Гомель, 22-24 марта 2021 г. – Гомель, 2021. – С. 269-270.*

References

1. CATHELIN, J. (2014) Loaded behavior of gears made of fiber-reinforced PA6. p. 54-60. Available from <https://www.geartechnology.com/issues/0714x/plastic-gears.pdf>.
2. MOZHAROVSKY, V.V., STARZHINSKY, V.E. (1988) *Applied Mechanics of Composite Layered Bodies*. Minsk: Science and Technology.
3. HOSSAN, M.R., HU, Z. (2008) Strength evaluation of polymer composite spur gear by finite element analysis. p. 1-8. Available from https://www.researchgate.net/publication/329718610_Strength_evaluation_of_polymer_composite_spur_gear_by_finite_element_analysis.
4. MOZHAROVSKY, V.V., MOSKALEVA, M.V., KUZMENKOV, D.S. (2019) Calculation of bending displacements of teeth of gear wheels made of composites. *Problems of physics, mathematics and technology*. 41(4). p. 59-65.
5. DGONSON, K. (1989) *Contact mechanics*. M.: Mir.
6. BELYJ, V.A., STARZHINSKY, V.E., SCHERBAKOV S.V. (1981) *Metal-polymer gears*. Minsk: Science and Technology.
7. MOZHAROVSKY, V.V., STARZHINSKY, V.E., OSIPENKO S.A. (1979) *Reinforced gear wheel*. Patent 644992 CCCP: M.Kl2 F 16H 55/16.
8. MOZHAROVSKY, V.V., KUZMENKOV, D.S. (2016) The technique for determining the parameters of a contact for indenter with the orthotropic coating on the elastic isotropic substrate. *Problems of physics, mathematics and technology*. 29(4). p. 74-81.
9. MOSKALEVA, M.V., (2021) Implementation of calculation strip stresses. In *New mathematical methods and computer technologies in design, production and scientific research Conference*. Gomel, Monday 22th to Wednesday 24th March 2021. Francisk Skorina Gomel State Univetsity. pp. 269-270.

Надійшла до редколегії 28.08.2021

УДК 616.831-005-07+611.13/16 + 531.36 <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/4.8>

Новицький В.В.¹, д.ф.-м.н., проф.,
Новицький В.В.² (мол.)

V.V. Novytskyy¹, Dr. Sc. (Phys. & Sc.),
V.V. Novytskyy²(Jr)

Математична модель руху еритроцита в капілярі

Mathematical model of erythrocyte in the capillary motion

¹Інститут математики НАН України, 01004,
м. Київ, вул. Терещенківська, 3
e-mail: v.novytsky@gmail.com.

²Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м.Київ, просп.
акад.Глушкова, 4є
e-mail: novytsky.vivi@gmail.com

¹Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine,
01004, Kyiv, Tereshchenkivska, 3.

e-mail: v.novytsky@gmail.com

² Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova av., 4e
e-mail: novytsky.vivi@gmail.com

Практична медицина вимагає нових досліджень для глибшого розуміння процесів руху крові по судинній системі. Зокрема викликають цікавість процеси руху крові у мікросудинах, коли діаметр судин менший за діаметр еритроцитів. Рухаючись в артеріолі еритроцит віддає поживні речовини, тому його маса зменшується. При русі у венулі маса еритроцита збільшується, оскільки він приймає відпрацьовані речовини із тканинного простору. Судинна стінка капіляра моделюється за допомогою рівняння параболі, що дає можливість обчислити довжину стінки, а процес руху еритроцита зі змінною масою описується рівнянням Меєрського. Саме побудові статичних моделей капілярів у нормі та динамічних моделей руху еритроцита зі змінною масою присвячена пропонована стаття.

Ключові слова: еритроцит, артеріола, венула, змінна маса.

Practical medicine requires new research to better understand the processes of blood flow through the vascular system. In particular, the processes of blood movement in capillaries, when their diameter is smaller than the diameter of erythrocytes, are of interest. It is believed that the center of mass of the erythrocyte lies on the midline of the capillary. While in the arterioles, the erythrocyte releases nutrients, so its mass decreases. When moving in the venule, the mass of the erythrocyte increases because it receives spent substances from the tissue space. The vascular wall of the capillary and its midline are modeled using the equation of the parabola, which makes it possible to calculate within the specified limits the length of the wall and the midline. The movement of an erythrocyte is described by the Meshchersky equation for bodies with variable mass. The proposed article is devoted to the construction of static models of capillaries in the norm and a dynamic model of movement in the capillary of an erythrocyte with variable mass.

Key words: erythrocyte, arteriole, venule, variable mass.

Статтю представив член-кореспондент НАН України Жук Я.О.

Вступ

Дослідження капілярного кровообігу, тобто руху крові в найдрібніших судинах (капілярах), є важливим як для теорії, так і для лікувальної практики, оскільки саме капілярний кровотік забезпечує обмін речовинами між кров'ю і тканинами.

Останнім часом особлива увага звернута на різноманітні математичні моделі капілярного

кровообігу, який здійснюється завдяки дії на кров гідростатичного тиску в артеріальному (артеріола) і венозному (венула) кінцях капіляра (рис.2).

За різними літературними даними [1-3, 10,11,13], тиск в артеріолі дорівнює 30-35 мм рт. ст., що на 8-10 мм перевищує онкотичний тиск (один з основних тисків, який регулює процеси обміну речовин в судинній системі) плазми крові, в якій плаває еритроцит. Під впливом цієї різниці

тиску вода і багато розчинених у ній речовин переходять з еритроцита та плазми крові в тканинну рідину, приносячи до тканин необхідні для життєдіяльності речовини. По мірі просування еритроцита по капіляру гідростатичний тиск спадає і у венозному кінці капіляра становить 12—17 мм рт. ст., що приблизно на 10 мм нижче онкотичного тиску крові, який забезпечує процес обміну речовин. Унаслідок цього вода і розчинені в ній речовини переходять з тканинної рідини в плазму та еритроцит, маса якого збільшується. Тим самим забезпечується видалення продуктів обміну з тканин в кров.

Величина капілярного кровообігу відповідає інтенсивності обміну речовин. Так, у стані спокою на 1 мм² поперечного перетину скелетного м'яза припадає 30—50 функціонуючих капілярів, а при інтенсивній діяльності м'яза їх кількість зростає в 50—100 разів.

Практична медицина вимагає нових досліджень для глибшого розуміння процесів руху крові по судинній системі. Зокрема викликають цікавість процеси руху крові у мікросудинах, коли діаметр судин менший за діаметр еритроцитів.

Саме побудові статичних моделей мікросудин (капілярів) у нормі та динамічних моделей руху еритроцитів по капіляру присвячена пропонувана стаття.

Статика капілярної системи.

Технологія судинного скринінгу [6-8] дає можливість отримувати зображення капілярної системи людини в області нігтьового ложа пальців руки чи ноги. Такі зображення є важливою складовою при постановці діагнозу пацієнтові. При цьому актуальною залишається проблема побудови математичних моделей зображень у статичі та динаміці та їх досліджень.

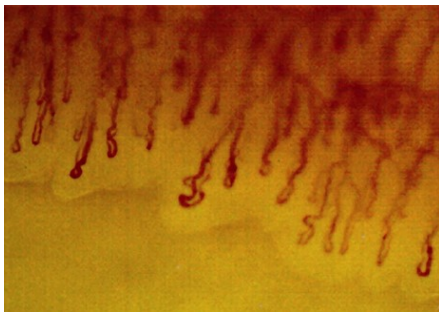


Рис. 1. Звивисті, але кровонаповнені капіляри людини. Спостерігається набряк навколо першого ряду капілярів.

Капіляри в нормі. Моделювання стінки капіляра параболою та побудова середньої лінії.

На рис. 2 зображено капіляр у нормі, який має вигляд жіночої шпильки для волосся. Саме така форма капіляра вважається нормою при діагностичних дослідженнях [6-8]. Інші форми капілярів (звивисті, закручені і т.і.) розцінюються лікарями-діагностами як патологічні та дають підстави для ширших досліджень організму пацієнта і постановки діагнозу. У випадку норми стінки капіляра його середня лінія добре моделюється рівнянням параболі з вертикальною віссю (x_B, D) [2,5,9]. Єдиною умовою у нашому випадку є та, що артеріолярна (червона) та веноулярна (синя) гілки капіляра описуються різними рівняннями, і, отже, належать різним параболом.

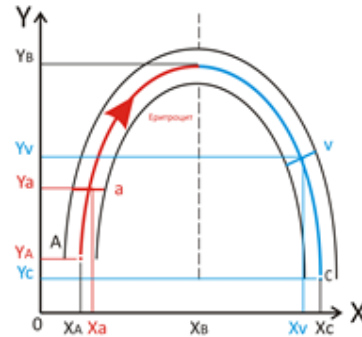


Рис.2. Схематичний вигляд частини капіляра, стінки якого зображені у вигляді частинок парабол.

Тоді матимемо таке рівняння для лівої гілки (червоній, артеріолярній)

$$y = A_a x^2 + B_a x + C_a \quad (1)$$

та для правої гілки (синьої, веноулярної)

$$y = A_v x^2 + B_v x + C_v. \quad (2)$$

Оскільки відомі координати трьох точок x_A, x_{ad}, x_B на середній лінії з артеріолярного боку, то матимемо з (1) значення координат y_A, y_{ad}, y_B для середньої лінії артеріоли

$$\begin{aligned} y_A &= A_a x_A^2 + B_a x_A + C_a \\ y_{ad} &= A_a x_{ad}^2 + B_a x_{ad} + C_a \\ y_B &= A_a x_B^2 + B_a x_B + C_a. \end{aligned} \quad (3)$$

Аналогічно, з рис. 2 випливає, що оскільки відомі координати трьох точок x_B, x_{vd}, x_C на середній лінії з веноулярного боку, то матимемо з

(1) значення координат y_B, y_{vd}, y_C для середньої лінії венули

$$\begin{aligned} y_B &= A_v x_B^2 + B_v x_B + C_v \\ y_{vd} &= A_v x_{vd}^2 + B_v x_{vd} + C_v \\ y_C &= A_v x_C^2 + B_v x_C + C_v. \end{aligned} \quad (4)$$

У системах (3), (4) невідомими є коефіцієнти $A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha$ та A_v, B_v, C_v . Після відповідних обчислень отримаємо для них остаточні вирази

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \{ (y_A - y_B)(x_{ad} - x_B) - (y_{ad} - y_B)(x_{ad} - x_B) \} / \\ &\quad \{ (x_A - x_B)(x_{ad} - x_B)(x_A - x_{ad}) \}, \\ B_\alpha &= \{ (y_A - y_B)(x_{ad}^2 - x_B^2) - (y_{ad} - y_B)(x_{ad}^2 - x_B^2) \} / \\ &\quad \{ (x_A - x_B)(x_{ad} - x_B)(x_A - x_{ad}) \}, \\ C_\alpha &= y_B - A_\alpha x_B^2 - B_\alpha x_B. \end{aligned} \quad (5)$$

Отже, знайдено коефіцієнти для побудови рівняння середньої лінії артеріоли

$$y = A_\alpha x^2 + B_\alpha x + C_\alpha. \quad (6)$$

Міркуючи аналогічно та враховуючи розташування на рис. 3 середніх ліній артеріоли та венули, отримаємо

$$\begin{aligned} A_v &= \{ (y_C - y_B)(x_{vd} - x_B) - (y_{vd} - y_B)(x_{vd} - x_B) \} / \\ &\quad \{ (x_C - x_B)(x_{vd} - x_B)(x_C - x_{vd}) \}, \\ B_v &= \{ (y_C - y_B)(x_{vd}^2 - x_B^2) - (y_{vd} - y_B)(x_{vd}^2 - x_B^2) \} / \\ &\quad \{ (x_C - x_B)(x_{vd} - x_B)(x_C - x_{vd}) \}, \\ C_v &= y_B - A_v x_B^2 - B_v x_B. \end{aligned} \quad (7)$$

Отже, знайдено коефіцієнти для побудови рівняння середньої лінії венули

$$y = A_v x^2 + B_v x + C_v. \quad (8)$$

Для того, щоб записати відповідні рівняння парабол стінок артеріоли та венули, потрібно застосувати операцію зсуву на величину відповідного радіуса [5,9].

Нагадаємо, що досліджувана частина капіляра знаходиться в полі зору окуляра капіляроскопа [6-8] (мікроскопа зі спеціальним освітленням об'єкта дослідження, тобто нігтьового ложа пальців рук або ніг). Поле зору є

прямокутником (див. рис. 2). На ньому вибрана прямокутна система координат Oxy з початком у точці O .

$$\begin{aligned} L_1 \leq x_A \leq x \leq x_C \leq L_2, \\ M_1 \leq y_A \leq y \leq y_B \leq M_2 \end{aligned} \quad (9)$$

Обчислення статичних параметрів у нормі.

При застосуванні капіляроскопічних досліджень часто лікарі цікавляться різноманітними параметрами стінок капілярів та іншими параметрами капілярної мережі, зокрема, довжиною ділянки артеріоли та венули. Покажемо, яким чином після побудови моделі капіляра обчислюється довжина ділянки артеріоли та венули. Обчислимо довжину l_α середньої лінії артеріоли

$$y = l_\alpha = A_\alpha x^2 + B_\alpha x + C_\alpha.$$

від точки $A(x_A, y_A)$ до точки $B(x_B, y_B)$ (рис.2) та довжину l_v середньої лінії венули

$$y = l_v = A_v x^2 + B_v x + C_v.$$

від точки $B(x_B, y_B)$ до точки $C(x_C, y_C)$.

Довжина ділянки артеріоли обчислюється за формулою [5,9]

$$\begin{aligned} l_\alpha &= \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{(1 + (y'_\alpha(x))^2)} dx = \quad (10) \\ &= \frac{1}{2A_\alpha} \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{(1 + (2A_\alpha x + B_\alpha)^2)} d(2A_\alpha x + B_\alpha) \\ &= \int_{\frac{2A_\alpha x_A + B_\alpha}{2A_\alpha}}^{\frac{2A_\alpha x_B + B_\alpha}{2A_\alpha}} \sqrt{1 + z^2} dz, \end{aligned}$$

де $z = 2A_\alpha x + B_\alpha$.

Після відповідних перетворень та взяття інтеграла для довжини ділянки середньої лінії артеріоли матимемо

$$\begin{aligned} l_\alpha &= \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{(1 + (y'_\alpha(x))^2)} dx = \\ &= \left(\frac{(e^{2t} - e^{-2t})}{2} + t \right) \Big|_{t_A}^{t_B}. \end{aligned} \quad (11)_a$$

За аналогією для довжини ділянки середньої лінії венули

$$\begin{aligned} l_v &= \int_{x_B}^{x_C} \sqrt{(1 + (y'_v(x))^2)} dx = \\ &= \left(\frac{(e^{2t} - e^{-2t})}{2} + t \right) \Big|_{t_B}^{t_C}. \end{aligned} \quad (11)_v$$

У формулах (11)_a та (11)_v

$$t_A = \ln \left(z_{A_a} + \sqrt{1 + z_{A_a}^2} \right),$$

$$t_B = \ln \left(z_{B_a} + \sqrt{1 + z_{B_a}^2} \right)$$

$$t_C = \ln \left(z_{C_v} + \sqrt{1 + z_{C_v}^2} \right)$$

та

$$z_{B_v} = 2A_v x_B + B_v,$$

$$z_{C_v} = 2A_v x_C + B_v$$

Отже, обчислено довжину участків артеріоли (11)_a та венули (11)_v в нормі.

Диференціальні рівняння руху еритроцита в капілярі.

Оскільки при русі еритроцита в капілярі відбуваються обмінні процеси у вигляді зменшення його маси в артеріолі та збільшення у венулі, то процеси зміни маси повинні враховуватися при створенні моделі руху.

У нашому випадку скористаємося відомими рівняннями руху тіл змінної маси Мещерського [12], який вперше описав саме рух тіл змінної маси. Розглянемо яким чином ці результати можна застосувати для дослідження динаміки еритроцита змінної маси.

Нехай у деякий момент часу еритроцит зі змінною в часі масою $m(t)$ згідно з гіпотезою, рухається в капілярі таким чином, що його центр мас весь час знаходиться на середній лінії капіляра та має відносно нерухомої системи відліку Oxy (рис. 2) вектор швидкості

$$v(t, x, y) = \left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right],$$

тобто має імпульс

$$K = m(t)v. \quad (12)$$

За проміжок часу dt під час руху еритроцит в капілярі віддає запаси кисню та інші поживні речовини (артеріола) тканинам, які оточують капіляр та приймає (венула) із зовнішнього середовища вуглекислий газ та відпрацьовані речовини масою $dm(t)$ зі швидкістю u відносно тієї ж системи Oxy . У момент викидання кисню та поживних речовин, масою $dm(t)$ між еритроцитом та стінкою артеріоли виникає реактивна сила R , яка для сукупності «еритроцит+кисень+поживні речовини» в артеріолі та сукупності «вуглекислий газ + відпрацьовані

речовини» у венулі є внутрішньою. Знайдемо зміну імпульсу цих сукупностей за час dt .

Імпульс сукупностей в момент часу $t+dt$ після викидання кисню та поживних речовин масою $dm(t)$ складатиметься з імпульсу еритроцита, швидкість якого збільшилась на

$$dv - (m(t) - dm(t))(v + dv)$$

та з імпульсу частинок газу та інших речовин, які беруть участь в обмінних процесах $dm(t)u$, де $u = u(t, x, y)$ – швидкість обміну речовин.

Отже, загальний імпульс

$$K_3 = (m(t) - dm(t))(v + dv) + dm(t)u \quad (13)$$

Тоді маємо зміну імпульсу, яка дорівнює імпульсу зовнішніх сил F , що діють на еритроцит (сила тяжіння, сила опору, різниця тисків на уявних кінцях капіляра тощо)

$$K_3 - K = Fdt, \quad \text{або}$$

$$(m(t) - dm(t))(v + dv) + dm(t)u - m(t)v = Fdt.$$

Виконавши математичні перетворення та вважаючи добуток $dm(t) dv$ нескінченно малою величиною, одержимо

$$m(t)dv - vdm(t) + dm(t)u = Fdt,$$

або остаточно

$$m(t) \frac{dv}{dt} = F + \theta \frac{dm(t)}{dt}. \quad (14)$$

У цьому рівнянні введено позначення $v - u = \theta$ – швидкість віддачі еритроцитом кисню і поживних речовин в артеріолярній частині капіляра та швидкість всмоктування еритроцитом вуглекислого газу та речовин розпаду і т.і. у венулярній частині капіляра.

Отже, остаточно маємо рівняння Мещерського, яке описує рух еритроцита в капілярі зі змінною масою:

$$m(t) \frac{dv}{dt} = F + \theta \frac{dm(t)}{dt}. \quad (15)$$

При умовах

$$y = A_a x^2 + B_a x + C_a \quad (16)_a$$

для артеріолярної ділянки та

$$y = A_v x^2 + B_v x + C_v \quad (16)_v$$

для венулярної ділянки.

У багатьох роботах підкреслюється, що рівняння (15) дуже подібне на рівняння другого закону Ньютона, але важливо, що змінність маси $m(t)$ відрізняє це рівняння від класичного. Навіть більше: умови (16)_a та (16)_v є так званими в'язями [4,11] для рівняння (15) і підкреслюють природну гіпотезу, що центр мас еритроцита знаходиться на середній лінії капіляра.

Другий доданок у правій частині рівності називають реактивною силою, з якою газ та інші складові речовини масою $dm(t)$, якими еритроцит обмінюється з зовнішнім по відношенню до капіляра середовищем, діють на еритроцит.

У подальшому плануються ширші дослідження моделі руху еритроцита в капілярі на основі детальнішої інформації про обмінні процеси між еритроцитом та тканинним простором.

Список використаних джерел

1. Бранков Г. Основы биомеханики / Г. Бранков. – Москва: Мир, 1981. – 254 с.
2. Каро К. Механика кровообращения / К. Каро К., Т. Педли, Р. Шротер, У. Сид. – Москва: Мир, 1981. – 624 с.
3. Куницын В.Г., Мокрушников П.В., Панин Л.Е. Механизм микроциркуляции эритроцита в капиллярном русле при физиологическом сдвиге рН / В.Г. Куницын, П.В. Мокрушников, Л.Е. Панин. – Новосибирск: ГУ НИИ биохимии СО РАМН, 1995. – С. 28-32.
4. Кошляков В.Н. Краткий курс теоретической механики. Кинематика, кинетика / В.Н. Кошляков. – Київ: Вища школа, 1993. – 311 с.
5. Липман Берс Математический анализ. Т. 1 / Берс Липман. – Москва: Высшая школа, 1975. – 520 с.
6. Луцик У.Б., Новицкий В.В., Колосова Ю.А. Современные возможности капилляроскопии / У.Б. Луцик, В.В. Новицкий, Ю.А. Колосова. – К.: Истина, 2004. – 35с.
7. Луцик У.Б., Новицкий В.В. Деякі аспекти прикладної гемодинаміки в епоху прижиттєвих візуалізуючих технологій / Луцик У.Б., Новицький В.В. – Київ: Істина, 2005. – 135с.

Висновки.

У роботі побудовано статичну та динамічну модель руху еритроцита по капіляру, які є важливими для процесу діагностики судинної системи людського організму. Результати досліджень будуть застосовані, зокрема, для покращення діагностичних можливостей Технології судинного скринінгу [4,5,6], основою якої є оптична та комп'ютерна капіляроскопія [4].

References

1. BRANKOV, G. (1981) Osnovy biomehaniki. Moskva: Mir.
2. KARRO, K., PEDLI, T., SHROTER, P. and SID, W. (1981) *Mehanika krovoobrashcheniya*. Moskva: Mir.
3. KUNITSYN, V.G., MOKRUSHNIKOV, P.V. and PANIN, L.Ye. (1995) *Mehanizm mikrotsirkulyatsii eritrotsyta v kapillarnom rusle pri fiziologicheskoy sdvige Ph*. Novosibirsk: NII biokhimii SO RAMN.
4. KOSHLyakOV, V.N. (1993) *Kratkiy kurs teoreticheskoy mehaniki. Kinematika, kinetika*. Kyiv: Vyshcha shkola.
5. LIPMAN Bers (1975) *Matematychnyy analiz*. T.1. Moskva: Vysshaya shkola.
6. LUSHCHYK, U.B., NOVITSKIY, V.V. and KOLOSOVA, U.A. (2004) *Sovremennyye vozmozhnosti kapillyaroskopii*. Kyiv: Istyna.
7. LUSHCHYK, U.B., NOVYTSKYI, V.V. (2005) Deyaki aspekt prykladnoi gemodynamiky v epohu pryhyttevykh vizualizuuchykh tehnologiy. Kyiv: Istyna.
8. LUSHCHYK, U.B., NOVYTSKYI, V.V. (2011) *Suchasni medychni tehnologii v analitychniy angiologii*. Navchal'nyy posibnyk. Kyiv: Istyna.
9. PISKUNOV, N.C. (1985) *Differentsial'noe i integral'noe ischisleniya*. T.1. Moskva: Nauka.
10. REGIRHER, S.A., SHADRINA, N.H. (1994) *Matematicheskoe opisanie dvizheniya krovi v mikro-sosudistom module skeletnoy myshtsy*. *Biofizika*. 39(1). P.41-47.

8. Луцик У.Б., Новицький В.В. Сучасні медичні технології в аналітичній ангіології. Навчальний посібник / У.Б.Луцик, В.В.Новицький. – Київ: Істина, 2011.- 111с.
9. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1. / Н.С. Пискунов. – Москва: Наука, 1985. – 429 с.
10. Регирер С.А., Шадрина Н.Х. Математическое описание движения крови в микрососудистом модуле скелетной мышцы / С.А.Регирер, Н.Х. Шадрина // Биофизика. – 1994. – 39 (1). – С. 41-47.
11. Федорченко А.М. Теоретична механіка / А.М.Федорченко. – Київ: Вища школа, 1975. – 516 с.
12. Чайченко Г.М. Фізіологія людини і тварин / Г.М. Чайченко, В.О. Цибенко, В.Д. Сокур. – Київ: Вища школа, 2003. – 463 с.
13. А.М. Чернух А.М. Микроциркуляция / А.М. Чернух, П.Н. Александров, О.В. Алексеев. – Москва: Медицина, 1975. – 456 с.
11. FEDORCHENKO, A.M. (1975) *Teoretychna mehanika*. Kyiv: Vyshcha shkola.
12. CHAYCHENKO, G.M., TSYBENKO, V.O., SOKUR, V.D. (2003) *Fiziologiya ludyny I tvaryn*. Kyiv: Vyshcha shkola.
13. CHERNYH, A.M., ALEKSANDROV, P.N., ALEKSEEV, O.V. (13) *Mikrotsirkulyatsiya*. Moskva: Meditsina.

Надійшла до редколегії 20.09.2021

УДК 539.376

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/4.9>

Павлюк Я.В.¹, к.т.н., с.н.с.

Y.V. Pavlyuk¹, Ph. D.,

**Моделювання деформацій циклічної
повзучості нелінійно-в'язкопружних
матеріалів за допомогою функції
Хевісайда**

**Modelling of cyclic creep deformations of
nonlinear viscoelastic materials using
Heaviside function**

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН
України, 03057, м. Київ-57, вул. Нестерова, 3,
e-mail:¹ creep@inmech.kiev.ua,

National Academy of Sciences of Ukraine
S.P.Timoshenko Institute of Mechanics, 03057,
Kyiv-57, P. Nesterov str., 3,
e-mail:¹ creep@inmech.kiev.ua,

Розглядається задача розрахунку деформацій циклічної повзучості нелінійно-в'язкопружних матеріалів, що задається у вигляді циклічних чергувань навантажень та розвантажень рівної амплітуди за прямокутними циклами, при чому тривалість напівциклів навантаження та розвантаження співпадає. Програма навантаження реалізується у вигляді послідовності елементарних навантажень, що задається за допомогою одиничних функцій Хевісайда. Для опису процесу деформування використовується нелінійна модель повзучості з незалежною в часі нелінійністю типу моделі Работнова. Ядра спадковості задаються дробово-експоненційною функцією Работнова. В роботі розв'язано та експериментально апробовано задачу розрахунку деформацій циклічної повзучості для нейлонових волокон FM 10001.

Ключові слова: циклічна повзучість, нелінійна в'язкопружність, функція Хевісайда, ядро спадковості.

The problem of calculating the deformations of the cyclic creep of nonlinear viscoelastic materials is considered, which is given in the form of cyclic alternations of loads and unloadings of equal amplitude over rectangular cycles, where the duration of loading and unloading half-cycles coincide. The program of loading is realized in the form of sequence of elementary loadings set by means of unit functions of Heaviside. A nonlinear creep model with a time-independent nonlinearity of Yu. Rabotnov's model is used to describe the deformation process. The fractional-exponential function is used as the nucleus of heredity. The paper develops a nonlinear viscosity model with time-independent nonlinearity due to the use of instantaneous deformation diagrams as isochronous for zero time and smoothing cubic splines, as approximations of nonlinear instantaneous deformation diagrams that define the nonlinearity of the model. The concept of a single isochronous deformation diagram for the studied material is experimentally substantiated. A system of solution equations of nonlinear creep under cyclic loading is formulated. The problem of calculating the deformations of stationary and cyclic creep for nylon fibers FM 10001 is solved and experimentally tested.

Key words: cyclic creep, nonlinear viscoelasticity, Heaviside function, heredity kernel.

Статтю представив член-кореспондент НАН України Жук Я.О.

Вступ. Надійна оцінка ресурсоспроможності та необхідність забезпечення працездатності відповідальних елементів сучасних конструкцій тісно пов'язані з удосконаленням методів розрахунку конструкцій внаслідок більш повного врахування властивостей матеріалів та шляхом наближення розрахункових методів до реальних процесів. Особливо актуальною є ця задача для в'язкопружних конструкційних матеріалів, деформування яких залежить як від часу, так і від історії навантаження. При цьому необхідно мати

на увазі, що у більшості практично важливих випадків (корпуси літальних апаратів, корпуси кораблів, трубопроводи, ємності високого тиску тощо) деформування в'язкопружних матеріалів є нелінійним і відбувається за змінних режимів навантаження, що вимагає врахування спадкових ефектів. Актуальними лишаються питання вибору та обґрунтування структури нелінійної моделі, вибору структури ядра спадковості та практичної реалізації методики визначення параметрів ядра, а також питання їх експериментальної апробації.

Фактично нерозв'язаними залишаються задачі розрахунку деформацій повзучості нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов нестаціонарного навантаження.

1. Постановка задачі

Визначальне рівняння в нелінійній теорії в'язкопружності із незалежною від часу нелінійністю задається співвідношенням [1]

$$\varphi_0(\varepsilon(t)) = \sigma(t) + \lambda \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \quad (1)$$

де $\varepsilon(t)$ – повна деформація, що містить пружну компоненту ε^e і компоненту повзучості ε^c в моменти часу t і τ ; $\varphi_0(\cdot)$ – функція, що задає діаграму миттєвого деформування і визначається експериментально; λ – реологічний параметр ($\lambda > 0$); $K(t-\tau)$ – ядро повзучості.

Нелінійність процесу повзучості задана рівнянням (1) визначається видом функції $\varphi_0(\cdot)$, котра в роботі задається за допомогою згладжуючих кубічних сплайнів виду

$$\varphi_0(\varepsilon_e) = a_{0,j} + a_{1,j}\varepsilon_e + a_{2,j}\varepsilon_e^2 + a_{3,j}\varepsilon_e^3, j = \overline{1, n}, \quad (2)$$

де $a_{0,j}; a_{1,j}; a_{2,j}; a_{3,j}$ – коефіцієнти сплайну, що мають розмірність напруження і залежать від інтервалу розподілу осі деформацій.

Ядро спадковості $K(t-\tau)$ задається дробово-експоненційною функцією, так що

$$K(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{(1+\alpha)n}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)]}, \quad (3)$$

де α, β – параметри ядер, що підлягають визначенню із експерименту ($-1 < \alpha < 0$; $\beta > 0$).

Використовуючи процедуру обернення функцій, визначальне рівняння (1) запишемо у формі

$$\varepsilon(t) = \psi_0 \left[\sigma(t) + \lambda \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \right] \quad (4)$$

де $\psi_0(\cdot) = \varphi_0^{-1}(\cdot)$ – обернення функції $\varphi_0(\cdot)$, яке задається співвідношенням

$$\varphi_0(\sigma) = b_{0,j} + b_{1,j}\sigma + b_{2,j}\sigma^2 + b_{3,j}\sigma^3; j = \overline{1, n} \quad (5)$$

де $b_{0,j}, b_{1,j}, b_{2,j}, b_{3,j}$ – коефіцієнти сплайну, що апроксимують обернену функцію $\varphi_0^{-1}(\cdot)$.

Довільний закон зміни напружень σ_t в момент навантаження τ задається у вигляді суми множин різних значень сталих напружень σ_k

$$\sigma(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (h(t-\tau_k) - h(t-\tau_{k+1})) \sigma_k \quad (6)$$

де $h(\cdot)$ – одинична функція Хевісайда, що має розрив першого роду за умови $t = \tau$; t – момент спостереження ($t \geq \tau$).

У роботі в рамках рівняння (4) розв'язується задача розрахунку деформацій циклічної повзучості для нейлонових волокон FM 10001. Результати розрахунків зіставляються з експериментальними даними запозиченими з [2].

Задача включає експериментальне обґрунтування гіпотези існування єдиної ізохронної діаграми, визначення параметрів входять у визначальне рівняння і експериментальну апробацію моделі на прикладі розрахунку деформацій стаціонарної та циклічної повзучості.

2. Обґрунтування існування єдиної ізохронної діаграми деформування

Визначальні рівняння моделі в'язкопружності побудовано за умови існування єдиної ізохронної діаграми деформування, що відображає подібність ізохронних діаграм повзучості і діаграми миттєвого деформування. Нелінійність моделі визначається нелінійністю діаграми миттєвого деформування і не залежить від часу. Існування єдиної ізохронної діаграми обґрунтовується експериментально. Єдина ізохронна діаграма деформування відображає подібність ізохронних діаграм повзучості $\varphi_t(\varepsilon)$ і діаграми миттєвого деформування $\varphi_0(\varepsilon)$. Подібність діаграм $\varphi_t(\varepsilon)$ і $\varphi_0(\varepsilon)$ встановлюється у площині « $\varphi - \varepsilon$ » для кожного із фіксованих рівнів деформацій ε_i в інтервалі $i = \overline{1, q}$ по параметру t_j в інтервалі $j = \overline{1, \ell}$. У цьому випадку умова подібності j -ої ізохронної діаграми повзучості $\varphi_t(\varepsilon_i(t), t_j)$ і діаграми миттєвого деформування $\varphi_0(\varepsilon_i, 0)$ записується у вигляді

$$\varphi_0(\varepsilon_i, 0) = (1 + G(t_j)) \varphi_t(\varepsilon_i(t), t_j) \quad (7)$$

де $(1 + G(t_j))$ – функція подібності, що визначається для кожної j -ї ізохронної діаграми повзучості; функції $\varphi_0(\cdot)$ і $\varphi_t(\cdot)$ задають величини напруження σ_i по діаграмі миттєвого деформування і ізохронних діаграмах повзучості відповідно для кожного з моментів часу t_j .

Величина $\overline{1 + G(t_j)}$ визначається із співвідношення

$$\overline{1+G(t_j)} = \frac{\sum_{i=1}^q \{\varphi_0(\varepsilon_i, 0) \cdot \varphi_i(\varepsilon_i, t_j)\}}{\sum_{i=1}^q \{\varphi_i(\varepsilon_i, t_j)\}^2} \quad (8)$$

яке усереднює функції подібності $(1+G(t_j))$, знайдені для кожної j -ої ізохронної діаграми повзучості, і дозволяє розрахувати дискретні значення функції подібності і відповідно дискретні значення приведених ізохронних діаграм повзучості.

В умові подібності (8) функцію подібності $(1+G(t_j))$ замінімо на її осереднене значення $\overline{1+G(t_j)}$ і для визначення приведених дискретних значень $\overline{\varphi_i(\varepsilon_i, 0)}$ ізохронних діаграм повзучості отримаємо співвідношення

$$\overline{\varphi_i(\varepsilon_i, 0)} = (\overline{1+G(t_j)}) \varphi_i(\varepsilon_i(t), t_j). \quad (9)$$

Вважається, що єдина ізохронна діаграма обгрунтована з похибкою δ , якщо приведені ізохронні діаграми повзучості не виходять за межі інтервалу, обмеженого цією величиною по відношенню до діаграми миттєвого деформування. З достатньою для практичних розрахунків точністю величина δ може бути прийнята рівною $\pm 5\%$.

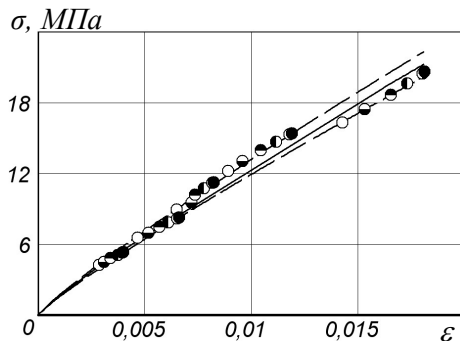


Рис.1 Обгрунтування гіпотези існування єдиної ізохронної діаграми деформування

Результати експериментального обгрунтування концепції єдиної ізохронної діаграми деформування для нейлонових волокон FM 10001 наведено на рис.1. Видно, що приведені ізохронні діаграми повзучості (точки) не виходять за межі інтервалу $\pm 5\%$ (штрихові лінії) від діаграми миттєвого деформування (суцільні лінії). Це свідчить, що гіпотеза єдиної ізохронної діаграми деформування обгрунтована з похибкою $\delta = 10\%$.

3. Визначення параметрів моделі

Значення параметрів ядер спадковості визначаються за результатами апроксимації дискретних значень ядер повзучості дробово-експоненційною функцією (3) за методикою

викладеною в [1]. Значення параметрів ядра α , β , λ , наведено в таблиці 1.

4. Повзучість за умов стаціонарного навантаження

Умова навантаження постійними у часі

Таблиця 1

Значення параметрів ядер спадковості для нейлонових волокон FM 10001

α	β , год ^{-(1+α)}	λ , год ^{-(1+α)}
-0,555	0,662	0,873

напруженнями при варіюванні величини напруження σ_k задається співвідношенням

$$\sigma(t) = h(t) \sigma_k; \quad k = \overline{1, m}, \quad (10)$$

що отримується із (6) при умові $t_{k+1} > t$.

Визначальне рівняння повзучості нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умови постійних напружень, на основі (4) з урахуванням (10), записується у вигляді

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & b_{0,j} + b_{1,j} \cdot h(t) \sigma_k \cdot \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} \right) + \\ & + b_{2,j} \cdot h(t) \sigma_k \cdot \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} \right)^2 + \\ & + b_{3,j} \cdot h(t) \sigma_k \cdot \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} \right)^3, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (11)$$

де коефіцієнти $b_{0,j}$, $b_{1,j}$, $b_{2,j}$, $b_{3,j}$ визначаються за результатами апроксимації функції $\psi_0(\cdot)$ згладжуючим кубічним сплайном (5).

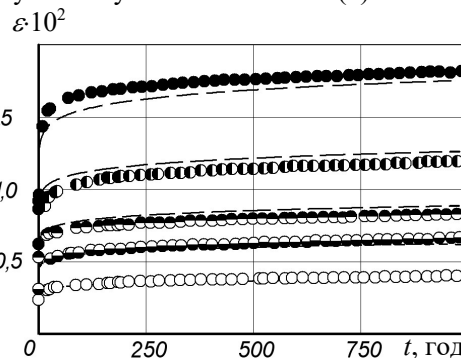


Рис.2 Значення деформацій стаціонарної повзучості нейлонових волокон FM10001

У режимі стаціонарного навантаження (10) на підставі рівняння (11) розраховано та експериментально апробовано деформації повзучості нейлонових волокон FM 10001 для декількох рівнів постійних напружень $\sigma_k = 3,2$ (○), 4,96 (⊖), 17,23 (⊕), 6,77 (⦿), 9,27 (●) МПа. Результати розрахунків наведені на рис.2 штриховими лініями, а експериментальні дані нанесені точками.

5. Циклічна повзучість

У роботі розглядається режим із циклічним чергуванням навантажень та розвантажень за прямокутними циклами.

Умова навантаження (6) конкретизується у цьому випадку у вигляді

$$\sigma(t) = \sum_{k=1}^{\nu} (h(t - 2(k-1)t_0) - h(t - (2k-1)t_0)) \sigma_1, \quad (12)$$

де σ_0 – амплітуда напруження у циклі;
 t_0 – тривалість напівциклу навантаження;
 ν – кількість циклів навантаження. У (12) також прийнято, що тривалість напівциклів навантаження та розвантаження співпадають.

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=0}^3 b_{i,j} \left\{ \sum_{k=1}^{\nu} h[t - 2(k-1)t_0] \left(1 + \lambda \int_0^{t-2(k-1)t_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (\tau)^{\alpha+(1+\alpha)n}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)]} d\tau \right) - \right. \\ \left. - h[t - (2k-1)t_0] \left(1 + \lambda \int_0^{t-2(k-1)t_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (\tau)^{\alpha+(1+\alpha)n}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)]} d\tau \right) \right\}^i, \quad (13)$$

У режимі циклічного навантаження (12) на підставі рівняння (13), розраховано та експериментально апробовано деформації повзучості нейлонових волокон FM10001 при напруженнях: $\sigma_0 = 6,2$ (○) та $\sigma_0 = 12,4$ (●) МПа, $t_0 = 1$ година, $\nu = 4$. Результати розрахунків наведені на рис.3 штриховими лініями, а експериментальні дані нанесені точками.

Висновки

Як видно з рис.2 і 3 отримано задовільне узгодження між розрахунковими й експериментальними даними. Встановлено, що в процесі циклічного навантаження (рис.3), з'являються деформації післядії, що не встигають зникнути за напівцикл розвантаження, і накопичуються із кожним циклом. Цей ефект збільшується у випадку нелінійно-в'язкопружних матеріалів. Структура запропонованої моделі дозволяє

якісно враховувати цей ефект, що підтверджується на графіках результатами розрахунків.

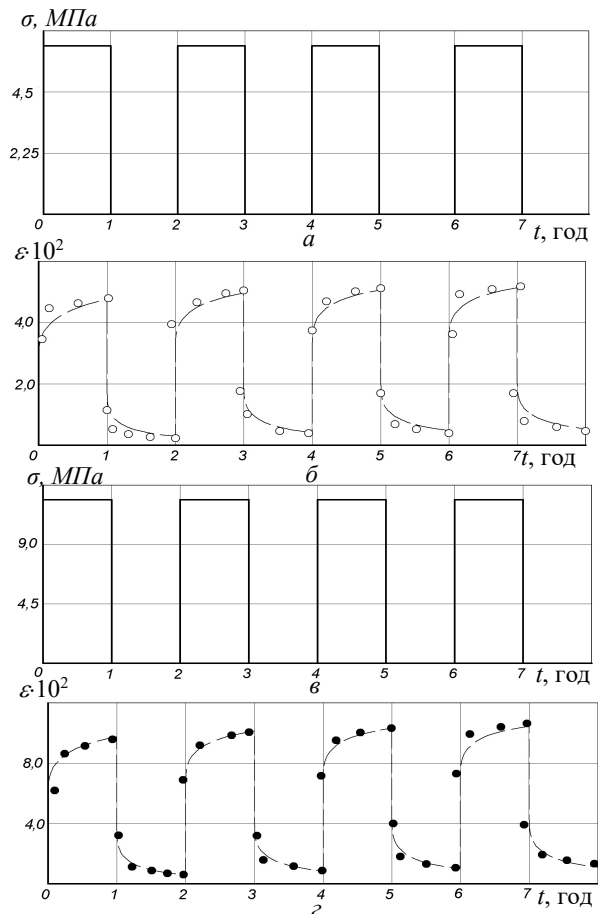


Рис.3 Програма навантаження (а,б) та розрахункові (лінії) і експериментальні (точки) значення деформацій повзучості (б,г) значення кривих повзучості нейлонових волокон FM10001

Список використаних джерел

1. Golub V.P. Determining Parameters of Fractional–Exponential Heredity Kernels of Nonlinear Viscoelastic Materials / V.P. Golub, Y.V. Pavlyuk, P.V. Fernati // *Int Appl Mech*, 2017. – Vol.53, P.419–433. <https://doi.org/10.1007/s10778-017-0826-2>
2. Marin J. Creep-time relations for nylon in tension, compression, bending, and torsion / J. Marin, A.C. Webber, G.F. Weissmann // *Proc. ASTM*.- 1954.- Vol. 54, pp.1313-1343.

References

- 1.GOLUB, V.P. and PAVLYUK, Y.V. and FERNATI, P.V. (2017) Determining Parameters of Fractional–Exponential Heredity Kernels of Nonlinear Viscoelastic Materials. *Int Appl Mech*, 53(4). P.419–433. <https://doi.org/10.1007/s10778-017-0826-2>
- 2.MARIN, J., WEBBER A.C. and WEISSMANN G.F. (1954) Creep–time relations for nylon in tension, compression, bending, and torsion. *Proc. ASTM*. 1954. Vol. 54. P. 1313–1343.

Надійшла до редколегії 29.08.2021

УДК 539.376

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/4.10>

Романов О. В., к.т.н., с.н.с.

O. V. Romanov, Ph.D.

Щодо впливу напруженого стану на деформування конструкційних матеріалів

On the influence of the stress state on the deformation of construction materials

Національна академія наук України, Інститут
механіки ім. С.П.Тимошенка, 303057, м. Київ,
вул. Несторова, 3
e-mail: creep@inmech.kiev.ua

National Academy of Sciences of Ukraine,
S.P.Timoshenko Institute of Mechanics, 03057, Kyiv,
Nesterov str., 3,
e-mail: creep@inmech.kiev.ua

Розглядається питання впливу виду напруженого стану (ВНС) на процес склерономного і реономного деформування конструкційних матеріалів при простих і близьких до простих режимах навантаження. Вказуються параметри, що характеризують ВНС. Це параметр (показник) жорсткості напруженого стану, що відбиває вплив першого інваріанта тензора напружень і являє собою з точністю до постійного множника відношення гідростатичного компонента тензора напружень до його девіаторної складової. Вплив третього інваріанта тензорів напружень враховується рядом параметрів – параметром Надаи-Лоде, а також кут ВНС у його різних трактуваннях. Показано варіант врахування цього впливу шляхом введення в визначальні рівняння функції з параметром кута ВНС. Ця функція визначається на основі аналізу базових експериментів на розтяг і кручення. Показано, що врахування ВНС підвищує точність розрахунку і поліпшує узгодження результатів розрахунку з експериментом.

Ключові слова: вид напруженого стану; параметр (показник) жорсткості напруженого стану; кут виду напруженого стану.

The question of the influence of the type of stress state (TSS) on the process of scleronomic and rheonomic deformation of structural materials under simple and close to simple loading conditions is considered. The parameters characterizing the TSS are indicated. This is a parameter (indicator) of the rigidity of the stress state, which reflects the influence of the first invariant of the stress tensor and is, with an accuracy of a constant factor, the ratio of the hydrostatic component of the stress tensor to its deviator component. The influence of the third invariant of stress tensors is taken into account by a number of parameters – the Nadai-Lode parameter, as well as the TSS angle in its various interpretations. A variant of taking this influence into account by introducing the governing equation of state of the function with the parameter of the TSS angle is shown. This function is determined based on analysis of basic tensile and torsion experiments. It is shown that taking into account VNS increases the accuracy of the calculation and improves the agreement between the calculation results and experiment.

Key words: type of stress state; parameter (indicator) of the rigidity of the stress state; angle of stress state view.

Статтю представив член-кореспондент НАН України Жук Я.О.

Вступ

На процес деформування матеріалу елементів конструкцій в умовах експлуатації серед інших факторів впливає також вид напруженого стану (ВНС). ВНС визначається через інваріанти тензора напружень, у якості яких зазвичай використовують перший інваріант тензора напружень або його кульовий компонент, а також другий і третій інваріанти девіатора напружень, причому,

як правило, у неявному вигляді через безрозмірні нормовані функції, що відображають вид, а не рівень напруженого стану.

Постановка задачі. Параметри ВНС

Розглядається процес деформування ізотропних конструкційних матеріалів в умовах складного напруженого стану з урахуванням ВНС при

простих [1] і близьких до простих режимах навантаження

$$\sigma_{ij}(\tau) = k(\tau)\sigma_{ij}(\tau_0); \quad k(\tau_0 = 0) = 1; \quad \tau \in (0, t), \quad (1)$$

де σ_{ij} – компоненти тензора напружень; $k(\tau)$ – функція, що задає режим навантаження.

Процес деформування в цих умовах здійснюється по прямолінійній траєкторії або траєкторії малої кривизни. У цьому випадку як міру накопиченої деформації можна розглядати не параметр Одквіста, а інтенсивність деформації ε_i , залежність якої від інваріантів тензора напружень у загальному випадку буде виглядати так

$$\varepsilon_i(t) = f[J_1(T_\sigma(t)), J_2(D_\sigma(t)), J_3(D_\sigma(t))], \quad (2)$$

а його граничне значення ε_i^* можна розглядати як розташовуваний запас пластичності матеріалу – Δ_p [2]. В (2) $J_1(D_\sigma(t))$ – перший інваріант тензора напружень, $J_2(D_\sigma(t))$, $J_3(D_\sigma(t))$ – відповідно другий і третій інваріанти девіатора напружень.

Очевидно, що параметри, що відбивають вплив інваріантів (2) на процес деформування, й будуть характеризувати ВНС.

Вплив інтенсивності напружень як функції $J_2(D_\sigma)$ на процес деформування досить добре досліджено для різних класів матеріалів і тому в даній роботі не розглядається.

Вплив першого інваріанта тензорів напружень $J_1(T_\sigma)$ або його гідростатичного компонента σ_0 на процес накопичення деформації здійснюється за допомогою параметра P_g (показника) жорсткості напруженого стану

[2], що представляє собою в загальному виді відношення гідростатичного компонента тензора напружень Γ до його девіаторної складової D

$$P_g = \Gamma/D. \quad (3)$$

Вплив третього інваріанта девіатора напружень $J_3(D_\sigma)$ на ВНС здійснюється рядом *допоміжних* параметрів. Це параметр Надаї-Лоде, а також допоміжний кут у його різних трактуваннях і позначений терміном кут ВНС.

Вплив ВНС на процеси склерономного і реономного деформування

У випадку склерономного (короткочасного активного) деформування вплив жорсткості напруженого стану представляється у вигляді діаграм пластичності – залежності граничної величини деформації на момент руйнування ε_i^* або, як було відзначено раніше, – розташовуваного запасу пластичності $\Delta_p = \varepsilon_i^*$ від жорсткості напруженого стану $P_g = \sigma_0/\sigma_i$, представленого на рис. 1.

З рис.1 видно, що зі збільшенням P_g у всьому діапазоні його змін, спостерігається стійка тенденція до скрихнення матеріалу. Причому в інтервалі $-\infty < P_g < 0$ діаграм пластичності добре апроксимуються поліноміальними залежностями, а в діапазоні $0 < P_g < +\infty$ – експонентними.

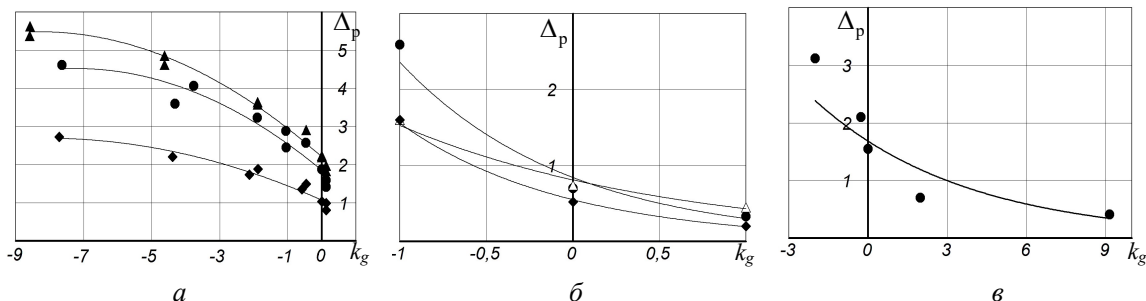


Рис. 1. Діаграми пластичності: а) [3] – сталь 10КП (▲), сталь 20 КП (●), сталь 38ХГНМ (◆); б) [4] – сталь 10 (●), сталь ЭИ-961 (Δ), сталь 35 (◆); в) [2] – вуглецева сталь (●)

На підставі представлених матеріалів і робіт інших авторів можна зробити висновок, що $P_g > 0$ відіграє роль свого роду каталізатора

процесу розпушення матеріалу, в той час $P_g < 0$ робить гальмуючу дію на процес розпушення, підвищуючи при цьому його пластичність.

Як показують експериментальні дослідження, додатковий гідростатичний тиск сповільнює швидкість повзучості матеріалів, однак це твердження справедливо тільки для великого зовнішнього тиску.

Вплив третього інваріанту девіатора напружень враховується за допомогою функції кута виду напруженого стану $\gamma(\psi_\sigma)$, в якій параметр кута виду напруженого стану ψ_σ розглядається у вигляді

$$\psi_\sigma = \frac{1}{3} \arccos \frac{27J_3(D_\sigma)}{2\sigma_i^3}. \quad (4)$$

В (4) прийнято σ_i – інтенсивність нормальних напружень; ψ_σ – кут виду напруженого стану, графічна інтерпретація якого (рис. 2) показує

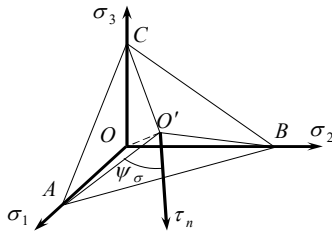


Рис. 2. Графічна інтерпретація кута ВНС

орієнтацію октаедричного дотичного напруження τ_n в октаедричній площині ABC відносно проекції АО' на цю площину осі максимального головного напруження σ_1 .

У цій інтерпретації одновісному розтягу відповідає $\psi_\sigma = 0$, одновісному стиску $\psi_\sigma = \pi/3$, а чистому крученню $\psi_\sigma = \pi/6$.

Залежність між девіаторами деформацій і напружень має вигляд

$$e_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i[\sigma_i(t), t, \gamma(\psi_\sigma)]}{\sigma_i(t)} s_{ij}(t). \quad (5)$$

Визначення залежностей функції $\gamma(\psi_\sigma)$ від ψ_σ здійснюється на основі базових дослідів на одновісний розтяг $\bar{\varepsilon}_i(\sigma_i = \text{const}, t)$ та чисте скручення $\tilde{\varepsilon}_i(\sigma_i = \text{const}, t)$ за формулою

$$\gamma(\psi_\sigma) = 1 - 6\psi_\sigma \{ [1 - \tilde{\varepsilon}_i(\sigma_i, t) / \bar{\varepsilon}_i(\sigma_i, t)] \} / \pi. \quad (6)$$

Система визначальних рівнянь з врахуванням ($\varepsilon_v \neq 0$) і (4), (5), (6) записується у вигляді

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(t) = \frac{3}{2} \frac{[\pi \pm 6(1 - \gamma_\varepsilon)\psi_\sigma] \bar{\varepsilon}_i(\sigma_i, t)}{\pi \sigma_i(t)} \times \\ \times (\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij} \sigma_0(t)) + \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v(t); \\ \varphi_i(\bar{\varepsilon}_i(t)) = \sigma_i(t) - \gamma_i \int_0^t K_i(t - \tau) \sigma_i(\tau) d\tau; \\ \varphi_v(\varepsilon_v(t)) = \sigma_0(t) + \gamma_v \int_0^t K_v(t - \tau) \sigma_0(\tau) d\tau. \end{cases} \quad (7)$$

де $\varphi_v(\cdot)$, $\varphi_i(\cdot)$ – функції, які задають нелінійність об'ємних і зсувних в'язкопружних властивостей; $\varepsilon_v(\cdot)$ – об'ємна деформація; $K_v(\cdot)$, $K_i(\cdot)$ – функції, які задають ядра об'ємної і зсувної повзучості, задаються дробово-експоненційними функціями; λ_v , λ_i – реологічні параметри.

Експериментальна апробація

Розв'язуються задачі розрахунку деформацій поздовжньої і зсувної повзучостей тонкостінних трубчастих елементів з поліетилену високої щільності ПЕВП і поліетилену низького тиску в умовах одновісного розтягу, чистого кручення і комбінованого навантаження розтягом із крученням з урахуванням впливу виду напруженого стану.

Експериментальні дані, які використані для визначення матеріальних констант і для апробації результатів розрахунків, запозичені з робіт [5].

Результати розрахунків деформацій повзучості тонкостінних трубчастих елементів з поліетилену високої щільності ПЕВЩ в умовах комбінованого навантаження одновісним розтягом і крученням ($\sigma_{11} \neq 0$, $\tau_{21} \neq 0$) співставлені на рис. 3 з експериментальними даними. Результати розрахунків з урахуванням ВНС нанесені штрих-пунктирними лініями, а результати розрахунків без урахування ВНС – штриховими лініями.

Висновки

В роботі розглянуто параметри, що характеризують ВНС і відображають вплив гідростатичної і девіаторної компонент тензора

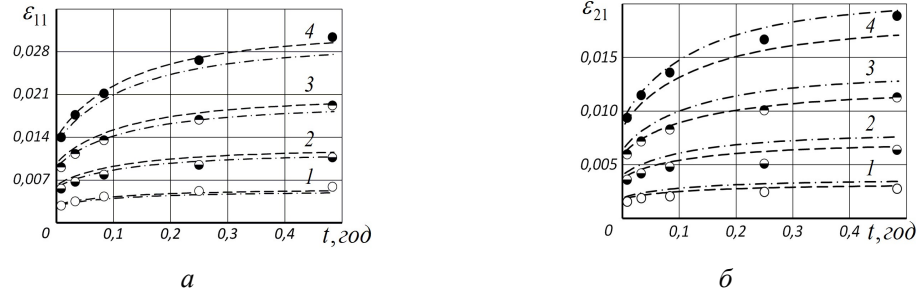


Рис. 3. Деформації повзучості тонкостінних трубчатих елементів з поліетилену високої щільності ПЕВП за умов комбінованого навантаження (1 – $\sigma_{11} = 1,77$, $\tau_{21} = 0,83$; 2 – $\sigma_{11} = 3,54$, $\tau_{21} = 1,66$; 3 – $\sigma_{11} = 5,31$, $\tau_{21} = 2,49$; 4 – $\sigma_{11} = 7,08$, $\tau_{21} = 3,32$ МПа)

напружень на процес деформування. Запропоновано підхід до побудови визначальних рівнянь повзучості нелінійно-в'язкопружних середовищ за умов простих та близьких до простих режимів навантаження, що враховують вплив виду напруженого стану. Врахування залежності деформування від ВНС у визначальних рівняннях, здійснюється за допомогою функції з параметром кута ВНС.

Співставлення результатів розрахунків деформацій повзучості тонкостінних трубчатих елементів з поліетилену при комбінованому навантаженні розтягом із крученням показали, що врахування ВНС якісно і кількісно покращує узгодження з результатами експерименту в порівнянні з розрахунками без його врахування.

Список використаних джерел

References

1. Ильющин А.А. Пластичность / А.А.Ильющин – Москва: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.
2. Пластичность и разрушение / Под ред. В.Л.Колмогорова. – Москва: Металлургия, 1977. – 336 с.
3. Грешков В.М. Прогнозирование разрушения металла в процессе холодной пластической деформации / Сообщение 1. Приближенная модель пластической деформации и разрушения металлов / В.М.Грешков, Ю.А.Лавриненко, А.В.Напалков // Пробл. прочности, 1999. – №1. – С. 76-85.
4. Добранюк Ю.В. Моделирование напружено-деформованого та граничного станів поверхні циліндричних зразків при торцевому стисненні / Ю.В.Добранюк. – Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня канд. техн. наук. Інститут проблем міцності ім. Г.С.Писаренка НАНУ. – Київ, 2012. Механика, 2016. – 52, № 6. – С. 111-125.
5. Крегерс А.Ф. Комплексное исследование полиэтилена высокой плотности в условиях нелинейной ползучести и релаксации напряжений / А.Ф.Крегерс, М.Р.Килевич. – Механика композитных материалов, 1985. – №2. – С. 195-201.
1. П'ЮШИН, А.А. (1963) *Plastichnost*. Moskva: Izd-vo AN SSSR.
2. KOLMOGOROV, V.L. et al. (1977) *Plastichnost i razrushenie*. Moskva: Metallurgiya.
3. GRESHKOV, V.M., LAVRINENKO, Yu.A., NAPALCOV, A.V. (1999) Prognozirovanie razrusheniya metalla v processe holodnoy plasticheskoy deformacii. Soobshchenie 1. Priblizhennaya model plasticheskoy deformacii i razrusheniya metallov. *Problemy prochnosti*.1. pp. 76-85.
4. DOBRANYUK, Yu.V. (2016) *Modelyuvannya napruzhenno-deformovanogo ta granychnogo staniv poverhni cylindrychnykh zrazkiv pry torcevomu stysnenni* / Avtoreferat dysertacii na zdobuttia naukovoogo stupenya kand. tehn. nauk. Instytut problem micnosti im. G.S.Pysarenka NANU, Kyiv, 52(6). pp. 111-125.
5. KREGERS, A.F., KILEVICH, M.R. (1985) Kompleksnoe issledovanie polietilena vysokoy plotnosti v usloviyah nelineynoy polzuchesti i relaksacii napryazheniy. *Mechanika compozitnykh materialov*. 2. pp. 195-201.

Надійшла до редколегії 29.08.21

Сенченков І.К.¹, д.ф.-м.н., с.н.с.,
Юрженко М.В.², д.т.н., проф.,
Червінко О.П.¹, к.ф.-м.н., с.н.с.,
Доля О.В.³, к.ф.-м.н., доцент

**Чисельне моделювання термо-
напружено-деформованого стану елементів
у процесі 3D друку**

¹ Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН
України, 03057, м. Київ, вул. П. Нестерова, 3,
e-mail: term.inmech@kiev.ua;

² Інститут електрозварювання ім. Є.О. Патона
НАН України. 03680, м. Київ-150, вул. К.
Малеви́ча, 11, e-mail: office@paton.kiev.ua

³ Київський національний університет
будівництва та архітектури, Київ, 03037,
Повітрофлотський пр, 31,
e-mail: elena_367@ukr.net

I. K. Senchenkov¹, D.Sci, Senior Research Officer
M. V. Jurzhenko², D.Sci, Senior Research Officer
O.P. Chervinko, Ph.D, Senior Research Officer
O.V. Dolia, Ph.D, Docent

**Numerical simulation of the thermo-stress-
strain state of elements under 3D printing**

¹ S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of
Ukraine, 03057, Kyiv, P. Nesterova str., 3,
e-mail: term.inmech@kiev.ua

² E.O.Paton Institute of Welding of NAS of Ukraine,
03680 Kyiv, K. Malevicha str., 11,
e-mail: office@paton.kiev.ua

³ Kyiv National University of Building and
Architecture, Kyiv, 03037, Povitroflotski ave, 31,
e-mail: elena_367@ukr.net

Робота присвячена оцінці термо-напружено-деформованого стану виробів, отриманих методом 3D друку за технологією FDM (Fusing Deposition Modeling). Розглянуто три стадії розв'язання цієї задачі: (1) – математична постановка задачі, що базується на моделі тіл, що ростуть; (2) методика скінченно-елементного розв'язку задачі; (3) – дослідження конкретної задачі з метою виявлення закономірностей термомеханічних процесів при 3D друку.

Ключові слова: адитивні технології, FDM 3D друк, математичне моделювання, термо-напружено-деформований стан.

The paper is devoted to the assessment of the thermo-stress-strain state of elements of structures obtained by 3D printing using FDM (Fusing Deposition Modeling) technology. Three stages of solving this problem are considered: (1) - mathematical formulation of the problem, that includes universal balance relations, constitutive equations of mechanical behavior of the material and is based on the model of growing bodies; (2) the technique of finite-element solution with increasing mesh due to the addition of new elements; (3) - study of a specific problem of growing plate-like element by polymer PLA (polylactide) with temperature-dependent physical properties. Options of deposited layers of different thickness are considered. The residual stress-strain state of the body has a two-scale structure, which reflects the change of state characteristics in the scale of body size, as well as the thickness of the layers. As the thickness of the layers increases, the average values of the residual stresses decrease, but the amplitude of the stress fluctuations along the thickness of the layer slightly increase.

Key Words: additive technology, FDM 3D printing, mathematical modeling, thermo-stress-strain state

Статтю представив член-кореспондент НАН України Жук Я.О.

Вступ

Моделювання методом пошарового наплавлення або ж FDM 3D-друк полімерними матеріалами завдяки універсальності, простоті, багатofункціональності і доступності вважається найбільш поширеною адитивною технологією в світі, на основі якої працюють мільйони 3D-

принтерів – від найдешевших до промислових систем тривимірного друку [1–4].

В процесі 3D друку екструдер розплавляє матеріал у вигляді нитки (філамент) і з високою точністю подає розплав полімерного матеріалу тонкими шарами на робочу поверхню 3D принтера у відповідності до алгоритму друку та цифрової 3D моделі тіла. Після нанесення шару

полімерний матеріал охолоджується і затвердіває.

Важливу роль для оцінки міцності деталей відіграє інформація щодо поточних і залишкових напружень, мікроструктурного складу, а також жолоблення, особливо для тонкостінних елементів. Тому розробка методів математичного моделювання процесів і оцінки вказаних параметрів є актуальним питанням даної проблематики.

Постановка задачі

В даній роботі використовується спрощена термопружна постановка задачі. Ця модель не враховує ефект релаксації і дає верхню оцінку поточних і залишкових напружень.

Балансові рівняння. Нарощування елемента розглядається в прямокутній декартовій системі координат. Матеріал вважається ізотропним. Вихідна постановка задачі в інваріантній формі включає:

кінематичні співвідношення,
рівняння теплопровідності

$$c_v \dot{\theta} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} \theta) + Q, \quad (1)$$

квазістатичного рівноваги

$$\operatorname{div} \sigma = 0, \quad (2)$$

граничні і початкові умови

$$\begin{aligned} -k \bar{n} \cdot \operatorname{grad} \theta &= -q + \gamma(\theta - \theta_c); \quad \sigma \cdot \bar{n} = 0, \\ \theta &= \theta_0 \text{ при } t = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

де θ – температура; σ – тензор напружень; Q – потужність об'ємного джерела тепла; q – заданий потік тепла; c_v і k – коефіцієнти теплоємності і теплопровідності; γ – коефіцієнт тепловіддачі; θ_c – температура навколишнього середовища; θ_0 – початкова температура; $\bar{n}$ – зовнішня нормаль до поверхні тіла; $\sigma = (\sigma_{ij})$. $i, j = x, y, z$; $i, j = x, y, z$.

Надалі ці рівняння будуть модифіковані з урахуванням моделі нарощування.

Для плоского напруженого в площині Oxy стану маємо

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} &= 0, \quad u_i = u_i(x, y), \\ \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x, y), \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}(x, y), \theta = \theta(x, y). \end{aligned}$$

Визначальні рівняння. Термомеханічна поведінка матеріалу описується за допомогою співвідношень

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^\theta; \quad \underline{\varepsilon}^\theta = \alpha(\theta - \theta_0) \underline{I}; \quad (4)$$

$$\underline{s} = 2G\underline{e}, \quad \operatorname{tr} \underline{\sigma} = 3K_v \operatorname{tr}(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^\theta). \quad (5)$$

Тут $\underline{\varepsilon}^e$ і $\underline{\varepsilon}^\theta$ – пружна і теплова складові деформації; $\underline{s}$ і $\underline{e}$ – девіатори тензорів напружень і деформацій; G і K_v – зсувний та об'ємний модулі; tr – слід тензора; $\underline{I}$ – одиничний тензор.

Модель тіл, що ростуть. Розглянемо модифікацію співвідношень (4), (5) з урахуванням процесу нарощування [5, 6]. Припустимо, що задача розв'язується методом скінченних елементів [7]. Нехай процес нарощування є контрольованим, тобто відомі швидкість нарощування і кінцева конфігурація тіла. Перший варіант алгоритму розв'язання полягає в наступному. Конфігурація тіла, що нарощується, покривається фіксованою СЕ-сіткою. СЕ-сітка покриває як саме тіло, що нарощуватиметься, у вихідній конфігурації, так і всі нарощувані в майбутньому шари. Таким чином, сітка (кількість вузлів) не змінюється в процесі чисельного моделювання. Другий підхід полягає в тому, що сітка збільшується внаслідок приєднання елементів, що нарощуються. При цьому кількість вузлів сітки збільшується. В області, яка зайнята вихідним тілом, властивості визначаються матеріалом тіла. Елементом, що нарощується, спочатку приписуються властивості матеріалу "порожнечі", який вважається термопружним з характеристиками

$$E \approx 0, \quad \nu \approx 0,5 \quad \alpha = \alpha_f,$$

де E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона, α_f – коефіцієнт лінійного теплового розширення матеріалу нарощування. Теплофізичні властивості "порожнечі" приймаються такими ж, як у матеріалу, який нарощується. Отже, елемент "порожній" тільки з точки зору механіки. У процесі заповнення, який розглядається як процес, що розвивається в часі, "порожні" елементи СЕ-сітки будуть заповнюватися нарощуваним матеріалом. Важливо мати на увазі, що в процесі заповнення елементів (нарощування) деформується вся СЕ-сітка, що покриває як вихідне тіло, так і прилеглі до тіла "порожні" елементи.

Нехай в момент заповнення t^* деякий

порожній елемент $\Delta V(t^*)$ сітки має деформацію ε_{ij}^* , і нехай він заповнюється матеріалом, що має температуру θ^* . Передбачається, що матеріал нарощуваних елементів аж до контакту з поверхнею тіла є ненапруженим

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0. \text{ при } t = t^*. \quad (6)$$

В рамках даної моделі нарощування є заповнення елемента, що має попередню деформацію ε_{ij}^* , матеріалом нарощування з температурою θ^* . Таким чином, умови (6), по суті, означають, що

$$\sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}^*, \theta^*) = 0 \text{ в } \Delta V(t^*). \quad (7)$$

Для того, щоб визначальні рівняння нарощуваного матеріалу (1.5) узгоджувалися з умовою (1.7), необхідно і достатньо модифікувати рівняння (1.5) наступним чином:

$$\underline{s} = 2G_f(\underline{e} - \underline{e}^*), \text{tr} \underline{\sigma} = 3K_f \text{tr}(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^* - \alpha_f(\theta - \theta^*)\underline{I}); \quad (8)$$

Тут нижній індекс f показує, що параметри відносяться до нарощуваного матеріалу. Таким чином, щоб задовольнити умову нарощування (6), всі елементи, які нарощуються, повинні мати визначальні рівняння, індивідуалізовані тими конкретними значеннями деформації ε^* і

температури θ^* , при яких відбувалося їх заповнення. Тому стан $(\varepsilon_{ij}^*, \theta^*)$ для цих елементів можна трактувати, як «власний», оскільки він не викликає напружень.

Постановка задачі для тіл, що ростуть

З урахуванням результатів, викладених в попередньому пункті, математична постановка задачі включає наступні співвідношення:

- рівняння рівноваги (2) і теплопровідності (1);
- визначальні рівняння для основного матеріалу

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^\theta, \quad (9)$$

$$s_{ij} = 2G e_{ij}, \quad \sigma_{kk} = 3K_V(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^\theta); \quad (10)$$

- визначальні рівняння для матеріалу, що нарощується, в компонентній формі

$$s_{ij} = 2G(e_{ij} - e_{ij}^*), \quad \sigma_{kk} = 3K_f(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^* - \varepsilon_{kk}^\theta); \quad (11)$$

де G і K – модулі зсуву і об'ємного стиснення; Q – джерело тепла; λ і c_v –

коефіцієнти теплопровідності і об'ємної теплоємності

$$\varepsilon_{ij}^\theta = \alpha(\theta - \theta_r)\delta_{ij}, \quad \varepsilon_{ij}^{\theta^*} = \alpha(\theta - \theta^*)\delta_{ij} \quad (12)$$

Тут θ – поточна температура, θ_r – деяка відлікова температура; α – коефіцієнт лінійного теплового розширення.

Алгоритм розв'язування задачі.

Тривимірна задача про термомеханічний стан нарощених деталей розв'язується чисельно з використанням методики, що описана в роботах [8 - 10]. Задача інтегрується кроковим методом за часом. Нелінійна задача на кожному кроці розв'язується ітераційним методом з прискоренням процесу збіжності за процедурою Стефенсена-Ейткена, а лінеаризована задача на кожній ітерації розв'язується методом скінченних елементів. Використовується другий підхід до формування скінчено-елементної сітки.

Об'єкт дослідження. Конфігурація нарощуваного елемента показана на рис. 1

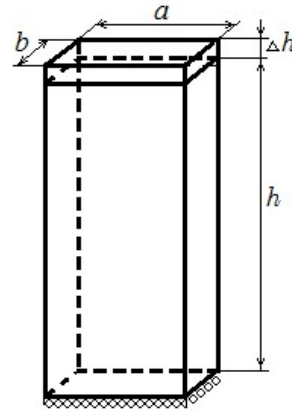


Рис. 1 Нарощуваний елемент

Розміри елемента: $a=6\text{мм}$, $b=2\text{мм}$, $h=[0 \div 50\text{мм}]$, $\Delta h = 0.14 - 0.42\text{мм}$.

Приймаємо, що один шар $\Delta h=0,14\text{мм}$ нарощується на верхньому торці за 1.1 с.

Далі будемо розглядати три випадки нарощення: шарами 0,14мм за 1,1с шар, 360 шарів; 0,28мм за 2,2с шар, 180 шарів; 0,42мм за 3,2с шар, 120 шарів, тобто швидкість нарощування (збільшення висоти) у цих трьох випадках однакова.

На нижній поверхні задані умови закріплення: $u_y = 0$, $\sigma_{xy} = 0$, $\theta = 50^\circ\text{C}$, $y = 0$.

Матеріал об'єкту – полімер PLA (полілактид) з температурно залежними властивостями. Температурна залежність модуля Юнга (рис. 2) взята з роботи [11].

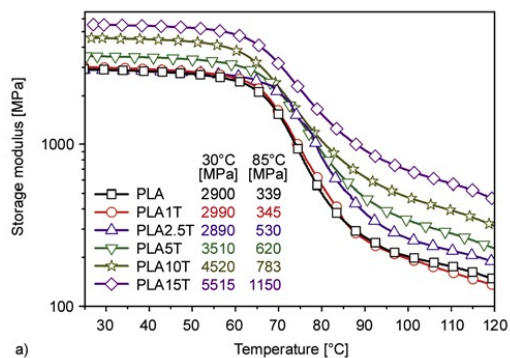


Рис. 2 Температурна залежність модуля Е

Інші параметри: $\rho = 1210 \text{ кг/м}^3$ – щільність, $\nu = 0.35$ – коефіцієнт Пуассона, $\alpha = 41 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ – коефіцієнт термічного розширення, $\lambda = 0.13 \text{ Вт/м}^2\text{К}$ – коефіцієнт теплопровідності. На вільних поверхнях відбувається теплообмін з оточуючим середовищем температури $\theta_c = 20^\circ\text{C}$ з коефіцієнтом тепловіддачі $\gamma = 30 \text{ Вт/м}^2\text{К}$. Нарощування відбувається розплавом матеріалу при 200°C .

Результати розрахунків.

На рис. 3 показана результуюча розбивка області на скінченні елементи при $\Delta h = 0.28 \text{ мм}$.

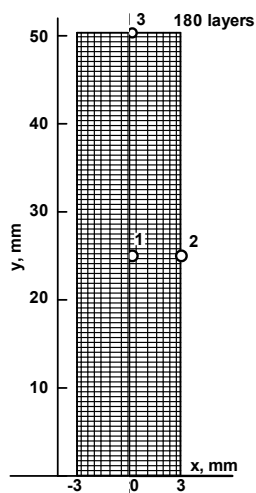


Рис. 3 Розбивка області на скінченні елементи

На рис. 4 показані ізолінії розподілу температури в різні моменти нарощування (рис. 4 а) і в момент остигання (рис. 4 б).

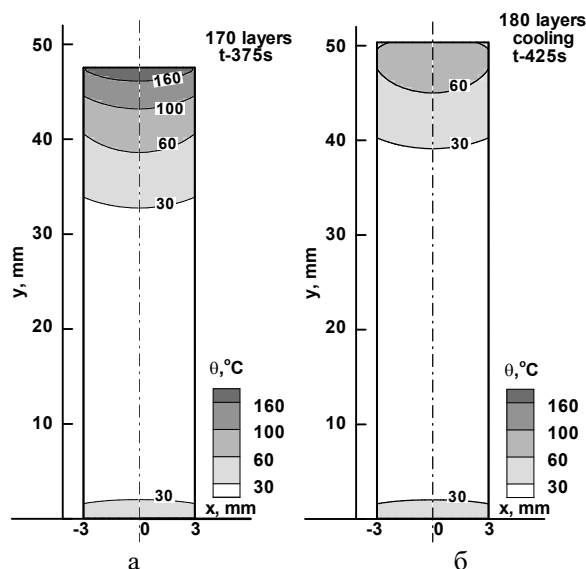


Рис. 4 Ізолінії розподілу температури θ в різні моменти нарощування

На рис. 5а показане змінювання за часом температури в точках 1, 2 і 3, показаних на рис. 3.

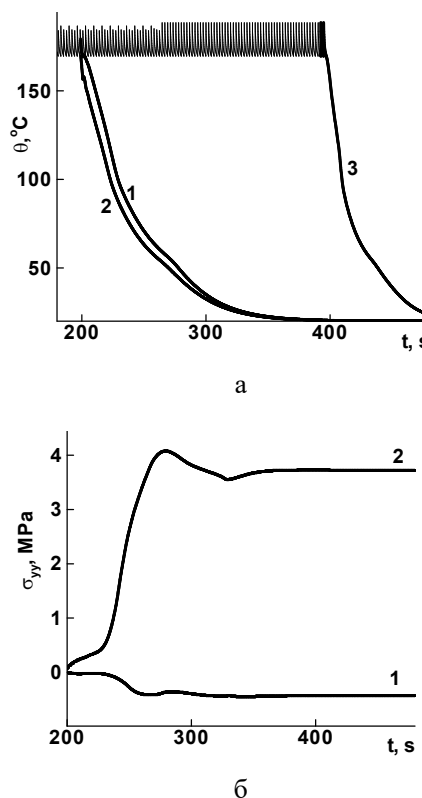


Рис. 5 Змінювання температури і напруження σ_{yy} за часом в точках 1 і 2

Точки 1 і 2 з'являються в момент нарощення 90-го шару. Точка 3 відповідає вищій точці еле-

менту у різні моменти часу. На рис. 5б наведені аналогічні криві для напруження σ_{yy} в точках 1 і 2

Видно, що залишковий розподіл напружень формується при зміні температури від 100°C до 50°C . Це пов'язане з температурною залежністю модуля Юнга (рис. 2). В цьому інтервалі температур відбувається підвищення жорсткості матеріалу.

Вивчимо вплив товщини нарощуваного шару матеріалу на залишкові напруження. Розглянемо три випадки.

(1) Нарощування шарами 0.14мм. Результати розрахунку наведені на рис 6 а, б. На рис 6а показано розподіл σ_{yy} на середині висоти перерізі $y = 25\text{мм}$.

(2) Нарощування шарами 0.28мм (рис 7).

(3) Нарощування шарами 0.42мм (рис 8).

На рис 6 б, 7 і 8 показано зміни σ_{yy} по висоті в масштабі шарів – в перерізі $x = 2.95\text{мм}$.

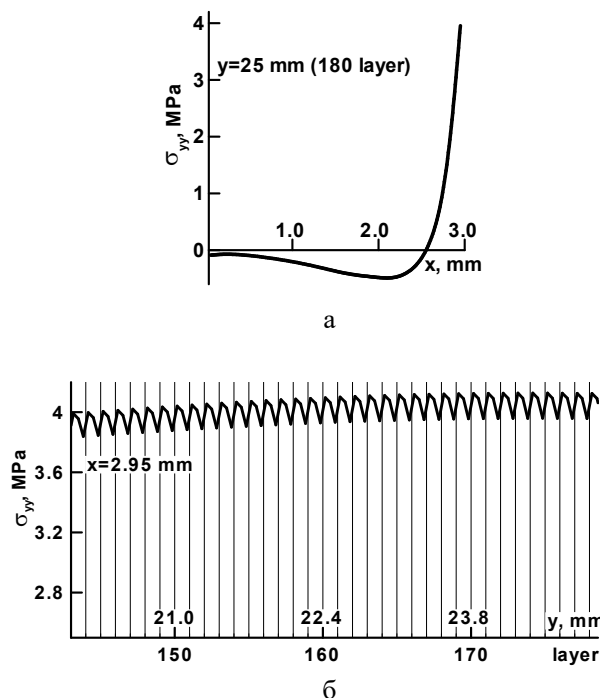


Рис. 6 Нарощування шарами 0.14мм

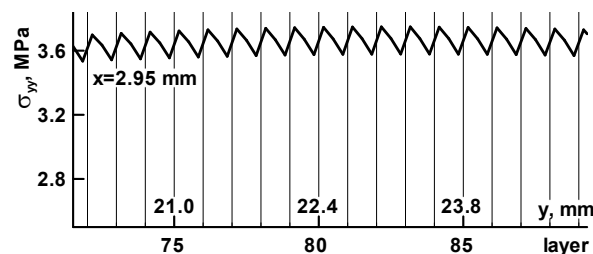


Рис.7 Нарощування шарами 0.28 мм

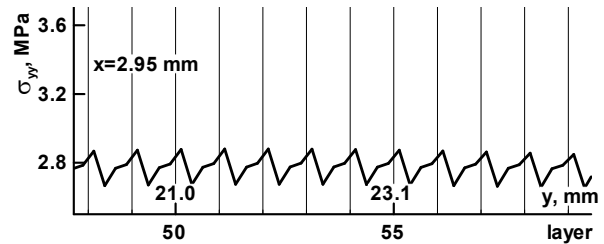


Рис.8. Нарощування шарами 0.42 мм

Видно, що рівень напружень σ_{yy} зменшується із збільшенням товщини шару нарощування. Чим менше товщина нарощування, тим більше середній рівень напруження, при цьому амплітуда коливань напружень в границях нарощеного шару збільшується (рис. 6 б, 7, 8).

Висновки

1. Розроблена модель багат шарового нарощування тіл методом 3D-друку, яка базується на теорії тіл, що ростуть.

2. Запропонована скінченно-елементна методика розрахунку термопружного стану друківаних тіл.

3. Для конкретного елемента проведено розрахунки поточного і залишкового термомеханічного стану.

4. Залишковий НДС тіла має двомасштабну структуру, яка відображає зміну характеристик в масштабі розмірів тіла, а також по товщині шарів, що нарощуються. При збільшенні товщини шарів, усереднені значення залишкових напружень зменшуються але при цьому збільшується амплітуда коливань напружень по товщині шару.

Список використаних джерел

1. Additive Manufacturing and 3D Printing State of the Industry Annual Worldwide Progress // Report, Wohler's Associates, Inc., 2016.
2. Масючок О.П. Адитивні технології полімерних матеріалів (Огляд) / О.П. Масючок, М.В. Юрженко, Р.В. Колісник, М.Х. Кораб // Автоматичне зварювання. – 2020. – №5. – С. 53-60.
3. Turner BN (2014) A review of melt extrusion additive manufacturing processes: I. Process design and modeling / BN. Turner, R. Strong, SA. Gold // Rapid Prototyping Journal. – V 20. – 2014. – No 3. – P. 192–204.
4. Wong K A Review of Additive Manufacturing, International Scholarly Research Network (ISRN) / K. Wong, A. Hernandez // Mechanical Engineering. – 2012. – <https://doi.org/10.5402/2012/208760>.
5. Арутюнян Н.Х. (1987) Механика растущих вязкоупругопластических тел / Н.Х. Арутюнян, А.Д. Дроздов, В.Е. Наумов // М. Наука, 1987. – 472 с.
6. Сенченков И.К. Термомеханическая модель растущих цилиндрических тел из физически нелинейных материалов // Прикл. механика. – 2005. – V.41, № 9. С. 118 – 126.
7. . Мотовиловец И.А. Термоупругость / И.А.Мотовиловец, В.И.Козлов // Механика связанных полей в элементах конструкций в 5-ти т., т.1. – Киев: Наук. думка, 1987. – 264 с.
8. Senchenkov I.K. Modelling thermomechanical process in growing viscoplastic bodies with accounting of microstructural transformations / I.K. Senchenkov, O.P. Chervinko, M.V. Banyas // Encyclopedia of Thermal stresses, F. Hetnarski (ed). – Springer Sci-Disness Media Pordrecht. – 2013. – V. 6. – P. 3147 – 3157.
9. Рябцев И.А. Теория и практика наплавочных работ / И.А. Рябцев, И.К. Сенченков. – К.: Екотехнологія, 2013. – 400 с.
10. Рябцев И.А. Наплавка. Материалы технологии, математическое моделирование / И.А. Рябцев, И.К.Сенченков, Э.В. Турык. – Гливице: Изд-во Силезского политехнического института 44 – 100, 2015 – 590 с.
11. Battezzatore D. Crystallization kinetics of poly(lactic acid)-talc composites / D. Battezzatore, S. Bocchini, A. Frache // eXPRESS Polymer Letters. – 2011. – V. 5, N. 10, – P. 849–858.

References

1. ANNUAL WORLDWIDE PROGRESS REPORT. (2016) *Additive Manufacturing and 3D Printing State of the Industry*. Wohler's Associates, Inc.
2. ANNUAL WORLDWIDE PROGRESS REPORT. (2016) *Additive Manufacturing and 3D Printing State of the Industry*. Wohler's Associates, Inc.
3. TURNER, BN, STRONG, R and GOLD, S.A. (2014) A review of melt extrusion additive manufacturing processes: I. Process design and modeling. *Rapid Prototyping Journal*, vol. 20, no 3, pp.192–204
4. WONG, K. and HERNANDEZ, A. (2012), A Review of Additive Manufacturing, International Scholarly Research Network (ISRN). *Mechanical Engineering*. Available from: <https://doi.org/10.5402/2012/208760>.
5. ARUTYUNYAN, N.KH., DROZDOV, A.D. and NAUMOV, V.E. (1987) *Mekhanika rastushhikh vyazkouprugoplasticheskikh tel*, M.: Nauka, 472 p.
6. SENCHENKOV, I.K. (2005), Termomekhanicheskaya model' rastushchikh czilindricheskikh tel iz fizicheskii nelinejny'kh materialov, *Prikl. Mekhanika*. 41(9), p. 118 – 126.
7. MOTOVILOVECZ, I.A. and KOZLOV, V.I. (1987), «Mekhanika svyazanny'kh polej v materialakh i elementakh konstrukcij v 5-ti t.; T.1. Termouprugost'», *Kiev Nauk. Dumka*, 264 p
8. SENCHENKOV, I.K., CHERVINKO, O.P. AND BANYAS, M.V. (2013) Modelling thermomechanical process in growing viscoplastic bodies with accounting of microstructural transformations. *Encyclopedia of Thermal stresses*, F. Hetnarski (ed). Springer Sci-Disness Media Pordrecht. 6, p. 3147-3157.
9. Ryabtsev I.A. Teoriya i praktika naplavochnykh rabot / I.A. Ryabtsev, I.K. Senchenkov. – K.: Ekotekhnologiya, 2013. – 400 s.
10. RYABTSEV, I.A., SENCHENKOV, I.K. and TURYSK, E.V. (2015) *Naplavka. materialy, tekhnologii, matematicheskoye modelirovaniye*. Glivits: Izd-vo Silezskogo politekhnicheskogo instituta. 44 -100, 590 p.
11. BATTEGAZZORE, D., BOCCHINI, S. and Frache A., (2011), «Crystallization kinetics of poly(lactic acid)-talc composites», *eXPRESS Polymer Letters*, vol.5, no.10, pp. 849–858.

Надійшла до редколегії 08.10.21

УДК 532.5

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/4.12>

Троценко Я. П.¹, д.філ. (мат. та стат.)
Курилко О. Б.², к.ф.-м.н.

Ya. P. Trotsenko¹, Ph.D. (Math. and Stat.)
O. B. Kurylko², Ph.D. (Phys.-Math.)

Течія рідини в циліндричному каналі з діафрагмами прямокутного профілю

The flow of a liquid in a cylindrical duct with diaphragms of a rectangular profile

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Акад.
Глушкова, 4-е,
e-mail: yaroslav.p.trotsenko@gmail.com

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e,
e-mail: yaroslav.p.trotsenko@gmail.com

² Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Акад.
Глушкова, 4-е,
e-mail: alexandr.kurylko@gmail.com

² Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e,
e-mail: alexandr.kurylko@gmail.com

Досліджено течію в'язкої нестисливої рідини у циліндричному каналі з двома послідовно розташованими діафрагмами прямокутного профілю на основі чисельного розв'язання нестационарних рівнянь Нав'є-Стокса. Показано, що при певних параметрах течія рідини в області між діафрагмами нестационарна і характеризується наявністю нестійкого зсувного шару, у якому утворюється послідовний ряд кільцевих вихорів, що викликають квазіперіодичні автоколивання поля швидкості в околі отвору другої діафрагми. У порівнянні з випадком округлого профілю діафрагм спостерігається збільшення максимальної швидкості струменя, що своєю чергою призводить до збільшення частоти автоколивань та зменшення значень чисел Рейнольдса, при яких збуджуються квазіперіодичні коливання.

Ключові слова: канал з діафрагмами, вихрові структури, автоколивання.

The flow of a viscous incompressible liquid in a cylindrical duct with two serial diaphragms of a rectangular profile is studied by the numerical solution of the unsteady Navier-Stokes equations. The discretization procedure is based on the finite volume method using the TVD scheme for the discretization of the convective terms and second order accurate in both space and time difference schemes. The resulting system of non-linear algebraic equations is solved by the PISO algorithm. It is shown that the fluid flow in the region between the diaphragms is non-stationary and is characterized by the presence of an unstable shear layer under the certain parameters. A series of ring vortices is formed in the shear layer that causes quasi-periodic self-sustained oscillations of the velocity field in the vicinity of the orifice of the second diaphragm. In comparison with the case of rounded diaphragms, an increase in the maximum jet velocity is observed, which in turn leads to an increase in the frequency of self-sustained oscillations and a decrease in the Reynolds numbers at which quasi-periodic oscillations are excited.

Key Words: duct with diaphragms, vortex structures, self-sustained oscillations.

Статтю представив член-кореспондент НАН України Жук Я.О.

1. Вступ

Течія рідини чи газу в нерегулярних каналах широко зустрічається як в природі, так і в технічних або наукових приладах: судини кровоносної системи, бронхіальні дерева, труби для транспортування технічних середовищ, вентиляційні системи, твердопаливні ракетні двигуни тощо. Через складну геометрію таких систем структура потоку може бути нестационарною, що при певних умовах

призводить до виникнення автоколивань середовища і, як наслідок, до появи тонального звуку. Дослідження проблеми генерації автоколивань у течіях має практичний інтерес у різноманітних галузях науки і техніки. З одного боку, детальне вивчення подібних процесів дозволяє застосовувати більш ефективні заходи для уникнення небажаних акустичних коливань [1]. З іншого боку, ретельний опис механізмів генерації шумів респіраторного тракту та кровоносних судин людини може стати основою

для створення нового покоління неінвазивних діагностичних засобів [2].

Детальні експериментальні дослідження явищ генерації звуку потоками у нерегулярних каналах почалися у другій половині XX століття. Було показано, що тональний звук збуджується завдяки утворенню у зсувних шарах струменів регулярних вихрових структур, які взаємодіють з твердими поверхнями [3]. Наприкінці XX століття набули поширення також і чисельні моделювання подібних систем. У випадку малих чисел Маха для цього переважно використовуються гібридні методи, згідно з якими загальна задача розділяється на гідродинамічну та акустичну частини, які розв'язуються окремо [4].

Метою даної роботи є дослідження течії рідини в напівнескінченному циліндричному каналі з двома послідовно розташованими діафрагмами прямокутного профілю при різних швидкостях потоку, а саме: моделювання відповідних процесів та чисельний розрахунок, аналіз структури потоку в області між діафрагмами і визначення характеристик автоколивальних процесів в залежності від швидкості потоку.

2. Постановка задачі

Розглядається течія рідини у напівнескінченному циліндричному каналі з двома послідовно розташованими діафрагмами прямокутного профілю (рис. 1). Вважається, що поверхні каналу та діафрагм нерухомі й абсолютно жорсткі. Течія розглядається при швидкостях значно менших за швидкість звуку в середовищі. Потік рідини з густиною ρ потрапляє в розрахункову область з рівномірною швидкістю V_1 через ліву межу ($x = 0$) та покидає її через праву ($x = L$).

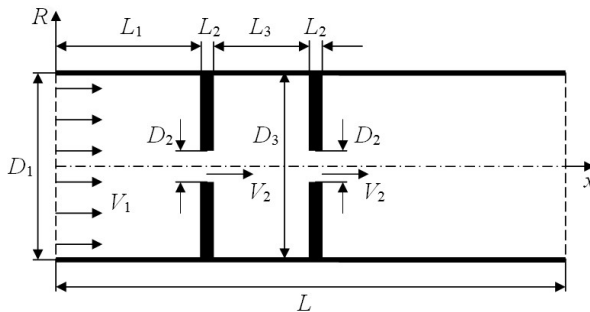


Рис. 1. Геометрія задачі

Значення геометричних параметрів для обчислень обираються такими: $D_2 = 6.35$ мм,

$D_1/D_2 = D_3/D_2 = 8.16$, $L_2/D_2 = 1$, $L_3/D_2 = 6$. Розмір області вгору за потоком від першої діафрагми – $L_1/D_2 = 12$, загальна довжина розрахункової області – $L/D_2 = 92$. Кінематична в'язкість середовища $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5}$ м²/с відповідає в'язкості повітря при температурі 20°C.

Відомо, що розміри джерел звуку, що породжується потоком, тобто розміри діафрагм та порожнини між ними, – малі в порівнянні з довжиною звукової хвилі [3]. Тому приймаються наступні гіпотези: потужність збуджених потоком акустичних коливань є значно меншою за потужність самого потоку, і породжений звук не впливає на його характер. У зв'язку з цим задача розв'язується в межах моделі в'язкої нестисливої рідини.

Також припускається, що рух рідини в області між діафрагмами є близьким до осесиметричного. В роботі [5] було показано, що незважаючи на локальні відмінності тривимірної та осесиметричної течій, їх інтегральні характеристики практично збігаються.

Основним параметром задачі є число Рейнольдса, яке можна визначити як $Re = V_2 D_2 / \nu$, де V_2 – швидкість потоку в отворах діафрагм, осереднена за поперечним перетином. Тоді масштаб довжини є діаметр отвору діафрагми D_2 , швидкості – швидкість V_2 , часу – величина D_2 / V_2 , а масштаб тиску – подвоєний швидкісний напір ρV_2^2 .

В межах прийнятої моделі процес описується системою нестационарних рівнянь Нав'є-Стокса, що в безрозмірних величинах у векторній формі мають вигляд

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{U} - \nabla p, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (2)$$

де p – скалярне поле тиску, $\mathbf{U}$ – векторне поле швидкості.

Крайові умови для швидкості: рівномірний потік на вході в розрахункову область, умова прилипання на твердих поверхнях та рівність нулю нормального градієнту на виході з розрахункової області:

$$\mathbf{U}|_{x=0} = (V_1, 0, 0), \quad \mathbf{U}|_{\Sigma} = \mathbf{0}, \quad \left. \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right|_{x=L} = \mathbf{0}. \quad (3)$$

Дослідження проводилися для значень вхідної швидкості $V_1 \in \{0.07, 0.1, 0.13\}$ м/с, що відповідає числам Рейнольдса $Re \in \{1973, 2819, 3664\}$.

Для тиску задається рівність нулю нормального градієнту на всій межі розрахункової області окрім виходу з неї, де обирається постійний тиск:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\Sigma} = 0, \quad p|_{x=L} = 0. \quad (4)$$

В початковий момент середовище знаходиться у стані спокою:

$$U(t=0) = 0, \quad p(t=0) = 0. \quad (5)$$

3. Чисельний алгоритм розв'язання задачі

Розв'язання поставленої задачі проводиться чисельно за методом скінченних об'ємів. Внаслідок припущення щодо осової симетрії потоку за розрахункову область обирається циліндричний сектор (клин) з кутом розкриття 4° та одним елементом в азимутальному напрямку. Для дискретизації області використовується ортогональна блочно-структурована сітка зі згущенням вузлів в отворах діафрагм та при наближенні до їх поверхонь. Кількість контрольних об'ємів вздовж поперечного перетину діафрагми – 59 з найменшим кроком біля поверхні – $2.5 \cdot 10^{-5}$ м, загальна кількість об'ємів – 225523.

Для розрахунку об'ємних інтегралів за контрольними об'ємами застосовується узагальнена процедура Гауса-Остроградського. Для інтерполяції конвективних членів використовується TVD форма центрально-різницевої схеми для векторного поля з обмежувачем потоку типу Sweby [6]. Нормальні градієнти швидкості на поверхні елементів обчислюються зі значень швидкості в центроїдах сусідніх комірок за схемою другого порядку. В якості схеми дискретизації похідної за часом обирається неявна триточкова несиметрична схема другого порядку з різницями назад.

Зв'язаний розрахунок поля швидкості й тиску проводиться за допомогою процедури PISO [7]. Для розв'язання отриманої системи лінеаризованих алгебраїчних рівнянь використовуються ітераційні розв'язники, що побудовані на основі методу спряжених та біспряжених градієнтів для симетричних та асиметричних матриць. В якості

передобумовлення обрано спрощені схеми неповної факторизації Холецкого та неповної LU-факторизації для симетричних і асиметричних матриць відповідно [8].

Задача розв'язується за допомогою бібліотек інструментарію з відкритим кодом OpenFOAM з використанням обчислювальних потужностей суперкомп'ютера СКІТ Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України. Для розпаралелювання обчислень використовується технологія MPI та метод декомпозиції області розв'язання [7]. Більш детально алгоритм чисельного розв'язання та обґрунтування вибору відповідних методів розглянуто у роботі [9].

З метою контролю точності обчислень поле швидкості чисельно інтегрується за поперечними перетинами отворів діафрагм S_1 ($x = L_1$) та S_2 ($x = L_1 + 2L_2 + L_3$). Це дозволяє контролювати точність виконання умови нестисливості середовища, яку можна подати у вигляді

$$\left| \frac{4 \int_{S_i} U_x ds - \pi D_1^2 V_1}{\pi D_1^2 V_1} \right| < \delta, \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

Для результатів, представлених у даній роботі, відносна похибка δ не перевищує $8 \cdot 10^{-3}$.

4. Аналіз результатів обчислень

В роботі [10] було показано, що течія рідини в циліндричному каналі з двома послідовно розташованими діафрагмами округлого профілю в діапазоні чисел Рейнольдса $Re \in [2687, 4228]$ є нестационарною. В області між діафрагмами встановлюється циркуляційний рух середовища, який переносить частину кінетичної енергії струменя з області отвору другої діафрагми вгору за потоком. Цей процес можна інтерпретувати як гідродинамічний канал зворотного зв'язку. На межі струменя та порожнини утворюється кільцевий зсувний шар, у якому виникає послідовний ряд кільцевих вихорів, що викликають автоколивання полів швидкості й тиску в околі отвору другої діафрагми. Ці коливання можуть бути джерелом звуку в каналі та дають змогу оцінити його частоту.

Розглянемо вплив зміни профілю діафрагм з округлого на прямокутний на структуру потоку в області між діафрагмами та характеристики автоколивань. На рис. 2 зображено поле завихреності ω в половині поздовжнього перетину каналу після закінчення перехідних

процесів при $Re \approx 1973$. Діапазон значень завихреності на всіх рисунках обмежено проміжком $\omega \in [-2 \cdot 10^3; 2 \cdot 10^3] \text{ c}^{-1}$ з метою більш чіткої передачі структури поля завихреності. З рис. 2 видно, що при даній швидкості потоку автоколивання в системі не виникають. Тобто після закінчення перехідних процесів зсувний шар стабілізується, а в глибині порожнини, утвореної діафрагмами, формується великий стійкий вихор. У випадку округлого профілю діафрагм зсувний шар утворювався внаслідок зриву ламінарного примежового шару з поверхні першої діафрагми у перетині з найменшим діаметром [10]. У даному випадку зсувний шар зривається з передньої кромки діафрагми. Внаслідок цього в отворі першої діафрагми формується примежовий шар протилежної завихреності.



Рис. 2. Поле завихреності при $Re \approx 1973$

При наближенні до другої діафрагми кільцевий зсувний шар дещо розширюється, внаслідок чого він розщеплюється передньою кромкою діафрагми на дві частини. Одна частина проходить далі у отвір діафрагми, а друга втягується у циркуляційний рух. Незважаючи на наявність гострого кута, збурення потоку в області другого звуження не виникають. Отже, в даному випадку енергії в каналі зворотного зв'язку виявляється не достатньо для збудження автоколивань.

На рис. 3 зображено поле завихреності ω після закінчення перехідних процесів при $Re \approx 2819$. В даному випадку при наближенні до другої діафрагми у зсувному шарі періодично утворюються кільцеві вихори. Ці вихори набігають на поверхню другої діафрагми та спричиняють в околі її отвору квазіперіодичні коливання полів швидкості й тиску. Подібно до попереднього випадку, передня кромка діафрагми розрізає вихори на дві частини, одна з яких проходить далі у отвір діафрагми, а друга втягується у циркуляційний рух. У порівнянні з випадком округлих діафрагм потік енергії у

циркуляційний рух є менш регулярним внаслідок наявності гострого кута.

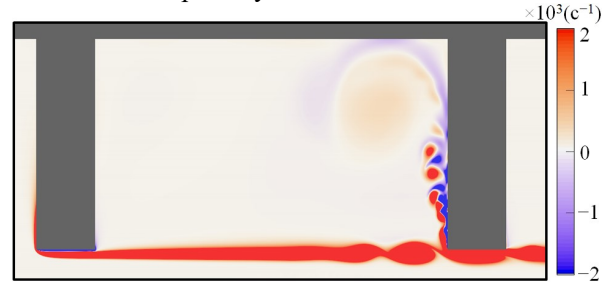


Рис. 3. Поле завихреності при $Re \approx 2819$

На рис. 4 зображено лінії течії в половині поздовжнього перетину каналу при $Re \approx 2819$. З рис. добре видно, як частина струменя з околу отвору другої діафрагми потрапляє у циркуляційний рух, який переносить її вгору за потоком до першої діафрагми. У такий спосіб збурення, що утворюються при зіткненні кільцевих вихорів у зсувному шарі з другою діафрагмою, взаємодіють зі струменем від його початку вздовж всієї відстані між діафрагмами. При взаємодії великого вихора в глибині порожнини з примежовим шаром поверхні каналу утворюються області рідини протилежної завихреності, які вливаються у другорядний великий вихор, що формується біля першої діафрагми.

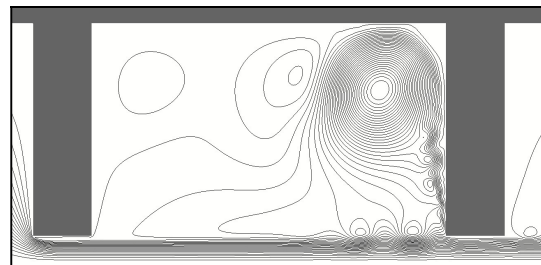


Рис. 4. Лінії течії при $Re \approx 2819$

На рис. 5 зображено поле поздовжньої швидкості U_x в половині поздовжнього перетину каналу при $Re \approx 2819$. Отже, після закінчення перехідних процесів в області між діафрагмами формується швидкісний ламінарний струмінь, який зносить кільцеві вихори, що формуються у зсувному шарі, до другої діафрагми. Внизу за потоком від першої діафрагми швидкість струменя рівномірно розподілена навколо осі каналу в області радіусу близько $3D_2/8$, а потім різко спадає.

Оскільки зсувний шар зривається з передньої кромки першої діафрагми, то в отворі діафрагми

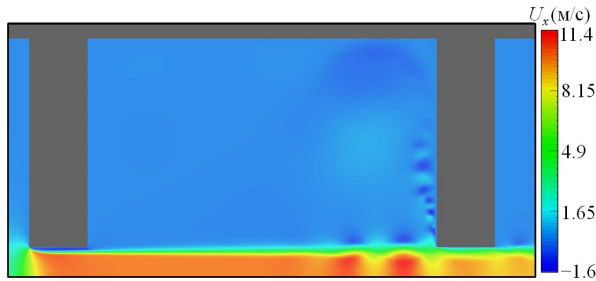


Рис. 5. Поле швидкості U_x при $Re \approx 2819$

утворюється область, в якій рідина рухається проти течії. Це призводить до збільшення максимальної швидкості струменя у порівнянні з випадком округлої форми діафрагм при незмінних числах Рейнольдса. Внаслідок цього також збільшується швидкість перенесення кільцевих вихорів у зсувному шарі, і відповідно зростає частота автоколивань.

На рис. 6 зображено амплітудно-частотний спектр коливань в точці M ($x = L_1 + 2L_2 + L_3$, $R = 0.45D_1$) перетину отвору другої діафрагми S_2 при $Re \approx 2819$. З рис. видно, що в системі дійсно встановились квазіперіодичні коливання з вираженою основною частотою $f \approx 889$ Гц, амплітуда якої значно переважає амплітуди інших гармонічних складових спектру. Відношення частот автоколивань у випадку прямокутного та округлого профілю діафрагм становить $f_r/f_c \approx 1.6$.

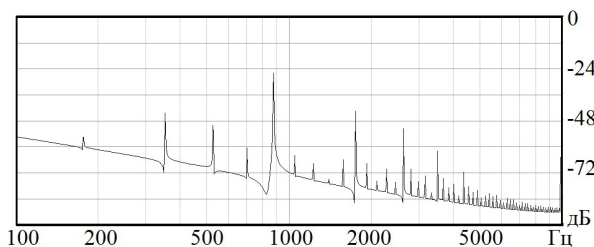


Рис. 6. Амплітудно-частотний спектр коливань поздовжньої швидкості U_x при $Re \approx 2819$

На рис. 7 зображено поле завихреності ω при $Re \approx 3664$. У даному випадку течія в області між діафрагмами значно ускладнюється. Великий вихор біля другої діафрагми не утворюється, внаслідок чого втрачається регулярність циркуляційного руху. Зберігається утворення кільцевих вихорів у зсувному шарі, проте цей процес вже не є періодичним. Частота утворення вихорів та швидкість їх переміщення змінюється внаслідок взаємодії з циркуляційним рухом біля другої діафрагми. При взаємодії циркуляційного руху з поверхнею другої діафрагми утворюються

вихори протилежних знаків завихреності, які рухаються проти потоку та вглибину порожнини. Отже, при даній швидкості потоку циркуляційний рух в порожнині між діафрагмами, який переносить частину енергії струменя вгору за потоком, не утворюється. У випадку округлих діафрагм при даній швидкості потоку зберігалось квазіперіодичне утворення вихорів у зсувному шарі, оскільки максимальна швидкість струменя була меншою [10].

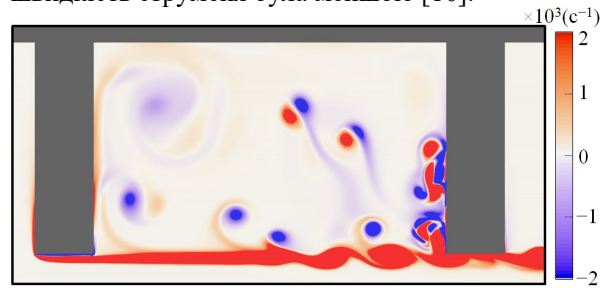


Рис. 7. Поле завихреності при $Re \approx 3664$

На рис. 8 зображено амплітудно-частотний спектр коливань в точці M при $Re \approx 3664$. В даному випадку автоколивання в системі стають багаточастотними, і відповідно структура спектру набуває вигляду характерного для шуму. Отже, при течії рідини в каналі з діафрагмами прямокутного профілю автоколивання втрачають періодичність при менших числах Рейнольдса, ніж у випадку округлого профілю діафрагм.

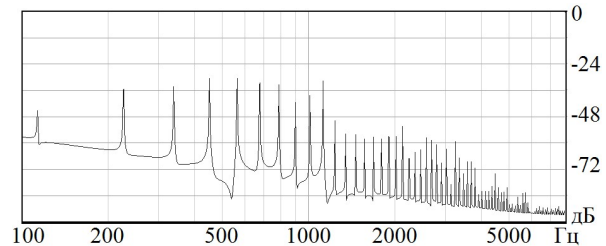


Рис. 8. Амплітудно-частотний спектр коливань поздовжньої швидкості U_x при $Re \approx 3664$

5. Висновки

Проведено чисельне моделювання течії в'язкої нестисливої рідини в циліндричному каналі з двома послідовно розташованими діафрагмами прямокутного профілю. Проведено аналіз особливостей руху середовища в області між діафрагмами та характеристик автоколивань залежно від швидкості течії.

Показано, що при певних параметрах у зсувному шарі утворюється послідовний ряд вихорів, що спричиняють квазіперіодичні коливання поля поздовжньої швидкості в околі

отвору другої діафрагми. Встановлено, що форма діафрагми суттєво не впливає на структуру потоку, проте змінює кількісні характеристики автоколивань. У порівнянні з випадком округлого профілю діафрагм спостерігається

збільшення максимальної швидкості струменя. Це призводить до збільшення частоти автоколивань та зменшення значень числа Рейнольдса, при яких збуджуються квазіперіодичні автоколивання.

Список використаних джерел

1. Ziada S. Flow-excited acoustic resonance excitation mechanism, design guidelines and counter measures / S. Ziada, P. Lafon // *Appl. Mech. Rev.* – 2014. – **66** (1). – P. 010802.
2. Вовк И.В. Акустика дыхания и сердечной деятельности / И.В. Вовк, В.Т. Гринченко, А.П. Макаренков // *Акуст. вісн.* – 2011. – **14**, №1. – С. 3–19.
3. Wilson T.A. Experiments on the fluid mechanics of whistling / T.A. Wilson, G.S. Beavers, M.A. DeCoster, D.K. Holger, M.D. Regenfuss // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1971. – **50** (1B). – P. 366–372.
4. Вовк И.В. Звуковое поле, генерируемое потоком в канале со стенозами / И.В. Вовк, В.С. Малюга // *Прикл. гідромех.* – 2012. – **14**, № 1. – С. 23–48.
5. Trotsenko Ya. Numerical simulation of the 3-D flow in a cylindrical duct with two diaphragms at low Mach numbers / Ya. Trotsenko, I. Vovk // *J. Theor. Appl. Mech. (Bulgaria)*. – 2020. – **50** (2). – P. 190–201.
6. Sweby P.K. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws / P.K. Sweby // *J. Numer. Anal.* – 1984. – **21** (5) – P. 995–1011.
7. Ferziger J.H. Computational methods for fluid dynamics / J.H. Ferziger, M. Peric. – Berlin: Springer, 2002. – 424 p.
8. Barrett R. Templates for the solution of linear systems: Building blocks for iterative methods, 2nd Edition / R. Barrett, M. Berry, T.F. Chan, J. Demmel, J.M. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine, H. Van der Vorst. – Philadelphia: SIAM, 1994. – 107 p.
9. Малюга В.С. Численное исследование течения в канале с двумя последовательно расположенными стенозами. Алгоритм решения / В.С. Малюга // *Прикл. гідромех.* – 2010. – **12**, № 4. – С. 45–62.
10. Vovk I. V. Excitation of self-sustained oscillations by a flow of liquid in a cylindrical duct with two diaphragms/ I. V. Vovk, V. T. Matsypura, Ya. P. Trotsenko // *J. Math.Sci.* – 2020. – **247** (2). – P. 258–275.

References

1. ZIADA, S. and LAFON, P. (2014) Flow-excited acoustic resonance excitation mechanism, design guidelines and counter measures. *Appl. Mech. Rev.*, 66 (1), p. 010802.
2. VOVK, I.V., GRINCHENKO, V.T. and MAKARENKOV, A.P. (2011) Akustika dyihaniya I serdechnoj deyatelnosti. *Akust. visn.*, 14 (1), p. 3–19.
3. WILSON, T.A., BEAVERS, G.S., DECOSTER, M.A., HOLGER, D.K. and REGENFUSS, M.D. (1971). Experiments on the fluid mechanics of whistling. *J. Acoust. Soc. Am.*, 50 (1B), p. 366–372.
4. VOVK, I.V. & MALYUGA, V.S. (2012). Zvukovoye pole, generiruyemoye potokom v kanale so stenoziyami. *Prykl. Hidromekh.*, 11 (4), p. 17–30.
5. TROTSSENKO, YA. and VOVK, I. (2020) Numerical simulation of the 3-D flow in a cylindrical duct with two diaphragms at low Mach numbers. *J. Theor. Appl. Mech. (Bulgaria)*, 50 (2), p. 190–201.
6. SWEBY, P.K. (1984). High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *J. Numer. Anal.*, 21 (5), p.995–1011.
7. FERZIGER, J.H. and PERIC, M. (2002). *Computational methods for fluid dynamics*. Berlin: Springer.
8. BARRETT, R., BERRY, M., CHAN, T.F., DEMMEL, J., DONATO, J.M., DONGARRA, J., EIJKHOUT, V., POZO, R., ROMINE, C. and VAN DER VORST, H. (1994). *Templates for the solution of linear systems: Building blocks for iterative methods*, 2nd Ed. Philadelphia: SIAM.
9. MALYUGA, V.S. (2010). Chislennoye issledovaniye techeniya v kanale s dvumya posledovatel'no raspolzozhennymi stenoziyami. Algoritm resheniya. *Prikl. Hidromekh.*, 12 (4), p. 45–62.
10. VOVK, I.V., MATSYUPURA, V.T. and TROTSSENKO, Ya.P. (2020) Excitation of self-sustained oscillations by a flow of liquid in a cylindrical duct with two diaphragms. *J. Math. Sci.*, 247 (2), p. 258–275.

Надійшла до редколегії 16.08.21

УДК 539.3

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/4.13>

Улітко І. А.¹, к. ф.-м. н., доцент
Курилко О. Б.¹, к. ф.-м. н., асистент
Затхей М. Б.¹, студентка

I. A. Ulitko¹, Ph.D., Assoc.Prof.,
O. B. Kurylko¹, Ph.D. Asistant.Prof.,
M. B. Zathei¹, Student

Визначення параметрів первинної моди твердотільного гіроскопу камертонного типу

Determination of parameters of the primary mode of the tuning fork type solid-state gyroscope

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680,
м. Київ, просп. Глушкова, 4 е,
e-mail: ulitko@univ.kiev.ua

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova Ave., 4 e,
e-mail: ulitko@univ.kiev.ua

Розв'язок задачі про визначення первинної моди коливань п'єзореzonансного камертонного сенсора кутової швидкості обертання побудовано у випадку, коли довжина стержнів камертона набагато перевищує радіус кривизни його основи. Встановлені умови пружного опирання сенсорних елементів та асимптотична форма резонансного визначника можуть бути корисними під час аналізу повної математичної моделі гіроскопа, визначення його резонансних властивостей та параметрів гіроскопічного ефекту.

Ключові слова: вібраційний гіроскоп, камертонний п'єзоперетворювач, резонансні коливання.

The use of a tuning fork resonator as sensitive element of a gyroscopic sensor has some advantages in comparison with other types of the resonators. For instance, it allows to compensate lateral accelerations in the direction perpendicular to the axis of rotation. At the same time, the task of accurate determination of the carrying frequency of the primary mode of a non-moving tuning fork is of great importance. Thus, in [1] the analysis of vibrations of a gyroscope is built on the evaluation of the first frequency of flexure vibrations of Timoshenko's beam with one rigidly fixed end [2]. As a result, the sensing frequencies of the Bryan's splitting pair [3] of the fork lie below the frequency of Timoshenko's beam, and the resonant frequency of the non-moving tuning fork remained uncertain. The purpose of a present paper is to establish this frequency.

In the statement of a problem, concerning real geometric dimensions of the tuning fork elements, we assume that the length of the tuning fork rods l is much more then the radius of the base r : $r/l \ll 1$. Then, frequencies of the flexure vibrations of the half-ring lie much higher than the frequencies of the bending vibrations of the rods. It allows us to give a solution for the base in a quasi-static approximation, and to take into account the dynamics of the tuning fork in the solution for bimorph piezoceramic rods. Conditions of coupling between the rods and the half-ring are reduced to the conditions of elastic fixing of the rods, which take into account the geometric parameters r and l .

Key Words: solid state vibratory gyroscope, tuning fork piezotransducer, resonance vibrations.

Статтю представив член-кореспондент НАН України Жук Я. О.

1. Вступ

Використання камертонного резонатора [6] у якості чутливого елемента гіроскопічного сенсора має певні переваги у порівнянні з іншими типами резонаторів, оскільки дозволяє компенсувати бічні прискорення, перпендикулярні до вісі обертання [7]. На практиці застосовуються як високодобротні п'єзокварцеві резонатори, так і низькодобротні резонатори з п'єзокераміки, танталату або ніобату літію. При цьому завдання точного визначення параметрів первинної моди не-

рухомого камертонного сенсора має принципово важливе значення, оскільки цей тип перетворювачів вирізняється суттєвою залежністю амплітудних і частотних характеристик від геометрії резонатора, електрофізичних й механічних констант п'єзоматеріалу, умов кріплення основи камертона до рухомого об'єкту. При не повному врахуванні цих чинників, що пов'язане з необгрунтованими спрощеннями складеної математичної моделі неможливо встановити достовірні параметри вторинної (сенсорної) моди гіроскопа.

2. Математична модель вібраційного гіроскопа камертонного типу

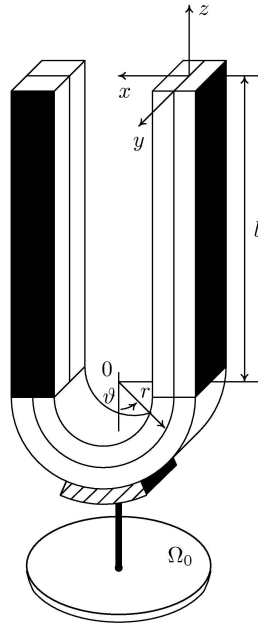


Рис. 1 Геометрія камертонного резонатора

При розробці математичної моделі гіроскопа (рис. 1) він розглядається як коливальна система, що складається з двох тонких біморфних п'єзокерамічних стержнів та електромеханічно неактивного напівкільця з ідентичними до стержнів пружними характеристиками. Збуджуваний біморфний стержень (праворуч на рис.1) має товщину поляризацію у напрямку вісі Ox й електродні покриття на бічних гранях, перпендикулярних до вісі Ox . Вимірювальний біморфний стержень (ліворуч на рис.1) має поляризацією в напрямку вісі Oy й електродні покриття на бічних гранях, перпендикулярних до вісі Oy . В серединній площині обох біморфів містяться електрично не навантажувані роздільні електроди (рис. 2). Оскільки знаки поляризації матеріалу в стержнях є протилежними відносно роздільних електродів, то в однорідному електричному полі виникає сумарна деформація згину, викликана розтягом і стиском рівних половин стержня.

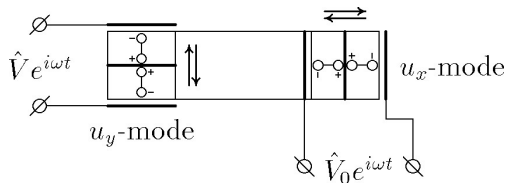


Рис. 2 Поляризація п'єзоелементів

Пружне напівкільце жорстко з'єднується з досліджуваним об'єктом, який обертається з

постійною кутовою швидкістю Ω_0 . Вважаємо, що біморфні п'єзостержні й напівкільце мають один і той же квадратний поперечний переріз зі стороною h , довжина стержнів – l , радіус серединної лінії напівкільця – r .

Визначення механічних характеристик, що відносяться до первинної та вторинної мод функціонування гіроскопічного сенсора, є таким.

Первинна мода. Для нерухомого камертона деформавання обох біморфних п'єзостержнів та пружного напівкільця характеризується лише згином у площині Oxz та у площині $Or\vartheta$, відповідно. Номенклатура невідомих функцій включає: $u_x(z, t)$ – прогин стержня у напрямку вісі Ox , $u(\vartheta, t)$ – прогин напівкільця у площині камертона Oxz , M_x, M_ϑ – моменти згину, відповідно, стержня і напівкільця, Q_x, Q_ϑ – перерізуючі сили.

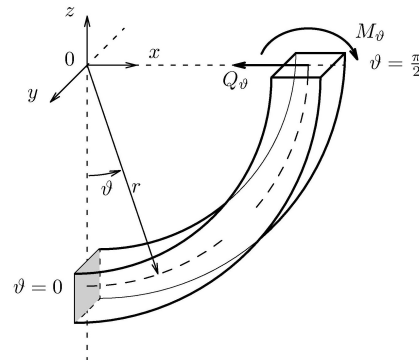


Рис. 3 Деформація згину напівкільця у площині кривизни

Вторинна мода. Під час обертання навколо вісі Oz сили інерції Коріоліса у напрямку вісі Oy викликають згинну деформацію елементів камертона у площині Oyz . В свою чергу, згинна деформація у взаємно перпендикулярних напрямках Ox та Oy породжує деформацію кручення і біморфних стержнів і напівкільця. До номенклатури невідомих функцій додаються: $u_y(z, t)$ – прогин стержня у напрямку вісі Oy ; $v(\vartheta, t)$ – прогин напівкільця у площині Oyz ; φ, β – кути закручування, відповідно, поперечних перерізів стержня та напівкільця; M_y, Q_y – момент згину та перерізуюча сила стержня у напрямку вісі Oy ; M_φ, H – моменти кручення стержня та напівкільця; M_1, N_2 – згинаючий момент та перерізуюча сила напівкільця у напрямку вісі Oy . Явні вирази для перелічених сил та моментів через прогини наведено у роботі [1].

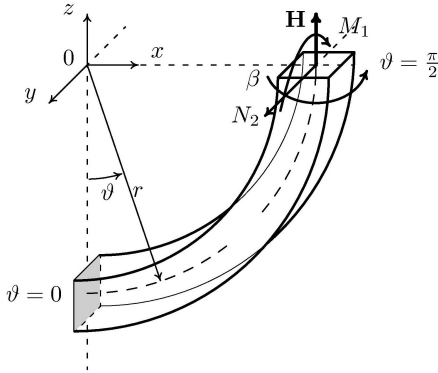


Рис 4. Деформація згину з крученням напівкільця з площини його кривизни

При побудові математичної моделі камертонного гіроскопа система зв'язаних за Коріолісом рівнянь коливань біморфних стержнів формулюється відносно прогинів u_x та u_y

$$\frac{\partial^4 u_x}{\partial z^4} + \frac{\rho h}{EJ} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \Omega_0^2 u_x + 2\Omega_0 \frac{\partial u_y}{\partial t} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^4 u_y}{\partial z^4} + \frac{\rho h}{EJ} \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - \Omega_0^2 u_y - 2\Omega_0 \frac{\partial u_x}{\partial t} \right) = 0, \quad (1)$$

де ρ – густина, $EJ = (1 - \bar{\nu}^2) \bar{D}$ – згинна жорсткість. Електропружні константи п'єзоматеріалу $\bar{D}$ та $\bar{\nu}$ визначаються за формулами [4]

$$\bar{D} = \frac{h^4}{12s_{11}^E(1 - \bar{\nu}^2)} \left(1 + \frac{1 + \bar{\nu}}{8} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \right),$$

$$\bar{\nu} = \frac{\bar{\nu} + \frac{1 + \bar{\nu}}{8} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2}}{1 + \frac{1 + \bar{\nu}}{8} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2}}, \quad k_p^2 = \frac{2}{1 - \bar{\nu}} \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^T}, \quad (2)$$

де s_{11}^E, s_{12}^E – пружні податливості, $\bar{\nu} = -s_{12}^E / s_{11}^E$ – коефіцієнт Пуассона, k_p^2 – квадрат планарного КЕМЗ, d_{31} – п'єзомодуль.

Рівняння згинних коливань напівкільця на первинній моді, у площині його кривизни $Or\vartheta$, записується у вигляді [6]

$$\frac{\partial^4 u}{\partial \vartheta^4} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} + u + \frac{\rho h^2 r^4}{EJ} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

а на деформаціях згину з крученням з площини кривизни для прогину $v(\vartheta, t)$ на вторинній моді в роботі [1] встановлене рівняння

$$\frac{\partial^6 v}{\partial \vartheta^6} + 2 \frac{\partial^4 v}{\partial \vartheta^4} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \vartheta^2} - \rho h^2 r^4 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{EJ} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{v}{kEJ} \right) = 0, \quad (4)$$

де $k \approx 0,65$ для $\bar{\nu} = 0,33$. Нарешті, крутильні коливання стержнів камертона визначаються з рівняння $\partial^2 \varphi / \partial z^2 = c^{-2} \partial^2 \varphi / \partial t^2$, $c = (\rho s_{11}^E)^{-1/2}$.

Повний аналіз математичної моделі резонатора камертонного гіроскопа приводить до такої системи з двадцяти граничних співвідношень.

Умови спряження на нижньому кінці стержня $z = 0$, відповідно, у верхньому перерізі напівкільця $\vartheta = \pi/2$, налічують десять рівностей:

• первинна мода

$$u|_{\vartheta=\pi/2} = u_x|_{z=0}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta=\pi/2} = \frac{\partial u_x}{\partial z} \Big|_{z=0},$$

$$M_\vartheta|_{\vartheta=\pi/2} = M_x|_{z=0}, \quad Q_\vartheta|_{\vartheta=\pi/2} = Q_x|_{z=0}, \quad (5)$$

• вторинна мода

$$v|_{\vartheta=\pi/2} = u_y|_{z=0}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta=\pi/2} = \frac{\partial u_y}{\partial z} \Big|_{z=0},$$

$$M_1|_{\vartheta=\pi/2} = M_y|_{z=0}, \quad N_2|_{\vartheta=\pi/2} = Q_y|_{z=0},$$

$$H|_{\vartheta=\pi/2} = M_\varphi|_{z=0}, \quad \beta|_{\vartheta=\pi/2} = \varphi|_{z=0}. \quad (6)$$

Граничні умови на верхньому кінці збуджуваного стержня $z = l$ налічують п'ять рівностей: на первинній моді тут задається момент M_x , що враховує збуджуючу гармонічну різницю електричних потенціалів V_0 , решта моментів та перерізуючих сил дорівнюють нулю

$$M_x|_{z=l} = \frac{1}{2} M_0 \exp(i\omega t), \quad M_0 = 3EJ \frac{1 - \bar{\nu}}{1 - \bar{\nu}} \left(d_{31} \frac{V_0}{h} \right),$$

$$Q_x|_{z=l} = 0, \quad (7)$$

$$M_y|_{z=l} = 0, \quad Q_y|_{z=l} = 0, \quad M_\varphi|_{z=l} = 0.$$

Умови кріплення основи камертона на утримувачі налічують п'ять рівностей у кореневому перерізі $\vartheta = 0$

$$u|_{\vartheta=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta=0} = 0, \quad (8)$$

$$v|_{\vartheta=0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta=0} = 0, \quad \beta|_{\vartheta=0} = 0.$$

і відповідають випадку жорсткого закріплення стосовно характеристик деформації згину.

При виконанні усіх записаних вище умов задача виявляється надзвичайно складною. Щоб з'ясувати шлях до редукції повної математичної моделі камертонного гіроскопа, застосуємо гіпотезу квазістатичного наближення.

На практиці камертонні резонатори для сенсорних застосувань виготовлені так, що довжина стержнів камертона є набагато більшою за ширину розрізу між стержнями, також довжина стержнів є набагато більшою за характерний розмір основи. Тому ми обмежимося випадком, коли радіус напівкільця набагато менший за довжину стержнів камертона:

$$\frac{r}{l} \ll 1. \quad (9)$$

При цьому відбувається суттєва перебудова резонансних властивостей складеної коливальної системи, а саме:

- значне підвищення нижчих резонансних частот коливань напівкільця згинно-крутильного типу у порівнянні з резонансними частотами згинних коливань стержнів камертона,
- суттєве зменшення відносних амплітуд прогинів напівкільця.

Тоді можна знехтувати зв'язаністю рівнянь для прогинів напівкільця і стержнів камертона, а в рівняннях (3), (4) можна взагалі знехтувати силами інерції. Інакше кажучи, розв'язок для напівкільця слід шукати у квазістатичному наближенні, що дає змогу спростити виконання умов спряження напівкільця зі стержнями камертона.

3. Визначення основної частоти згинних коливань нерухомого камертона

Для визначення резонансної частоти симетричних згинних коливань нерухомого камертона відбираємо величини, що відповідають первинній моді: прогин стержнів у площині камертона $u_x(z, t)$ та прогин напівкільця у площині його кривизни $\hat{u}(\vartheta)$. В першому рівнянні (1) слід покласти $\Omega_0 = 0$, а в рівнянні (3) $\partial^2 u / \partial t^2 \equiv 0$. Статичний загальний розв'язок для напівкільця запишемо у вигляді

$$\hat{u}(\vartheta) = A \sin \vartheta + B \cos \vartheta + C \vartheta \sin \vartheta + D \vartheta \cos \vartheta, \quad (10)$$

а загальний розв'язок для прогину стержня в динаміці: $u_x(z, t) = \hat{u}_x(z) \exp(i\omega t)$ у вигляді

$$\hat{u}_x(z) = a \sin(\lambda z) + b \cos(\lambda z) + c \operatorname{sh}(\lambda z) + d \operatorname{ch}(\lambda z), \quad (11)$$

де a, b, c, d та A, B, C, D – довільні сталі.

Виконуючи умови кріплення у кореневому перерізі (8) над розв'язком (10) при $\vartheta = 0$ маємо

спрощення: $A = 0, B = 0$. Тоді вирази для прогину напівкільця, кута нахилу перерізу, моменту та перерізуючої сили набувають вигляду

$$\begin{aligned} \hat{u}(\vartheta) &= C \vartheta \sin \vartheta - D(\sin \vartheta - \vartheta \cos \vartheta), \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial \vartheta} &= C(\sin \vartheta + \vartheta \cos \vartheta) - D \vartheta \sin \vartheta, \\ \hat{M}_\vartheta &= -EJ \frac{2}{r^2} (C \cos \vartheta - D \sin \vartheta), \\ \hat{Q}_\vartheta &= EJ \frac{2}{r^3} (C \sin \vartheta + D \cos \vartheta). \end{aligned} \quad (12)$$

Сталі напівкільця C і D та сталі a, b, c, d стержнів продовжимо визначати з умов спряження на первинній моді (5). Переформулюємо ці умови так, щоб отримати залежності для функцій, що описують коливання стержнів, і так, щоб розв'язки для напівкільця виключити з розгляду. Це означає, що слід шукати сталі інтегрування C, D напівкільця, вважаючи праві частини в рівняннях (5) відомими величинами. В результаті отримуємо

$$\begin{aligned} \hat{u}|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} &: \quad \frac{\pi}{2} C - D = \hat{u}_x|_{z=0}, \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial \vartheta}|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} &: \quad C - \frac{\pi}{2} D = r \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial z}|_{z=0}, \\ \hat{M}_\vartheta|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} &: \quad EJ \frac{2}{r^2} D = \hat{M}_x|_{z=0}, \\ \hat{Q}_\vartheta|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} &: \quad EJ \frac{2}{r^3} C = \hat{Q}_x|_{z=0}, \end{aligned} \quad (13)$$

звідки

$$C = \frac{r^3}{2EJ} \hat{Q}_x|_{z=0}, \quad D = \frac{r^2}{2EJ} \hat{M}_x|_{z=0}. \quad (14)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \hat{u}_x|_{z=0} &= \frac{\pi}{2} \frac{r^3}{2EJ} \hat{Q}_x|_{z=0} - \frac{r^2}{2EJ} \hat{M}_x|_{z=0}, \\ r \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial z}|_{z=0} &= \frac{r^3}{2EJ} \hat{Q}_x|_{z=0} - \frac{\pi}{2} \frac{r^2}{2EJ} \hat{M}_x|_{z=0}, \end{aligned} \quad (15)$$

Ці граничні рівності при $r \rightarrow 0$ перетворюються на умови жорсткого закріплення стержня на нижньому кінці: $\hat{u}_x|_{z=0} \rightarrow 0, (\partial \hat{u}_x / \partial z)|_{z=0} \rightarrow 0$. За цією ознакою визначимо умови (16) як умови пружного закріплення біморфних стержнів камертона на напівкільці.

Підставляючи в граничні умови первинної моди (7) та в умови пружного закріплення (15) за-

гальний розв'язок для $\hat{u}_x(z)$ (11) і враховуючи вирази для моменту [4] та перерізуючої сили

$$\begin{aligned}\hat{M}_x &= -EJ \frac{d^2 \hat{u}_x}{dz^2} + \frac{h^4}{4s_{11}^E} \frac{1-\bar{\nu}}{1-\nu} \left(d_{31} \frac{V_0}{h} \right), \\ \hat{Q}_x &= \frac{d\hat{M}_x}{dz} = -EJ \frac{d^3 \hat{u}_x}{dz^3},\end{aligned}\quad (16)$$

отримуємо систему чотирьох алгебраїчних рівнянь відносно констант a, b, c, d

$$\begin{pmatrix} -\frac{\pi}{4}(\lambda r)^3 & 1+\frac{1}{2}(\lambda r)^2 & \frac{\pi}{4}(\lambda r)^3 & 1-\frac{1}{2}(\lambda r)^2 \\ 1+\frac{1}{2}(\lambda r)^2 & \frac{\pi}{4}(\lambda r) & 1+\frac{1}{2}(\lambda r)^2 & -\frac{\pi}{4}(\lambda r) \\ \sin(\lambda l) & \cos(\lambda l) & -\text{sh}(\lambda l) & -\text{ch}(\lambda l) \\ -\cos(\lambda l) & \sin(\lambda l) & \text{ch}(\lambda l) & \text{sh}(\lambda l) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\lambda^2} \frac{M_0}{2EJ} \\ 0 \end{pmatrix}\quad (17)$$

У перші два рівняння системи (17) входять величини, пов'язані з радіусом напівкільця r , а в другі два рівняння – величини, пов'язані з довжиною стержня l , тому слід ввести заміну

$$\lambda r = (\lambda l) \left(\frac{r}{l} \right) = \xi \left(\frac{r}{l} \right) \quad (18)$$

Оцінимо величини коефіцієнтів системи (17) для типового відношення r/l , наприклад, $r/l = 0.1$:

$$\mathbf{A}(\xi) = \begin{pmatrix} -0.0008\xi^3 & 1+0.005\xi^2 & 0.0008\xi^3 & 1-0.005\xi^2 \\ 1-0.005\xi^2 & 0.0785\xi & 1+0.005\xi^2 & -\frac{\pi}{4}0.0785\xi \\ \sin\xi & \cos\xi & -\text{sh}\xi & -\text{ch}\xi \\ -\cos\xi & \sin\xi & \text{ch}\xi & \text{sh}\xi \end{pmatrix}$$

Видно, що коефіцієнти при ξ^3 та ξ^2 є малими третього й четвертого порядку і ними можна знехтувати в (17). На цій підставі виконаємо асимптотичний аналіз резонансного визначника камертона. Маємо: $b \approx -d$, $c \approx 1/2 \pi(\lambda l)(r/l)d - a$ та

$$\begin{aligned}& [\text{sh}(\lambda l) + \sin(\lambda l)]a - \\ & - \left[\cos(\lambda l) + \text{ch}(\lambda l) + \frac{\pi}{2}(\lambda l) \left(\frac{r}{l} \right) \text{sh}(\lambda l) \right] d = \frac{1}{\lambda^2} \frac{M_0}{2EJ}, \\ & [\text{ch}(\lambda l) + \cos(\lambda l)]a + \\ & + \left[\sin(\lambda l) - \text{sh}(\lambda l) - \frac{\pi}{2}(\lambda l) \left(\frac{r}{l} \right) \text{ch}(\lambda l) \right] d = 0.\end{aligned}\quad (19)$$

Із системи (19) отримуємо

$$\begin{aligned}\Delta^{\text{acc}}(\lambda l) &= \underbrace{1 + \cosh(\lambda l) \cos(\lambda l)}_{\Delta_0(\lambda l)} - \\ &- \frac{\pi}{4} \left(\frac{r}{l} \right) (\lambda l) \left\{ \cosh(\lambda l) [\sin(\lambda l) + \sinh(\lambda l)] - \right. \\ &\left. - \sinh(\lambda l) [\cos(\lambda l) + \cosh(\lambda l)] \right\}\end{aligned}\quad (20)$$

На рис. 5 показана поведінка таких визначників у околі першого основного резонансу камертона:

$$\Delta_0(\lambda l) = 1 + \cosh(\lambda l) \cos(\lambda l) \quad (21)$$

– визначника С.П.Тимошенка для стержня з одним жорстко закріпленим торцем [2], $\det(\mathbf{A})$ – точного визначника системи (17), $\Delta^{\text{acc}}(\lambda l)$ – асимптотичного визначника (20) та визначника камертонного гіроскопа [1], розрахованого при однакових розмірах та значеннях констант.

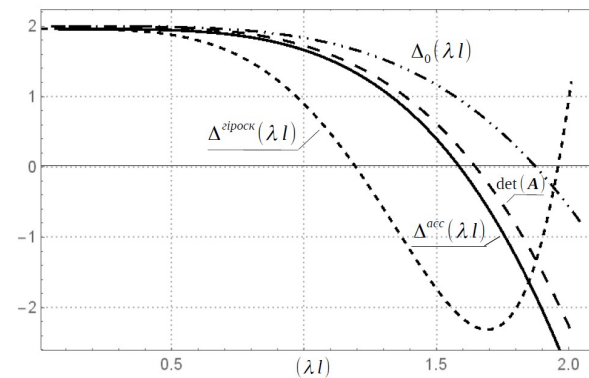


Рис. 5 Порівняння визначників у околі першого резонансу згинних коливань

Видно, що напівкільце малого радіуса r суттєво зменшує частоту першого основного резонансу камертона у порівнянні з частотою жорстко закріпленої балки С.П.Тимошенка $(\lambda l)_1^{(0)} = 1.8751$. При $r/l = 0.1$ значення кореня рівняння $\det(\mathbf{A}) = 0$ складає $(\lambda l)_1^{\text{точн}} = 1.7299$, а значення кореня рівняння $\Delta^{\text{acc}}(\lambda l) = 0$: $(\lambda l)_1^{\text{acc}} = 1.7505$; вони відрізняються від частоти жорстко закріпленого стержня $(\lambda l)_1^{(0)}$ на 7.8% та 6.7%, відповідно. Асимптотика (20) забезпечує задовільну для практики точність обчислень: відмінність між значеннями $(\lambda l)_1^{\text{acc}}$ та $(\lambda l)_1^{\text{точн}}$ складає лише 1%.

Під час розрахунку резонансних частот камертонного гіроскопа на вторинній сенсорній моді за формулами роботи [1] при кутовій швидкості $\varepsilon = \Omega_0 / \omega = 0.01$ маємо такі значення частот пер-

шого резонансу $(\lambda l)_R^- = 1.68354$, $(\lambda l)_R^+ = 1.81754$, що складають Браянівську пару розщеплення [3]. Знайдена нами резонансна частота первинної моди нерухомого камертону точно співпадає з середнім арифметичним частот $(\lambda l)_R^-$ та $(\lambda l)_R^+$ вторинної моди. Значення цього результату полягає у наступному: при збудженні коливань п'єзореzonаторів з низькою добротністю Q частота прикладеного електричного поля має лежати у проміжку між частотами $(\lambda l)_R^-$ та $(\lambda l)_R^+$. Тоді слід очікувати, що Браянівські частоти $(\lambda l)_R^-$ та $(\lambda l)_R^+$ першого резонансу збуджуватимуться одночасно і сенсорний електричний сигнал гіроскопа матиме вигляд модульованих коливань [5]

$$\frac{V}{h} = \frac{M_0 Q}{EJ} K(\lambda l) \frac{h}{8} \frac{1 - \bar{v}}{d_{31}} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) \cos \Omega_0 t,$$

де $\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_0^+ + \omega_0^-) \propto \frac{1}{2}[(\lambda l)_R^+ + (\lambda l)_R^-]$ – збуджувана частота первинної моди, що відповідає

значенню $(\lambda l)_1^{\text{acc}} = 1.7505$, а частота модуляції дорівнює прикладеній кутовій швидкості обертання: $\omega_{\text{mod}} = \Omega_0$, $K(\lambda l) = 0.23$ при $(\lambda l)_1^{\text{acc}} = 1.7505$.

4. Висновки

Спираючись на повну математичну модель сенсора кутової швидкості обертання камертонного типу [1] виконано розрахунок частотних параметрів первинної моди гіроскопа. Асимптотична формула резонансного визначника забезпечує визначення резонансної частоти нерухомого камертона з точністю 1%. Встановлене значення резонансної частоти слід використовувати для розрахунку сенсорного сигналу гіроскопа: частота первинної моди нерухомого камертону в точності співпадає з середнім арифметичним частот $(\lambda l)_R^-$ та $(\lambda l)_R^+$ Браянівської пари розщеплення вторинної моди.

Список використаних джерел

1. Ulitko I.A. Mathematical theory of the fork-type wave gyroscope / I.A. Ulitko // 1995 IEEE Int. Frequency Control Symposium, San Francisco, USA: proceedings. – 1995. – P. 786–793.
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко, Д.Х. Янг, У. Уивер / – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
3. Bryan G.H. On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell / G.H. Bryan // Proc. Cambridge Phil. Soc. Math. Phys. Sci. – 1890. – Vol.7. – P. 101–111.
4. Гринченко В.Т. Электроупругость. / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга // К.: Наукова думка, 1989 - 280с.
5. Улітко І.А. Сенсорний сигнал вібраційного п'єзогіроскопу камертонного типу / І.А. Улітко, О.В. Борисейко // 36. праць XIX МНК Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем (DSMSI-2019) 22-24 травня 2019, Київ. - 2019. – С. 284 - 286.
6. Friedt J.M., Introduction to the quartz tuning fork / J.M. Friedt, É Carry. // Am. Journ. Physics. – Vol 75 – No 5 (May) – 2007. – P.415-422.
7. Fan M. Research progress of quartz tuning fork micromachined gyroscope / M. Fan, L. Zhang // Int. Conf. on Artificial Intelligence & Industrial Engineering, AIIIE 2015, July 26-27, 2015, Phuket, Thailand: proceedings. – 2015. – P.361-364.

References

1. ULITKO, I. A. (1995) Mathematical theory of the fork-type wave gyroscope. In: Proc 1995 IEEE Int. Frequency Control Symposium. San Francisco, USA pp. 786–793
2. TIMOSHENKO, S., YOUNG, D.H., WEAVER, W. (1974) *Vibration problems in engineering*. John Wiley & Sons.
3. BRYAN, G.H. (1890) On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell. *Proc. Cambridge Phil. Soc. Math. Phys. Sci.* 7. pp. 101–111
4. GRINCHENKO, V.T., ULITKO, A.F., SHULGA, N.A. (1989) *Electroelasticity*. Naukova Dumka
5. ULITKO, I. A. BORISEIKO, O.V. (2019) Sensorny signal vibratsiynogo piezogyroscopy kamertonnoho typu. In: Proc XIX Int. Conf. Dynamical Systems Modeling and Stability Investigation (DSMSI-2019) 22-24 May 2019, Kyiv. pp. 284 - 286
6. FRIEDT, J.M., CARRY, É. (2007) Introduction to the quartz tuning fork *American Journ. Physics.* 75(5) pp.415-422
7. FAN, M., ZHANG, L. (2015) Research progress of quartz tuning fork micromachined gyroscope In: *Int. Conf. on Artificial Intelligence & Industrial Engineering*, AIIIE 2015, July 26-27, 2015, Phuket, Thailand: pp.361-364

УДК 534.1

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/4.14>

К. Г. Хорошев¹, к.ф.-м.н., доц.
С. В. Кикоть², к.ф.-м.н., доц.

Власні частоти та власні форми регулярних ланцюгових коливальних систем

¹ Національний технічний університет Укра-
їни «Київський політехнічний інститут імені
Ігоря Сікорського», 03056, м. Київ, пр-т Пере-
моги, 37

e-mail: khoroshev.kostiantyn@lil.kpi.ua

² Національний транспортний універси-
тет, 01010, м. Київ, вул. М. Омеляновича-
Павленка, 1

e-mail: kykot@ntu.edu.ua

K. G. Khoroshev¹, Ph.D.(Phys.-Math.), Ass.
Prof.

S. V. Kykot², Ph.D.(Phys.-Math.), Ass. Prof.

Eigenfrequencies and eigenforms of regular chain oscillatory systems

¹National Technical University of Ukraine «Igor
Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», 03056,
Kyiv, Prosp. Peremohu, 37

e-mail: khoroshev.kostiantyn@lil.kpi.ua

² National transport university, 01010, Kyiv,
Mykhaila Omelianovycha–Pavlenka str., 1

e-mail: kykot@ntu.edu.ua

Класичним підходом при дослідженні власних коливань дискретних коливальних механі-
чних систем є розв'язання вікового рівняння для знаходження власних частот та системи ал-
гебраїчних рівнянь для визначення амплітудних коефіцієнтів. Однак, аналітичне розв'язання
вікового рівняння можливе тільки для обмеженого кола дискретних систем, особливо зі скін-
ченим ступенем вільності. До такого класу відносяться регулярні ланцюгові коливальні си-
стем, в яких однакові осцилятори з'єднані між собою послідовно. Регулярні системи розді-
ляються на системи з жорстко закріпленими кінцями, з одним або обома вільними кінцями,
що суттєво впливає на пошук власних частот та власних форм. В даній статті показано,
як маючи розв'язок для вікового рівняння регулярної системи з жорстко закріпленими кінця-
ми, можна визначити власні частоти та власні форми регулярних систем з одним чи обома
вільними кінцями.

Ключові слова: регулярна ланцюгова коливальна система, власні частоти, власні форми.

The classical approach in the investigation of natural oscillations of discrete mechanical oscillating
systems is the solution of the secular equation for finding the eigenfrequencies and the system of algebraic
equations for determining the amplitude coefficients (eigenforms). However, the analytical solution of
the secular equation is possible only for a limited class of discrete systems, especially with a finite
degree of freedom. This class includes regular chain oscillating systems in which the same oscillators
are connected in series. Regular systems are divided into systems with rigidly fixed ends, with one or
both free ends, which significantly affects the search for eigenfrequencies and eigenforms. This paper
shows how, having a solution for the secular equation of a regular system with rigidly fixed ends, it is
possible to determine the eigenfrequencies and eigenforms of regular systems with one or both free ends.

Key Words: regular chain oscillating systems, eigenfrequencies, eigenforms.

Статтю представив член-кореспондент НАН України Жук Я.О.

Вступ. Визначення власних частот та вла-
сних форм дискретних коливальних механі-
чних систем зі скінченим ступенем вільності
досі викликає науковий інтерес у дослідників
та науковців [1, 2]. Як відомо [3], ця задача зво-
диться до розв'язання вікового рівняння для
визначення власних частот і системи алгебраї-
чних рівнянь для визначення амплітудних ко-
ефіцієнтів власних форм. Незважаючи на всі

переваги чисельних методів, актуальними є і
аналітичні підходи. Останні працюють тільки
для обмеженого кола систем, до якого входять
регулярні ланцюгові коливальні системи, коли
осцилятори з однаковими інерційними та пруж-
ними параметрами сполучені послідовно так,
що i -й осцилятор приєднано тільки до попере-
днього $i - 1$ -го та наступного $i + 1$ -го осцилято-
рів [3]. Прикладами регулярних систем є нятя-

гнути нитка з бусинками, коливальні системи з лінійними та кутовими переміщеннями (рис. 1).

Для регулярних ланцюгових систем можна отримати аналітичні формули для обчислення значень власних частот та амплітудних коефіцієнтів. Однак, їх виведення суттєво залежить від граничних умов: жорсткого закріплення або звільнення одного чи обох кінців. В роботах [4, 5] розглядалась класична задача про поперечні коливання достатньо натягнутої нитки зі скінченною кількістю бусинок (рис. 1,а), що є прикладом системи з двома жорстко закріпленими кінцями. Системи з одним вільним кінцем (рис. 1,б) були досліджені в [6, 7], причому їх методика розв'язання базувалась на способі, запропонованому у [4], який полягає у прямому розв'язанні алгебраїчних рівнянь відносно амплітудних коефіцієнтів. Виведення аналітичних виразів власних частот та амплітудних коефіцієнтів для систем, що мають два вільних кінця (рис. 1,в), є питанням відкритим.

В даній статті на основі методики рекурентних співвідношень визначення вікового рівняння регулярної системи з жорстко закріпленими кінцями [5] отримані аналітичні вирази для власних частот та амплітудних коефіцієнтів систем з одним чи обома вільними кінцями.

Система з двома жорстко закріпленнями кінцями. Наведемо основні співвідношення для задачі малих поперечних коливань n нанизаних (рис. 1,а) однакової маси m , нанизаних на однакових відстанях a на достатньо натягнутої нитки довжиною l з жорстко закріпленими кінцями. Натяг нитки позначимо за $\vec{S}$. Позначивши $b = \frac{S}{ma}$, запишемо систему алгебраїчних рівнянь для визначення власної частоти k та амплітудних коефіцієнтів β_i ($i = 1, \dots, n$) [5]

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{k^2}{b}\right) \beta_1 - \beta_2 &= 0, \\ -\beta_1 + \left(2 - \frac{k^2}{b}\right) \beta_2 - \beta_3 &= 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots, \\ -\beta_{n-2} + \left(2 - \frac{k^2}{b}\right) \beta_{n-1} - \beta_n &= 0, \\ -\beta_{n-1} + \left(2 - \frac{k^2}{b}\right) \beta_n &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Вікове рівняння представимо у вигляді $r_n = 0$, де r_n — визначник матриці коефіцієнтів системи (1), який розкривається за допомогою рекурентних співвідношень [5]

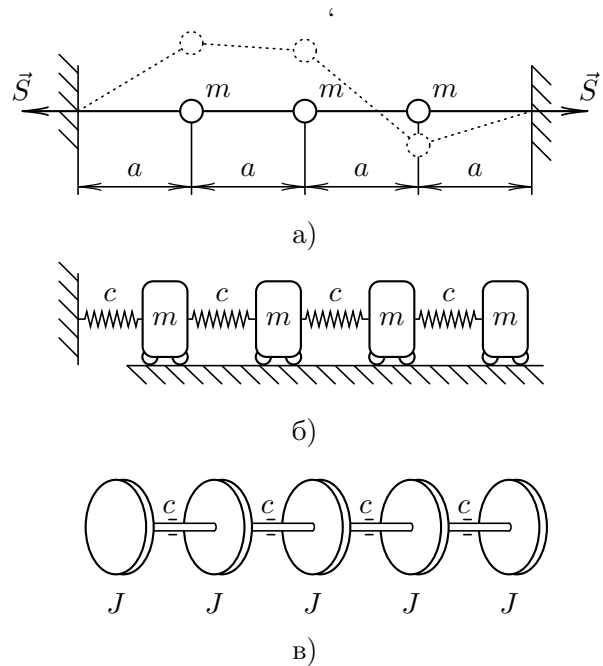


Рис. 1: Приклади регулярних ланцюгових систем: а) нитка з бусинками; б) з лінійними переміщеннями; в) з кутовими переміщеннями.

$$\begin{aligned} n = 1: r_1 &= 2 - \frac{k^2}{b}; \\ n = 2: r_2 &= r_1^2 - 1; \\ n > 2: r_n &= r_1 r_{n-1} - r_{n-2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для того, щоб останню формулу можна було використати при $n = 1, 2$ штучно покладемо $r_0 = 1$ та $r_{-1} = 0$.

Оскільки корені вікового рівняння $r_n = 0$ додатні, то $0 < \frac{k^2}{2b} < 1$. Позначивши

$$1 - \frac{k^2}{2b} = \cos \alpha, \quad (3)$$

для i -го рівняння (2) при $1 \leq i \leq n$ запишемо

$$r_i + r_{i-2} = 2 \cos \alpha r_{i-1}. \quad (4)$$

Взявши $r_i = C \sin(i+1)\alpha$ ($i = 1, \dots, n$), де C — невідома стала, після підставлення в (4) одержимо тригонометричну тотожність при $i > 1$. Покладемо в рівнянні (4) $i = 1$ та знайдемо $C = \sin^{-1} \alpha$, ($\alpha \neq \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$).

Для r_i ($i = -1, 0, 1, 2, \dots, n$) маємо

$$r_i = \frac{\sin(i+1)\alpha}{\sin \alpha}, \quad (\alpha \neq \pi m, m \in \mathbb{Z}), \quad (5)$$

а вікове рівняння набуває вигляду

$$\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin \alpha} = 0, \quad (6)$$

розв'язок якого $\alpha = \frac{\pi p}{n+1}$, де $p \neq m(n+1)$, $p, m \in \mathbb{Z}$. Множину розв'язку можна розбити на n послідовностей

$$A_l = \{\alpha_{lm} : \pm \alpha_l + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}\}, \quad (7)$$

таких, що для будь-якого $m \in \mathbb{Z}$ виконується співвідношення

$$\cos \alpha_{lm} = \cos \alpha_l. \quad (8)$$

Тут $\alpha_l = \frac{\pi l}{n+1}$ ($l = 1, \dots, n$).

Зі співвідношення (3) висновуємо, що кожна така l -а послідовність відповідає власній частоті k_l

$$k_l = 2\sqrt{b} \sin \frac{\pi l}{2(n+1)}, \quad (l = 1, \dots, n). \quad (9)$$

Для визначення амплітудних коефіцієнтів β_{il} , ($i = 1, \dots, n$), що відносяться до власних частот k_l ($l = 1, \dots, n$), перепишемо систему (1) у вигляді [5]

$$\beta_{i-1,l} - 2\beta_{il} \cos \alpha_l + \beta_{i+1,l} = 0, \quad (10)$$

де $i = 1, \dots, n$.

Нетрудно бачити, що

$$\beta_{il} = \frac{\sin i \alpha_l}{\sin \alpha_l} = \frac{\sin i \frac{\pi l}{n+1}}{\sin \frac{\pi l}{n+1}}, \quad (i, l = 1, \dots, n) \quad (11)$$

— є розв'язком алгебраїчної системи (10).

Система з одним вільним кінцем. В якості прикладу розглянемо малі поздовжні коливання n послідовно з'єднаних між собою пружинами візків однакової маси m , що котяться по горизонтальній поверхні без тертя (рис. 1,б). Перший лівий візок приєднаний пружиною до нерухомої вертикальної стіни. Всі пружини мають однакову жорсткість c .

Система алгебраїчних рівнянь для визначення власної частоти k та амплітудних коефіцієнтів β_i ($i = 1, \dots, n$) відрізняється від системи алгебраїчних рівнянь (1) параметром b (тут $b = \frac{c}{m}$) та останнім рівнянням

$$-\beta_{n-1} + \left(1 - \frac{k^2}{b}\right) \beta_n = 0. \quad (12)$$

Позначимо визначник матриці коефіцієнтів системи рівнянь (1) з заміненям останнім рівнянням (12) за Δ_n та знайдемо його за допомогою співвідношень

$$\begin{aligned} n = 1: \Delta_1 &= r_1 - 1, \\ n = 2: \Delta_2 &= (r_1 - 1)r_1 - 1, \\ n > 2: \Delta_n &= (r_1 - 1)r_{n-1} - r_{n-2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Підставляючи r_{n-1} та r_{n-2} , що визначаються формулами (5), у вікове рівняння $\Delta_n = 0$, після нескладних тригонометричних перетворень отримуємо

$$\cos \frac{(2n+1)\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = 0, \quad (14)$$

де $\alpha \neq \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Розв'язок останнього рівняння має вигляд

$$\alpha = \frac{(2p+1)\pi}{2n+1}, \quad (\alpha \neq \pi p, p \in \mathbb{Z}). \quad (15)$$

Як і в попередній задачі, розіб'ємо отриманий розв'язок на n послідовностей (7), таких, що для будь-якого $m \in \mathbb{Z}$ справедливо співвідношення (8) при $\alpha_l = \frac{(2l-1)\pi}{2n+1}$ ($l = 1, \dots, n$).

Отже, з виразів (3) для власних частот k_l одержуємо

$$k_l = 2\sqrt{b} \sin \frac{(2l-1)\pi}{2(2n+1)}, \quad (l = 1, \dots, n). \quad (16)$$

Для кожної власної частоти k_l ($l = 1, \dots, n$) шукаємо розв'язки системи алгебраїчних рівнянь (1) з заміненям останнім рівнянням (12) у модифікованому вигляді (11)

$$\beta_{il} = \frac{\sin(i\alpha_l + \gamma_l)}{\sin(\alpha_l + \gamma_l)}, \quad (i, l = 1, \dots, n), \quad (17)$$

де γ_l ($l = 1, \dots, n$) — деякі сталі.

Першим $n-1$ рівнянням системи рівнянь (1) вирази (17) задовольняють. З останнього рівняння (12) отримуємо тригонометричне рівняння для знаходження γ_l , яке після елементарних перетворень набуває вигляду

$$2 \sin \frac{\alpha_l}{2} \cos \left(\frac{(2n+1)\alpha_l}{2} + \gamma_l \right) = 0. \quad (18)$$

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо

$$\gamma_l = \frac{\pi}{2} - \frac{(2n+1)\alpha_l}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (19)$$

Отже, для амплітудних коефіцієнтів маємо

$$\beta_{il} = \frac{\cos \frac{(2(n-i)+1)\alpha_l}{2}}{\cos \frac{(2n-1)\alpha_l}{2}}. \quad (20)$$

Тут $i, l = 1, \dots, n$.

Система з обома вільними кінцями.

Розглянемо малі крутильні коливання прямого пружного валу на якому рівновіддалено закріплено $n > 1$ дисків, що мають однакові моменти інерції J та однакову жорсткість c при крученні послідовних ділянок валу між дисками (рис. 1,в). Вал може вільно обертатися навколо власної осі.

Взявши $b = \frac{c}{J}$, запишемо систему алгебраїчних рівнянь для визначення власної частоти k та амплітудних коефіцієнтів β_i ($i = 1, \dots, n$)

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{k^2}{b}\right) \beta_1 - \beta_2 &= 0, \\ -\beta_1 + \left(2 - \frac{k^2}{b}\right) \beta_2 - \beta_3 &= 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots, \\ -\beta_{n-2} + \left(2 - \frac{k^2}{b}\right) \beta_{n-1} - \beta_n &= 0, \\ -\beta_{n-1} + \left(1 - \frac{k^2}{b}\right) \beta_n &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Якщо скласти між собою всі рівняння системи (21), одержимо

$$\frac{k^2}{b} (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n) = 0. \quad (22)$$

Очевидно, що останнє рівняння виконується при $k_1 = 0$, причому набір амплітудних коефіцієнтів, що відповідають нульовій власній частоті, $\beta_{11} = \beta_{21} = \dots = \beta_{n1} = 1$, є розв'язком системи (21).

Для визначення інших власних частот складемо вікове рівняння $D_n = 0$, де D_n визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned} n = 2: D_2 &= \Delta_1^2 - 1, \\ n \geq 3: D_n &= \Delta_1 \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Для того, щоб останнє рівняння (23) було справедливим для $n = 2$, формально покладемо $\Delta_0 = 1$.

Підставляючи в (23) вирази (13), для $n \geq 2$ маємо

$$D_n = (r_1 - 1)^2 r_{n-2} - 2(r_1 - 1) r_{n-3} + r_{n-4}. \quad (24)$$

При цьому r_i ($i = -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n$) описуються співвідношеннями (5).

Розкриваючи вікове рівняння $D_n = 0$ за допомогою виразів (5), після нескладних тригонометричних перетворень запишемо

$$\sin n\alpha (\cos \alpha - 1) = 0 \quad (\alpha \neq \pi m, m \in \mathbb{Z}), \quad (25)$$

звідки знаходимо

$$\alpha = \frac{p\pi}{n} \quad (p \neq mn; p, m \in \mathbb{Z}). \quad (26)$$

Аналогічно попереднім випадкам, отриманий розв'язок можна розбити на $n - 1$ послідовностей (7), таких, що для будь-якого $m \in \mathbb{Z}$ справедливо співвідношення (8) при $\alpha_l = \frac{(l-1)\pi}{n}$ ($l = 2, \dots, n$).

Розбиття розв'язку (26) на лише $n - 1$ послідовностей означає, що зі співвідношення (3) ми можемо знайти лише $(n - 1)$ власних частот. Це сталося тому, що перехід вікового рівняння до тригонометричного представлення зумовив втрату кореня $k_1 = 0$.

З врахуванням $k_1 = 0$, формули для визначення власних частот k_l одержуємо з виразу (3)

$$k_l = 2\sqrt{b} \sin \frac{(l-1)\pi}{2n}, \quad (l = 1, \dots, n). \quad (27)$$

Амплітудні коефіцієнти β_{il} ($i = 1, \dots, n$) для кожної власної частоти k_l ($l = 1, \dots, n$) визначаємо з системи (21) за допомогою рекурентних співвідношень

$$\begin{aligned} l = 1: \beta_{i1} &= 1, \\ i = 1: \beta_{1l} &= 1, \\ i = 2: \beta_{2l} &= 2 \cos \alpha_l - 1, \\ i > 2: \beta_{il} &= -\beta_{i-2,l} + 2\beta_{i-1,l} \cos \alpha_l. \end{aligned} \quad (28)$$

Тут $i = 1, \dots, n; l = 2, \dots, n$.

Майже регулярна ланцюгова система з однією вільним кінцем. Розглянемо малі поперечні коливання будівлі з $(n - 1)$ однотипними поверхами та n -м поверхом-дахом (рис. 2). Кожен поверх може зсуватися відносно сусіднього в горизонтальній площині. Іншими видами рухів поверхів (їх згин, скручування, поздовжнє осідання тощо) нехтуємо.

Оскільки всі поверхи однотипні, будемо вважати, що всі поверхи, окрім поверху-даху, мають однакову масу m та однакову жорсткість c при зсуві; поверх-дах вдвічі легший за типовий поверх, але його жорсткість аналогічна жорсткості типового поверху.

Позначимо $b = \frac{c}{m}$, тоді система алгебраїчних рівнянь для визначення власної частоти k та амплітудних коефіцієнтів β_i ($i = 1, \dots, n$) відрізнятиметься від системи алгебраїчних рівнянь (1) останнім рівнянням

$$-\beta_{n-1} + \left(1 - \frac{k^2}{2b}\right) \beta_n = 0. \quad (29)$$

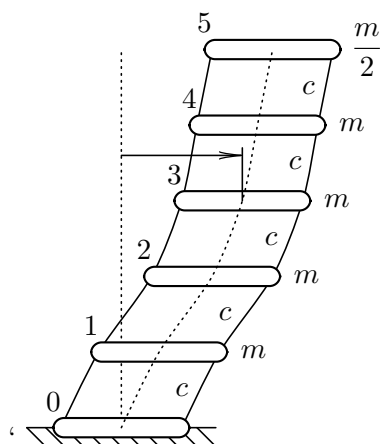


Рис. 2: Поперечні коливання будівлі з $(n - 1)$ однотипними поверхами та n -м поверхом-дахом

Запишемо вікове рівняння $\Gamma_n = 0$, де

$$\begin{aligned} n = 1: \Gamma_1 &= \frac{1}{2}r_1, \\ n = 2: \Gamma_2 &= \frac{1}{2}r_1^2 - 1, \\ n > 2: \Gamma_n &= \frac{1}{2}r_1r_{n-1} - r_{n-2}. \end{aligned} \quad (30)$$

Вікове рівняння $\Gamma_n = 0$ з використанням виразів (5) перепишемо у вигляді тригонометричного рівняння

$$\cos n\alpha \sin \alpha = 0 \quad (\alpha \neq \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}), \quad (31)$$

розв'язок якого

$$\alpha = \frac{(2p + 1)\pi}{2n}, \quad (p \in \mathbb{Z}). \quad (32)$$

Розіб'ємо множину отриманого розв'язку на n послідовностей (7), таких, що для будь-якого $m \in \mathbb{Z}$ справедливо співвідношення (8) при $\alpha_l = \frac{(2l-1)\pi}{2n}$ ($l = 1, \dots, n$).

Для власних частот k_l з рівняння (3) маємо

$$k_l = 2\sqrt{b} \sin \frac{(2l - 1)\pi}{4n}, \quad (l = 1, \dots, n). \quad (33)$$

Наведемо отримані шляхом розв'язання системи алгебраїчних рівнянь (1) з замінені останнім рівнянням (29) формули амплітудних коефіцієнтів β_{il} ($i = 1, \dots, n$), що відповідають власним частотам k_l ($l = 1, \dots, n$),

$$\beta_{il} = \frac{\cos(n - i)\alpha_l}{\cos(n - 1)\alpha_l}, \quad (i, l = 1, \dots, n). \quad (34)$$

Чисельний приклад. В (таб. 1) наведені значення величин $\frac{k_l}{2\sqrt{b}}$ для будівель з різною кількістю поверхів.

Табл. 1: Значення величин $\frac{k_l}{2\sqrt{b}}$ для будівлі з n поверхами.

$l \backslash n$	1	3	5	7
1	0,70711	0,25882	0,15643	0,11196
2		0,70711	0,45399	0,33028
3		0,96593	0,70711	0,53203
4			0,89101	0,70711
5			0,98769	0,84672
6				0,94388
7				0,99371

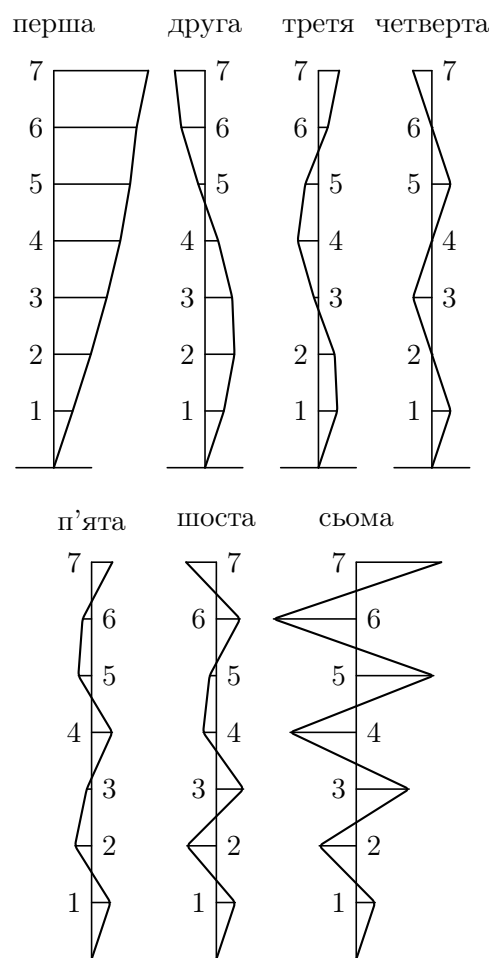


Рис. 3: Власні форми поперечних коливань будівлі з $n = 7$ поверхами

Як видно з таблиці та формул (33), значення власних частот багатоповерхової будівлі лежать в проміжку $(0, 2\sqrt{b})$. Зі збільшенням кількості поверхів (збільшенням кількості осциляторів n) найнижча частота зменшується, а найвища — збільшується. Очевидно, що такий саме якісний висновок можна зробити для будь-якої розглядуваної в роботі регулярної системи.

На (рис. 3) зображені власні форми будів-

лі з $n = 7$ поверхами. Амплітудні коефіцієнти обчислені за формулами (34).

Висновки. Методика пошуку власних частот та власних форм регулярної ланцюгової коливальної механічної системи з жорстко закріпленими кінцями, що базується на представленні лівої частини вікового рівняння за допомогою рекурентних співвідношень розкриття визначника тридіагональної матриці [5], розповсюджена на випадки регулярних ланцюгових коливальних механічних систем з одним чи двома вільними кінцями. При цьому, визначники матриці коефіцієнтів систем алгебраїчних рівнянь для визначення власної частоти та амплітудних коефіцієнтів для механі-

чних систем з одним чи двома вільними кінцями представлені через рекурентні співвідношення вираження лівої частини вікового рівняння, що стосується механічної системи з жорстко-закріпленими кінцями. Отримані аналітичні формули обчислення власних форм та амплітудних коефіцієнтів.

Розглянута майже регулярна ланцюгова коливальна механічна системи з одним вільним кінцем, в якій крайній осцилятор має вдвічі меншу інерційну характеристику. Методика розв'язання така сама, як і для регулярних систем. Знайдені аналітичні вирази для власних чисел та амплітудних коефіцієнтів. Наведений чисельний приклад.

Список використаних джерел

1. Rao S.S. Mechanical Vibrations: [the 6th edition in SI Units] / S.S. Rao. — Harlow: Pearson Education, 2018. — 1290p.
2. Tiwari R. Rotor System: Analysis and Identification / Rajiv Tiwari. — Boca Raton: CRC Press, 2018. — 1070 p.
3. Василенко М.В. Теорія коливальних та стійкості руху: Підручник / М.В. Василенко, О.М. Алексейчук. — Київ: Вища школа, 2004. — 525 с.
4. Гантмахер Ф.Р. Оцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем: [изд. 2-е, перераб. и доп.] / Ф.Р. Гантмахер, М.Г. Крейн. — Москва: Гостехиздат, 1950. — 359 с.
5. Бабаков И.М. Теория колебаний: учебное пособие: [изд. 4-е, исправл.] / И.М. Бабаков. — Москва: Дрофа, 2004. — 591 с.
6. Geradin M. Mechanical vibrations: theory and application to structural dynamics: [the 3rd edition] / M. Geradin, D. Rixen. — Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2015. — 598 p.
7. Thomson W.T. Theory of Vibrations with Applications: [the 5th Edition] / W.T. Thomson, M.D. Dahleh. — London: Pearson education, 1998. — 544 с.

References

1. RAO S.S. (2018) *Mechanical Vibrations*. 6th Ed. in SI Units. Harlow: Pearson Education, 2018.
2. TIWARI R. (2018) *Rotor System: Analysis and Identification*. Boca Raton: CRC Press.
3. VASYLENKO M.V., ALEKSEICHUK O.M. (2004) *Teoriia kolyvan ta stiikist rukhu: Pidruchnyk*. Kyiv: Vyshcha shkola.
4. GANTMAHER F.R., KREJN M.G. (1950) *Ocillyacionnye matricy i yadra i malye kolebaniya mekhanicheskikh sistem*. 2nd Ed. Moskva: Gostekhizdat.
5. BABAKOV I.M. (2004) *Teoriya kolebaniy*. 4th Ed. Moskva: Drofa
6. GERADIN M., RIXEN D. (2015) *Mechanical vibrations: theory and application to structural dynamics*. 3rd Ed. Chichester: John Wiley & Sons Ltd.
7. THOMSON W.T., DAHLEH M.D. (1998) *Theory of Vibrations with Applications*. 5th Ed. London: Pearson education.

Надійшла до редколегії 31.08.2021

УДК 539.3

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/4.15>

Яковенко Н. Д.¹, к.ф.-м.н.
Червінко О. П.², к.ф.-м.н.
Якименко С.М.³, к.ф.-м.н.

¹Yakovenko N.D., Cand. Sci. (Phys.-Math.),
²Chervinko O.P., Cand. Sci. (Phys.-Math.),
³Yakymenko S.M., Cand. Sci. (Phys.-Math.)

Порівняльний аналіз лінійного та нелінійного правил сумішей при моделюванні напруженого стану півпростору

Comparative analysis of the linear and nonlinear rules of mixtures in modeling the stress state of a half-space

¹Державний університет телекомунікацій,
м. Київ, Україна, 03110, вул. Солом'янська, 7
e-mail: oksenchuk_nd@ukr.net
²Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН
України, 03057, м. Київ, Україна,
вул. Нестерова, 3,
e-mail: term@inmech.kiev.ua
³Центральноукраїнський національний
технічний університет, м. Кіровоград, Україна,
e-mail: yasm@i.ua

¹State University of Telecommunications, 03110,
Kyiv, Ukraine, 7, Solomenska,
e-mail: oksenchuk_nd@ukr.net
²S. P. Timoshenko Institute of mechanics of
National Academy of Sciences of Ukraine, 03057,
Kyiv, Ukraine, 3, Nesterova
e-mail: term@inmech.kiev.ua
³Central Ukrainian National Technical University,
Kyiv, Ukraine, 25006, Kropyvnytskyi, 8, Prospekt
Universytetskyi, e-mail: yasm@i.ua

У даній статті чисельно досліджується осесиметрична задача про термічне імпульсне навантаження півпростору. Постановка задачі включає співвідношення Коші, рівняння руху, рівняння теплопровідності, початкові умови, теплові та механічні граничні умови. Для моделювання механічної поведінки матеріалу використовується модель течії Боднера-Партома, узагальнена на випадок впливу мікроструктури на непружні характеристики сталі. Для визначення параметрів моделі, що відповідають за границю текучості та тимчасовий опір матеріалу, використано лінійне правило сумішей. Задача розв'язується за допомогою скінченно-елементної методики. Чисельна реалізація задачі проводиться за допомогою покрокового інтегрування за часом. Описано напружений стан півпростору при врахуванні лінійного та нелінійного правил сумішей.

Ключові слова: імпульсне термічне навантаження, модель течії, правило сумішей

In the present work we solve the axially symmetric problem of a half-space under thermal loading. The statement of the problem includes: Cauchy relations, equations of motion, heat conduction equation, initial conditions, thermal and mechanical boundary conditions. The thermomechanical behavior of an isotropic material is described by the Bodner–Partom unified model of flow generalized in the case of microstructure influence on inelastic characteristics of steel. To determine the parameters of the model corresponded to yield stress and yield strength the mixture rule is utilized. The problem is solved with using the finite element technique. The numerical realization of our problem is performed with the help of step-by-step time integration. Equations of the evolution for the inelastic flow model are integrated by the second-order Euler implicit method. The equations of motion are integrated by the Newmark method, whereas the heat-conduction equation is integrated by the first-order implicit method. We use quadrangular isoparametric elements. The parameters of a fine grid are chosen with the help of the criterion of practical convergence of the solutions. The stress state taking into account linear and nonlinear rules of mixtures is described.

Key words: pulse thermal loading, flow model, rule of mixture

Статтю представив член-кор.НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Багато матеріалів типу сталь або інші механічні сплави в процесі теплової історії можуть зазнавати мікроструктурних перетворень [1]. На стадії достатньо високого нагріву вихідні

фази сталі перетворюються в аустеніт, який на стадії охолодження розпадається на ферит, перліт, бейніт і мартенсит. Ці перетворення супроводжуються змінами фізико-механічних характеристик, прихованими теплотами, появою

об'ємних і зсувних трансформаційних деформацій. В загальному випадку термомеханічна поведінка матеріалу з мікроструктурою може бути описана за допомогою теорії сумішей [2]. При цьому широко використовується підхід, який базується на заміні структурно-неоднорідного матеріалу однорідним, властивості якого в найпростіших випадках обчислюються за допомогою лінійного правила сумішей [3].

У даній роботі на основі чисельного моделювання розглядається осесиметрична задача про термічне навантаження півпростору з мікроструктурними перетвореннями. Проводиться порівняльний аналіз характеристик напруженого стану, отриманих при використанні як лінійного, так і нелінійного правил сумішей.

Постановка задачі

Розглядається півпростір $z > 0$, $0 < r < \infty$. Припускається, що від нуля відмінна лише осьо́ва компонента переміщення u_z , причому $u_z = u_z(z, t)$, а також $\theta = \theta(z, t)$. За цих припущень задача для півпростору еквівалентна задачі для стержня $0 < r < R$, $z > 0$, на бічній поверхні якого виконуються умови гладкого контакту і теплоізоляції

$$u_r = 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0, \quad r = R, \quad z > 0$$

за умов (1) на торці $z = 0$.

Математична постановка осесиметричної задачі термомеханіки в циліндричній системі координат $Orz\phi$ включає також:

– співвідношення Коші

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{u_r}{r},$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right),$$

де u_r і u_z – компоненти вектора переміщень; ε_{rr} ,

ε_{zz} , ε_{rz} і $\varepsilon_{\phi\phi}$ – компоненти тензора деформації;

– рівняння руху

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} = \rho \ddot{u}_{rr},$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \ddot{u}_{zz},$$

де σ_{rr} , σ_{zz} , σ_{rz} і $\sigma_{\phi\phi}$ – компоненти тензора напружень; ρ – густина матеріалу;

– рівняння теплопровідності

$$c_V \dot{\theta} + 3\alpha \theta K_V (\dot{\varepsilon}_{kk} - 3\alpha \dot{\theta}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rk \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - D' = r_s,$$

де θ – температура; α , c_V і k – коефіцієнти лінійного теплового розширення, теплоємності при сталому об'ємі і теплопровідності відповідно; K_V – модуль об'ємного стиску; $\dot{\varepsilon}_{kk} = \dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{zz} + \dot{\varepsilon}_{\phi\phi}$; D' – швидкість дисипації; θ – абсолютна температура; c_V и k – об'ємна теплоємність та коефіцієнт теплопровідності; r_s – потужність заданих внутрішніх джерел тепла; – початкові умови

$$u_r = \dot{u}_r = 0; \quad u_z = \dot{u}_z = 0; \quad \theta = \theta_0, \quad t = 0,$$

де θ_0 – початкова температура;

– граничні умови теплового навантаження

$$-k \frac{\partial \theta}{\partial z} = \begin{cases} q_0 \sin \frac{\pi}{t_q} t, & t \leq t_q, \\ 0, & t > t_q; \end{cases} \quad (1)$$

де q_0 – заданий параметр теплового навантаження; t_q – часовий параметр навантаження – терміни дії теплового імпульсу.

Нелінійна поведінка матеріалу описується термомеханічною моделлю течії Боднера-Партома, яка узагальнена для випадку багатофазового складу матеріалу [4]. Сутність узагальнення полягає у використанні правила сумішей для визначення параметрів моделі, що відповідають за границю течії і тимчасовий опір матеріалу.

Модель течії включає наступні співвідношення

– рівняння адитивності деформації

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{in} + \varepsilon_{ij}^{0ph}, \quad i, j = r, z, \phi,$$

де об'ємна термотрансформаційна деформація ε_{ij}^{0ph} приймається у вигляді

$$\varepsilon_{ij}^{0ph}(\theta, \theta_r, C^\xi) = \frac{V^\xi(\theta) C^\xi(\theta) - V^\xi(\theta_r) C^\xi(\theta_r)}{3V^\xi(\theta_r) C^\xi(\theta_r)} \delta_{ij},$$

– закон Гука, записаний для девіаторної та кульової складових тензора напружень

$$s_{ij} = 2G(e_{ij} - e_{ij}^{in}), \quad \sigma_{kk} = 3K_V(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^{0ph}),$$

де s_{ij} і e_{ij} – девіатори тензорів напружень і деформації відповідно; G і K_V – модулі зсуву й об'ємного розширення;

– рівняння еволюції Орована-Бейлі для внутрішньої змінної ізотропного зміцнення K

$$\dot{K} = m_1 (K_1 - K) \dot{W}^{in}, \quad K(0) = 0,$$

де $\dot{W}^{in} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{in}$ – потужність непружної деформації, m_1 , K_1 – параметри моделі;
– закон течії Прандтля-Рейса з умовою непружної нестисливості

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{in} = D_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(K_0 + K')^2}{3J_2} \right]^n \right\} \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}}, \quad \epsilon_{ij}^{in}(0) = 0, \\ \epsilon_{ij}^{in}(0) = 0,$$

де $J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}$, D_0 , n , K_0 – параметри моделі.

В даній роботі параметри узагальненої моделі течії $\bar{K}_0$ і $\bar{K}_1$, які відповідають за границю текучості та тимчасовий опір матеріалу, для довільного фазового складу визначаються за лінійним правилом сумішей на основі експериментальних даних

$$K_0 \rightarrow \bar{K}_0 = K_0^{(\xi)} C^\xi, \quad K_1 \rightarrow \bar{K}_1 = K_1^{(\xi)} C^\xi,$$

де $K_1^{(\xi)}$, $K_0^{(\xi)}$ – параметри моделі для окремих фаз. Відзначимо, що параметри m_1 та n , які відповідають за швидкість насичення зміцнення та чутливість до швидкості деформування відповідно, для всіх фаз приймаються однаковими.

Для врахування впливу поточного фазового складу на непружні характеристики матеріалу в роботі [4] для визначення коефіцієнтів моделі течії було використано лінійне правило сумішей (ЛПС)

$$\bar{P} = (1 - C_2) P_1 + C_2 P_2,$$

де P_1 , P_2 – параметри моделі для компонентів фаз 1 і 2, які мають концентрації C_1 , C_2 , $C_1 + C_2 = 1$.

Для оцінки чутливості результатів моделювання нестационарних процесів до цієї конститутивної гіпотези в даній роботі надається порівняльна характеристика радіальних напружень, отриманих при розрахунку з використанням лінійного та нелінійного правил сумішей (НПС) при $N = 2$ [5]

$$\bar{P} = (1 - C_2^N) P_1 + C_2^N P_2 \quad (2)$$

У розрахунках приймається
 $q_0 = 2 \cdot 10^8 \text{ кВт} / \text{м}^2$, $t_q = 10^{-8} \text{ с}$, $R = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$,
 $L = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$.

Метод розв'язування

Нелінійна задача інтегрується за неявною часовою схемою та на кожному кроці по часу

розв'язується методом простої ітерації. Для прискорення збіжності ітераційного процесу використовується процедура Стефенсона-Ейткена. Рівняння руху інтегруються неявним методом Ньюмарка, рівняння течії – неявним методом Ейлера, рівняння теплопровідності інтегруються по часу також з використанням неявної схеми. Лінеаризована задача термомеханіки розв'язується за допомогою скінчено-елементної методи [6].

Результати розрахунків

На рис. 1 показана зміна за часом температури та компоненти напруження σ_{rr} на поверхні $z = 0$, а на рис. 2 – залишковий розподіл радіальних напружень σ_{rr} вглиб півпростору. Штриховими лініями показані результати розрахунку за ЛПС, а суцільними – за НПС. Температури початку аустенізації та мартенситного перетворення позначені як A_{c1} та θ_H . В момент часу $t_a = 0,37 \cdot 10^{-8} \text{ с}$, при якому починається аустенізація, рівень напружень при розрахунку за ЛПС дещо вищий за рівень напружень, що розрахований за НПС. Протягом інших проміжків часу розбіжність не суттєва (рис. 1).

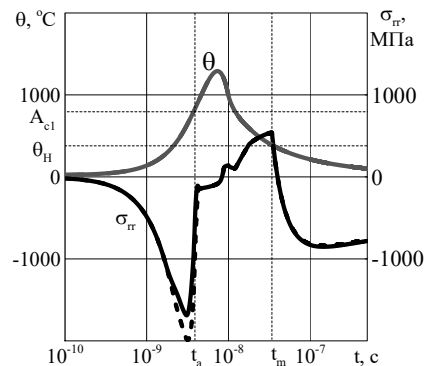


Рис. 1

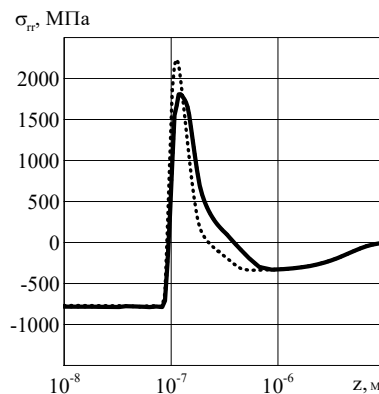


Рис. 2

У залишковому розподілі ЛПС дає завищене значення максимальних розтягувальних напружень в околі «зуба» і не впливає на стискальні напруження в мартенситному шарі (рис. 2).

Таким чином, при $N > 1$ у рівнянні (2) лінійне правило сумішей дає задовільну оцінку зверху максимальних поточних і залишкових напружень для даного класу задач.

Список використаних джерел

1. *Senchenkov I. K.* Examination of the thermomechanical state of cylindrical components deposited with layers of austenitic and martensitic steels [Електронний ресурс] / I. K. Senchenkov, O. P. Chervinko, E. Turyk, I. Ryabtsev // *Weld. Int.* – 2008. – Vol. 22, № 7. – P. 457–464. – Режим доступу до журн.: <https://doi.org/10.1080/09507110802352340>
2. *Рушчійський Я. Я.* Элементы теории смесей / Я. Я. Рушчійський. – К.: Наук. думка, 1991. – 160 с.
3. *Borjesson L.* Simulation of multipass welding with simultaneous computation of material properties [Електронний ресурс] / L. Borjesson, L.-E. Lindgren // *Trans of ASME I. of Eng. Mater. Techn.* – 2001. – Vol. 123, №2. – P. 106–111. – Режим доступу до журн.: <https://doi.org/10.1115/1.1310307>
4. *Senchenkov I. K.* Modeling of a nonisothermal flow with regard for the dependence of plastic properties on the microstructure of a material [Електронний ресурс] / I. K. Senchenkov, N. D. Oksenchuk // *J. Math. Sci.* – 2013. – V. 190, N 6. – P. 796–803. – Режим доступу до журн.: <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1289-6>
5. *Bouquerel J.* Microstructure-based model for the static mechanical behavior of multiphase steel / J. Bouquerel, K. Verbeke, B.C. De Cooman // *Acta Materialia*, 2006. – 54, N 46. – P. 1143–1156. – Режим доступу до журн.: <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2005.10.059>
6. *Zhuk Y.A.* Axisymmetric dynamic problem of coupled thermoviscoplasticity [Електрон. ресурс] / Y.A. Zhuk, I.K. Senchenkov, V.I. Kozlov, G. A. Tabieva // *Int. Appl. Mech.* – 2001. 37, No.10. – P. 1311–1317. – Режим доступу до журн.: <https://doi.org/10.1023/A:1013976219144>

References

1. *SENCHENKOV, I. K., CHERVINKO, O. P., TURYSK, E., RYABTSEV, I.* (2008) Examination of the thermomechanical state of cylindrical components deposited with layers of austenitic and martensitic steels. *Weld. Int.* [Online] 22 (7). p. 457–464. Available from: <https://doi.org/10.1080/09507110802352340>
2. *Rushchitsky, J.* (1991) *Elementy teorii smesej*. Kiev: Naukova dumka.
3. *BORJESSON, L., LINDGREN, L-E.* (2001) Simulation of multipass welding with simultaneous computation of material properties. *Trans of ASME I. of Eng. Mater. Techn.* [Online] 123 (2). p. 106–111. Available from: <https://doi.org/10.1115/1.1310307>
4. *SENCHENKOV, I. K., OKSENCHUK, N. D.* (2013) Modeling of a nonisothermal flow with regard for the dependence of plastic properties on the microstructure of a material. *J. Math. Sci.* [Online] 190 (6). p. 796–803. Available from: <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1289-6>
5. *BOUQUEREL, J., VERBEKEN, K., DE COOMAN, B.C.* (2006) Microstructure-based model for the static mechanical behavior of multiphase steel. *Acta Materialia*. [Online] 54 (46). p. 1143–1156. Available from: <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2005.10.059>
6. *ZHUK, Y. A., SENCHENKOV, I. K., KOZLOV, V. I., TABIEVA, G. A.* (2001). Axisymmetric dynamic problem of coupled thermoviscoplasticity. *Int. Appl. Mech.* [Online] 37 (10). p. 1311–1317. Available from: <https://doi.org/10.1023/A:1013976219144>

Надійшла до редколегії 26.08.21

УДК 539.376

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/4.16>

Рудницький О. Г., к.ф.-м.н., с.н.с.
Рудницька М. О., пров.інж.
Ткаченко Л.В., к.ф.-м.н., н.с.

A.G.Rudnitskii, PhD (Phys.- Math.)
M.A.Rudnytska, Senior engineer
L.V.Tkachenko, PhD (Phys.- Math.)

Ітеративний метод корекції артефактів при оптоакустичній реконструкції

Correction of artifacts in optoacoustic imaging using an iterative approach

Інститут гідромеханіки НАНУ,
03680, м. Київ, вул. Капіс 8/4
e-mail: lusia.tkch@gmail.com

Institute of hydromechanics NASU,
03680, Kyiv, Kapnis str. 8/4
e-mail: lusia.tkch@gmail.com

Оптоакустична томографія ефективна при її застосуванні до задач візуалізації об'єктів, що мають підвищений коефіцієнт поглинання світла по відношенню до навколишнього середовища. До таких задач належить, наприклад, дефектоскопія, візуалізація кровоносних судин, виявлення і моніторинг пухлин, діагностика пористості композиційних матеріалів, високоточне локальне вимірювання модулів пружності. При цьому, якість оптоакустичних зображень в значній мірі пов'язана з такими факторами, як шум (шуми апаратури і навколишнього середовища) і спотворення, зумовлені особливостями самої моделі і розрахунковим алгоритмом. У роботі пропонується ітеративний алгоритм поліпшення якості оптоакустичних зображень, заснований на припущенні про постійність модельних і численних спотворень і наступному порівнянні (і коригуванні) відновлених зображень з оригінальними даними. Проведено чисельне моделювання поширення хвиль ультразвукового діапазону в середовищах, наближених до м'яких біологічних тканин. Показана ефективність підходу вже при використанні незначної кількості ітерацій.

Ключові слова: оптоакустика, чисельне моделювання, k-Wave toolbox.

Optoacoustic tomography is effective in applying to the visualization of objects that have a high coefficient of light absorption relative to the environment. Such tasks include, for example, defectoscopy, vascular imaging, detection and monitoring of tumors, diagnosis of porosity of composite materials, high-precision local measurement of the modulus of elasticity. However, the quality of optoacoustic images largely depends on factors such as noise (equipment or environmental noise) and distortion due to the characteristics of the model and the calculation algorithm. The article proposes an iterative algorithm for improving the quality of optoacoustic images, based on the observation that artifacts increase in magnitude with each iteration, while the nature and location of the distortions remain unchanged. Numerical simulations of the propagation of ultrasonic waves in environments close to soft biological tissues have been performed. In terms of eliminating distortion and artefacts inherent to the method of image reconstruction, an iterative filter was found to be highly effective. The effectiveness of the approach is manifested in the use of a small number of iterations.

Keywords: optoacoustics, numerical simulation, k-Wave toolbox.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Існуючі методи медичної візуалізації, такі, як рентгенографія, МРТ, КТ або ультразвукова діагностика поряд з перевагами мають певні недоліки. Застосування рентгенівської комп'ютерної томографії, наприклад, обмежується серйозним променевим навантаженням на організм пацієнта. Ультразвукова візуалізація характеризується відносно низькою контрастністю багатьох біологічних об'єктів. Оптичні методи візуалізації не можуть ефективно візуалізувати структури в

біологічних тканинах через сильне поглинання і розсіювання оптичних хвиль.

Унікальна здатність оптоакустики поєднувати високий контраст оптичного поглинання між неоднорідністю і навколишньою тканиною з високою просторовою здатністю, яка досягається в ультразвукових методах, при глибині зондування від декількох міліметрів до декількох сантиметрів, стала поштовхом до бурхливого розвитку систем візуалізації, які засновані на оптоакустичному ефекті.

Оптоакустичний (ОА) ефект базується на явищі, при якому генерація акустичних хвиль відбувається за рахунок поглинання електромагнітної енергії (наприклад, оптичні або радіочастотні хвилі). При цьому поширення і формування ОА-сигналів визначаються як теплофізичними, оптичними та акустичними властивостями середовища, так і характеристиками випромінювання, що поглинається. Таким чином, стає можливим застосування ОА-ефекту для вимірювання просторового розподілу інтенсивності світла і оптичних характеристик поглинаючого середовища за характеристиками зареєстрованого ОА-імпульсу.

Поряд з можливістю забезпечення неінвазивною і функціональною візуалізацією ОА-діагностика має ряд переваг у порівнянні з традиційними методами візуалізації [1]. Високий контраст ОА-зображення пов'язаний з тією обставиною, що отриманий образ зумовлений розподілом поглинання лазерного випромінювання в тканині [2]. При цьому, ОА-діагностика здатна візуалізувати органи з кращою роздільною здатністю у порівнянні з оптичними методами, оскільки носієм інформації є ультразвукові сигнали [3]. Тому ОА демонструє великий потенціал в біомедичних застосуваннях, таких як візуалізація мозку [4], виявлення пухлин [5], візуалізація судин [6] і молекулярна візуалізація [7].

Щоб відновити оптикоакустичне зображення за зареєстрованими на поверхні тканини ультразвуковим сигналам, використовуються алгоритми оптикоакустичної реконструкції, які безпосередньо визначають якість зображення. При цьому, спотворення і артефакти в реконструйованому зображенні можуть з'явитися як через неминучі в реальних дослідженнях перешкодах і шумах різної природи, так і через специфіку методу реконструкції. Тому задача усунення спотворень і артефактів при відновленні оптикоакустичних зображень є вельми актуальною для ефективного використання методу в клінічній практиці і наукових дослідженнях [8].

Основною метою цієї роботи була розробка і дослідження числового алгоритму, призначеного коректувати спотворення, що виникають в результаті відновлення ОА-образів.

Робота організована таким чином. У Розділі 1 дано опис прямої і оберненої задач оптикоакустики, а також опис запропонованого ітеративного алгоритму корекції відновлених ОА-зображень. У Розділі 2 детальніше описано алгоритм, числовий експеримент і результати проведеного моделювання реконструкції ОА-зображень для двовимірного і тривимірного випадків. У Висновках

наведені висновки і перспективи розробленого алгоритму.

1. Ітеративний алгоритм оптикоакустичної реконструкції

Оптикоакустична візуалізація заснована на ефекті термопружності, коли при поглинанні імпульсного лазерного випромінювання в середовищі відбувається перетворення оптичної енергії в теплову. При помірній щільності енергії, що виділилася, коли в області поглинання не відбувається фазових перетворень, генерація ультразвукових імпульсів є наслідком теплового оптичного поглинання. Акустичне поле в цьому випадку можна описати в рамках лінійної теорії.

Сформулюємо пряму задачу ОА томографії: визначити поле тиску $p(\vec{r}, t)$ за відомим розподілом теплових джерел $H(\vec{r}, t)$, що збуджені світловим імпульсом, наприклад, короткочасним лазерним засвічуванням досліджуваного середовища (Рис. 1).

У акустично однорідному нескінченному середовищі шукана просторово-часова залежність поля тиску $p(\vec{r}, t)$, визначається рівнянням [9]:

$$\left[\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] p(\vec{r}, t) = -\frac{\beta}{c_p} \frac{\partial}{\partial t} H(\vec{r}, t), \quad (1)$$

де c – швидкість звуку, β – коефіцієнт ізобарного розширення, c_p – теплоємність при постійному тиску, яка припадає на одиницю маси. Теплове джерело $H(\vec{r}, t)$ може бути представлено як добуток поглинутої енергії і часової функції підсвічування: $H(\vec{r}, t) = Q(\vec{r}, t)I(t)$. У випадку короткого імпульсу $I(t) = \delta(t)$, де $\delta(t)$ – дельта-функція Дірака.

Якщо початковий акустичний тиск, який виник за рахунок зовнішніх джерел у момент часу $t=0$, створюється за рахунок поглинання імпульсного лазерного випромінювання оптичними неоднорідностями, то його можна представити у вигляді $p_0(\vec{r}) = \Gamma \cdot Q(\vec{r})$, де Γ – безрозмірний коефіцієнт Грюнейзена, що характеризує ефективність ОА-перетворення світла, що поглинається, в звук.

Розв'язок прямої задачі визначається виразом [9]:

$$p(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi^2} \int_V \frac{\frac{\partial}{\partial t} (p_0(\vec{r}') \delta(t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c))}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV,$$

де V – об'єм, в якому розподілені ОА джерела.

Визначення розподілу $p_0(\vec{r}) = \Gamma \cdot Q(\vec{r})$ за сигналами тиску $p_s(\vec{r}, t)$, зареєстрованими на поверхні S об'єму V , становить суть оберненої задачі оптоакустики.

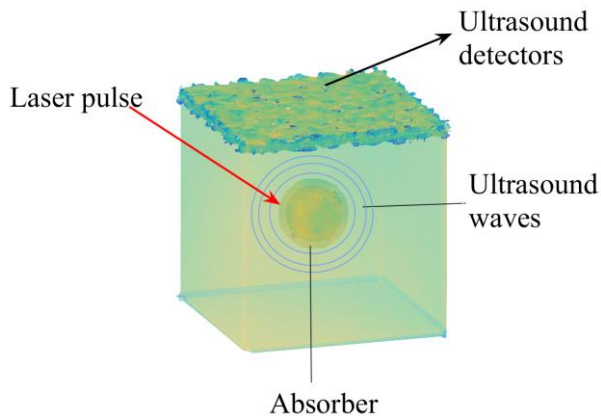


Рис.1.

В останні роки було розроблено цілий ряд методів розв'язання оберненої задачі оптоакустики, що дозволяють відновлювати розподіл джерел в середовищі [10,11]. Залежно від типу алгоритму відновлення ці методи можна розділити на кілька категорій: метод обернених проєкцій, алгоритм Фур'є-реконструкції, алгоритм обернення у часі.

Метод обернених проєкцій [12] є класичним способом здійснення ОА-реконструкції і забезпечує відновлення в плоскій [12], циліндричній [12] і в сферичній геометрії [13]. Цей метод заснований на двовимірній або тривимірній формулах обернення сигналів і є аналогом перетворення Радона. Формули обернених проєкцій існують для декількох конфігурацій детектування і реалізуються або в просторово-часовій, або в Фур'є області. Недоліком методів обернених проєкцій є те, що вони не є точними [12] і можуть призвести до виникнення артефактів у відновлених зображеннях. При цьому, розв'язки будуть справедливими лише для замкнутої ідеальної поверхні (приймачем є кожна точка поверхні). Крім того, зазвичай, вважається, що цільовий об'єкт вбудовано у нескінченне однорідне середовище без дисперсії з постійними швидкістю звуку, коефіцієнтами поглинання і густиною.

У дійсності ці умови не виконуються, що призводить до спотворень реконструйованих зображень. Специфіка цих спотворень буде різною при використанні різних методів реконструкції, різному розташуванні приймачів і різній геометрії об'єкта, що реконструюється.

Для компенсації спотворень і подоланні сильної залежності якості зображення від зазначених чинників нами був розроблений метод ітеративної корекції спотворень ОА-зображень.

Метод заснований на наступних припущеннях.

- Інтенсивність артефактів менша за інтенсивність реконструйованого сигналу.
- Однакові джерела породжують однаковий розподіл тиску на поверхні об'єкта.
- Реконструкція подібних об'єктів породжує виникнення подібних артефактів.

Перший крок алгоритму – це реконструкція зображення за даними, зареєстрованими на поверхні. На другому кроці вважається, що відтворене зображення саме є джерелом акустичних хвиль, які формують модельні дані на поверхні. За цими змодельованими даними можна відновити нове зображення (друге відтворене зображення). Різниця між останнім (уявним) зображенням і першим, відновленим з вихідних експериментальних даних, є тим коригуючим чинником, який дозволяє внести поправку в перше відтворене зображення, зменшити інтенсивність артефактів і наблизити реконструйоване зображення до оригіналу. Цей процес триває до тих пір, поки змодельоване поле тиску на поверхні об'єкта, отримане в результаті розв'язання прямої задачі не досягне максимальної схожості з полем тиску на поверхні об'єкта, отриманим в результаті експерименту.

Таким чином, у пропонованому методі покращення якості реконструйованого зображення досягається шляхом врахування помилок первинної реконструкції з подальшим порівнянням результатів розв'язання прямої задачі оптоакустики для відкоригованого зображення, що реконструйоване, з експериментальними даними.

2.Тестування алгоритму

Для числового моделювання задачі про розповсюдження акустичних хвиль використовувався програмний пакет «k-wave Matlab toolbox» – набір інструментів для середовища МАТЛАБ. Його використання дозволяє моделювати системи з джерелами і приймачами довільних форм і розмірів. При цьому, числова модель ґрунтується на переході в k -простір. У цьому просторі з використанням схеми швидкого перетворення Фур'є обчислюються просторові градієнти. Часові градієнти при цьому обчислюються з використанням скоригованої k -просторової різницевої схеми. Часова схема точна в межах поширення лінійної хвилі в однорідному середовищі без втрат і значно зменшує числове розсіювання в

більш загальному випадку. Кожна з цих схем реалізується за допомогою методу скінченних елементів.

Особливістю пакету k-Wave є те, що розповсюдження звукової хвилі моделюється диференціальними рівняннями в частинних похідних першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho_0, \\ p = c_0^2 (\rho + \vec{d} \cdot \vec{\nabla} \rho_0 - L\rho), \end{cases} \quad (2)$$

де $\vec{u}$ – акустична швидкість частинки, $\vec{d}$ – зміщення акустичної частинки, p – акустичний тиск, ρ – акустична щільність, ρ_0 – навколишня (рівноважна) щільність, c_0 – ізотропна швидкість звуку. L є лінійний інтегро-диференціальний оператор, що визначає акустичне поглинання і дисперсію.

Область, в якій шукається розв'язок диференціальних рівнянь, розбивається на кінцеву кількість підобластей. У кожній з них довільно вибирається вид апроксимуючої функції (у найпростішому випадку це поліном першого ступеня). Поза своєї підобласті апроксимуюча функція дорівнює нулю. Значення функцій на межах підобластей (у вузлах) є розв'язком задачі і заздалегідь невідомі [14]. Коефіцієнти апроксимуючих функцій шукаються з умови рівності значення сусідніх функцій у вузлах. Це дозволяє сформулювати систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих значень у вузлах, на яких шукається розв'язок вихідної системи. Вона прямо пропорційна кількості елементів і обмежується тільки можливостями ЕОМ. Оскільки кожен з елементів пов'язаний з обмеженою кількістю сусідніх, система лінійних алгебраїчних рівнянь має розріджений вид, що істотно спрощує її розв'язок.

Реалізація числового розв'язку задачі моделювання поділяється на етапи: спочатку задається початковий розподіл тиску (він може бути наданий у вигляді матриці або це може бути імпортоване зображення), потім визначається геометрія і властивості масиву датчиків, задаються властивості середовища, через яке будуть поширюватися хвилі, сітка із зазначенням розміру і роздільної здатності області, на якій

необхідно визначити прямий розв'язок і, нарешті, проводиться симуляція поширення хвиль в середовищі.

У рамках заданої числової моделі, яка є наближеною за своїми характеристиками до м'яких біологічних тканин, передбачалося, що середовище є однорідним з такими характерними параметрами, як щільність $\rho_0 = 1020 \text{ кг/м}^3$ і швидкість звуку $c_0 = 1510 \text{ м/с}$. Задача розв'язувалась для двовимірного і тривимірного випадків.

У якості числових фантомів (об'єктів для оптоакустичної реконструкції) були обрані диск і двовимірна модель судинного дерева для 2D-випадку, і тривимірна числова модель аорти з анеризмою для 3D-простору. Фізичний розмір зразка для двовимірного випадку становив 4.6×4.6 мм. для двовимірного випадку і $10.3 \times 10.3 \times 5.3$ мм для тривимірного випадку. У 2D-випадку датчики розташовувалися лінійно на верхній поверхні зразка, у 3D-просторі датчики були розподілені на верхній площині зразка. Для реконструкції заданих об'єктів використовувався метод обернених проекцій з перетворенням Фур'є.

На Рис.2(а) показані ОА-джерело у вигляді кругового диска і на Рис.2(б) результат його реконструкції, реалізований k-Wave алгоритмом. Форма реконструйованого зображення відтворюється досить точно. Однак зображення обтяжене артефактами у вигляді дуг, що дотикаються до реконструйованого образу, його інтенсивність значно менше, ніж у вихідного зразка, а кромки відновленого зображення розмиті (Рис.2(д) об'єкт $p_0^{(0)}$).

На першому кроці, для уточнення форми і розмірів відновлюваного об'єкта, був використаний алгоритм порогової обробки реконструйованого зображення. Припускаючи, що інтенсивність артефактів у реконструйованому зображенні менша інтенсивності корисного сигналу, проводився поділ зображення на фон і корисну частину (передній план). Для сегментації зображення на цьому етапі застосовувався метод Отцу. Отримане таким чином реконструйоване зображення з видаленими артефактами, що залишилися в фоновій частині, представляє з себе модель відновленого об'єкта, для якого тепер можна розв'язати пряму задачу оптоакустики.

Якість отриманого зображення оцінюється ступенем близькості (в деякій метриці) вихідного розподілу тиску на поверхні зразка

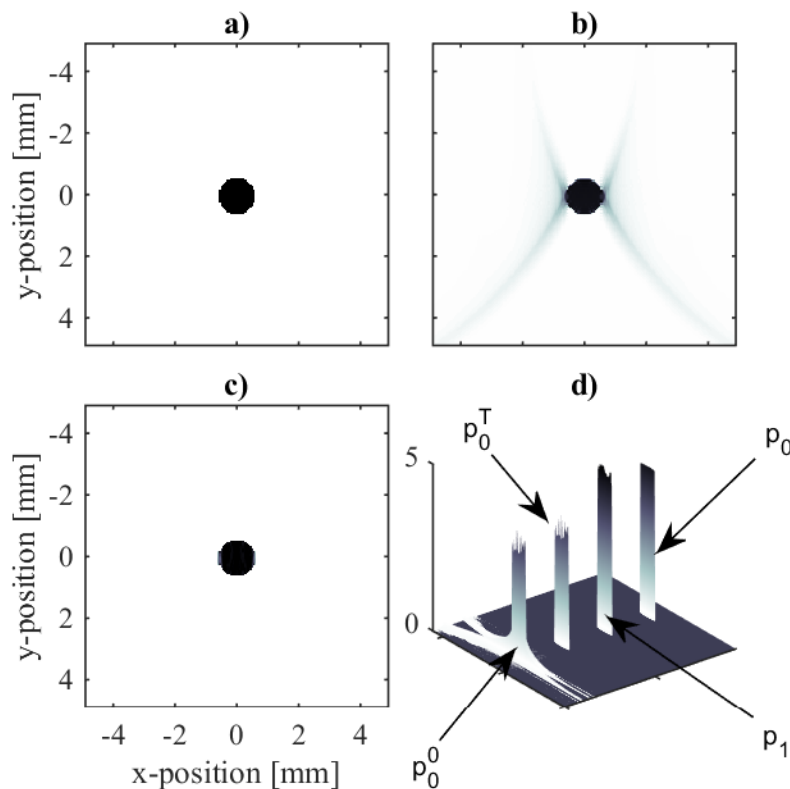


Рис.2.

$p_s(\vec{r}, t)$, до розподілу, отриманим в результаті розв'язання прямої задачі оптоакустики для відкоригованого зображення $p_s^{(i)}(\vec{r}, t)$ (де i – номер ітерації).

Мінімізуючи нев'язку між первинними експериментальними сигналами $p_s(\vec{r}, t)$ на поверхні зразка і розподілом тиску $p_s^{(i)}(\vec{r}, t)$, згенерованим в результаті розв'язання прямої задачі від нового скоригованого зображення можна отримати оптимальний поріг сегментації відновленого зображення, в якому видалено максимальну кількість артефактів, з мінімальною втратою корисної інформації.

$$T_{opt} = \arg \min_{T_i} (\|p_s(\vec{r}, t) - p(\vec{r}, t)_s^{(i)}\|), \quad (3)$$

тут $i = 0, 1, 2, \dots, N$ – це ітераційний крок при пошуку T_{opt} . У якості нульового наближення T_0 , використовувався алгоритм знаходження порога по Отсу, а подальше уточнення порогового рівня шукалось методом золотого перерізу.

Для порівняння якості реконструкції був використаний показник індексу структурної подібності ($SSIM$), що характеризує близькість зображень X і Y по яскравості, контрасту і структурі. У загальному випадку значення $SSIM(X, Y)$ визначається за формулою:

$$SSIM(x, y) = [l(x, y)]^\alpha \cdot [c(x, y)]^\beta [s(x, y)]^\gamma,$$

де $l(x, y) = \frac{2\mu_x\mu_y + c_1}{\mu_x^2 + \mu_y^2 + c_1}$ – функціонал яскравості,

$c(x, y) = \frac{2\sigma_x\sigma_y + c_2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + c_2}$, – функціонал контрасту,

$s(x, y) = \frac{\sigma_{xy} + c_3}{\sigma_x\sigma_y + c_3}$ – функціонал структури, а

$\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y$ і σ_{xy} – місцеві середні значення, стандартні відхилення і перехресна коваріація відповідно для відповідних зображень. Критерій $SSIM$ приймає значення від -1 до 1. Значення 1 досягається лише тоді, коли порівнювані зображення однакові.

$SSIM$ задовольняє властивостям симетрії, невід'ємності та тотожності нерозпізнаних. Хоча $SSIM$ не задовольняє нерівності трикутника, і, отже, не є метрикою відстані, за певних умов він може бути перетворений в нормовану кореневу міру середньоквадратичного відхилення, яка є метрикою відстані. Квадрат такої метрики не опуклий, а локально опуклий і квазіопуклий, що робить $SSIM$ прийнятним для оптимізації.

В результаті реалізації алгоритму порогової оптимізації були отримані такі значення індексу структурної подібності для реконструкції диску:

$SSIM(p_0, p_0^{(0)}) = 0.41$, $SSIM(p_0, p_0^{(1)}) = 0.8$,
 $SSIM(p_0, p_0^{(T)}) = 0.95$. Тут p_0 – вихідне зображення, $p_0^{(0)}$ – зображення, реконструйоване k-Wave алгоритмом, $p_0^{(1)}$ – зображення після порогової обробки з порогом по Отсу, $p_0^{(T)}$ – зображення, реконструйоване з оптимальним порогом T_{opt} .

На Рис.2(d) представлені реконструйовані зображення $p_0^{(0)}, p_0^{(T)}$ і оригінальне зображення p_0 в тривимірному просторі, коли по вісі аплікату відкладені значення інтенсивності відповідних образів. З рисунку видно, що запропонована ітеративна порогова процедура ефективно видаляє артефакти в реконструйованому зображенні $p_0^{(T)}$, успішно відновлює кромки, проте його інтенсивність приблизно на 20-30% менша інтенсивності оригінального зображення p_0 .

Для компенсації цього спотворення і внесення відповідної поправки розв'яжемо пряму задачу оптоакустики для джерела $p_0^{(T)}$ і по змодельованим на поверхні даним виконаємо задачу реконструкції цього зображення $p_1^{(0)}$ (друге відтворене зображення). Очевидно, спотворення, обумовлені алгоритмом реконструкції, при цьому, залишаться тими ж, що і при відновленні першого зображення. Однак тепер у нашому розпорядженні є і оригінал $p_0^{(T)}$, і його реконструкція $p_1^{(0)}$. Ця обставина дає можливість знайти коригувальний множник, який потім дозволить змінити перше відтворене зображення і наблизити його до невідомого раніше оригінального зображення p_0 .

Змодельуємо процес спотворення зображення наступним чином:

$$Y(x, y) = H(x, y) * X(x, y) + N(x, y), \quad (4)$$

де $Y(x, y)$ – спотворене зображення, $X(x, y)$ – вихідне оригінальне зображення, $N(x, y)$ – шумова перешкода, $H(x, y)$ – функція спотворення (інші синоніми – Point spread function – PSF, ядро спотворюючого оператора), « * » – операція згортки. Задача відновлення спотвореного зображення полягає в знаходженні найкращого за деяким критерієм наближення вихідного зображення $X(x, y)$. Згідно теореми про згортку, вираз (4) в частотній області перепишеться у вигляді: $\tilde{Y}(u, v) = \tilde{H}(u, v) \cdot \tilde{X}(u, v) + \tilde{N}(u, v)$,

де $\tilde{Y}(u, v)$, $\tilde{H}(u, v)$, $\tilde{X}(u, v)$ і $\tilde{N}(u, v)$ – Фур'є образи відповідних функцій. Оскільки операція згортки комутативна, оцінку $\hat{\tilde{H}}(u, v)$ можна отримати відразу ж, використовуючи інверсну фільтрацію:

$$\hat{\tilde{H}}(u, v) = \frac{\tilde{Y}(u, v)}{\tilde{X}(u, v)}.$$

Однак, з огляду на можливу нестійкість такого підходу, при отриманні оцінки $\hat{\tilde{H}}(u, v)$ використовувався метод регуляризації Тихонова:

$$\hat{\tilde{H}}(u, v) = \frac{\tilde{X}^*(u, v)}{|\tilde{X}(u, v)|^2 + \alpha |L(u, v)|^2} \cdot \tilde{Y}(u, v), \quad (5)$$

де α – параметр регуляризації, а $L(u, v)$ – Фур'є-перетворення оператора Лапласа (матриця 3×3).

Нехай в формулі (5) $\tilde{X}(u, v) = F\{p_0^{(T)}\}$, $\tilde{Y}(u, v) = F\{p_1^{(0)}\}$, де $F\{\cdot\}$ – оператор перетворення Фур'є. Тоді остаточно уточнена оцінка Фур'є-образу оригінального зображення отримується з виразу:

$$\hat{P}_1(u, v) = \frac{\hat{\tilde{H}}^*(u, v)}{|\hat{\tilde{H}}(u, v)|^2 + \alpha_1 |L(u, v)|^2} \cdot F\{p_0^{(0)}\}, \quad (6)$$

що дозволяє після оберненого перетворення Фур'є отримати уточнену оцінку розв'язку вихідної оптоакустичної задачі в просторовій області:

$$\hat{p}_1(x, y) = F^{-1}\{\hat{P}_1(u, v)\}. \quad (7)$$

На Рис.2(d) відкоректоване зображення $\hat{p}_1(x, y)$ дано в тривимірному поданні, а на Рис.3 представлені лінійні профілі реконструйованих зображень $p_0^{(0)}, p_0^{(T)}, \hat{p}_1$ і оригінальне зображення p_0 . Положення і орієнтація перетинів позначені на Рис.3(a) відповідними стрілками, де представлено $p_0^{(0)}$ наближення зображення p_0 . З рисунка видно, що в результаті роботи алгоритму кромки відновленого зображення $\hat{p}_1$ стають чіткішими, що в кінцевому підсумку дозволяє проводити реконструкцію з більш високою роздільною здатністю. Інтенсивність реконструйованого зображення практично збігається з оригіналом, а фонові шуми і артефакти ефективно видаляються, що призводить до істотного поліпшення відношення сигнал/перешкода. Аналогічні результати отримані і для більш складних 2D і 3D об'єктів.

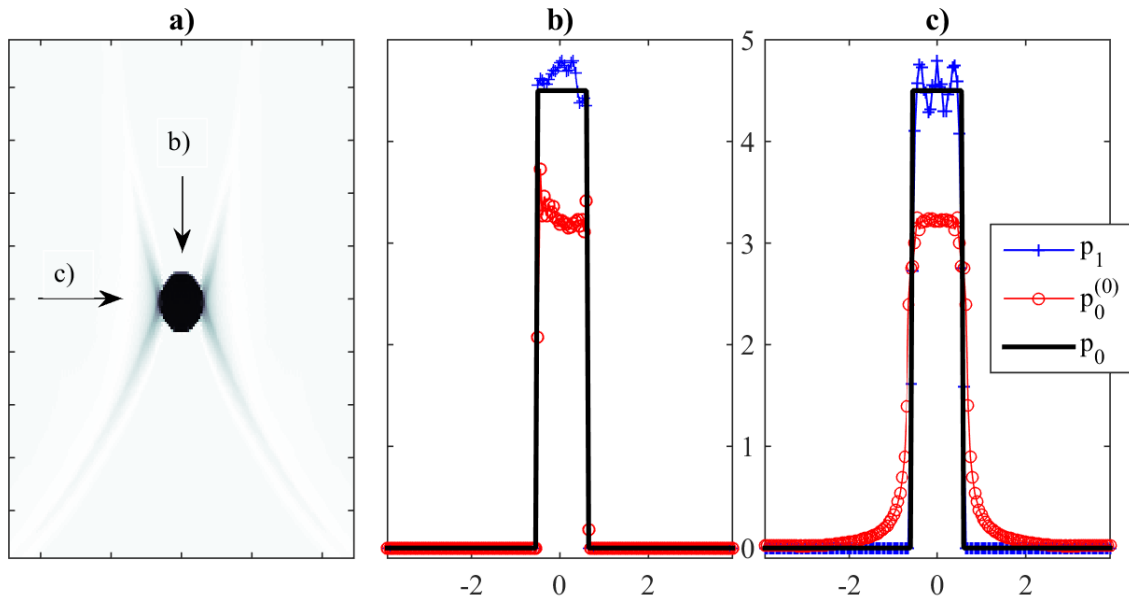


Рис.3. а) Нульова ітерація зображення диска $p_0^{(0)}$; б)-с) лінійні профілі реконструйованих зображень $p_0^{(0)}$, $\hat{p}_1$ і оригінальне зображення p_0 .

На Рис.4 представлені результати роботи алгоритму для двовимірного фантома судинного дерева. Тут особливо слід підкреслити, що запропонований алгоритм ітеративної корекції ефективно працює як для горизонтальних, так і для

вертикальних лінійних структур, які особливо погано реконструюються при обмеженому огляді і лінійному розташуванні датчиків лише на верхній поверхні зразка (див. наприклад, вертикальні сегменти гілок на середній панелі Рис.4).

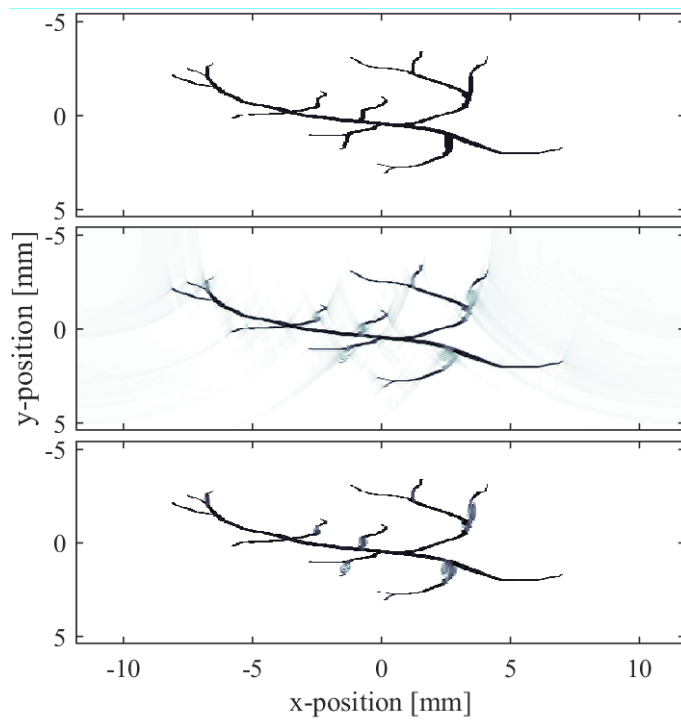


Рис.4.

Верхня панель – оригінальне зображення p_0 ; середня панель – відтворене зображення $p_0^{(0)}$; нижня панель – відкоректоване зображення $\hat{p}_1$.

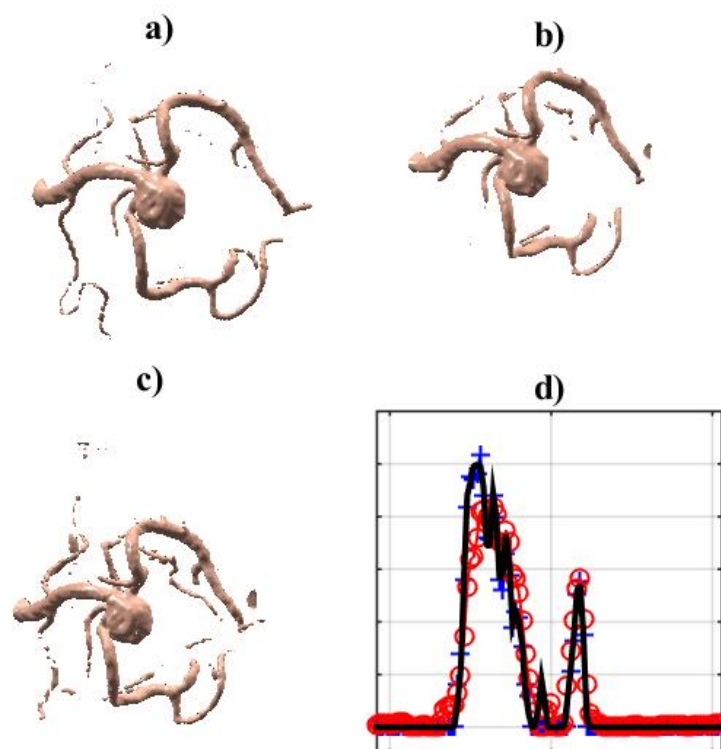


Рис.5.

Реконструкція 3D-фантома аорти з анеризмою.

- а) оригінальне зображення p_0 ; б) відтворене зображення $p_0^{(0)}$; в) відкоректоване зображення $\hat{p}_1$;
д) лінійні профілі образів в центральній x - z перетині судинного дерева.

Аналогічний результат отримується і при 3D-моделюванні, коли в якості вихідного об'єкту, який необхідно реконструювати, була використана числова тривимірна модель аорти з анеризмою (Рис.5).

Тут на Рис.5(а) представлено оригінальне зображення аорти, на Рис.5(б) – результат k-Wave реконструкції (в наших позначеннях – $p_0^{(0)}$), а на Рис.5(в) – відкоригована версія відновленого зображення $\hat{p}_1$. Більш детально відмінності відновлених зображень можна бачити на Рис.5(д), де представлені результати реконструкції в

центральному x - z перетині змодельованого тривимірного судинного дерева (позначення ліній такі, як на Рис.3). Як і в двовимірному випадку, алгоритм значно точніше відтворює межі об'єкта, його кромки і інтенсивність.

Кількісні оцінки якості реконструкції в термінах індекса структурної подібності $SSIM$ для описаних відновлених об'єктів зведені в Таблиці 1. Очевидно, що запропонований алгоритм значно покращує якість реконструкції ОА зображень, як в двовимірному, так і в тривимірному випадку.

Таблиця 1.

Індекс структурної подібності $SSIM(p_0, p_{(i)}^{(j)})$

	$p_0^{(0)}$	$p_0^{(T)}$	$\hat{p}_1$
2D диск	0.41	0.95	0.99
2D судини	0.36	0.97	0.99
3D аорта	0.77	0.93	0.96

Висновки

Оптоакустична візуалізація – сучасний метод візуалізації, заснований на реєстрації ультразвукових хвиль, збуджуваних у досліджуваному середовищі при поглинанні імпульсного лазерного випромінювання неоднорідностями біотканини.

Основною метою цієї роботи була розробка і дослідження числового алгоритму, призначеного для корекції артефактів і спотворень, що виникають в результаті відновлення ОА-образів. Особливості реалізації конкретного методу реконструкції, такі, як адаптація до кутів огляду або геометричні характеристики реконструкції, необхідно було компенсувати застосуванням розробленого методу.

Для дослідження ефективності запропонованого алгоритму, в даній роботі була побудована числова модель оптоакустичного експерименту, що вміщує: 1) біологічне середовище з просторово однорідним акустичним поглинанням і довільним просторовим розподілом поглинання оптичної енергії і 2) приймальну лінійну (2D випадок) або плоску (3D випадок) акустичну антену, розташовану на поверхні досліджуваного зразка.

Для розв'язання оберненої задачі – відновлення істинних довільних оптоакустичних джерел – використовувався програмний пакет «k-wave Matlab toolbox». Цей пакет дозволяє моделювати середовище поширення звукових хвиль через такі

параметри, як густина і швидкість звуку в поєднанні з оптимізацією МАТЛАБ для роботи з матричними операціями, що дає можливість моделювати 2D і 3D просторові задачі з високою швидкістю обчислень.

Корекція отриманого нульового розв'язку проводилася за допомогою розробленого двоетапного ітеративного алгоритму. Перший етап алгоритму включає в себе порогову обробку відновленого розв'язку, а на другому етапі методом регуляризації Тихонова обчислюється коригувальний множник. На обох етапах результат розв'язання прямої задачі порівнювався з початковими змодельованими експериментальними даними. Було показано, що такий похід дозволяє ефективно відновлювати двовимірні і тривимірні зображення різної геометрії.

Якість реконструкції визначалася шляхом як кількісної, так і візуальної оцінки отриманих результатів. Для кількісної оцінки ефективності ітеративного алгоритму покращення якості реконструкції використовувався індекс структурної подібності.

Отримані в даній роботі результати можуть бути важливими з точки зору перспектив їх подальшого практичного застосування в задачах біомедичної візуалізації. Остаточні висновки про ефективність запропонованого в даній роботі підходу можна буде зробити після його тестування на масивах реальних експериментальних даних.

Список використаних джерел

References

1. Kim C. In vivo photoacoustic tomography of chemicals: high-resolution functional and molecular optical imaging at new depths. / Kim C, Favazza C, Wang LV. // Chem Rev. –2010;110(5): .–pp.2756–82.
2. Xu M. Photoacoustic imaging in biomedicine/ Xu M, Wang LV.// Rev Sci Instrum. –2006;77(4): .–305–598.
3. Li C. Photoacoustic tomography and sensing in biomedicine./ Li C, Wang LV.// Phys Med Biol. –2009;54(19): .–pp.59–97.
4. Wang D. Review on photoacoustic imaging of the brain using nanoprobe. / Wang D, Wu Y, Xia J. // Neurophotonics. –2016; 3(1): .–1.
5. Zhong J.. Imaging-guided high-efficient photoacoustic tumor therapy with targeting gold nanorods. / Zhong J, Wen L, Yang S, Xiang L, Chen Q, Xing D. //Nanomed Nanotechnol Biol Med. –2015;11(6): .–pp.1499–509.
1. KIM C, FAVAZZZ C, WANG LV. In vivo photoacoustic tomography of chemicals: high-resolution functional and molecular optical imaging at new depths. *Chem Rev*. 2010;110(5):2756–82.
2. XU M, WANG L.V. Photoacoustic imaging in biomedicine. *Rev Sci Instrum*. 2006;77(4):305–598.
3. Li C.,WANG L. V., *Photoacoustic tomography and sensing in biomedicine*// Physics in Medicine and Biology. – 2009. – 54, № 19. – P. 59-97.
4. WANG D, WU Y, XIA J. Review on photoacoustic imaging of the brain using nanoprobe. *Neurophotonics*. 2016;3(1):1.
5. ZHONG J., WEN L., YANG S, XIANG L, CHEN Q, XING D. Imaging-guided high-efficient photoacoustic tumor therapy with targeting gold nanorods. *Nanomed Nanotechnol Biol Med*. 2015;11(6): 1499-509.

6. LU J, GAO Y, MA Z, ZHOU H, WANG R.K, WANG Y. In vivo photoacoustic imaging of blood vessels using a homodyne interferometer with zero-crossing triggering. *J Biomed Opt.* .– 2017; .–22(3):036002.
7. Pu K. Semiconducting polymer nanoparticles as photoacoustic molecular imaging probes in living mice./ Pu K, Shuhendler AJ, Jokerst JV//. *Nat Nanotechnol.* .–2014; .–9(3):233–9.
8. Sandbichler M. A novel compressed sensing scheme for photoacoustic tomography. / Sandbichler M, Krahmer F, Berer T, Burgholzer P, Haltmeier M. // *SIAM J Appl Math.* .–2015; .–75(6): .–2475–94.
9. Гусев В.Е., Карабутов А.А. Лазерная оптоакустика / Гусев В.Е., Карабутов А.А. // .–М.: Наука, .–1991. .– 304 с.
10. Kuchment P. Mathematics of photoacoustic and thermoacoustic tomography/ Kuchment P., Kunyansky L. // *Handbook of Mathematical Methods in Imaging Springer,* .–2011. .–pp. 817-865.
11. Kuchment P. Mathematics of thermoacoustic tomography / Kuchment P., Kunyansky L // *European Journal of Applied Mathematics.* .–2008. Т. 19, № 02. .–pp. 191-224.
12. Xu M., Wang L. V. Universal back-projection algorithm for photoacoustic computed tomography / Xu M., Wang L. V.// *Biomedical Optics 2005 Intern. Society for Optics and Photonics,*– 2005.–pp. 251-254.
13. Lam R. B. Dynamic optical angiography of mouse anatomy using radial projections / Lam R. B., Kruger R. A., Reinecke D. R., DelRio S. P., Thornton M. M., Picot P. A., Morgan T. G. // *BiOS Intern. Society for Optics and Photonics,* .– 2010. .–pp. 756405-756405-7.
14. Bradley E. Treeby Modeling nonlinear wave propagation on nonuniform grids using a mapped k-space pseudospectral method// *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control.* .– Oct. 2013, .–No 10, .– P. 2208-2213.
15. Otsu N.. A Threshold Selection Method from Gray-Level Histograms./ Otsu, Nobuyuki// *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics* 9, .– . 1979, No. 1 .–pp.62-66.
16. Wang Zhou, Bovik, Alan C., Sheikh, Hamid R., and Simoncelli, Eero P. Image Quality Assessment: From Error Visibility to Structural Similarity. / Wang Zhou, Bovik, Alan C., Sheikh, Hamid R., Simoncelli, Eero P. // *IEEE Transactions on Image Processing*, 2004. Vol. 13, N 4, pp. 600–612.
17. Тихонов А.Н, Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач./ Тихонов А.Н, Арсенин В.Я. //.–М.:Наука. – 1979. .–285 с.
6. LU J, GAO Y, MA Z, ZHOU H, WANG R.K, WANG Y. In vivo photoacoustic imaging of blood vessels using a homodyne interferometer with zero-crossing triggering. *J Biomed Opt.* 2017;22(3):036002.
7. PU K, SHUHENDLER AJ, JOKERST JV. Semiconducting polymer nanoparticles as photoacoustic molecular imaging probes in living mice. *Nat Nanotechnol.* 2014;9(3):233–9.
8. SANDBICHLER M, AUTHOR-KRAHMER F, BERER T, BURGHOLZER P, HALTMEIER M. A novel compressed sensing scheme for photoacoustic tomography. *SIAM J Appl Math.* 2015;75(6):2475–94.
9. ГУСЕВ В.Е., КАРАБУТОВ А.А. Лазерная оптоакустика .М.: Наука, 1991. 304 с.
10. Kuchment P., Kunyansky L. Mathematics of photoacoustic and thermoacoustic tomography . *Handbook of Mathematical Methods in Imaging Springer*, 2011. С. 817-865.
11. Kuchment P., Kunyansky L. Mathematics of thermoacoustic tomography. *European Journal of Applied Mathematics.* 2008. Т. 19, № 02. Р. 191-224.
12. XU M., WANG L. V. Universal back-projection algorithm for photoacoustic computed tomography. *Biomedical Optics 2005 International Society for Optics and Photonics*, 2005. P. 251-254.
13. LAM R. B., KRUGER R. A., REINECKE D. R., DELRIO S. P., THORNTON M. M., PICOT P. A., MORGAN T. G. Dynamic optical angiography of mouse anatomy using radial projections. *BiOS International Society for Optics and Photonics*, 2010. PP. 756405-756405-7.
14. BRADLEY E. TREEBY. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control.* October 2013, No 10, P. 2208-2213.
15. OTSU, NOBUYUKI. A Threshold Selection Method from Gray-Level Histograms. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 9, No. 1 (January): 62-66. doi: 10.1109/TSMC. 1979.4310076.
16. WANG ZHOU, BOVIK, ALAN C., SHEIKH, HAMID R., SIMONCELLI, EERO P. Image Quality Assessment: From Error Visibility to Structural Similarity. *IEEE Transactions on Image Processing, Volume 13, Issue 4*, pp. 600–612, April 2004.
17. Тихонов А.Н, Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.:Наука. – 1979.-285 с.

Надійшла до редколегії 24.09.21

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 519.1

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/4.17>

Капустян¹ О.А. д.ф.-м.н., ст.н.с.
Петленко Ю. В.², к.е.н., доц.

O.A. Kapustian¹, D.Sc., Senior Researcher
Y. V. Petlenko², Ph.D., Associate Professor

Моделювання та керування складною освітньою системою

Modeling and Control for Complicated Education Systems

^{1,2} Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01033, Київ,
вул. Володимирська, 64.

^{1,2} Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Ukraine 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska str.

e-mail: ¹olenakapustian@knu.ua, ²f_knu@ukr.net

У роботі досліджено загальну математичну модель процесу формування і збереження рівня необхідного фінансування у складних освітніх системах, до яких входять класичні університети. Виходячи з міркування, що швидкість зміни величини фінансування визначається не лише потоками фінансування і реакцією системи, але і керуючими параметрами системи, досліджено відповідну задачу оптимального керування. На основі побудованого керування у формі оберненого зв'язку для незбуреної задачі обґрунтовано форму наближеного оптимального синтезу з переключенням для вихідної збуреної задачі.

Ключові слова: моделювання, складна освітня система, фінансування університетів, оптимальний синтез.

The paper aims to investigate the model of a complicated educational system, built on the basis of general principles of mathematical modeling of complex hierarchical systems. The model consists of three components, the interaction between them is provided by certain conditions. This interaction is the basis for modeling the main parameter of the study - the level of funding required for higher education.

An important feature of the modeled system is its controllability, because in a real educational system the controlling influence can be performed as an external management of the system to ensure an average level of funding. For the initial problem of optimal control, which consists of a parabolic equation with a multivalued reaction function of the system, the approximate synthesis problem for a certain class of target functionals with control restrictions is solved.

The results of modeling can be used in the development of various models of complex systems, as well as for decision-making in public administration and higher education management.

Key Words: model, complicated educational system, university financing, optimal synthesis.

Вимушені обмеження, пов'язані з попередженням проявів глобальної пандемії COVID-19, докорінно змінили умови функціонування класичних університетів та зумовили необхідність посилення заходів фінансової стабілізації не тільки в Україні, а й в усьому світі. Для того, щоб допомогти закладам вищої освіти пристосуватися до швидких, інколи досить критичних, змін у їх діяльності в умовах прояву глобальних наслідків пандемії COVID – 19, виникла нагальна потреба у дослідженнях, спрямованих на розробку рекомендацій для забезпечення фінансової стабілізації класичних

університетів. Під класичним університетом розуміємо вищий навчальний заклад, що здійснює освітню діяльність в системі природничо-наукових, гуманітарних і соціально-економічних галузей знань, проводить фундаментальну науково-дослідницьку діяльність, а також здійснює виховну та культурно-просвітницьку роботи, сприяє впровадженню передових технологій в економіку, бере активну участь у міжнародному співробітництві.

Сучасні освітні та економічні процеси відбуваються у досить складних умовах, для

опису й обґрунтування яких використовуються математичні моделі. Такі моделі є основою для виявлення й обґрунтування емпіричних закономірностей. На сьогодні розроблено велику кількість таких моделей, і всі вони використовують потужний математичний апарат системного аналізу, теорії прийняття рішень, теорії оптимального керування тощо.

Системний ієрархічний підхід до моделювання та аналізу складних освітніх систем, до яких можна віднести й класичні університети державної форми управління, продемонстрував свою ефективність [1]. Зокрема, на основі цього підходу досліджувалися процеси самоорганізації в освітніх системах, процеси накопичення знань [2].

Для функціонування ієрархічних освітніх систем важливою особливістю є визначення взаємодії між їх елементами. Оскільки під складною освітньою системою ми будемо розуміти саме класичні університети, які знаходяться у підпорядкуванні державних органів управління, то при дослідженні динаміки такої освітньої системи у якості основної характеристики можна вибрати певний рівень необхідного фінансування.

Важливою властивістю модельованої системи є її керованість, адже у реальній освітній системі завжди є керуючий вплив, який здійснює функції зовнішнього керування системою, щоб забезпечити у деякому сенсі середній рівень фінансування. Зовнішнє керування здійснюється державними органами управління у сфері освіти шляхом змін і уточнень планових витрат, а також через фінансування проведення різноманітних заходів у рамках бюджетних програм фінансування тощо.

Отже, швидкість зміни величини фінансування визначається не лише потоками фінансування і реакцією системи, але і керуючими параметрами системи.

Математичне моделювання рівня необхідного фінансування класичних університетів

Основою запропонованої моделі освітньої системи є взаємодія між трьома основними блоками [3], а саме «Середовище класичних університетів», «Середовище державних органів управління у сфері вищої освіти» «Соціальне оточення». Під кожним з цих блоків будемо розуміти наступне.

1. Середовище університетів складається з усіх класичних університетів України. Нехай загальна кількість класичних університетів дорівнює N , і

всі вони впорядковані за певною ознакою, скажімо, за щорічним рейтингом університетів, причому кожному університету відповідає номер $k \in [1, N]$. Будемо вважати, що кожен університет $k \in [1, N]$ в кожен момент часу $t \geq 0$ отримує певний рівень фінансування $u(k, t)$ (загальний фонд) від держави, тобто певний обсяг фінансування згідно з закладеними у бюджеті України програмами.

2. Середовище державних органів управління у сфері вищої освіти — це всі державні органи управління, які за своїм функціоналом опікуються закладами вищої освіти, розподіляють між ними фінансування у рамках загального фонду і є гарантованим джерелом фінансування для класичних університетів.

3. Соціальне оточення — це частина суспільства, яка безпосередньо не задіяна у роботі класичних університетів, проте в тій чи іншій мірі зацікавлена в його результаті (роботодавці, батьки абітурієнтів та студентів тощо). Будемо вважати, що соціальне оточення безпосередньо не впливає на рівень фінансування до загального фонду університетів, але може реагувати на цей рівень, впливаючи на університети і на середовище державних органів управління у сфері освіти за допомогою засобів масової інформації, соціологічних досліджень, через зниження попиту на освітні послуги класичних університетів тощо.

Під рівнем фінансування класичних університетів будемо розуміти спостережуваний рівень їх фінансування, отриманий при застосуванні Формули розподілу видатків державного бюджету на вищу освіту між закладами вищої освіти [4], затвердженої Постановою Кабінету Міністрів України від 24 грудня 2019 р. № 1146 «Про розподіл видатків державного бюджету між закладами вищої освіти на основі показників їх освітньої, наукової та міжнародної діяльності» зі змінами від 7 липня 2021 року. Для розрахунку цього рівня фінансування заклади вищої освіти, які належать до сфери управління Міністерства освіти і науки України, зобов'язані подавати щорічно звітність, в якій зазначається повний обсяг показників фактичної чисельності здобувачів вищої освіти, які навчаються у таких закладах, у розрізі, зокрема, рівнів вищої освіти, форм здобуття освіти, спеціальностей (спеціалізацій), джерел фінансування здобуття освіти

При моделюванні освітньої системи важливими є поняття мінімального та максимального рівнів фінансування, поняття

реакції оточення, реакції системи, потік фінансування.

Згідно з [4], державний замовник встановлює мінімальний і максимальний рівень фінансування освітньої діяльності закладу вищої освіти на відповідний рік.

Припустимо, що мінімальний та максимальний рівні знань залежать від часу. Таким чином, вважаємо, що в моделі відомі невід'ємні функції $u_1(t)$ — мінімальний та $u_2(t)$ — максимальний рівні фінансування у момент часу t .

Наведемо схему, яка описує взаємодію між компонентами моделі (Рисунок 1).

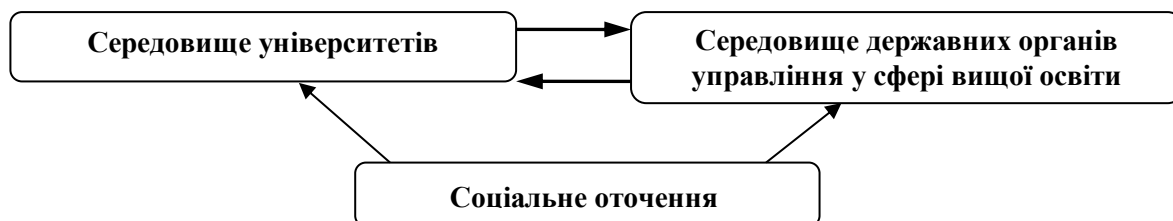


Рисунок 1. Схема взаємодій між компонентами моделі

Згідно [4], при описі взаємодії між компонентами моделі реакція системи визначається функцією

$f(u, k, t) = f_1(u, u_1(t), u_2(t), k, t) - f_2(u, u_1(t), u_2(t), k, t)$, де $f_1(u, u_1(t), u_2(t), k, t)$ - реакція університету k (фактично, міра прагнення університету до зміни рівня свого фінансування), а $f_2(u, u_1(t), u_2(t), k, t)$ - реакція оточуючого середовища на університет k . Функції f_1, f_2 можуть набувати як додатних, так і від'ємних значень.

При моделюванні маємо замкнену дискретну модель розподілу рівня фінансування $u(k, t)$ у даній системі. Переходячи до неперервної моделі, одержуємо крайову задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(u, x, t), & x \in (0, l), \quad t \in (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \\ u \Big|_{x=0} = u_0(x), \end{cases} \quad (1)$$

де нашим основним завданням буде з'ясування умов, за яких з часом зберігається деякий гарантований рівень фінансування $q(t) > 0$. Згідно схеми, яка описує взаємодію між компонентами моделі, та за певних припущень [5], можна визначити величину a , що

1. Соціальне оточення впливає на середовище державних органів управління у сфері вищої освіти, виступаючи як «стейкхолдери».

2. Між середовищами державних органів управління у сфері вищої освіти та університетів існує прямий і зворотній зв'язок, оскільки держані органи є джерелом фінансування для університетів і державний орган повинен розрахувати рівень фінансування закладу вищої освіти за допомогою Формули на основі звітності останнього.

3. Соціальне оточення реагує на формування рівня фінансування закладу вищої освіти через зниження або зростання попиту на освітні послуги класичних університетів.

характеризує інтенсивність потоку фінансування, через величину та характер реакції системи $f(u, x, t)$.

Сформулюємо основні умови, яким мають задовольняти параметри моделі (1):

1) функція a , що характеризує інтенсивність потоку фінансування, має бути додатною на $(0, l)$. Тому будемо вважати, що

$$a \in L^\infty(0, l), \quad a(x) \geq a_0 > 0 \quad \text{м. с. на } (0, l), \quad (2)$$

2) для функції реакції системи $f(u, x, t)$ виконуються умови:

відображення $(t, u) \mapsto f(u, x, t)$ неперервне для майже всіх $x \in (0, l)$,

відображення $x \mapsto f(u, x, t)$ вимірне для всіх $(u, t) \in [0, +\infty) \times (0, T)$,

а також виконані оцінки

$$|f(u, x, t)| \leq C_1(1 + |u|^{p-1}), \quad (3)$$

$$f(u, x, t) \leq -\gamma|u|^p + C_2, \quad p \geq 2, \quad \gamma, C_1, C_2 > 0. \quad (4)$$

За умов (2)-(6) для довільних початкових умов $u_0 \in L^2(0, l)$ існує (не обов'язково єдиний) розв'язок задачі (1).

Потрібно встановити умови, за яких для рівня фінансування на часовому проміжку $[0, T]$

зберігається деякий гарантований рівень $q(t) > 0$ (це фіксована функція). Для цього достатньо, щоб рівень фінансування у початковий момент часу $t=0$ був не нижче показника $q(0)$ і щоб у кожний момент часу $t \in [0, T]$ швидкість зміни рівня $q(t)$ визначалася реакцією системи на цей рівень. Це твердження встановлюється такою теоремою про збереження на деякому часовому проміжку заданого гарантованого рівня фінансування.

Теорема 1. [4] Нехай для задачі (1) виконані умови (2) – (6) і, крім того,

$$u_0(x) \geq q(0) \text{ для майже всіх } x \in (0, l), \quad (7)$$

$$f(q(t), x, t) > q'(t) \text{ для майже всіх } x \in (0, l), \\ \text{для всіх } t \in [0, T]. \quad (8)$$

Тоді існує розв'язок $u = u(x, t)$ задачі (1), для якого

$$u(x, t) \geq q(t) \text{ для майже всіх } x \in (0, l), \\ \text{для всіх } t \in [0, T]. \quad (9)$$

Отже, досліджено загальну математичну модель процесу формування і збереження рівня необхідного фінансування класичних університетів у складних освітніх системах.

Побудова наближеного синтезу для керування рівнем фінансування освітньої системи

Оскільки реальна освітня система завжди має керуючий вплив, який забезпечує у деякому сенсі середній рівень фінансування, то необхідно дослідити відповідну задачу оптимального керування. Для моделі, яка розглядається, нам потрібно знайти оптимальне керування у формі оберненого зв'язку (синтез). Щоб зробити це, нам потрібно представити функцію, яка характеризує реакцію системи, у вигляді $f(u, x, t) := \varepsilon F(y)$, де $\varepsilon > 0$ – малий параметр. Через те, що так представлена функція реакції системи є багатозначною, ми повинні перейти до простішої наближеної моделі. У цьому підрозділі для пошуку і обґрунтування форми наближеного синтезу в задачі оптимального керування, що складається з параболічного рівняння з багатозначною функцією реакції системи, на розв'язках якого потрібно мінімізувати коерцитивний цільовий функціонал при наявності обмежень на керування, ми зведемо початкову задачу до нескінченної сукупності задач оптимального керування малої розмірності. Принциповою відмінністю від існуючих результатів є врахування точки переключення, коли наближене керування виходить на обмеження. Використовуючи формулу

оптимального параметричного синтезу з переключенням для незбуреної задачі ($\varepsilon = 0$),

Нехай задано трійку гільбертових просторів $V \subset H \subset V^*$ з компактними та щільними вкладеннями. Позначимо через $\|\cdot\|$ та $(\cdot, \cdot)$ норму та скалярний добуток в просторі H відповідно. Позначимо через $\|\cdot\|_V$ норму в просторі V . Нехай при цьому

$$\forall u \in V \quad \|u\| \leq c \|u\|_V.$$

Розглянемо задачу:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + Ay = \varepsilon F(y) + u(t), & t \in [0, T] \\ y|_{t=0} = y_0 \in H \end{cases} \quad (10)$$

$$u(t) \in U = \{v \in H \mid |(v, X)| \leq \xi\} \subset H, \quad (11)$$

$$J(y, u) = \|y(T)\|^2 + \gamma \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \rightarrow \inf \quad (12)$$

Тут $\varepsilon \in (0, 1)$ – малий параметр, $X \in H$ – фіксований елемент, $\xi > 0$ та $\gamma > 0$ – константи, $A: V \rightarrow V^*$ – лінійний неперервний самоспряжений оператор,

$$\langle Au, u \rangle \geq \nu_1 \|u\|_V^2, \quad (13)$$

нелінійне відображення $F: H \rightarrow H$ – неперервне і таке, що задача (10) для кожного $u(t) \in U$ має єдиний розв'язок. Наприклад, це виконується, якщо $F: H \rightarrow H$ локально ліпшецеве, тобто

$$\forall R > 0 \quad \exists C(R) > 0 \quad \forall y, z \in H, \|y\| \leq R, \|z\| \leq R \\ \|F(y) - F(z)\| \leq C(R) \|y - z\|. \quad (14)$$

За виконання умов (13), (14) відомо [5], що задача оптимального керування (10)-(12) для всіх $\varepsilon \in (0, 1)$ має розв'язок. При цьому для незбуреної задачі (тобто при $\varepsilon = 0$) для широкого класу початкових даних і параметрів вдається знайти формулу оптимального керування в формі оберненого зв'язку [6, 7]. А саме, формула оптимального параметричного синтезу має вигляд:

$$u(t, y) = \begin{cases} -\alpha(t)(y, x), & t \in [0, \tau] \\ -\xi, & t \in [\tau, T] \end{cases} \quad (15)$$

де τ – розв'язок рівняння

$$\alpha(\tau)(y(\tau), x) = \xi, \quad (16)$$

$y(\cdot)$ – розв'язок рівняння (10) при $\varepsilon = 0$ з керуванням $u = -\alpha(t)(y, x)$.

Зауважимо, що точка переключення τ визначається як момент виходу керування на обмеження (11). Необхідно показати, що формули (15), (16) визначають закон синтезу, який є близьким до оптимального при достатньо малих значеннях параметра ε , а також враховує можливий вихід наближеного керування на обмеження (11).

Спочатку побудуємо оптимальний синтез незбуреної задачі (при $\varepsilon = 0$):

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + Ay = u(t), & t \in [0, T] \\ y|_{t=0} = y_0 \in H \end{cases} \quad (17)$$

$$u(t) \in U = \{v \in H \mid |(v, X)| \leq \xi\}, \quad (18)$$

$$J(y, u) = \|y(T)\|^2 + \gamma \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \rightarrow \inf. \quad (19)$$

Будемо вважати, що $X = X_1$, де тут і надалі $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty \subset (0, +\infty)$, $\{X_i\}_{i=1}^\infty \subset V$ – розв'язки спектральної задачі

$$Ax = \lambda x, \quad x \in V.$$

Тоді задача (17) – (19) розщеплюється на скінченну кількість одновимірних лінійно квадратичних задач вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dy_i}{dt} + \lambda_i y_i = u_i(t) \\ y_i|_{t=0} = (y_0, X_i) \\ \|\|y_i(T)\|^2 + \gamma \int_0^T u_i^2(t) dt \rightarrow \inf, \end{cases} \quad (20)$$

перша з яких має обмеження на керування:

$$|u_1(t)| \leq \xi. \quad (21)$$

Використовуючи необхідні й достатні умови оптимальності [8], можна показати, що за виконання умов

$$\frac{|(y_0, X_1)|e^{-2\lambda_1 T}}{\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2\lambda_1}(1-e^{-2\lambda_1 T})} < \xi_1, \quad \frac{|(y_0, X_1)|e^{-2\lambda_1 T}}{\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2\lambda_1}(1-e^{-2\lambda_1 T})} > \xi_1 \quad (22)$$

оптимальний синтез задачі (17) – (19) має вигляд:

$$u(t, y) = \begin{cases} -\sum_{i=2}^\infty \alpha_i(t) (y, X_i) X_i - \alpha(t) (y, X_1) X_1, & t \in [0, \tau] \\ -\sum_{i=2}^\infty \alpha_i(t) (y, X_i) X_i - \xi X_1, & t \in [\tau, T], \end{cases} \quad (23)$$

де точка переключення керування $\tau = \tau_0$ – розв'язок рівняння

$$\alpha(\tau) (y(\tau), X_1) = \xi, \quad (24)$$

функції $\alpha_i(t), i \geq 2$ та $\alpha(t) = \alpha_1(t)$ визначаються рівністю:

$$\alpha_i(t) = \frac{e^{2\lambda_i(t-T)}}{\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2\lambda_i}(1-e^{2\lambda_i(t-T)})}, \quad i \geq 1. \quad (25)$$

Тепер обґрунтуємо форму наближеного оптимального синтезу з переключенням для вихідної задачі.

Відомо [5], що умови (13) та (14) забезпечують для задачі (10) – (12) існування розв'язку

$$\{\bar{y}^\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon\} \in W(0, T) \times L^2(0, T, H),$$

де $W(0, T) = \{y \in L^2(0, T; V) \mid \frac{dy}{dt} \in L^2(0, T; V^*)\}$.

Розглянемо задачу:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + Ay = \varepsilon F(y) - \sum_{i=1}^\infty \alpha_i(t) (y, X_i) X_i, \\ y|_{t=0} = y_0 \end{cases} \quad (26)$$

Відзначимо, що для довільного $i \geq 1$ функції $\alpha_i(\cdot)$ монотонно зростають та задовольняють нерівностям $0 \leq \alpha_i(t) \leq \gamma$. Тоді відображення $F_1: [0, T] \times H \rightarrow H$, визначене формулою:

$$F_1(t, y) = - \sum_{i=1}^\infty \alpha_i(t) (y, X_i) X_i,$$

є неперервним за змінною t і глобально ліпшицевим за y . Тоді задача (26) є однозначно розв'язною в $W(0, T)$, тобто існує єдиний розв'язок задачі (26) $y^\varepsilon \in W(0, T)$.

Теорема 2. [9] Нехай початкові дані задовольняють умови (22). Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ рівняння

$$\alpha(\tau) (y^\varepsilon(\tau), X) = \xi$$

має розв'язок $\tau = \tau_\varepsilon$. Більш того, справедлива нерівність

$$|\tau_\varepsilon - \tau_0| \leq K\varepsilon$$

для деякої сталої $K > 0$, що не залежить від ε .

Теорема 3. [9] Синтез, визначений формулою (23), з точкою переключення $\tau = \tau_\varepsilon$ з теореми 2 є наближенням до оптимального в такому сенсі: для будь-якого $\delta > 0$ існує таке значення $\varepsilon_0 > 0$, що для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ справедливо, що:

$$|J(\bar{y}^\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon) - J(y^\varepsilon, u^\varepsilon(t, y^\varepsilon))| < \delta,$$

де y^ε – розв'язок задачі (10) з керуванням $u^\varepsilon(t, y^\varepsilon)$.

Висновки.

У роботі розглянута модель складної освітньої системи, побудованої на основі загальних принципів математичного моделювання складних ієрархічних систем. Модель складається з трьох компонент, взаємодія між якими забезпечується певними умовами і являє собою основу моделювання основного параметру дослідження – рівня необхідного фінансування закладу вищої освіти.

Для вихідної задачі оптимального керування, що складається з параболічного рівняння з багатозначною функцією реакції системи, розв'язана задача наближеного синтезу для певного класу цільових функціоналів при наявності обмежень на керування.

Результати моделювання можуть бути застосовані при розробці різноманітних моделей складних систем, а також для прийняття рішень у сфері державного управління й вищої освіти на основі їх аналізу.

Список використаних джерел

1. Малинецкий Г.Г. Математическое моделирование образовательных систем / Малинецкий Г.Г. // Синергетическая парадигма. Синергетика образования. – М.: Прогресс-Традиция, 2007. – С.328-345.

2. Ясинский В.В. Исследование процессов самоорганизации в образовательных системах на основе метода синергетического моделирования / Ясинский В.В. // Кибернетика и системный анализ, 2010. – №2. – С.161-174
<http://www.kibernetika.org/contents/10.doc>
3. Капустян О. Математична модель процесу формування та збереження колективних знань / Ясинський В., Капустян О., Валеро Х. // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2009. – № 2. – С. 67-75.
4. Постанова Кабінету Міністрів України від 24 грудня 2019 р. № 1146 «Про розподіл видатків державного бюджету між закладами вищої освіти на основі показників їх освітньої, наукової та міжнародної діяльності»
<https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-rozpodil-vidatkiv-derzhavnogo-byudzhetu-mizh-zakladami-vishchoyi-osviti-na-osnovi-pokaznikiv-yih-osvitnoyi-naukovoyi-ta-mizhnarodnoyi-diyalnosti-1146-241219>
5. Denkowski Z. Asymptotic behavior of optimal solutions to control problems for systems described by differential inclusions corresponding to partial differential equations / Denkowski Z., Mortola S. // Journal of Optimization Theory and Applications, 1993. – Vol. 78, N 2. – PP. 365-391, <https://doi.org/10.1007/BF00939675>
6. Белозеров В.Е. Геометрические методы модального управления / Белозеров В.Е., Капустян В.Е. – К.: Наукова думка, 1999. – 260 с.
7. Kapustian O.A. Approximate bounded synthesis for distributed systems / Kapustyan O.V., Kapustian O.A., Sukretna A.V. – Lambert academic publishing, 2013. – 236 p.
8. Бублик Б.Н. Основы теории управления / Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф. – К.: Вища школа, 1975. – 328 с.
9. Kapustian O.A. Approximate Optimal Controller for Weakly Nonlinear Evolutionary Equation of Parabolic Type / Gorban N.V., Kapustian O.A., Kapustyan O.V. // Cybernetics and System Analysis. – 2021. – Vol. 57 (6). – PP. 883-888
<https://doi.org/10.1007/s10559-021-00414-1>

References

1. MALINETSKIY G.G. Matematicheskoe modelirovanie obrazovatelnyh sistem // Sinergeticheskaya paradigma. Sinergetika obrazovaniya. – M.: Progress-Tradiciya, 2007. – PP. 328-345.
2. YASINSKIY V.V. Issledovanie processov samoorganizacii v obrazovatelnyh sistemah na osnove metoda sinergeticheskogo modelirovaniya // Kibernetika i sistemnyi analiz, 2010. – No 2. – PP. 161-174.
3. YASINSKIY V., KAPUSTYAN O. and VALERO J. Matematychna model procesu formuvannia ta zberezhenia kolektyvnyh znan. // Systemni doslidzhennia ta informatsiyni technologii. – 2009. – No 2. – PP. 67-75.
4. Resolution of the Cabinet of Ministers of Ukraine of December 24, 2019 № 1146 “On the distribution of state budget expenditures between higher education institutions on the basis of indicators of their educational, scientific and international activities”.
5. DENKOWSKI Z. Asymptotic behavior of optimal solutions to control problems for systems described by differential inclusions corresponding to partial differential equations / Denkowski Z., Mortola S. // Journal of Optimization Theory and Applications, 1993. – Vol. 78, N 2. – PP. 365-391.
6. BELOZEROV V.Y., KAPUSTYAN V.Y. Geometricheskie metody modalnogo upravleniya. – K.: Naukova Dumka, 1999. – 260 p.
7. KAPUSTYAN O.V., KAPUSTIAN O.A. and SUKRETNA A.V. Approximate bounded synthesis for distributed systems. – Lambert academic publishing, 2013. – 236 p.
8. BUBLIK B.N., KIRICHENKO N.F. Osnovy teorii upravleniya. – K.: Vyshcha Shkola, 1975. – 328 p.
9. GORBAN N.V., KAPUSTIAN O.A. and KAPUSTYAN O.V. Approximate Optimal Controller for Weakly Nonlinear Evolutionary Equation of Parabolic Type // Cybernetics and System Analysis. – 2021. – Vol. 57 (6). – PP. 883-888.

Надійшла до редколегії 30.11.2021

УДК 519.1

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/4.18>

Собчук В. В.¹, д.т.н., доц.,
Замрій І.В.², к.ф.-м.н., доц.
Барабаш О. В.³, д.т.н., проф.,
Мусієнко А. П.⁴, д.т.н., доц.

V. V. Sobchuk¹, D.Sc., Associate Professor,
I. V. Zamrii², Cand. of Phys. and Math. Sc. (Ph.D.),
Associate Professor,
O. V. Barabash³, D.Sc., Professor,
A. P. Musienko⁴, D.Sc., Associate Professor.

Методологія побудови функціонально стійкої інтелектуальної інформаційної системи виробничого підприємства

Methodology for building a functionally stable intelligent information system of a manufacturing enterprise

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01033, Київ,
вул. Володимирська, 64,

² Державний університет телекомунікацій,
03141, м. Київ, вул. Солом'янська, 7,

^{3,4} Національний технічний університет
України «Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського», 03056, м. Київ, вул.
Політехнічна, 6, корпус 5.

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Ukraine 01033, Kyiv, Vladimirska street, 64,

² State University of Telecommunications, 03141,
Kyiv, Solomianska street, 7,

^{3,4} National Technical University of Ukraine «Kyiv
Polytechnic Institute named after Igor Sikorsky»,
03056, Kyiv, Polytechnic street, 6, building 5.

e-mail: ¹v.v.sobchuk@gmail.com ²irinafraktal@gmail.com ³bar64@ukr.net ⁴mysienkoandrey@gmail.com

В роботі удосконалено методику забезпечення властивості функціональної стійкості інтелектуальної інформаційної системи підприємства, за рахунок представлення функціонування системи у вигляді формалізованого процесу, в якому основними типами процедур є накопичення перевірок, аналіз перевірочних зв'язків, діагностування модуля, що відмовив та відновлення функціонування системи. Зазначена методика дозволяє забезпечити властивість функціональної стійкості інформаційної системи підприємства.

Ключові слова: функціональна стійкість, достовірність виявлення несправності, ймовірність відновлення працездатності, час відновлення працездатності.

The article analyzes the concept of process management in an industrial enterprise, which provides functional stability of technological processes using information systems of various types and allows to increase productivity of all production centers while reducing the number of people employed in production and the impact of various destabilizing factors. The research of existing mathematical models of functionally stable complex technical systems and formalization of the main types of procedures of the process of functioning of the intellectual information system of the enterprise is carried out. The method of ensuring the properties of functional stability of the intelligent information system of the enterprise is improved by presenting the functioning of the system in the form of a formalized process, in which the main types of procedures are accumulation of tests, analysis of test links, diagnosing a failed module and restoring the system. This technique allows to ensure the property of functional stability of the information system of the enterprise.

Key Words: functional stability, reliability of detection of malfunction, probability of restoration of working capacity, time of restoration of working capacity.

Розвиток сучасного суспільства вимагає інтенсивного розвитку інформаційних технологій з високим ступенем автономності. Особливо гостро ця проблематика стосується виробничих підприємств, які функціонують в умовах впливу екстремальних факторів. Серед таких

підприємств вирізняються підприємства металургії, енергетики, хімічної промисловості тощо. Функціонування виробничих підрозділів таких підприємств забезпечують інформаційні системи різного типу. За допомогою цих систем здійснюється планування та контроль усіх

процесів [1, 2]. Вони працюють в автономному режимі під впливом зовнішніх та внутрішніх дестабілізуючих факторів [3, 4].

Огляд останніх досліджень та публікацій. Аналіз умов побудови та функціонування інформаційної системи з розподіленими у просторі динамічними об'єктами управління показав, що відомі властивості складних технічних систем, такі як надійність, живучість, стійкість, в цілому характеризують функціонування інформаційної системи при дії відмов і збоїв, але не дозволяють повною мірою описати процеси функціонування в умовах значних руйнувань, дії потоків відмов і несправностей, можливих умисних дій, а також помилок обслуговуючого персоналу чи інших внутрішніх і зовнішніх дестабілізуючих чинниках [5, 6]. Тому, доцільно розглядати таку властивість складних технічних систем, як функціональна стійкість. Функціональна стійкість будь якої розподіленої інформаційної системи – це її властивість перебувати в стані працездатності, тобто виконувати необхідні функції протягом заданого інтервалу часу або наробітку в умовах відмов складових частин через зовнішні і внутрішні дестабілізуючі впливи. Функціональна стійкість забезпечується застосуванням у складній технічній системі різних, вже існуючих видів надмірності (структурної, часової, інформаційної, функціональної, навантажувальної та ін.) шляхом їх перерозподілу з метою парирування наслідків позаштатних ситуацій [7-9].

За допомогою інформаційних систем можна забезпечити підвищення продуктивності праці усіх виробничих центрів при зменшенні числа зайнятих у виробництві людей та значному зменшенні частки ручної праці [6, 10]. За негативного впливу зовнішніх та внутрішніх дестабілізуючих факторів модулі систем можуть виходити з ладу. Проте, системи повинні функціонувати в автономному режимі протягом заданого часу. Під зовнішніми та внутрішніми дестабілізуючими факторами розуміються відмови, збої модулів системи, механічні пошкодження, теплові впливи, помилки обслуговуючого персоналу. Основними етапами забезпечення функціональної стійкості є виявлення модуля, який відмовив при контролі, діагностування модуля, який відмовив та відновлення функціонування інформаційної системи підприємства [10-12].

Мета статті. Відтак однією з найголовніших передумов є забезпечення функціональної

стійкості інтелектуальної інформаційної системи підприємства [13, 14]. Для цього чи не найефективнішим підходом є застосування певної методики забезпечення властивості функціональної стійкості інформаційної системи підприємства, за рахунок представлення функціонування системи у вигляді формалізованого процесу, в якому основними типами процедур є накопичення перевірок, аналіз перевірочних зв'язків, діагностування модуля, що відмовив та відновлення функціонування системи.

Дослідження існуючих математичних моделей функціонально стійких складних технічних систем. Відомо, що математична модель, яка описує формалізований процес функціонування складної технічної системи, зокрема, інформаційної системи підприємства, включає в себе лише основні характеристики. Додаткові характеристики в таких моделях не розглядаються. При розгляді функціональної стійкості систем головним завданням є визначення стану відмови системи. Тому процес функціонування розглядається як процес послідовної зміни станів. Зазвичай основні складові математичних моделей формуються при виконанні таких операцій:

- визначення типів несправностей (постійні, мигаючі чи збій);
- встановлення закону розподілу для часу виникнення несправностей в системі;
- формалізація поняття збою в інформаційній системі;

В ролі параметрів, що описують процес функціонування інформаційної системи використовують:

- час знаходження несправності в системі t_d ;
- достовірність виявлення несправності D ;
- ймовірність відновлення працездатності системи P_B ;
- час відновлення працездатності системи T_B .

Для багатомодульних систем з пасивним та активним надлишковим ресурсом можливі декілька варіантів розкриття параметрів, які описують функціонування системи.

Варіант 1. Варіант характеризується тим, що процедура діагностування та відновлення в системі не розглядається. Вважається, що будь-яка відмова в системі одразу виявляється та відбувається відновлення системи. Відмовою таких систем вважається стан коли виникає несправність, а надлишковий ресурс вже вичерпаний, тобто коли відмовить $N + 1$ модуль, а надлишкових модулів N , $N \in \mathbb{N}$.

Варіант 2. На відміну від першого варіанту в даному випадку *враховується час відновлення системи*. Припускається, що процедура виявлення модуля, що відмовив та відновлення системи шляхом заміни на справний модуль виконуються з ймовірністю рівною одиниці. Відмова системи може відбутися лише у випадку, коли під час відновлення системи виникне відмова ще одного модуля або коли відмовить більше одного модуля системи.

Варіант 3. Характеризується тим, що *враховується лише процедура діагностування*. При цьому вважають, що несправність виявляється миттєво. Для таких моделей під відмовою системи розуміється стан, коли відмовлять усі резервні модулі та один модуль працюючої конфігурації або буде виявлена несправність.

Варіант 4. Враховується не лише достовірність виявлення несправностей, а і *ймовірність успішного відновлення системи*. Приклад такої моделі розглянутий в роботі [15], де вводиться параметр P_0 – умовна ймовірність успішної заміни активного модуля, що відмовив, при наявності відмови і P_B – умовна ймовірність ізоляції резервного модуля, що відмовив, при наявності відмови. Необхідно зазначити, що дані параметри враховують тільки якість алгоритмів, а апаратура, яка забезпечує дані алгоритми вважається безвідмовною.

Варіант 5. Відрізняється від варіанту 4 тим, що *враховує час відновлення системи*. Приклад такої моделі наведено в [16]. В такій моделі один модуль є активним, а другий знаходиться в стані ненавантаженого резерву, що очікує включення, коли активний модуль вийде з ладу. Відмовою системи вважається стан, коли після відмови активного модуля не відбудеться успішне відновлення системи або у випадку відмови обох модулів до моменту відновлення системи. Припускається, що наробіток на відмову і час відновлення задаються експоненціальним законом розподілу. Після відновлення системи в ній знову працюють два модулі: активний та резервний.

Варіант 6. Останнім часом будуються моделі, в яких детально *розглядається процес діагностування та відновлення системи*. При цьому звертається увага, що, в міру того як система використовує свої ресурси, витрати на реалізацію процесу відновлення можуть зрости, враховуючи при цьому час відновлення. З цього випливає, що час відновлення системи різний на протязі всього процесу функціонування системи.

Крім того, наслідки від появи несправностей в системі не рівноцінні. Тобто не однакова глибина областей поширення несправностей. Процес відновлення працездатності системи складається з декількох процедур кожна з яких має свою випадкову дію, що залежить від виду несправності.

З практичної точки зору, важливою є ситуація, коли інформаційні системи підприємства функціонують автономно та мають жорсткі обмеження на час відновлення системи. Тобто може трапитися випадок, коли система не відновить працездатність за встановлений час. Для таких моделей під відмовою системи розуміється подія відмови всіх резервних модулів системи та одного модуля робочої конфігурації або відмова будь-якого модуля і його невиявлення або невідновлення помилки, що викликана даною відмовою або невідновленням працездатності системи після відмови на протязі встановленого часу.

Вибір кожної з розглянутих моделей залежить від поставлених вимог до адекватності опису зміни станів системи та точності отриманих результатів.

Для інформаційних систем підприємства значну роль відіграє час знаходження несправності t_d . Тому модель, яка описує функціонування інформаційної системи підприємства з точки зору її функціональної стійкості повинна враховувати параметр t_d . Крім того, процедури виявлення несправностей і відновлення системи реалізуються засобами самої системи. З цього випливає, що *параметри t_d , D , P_B , і T_B є функціями стану системи*, тобто після виявлення кожної несправності і відновлення системи вказані параметри будуть змінюватися.

Відтак, підсумовуючи вище сказане, приходимо до висновку що жодна із розглянутих моделей не дозволяє в повній мірі досліджувати властивість функціональної стійкості інформаційної системи промислового підприємства. Тому виникає необхідність розробити модель, яка здатна забезпечити задану точність результатів, що відображають функціональну стійкість інформаційної системи підприємства та, яка враховуватиме при цьому введені параметри t_d , D , P_B , і T_B .

Формалізація основних типів процедур процесу функціонування інтелектуальної інформаційної системи підприємства. Як зазначено в [10] функціональна стійкість інформаційних систем підприємства може бути

забезпечена шляхом використання методів контролю та адаптивного самодіагностування для виявлення та локалізації несправностей в системі.

Модель функціонально стійкої інформаційної системи підприємства повинна враховувати всі параметри, що описують функціонування та залежності даних параметрів від стану системи. В основі такої моделі лежить представлення функціонування системи у вигляді процесу ξ_t :

$$\xi_t = \langle N, N_s, \text{ТП}, n_0, \rho, \varphi \rangle \quad (1)$$

де N – число активних модулів в системі; N_s – число модулів, які відмовили але продовжують працювати (тобто ті, які ще не виявлені або виявлені, але приймають участь в елементарних перевірках); ТП – тип процедури; n_0 – номер операції; ρ, φ – відповідні параметри процесу.

Процес ξ_t має наступні типи процедур:

- накопичення перевірок для контролю системи (НК);
- аналіз структури перевірочних зв'язків (АЗ);
- накопичення перевірок для діагностики системи (НД);
- аналіз сукупності результатів перевірок для визначення модуля, що відмовив (АД);
- відновлення роботи системи (В).

Номер операції n_0 відповідає номеру циклу всередині процедури; параметр ρ характеризує момент виникнення відмови відносно номера операції; параметр φ характеризує момент виявлення відмови відносно номера операції.

Процес ξ_t може бути представлений у вигляді графу станів-переходу (рис. 1). На рисунку визначені стани об'єднані в блоки. Так в блок контролю (БК) входять K , $K \in \mathbb{N}$ станів, а в блок діагностування (БД) входять $m = \sum_{i=1}^k i$, станів, які відрізняються n_0, ρ, φ .

Під відмовою системи будемо розуміти складну подію, яка складається хоча б з однієї з умов:

- має місце відмова такої кількості модулів при якій система не в змозі виконувати мінімальний об'єм задач;
- відмова модуля не визначена за встановлений період часу;
- система після відмови одного з модулів не була відновлена за встановлений час.

Розглянемо детальніше окремо виділені типи процедур процесу ξ_t .

Удосконалення інтелектуальної інформаційної технології накопичення перевірок та аналіз структури перевірочних

зв'язків. Процедура накопичення перевірок і аналізу структури перевірочних зв'язків можуть бути представлені у вигляді блоків контролю. При цьому блоки контролю розрізняються значеннями N, N_s, ρ, φ . Всі блоки контролю ідентичні тобто мають однакове число станів і однакові зв'язки між ним. Розглянемо структуру начального блоку контролю та визначимо його основні елементи.

Оскільки організація контролю модулів в інформаційній системі підприємства відбувається згідно стратегії самоконтролю з випадковим виконанням елементарних перевірок, то виникає задача визначити момент часу коли необхідно припинити накопичення перевірок та розпочати виконання аналізу структури перевірочних зв'язків (СПЗ).

Після виконання аналізу можливі дві ситуації:

- 1) буде видана інформація про справність всіх модулів системи.
- 2) буде вказано на необхідність виконання додаткових елементарних перевірок.

Після виконання додаткових перевірок знову проводиться аналіз СПЗ в результаті якого знову можливі дві ситуації. Таким чином процес додаткового накопичення елементарних перевірок може повторюватися декілька разів.

Початкове накопичення елементарних перевірок назвемо *основним циклом накопичення*, а всі інші додаткові накопичення – *додатковими циклами*. Основний цикл накопичення має $n_0 = 1$, а додаткові – $n_0 = i$, де $i = 2, 3, \dots, k$.

З точки зору достовірності контролю системи необхідно максимально збільшити час основного циклу накопичення для отримання більшого числа елементарних перевірок. Проте, при цьому збільшується час видачі інформації $T_{\text{ВІ}}$ про справність системи (проміжок часу між двома послідовними моментами видачі інформації про працездатність всіх модулів системи).

Специфіка таких задач та правильність їх розв'язків є причиною того, що в ІСП накладаються обмеження на час видачі сигналу про готовність її окремих модулів. Таким чином значення $T_{\text{ВІ}}$ бажано зменшувати. Отже, існує оптимальний час основного циклу накопичення. Можна показати, що існує оптимальне число додаткових циклів накопичення $n_0 = k$ і оптимальний час їх виконання.

Розглянемо випадок коли один з оптимізаційних параметрів D (достовірність видачі інформації) заданий таким способом $D \geq D_3$, де D_3 – задана достовірність. Тоді задача може бути сформульована так.

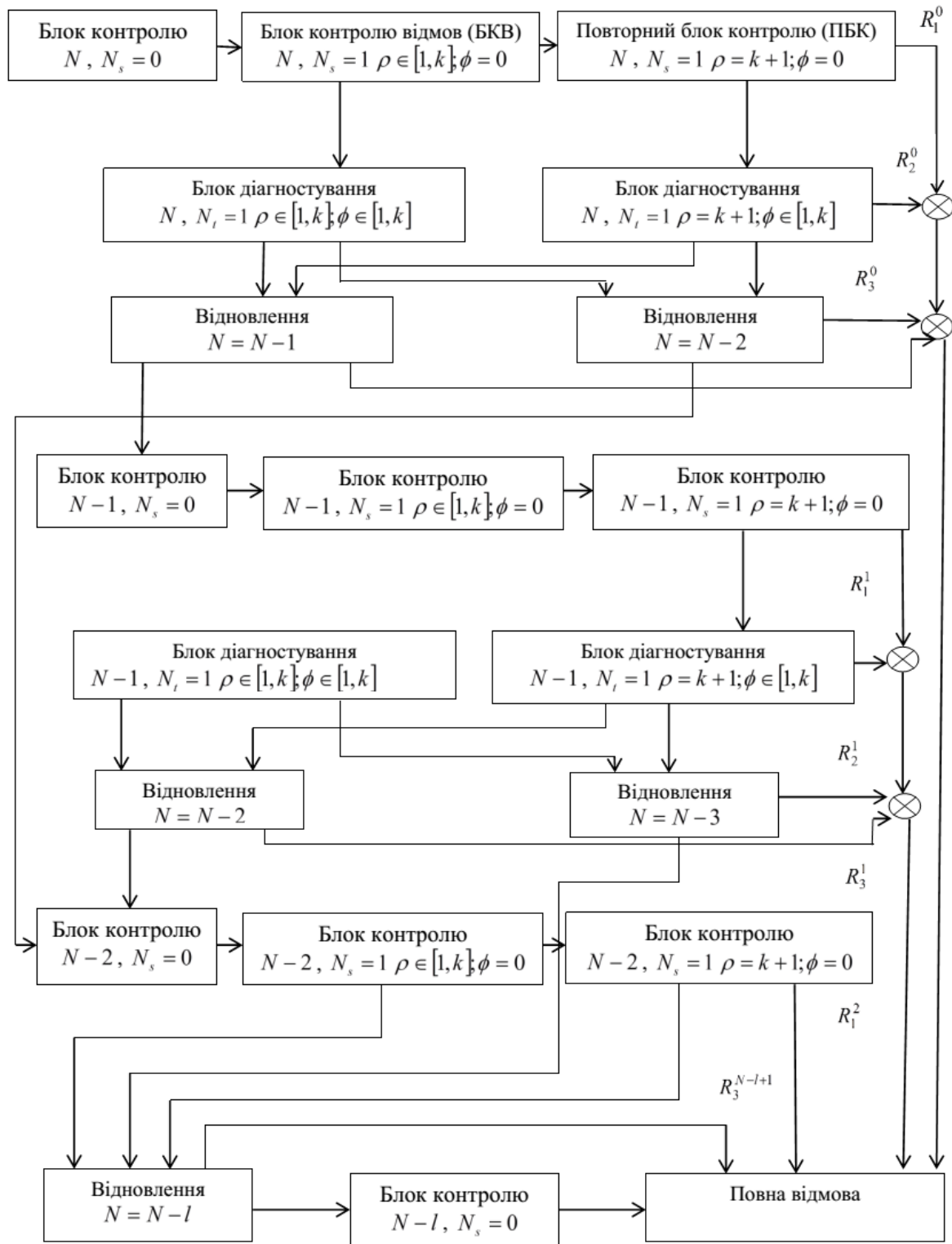


Рис. 1. Граф станів-переходу функціонування інформаційної системи підприємства

Задача 1. Необхідно визначити час основного циклу накопичення $T_{ОЦ}$, що забезпечує мінімальне значення $T_{ВІ}$ та при цьому забезпечує виконання умови $D \geq D_3$.

Вихідною інформацією для розв'язання сформульованої задачі є залежність між ймовірністю видачі інформації $T_{ВІ}$ та часом виконання набору перевірок T_H . В даному випадку параметр $T_{ОЦ}$ співпадає з T_H і тому

ймовірність $P_{\text{ВІ}}$ можна виразити через значення $T_{\text{ОЦ}}$ наступним чином:

$$P_{\text{ВІ}} = \begin{cases} 0, & \text{при } T_{\text{ОЦ}} \leq T_1, \\ f(T_{\text{ОЦ}}), & \text{при } T_1 < T_{\text{ОЦ}} < T_2, \\ L, & \text{при } T_{\text{ОЦ}} \geq T_2, \end{cases}$$

де L – число значень близьке до 1 ($L < 1$).

Для розв'язання отриманої задачі пропонується процес накопичення елементарних перевірок і аналізу СПЗ у вигляді ланцюга Маркова з дискретними станами і неперервним часом рис. 2.

Припускається, що після K -того додаткового циклу ймовірність $P_{\text{ВІ}} = L$. Тому з похибкою не більшою значення $(1 - L)$, можна вважати, що після K -того додаткового циклу накопичення елементарних перевірок буде видана інформація про справність модулів системи з достовірністю $D \geq D_3$.

Для графу станів складається система диференціальних рівнянь Колмогорова з якої визначається середній час перебування процедури контролю у всіх станах, за винятком стану видачі інформації. Отримуємо

$$P_{\text{ВІ}} = \sum_{i=1}^{2k+2} P_i(s) \Big|_{s=0} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + (1 - P_{1\text{ВІ}}) \times \left[\frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_4} + (1 - P_{2\text{ВІ}}) \left(\frac{1}{\lambda_5} + \frac{1}{\lambda_6} + (1 - P_{3\text{ВІ}}) \right) \times \dots \times \left(\frac{1}{\lambda_{2k+1}} + \frac{1}{\lambda_{2k+2}} \right) \right] \quad (2)$$

де $P_i(s)$ – перетворення Лапласа ймовірності перебування процедури контролю в i -тому стані; λ_i – інтенсивність переходу процедури контролю з i -того стану.

У випадку, коли після зупинки циклу накопичення елементарних перевірок інформація про справність модулів системи не може бути видана з достовірністю $D \geq D_3$, виконується додатковий цикл $T_{\text{ДЦ}_1}$. Ймовірність Q_1 того, що знадобиться додатковий цикл визначається на основі залежності $P_{\text{ВІ}} = f(T_{\text{Н}})$ таким способом

$$Q_1 = 1 - P_{\text{ВІ}}(T_{\text{ОЦ}}). \quad (3)$$

Не виключено, що потрібним буде другий

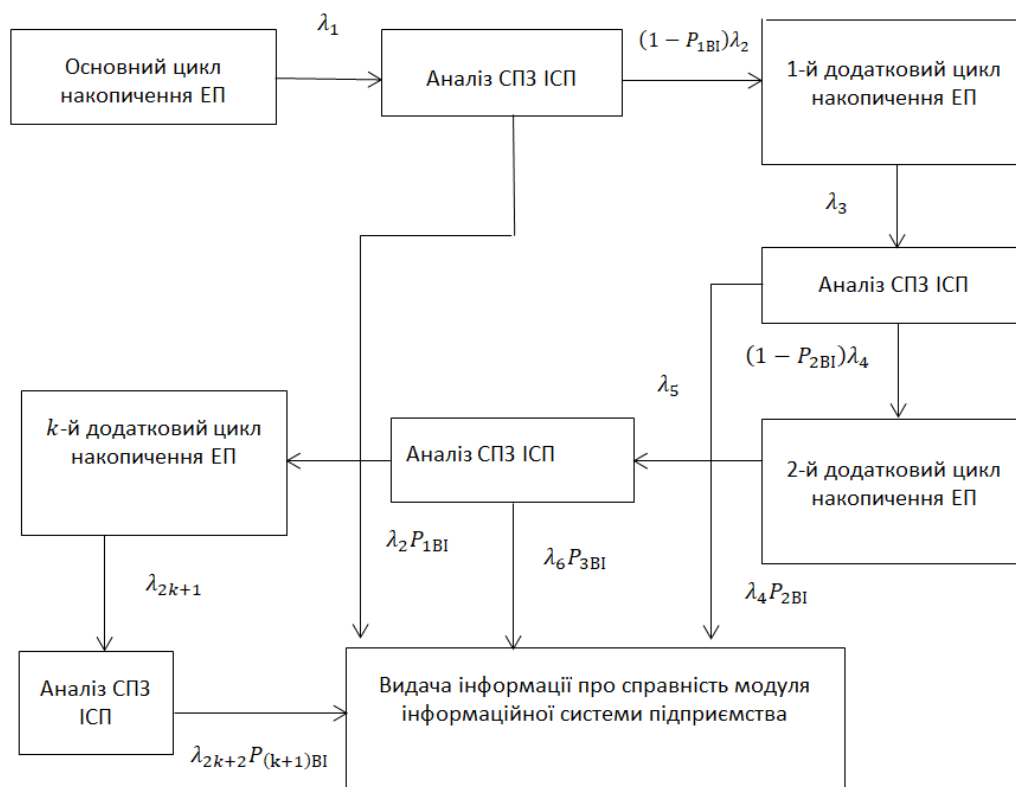


Рис. 2. Процес накопичення елементарних перевірок і аналізу структури перевірок зв'язків

$T_{\text{ДЦ}_2}$, третій $T_{\text{ДЦ}_3}$ і так далі до K -того – $T_{\text{ДЦ}_k}$ додаткові цикли. Ймовірності даних подій $Q_2, Q_3, \dots, Q_k$ визначаються наступним чином

$$Q_l = 1 - P_{\text{ВІ}}(T_{\text{ОЦ}} + \sum_{i=1}^{l-1} T_{\text{ДЦ}_i}), \quad (4)$$

$$l = 2, 3, \dots, k$$

Враховуючи те, що

$$\frac{1}{\lambda_1} = T_{\text{ОЦ}},$$

$$\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_4} = \dots = \frac{1}{\lambda_{2k+2}} = C,$$

$$\frac{1}{\lambda_3} = \frac{1}{\lambda_5} = \dots = \frac{1}{\lambda_{2k+1}} = T_{\text{ДЦ}_k},$$

вираз (4) можна представити у вигляді:

$$\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_4} = \dots = \frac{1}{\lambda_{2k+2}} = C,$$

$$\bar{T}_{\text{ВІ}} = T_{\text{ОЦ}} + C + (T_{\text{ДЦ}_1} + C)Q_1 + \dots + (T_{\text{ДЦ}_k} + C) \prod_{i=1}^{k-1} Q_i. \quad (5)$$

Таким способом отримали оптимізаційну задачу.

Задача 2. Необхідно знайти $T_{\text{ОЦ}}, T_{\text{ДЦ}_1}, \dots, T_{\text{ДЦ}_k}$ і K , при яких забезпечується мінімальне значення $\bar{T}_{\text{ВІ}}$.

При розв'язанні даної оптимізаційної задачі будемо враховувати наступні обмеження змінних

$$T_2 \geq T_{\text{ОЦ}} \geq b, \quad T_2 \geq T_{\text{ДЦ}_i} \geq d,$$

$$0 \leq K \leq \left\lfloor \frac{T_2 - b}{d + C} \right\rfloor,$$

де $T_2 = T_{\text{Н}}$, що задовольняє співвідношення $1 - P_{\text{ВІ}}(T_2) = \varepsilon$, ε – наперед задане значення, що прямує до нуля; b – задає область накопичення елементарних перевірок при якій $P_{\text{ВІ}} = 0$. Дослідження показують, що в більшості випадків $b \approx 5\tau_{\text{еп}}$ ($\tau_{\text{еп}}$ – час виконання елементарної перевірки); d – мінімальний час виконання додаткового циклу. Можна вважати, що $d \approx 2\tau_{\text{еп}}$.

Оскільки оптимальне значення для величини K невідоме, то потрібно для всіх допустимих значень отримати локальний мінімум $(\bar{T}_{\text{ВІ}})_j^0$, $j = 1, 2, \dots, k$. Після цього необхідно серед отриманих K значень $\{(\bar{T}_{\text{ВІ}})_j^0\}$ вибрати найменше, яке й буде глобальним екстремумом.

Для визначення кожного $(\bar{T}_{\text{ВІ}})_j^0$ спочатку визначають необхідні умови екстремуму (тобто

стаціонарні точки $T_{\text{ОЦ}}^0, T_{\text{ДЦ}_1}^0, \dots, T_{\text{ДЦ}_k}^0$). Стаціонарні точки знаходяться з системи рівнянь

$$\frac{\partial \bar{T}_{\text{ВІ}}}{\partial T_{\text{ОЦ}}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{T}_{\text{ВІ}}}{\partial T_{\text{ДЦ}_1}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{T}_{\text{ВІ}}}{\partial T_{\text{ДЦ}_j}} = 0. \quad (6)$$

Далі визначається другий диференціал $d^2 \bar{T}_{\text{ВІ}}$:

$$d^2 \bar{T}_{\text{ВІ}} = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k \frac{d^2 \bar{T}_{\text{ВІ}}}{\partial T_{\text{ДЦ}_i} \partial T_{\text{ДЦ}_j}} \bigg|_{(T_{\text{ОЦ}}^0, T_{\text{ДЦ}_1}^0, \dots, T_{\text{ДЦ}_k}^0)} \Delta T_{\text{ДЦ}_i} \Delta T_{\text{ДЦ}_j}. \quad (7)$$

В даному випадку для спрощення запису для $T_{\text{ОЦ}}$ вводиться нове позначення $T_{\text{ДЦ}_0}$.

Коли диференціал $d^2 \bar{T}_{\text{ВІ}}$ буде додатновизначеною квадратичною формою, то функція $\bar{T}_{\text{ВІ}}$ матиме в точці стаціонарності $(T_{\text{ОЦ}}^0, T_{\text{ДЦ}_1}^0, \dots, T_{\text{ДЦ}_k}^0)$ мінімум. Встановлення того факту чи є квадратична форма (7) додатновизначеною виконується на основі власних значень λ_j матриці, яка визначена елементами квадратичної форми. Якщо всі власні значення λ_j даної матриці додатні, дійсна симетрична квадратична форма є додатновизначеною.

Блок-схема визначення значень $T_{\text{ОЦ}}, T_{\text{ДЦ}_i}, K$ представлена на рис. 3.

Можна показати, що

$$\Delta = (\bar{T}_{\text{ВІ}})_{k=0}^0 - (\bar{T}_{\text{ВІ}})_{k=1}^0$$

$$= -C + (T_2 + C - T_{\text{ОЦ}})P_{\text{ВІ}}(T_{\text{ОЦ}}).$$

Відповідно $\Delta < 0$ при:

$$\frac{(T_2 - T_{\text{ОЦ}})P_{\text{ВІ}}(T_{\text{ОЦ}})}{1 - P_{\text{ВІ}}(T_{\text{ОЦ}})} < C. \quad (8)$$

Таким чином, коли виконується нерівність (8), додаткові цикли накопичення елементарних перевірок реалізовувати не потрібно.

З практичної точки зору більш реальною є ситуація коли на час $T_{\text{ВІ}}$ також накладається умова $T_{\text{ВІ}} \leq (T_{\text{ВІ}})_{\text{зад}}$. Тоді обмеження для змінної K визначатиметься з умови

$$0 \leq K \leq \frac{(T_{\text{ВІ}})_{\text{зад}} - b}{d + C}. \quad (9)$$

Більш загальним є випадок коли оптимізується критерій, який залежить від параметрів $T_{\text{ВІ}}$ і D . В ролі такого критерію V можна запропонувати:

$$V = K_{\text{Д}} K_{\text{НД}} D_{\text{С}} + \frac{K_{\text{Т}} K_{\text{НТ}}}{(\bar{T}_{\text{ВІ}})_{\text{ср}}}, \quad (10)$$

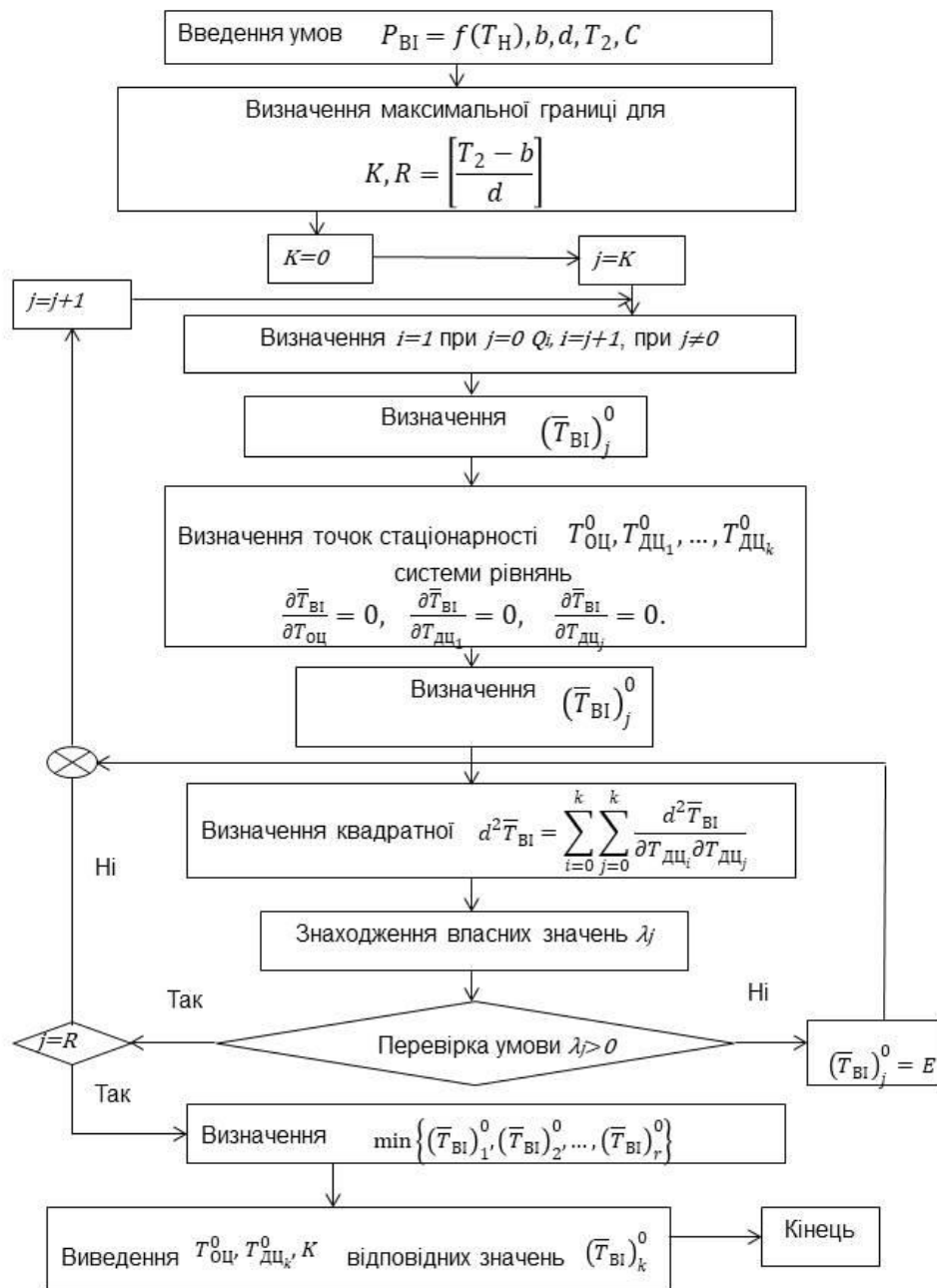


Рис. 3. Блок-схема методики визначення параметрів $T_{0c}^0, T_{0dc1}^0, \dots, T_{0dcK}^0, K$, які забезпечують мінімальне значення $\bar{T}_{VI}$ при $D > D_3$.

де K_D та K_T – відповідні вагові коефіцієнти; K_{HD} та K_{HT} – нормовані коефіцієнти; $(\bar{T}_{VI})_{cp}$ – середнє значення часу видачі інформації про справність інформаційної системи підприємства; D_C – середнє значення достовірності видачі інформації про справність системи.
Граф станів-переходу для процесу накопичення елементарних перевірок і аналізу системи перевірок зв'язків, буде мати наступний

вигляд рис. 4. На даному графі є два стани видачі інформації. Одному стану відповідає достовірність D_0 , а другому – D_1 . В даному випадку припустимо, що якщо в результаті аналізу структури перевірок зв'язків виконуються завчасно обумовлені умови, то достовірність інформації вважаємо рівною D_0 , в протилежному випадку – D_1 . Тоді середнє значення достовірності дорівнює $D_C = P_0 D_0 +$

$P_1 D_1$, де P_0 і P_1 – відповідні ймовірності видачі інформації з достовірністю D_0 і D_1 . З врахуванням ймовірностей P_0 і P_1 середнє значення часу видачі інформації про справність інформаційної системи підприємства знаходимо наступним чином

$$(\bar{T}_{\text{ВІ}})_{\text{ср}} = (\bar{T}_{\text{ВІ}})_0 P_0 + (T_{\text{ВІ}})_1 P_1, \quad (11)$$

де $(\bar{T}_{\text{ВІ}})_0$ – математичне сподівання часу видачі інформації з достовірністю D_0 ; $(T_{\text{ВІ}})_1$ – час видачі інформації з достовірністю D_1 .

З врахуванням прийнятих обмежень для $T_{\text{ВІ}}$ отримаємо $(T_{\text{ВІ}})_1 = (T_{\text{ВІ}})_{\text{зад}}$. Ймовірності P_0 і P_1 знаходимо, відповідно, з наступних співвідношень

$$P_0 = 1 - P_1, \quad P_1 = \prod_{i=1}^{k-1} Q_i. \quad (12)$$

Значення $(\bar{T}_{\text{ВІ}})_0$ знаходимо на основі рівності (5) з врахуванням того, що $T_2 = (T_{\text{ВІ}})_{\text{зад}}$. Нормовані коефіцієнти для значень D_C і $(\bar{T}_{\text{ВІ}})_{\text{ср}}$ знаходяться з виразів:

$$K_{\text{НД}} D_1 = 1, \quad K_{\text{НТ}} (T_{\text{ВІ}})_{\text{зад}} = 1.$$

Після підстановки D_C , $(\bar{T}_{\text{ВІ}})_{\text{ср}}$, $K_{\text{НД}}$, $K_{\text{НТ}}$, $K_{\text{Д}}$, $K_{\text{Т}}$ у співвідношення (10) для кожного значення K (з області допустимих значень) визначається

критерій V . Значення K , $T_{\text{ОЦ}}$, $T_{\text{ДЦ}_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$, при яких V має максимальне значення є оптимальними. Після виконання основного циклу накопичення і, якщо необхідно, всіх додаткових циклів виконується видача інформації про справність модулів інформаційної системи підприємства.

Необхідно зазначити, що якщо в системі немає модулів, які відмовили, то процес знаходиться в одному із станів, що входить в склад початкового блоку контролю (ПБК). У випадку, коли відбувається відмова одного з модулів процес переходить в один із станів, що входить в склад блоку контролю з відмовою (БКВ). БКВ аналогічно як і ПБК може включати в себе основний і, за необхідності, додаткові цикли накопичення.

Особливий інтерес представляє ситуація коли в результаті виконання основного і всіх додаткових циклів, накопичення елементарних перевірок, модуль, що відмовив, не буде виявлено. Така ситуація приводить до видачі невірної інформації про стан інформаційної системи підприємства. В результаті цього несправний модуль може неправильно виконати свій алгоритм. Після видачі невірної інформації про технічний стан модулів процес переходить в стан, що відповідає повторному контролю. Припускається, що якщо модуль, який відмовив,

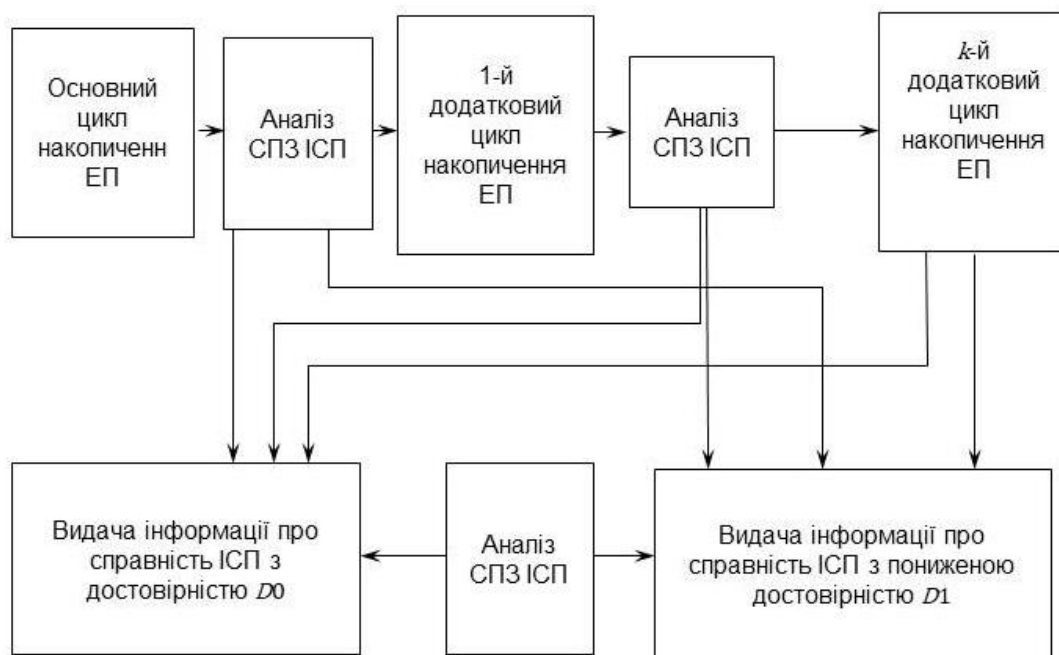


Рис. 4. Граф станів-переходу для процесу накопичення елементарних перевірок і аналізу системи перевірочних зв'язків

буде визначений при повторному контролі, то спотворена інформація модуля, який відмовив, може бути відновлена і передана одному з справних модулів. Повторний контроль включає в себе основний цикл накопичення і, за необхідності, додаткові цикли. На графі станів-переходу (див. рис. 1) всі стани, що утворюють повторний контроль, представлені у вигляді повторного блоку контролю (ПБК) з параметром $\rho = k + 1$.

Якщо ж при повторному контролі модуль, що відмовив, не буде виявлено, то інформаційна система підприємства переходить в стан повної відмови.

Висновки. В роботі удосконалено методику забезпечення властивості функціональної стійкості інформаційної системи підприємства, за рахунок представлення функціонування системи у вигляді формалізованого процесу, в якому основними типами процедур є накопичення перевірок, аналіз перевірочних зв'язків, діагностування модуля, що відмовив та відновлення функціонування системи. Зазначена методика дозволяє забезпечити властивість функціональної стійкості інформаційної системи підприємства.

Список використаних джерел

1. Monakhov Yu. Simulation Model Of Functional Stability Of Business Processes / Monakhov Yu., Fayman O. // Int. Journal of Engineering Research and Application, Vol. 3, Issue 6, Nov-Dec 2013, pp. 819-828.
2. Sobchuk A.V. Assessment methods of functional stability of wireless sensor networks / Sobchuk A.V., Barabash O.V., Musienko A.P. // Науковий журнал «Телекомунікаційні та інформаційні технології». Київ, ДУТ, 2019. № 3 (64). С. 46 – 54.
3. Кучук Н.Г. Оптимізація пропускних здатностей каналів зв'язку гіперконвективної системи / Кучук Н.Г., Лукова-Чуйко Н.В., Собчук В.В. // Наукове періодичне видання «Системи управління, навігації та зв'язку». – Полтава: ПНТУ, 2019. – Вип. 3 (55). – С. 120–125.
4. Саланда І.П. Система показників та критеріїв формалізації процесів забезпечення локальної функціональної стійкості розгалужених інформаційних мереж / Саланда І.П., Барабаш О.В., Мусієнко А.П. // Наукове періодичне видання «Системи управління, навігації та зв'язку». Полтава: ПНТУ, 2017. Вип. 1 (41). С. 122 – 126.
5. Jerry Cha-Jan Chang. Measuring the Performance of Information Systems: A Functional Scorecard / Jerry Cha-Jan Chang and William R. // Journal of Management Information Systems. Vol. 22, No. 1 (Summer, 2005), pp. 85-115.
6. Собчук В.В. Перерозподіл інформаційних потоків у гіперконвергентній системі / Собчук В.В., Кучук Н.Г., Гавриленко С.Ю., Лукова-Чуйко Н.В. // Науково-технічний журнал «Сучасні інформаційні системи». Харків: НТУ «Харківський політехнічний інститут», 2019. Т. 3, № 2. С. 116 – 121.
7. Barabash O. Application of petri networks for support of functional stability of information systems / Barabash O., Lukova-Chuiko N., Sobchuk V., Musienko A. // 2018 IEEE First International Conference on System Analysis & Intelligent Computing (SAIC), p. 1-4.
8. Ghazanfari M. A tool to evaluate the business intelligence of enterprise systems / Ghazanfari M., Jafari M., Rouhani S. // Scientia Iranica. Volume 18, Issue 6, December 2011, Pp. 1579-1590.
9. Собчук В.В. Методика створення єдиного інформаційного простору на виробничому підприємстві з функціонально стійким виробничим процесом / Собчук В.В. // Наукове періодичне видання «Системи управління, навігації та зв'язку». – Полтава: ПНТУ, 2019. – Вип. 6 (58). – С. 84 – 91.
10. Собчук В.В. Метод діагностування прихованих відмов в інформаційній системі на основі застосування дворівневої системи забезпечення функціональної стійкості / Собчук В.В., Коваль М.О., Мусієнко А.П., Мацько О.Й. // Науковий журнал «Телекомунікаційні та інформаційні технології». – К.: ДУТ, 2019. – № 1 (62). – С. 22 – 31.
11. Maciaszek L.A. Managing Complexity of Enterprise Information Systems. In: Seruca I., Cordeiro J., Hammoudi S., Filipe J.

- (eds) Enterprise Information Systems VI. Springer, Dordrecht. 2006. Pp. 30-36.
12. Sobchuk A.V. Functionally sustainable wireless sensor network technologies aspects analysis / Sobchuk A.V., Sobchuk V.V., Barabash O.V., Lyashenko I.O. // Science and Education a New Dimension. Natural and Technical Sciences, 2019. – VII (23), Issue 193, Budapest, Hungary, pp. 46 – 48.
 13. Suh Y. S. Stability and stabilization of nonuniform sampling systems // Automatica, vol. 44, no. 12, pp. 3222-3226, 2008.
 14. Собчук В.В. Математична модель структури інформаційної мережі на основі нестационарної ієрархічної та стаціонарної гіпермережі / Собчук В.В., Лаптев О.А., Саланда І.П., Сачук Ю.В. // Збірник наукових праць Військового інституту Київського національного університету імені Тараса Шевченка. – К.: ВІКНУ, 2019. – Вип. 64. – С. 124 – 132.
 15. Белоцерковский Д.Л. Новый алгоритм генерации остовных подграфов для оптимизации топологии сетей передачи данных / Белоцерковский Д.Л., Вишневский В.М. // Автоматика и телемеханика. 1997. № 1. С.108 – 120.
 16. Креденцер Б.П. Оцінка надійності резервованих систем при обмеженій вихідній інформації / Креденцер Б.П., Вишнівський В.В., Жердєв М.К., Могилевич Д.І., Стойкова Л.С. // Під науковою редакцією, доктора технічних наук, професора Б.П., Креденцера. Київ: «Фенікс», 2013. 336 с.
 - periodychne vydannija “Systemy upravlinnja, navigacii ta zv’jazku”. – Poltava: PNTU, 2019. – Vyp. 3 (55). – P. 120–125.
 4. SALANDA I.P., BARABASH O.V., MUSIENKO A.P. Systemy pokaznykiv ta kryteriiv formalizacii procesiv zabezpechennja lokalnoii funkcionalnoii stiykosti rozgalugenyh informaciyhnyh mereg. // Naukove periodychne vydannija “Systemy upravlinnja, navigacii ta zv’jazku”. – Poltava: PNTU, 2017. Vyp. 1 (41). – P. 122–126.
 5. JERRY CHA-JAN CHANG and WILLIAM R. Measuring the Performance of Information Systems: A Functional Scorecard // Journal of Management Information Systems. Vol. 22, No. 1 (Summer, 2005), pp. 85-115.
 6. SOBCHUK V.V., KUCUK N.G., GAVLENKO S.Yu. and LUKOVA-CHUYKO N.V. Pererozpodil informaciyhnyh potokiv u giperkonvectyvnyi systemi. // Naukovo tehnichnyy gurnal “Suchasni informaciyhi systemy”. Kharkiv: NTU «Kharkivskyi politehnichnyy instytut», 2019. – T. 3, № 2. – P. 116–121.
 7. BARABASH O., LUKOVA-CHUIKO N., SOBCHUK V. and MUSIENKO A. Application of petri networks for support of functional stability of information systems // 2018 IEEE First International Conference on System Analysis & Intelligent Computing (SAIC), p. 1-4.
 8. GHAZANFARI M., JAFARI M., ROUHANI S. A tool to evaluate the business intelligence of enterprise systems // Scientia Iranica. Volume 18, Issue 6, December 2011, Pp. 1579-1590.
 9. SOBCHUK V.V. Metodyca stvorennja edynogo informacijnogo prostoru na vyrobnychomu pidpryemsvi z funkcionalno stiykym vyrobnychym procesom. / Naukove periodychne vydannija “Systemy upravlinnja, navigacii ta zv’jazku”. – Poltava: PNTU, 2019. – Vyp. 6 (58). – P. 84–91.
 10. SOBCHUK V.V., KOVAL M.O., MUSIENKO A.P. and MACKO O.Y. Metod diagnostuvannja pryhovanyh vidmov v informaciyhi systemi na osnovi zastosuvannja dvorivnevoji systemy zabezpechennja funkcionalnoii stiykosti. //

References

1. MONAKHOV Yu., FAYMAN O. Simulation Model Of Functional Stability Of Business Processes // Int. Journal of Engineering Research and Application, Vol. 3, Issue 6, Nov-Dec 2013, pp. 819-828.
2. SOBCHUK A.V. BARABASH O.V. and MUSIENKO A.P. Assessment methods of functional stability of wireless sensor networks. // Telekomunikaciyhi ta informacijni tehnologii. 2019. – № 3 (64). – С. 46–54.
3. KUCUK N.G., LUKOVA-CHUYKO N.V. and SOBCHUK V.V. Optyimizacija propusknyh zdatnostey kanaliv zv’jazku giperkonvectyvnoji systemy // Naukove

- Naukovyyi gurnal "Telekomunikaciyni ta informacijni tehnologii" K.: DUT, 2019. – № 1 (62). – P. 22–31.
11. MACIASZEK L.A. Managing Complexity of Enterprise Information Systems. In: Seruca I., Cordeiro J., Hammoudi S., Filipe J. (eds) Enterprise Information Systems VI. Springer, Dordrecht. 2006. Pp. 30-36.
 12. SOBCHUK A.V., SOBCHUK V.V., BARABASH O.V. and LYASHENKO I.O. Functionally sustainable wireless sensor network technologies aspects analysis // Science and Education a New Dimension. Natural and Technical Sciences, 2019. – VII (23), Issue 193, Budapest, Hungary, P. 46–48.
 13. SUH Y. S. Stability and stabilization of nonuniform sampling systems // Automatica, vol. 44, no. 12, pp. 3222-3226, 2008.
 14. SOBCHUK V.V., LAPTIEV. O.A., SALANDA I.P. and SACHUK Yu.V. matematychna model struktury informacijnoii meregi na osnovi nestacionarnoi ierarhichnoi ta stacionarnoi gipermergi. // Zbirnyk naukovykh prac Viyskovogo instytutu Kyivskogo nacionalnogo universytetu imeni Tarasa Shevchenka. – K.: VIKNU, 2019. – Vyp. 64. – P. 124–132.
 15. BELOCERKOVSKIY D.L. and VISHNEVSKIY V.M. Novyj algoritm generacii ostovnykh podgrafov dlya optimizacii topologii setej peredachi dannykh // Avtomatika i telemekhanika. 1997. № 1. P.108 – 120.
 16. KREDENTSER B.P., VYSHNIVSKIY V.V., ZHERDIEV M.K., MOHYLEVYCH D.I. and STOIKOVA L.S. Otsinka nadiinosti rezervovanykh system pry obmezhenii vykhidnoi informatsii // Pid naukovoio redaktsiieiu, doktora tekhnichnykh nauk, profesora B.P., Kredentsera. Kyiv: «Feniks», 2013. 336 p.

Надійшла до редколегії 4.09.2021