КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

В І С Н И К

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

№3 2021

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
випуск №3, 2021,
Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету "Математика і механіка", "Физика", "Моделирование и оптимизация сложных систем" реорганізовано у "Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки". У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, механіко-математичного факультетів, факультету радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем і факультету комп'ютерних наук та кібернетики.

Журнал "Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки" включено до переліку фахових видань ВАК України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора, кандидата наук і PhD за спеціальностями 111, 112, 113, 104, 105 (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1188 від 24.09.2020) та за спеціальностями 121, 122, 123, 124 (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1471 від 26.11.2020), та реферується в Реферативному журналі Zentralblatt MATH, JournalTOCs, Crossref, ICI World of Journals, Road, Google Scholar і Науковій періодиці України.

Редакційна колегія:

Моклячук Михайло Павлович, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор;**

Розора Ірина Василівна, д.ф.-м.н., доц., **заст. головного редактора;**

Bartlova Milada, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;

Bavula Vladimir, Prof., University of Sheffield, Great Britain;

Beghin Luisa, Prof., Sapienza Università di Roma, Italy;

Futorny Vyacheslav, Prof., Universidade de São Paulo, Brazil;

Giuliano Rita, Prof., Università di Pisa, Italy;

Gorlatch Sergei, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;

Hudak Stefan, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;

Kukhtarev Nickolai, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;

Leonenko Nikolay, Prof., Cardiff University, Great Britain;

Medvids Arturs, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;

Olenko Andriy, Prof., La Trobe University, Australia;

Orsingher Enzo, Prof., Sapienza University of Rome, Italy;

Ostrovsky Eugene, Prof., Bar- Ilan University, Israel;

Pogany Tibor, Prof., University of Rijeka, Croatia;

Rontó Miklós, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;

Silvestrov Dmitrii, Prof., Stockholms universitet, Sweden;

Sottinen Tommi, Prof., University of Vaasa, Finland;

Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;

Trofimchuk Sergey, Prof., Universidadde Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;

Volodin Andrei, Prof., University of Regina, Canada;

Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;

Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;

Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;

Безущак Оксана Омелянівна, д.ф.-м.н., проф.;

Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;

Гаращенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;

Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;

Жук Ярослав Олександрович, д.ф.-м.н., проф.;

Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., проф.;

Курченко Олександр Олексійович, д.ф.-м.н., проф;

Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;
Львов Віктор Анатолійович, д.ф.-м.н., проф.;
Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;
Майборода Ростислав Євгенович, д.ф.-м.н., проф.;
Мішура Юлія Степанівна, д.ф.-м.н., проф.;
Пашко Анатолій Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Петравчук Анатолій Петрович, д.ф.-м.н., проф.;
Погорілий Сергій Дем'янович, д.т.н., проф.;
Савенков Сергій Миколайович, д.ф.-м.н., доц.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.;
Сливка-Тилищак Ганна Іванівна, д.ф.-м.н., проф.;
Хусаінов Денис Яхьєвич, д.ф.-м.н., проф.;

Редакційний відділ:
Затула Дмитро Васильович, **відповідальний секретар**;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
П'ятецька Олена Василівна, visnyk.phys-math@ukr.net;
Отто Георгій Костянтинович, **технічний редактор**, ottogk@gmail.com.

Адреса редакційної колегії:
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03022 Тел. (044) 259-01-49
fm.visnyk@ukr.net

ISSN 1812-5409

Засновник: Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Свідоцтво про державну реєстрацію:КВ №16299-4771Р від 11.12.2009 року

DOI: https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3

Безкоштовно

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics
No. 3, 2021.

The journal contains results of new research in various fields of mathematics, computer science, mechanics, physics and radiophysics for researchers, academic staff, postgraduates, engineers and students. It is published on the recommendation of the Academic Councils of Faculty of Physics, Faculty of Radiophysics, Electronics and Computer Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics and the Faculty of Computer Science and Cybernetics.

Journal "Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics" is included in the List of scientific professional publications of Ukraine, in which the results of the thesises for obtaining the scientific degrees of a doctor and a candidate of sciences (PhD) in specialties 111, 112, 113, 104, 105, 121, 122, 123 and 124 can be published (approved by the orders of the Ministry of Education and Science of Ukraine No. 1188 dated September 24, 2020 and No. 1471 dated November 26, 2020).
Journal is referenced in the abstract journal **Zentralblatt MATH (zbMATH), JournalTOCs, Crossref, ICI World of Journals, Road, Google Scholar and Scientific periodicals of Ukraine.**

Editorial Board

Moklyachuk Mikhail Pavlovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine, Editor in Chief;
Rozora Iryna Vasylivna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine, Deputy Editor in Chief;
Bartlova Milada, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;
Bavula Vladimir, Prof., University of Sheffield, Great Britain;
Beghin Luisa, Prof., Sapienza Università di Roma, Italy;
Futorny Vyacheslav, Prof., Universidade de São Paulo, Brazil;
Giuliano Rita, Prof., Università di Pisa, Italy;
Gorlatch Sergei, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;
Hudak Stefan, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;
Kukhtarev Nickolai, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;
Leonenko Nikolay, Prof., Cardiff University, Great Britain;
Medvids Arturs, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;
Olenko Andriy, Prof., La Trobe University, Australia;
Orsingher Enzo, Prof., Sapienza University of Rome, Italy;
Ostrovsky Eugene, Prof., Bar-Ilan University, Israel;
Pog\'any Tibor, Prof., University of Rijeka, Croatia;
Rontó Miklós, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;
Silvestrov Dmitrii, Prof., Stockholm University, Sweden;
Sottinen Tommi, Prof., University of Vaasa, Finland;
Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;
Trofimchuk Sergey, Prof., Universidadde Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;
Volodin Andrei, Prof., University of Regina, Canada;
Akimenko Vitaliy Vladimirovich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Anisimov Igor Alekseevich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Anisimov Anatoliy Vasyl'ovych, Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Bezuschak Oksana Omelyanivna, Dr., Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Voloshin Aleksey Fedorovich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Garaschenko Fedir Georgievich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Yezhov Stanislav Nikolaevich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Zhuk Yaroslav Aleksandrovich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Zaslavs'kyj Volodymyr Anatolijovych, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Kurchenko Oleksandr Oleksijovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Kudin Volodymyr Ivanovich, Dr. Sci., Sr. Sci. Researcher, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Lvov Victor Anatoliyovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Makarets' Nikolay Vladimirovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Maiboroda Rostyslav Yevhenovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Mishura Yuliya Stepanivna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Pashko Anatolij Oleksijovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Perestyuk Mykola Oleksijovych, Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Petravchuk Anatolij Petrovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Pogorily Serhiy Demyanovych, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Savenkov Serhij Mykolajovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Skrzyevsky Valery Antonovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Slyvka-Tylyshchak Anna Ivanivna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Uzhhorod National University, Uzhhorod, Ukraine;
Husainov Denys Yah'yevych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine.

ISSN: 2218-2055 (on-line version)

***ISSN*:** 1812-5409 (printed version)
***DOI**:* https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3

Founders: Taras Shevchenko National University of Kyiv
Foundation year: 1991 (series of bulletins of Kyiv University "Mathematics and Mechanics", "Physics", "Modeling and Optimization of Complex Systems" was reorganized into "Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics").
Certificate of state registration: КВ № 16299-4771 P dated 11.12.2009
Issued: 4 times a year

Mailing Address
Taras Shevchenko National University of Kyiv
Faculty of Computer Science and Cybernetics,
03022, Ukraine, Kyiv, 4d Academician Glushkov avenue
Phone: (044) 259-01-49
fm.visnyk@ukr.net

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Джога А.С. Послідовний розподіл у стохастичному середовищі: загальний опис, аналіз та чисельні експерименти 13

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Вайсфельд Н.Д., Журавльова З.Ю. Нестаціонарна задача теорії пружності для чвертьплощини 28

Гусак В.О. Випромінювання плоского поршня у клинуватому хвилеводі 34

Жук О.П., Жук Я.О. Визначення акустичної радіаційної сили, що діє на тверду сферичну частинку в пружній трубі з рідиною 38

Жук Я.О., Мельниченко М.М., Гаврилюк Д.В. Вивчення нанорозмірних плівок золота методом скануючої тунельної мікроскопії 42

Капустян О.В., Курилко О.Б., Юсипів Т.В. Робастна стійкість глобального атрактора системи реакції-дифузії 46

Коновалюк Т.П., Краснопольська Т.С., Печук Є.Д. Вплив внутрішньої динаміки когерентних вихрових структур, що взаємодіють між собою, на генероване звукове поле 51

Куценко О.Г., Куценко А.Г., Харитонова Л.В. Дослідження розтягу перфорованих пластин методом скінченних елементів 55

Куценко О.Г., Харитонов О.М. Алгоритм розв'язку нестаціонарної задачі термопружності для двошарового циліндра при змінному коефіцієнті теплообміну 59

Лубков М.В. Застосування скінчено-елементно-різницевого методу для моделювання анізотропних фільтраційних процесів 63

Маковійчук М.В., Шацький І.П., Щербій А.Б. Про розподіл напружень біля тріщини у тороїдальній оболонці з гнучким покриттям 67

Малюга В.С., Духновський В.Ю., Жук Я.О. Течії Стокса в тривимірних областях 71

Маслов Б.П. Спадкова повзучість ізотропних композитів випадкової структури при складному напруженому стані 77

Олійник В.Н. Статистичний алгоритм для швидкої оцінки частоти серцебиття й локалізації серцевих тонів у фонокардіограмах, записаних за допомогою електронних стетоскопів 81

Онишкевич В.М., Барабаш Г.М. Моделювання контактної взаємодії «третім тілом» у трибологічних задачах 85

Плащинська А.В. Щодо способу розрахунку кінетики накопичення пошкодження вздовж фронту тріщини втоми в тонких пластинах 89

Попов В.Г., Кирилова О.І. Числове розв'язання сингулярного інтегрального рівняння, пов'язаного з динамічною задачею контактної взаємодії 93

Райновський І.А., Тимоха О.М. Про демпфовані усталені резонансні коливання рідини в контейнері кругового перерізу для довільних періодичних непараметричних збурень 97

Ревенко В.П. Комп'ютерний метод розв'язання крайових задач теорії пружності з використанням неортогональних систем функцій 101

Рево С.Л., Авраменко Т.Г., Мельниченко М.М., Іваненко К.О. Фізико-механічні характеристики нанокомпозиційних матеріалів на основі фторопласту 107

Резнік В.С. Обгрунтування застосування нелінійної моделі в'язкопружності типу моделі Работнова в задачах повзучості 111

Резнік В.С., Ушаков О.В., Горун О.Ю. Щодо розрахунку деформацій зсуву в призматичних стержнях із полімерних матеріалів за умов розтягу з крученням 115

Середницька Х.І. Параметр термічної ректифікації у біматеріалі з міжфазною тріщинуватістю 119

Токовий Ю.В., Юзв'як М.Й., Ясінський А.В. Подання розв'язків плоских задач теорії пружності для прямокутної області через функції Вігака 123

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Омельчук Л.Л., Русіна Н.Г. Порівняння освітніх програм в розрізі досяжності компетентностей і результатів навчання обов'язковими освітніми компонентами 129

СУЧАСНА ФІЗИКА

Дмитрук І. М., Березовська Н.І., Майко К.О., Мамикін С.В., Мамонтова І.Б. Самоорганізовані метал-напівпровідникові мікро- та наноструктури Au-GaAs для застосування у плазмонній фотовольтаїці 139

CONTENTS

ALGEBRA, GEOMETRY AND PROBABILITY THEORY

Dzhoha A. S. Sequential resource allocation in a stochastic environment: an overview and numerical experiments 13

DIFFERENTIAL EQUATIONS, MATHEMATICAL PHYSICS AND MECHANICS

Vaysfeld N.D.,Zhuravlova Z.Yu. Non-stationary problem of elasticity for a quarter-plane 28

Husak V.O. Radiation of a flat piston in a wedge-shaped waveguide 34

Zhuk O.P., Zhuk Ya.O. Determination of acoustic radiation acting on a spherical rigid particle placed in an elastic tube filled with liquid 38

Zhuk Ya.O., Melnichenko M.M., Havryliuk D.V. Study of nanosized gold films by scanning tunneling microscopy 42

Kapustyan O.V., Kurylko O.B., Yusypiv T.V. Robust stability of the global attractor of the reaction-diffusion system 46

Konovalyuk T.P., Krasnopolskaya T.S., Pechuk E.D. Influence of the internal dynamics of the interacting coherent vortex structures to the generated sound field 51

Kutsenko O.G., Kutsenko A.G., Kharytonova L.V. Study of perforated plates stretching by finite element method 55

Kutsenko O.G., Kharytonov O.M. Algorithm of solving of nonstationary thermoelastic problem for two-layered cylinder at time-variety heat transfer coefficient 59

Lubkov M.V. Application of the finite element-differences method for modeling of anisotropic filtration processes 63

Makoviichuk M.V., Shatskyi I.P., Shcherbii A.B. On the distribution of stresses near the crack in a toroidal shell with a flexible coating 67

Malyuga V. S., Duhnovsky V. Yu., Zhuk Ya.O. Stokes flows in 3D containers 71

Maslov B.P. Hereditary creep of isotropic composites of random structure under a complex stress state 77

Oliynik V.N. A statistical algorithm for fast estimation of heart rate and localization of cardiac sounds in phonocardiograms recorded by electronic stethoscopes 81

Onyshkevych V.M., Barabash G.M. Modelling of contact interaction by “third body” in tribological problems 85

Plashchynska A.V. On the method of the damage accumulation analysis in front of the fatigue crack in thin plates 89

Popov V.G., Kyrylova O.I. Numerical solution of a singular integral equation related with a dynamic contact interaction problem 93

Raynovskyy I.A., Timokha A.N. Damped steady-state resonant sloshing in a container of circular cross-section for arbitrary periodic nonparametric forcing 97

Revenko V.P. Computational method for solving boundary problems of the theory of elasticity using non-orthogonal systems of functions 101

Revo S.L., Avramenko T.G., Melnichenko M.M., Ivanenko K.O. Physico-mechanical characteristics of nanocomposite materials based on fluoroplastic 107

Reznik V.S. Justification of application of nonlinear viscoelasticity model of Rabotnov's model type in creep problems 111

Reznik V.S., Ushakov O.V., Gorun O.Y. On the problem of calculating shear deformations in prismatic bars made of polymer materials under tension with torsion 115

Serednytska Kh.I. Parameter of thermal rectification in the bimaterial with interfacial cracking 119

Tokovyy Yu.V., Yuzvyak M.Yo., Yasinskyy A.V. Representation of solutions to the plane elasticity problems for a rectangular domain via Vihak's functions 123

COMPUTER SCIENCES AND INFORMATICS

Omelchuk L.L., Rusina N.G. Comparing of educational programs in terms of achievement of competencies and learning outcomes of compulsory educational components 129

MODERN PHYSICS

Dmitruk I. M., Berezovska N.I., Maiko K.O., Mamykin S.V., Mamontova I.B. Self-organized Au-GaAs metal-semiconductor micro- and nanostructures for applications in plasmonic photovoltaics 139

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 519.814, 519.816 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.1

А. С. Джога, *аспірант*

Послідовний розподіл ресурсів у стохастичному середовищі: загальний опис, аналіз та чисельні експерименти

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: andrew.djoga@gmail.com

A. S. Dzhoha, *PhD student*

Sequential resource allocation in a stochastic environment: an overview and numerical experiments

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, 4d Glushkova str.,
e-mail: andrew.djoga@gmail.com

У даній статті наводиться стислий огляд послідовного аналізу, а також місце в ньому послідовного розподілу ресурсів. Розглядаються стратегії послідовного розподілу ресурсів у середовищі, яке представлене моделлю стохастичного багаторукого бандита. Головною метою в представленій моделі є максимізація прибутку, що еквівалентно мінімізації втрат. У такому середовищі алгоритм послідовно вибирає дію та отримує винагороду з розподілу, пов'язаного з цією дією. Параметри такого розподілу не відомі заздалегідь. В статті наводиться огляд моделі багаторукого бандита у стохастичному середовищі та розглядаються стратегії для даного випадку. Наведені теоретичні результати використовуються для розробки програмного забезпечення для дослідження стратегій. Наведений чисельний експеримент.

Ключові слова: послідовний аналіз, проблема багаторукого бандита, мінімізація втрат.

In this paper, we consider policies for the sequential resource allocation under the multi-armed bandit problem in a stochastic environment. In this model, an agent sequentially selects an action from a given set and an environment reveals a reward in return. In the stochastic setting, each action is associated with a probability distribution with parameters that are not known in advance. The agent makes a decision based on the history of the chosen actions and obtained rewards. The objective is to maximize the total cumulative reward, which is equivalent to the loss minimization. We provide a brief overview of the sequential analysis and an appearance of the multi-armed bandit problem as a formulation in the scope of the sequential resource allocation theory. Multi-armed bandit classification is given with an analysis of the existing policies for the stochastic setting. Two different approaches are shown to tackle the multi-armed bandit problem. In the frequentist view, the confidence interval is used to express the exploration-exploitation trade-off. In the Bayesian approach, the parameter that needs to be estimated is treated as a random variable. Shown, how this model can be modelled with help of the Markov decision process. In the end, we provide numerical experiments in order to study the effectiveness of these policies.

Key Words: sequential analysis, multi-armed bandit problem, regret minimization.

Статтю представила д.ф.-м.н., доцент Розора І. В.

1 Вступ

Проблема багаторукого бандита відноситься до області послідовного розподілу ресурсів, яка розглядається в теорії послідовного аналізу. Вивчення цієї проблеми також належить до загальної концепції навчання з підкріпленням, що є однією з галузей у сфері штучного інтелекту.

Проблема багаторукого бандита представляє собою пошук компромісу у виборі між дослідженням простору варіантів і використанням найоптимальнішого варіанту з раніше відомих для прийняття рішень у реальному часі в умовах невизначеності. Знаходження балансу між дослідженням і використанням є необхідним для досягнення оптимального результату з найменшими втратами в довгостроковій перспективі. Зрозуміло, що система, яка завжди вибирає дослідження нових варіантів, буде втрачати можливість отримання переваг від вже здобутих знань. З іншого боку, система, яка використовує тільки існуючі знання, не в змозі адаптуватися до значних змін у зовнішньому середовищі для досягнення оптимального ре-

© А.С. Джога, 2021

зультату чи його покращення з часом. Ця проблема відома як дилема між дослідженням та використанням та до її розв'язку можна наблизитись за допомогою адаптивної стратегії послідовного розподілу ресурсів.

Сучасна історія послідовного аналізу починається з дослідження перевірки статистичних гіпотез, проведеного Wald A. [1], для знаходження методів отримання статистичних висновків з не фіксованим наперед числом випробувань контролю якості продукції. Теоретичні дослідження у послідовному аналізі та їх застосування знайшли відображення в роботах Barnard G. A., Anscombe F. J., Stein C., Wolfowitz J., Thompson W. R., Robbins H. та інших.

Успіх теорії послідовного аналізу в області перевірки статистичних гіпотез дав поштовх дослідженню послідовного оцінювання. Haldane J. B. S. [2] та Stein C. [3] описали, як деякі проблеми точкового та інтервального оцінювання можна розв'язувати за допомогою послідовного аналізу. У своїй роботі Stein C. продемонстрував, що таким чином можливо отримати довірчий інтервал з довжиною, яка задана експериментатором та не залежить від дисперсії розподілу.

Інша теорія, яка витікає з теорії послідовного аналізу і є фундаментальною для багатьох класів проблем багаторукого бандита, це теорія оптимальної зупинки. Каталізатором виокремлення цього напрямку послужили роботи Wald A. & Wolfowitz J. [4] та Arrow K. J., Blackwell D. & Girshick M. A. [5], присвяченні дослідженню задач послідовної перевірки статистичних гіпотез. В цих роботах був запропонований підхід Баєса для розв'язку проблеми оптимальної зупинки. Умовна особа, що приймає рішення, спостерігає послідовність $\{R_n, \mathcal{F}_n, n \geqslant 1\}$ при $\mathbb{E}\,|R_n| < \infty$ для усіх n, де n це горизонт, R_n — винагорода та $\mathcal{F}_n$ — фільтрація. На кожному кроці потрібно зробити вибір: зупинити відбір вибірки та отримати доступну винагороду R_n чи продовжити генерацію в очікуванні отримати більшу винагороду в майбутньому. В даному випадку оптимальне правило зупинки N можливо знайти через максимізацію очікуваної винагороди $\mathbb{E}[R_N]$. Для пошуку N можемо відштовхуватися від рівняння типу

$$V_n = \max\left(V_n, \mathbb{E}[V_{n+1}|\mathcal{F}_n]\right), n = 1, 2, \ldots.$$

Проблему оптимальної зупинки у загальному вигляді описав Snell J. L. [6], а Bellman R. [7] створив розділ математики, присвячений методам розв'язання багатокрокових задач оптимального керування — динамічне програмування.

Подальші дискусії, присвячені послідовному розподілу ресурсів, були започатковані у роботах Thompson W. R. [8] та Robbins H. [9], де автори аналізували проблему багаторукого бандита. Розглядався експеримент, де особа, що приймає рішення, на кожному кроці t послідовно обирає одну з двох дій (дворукий бандит), та спостерігає послідовність винагород $X_1, X_2, \ldots X_n$. З кожною дією пов'язаний розподіл імовірностей, параметри якого не відомі заздалегідь. Головною метою експерименту було пошук стратегії, при якій послідовний вибір дій приводив би до найбільшої можливої сукупної винагороди за n кроків $\sum_{t=1}^{n} X_t$. Результатом роботи стали опис математичної моделі проблеми багаторукого бандита та формалізація поняття ефективності цих стратегій. Ці дослідження послужили початком вивчення проблеми багаторукого бандита як окремого напрямку.

Проблему багаторукого бандита почали досліджувати в контексті різних середовищ: стаціонарне стохастичне, де процеси винагороди кожної дії в моделі багаторукого бандита розглядаються як незалежні однаково розподілені випадкові величини; нестаціонарне, де параметри дій моделі змінюються з часом; марковське, де процес винагороди описаний ланцюгом Маркова; змагальне, де відмовляються від усіх припущень щодо характеру процесів, пов'язаних з діями в моделі; та інші.

Також варто зазначити один з важливих проривів в цій області, зроблений у роботі Gittins J. & Jones D. M. [10]. Автори цієї роботи використовували теорію динамічного програмування з геометричним дисконтуванням для розв'язку задачі багаторукого бандита, яку описав Robbins H. Результатом роботи став узагальнений розв'язок проблеми багаторукого бандита за допомогою, так званих, індексів динамічного розподілу, що дозволило звести поставлену задачу до параметризованого сімейства розв'язків проблеми оптимальної зупинки.

Більш детальний огляд розвитку послідовного аналізу та опис ранніх робіт з проблеми багаторукого бандита, можна знайти у роботах Ghosh B. K. & Sen P. K. [11] та Siegmund D. [12].

За останні 10-15 років кількість досліджень

у цьому напрямку істотно зросла, що пов'язано з розвитком цифрових технологій та їх широкого використання. Наприклад, модель багаторукого бандита, як адаптивна стратегія, часто використовується у системах рекомендацій, динамічному ціноутворенні, адаптивній маршрутизації для мінімізації затримок у мережі та клінічних випробуваннях.

У даній роботі розглядається стратегія для послідовного розподілу ресурсів у середовищі, яке представлене моделлю стохастичного багаторукого бандита. У наступних розділах приводиться класифікація моделей багаторукого бандита, наводиться їх математична модель, дається аналіз існуючих стратегій та проводяться чисельні експерименти з метою вивчення ефективності цих стратегій.

2 Класифікація моделей багаторукого бандита

Проблема багаторуких бандитів — це послідовна взаємодія між суб'єктом, що приймає рішення, так званим агентом, та зовнішнім середовищем. Ця взаємодія відбувається протягом n кроків, де n — натуральне число, що називається горизонтом. На кожному кроці $t = 1, 2, \ldots, n$ агент обирає дію A_t із заданої множини $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, k\}$, у відповідь середовище видає винагороду $X_t \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Вибір дії A_t залежить від історії попередніх виборів і їх результатів $H_{t-1} = (A_1, X_1, \ldots, A_{t-1}, X_{t-1})$. Метою агента є послідовний вибір таких дій із заданої множини $\mathcal{A}$, які призводять до найбільшої можливої сукупної винагороди за n кроків, тобто $\sum_{t=1}^{n} X_t$.

В даній постановці задачі стратегія агента — це відображення з множини виборів та їх результатів в множину дій, агент будує стратегію для послідовної взаємодії з середовищем для збільшення сукупної винагороди. Відповідно середовище це відображення з послідовності виборів у винагороду. І агент, і середовище можуть приймати рішення (тобто обирати дії чи винагороди відповідно) випадковим чином.

Ключовим моментом у даній проблемі є те, що середовище не відоме для агента, тобто не відомий розподіл імовірностей винагород кожної дії моделі. Все, що відоме агенту, це те, що справжнє середовище належить до певного класу середовищ.

Однією з метрик вимірювання ефективності стратегії агента є його втрати R_n за n кроків, що є різницею між очікуваною винагородою при виборі оптимальної дії на кожному кроці та винагородою при виборі дій відповідно до заданої стратегії. Вперше ця метрика була запропонована у роботі Lai T. L. & Robbins H. [13]. Сукупні втрати є функцією від часу та можуть бути визначені як втрати знецінювання на нескінченному горизонті, чи як сума втрат на скінченному горизонті. Чим швидше цільова стратегія у процесі використання наближається до оптимальної, тим повільніше зростають сукупні втрати. Оптимальна стратегія зводить до мінімуму сукупні втрати за будь-який часовий горизонт n.

За різними властивостями проблему багаторукого бандита можна поділити на велику кількість категорій. За кількістю кроків розглядають моделі зі скінченним і нескінченним горизонтом. За кількістю дій проблему можна поділити на моделі з двома діями, k діями та нескінченною кількістю дій. З точки зору стаціонарності середовища виділяють моделі стаціонарні, де розподіл імовірностей винагород фіксований і незалежний, та нестаціонарні — розподіл імовірностей дій може змінюватись з часом. Також виокремлюють моделі, де процес винагороди кожної дії має залежність від додаткової інформації (контексту).

За характером процесу винагороди та враховуючи аналіз ефективності стратегій виокремлюють три фундаментальні постановки проблеми: стохастичну, змагальну і марковську.

Стохастичний багаторукий бандит. У цій моделі винагорода кожної дії є незалежною і однаково розподіленою. Оптимальна стратегія для будь-якої стохастичної моделі — це стратегія вибору дії з найвищою очікуваною винагородою за весь горизонт.

Очікувані сукупні втрати при використанні стратегії s, яка визначає послідовність вибору дій $I_1^s, \ldots, I_n^s$ на горизонті n, визначається як

$$\mathbb{E}\left[R_n^s\right] = \mathbb{E}\left[\max_{i=1,\ldots,k} \sum_{t=1}^{n} X_{i,t} - \sum_{t=1}^{n} X_{I_t^s,t}\right],$$

де $X_{i,t}$ це винагорода отримана від середовища на кроці t при виборі дії i. Ця модель буде розглядатися детально у наступних розділах даної статті.

Змагальний багаторукий бандит. У такій моделі процес винагород не є випадковим. Послідовність винагород можна розглядати як вибрані умовним супротивником. За характером взаємодії супротивника виділяють два випадки: супротивник вибирає послідовність винагород на початку горизонту, тобто він не займається вивченням стратегії агента; супротивник обирає винагороди на кожному кроці, що часто формулюють в термінах теорії ігор, а також використовують критерій мінімаксу.

Як метрика вимірювання ефективності у змагальній моделі частіше використовуються втрати за найгіршим для обраної стратегії сценарієм. Нехай $\mathcal{P}$ — це множина усіх можливих послідовностей $k \times n$ на $[0,1]$ для усіх $n \in \mathbb{N}$, тоді очікувані втрати за найгіршим для обраної стратегії s сценарієм на послідовності $P \in \mathcal{P}$:

$$\sup_{P \in \mathcal{P}} \mathbb{E}\left[R_n^{s,P}\right].$$

За таких умов найкраща стратегія та, яка досягає менших втрат за найгіршим сценарієм.

Найменші очікувані втрати у найгіршому випадку, які може отримати будь-яка стратегія s з усіх можливих S, виражається через мінімакс втрати:

$$\inf_{s \in S} \sup_{P \in \mathcal{P}} \mathbb{E}\left[R_n^{s,P}\right].$$

Найпоширеніший алгоритм (імплементації однієї зі стратегій) для змагального багаторукого бандита є результатом роботи Auer P. та інших [14] — Exp3. Цей алгоритм використовує вагу у вигляді експоненціальної функції для оцінювання дій. Експонентне зростання допомагає значно збільшити вагу кращих дій.

Марковський багаторукий бандит. У марковських бандитах кожна дія асоційована з ланцюгом Маркова, а перехід до нового стану відбувається, коли цю дію вибирають. Ця модель була розглянута у роботі Gittins J. [15], де він довів, що найоптимальніша стратегія — це стратегія вибору найвищого індексу динамічного розподілу.

В іншому варіанті моделі марковських бандитів перехід дії у новий стан відбувається на кожному кроці незалежно від того, вибрана ця дія чи ні (англ. *restless markov bandit*). Ця модель вперше була представлена у роботі Whittle P. [16]. У даному випадку проблема не має загального розв'язку.

У стандартній марковській моделі дія $i = 1, 2, \ldots, k$ описується нерозкладним аперіодичним ланцюгом Маркова з дискретним часом, який приймає значення у скінченній множині станів S_i, r_s^i — винагорода у стані $s \in S_i$, $P_i = \{p_i(s, s'), s, s' \in S_i\}$ — матриця ймовірностей переходу дії i. Метою моделі є пошук послідовності дій, яка призводить до найбільшої можливої сукупної винагороди.

3 Модель стохастичного багаторукого бандита

Модель стохастичного багаторукого бандита задається k-вимірним вектором $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_k)$, де k – це кількість дій; кожна дія ν_i – це розподіл імовірностей з математичним сподіванням μ_i. На кожному кроці $t = 1, 2, ;n$ агент взаємодіє з моделлю, вибираючи дію A_t. У відповідь, модель виконує відбір вибірки $X_t \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ з розподілу, пов'язаного з дією A_t та, як результат, реалізація вибірки стає доступною для агента. Вибірка $(X_1, \ldots, X_n)$ розглядається як винагорода, метою агента є максимізація сукупної винагороди за n кроків.

Основним ускладненням у проблемі багаторукого бандита є те, що модель ν заздалегідь не відома. Агент може знати тільки клас середовища $\mathcal{E}$, до якого належить модель $\nu \in \mathcal{E}$.

Одним з класів середовищ є модель багаторукого бандита з розподілом Бернуллі. Модель цьому класу описується вектором середніх значень $\mu \in [0,1]^k$, де кожен елемент μ_i – це параметр розподілу Бернуллі дії i. Для моделі цього класу X_t є випадковою величиною, пов'язаною з розподілом імовірностей μ_{A_t}, тобто $X_t \sim \text{Bernoulli}(\mu_{A_t})$ є винагородою агента на кроці t при виборі дії A_t.

Якщо розглядається параметрична модель, то розподіл ν_i, відповідно, залежить від деякого невідомого параметра θ_i, який набуває значення з множини Θ. Нехай $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k) \in \Theta^k$, тоді параметрична модель стохастичного багаторукого бандита задається як $\nu = \nu_{\boldsymbol{\theta}} = (\nu_{\theta_1}, \ldots, \nu_{\theta_k})$. Позначимо через μ^* середнє значення розподілу ймовірностей оптимальної дії, тобто $\mu^* = \max_{i \in \mathcal{A}}(\mu_i)$. Тоді, згідно з [13], для параметричної моделі стохастичного багаторукого бандита можемо описати очікува-

ні сукупні втрати:

$$R_n^s(\theta) = \mathbb{E}_\theta\left[n\mu^* - \sum_{t=1}^{n} X_t\right] = n\mu^* - \mathbb{E}_\theta\left[\sum_{t=1}^{n} X_t\right], \tag{3.1}$$

які визначені для будь-якої стратегії s на горизонті n з параметром θ, який є фіксованим і невідомим. Головною метою даної моделі є максимізація винагороди, що еквівалентно мінімізації втрат.

У своїй роботі Lai T. L. & Robbins H. через введення фільтрації представили декомпозицію втрат, як функцію від кількості разів $N_i(n)$ кожна дія i була вибрана на горизонті n, використовуючи стратегію s.

Введемо фільтрацію

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left(A_1, X_1, \ldots, A_t, X_t\right),$$

де для недетермінованої стратегії відбір A_t здійснюється з розподілу ймовірностей p_t на системі дій $\{1, \ldots, k\}$, який є $\mathcal{F}_{t-1}$-вимірним. Використовуючи $\mathbb{E}\left[X_t|\mathcal{F}_{t-1}\right] = \mu_{A_t}$, отримаємо декомпозицію втрат у вигляді очікуваної суми неоптимальностей вибраних дій при використанні стратегії s:

$$R_n^s(\theta) = \mathbb{E}_\theta\left[\sum_{t=1}^{n}\left(\mu^* - \mu_{A_t}\right)\right] = \sum_{i\in\mathcal{A}}\left(\mu^* - \mu_i\right)\mathbb{E}_\theta\left[N_i(n)\right], \tag{3.2}$$

де $N_i(n) = \sum_{t=1}^{n} \mathbf{1}_{(A_t=i)}$.

За визначенням втрат R_n^s можна виділити їх наступні властивості, які є дійсними для будь-якої стратегії s:

1) $R_n^s \geqslant 0$, що випливає з декомпозиції втрат (3.2), де $\mu^* \geqslant \mu_i$ та $N_i(n) \geqslant 0$ за визначенням.

2) Якщо виконується $R_n^s = 0$, це свідчить, що агент знає оптимальну дію заздалегідь, тобто $\mathbb{P}\left(\mu_{A_t} = \mu^*\right) = 1$ для всіх $t = 1, 2, \ldots n$.

3) З формули (3.1) видно, що $R_n^s \leqslant n\mu^*$.

Якщо ми припустимо, що винагорода приймає значення в замкненому проміжку $X_t \in [0, 1]$, тоді маємо $R_n^s \leqslant n$. Тоді для будь-якої стратегії s маємо $R_n^s = O(n)$. Таким чином, наша головна мета це знаходження стратегій, для яких втрати як мінімум сублінійні, тобто $R_n^s = o(n)$.

Для випадку стохастичної моделі, коли випадкова величина $x \in [a, b]$ приймає значення не на відрізку $[0, 1]$, ми можемо застосувати нормування:

$$x' = \frac{x - a}{b - a}.$$

4 Асимптотичний аналіз втрат

Розглянемо параметричні моделі з розподілами з експоненційного сімейства [17], тобто розподіл дії i залежить від параметра θ_i. За допомогою функцій $\eta(\theta)$, $T(x)$, $A(\theta)$, $h(x)$ щільність може бути подана у вигляді

$$f_X(x; \theta_i) = exp\left(\eta(\theta_i) \cdot T(x) + A(\theta_i)\right) h(x).$$

Це дозволяє використовувати розходження Кульбака-Лейблера [18] (також називають відносною ентропією) як міру того, наскільки розподіл p однієї дії відрізняється від іншої q:

$$\mathrm{KL}(p, q) = \int \log\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}(x)\right) \mathrm{d}x.$$

Для розподілу Бернуллі, який входить в експоненційне сімейство, розходження Кульбака-Лейблера має вигляд

$$\mathrm{KL}(p, q) = p\log\frac{p}{q} + (1-p)\log\frac{1-p}{1-q},$$

де p, q — це параметри розподілів відповідно.

Представлені у роботах Lai T. L. & Robbins H. у роботах [9, 13] перші стратегії характеризувались фіксованою кількістю досліджень простору варіантів та використанням найоптимальнішого варіанту за вибірковим середнім. Автори показали, що для ціх стратегій можливо отримати сублінійні втрати:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R_n^s}{n} = 0.$$

За результатами були сформульовані наступні твердження:

Означення 4.1. Стратегія s є рівномірно ефективною, якщо її втрати задовольняють $R_n^s(\theta) = o(n^\alpha)$ для всіх $\alpha \in (0, 1]$.

Для параметричних моделей зі скалярним параметром, тобто $\Theta \in R$, було показано, що для рівномірно ефективних стратегій кількість виборів кожної неоптимальної дії i ($\mu_i < \mu^*$) має як мінімум логарифмічну складність:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}_\theta[N_i(n)]}{\log(n)} \geqslant \frac{1}{\mathrm{KL}(\nu_{\theta_i}, \nu_{\theta^*})}.$$

Для моделі з розподілом Бернуллі за допомогою декомпозиції втрат (3.2) для рівномірно ефективної стратегії s можна отримати наступну нерівність [19]:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{R_n^s}{\log(n)} \geqslant \sum_{i:\Delta_i>0} \frac{\Delta_i}{\mathrm{KL}(\mu_i, \mu^*)},$$

де $\Delta_i = \mu^* - \mu_i$.

Також у [20] для моделі з розподілом Бернуллі було показано, що жодна зі стратегій не може отримати втрати $R_n^s = o(\log(n))$.

Таким чином маємо, що для будь-якої стратегії у будь-якому класі стохастичної моделі втрати становлять що найменше $\Omega(\log(n))$.

Означення 4.2. Якщо для стратегії s нижня і верхня границі співпадають згідно до асимптотичної поведінки функцій (нотація Ландау), то її називають асимптотично оптимальною.

Тобто для рівномірно ефективної стратегії s для моделі з розподілом Бернуллі, стратегія вважається асимптотично оптимальною (4.2), якщо виконується нерівність

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{R_n^s}{\log(n)} \leqslant \sum_{i:\Delta_i>0} \frac{\Delta_i}{\mathrm{KL}(\mu_i, \mu^*)},$$

де $\Delta_i = \mu^* - \mu_i$.

У стохастичній моделі зазвичай розглядається асимптотичний аналіз втрат у визначеному класі середовища, тобто нижня границя втрати залежить від розподілу дій. Також можливо визначити критерій мінімаксу як у змагальних бандитах, тобто показати нижню границю втрат без залежності від розподілу дій. Bubeck S. & Cesa-Bianchi N. [19] показали, що для будь-якої стратегії s існує стохастична модель багаторукого бандита ν, де виконується

$$R_n^s(\nu) \geqslant \frac{1}{20}\sqrt{kn},$$

де k — це кількість дій.

5 Стратегії для стохастичного багаторукого бандита

Для стохастичної моделі стратегія розв'язку задачі полягає у пошуку балансу між дослідженням простору варіантів і використанням оптимального варіанту з вже відомих для отримання найбільшої можливої сукупної винагороди за відведений горизонт. Якщо стратегія передбачає тільки дослідження, вона може бути ефективною лише у простих випадках. Наприклад, стратегія з рівномірним дослідженням дій буде ефективною, коли усі дії з заданої множини $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, k\}$ є оптимальними, тобто $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$. Інакше втрати набувають лінійну складність, тобто $R_n^s = O(n)$. Це можна показати через декомпозицію втрат (3.2):

$$R_n = \sum_{i=1}^{k} (\mu^* - \mu_i)\, \mathbb{E}\left[N_i(n)\right],$$

де $N_i(n)$ — це кількість разів дія i була вибрана за n кроків. Тоді

$$\mathbb{E}\left[N_i(n)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{n} \mathbf{1}_{(A_t=i)}\right] = n\,\mathbb{P}\left(A_t = i\right) = \frac{n}{k}.$$

Отже, для стохастичного багаторукого бандита з кількістю дій $k > 1$ та принаймні однією неоптимальною дією, стратегія з рівномірним дослідженням має втрати

$$R_n = \frac{n}{k} \sum_{i=1}^{k} \Delta_i,$$

де $\Delta_i = \mu^* - \mu_i$ та $\mu^* \geqslant \mu^i$.

З іншого боку, стратегія, яка використовує тільки існуючі знання, нехтуючи дослідженням можливих змін у середовищі може понести значні втрати. Наприклад, стратегія моделі стохастичного дворукого бандита ($k = 2$), яка за перші два кроки обирає першу та другу дії відповідно, а на всіх інших $t \in \{3, 4, \ldots, n\}$ використовує найкращу дію за вибірковим середнім, тобто $\arg\max_{i\in\{1,2\}} \hat{\mu}_i(t)$, де

$$\hat{\mu}_i(t) = \frac{1}{N_i(t)} \sum_{j=1}^{t} \mathbf{1}_{(A_j=i)} X_j,$$

може отримати лінійні втрати. Для зразку візьмемо розподіли Бернуллі з параметрами

$p < 1/2$ та $q = 1/2$ для першої та другої дій відповідно. Тоді, з імовірністю pq, стратегія отримає винагороди 1 та 0 за першу та другу дії відповідно, і буде змушена обирати неоптимальну першу дію на всіх інших кроках. Звідси, згідно з визначенням (3.2), втрати набувають вигляду

$$R_n \geqslant \left(\frac{1}{2} - p\right)(n-1).$$

На цих прикладах видно, що для досягнення балансу між дослідженням і використанням потрібно використовувати відведений горизонт більш ефективно.

Стратегія Explore-First. Перші приклади стратегії Explore-First з'явилися у роботі Robbins H. [9], де він показав, що за деяких умов втрати можуть бути сублінійні.

Ця стратегія характеризується фіксованою кількістю m досліджень кожної дії в першій фазі дослідження, і вибором емпірично кращої дії у другій фазі для використання. Алгоритм вибору дії A_t на кроці t:

$$A_t = \begin{cases} (t \bmod k) + 1, & t \leqslant mk \\ \arg\max_{i \in \mathcal{A}} \hat{\mu}_i(mk), & t > mk. \end{cases}$$

Алгоритм стратегії Explore-First виглядає наступним чином:

1) фаза дослідження простору варіантів (перші mk кроків): вибрати кожну дію $i \in \mathcal{A}$ m разів;

2) фаза вибору оптимального варіанту ($t \in \{mk+1, \ldots, n\}$): використання $\arg\max_{i \in \mathcal{A}} \hat{\mu}_i(mk)$.

Якщо горизонт n відомий наперед, ми можемо мінімізувати верхню границю для отримання сублінійних втрат. Для моделі з розподілом Бернуллі Slivkins. A. [20] показав, що границя зверху є

$$\mathbb{E}[R_n] \leqslant n^{2/3} \times O\left(k \log n\right)^{1/3},$$

при виборі m наступним чином:

$$m = (n/k)^{2/3} \cdot O\left(\log n\right)^{1/3}. \qquad (5.1)$$

У [21] була отримана верхня границя з залежністю від неоптимальності дій:

$$R_n \leqslant m \sum_{i=1}^{k} \Delta_i + (n - mk) \sum_{i=1}^{k} \Delta_i \exp\left(-m\Delta_i^2\right).$$

Ця границя добре відображає складність знаходження балансу між дослідженням і використанням. Якщо m занадто мала, тоді стратегія недостатньо займається дослідженням та ймовірність вибору неоптимальної дії збільшується, як і значення правої частини нерівності. Якщо m завелика, ми збільшуємо ліву частини нерівності, яка безпосередньо відповідає за втрати від дослідження.

Варіацією цієї стратегії без залежності від кількості кроків n є Epsilon-Greedy, яка займається дослідженням та використанням протягом усього горизонту.

Стратегія Epsilon-Greedy. Ця стратегія задається за допомогою деякого параметра $0 < \varepsilon < 1$, де на кожному кроці з імовірністю ε відбувається дослідження варіантів, вибираючи рівномірно випадково, та з імовірністю $1 - \varepsilon$ використовується найкраща дія за вибірковим середнім:

$$A_t = \begin{cases} i \sim \text{Uniform}(\{1, k\}), & \text{з імовірністю } \varepsilon \\ \arg\max_{i \in \mathcal{A}} \left(\hat{\mu}_i(t)\right), & \text{інакше.} \end{cases}$$

Втрати цієї стратегії лінійні, так як ми змушенні продовжувати досліджувати варіанти, тобто границя знизу становить що найменше:

$$R_n \geqslant \left(\varepsilon \frac{1}{k} \sum_{i \in \mathcal{A}} \Delta_i\right) n.$$

У [22] було показано, що можливо отримати втрати $O(k \log(n))$, якщо замість сталого значення ε використовувати спадну послідовність $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{N}}$, але для цього потрібно знати наперед значення $\min_{i \in \mathcal{A}} \Delta_i$ для вибору кроку послідовності.

Стратегія Upper Confidence Bound (UCB). Ця стратегія з використанням принципу «оптимізму в умовах невизначеності»була представлена у роботі Auer P. та інші [22].

Для всіх дій $i \in \mathcal{A}$ обчислюється значення $U_i(t)$ на базі вибіркового середнього та верхньої границі надійного інтервалу, яка з великою ймовірністю є завищеною оцінкою невідомого математичного сподівання розподілу, пов'язаного з дією i.

На початку алгоритму кожна дія вибирається один раз, а потім на кожному кроці t — дія з найбільшим значенням $U_i(t)$:

$$A_t = \begin{cases} (t \bmod k) + 1, & t \leqslant k \\ \arg\max_{i \in \mathcal{A}} U_i(t), & t > k. \end{cases}$$

Обчислення верхніх границь будується на використанні нерівності Хефдинга [23]:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(\mathbb{E}\left[X_t\right]-X_t\right)\right|\geqslant\xi\right)\leqslant\exp\left(-2n\xi^2\right),$$

де $X_1,\ldots,X_n$ це незалежно однаково розподілені випадкові величини з $X_t\in[0,1]$ для усіх $\xi\geqslant 0$. Ця нерівність може використовуватися для аналізу надійного інтервалу, де ліва частина відображає ймовірність похибки для надійного інтервалу навколо математичного сподівання з радіусом ξ.

Таким чином, для стохастичного багаторукого бандита маємо наступну нерівність:

$$\mathbb{P}\left(\mu_i\geqslant\hat{\mu}_i+\xi_i(t)\right)\leqslant\exp\left(-2n\xi_i(t)^2\right),$$

де для $\exp\left(-2n\xi_i(t)^2\right)$ бажано отримати найменше значення. Приймемо $\exp\left(-2n\xi_i(t)^2\right)=p$, тоді радіус надійного інтервалу (чи межа похибки) приймає вигляд:

$$\xi_i(t)=\sqrt{\frac{-\log(p)}{2N_i(t)}}.$$

Для стратегії UCB значення $U_i(t)=U_i^{\mathrm{UCB}}(t)$ обчислюється як сума вибіркового середнього $\hat{\mu}_i(t)$ та радіусу надійного інтервалу $\xi_i(t)$ для деякого параметра α:

$$U_i^{\mathrm{UCB}}(t)=\frac{1}{N_i(t)}\sum_{j=1}^{t}\mathbf{1}_{(A_j=i)}X_j+\sqrt{\alpha\frac{\log(t)}{N_i(t)}}.$$

В цьому рівнянні перша частина (вибіркове середнє $\hat{\mu}_i(t)$) відповідає за вибір кращої дії на даний час, а межа похибки $\xi_i(t)$ — за дослідження. Вибір дії i відбувається, якщо $\hat{\mu}_i(t)$ достатньо велике, що може свідчити про можливу оптимальність дії, та/або, якщо межа похибки завелика, це може означати, що дія i недостатньо досліджена. Параметр α допомагає контролювати цей баланс.

Для параметричних моделей з розподілами з експоненційного сімейства альтернативою використанню радіусу надійного інтервалу з нерівності Хефдинга є використання нерівності Чернова [24], як було зроблено у роботах [25, 26], де стратегія отримала назву KL-UCB (*англ.* Kullback–Leibler divergence Upper Confidence Bound).

За стратегією KL-UCB для всіх дій обчислюється значення $U_i(t)=U_i^{\text{KL-UCB}}(t)$ наступним чином:

$$U_i^{\text{KL-UCB}}(t)=\sup_{q\in[0,1]}\left\{q:\mathrm{KL}\left(\hat{\mu}_i,q\right)\leqslant\frac{\log(t)}{N_i(t)}\right\}.$$

Як видно з визначення $U_i^{\text{KL-UCB}}(t)$, для реалізації алгоритму потрібно розв'язати задачу оптимізації.

Втрати цих стратегій мають логарифмічний порядок, вони є асимптотично оптимальними.

6 Баєсова модель

З точки зору баєсової інтерпретації ймовірності можна розглядати параметр $\boldsymbol{\theta}$ як випадкову величину з відбору вибірки з деякого апріорного розподілу Π. Стратегія s, яка максимізує винагороди, також еквівалентно мінімізує баєсові втрати, які були представлені у [13]:

$$\begin{aligned}\mathrm{BR}_n^s\left(\Pi\right)&=\mathbb{E}_\Pi\left[n\mu^*-\sum_{t=1}^{n}X_t\right]\\&=\mathbb{E}_\Pi\left[\mathbb{E}_\Pi\left[n\mu^*-\sum_{t=1}^{n}X_t|\boldsymbol{\theta}\right]\right]\\&=\mathbb{E}_\Pi\left[R_n^s\left(\boldsymbol{\theta}\right)\right].\end{aligned}$$

На кроці t вибір дії заснований на поточному апостеріорному розподілу параметра $\boldsymbol{\theta}$, який є умовним розподілом, що залежить від поточних спостережень, та задається як

$$\Pi_t(\boldsymbol{\theta})=L(\boldsymbol{\theta}|A_1,X_1,\ldots,A_t,X_t),$$

де L — це функція вірогідності.

Bubeck S. & Cesa-Bianchi N. [19] показали, що для кожної стратегії s, існує такий апріорний розподіл Π, що дозволяє отримати наступну складність втрат:

$$\mathrm{BR}_n^s\left(\Pi\right)\geqslant\frac{1}{20}\sqrt{kn},$$

де k — це кількість дій.

Одна з перших баєсових стратегій для стохастичного багаторукого бандита — це Thompson Sampling [8]. Стратегія передбачає використання деякого k-вимірного вектора апріорного розподілу $\Pi_0=\left(\pi_0^1,\ldots,\pi_0^k\right)$, де π_0^i є апріорним розподілом параметра θ_i для дії i. На кроці t, враховуючи нові спостереження, виводиться новий апостеріорний розподіл Π_t:

$$\Pi_t=\left(\pi_t^1,\ldots,\pi_t^k\right),$$

де π_t^i це апостеріорний розподіл параметра θ_i для дії i після $m = N_i(t)$ спостережень $Y_{i,1}, \ldots, Y_{i,m}$:

$$\pi_t^i = L(\theta_i | Y_{i,1}, \ldots, Y_{i,m}).$$

Відбувається відбір вибірки $Z_{i,t} \sim \pi_t^i$ для кожної дії та аналізуються їх реалізації $(z_{1,t}, \ldots, z_{k,t})$ для вибору дії з найбільшим значенням:

$$A_t = \arg\max_{i \in \mathcal{A}} z_{i,t}.$$

Для стохастичного багаторукого бандита з розподілом Бернуллі в якості апріорного розподілу можна обрати Бета-розподіл, який задається параметрами $\alpha > 0$ та $\beta > 0$ для кожної дії i у наступному вигляді:

$$\pi_0^i = \text{Beta}(1, 1).$$

Таким чином, маємо на початку алгоритму рівномірний розподіл Uniform$(0, 1)$ для вибору дій випадковим чином. На кроці t виводиться наступний апостеріорний розподіл:

$$\pi_t^i = \text{Beta}(T_i(t) + 1, N_i(t) - T_i(t) + 1),$$

де $T_i(t)$ це сума усіх винагород дії i після t кроків:

$$T_i(t) = \sum_{j=1}^{t} \mathbf{1}_{(A_j = i)} X_j.$$

Значення $T_i(t)$ показує кількість успіхів від вибору дії i, а $(T_i(t) - N_i(t))$ — кількість невдач протягом горизонту t.

Agrawal S. & Navin G. [27] показали, що втрати стратегії Thompson Sampling для стохастичного багаторукого бандита у загальному випадку є логарифмічними:

$$R_n = O\left(\left[\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{{\Delta_i}^2}\right)^2\right] \log(n)\right).$$

Цей алгоритм є асимптотично оптимальним.

Також варто зазначити, що проблему багаторукого бандита у баєсовій інтерпретації можливо розв'язувати за допомогою динамічного програмування. Bellman R. [28] використовую для цього втрати знецінювання. Для деякого коефіцієнта знецінювання $\gamma \in (0, 1]$ потрібно максимізувати наступні сукупні винагороди:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{\infty} \gamma^{t-1} X_t\right].$$

Було показано, що розв'язок за допомогою динамічного програмування [15, 29] є оптимальною стратегією у даному випадку. Також у баєсовій інтерпретації оптимальним є використання індексів динамічного розподілу (індексів Гіттінса), в основі яких лежить динамічне програмування, але це передбачає розглядання нескінченного горизонту. У моделі зі скінченним горизонтом індекси Гіттінса не є оптимальними.

Опис та аналіз стратегій для інших розподілів та їх варіацій можна знайти у таких роботах, як Bubeck S. & Cesa-Bianchi N. [19] та Slivkins. A. [20].

7 Чисельні експерименти

У цьому розділі представлені результати емпіричних тестів для стохастичного багаторукого бандита з розподілом Бернуллі. Для цього було розроблено програмне забезпечення з імплементацією алгоритмів для усіх розглянутих стратегій [33]. Мета експериментів — показати переваги наведених стратегій.

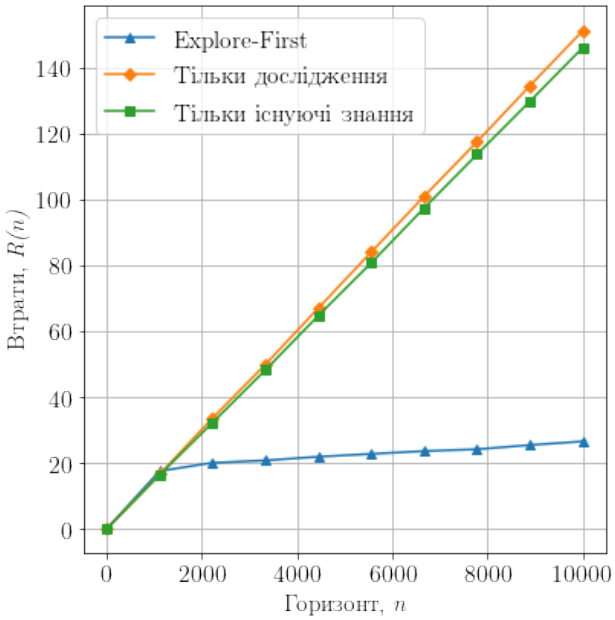


Рис. 1: Втрати багаторукого бандита Бернуллі зі стратегіями Explore-First (параметр m обран за (5.1)), з використанням тільки існуючого знання та тільки дослідження (рівномірного)

Експеримент проведено з горизонтом $n = 10000$ з двома діями і математичними очікуваннями 0.7 і 0.8 відповідно, результати агреговані на 1000 незалежних тестів. На рисунках 1 та 2 зображені графіки втрат розглянутих стратегій з порівнянням випадків вибору тільки дослі-

дження (рівномірного) та тільки використання існуючого знання (Explore-First з параметром $m = 1$)).

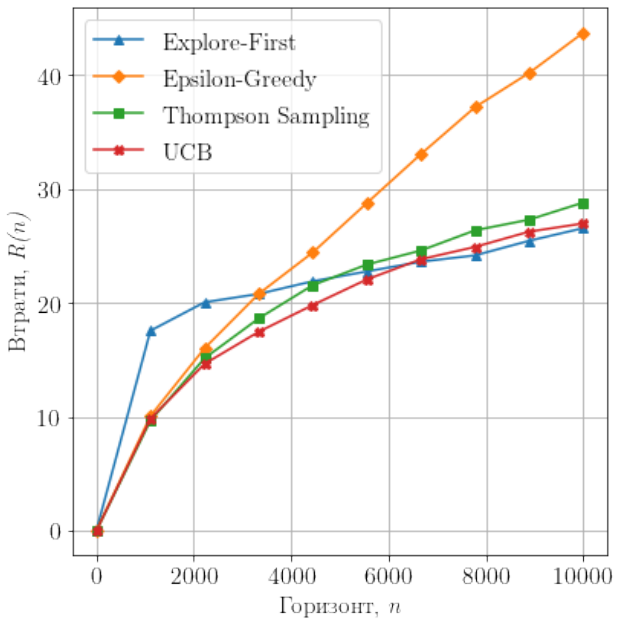


Рис. 2: Втрати багаторукого бандита Бернуллі зі стратегіями Explore-First (параметр m обран за (5.1)), Epsilon-Greedy з параметром $\varepsilon = 0.2$, Thompson Sampling та UCB з параметром $\alpha = 0.1$

8 Зв'язок з марковським процесом прийняття рішень

У загальному випадку модель багаторукого бандита може бути описана за допомогою марковського процесу прийняття рішень (МППР) [30].

Позначимо через $\Delta(G)$ множину всіх імовірнісних розподілів групи G, через S та $\mathcal{A}$ — множини станів та дій відповідно. Нехай P — деяке стохастичне ядро, яке задає ймовірність $P(s, i, s')$ того, що дія i в стані s на кроці t призведе до стану s' на кроці $t+1$. Для кожного стану $s \in S$ та дії $i \in \mathcal{A}$ маємо $P(s, i, \cdot) \in \Delta(S)$. Нехай R — деяке стохастичне ядро, яке задає стохастичні винагороди $R(s, i, s', \cdot) \in \Delta([0, 1])$. Тоді можна задати МППР четвіркою $(S, \mathcal{A}, P, R)$.

Коли агент знаходиться у стані $s \in S$ та вибирає дію $i \in \mathcal{A}$, відбувається перехід до нового стану $s' \sim P(\cdot|s, i)$ та отримання винагороди $r \sim R(\cdot|s, i)$. Мета агента — знайти стратегію (функцію, яка вказує, яку дію вибрати відповідно до поточного стану), яка максимізує очікувану винагороду у МППР з невідомими параметрами. Ця взаємодія агента з середовищем зображена на рисунку 3.

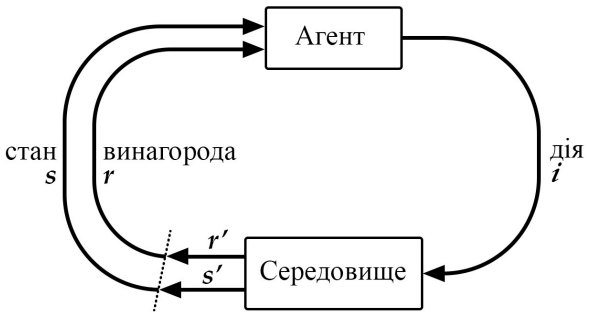


Рис. 3: Взаємодія агента зі стохастичним середовищем

Стохастична модель багаторукого бандита може бути описана як МППР з одним станом s_0, тоді для стохастичного ядра, яке задає винагороди, маємо $R(\cdot|s_0, i) = \nu_i$.

Також за допомогою МППР можна моделювати баєсового багаторукого бандита, розглянутого у попередньому розділі, де поточний стан — це поточний апостеріорний розподіл Π, а відбір вибірки $\boldsymbol{\theta}$ робиться з апріорного розподілу Π_0. Таким чином, агент обирає дію i у стані Π, отримує винагороду $r \sim \nu_{\theta_i}$, та, враховуючи нові спостереження, виводить новий апостеріорний розподіл Π'.

Пошук оптимальної стратегії у цій МППР можливий методами динамічного програмування, де функція цінностей V для нескінченого горизонту та деякого коефіцієнта знецінювання $\gamma \in (0, 1]$ має вигляд

$$V_\Pi = \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{\infty} \gamma^{t-1} X_t\right].$$

Знаходження оптимальної політики у МППР може вимагати забагато обчислення у зв'язку з потенційно великим простором станів. Розв'язки для випадку дворукого бандита були наведені у роботах [31, 32].

9 Висновки

Були розглянуті стратегії послідовного розподілу ресурсів у середовищі, яке представлене моделлю стохастичного багаторукого бандита з наведенням огляду та класифікації. Головною метою розглянутих стратегій є максимізація прибутку, що еквівалентно мінімізації

втрат. Проведено аналіз складності цих стратегій, умов їх ефективності та втрат для випадку багаторукого бандита у стохастичному середовищі з розподілом Бернуллі. Розглянуті теоретичні відомості використовувалися для розробки програмного забезпечення для проведення чисельних експериментів з метою демонстрації ефективності стратегій.

Список використаних джерел

1. *Wald A.* Sequential Analysis / A. Wald. — NY: John Wiley & Sons, Inc., 1950.
2. *Haldane J. B. S.* On a method of estimating frequencies / J. B. S. Haldane // Biometrika. — 1945. — Vol. 33. — No. 3. — P. 222–225.
3. *Stein C.* A two-sample test for a linear hypothesis whose power is independent of the variance / C. Stein // The Annals of Mathematical Statistics. — 1945. — Vol. 16. — No. 3. — P. 243–258.
4. *Wald A.* Optimum character of the sequential probability ratio test / A. Wald, J. Wolfowitz // Ann. Math. Statist. — 1948. — P. 326–339.
5. *Arrow K. J.* Bayes and minimax solutions of sequential decision problems / K. J. Arrow, D. Blackwell, M. A. Girshick // Econometrica. — 1949. — Vol. 17. — P. 213–244.
6. *Snell J. L.* Applications of martingale system theorems / J. L. Snell // Trans. Amer. Math. Soc. — 1952. — Vol. 73. — P. 293–312.
7. *Bellman R.* Dynamic Programming / R. Bellman. — Princeton Univ. Press, 1957.
8. *Thompson W. R.* On the likelihood that one unknown probability exceeds another in view of the evidence of two samples / W. R. Thompson // Biometrika. — 1933. — Vol. 25. — No. 3/4. — P. 285–294.
9. *Robbins H.* Some aspects of the sequential design of experiments / H. Robbins // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1952. — Vol. 58. — No. 5. — P. 527–535.
10. *Gittins J.* A dynamic allocation index for the sequential design of experiments / J. Gittins, D. M. Jones // Progress in Statistics. — 1974. — P. 241–266.
11. *Ghosh B. K.* Handbook of sequential analysis / B. K. Ghosh. — CRC Press, 1991.
12. *Siegmund D.* Herbert Robbins and sequential analysis / D. Siegmund // Annals of statistics. — 2003. — P. 349–365.
13. *Lai T. L.* Asymptotically efficient adaptive allocation rules / T. L. Lai, H. Robbins // Advances in applied mathematics. — 1985. — Vol. 6. — No. 1. — P. 4–22.
14. *Auer P.* The nonstochastic multiarmed bandit problem / P. Auer, N. Cesa-Bianchi, Y. Freund, R. Schapire // SIAM Journal on Computing. — 2003. — Vol. 32. — No. 1. — P. 48–77.
15. *Gittins J.* Bandit processes and dynamic allocation indices / J. Gittins // Journal of the Royal Statistical Society. — 1979. — Vol. 41. — No. 2. — P. 148–177.
16. *Whittle P.* Restless bandits: Activity allocation in a changing world / P. Whittle // Journal of Applied Probability. — 1988. — Vol. 25. — P. 287–298.
17. *Koopman B. O.* On distributions admitting a sufficient statistic / B. O. Koopman // Transactions of the American Mathematical society. — 1936. — Vol. 39. — No. 3. — P. 399–409.
18. *Kullback S.* On information and sufficiency / S. Kullback, R. A. Leibler // The annals of mathematical statistics. — 1951. — Vol. 22. — No. 1. — P. 79–86.
19. *Bubeck S.* Regret analysis of stochastic and nonstochastic multi-armed bandit problems / S. Bubeck, N. Cesa-Bianchi // Foundations and Trends in Machine Learning. — 2012. — Vol. 5 — No. 1. — P. 1–122.
20. *Slivkins A.* Introduction to multi-armed bandits / A. Slivkins // Foundations and Trends in Machine Learning. — 2019. — Vol. 12. — No. 1-2. — P. 1–286.
21. *Джога А.* Багаторукий бандит з розподілом Бернуллі в середовищі з затримками /

А. Джога // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. — 2021. — №. 1. — С. 20–26.

22. *Auer P.* Finite-time Analysis of the Multiarmed Bandit Problem / P. Auer, N. Cesa-Bianchi, P. Fischer // Machine Learning. — 2002. — Vol. 47. — No. 2. — P. 235–256.

23. *Hoeffding W.* Probability inequalities for sums of bounded random variables / W. Hoeffding // Journal of the American statistical association. — 1963. — Vol. 58. — No. 301. — P. 13–30.

24. *Chernoff H.* A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations / H. Chernoff // The Annals of Mathematical Statistics. — 1952. — Vol. 23. — No. 4. — P. 493–507.

25. *Garivier A.* The KL-UCB Algorithm for Bounded Stochastic Bandits and Beyond / A. Garivier, O. Cappe // Conference on Learning Theory, PMLR. — 2011. — P. 359–376.

26. *Cappe O.* Kullback-Leibler Upper Confidence Bounds For Optimal Sequential Allocation / O. Cappe, A. Garivier, O. A. Maillard, R. Munos, and G. Stoltz // Annals of Statistics. — 2013. — Vol. 41. — No. 3. — P. 1516–1541.

27. *Agrawal S.* Analysis of thompson sampling for the multi-armed bandit problem / S. Agrawal, N. Goyal // Conference on learning theory, JMLR. — 2012. — P. 39.

28. *Bellman R.* A problem in the sequential design of experiments / R. Bellman // The indian journal of statistics. — 1956. — Vol. 16. — No. 3/4. — P. 221–229.

29. *Berry D.* Bandit Problems. Sequential allocation of experiments / D. Berry, B. Fristedt // Chapman and Hall, Springer. — 1985. — Vol. 5. — No. 51-87. — P. 7.

30. *Puterman M.* Markov Decision Processes: discrete stochastic dynamic programming / M. Puterman. — Wiley, 1994.

31. *Feldman D.* Contributions to the "two-armed bandit"/ D. Feldman // The Annals of Mathematical Statistics. — 1962. — Vol. 33. — No. 3. — P. 947–956.

32. *Berry D. A.* A Bernoulli two-armed bandit / D. A. Berry // The Annals of Mathematical Statistics. — 1972. — P. 871–897.

33. *Dzhoha A.* Multi-armed bandit problem under delayed feedback: numerical experiments [Електронний ресурс] / A. Dzhoha. — 2021. — Режим доступу до ресурсу: https://github.com/djo/delayed-bandit.

References

1. WALD, A. (1950) *Sequential Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., NY.

2. HALDANE, J. B. S. (1945) On a method of estimating frequencies. *Biometrika*. 33 (3). p. 222–225.

3. STEIN, C. (1945) A two-sample test for a linear hypothesis whose power is independent of the variance. *The Annals of Mathematical Statistics*. 16 (3). p. 243–258.

4. WALD, A., WOLFOWITZ, J. (1948) Optimum character of the sequential probability ratio test. *Ann. Math. Statist*. p. 326–339.

5. ARROW, K. J., BLACKWELL, D., GIRSHICK, M. A. (1949) Bayes and minimax solutions of sequential decision problems. *Econometrica*. 17. p. 213–244.

6. SNELL, J. L. (1952) Applications of martingale system theorems. *Trans. Amer. Math. Soc*. 73. p. 293–312.

7. BELLMAN, R. (1957) *Dynamic Programming*. Princeton Univ. Press.

8. THOMPSON, W. R. (1933) On the likelihood that one unknown probability exceeds another in view of the evidence of two samples. *Biometrika*. 25 (3/4). p. 285–294.

9. ROBBINS, H. (1952) Some aspects of the sequential design of experiments. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 58 (5). p. 527–535.

10. GITTINS, J., JONES, D. M. (1974) A dynamic allocation index for the sequential design of experiments. *Progress in Statistics*. p. 241–266.

11. GHOSH, B. K. (1991) *Handbook of sequential analysis.* CRC Press.

12. SIEGMUND, D. (2003) Herbert Robbins and sequential analysis. *Annals of statistics.* p. 349–365.

13. LAI, T. L., ROBBINS, H. (1985) Asymptotically efficient adaptive allocation rules. *Advances in applied mathematics.* 6 (1). p. 4–22.

14. AUER, P., CESA-BIANCHI, N., FREUND, Y., SCHAPIRE, R. (2003) The nonstochastic multiarmed bandit problem. *SIAM Journal on Computing.* 32 (1). p. 48–77.

15. GITTINS, J. (1979) Bandit processes and dynamic allocation indices. *Journal of the Royal Statistical Society.* 41 (2). p. 148–177.

16. WHITTLE, P. (1988) Restless bandits: Activity allocation in a changing world. *Journal of Applied Probability.* 25. p. 287–298.

17. KOOPMAN, B. O. (1936) On distributions admitting a sufficient statistic. *Transactions of the American Mathematical society.* 39 (3). p. 399–409.

18. KULLBACK, S., LEIBLER, R. A. (1951) On information and sufficiency. *The annals of mathematical statistics.* 22 (1). p. 79–86.

19. BUBECK, S., CESA-BIANCHI, N. (2012) Regret analysis of stochastic and nonstochastic multi-armed bandit problems. *Foundations and Trends in Machine Learning.* 5 (1). p. 1–122.

20. SLIVKINS, A. (2019) Introduction to multi-armed bandits. *Foundations and Trends in Machine Learning.* 12 (1-2). p. 1–286.

21. DZHOHA, A. (2021) Bernoulli multi-armed bandit problem under delayed feedback. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics.* №. 1. p. 20–26.

22. AUER, P., CESA-BIANCHI, N., FISCHER, P. (2002) Finite-time Analysis of the Multi-armed Bandit Problem. *Machine Learning.* 47 (2). p. 235–256.

23. HOEFFDING, W. (1963) Probability inequalities for sums of bounded random variables. *Journal of the American statistical association.* 58 (301). p. 13–30.

24. CHERNOFF, H. (1952) A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations. *The Annals of Mathematical Statistics.* 23 (4). p. 493–507.

25. GARIVIER, A., CAPPE, O. (2011) The KL-UCB Algorithm for Bounded Stochastic Bandits and Beyond. *Conference on Learning Theory, PMLR.* p. 359–376.

26. CAPPE O., GARIVIER, A., MAILLARD, O. A., MUNOS, R., STOLTZ, G. (2013) Kullback-Leibler Upper Confidence Bounds For Optimal Sequential Allocation. *Annals of Statistics.* 41 (3). p. 1516–1541.

27. AGRAWAL, S., GOYAL, N. (2012) Analysis of thompson sampling for the multi-armed bandit problem. *Conference on learning theory, JMLR.* p. 39.

28. BELLMAN, R. (1956) A problem in the sequential design of experiments. *The indian journal of statistics.* 16 (3/4). p. 221–229.

29. BERRY, D., FRISTEDT, B. (1985) Bandit Problems. Sequential allocation of experiments. *Chapman and Hall, Springer.* 5 (51-87). p. 7.

30. PUTERMAN, M. (1994) *Markov Decision Processes: discrete stochastic dynamic programming.* Wiley.

31. FELDMAN, D. (1962) Contributions to the "two-armed bandit". *The Annals of Mathematical Statistics.* 33 (3). p. 947–956.

32. BERRY, D. A. (1972) A Bernoulli two-armed bandit. *The Annals of Mathematical Statistics.* p. 871–897.

33. DZHOHA, A. (2021) *Multi-armed bandit problem under delayed feedback: numerical experiments.* [Online] Available from: https://github.com/djo/delayed-bandit.

Надійшла до редколегії 07.09.2021

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

УДК 539.3 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.2

Вайсфельд Н. Д., д.ф.-м.н., професор,
Журавльова З. Ю., к.ф.-м.н, доцент.

Нестаціонарна задача теорії пружності для чвертьплощини

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, 65082, м. Одеса, вул. Дворянська, 2,
e-mail: z.zhuravlova@onu.edu.ua

N. D. Vaysfeld, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof,
Z. Yu. Zhuravlova, PhD (Phys.-Math.).

Non-stationary problem of elasticity for a quarter-plane

Odessa I. I. Mechnikov National University, 65082, Odessa, Dvoryanskaya str., 2,
e-mail: z.zhuravlova@onu.edu.ua

У статті розв'язано плоску задачу теорії пружності для чвертьплощини, що знаходиться під дією нестаціонарного навантаження. Вихідну задачу зведено до одновимірної шляхом застосування інтегральних перетворень Лапласа та Фур'є. Одновимірну крайову задачу у просторі трансформант записано у векторній формі, її розв'язок знайдено за допомогою апаратів матричного диференціального числення та матриці-функції Гріна. Для обернення отриманих розв'язків у просторі трансформант використано метод сумісного обернення перетворень Лапласа-Фур'є. Розв'язання вихідної задачі зведено до розв'язання сингулярного інтегрального рівняння відносно невідомої функції переміщень на одній з граней чвертьплощини. Дане рівняння розв'язано методом ортогональних поліномів для фіксованих моментів часу.

Ключові слова: *чвертьплощина, нестаціонарне навантаження, інтегральне перетворення, сингулярне інтегральне рівняння, матриця-функція Гріна.*

The plane problem for an elastic quarter-plane under the non-stationary loading is solved in the article. The method for solving was proposed in the previous authors' papers, but it was used for the stationary case of the problem there. The initial problem is reduced to the one-dimensional problem by using the Laplace and Fourier integral transforms. The one-dimensional problem in transform space is written in vector form. Its solution is constructed as the superposition of the general solution for the homogeneous equation and the partial solution for the inhomogeneous equation. The general solution for the homogeneous vector equation is derived using the matrix differential calculations. The partial solution is found through Green's matrix-function. The derived expressions for displacements and stresses are inverted by using of mutual inversion of Laplace-Fourier transforms. The solving of the initial problem is reduced to the solving of the singular integral equation regarding the displacement function at the one of the boundary of the quarter-plane. The time discretization is used, and the singular integral equation is solved using the orthogonal polynomials method at the fixed time moments. Based on numerical research some important mechanical characteristics depending on the time and loading types were derived.

Key Words: quarter-plane, non-stationary loading, integral transform, singular integral equation, Green's matrix-function.

Communicated by Cor.-Member of the NAS of Ukraine Zhuk Ya.O.

The stationary statement of elastic problems for a quarter-plane is quite well-known. One of the first researches dedicated to the stationary problems for elastic quarter plane was [1]. Two types of loading were considered there, and the analytical solutions were derived with help of Mellin transform and Papkovich-Neiber functions. The static problem for an elastic quarter-plane for arbitrary type of loading was solved in [2].

The problems for a quarter-plane in dynamical statement are investigated much less frequently. At this review authors concentrated their attention on the analytical methods, which can be used for this problem.

The apparatus of Volterra integral equation was used in [3] for solving of the problem on optimal control for either a displacement-vector or a stress-

© Н.Д. Вайсфельд, З.Ю. Журавльова, 2021

tensor component in a section of an elastic half-space for the case of plane strain.

The apparatus of singular integral equations and boundary integral equation method are powerful tools for the solving similar problems. They were used in [4] for the problem of dynamic stress intensification due to the defect in a three component elastic solid consisting of two dissimilar half spaces and intermediate layer. The application of boundary integral equations to 2D and 3D problems for space under impact and time-harmonic loading was presented in [5].

The methods for solving of the more complex problems are also worth noting. The method of solving plane unsteady problems for an elastic half-space with a mobile boundary related to changing the boundary conditions of a mixed type was presented in [6]. There the solution was based on the method of splitting the functions of influence, and also the factorization method. The multiple-scale approach using an extra slow time variable was applied for a generally anisotropic elastic half-space in [7].

A technique for determining the stress-strain state of an elastic half-plane under a nonstationary load applied to its boundary was developed in [8]. The corresponding boundary-value problem with initial conditions was formulated, and Laplace and Fourier transforms were used there. The initial-boundary value problem for the linear one-dimensional Jin-Xin relaxation model in a quarter plane was considered in [9]. The asymptotic convergence and boundary layer behavior were studied there by the Laplace transform and a matched asymptotic analysis. The exact solutions of nonstationary contact problems of elastodynamics for a half-plane with the dry and viscous friction in the contact zone having the contact edge point moving with arbitrary variable velocity along the boundary of a half-plane were obtained by the use of Radon transform in [10].

As it is seen, the Laplace and Fourier transforms are widely used for the solving of the non-stationary problems. The most complex part in usage of the Laplace transform is in its inversion. The useful expansion theorems, which can be applied for some classes of functions, were proven in [11]. The relations that allow direct calculation of the original function from its transform dispensing contour integration were derived by the change of variables in [12].

The method of mutual inversion of Laplace-Fourier transforms was proposed in [13]. A homogeneous isotropic elastic half plane with nonstationary normal displacements on the boundary was considered in [14]. The integral representations for displacements with kernels in the form of surface influence functions were derived there, and the originals were computed by using an algorithm of joint inversion of Laplace and Fourier integral transformations.

Cagniard-de Hoop method is also one of the well-known methods for the inversion of Laplace transform. The transient response in elastodynamic quarter plane problems with mixed boundary conditions was considered in [15]. Two dimensional elastodynamic equations were solved there analytically applying of integral transformations and Cagniard-de Hoop method and complex integration. The transient response of multiple cracks subjected to shear impact load in a half-plane was investigated in [16]. The exact solution for the transient response of Volterra-type dislocation in a half-plane was obtained there by using the Cagniard-de Hoop method of Laplace inversion.

As it can be seen from the review the problems for dynamic elastic quarter-planes are not fully developed, so it's investigation is relevant. In the following paper authors propose the another approach dealing with matrix differential calculation apparatus, matrix Green's function and analytical inversion of Laplace transform.

The elastic quarter-plane which occupies an area describing in Cartesian coordinate system by the correspondences $x, y > 0$ is considered. The lateral side of the quarter-plane is fixed

$$u(0,y,t) = 0, v(0,y,t) = 0 \tag{1}$$

The normal load $p(x,t)$ is applied to the upper boundary of the quarter-plane:

$$\begin{gathered}\sigma_y\big|_{y=0} = p(x,t), \tau_{xy}\big|_{y=0} = 0, 0 < a_0 < x < a_1, t > 0 \\ v\big|_{y=0} = 0, \tau_{xy}\big|_{y=0} = 0, 0 < x < a_0, x > a_1, t > 0\end{gathered} \tag{2}$$

The displacements and stresses that satisfy boundary conditions (1) - (2), zero initial conditions and the following motion equations should be found:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\kappa-1}{\kappa+1}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{2}{\kappa+1}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \dfrac{\rho}{G}\dfrac{\kappa-1}{\kappa+1}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\kappa+1}{\kappa-1}\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{2}{\kappa-1}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \dfrac{\rho}{G}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0,\end{cases} \tag{3}$$

where ρ - density, G – shear modulus, $\kappa = 3 - 4\mu$ - Muskhelishvli's constant, μ - Poisson ration.

The Laplace transform regarding the variable t:

$$\begin{bmatrix} u_s(x,y) \\ v_s(x,y) \end{bmatrix} = \int_0^\infty \begin{bmatrix} u(x,y,t) \\ v(x,y,t) \end{bmatrix} e^{-st} dt$$

and the semi-infinite sin-, cos- Fourier transform regarding the variable *y* are applied to the boundary-valued problem (1) - (3):

$$\begin{bmatrix} u_{s\beta}(x) \\ v_{s\beta}(x) \end{bmatrix} = \int_0^\infty \begin{bmatrix} u_s(x,y) \\ v_s(x,y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta y \\ \sin\beta y \end{bmatrix} dy$$

The boundary-valued problem in transform space if written in the vector form

$$\begin{cases} L_2 \vec{y}_{s\beta}(x) = \vec{f}_{s\beta}(x), \\ \vec{y}_{s\beta}(0) = 0, \lim\limits_{x\to\infty} \vec{y}_{s\beta}(x) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Here *s, β* are Laplace and Fourier transform parameters respectively,

$$L_2 \vec{y}_{s\beta}(x) = I\vec{y}_{s\beta}''(x) + 2\beta Q\vec{y}_{s\beta}'(x) - P_{s\beta}\vec{y}_{s\beta}(x),$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\kappa+1} \\ -\frac{1}{\kappa-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_{s\beta}(x) = \begin{pmatrix} \frac{3-\kappa}{\kappa+1}\chi_s'(x) \\ -\beta\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\chi_s(x) \end{pmatrix},$$

$$P_{s\beta} = \begin{pmatrix} (\beta^2+q^2)\frac{\kappa-1}{\kappa+1} & 0 \\ 0 & \beta^2\frac{\kappa+1}{\kappa-1}+q^2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{y}_{s\beta}(x) = \begin{pmatrix} u_{s\beta}(x) \\ v_{s\beta}(x) \end{pmatrix}, \; q^2 = \frac{\rho}{G}\cdot s^2, \; \chi_s(x) = v_s\big|_{y=0}.$$

The solution of the problem (4) is constructed as the superposition of general solution of the vector homogeneous equation $\vec{y}^0_{s\beta}(x)$ and partial solution of inhomogeneous vector equation $\vec{y}^1_{s\beta}(x)$.

To find the solution of the vector homogeneous equation the solution of the corresponding matrix homogeneous equation is constructed [17] $L_2 Y_{s\beta}(x) = 0$, here $Y_{s\beta}(x)$ is matrix of order 2x2, which was chosen in the form $Y_{s\beta}(x) = e^{\xi x} I$ and substituted into the homogeneous matrix equation. As the result, the correspondence $L_2 e^{\xi x} I = M_{s\beta}(\xi) e^{\xi x}$ is derived, where matrix $M_{s\beta}(\xi)$ has the form $M_{s\beta}(\xi) = I\xi^2 + 2\beta Q\xi - P_{s\beta}$. The solution of the matrix equation is found by the formula [17] $Y(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{\xi x} M^{-1}_{s\beta}(\xi) d\xi$, where the closed contour C covers all poles of the integrand. After the calculation of the contour integral with the help of residue theorem the system of 4 matrix fundamental solution, which correspond to the roots $\xi_{1,2} = \pm\sqrt{\beta^2+q^2}, \xi_{3,4} = \pm\sqrt{\beta^2 + q^2\frac{\kappa-1}{\kappa+1}}$ is found. Considering that solution $Y_{s\beta}(x)$ has to decrease on infinity, the following general solution is derived

$$\vec{y}^0_{s\beta}(x) = \left(Y_1(x) + Y_2(x)\right)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

where $Y_1(x), Y_2(x)$ are matrix solutions that correspond to the roots $-\sqrt{\beta^2+q^2}, -\sqrt{\beta^2+q^2\frac{\kappa-1}{\kappa+1}}$, c_1, c_2 are constants that are found from the boundary conditions (1).

To find the partial solution (4) Green's matrix-function $G_{s\beta}(x,\xi)$ is constructed [18] for the auxiliary boundary problem

$$\begin{cases} L_2 \vec{y}_{s\beta}(x) = \vec{f}_s(x), \\ V_0\left[\vec{y}_{s\beta}(x)\right] = 0, \lim\limits_{x\to\infty} \vec{y}_{s\beta}(x) = 0 \end{cases}$$

where

$$V_0\left[\vec{y}_{s\beta}(x)\right] = \alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\vec{y}_{s\beta}(0) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{y}'_{s\beta}(0).$$

The kernel of integral transform is chosen in the form $H(x,\alpha) = \begin{pmatrix} \sin\alpha x & 0 \\ 0 & \cos\alpha x \end{pmatrix}$.

Green's matrix-function is constructed as the bilinear expansion

$$G_{s\beta}(x,\xi) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty H(x,\alpha)\Omega^{-1}_{s\beta}(\alpha)H(\xi,\alpha)d\alpha$$

Here $\Omega_{s\beta}(\alpha) = -I\alpha^2 - 2\beta\alpha\tilde{Q} - P_{s\beta}$, $\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1/(\kappa+1) \\ 1/(\kappa-1) & 0 \end{pmatrix}$.

The partial solution of the problem (4) has the following form

$$\vec{y}^1_{s\beta}(x) = \int_0^\infty G_{s\beta}(x,\xi)\vec{f}_{s\beta}(\xi)d\xi \quad (6)$$

Uniting (5) and (6) the solution of boundary problem (4) is found in transform space

$$\vec{y}_{s\beta}(x) = \left(Y_1(x) + Y_2(x)\right)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \int_0^\infty G_{s\beta}(x,\xi)\vec{f}_{s\beta}(\xi)d\xi \quad (7)$$

The displacements (7) and stresses in Laplace-Fourier transform space are inverted analytically by the mutual inversion of the Laplace-Fourier transform. According to the approach [19] the substitution $\beta = \lambda s$ is done in each transform

$f^{FL}(s,\beta)$. Then the following two representations for the functions in Laplace-Fourier space are derived

$$f^{LF}(s,z)=e^{-As\sqrt{\lambda^2+R}}h(\lambda) \quad (8)$$

$$f^{LF}(s,z)=e^{-s\left(A\sqrt{\lambda^2+R}+B\sqrt{\lambda^2+K}\right)}h(\lambda) \quad (9)$$

Here $A,B,R,K>0$ are some constants that depend neither on s nor on λ, $h(\lambda)$ is some known function.

The changes of variables $A\left(\sqrt{\lambda^2+R}-\sqrt{R}\right)+\lambda zi=t$ and $A\sqrt{\lambda^2+R}-A\sqrt{R}+B\sqrt{\lambda^2+K}-B\sqrt{K}+\lambda zi=t$ a re done for the functions (8), (9) respectively. So, two expressions for the functions $\lambda(t),\alpha(t)=\sqrt{\lambda^2(t)+R}$ for the first case and four expressions for the functions $\lambda(t),\alpha(t)=\sqrt{\lambda^2(t)+R},\beta(t)=\sqrt{\lambda^2(t)+K}$ for the second case are derived. So, the original functions are constructed by the formula $f(t,x)=\lim_{y\to 0}\left(f_+(t,z)-f_-(t,z)\right), z=x+iy$,

where

$$\hat{f}_\pm(t,z)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \delta'\left(\tau-A\sqrt{R}\right)\left[h\frac{\partial\lambda_i}{\partial t}\right](t-\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \delta\left(\tau-A\sqrt{R}\right)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[h\frac{\partial\lambda_i}{\partial t}\right](t-\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[h\frac{\partial\lambda_i}{\partial t}\right]\left(t-A\sqrt{R}\right), i=1,2$$

for the first case and

$$\hat{f}_\pm(t,z)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \delta'\left(\tau-A\sqrt{R}-B\sqrt{K}\right)\left[h\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right](t-\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \delta\left(\tau-A\sqrt{R}-B\sqrt{K}\right)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[h\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right](t-\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[h\frac{\partial\lambda_{2i+1}}{\partial t}\right]\left(t-A\sqrt{R}-B\sqrt{K}\right)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[h\frac{\partial\lambda_{2i}}{\partial t}\right]\left(t-A\sqrt{R}-B\sqrt{K}\right), i=0,1$$

for the second case.

Here $\delta(t)$ is the Dirac delta function.

As the result the expressions for the displacements and stresses that depend on unknown function $\chi(x,t)$ are found. For its finding the first condition in (2) is used. It reduces to the following singular integral equation

$$\int_{-1}^{1}\int_0^t \tilde{\chi}(\xi,\tau)\left[\frac{1}{(\xi-x)^2}+f(\xi,x,t-\tau)\right]d\xi=r(x,t),$$

$$-1<x<1, \quad (10)$$

where $f(\xi,x,t),r(x,t)$ are known regular functions, $\tilde{\chi}(\xi,t)=\chi\left(\frac{(a_1-a_0)\xi+(a_0+a_1)}{2},t\right)$. (14)

The equation (10) is solved with the help of time discretization and orthogonal polynomials method [20]. For it the functions $\tilde{\chi}_k(\xi)=\tilde{\chi}(\xi,t_k), k=1,2,...$ are inputted. The unknown functions are searched in the form

$$\tilde{\chi}_k(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}s_{n,k}\sqrt{1-\xi^2}U_n(\xi), \xi\in[-1;1] \quad (11)$$

The correspondence (11) is substituted into the equation (10) and, using the orthogonal polynomials method with the spectral correspondence

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|x-y|}\sqrt{1-y^2}U_n(y)dy=-\pi(n+1)U_n(x), -1<x<1$$

the following infinite system of linear algebraic equations for each time moment *t* is derived

$$\sum_{k=1}^{L}\sum_{n=0}^{\infty}s_{n,k}D_{m,n,k}=f_{m,L}, \ m=0,1,2...,L=1,2,... \quad (12)$$

where $f_{m,L}=\int_{-1}^{1}\tilde{r}(x,t_L)U_m(x)\sqrt{1-x^2}dx$,

$$D_{m,n,k}=\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}U_n(\xi)U_m(x)\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{1-x^2}\tilde{f}(\xi,x,t_k)d\xi$$

The system (12) is solved with the help of reduction method.

So, the expressions for the displacements and stresses inside the quarter-plane are found for each time moment $t_k, k=1,2,...$. (13)

Conclusions

The non-stationary problem for an elastic quarter-plane was solved with the help of Green's matrix-function and apparatus of matrix differential calculation. The solutions derived in the transform space were analytically inverted by the mutual inversion of Laplace-Fourier transform. The solution of the problem was reduced to the solution of singular integral equation, which was solved by time discretization and the orthogonal polynomials method. The stresses' change during the change of geometrical coordinates were studied.

Список використаних джерел

1. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я.С. Уфлянд. – Ленинград: Наука, 1967. – 402 с.
2. *Hanson M.T.* Stress analysis and contact problems for an elastic quarter-plane / M.T. Hanson, L.M. Keer Q.J. // Mech. Appl. Math. – 1989. - №42(3). – P. 363-383.
3. *Yasinskyy*. Optimization of two-dimensional nonstationary thermal stresses and displacements in a half-space through the use of internal heat sources / Yasinskyy, Yu. Tokovyy, O. Ierokhova // Journal of Thermal Stresses. – 2016. - №39(9). – P. 1084-1097.
4. *Mykhas'kiv V*. Elastodynamic problem for a layered composite with penny-shaped crack under harmonic torsion / V. Mykhas'kiv, V. Stankevych // ZAMM. – 2019.
5. *Menshykov O.* Cracked materials under dynamic loading: effects of crack's closure / O. Menshykov, M. Menshykova, I. Guz, V. Menshykov // The 12th World Congress on Computational Mechanics and The 6th Asia-Pacific Congress on Computational Mechanics. – 2016.
6. *Tarlakovskii D.V.* Non-stationary problems for elastic half-plane with moving point of changing boundary conditions / D.V. Tarlakovskii, G.V. Fedotenkov // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2016. №3. – P. 188-206. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.3.13
7. *Fu Y.* Reduced model for the surface dynamics of a generally anisotropic elastic half-space / Y. Fu, J. Kaplunov, D. Prikazchikov // Proceedings of the Royal Society A. – 2020. №476(2234).
8. *Kubenko V.D.* Stress state of an elastic half-plane under nonstationary loading / V.D. Kubenko // International Applied Mechanics. – 2015. - №51(2). – P. 121-130.
9. *Xin Zh.* Boundary conditions and boundary layers for a class of linear relaxation systems in a quarter plane / Zh. Xin, W.-Q. Xu // Part of the The IMA Volumes in Mathematics and its Applications book series. - №135.
10. *Shmegera S.V.* The initial boundary-value mixed problems for elastic half-plane with the conditions of contact friction / S.V. Shmegera // https://doi.org/10.1016/S0020-7683(99)00295-4

References

1. UFLYAND, Ya. S. (1967) *Integralnie preobrazovaniya v zadachah teorii uprugosti*. Leningrad: Nauka
2. HANSON, M.T. and KEER L.M. (1989) Stress analysis and contact problems for an elastic quarter-plane. *Q.J. Mech. Appl. Math.*, 42(3). p. 363-383.
3. YASINKYY, TOKOVYY, Yu. And IEROKHOVA, O. (2016) Optimization of two-dimensional nonstationary thermal stresses and displacements in a half-space through the use of internal heat sources. *Journal of Thermal Stresses*, 39(9). p. 1084-1097.
4. MYKHAS'KIV, V. and STANKEVYCH, V. (2019) Elastodynamic problem for a layered composite with penny-shaped crack under harmonic torsion. *ZAMM*.
5. MENSHYKOV, O. et al. (2016) Cracked materials under dynamic loading: effects of crack's closure. *The 12th World Congress on Computational Mechanics and The 6th Asia-Pacific Congress on Computational Mechanics*.
6. TARLAKOVSKII, D.V. and FEDONTENKOV G.V. (2016) Non-stationary problems for elastic half-plane with moving point of changing boundary conditions. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 3. p. 188-206. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.3.13
7. Fu, Y., KAPLUNOV and J., PRIKAZCHIKOV, D. (2020) Reduced model for the surface dynamics of a generally anisotropic elastic half-space. *Proceedings of the Royal Society A*, 476(2234)
8. KUBENKO, V.D. (2015) Stress state of an elastic half-plane under nonstationary loading. *International Applied Mechanics*, 51(2). p. 121-130.
9. XIN, Zh. and XU, W.-Q. Boundary conditions and boundary layers for a class of linear relaxation systems in a quarter plane. *Part of the The IMA Volumes in Mathematics and its Applications book series,* 135.
10. SHMEGERA, S.V. The initial boundary-value mixed problems for elastic half-plane with the conditions of contact friction.

11. *Doetsch G.* Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation / G. Doetsch – New York: Springer-Verlag, 1974.
12. *Berberan-Santos M.N.* Analytical inversion of the Laplace transform without contour integration: application to luminescence decay laws and other relaxation functions / M.N. Berberan-Santos // Journal of Mathematical Chemistry. – 2005. - №38(2). – P. 165-173.
13. *Слепян Л.И.* Нестационарные упругие волны / Л.И. Слепян - Ленинград: Судостроение, 1972. – 189 с.
14. *Vestyak V.A.* Elastic half place under the action of nonstationary surface kinematic perturbations / V.A. Vestyak, A.R. Hachkevych, D.V. Tarlakovskii, R.F. Terletskii // Journal of Mathematical Sciecens. – 2014. - №203(2). – P. 202-214.
15. *Shafiei A.R.* Wave propagation in an elastic quarter plane / A.R. Shafiei // International journal of engineering science (English). – 2003. - №14(3). – P. 119-134.
16. *Hejazi A.A.* Dislocation technique to obtain the dynamic stress intensity factors for multiple cracks in a half-plane under impact load / A.A. Hejazi, M. Ayatollahi, R. Bagheri, M.M. Monfared // Arch. Appl. Mech. – 2014. - №84. – P. 95-107.
17. *Vaysfel'd N.D.* On one new approach to the solving of an elasticity mixed plane problem for the semi-strip / N.D. Vaysfel'd, Z.Yu. Zhuravlova // Acta Mechanica. – 2015. - №226(12). – P. 4159-4172.
18. *Попов Г.Я.* Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач / Г.Я. Попов, С.А. Абдыманов, В.В. Ефимов – Алматы: Рацах, 1999. – 133 с.
19. *Слепян Л.И.* Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики / Л.И. Слепян, Ю.С. Яковлев – Ленинград: Судостроение, 1980. – 344 с.
20. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – Москва: Наука, 1982. – 344 с.

11. DOETSCH, G. (1974) *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation*, New York: Springer-Verlag.
12. BERBERAN-SANTOS, M.N. (2005) Analytical inversion of the Laplace transform without contour integration: application to luminescence decay laws and other relaxation functions. *Journal of Mathematical Chemistry*, 38(2). p. 165-173.
13. SLEPYAN, L.I. (1972) *Nestazionarnie uprugie volni*, Leningrad: Sudostroenie.
14. VESTYAK, V.A. et al. (2014) Elastic half place under the action of nonstationary surface kinematic perturbations. *Journal of Mathematical Sciecens*, 203(2). p. 202-214.
15. SHAFIEI, A.R. (2003) Wave propagation in an elastic quarter plane. *International journal of engineering science (English)*, 14(3). p. 119-134.
16. HEJAZI, A.A. et al. (2014) Dislocation technique to obtain the dynamic stress intensity factors for multiple cracks in a half-plane under impact load. *Arch. Appl. Mech*, 84. p. 95-107
17. VAYSFEL'D, N.D. and ZHURAVLOVA, Z.Yu. (2015) On one new approach to the solving of an elasticity mixed plane problem for the semi-strip. *Acta Mechanica.* 226 (12). p. 4159-4172.
18. POPOV, G.Ya., ABDIMANOV S.A. and EFIMOV V.V. (1999) *Funkcii I matrici Grina odnomernih kraevih zadach*. Almatu: Racah.
19. SLEPYAN, L.I. and YAKOVLEV, Yu.S. (1980) *Integralnie preobrazovaniya v nestazionarnih zadachah mehaniki*, Leningrad: Sudostroenie.
20. POPOV, G. Ya. (1982) *Koncentraciya Uprugih Napryazheniy Vozle Shtampov, Razrezov, Tonkih Vklyucheniy i Podkrepliniy*. Moskva: Nauka

Received: 29.08.21

УДК 519.21
https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.3

В. О. Гусак, *аспірант*

Випромінювання плоского поршня у клинуватому хвилеводі

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03127, м. Київ, пр-т. Акад. Глушкова, 4-е
e-mail: gusakw7@gmail.com

V. O. Husak, *PhD student*

Radiation of a flat piston in a wedge-shaped waveguide

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03127, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e
e-mail: gusakw7@gmail.com

В роботі розглянута задача випромінювання плоского поршня у клинуватому хвилеводі. Досліджено особливості випромінювання плоского поршня у клинуватий хвилевод в залежності від параметрів задачі, а саме, кута розхилу клину і хвильового розміру поршня, тобто відношення довжини поршня до довжини хвилі, котру він випромінює. Обчислені діаграми спрямованості плоского поршня у клинуватому хвилеводі при різних кутах розхилу клину. Показано, що при певному співвідношенні між хвильовим розміром поршня і кутом розхилу клину можлива наявність мінімуму у діаграмі спрямованості уздовж осі симетрії клину. Проведено розрахунки модуля тиску в околі поршня, котрі ілюструють, як поступово формується провал в діаграмі спрямованості в напрямку осі хвилеводу.

Ключові слова: Метод часткових областей, клинуватий хвилевод, хвильове поле.

In the work the task of radiation of a flat piston in a wedge-shaped waveguide is considered. The peculiarities of the radiation of a flat piston into a wedge-shaped waveguide depending on the parameters of the task, namely, the angle of inclination of the wedge and the wave size of the piston, that is the ratio of the piston length to the wavelength it emits, are investigated. The directional charts of a flat piston in a wedge-shaped waveguide at different angles of the wedge are calculated. It is shown that at a certain ratio between the wave size of the piston and the angle of inclination of the wedge, it is possible to have a minimum in the directional chart along the axis of symmetry of the wedge. Calculations of the pressure modulus in the vicinity of the piston are performed, which illustrate how the failure in the directional chart in the direction of the waveguide axis is gradually formed.

Key Words: Partial domains method, wedge-shaped waveguide, wave field.

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н, проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Хвилевід — структура, призначена для передачі звукових або електромагнітних хвиль, в якій поширення хвилі обмежено одним чи двома вимірами [1]. В інженерній практиці хвилеводи широко застосовуються в радіоелектронних та акустичних пристроях, тому інтерес до дослідження хвильових процесів в таких структурах не спадає.

В роботі, на базі методу часткових областей [2], розглянута задача випромінювання плоского поршня у клинуватому хвилеводі. Згідно з методом часткових областей вся складна (неканонічна) область існування хвильового поля розбивається на прості області, в кожній з яких вдається побудувати загальний розв'язок рівняння Гельмгольца. Після цього виникає необхідність спряження цих розв'язків на границях часткових областей і, при необхідності, задоволення граничних умов на певних граничних поверхнях та поверхнях випромінювачів. Реалізація граничних умов призводить до функціональних рівнянь з невідомими коефіцієнтами, які є амплітудними коефіцієнтами мод у відповідних часткових областях.

Для визначення шуканих амплітудних коефіцієнтів мод слід перейти від цих рівнянь до системи лінійних алгебраїчних рівнянь. В даній статті перехід до системи алгебраїчних рівнянь здійснюється за допомогою поточкового спряження полів. Цей підхід полягає в прирівнюванні функцій (полів в суміжних часткових областях) в кінцевому наборі точок (назвемо їх ву-

© В.О. Гусак, 2021

злові точки) на границі цих областей. Кількість вузлових точок на границі визначає порядок системи рівнянь і, тим самим, кількість шуканих амплітудних коефіцієнтів мод в часткових областях. Зазвичай, такий підхід, на відміну від підходу з використанням властивості ортогональності відповідного набору функцій, не містить обчислювальних проблем.

2. Постановка і розв'язання задачі

Розглядається плоска задача про випромінювання поршня в нескінченний клинуватий хвилевод (рис. 1). Поверхні хвилеводу ідеально жорсткі, тобто, дорівнює нулю нормальна складова коливальної швидкості на цих поверхнях.

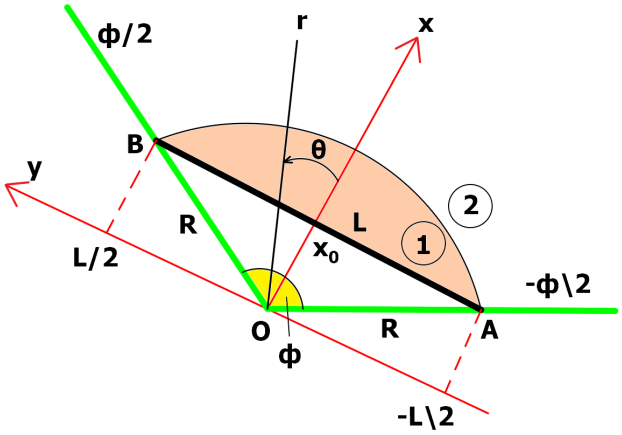


Рис. 1: Геометрія задачі

Поршень здійснює гармонічні коливання з частотою ω. Розподіл швидкості на поверхні поршня $v(x_0, y) = 1$. Будемо вважати, що в трикутній області OAB хвильове поле відсутнє. Згідно методу часткових областей виділимо дві часткові області. Перша часткова область обмежена поверхнею поршня і дугою кола радіуса R, $-\phi/2 \leqslant \theta \leqslant \phi/2$, тобто, утворена частинами поверхонь декартової і полярної систем координат відповідно. Друга часткова область задається полярними координатами $r \geqslant R$, $-\phi/2 \leqslant \theta \leqslant \phi/2$.

Поле тиску в області 1 запишемо у вигляді суми мод плоскопаралельного хвилеводу і суми мод обмеженої області клинуватого хвилеводу (часовий множник $\exp(-i\omega t)$ не пишемо):

$$p_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\,(\alpha_n y) exp(i\gamma_n(x - x_0)) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(\beta_n\theta)\frac{J_{\beta_n}(kr)}{J'_{\beta_n}(kR)}, \quad (1)$$

де $\alpha_n = \frac{2(n-1)\pi}{L}$, $\gamma_n = \sqrt{k^2 - \alpha_n^2}$, $\beta_n = \frac{2(n-1)\pi}{\phi}$, $n = 1, 2...$; $k = \omega/c$ – хвильове число.

Поле тиску в області 2 представимо у вигляді суперпозиції біжучих циліндричних хвиль:

$$p_2 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\beta_n\theta)\frac{H^{(1)}_{\beta_n}(kr)}{H^{(1)'}_{\beta_n}(kR)}. \quad (2)$$

Для визначення трьох наборів невідомих коефіцієнтів A_n, B_n, C_n, $n = 1, 2...$ слід розписати три граничні умови:

$$1)\ \frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p_1}{\partial x} = v(x_0, y),\ x = x_0,\ y = [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}], \quad (3)$$

$$2)\ p_1 = p_2,\quad r = R,\quad \theta = [-\frac{\phi}{2}, \frac{\phi}{2}], \quad (4)$$

$$3)\ \frac{\partial p_1}{\partial r} = \frac{\partial p_2}{\partial r},\ r = R,\ \theta = [-\frac{\phi}{2}, \frac{\phi}{2}]. \quad (5)$$

Підставивши вирази (1), (2) в граничні умови (3) – (5) отримаємо наступні три рівняння:

$$1)\ i\sum_{n=1}^{\infty} A_n\gamma_n \cos\Big(\alpha_n y\Big) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\frac{\partial}{\partial x}\left[\cos(\beta_n \arctan\frac{y}{x})\frac{J_{\beta_n}(k\sqrt{x^2+y^2})}{J'_{\beta_n}(kR)}\right]_{x=x_0} = iv(x_0, y), \quad (6)$$

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty} A_n[\cos(\alpha_n R\sin\theta)exp(i\gamma_n(R\cos\theta - x_0))] + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\cos(\beta_n\theta)\frac{J_{\beta_n}(kR)}{J'_{\beta_n}(kR)} - \sum_{n=1}^{\infty} C_n\cos(\beta_n\theta)\frac{H_{\beta_n}{}^{(1)}(kR)}{H^{(1)'}_{\beta_n}(kR)} = 0, \quad (7)$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty} A_n\frac{\partial}{\partial r}\Big[\cos(\alpha_n r\sin\theta)\cdot exp(i\gamma_n(r\cos\theta - x_0))\Big]_{r=R} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\cos(\beta_n\theta) - \sum_{n=1}^{\infty} C_n\cos(\beta_n\theta) = 0. \quad (8)$$

При виконанні граничних умов (3)–(5) будемо використовувати поточкове спряження полів. Задамо координати вузлових точок на поверхні поршня $(x_j = x_0, y_j)$, $j = 1, 2, ..., n_1$, а на границі розділу часткових областей 1 і 2 – $(r_m = R, \theta_m)$, $m = 1, 2, ..., n_2$. Кількість вузлових точок n_1 і n_2 визначається хвильовою відстанню між вузловими точками $\triangle/\lambda$.

3. Аналіз чисельних результатів

Виберемо інтегральним критерієм якості виконання граничних умов (3)–(5) найбільш жорстку умову, а саме інтеграл від модуля різниці полів на певній межі:

$$\delta_{vy} = \frac{1}{v(x_0, y)} \int_{-L/2}^{L/2} \mid v(x_0, y) - v_{1y}(x_0, y) \mid dy, \tag{9}$$

$$\delta_{pr} = \frac{1}{\mid p_1(R, 0) \mid} \int_{-\phi/2}^{\phi/2} \mid p_1(R, \theta) - p_2(R, \theta) \mid Rd\theta, \tag{10}$$

$$\delta_{vr} = \frac{1}{\mid v_1(R, 0) \mid} \int_{-\phi/2}^{\phi/2} \mid v_{1r}(R, \theta) - v_{2r}(R, \theta) \mid Rd\theta. \tag{11}$$

Результати розрахунків інтегральних критеріїв приведені в табл. 1. Вибрані такі параметри моделі: $\phi = 130°$, $R/\lambda = 1, 2$, $L/\lambda = 2, 2$.

Табл. 1: Інтегральні критерії

$\triangle/\lambda$	n_1	n_2	δ_{vy}	δ_{vr}	δ_{pr}
0,08	28	35	0,047	0,017	0,022
0,1	22	28	0,053	0,018	0,027
0,2	11	14	0,086	0,085	0,156
0,3	8	10	0,111	0,179	0,343

На рис. 2 і рис. 3 показана графічна ілюстрація виконання граничних умов при хвильовій відстані між вузловими точками $\triangle/\lambda = 0, 1$. Параметри моделі: $R/\lambda = 1, 2$, $\phi = 130°$. Аналіз подібних розрахунків показує, що вибір величини $\triangle/\lambda < 0, 2$ забезпечує прийнятне виконання граничних умов.

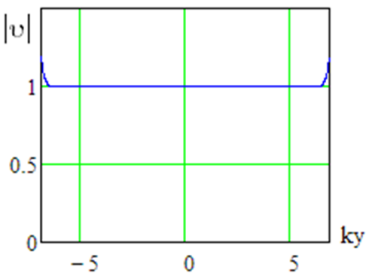


Рис. 2: Амплітуда швидкості на поверхні поршня

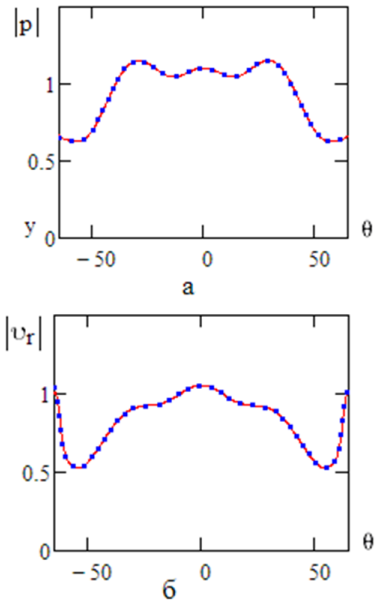


Рис. 3: Модулі тиску (а) і радіальної швидкості (б) вздовж дуги кола радіусом R: лінія – зі сторони області 1, точки – зі сторони області 2

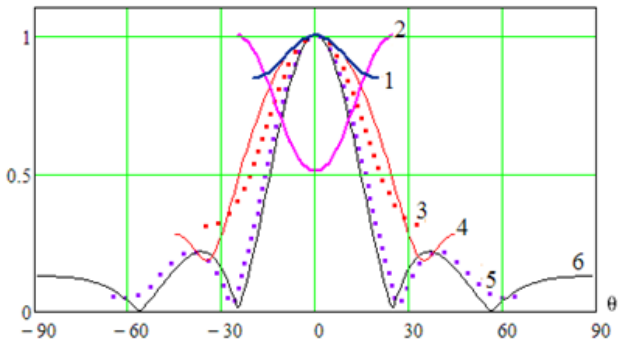


Рис. 4: Діаграми спрямованості
крива 1 – $\phi = 40°$, 2 – $\phi = 50°$, 3 – $\phi = 70°$, 4 – $\phi = 90°$, 5 – $\phi = 130°$, 6 – $\phi = 180°$

На рис. 4 показані діаграми спрямованості (дальнє поле) при різних кутах розхилу клину і величині $R/\lambda = 1, 2$. Можна відмітити дві характерні риси сукупності цих кривих.

1) При кутах розхилу клину $\phi > 120°$ форма головної пелюстки практично залишається незмінною і відповідає головній пелюстці при куті розхилу $\phi = 180°$.

2) При певному співвідношенні між параметрами моделі (в даному випадку $\phi = 50°$, $R/\lambda = 1, 2$) формується провал в характеристиці спрямованості уздовж напрямку $\theta = 0°$.

Цей факт є наслідком того, що перша і дру-

га симетричні моди клинуватого хвилеводу, при куті розхилу $\phi = 50°$ в напрямку осі хвилеводу $\theta = 0°$, являються практично протифазні в дальньому полі, що і призводить до провалу в діаграмі спрямованості.

На рис. 5, показано просторовий розподіл модуля тиску в околі поршня для двох значень розхилу клину $\phi = 70°$ і $\phi = 50°$. У випадку кута розхилу клину $\phi = 50°$, бачимо як поступово формується провал в напрямку $\theta = 0°$. А от при куті розхилу клину $\phi = 70°$ уздовж напрямку $\theta = 0°$ формується максимум в діаграмі спрямованості.

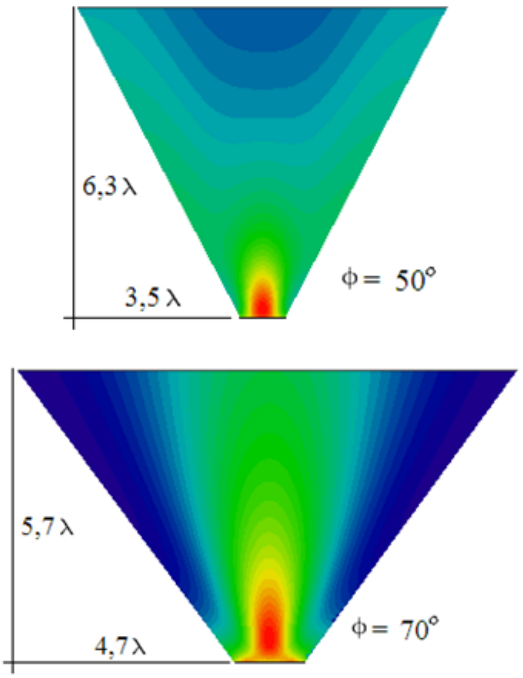


Рис. 5: Розподіл модуля тиску в околі поршня для двох значень розхилу клину $\phi = 70°$ і $\phi = 50°$, $R/\lambda = 1,2$

Колір змінюється як в райдузі – від червоного до фіолетового. Червоний колір відповідає максимуму модуля тиску, а фіолетовий – мінімуму модуля тиску.

4. Висновки

1. На основі методу часткових областей отримано розв'язок задачі про випромінювання поршня в нескінченний клинуватий хвилевод. При цьому використано поточкове спряження хвильових полів.

2. Показано, що хвильова відстань між вузловими точками $\triangle/\lambda < 0,2$ забезпечує прийнятне виконання граничних умов.

3. Обчислені діаграми спрямованості плоского поршня у клинуватому хвилеводі при різних кутах розхилу клину. Показано, що при певному співвідношенні між параметрами моделі (кут розхилу клину і хвильовий розмір поршня) формується провал в характеристиці спрямованості уздовж напрямку кута $\theta = 0°$.

Список використаних джерел

1.*Мелешко В.В., Маципура В.Т., Улітко І.А.* Теорія хвилеводів. — К.: ВПЦ «Київський університет», 2013. — 413 с.

2.*Grinchenko V., Vovk I., Matsypura V.* Acoustic wave problems. — New York : Begell House, Inc., 2018. — 439 p.

References

1.MELESHKO V., MATSYPURA V., ULITKO I. (2013) *Teoriia khvylevodiv.* K.: VPTS «Kyivskyi universytet».

2.GRINCHENKO V., VOVK I., MATSYPURA V. (2018) *Acoustic wave problems.* New York : Begell House, Inc.

Надійшла до редколегії 27.08.2021

УДК 532.59: 534.29

https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.4

Жук О.П.[1], д.ф.-м.н., пров.н.с.
Жук Я.О.[2], чл.-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф.

Визначення акустичної радіаційної сили, що діє на тверду сферичну частинку в пружній трубі з рідиною

[1]Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, 03057, м. Київ, вул. Петра Нестерова, 3
e-mail: zhuk@inmech.kiev.ua
[2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е,
e-mail: y.zhuk@i.ua

O.P. Zhuk[1], Dr.Sci., Leading Researcher.
Y.A. Zhuk[2], Dr.Sci. (Phys.–Math.)

Determination of acoustic radiation acting on a spherical rigid particle placed in an elastic tube filled with liquid

[1]Timoshenko Institute of Mechanics, NAS of Ukraine, 3, Petr Nesterov str., Kyiv 03057
e-mail: zhuk@inmech.kiev.ua
[2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 4e, Glushkov ave., Kyiv 03680
e-mail: y.zhuk@i.ua

Розглянуто випадок поширення у вузькій циліндричній трубі плоскої поздовжньої звукової хвилі, в якій складові руху рідини, паралельні осі труби, мають значно більшу кінетичну енергію ніж складові, перпендикулярні осі труби. Дослідження дії акустичної радіаційної сили звукового поля на тверду сферичну частинку в заповненій ідеальною рідиною тонкостінній пружній циліндричній трубі проведено у два етапи: перший – розв'язання лінійної задачі розсіяння первинної хвилі на перешкодах; другий – обчислення гідродинамічних сил, які діють на сферичну частинку, з наступним осередненням їх в часі. Виведено формулу для обчислення акустичної радіаційної сили для такого випадку.

Ключові слова: ідеальна рідина, плоска акустична хвиля, тверда сферична частинка, гідродинамічна сила, радіаційна сила.

Acoustic radiation force effect upon a rigid spherical particle placed in the thin elastic tube is studied. The problem of determination of the acoustic radiation forces acting on an obstacle in an ideal liquid is formulated with respect to the Lagrange coordinate system. Thus, the radiation pressure is defined as time-averaged value of the acoustic pressure over the obstacle surface. This approach is adequate if, at determining of the acoustic pressure in a fluid, the deviation of the pressure from the harmonic law in time domain is taken into account in the obstacle vicinity. An action of the acoustic radiation force on the rigid spherical particle placed in the thin tube with elastic wall is studied here for the case of the incident plane sound wave propagating along the tube axis. Model is developed to describe the response of the sys-tem consisting of the compliant infinite thin circular cylindrical tube filled with the ideal compressible liquid and rigid spherical body which is immovable and located on the tube axis under the plane wave propagating along the tube axis. The problem of the hydrodynamic characteristics determination is reduced to the solution of the infinite system of algebraic equations that can be solved by the reduction method. The formula for the acoustic radiation force calculation is derived to characterize the force acting upon rigid spherical particle in the thin compliant elastic cylindrical tube.

Key Words: ideal liquid, plane acoustic wave, rigid spherical particle, hydrodynamic force, radiation force.

Статтю представив академік НАН України Перестюк М.О.

1. Вступ

При поширенні гармонічної плоскої хвилі в акустичному середовищі крім періодичного звукового тиску виникає сталий тиск звукового випромінення [1,2], який називають акустичним радіаційним тиском.

Лінійне наближення для обчислення акустичного радіаційного тиску виявляється недостатнім. Виявляється, однак, що обчислення акустичного тиску з врахуванням величин другого порядку малості можна виконати, використовуючи потен-

© О.П. Жук, Я.О. Жук, 2021

ціал поля швидкості, що визначений при розв'язанні лінійної задачі розсіювання первинної хвилі на перешкоді [1,2].

В даній статті досліджується дія радіаційної сили звукового поля на тверду сферичну частинку в заповненій ідеальною рідиною тонкостінній податливій циліндричній трубці.

2. Постановка задачі дифракції та її розв'язування

Розглядаємо поширення у вузькій циліндричній трубі плоскої поздовжньої звукової хвилі. Постановку лінійної задачі першого етапу дослідження – виведення потенціалів хвильового поля в трубі – сформулюємо при умові, що властивості рідини, а також механічні властивості труби поздовжньо однорідні.

Дослідження виконаємо для випадку циліндричної труби, радіус якої a_0 при відсутності в трубі тиску, а товщина стінки h. Матеріал труби має модуль Юнга E і коефіцієнт Пуассона ν. Труба заповнена ідеальною стисливою рідиною густиною ρ_0, швидкість звуку в якій c_0. В трубі знаходиться тверда сферична частинка радіусу d з центром на осі труби.

Введемо циліндричну систему координат (R,z,ϕ), вісь Oz якої направимо вздовж осі труби, а початок координат виберемо в центрі сферичної частинки. Введемо також сферичну систему координат (r,θ,ϕ) як показано на рис. 1.

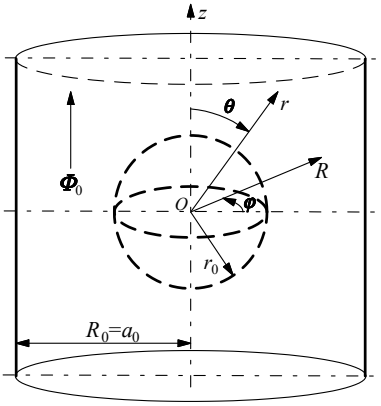


Рис. 1. Тверда сферична частинка у вузькій податливій нескінченній трубці.

Плоска звукова хвиля поширюється в трубі у додатному напрямі осі Oz і описується потенціалом

$$\Phi_0 = A\exp\left[i(kz-\omega t)\right]. \qquad (1)$$

Потенціал звукової хвилі Φ (1) у відповідності з прийнятим методом дослідження є розв'язком рівняння

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0. \qquad (2)$$

У формулах (1) і (2) позначено: A – амплітуда; $k=\omega/c$ – хвильове число; ω – кутова частота; t – час; Δ – диференціальний оператор Лапласа; c – швидкість плоскої хвилі в рідині, яка заповнює податливу (еластичну) трубу. Зазначимо, що швидкість c плоскої хвилі в трубі відмінна від швидкості плоскої хвилі в необмеженій рідині й обчислюється за формулою

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{1+2R_0/\left(hE'\beta_0\right)}}, \qquad (3)$$

в якій $E' = E\Big/\left(1-\nu^2\right)$; $\beta_0 = 1\Big/\left(\rho c_0^2\right)$ – стисливість рідини; $R_0 = a_0$ – радіус труби при відсутності в ній тиску, обумовленого звуковою хвилею.

Швидкість рідини і тиск, обумовлені звуковою хвилею, визначаються формулами:

$$\mathbf{v} = \mathrm{grad}\Phi, \quad p = -\rho_0\frac{\partial\Phi}{\partial t}. \qquad (4)$$

В подальшому згідно [2] використовуємо безрозмірні величини.

Потенціал хвильового поля в трубі формується в результаті інтерференції первинної хвилі і хвиль, розсіяних на твердій сфері і відбитих від стінки трубки. В результаті потенціал хвильового поля в трубці має наступний вигляд:

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_{sph} + \Phi_{cyl}. \qquad (5)$$

У формулі (5) Φ_{sph} – потенціал хвилі, відбитої від сферичної частинки; Φ_{cyl} – потенціал хвилі, відбитої від еластичної стінки трубки; Φ – загальний потенціал хвильового поля в трубці.

Знаходження потенціалів цих хвиль зводиться до розв'язування багатозв'язної лінійної задачі дифракції первинної хвилі на твердій сфері і на внутрішній поверхні податливої (еластичної) трубки – розв'язування знерозміреного лінійного хвильового рівняння

$$\Delta\Phi + \left(\eta\omega\right)^2\Phi = 0 \qquad (6)$$

де $\eta = 1/c$.

Для рівняння (6) сформулюємо граничні умови. На поверхні нерухомої твердої сфери нормальна швидкість рідини дорівнює нулю

$$v_r = \left.\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|_{r=d} = 0. \qquad (7)$$

На внутрішній поверхні податливої (еластичної) трубки гранична умова повинна задовольняти рівність радіальної швидкості $\partial\Phi/\partial R$ рідини і радіальної швидкості внутрішньої поверхні стінок трубки $\dot{a}(t)$, де $a(t)$ – внутрішній радіус труби в момент t. В лінійній теорії цю граничну умову можна записати як

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right|_{r=a_0} = \dot{a}(t), \qquad (8)$$

оскільки будь яка різниця в значеннях $\partial\Phi/\partial R$ при $R = a(t)$ і при $R = a_0$ є менша ніж

$$\left|a(t) - a_0\right| \max\left|\frac{\partial^2\Phi}{\partial R^2}\right|,$$

тому нею можна в лінійній теорії знехтувати [1].

Потенціал Φ_{sph} розсіяних на сфері хвиль повинен задовольняти умовам Зоммерфельда

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{d\Phi_{sph}}{dr} - i\omega\Phi_{sph}\right) = 0;\ \lim_{r\to\infty}\Phi_{sph} = 0. \quad (9)$$

Оскільки рідина знаходиться в трубі, то потенціал Φ_{cyl} відбитої від внутрішньої поверхні труби хвилі повинен бути обмеженим:

$$\Phi_{cyl} \to \text{const} \text{ якщо } R \to 0. \qquad (10)$$

Таким чином, рівняння (6) із умовами (7)–(10) формують постановку задачі визначення потенціалів поля швидкості в податливій трубці.

3. Побудова потенціалів хвильового поля в податливій вузькій трубці

Визначимо потенціали, приведені у формулі (5), розв'язавши багатозв'язну задачу для рівняння (6) при граничних умовах (7)– (8) на поверхні сферичної частинки і на внутрішній поверхні труби. Потенціали Φ_{sph} і Φ_{cyl} знайдемо при розв'язуванні рівняння (6) методом розділення змінних у відповідних системах координат (сферичній і циліндричній). Множину розв'язків Φ_{sph} виберемо у вигляді узагальнених рядів Фур'є по сферичних хвильових функціях

$$\Phi_{sph}(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n^{(1)}(\omega r) P_n(\cos\theta), \qquad (11)$$

а множину розв'язків Φ_{cyl} – у вигляді інтеграла

$$\Phi_{cyl} = \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) J_0\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}R\right) e^{i\xi z} d\xi, \qquad (12)$$

У формулах (11), (12) $h_n^{(1)}(w)$ – сферичні функції Ганкеля першого роду n – го порядку; $P_n(w)$ – поліноми Лежандра; $J_0(w)$ – циліндрична функція Бесселя нульового порядку; A_n – невідомі сталі; $B(\xi)$ – невідома густина; ξ – стала розділення. В (11) і (12) множник $\exp(-i\omega t)$ не приведено.

Із множини розв'язків (11) і (12) рівняння (6) виберемо такі розв'язки, які задовольняють умовам (7), (8) (умовам на нескінченності (9) і на осі труби (10) вони задовольняють автоматично).

Складові потенціали (1), (11) і (12) потенціалу (5) поля швидкості рідини в трубі одержані в системах координат, зв'язаних з сферою і з циліндричною трубою. Щоб використати умову (7) на поверхні сферичної частинки необхідно потенціал (5) записати у сферичній системі координат (r,ϕ,θ), а, щоб використати граничну умову (8) на внутрішній стінці труби, необхідно записати потенціал (5) у циліндричній системі координат (R,ϕ,z). Для цього використовуються співвідношення [2], за допомогою яких циліндричні хвильові функції виражаються через сферичні і навпаки. Повторюючи міркування і викладки аналогічно до [2] та вводячи додаткові позначення

$$\begin{aligned} C(\omega,\xi) &= H_1\left(\sqrt{\omega^2-\xi^2}\right)\sqrt{\omega^2-\xi^2} - \\ &- H_0\left(\sqrt{\omega^2-\xi^2}\right)\frac{\omega^2}{hE'}, \\ D(\omega,\xi) &= J_1\left(\sqrt{\omega^2-\xi^2}\right)\sqrt{\omega^2-\xi^2} - \\ &- J_0\left(\sqrt{\omega^2-\xi^2}\right)\frac{\omega}{hE'}, \end{aligned} \qquad (13)$$

із задоволення граничних умов на поверхні сферичної частинки і податливої трубки із використанням ортогональності поліномів Лежандра отримуємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів A_n

$$\begin{aligned} &A_n - \frac{(2n+1)}{2\eta\omega}\frac{j_n'(\eta\omega r_0)}{h_n^{(1)\prime}(\eta\omega r_0)}\sum_{m=0}^{\infty} i^{n-m} q_{mn} A_m = \\ &= -(2n+1) i^n A\left[1 + \frac{G_n(\omega)}{\pi}\right]\frac{j_n'(\eta\omega r_0)}{h_n^{(1)\prime}(\eta\omega r_0)}, \end{aligned} \qquad (14)$$

$$\begin{aligned} G_n(\omega) &= 2\int_0^{\infty} \frac{\omega^2}{\delta E' D(\omega,\xi)\left(1+\xi^2\right)} P_n\left(\frac{\xi}{\eta\omega}\right) d\xi, \\ q_{mn} &= 2\int_0^{\infty} \frac{C(\omega,\xi)}{D(\omega,\xi)} P_m\left(\frac{\xi}{\eta\omega}\right) P_n\left(\frac{\xi}{\eta\omega}\right) d\,\xi, \end{aligned} \qquad (15)$$

причому $q_{kl} = q_{lk}$; а $G_{2k+1}(\omega) = 0,\ k,l = 0,1,2,\ldots$.

Ця система розв'язується методом редукції [2].

4. Визначення радіаційної сили

Радіаційна сила, яка діє в акустичному полі на тверду сферичну частинку, є середня за період первинної хвилі величина гідродинамічної сили

$$F_z = -r_0^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} p \sin\theta\cos\theta d\theta d\phi . \qquad (16)$$

Використаємо формулу для тиску, наведену в [2], яка, будучи знерозміреною, в досліджуваному випадку має вигляд

$$p = -\frac{1}{2r_0^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2, \qquad (17)$$

Підставляючи у (17) вираз для загального потенціалу Ф і обчислюючи похідні, знаходимо внески у радіаційну силу першого і другого доданків із (17)

$$\begin{aligned} F_z^{(1)} &= \pi\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)^2 \sin\theta\cos\theta d\theta, \\ F_z^{(2)} &= -\pi r_0^2\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2 \sin\theta\cos\theta d\theta. \end{aligned} \qquad (18)$$

Осереднюючи (18) в часі і додаючи їх, отримаємо формулу для обчислення радіаційної сили, яка діє на тверду сферичну частинку в податливій (еластичній) циліндричній трубі

$$\langle F_z\rangle = \langle F_z^{(1)}\rangle + \langle F_z^{(2)}\rangle,$$

$$\langle F_z^{(1)}\rangle = 2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n(2n+1)}{4n+1}\times\right.$$

$$\times\left[\frac{2(2n+1)}{4n+3}K_{2n}(\eta\omega r_0)D_{2n+1}(\eta\omega r_0) + \right.$$

$$\left.+\frac{2n-1}{4n-1}K_{2n}D_{2n-1}(\eta\omega r_0)\right] -$$

$$-\frac{n(2n-1)}{4n-1}\times\left[\frac{2n+1}{4n+1}L_{2n-1}(\eta\omega r_0)S_{2n}(\eta\omega r_0) + \right.$$

$$\left.\left.+\frac{2(n-1)}{4n-3}L_{2n-1}(\eta\omega r_0)S_{2n-2}(\eta\omega r_0)\right]\right\} +$$

$$+2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)}D_n(\eta\omega r_0)D_{n+1}(\eta\omega r_0) + \right.$$

$$\left.+\frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)}S_n(\eta\omega r_0)S_{n+1}(\eta\omega r_0)\right],$$

$$\langle F_z^{(2)}\rangle = -2\pi(\omega r_0)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}\left[\frac{2n+1}{4n+3}K_{2n}(\eta\omega r_0)\times\right.$$

$$D_{2n+1}(\eta\omega r_0) + \frac{2n}{4n-1}K_{2n}(\eta\omega r_0)D_{2n-1}(\eta\omega r_0)\Big] -$$

$$-2\pi(\omega r_0)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n-1}\left[\frac{2n}{4n+1}L_{2n-1}(\eta\omega r_0)S_{2n}(\eta\omega r_0) + \right.$$

$$\left.+\frac{2n-1}{4n-3}L_{2n-1}(\eta\omega r_0)S_{2n-2}(\eta\omega r_0)\right] +$$

$$+2\pi(\omega r_0)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}D_n(\eta\omega r_0)D_{n+1}(\eta\omega r_0) +$$

$$+2\pi(\omega r_0)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}S_n(\eta\omega r_0)S_{n+1}(\eta\omega r_0),$$

$$K_{2n}(\eta\omega r) = (-1)^n F(\omega)(4n+1)j_{2n}(\eta\omega r),$$

$$L_{2n-1}(\eta\omega r) = (-1)^n F(\omega)(4n-1)j_{2n-1}(\eta\omega r),$$

$$M_n(\eta\omega r) = \mathrm{Re}\,A_n j_n(\eta\omega r) - \mathrm{Im}\,A_n y_n(\eta\omega r),$$

$$N_n(\eta\omega r) = \mathrm{Re}\,A_n y_n(\eta\omega r) + \mathrm{Im}\,A_n j_n(\eta\omega r),$$

$$G_n(\eta\omega r) = \mathrm{Re}\,B_n j_n(\eta\omega r),$$

$$T_n(\eta\omega r) = \mathrm{Im}\,B_n j_n(\eta\omega r),$$

$$D_n(\eta\omega r) = M_n(\eta\omega r) + G_n(\eta\omega r),$$

$$S_n(\eta\omega r) = N_n(\eta\omega r) + T_n(\eta\omega r).$$

Подяка. Результати дослідження отримані за грантової підтримки Національного фонду досліджень України (проєкт № 2020.02/0112).

Список використаних джерел

1. King L. V. On the acoustic radiation pressure on spheres / King L. V. // Proc. Roy. Soc., Ser. A. – 1934.– Vol. 147, No. 861. – P. 246–265.
2. Zhuk A.P. Acoustic radiation force on a spherical particle in a fluid-filled cavity / A.P. Zhuk, V.D. Kubenko, Y.A. Zhuk // Journal of the Acoustical Society of America (JASA). – 2012. – Vol. 132, No. 4. – P. 2189–2197.

References

1. KING L.V. (1934) On the acoustic radiation pressure on spheres. *Proc. Roy. Soc., Ser. A.* 147(861). p. 246–265.
2. ZHUK A.P., KUBENKO V.D., ZHUK Y.A. (2012) Acoustic radiation force on a spherical particle in a fluid-filled cavity. *Journal of the Acoustical Society of America*. 132(4). p. 2189–2197.

Надійшла до редколегії 12.10.21

УДК 531.7 : 621.762

https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.5

Жук Я. О.[1], д.ф.-м.н., проф.,
Мельниченко М. М.[1], к.ф.-м.н., с.н.с.,
Гаврилюк Д. В.[1], магістр.

Вивчення нанорозмірних плівок золота методом скануючої тунельної мікроскопії

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ,
пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: realcrystallab@univ.kiev.ua

Y. O. Zhuk[1], Dr. Sc,
M. M. Melnichenko[1], PhD,
D. V. Havryliuk[1], master.

Study of nanosized gold films by scanning tunneling microscopy

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: realcrystallab@univ.kiev.ua

У роботі вивчали морфологію поверхні тонких золотих металевих плівок на слюдяній підкладці за допомогою скануючого тунельного мікроскопа. Наведено результати дослідження структури наночастинок золота на поверхні скла та полірованого монокристалічного кремнію, отриманих різними методами напилення. Визначено характерні лінійні розміри рельєфу поверхні. Показано, що незважаючи на різницю в морфології тонких золотих плівок, отриманих різними методами та на різних підкладках, плівки в основному складаються із сферичних наночастинок. Таким чином, маючи дані про режим розпилення у вакуумі, а також про рельєф поверхні, можна отримати поверхню з заданим набором властивостей.

Ключові слова: магнетронне розпилення, скануючий тунельний мікроскоп, нанорозмірні плівки золота, іонне розпилення, наночастинки золота.

It was shown that despite the difference in the morphology of thin gold films obtained by different methods and on different substrates, the films mainly consist of spherical nanoparticles. The linear dimensions of individual surface objects were determined using the example of a gold film on mica. Analysis of the surface morphology showed that its structural formations are evenly distributed and have sizes from 250 nm to 500 nm. Upon receipt of gold nanofilms by magnetron sputtering on a glass substrate, the size of individual gold nanoparticles ranges from 20 nm to 80 nm. When ion spraying on a substrate of polished monocrystalline silicon, the size of individual gold nanoparticles ranges from 2 nm to 10 nm. The union of individual nanoparticles into large elongated nanoobjects up to 20-40 nm in size is observed. Thus, having the opportunity to compare data on the mode of vacuum deposition (substrate temperature, beam density, deposition time, etc.), as well as surface relief, you can develop technologies for obtaining a surface with a given set of properties, as well as develop new methods of gold deposition on different surfaces. The obtained results are very important for application in biology and medicine. They make it possible to create different types of sensors and diagnostic tests.

Key Words: magnetron sputtering, scanning tunneling microscope, nanosized gold films, ion sputtering, gold nanoparticles.

Статтю представив чл.-кор.НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Сучасний успіх мікро- та наноелектроніки базується на фундаментальних дослідженнях у галузі фізики поверхні твердого тіла. Тому вивчення різних електронних, атомних та молекулярних процесів, що відбуваються на поверхні твердих речовин, є актуальним завданням [1]. Плівки, що мають нанорозмірну товщину, широко використовуються у всіх сферах нанотехнологій. Особливий інтерес представляють нанорозмірні плівки з фрактальною структурою. Властивості таких плівок (оптичні та електрофізичні) суттєво відрізняються від звичайних нанорозмірних аналогів. Існуючий взаємозв'язок між структурою та морфологією

© Я.О. Жук, М.М. Мельниченко, Д.В. Гаврилюк 2021

отриманих плівок та особливостями технологічних режимів їх виробництва відкриває певні перспективи у створенні плівок із заданими властивостями. Наночастинки золота викликають великий інтерес у фізиці, хімії, біології та медицині. Вони нетоксичні, хімічно стабільні та біосумісні з живою тканиною. На відміну від масивного золота, наноструктури мають унікальні властивості - каталітичні, феромагнітні та оптичні. Характерною особливістю оптичних властивостей наночастинок благородних металів та композиційних структур на їх основі є наявність локалізованого поверхневого плазмонного резонансу (ППР) [2]. У галузі медицини та біології нанотехнології на основі ППР можуть використовуватися для створення різних типів датчиків, діагностики та лікування пухлин та інших захворювань, а також для цілеспрямованої доставки ліків тощо. Іншим аспектом, що представляє особливий інтерес для використання наночастинок золота, є каталіз. Вчені вже досягли успіху в розробці конкурентних методів виробництва значної кількості каталізаторів на основі наночастинок золота і створили надійні методи їх зберігання для забезпечення належної довговічності каталізатора в необхідних робочих умовах.

Наявність таких специфічних властивостей є базовою основою для більш детальних досліджень нанорозмірних структур, їх властивостей та способів їх отримання. Необхідно зрозуміти, як наночастинки золота виглядають на атомному рівні та які їхні фізичні та хімічні властивості. На сьогоднішній день метод тунельної мікроскопії знаходить все більш широке застосування для визначення лінійних розмірів мікронних і нанорозмірних структур, включаючи галузь виробництва елементної бази для сучасної електроніки [3], а також є одним із методів випробування якості поверхні зразків.

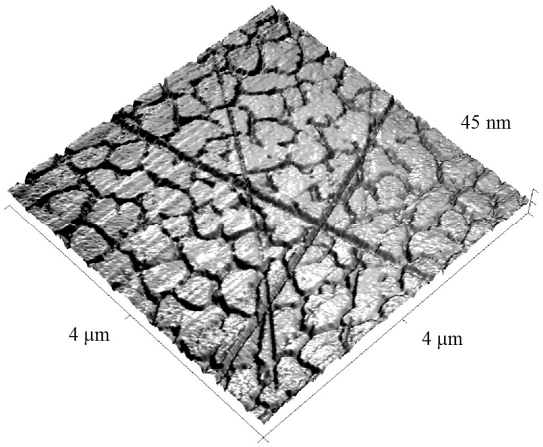
Зразки і методи вимірів

У роботі тунельна мікроскопія була використана для вивчення нанорозмірних плівок золота та наночастинок золота, отриманих різними методами розпилення. Нанорозмірні плівки та наночастинки золота наносились на різні типи підкладок (полірована поверхня монокристалічного кремнію, слюда, скло) магнетронним та катодним напиленням. При магнетронному методі осадження плівки матеріал розпилюється через бомбардування поверхні мішені іонами робочого газу (зазвичай аргоном), що утворюються в плазмі аномального тліючого розряду. Важливою перевагою методу магнетронного розпилення є відсутність бомбардування підкладки вторинними електронами високої енергії, оскільки вони захоплюються магнітною пасткою. Це дозволяє уникнути перегріву поверхні основи і дозволяє розпорошувати плівки на матеріали з низьким термічним опором при високій швидкості осадження. Розглянутий метод напилення має дуже широкі можливості застосування. Метод катодного розпилення (іонного розпилення) заснований на явищі руйнування катода, коли його бомбардують іонізовані атоми розрядженого газу. Атоми, що вилітають з поверхні катоду, розповсюджуються в навколишньому просторі і конденсуються на підкладці. Способи отримання плівок шляхом іонного розпилення матеріалу мішені мають ряд переваг перед іншими методами. Нанесені плівки мають високу адгезію до основи, а постійний хімічний склад напилюваного матеріалу забезпечує рівномірність товщини плівки.

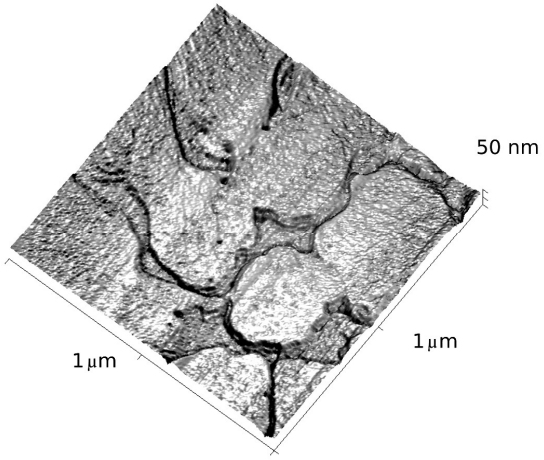
Застосування скануючого тунельного мікроскопа "Micro-nano mod" дозволяло проводити модифікацію поверхні, вивчати її морфологію та створювати мікро- та нанорозмірні структури на досліджуваній поверхні. Всі вимірювання проводились на відкритому повітрі. Калібрування "Micro-nano mod" проводилося на основі калібрувальних стандартів для скануючого зондового мікроскопа NT-MDT та “FemtoScan”.

Результати та їхнє обговорення

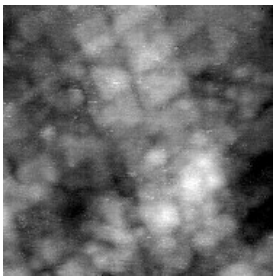
На рисунку 1 показано рельєф поверхні зразка плівки золота на слюді після термічного відпалу, отриманий за допомогою скануючого тунельного мікроскопа "Micro-nano mod". При аналізі морфології поверхні, отриманої шляхом сканування області 4 мкм на 4 мкм (рис.1а), було встановлено, що її структурні утворення розподілені рівномірно і мають розміри від 250 нм до 500 нм. Товщина плівки коливається від 30 нм до 40 нм. Більш детальне вивчення морфології поверхні плівки золота при скануванні площі 1 мкм на 1 мкм (рис. 1б) показує,



а



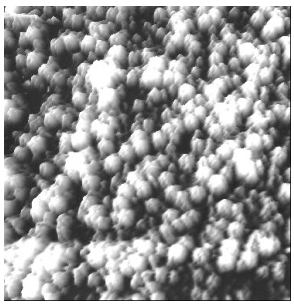
б



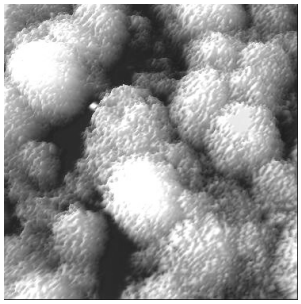
в

Рис. 1 3d-зображення поверхні плівки золота на слюді після відпалу (площа сканування 4 мкм на 4 мкм - **а**, площа сканування 1 мкм на 1 мкм - **б**) та 2d зображення фрагмента поверхні (площа 18 нм на 18 нм - **в**, висота рельєфу 3 нм).

що структурні елементи плівки мають багатошарову структуру з дуже розвиненим рельєфом поверхні. За допомогою скануючого тунельного мікроскопа «Micro-nano mod» було



а

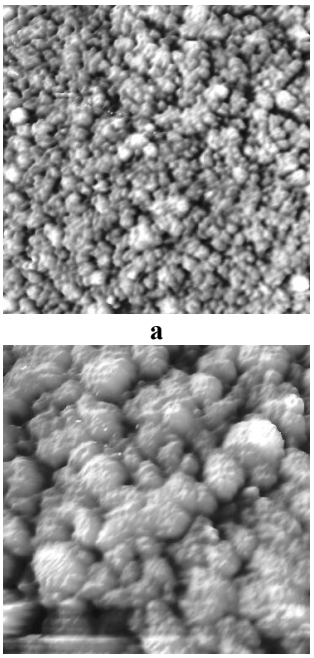


б

Рис. 2 3d-зображення поверхні золотої плівки на склі (площа сканування 4 мкм на 4 мкм - **а**, площа сканування 300 нм на 300 нм –**б**.

встановлено (рис. 1в), що структурними елементами золотої плівки є монокристали з просторовою орієнтацією (111). На рисунку 2 показані результати сканування ("Micro-nano mod") поверхні зразка "золото на склі", отриманого магнетронним напиленням. Аналіз морфології поверхні, отриманий скануванням площі 4 мкм на 4 мкм (рис. 2а), демонструє наявність яскраво вираженої острівної структури. Острівці - це ізольовані наночастинки з формою, близькою до сферичної. У деяких районах спостерігається об'єднання окремих острівців, в результаті чого невелика частка наночастинок має видовжену еліптичну форму. Детальне вивчення морфології поверхні золотої плівки під час сканування ("Мікро-наномод") області 300 нм на 300 нм (рис. 2б) дозволяє стверджувати, що структурними елементами плівки є великі частинки переважно сферичні, хоча також спостерігаються і частинки не сферичної форми.

Розмір окремих наночастинок золота коливається від 20 нм до 80 нм. Однак привертає увагу надзвичайно розвинена поверхня окремих наночастинок, що складається з індивідуально орієнтованих видовжених островців розміром у кілька нанометрів. Товщина отриманої плівки коливається від 60 нм до 80 нм. На рисунку 3 показана морфологія поверхні плівки золота на полірованій монокристалічній кремнієвій підкладці, отриманій іонним розпиленням.



а

б

Рис. 3 3d-зображення поверхні золотої плівки на полірованому монокристалічному кремнії (площа сканування 230 нм на 230 нм - **а**, площа сканування 80 нм на 80 нм – **б**.

Більш детальне зображення морфології поверхні показано на (рис. 3б). Плівка, отримана методом іонного розпилення (рис. 3а, б), складається з ізольованих частинок з великим розкидом розмірів від 2 нм до 10 нм. Великі частинки мають переважно сферичну форму, хоча спостерігаються також частинки неправильної форми. Спостерігається об'єднання окремих наночастинок у великі видовжені нано-об'єкти розміром до 20-40 нм. У цьому випадку окремі наночастинки та їх скупчення мають розвинену поверхню орієнтованих видовжених об'єктів розміром до 1 нм. Товщина плівки, отриманої розпиленням іонів, становить 30 нм.

Таким чином в роботі було продемонстровано, що незважаючи на різницю в морфології тонких плівок золота, отриманих різними методами та на різних підкладках, плівки в основному складаються із сферичних наночастинок. На прикладі плівки золота на слюді були визначені лінійні розміри окремих поверхневих об'єктів з дуже розвиненим рельєфом поверхні. При отриманні наноплівок золота магнетронним розпиленням на скляній підкладці розмір окремих наночастинок золота коливається від 20 нм до 80 нм. При іонному розпиленні на підкладку полірованого монокристалічного кремнію розмір окремих наночастинок золота коливається від 2 нм до 10 нм. Отже, маючи можливість порівнювати дані про режим вакуумного осадження (температура підкладки, щільність пучка, час осадження тощо), а також про рельєф поверхні, можна розробити технології отримання поверхні із заданим набором властивостей,. Отримані результати дуже важливі для застосування в біології та медицині. Вони дають можливість створювати різні типи датчиків, діагностичні тести, а також забезпечувати цілеспрямовану доставку ліків для лікування захворювань.

Список використаних джерел

1. *Levine K.L.* Synthesis, characterization and modelling of nano-size structures / K.L. Levine. – Nanotechnology Science and Technology, 2016. – 186 p.
2. *Amendola V.* Surface plasmon resonance in gold nanoparticles: a review / V. Amendola, R. Pilot, M. Frasconi, O. M. Marago, M.A. Lati // Journal of Physics: Condensed Matter.– 2017.– v.29. P.1- 48.
3. *Kaur I.* Nano Electronics: A New Era of Devices / I. Kaur, S. Yadav, S. Singh, V. Kumar, S. Arora, D. Bhatnagar // Solid State Phenomena, Trans Tech Publications, Ltd. – 2014. – vol.222. – P. 99–116.

References

1. LEVINE K.L. (2016) *Synthesis, characterization and modelling of nano-size structures.* Nanotechnology Science and Technology. 186 p.
2. AMENDOLA V., PILOT R., FRAS-CONI M., MARAGO O.M., LATI M.A. (2017) *Surface plasmon resonance in gold nanoparticles: a review.* J. of Physics: Condensed Matter. 29. p.1- 48.
3. KAUR I., YADAV S., SINGH S., KUMAR V., ARORA S., BHAT-NAGAR D. (2014) *A New Era of Devices.* Solid State Phenomena, Trans Tech Publications. 222. p. 99–116.

Надійшла до редколегії 29.08.21

УДК 519.21
https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.6

О.В. Капустян, *д.ф.-м.н., професор*
О.Б. Курилко, *к.ф.-м.н.*
Т.В. Юсипів, *аспірант*

Робастна стійкість глобального атрактора системи реакції-дифузії

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13.
e-mail: alexkap@univ.kiev.ua

O.V. Kapustyan, *Dr.Sci, professor*
O.B. Kurylko, *Ph.D. (Phys.-Math.)*
T.V. Yusypiv, *Ph.D. Student*

Robust stability of the global attractor of the reaction-diffusion system

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st.
e-mail: alexkap@univ.kiev.ua

У роботі розглядається задача робастної стійкості для нелінійної системи рівнянь в частинних похідних типу реакція-дифузія. Незбурена система вважається такою, що має глобальний атрактор. Основним завданням роботи є оцінка відхилення траєкторії збуреної системи від глобального атрактора незбуреної системи в залежності від величини збурень. Таку оцінку можна отримати в рамках теорії стійкості від входу до стану (ISS). У роботі не накладається жодних умов на похідну нелінійної функції взаємодії, отже, не забезпечується єдиність розв'язку початкової задачі. У роботі запропоновано новий підхід до одержання оцінок робастної стійкості атрактора у випадку многозначного еволюційного розв'язуючого оператора. Зокрема, доведено, що многозначний розв'язуючий оператор породжений слабкими розв'язками нелінійної системи типу реакція-дифузія має властивість асимптотичного підсилення (AG) відносно атрактора незбуреної системи.

Ключові слова: стійкість від входу до стану, асимптотичне підсилення, глобальний атрактор, нескінченно-вимірна система, система типу реакція-дифузія.

Робота виконана за підтримки НФДУ, проект Ф81/41743.

In this paper we consider the problem of robust stability for a nonlinear system of equations in partial derivatives of the reaction-diffusion type. An undisturbed system is considered to have a global attractor. The main task is to estimate the deviation of the trajectory of the perturbed system from the global attractor of the perturbed system depending on the magnitude of the perturbations. Such an estimate can be obtained in the framework of the theory of input-to-state stability (ISS). The paper does not impose any conditions on the derivative of the nonlinear interaction function, so the unity of the solution of the initial problem is not ensured. The paper proposes a new approach to obtaining estimates of robust stability of the attractor in the case of a multivalued evolutionary decoupling operator. In particular, it is proved that the multivalued decoupling operator generated by weak solutions of a nonlinear reaction-diffusion system has the property of asymptotic gain (AG) with respect to the attractor of the undisturbed system.

Key Words: input-to-state stability, asymptotic gain, global attractor, infinite-dimensional system, reaction-diffusion system.

This work is partially supported by the NRFU, project F81/41743.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф., академік НАН України Перестюк М.О.

Вступ

Асимптотична стійкість положення рівноваги є фундаментальною властивістю еволюційних процесів і відіграє важливу роль для багатьох застосувань. Загальновідомо, що глобальна асимптотично стійка рівновага лінійної та скінченновимірної системи є робастною, тобто для будь-якого істотно обмеженого зовнішнього збурення, що подається на вхід системи, відповідний розв'язок залишається обмеженим протягом всього часу та прямує до певного околу точки рівноваги, коли час прямує до нескінченності. Розмір цього околу залежить лише від норми збурення. Для нелінійних систем

© О.В. Капустян, О.Б. Курилко, Т.В. Юсипів, 2021

це в загальному випадку не відповідає дійсності й призводить до поняття «стабільності від входу до стану» (ISS), введеного Е.Д. Зонтагом для скінченновимірних систем. Як виявилося, це поняття також підходить для вивчення стійкості рівноваги у випадку нескінченновимірних систем [2]. Протягом останнього десятиліття багато авторів працювали над поширенням теорії ISS на цей клас систем. Значна кількість з цих поширень були розроблені для систем, що задаються диференціальними рівняннями в частинних похідних [4, 5, 7]. Слід зазначити, що майже всі результати, що стосуються стійкості в сенсі ISS для вказаних систем, були розроблені для випадку однієї точки рівноваги системи без збурень. Проте, як відомо, багато нелінійних нескінченновимірних дисипативних еволюційних систем мають нетривіальний глобальний атрактор, що містить в собі як асимптотично стійкі положення рівноваги, так і інші граничні режими системи. У цій роботі ми вивчаємо питання робастності саме такої множини щодо зовнішніх збурень. Питання існування та властивостей глобальних атракторів досліджувалися в монографії [1] та статтях [3, 6]. Природним чином постає запитання: якщо розглянути систему, що має глобальний атрактор, то що можна сказати про оцінку відхилення розв'язків від атрактора, якщо на цю систему діє деяке збурення d? У даній роботі ми розв'язуємо дане питання для збуреної системи типу реакція-дифузія (RD). Використовуючи загальну схему, запропоновану в [4], ми доводимо властивості асимптотичного підсилення (AG) відносно глобального атрактора дисипативної RD-системи.

1. Постановка задачі

В обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ розглянемо наступну задачу (що має назву системи реакція-дифузія)

$$\begin{cases} u_t = a\Delta u - f(u) + g(x) + d(t,x),\ x \in \Omega, t > 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

де $u = u(t,x) = (u^1(t,x), ..., u^N(t,x))$ – невідома вектор-функція, $f = (f^1, ..., f^N)$, $g = (g^1, ..., g^N)$ – задана функція, a – дійсна матриця $N \times N$ така, що $\frac{1}{2}(a + a^*) \geqslant \mu I$, $\mu > 0$, $d = (d^1, ..., d^N)$ – зовнішні збурення.

Припустимо, що виконуються наступні властивості:

$$g \in (L^2(\Omega))^N, \quad f \in C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N),$$

$\exists\ C_1, C_2 > 0,\ \gamma_i > 0,\ p_i \geqslant 2,\ i = \overline{1,N}$ такі, що $\forall\ v \in \mathbb{R}^N$

$$\sum_{i=1}^{N} |f^i(v)|^{\frac{p_i}{p_i - 1}} \leqslant C_1(1 + \sum_{i=1}^{N} |v^i|^{p_i}),$$

$$\sum_{i=1}^{N} f^i(v)v^i \geqslant \sum_{i=1}^{N} \gamma_i |v^i|^{p_i} - C_2,$$

В подальшому будемо використовувати стандартні функціональні простори:

$$H = (L^2(\Omega))^N \text{ та } V = (H_0^1(\Omega))^N.$$

Позначимо

$$p = (p_1, ..., p_N),\ L^p(\Omega) = L^{p_1}(\Omega) \times ... \times L^{p_N}(\Omega).$$

Відомо [1], що за таких припущень для будь-яких збурень $d \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H)$ (навіть для $d \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; H)$) задача (1) є глобально розв'язною у слабкому сенсі у фазовому просторі H, тобто для будь-якого $u_0 \in H$ існує функція $u = u(t,x) \in L^2_{loc}(0, +\infty; V) \bigcap L^p_{loc}(0, +\infty; L^p(\Omega))$ така, що для будь-яких $T > 0,\ v \in V \cap L^p(\Omega)$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega u(t,x)v(x)dx + \int\limits_\Omega \Big(a\nabla u(t,x)\nabla v(x) + \\ + f(u(t,x))v(x) - g(x)v(x) - d(t,x)v(x)\Big)dx = 0$$

в сенсі скалярних розподілів на $(0,T)$, та $u(0,x) = u_0(x)$. Єдиність такого розв'язку не гарантується.

За рахунок включення $u \in C([0, +\infty); H)$ остання рівність має сенс.

Розглянемо незбурену систему ($d \equiv 0$)

$$\begin{cases} u_t = a\Delta u - f(u) + g(x),\ x \in \Omega, t > 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Відомо [1], що відповідна багатозначна напівгрупа $S : \mathbb{R}_+ \times H \mapsto 2^H$

$$S(t, u_0) = \{u(t) |\ u(\cdot) \text{ є глобальним слабким розв'язком (2), } u(0) = u_0\}$$

має глобальний атрактор Θ в H, тобто, існує компактна множина $\Theta \subset H$ така, що виконуються наступні властивості:

(i) $\Theta = S(t, \Theta),\ t \geqslant 0$,

(ii) для будь-якої обмеженої множини $B \subset H$

$$dist(S(t,B), \Theta) \to 0 \text{ при } t \to \infty,$$

де для заданих $A, B \subset H$ ми позначаємо

$$S(t,B) = \bigcup_{b\in B} S(t,b),$$

$$dist(A,\Theta) = \sup_{x\in A}\inf_{y\in\Theta}\|x-y\|_H.$$

Дана властивість гарантує, що будь-який розв'язок (2) прямує до Θ при $t\to\infty$. Нас цікавить довгострокова поведінка відповідних розв'язків у випадку системи (1), на яку діє зовнішнє збурення d.

Нехай задано початковий стан $u_0 := u(0) \in H$ та збурюючий сигнал d. Позначимо $S_d(t,u_0)$ множину всіх розв'язків (1) з $u(0)=u_0$. Через наявність збурення загалом немає гарантії, що розв'язки будуть збігатися до Θ при $t\to\infty$. Виявляється, що глобальний атрактор є робастним при збуренні, тобто збурення малої величини впливають на його властивості незначним чином. Ця властивість робастності може бути виражена в рамках теорії ISS наступним чином: існує $\beta\in\mathcal{KL}$ та $\gamma\in\mathcal{K}$ такі, що для будь-яких $u_0\in H$ та $d\in L^\infty(\mathbb{R}_+;H)$

$$\|S_d(t,u_0)\|_\Theta \leqslant \beta(\|u_0\|_\Theta,t)+\gamma(\|d\|_\infty),\ t\geqslant 0, \quad (3)$$

де добре відомі класи $\mathcal{K}$ – клас неперервних строго зростаючих функцій на $[0,+\infty)$, затухаючих у початку координат, $\mathcal{KL}$ – множина неперервних функцій, визначених на $[0,+\infty)^2$, перший аргумент яких належить класу $\mathcal{K}$, а другий аргумент строго спадає до нуля, а також

$$\|d\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{t\geqslant 0}\|d(t)\|_H, \text{якщо } d\in L^\infty(\mathbb{R}_+;H),$$

$$\|u\|_\Theta = \inf_{\theta\in\Theta}\|u-\theta\|_H, \text{якщо } u\in H,$$

$$\|U\|_\Theta = \sup_{u\in U}\|u\|_\Theta, U\subset H.$$

Варто зазначити, що в загальному випадку $\Theta\neq\{0\}$. Більш того, структура такого атрактора дуже складна [6]. Тому оцінки типу (3) не можна отримати за допомогою прямих апріорних оцінок.

На жаль, властивість (3), взагалі кажучи, не гарантується навіть у випадку $\Theta=\{0\}$, як було показано в прикладі [2].

У цій роботі доведено наступну властивість AG, яка дуже близька до (3):
існує $\gamma\in\mathcal{K}$ таке, що для будь-якого $u_0\in H$ та будь-якого $d\in L^\infty(\mathbb{R}_+;H)$ виконується

$$\lim_{t\to\infty}\sup\|S_d(t,u_0)\|_\Theta \leqslant \gamma(\|d\|_\infty). \quad (4)$$

2. Основні результати

Надалі будемо вважати, що $d\in L^\infty(\mathbb{R}_+;H)$, $\|d\|_\infty\leqslant R_0$. Опираючись на [1], розглянемо множину

$$\Sigma(d) = cl_{L^{2,\omega}_{loc}(\mathbb{R}_+;H)}\{d(\cdot+\tau)\,|\,\tau\geqslant 0\},$$

де $cl_X A$ означає замикання множини A в топології простору X. Відомо, що $\Sigma(d)$ є інваріантною щодо зсувів, компактною в $L^{2,\omega}_{loc}(\mathbb{R}_+;H)$ множиною, і

$$\forall h\in\Sigma(d)\ \|h\|^2_+ := \sup\int_t^{t+1}\|h(s)\|^2_H ds \leqslant \|d\|^2_\infty. \quad (5)$$

Розглянемо сім'ю множинозначних відображень

$$\{S_h : \mathbb{R}_+\times H\mapsto 2^H\}, \quad (6)$$

де $S_h(t,u_0) = \{u(t)\,|\,u(\cdot)$ є розв'язком (1) зі збуренням $\alpha=h, u(0)=u_0\}_{h\in\Sigma(d)}$.

Виявляється, що властивість робастної стійкості типу (4) можна встановити, використовуючи властивості рівномірних атракторів (6). Позначимо $S_\Sigma(t,u_0) = \bigcup\limits_{h\in\Sigma} S_h(t,u_0)$.

Означення Компактна множина $\Theta_\Sigma\subset$ $\subset H$ називається рівномірним атрактором сім'ї $\{S_h\}_{h\in\Sigma}$, якщо для довільної обмеженої $B\subset H$

$$dist(S_\Sigma(t,B),\Theta_\Sigma)\to 0 \quad (7)$$

і є мінімальною замкненою множиною, що задовольняє (7).

Теорема 1 [1, 6] *Для кожного збурення d, $\|d\|_\infty\leqslant R_0$, сім'я відображень $\{S_h\}_{h\in\Sigma(d)}$, що визначена в (6), має рівномірний атрактор $\Theta_{\Sigma(d)}$, причому*

$$\Theta_{\Sigma(d)}\subset S_{\Sigma(d)}(t,\Theta_{\Sigma(d)})\ \forall t\geqslant 0. \quad (8)$$

Основним результатом роботи є наступна теорема.

Теорема 2 *Для розв'язків задачі (1) з обмеженими збуреннями $\|d\|_\infty\leqslant R_0$ існує функція $\gamma\in K$ така, що $\forall u_0\in H$*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\|S_d(t,u_0)\|_\Theta \leqslant \gamma(\|d\|_\infty), \quad (9)$$

де $\Theta\subset H$ – глобальний атрактор незбуреної системи (2).

Доведення. Припустимо, що ми маємо граничну рівність

$$dist(\Theta_{\Sigma(d)}, \Theta) \to 0, \|d\|_\infty \to 0. \qquad (10)$$

Доведемо, що з (10) випливає (9). Дійсно, за побудовою $\Sigma(0) = \{0\}$ і $d \in \Sigma(d)$. Отже, для $u_0 \in H$, $z \in \Theta_{\Sigma(d)}, t > 0$, $u(t) \in S_d(t, u_0)$ маємо: для $\theta \in \Theta$

$$\|u(t) - \theta\|_H \leqslant \|u(t) - z\|_H + \|z - \theta\|_H \Rightarrow$$

$$\inf_{\theta\in\Theta} \|u(t) - \theta\|_H \leqslant \|u(t) - z\|_H + \inf_{\theta\in\Theta} \|z - \theta\|_H \Rightarrow$$

$$\inf_{\theta\in\Theta} \|u(t) - \theta\|_H \leqslant \inf_{z\in\Theta_{\Sigma(d)}} \|u(t) - z\|_H + \\ + \sup_{z\in\Theta_{\Sigma(d)}} \inf_{\theta\in\Theta} \|z - \theta\|_H \Rightarrow$$

$$\|u(t)\|_\Theta \leqslant dist(u(t), \Theta_{\Sigma(d)}) + dist(\Theta_{\Sigma(d)}, \Theta) \Rightarrow$$

$$\|S_d(t, u_0)\|_\Theta \leqslant dist(S_{\Sigma(d)}(t, u_0), \Theta_{\Sigma(d)}) + \\ + dist(\Theta_{\Sigma(d)}, \Theta).$$

Оскільки $\Theta_{\Sigma(d)}$ – рівномірний атрактор, то з (7) для кожного d маємо:

$$dist(S_{\Sigma(d)}(t, u_0), \Theta_{\Sigma(d)}) \to 0, t \to +\infty.$$

Покладемо $\gamma(s) := \sup\limits_{\|d\|_\infty\leqslant s} dist(\Theta_{\Sigma(d)}, \Theta) + s$. В силу (10) $\gamma \in K$ і $dist(\Theta_{\Sigma(d)}, \Theta) \leqslant \gamma(\|d\|_\infty)$, що і означає виконання (9).

Отже, доведемо (10). З [6] маємо наступні властивості розв'язків задачі (1) при

$$d = h \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; H), \|h\|_+ < \infty :$$

1) дисипативність: $\forall u_0 \in H \ \forall h \in \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; H)$, $\|h\|_+ < \infty \, \forall u(\cdot) \in S_h(\cdot, u_0) \, \forall t \geqslant 0$

$$\|u(t)\|^2_H \leqslant \|u_0\|^2_H e^{-\delta t} + K(\|h\|^2_+ + 1), \qquad (11)$$

де додатні константи δ, K залежать лише від констант задачі (1);

2) залежність від u_0, h: якщо $h_n \to h$ в $L^{2,\omega}_{loc}(\mathbb{R}_+; H)$, $u^n_0 \to u_0$ слабо в H, то по деякій підпослідовності для $t > 0$:

$$S_{h_n}(t, u^n_0) \ni u_n(t) \to u(t) \in S_h(t, u_0) \text{ в } H. \quad (12)$$

Тепер від супротивного припустимо, що (10) не має місця. Це означає, що $\exists d_n \to 0$ в $L^\infty(\mathbb{R}_+; H)$ $\exists \varepsilon > 0$ $\exists z_n \in \Theta_{\Sigma(d_n)}$ такі, що

$$dist(z_n, \Theta) \geqslant \varepsilon. \qquad (13)$$

З (11) виводимо: $\forall u(\cdot) \in S_{\Sigma(d)}(\cdot, u_0) \, \forall t \geqslant 0$

$$\|u(t)\|^2_H \leqslant \|u_0\|^2_H e^{-\delta t} + K(\|d\|^2_\infty + 1). \qquad (14)$$

Оскільки в силу [6] $\xi \in \Theta_\Sigma \Leftrightarrow \xi = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$, де $\xi_n \in S_\Sigma(t_n, B)$ де $t_n \nearrow \infty$, $B \subset H$ – обмежена, то з (14) маємо:

$$\forall \xi \in \Theta_{\Sigma(d)} \ \|\xi\|^2_H \leqslant K(\|d\|^2_\infty + 1),$$

тобто існує обмежена $B_0 \subset H$ така, що $\forall d$, $\|d\|_\infty \leqslant R_0$

$$\Theta_{\Sigma(d)} \subset B_0.$$

Тоді $z_n \in \Theta_{\Sigma(d_n)} \subset S_{\Sigma(d_n)}(t, \Theta_{\Sigma(d_n)}) \subset \subset S_{\Sigma(d_n)}(t, B_0)$.

Отже, $z_n = u_n(t) \in S_{h_n}(t, \xi_n)$, де $\xi_n \to \xi$ слабо в H, $\|h_n\|_+ \leqslant \|d_n\|_\infty \to 0$. Звідси $h_n \to 0$ в $L^{2,\omega}_{loc}(\mathbb{R}_+; H)$ і за властивістю (12) по підпослідовності

$$u_n(t) \to u(t) \in S(t, \xi) \subset S(t, B_0). \qquad (15)$$

В силу рівномірного притягнення можемо вибрати $t > 0$ так, щоб

$$dist(S(t, B_0), \Theta) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тоді з (15)

$$z_n \to u(t) \in O_{\frac{\varepsilon}{2}}(\Theta),$$

що суперечить (13). Теорема доведена.

Висновки

В роботі розглянуто задачу робастної стійкості для нелінійної системи рівнянь в частинних похідних типу реакція-дифузія (RD). Для такої системи, що має глобальний атрактор, розв'язано питання оцінки відхилення розв'язків від атрактора в залежності від величини збурення. Доведено властивості асимптотичного підсилення (AG) відносно глобального атрактора дисипативної RD-системи.

Список використаних джерел

1. *V.V. Chepyzhov.* Attractors for equations of mathematical physics // American Mathematical Society. – 2002.

2. *S. Dashkovskiy.* Input-to-state stability of infinite-dimensional control systems // Math. Contr. Sygn. Syst. – 2013. - 25. – P. 1–35.

3. *S. Dashkovskiy.* Global attractors of impulsive parabolic inclusions // Discr. Contin. Dyn. Syst. – 2017. – Series B, 22. – P. 1875–1886.

4. *S. Dashkovskiy.* A local input-to-state stability result w.r.t. attractors of nonlinear reaction-diffusion equations // Mathematics of Control, Signals, and Systems. – 2020. – 32. – P. 309–326.

5. *B. Jacob.* Input-to-state stability of unbounded bilinear control systems // arXiv:1811.08470. – 2018.

6. *O.V. Kapustyan.* Structure of uniform global attractor for general non-autonomous reaction-diffusion system // Continuous and distributed systems. – 2014 – Vol. 211. – P. 221–237.

7. *Karafyllis, I.* Input-to-state stability for PDEs // Communications and Control Engineering Series. – Springer, Cham. – 2019.

8. *A. Mironchenko.* Input-to-state Stability of Infinite-Dimensional Systems: Recent Results and Open Questions // SIAM Review. – 2020. – 62. – P. 529–614.

9. *A. Mironchenko.* Characterizations of input-to-state stability for infinite-dimensional systems // IEEE Trans. Autom. Contr. – 2018. – 63. – P. 1692–1707.

References

1. V.V. CHEPYZHOV, M.I. VISHIK (2002) *Attractors for equations of mathematical physics.* American Mathematical Society.

2. S. DASHKOVSKIY, AND A. MIRONCHENKO (2013) Input-to-state stability of infinite-dimensional control systems. *Math. Contr. Sygn. Syst.*, 25 p. ,1–35.

3. S. DASHKOVSKIY, O.V. KAPUSTYAN, I. ROMANIUK (2017) Global attractors of impulsive parabolic inclusions, *Discr. Contin. Dyn. Syst. - Series B*, 22 p. 1875–1886.

4. S. DASHKOVSKIY, O.V. KAPUSTYAN, J. SCHMID (2020) A local input-to-state stability result w.r.t. attractors of nonlinear reaction-diffusion equations. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 32 p. 309–326.

5. B. JACOB, F. SCHWENNINGER (2018) Input-to-state stability of unbounded bilinear control systems. *arXiv:1811.08470.*

6. O.V. KAPUSTYAN, P.O. KASYANOV, J. VALERO, M.Z. ZGUROVSKY (2014) Structure of uniform global attractor for general non-autonomous reaction-diffusion system. *Continuous and distributed systems.* vol. 211, p. 221–237.

7. KARAFYLLIS, I. AND KRSTIC, M. (2019) *Input-to-state stability for PDEs.* Communications and Control Engineering Series. Springer, Cham.

8. A. MIRONCHENKO, CH. PRIEUR (2020) Input-to-state Stability of Infinite-Dimensional Systems: Recent Results and Open Questions. *SIAM Review.*, 62, p. 529–614.

9. A. MIRONCHENKO, F. WIRTH (2018) Characterizations of input-to-state stability for infinite-dimensional systems. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 63, p. 1692–1707.

Надійшла до редколегії 08.09.2021

УДК 534.2

https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.7

Коновалюк Т. П. [1], к. ф.-м.н.,
Краснопольська Т. С. [2], д. ф.-м. н, проф.,
Печук Є. Д. [3], к. ф.-м. н.

Вплив внутрішньої динаміки когерентних вихрових структур, що взаємодіють між собою, на генероване звукове поле

[1] Інститут гідромеханіки НАН України, 01057, м. Київ, в. Марії Капніст, 8/4,
e-mail: tpk_8_4@ukr.net;
[2] Інститут гідромеханіки НАН України, 01057, м. Київ, в. Марії Капніст, 8/4,
e-mail: t.krasnopolskaya@tue.nl;
[3] Інститут гідромеханіки НАН України, 01057, м. Київ, в. Марії Капніст, 8/4,
e-mail: evgdmp@gmail.com

T. P. Konovalyuk[1], Ph.D. (Phys.-Math.),
T. S. Krasnopolskaya [2], D.of Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
E. D. Pechuk [3], Ph.D. (Phys.-Math.).

Influence of the internal dynamics of the interacting coherent vortex structures to the generated sound field

[1] Institute of hydrodynamics of NAS of Ukraine, 01057, Kyiv, Marii Kapnist str., 8/4,
e-mail: tpk_8_4@ukr.net;
[2] Institute of hydrodynamics of NAS of Ukraine, 01057, Kyiv, Marii Kapnist str., 8/4,
e-mail: t.krasnopolskaya@tue.nl;
[3] Institute of hydrodynamics of NAS of Ukraine, 01057, Kyiv, Marii Kapnist str., 8/4,
e-mail: evgdmp@gmail.com

Стаття присвячена світлій пам`яті талановитого українського вченого-механіка, професора НАН України, доктора фізико-математичних наук В`ячеслава Володимировича Мелешка. На прикладах взаємодії декількох когерентних вихрових структур показано, що неврахування внутрішніх ступенів вільності вихорів при моделюванні течії суттєво впливає на розрахунки генерованого звукового поля, яке є результатом вихрової взаємодії. Отримано, що великомасштабні рухи вихрових плям можна моделювати точковими вихорами за умови, що звуковий спектр розподілений на смуги та низькочастотні смуги точкових та розподілених вихорів мають близьку ширину. Неврахування внутрішньої вихрової динамики при описі звукового джерела веде до суттєвого заниження розрахункового рівня звукового поля.

Ключові слова: когерентна вихрова структура, звуковий спектр.

The article is dedicated to the glowing memory of the talented Ukrainian scientist-mechanic, professor, doctor of physical and mathematical sciences Vyacheslav Vladimirovich Meleshko. The sound fields of several coherent vortex structures interacting with each other were calculated using the moment model (MZS-model) of the first and second orders. In the first-order MZS-model, vortices are described by point vortices, in the second-order MZS-model--by Kirchhoff vortices. Sound fields as a result of vortex interaction are calculated using the Lighthill's acoustic analogy under Powell's formulation. The spectrum of the sound field in the description of coherent vortices by point vortices is characterized by a single frequency band, which reflects the motion of the vortex centers of vortices (large-scale vortex movements). Taking into account the inner vortex dynamics leads to the expansion of spectrum and level increasing of calculated sound: the lower band describes the motion of the vorticity centers of spots, the higher band describes the internal dynamics of the vorticity. It is shown that large-scale vortex movements can be modeled by point vortices, when the sound spectrum of distributed vortices is clearly divided into bands and the width of the lower frequency band is close to the width of the sound spectrum from point vortices. The presence of an upper frequency band in the sound field of interacting vortex spots does not allow us to describe the distributed vortices as point vortices when constructing a sound source, since such a simplification leads to a significant underestimation of the level of the calculated sound field.

Key Words: coherent vortex structure, point vortex, Kirchhoff vortex, sound spectrum.

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

© Т.П. Коновалюк, Т.С. Краснопольська, Є.Д. Печук, 2021

1. Вступ

Дослідження шумів, що генеруються течією, мають самостійний науковий інтерес; отримані результати використовуються в багатьох інженерних застосуваннях. В обчислювальній аероакустиці (CAA-computer aeroacoustics), яка почала свій розвиток з початку 1990-х років, сформовані два основних напрямки (напр.,[1]): чисельний розрахунок системи рівнянь Нав`є-Стокса, що описує повну течію рідини (comprehensive CAA); гібгидний чисельний підхід (hybrid CAA), в якому сама течія розраховується чисельно або описується вихровою моделлю, а дальнє звукове поле визначається методом акустичної аналогії чи методом зрощуваних асимптотичних розкладень. Гібридні підходи об`єднують чисельні схеми та моделі різних рівней складності; їх застосовують при малих та помірних числах Маха M ($M<1$), коли є слушною умова невзаємодії вихрової течії з породжуваним нею звуком.

Серед всіх вихрових структур течії найбільш ефективно перетворюють енергію своєї взаємодії в енергію звукових хвиль когерентні вихрові структури [2]. Згідно з організацією когерентної вихрової структури [2], звуковий спектр від вихрової течії, що сформована навіть декількома когерентними вихровими структурами, є розподіленим вздовж певної частотної смуги: більш низькі частоти спектру відповідають великомасштабним вихровим рухам (рухи центрів завихреності плям), більш високі частоти обумовлені внутрішньою вихровою динамікою.

В статті на прикладі взаємодії декількох когерентних вихрових структур розв`язується питання щодо впливу внутрішньої вихрової динаміки на розрахунковий рівень звукового поля, що генерується в результаті такої взаємодії. В дослідженнях був використаний гібридний підхід: взаємодії вихорів описувалися моментною моделлю (MZS-модель) першого та другого порядків [3], звукове поле обчислювалося в межах акустичної аналогії Лайтхіла (Lighthill) в формулюванні Пауела (Powell) [4].

2. Використані моделі. Постановка задач

При описі вихрової взаємодії розглядається двовимірна потенційна течія нев'язкої нестисливої рідини однорідної щільності, в якій взаємодіють декілька когерентних вихрових структур. Рідина вважається необмеженою та нерухомою на нескінченності. У двовимірній ідеальній баротропній рідині, яка є нерухомою на нескінченності, виконуються закони збереження циркуляції, імпульсу, моменту імпульсу та частини кінетичної енергії, пов'язаної з розподілом завихреності в середовищі. В наближенні MZS-моделі першого порядку когерентні вихорі є вихровими точками, їхня взаємодія описується гамільтоновою системою рівнянь другого порядку з відповідними початковими умовами [3], [5]. Взаємодія вихорів Кірхгофа (Kirchhoff), що відповідає наближенню MZS- моделі другого порядку, описується в межах гамільтонової системи рівнянь четвертого порядку з відповідними початковими умовами [3]. В розв`язанні цих систем рівнянь полягає математична постановка гідродинамічної задачі. Математична постановка акустичної задачі полягає в розв`язку неоднорідного хвильового рівняння Лайтхіла в формулюванні Пауела [4], [6], який відповідає нульовим початковим умовам та умові випромінювання Зомерфельда. Вихорі Кірхгофа на відміну від точкових вихорів мають дві додаткові ступені вільності, що дозволяє моделювати внутрішню вихрову динаміку когерентних вихорів [3].

3. Аналіз обчислень звукових полів

В якості вихрової системи, що досліджується, оберемо пружню взаємодію трьох вихорів Кірхгофа, поведінка центрів завихреності яких відповідає таким типам взаємодії еквівалентної системи трьох точкових вихорів: пряма взаємодія, обмінна взаємодія, взаємне захоплення [5], [6]. Інтенсивності вихрових плям дорівнюють $\Gamma_1=\Gamma_2=-\Gamma_3$; задача розв`язувалася в безрозмірному вигляді [6]. Розміри вихорів обиралися таким чином, щоб тип взаємодії центрів завихреності плям відповідав типу взаємодії еквівалентної системи точкових вихорів [6]. Це дозволить зрозуміти, яким чином внутрішня вихрова динаміка впливає на розрахункове звукове поле. При прямій та обмінній взаємодіях в якості набіжної вихрової пари *1,3* (Рис.1,а) обиралися EV-стани [3], вихор *2* моделювався або вихорем Ренкіна (круговий вихор), або таким самим EV-вихорем. В випадку взаємного захоплення всі вихорі моделювалися EV-станами.

Проаналізуємо звукове поле від характерного випадку вихрової взаємодії вихорів Кірхгофа, а саме, обмінної взаємодії їхніх центрів завихреності: набіжна вихрова пара *1,3*—EV-стани, вихор *2*—вихор Ренкіна (Rankine); площі

вихорів однакові $S_{1,2,3} = 0.495$, модуль завихреності $|\omega_{ел}| = 2.018$; початкові координати вихорів: *1* (-20;3.5), *2*(0;-1), *3*(-20;2.5). Розрахункове звукове поле порівняємо із звуковим полем від еквівалентної системи точкових вихорів (рис. 1). На траєкторії центрів завихреності плям самі вихорі Кірхгофа не нанесені; траєкторії позначені лініями: вихор *1*—суцільна лінія, *2*—пунктирна, вихор *3*—штрих-пунктирна (рис. 1,а). Для описування низькочастотної смуги звукового спектру в випадках прямої та обмінної взаємодій введемо поняття області ефективної вихрової взаємодії (рис. 1,а, кругова область): на її межі рівень флуктуацій звукового тиску $p'_\theta(\theta$ -- напрямок на точку спостереження) на 20 dB нижчий за максимальне значення; час перебування вихорів в цій області позначимо як $T_{еф}$; $\omega_{еф} = 2\pi / T_{еф}$ --характерна частота випромінювання щодо великомасштабних рухів. Звуковий сигнал в точці спостереження осцилює відносно свого середнього значення, близького до звукового імпульсу від еквівалентних точок (рис. 1,б). Амплітудний спектр сигналу $|S|$ чітко розподілений на дві смуги: характерна частота низькочастотної смуги визначається інтервалом $T_{еф}$ від центрів завихреності плям; високочастотна смуга формується частотами осциляцій півосей в набіжній *1,3* та відбитій *2,3* вихрових парах, а також подвоєною частотою обертання поодинокого вихора *1* після інтервалу $T_{еф}$ (рис. 1,в). Ваги найбільш енергоємних частот різних смуг спектру близькі між собою. В даному випадку внески в звукове поле від великомасштабних рухів та від внутрішньої динаміки співзмірні. Відзначимо, що в випадку тієї ж обмінної взаємодії, але коли всі вихори системи є EV-станами, звукове поле переважно формує внутрішня вихрова динаміка. В цьому випадку рівень звукового поля від плям приблизно на два порядки вищий за рівень звукового поля від еквівалентних вихрових точок.

Розглянемо великомасштабні рухи вихорів Кірхгофа щодо їхнього моделювання еквівалентною системою точкових вихорів. На рис. 1,г заради стислості подані траєкторії центрів завихреності лише вихора *3* для всіх систем, що розглядаються. Для всіх систем низькочастотні звукові смуги мають близьку ширину (~0.25 безрозмірних частот) (рис. 1,д). Це означає, що тип поведінки великомасштабних рухів вищезгаданих систем, однаковий (рис. 1,г).

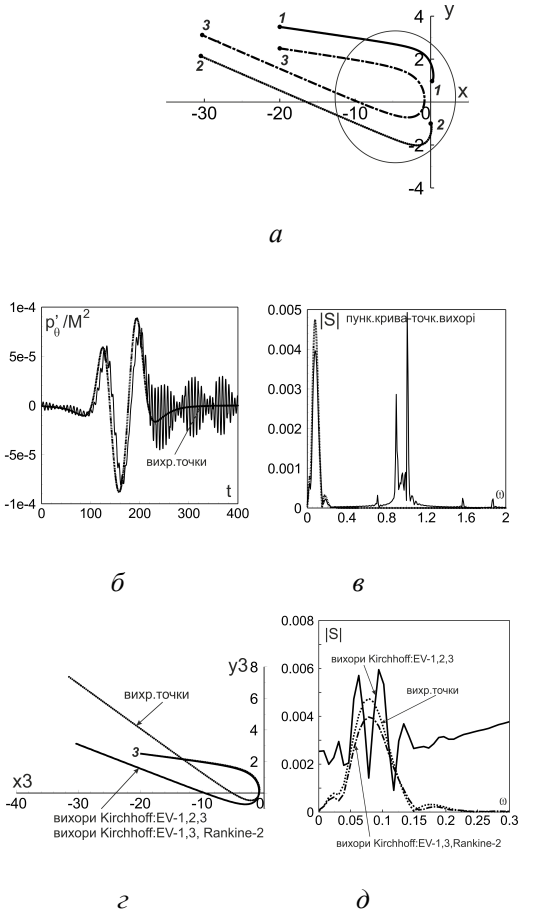


Рис. 1. Обмінна взаємодія вихорів Кірхгофа та їхнє звукове як результат взаємодії; пояснення подані в тексті.

В випадку взаємного захоплення (*1* (0;-0.57), *2*(0;-1), *3*(0;-1.57), $S_{1,2,3} = 0.049$, $|\omega_{ел}| = 20.37$) (рис. 2,а) рівень звукового тиску від плям суттєво перевищує рівень звукового тиску від еквівалентних точок: це результат врахування внутрішніх ступенів вільності вихорів (рис. 2,б). В звукове поле роблять суттєві внески всі ступені вільності вихорів, що взаємодіють між собою (рис.2,в). Ширина частотної смуги від великомасштабних рухів розподілених вихорів та рухів еквівалентних точок близькі (рис.2,в), з чого витікає близькість траєкторій центрів завихреності плям та точок (на рис. 2,а -- заради стислості подана траєкторія лише точкового вихора *3*).

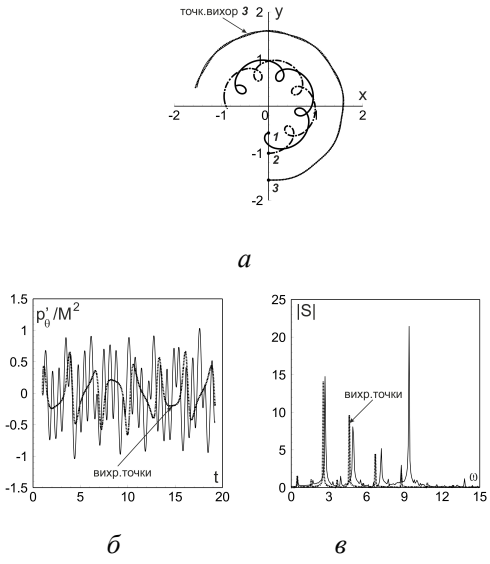


Рис. 2. Взаємне захоплення вихорів Кірхгофа та їхнє звукове як результат взаємодії; пояснення подані в тексті.

3. Висновки

- Неврахування впливу внутрішніх ступенів вільності вихорів (модель точкових вихорів) при побудові звукового джерела суттєвим чином занижує розрахунковий рівень звукового поля.
- Великомасштабні рухи розподілених вихорів коректно моделювати точковими вихорами за умови, коли звуковий спектр чітко від плям розподілений на смуги та низькочастотні смуги відповідних систем мають близьку ширину. Ця теза є акустичним критерієм (якісним) щодо описування великомасштабних вихрових рухів точковими вихорами.
- Оскільки внутрішня вихрова динаміка значним чином впливає на рівень генерованого звуку, компенсувати цей фактор можна, зокрема, зменшенням ексцентриситету вихорів, що формують течію.

Список використаних джерел

1. Lele S.K., Nichols J.W. A second golden age of aeroacoustics. Phil.Trans.Roy.Soc. 2014. Vol.. A372.P.1-18
2. Hussain A.K.M.F. Coherent structures--reality and myth. Phys.Fluids. 1983. Vol.26, No.10. P.2816-2849
3. Melander M.V.,Zabuzky N.J., Styczek A. S. A moment model for vortex interactions of two-dimensional Euler equations. Part I. Computational validation of a Hamiltonian elliptical representation. J.Fluid Mech. 1986. Vol.167. P.95-115.
4. Powell A. Theory of vortex sound. J.Acoust. Soc.Amer. 1964. Vol.36, №1. P.177-195
5. Мелешко В.В., Константинов М.Ю. Динамика вихревых структур. Київ: Наукова думка, 1993. 279 с.
6. Коновалюк Т.П. Звукові поля, генеровані когерентними вихровими структурами, які взаємодіють:дис.канд. ф.-м. наук: 01.04.06/ ІГМ НАНУ України. Київ, 2018.168 с.

References

1. Lele, S.K.&Nichols, J.W.(2014) A second golden age of aeroacoustics. *Phil. Trans. Roy. Soc.* A372. p.1-18.
2. Hussain A.K.M.F. (1983) Coherent structures --reality and myth. *Phys. Fluids*. 26(10). p.2816-2849
3. Melander M.V.,Zabuzky N.J.&Styczek A. S.(1986) A moment model for vortex interactions of two-dimensional Euler equations. Part I. Computational validation of a Hamiltonian elliptical representation. *J.Fluid Mech*. 167. p.95-115.
4. Powell A. (1964) Theory of vortex sound. *J.Acoust.Soc.Amer*.36(1).p.177-195.
5. Meleshko V.V. and Konstantinov M.Yu. (1993) *Dinamika vihrevyh struktur.* Kyiv: Naukova dumka.
6. Konovalyuk T.P.(2018) *Zvukovi polya*, *generovani kogerentnymy vyhrovymy strukturamy, yaki vzaemodijut*`(Candidate`s dissertation).

Надійшла до редколегії 27.09.21

УДК 539.3

https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.8

Куценко О. Г.[1], к. ф.-м. н., доц.,
Куценко А. Г.[2], к. ф.-м. н., доц.,
Харитонова Л. В.[3], к. ф.-м. н., доц.

Дослідження розтягу перфорованих пластин методом скінченних елементів

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03127, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е, e-mail: alex_kutz@univ.kiev.ua

[2] Національний університет біоресурсів і природокористування України, 03041, м. Київ, вул. Героїв Оборони 12

[3] Національний транспортний університет, 01010, м. Київ, вул. М. Омеляновича-Павленка, 1

O. G. Kutsenko[1], Ph.D (Phys.-Math.),
A. G. Kutsenko[2], Ph.D (Phys.-Math.),
L. V. Kharytonova[3], Ph.D (Phys.-Math.)

Study of perforated plates stretching by finite element method

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03127, Kyiv, Glushkova av., 4e, e-mail: alex_kutz@univ.kiev.ua

[2] National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, 03041, Kyiv, Heroyiv Oborony str., 12

[2]National Transport University, 01010, Kyiv, M. Omelianovycha-Pavlenka str., 1

Розглянута задача про осьовий розтяг пластини, послабленої двояко-періодичною системою круглих отворів, розташованих в шаховому порядку. Вихідну задачу зведено до другої задачі теорії пружності для одного періоду, яка розв'язувалася методом скінченних елементів. У результаті її розв'язку знайдені приведені пружні характеристики еквівалентної однорідної ортотропної платівки. Проведено аналіз їх поведінки в залежності від безрозмірних геометричних параметрів. Область зміни геометричних параметрів виявилася розбитою на дві підобласті. Поведінка приведених пружних характеристик в цих областях суттєво відрізняється. Виконаний порівняльний аналіз отриманих результатів з відомими з літератури результатами, підтвердив їх адекватність.

Ключові слова: двояко-періодична, перфорована пластинка, розтяг.

The problem of axial stretching of a plate with a double-periodic system of round holes arranged in a checkerboard pattern is considered. The specified problem is reduced to elasticity second problem for one period of plate, which was solved by the finite element method. As a result, the reduced elastic characteristics of the equivalent homogeneous orthotropic plate are found. The analysis of their behavior depending on dimensionless geometrical parameters is carried out. The area of variation of the geometric parameters was divided into two subareas. The behavior of the equivalent elastic characteristics in these areas is significantly different. It turned out that the double-periodic perforated plate shows significantly anisotropic behavior. The limit values of the Poisson's ratios can reach unity and, on the other hand, may be less than the original value. Dependences of the stress concentration coefficient on dimensionless geometrical parameters are obtained too. Performed comparative analysis of the obtained results with the results known from the literature, confirmed their adequacy.

Key Words: double-periodic, perforated plate, tension.

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я. О.

Вступ

Двояко-періодичні перфоровані пластинки та оболонки є типовим елементом багатьох конструкцій. В деяких випадках їх використання обумовлене намаганням зменшити вагу конструкції в цілому. В інших випадках отвори мають функціональне призначення: через них проходять потоки рідин або газів. У будь-якому

© О.Г. Куценко, А.Г. Куценко, Л.В. Харитонова, 2021

випадку необхідно вміти ефективно розраховувати поля напружень в таких елементах.

Сучасні розрахунки полів напружень в елементах конструкцій проводяться за допомогою верифікованих скінченно-елементних пакетів. Однак, при безпосередньому розрахунку двояко-періодично перфорованих пластинок методом скінченних елементів виникають задачі великої розмірності, розв'язання яких вимагає значних обчислювальних та часових ресурсів.

Можливе вирішення вказаної проблеми полягає у заміні двояко-періодичної платівки однорідною, з приведеними (еквівалентними) пружними сталими. Даний підхід був успішно розвинений в другій половині минулого століття вітчизняною науковою школою під керівництвом професора Фільштинського Л.А. [1,2]. Проте, апарат аналітичних функцій, закладений в його основу, далеко не завжди виявляється зрозумілим спеціалістам, які проводять практичні розрахунки. Як наслідок, вони вдаються до примітивних спрощень, які не завжди дозволяють отримати адекватний результат.

В той же час, у розпорядженні інженера є скінченно-елементний пакет — потужний інструмент, здатний допомогти правильно визначити еквівалентні характеристики. На сьогодні є непогані скінченно-елементні пакети навіть у вільному доступі, наприклад, пакет CalculiX [3,4]. У даній роботі продемонстровано метод визначення еквівалентних характеристик двояко-періодично перфорованих пластинок за допомогою методу скінченних елементів. Використання саме методу скінченних елементів не є принциповим. Замість нього можна застосовувати будь-який інший метод, здатний знаходити розв'язки здач теорії пружності для неканонічних областей, наприклад, метод граничних елементів. Метод скінченних елементів був вибраний як більш популярний.

Постановка задачі для періоду

Будемо розглядати перфоровану платівку, отвори в якій розташовані в шаховому порядку (див. рис. 1). Відстань між сусідніми отворами, центри яких лежать на одній горизонтальній прямій, рівна $2a$, а на одній вертикальній прямій — $2b$, радіус отворів рівний r.

Будь-який розтяг такої пластини можна уявляти як суперпозицію одновісних розтягів вздовж горизонтального та вертикального напрямків. Для останніх характерно те, що нормальні зміщення точок границі підобласті, виділеної на рисунку 1 темним кольором, в межах однієї прямолінійної частини границі в силу симетрії є сталими. Домовимося для зручності називати дану частину пластини її періодом (див. рис. 2), хоча вона не є періодом в загально визначеному розумінні цього слова.

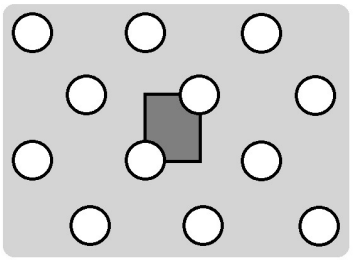


Рис. 1. Двояко-періодично перфорована пластина

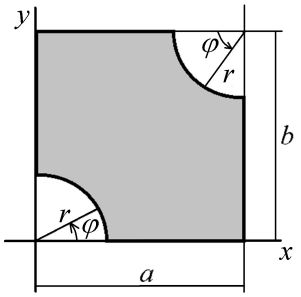


Рис. 2. Період перфорованої пластини

Будемо виходити з того, що двояко-періодична пластина при розтягу веде себе як ортотропна [1]. Для ортотропного середовища в плоскому випадку між компонентами тензора напружень σ_x та σ_y і тензора деформацій ε_x та ε_y маємо наступні [5] співвідношення:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\overline{E}_x}\left(\sigma_x - \overline{\nu}_{xy}\sigma_y\right), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{\overline{E}_y}\left(\sigma_y - \overline{\nu}_{yx}\sigma_x\right), \qquad (1)$$

де $\overline{E}_x$ та $\overline{E}_y$ — еквівалентні модулі пружності (модулі Юнга), $\overline{\nu}_{xy}$, $\overline{\nu}_{yx}$ — еквівалентні коефіцієнти Пуассона. Причому для них має виконуватися співвідношення $\overline{E}_x\overline{\nu}_{yx} = \overline{E}_y\overline{\nu}_{xy}$.

Для визначення $\overline{E}_x$, $\overline{E}_y$, $\overline{\nu}_{xy}$ та $\overline{\nu}_{yx}$ необхідно провести два розрахунки для періоду. В обох випадках на всьому периметрі періоду задаються нульові дотичні напруження, а на сторонах $x = 0$ та $y = 0$ — нульові нормальні зміщення (положення осей показано на рис. 2). В першій задачі нульові нормальні зміщення

Таблиця 1

Порівняння колових напружень з даними роботи [2]

φ, ^{0}		$r=0{,}2a$		$r=0{,}4a$		$r=0{,}6a$		$r=0{,}8a$		$r=0{,}9a$	
(а)	0	–1,024	–1,024	–0,962	–0,961	–0,524	–0,524	0,106	0,106	0,003	–0,009
	15	–0,752	–1,0753	–0,756	–0,757	–0,678	–0,676	–0,440	–0,439	0,106	0,098
	30	–0,007	–0,007	–0,113	–0,113	–0,658	–0,659	–2,956	–2,959	–6,864	–6,472
	45	1,024	1,024	0,959	0,959	0,397	0,398	–2,985	–2,982	–14,11	–14,14
	60	2,068	2,069	2,242	2,242	2,582	2,583	4,225	4,227	8,031	8,035
	75	2,841	2,842	3,307	3,307	4,736	4,739	10,680	10,692	26,10	26,18
	90	3,127	3,126	3,723	3,723	5,590	5,589	11,747	13,876	21,32	21,33
(б)	0	3,100	3,099	3,310	3,310	3,618	3,618	5,601	5,600	10,710	10,716
	15	2,828	2,828	3,096	3,096	3,648	3,650	5,277	5,276	7,953	7,957
	30	2,082	2,082	2,443	2,444	3,505	3,506	6,843	6,844	11,93	11,93
	45	1,051	1,051	1,381	1,381	2,573	2,570	7,822	7,819	22,17	22,19
	60	0,007	0,007	0,107	0,106	0,511	0,511	1,480	1,479	2,675	2,672
	75	–0,766	–0,766	–0,967	–0,968	–1,766	–1,764	–5,843	–5,855	–18,04	–18,07
	90	–1,051	–1,051	–1,392	–1,392	–2,743	–2,742	–7,862	–9,991	–16,26	–16,27

задаються також на стороні $y=b$, а на стороні $x=a$ задаються нормальні зміщення $a\varepsilon_0^I$, де ε_0^I — деяка стала. В другій задачі нульові нормальні зміщення задаються на стороні $x=a$, а на стороні $y=b$ задаються нормальні зміщення $b\varepsilon_0^{II}$. В наслідок розв'язання цих двох задач одержуємо наступні співвідношення:

$$\overline{E}_x=\frac{\overline{\sigma}_x^{II}}{\varepsilon_x^{II}}\left(1-\overline{\nu}_{xy}\overline{\nu}_{yx}\right),\quad \overline{E}_y=\frac{\overline{\sigma}_y^{II}}{\varepsilon_y^{II}}\left(1-\overline{\nu}_{xy}\overline{\nu}_{yx}\right),$$
$$\overline{\nu}_{xy}=\overline{\sigma}_x^{II}\big/\overline{\sigma}_y^{II},\quad \overline{\nu}_{yx}=\overline{\sigma}_y^{I}\big/\overline{\sigma}_x^{I}, \qquad (2)$$

де через $\overline{\sigma}_{x,y}^{I,II}$ позначені усереднені по відповідних сторонах періоду напруження, верхній індекс "*I*" позначає розв'язок першої задачі, а індекс "*II*" — розв'язок другої задачі.

Знаючи еквівалентні модулі (2), можна розглянути одновісний напружений стан для періоду пластини, який буде відтворювати відповідний одновісний напружений стан нескінченної двояко-періодично перфорованої платівки. Для моделювання одновісного стану розтягу вздовж вісі x на сторонах періоду $x=a$ та $y=b$ потрібно задати нормальні зміщення $a\varepsilon_0$ та $-b\overline{\nu}_{xy}\varepsilon_0$ відповідно. Для моделювання ж одновісного стану розтягу вздовж осі y на сторонах періоду $x=a$ та $y=b$ потрібно задати нормальні зміщення $-a\overline{\nu}_{yx}\varepsilon_0$ та $b\varepsilon_0$ відповідно.

Результати та їх обговорення

Отримані за допомогою запропонованого алгоритму результати для випадку правильно трикутної системи отворів ($b=a\sqrt{3}$) порівнювалися з даними, наведеними в [2]. Результаты порівняння колових напружень вздовж границі отвору, віднесених до величини розтягуючих напружень на нескінченності для осьового розтягу вздовж осі x (а) та вздовж осі y (б) в залежності від відносного радіусу отворів та полярного кута φ точки спостереження (див. рис. 2) наведені в табл. 1. В лівій колонці кожної пари наведені результати, отримані за допомогою методу скінченних елементів за запропонованим алгоритмом, в правій — дані, наведені в [2]. В переважній більшості випадків результати співпадають з точністю до трьох перших розрядів, а часто і до всіх чотирьох. Окремі невідповідності, виділені товстою лінією рамки, швидше за все, пояснюються сильною редукцією нескінченної системи при отриманні результатів [2] або банальною друкарською неточністю.

На рисунках 2–6 наведені розподіли приведених пружних характеристик. Через обмежений об'єм, їх аналіз тут не наводиться, як і аналіз розподілів коефіцієнтів концентрації напружень, які також були пораховані.

Висновки

Запропонований підхід дозволив успішно вирішити проблему пошуку еквівалентних пружних характеристик для двояко-періодично перфорованої пластини при розтягу, про що свідчать результати порівняльного аналізу.

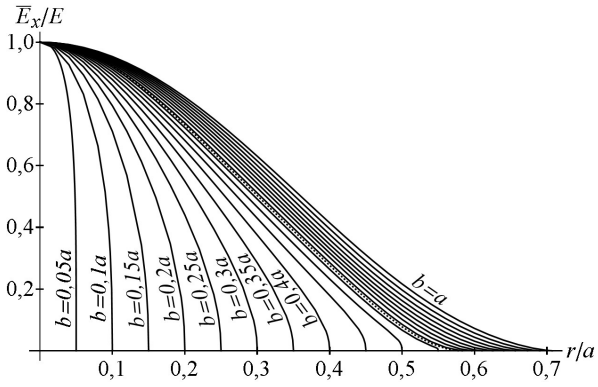


Рис. 3 Розподіл модуля $\overline{E}_x$

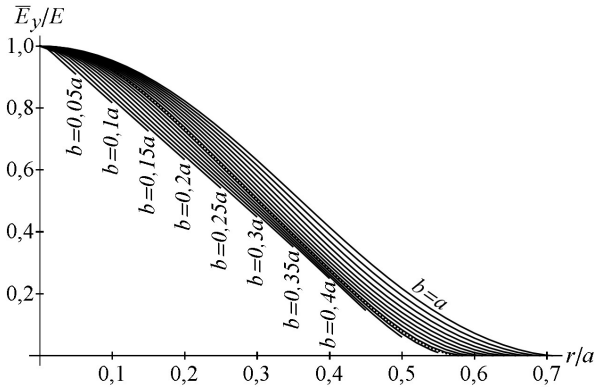


Рис. 4 Розподіл модуля $\overline{E}_y$

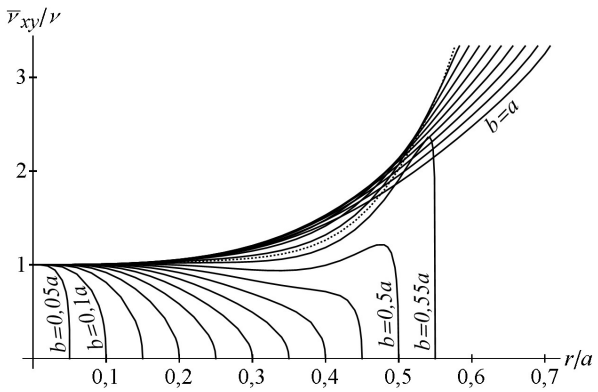


Рис. 5 Розподіл коефіцієнта $\overline{\nu}_{xy}$

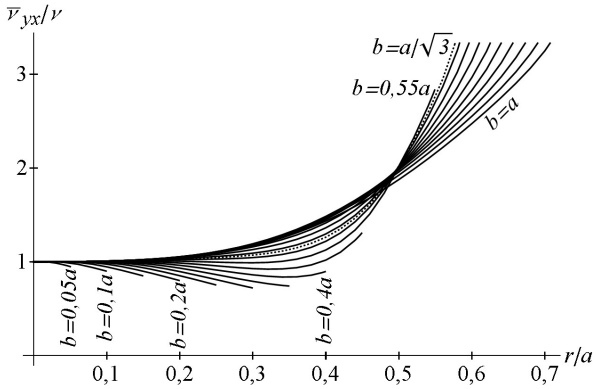


Рис. 6 Розподіл коефіцієнта $\overline{\nu}_{yx}$

Список використаних джерел

1. *Фильштинский Л. А.* Напряжения и смещения в упругой плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круглых отверстий / Л. А. Фильштинский // ПММ – 1964. – №3. – С. 430–441.
2. *Григолюк Э. И.* Перфорированные пластины и оболочки / Э. И. Григолюк, Л. А. Фильштинский. – Москва: Наука, 1970. – 556 с.
3. *Dhondt G.* The Finite Element Method for Three-Dimensional Thermomechanical Applications / G. Dhondt. – Hoboken: Wiley, 2004. – 362 p.
4. A Free Software Three-Dimensional Structural Finite Element Program [Електронний ресурс]. – 2020. – Режим доступу до ресурсу: https://www.calculix.de.
5. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницкий. – Москва: Гостехиздат, – 1957. – 463 с.

References

1. FILSHTINSKY, L.A. (1964) Napryazheniya i smescheniya v uprugoy ploskosti, oslablennoy dvoyakoperiodicheskoy sistemoy odinakovyih kruglyih otverstiy. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 28(3). p. 430–441.
2. GRIGOLUK, E.I. and FILSHTINSKY, L.A. (1970) *Perforirovannyie plastinyi i obolochki*. Moskva: Nauka.
3. DHONDT, G. (2004) *The Finite Element Method for Three-Dimensional Thermomechanical Applications.* Hoboken: Wiley.
4. (2020) A Free Software Three-Dimensional Structural Finite Element Program. Available from: https://www.calculix.de.
5. LEKHNITSKII, S.H. (1957) *Anizotropnye plastinki*, Moskva: Hostekhizdat.

Надійшла до редколегії 29.08.21

УДК 539.3

https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.9

Куценко О. Г., к. ф.-м. н., доц.,
Харитонов О. М., к. ф.-м. н., доц.

Алгоритм розв'язку нестаціонарної задачі термопружності для двошарового циліндра при змінному коефіцієнті теплообміну

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03127, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е,
e-mail: alex_kutz@univ.kiev.ua

O. G. Kutsenko, Ph.D (Phys.-Math.),
O. M. Kharytonov, Ph.D (Phys.-Math.)

Algorithm of solving of nonstationary thermoelastic problem for two-layered cylinder at time-variety heat transfer coefficient

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03127, Kyiv, Glushkova av., 4e,
e-mail: alex_kutz@univ.kiev.ua

Розглянуто нестаціонарну осесиметричну задачу термопружності для двошарового циліндра, на внутрішній поверхні якого відбувається конвективний теплообмін з зовнішнім середовищем. Побудовано розв'язок даної задачі для випадку неоднорідного початкового температурного поля. Розв'язок представлений у вигляді розвинення по системі власних функцій граничної задачі для двокомпонентного стрижня, які виражаються через елементарні функції. На основі даного розв'язку запропоновано інкрементний алгоритм розв'язання задач термопружності для двошарового циліндру у випадку, коли коефіцієнт теплообміну змінюється в часі. За відомим полем температур осесиметричне поле напружень відтворюється на основі аналітичних співвідношень. Запропонований алгоритм був апробований на прикладі сценарію термошока корпуса атомного реактора. Результати порівняння з чисельним розв'язком методом скінченних елементів засвідчили достатню практичну точність запропонованого підходу.

Ключові слова: нестаціонарна термопружність, двошаровий циліндр, термошок.

The nonstationary axisymmetric thermoelasticity problem for a two-layer cylinder at the inner surface of which convective heat transfer with an environment takes place is considered. The solution of this problem is derived for the case of inhomogeneous initial temperature field. The solution is presented in the form of development by the system of eigenfunctions of the boundary value problem for a two-component beam and expressed in terms of the elementary functions. Based on this solution, an incremental algorithm of solving thermoelasticity problems for a two-layer cylinder is proposed for the case that the heat transfer coefficient between the inner surface of the cylinder and environment is time-varied. The idea of the algorithm is to divide the entire transient time interval into a sequence of subintervals, the heat transfer coefficient is considered constant on each. Once the temperature field is determined, the axisymmetric stress field can be founded on the basis of analytical expressions. The proposed algorithm was tested on the example of the thermal shock scenario for a nuclear reactor vessel. The comparison of the obtained results with the numerical solution by the finite element method verified sufficient working accuracy of the proposed approach.

Key Words: nonstationary thermoelasticity, two-layer cylinder, thermal shock.

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я. О.

Вступ

Незважаючи на значний розвиток чисельних методів та обчислювальної техніки, знаходження аналітичних розв'язків задач термопружності залишається актуальним напрямком. По-перше, дані розв'язки можна використовувати як еталонні для апробації чисельних алгоритмів. По-друге, аналітичні розв'язки дозволяють швидко

© О.Г. Куценко, О.М. Харитонов, 2021

оцінювати напружений стан конструкції, що значно скорочує час чисельних розрахунків за рахунок швидкого попереднього відбору небезпечних сценаріїв. Крім того, аналітичні розв'язки дозволяють легко реалізовувати алгоритми он-лайн оцінки ресурсу обладнання. Тому побудова аналітичного розв'язку нестаціонарної задачі термопружності для двошарового циліндру представляється актуальною задачею. Конструктивні елементи, які можна моделювати двошаровим циліндром, часто зустрічаються в різних галузях промисловості. У якості прикладу таких елементів можна навести циліндричні резервуари та трубопроводи, покриті антикорозійним наплавленням.

Розв'язок нестаціонарної задачі у випадку довільного початкового температурного поля

Розглянемо осесиметричну задачу термопружності для двошарового циліндру, внутрішня поверхня якого перебуває в конвективному теплообміні з зовнішнім середовищем, температура якого лінійно змінюється у часі. Якщо товщина стінки циліндра значно менша за радіус його серединної поверхні, всередині стінки невідомі розподіли температури мають задовольняти рівняння:

$$\frac{\partial T_k}{\partial t} = a_k^2 \frac{\partial^2 T_k}{\partial x^2}, \quad k = 1,2, \tag{1}$$

де через $T_1(x,t)$ позначено розподіл у внутрішньому шарі циліндра, а через $T_2(x,t)$ — у зовнішньому шарі циліндра, t — час, $a_k^2 = \lambda_k / (\rho_k c_k)$, λ_k — коефіцієнт внутрішньої теплопровідності, ρ_k — густина, c_k — теплоємкості матеріалів шарів.

Між шарами мають виконуватися умови неперервності температури та теплового потоку:

$$T_1\big|_{x=h_1} = T_2\big|_{x=h_1}, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}\bigg|_{x=h_1} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}\bigg|_{x=h_1}. \tag{2}$$

Зовнішня поверхня циліндра вважається теплоізольованою:

$$\frac{\partial T_2}{\partial x}\bigg|_{x=h} = 0. \tag{3}$$

На внутрішній поверхні циліндра задається умова конвективного теплообміну з зовнішнім середовищем з постійним коефіцієнтом теплопередачі H та постійною швидкістю зміни температури зовнішнього середовища V:

$$\left(T_1 - \frac{\lambda_1}{H}\frac{\partial T_1}{\partial x}\right)\bigg|_{x=0} = Vt. \tag{4}$$

Початкові розподіли температури $T_{10}(x)$ та $T_{20}(x)$ будемо вважати довільними:

$$T_k\big|_{t=0} = T_{k0}(x), \quad k = 1,2. \tag{5}$$

В [1] наведено розв'язок задачі (1)–(5) за умови однорідного початкового розподілу температури, тобто однорідних умов (5). Даний розв'язок має вигляд

$$T_k^I(x,t) = \frac{V}{\omega}\left[\psi_k(x,t) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta_k(\mu_n, x)}{\mu_n^3 \Delta_0(\mu_n)} e^{-\mu_n^2 \omega t}\right], \tag{6}$$

де

$$\Delta_0(\mu_n) = \delta_1 \sin\mu_n \cos\beta\mu_n + \delta_2 \cos\mu_n \sin\beta\mu_n + \\ + \delta_3 \cos\mu_n \cos\beta\mu_n + \delta_4 \sin\mu_n \sin\beta\mu_n,$$

$$\Delta_1(\mu_n, x) = \cos\beta\mu_n \cos(1 - x/h_1)\mu_n - \\ - \alpha \sin\beta\mu_n \sin(1 - x/h_1)\mu_n,$$

$$\Delta_2(\mu_n, x) = \cos(1 - (x - h_1)/h_2)\beta\mu_n,$$

$$\psi_1(x,t) = \omega t + x^2 h_1^{-2}/2 - (1 + \alpha\beta)(\gamma + x/h_1),$$

$$\psi_2(x,t) = \omega t - \beta^2 (x - h_1)\big(1 - (x - h_1)/(2h_2)\big)/h_2 - \\ - \alpha\beta(1 + \gamma) - \gamma - 1/2,$$

$$\delta_1 = 1 + \alpha\beta + \gamma, \qquad \delta_2 = \alpha + \beta + \alpha\gamma,$$

$$\delta_3 = (1 + \alpha\beta)\gamma\mu_n, \qquad \delta_4 = -(\alpha + \beta)\gamma\mu_n,$$

$$\alpha = \frac{a_1\lambda_2}{a_2\lambda_1}, \quad \beta = \frac{h_2 a_1}{h_1 a_2}, \quad \gamma = \frac{\lambda_1}{h_1 H}, \quad \omega = \left(\frac{a_1}{h_1}\right)^2,$$

μ_n, $n = 1,2,3,\ldots$ — послідовні корені трансцендентного рівняння

$$\gamma\mu_n(\sin\mu_n \cos\beta\mu_n + \alpha\cos\mu_n \sin\beta\mu_n) - \\ - \cos\mu_n \cos\beta\mu_n + \alpha \sin\mu_n \sin\beta\mu_n = 0.$$

Для знаходження розв'язку задачі (1)–(5) розв'язок (6) необхідно доповнити $T_k^{II}(x,t)$ — розв'язком задачі з однорідною граничною умовою (4). Відзначимо, що розв'язок (6) є розвиненням в ряд за системою власних форм

$$X_n(x) = \begin{cases} \Delta_1(\mu_n, x), & 0 < x < h_1, \\ \Delta_2(\mu_n, x), & h_1 < x < h = h_1 + h_2. \end{cases}$$

Система функцій $X_n(x)$, як розв'язок задачі на власні функції, є повною та ортогональною на відрізку $[0;h]$, тобто

$$\int_0^h X_n(x)X_m(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \|X_n\|, & m = n. \end{cases}.$$

Це дозволяє представити $T_k^{II}(x,t)$ також у вигляді ряду за формами:

$$T^{II}(x,t) = \begin{Bmatrix} T_1^{II}(x,t), & 0 < x < h_1, \\ T_2^{II}(x,t), & h_1 < x < h \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x).$$

Множники $T_n(t)$ знаходимо як розв'язки задач Коші для лінійних рівнянь першого порядку, розклавши початкове поле також у ряд:

$$T_0(x) = \begin{Bmatrix} T_{10}(x), & 0 < x < h_1, \\ T_{20}(x), & h_1 < x < h \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x),$$

де

$$a_n = \|X_n\|^{-1} \int_0^h T_0(x)X_n(x)dx.$$

Остаточно знаходимо

$$T_k^{II}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Delta_k(\mu_n, x)e^{-\mu_n^2 \omega t}, \qquad k = 1,2. \quad (7)$$

Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що суперпозиція розв'язків (6) та (7) дає розв'язок вихідної задачі (1)–(5). Після знаходження температурного поля поле напружень знаходиться за відомими формулами (див., наприклад [1]).

Алгоритм

На основі наведеного розв'язку задачі (1)–(5) можна побудувати алгоритм розв'язання задачі і у випадку довільної зміни коефіцієнта теплообміну в часі. Для цього весь часовий інтервал нестаціонарного процесу розбивається на підінтервали, на яких коефіцієнт теплообміну мало змінюється і може вважатися постійним. Дане значення вибирається як усереднене по підінтервалу. Також на кожному підінтервалі варіація температури має добре наближатися лінійної функцією. Сформульовані умови завжди можна задовольнити, вибираючи часові підінтервали досить малими. Після розбиття на підінтервали загальна задача теплопровідності розпадається на послідовність однотипних задач типу (1)–(5), розв'язок яких наведено вище. При цьому початковий температурний розподіл на кожному підінтервалі, крім першого, задається як фінальний розподіл температури на попередньому підінтервалі.

Апробація

У якості прикладу застосування запропонованого алгоритму було розглянуто модельний сценарій термошоку корпусу реактора (КР) ВВЕР-1000, наведений в роботі [2]. Залежність його теплогідравлічних параметрів (температура теплоносія, коефіцієнт теплообміну та тиск) в часі наведена в табл. 1. Даний сценарій передбачає швидке падіння температури приблизно на 200^0C на першому етапі навантаження. У таблиці задані значення теплогідравлічних параметрів в ключові моменти часу. Вважається, що на часових інтервалах між ними всі теплогідравлічні параметри в часі змінюються лінійно.

Таблиця 1

Зміна теплогідравлічних параметрів модельного сценарію

t, с	T, ^{0}C	H, $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot {}^0\text{C}}$	p, МПа	$\overline{H}$, $\frac{W}{m^2 \cdot {}^0C}$
0	280	700	10.0	700
1000	120	700	10.0	700
1400	90	700	10.0	1100
2000	70	1500	10.0	2000
2600	60	2500	10.0	2500
3200	55	4000	10.0	3250
5000	50	10000	10.0	7000
6000	48	10000	2.4	10000
10000	40	10000	2.4	10000
20000	20	10000	2.4	10000
30000	20	10000	2.4	

До факторів, що впливає на точність запропонованого підходу можна віднести:

– неврахування в аналітичному розв'язку кривизни циліндра;

– неврахування в аналітичному розв'язку залежності властивостей матеріалів від температури;

– стрибкоподібна зміна значення коефіцієнта теплообміну.

Для з'ясування впливу кожного з цих факторів було проведено п'ять розрахунків: два за аналітичними співвідношеннями (6), (7) та три чисельних скінченно-елементним пакетом

CalculiX [3]. Аналітичні розрахунки були приведені для двох ступенів дискретизації коефіцієнта теплообміну: з його усередненням на інтервалах між ключовими моментами часу (розрахунок А1) і з усередненням на кожному кроці (розрахунок А2). Усереднені значення коефіцієнта теплообміну першого розрахунку наведені в правій колонці табл. 1.

Крім них були проведені ще три чисельних розрахунки. Розрахунок С1 враховував тільки неперервну зміну коефіцієнта теплообміну але не враховував кривизну циліндра і температурну залежність властивостей матеріалів. Розрахунок С2 крім неперервної зміни коефіцієнта теплообміну враховував також кривизну циліндра, а розрахунок С3 враховував всі три фактори. Розрахунок С3 розглядався як еталонний.

Результати порівняння розрахунків наведено в табл. 2, де через T позначена температура, через σ_φ — колові напруження, а через σ_z — осьові напруження в стінці циліндра. За даними табл. 2 можна зробити кілька важливих висновків. Перш за все, відзначимо, що всі розрахунки забезпечують прийнятну практичну точність. Стрибкоподібна зміна коефіцієнта тепловіддачі слабо впливає на точність обчислення температури, але суттєва при обчисленні напружень. Це випливає з порівняння сценаріїв А1 і А2. Фактор неврахування кривизни циліндра більш рівномірно впливає на точність результатів (різниця в похибках між сценаріями С1 і С2 для всіх величин становить

Таблиця 2

Відносна похибка розрахунків

Розрахунок	Відносна похибка, %		
	T	σ_φ	σ_z
А1	3,3	5,1	5,2
А2	2,8	2,6	2,8
С1	2,8	2,9	3,2
С2	1,7	1,9	2,0

біля 1%). Похибка від усереднення теплофізичних властивостей становить до 2%. Оскільки запропонований аналітичний розв'язок є лінійним, то дана похибка визначає похибку аналітичних результатів в цілому.

Висновки

Побудовано розв'язок нестаціонарної задачі теплопровідності для двошарового циліндра з довільним початковим розподілом температури і лінійно змінною температурою зовнішнього середовища. Розв'язок має простий вигляд, виражається через елементарні функції і може бути легко реалізований за допомогою будь-якого обчислювального пакету. На його основі запропоновано алгоритм знаходження температурних полів у випадку змінного в часі коефіцієнта теплообміну. Запропонований алгоритм у випадку модельного сценарію дозволив отримати результати з похибкою в межах 3%.

Список використаних джерел

1. *Куценко А. Г.* Решение одной задачи термоупругости для двухслойного циліндра /А. Г. Куценко, Т. М. Погорилый, М. А. Шворак // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2010. – т.7, №2. – С.249-256.
2. *Kutsenko O.* Effect of neutron irradiation hardening of the base metal on the results of WWER-1000 reactor pressure vessel residual lifetime assessment / O. Kutsenko, I. Kadenko, X. Pitoiset, O. Kharytonov, N. Sakhno, I. Kravchenko // Int. J. Press. Vessel. Pip. – 2019. – Vol. 171. – P. 173–183.
3. A Free Software Three-Dimensional Structural Finite Element Program [Електронний ресурс]. – 2020. – Режим доступу до ресурсу: https://www.calculix.de.

References

1. KUTSENKO, A.G., POGORILYIY, T.M. and SHVORAK M.A. (2010) *Reshenie odnoy zadachi termouprugosti dlya dvuhsloynogo tsilindra.* Zbirnik prats Institutu matematiki NAN Ukrayini 7(2). p.249-256.
2. KUTSENKO, O et al. (2019) *Effect of neutron irradiation hardening of the base metal on the results of WWER-1000 reactor pressure vessel residual lifetime assessment.* Int. J. Press. Vessel. Pip. 171. p.173–183.
3. (2020) A Free Software Three-Dimensional Structural Finite Element Program. Available from: https://www.calculix.de.

Надійшла до редколегії 29.08.21

УДК 553.982 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.10

Лубков М. В. д.ф.-м.н., с.н.с

M. V. Lubkov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Sr. Sci. Researcher

Застосування скінчено-елементно-різницевого методу для моделювання анізотропних фільтраційних процесів

Application of the finite element-differences method for modeling of anisotropic filtration processes

Полтавська гравіметрична обсерваторія НАНУ, 36014, м. Полтава, вул. Мясоєдова 27/29,
e-mail: mikhail.lubkov@ukr.net

Poltava Gravimetrical Observatory of NASU, 36014, Poltava, Myasoedova st., 27/29,
e-mail: mikhail.lubkov@ukr.net

Розглянуто моделювання і геофізичну інтерпретацію у практиці нафто-газовидобування у анізотропних пластах. Для вирішення цих прикладних проблем застосовано комбінований скінчено-елементно-різницевий метод розв'язання анізотропної задачі п'єзопровідності з урахуванням неоднорідного розподілу фільтраційних параметрів нафто-газоносних пластів та умов інфільтрації нафти і газу на границях досліджуваної області.

Ключові слова: анізотропна задача п'єзопровідності, нафто-газовидобування, комбінований скінчено-елементно-різницевий метод.

We consider modeling and geophysical interpretation of the obtained results in the oil and gas production problems in anisotropic reservoirs. For solving these practical problems, we use combined finite element-differences method of resolving anisotropic piezoconductivity problem with calculation of heterogeneous filtration parameters distribution of oil and gas productive reservoirs and oil-gas penetration conditions in the borders of investigating areas. We have defined that the anisotropy of oil and gas permeability in the far zone of the well has a greater effect on the filtration processes around the well and, accordingly, on the producing of the raw materials than the anisotropy of permeability in the near zone of the well. We have shown that the intensity of filtration processes in anisotropic reservoirs near the acting well depends significantly on the shear permeability and to a lesser extent on the axial permeability of the corresponding phase. Therefore, for the effective using of anisotropic reservoirs, it is necessary to place production wells in local areas with relatively low anisotropy of permeability of the reservoir, especially to avoid places with shear anisotropy.

Key Words: anisotropic piezoconductivity problem, oil and gas producing, combined finite element-differences method.

Статтю представив член-кор. НАН України Жук Я.О.

1. Вступ

На сучасному етапі у зв'язку з потужним розвитком обчислювальних методів механіки і математики, а також завдяки досягнутому прогресу в розумінні основних законів фільтрації у пористих анізотропних нафто-газоносних пластах, виникають системні можливості дослідження раніше недоступних фільтраційних процесів. Це перш за все стосується процесів, які протікають у специфічних неоднорідних анізотропних пластах нафтоносних і газоконденсатних родовищ. Недосяжність для прямих геологічних і фізичних вимірювань за межами свердловин, роблять математичне моделювання одним із основних інструментів дослідження таких об'єктів.

Цю статтю присвячено моделюванню і практичному застосуванню результатів у нафто- і газовидобуванні. Для вирішення цих важливих проблем застосовано комбінований скінчено-елементно-різницевий метод розв'язання нестаціонарної анізотропної задачі п'єзопровідності для нафтової фази та задачі п'єзопровідності (Лейбензона) для газової фази з урахуванням інфільтрації відповідної фази на межах розглянутої області [1, 2, 3]. У випадку

© М.В.Лубков, 2021

нафтоносного деформованого пласта, враховуючи, що його товщина значно менше горизонтальних розмірів, достатньо скористатись двовимірною постановкою анізотропної задачі п'єзопровідності у декартовій системі координат:

$$\frac{\partial P_н}{\partial t} = \frac{1}{c_н}(k^н_{xx}\frac{\partial^2 P_н}{\partial x^2} + k^н_{yy}\frac{\partial^2 P_н}{\partial y^2} + 2k^н_{xy}\frac{\partial P_н}{\partial x}\frac{\partial P_н}{\partial y}) + \gamma_н; \quad (1)$$

$$P_н(t=0) = P^0_н; \quad (2)$$

$$k^м_н grad P_н = \alpha_н(P_н - P^м_н). \quad (3)$$

Тут (1) – рівняння п'єзопровідності; (2) – початкова умова; (3) – умова інфільтрації нафти на межах розглянутого пласта; $P_н(x,y,t)$ – тиск пласта, як функція координат і часу; $c_н = \eta_н(m_н\beta^н_1 + \beta^н_2)$ –коефіцієнт п'єзоопору нафти; $\eta_н$ – коефіцієнт в'язкості нафти; $m_н$ – коефіцієнт пористості пласта; $\beta^н_1$ – стискання нафти; $\beta^н_2$ – стискання скелету порід пласта; $\gamma_н$ – параметр витоку нафти в пласті; $P^0_н$ – початковий тиск нафти у пласті; $k^н_{xx}, k^н_{yy}, k^н_{xy}$ - анізотропні коефіцієнти проникності нафтової фази; $k^м_н$ – коефіцієнт проникності нафтової фази на межі області; $\alpha_н$ – коефіцієнт інфільтрації нафтової фази на границях розглянутої області; $P^м_н$ – тиск на межах розглянутої області. Відповідно у випадку газоносного пласта двовимірна анізотропна задача п'єзопровідності Лейбензона набуває вигляду:

$$\frac{\partial P^2_г}{\partial t} = \frac{1}{c_г}(k^г_{xx}\frac{\partial^2 P^2_г}{\partial x^2} + k^г_{yy}\frac{\partial^2 P^2_г}{\partial y^2} + 2k^г_{xy}\frac{\partial P^2_г}{\partial x}\frac{\partial P^2_г}{\partial y}) + \gamma_г; \quad (4)$$

$$P_г(t=0) = P^0_г; \quad (5)$$

$$k_г grad P^2_г = \alpha_г(P^2_г - P^{м2}_г). \quad (6)$$

Тут (4) – рівняння п'єзопровідності газової фази (Лейбензона); (5) – початкова умова; (6) – умова інфільтрації газової фази на межах розглянутої області; $c_г = \eta_г m_г / P^г_0$ -коефіцієнт п'єзоопору газової фази (Лейбензона). Представлені тут параметри газоносного пласта відповідають аналогічним за індексними позначеннями параметрам нафтоносного пласта.

2. Метод розв'язання задач

У подальшому для спрощення запису математичних виразів індекси, що означають належність до нафтової або газової фази, будемо опускати. Для розв'язання нестаціонарної задачі п'єзопровідності (1–3) застосовується варіаційний скінчено-елементний метод, що приводить до розв'язання варіаційного рівняння п'єзопровідності [3]:

$$\delta \mathrm{I}(P) = 0. \quad (7)$$

Тут $\mathrm{I}(P)$ - функціонал анізотропної задачі п'єзопровідності (1) – (3), який представляється у вигляді [3]:

$$\mathrm{I}(P) = \frac{1}{2}\iint_S \{k_{xx}(\frac{\partial P}{\partial x})^2 + k_{yy}(\frac{\partial P}{\partial y})^2 + 2k_{xy}\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y} + 2k_{xy}\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y} + 2\int_{P_0}^{P} c\frac{\partial P}{\partial t}dP - 2\gamma P\}dxdy - \frac{1}{2}\int_L \alpha(P - 2P_b)Pdl; \quad (8)$$

S – площа перерізу області, яка досліджується, L – контур, що охоплює площу S, dl – елемент контуру. При розв'язанні варіаційного рівняння (7) застосовується восьмивузловий ізопараметричний чотирикутний скінчений елемент [3]. Як глобальна система координат, де відбувається об'єднання всіх скінчених елементів, на які розбито площу S, використовується декартова система (x, y). В якості локальної системи координат, де в межах скінченого елементу визначаються функції апроксимації φ_i на основі квадратичних поліномів і проводиться чисельне інтегрування, використовується нормалізована система координат (ξ, η) [3]. В цій системі координати, тиск, початковий тиск пласта, тиск на границях області, коефіцієнт інфільтрації нафти на межах області, а також похідні від тиску по координатам апроксимуються наступним чином:

$$x = \sum_{i=1}^{8} x_i\varphi_i; y = \sum_{i=1}^{8} y_i\varphi_i; P = \sum_{i=1}^{8} P_i\varphi_i;$$

$$P_0 = \sum_{i=1}^{8} P_{0i}\varphi_i; P_{гр} = \sum_{i=1}^{8} P^i_{гр}\varphi_i; \alpha = \sum_{i=1}^{8} \alpha_i\varphi_i;$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\sum_{i=1}^{8}P_i\Psi_i;\frac{\partial P}{\partial y}=\sum_{i=1}^{8}P_i\Phi_i;$$
$$\Psi_i=\frac{1}{|\mathrm{J}|}(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}-\frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}); \quad (9)$$
$$\Phi_i=\frac{1}{|\mathrm{J}|}(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}-\frac{\partial\varphi_i}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi});$$

$\mathrm{J}=\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}-\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}$ – якобіан переходу між системами координат(x,y) і (ξ,η).

Виходячи з варіаційного рівняння (7) і вважаючи, що вузлові значення від похідних тиску за часом $\frac{dP_i}{dt}$ є відомими величинами і не варіюються, складемо систему диференціальних рівнянь для *n*-го вузла *p*-го скінченого елемента у вигляді:

$$\mathrm{H}_{ij}^{p}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}c^{p}\varphi_i\varphi_j|\mathrm{J}|d\xi d\eta;$$
$$\frac{\partial \mathrm{I}_p}{\partial P_n}=\sum_{i=1}^{8}\{\mathrm{H}_{ni}^{p}\frac{dP_i}{dt}+(\mathrm{A}_{ni}^{p}+\mathrm{Q}_{ni}^{p})P_i- \quad (10)$$
$$-\mathrm{Q}_{ni}^{p}P_0^{i}\}-\gamma_n^{p}=0;$$

$$\mathrm{H}_{ij}^{p}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}c^{p}\varphi_i\varphi_j|\mathrm{J}|d\xi d\eta;$$
$$\mathrm{A}_{ij}^{p}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(k_{xx}^{p}\Psi_i\Psi_j+k_{yy}^{p}\Phi_i\Phi_j+k_{xy}^{p}\Psi_i\Phi_j)|\mathrm{J}|d\xi d\eta;$$
$$\mathrm{Q}_{ij}^{p}=\int_{L}\alpha\varphi_i\varphi_j dl;\gamma_i^{p}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\gamma^{p}\varphi_i|\mathrm{J}|d\xi d\eta.$$

Для розв'язання системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку (10) при початкових умовах з (9) використовується метод скінчених різниць, в якому апроксимація похідної за часом здійснюється на основі неявної різницевої схеми [1, 5]:

$$\frac{dP}{dt}=\frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t}. \quad (11)$$

Підставляючи вираз (11) в систему (10), отримуємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{8}\{(\frac{1}{\Delta t}\mathrm{H}_{ni}^{p}+\mathrm{A}_{ni}^{p}+\mathrm{Q}_{ni}^{p})P_i(t+\Delta t)- \quad (n=1-8). \quad (12)$$
$$-\frac{1}{\Delta t}\mathrm{H}_{ni}^{p}P_i(t)-\mathrm{Q}_{ni}^{p}P_0^{i}\}-\gamma_n^{p}=0$$

Роблячи додавання рівнянь (12) по всім скінченим елементам, отримуємо глобальну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, що дозволяє визначати невідомі значення тиску в момент часу $t+\Delta t$ через їх значення в попередній момент часу t. Розв'язання глобальної системи рівнянь здійснюється на основі чисельного методу Гауса без вибору головного елементу [3]. В результаті розв'язання, тиск визначається в усіх вузлових точках скінчено-елементної сітки. По знайденим вузловим значенням тиск визначається у довільній точці нафтоносного пласта досліджуваної області будь-який момент часу.

При розгляді задачі п'єзопровідності для газової фази (Лейбензона) (4-6), після заміни $\tilde{P}=P^2$ хід розв'язання задачі подібний.

3. Моделювання процесів фільтрації у анізотропних нафто-газоносних пластах

Розглянемо анізотропну нафтоносну пластову ділянку в околиці діючої нафтовидобувної свердловини розміром 90×90 м^2 (рис. 1, 2). Оберемо деякі характерні середні параметри нафтоносного пласта [1, 2]: m = 0,2; η = 10^{-3} Па·с; β_1 = 10^{-9} Па$^{-1}$; β_1 = 10^{-9} Па$^{-1}$. В цьому випадку коефіцієнт п'єзоопору c = 0.3 ·10^{-12} с. При моделюванні розподілу тисків у розглянутій пластовій ділянці припустимо, що початковий тиск у пласті дорівнює 200 атм, середня потужність видобувної свердловини складає 100 м^3 нафти на добу. Для мінімізації крайових ефектів при моделюванні, на межах розглянутої ділянки виберемо коефіцієнти інфільтрації нафтової фази рівними 0.001 м.

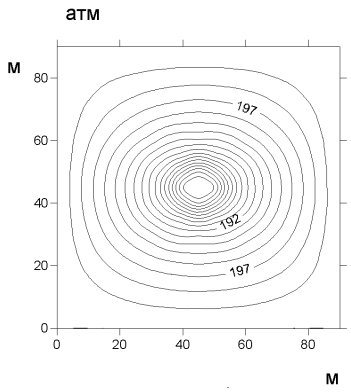


Рис. 1 Розподіл встановленого тиску в анізотропному пласті навколо нафтовидобувної свердловини при заданих параметрах проникності: k_{xx} = 2Д, k_{yy} = 1Д, k_{xy} = 0 (*1Дарсі=10^{-12} м^2).*

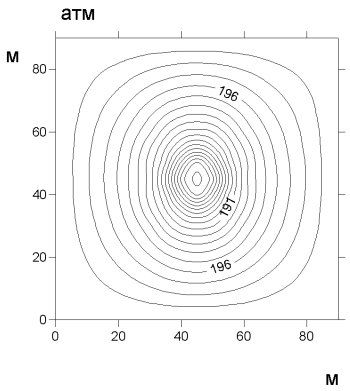


Рис. 2 Розподіл встановленого тиску в анізотропному пласті навколо нафтовидобувної свердловини: k_{xx} = 1Д, k_{yy} = 2Д, k_{xy} = 0.

Далі розглянемо процеси фільтрації анізотропного газоносного пласта (9×9 км^2) в околиці видобувної свердловини потужністю 24840 м^3 на добу при пластовому тиску 10 МПа (рис. 3). Виберемо деякі характерні середні параметри газоносного пласта [1, 2]: m = 0,15; η = $0{,}18\cdot10^{-4}$ Па·с; $P_0 = 100$ атм. При цьому коефіцієнт п'єзоопору Лейбензона c=$0.27\cdot10^{-12}$ с.

Висновки

Встановлено, що анізотропія нафтогазової проникності в дальній зоні дії свердловини більше впливає на процеси фільтрації навколо свердловини і відповідно на видобуток сировини, ніж наявність анізотропії проникності в ближній зоні дії свердловини. Показано, що інтенсивність процесів фільтрації у анізотропних пластах поблизу діючої свердловини, суттєво залежить від зсувної проникності і в меншій мірі від осьової проникності відповідної фази. Отже, для ефективного використання анізотропних пластів необхідно розміщувати видобувні свердловини в локальних областях з відносно низькою анізотропією проникності пласта, особливо уникати місць із наявністю зсувної анізотропії.

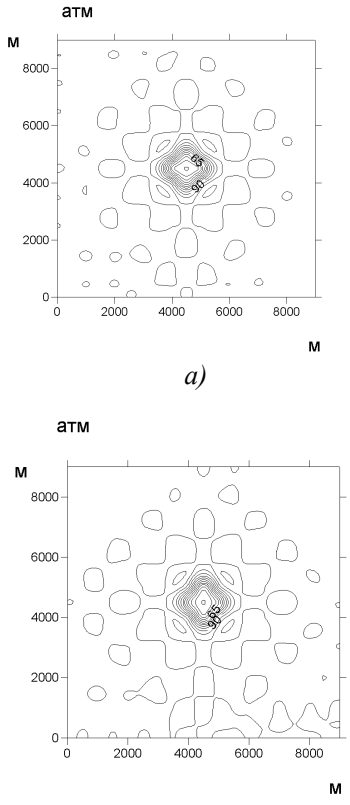


Рис. 3 Розподіл встановленого тиску в анізотропному пласті навколо газодобувної свердловини: а) k_{xx} = 0,0 012Д, k_{yy} = 0, 012Д, k_{xy} =0, 0012 Д; б) k_{xx} = 0,0 012Д, k_{yy} = 0, 012Д, k_{xy} =0, 0012 Д.

.

Список використаних джерел

1. *Азиз Х.* Математическое моделирование пластовых систем / Х. Азиз, Э. Сеттари. – М.: Ин-т компьют. исслед., 2004. – 416 с.
2. *Басниев К. С*. Нефтегазовая гидромеханика: учебное пособие для вузов / К.С. Басниев, Н. М. Дмитриев, Г. Д. Розенберг. – М.: Ин-т компьют. исслед., 2003. – 479 с.
3. *Лубков М. В.* Моделювання процесів фільтрації у неоднорідних анізотропних газоносних пластах /М.В. Лубков, О.О. Захарчук // Геоінформатика. – 2020. –1(73). – С. 56 – 63.

References

1. AZIZ, H. (2004) *Matematicheskoe modelirovanie plastovyh sistem.* Moskwa: In-t komp'jut. issled.
2. BASNIEV, K., DMITRIEV, N., ROZENBERG, G. (2003) *Neftegazovaja gidromehanika: uchebnoe posobie dlja vuzov.* Moskwa: In-t komp'jut. issled.
3. LUBKOV, M., ZAHARCHUK, O. (2020) *Modeliuvannia protsesiv filtratsii u neodnoridnykh anizotropnykh hazonosnykh plastakh Geoinformatics*. 1(73). p. 56 – 63.

Надійшла до редколегії 01.07.21

УДК 539.375

https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.11

Маковійчук М. В.[1], к.ф.-м.н., доц.,
Шацький І. П.[2], д.ф.-м.н., проф.,
Щербій А. Б.[3]

Про розподіл напружень біля тріщини у тороїдальній оболонці з гнучким покриттям

Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 76002, м. Івано-Франківськ, вул. Микитинецька, 3,
[1] e-mail: makoviy@ua.fm
[2] e-mail: ipshatsky@gmail.com
[3] e-mail: shch_andrew@ukr.net

M. V. Makoviichuk[1], Cand. Phys. & Math. Sc.,
I. P. Shatskyi[2], Dr. Phys. & Math. Sc.,
A. B. Shcherbii[3]

On the distribution of stresses near the crack in a toroidal shell with a flexible coating

Ivano-Frankivsk Branch of Pidstryhach-Institute for Applied Problems in Mechanics and Mathematics, NAS of Ukraine, 76002, Ivano-Frankivsk, Mykytynetska str., 3,
[1] e-mail: makoviy@ua.fm
[2] e-mail: ipshatsky@gmail.com
[3] e-mail: shch_andrew@ukr.net

У рамках двовимірної теорії досліджується вплив однобічного гнучкого покриття на напружений стан навантаженої внутрішнім тиском пологої тороїдальної оболонки з наскрізною тріщиною, яка розташована вздовж екватора або вздовж горла. Гнучке покриття моделюється шарніром, який з'єднує береги розрізу на одній із лицьових поверхонь оболонки. Для розглянутої задачі побудовано сингулярне інтегральне рівняння відносно невідомого стрибка переміщень на тріщині. На основі асимптотичного розв'язку, отриманого методом малого параметра, побудовано аналітичні залежності коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів в околі вершин тріщини від параметрів форми та максимальної кривини поверхні тора. Встановлено, що підкріплення оболонки призводить до зменшення коефіцієнта інтенсивності зусиль та до появи ненульового коефіцієнта інтенсивності моментів.

Ключові слова: тороїдальна оболонка, тріщина, гнучке покриття, пружна рівновага.

Elastic equilibrium of shallow toroidal shell loaded by internal pressure and containing the cross-cutting crack located along equator or throat of the shell has been studied in the two-dimensional formulation. The shell is reinforced by coating on one of the face surfaces. The crack in the shell with a flexible coating is simulated by a cuts with eccentrically hinge joint edges. The boundary problem for equations of classical shell theory with interrelated conditions of tension and bending along the cutting line is formulated within the framework of such model. Singular integral equation for the unknown jump of normal displacement on the crack edges has been elaborated. Based on asymptotical solutions of integral equation obtained using the small parameter method forces and moments intensity factors in the vicinity of the defect tips are defined. Their dependences of on the parameters of shell curvature and form parameter are investigated. It is established that the reinforcement of the shell leads to a decrease in the force intensity factor and to the appearance of a non-zero moment intensity factor.

Key words: toroidal shell, crack, flexible coating, elastic equilibrium.

Статтю представив член-кор. НАН України Жук Я.О.

Вступ

На сьогодні ефективним засобом подовження експлуатаційного ресурсу пошкоджених тонкостінних конструкцій вважається нанесення на їхню поверхню тонких покриттів, латок, підкріплень, які знижують концентрацію напружень в околі дефектів.

Мета цього дослідження – вивчити вплив однобічного гнучкого покриття на напружено-

© М.В. Маковійчук, І.П. Шацький, А.Б. Щербій, 2021

деформований стан пологої тороїдальної оболонки, послабленої наскрізною тріщиною.

Постановка задачі

Розглянемо ізотропну тороїдальну оболонку завтовшки $2h$, з наскрізною прямолінійною тріщиною завдовжки $2l$, яка може бути розташована вздовж екватора або вздовж горла тора. Серединна поверхня оболонки утворена рухом центра кола з радіусом r по колу з радіусом R. Нехай на одну із лицьових поверхонь оболонки нанесено гнучке покриття, яке деформується сумісно з підкладкою і здатне витримати доволі високі напруження. Оболонка зазнає розтягу мембранними зусиллями унаслідок дії внутрішнього тиску $p = \text{const}$. У рамках класичної теорії оболонок Кірхгофа-Лява досліджуємо напружений стан композиції.

Уважаючи оболонку в зоні збурення напруженого стану пологою, виберемо систему декартових координат $Oxyz$ з центром посередині розрізу та віссю абсцис уздовж його лінії. Якщо прийняти гіпотезу Кірхгофа про жорстку нормаль, то тріщину в оболонці з гнучким покриттям доцільно моделювати математичним розрізом, береги якого з'єднані шарнірно в одній із лицьових поверхонь оболонки $z = sh$ ($s = +1$ для зовнішнього чи $s = -1$ для внутрішнього підкріплення). Із урахуванням симетрії об'єкта та навантаження відносно осі абсцис такий підхід призводить до задачі теорії пологих оболонок із взаємопов'язаними крайовими умовами розтягу-згину на розрізах [1–3]:

$$\Delta\Delta\varphi - \frac{B}{r}\Delta_r w = 0,$$

$$\Delta\Delta w + \frac{1}{Dr}\Delta_r \varphi = 0, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus L; \qquad (1)$$

$$[u_y] - sh[\vartheta_y] = 0,$$

$$M_y - shN_y = 0, \ x \in L; \qquad (2)$$

$$N_x = pr/2, \ N_{xy} = 0, \ N_y = p_0 r,$$

$$M_x = M_{xy} = M_y = 0, \ (x,y) \to \infty. \qquad (3)$$

Тут x, y – декартові координати з центром посередині розрізу; φ – функція напружень, w – прогин оболонки, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, $\Delta_r = \partial^2/\partial x^2 + \beta\,\partial^2/\partial y^2$, $\beta = \pm r/(R \pm r)$; $[u_y]$ – розкриття тріщини в базовій поверхні оболонки, $[\vartheta_y]$ – розрив кута повороту нормалі; N_x, N_{xy}, N_y – мембранні зусилля, M_x, M_{xy}, M_y – моменти; $B = 2Eh$, $D = 2Eh^3/(3(1-\nu^2))$, E і ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки; $p_0 = p(R \pm 0.5r)/(R \pm r)$; $s = 1$ визначає варіант зовнішнього, а $s = -1$ – внутрішнього покриття; L – розріз.

Перша з крайових умов (2) означає неперервність переміщень на з'єднаних берегах розрізу, друга описує реактивний момент, викликаний переносом шарнірної реакції у базову поверхню оболонки.

Для побудови розв'язку задачі (1)–(3) скористалися методом сингулярних інтегральних рівнянь. Зусилля та моменти на лінії тріщини виразимо через похідні від функцій стрибка [4]:

$$N_y(x,0) = p_0 r +$$

$$+\frac{B}{4\pi}\int_{-l}^{l}\left\{K_{11}(\xi - x)[u_y]'(\xi) - K_{13}(\xi - x)a[\vartheta_y]'(\xi)\right\}d\xi,$$

$$M_y(x,0) =$$

$$= \frac{Ba}{4\pi}\int_{-l}^{l}\left\{K_{31}(\xi - x)[u_y]'(\xi) - K_{33}(\xi - x)\,a[\vartheta_y]'(\xi)\right\}d\xi.$$

Ядра цих зображень виражаються через фундаментальний розв'язок рівнянь (1) і подаються інтегралами Фур'є:

$$K_{jk}(z) = \left[\delta_{jk}\,\mathrm{Re} + (1-\delta_{jk})\,\mathrm{Im}\right]\int_0^\infty g_{jk}\left(\frac{\gamma\sqrt{-i}}{s}\right)\sin zs\,ds;$$

$$g_{11}(\tau) = q(\tau)/\omega(\tau),$$

$$g_{13}(\tau) = g_{31}(\tau) = -q(\tau)\left(1 + \nu/\omega(\tau)\right),$$

$$g_{33}(\tau) = q(\tau)\left(2 - 2\nu + \beta\tau^2 + \omega(\tau) - \nu^2/\omega(\tau)\right),$$

$$q(\tau) = 2/\sqrt{2 + \beta\tau^2 + 2\omega(\tau)}, \quad \omega(\tau) = \sqrt{1+\tau^2},$$

$$\tau = \gamma\sqrt{-i}/s; \ a = h/\sqrt{3(1-\nu^2)},$$

$\gamma = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}/\sqrt{rh}$; δ_{jk} – символ Кронекера.

Підставимо інтегральні вирази в крайову умову (2). Виключаючи функцію $[\vartheta_y]$, дістаємо сингулярне інтегральне рівняння для знаходження розриву переміщень з додатковою умовою на кінцях розрізу:

$$\frac{B}{4\pi}\int_{-l}^{l} K(\xi - x)[u_y]'(\xi)d\xi = -p_0 r, \ x \in (-l,l);$$

$$[u_y](\pm l) = 0. \qquad (4)$$

Тут

$$K(z) = K_{11}(z) - 2sK_{13}(z)/\sqrt{3(1-\nu^2)} + \\ + K_{33}(z)/(3(1-\nu^2)).$$

За функціями стрибків переміщення і кута повороту нормалі обчислювали коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів поблизу вершин тріщини:

$$K_N^{\pm} = \mp \frac{B}{4}\lim_{x\to\pm l}\sqrt{2\,|\,x\mp l\,|}\,[u_y]'(x),$$

$$K_M^{\pm} = \pm(3+\nu)(1-\nu)\frac{D}{4}\lim_{x\to\pm l}\sqrt{2\,|\,x\mp l\,|}\,[\vartheta_y]'(x).$$

Аналіз результатів

Асимптотичний розв'язок задачі (4) побудували методом малого параметра [4]. За малий параметр обрали безрозмірний комплекс $\lambda = \gamma l = \left(3(1-\nu^2)\right)^{1/4} l/\sqrt{rh}$ – відносну максимальну кривину оболонки. У першому оболонковому наближенні коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів обчислюються за формулами:

$$K_N = \frac{3p_0 r\sqrt{l}(1+\nu)}{2(3+2\nu)}F(\lambda),$$

$$K_M = -\frac{sp_0 rh\sqrt{l}(3+\nu)}{2(3+2\nu)}F(\lambda);$$

$$F(\lambda) = 1 - \frac{\lambda^2}{2a_0}\left[a_1 + b_1\left(1+\ln\frac{\lambda}{2}\right)\right] + O(\lambda^4\ln^2\lambda).$$

Тут позначено:

$$a_0 = a_{110} + a_{330}/(3(1-\nu^2)),$$

$$a_1 = a_{111} - 2sa_{131}/\sqrt{3(1-\nu^2)} + a_{331}/(3(1-\nu^2)),$$

$$b_1 = -2sb_{131}/\sqrt{3(1-\nu^2)},$$

де

$$a_{110} = 1,\ a_{330} = 3 - 2\nu - \nu^2,$$

$$a_{111} = -(\beta+5)\pi\Psi/32 - \\ -\sqrt{-\beta}(3\beta^2 - 22\beta + 15)H(-\beta)/(24(\beta-1)^2),$$

$$a_{131} = [(3(1+\nu)\beta^2 + 4(1+11\nu)\sqrt{\beta} + 5 + \\ + 37\nu)/(48(\sqrt{\beta}+1)^2) + \\ + b_{131}(\ln(\gamma_0(\sqrt{\beta}+1)/4) - 1)]H(\beta) + \\ + [(1+\nu)(\beta+3)/16 + \\ + (3(1-3\nu)\beta - 1 - 7\nu)/(12(\beta-1)^2) + \\ + b_{131}(\ln(\gamma_0\sqrt{|\beta-1|})/4 - 1)]H(-\beta),$$

$$a_{331} = ((5+2\nu+\nu^2)\beta + 1 + 2\nu + 5\nu^2)\pi\Psi/32 + \\ + \sqrt{-\beta}[3(5+2\nu+\nu^2)\beta^2 - 2(11+2\nu+11\nu^2)\beta + \\ + 3(1+2\nu+5\nu^2)]/(24(\beta-1)^2)H(-\beta),$$

$b_{131} = ((1+\nu)\beta + 1 + 5\nu)/8$ – коефіцієнти розкладу ядер $K_{jk}(z)$ у степенево-логарифмічні ряди за параметром λ; $\ln\gamma_0 = 0.5772...$ – стала Ейлера, $\Psi = 1 - (2/\pi)\,\mathrm{arctg}(2\sqrt{-\beta}/(\beta+1))H(-\beta)$, $H(...)$ – функція Гевісайда.

Для тріщини, що орієнтована вздовж екватора, $\beta = 1/(\rho+1)$, $p_0 = p(\rho+0{,}5)/(\rho+1)$, $\rho\in[1,\,\infty)$, а для тріщини вздовж горла – $\beta = -1/(\rho-1)$, $p_0 = p(\rho-0{,}5)/(\rho-1)$, $\rho\in[2,\,\infty)$, де $\rho = R/r$ – параметр форми тора.

При $\rho\to\infty$ ($\beta\to\pm 0$) отримуємо частковий випадок рівноваги пологої циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною [5].

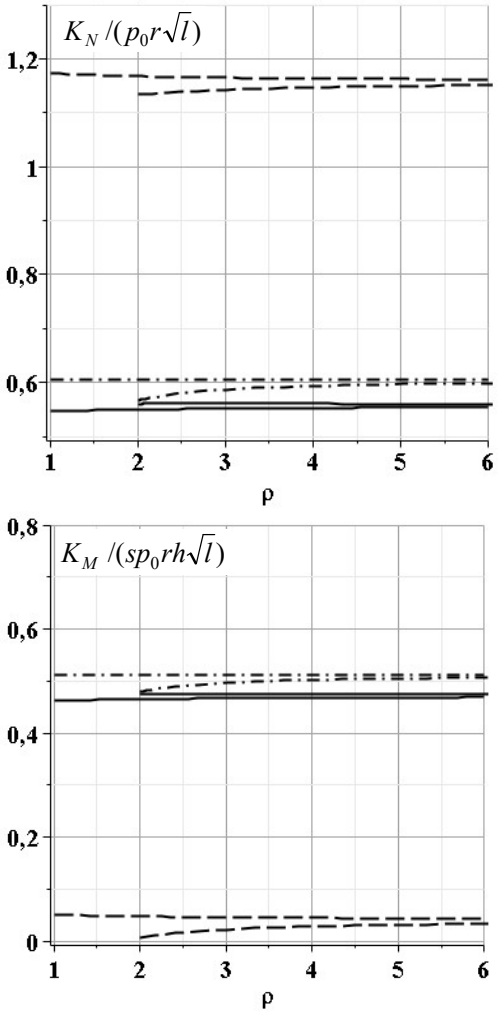


Рис. 1. Коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів для тороїдальної оболонки з тріщиною вздовж екватора ($\rho\ge 1$) або горла ($\rho\ge 2$) тора.

На рис. 1 зображено залежності знерозмірених коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів від параметра форми оболонки, отримані при $\nu = 0.3$ та $\lambda = 0.8$. Суцільні та штрихпунктирні лінії побудовано для оболонки із зовнішнім та внутрішнім покриттям відповідно, а штрихові – для оболонки без покриття [4, 6].

Висновки

Запропонована модель тріщини в оболонці з однобічним гнучким покриттям дає змогу в аналітичній формі дослідити розподіл напружень в околі вістря тріщини, орієнтованої у головному напрямку поверхні додатної або від'ємної гаусової кривини.

Шарнірне з'єднання берегів тріщини у лицьовій поверхні тороїдальної оболонки призводить до істотного зменшення коефіцієнта інтенсивності зусиль та до появи такого ж за порядком коефіцієнта інтенсивності моментів. У підсумку потік енергії у вершину тріщини зменшується.

Подальше дослідження міцності вкритої оболонки з тріщиною доцільно проводити з урахуванням двох критеріїв граничної рівноваги: розтріскування оболонки та втрати цілісності покриття [3].

Список використаних джерел

1. Шацький І. П. Інтегральне рівняння задачі про тріщину в пологій оболонці з гнучким покриттям / І. П. Шацький // Доп. АН України. – 1992. – № 1. – С. 46–48.
2. Шацкий И. П. Задача о трещине в пологой оболочке с гибким покрытием / И. П. Шацкий // Прикл. механика и техн. физика. – 1996. – Т. 37, № 2. – С. 131–138.
3. Шацький І. П. Вплив гнучкого покриття на міцність пологої оболонки з тріщиною вздовж лінії кривини / І. П. Шацький, А. Б. Щербій // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій (вип. 2): В 3-х т. / Під заг. ред. Панасюка В. В. – Львів : Каменяр, 1999. – Т. 2. – С. 333–335.
4. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М. П. Саврук. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
5. Шацький І. П., Вплив гнучкого покриття на міцність пологої циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною / І. П. Шацький, М. В. Маковійчук, А. Б. Щербій // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – Т. 59, № 4. – С. 135–141.
6. Механика композитов. В 12 т. / Под общей ред. А. Н. Гузя. – К.: Наук. думка, 1993. – (Т. 7: Концентрация напряжений / А. Н. Гузь, А. С. Космодамианский, В. П. Шевченко и др. – К.: А. С. К., 1998. – 387 с.)

References

1. SHATSKYI, I. P. (1992) Integral equation of problem about a crack in shallow shell with flexible covering. *Dop. AN Ukrainy*. (1). pp. 46–48.
2. SHATSKII, I. P. (1996) Crack problem for a shallow shell with a flexible coating. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 37 (2), pp. 259–265.
3. SHATSKYI, I. P. & SHCHERBII, A. B. (1999) *Mehanika ruinuvannia materialiv i mitsnist konstruktsii*, 2 (2). pp. 333–335. (In 3 V. ed. by Panasyuk V. V., Lviv: Kameniar).
4. SAVRUK, M. P. (1981) *Dvumernye zadachi uprugosti dlia tel s treshchinami*. Kiev: Naukova dumka.
5. SHATS'KY, I. P. MAKOVIICHUK, M. V. & SHCHERBII, A. B. (2019) Influence of a flexible coating on the strength of a shallow cylindrical shell with longitudinal crack. Journal of Mathematical Sciences, 238 (2), pp. 165–173.
6. *Mekhanika kompozitov*, in 12 V. (1993) Ed. Guz A. N., Kiev: Naukova dumka (Vol. 7: Guz, A. N., Kosmodamianskii, A. S., Shevchenko, V. P. et al. (1998) *Koncentratsiia napriazhenii*, Kiev: A. S. K.).

Надійшла до редколегії 29.08.21

УДК 532.516 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.12

Малюга В.С. [1], д.ф.-м.н., с.н.с.,
Духновський В. Ю.[2], аспірант
Жук Я. О.[2], д.ф.-м.н., проф.

Течії Стокса в тривимірних областях

[1] Інститут гідромеханіки, Національна академія наук України, 03057, м. Київ, вул. Марії Капніст, 8/4,
e-mail: malyuga@nas.gov.ua
[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: y.zhuk@i.ua, y_zhuk@inmech.kiev.ua

Malyuga V. S.[1], Dr. Sci. (Phys.–Math.), S. R. F.,
Duhnovsky V. Yu.[2], postgraduate student,
Zhuk Ya. O.[2], Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof.

Stokes flows in 3D containers

[1] Institute of Hydromechanics, National Academy of Sciences of Ukraine, 03057, Kyiv, Marii Kapnist str., 8/4,
e-mail: malyuga@nas.gov.ua
[2] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: **y.zhuk@i.ua**, y_zhuk@inmech.kiev.ua

Дана робота складається з двох частин. Спочатку ми обговорюємо аналітичний підхід до розв'язання задачі Стокса про стаціонарну течію в'язкої нестисливої рідини в тривимірних порожнинах. Цей підхід базується на методі суперпозиції. В другій частині ми описуємо особливості ламінарного перемішування рідини в тривимірних течіях.

Ключові слова: течія Стокса, вихори Моффата, перемішування, періодичні лінії.

This study consists of two parts. First we consider an analytical approach for solving the problem of steady Stokes flow in some 3D containers with arbitrary velocities prescribed over the surfaces. The approach is based on the superposition method. First we discuss the Stokes problem solution in a finite cylinder. This is the simplest problem because the flow domain is restricted with only two families of coordinate surfaces and the edge (rim) is a smooth line. Then we discuss the analytical solution of the Stokes problem in more complicated domains, such as a circular cone, a rectangular trihedral corner and a 3D rectangular cavity. The Moffatt eddies in such domains are described. In the second part of the study we consider the laminar mixing process in the Stokes flow in a 3D container. We show that in 3D flows a much richer variety of mixing regimes is observed than in 2D flow configurations. The mixing processes in a 3D flow, containing periodic lines, possess essentially two-dimensional characteristics. In the flows, where only isolated periodic points exist, the liquid elements stretch or compress in all three directions.

Key Words: Stokes flow, Moffatt eddies, mixing, periodic lines.

Статтю представив академік НАН України Перестюк М.О.

Stokes flows. Analytical approach

In 1996, V.V. Meleshko published a paper which addressed a general analytical approach for solving the problem of two-dimensional steady Stokes flow in a rectangular cavity [1]. The flow inside the cavity was caused by a nonzero velocity distribution over two opposite sides of the cavity. The analytical approach called the superposition method was proposed for solving this problem. The principal idea of the method consists in representing the velocity field in a cavity as a sum of several velocity fields. Each of these velocity fields is represented in the form of Fourier series with arbitrary unknown coefficients. The terms of these series satisfy the governing equations and the superposition provides sufficient arbitrariness for fulfilling the boundary condition. In [1] the 2D rectangular cavity was treated as the intersection of two infinite strips. So, the solution of the Stokes problem was represented as the superposition of the well-known solutions for these infinite strips. The satisfaction of the boundary conditions led the author to an infinite system of linear algebraic equations, which was regular and consequently could be solved by the method of reduction. In the case of non-smooth distribution of

© V.S. Malyuga, V.Yu. Duhnovsky, Ya.O. Zhuk
2021

the velocity the convergence of the series was not sufficient to provide us with enough accuracy. But it was shown that knowledge of asymptotic behaviour of the unknowns could considerably improve the convergence of the series and consequently the accuracy of the solution. It was shown that the first term of the asymptotics was responsible for the discontinuity at the corner of the cavity.

Later we decided that the method of superposition suggested in [1] could be applied to more complicated 3D problems. The simplest of them is the Stokes problem in a finite circular cylinder. The solution of this problem was published in [2]. In this case the cylinder was treated as intersection of the infinite cylinder and the infinite layer. So, the solution of the Stokes problem was represented as the superposition of the solutions for these two geometries. For the layer part the velocity field was expressed in the form of Dini and Fourier-Bessel series. For the cylinder part the velocity was represented in the form of Fourier series. The asymptotic behaviour of the unknowns was established by the Mellin transform technique developed by Gomilko and Meleshko and it was shown that the main term of the asymptotics was responsible for the discontinuity of the velocity at the rim. Knowledge of the main asymptotic term allowed the authors to separate and present in closed form the part of solution containing the discontinuity at the rim. It was established that the asymptotic behaviour of the velocity field near the rim coincides with the well-known Goodier-Taylor solution in a 2D wedge with constant tangential velocity applied at its sides. That is why the Stokes problem in a finite cylinder can be considered as the simpliest 3D problem. Smoothness of the cylinder's rim makes the velocity singularity near the rim to actually have 2D nature. However the streamlines near the calm rim were completely different form the well-known 2D Moffatt eddies. Because of the third coordinate the streamlines in the plane of symmetry had the form of spirals. A small displacement form the symmetry plane made the streamline really three-dimensional. It moved away from the symmetry plane at one corner and approaches the plane at another corner.

The Stokes problem solution becomes much more complicated in domains with 3D singular points at the surface. For example, a cuboid has eight trihedral corners. The unknowns of the solution depend on two indexes and therefore the technique for improvement of the series convergence based on the asymptotic analysis cannot be applied.

The simplest example of the 3D singular point at the surface is the vertex of a cone. This problem was considered in [3]. The flow inside a circular cone was induced by a non-zero velocity prescribed at the boundary within a ring at some the distance from the vertex. Therefore the problem was a 3D analogous of the 2D corner flow considered by Moffatt [4]. Since this canonical domain is bounded with a coordinate surface in the spherical coordinate system, it is not necessary to apply the superposition method. The solution of the problem was represented in the form of a Fourier series on the trigonometric system $\cos(m\varphi)$, where φ was the angular coordinate. The solution was constructed for each term by use of the Mellin transform. The contribution of each term of the Fourier expansion to the local velocity field near the vertex was studied. The following two conclusions were drawn: 1) at any m, providing α is less than the critical value, there exists a sequence of eddies near the vertex; 2) when the Fourier expansion of the velocity prescribed at the boundary includes several terms, the term at m=1 will dominate near the vertex. If this term is missing in the Fourier expansion, the term at m=2 will dominate. If both the terms are missing, the axisymmetric term (m=0) will play a leading role.

The Stokes flow in a trihedral rectangular corner was studied in [5]. The flow was induced by a non-zero velocity distribution over one of the corner's walls. We considered two possible motions of the wall: uniform translation or rotation about arbitrary point. Such a situation occurs for example in a cubic cavity where the motion of a lid generates the fluid motion. As mentioned above, the unknown coefficients depend now on two indexes and consequently the technique for investigating the asymptotic behaviour of the unknowns, used in 2D problems, is useless in 3D case. Within the limits of the linear approximation of the problem, this difficulty may be readily overcome provided the local behaviour of the flow field near the points of discontinuity is known. Indeed, since the superposition principle is valid, the solution may be presented as a superposition of the known solution responsible for the velocity discontinuity and some new solution satisfying continuous boundary conditions. The solution of the Stokes problem in a trihedral corner was constructed with the method of superposition. For this purpose three spherical coordinate systems with a common origin O at the vertex were introduce. These systems were such that each of the corner walls lay in the equatorial plane of the corresponding coordinate system. In order to obtain sufficient functional arbitrariness to fulfil all the boundary conditions at the walls we represent the velocity field as the superposition of three vector

fields. Each term of this superposition was a solution of the Stokes equations in the corresponding spherical coordinate system. The velocity field was represented as a local similarity solution $U(r,\theta,\varphi) = r^n \cdot u(\theta,\varphi)$. This representation reduces dimensionality and allows us to formulate the boundary value problem for the corresponding spherical triangle. Now the problem becomes 2D since it is formulated at a spherical surface. Satisfaction of the boundary conditions leads to the infinite system of linear equations. But now the unknown coefficients depend on one index. So, the asymptotic analysis by means of Mellin transform developed by Gomilko and Meleshko can now be applied. The analysis of the asymptotic behaviour of

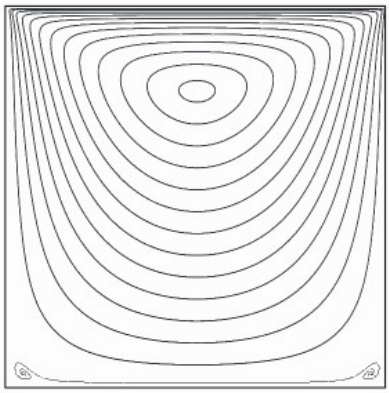


Fig. 1. Streamlines in the symmetry plane. The top wall is moving

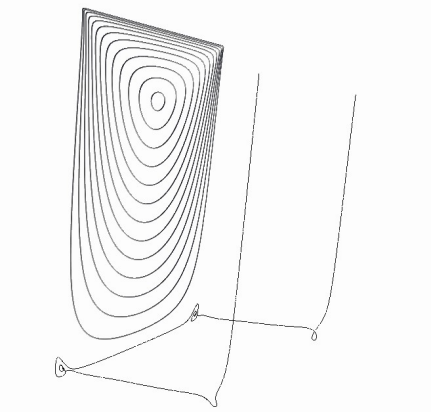


Fig. 2. Streamlines. The top wall is moving

the unknowns provided a way of refining the technique to obtain high accuracy everywhere in the corner. The velocity field was shown to behave near the edges, where the discontinuity of the tangential velocities was preassigned, in accordance with the Goodier-Taylor solution. The numerical analysis of the flow topology near the edge formed by two fixed walls conformed the existence of eddies. The flow driven by the wall rotation about the vertex was shown to be strictly 2D. In this case the streamlines lay on a spherical surface. The flow became essentially 3D when the wall rotated about a centre displaced from the vertex. The centrelines of the corner eddies contained also saddle points.

In 2005 paper [6] was published by Albensoeder and Kuhlmann. They investigated the flow in a lid-driven cubic cavity and concluded that the singularities in the boundary conditions cannot be fully removed by solution [5]. They said that if we compose the superposition of solutions [5] in every of the eight corners then the singularity at the edge connecting two neighbouring vertices is given twice. If we take the solution [5] in every corner with weight 1/2, then the singularity at the edge is now formulated correctly, but at the vertices of the trihedral corners we take only a half of the singularity into account. In the present paper we show haw to construct the singular solution to extract all the singularities correctly.

The velocities prescribed at the surface of the cuboid are discontinuous at the eight edges and at the eight vertices. So, along the edges between the moving and the stationary walls the flow fields are singular. Since the local asymptotic solutions near both the edges and the vertices are known, we may eliminate these singularities. The flow fields may be presented as

$$\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}_s, \qquad P = p + p_s . \tag{1}$$

Here $\mathbf{u}_s$ and p_s represent the singular solution of the Stokes problem which satisfies the discontinuous boundary condition. Then the flow fields $\mathbf{u}$ and p are continuous. The singular solution of the Stokes problem may be constructed as a superposition of the local flow fields in the trihedral rectangular corners [5]. But in this case the singularity at any edge is taken care of twice [6]. Therefore we have to subtract one singular solution valid at the dihedral corner formed by two planes. The singular solution takes the form:

$$\mathbf{u}_s = \sum_{i=1}^{8} \mathbf{v}_i - \sum_{j=1}^{8} \mathbf{e}_j \quad , \tag{2}$$

where $\mathbf{v}_i$ is the singular solution in the trihedral corner with vertex i and $\mathbf{e}_j$ is the singular solution in the dihedral corner with edge j. The solutions $\mathbf{v}_i$ are given in [5]. The solutions $\mathbf{e}_j$ are the well-known Goodier-Taylor solution or the shear flow for a dihedral corner where the moving wall slides in the direction parallel to the edge.

Extraction of all the discontinuities with (1), (2) from the velocity field allowed us to satisfy the

boundary conditions with the accuracy of within 10^{-4}. Fig.1 shows the streamlines in the plane of symmetry when only the top wall is moving constantly, while the other walls are fixed. We can see that the streamlines in the corner eddies are spirals. The same effect was observed in a circular cylinder [2]. In fig.2 we can see that even a small displacement from the symmetry plane gives a really 3D streamline. It approaches a symmetry plane at one angle and moves away at the opposite one.

Periodic points. Structure of manifolds

According to Brauer's fixed point theorem, any continuous incompressible mapping of a closed domain into itself in a finite-dimensional Euclidean space has a fixed point. Obviously, such a fixed point of Poincare map will be a periodic point of flow. The location and type of periodic points determine the nature, intensity and quality of mixing.

In terms of Poincare map, a periodic point with period T is a fixed point. If the Poincare map is defined as $\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n)$, then for a periodic point with period T we have $\mathbf{P} = f(\mathbf{P})$. In 2D flows, a periodic point can be classified as elliptic, hyperbolic or parabolic depending on the field structure in a vicinity of the periodic point. In 3D flows, the classification of periodic points is much more complicated [7]. Let some material particle close to point $\mathbf{P}$ be in position $\mathbf{P} + d\mathbf{x}_0$ at the initial moment of time. After a period, this material particle moves into the position $\mathbf{P} + d\mathbf{x}_1 = f(\mathbf{P} + d\mathbf{x}_0)$. After linearization, we obtain $d\mathbf{x}_1 = \mathbf{F} d\mathbf{x}_0$ where $\mathbf{F} = \partial f(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x} \,|\, \mathbf{x} = \mathbf{P}$ is the Jacobi matrix at point $\mathbf{P}$. The properties of stability of mapping f are determined by the eigenvalues of matrix $\mathbf{F}$. The eigenvalues are the roots of the equation $|\mathbf{F} - \lambda \mathbf{E}| = 0$, which in the three-dimensional case takes the following form:

$$\lambda^3 - J_1 \lambda^2 + J_2 \lambda - J_3 = 0, \qquad (3)$$

where the three invariants of the matrix are defined as follows $J_1 = \mathrm{tr}(\mathbf{F})$, $2J_2 = \mathrm{tr}^2(\mathbf{F}) - \mathrm{tr}(\mathbf{F}^2)$, $J_3 = \det(\mathbf{F})$.

All the elements of matrix $\mathbf{F}$ were calculated numerically for the Stokes problem in a cylinder. The condition of fluid incompressibility $J_3 = 1$ was used to control accuracy of the numerical calculations. The numerical error did not exceed 10^{-3} near the surface of the cylinder and took much smaller values inside the calculation area. Obviously, equation (3) always has one real positive root. Let it be λ_1. Then equation (3) can be represented as follows

$$(\lambda - \lambda_1)\left(\lambda^2 + (\lambda_1 - J_1)\lambda + \frac{1}{\lambda_1}\right) = 0. \qquad (4)$$

The other two eigenvalues are

$$\lambda_{2,3} = \frac{(J_1 - \lambda_1)}{2} \pm \sqrt{D}, \qquad (5)$$

where the discriminant

$$D = \frac{(J_1 - \lambda_1)^2}{4} - \frac{1}{\lambda_1}. \qquad (6)$$

Eigenvalues λ_2, λ_3 can take either real or complex conjugate values. And the transition occurs at $D = 0$, i.e. at $\lambda_2 = \lambda_3 = \pm 1/\sqrt{\lambda_1}$. It is now obvious that in 3D flows we can distinguish nine types of periodic points, depending on the values of λ_1 and D. Let us describe the periodic point classification in more detail. If $\lambda_1 = 1$, it means that there is no stretching or shrinking in the direction of the corresponding eigenvector. In the canonical coordinate system $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \eta^{(3)})$, the axes of which are determined by the eigenvectors, the condition $\lambda_1 = 1$ means that $\eta^{(1)} = f(\eta^{(1)})$. Then for the other two eigenvalues the condition $\lambda_2 \lambda_3 = 1$ is fulfilled, i.e. in the canonical plane $(\eta^{(2)}, \eta^{(3)})$ mapping f satisfies the condition of incompressibility. Thus, the case $\lambda_1 = 1$ is essentially two-dimensional. Such periodic points can be divided into three classes: elliptic, hyperbolic and parabolic. The condition $\lambda_1 = 1$ is fulfilled at the points of periodic lines. Indeed, there is no stretching or shrinking in the tangential direction of the periodic line, i.e. the tangential direction of the periodic line corresponds to the direction of eigenvector $\mathbf{n}_1$. The classification of points of a periodic line is equivalent to the classification of periodic points in 2D flows. Therefore the periodic lines can be divided into elliptic and hyperbolic segments that connect at the parabolic points. It follows from (6) that the point of a periodic line is elliptic if $-1 < J_1 < 3$. In this case $D < 0$, and therefore the eigenvalues $\lambda_{2,3}$ are complex conjugate.

If $J_1 < -1$ or $J_1 > 3$, then $D > 0$, and therefore such a point of the periodic line is hyperbolic. In 2D systems, the elliptic points are surrounded by islands of regular motion. The Poincaré map in such islands is a rotation around the elliptic periodic point. The liquid inside the elliptical region does not leave this

region. It becomes isolated from the rest of the liquid. In 3D domains the elliptic segments of the periodic lines are also surrounded by pipe-shaped islands. The hyperbolic points in 2D systems are associated with stable and unstable manifolds, which are the lines along which fluid particles are shrunk or stretched. In the 3D case, the stable and unstable manifolds associated with a hyperbolic segment of the periodic line combine and merge into the surfaces. Thus, the Poincare map in a vicinity of a periodic line is essentially 2D in nature.

If $\lambda_1 \neq 1$, then such a periodic point is isolated.

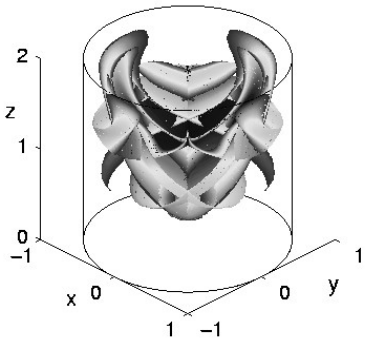


Fig. 3. Stable and unstable manifolds. Problem 1.

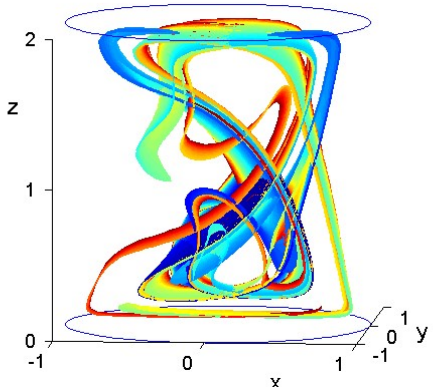


Fig. 4. Stable and unstable manifolds. Problem 2.

The Poincare map in the vicinity of such a periodic point is essentially three-dimensional. The classification of isolated points is much more complicated as compared with the classification of periodic lines. The phase portraits in the canonical coordinate system are given in [7]. In case $D > 0$, all three eigenvalues λ_i are real. Phase portraits in the coordinate planes are two saddles and a node. In the case of $D < 0$, the eigenvalues $\lambda_{2,3}$ acquire complex conjugate values that are responsible for rotation in the plane $(\eta^{(2)}, \eta^{(3)})$. The phase portrait in this plane is a hyperbolic focus. In the degenerate case $D = 0$ we have two equal eigenvalues $\lambda_2 = \lambda_3 = \pm 1/\sqrt{\lambda_1}$. In the plane $(\eta^{(2)}, \eta^{(3)})$, the phase portrait is a degenerate node. Thus, when $\lambda_1 \neq 1$ a periodic point is isolated and can be classified as a hyperbolic node or a hyperbolic focus. It is obvious that the phase portrait of isolated periodic points does not have closed lines or surfaces. Therefore isolated islands of regular motion similar to those formed around the elliptical points of the periodic lines cannot be formed around isolated periodic points. In a flow that has only isolated periodic points and no periodic lines, the liquid must be mixed throughout the flow area.

Any isolated periodic hyperbolic point is associated with the surface or the line called manifolds. The stable manifold $W^s(\mathbf{P})$ is a set of points that approach a periodic point $\mathbf{P}$ in the process of Poincare map. That is for any point $\mathbf{x} \in W^s(\mathbf{P})$ we have $f^n(\mathbf{x}) \to \mathbf{P}$ at $n \to \infty$. An unstable manifold $W^u(\mathbf{P})$ is a set of points that tend to $\mathbf{P}$ in the reverse process, i.e. for an arbitrary point $\mathbf{x} \in W^u(\mathbf{P})$ we have $f^{-n}(\mathbf{x}) \to \mathbf{P}$ at $n \to \infty$. In a two-dimensional case, stable and unstable manifolds are two lines that intersect infinitely many. Since there are infinitely many points of intersection of the stable and unstable manifolds, they concentrate when approaching the periodic point. The manifolds form a complex layered structure. Due to this phenomenon the mixing of fluid represents the elongation of a liquid spot along the unstable manifold and multiple folding when passing through homoclinic points. Such elongation and folding of a liquid spot is called

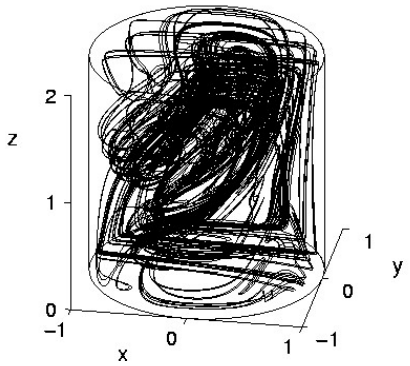


Fig. 5. Unstable manifold. Problem 3.

a horseshoe map. It is obvious that in three-dimensional flows with periodic lines, the mixing mechanism is similar to that in two-dimensional flows. In such a quasi-two-dimensional mapping the liquid does not mix along the periodic line. The elongation and folding of the fluid elements occurs

only in the plane perpendicular the periodic line. Although this horseshoe map also leads to a complex layered structure, but the presence of only a two-dimensional mixing mechanism does not allow us to obtain a high-quality homogeneous mixture in the entire three-dimensional region of the flow.

The above theoretical considerations are illustrated by the example of three possible periodic flows generated in a finite cylinder [7]. In all three cases, the flows in the cylinder are generated by the periodic motion of the cylinder's lids. The lateral surface of the cylinder is stationary while the end faces move periodically. Three typical protocols of the lids motion were considered in [7]: 1) Problem 1. Only the upper end wall moves. The bottom wall remains stationary. The motion of the upper wall is zigzag. During the first half of the period, the upper end wall moves with a constant velocity in the direction of the x-axis, during the second half of the period in the direction of the y-axis. 2) Problem 2. The upper and lower walls move alternately in opposite directions parallel to the X-axis. 3) Problem 3. The protocol of motion of the end walls consists of three different steps used in Problems 1 and 2. The flows in the first two problems have periodic lines, while the flow in problem 3 has only isolated periodic points. Thus, according to the theory described above, the flows in problems 1 and 2 have 2D nature. Although the mixing mode may be chaotic, the passive impurity spot cannot be mixed throughout the area due to its two-dimensional nature. In addition, in such a flow there may be zones of regular mixing. The islands around the elliptical segments of the periodic lines are formed, which also prevent the good mixing. The flow of Problem 3 has only isolated periodic points and therefore the islands of regular motion cannot be formed around such points. The passive impurity spot should be mixed throughout the flow area.

The stable and unstable manifolds of periodic points and lines for Problems 1-3 are shown in fig. 3-5. The results of numerical calculation confirm the theoretical reasonings outlined above. In the flows of Problems 1-2 the passive impurity spot will not move throughout the domain. The flow of Problem 3, where only isolated periodic points exist, provides effective mixing of fluid.

Список використаних джерел

1. *Meleshko V.V.* Steady Stokes flow in a rectangular cavity // Proc. Roy. Soc. Lond. – 1996. – 452. – P. 1999-2022.
2. *Meleshko V.V.* Steady Stokes flow in a finite cylinder / V.V. Meleshko, V.S. Malyuga, A.M. Gomilko // Proc. Roy. Soc. Lond. – 2000. – 456. – P. 1741-1758.
3. *Malyuga V.S.* Viscous eddies in a circular cone // J. Fluid Mech. – 2005. – 522. – P. 101-116.
4. *Moffatt H.K.* Viscous and resistive eddies near a sharp corner // J. Fluid Mech. – 1964. – 18. – P. 1-18.
5. *Gomilko A.M.* On steady Stokes flow in a trihedral rectangular corner / A.M. Gomilko, V.S. Malyuga, V.V. Meleshko // J. Fluid Mech. – 2003. – 476. – P. 159-177.
6. *Albensoeder S.* Accurate three-dimensional lid-driven cavity flow / H.C. Kuhlmann // J. Comput. Phys. – 2005. – 206. – P. 536-558.
7. *Malyuga V.S.* Mixing in the Stokes flow in a cylindrical container / V.S. Malyuga, V.V. Meleshko, M.F.M. Speetjens, H.J.H. Clercx, G.J.F. van Heijst // Proc. R. Soc. Lond. A. – 2002. – 458. – P. 1867-1885.

References

1. MELESHKO, V.V. (1996) Steady Stokes flow in a rectangular cavity. *Proc. Roy. Soc. Lond.* 452. p. 1999-2022.
2. MELESHKO, V.V., MALYUGA, V.S. & GOMILKO, A.M. (2000) Steady Stokes flow in a finite cylinder. *Proc. Roy. Soc. Lond.* 456. p. 1741-1758.
3. MALYUGA, V.S. (2005) Viscous eddies in a circular cone. *J. Fluid Mech.* 522. p. 101-116.
4. MOFFATT, H.K. (1964) Viscous and resistive eddies near a sharp corner. *J. Fluid Mech.* 18. p. 1-18.
5. GOMILKO, A.M., MALYUGA, V.S. & MELESHKO, V.V. (2003) On steady Stokes flow in a trihedral rectangular corner. *J. Fluid Mech.* 476. p. 159-177.
6. ALBENSOEDER, S. & KUHLMANN, H.C. (2005) Accurate three-dimensional lid-driven cavity flow. *J. Comput. Phys.* 206. p. 536-558.
7. MALYUGA, V.S., MELESHKO, V.V., SPEETJENS, M.F.M. , CLERCX, H.J.H. & HEIJST, G.J.F. VAN (2002) Mixing in the Stokes flow in a cylindrical container. *Proc. R. Soc. Lond. A.* 458. p. 1867-1885.

Надійшла до редколегії 28.08.21

УДК 539.3

https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.13

Маслов Б.П., д.ф.-м.н., с.н.с.

Спадкова повзучість ізотропних композитів випадкової структури при складному напруженому стані

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, 03057, м. Київ-57, вул. Нестерова, 3, e-mail: maslov@inmech.kiev.ua

Maslov B.P., Dr. Sci., Phys.-Math.

Hereditary creep of isotropic composites of random structure under a complex stress state

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics NAS Ukraine, 03057, Kyiv, 3 Nesterov Str., e-mail: maslov@inmech.kiev.ua

Розв'язано задачу нелінійної спадкової повзучості композитів випадкової структури в рамках нелінійної теорії в'язкопружності другого порядку. Спадкові функціонали використано для побудови загальних визначальних рівнянь складного напруженого стану. Принцип відповідності Шепері для квазілінійних в'язкопружних середовищ узагальнено щодо проблем спадкової повзучості. Отримано роз'вязок стохастичної крайової задачі про визначення концентрації напружень та їх релаксації в композиті з полімерною матрицею (ПМК). Для виведення повної системи в'язкопружних рівнянь другого порядку використовується метод послідовного наближення. Визначено функції повзучості, локально усереднені за в'язкопружною матрицею та пружними включеннями. Наведені приклади, що показують важливість взаємного впливу нелінійних пружних та в'язких властивостей компонентів на перерозподіл напружень біля включень у багатокомпонентних ПМК. Як практичний результат можна відзначити можливість прогнозування довготривалої міцності матеріалу, коли в'язкопружне поле напружень відомо в результаті комп'ютерного моделювання в околі включень.

Ключові слова: спадкова повзучість, полімер, композит, прогнозування.

Nonlinear hereditary creep problem of the mechanics of composites is solved within the framework of a second-order theory. The hereditary functionals are used to construct general constitutive relations. A stochastic boundary value problem for determining the stress concentration and its relaxation in metal matrix composite (PMC) is solved in Laplace-Carson image space. Shapery's correspondence principle for quasi-linear viscoelastic media is generalised on the hereditary creep problem and the method of successive approximation is used. The reduced creep functions and the stress concentration parameters are determined. Examples are given showing the importance of the mutual influence of nonlinear elastic and viscous properties of the components on stress redistribution near inclusions with possibility to predicting the long-term strength.

Key Words: hereditary creep, polymer, isotropic composite, prediction.

Статтю представив член-кор. НАН України Жук Я.О.

Композитні матеріали застосовуються в елементах конструкцій, які експлуатуються як в умовах тривалих одноразових, так і циклічних навантажень [1, 2]. У зв'язку з цим, для проектування нових матеріалів із заданими властивостями важливим є вивчення мікроструктурних напруг і деформацій, що змінюються в часі. Велике практичне значення має прогнозування наведених макроскопічних характеристик в'язкопружності і визначення їх залежності від форми включень, типу просторового армування, об'ємної концентрації компонентів. Раніше [1] було отримано розв'язки задач знаходження ефективних пружних постійних нелінійних стисливих і нестисливих пружних композитів. Тут розглянемо в'язкопружний ізотропний композитний матеріал випадкової структури і використаємо метод умовного усереднення [1], із застосуванням інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа-Карсона [3,4] та чисельних алгоритмів в середовищі Fortran 95. В межах теорії спадкової

© Б.П. Маслов, 2021

повзучості малих деформацій визначальне співвідношення між деформаціями і напруженнями вважаємо казілінійним, відповідно до модельних уявлень [5, 6]. Накопичена додаткова енергія $U(\boldsymbol{\sigma},t)$ в матеріалі, що проявляє властивість квазілінійної спадкової повзучості, може бути виражена формулою

$$U(\boldsymbol{\sigma},t)=\frac{1}{2}\int_{0^-}^{t}\int_{0^-}^{t}\boldsymbol{J}\left(2t-t_1-t_2\right)d\boldsymbol{\sigma}\left(t_1\right)d\boldsymbol{\sigma}\left(t_2\right)+ \\ +\frac{1}{3}\int_{0^-}^{t}\int_{0^-}^{t}\int_{0^-}^{t}\underline{\boldsymbol{J}}\left(3t-t_1-t_2-t_3\right)d\boldsymbol{\sigma}\left(t_1\right)d\boldsymbol{\sigma}\left(t_2\right)d\boldsymbol{\sigma}\left(t_3\right) \quad (1.1)$$

Тут $\boldsymbol{J}(t)$, $\underline{\boldsymbol{J}}(t)$ - функції повзучості другого та третього порядків [1, 6]. Тоді можемо записати для першого, лінійного $\boldsymbol{e}_1$

$$e_{1ij}(\boldsymbol{e},t)=(J_{ijkl}*d\sigma_{kl})(t),$$

і другого $\boldsymbol{e}_2$ наближень

$$e_{2ij}(\boldsymbol{e},t)=(J_{ijkl}*d\sigma_{kl})(t)+(d\sigma_{kl}*J_{ijklmn}*d\sigma_{mn})(t).$$

Застосуємо надалі узагальнений принцип відповідності Шепері [5, 6] для залежних від часу квазистатичних розв'язків квазілінійних в'язкопружних крайових задач. Це дозволяє аналізувати задачу спадкової повзучості механіки випадково армованих композитів, виходячи з відомого нелінійно пружного розв'язку та використанням чисельно-аналітичних інтегральних перетворень Фур'є та Лапласа-Карсона [3-5].

Деформації в спадковому матеріалі визначаються історією напружень $\boldsymbol{\sigma}(s)$, $s\in[0,t]$, а також початковими умовами $\boldsymbol{e}(t=0)=\boldsymbol{0}$. Тоді для лінійного середовища в загальній тензорній формі, після інтегрування (1.1), можна записати [5, 6]

$$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x},t)=\int_0^t\boldsymbol{J}(t-s)\frac{d}{ds}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},s)ds, \quad (1.2)$$

де $\boldsymbol{J}(t)$ тензор піддатливості (функція ретардації). Або в короткій символічній формі [5]

$$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x},t)=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{J}*\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})=(\boldsymbol{\sigma}*\dot{\boldsymbol{J}})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}), \quad (1.3)$$

де знаком $*$ позначена операція інтегральної згортки, точка над символом означає похідну по часу. Таким чином, вираз $(\boldsymbol{\sigma}*\dot{\boldsymbol{J}})(t)=(\boldsymbol{\sigma}*d\boldsymbol{J})(t)$ являє собою згортку Стілтьєса [2]. Якщо $f(t)$ – деяка неперервна функція на інтервалі $0\le t<\infty$, то перетворення Лапласа-Карсона (LC) функції $f(t)$ визначається наступним чином [2]

$$LC\{f(t)\}=f(s)=f_s=s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \quad (1.4)$$

В подальшому застосовуємо визначальний закон миттєвого деформування другого порядку малості за величиною деформацій [1, 3]

$$\boldsymbol{e}(s)=\boldsymbol{J}(s)\boldsymbol{\sigma}(s)+\boldsymbol{\sigma}(s)\underline{\boldsymbol{J}}(s)\boldsymbol{\sigma}(s)$$

Для аналізу здач прогнозу деформацій в рамках моделі спадкової повзучості (1.1) використовуємо узагальнений принцип відповідності Шепері [5]. Позначимо t час, $\boldsymbol{x}$ - положення матеріальної точки в просторі, $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x},t)$ - поточні деформації, $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t)$ поточні напруги, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ поточні переміщення. Припускаємо, що матеріал виявляє миттєву пружну реакцію, та позначимо $\boldsymbol{e}^e(\boldsymbol{x},t)$, $\boldsymbol{\sigma}^e(\boldsymbol{x},t)$, $\boldsymbol{u}^e(\boldsymbol{x},t)$ - миттєві пружні деформації, напруги і переміщення, відповідно. Функції накопиченої енергії $W(\boldsymbol{e})$ і додаткової енергії $U(\boldsymbol{\sigma})$ дають можливість знайти миттєві деформації (при повзучості) або миттєві напруги (процес релаксації)

$$U=U(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{x},t),\ \ \boldsymbol{e}^e(t)=\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{x},t), \quad (1.5)$$

$$W=W(\boldsymbol{e},\boldsymbol{x},t),\ \ \boldsymbol{\sigma}^e(t)=\frac{\partial W}{\partial\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{e},\boldsymbol{x},t). \quad (1.6)$$

Узагальнений принцип відповідності Р. Шепері щодо задач спадкової повзучості

Тут ми застосуємо узагальнений принцип відповідності для залежних від часу квазистатичних розв'язків нелінійних пружних і в'язкопружних крайових задач. Це дозволяє аналізувати спадкову задачу повзучості, виходячи з відомого нелінійно пружного розв'язку. Рівняння рівноваги запишемо у вигляді

$$div\,\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}. \quad (1.7)$$

Співвідношення між напруженнями Коші і модифікованими (відновленими) деформаціями $\boldsymbol{e}^e(t)$

$$\boldsymbol{\sigma}(t)=[h*d(\frac{\partial W}{\partial\boldsymbol{e}})^e](t),\ \ h(t)=g^{-1}(t) \quad (1.8)$$

Це призводить до трьох інтегродиференціальних рівнянь для трьох переміщень $u_i(\boldsymbol{x})$ при підстановці в (1.7). Розв'язок задачі спадкової повзучості має вигляд

$$\boldsymbol{\sigma}(t)=(h*d\boldsymbol{\sigma}^e)(t),\quad \boldsymbol{u}(t)=(g*d\boldsymbol{u}^e)(t), \quad (1.9)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^e(t)=(g*d\boldsymbol{\sigma})(t),\ \ \boldsymbol{u}^e(t)=(h*d\boldsymbol{u})(t), \quad (1.10)$$

де $\boldsymbol{\sigma}^e$ і $\boldsymbol{u}^e$ задовольняють рівнянням базової задачі нелінійної пружності (1.5), (1.7), (1.8)

разом з граничними умовами $\boldsymbol{t}^e = \boldsymbol{t}$ і початковою умовою $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}^e(0) = \boldsymbol{0}$. Таким чином, $\boldsymbol{u}^e$ задовольняють рівнянням відповідної нелінійної пружної задачі разом з тими ж масовими силами $\boldsymbol{b}^e = \boldsymbol{b}$ в тілі і граничними умовами $\boldsymbol{t}^e = \boldsymbol{P}$ на границі.

Локальна задача механіки спадкової повзучості при складному напруженому стані

Прогнозування параметрів спадкової повзучості композитів є одним з важливих чинників при розрахунку і конструюванні сучасних елементів конструкцій. Задача полягає у прогнозуванні повзучості за властивостями та об'ємному вмісту їх компонентів. Отже, ізотропний композит моделюємо неоднорідним середовищем, що займає об'єм V, складеним із N однорідних фаз з характеристичною функцією $\chi^{(r)}(\boldsymbol{x})$ обєму $V^{(r)}$, $(r \in [0, N])$. Крім того, приймається, що $V^{(r)} = V$ і міжфазний контакт є ідеальним. Функція повзучості кожної фази r

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) = \sum_{r=1}^{N} \boldsymbol{J}^{(r)}(t)\chi^{(r)}(\boldsymbol{x}) \qquad (2.1)$$

Причому $\chi^{(r)}(\boldsymbol{x}) = 1, \quad \forall \boldsymbol{x} \in V^{(r)}$ та $\chi^{(r)}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \notin V^{(r)}$ в іншому випадку. Об'ємне осереднення по V та $V^{(r)}$ позначається надалі відповідно $\langle \cdot \rangle$ та $\langle \cdot \rangle^{(r)}$. Об'ємне осереднення характеристичної функції, по фазі r дає значення обємної концентрації $c_r = \langle \chi \rangle^{(r)}$. Об'ємне осереднення функції f по представницькому обєму V та по фазі s позначено $\overline{f} = < f > = \frac{1}{V}\int_V f dv$ та $\overline{f}^{(s)} = < f >^{(s)} = \frac{1}{V^{(s)}}\int_{V^{(s)}} f dv$ відповідно.

Стохастичні рівняння рівноваги і граничні умови першого лінійного наближення, записані в області LC перетворень, можна представити у формі [1]

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{L}(\nabla)\boldsymbol{u}'_{(1)}(\boldsymbol{x}, s) = -\nabla\boldsymbol{\tau}_{(1)}(\boldsymbol{x}, s);\\
&\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}, s) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, s) - \overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, s);\\
&\boldsymbol{\tau}_{(1)}(\boldsymbol{x}, s) = \delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}, s)\boldsymbol{e}_{(1)}(\boldsymbol{x}, s);\\
&\delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}, s) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}, s) - \boldsymbol{L}; \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

рискою зверху позначені результати статистичного усереднення в зразку із випадковим тензором пружності $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}, s)$. Фур'є-образ $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{k})$ диференціального оператора визначається співвідношеннями [1, 3]

$$\begin{aligned}
&\left[\boldsymbol{L}(\boldsymbol{k})\right]_{im} = L_{ijmn}k_j k_m;\\
&\boldsymbol{L} = \mu_L(\alpha_L \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{I}), \ \alpha = \lambda / \mu, \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{L}$ - тензор модулів пружності однорідного тіла порівняння [1], тобто параметри μ_L, α_L є постійними в межах представницького обєму V, $\boldsymbol{I}$ - одиничний симетричний тензор четвертого рангу, $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x}, s)$ - тензор напружень поляризації. Функцію Гріна $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$ системи рівнянь (2.2) знайдемо з умови

$$\boldsymbol{L}(\nabla)\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{I}\delta(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}; \qquad (2.4)$$

Тут $\delta(\boldsymbol{x})$ - дельта функція Дірака, тоді

$$G_{im}(\boldsymbol{k}) = \left[\boldsymbol{L}(\boldsymbol{k})\right]^{-1}_{im}.$$

Використовуючи методику, викладену в роботах [1], розв'язок системи запишемо у формі інтеграла типу згортки по області V

$$\boldsymbol{e}'_{(1)}(\boldsymbol{x}_1, s) = \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) * \boldsymbol{\tau}_{(1)}(\boldsymbol{x}_2, s), \qquad (2.5)$$

Як приклад розглянемо спадкову повзучість композитного зразка, виготовленого із трикомпонентної суміші: полімерна матриця типу ED 10, що армована випадково розорієнтованими у просторі сфероїдальними включеннями скла та бору. Пружні та реологічні характеристики компонентів наведено в [1].

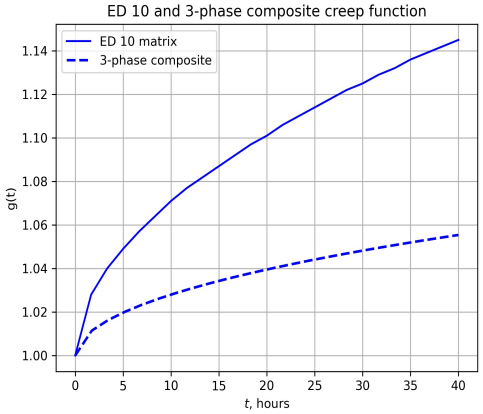


Рис.1 Зміна функцій повзучості матриці та трифазного композиту в залежності від часу t

На рис. 1 зображено криві залежності нормованої функції повзучості $g(t) = E^e J(t)$ від часу t. Суцільна лінія відповідає функції повзучості полімерної матриці. Штрихова лінія ілюструє поведінку функції повзучості для композитного матеріалу із вмістом арматури.

Список використаних джерел

1. *Khoroshun L.P., Maslov B.P., Shikula E.N, Nazarenko L.V.* Statistical Mechanics and Effective Properties of Materials. – Vol. 3 of the 12-volume series Mechanics of Composites, 1993.- 390 p. (in Russian).
2. *Голуб В.П., Маслов Б.П., Фернати П.В.* К определению параметров ядер наследственности изотропных линейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии // Теорет. и прикл. механика, 2013. – Том 53, №7. – С. 53-64.
3. *Маслов Б.П.* Застосування квазілінійної моделі в'язкопружності для прогнозування повзучості неоднорідного геологічного середовища // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки, 2019, №1. – С. 122-125.
4. *Asaro R.J., Lubarda V. A.* Mechanics of Solids and Materials. Cambridge University Press, 2006, 880 p.
5. *Christensen R.M.* Theory of viscoelasticity. An Introduction. – New-York and London: Academic Press Inc., 2nd ed., 1982. – 370 p.
6. *Golub V.P., Maslov B.P., and Fernati P.V.* Identification of the Hereditary Kernels of Isotropic Linear Viscoelastic Materials in Combined Stress State. I. Superposition of Shear and Bulk Creep // International Applied Mechanics, 2016. – Vol. 52, N2, pp. 165-174.
7. *Golub V.P., Maslov B.P., and Fernati P.V.* Identification of the Hereditary Kernels of Isotropic Linear Viscoelastic Materials in Combined Stress State. II. Deviators Proportionality // International Applied Mechanics, 2016. – Vol. 52, N6, pp.111-125.
8. *Maslov B.P.* Combined numerical and analytical determination of Poisson's ratio for viscoelastic isotropic materials // International Applied Mechanics, 2018. – 54, N2, pp. 220-230.
9. *Schapery R.A.* Correspondence principles and a generalized integral for large deformation and fracture analysis of viscoelastic media // International Journal of Fracture, July 1984. – Vol. 25, Issue 3, pp. 195-223.

References

1. KHOROSHUN L.P., MASLOV B.P., SHIKULA E.N, NAZARENKO L.V. Statistical Mechanics and Effective Properties of Materials. – Vol. 3 of the 12-volume series Mechanics of Composites, 1993.- 390 p. (in Russian).
2. Golub V.P., Maslov B.P., Fernaty P.V. K opredelenyiu parametrov yader nasledstvennosty yzotropnыkh lyneino-viazkoupruhykh materyalov pry slozhnom napriazhennom sostoianyy // Teoret. y prykl. mekhanyka, 2013. – Tom 53, №7. – S. 53-64.
3. Maslov B.P. Zastosuvannia kvaziliniinoi modeli viazkopruzhnosti dlia prohnozuvannia povzuchosti neodnoridnoho heolohichnoho seredovyshcha // Visnyk Kyivskoho natsionalnoho universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Seriia fizyko-matematychni nauky, 2019, №1. – S. 122-125.
4. Asaro R.J., Lubarda V. A. Mechanics of Solids and Materials. Cambridge University Press, 2006, 880 p.
5. Christensen R.M. Theory of viscoelasticity. An Introduction. – New-York and London: Academic Press Inc., 2nd ed., 1982. – 370 p.
6. Golub V.P., Maslov B.P., and Fernati P.V. Identification of the Hereditary Kernels of Isotropic Linear Viscoelastic Materials in Combined Stress State. I. Superposition of Shear and Bulk Creep // International Applied Mechanics, 2016. – Vol. 52, N2, pp. 165-174.
7. Golub V.P., Maslov B.P., and Fernati P.V. Identification of the Hereditary Kernels of Isotropic Linear Viscoelastic Materials in Combined Stress State. II. Deviators Proportionality // International Applied Mechanics, 2016. – Vol. 52, N6, pp.111-125.
8. Maslov B.P. Combined numerical and analytical determination of Poissons ratio for viscoelastic isotropic materials // International Applied Mechanics, 2018. – 54, N2, pp. 220-230.
9. Schapery R.A. Correspondence principles and a generalized integral for large deformation and fracture analysis of viscoelastic media // International Journal of Fracture, July 1984. – Vol. 25, Issue 3, pp. 195-223.

Надійшла до редколегії 29.08.21

УДК 534.7:[612.16+519.216] https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.14

Олійник В. Н. [1], к.ф.-м.н., с.н.с.

Статистичний алгоритм для швидкої оцінки частоти серцебиття й локалізації серцевих тонів у фонокардіограмах, записаних за допомогою електронних стетоскопів

[1] Інститут гідромеханіки НАН України, 03057, м. Київ, вул. Марії Капніст, 8/4,
e-mail: v_oliynik@yahoo.com

V. N. Oliynik[1], Cand. Phys.-Math. Sci.

A statistical algorithm for fast estimation of heart rate and localization of cardiac sounds in phonocardiograms recorded by electronic stethoscopes

[1] Institute of Hydromechanics of NAS of Ukraine, 03057, Kyiv, Marii Kapnist str., 8/4,
e-mail: v_oliynik@yahoo.com

Представлено пілотну версію алгоритму для швидкого визначення тривалостей систолічної й діастолічної фаз серцевого циклу на базі статистичної обробки цифрової фонокардіограми. Розроблена методика включає локалізацію серцевих тонів у записі за допомогою квантильної дихотомії та модовий аналіз обчислених часових інтервалів між сусідніми знайденими піками. Після цього будується діаграма розсіювання в термінах часових інтервалів до і після кожного піку. Стабільність серцевого ритму визначається щільністю кластеру, який утворюється поблизу перетину двох модальних значень, нанесених уздовж осей. При домінуванні в сигналі кардіологічної компоненти запропонований підхід дозволяє досить надійно визначати моменти появи першого й другого серцевих тонів практично на кожному з циклів роботи серця. Це відкриває можливість для аналізу варіації тривалостей окремих фаз серцевих скорочень з плином часу. Завдяки роботі безпосередньо в часовій області й низьким обчислювальним затратам алгоритми цього класу придатні для застосування в портативних діагностичних системах з обмеженими процесорними потужностями.

Ключові слова: фонокардіографія, серцеві тони, цифрова фонограма, квантиль, мода.

A draft version of the algorithm for fast determination of duration of the systolic and diastolic phases of the cardiac cycle based on a statistical analysis of a digital phonocardiogram is presented. The developed technique includes localization of the cardiac tones in the record by a quantile dichotomy and modal analysis of the calculated time intervals between the adjacent detected peaks. Next, the scatter plot is constructed in terms of time intervals before and after each peak. The stability of the cardiac rhythm is determined by the density of the cluster occurring near the cross-section of two modal values plotted along the axes. At dominance of a cardiac component in the signal, the discussed approach allows quite reliable determination of the moments of the emergence of the first and second cardiac sounds tones practically on each of the cardiac cycles. This opens the possibility to analyze the variation in the duration of separate phases of heart contractions over time. Due to the work directly in the time domain and low computational costs, the algorithms of this class are suitable for application in portable diagnostic systems with limited processor power.

Key Words: phonocardiography, cardiac sounds, digital sound record, quantile, mode.

Communicated by Cor.-Member of the NAS of Ukraine Zhuk Ya.O.

Introduction

The key role of the heart in ensuring the vital functions of the human body determines the unfailing interest in its studying. It is well known that the operation of this organ is accompanied by various biophysical phenomena. This makes the heart a unique manifold object of investigation far from fully revealing its secrets. Indeed, one can consider it as a hydraulic pump, an electromagnetic generator, a source of vibroacoustic signals, and so on.

Finally, the heart is a classic example of the essentially nonlinear dynamic system demonstrating the full range of possible regimes from almost exact periodicity to chaos.

© V.N. Oliynik, 2021

The great variety of physical effects emerging at cardiac activity lead to the creation of several objective instrumental methods of medical diagnosis of the heart. In particular, the electro- and phonocardiography related to the interpretation of the collateral electric and acoustic phenomena should be noted in this context.

There is now a demand for the creation of portable and easy-to-use medical tools for telemedicine diagnosis and self-diagnosis of the cardiovascular system. Expensive stationery echocardiographs are absolutely unsuitable for this purpose. Therefore, one should focus on passive non-invasive techniques that are not associated with the potentially negative effect of ultrasound on the patient's body. A preliminary analysis shows that the phonocardiographic examination method may be even more suitable than the electrocardiographic one for the mentioned segment of the medical equipment market [1, 2]. This inevitably puts forward the necessity for developing fast, simple, reliable, and clear ways to present data on the characteristics of cardiac activity. Based on this, in this study, we would focus on current issues of digital phonocardiograms processing with a focus on methods that require minimal computing power.

Features of Cardiac Sounds

It is known that the work of the heart is of cyclic nature. It consists of the sequential repetition of similar phases that correspond to the contraction and relaxation of the myocardium, the opening, and the closing of the heart valves. Determination of cardiac rhythm, quantitative parameters of individual phases, their regularity, and duration are a valuable part of cardiovascular diagnostics.

The cardiac sounds are the short pulses (tones) generated at the opening and closing of the tricuspid pulmonary, mitral, and aortic valves. They distinguish four cardiac sounds, S1 ,..., S4, still, only S1 and S2 can be usually heard. Their appearances coincide with the start and the end of the myocardium contraction phase, the systole. The emergence of S3 and/or S4 sounds, along with valve murmurs, are evidence of cardiac pathologies [2, 3].

Note that the electrocardiographic examination does not provide exact localization of the moments of operation of valves. The reason is that the emergence of the measured electric signal is related to the myocardium repolarization-depolarization being the processes of fundamentally different origins.

A Statistical Approach to Analysis of Phonocardiograms

Despite their cyclic nature, cardiac contractions are rarely strictly periodic. Such aperiodicity inevitably leads to the widening of the efficient band of cyclic frequencies of the cardiac signal. This results in the dramatic decrease of resolution of the spectral techniques when used for determining actual heart rate, including the cyclostationarity approach. On the other hand, the adaptive methods like the Empirical Modal Decomposition or Empirical Wavelet Transform are insufficiently reliable when separating the intrinsic signal modes related to cardiac activity [4].

The above difficulties require withdrawal from the use of spectral-frequency decomposition of the signal, traditional for various branches of acoustics. In these conditions, attention should be paid to the approaches which allow the analysis of the sampled phonocardiograms in the time domain. These include, in particular, the quantile analysis of statistics proposed in the 1940s by Maurice Kendall [5]. Currently, this young branch of mathematical statistics is actively developing. This results in the successful application of quantile-based techniques to process data in various fields of knowledge, from econometrics to psychophysiology.

The digital phonocardiogram is the recorded acoustic response of the cardiac activity sampled for the discrete sequence of instant values of the signal amplitudes. Within mathematical statistics, it is considered as the statistical population. The essence of the chosen approach is the statistical dichotomy of the series of amplitudes absolute values with a cut-off of the given portion of its terms having the relative length $0<p<1$ (where unity means the whole sequence). Call the number x_p the p-quantile of a probability distribution if the values of the p-th part of the statistical population are less or equal to x_p. In these terms, the median is the most common kind of a quantile with the level of \$0.5\$ since it divides the population into two parts of equal lengths.

The utility of a quantile dichotomy is manifested in much better separating sharp bursts in the numerical sequences than the analysis based on average values. For example, the median is a more reliable measure of the typical term than the Root Mean Square. It was already mentioned that the cardiac sounds have a pronounced impulse character and form short peaks on the phonogram. Therefore, cutting off the part of the sequence by a quantile close to unity provides the efficient localization of the instants associated with the components S1, S2,

etc. To apply this procedure, calculate the normalized signal energy by a standard Hilbert Transform. Then localize the peak values by a quantile with the level p. Practice shows that at a sufficiently high Signal-to-Noise Ratio, the acceptable range of p makes mostly from 0.8 to 0.95.

The next step is a modal analysis of the sequence of peak-to-peak intervals. This procedure allows the separation of the characteristic values supposed to correspond to systolic (from S1 to S2) and diastolic (from S2 to the next S1) intervals. Such recognition is practically possible since the duration of the systole is always shorter. Finally, the obtained values are grouped in the scatter plot, which is built in the coordinates of S1-S2 and S2-S1 intervals.

Application of the Method

Now proceed to an example of using the method. The considered record of cardiac sounds is obtained from a healthy male by electronic stethoscope paired with a smartphone. The signal was recorded with delayed breathing to improve the phonogram quality. The resulting Signal-to-Noise Ratio in a frequency range from 50 Hz to 400 Hz was not worse than 12 dB.

A fragment of the time dependence of normalized energy of the chosen cardiac signal is shown in fig. 1. A horizontal line in the plot corresponds to the quantile with a level p=0.9. Study the properties of the localized high-energy maximums shown with the markers.

The main problem of phonocardiography is the practical impossibility of signal recording without impulse vibrational interference from traffic, vibration noise from the friction of the sensor against the skin, etc. Therefore, some "parasitic" peaks may occur in the set detected using quantile localization. Moreover, some cardiac sounds might be omitted since the strength of individual heartbeats can vary significantly. Let us illustrate this point with fig. 2 depicting the evolution of time intervals between the adjacent detected peaks. Note that most of them separate into two subsets with quite regular properties. However, several false maxima are found that are not related to cardiac activity. Nevertheless, the applied basic statistical algorithm assessed the characteristic values of the systolic and diastolic intervals and the limits of their variation during the recording. Analysis of the frequency distribution of the calculated peak-to-peak intervals yields two vivid modal maximums of 0.3 sec and 0.425 sec.

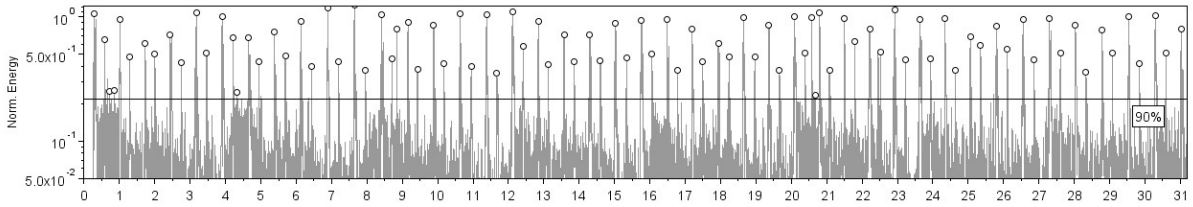


Fig. 1 Time dependence of normalized energy of a cardiac signal with a quantile localization of maximums.

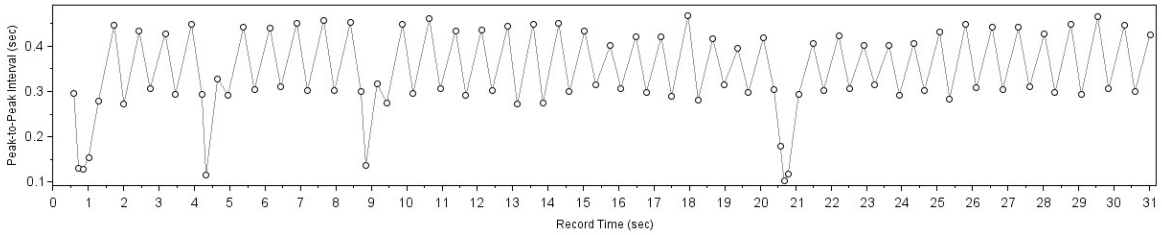


Fig. 2 Evolution of the intervals between the adjacent detected peaks over the record time.

Plot all localized energy maximums on the scatter diagram (fig. 3). Here, the shorter peak-to-peak intervals are set along the abscissa axis, and the longer ones are along the ordinate axis. One may consider them as durations of the systole and diastole, respectively. Two dashed straight lines stand for detected modes. As expected, the vast majority of the peaks form a dense cluster at the intersection of the modal values. Such behavior proves the absence of evident pathologies for the examined heart. The sum of the systolic and diastolic intervals gives the period of the cardiac cycle. It may be readily converted to a usual cardiac rate calculated in beats per minute.

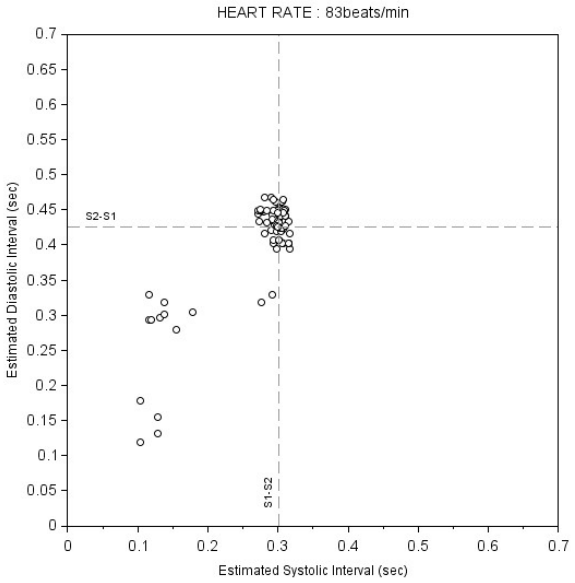


Fig. 3 The scatter diagram for peak-to-peak intervals

Conclusion

1. An algorithm for the statistical analysis of phonocardiograms in the time domain is developed and implemented. The proposed approach is based on the quantile localization of signal energy maximums related to the emergence of cardiac tones and subsequent modal analysis of time intervals between adjacent detected peaks.
2. The effectiveness of the method is illustrated by a particular example. For the case of dominance of a cardiac component in the record, it is possible to determine the typical values of the systolic and diastolic intervals and their variation with time.

Acknowledgments

The author is grateful to the Governmental Budget Program, "Support for State-Priority Research and Scientific Development" (code 6541230), for financing this study.

Список використаних джерел

1. *Baptista R.* Design and development of a digital stethoscope encapsulation for simultaneous acquisition of phonocardiography and electrocardiography signals: the SmartHeart case study / R. *Baptista, H. Silva, M. Rocha* // Journal of Medical Engineering & Technology. – 2020. –Vol. 44, no. 4. – P. 153–161.
2. *Saltman A.* Understanding phonocardiograms (PCG). [Електронний ресурс]. / A. Saltman // Eko. – Електронні дані. – Режим доступу: https://www.ekohealth.com/learning/phonocardiogram-pcg-the-cinderella-of-cardiac-diagnostics. – Дата публікації: 20.09.2021.
3. *Ashley E. A.* Cardiology Explained. / E. A. Ashley, J. Niebauer – London: Remedica, 2004. – 243 p.
4. *Mafi M.* Signal Processing Methods for Heart Rate Detection Using the Seismocardiogram: Master's thesis / Mahsa Mafi. – Saskatoon: University of Saskatchewan, 2015. – 80 p.
5. *Kendall M. G.* Note on the distribution of quantiles for large samples / M. G. Kendall // Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society. – 1940-1941. – Vol. 7, no. 1. – P. 83–85.

References

1. BAPTISTA, R., SILVA, H. and ROCHA, M. (2020) Design and development of a digital stethoscope encapsulation for simultaneous acquisition of phonocardiography and electrocardiography signals: The SmartHeart case study. *Journal of Medical Engineering & Technology.* 44(4). p.153–161.
2. SALTMAN, A. (2021) *Understanding phonocardiograms (PCG)*. [Online] Available from: https://www.ekohealth.com/learning/phonocardiogram-pcg-the-cinderella-of-cardiac-diagnostics.
3. ASHLEY, E. A. and NIEBAUER, J. (2004) *Cardiology Explained.* London: Remedica.
4. MAFI, M. (2015) *Signal Processing Methods for Heart Rate Detection Using the Seismocardiogram*, (Master's thesis). Saskatoon: University of Saskatchewan.
5. KENDALL, M. G. (1940–1941) Note on the distribution of quantiles for large samples. *Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society.* 7(1). p.83–85.

Received: 22.08.21

УДК 539.3 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.15

Онишкевич В. М.[1], к.ф.-м.н., доц.,
Барабаш Г. М.[2], к.ф.-м.н., доц.

Моделювання контактної взаємодії «третім тілом» у трибологічних задачах

[1] Національний лісотехнічний університет України, 79057, м. Львів, вул. Генерала Чупринки, 103,
e-mail: onyshkevych@nltu.edu.ua
[2] Львівський національний університет імені Івана Франка, 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1,
e-mail: galynabarabash71@gmail.com

V. M. Onyshkevych[1], Ph. D. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.,
G. M. Barabash[2],Ph. D. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.

Modelling of contact interaction by “third body” in tribological problems

[1] Ukrainian National Forestry University, 79057, L’viv, General Chuprynka str., 103,
e-mail: onyshkevych@nltu.edu.ua
[2] Ivan Franko National University of L’viv, 79000, L’viv, Universytetska str., 1,
e-mail: galynabarabash71@gmail.com

Розглядається метод визначення термопроникності контакту пари тертя, при якому пропонується математично моделювати режими тертя, зношування та теплоутворення за допомогою розгляду так званого умовного «третього тіла» – тонких приповерхневих і проміжкових шарів контактуючих тіл, фізико-механічні властивості яких відрізняються від властивостей тіл контактної пари, та мікрогеометрією поверхонь тіл у контактній зоні. Для визначення впливу вхідних параметрів на зміну температури та теплових потоків аналітично розв’язано нестаціонарну контактну задачу термопружності з тепловиділенням від дії сил тертя на межі двох півпросторів.

Ключові слова: контакт, трибологія, термопроникність.

The variety of factors affecting the thermal conditions of a frictional couple results in complexity of the simulation of this problem. Among these factors, thermophysical (thermal conductivity, specific heat, coefficient of linear expansion of bodies, etc.) and also mechanical ones (elasticity, hardness of contacting bodies, etc.) play an important role. The conditions of friction, wear and heat generation are also determined by the characteristics of the so-called “third body”, i.e., thin near-surface and intermediate layers, the physical and mechanical properties of which differ from those of the interacting bodies, and by the microgeometry of their surfaces in the contact zone. The method of determination of thermal contact conductance in mathematical modelling of contact interaction with considering friction and hear generation by “third body” is presented. Using of modified conditions of heat contact in mathematical model of contact thermoelasticity taking into account of friction and heat generation is proposed. After numerical analysis, the graphs of dependence of thermal contact conductance on the input parameters are constructed and substantial influence of some of them is detected. On the example of one-dimensional non-stationary contact problem of thermoelasticity with heat generation of friction the influence of some physical and mechanical parameters on the temperature and heat fluxes in the contact bodies is investigated.

Key Words: contact, tribology, thermal conductance.

Статтю представив член-кор. НАН України Жук Я.О.

1. Вступ

Різноманітність чинників впливу на тепловий режим типологічної пари зумовлює складність опису та математичного моделювання такої практичної науково-технічної задачі. Серед факторів впливу є як теплофізичні (теплопровідність, теплоємність, коефіцієнт лінійного розширення взаємодіючих тіл та інші), так і механічні (пружність, твердість тощо). Вперше термопружна контактна взаємодія тіл за наявності поверхневих теплофізичних неоднорідностей була досліджена в [1]. Пропонується математично моделювати режими

© В.М. Онишкевич, Г.М. Барабаш, 2021

тертя, зношування та теплоутворення за допомогою розгляду так званого умовного «третього тіла» [2] – тонких приповерхневих і проміжкових шарів контактуючих тіл, фізико-механічні властивості яких відрізняються від властивостей тіл контактної пари, та мікрогеометрією поверхонь тіл у контактній зоні.

2. Модель «третього тіла»

Для дослідження контактної термопружності з урахуванням тертя і теплоутворення за вихідні умови використаєм узагальнені умови теплового контакту, які враховують коефіцієнт термопроникності контакту [1]:

$$\lambda\Delta\left(t^{(1)}+t^{(2)}\right)+2\left(\lambda^{(1)}\frac{\partial t^{(1)}}{\partial n}-\lambda^{(2)}\frac{\partial t^{(2)}}{\partial n}\right)= = c\left(\dot{t}^{(1)}+\dot{t}^{(2)}\right)-2Q, \quad (1)$$

$$\lambda\Delta\left(t^{(1)}-t^{(2)}\right)+2\left(\lambda^{(1)}\frac{\partial t^{(1)}}{\partial n}+\lambda^{(2)}\frac{\partial t^{(2)}}{\partial n}\right)- -12h\left(t^{(1)}-t^{(2)}\right)=c\left(\dot{t}^{(1)}-\dot{t}^{(2)}\right), \quad (2)$$

де індексами «1» та «2» позначено величини, які відносяться відповідно до першого і другого тіла; n – нормаль до поверхні контакту тіл; λ – зведена теплопровідність; Δ – двовимірний оператор Лапласа; c – зведена теплоємність; Q – інтенсивність теплових джерел, h – коефіцієнт термопроникності контакту. Проведений числовий аналіз показав, що нехтування коефіцієнтом λ незначно впливає на розподіл температурних полів у тілах пари тертя, а суттєвий вплив на результати має коефіцієнт термопроникності контакту h. Тому для практичних розрахунків можна рекомендувати такі спрощені теплофізичні умови на ділянці контакту:

$$\lambda^{(1)}\frac{\partial t^{(1)}}{\partial n}-\lambda^{(2)}\frac{\partial t^{(2)}}{\partial n}=\frac{c}{2}\left(\dot{t}^{(1)}+\dot{t}^{(2)}\right)-Q, \quad (3)$$

$$\lambda^{(1)}\frac{\partial t^{(1)}}{\partial n}+\lambda^{(2)}\frac{\partial t^{(2)}}{\partial n}-2h\left(t^{(1)}-t^{(2)}\right)=\frac{c}{6}\left(\dot{t}^{(1)}-\dot{t}^{(2)}\right). \quad (4)$$

З'ясовано [2], що середня температура в області контакту тіл мало відрізняється від температури $t^{(1)}=t^{(2)}$ при ідеальному тепловому контакті тіл. Оскільки для знаходження коефіцієнта термопроникності контакту h, який пов'язує тепловий потік і різницю температур ($q=h\Delta t$), необхідно знати середню температуру, то розв'язок задачі із запропонованими спрощеними граничними умовами (3)-(4) при $h\to\infty$ можна розглядати і як перший етап для знаходження h. Фактори, від яких залежить h, як і весь процес теплоутворення, є численними та складними [2]. Проведений числовий аналіз експериментальних даних дозволив встановити суттєвий вплив на зміну термопроникності контакту деяких з них (рис. 1 та рис. 2).

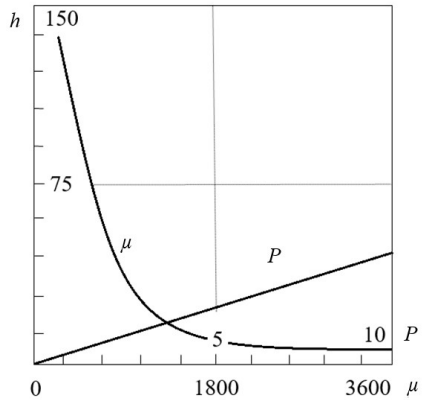


Рис. 1 Залежність коефіцієнта термопроникності контакту h (кВт/м^{2}К) від тиску P (МПа) та твердості за Мейєром μ (МПа)

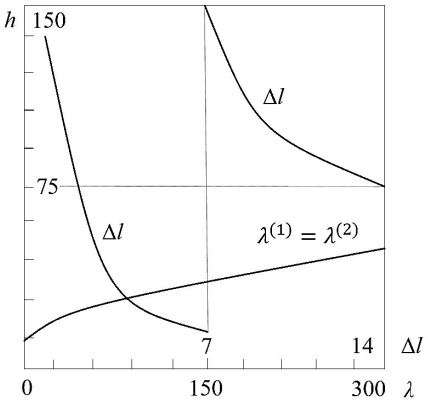


Рис. 2 Залежність коефіцієнта термопроникності контакту h (кВт/м^{2}К) від чистоти обробки поверхонь Δl (мкм) та коефіцієнтів теплопровідності (взято $\lambda^{(1)}=\lambda^{(2)}$, Вт/мК)

Для визначення впливу вказаних параметрів на різницю температур і теплових потоків розглянуто нестаціонарну контактну задачу термопружності з теплоутворенням від дії сил тертя на межі двох півпросторів, яка за складністю відповідає суперпозиції двох одновимірних задач термопружності.

3. Математична постановка задачі

Припускаємо, що два пружних півпростори з нульовою температурою спочатку є нерухомими, а в момент часу $\tau = 0$ зближуються і з тертям починають переміщуватися з відносною сталою швидкістю V. Процес тертя на межі контакту супроводжується теплоутворенням, теплові граничні умови враховують коефіцієнт термопроникності контакту h. Математично задача полягає в розв'язанні рівнянь термопружності

$$\frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial x_i^2} = \beta^{(i)} \frac{\partial t^{(i)}}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial^2 t^{(i)}}{\partial x_i^2} = \frac{1}{a^{(i)}} \frac{\partial t^{(i)}}{\partial \tau}, \qquad (5)$$

за таких умов:

$$t^{(i)}\Big|_{\tau=0} = 0, \qquad \sigma_{x_1} = \sigma_{x_2}, \qquad u^{(1)} + u^{(2)} = const,$$

$$\lambda^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial x_1} + \lambda^{(2)} \frac{\partial t^{(2)}}{\partial x_2} = fV\sigma_{x_1} = fV\sigma_{x_2}, \qquad (6)$$

$$\lambda^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial x_1} - \lambda^{(2)} \frac{\partial t^{(2)}}{\partial x_2} - 2h\left(t^{(1)} - t^{(2)}\right) = 0, \qquad (7)$$

де f – коефіцієнт тертя між тілами, $\beta = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t$, λ, μ – коефіцієнти Ламе, α_t – температурний коефіцієнт лінійного розширення, $a^{(i)}$ – коефіцієнт температуропровідності для i-го тіла, i=1,2.

4. Аналітичний розв'язок задачі

Застосувавши інтегральне перетворення Лапласа, отримано аналітичний розв'язок поставленої задачі (5)-(7). У випадку задання на безмежності напруження вигляду $\sigma\big|_\infty = P_0/\sqrt{\pi\tau}$, для розподілу температури і теплових потоків за глибиною отримано такі формули:

$$t^{(i)}(x_i, \tau) = \frac{fVP_0}{2\Lambda_i(\Lambda_i + \Lambda_j)} \left\{ 2\Lambda_i erfc \frac{x_i}{2\sqrt{a^{(i)}\tau}} - \right.$$

$$- (\Lambda_i - \Lambda_j) \exp\left(\frac{h^2(\Lambda_i + \Lambda_j)^2}{4\Lambda_{ii}^2 \Lambda_j^2} \tau + \frac{x_i h}{\sqrt{a^{(i)}}} \frac{\Lambda_i + \Lambda_j}{2\Lambda_i \Lambda_j} \right) \times$$

$$\left. \times erfc\left(\frac{x_i}{2\sqrt{a^{(i)}\tau}} + \frac{h(\Lambda_i + \Lambda_j)}{2\Lambda_i \Lambda_j} \sqrt{\tau} \right) \right\}, \qquad (8)$$

$$q^{(i)}(x_i, \tau) = \frac{fVP_0}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{x_i^2}{4a^{(i)}\tau} \right) + \frac{h(\Lambda_i - \Lambda_j)}{2\Lambda_i \Lambda_j} \times \right.$$

$$\times \exp\left(\frac{h^2(\Lambda_i + \Lambda_j)^2}{4\Lambda_{ii}^2 \Lambda_j^2} \tau + \frac{x_i h}{\sqrt{a^{(i)}}} \frac{\Lambda_i + \Lambda_j}{2\Lambda_i \Lambda_j} \right) \times$$

$$\left. \times erfc\left(\frac{x_i}{2\sqrt{a^{(i)}\tau}} + \frac{h(\Lambda_i + \Lambda_j)}{2\Lambda_i \Lambda_j} \sqrt{\tau} \right) \right\}, \qquad (9)$$

де $\Lambda_i = \lambda^{(i)}/\sqrt{a^{(i)}}$, i=1,2.

5. Числовий аналіз. Висновки

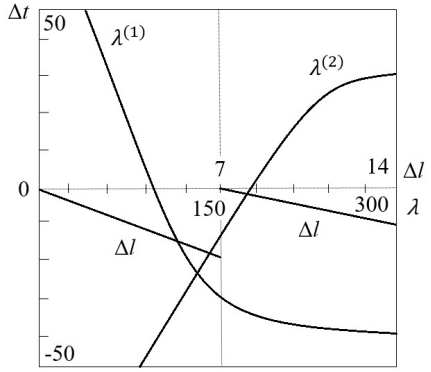


Рис. 3 Залежність різниці температур Δt (^{0}C) від чистоти обробки поверхонь Δl (мкм) та коефіцієнтів теплопровідності $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$ (Вт/мК)

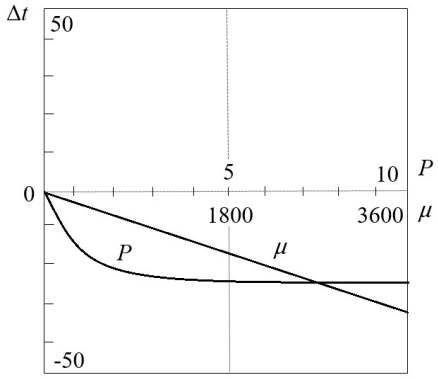


Рис. 4 Залежність різниці температур Δt (^{0}C) від тиску P (МПа) та твердості за Мейєром μ (МПа)

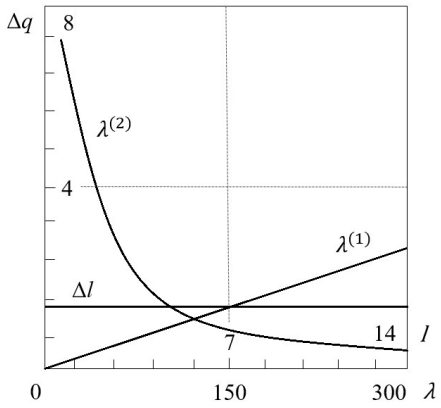


Рис. 5 Залежність теплових потоків Δq (кВт/м^{2}К) від чистоти обробки поверхонь Δl (мкм) та коефіцієнтів теплопровідності $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$ (Вт/мК)

Досліджено залежність різниці температур $\Delta t = t^{(2)} - t^{(1)}$ (рис. 3 та рис. 4) і теплових потоків $\Delta q = q^{(2)} - q^{(1)}$ (рис. 5 та рис. 6). Аналізуючи отримані числові результати, можна зробити такі висновки: із збільшенням теплопровідності контактуючих тіл і тиску в зоні контакту термопроникність контакту зростає, а при збільшенні жорсткості і твердості матеріалів тіл – спадає. Із збільшенням теплопровідності нижнього тіла, жорсткості та твердості матеріалів пари тертя різниця температур контактуючих тіл зростає, а при збільшенні теплопровідності верхнього тілі – спадає. Зміна номінального тиску між тілами на ділянці контакту мало впливає на різницю температур і теплових потоків у тілах. Із збільшенням теплопровідності верхнього тіла різниця теплових потоків контактуючих тіл зростає, для нижнього тіла ефект протилежний. Зміна твердості та жорсткості матеріалів контактуючих тіл мало впливає на різницю теплових потоків у них.

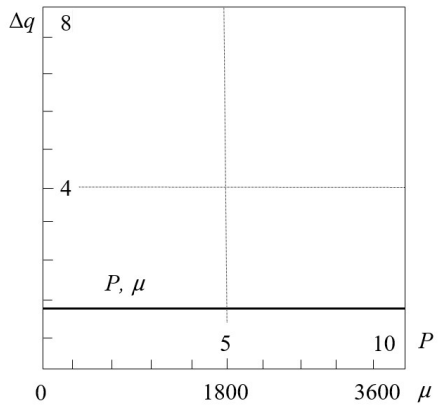


Рис. 6 Залежність теплових потоків Δq (кВт/м^{2}К) тиску P (МПа) та твердості за Мейєром μ (МПа)

Список використаних джерел

1. *Мартыняк Р.М.* Термоупругое контактное взаимодействие тел при наличии поверхностных теплофизических неоднородностей / Р.Н. Швец, Р.М. Мартыняк // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1988. – Вып. 27. – С. 23-28.
2. *Онишкевич В.М.* Дослідження впливу властивостей «третього тіла» на теплоутворення від тертя / В.П. Левицький, В.М. Онишкевич // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – Вип. 42, №1. – С. 82-86.

References

1. SHVEC, R. N. & MARTYNIAK, R. M. (1988) Termouprugoie kontaktnoie vzaimodeystviye tel pri nalichii poverhnostnyh teplofizicheskih neodnorodnostey. *Mat. metody i fiz.-meh. polia.* 27. p. 23-28.
2. LEVYTSKYI, V.P. & ONYSHKEVYCH, V.M. (1999) Doslidjennia vplyvu vlastyvostey “tretiogo tila” na teploutvorennia vid tertia. *Mat. metody ta fiz.-meh. polia.* 42(1). p. 82-86.

Надійшла до редколегії 29.08.21

https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.16

УДК 539.376

Плащинська А.В., к.т.н., с.н.с.

Щодо способу розрахунку кінетики накопичення пошкодження вздовж фронту тріщини втоми в тонких пластинах

Національна академія наук України, Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка, 303057, м. Київ, вул. Нестерова, 3
e-mail: creep@inmech.kiev.ua

Alla V. Plashchynska, Ph.D.

On the method of the damage accumulation analysis in front of the fatigue crack in thin plates

National Academy of Science of Ukraine, S.P.Timoshenko Institute of Mechanics, 03057, Kyiv, Nesterov str., 3,
e-mail: creep@inmech.kiev.ua

Розглянуто задачу моделювання процесу накопичення пошкоджень вздовж фронту руйнування при втомі в тонкій ізотропній пластині. Розв'язок задачі побудовано на підставі поєднання концепцій механіки руйнування та механіки безперервного пошкодження. Запропоновано чисельний розв'язок інтегрального рівняння руху фронту тріщини. Розгляд зазначеного рівняння як суперпозиції множини рекурентних рівнянь для кожного моменту часу дозволяє змоделювати стрибкоподібний характер зростання тріщини втоми та врахувати історію накопичення пошкодження у матеріалі пластини в процесі навантаження. Отримано чисельний розв'язок тестової задачі про розповсюдження тріщини втоми в тонкій пластині з алюмінієвого сплаву 7075-Т6 за одновісного асиметричного багатоциклового розтягу-стиску. Побудовані залежності довжини тріщини втоми від числа циклів навантаження задовільно узгоджуються з експериментальними даними.

Ключові слова: тріщина втоми, пошкодження, тонка пластина, асиметричний цикл навантаження.

The problem on modeling the process of damage accumulation along the fracture front at fatigue in a thin isotropic plate is considered. The solution of the problem is based on joined of the concepts of fracture mechanics and mechanics of continuous damage. A numerical solution of the integral equation of crack front motion is proposed. Consideration of this equation as a superposition of a set of recurrent equations for each moment allows us to model the jumping nature of the fatigue crack growth and take into account the history of damage accumulation in the plate material during loading. A numerical solution of the test problem on the fatigue crack propagation in a thin plate made of aluminum alloy 7075-T6 with uniaxial asymmetric cyclic tension-compression is obtained. The constructed dependences of the fatigue crack length on the number of load cycles agree satisfactorily with the experimental data.

Keywords: fatigue crack, damage, thin plate, asymmetric load cycle.

Статтю представив член-кор. НАН України Жук Я.О.

Вступ

Побудова моделей руйнування внаслідок втоми є актуальною задачею при прогнозуванні термінів безпечної експлуатації елементів конструкцій в умовах багатоциклового навантаження. Одним з перспективних шляхів у цьому напрямку є розгляд процесу накопичення пошкоджень у матеріалі конструкцій як рушійної сили для зародження та розповсюдження тріщин втоми. На основі поєднання концепцій механіки руйнування та механіки безперервного пошкодження побудовано двостадійну модель розповсюдження тріщини втоми [1]. Модель дозволяє з єдиних позицій визначити тривалість інкубаційного періоду та стадію розповсюдження тріщини втоми. Отримано аналітичні розв'язки задач про розповсюдження тріщини втоми в тонких пластинах з концентраторами напружень при багатоцикловому асиметричному навантаженні [2].

У даній роботі розглядається чисельний спосіб розв'язання задачі про розповсюдження тріщини втоми в тонкій ізотропній пластині за одновісного асиметричного багатоциклового

© А.В.Плащинська, 2021

розтягу-стиску з урахуванням історії накопичення пошкодження вздовж фронту руйнування.

1. Постановка задачі. Основні співвідношення

Розглянемо тонку нескінченну ізотропну пластину з центральною тріщиною нормального відриву (рис. 1), розташовану вздовж осі x. Початкову напівдовжину тріщини позначимо ℓ_0, а поточну – $\ell(n)$, число циклів навантаження позначимо n. Береги тріщини вільні від навантаження, а в напрямку осі $0y$ на

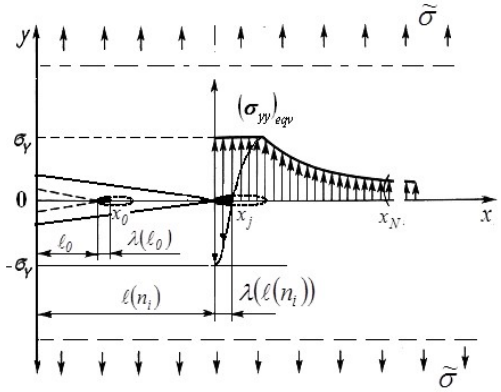


Рис. 1. Пластина з тріщиною

нескінченності прикладене одновісне багатоциклове асиметричне навантаження $\widetilde{\sigma}$

$$\begin{aligned}&\widetilde{\sigma} = \sigma_m + \sigma_a \sin(2\pi n);\\ &\left(\sigma_{\max} = (\sigma_m + \sigma_a) < \sigma_Y\right),\end{aligned} \qquad (1.1)$$

де σ_m, σ_a – значення середнього та амплітудного напруження циклу; σ_Y – границя текучості матеріалу. Вважаємо, що σ_a не залежить від дискретного часу n (стаціонарний режим) і прикладається з частотою $f \ge 10$ Гц, а максимальне напруження циклу $\sigma_{\max}$ не перевищує границі текучості матеріалу σ_Y (багатоциклова втома). У цьому випадку основний масив пластин деформується пружно, а руйнування внаслідок втоми є квазікрихким.

Для подальшого розгляду задачі, асиметричний цикл навантаження (1.1) зводимо до еквівалентного йому за числом циклів до руйнування n_R симетричного циклу [3], у вигляді

$$\begin{aligned}&\widetilde{\sigma}_{eqv}(n) = (\sigma_a)_{eqv}\sin(2\pi n)\\ &(\sigma_a)_{eqv} = \left[\cos\left[\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_m}{\sigma_B}\right]\right]^{-\eta}\sigma_a\end{aligned}, \qquad (1.2)$$

де $\widetilde{\sigma}_{eqv}$ – еквівалентне циклічне напруження симетричного циклу; $(\sigma_a)_{eqv}$ – амплітуда еквівалентного циклічного напруження; σ_B – границя міцності матеріалу пластин на розтяг; η – коефіцієнт чутливості матеріалу пластин до асиметрії циклу навантаження за одновісного розтягу-стиску.

Відповідно до моделі тріщини втоми Райса [4] в околі її вершини формуються монотонна та циклічна пластичні зони. Довжину циклічної пластичної зони визначаємо з рівняння [5]

$$\lambda\big(\ell(n)\big) = \frac{1}{8}\left[\frac{\pi}{2}\frac{(\sigma_a)_{eqv}}{\sigma_Y}\right]^2 \ell(n). \qquad (1.3)$$

За визначальне співвідношення процесу руйнування внаслідок втоми розглядаємо еволюційне рівняння накопичення пошкодженості з початковими умовами у вигляді

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\omega(x,n)}{dn} = D\left[\dfrac{\left(\Delta\widetilde{\sigma}_{yy}(x,n)\right)_{eqv}}{1-\omega(x,n)}\right]^q;\\ \omega(x,n) = \begin{cases}0 & \text{при } n_0 = 0;\\ 1 & \text{при } n = n_R;\end{cases}\end{cases} \qquad (1.4)$$

де $\omega(n,x)$ – скалярна функція пошкодження, що залежить від числа циклів n навантажень та від координати $x = \ell(n) + \lambda\big(\ell(n)\big)$ на фронті тріщини; n_R – число циклів до руйнування в точці x; $\left(\Delta\widetilde{\sigma}_{yy}(x,n)\right)_{eqv}$ – розмах еквівалентних циклічних напружень в околі вершини тріщини на момент часу n, що визначається з розв'язку пружної задачі; D, q – коефіцієнти, що характеризують інтенсивність накопичення пошкоджень.

Задача полягає у побудові способу вирішення задач кінетики тріщин втоми з урахуванням історії накопичення пошкодження $\omega(n,x)$ вздовж фронту руйнування в будь-який момент часу.

2. Чисельний алгоритм. Тестова задача

Шляхом інтегрування еволюційного рівняння (1.4), отримаємо рівняння руху фронту тріщини втоми у вигляді

$$\int_0^1 [1-\omega(x,n)]^q d\omega = \\ = (1+q)D\left\{\int_0^n [(\Delta\sigma_{yy}(x,n))_{eqv}]^q dn\right\}. \quad (2.1)$$

Розглянемо рух тріщини втоми на N дискретних проміжках часу $n_i \le n \le n_{i+1}$, $(i=0,N)$, та визначимо рівень накопиченого пошкодження в точках вздовж фронту руйнування з координатами $x_j = \ell(n_i) + \lambda(\ell(n_i)), \quad j = i, N$. Інтегральне рівняння (2.1) запишемо як суперпозицію рекурентних рівнянь для кожного проміжку часу у вигляді

$$\sum_{i=0}^{N} \int_{\omega(n_i,x_j)}^{\omega(n_{i+1},x_j)} [1-\omega(n_i,x_j)]^q d\omega = \\ = D\sum_{i=0}^{N} \int_{n_i}^{n_{i+1}} \left((\sigma_a)_{eqv}\sqrt{\frac{\ell(n_i)}{2(x_j-\ell(n_i))}}\right)^q dn; \quad (2.2)$$
$$i=0,N \quad j=i,N$$

де $(\sigma_a)_{eqv}$ – еквівалентні амплітудні напруження циклу навантаження; $\omega(n_i, x_j)$ пошкодження, яке накопичується за час n_i вздовж фронту тріщини. При виконанні критерію руйнування

$$\omega(n_{i+1}, x_j) = 1, \quad j = i, \quad (2.3)$$

тріщина просувається вздовж фронту руйнування стрибками на довжину циклічної пластичної зони $\lambda(\ell(n_i))$.

Задаючи в рівнянні (2.2) початкові умови $n_0 \le n \le n_1 \quad (n_0 = 0)$, та рівня пошкоджень $\omega(n_0, x_0) = 0, \omega(n_1, x_0) = 1$, визначаємо тривалість інкубаційного періоду

$$n_1 = \left[(q+1)D\left[(\sigma_a)_{eqv}\sqrt{\frac{\ell(n_0)}{2(x_0-\ell(n_0))}}\right]^q\right]^{-1}. \quad (2.4)$$

Рівень накопиченого пошкодження $\omega(n_{i+1}, x_j)$, за проміжок часу $n_i \le n \le n_{i+1}$, $(i=0,N)$ по координатах по фронту тріщини визначаємо інтегруючи рівняння (2.2) за співвідношенням

$$\omega(n_{i+1}, x_j) = 1 - \left([1-\omega(n_i,x_j)]^{q+1} - (q+1)D\left[(\sigma_a)_{eqv}\sqrt{\frac{\ell(n_i)}{2(x_j-\ell(n_i))}}\right]^q (n_{i+1}-n_i)\right)^{\frac{1}{1+q}}, \quad (2.5)$$

де число циклів до руйнування в точці x_i

$$n_{i+1} = n_i + [1-\omega(n_i,x_i)]^{q+1}\left[(q+1)D\left[\sigma_{a,eqv}\sqrt{\frac{\ell(n_i)}{2(x_i-\ell(n_i))}}\right]^q\right]^{-1}. \quad (2.6)$$

визначається з критерію руйнування (2.3).

Застосуємо розглянутий алгоритм до розв'язання тестової задачі про рух тріщини нормального відриву (рис.1) з початковою напівдовжиною $\ell_0 = 2{,}54\cdot10^{-3}$ м у тонкій нескінченій пластині з алюмінієвого сплаву 7075-Т6 за багатоциклового асимметричного розтягу-стиску (1.1), де $\sigma_a = 69$ МПа $\sigma_m = 138$ МПа, (коефіцієнт асиметрії циклу $R = 0{,}33$). На рис. 2 наведено результати розрахунків за співвідношеннями (2.4-2.6). Лініями 1, 2, 3, 4 позначено рівень накопиченого пошкодження $\omega(n_i, x_j)$ вздовж фронту тріщини в моменти часу

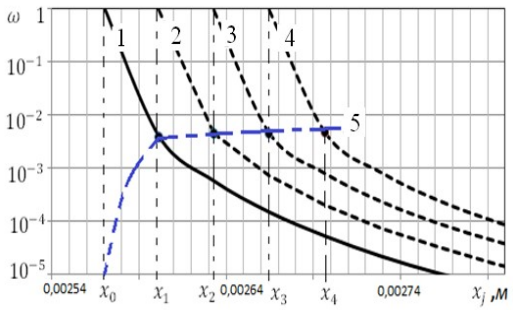


Рис. 2. Накопичення пошкодження вздовж фронту руйнування з часом n_i

n_i, $(i = 1,2,3,4)$, відповідно. Лінія 5 відповідає пошкодженню $\omega(n_i, x_i)$, що накопичилося в точці x_i за кожний момент часу n_i. Руйнування в точці x_i відбувається за виконання критерію (2.3).

На рис 3. побудовано залежності довжини тріщини втоми від числа циклів навантаження в тонкій нескінченій пластині з алюмінієвого сплаву 7075-Т6 при асиметричному циклі навантаження σ_a = 69 МПа σ_m = 138 МПа. Лінія 1 відповідає рекурентній залежності (2.6), яка враховує історію накопичення пошкодження $\omega(n_i, x_j)$ по координатах x_j вздовж фронту руйнування за кожний момент часу n_i, лінія 2 отримана з аналітичного розв'язку рівняння (2.1), та експериментальні дані (○) з роботи [6]. Отримано задовільне узгодження результатів розрахунків з експериментальними даними.

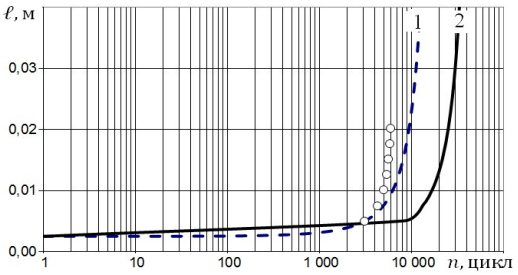


Рис.3. Залежності довжини тріщини втоми від числа циклів

Список використаних джерел

1. *Golub V.P.* Fatigue fracture model for thin isotropic plates with cracks in axial loading / V.P.Golub, A.V.Plashchinskaya // International applied mechanics, 1994**. – 30 (**7). – P. 520-529.
2. *Golub V.P.* On the theory of growth of fatique mode I cracks in thin isotropic plates of finite size under uniaxial tension-compression / V.P.Golub, A.V.Plashchinskaya // International Applied Mechanics, 2018. – **54** (2). – P. 188-206.
3. *Голуб В.П., Пелых В.Н., Погребняк А.Д.* Прогнозирование усталостной долговечности призматических металлических стержней при асимметричном растяжении-сжатии методом эквивалентных напряжений / В.П.Голуб, В.Н.Пелых, А.Д.Погребняк. – Вісник національного технічного університету України „КПІ", 2010. – **58**. – С. 177-182.
4. *Rice J.R.* Mechanics of crack tip deformation and extension by fatigue / J.R.Rice // ASTM STP 415, Fatigue Crack Propagation. –.1967 – P. 247-309.
5. *Newman J.C., Jr.* FASTRAN-II – A fatigue crack growth structural analysis program / J.C.Newman, Jr. – NASA-TM-104159, 1992. – 103 p.
6. Hudson C.M., Scardina J.T. Effect of stress ratio on fatigue-crack growth in 7075-T6 aluminum-alloy sheet. / C.M.Hudson, J.T.Scardina. – NASA TMX-60125, 1967. – P. 24.

References

1. GOLUB V.P, PLASHCHINSKAYA A.V. (1994) *Fatigue fracture model for thin isotropic plates with cracks in axial loading*. International applied mechanics, **30** (7). P. 520-529.
2. GOLUB V.P, PLASHCHINSKAYA A.V. (2018) *On the theory of growth of fatique mode I cracks in thin isotropic plates of finite size under uniaxial tension-compression*. International Applied Mechanics, **54** (2). – P. 188-206.
3. GOLUB V.P., PELYKH V.N., POGREBNYAK A.D. (2010). *Prognozirovanie ustalostnoy dolgovechnosti prizmaticheskikh metallicheskikh sterzhney pri asimmetrichnom rastyazhenii-szhatii metodom ekvivalentnykh napryazheniy*. Visnyk nacional`nogo tekhnichnogo universytetu Ukrayiny` „KPI", **58**, p. 177-182.
4. RICE J.R. (1967) *Mechanics of crack tip deformation and extension by fatigue*. ASTM STP 415, Fatigue Crack Propagation. – P. 247-309.
5. NEWMAN J.C., JR. (1992) FASTRAN-II – *A fatigue crack growth structural analysis program*. – NASA-TM-104159. – 103 p.
6. HUDSON C.M., SCARDINA J.T. (1967). *Effect of stress ratio on fatigue-crack growth in 7075-T6 aluminum-alloy sheet*. NASA TMX-60125.

Надійшла до редколегії 29.08.21.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми „Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень" (КПКВК 6541230).

УДК 539.3

https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.17

Попов В. Г.[1], д. ф.-м. н., проф.
Кирилова О. І.,[2] к. ф.-м. н., доцент

Чисельне розв'язання сингулярного інтегрального рівняння, пов'язаного з динамічною задачею контактної взаємодії

[1,2] Національний університет «Одеська морська академія», 65029, м. Одеса, вул. Дідріхсона, 8.

e-mail: [1]dr.vg.popov@gmail.com ,
[2]olga.i.kyrylova@gmail.com

V. G. Popov[1], Dr. Sci., Prof.
O. I. Kyrylova[2], PhD.

Numerical solution of a singular integral equation related with a dynamic contact interaction problem

[1, 2] National University «Odesa maritime academy», 65029, Odessa, Didrikhson str., 8.

e-mail: [1]dr.vg.popov@gmail.com
[2]olga.i.kyrylova@gmail.com

Розглядається сингулярне інтегральне рівняння з нерухомою особливістю, до якого зводиться задача контактної взаємодії двох чвертей простору в умовах гармонічних коливань повздовжнього зсуву. Чверті простору розміщуються так, що складений з них півпростір має ступінчасту межу. Для чисельного розв'язання цього рівняння запропоновано метод, який враховує справжню асимптотику розв'язку, використовує спеціальні квадратурні формули для сингулярних інтегралів і корені спеціальної функції у якості точок колокації.

Ключові слова: сингулярне інтегральне рівняння, нерухома особливість, контактні напруження.

A singular integral equation with a fixed singularity to which the problem of contact interaction of two quarters of spaces in the conditions of harmonic oscillations of longitudinal shear is reduced is considered. A quarters of the space is situated so that the half-space composed of them has a stepped boundary. In the contact area, the conditions for ideal coupled are satisfied. The unknown function in this equation is the contact stresses. For the numerical solution of this equation, a method that takes into account the asymptotic behavior of contact stresses at the edge point is proposed. The basis of this method is the use of special quadrature formulas for singular integrals obtained in the article. When obtaining these formulas, the unknown function was approximated by an interpolation polynomial, in which the roots of the Laguerre polynomials are the points of interpolation. The values of the unknown function at the interpolation points are found by the collocation method, herewith the collocation points of collocationare the roots of the special function. An approximate formula for calculating contact stresses can have practical application. The effectiveness of the proposed method is demonstrated by the numerical example.

Key Words: singular integral equation, fixed singularity, contact stresses

Статтю представив член-кор. НАН України Жук Я.О.

1. Вступ.

Одним з ефективних методів розв'язання контактних задач механіки деформівного тіла є приведення їх до інтегральних рівнянь. Частіше за все ці рівняння є сингулярними і вимагають чисельного розв'язання. У випадку, коли сингулярність складається з ядра типу Коші або різницевого логарифмічного ядра, наближене розв'язання може бути здійснено методом ортогональних многочленів [1], або колокаційним методом типу механічних квадратур [2]. Але існує клас контактних задач, що приводяться до сингулярних інтегральних рівнянь, в яких сингулярна складова містить ще і нерухому особливість [3]. Згідно з монографією [4], наявність нерухомої особливості суттєво впливає на структуру розв'язку інтегрального рівняння, зокрема, на його асимптотику при наближенні до кінців відрізку інтегрування. Тому при побудові числових методів розв'язання таких рівнянь необхідно визначати і враховувати цю асимптотику. У роботі [3] розв'язки для

© В.Г. Попов, О.І. Кирилова, 2021

сингулярних інтегральних рівнянь з нерухомими особливостями, заданих на скінченному проміжку, здійснюється методом, що враховує справжню асимптотику розв'язків і використовує спеціальні квадратурні формули для сингулярних інтегралів. У даній статті такий метод розроблено для інтегрального рівняння, визначеного на півосі $[0;+\infty)$. До цього рівняння приводиться задача контактної взаємодії двох чверть просторів при коливаннях повздовжнього зсуву.

2. Постановка задачі і її інтегральне рівняння.

Розглядаються два чверть простори $-\infty < x < 0;\quad h < y < +\infty$ і $0 < x < +\infty;\ 0 < y < +\infty;\ -\infty < z < +\infty$, зчеплених між собою по області $x = 0;\ h < y < +\infty;\ -\infty < z < +\infty$ (Рис.1).

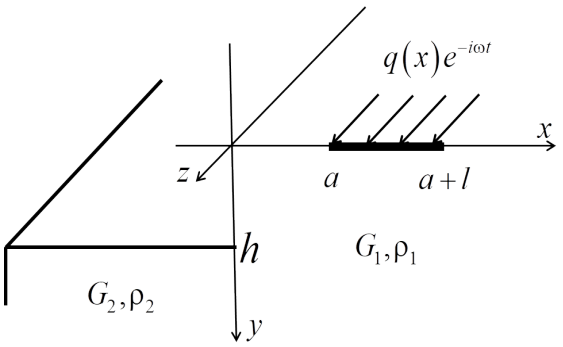


Рис.1. Два зчеплених чверть простори

До поверхні $y = 0$ першої чвертини простору прикладене зсувне вздовж осі Oz навантаження $q(x)e^{-i\omega t}$, $0 < a < x < a + l$. Далі множник $e^{-i\omega t}$, що визначає залежність від часу, всюди відкидається. За таких умов обидві чвертини перебувають у стані деформації повздовжнього вздовж осі Oz зсуву і єдиними відмінними від нуля є переміщення $W_j(x,y), j = 1,2$, які задовольняють рівняння Гельмгольца:

$$\Delta W_j(x,y) + \kappa_j^2 W_j(x,y) = 0;\ \kappa_j^2 = \frac{\omega^2 \rho_j}{G_j}, \qquad (1)$$

де ρ_1, G_1 – густина і модуль зсуву правої частини простору, ρ_2, G_2 – лівої. На горизонтальних поверхнях чверть просторів виконуються умови:

$$\tau_{yz}^1(x,0) = \begin{cases} q(x), x \in [a, a+l] \\ 0, x \notin [a, a+l] \end{cases},\ x \in (0,+\infty);$$
$$\tau_{yz}^2(x,h) = 0;\ x \in (-\infty, 0). \qquad (2)$$

На вертикальній поверхні $x = 0, y \geq 0$ здійснюються умови повного зчеплення:

$$\tau_{xz}^1(0,y) = \begin{cases} 0, 0 < y < h, \\ p(y), y \geq h \end{cases},\ \tau_{xz}^2(0,y) = p(y);\ y \geq h; \qquad (3)$$
$$W_1(0,y) = W_2(0,y),\ y > h.$$

У рівностях (3) $p(y)$ – невідомі контактні напруження. Після розв'язання крайових задач (1)-(3) знайдено подання переміщень у кожній чверті простору через невідомі контактні напруження. Залишається визначити контактні напруження $p(y)$. Це здійснюється за допомогою останньої рівності (3), яка попередньо диференціюється. Причому за умови, що переміщення прямують до нуля при $y \to +\infty$, профидеренційована рівність буде еквівалентною до вихідної. Після реалізації цієї умови приходимо до інтегрального рівняння відносно контактних напружень, яке перетворюється до вигляду:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \chi(s)\left[\frac{1+\gamma}{s-\sigma} - \frac{\gamma}{s+\sigma} + R(s,\sigma)\right] ds = F(\sigma); \qquad (4)$$
$$0 < \sigma < \infty.$$

У рівнянні (4) введено такі позначення:

$$\gamma = G_1 \cdot G_2^{-1};\ \chi(s) = G_1^{-1} \cdot p(h(1+s)).$$

Функції $R(s,\sigma)$ вже не містять сингулярності, а $F(s)$ подається через навантаження $q(x)$. Можна бачити, що сингулярна складова інтегрального рівняння (4), окрім ядра Коші, має також нерухому особливість при $s = \sigma = 0$.

3. Чисельне розв'язання інтегрального рівняння.

Попередньо розглянемо функцію

$$\lambda_n^\beta(\sigma) = \int_0^\infty \frac{e^{-s} s^{+\beta} L_n^\beta(s)}{s-\sigma} ds = \left(-\pi ctg\pi\beta\sigma^\beta L_n^\beta(s) + \right. \qquad (5)$$
$$\left. + \Gamma(\beta)\Phi(-\beta-n, 1-\beta, \sigma)\right) e^{-\sigma},$$

де $L_n^{\beta}(s)$ – многочлен Лагерра [5], Ф – вироджена гіпергеометрична функція. Чисельне дослідження цієї функції показало, що при $-1<\beta<1$ вона має $n+1$ додатних простих коренів $\sigma_j>0,\ j=1,2,...,n+1.$ Це дає можливість створити чисельний метод розв'язання, що використовує ці корені у якості точок колокації.

Розв'язок рівняння (4) має інтегровану особливість при $s\to 0$ і прямує до нуля при $s\to\infty$:

$$\chi(s)=s^{-\delta}e^{-s}\varphi(s) \tag{6}$$

Згідно з [4] показник δ має дорівнювати

$$\delta=\frac{1}{\pi}\arccos\frac{\gamma}{1+\gamma} \tag{7}$$

Далі введемо до розгляду функцію $s\psi(s)=\varphi(s)-\varphi(0),\ \varphi(s)\neq 0.$ Тоді, згідно з (6), знаходимо таке подання для невідомої функції:

$$\chi(s)=s^{-\delta}e^{-s}\varphi(0)+s^{1-\delta}\psi(s) \tag{8}$$

Далі функцію $\psi(s)$ наближаємо інтерполяційним многочленом, де вузлами інтерполяції s_m є корені многочленів $L_n^{1-\delta}(s)$:

$$\psi(s)\approx\psi_n(s)=\sum_{m=1}^{n}\frac{\psi_m}{\left(L_n^{1-\delta}(s_m)\right)'(s-s_m)}, \tag{9}$$

де $\psi_m=\psi(s_m)$. Подання (8) і наближення (9) дозволяє отримати наступну квадратурну формулу для інтегралу Коші при $s=\sigma_j,\ j=1,2,...,n+1,$ де σ_j – корені функції $\lambda_n^{1-\sigma}(\sigma)$:

$$\int_0^{\infty}\frac{\chi(s)}{s-\sigma_j}ds=\varphi(0)\lambda_0^{-\delta}(\sigma_j)+\sum_{m=1}^{n}\psi_m\frac{A_{nm}^{1-\delta}}{s_m-\sigma_j},\quad j=1,2,...,n+1. \tag{10}$$

У формулі (10) і далі позначають через A_{nm}^{β} коефіцієнти квадратурної формули типу Гауса для інтегралів по $[0;+\infty)$ при ваговій функції $x^{\beta}e^{-x}$ [6]. Для інтегралу з нерухомою особливістю отримано

$$\int_0^{\infty}\frac{\chi(s)}{s+\sigma_j}ds=\varphi_0(0)\theta_0^{-\delta}(\sigma_j)+\sum_{m=1}^{n}\psi_m\frac{B_{jm}}{s_m+\sigma_j},\qquad B_{jm}=A_{nm}^{1-\delta}-\frac{\theta_n^{1-\delta}(\sigma_j)}{\left(L_n^{1-\sigma}(s_m)\right)},\quad j=1,2,...,n+1. \tag{11}$$

У формулі (11) використано функцію

$$\theta_n^{\beta}(\sigma)=\int_0^{\infty}\frac{s^{\beta}e^{-s}L_n^{\beta}(s)}{s+\sigma}ds=\frac{\pi}{\sin\pi\beta}\left(-\sigma^{\beta}e^{\sigma}L_n^{\beta}(-\sigma)+\frac{e^{\sigma}}{\Gamma(1-\beta)}\Phi(-\beta-n,1-\beta,-s)\right).$$

Для регулярних інтегралів використовуються формули типу Гауса [6].

У результаті підстановки в інтегральне рівняння (4) $\sigma=\sigma_j$ та застосування квадратурних формул (10), (11) приходимо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $\varphi(0)$ та ψ_m, $m=1,2,...,n$:

$$\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n}\psi_m\left((1+\gamma)\frac{A_{nm}^{1-\delta}}{s_m-\sigma_j}-\gamma\frac{B_{jm}}{s_m-\sigma_j}+A_{nm}^{1-\delta}R_{jm}\right)+\frac{\varphi(0)}{\pi}\left(\lambda_0^{-\delta}(\sigma_j)-\gamma\theta_0^{-\delta}(\sigma_j)+C_j\right)=F(\sigma_j),\ j=1,...,n+1;$$

$$C_j=\sum_{m=1}^{n}A_{nm}^{-\delta}R(z_m,\sigma_j),\quad R_{jm}=R(s_m,\sigma_j),$$

z_m – корені многочлена $L_n^{-\delta}(z)$.

Після розв'язання системи контактні напруження розраховувались за формулами (9), (10).

4. Чисельна реалізація і висновки.

Для чисельної реалізації були розглянуті чверть простори, що складалися зі сталі та алюмінію при значеннях геометричних параметрів $\alpha=al^{-1}=1,\quad d=hl^{-1}=1.$

Навантаження вважалося сталим $f(s) \equiv 1, s \in [1;2]$, а безрозмірне хвильове число $\kappa_0 = \kappa_{12} l = 3$.

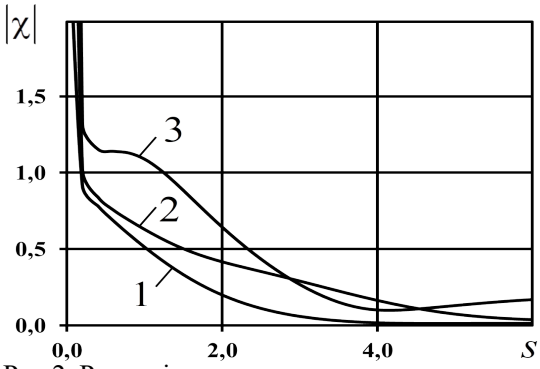


Рис.2. Розподіл контактних напружень.

Результати розрахунків безрозмірних контактних напружень приведено на рис.2 у вигляді графіків 1-3.

Перший графік відповідає випадку, коли перша (навантажена) чверть простору є сталевою, а друга є алюмінієвою. Другий графік показує розподіл контактних напружень, коли обидві чвертини є сталевими, тобто маємо однорідний півпростір зі ступінчатою границею. Третя крива побудована за умови, що навантажена чверть простору з алюмінію, а друга сталева.

Встановлено, що значення контактних напружень зростають при зменшенні зсувної жорсткості завантаженої чверті простору. Також показано швидке спадання значень контактних напружень при віддалені від завантаженої границі. Взагалі числові результати показали, що врахування асимптотики розв'язку, використання спеціальних квадратурних формул для сингулярних інтегралів, спеціальний вибір точок колокації дозволяє створити ефективний числовий метод розв'язання даного сингулярного інтегрального рівняння з нерухомою особливістю.

Список використаних джерел

1. *Попов Г.Я.* О методе ортогональных многочленов в контактних задачах теории упругости / Г.Я. Попов // ПММ. – 1969. – Т.33. – № 3. – С. 518-533.
2. *Белоцерковский С.М.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике / С.М. Белоцерковский, И.К. Лифанов. – Москва: Наука, 1985. – 253 с.
3. *Попов В.Г.* Двовимірні динамічні задачі теорії пружності, що зводяться до сингулярних інтегральних рівнянь з нерухомими особливостями / В.Г. Попов // Мат.методи та фіз. -мех. поля. – 2020. – № 63 (1). – С. 94-105.
4. *Дудучава Р.В.* Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики / Р.В. Дудучава // Труды Тбилисского математичекого института АН СССР. –1979. – Т.60. –с. 313.
5. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены / Г. Сеге. -Москва: Физматгиз, 1962. – 500 с.
6. *Крылов В.И.* Приближенное вычисление интегралов / В.И. Крылов. – Москва, Наука, 1967. – 500 с.

References

1. POPOV G. (1969) O metode ortogonal'nih mnogotshlenov v contactnih zadachah teorii uprugosty. *PMM*. T.33. № 3. P. 518-533.
2. BELOTSERKOVSKIJ S., LIFANOV I. (1985) *Chislennije metodi v singularnih integralnih uravnenijah i ih primenenije v aerodinamike, teoriji uprugosti, elektrodinamike.* Moskva: Nauka.
3. POPOV V. (2020) Dvovimirni zadachi teoriji prugnosti, hsto zvodjatsja do singularnih integral'nih rivn'an' z neruhomimi osoblivoctjami *Mat.metodi ta fiz.-meh. polja*. № 63 (1). P. 94-105.
4. DUDUCHAVA R. (1979) Integralnie uravnenija svertki s razrivnimi predsimvolami, singularnie integral'nie uravnenija s nepodvignimi osobennostami i ih prilogenija k zadacham mechaniki. *Trudi Tbilisskogo matem.instituta AN SSSR*. T. 60. P.313.
5. SEGE G. (1962) *Ortogonal'nie mnogotshleni.* Moskva: Fizmatgiz.
6. KRILOV V. (1967) *Pribligennoje vitshislenije integralov.* Moskva: Nauka.

Надійшла до редколегії 6.09.21

УДК 532.595

https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.18

Райновський І.А.[1], к.ф.-м.н., м.н.с.
Тимоха О.М. [1,2], д.ф.-м.н., акад. НАН України.

Про демпфовані усталені резонансні коливання рідини в контейнері кругового перерізу для довільних періодичних непараметричних збурень

[1] Інститут математики НАН України, 01004, м. Київ, вул. Терещенківська 3,
e-mail: ihor.raynovskyy@gmail.com, atimokha@gmail.com
[2] Centre of Excellence "Autonomous Marine Operations and Systems", NTNU, Norway,
e-mail: alexader.timokha@ntnu.no

I. A. Raynovskyy[1], Junior Researcher, PhD
A. N. Timokha[1,2], Prof. Dr., Academician of the NAS of Ukraine

Damped steady-state resonant sloshing in a container of circular cross-section for arbitrary periodic nonparametric forcing

[1] Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 01004, Kyiv, Tereshchenkivska str., 3,
e-mail: ihor.raynovskyy@gmail.com, atimokha@gmail.com
[2] Centre of Excellence "Autonomous Marine Operations and Systems", NTNU, Norway,
e-mail: alexader.timokha@ntnu.no

Для аналізу резонансного коливання рідини у вертикальному циліндричному баці досліджуються відповідні нелінійні модальні рівняння типу Наріманова-Моісєєва. Бак рухається періодично у просторі. Показано, що для довільних періодичних просторових рухів баку із частотою збурення, близькою до власної частоти коливання рідини, задача в асимптотичному сенсі зводиться до орбітального збурення баку в горизонтальній площині. Отримано аналітичні розв'язки секулярної системи, які описують домінуючі амплітуди усталених періодичних хвиль. Враховано ефект в'язкого демпфування. Результати порівнюються із експериментальними вимірами, проведеними різними авторами. Проводиться параметричний аналіз амплітудно-частотних характеристик для визначення яким чином змінюються усталені хвильові режими та їх стійкість із частотою збурення та еліптичною орбітою [співвідношенням її осей]. Основний результат полягає у підтвердженні експериментального феномену зникнення проти-направленої кругової хвилі (відносно напрямку збурення) при переході до кругової траєкторії.

Ключові слова: коливання рідини, демпфування, усталені хвилі, непараметричні збурення.

Nonlinear modal Narimanov-Moiseev—type equations are investigated to study resonant sloshing in a vertical cylindrical tank. The tank moves periodically in the space with the forcing frequency close to the lowest natural sloshing frequency. We show that the considered sloshing problem can to within the higher-order asymptotic terms be reduced to the case of orbital tank motions in the horizontal plane. Analytical solutions of the secular system which couples the dominant amplitudes of the steady-state sloshing are analytically solved. Effect of viscous damping is accounted. The results are compared with experimental measurements conducted by diverse authors for longitudinal and circular orbital tank excitations. A parametric analysis of the amplitude curves is done to clarify how the steady-state wave regimes and their stability change versus the forcing frequency and the semi-axes ratio of the elliptic orbit. The main result consists of confirming the experimental disappearance of the counter-directed swirling wave mode (relative to the elliptic orbit direction) when passaging to the circular orbit.

Key Words: sloshing, damping, steady-state waves, nonparametric forcing.

Статтю представив член-кор. НАН України Жук Я.О.

Вертикальний циліндричний бак радіуса r_0 рухається циклічно з малою амплітудою (відносно радіуса) в просторі [1]. Вертикальні рухи баку вздовж осі Oz не розглядаються. Амплітуда збурення є малою відносно радіусу. Вивчається безрозмірна постановка задачі, де r_0 - характерний розмір баку, а σ - частота збурення. Ідеальна нестислива рідина із безвихоровими течіями. Застосовується мультимодальний метод, який використовує

© І.А. Райновський, О.М. Тимоха, 2021

наближений розв'язок Фур'є для вільної поверхні та потенціалу швидкостей із залежними від часу невідомими і залежними від часу коефіцієнтами (узагальнені гідродинамічні координати та швидкості).

Хай нема вторинних резонансів та частота збурення баку є близькою до першої власної частоти коливання рідини (асимптотика Моісєєва [2]). Нехтуючи величинами вищими від порядку збурення та додаючи демпфування [1,3,4] переходимо до системи звичайних диференціальних (модальних) рівнянь відносно узагальнених гідродинамічних координат.

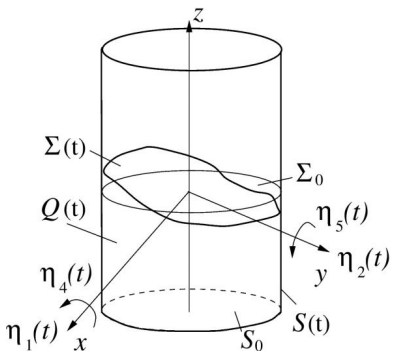


Рис.1 Позначення:
$Q(t)$ - область рідини;
$\Sigma(t)$ - вільна поверхня;
$S(t)$ - змочена стінка баку;
Σ_0 - гідростатична поверхня.

Ми будуємо періодичний розв'язок модальної системи. Умовою її розв'язності є нелінійна система відносно домінантних амплітуд (A,B) усталеної хвилі та зсувів фаз. Показано [1,3], що демпфування суттєво впливає на ці хвилі та їх стійкість. Рис. 2 проілюструє різницю між амплітудно-частотними характеристиками за відсутності та наявності демпфування у просторі $(s/s_{11},A,B)$ для поздовжніх збурень баку, s_{11} - перша власна частота коливання рідини. Плоскі (стоячі) хвилі відповідають кривим у площині $(s/s_{11},A)$, а кругова хвиля є тривимірною. Демпфування породжує точки біфуркації P та H_2 (точки зміни характеру руху рідини в системі).

Рис. 3 ілюструє амплітудно-частотні характеристики для еліптичних збурень. При переході від поздовжніх до еліптичних збурень розщеплюється $E_1H_1H_2E_2$, з'являється петля R_1R_2, яка відповідає за кругову хвилю у *протилежному напрямку* до еліптичних збурень баку. Із збільшенням відношення еліптичних осей збурення для вхідних даних може з'явитися один чи кілька острівців стійкості (H_3H_4 на гілці $E_1H_1H_2E_2$). Петля R_1R_2 також зменшується при зростанні відношення осей. Коли воно досягає 0.45 може з'явитися додатковий острівець стійкості R_3R_4. У проміжку між 0.45 та 0.5 петля $R_1R_2(R_1R_2R_3R_4)$ зменшується. Її немає вже при 0.5. А при зростанні до 0.8 острівець H_3H_4 зростає, з'єднуючись із H_1H_2 та точкою E_1.

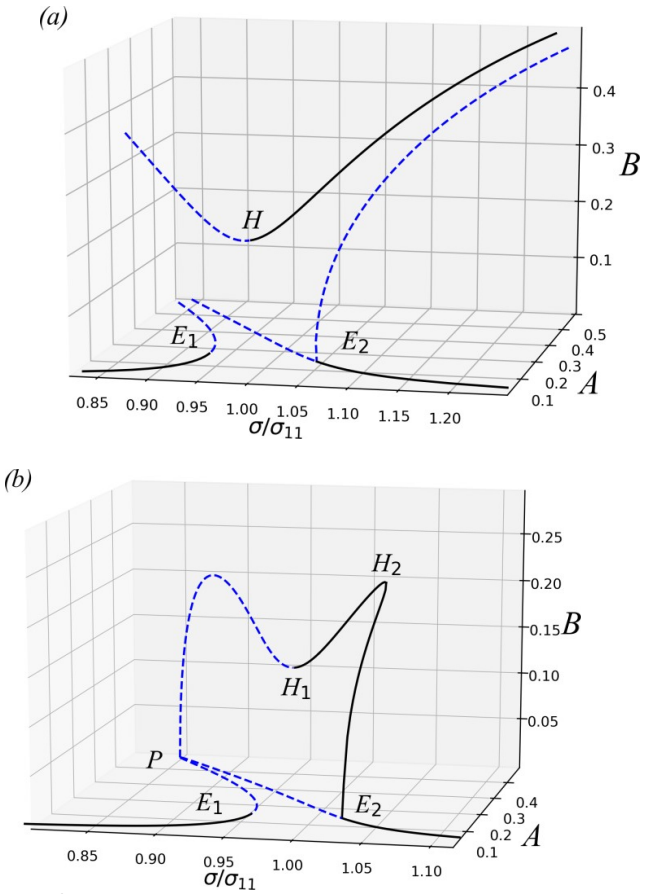


Рис. 2
Нульове *(a)* та ненульове *(b)* демпфування. Суцільні лінії відповідають стійким розв'язкам, а штрихові - нестійким. У діапазоні між E_1 та H спостерігається іррегулярна (хаотична) хвиля.

Перехід до кругових траєкторій не тільки робить неможливим протинаправлені кругові хвилі, але й унеможливлює діапазон частот, де відбуваються хаотичні хвильові рухи рідини. В околі основного резонансу тоді існує лише

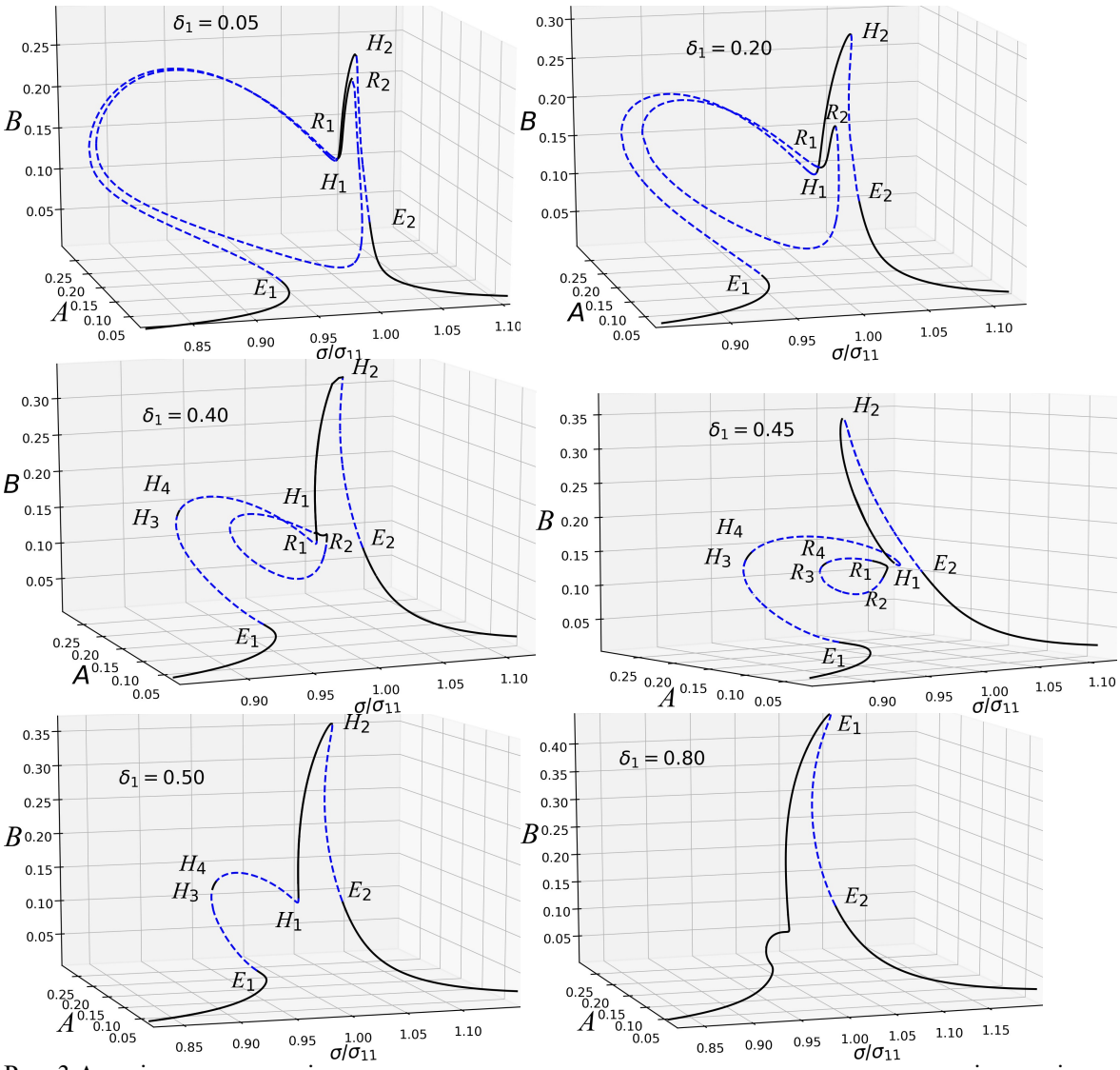


Рис. 3 Амплітудно-частотні характеристики для усталеного резонансного коливання рідини під час еліптичних рухів баку.

усталена кругова хвиля спів-направлена із напрямком збурень баку.

Лінійне демпфування впливає на коливання рідини під час орбітальних збурень (біореакторів). Найцікавішим є те, що навіть будучи відносно малим, демпфування унеможливлює існування протилежно направленої кругової хвилі. Цей феномен узгоджується із експериментами [7]. Демпфування впливає якісно та кількісно на поведінку зсуву фаз.

Важливий висновок випливає із порівняння теоретичних та експериментальних результатів відносно амплітуди усталених хвиль при кругових рухах баку, де вказано на невідповідність нашої теорії експериментам, коли вони характеризуються дефрагментацією вільної поверхні через хвилі розвалу. Збільшення демпфування здатне покращити відповідність експериментам для поздовжніх коливань баку. Так само й для кругової хвилі, коли експерименти показували на дефрагментацію вільної поверхні. Для більш складніших випадків, потрібно, швидше за все, врахувати феномен Прандтля [9] та розглянути вихорові рухи рідини.

Автори вдячні за підтримку НФДУ (проєкт 2020.02/0089).

Список використаних джерел

1. RAYNOVSKYY, I.A. and TIMOKHA, A.N. (2020) "*Sloshing in Upright Circular Containers: Theory, Analytical Solutions, and Applications"*. CRC Press/Taylor & Francis Group.
2. *Faltinsen O.M.* Sloshing / O.M. Faltinsen, O.M. Timokha. – Cambridge University Press, 2009. – 608 c.
3. *Райновський І.А.* Асимптотична модальна теорія Наріманова-Моісєєва усталених демпфованих коливань в циліндричному баці / І.А. Райновський. – Дисертація. – 2018. – Інститут математики НАНУ. – 161с..
4. *Miles J.W.* A note on interior vs. boundary-layer damping if surface waves in a circular tank / J.W. Miles, D.M. Henerson // Journal of Fluid Mechanics. – 1998. –Vol. **364**. –Pp. 319-323.
5. RAYNOVSKYY, I.A. and TIMOKHA, A.N. (2018) Steady-state resonant sloshing in an upright cylindrical container performing a circular orbital motion. *Mathematical Problems in Engineering*. Paper ID 5487178, pp. 1-9.
6. FALTINSEN, O.M., LUKOVSKY, I.A. and TIMOKHA, A.N. (2016) Resonant sloshing in an upright annular tank *Journal of Fluid Mechanics.* Vol. **804**, pp. 608-645.
7. RECLARI, V. (2013) *Hydrodynamics of orbital shaken bioreactors*. PhD Thesis #5759, Laboratoire de Machines Hydrauliques, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, p. 159.
8. RECLARI, M., DREYER, S., TISSOT, OBRESCHJOW, D. and WURM, F.M. (2014) Surface wave dynamics in orbital. shaken cylindrical containers. *Physics of Fluids.* Vol. **26**, Article ID 052104.
9. PRANDTL, L. (1949) Erzeugung von Zirkulation beim Schütteln von Gefässen. ZAMM, Vol. **29**, pp. 8-9.

References

1. RAYNOVSKYY, I.A. and TIMOKHA, A.N. (2020) "*Sloshing in Upright Circular Containers: Theory, Analytical Solutions, and Applications"*. CRC Press/Taylor & Francis Group.
2. FALTINSEN, O.M. and TIMOKHA, A.N. (2009) "*Sloshing*". Cambridge University Press.
3. RAYNOVSKYY, I.A., (2018) *An asymptotic modal Narimanov-Moiseev theory of the damped steady-state sloshing in an upright cylindrical tank*. PhD Thesis. Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv.
4. MILES, J.W. and HENDERSON, D.M. (1998) A note on interior vs. boundary-layer damping if surface waves in a circular tank. *Journal of Fluid Mechanics*. Vol. **364**, pp. 319-323.
5. RAYNOVSKYY, I.A. and TIMOKHA, A.N. (2018) Steady-state resonant sloshing in an upright cylindrical container performing a circular orbital motion. *Mathematical Problems in Engineering*. Paper ID 5487178, pp. 1-9.
6. FALTINSEN, O.M., LUKOVSKY, I.A. and TIMOKHA, A.N. (2016) Resonant sloshing in an upright annular tank. *Journal of Fluid Mechanics.* Vol. **804**, pp. 608-645.
7. RECLARI, V. (2013) *Hydrodynamics of orbital shaken bioreactors*. PhD Thesis #5759, Laboratoire de Machines Hydrauliques, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, p. 159.
8. RECLARI, M., DREYER, S., TISSOT, OBRESCHJOW, D. and WURM, F.M. (2014) Surface wave dynamics in orbital. shaken cylindrical containers. *Physics of Fluids.* Vol. **26**, Article ID 052104.
9. PRANDTL, L. (1949) Erzeugung von Zirkulation beim Schütteln von Gefässen. ZAMM, Vol. **29**, pp. 8-9.

Надійшла до редколегії 29.08.21

УДК 539.3

https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.19

Ревенко В. П., д.ф.-м.н., пров.н.с.

Комп'ютерний метод розв'язання крайових задач теорії пружності з використанням неортогональних систем функцій

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, 79601, м. Львів, вул. Наукова 3б,
e-mail: victorrev@ukr.net

V. P. Revenko, Dr.Sci. (Phys.-Math.).

Computational method for solving boundary problems of the theory of elasticity using non-orthogonal systems of functions

Pistryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, NAS of Ukraine, 3-b, Naukova str., L'viv, 79060, Ukraine
e-mail: victorrev@ukr.net

Побудовано повну систему неортогональних функцій на основі ортогональних синусів і косинусів. Доведено, що неперервну функцію можна апроксимувати скінченною кількістю неортогональних функцій таким чином, щоб в цю суму не входила одна вибрана функція неортогонального базису. Показано, що відомі ортогональні системи функцій є виродженим випадком неортогональних систем функцій. Числовим експериментом підтверджено високу точність апроксимацій неперервних функцій незначною кількістю неортогональних функцій. Розглянуто плоску задачу теорії пружності для пластини зі змінними пружними характеристиками. Спрощено це рівняння, коли характеристики матеріалу міняються незначно в залежності від просторових координат. Розроблено новий метод розв'язання крайової задачі для рівняння в частинних похідних четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами. Запропонований метод заснований на поділі напруженого стану пластини з неоднорідного матеріалу на основний і збурений, використанні повних систем неортогональних функцій і узагальненої квадратичної форми. Встановлено критерії, за яких побудований наближений розв'язок збігається з точним розв'язком.

Ключові слова: неортогональні функції, неоднорідна пластина, рівняння в частинних похідних.

A complete system of functions based on non-orthogonal sinuses and cosine was constructed. It has been proven that the continuous function can be approximated by a finite number of non-orthogonal functions in such a way that this amount does not enter the selected function of the non-orthogonal base. The numerical experiment confirmed the high accuracy of approximations of continuous functions by a small number of non-orthogonal functions. The flat problem of the theory of elasticity for the plate with variable elastic characteristics is considered. This equation is simplified when the characteristics of the material change insignificantly depending on the spatial coordinates. A new method of solving a boundary value problem has been developed for the fourth-order equation with variable coefficients. The proposed method is based on the separation of the stress state of the plate from an inhomogeneous material to the main and indignant state, the use of complete systems of non-orthogonal functions and a generalized quadratic form. A criterion under which the constructed approximate decision coincides with the exact solution was found.

Key Words: non-orthogonal functions, inhomogeneous plate, partial differential equations.

Статтю представив член-кор. НАН України Жук Я.О.

1. Вступ

У праці [1] запропоновано використовувати системи неортогональних функцій для розв'язання крайових задач. На даний час широко використовуються як неперервні [2], так і кусково-неперервні [3] системи ортогональних функцій. Розробка комп'ютерних методик обчислень для неортогональних функцій дозволила розробити новий аналітично-числовий підхід до розв'язку крайових задач теорії пружності [4, 5] з використанням методу найменших квадратів [6]. Неортогональні системи функції природно виникають при побудові власних функцій крайових задач для диференціальних рівнянь.

© В.П. Ревенко, 2021

Мета роботи. Обґрунтування нового комп'ютерного методу розв'язання крайових задач для рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, а також розробка аналітично-комп'ютерних методик обчислень с використанням неортогональних функцій.

2. Апроксимація неперервних функцій

Розглянемо повні неортогональні системи функцій. В даній роботі для їх побудови використаємо систему ортогональних функцій $\{\varphi_k(x)\}$ (синус і косинус), які будемо розглядати на меншому проміжку $[l_1, l_2]$, чим проміжок їх ортогональності $[A, B]$, де ці функції вже будуть неортогональними. Апроксимацію неперервної на проміжку $[l_1, l_2]$ функції $f(x)$ подамо у вигляді суми ряду

$$f(x) \cong \sum_{k=0}^{M} c_k \varphi_k(x), \qquad (1)$$

де c_k – невідомі коефіцієнти; $M = 2N$; $\varphi_0(x) \equiv 1$; $\varphi_k(x) = \cos(k\omega x)$, $\varphi_{k+N}(x) = \sin(k\omega x)$, $k = \overline{1, N}$ – базисні функції; $\omega = 2\pi/(B-A)$; $[l_1, l_2] \subset [A, B]$, $l_2 - l_1 < 0{,}95(B - A)$. Легко побачити, що вибрана система функцій $\{\varphi_k(x)\}$ є повна і ортогональна в $L_2[A, B]$, а в $L_2[l_1, l_2]$ буде повною, але не ортогональною [2]. Якщо в рівності (1) спрямувати N до нескінченості, то в правій частині одержимо ряд.

Використання неортогональних функцій (1) дає змогу задовольнити різні значення функції $f(l_1) \neq f(l_2)$ без порушення умов збіжності в точках l_j, $j = \overline{1, 2}$, а при апроксимації функцій із заданою точністю потребує меншої кількості членів суми ряду (1). Це важливо, оскільки при числових обчисленнях ми можемо використовувати тільки скінчену кількість коефіцієнтів.

Зауважимо, що ортогональні функції це дуже маленький частковий випадок неортогональних повних систем функцій. Сформулюємо основну відмінність між неперервними неортогональними і ортогональними системами функцій.

Теорема 1. *Неперервну функцію $f(x)$, задану на скінченому проміжку завжди можна апроксимувати сумою ряду таким чином, щоб в подання (1) не входила одна довільно вибрана функція $\varphi_m(x)$ неортогонального базису.*

Доведення. Продовжимо функцію $f(x)$ на проміжок $[A, B]$ і позначимо $f_1(x)$. Її завжди можна продовжити так, щоб вона була неперервною, а інтеграл на проміжку $[A, B]$ від добутку функцій $f_1(x)\varphi_m(x)$ дорівнював нулю. Згідно з [2] побудуємо розклад функції $f_1(x)$ у вигляді суми ряду (1) за ортогональними на проміжок $[A, B]$ синусами і косинусами, де буде виконуватися рівність $c_m = 0$. Розглянемо функцію $f_1(x)$ на проміжку $[l_1, l_2]$ і одержимо апроксимацію функції $f(x)$ у вигляді розкладу без функції $\varphi_m(x)$. Якщо спрямувати $N \to \infty$, то функція $f_1(x)$ на проміжку $[l_1, l_2]$ буде збігатися із функцією $f(x)$ [2]. Кінець доведення.

Наслідок. *Ортогональні системи функцій є виродженим випадком неортогональних систем функцій, коли проміжок $[l_1, l_2]$ збігається з проміжком $[A, B]$. При задоволені крайових умов можна не використовувати одну базову неортогональну функцію, в залежності від фізичної природи розв'язуваної задачі.*

Коефіцієнти c_k визначимо із умови мінімуму функціоналу, числове значення якого характеризує відхилення між апроксимацією функції і її значенням $f(x)$

$$\left\| \sum_{k=0}^{M} c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|^2 = \int_{l_1}^{l_2} \{ \sum_{k=0}^{M} c_k \varphi_k(x) - f(x) \}^2 dx = \sum_{k,j=0}^{M} c_k c_j W_{kj} - 2\sum_{k=0}^{M} c_k V_k + P^2, \qquad (2)$$

де

$\|f(x)\| = \sqrt{\int_{l_1}^{l_2} f^2(x)dx}$ – норма в $L_2[l_1, l_2]$;

$W_{kj} = \int_{l_1}^{l_2} \varphi_k(x)\varphi_j(x)dx$, $W_{kj} = W_{jk}$,

$V_k = \int_{l_1}^{l_2} \varphi_k(x) f(x)dx, \quad k, j = \overline{0, M}$;

$P^2 = \int_{l_1}^{l_2} f^2(x)dx$.

Вираз

$$\sum_{k,j=0}^{M} c_k c_j W_{kj} - 2\sum_{k=0}^{M} c_k V_k + P^2, \qquad (3)$$

який входить у формулу (2), назвемо узагальненою квадратичною формою (УКФ). Знайдемо мінімум УКФ (3) і чисельно визначимо невідомі c_k.

На рис 1 наведено порівняння точності розкладу функції $y = x$ за ортогональними і неортогональними функціями в залежності від кількості членів суми ряду. Максимальне відхилення апроксимації функції позначимо δ, а максимальне її значення – y_m. Крива 1 позначає функцію $y = x$, а крива 2 − розклад (1) за неортогональними синусами: $\omega = \pi/1{,}1$, $N = 6$, $\delta = 3*10^{-5}$, $y_m = 1$. Ці криві на рис. 1 збігаються. Криві 3, 4 − розклад за ортогональними на проміжку $x \in [-1,1]$, $\sin k\pi x$, відповідно: $N = 60$, $\delta = 1$, $y_m = 1{,}161$; і $N = 300$, $\delta = 1$, $y_m = 1{,}056$. Як бачимо, збіжність розкладу за ортогональними функціями є дуже поганою.

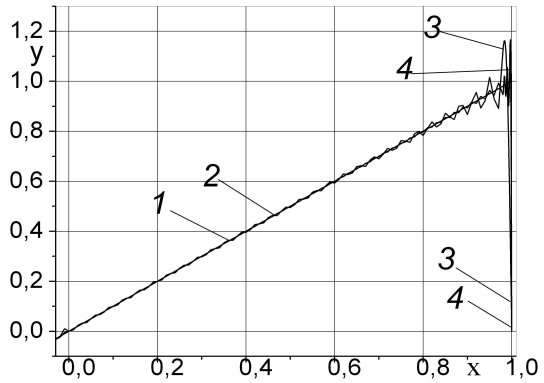


Рис. 1. Апроксимації функції $y = x$, $x \in [-1,1]$.

3 Розв'язування двовимірних крайових задач теорії пружності

Розглянемо плоску крайову задачу для пластини зі змінними пружними характеристиками [7], серединна поверхня якої займає прямокутну область $\Pi = \{(x,y) \in ([0,a] \times [-b,b])\}$, на краях L якої задані навантаження. Напруження в області Π виражаються через функцію напружень $F(x,y)$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \qquad (4)$$

Функція напружень (4) задовольняє таке рівняння в частинних похідних [7]:

$$TF(x,y) \equiv \{\Delta(\gamma\Delta) - q_y'' \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2q_{xy}'' \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} - q_x'' \frac{\partial^2}{\partial y^2}\} F = 0, \qquad (5)$$

де T – оператор, визначений співвідношенням (5), $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ − двовимірний оператор Лапласа; $\gamma(x,y) = \frac{1}{E(x,y)}$, $E(x,y) = E_0 E_1(x,y)$ – модуль Юнга, $q = \frac{1+\nu}{E}$, $\nu(x,y)$ – коефіцієнт Пуассона, $E_0 = E(0,0)$, $E_1(x,y)$ – безрозмірна функція. Покладемо, що пружні постійні матеріалу $E(x,y)$, $\nu(x,y)$ є парними функціями відносно координати y, двічі неперервно диференційованими в області Π. Вважатимемо, що характеристика матеріалу q на відстані рівній b міняється незначно, так що будуть виконуватися нерівності $\gamma >> b^2 q_y''$, $\gamma >> b^2 q_x''$, то рівняння (5) можна наближено спростити до такого рівняння в частинних похідних:

$$\Delta(\gamma\Delta F) = 0. \qquad (6)$$

Позначимо

$$\Phi = \gamma\Delta F \qquad (7)$$

і перепишемо рівняння (6) у простішому вигляді

$$\Delta\Phi = 0, \qquad (8)$$

де $\Phi(x,y)$ – гармонічна функція

Детально розглянемо випадок, коли $a >> b$, а навантаження задані тільки на поперечних сторонах, так що дотичні навантаження в кутових точках пластини рівні нулю. Розглянемо парні за змінною y нормальні, непарні дотичні напруження і запишемо навантаження

$$\sigma_x(a_j, y) = \sigma_j(y), \quad \tau_{xy}(a_j, y) = \tau_j(y),$$

$$\tau_{xy}(a_j, \pm b) = 0, \quad j = \overline{1,2}, \qquad (9)$$

де $a_1 = 0$, $a_2 = a$, $\sigma_j(y)$ – парні нормальні, $\tau_j(y)$ – непарні дотичні навантаження. Для задачі (9) знайдемо основний напружений стан

$$\sigma_0 = \frac{1}{b}\int_0^b \sigma_1(y) = \frac{1}{b}\int_0^b \sigma_2(y),$$

так що він описуються однією компонентою напружень: $\sigma_x(x,y)=\sigma_0$, де σ_0 – постійне усереднене навантаження.

Віднявши основний напружений стан і врахувавши, що $a >> b$ вихідну симетричну задачу розділимо на дві задачі. Розглянемо першу з них, для якої навантажена тільки сторона $x=0$

$$\sigma_x(0,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}|_{x=0}=\sigma^1(y),$$

$$\tau_{xy}(0,y)=-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}|_{x=0}=\tau_1(y),, \qquad (10)$$

$$\sigma_x(a,y)=0 \quad \tau_{xy}(a,y)=0, \quad y\in[0,b], \qquad (11)$$

$$\sigma_y(x,\pm b)=0 \quad \tau_{yx}(x,\pm b)=0, \quad x\in[0,a], \qquad (12)$$

де $\sigma^1(y)=\sigma_1(y)-\sigma_0$ – самозрівноважене навантаження.

Для задоволення умов (10)–(12) розв'язок рівняння (8) подамо у вигляді суми ряду за парними відносно координати y функціями

$$\Phi(x,y)=\sum_{k=1}^{N} b_k\varphi_k(y)\mathrm{e}^{-k\,\omega x}, \qquad (13)$$

де b_k – невідомі коефіцієнти; N – натуральне число; $\varphi_k(x)=\cos(k\omega y)$, $\varphi_{k+N}(x)=\sin(k\omega y)$, $k=\overline{1,N}$, $\omega=0.9\pi/b$. Врахуємо співвідношення (13) і запишемо рівняння (7)

$$\Delta F=E_0E_1(x,y)\sum_{k=1}^{N} b_k\varphi_k(y)\mathrm{e}^{-k\,\omega x}. \qquad (14)$$

Побудуємо розв'язок рівняння (14), який складається із суми загального

$$F_1=E_0\sum_{k=0}^{N} a_k\varphi_k(y)\exp(-kx\omega)$$

і часткового

$$F_z=E_0\sum_{k=1}^{N}(a_{k+N}y^2\varphi_k(y)+d_k y\varphi_{k+N}(y))\mathrm{e}^{-k\,\omega x}$$

розв'язків, де a_k, d_k – невідомі коефіцієнти.

Функція напружень $F=F_z+F_1$ має вигляд

$$F=E_0\sum_{k=1}^{N}[(a_k+a_{k+N}y^2)\varphi_k(y)+d_k y\varphi_{k+N}(y)]\mathrm{e}^{-k\,\omega x}. \qquad (15)$$

Відзначимо, що невідомі коефіцієнти a_k, d_k повинні задовольняти рівняння (14) в області Π, яке запишемо у такому вигляді:

$$\frac{1}{E_0}|\Delta F-E(x,y)\Phi|=|\sum_{k=1}^{N}\{c_{k+N}\mathrm{A}_{k+N}+ \qquad (16)$$
$$+c_{k+2N}\mathrm{A}_{k+2N}+c_{k+3N}\mathrm{A}_{k+3N}\}\mathrm{e}^{-k\,\omega x}|,$$

де $c_k=a_k$, $k=\overline{0,2N}$, $c_{k+2N}=d_k$, $c_{k+3N}=b_k$,

$$k=\overline{0,N},\ \mathrm{A}_{k+2N}(y)=2k\omega\varphi_k(y),$$

$$\mathrm{A}_{k+N}=2\varphi_k(y)-4k\omega y\varphi_{k+N}(y),$$

$$\mathrm{A}_{k+3N}=-E_1\varphi_k(y),\ k=\overline{1,N}. \qquad (17)$$

Для мінімізації відхилення виразу (16) від нуля піднесемо його до квадрату, підставимо в нього функцій (17) і після інтегрування по області Π одержимо квадратичну форму

$$\frac{1}{E_0^2}\int_0^a\int_0^b[\Delta F-E(x,y)\Phi]^2dxdy=\sum_{k,j=N+1}^{M}c_kc_jB_{kj}, \qquad (18)$$

де $M=4N$,

$$B^1_{kj}=\int_0^b \mathrm{A}_kA_j dy,\ k,j=\overline{N+1,M};$$

$$B_{k+iN,j+mN}=m_{k,j}B^1_{k+iN,j+mN},$$

$$m,i=\overline{1,3},\ m_{k,j}=\frac{1}{(k+j)\omega},\ k,j=\overline{1,N}.$$

Підставимо функцію напружень (15) у співвідношення (4) і одержимо явний вигляд напружень

$$\sigma_x=E_0\sum_{k=1}^{N}\{-k^2\omega^2c_k\varphi_k+c_{k+N}[(2-k^2\omega^2y^2)\varphi_k-$$
$$-4k\omega y\varphi_{k+N}]+(2k\omega\varphi_k-k^2\omega^2y\varphi_{k+N})c_{k+2N}\}\mathrm{e}^{-k\,\omega x},$$

$$\sigma_y=E_0\sum_{k=1}^{N}k^2[(c_k+c_{k+N}y^2)\varphi_k(y)+ \qquad (19)$$
$$+c_{k+2N}y\varphi_{k+N}(y)]\mathrm{e}^{-k\,\omega x},$$

$$\tau=E_0\sum_{k=1}^{N}k\omega[-k\omega(c_k+c_{k+N}y^2)\varphi_{k+N}+$$
$$+2c_{k+N}y\varphi_k+c_{k+2N}(yk\omega\varphi_k+\varphi_{k+N})]\mathrm{e}^{-k\,\omega x}.$$

Відзначимо, що рівняння (11) будуть наближено задоволенні, а в рівняння (10), (12) підставимо компоненти напружень (19) і подамо їх у компактному вигляді

$$\sum_{k=1}^{3N} c_k A_{m,k}(\gamma_m) = P_m, \quad m = \overline{1,4}, \tag{20}$$

де $\gamma_m \in [0, \alpha_m]$, $P_1 = \sigma^1(y)$, $P_2 = \tau_1(y)$, $P_j = 0$, $j = \overline{3,4}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = b$, $\alpha_3 = \alpha_4 = a$, коефіцієнти $A_{m,k}(\gamma_m)$ визначаються із напружень (19).

Метод побудови розв'язку системи рівнянь (20) ґрунтується на зведені всіх нев'язок її рівнянь до нуля. Записано нев'язки

$$\left| \sum_{k=1}^{3N} c_k A_{m,k}(\gamma_m) - P_m \right|, \quad \gamma_m \in [0, \alpha_m], \quad m = \overline{1,4}. \tag{21}$$

Розроблено ефективну аналітично-числову методику, яка дозволила одночасно мінімізувати всі чотири нев'язки (21) у нормі $L_2[0, \alpha_m]$ та квадратичну форму (18) і звести пошук невідомих c_k до знаходження мінімуму функціоналу, який відповідно зведено до узагальненої квадратичної форми

$$\sum_{m=1}^{4} \left\| \sum_{k=1}^{3N} c_k A_{m,k}(\gamma) - P_m(\gamma) \right\|_m^2 + \\ + \sum_{k,j=N+1}^{M} c_k c_j B_{kj} = \\ = \sum_{k,j=1}^{M} c_k c_j W_{kj} - 2\sum_{k=1}^{M} c_k V_k + P^2, \tag{22}$$

де

$\|f(\gamma)\|_m = \sqrt{\int_0^{\alpha_m} f^2(\gamma) d\gamma}$ – норма в $L_2[0, \alpha_m]$,

$$W_{k,j} = B_{k,j} + \int_0^{\alpha_m} \sum_{m=1}^{4} A_{m,k}(\gamma) A_{m,j}(\gamma) d\gamma,$$

$$V_k = \int_0^{\alpha_m} A_{1,k}(\gamma) \sigma^1(\gamma) d\gamma, \quad k, j = \overline{1, M},$$

$$P^2 = \|P_1(y)\|_1^2 + \|P_2(y)\|_1^2.$$

Мінімум узагальненої квадратичної форми (22) для заданого N позначимо $\Lambda(N)$, а змінні c_k, на яких він досягається, позначимо c_k^N. Функцію напружень, яка визначається знайденими коефіцієнтами c_k^N, позначимо F_N.

4. Знаходження числових критеріїв збіжності побудованого розв'язку

Лема [6]. *Функція* $\Lambda(N)$ *невід'ємна і не зростає.*

Відзначимо, що квадратична форма (22) вибрана таким чином, що для її мінімуму $\Lambda(N)$ та знайдених функцій $F_N(x, y)$ виконується рівність

$$\Lambda(N) = \int_0^a \int_0^b [\sum_{k=N+1}^{M} c_k^N \mathrm{A}_k(x, y)]^2 dxdy + \\ + \sum_{m=1}^{4} \left\| \sum_{k=1}^{3N} c_k^N A_{m,k}(\gamma_m) - P_m(\gamma) \right\|_m^2, \tag{23}$$

яка дає оцінку точності задоволення умов (18), (20).

Якщо припустити, що виконується рівність $\Lambda(N) = 0$, то всі рівняння (18), (20) будуть задоволені і вихідна задача розв'язана.

Теорема. Якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке N, що $\Lambda(N) < \frac{\varepsilon^2}{4}$, то *напруження, виражені через функцію* $F(x, y) = \lim_{N \to \infty} F_N(x, y)$, *будуть точно задовольняти умови (10), (12) в метриках* $L_2[0, \alpha_m]$, *а також рівняння (6).*

Доведення теореми 2 основане на результатах роботи [7].

Обговорення результатів. Форма (22) не є лінійною, але, якщо її мінімум при зростанні N прямує до нуля, то це значення служить оцінкою похибки розв'язку всіх рівнянь і умов, які в неї входять. Узагальнено відомий метод Фур'є на випадок розкладу функцій за неортогональними синусами і косинусами. Запропонований метод розв'язання крайових задач органічно поєднує чотири аспекти: розроблену аналітично-числову методику використанням неортогональних систем функцій; розбиття напруженого стану на основний і збурений стани; універсальному комп'ютерному обчислювальному методі наближеного задоволення довільної кількості рівнянь і умов; вмонтованому в нього комп'ютерного контролю збіжності і точності вже на ранніх етапах обчислень.

Висновки. Доведено, що неперервну функцію можна розкласти не використовуючи одну базову неортогональну функцію, наприклад постійну. На заданому проміжку $[l_1, l_2]$ завжди існує зліченна кількість неортогональних систем базисних функцій, де кожна функція базису розкладається по цьому базису. Ортогональні

системи функцій є виродженим випадком неортогональних систем функцій. Запропоновано поділ напруженого стану пластини на основний напружений стан і збурений стан, який згасає при видаленні від навантаженої сторони пластини. Розроблено алгоритм аналітично-числового розв'язку крайової задачі для прямокутної пластини із змінними пружними характеристиками. Запропоновано універсальний спосіб зведення всіх граничних умов в прямокутній пластині зі змінними пружними характеристиками до мінімізації узагальненої квадратичної форми. Встановлено, що шість неортогональних функцій значно краще апроксимує розривну функцію чим тисячі ортогональні функції. Знайдено критерії, за яких побудований наближений розв'язок збігається з точним.

Список використаних джерел

1. *Алексидзе М. А.* Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач / М. А. Алексидзе. – Москва: Наука, 1978. – 352 с.
2. *Толстов Г. П.* Ряды Фурье / Г. П. Толстов. – Москва: Наука, 1980. – 384 с.
3. *Mohan B. M.* Continuous Time Dynamical Systems: State Estimation and Optimal Control With Orthogonal Functions / B. M. Mohan, *S.K.* Kar. – Boca Raton: CRC Press, 2018.
4. *Revenko V P* Solving the three-dimensional equations of the linear theory of elasticity / V.P. Revenko // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, № 7. – P. 730-741. https://doi.org/10.1007/s10778-009-0225-42009
5. *Bakulin V.N.* Analytical and numerical method of finite bodies for calculation of cylindrical orthotropic shell with rectangular hole / V.N. Bakulin, V.P. Revenko // Russian Mathematics. – 2016. – № 6. – P. 1–11.
6. *Bramble J. H., Schatz A. H.* Least squares method for 2mth order elliptic boundary value problems /J.H. Bramble, A. H. Schatz // Mathematics of Computation. – 1971. – Vol. 25, No. 113. – P. 1–32.
7. *Ломакин В.А***.** Теория упругости неоднородных тел / В.А**.** Ломакин. – Москва: Изд. Москов. университета, 1976. – 368 с.

References

1. ALEKSY`DZE M. A. (1978) Fundamental`nye funkcy`y` v pry`bly`zhennyx resheny`yax grany`chnyx zadach. Moskva: Nauka.
2. TOLSTOV G. P. (1980) Ryady Fur`e. Moskva: Nauka.
3. MOHAN B. M. and KAR S.K. (2018) Continuous Time Dynamical Systems: State Estimation and Optimal Control With Orthogonal Functions. Boca Raton: CRC Press.
4. REVENKO V.P. (2009) Solving the three-dimensional equations of the linear theory of elasticity. *Int. Appl. Mech.* **(45)** 7. p. 730-741.
5. REVENKO V.P. and BAKULIN V.N. (2016) Analytical and numerical method of finite bodies for calculation of cylindrical orthotropic shell with rectangular hole. *Russian Mathematics*. No 6. p. 1–11.
6. BRAMBLE J. H., SCHATZ A. H. Least squares method for 2mth order elliptic boundary value problems. *Math. of Comp.* 1971. P. 1-32.
7. LOMAKY`N V.A. 1976 Teory`ya uprugosty` neodnorodnyx tel. Moskva: Yzdatel`stvo Moskovskogo uny`versy`teta

Надійшла до редколегії 27.08.21

УДК 531.7 : 621.763

https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.20

Рево С. Л.[1], д.ф.-м. н., проф.,
Авраменко Т. Г.[1], к.ф.-м. н.,
Мельниченко М. М.[1], к.ф.-м. н., с.н.с.,
Іваненко К. О.[1], к.ф.-м. н.

Фізико-механічні характеристики нанокомпозційниих матеріалів на основі фторопласту

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
03127, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: realcrystallab@univ.kiev.ua

S. L. Revo[1], Dr. Sc.,
T. G. Avramenko[1], Ph.D.,
M. M. Melnichenko[1], Ph.D.,
K. O. Ivanenko[1], Ph.D.

Physico-mechanical characteristics of nanocomposite materials based on fluoroplastic

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03127, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: realcrystallab@univ.kiev.ua

У даній роботі методом наноіндентування було проведено оцінку пружних і міцнісних властивостей полімерних композитів з політрифторхлоретиленовою матрицею і наповнювачем з термічно розширеного графіту. Розглянуто вплив дисперсності і концентрації наповнювача на механічні характеристики нанокомпозиційних матеріалів. Показано, що мікротвердість нанокомпозиційних матеріалів зменшується зі збільшенням концентрації наповнювача. Спостережувані при цьому зміни модуля Юнга і співвідношення H/E свідчать про зміну аморфно кристалічної поведінки композиту до такої, що характерна дрібнокристалічним матеріалам в залежності від дисперсності розширеного графіту.

Ключові слова: нанокомпозиційний матеріал, мікротвердість, політрифторхлоретилен, розширений графіт,.

In this work, the elastic and strength properties of polymer composites with a polytrifluorochlorethylene matrix and a thermally expanded graphite filler were evaluated by the nanoindentation method, and the effect of the dispersion and concentration of the filler on the mechanical characteristics of nanocomposite materials was considered. It is shown that the microhardness of nanocomposite materials decreases with increasing filler concentration. An increase in the microhardness and Young's modulus with the growth of filler particles was observed for nanocomposite materials with a filler concentration of 3 vol.%. As for nanocomposite materials with a filler volume fraction of 10 vol.%, similar behavior of the mechanical characteristics was observed with an increase in the dispersion of thermally expanded graphite particles to 180 μm. A subsequent increase in the average particle size of thermally expanded graphite leads to a decrease in Young's modulus and microhardness of composites, which may be associated with different degrees of polymer structuring and the formation of different orientational orders from the filler. The observed changes in Young's modulus and H/E ratio indicate a change in the amorphous crystalline behavior of the composite to that characteristic of fine-crystalline materials and depends on the dispersion of thermally expanded graphite.

Key Words: nanocomposite material, microhardness, polytrifluorochloroethylene, expanded graphite.

Статтю представив член-кор. НАН України Жук Я.О.

Особливості молекулярної і надмолекулярної структури політрифторхлоретилен (фторопласта (ФП)) забезпечують реалізацію унікальної комбінації його міцності, триботехнологічних, антикорозійних, теплофізичних та інших експлуатаційних характеристик у різних виробах і, зокрема, робочих деталях обладнання [1]. Різні наповнювачі (волокна і частки) успішно зменшують на кілька порядків знос фторопластів, але вони також і погіршують деякі інші корисні

© С.Л. Рево, Т.Г. Авраменко,
М.М. Мельниченко, К.О. Іваненко 2021

термічні і хімічні властивості. Використання вуглецевих нанонаповнювачів дозволяє усунути багато обмежень, які властиві традиційним наповнювачам. При цьому невеликі концентрації наночастинок можуть призвести не тільки до покращення механічних властивостей, таких як міцність, модуль Юнга, деформація до руйнування полімерних матриць [2,3], але і роблять композиційний матеріал електропровідним. Такого роду струмопровідні полімерні композиційні матеріали можуть успішно застосовуватися для екранування електроніки, або створення складних багатошарових електронних плат.

У даній роботі термічно розширений графіт (ТРГ) використовується, як нанорозмірна форма вуглецевого наповнювача, для створення нано-композиційних матеріалів (НКМ) на основі ФП. Дослідження структури і фізичних характеристик НКМ дозволять сформулювати науково обгрунтований підхід до прогнозування і цільового регулювання властивостей таких композитів [4]. В сучасному матеріалознавстві щодо полімерних НКМ немає загальних методологічних підходів для отримання матеріалів зі стабільними механічними параметрами. Тому метою даної роботи було, використовуючи неруйнівний метод мікро-індентування встановити закономірності впливу концентрації подрібненого ТРГ на структуроутворення композитів і їх механічні характеристики для створення матеріалів з прогнозованими властивостями.

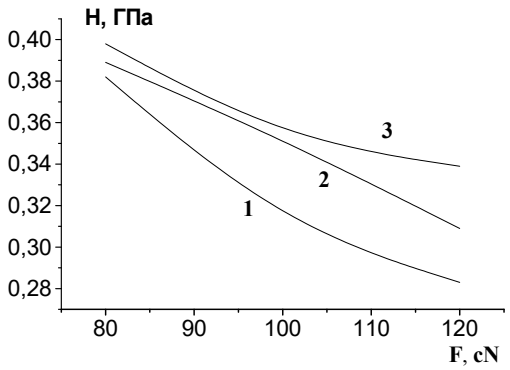
Зразки і методи вимірів

Для приготування НКМ використовували ТРГ, отриманий термолізом окисленого графіту [5]. Порошкові зразки ТРГ мали червоподібну структуру частинок з великою площею поверхні 35-70°м^2/г, довжиною частинок до 5°мм і їх ефективним діаметром близько 0,3°мм. Застосовували порошок ТРГ з середнім розміром поперечного перерізу частинок 40, 80, 120, 180, і 260°мкм. В якості матриці був використаний порошок ФП марки В. Порошок полімеру і диспергованого ТРГ попередньо змішували. Після цього суміш порошків спікалася у вакуумній циліндричної прес формі при температурі 215 ± 5^0 С, тиску 30 МПа і швидкості нагріву-охолодження 40^o С на годину. Структурні характеристики зразків (зокрема, ступінь кристалічності) визначали за допомогою дифрактограм, отриманих на автоматичному дифрактометрі ДРОН-4М. Мікротвердість отриманих матеріалів вимірювали методом кінетичної твердості по Мейеру, використовуючи прилад Мікрон-гамма, який дозволяє одночасно реєструвати глибину проникнення індентора і навантаження. Дослідження проводили при навантаженні в діапазоні від 40 до 120 г за схемою навантаження-розвантаження індентора (без витримки між циклами). Величина кожного з уколів є середнім значенням 15 послідовних вдавлень індентора з кроком 100 мкм.

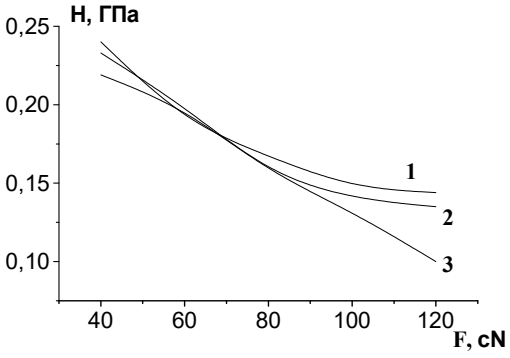
Результати та їхнє обговорення

Попередні результати досліджень мікроструктури [4] показали, що кожна червоподібна частка ТРГ складається з мікрокристалітів, які мають структуру, подібну до природного графіту. Розміри нано-структурованих фрагментів ТРГ знаходяться в діапазоні від декількох до сотень нанометрів. При механічній диспергації відбувається фрагментація часток, змінюється їх морфологія, а форма прагне змінитися до дископодібної. Після пресування і спікання частки ТРГ розшаровуються і, в залежності від дисперсності ТРГ, по-різному розподіляються в матриці ФП. Таким чином, дисперсія порошків є важливою характеристикою, оскільки вона формує властивості всієї системи. При цьому механічні властивості полімеру в значній мірі визначаються ступенем кристалічності, тобто вмістом кристалічної фази в структурі полімеру.

На рис. 1 наведена залежність мікротвердості (Н) від навантаження, отримана на приладі Мікрон-гамма. Як видно з рис. 1 мікротвердість зразків монотонно зменшується з ростом навантаження на індентор. Зміни абсолютних значень величини Н для НКМ з концентрацією наповнювача 3°об.°% становить ΔН = 0,05 ГПа. При навантаженні на індентор 120°г, значення мікротвердості для зразків з дисперсністю часток наповнювача 40, 80 і 260 мкм становить 0,28, 0,3 і 0,35 ГПа відповідно (рис. 1а). Збільшення концентрації ТРГ до 10°об.°% призводить до зменшення значень мікротвердості, навіть у відношенні ненаповненого ФП. Зменшення мікротвердості при збільшенні вмісту наповнювача можна пов'язати зі зміною типу і кількості кристалічної фази полімеру. Так для НКМ при навантаженні на індентор F = 120 СН, Н приймає значення 0.13 і 0.10 ГПа для зразків з дисперсністю часток наповнювача 120°мкм і 500°мкм (рис. 1б).



а



б

Рис. 1 Залежності мікротвердості від навантаження на індентор а) для зразків ФП-ТРГ, С (ТРГ) = 3 об.%, D = 40 (1), 80 (2), 260 (3) мкм; б) для чистого ФП (1) і НКМ С (ТРГ) = 10 об.%, d = 120 (2), 500 (3) мкм.

Отримані результати були використані для визначення значень модуля Юнга НКМ (рис. 2). Для НКМ з концентрацією ТРГ 3 об. % модуль Юнга збільшується і зростає від 2,3 до 3 ГПа при збільшенні середнього розміру частинок наповнювача від 40 до 260 мкм. Збільшення концентрації вуглецевої фази до 10°об.°% погіршує пружні властивості НКМ. При цьому простежується розкид значень модуля Юнга для зразків з різною дисперсністю ТРГ. Так, мінімальне значення Е = 1,5 ГПа (на 10% менше значень для ФП), спостерігалося для композиції з дисперсністю ТРГ 120 мкм, а максимальне Е°= =°1,8 ГПа для НКМ з (ТРГ) = 180 мкм. Розкид значень модуля Юнга може бути пов'язаний зі зміною кількісного співвідношення компонентів матеріалу і просторової орієнтації частинок наповнювача. За отриманими результатами дослідження було також проведено оцінку ступеня зміцнення матеріалу. Відношення твердості матеріалу Н до його модуля пружності Е (Н°/°Е) зручно застосовувати для швидкої і ефективної оцінки ступеня зміцнення матеріалів. Величина Н°/°Е характеризує здатність матеріалу змінювати свою форму і розмір в процесі деформації, а також може служити якісною порівняльною характеристикою опору матеріалів деформації при механічному навантаженні і, таким чином, відображати його структурний

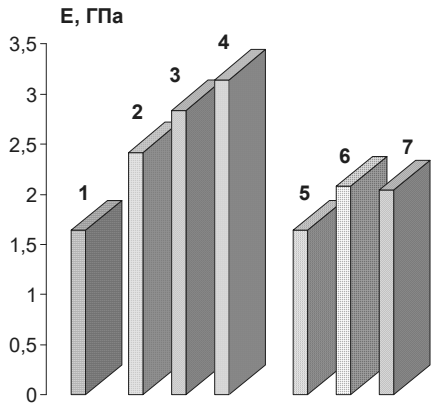


Рис. 2 Модуль Юнга для зразків ФП (1) і НКМ ФП-ТРГ з концентрацією ТРГ 3 об.% (2, 3, 4) і 10 об.% (5, 6, 7) і дисперсністю його частинок: 40 (2) , 80 (3), 120 (5), 180 (6), 260 (4), 500 (7) мкм.

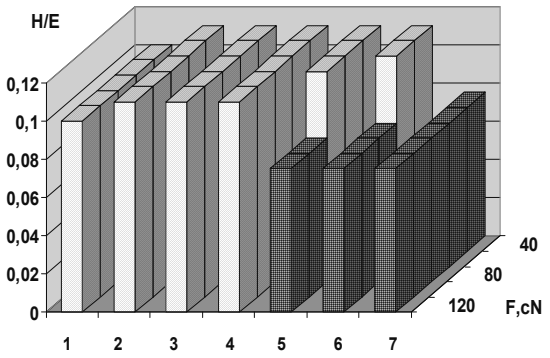


Рис. 3 Залежність відношення Н°/°Е при різного ступеня навантаженні для зразків ФП (1) і НКМ ФП-ТРГ з концентрацією ТРГ 3 об. % (2, 3, 4) і 10 об. % (5, 6, 7) і дисперсністю його частинок: 40 (2), 80 (3), 120 (5), 180 (6), 260 (4), 500 (7)мкм.

стан: Н°/°Е <0,04 - крупно кристалічні метали і сплави; Н°/°Е≈0,05...0,09-дрібнокристалічні і наноматеріали, інтенсивно-деформовані, мультифазові, кераміка, покриття, плівки; Н°/°Е ≥ 0,1 – аморфний, або аморфно-кристалічний стан матеріалу. За значеннями відношення Н°/°Е було

визначено характер поведінки НКМ ФП-ТРГ при різній величині навантаження на індентор (рис 3). З рис.3 видно, що при невеликій концентрації наповнювача (3 об.%) значення H°/°E = 0.1, що відповідає аморфному стану зразків. У той же час, при більшій концентрації наповнювача (10°об.°%) спостерігається зміна стану зразків при навантаженні від аморфного до дрібнокристалічного або керамічного типу. Це свідчить про збільшення впливу на механічні характеристики композиту вуглецевого компоненту. При цьому значення H°/°E зменшується до 0,07.

Таким чином, застосування методів індентування дозволяє вирішувати широке коло питань фізичного матеріалознавства, які є частиною більш складних комплексних завдань. Зокрема, методи індентування дають можливість визначати механічні властивості, динаміку і механізми деформації найрізноманітніших матеріалів в тому числі і полімерних нанокомпозитів.

Методом вимірювання мікротвердості було проведено оцінку пружних і міцнісних властивостей аморфно-кристалічного композиту з політрифторхлоретиленовою матрицею.

Показано, що мікротвердість НКМ ФП-ТРГ зменшується зі збільшенням концентрації наповнювача. Спостережувані при цьому зміни модуля Юнга і відношення H°/°E свідчать про зміну аморфно кристалічного стану композиту до стану дрібнокристалічних матеріалів, і залежать від дисперсності ТРГ. Це може бути пов'язано з різним ступенем структурованості полімеру і формуванням в структурі полімеру різного орієнтаційного порядку.

Список використаних джерел

1. *Jose J.P.* Advances in polymer composites: Macro- and microcomposites–State of the art, new challenges, and opportunities / J.P. Jose, S. Thomas, J. Kuruvilla, S.K. Malhotra, K. Goda, M.S. Sreekala // Polymer Composites, Wiley. – 2012. – Vol. 1. – P. 3–16.
2. *Masuelli M.A.* Introduction of fibre-reinforced polymers–polymers and composites: concepts, properties and processes / M.A. Masuelli // Fiber Reinforced Polymers–The Technology Applied for Concrete Repair; M. Masuelli, Ed. – 2013. – P. 39.
3. *Lin S.* Evaluation of the thermal, mechanical and dynamic mechanical characteristics of modified graphite nanoplatelets and graphene oxide high-density polyethylene composites / S. Lin, M.A.S. Anwer, Y. Zhou, A. Sinha, L. Carson, H. Naguib // Composites Part B: Engineering, – 2018. – vol. 132. – P. 61–68.
4. *Семенцов Ю.І.* Терморозширений графіт / І.Ю. Семенцов, С.Л. Рево, К.О. Іваненко // Київ: Інтерсервіс. – 2016. – 241 с.
5. *Panda A.* Manufacturing Technology of Composite Materials–Principles of Modification of Polymer Composite Materials Technology Based on Polytetrafluoroethylene / A. Panda, K. Dyadyura, J. Valí ˇcek, M. Harni ˇcárov, J. Zajac, V. Modrá, I. Pandov, P. Vrábel, E. Nováková-Marcin ˇcínov and Z. Pavelek // Materials. – 2017. – №4. – P. 377.

References

1. JOSE J.P., THOMAS S., KURUVILLA J., MALHOTRA S.K., GODA K., M.S. SREEKALA M.S. (2012) *Advances in polymer composites: Macro- and microcomposites—State of the art, new challenges, and opportunities*. Polymer Composites, Wiley. 1. pp. 3–16.
2. MASUELLI M.A. (2013) *Introduction of fibre-reinforced polymers–Polymers and composites: Concepts, properties and processes*. Fiber Reinforced Polymers–The Technology Applied for Concrete Repair; M. Masuelli, Ed. p. 39.
3. LIN S., ANWER M.A.S., ZHOU Y., SINHA A., CARSON L., NAGUIB H. (2018) *Evaluation of the thermal, mechanical and dynamic mechanical characteristics of modified graphite nanoplatelets and graphene oxide high-density polyethylene composites.* Composites Part B: Engineering. 132. pp. 61–68.
4. SEMENTSOV YU.I., REVO S.L., IVANENKO K.O. (2016) *Thermally exfoliated graphite*. Kyiv: Interservis.
5. PANDA A., DYADYURA K., VALÍ ˇCEK J., HARNI ˇCÁROV M., ZAJAC J., MODRÁ V., PANDOV I., VRÁBEL P., NOVÁKOVÁ-MARCIN ˇCÍNOV E. AND PAVELEK Z. (2017) *Manufacturing Technology of Composite Materials–Principles of Modification of Polymer Composite Materials Technology Based on Polytetrafluoroethylene*. Materials. 10(4). p. 377.

Надійшла до редколегії 18.08.21

УДК 519.9 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.21

Резнік В.С, к.ф-м.н, с.н.с.

Обгрунтування застосування нелінійної моделі в'язкопружності типу моделі Работнова в задачах повзучості

Інститут механіки С.П. Тимошенка НАН України, вул. Нестерова, 3, 03057, Київ;
e-mail creep@inmech.kiev.ua

V.S. Reznik, Ph.D. (Phys.-Math.), Sci. researcher.

Justification of application of nonlinear viscoelasticity model of Rabotnov's model type in creep problems

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics, 252680, Nesterov str, 3, Kiev;
e-mail creep@inmech.kiev.ua

Залежність між компонентами тензора деформацій, тензора напружень і часом задається за допомогою визначальних рівнянь спадкового типу, що записані виходячи з гіпотези пропорційності девіаторів. В якості об'єкту дослідження розглядаються тонкостінні трубчасті елементи з поліетилену низького тиску. Обгрунтовується область застосування моделі виходячи з гіпотези існування єдиної діаграми миттєвого деформування і єдиної діаграми довготривалого деформування. Перевіряється інваріантність діаграм розтягу і кручення відносно напруженого стану. Визнається область нелінійно-пружного деформування. Визначальні рівняння моделі містять набір функцій і коефіцієнтів, що визначаються з базових експериментів. Розроблено метод визначення параметрів ядер спадковості нелінійно в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану. Нелінійність в'язкопружних властивостей задається рівняннями типу моделі Работнова. Метод ґрунтується на співвідношеннях між ядрами повзучості, що отримані за умов складного напруженого стану і ядрами повзучості за умов одновимірного напруженого стану. Метод апробуються експериментально на задачах розрахунку деформацій повзучості при комбінованому навантаженні тонкостінних трубчатих елементів з поліетилени низького тиску.

Ключові слова: нелінійна в'язкопружність, складний напружений стан, діаграма миттєвого деформування, діаграма кручення, повздовжня повзучість, зсувна повзучість, об'ємна повзучість, ядра спадковості, ізохронні діаграми.

The relationship between the components of the strain tensor, stress tensor and time is given by the defining equations of the hereditary type, which are written based on the hypothesis of proportionality of the deviators. Thin-walled tubular low-pressure polyethylene elements are considered as the object of research. The scope of the model is substantiated based on the hypothesis of the existence of a single diagram of instantaneous deformation and a single diagram of long-term deformation. The invariance of the tensile and torsion diagrams with respect to the stress state is checked. The region of nonlinear elastic deformation is determined. The defining equations of the model contain a set of functions and coefficients determined from the basic experiments. A method for determining the parameters of heredity kernels of nonlinear viscoelastic materials under complex stress state has been developed. The nonlinearity of viscoelastic properties is given by equations of the Rabotnov's model type. The method is based on the relations between the creep kernels obtained under conditions of complex stress state and the creep kernels under one-dimensional stress state. The method is tested experimentally on the problems of calculating creep deformations under combined loading of thin-walled tubular elements made of low-pressure polyethylene

Key words: nonlinear visco-elasticity, complex stressed state, longitudinal creep, shearing creep, volume creep, diagrams of instant deformation, diagrams of torsion, longitudinal creep, shear creep, volume creep, heredity nuclei, isochronous diagrams.

Статтю представив член-кор. НАН України Жук Я.О.

© В.С. Резнік, 2021

Вступ

Широке застосування тонкостінних трубчастих елементів з полімерних матеріалів зумовило детальне вивчення їх в'язкопружних властивостей. Багато елементів конструкцій являють собою об'єкти, що деформуються за умов складного напруженого стану. Найчастіше деформування в'язкопружних середовищ задають за допомогою рівнянь спадкового типу [1-2]. Рівняння встановлюють залежність між компонентами тензора деформацій, тензора напружень і часовим інтегральним оператором, і містять ядра спадковості, набір функцій і коефіцієнтів, що визначаються із базових експериментів.

Однією з гіпотез, що використана при побудові визначальних рівнянь за умов складного напруженого стану є гіпотеза пропорційності девіаторів тензорів. В рамках цієї гіпотези в роботі [3] побудовано систему визначальних рівнянь для нелінійних в'язкопружних середовищ. В роботі [4] ядра спадковості за умов складного напруженого стану визначаються за ядрами повздовжньої і поперечної повзучості.

В даній статті обгрунтовується область застосування моделі виходячи з гіпотези існування єдиної діаграми миттєвого деформування і єдиної діаграми довготривалого деформування. Перевіряється інваріантність діаграм розтягу і кручення відносно напруженого стану. Визнається область нелінійно-пружного деформування. Розроблено метод визначення параметрів ядер спадковості нелінійно в'язкопружних матері-алів за умов складного напруженого стану.

1. Постановка задачі

В роботі розглядається деформування ізотропних нелінійно-в'язкопружних середо-вищ зі стабільними механіченими властивостями за умов складного напруженого стану із заданою програмою навантаження, так що

$$\sigma_{ij}(\tau), \quad \tau \in (0,t), \tag{1}$$

де σ_{ij} – компоненти тензора напружень; t – час спостереження; τ –час, що передує моменту спостереження. Процес навантаження (1) вважаємо простим, так що виконуються співвідношення

$$\sigma_{11} = \mu(t)\overline{\sigma}_{11},...,\tau_{12} = \mu(t)\overline{\sigma}_{12},...$$

Визначальні рівняння що задають залежність між компонентами тензора деформацій $\varepsilon_{ij}(t)$ і компонентами тензора напружень $\sigma_{ij}(t)$ при повзучості запишемо у вигляді [3]

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(t) - \dfrac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_v(t) = \dfrac{3}{2}\dfrac{\varepsilon_i(\sigma_i(t);t)}{\sigma_i(t)}\left(\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij}\sigma_0(t)\right); \\ \varphi_i\left(\varepsilon_i(t)\right) = \sigma_i(t) + \lambda_i\int\limits_0^t K_i(t-\tau)\sigma_i(\tau)d\tau; \\ \varphi_v\left(\varepsilon_v(t)\right) = \sigma_0(t) + \lambda_v\int\limits_0^t K_v(t-\tau)\sigma_0(\tau)d\tau, \end{cases} \tag{2}$$

де $\varepsilon_v(\cdot)$ і $\varepsilon_i(\cdot)$ – об'ємна деформація і інтенсивність тензора деформацій; $\sigma_0(t)$ і $\sigma_i(t)$ – перший інваріант і інтенсивність тензора напружень, δ_{ij} – дельта-функція Кронекера, $\varphi_i(\cdot)$ і $\varphi_v(\cdot)$ – функції, що задають нелінійність скалярних властивостей; $K_i(\cdot)$, $K_v(\cdot)$, λ_i, λ_v – реологічні параметри.

Нелінійність в'язкопружних властивостей в рівнянні (2) задається функціями $\varphi_i(\cdot)$ і $\varphi_v(\cdot)$, які задовольняють гіпотезі єдиної діаграми короткотривалого деформування в координатах „інтенсивність напружень σ_i - інтенсивність деформацій ε_i" і „середнє напруження σ_0 – об'ємна деформація ε_v".

Вважається, що діаграми короткотривалого деформування інваріантні по відношенню до виду напруженого стану.

Задача полягає у обгруванні область застосування моделі виходячи з гіпотези існування єдиної діаграми миттєвого деформування і єдиної діаграми довготривалого деформування, апробації інваріантності діаграм розтягу і кручення відносно напруженого стану, визначенні області нелінійно-пружного деформування. Визначенні параметрів ядер спадковості нелінійно в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану та апробації отриманих залежностей між ядрами на задачах розрахунку деформацій повзучості та релаксації напружень.

2.Обгрунтування застосування нелінійної моделі в'язкопружності

Існування єдиної діаграми миттєвого деформування обґрунтовується за результатами короткотривалих випробовувань тонкостінних трубчатих зразків на одновісний розтяг і чисте кручення. Вирази для інтенсивності напружень і деформацій за умов одновісного розтягу мають вигляд

© В.С. Резнік, 2021

$$\sigma_i = \sigma_{11}; \quad \varepsilon_i = \varepsilon_{11} - \frac{1-2\nu}{3E}\sigma_{11}, \qquad (3)$$

а за умов чистого кручення –вигляд

$$\sigma_i = \sqrt{3}\tau_{21}; \quad \varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon_{21}. \qquad (4)$$

Тут E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуассона.

На рис. 1. представлено залежності

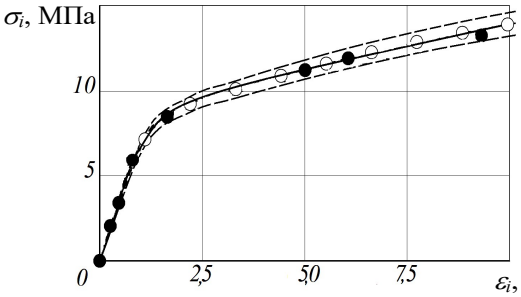


Рис. 1 – Едина діаграма «миттєвого» деформування поліетилену низького тиску за умов одновісногорозтягу(○)і чистого кручення (●)

інтенсивності нормальних напружень від інтенсивносі лінійних деформацій для поліетилену низького тиску. Залежності побудовано за результатами випробувань тонкостінних трубчатих зразків з використанням співвідношень (3) і (4). В цілому, як показує рис.1, гіпотеза існування єдиної діаграми «миттєваго» деформування для поліетилену низького тиску підтверджується. Практично всі точки, що відповідають залежностям σ_i від ε_i, не виходять за межі інтервалу, обмеженого величиною $\delta = \pm 5\%$.

3. Едина діаграма довготривалого деформування Із факту існвання єдиної діаграми «миттєвого» деформування випливає, що залежність інтенсивності

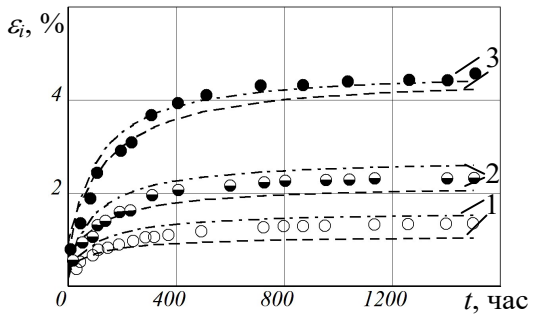


Рис.2 – Едина діаграма довготривалого деформування поліетилену низького тиску при $\sigma_i = 2{,}59$ (○,1); 3,92 (◒,2); 5,88 (●,3) МПа.— — діаграма, що відповідає одновісному розтягу;—·— діаграма, що відповідає чистому крученню

напружень від інтенсивності деформацій може бути визначена за результатами випробувань на одновісний розтяг. В цьому випадку вирази для інтенсивності напружень і деформацій за умов одновісного розтягу і чистого кручення задаються згідно (3) і (4), а при комбінованому навантаженні розтягом з крученням запишемо у вигляді

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2}; \qquad (5)$$

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{33}-\varepsilon_{11})^2 + 6\varepsilon_{21}^2}$$

де $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$ – поперечні деформації. Інші позначення співпадають з прйнятими в (3) і (4).

На рис.2 представлено залежності інтенсивності деформацій повзучості від часу для поліетилену низького тиску. Штрихо-вими лініями нанесено залежності інтенсив-ностей деформацій повзучості від часу за умов одновісного розтягу, а штрих-пунктирними лініями – за умов чистого кручення. Як свідчить рис. 2, для поліетилену низького тиску підтверджується також і гіпотеза існування єдиної діаграми довготривалого деформування в координатах «$\varepsilon_i - t$». Значення інтенсивностей деформацій $\varepsilon_i(t)$, отримані за умов комбінованого навантаження розтягом з крученням (точки), практично співпадають із значеннями $\varepsilon_i(t)$, отриманими за умов чистого розтягу (штрихові лінії). Очевидно, що вид і параметри функціональної залежності, що задає єдину діаграму довготривалого деформування, може бути визначена за результатами випробувань на одновісну повзучість.

4. Розрахунок деформацій повзучості за умов складного напруженого стану

Вибір структури ядра здійснено виходячи із мінімуму квадратичного відхилення дискретних значень ядер від їх аналітичних виразів. В роботі в якості ядра спадковості використано дробово-експоненціальне ядро

$$K(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha)]}; \qquad (6)$$

де α і β – параметри ядер $(-1<\alpha<0;\ \ \beta>0)$; $\Gamma[\cdot]$ – гамма-функція.

Між ядрами , що знайдені за умов складного напруженого стану і ядрами, що знайдені за умов одновимірного напруженого стану існує зв'язок, що виражається формулами:

$$\lambda_i K_i(t)=\frac{2}{3}\frac{\psi_{11}(\sigma_{11})\lambda_{11}K_{11}(t)+\psi_{22}(\sigma_{11})\lambda_{22}K_{22}(t)}{\psi_i(\sigma_i)}$$

$$\lambda_v K_v(t)=\frac{\psi_{11}(\sigma_{11})\lambda_{11}K_{11}(t)+2\psi_{22}(\sigma_{11})\lambda_{22}K_{22}(t)}{\psi_v\left(\frac{1}{3}\sigma_{11}\right)} \qquad (7)$$

або формулами

$$\lambda_i K_i(t)=\lambda_{12}K_{12}(t),$$

$$\lambda_v K_v(t)=\frac{3\lambda_{11}K_{11}(t)\psi_{11}\left(\sigma_{11}(\tau)\right)-2\sqrt{3}\lambda_{12}K_{12}(t)\psi_{12}\left(\frac{\sigma_{11}(\tau)}{\sqrt{3}}\right)}{3\psi_{11}\left(\sigma_{11}(t)\right)-2\sqrt{3}\psi_{12}\left(\frac{\sigma_{11}(t)}{\sqrt{3}}\right)} \qquad (8)$$

Для компонент тензора деформацій $\varepsilon_{ij}(t)$ із системи рівнянь (2) з врахуванням (6) отримаємо рівняння

$$\varepsilon_{ij}(t)=\frac{3}{2}\frac{1}{\sigma_i(t)}\psi_i\left[\sigma_i(t)+\lambda_i\int_0^t\frac{(-\beta_i)^n(t-\tau)^{(1+\alpha_i)n}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha_i)]}\sigma_i(\tau)d\tau\right]\times$$
$$\left[\sigma_{ij}(t)-\delta_{ij}\sigma_0(t)\right]+\frac{1}{3}\delta_{ij}\psi_v\left[\sigma_0(t)+\lambda_v\int_0^t\frac{(-\beta_v)^n(t-\tau)^{(1+\alpha_v)n}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha_v)]}\sigma_0(\tau)d\tau\right] \qquad (9)$$

Результати розрахунків за рівнянням (9) за умов складного напруженого стану, виконаних з використанням параметрів ядер, що знайдені за даними випробувань на повзучість за умов одновісного розтягу з заміром поздовжніх і поперечних деформацій повзучості нанесені штриховими лініями. Штрихпунктирними лініями нанесені результати розрахунків, виконаних з використанням параметрів ядер, які знай-дені за даними випробувань на повзучість за умов одновісного розтягу з заміром повздовжніх деформацій і при чистому крученні з заміром зсувних деформацій.

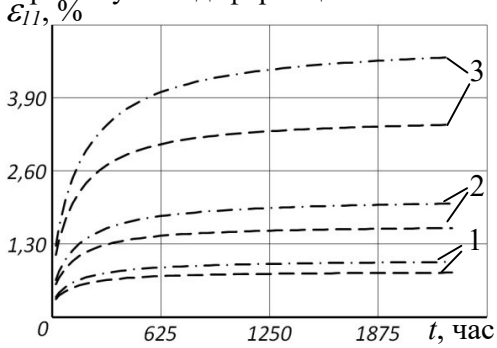


Рис.3.Розрахункові лінії деформації повздовжньої повзучості тонкостінних трубчастих елементів з поліетилену низького тиску за умов одночасної дії розтягу з крученням. σ_{11} = 1,96, τ_{21} = 0,98 (1); σ_{11} = 2,97, τ_{21} = 1,48 (2); σ_{11} = 4,45, τ_{21} = 2,23 (3) МПа.

З рис. 3 маємо, що розрахунки кожним підходом при невеликих значеннях напружень дають практично однакові результати, а при більших значеннях розбіжність складає близько 20%.

Список використаних джерел

1. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций.– Москва: Наука, 1966. – 752 с.
2. *Кристенсен Р.М.* Введение в теорию вязкоупругости//Пер. с англ. под ред. Г.С.Шапиро. – Москва: Мир, 1974. – 340 с.
3. *Голуб В. П., Кобзарь Ю. М., Рагулина В. С.* К задаче определения параметров ядер наследственности изотропных нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии // Теорет. и прик. механика. – 2013. – №5(51). – С. 26-35.
4. Голуб В.П., Кобзарь Ю.М., Фернати П.В. К решению задач ползучести изотропных нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии // Теор и прикл. механика.- 2014.- Вып 8 (54).- С. 45-56

References

1. RABOTNOV U.N. (1966) *Polzuchest` elementov konstrukcii//Moskva: Nauka.*
2. KRISTENSEN R.M. (1974). Vvedenie v teoriu vyazkouprugosti// Moskva: Mir.
3. GOLUB V.P. KOBZAR U.M. RAGULINA V.S. (2013). K zadache opredeleniya parametrov yader nasledstvennosri izotropnih nelineyno-vyazkouprugih materialov pri slognom napryagennom sostoyanii // *Teoret. i prikl. mehanika*. - №5(51). – p. 26-35.
4. GOLUB V.P. KOBZAR U.M. FERNATI P.V. (2014). K resheniu zadach polzuchesti izotropnih nelineyno-vyazkouprugih materialov pri slognom napryagennom sostoyanii // *Teoret. i prikl. mehanika*. - №5(51). – p. 26-35.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми »Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

Надійшла до редколегії 22.06.2021

УДК 519.9 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.22

Резнік В.С.[1], к. ф.- м. н., с.н.с.,
Ушаков О.В.[2], помічник директора,
Горун О.Ю. [2], пров.н.с.

Щодо розрахунку деформацій зсуву в призматичних стержнях із полімерних матеріалів за умов розтягу з крученням

[1] Інститут механіки С.П. Тимошенка НАН України, вул. Нестерова, 3, 03057, Київ;
e-mail creep@inmech.kiev.ua
[2] Інститут спеціальної техніки та судових експертиз Служби безпеки України, вул. Василенка, 3, 03113, м. Київ;
e-mail nddkr_icte@ssu.gov.ua

V.S. Reznik[1], Ph.D. (Phys.-Math.), senior sci.,
O.V. Ushakov[2], assistant,
O.Y. Gorun[2], leading sci.

On the problem of calculating shear deformations in prismatic bars made of polymer materials under tension with torsion

[1]S.P. Timoshenko Institute of Mechanics, 03057, Nesterov str, 3, Kiev;
e-mail creep@inmech.kiev.ua
[2]Ukrainian scientific and research Institute of special equipment and forensic expertise of the Security Service of Ukraine. 03113 Vasilenko str 5, Kyiv;
e-mail nddkr_icte@ssu.gov.ua

Розглядається процес повзучості призматичних стержнів з лінійно-в'язкопружних полімерних матеріалів за умов комбінованого навантаження. Визначальні рівняння, що описують залежність між деформаціями, напруженнями і часом, задаються у вигляді суперпозиції зсувної і об'ємної деформації. Об'єктом дослідження являються призматичні стержні зі склопластику СТ-1. Обґрунтовується область лінійності моделі, виходячи з гіпотези існування функції повзучості, побудованої по кривим податливості, єдиної діаграми довготривалого деформування і статистичного значення квантиля статистики. Визначається область лінійно-пружного деформування, виходячи з виконання умови існування єдиної функції повзучості. Визначальні рівняння моделі містять набір функцій і коефіцієнтів, що знаходяться з базових експериментів. На підставі співвідношень між ядрами одновимірного напруженого стану визначаються параметри ядер за умови складного напруженого стану. Лінійність в'язкопружних властивостей задається рівняннями Больцмана-Вольтера з дробово-експоненціальним ядром спадковості. Отримані значення параметрів ядер використовуються для розрахунку деформацій повзучості призматичних стержнів зі склоапластика СТ-1 за умов одночасної дії розтягу з крученням.

Ключові слова: лінійна в'язкопружність, складний напружений стан, повздовжня повзучість, зсувна повзучість, об'ємна повзучість, ядра спадковості, квантиль статистики.

The process of creep of prismatic rods made of linear-viscoelastic polymeric materials under combined loading is considered. Defining equations that determine the relationship between strains, stresses and time are given in the form of a superposition of shear and bulk strain. The object of study is prismatic bars made of fiberglass ST-1. The area of linearity of the model is substantiated on the basis of the hypothesis of the existence of the creep function, which is built on the yield curves, a single diagram of long-term deformation and the statistical value of the quantile of statistics. The region of linear-elastic deformation is recognized based on the fulfillment of the condition of existence of a single creep function. The defining equations of the model contain a set of functions and coefficients determined from the basic experiments. On the basis of the relations between the kernels of the one-dimensional stress state, the parameters of the kernels under the condition of a complex stress state are determined. The linearity of viscoelastic properties is given by the Boltzmann-Voltaire equations. The fractional-exponential kernels of heredity are chosen as the kernels of heredity. The obtained values of the core parameters are used to calculate the creep deformations of prismatic bars made of ST-1 fiberglass under conditions of simultaneous tensile tension.

Key words: linear viscosity, longitudinal creep, shear creep, volume creep, heredity nuclei, isochronous diagrams, quantile of statistics.

Статтю представив член-кор. НАН України Жук Я.О.

© В.С. Резнік, О.Ю Горун, О.В. Ушаков, 2021

Вступ

Широке застосування призматичних стержнів в елементах конструкцій і різноманітних механізмах зумовило вивчення їх в'язкопружних властивостей. На сьогоднішній день все більшого застосування набувають елементи конструкцій з полімерних матеріалів через їх відносно низьку вартість, легкість і міцність. Багато елементів конструкцій являють собою об'єкти, що деформуються за умов складного напруженого стану. Найчастіше деформування в'язкопружних середовищ описують за допомогою рівнянь спадкового типу [1-2]. Рівняння встановлюють залежність між компонентами тензора деформацій, тензора напружень і часовим інтегральним оператором, і містять ядра спадковості, набір функцій і коефіцієнтів, що визначаються із базових експериментів.

У роботі на підставі співвідношень між ядрами розв'язується задача розрахунку деформацій повзучості за умов одночасної дії розтягу із крученням для оргскла СТ-1. Для цього обгрунтовується область застосування моделі, виходячи з гіпотези подібності діаграми миттєвого деформування і ізохронних діаграм. Визначається область лінійно-пружного деформування. На підставі розробленого в [4] методу визначаються параметри ядер спадковості лінійно в'язкопружних матеріалів за умов одночасної дії розтягу з крученням. Будуються прогнозовані значення деформації зсуву.

1. Постановка задачі

У роботі розглядається деформування ізотропних лінійно-в'язкопружних середовищ зі стабільними механічними властивостями за умов складного напруженого стану із заданою програмою навантаження, так що

$$\sigma_{ij}(\tau), \quad \tau \in (0,t), \tag{1}$$

де σ_{ij} – компоненти тензора напружень; t – час спостереження; τ – час, що передує моменту спостереження. Процес навантаження (1) вважаємо простим, так що виконуються співвідношення

$$\sigma_{11} = \mu(t)\overline{\sigma}_{11},...,\tau_{12} = \mu(t)\overline{\sigma}_{12},...$$

Визначальні рівняння, що задають залежність між компонентами тензора деформацій $\varepsilon_{ij}(t)$ і компонентами тензора напружень $\sigma_{ij}(t)$ при повзучості запишемо у вигляді суперпозиції зсувної і об'ємної повзучості [3]

$$\varepsilon_{ij}(t) = e_{ij}(t) + \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_v(t) = \frac{1}{2G}\left[s_{ij}(t) + \lambda_s \int_0^t K_s(t-\tau)s_{ij}(\tau)d\tau \right] +$$

$$+ \frac{1}{3B}\delta_{ij}\left[\sigma_0(t) + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau)\sigma_0(\tau)d\tau \right]; \left(\mathrm{i,j} = \overline{1,3}\right), \tag{2}$$

$e_{ij}(t)$ – компоненти девіатора тензора деформацій $\varepsilon_{ij}(t)$; $s_{ij}(t)$ – компоненти девіатора тензора напружень $\sigma_{ij}(t)$; $\varepsilon_v(t)$ – об'ємна деформація; σ_0 – середнє напруження; $K_s(t-\tau)$ – ядро зсувної повзучості; $K_v(t-\tau)$ – ядро об'ємної повзучості; G – модуль зсуву; B – об'ємний модуль; λ_s, λ_v – реологічні параметри. Параметри ядер визначаються з використанням співвідношень між ядрами за умов складного напруженого стану і ядрами одновимірного напруженого стану [2].

За ядро спадковості обираємо дробово-експоненціальне ядро, оскільки воно досить точно описує процес повзучості як в області малих часів, так і для великих значень часу. Аналітичний вигляд дробово-експоненціального ядра записується у вигляді

$$K(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma\left[(1+n)(1+\alpha)\right]}; \tag{4}$$

де α і β – параметри ядер $(-1 < \alpha < 0;\ \beta > 0)$; $\Gamma[\cdot]$ – гамма-функція.

Задача полягає у розв'язанні задачі розрахунку деформацій зсуву в призматичних стержнях з оргскла СТ-1 за умов одночасної дії розтягу з крученням [3]. Для цього необхідно обґрунтувати область застосування моделі, виходячи з гіпотези існування єдиної діаграми миттєвого деформування та із критичного значення квантиля статистики, визначити параметри ядер за умови складного напруженого стану на підставі співвідношень між ядрами, провести апробацію отриманих результатів, співставивши їх з експериментальними даними .

2.Обгрунтування застосування лінійної моделі в'язкопружності

Вважається, що матеріал є лінійно-в'язкоупружним, якщо функція повзучості інваріантна по відношенню до рівня напруження $\sigma_{ij,q}\left(i,j = \overline{1,3};\ q = \overline{1,n}\right)$,

$$J_{inv,1} = \frac{\varepsilon_{ij,1}(t_2)}{\widetilde{\sigma}_{ij,1}} = J_{inv,2} = \frac{\varepsilon_{ij,2}(t_2)}{\widetilde{\sigma}_{ij,2}} = \cdots = J_{inv,q} = \frac{\varepsilon_{ij,q}(t_2)}{\sigma_{ij,q}};$$

$$J_{inv,1} = \frac{\varepsilon_{ij,1}(t_l)}{\sigma_{ij,1}} = J_{inv,2} = \frac{\varepsilon_{ij,2}(t_l)}{\sigma_{ij,2}} = \cdots = J_{inv,q} = \frac{\varepsilon_{ij,q}(t_l)}{\sigma_{ij,q}};$$

$$J_{inv,1} = \frac{\varepsilon_{ij,1}(t_1)}{\sigma_{ij,1}} = J_{inv,2} = \frac{\varepsilon_{ij,2}(t_1)}{\sigma_{ij,2}} = \cdots = J_{inv,q} = \frac{\varepsilon_{ij,q}(t_1)}{\sigma_{ij,q}},$$

а розрахункове значення квантиля статистики

$$t_{inv,\alpha,k}=\frac{\sqrt{n}}{s_l(t_l)}\delta\frac{1}{m}\sum_{q=1}^{m}J_{inv,q}(t_j)=\frac{\sqrt{n}}{s_l(t_l)}\delta\bar{J}_{inv}(t_l)>t^*_{\alpha,k},l=\overline{1,m}$$

більше його критичного табличного значення $t^*_{\alpha,k}$. Тут $J_{inv,q}(t_l)$ – значення функції повзучості в момент часу t_l при напруженнях $\sigma_{ij,q}$; $\bar{J}_{inv}(t_l)$ – вибіркове середнє значення функцій повзучості; $s_l(t_l)$ – середнє квадратичне відхилення велечини $\bar{J}_{inv}(t_l)$; n – об'єм вибірки (число функцій повзучості); δ – максимальна похибка між значеннями $J_{inv,q}(t_l)$ і $\bar{J}_{inv}(t_l)$.

Величина похибки δ в розрахунках прийнята рівною $\pm$5%, а ймовірність p попадання експериментальних функцій повзучості $J_{inv,q}(t_l)$ в інтервал, обмежений величиною δ = $\pm$5% по відношенню до величини $\bar{J}_{inv}(t_l)$, має бути не менше 90% [2].

На рис. 1 як приклад наведено функції повздовжньої $J_{11}(t_l)$ і поперечної повзучості $J_{22}(t_l)$ оргскла СТ-1.

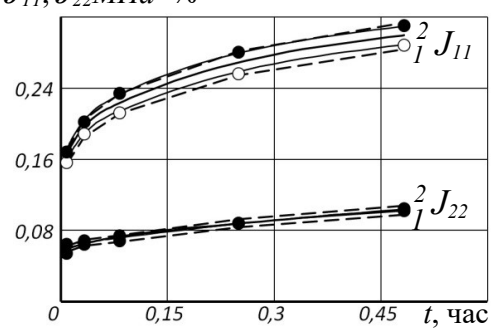


Рис. 1 – Функції повздовжньої і поперечної повзучості оргскла СТ-1

Тут і далі точками нанесені експериментальні дані, а лініями – апроксимація дискретних значень функцій повзучості згладжуючими кубічними сплайнами, на основі яких розраховувалось вибіркове середнє $\bar{J}_{11}(t_l)$ і $\bar{J}_{22}(t_l)$, які нанесено суцільними лініями. Штриховими лініями нанесено межі інтервала, що відповідає величині максимальної похибки $\delta_{\max}$ = $\pm$5% від величин $\bar{J}_{11}(t_l)$ і $\bar{J}_{22}(t_l)$. На рис.2 наведено розрахункові $t_{\alpha,k}$ та табличні $t^*_{\alpha,k}$ значення квантиля статистики для оргскла СТ-1.

Розрахункові значення величини $t_{\alpha,k}$ для деформацій повздовжньої повзучості нанесено

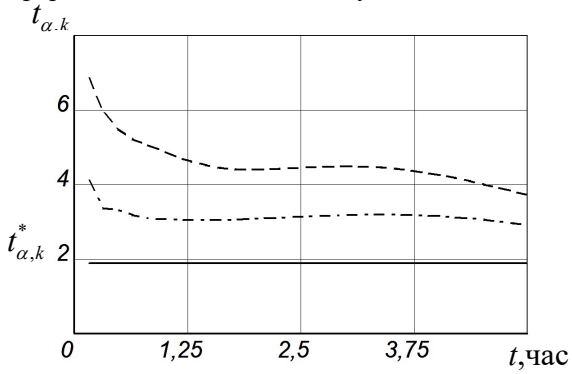


Рис. 2 – Розрахункові значення квантиля статистики повздовжньої і поперечної повзучості

штриховою лінією, а для поперечної повзучості – штрих-пунктирною лінією. Суцільною лінією нанесено табличне значення квантиля статистики.

4. Розрахунок деформацій зсуву в призматичних стержнях з полімерних матеріалів за умов розтягу із крученням

Розраховуються значення деформації зсувної повзучості $\varepsilon_{21}(t)$ тонкостінних трубчастих елементів з оргскла СТ-1 при комбінованому навантаженні розтягом із крученням, при цьому $\sigma_{11}=const$ і $\tau_{21}=\tau_{12}=const$.

Для деформацій зсувної повзучості $\varepsilon_{21}(t)$ маємо рівняння

$$\varepsilon_{21}(t)=\frac{1}{2G}\tau_{21}\left\{1+\lambda_s\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\beta_s)^n t^{n(1+\alpha_s)}}{\Gamma\left[(1+n)(1+\alpha_s)\right]}\right\}, \quad (5)$$

де прийнято $s_{ij}=\tau_{21}$. Параметри ядер спадковості визначаються на підставі зв'язку між ядрами заумов складного напруженого стану і ядрами за умови одновимірного напруженого стану. В роботі в якості базового експерименту розглянуто одновісний розтяг з заміром повздовжніх і поперечних деформацій [3]. Рівняння (5) дає змогу обчислити значення деформацій повзучості призматичних стержнів з оргскла СТ-1 за умов одночасної дії розтягу з крученням. Результати розрахунків за рівнянням (5) наведено на Рис.3. Зауважмо, що експериментальні дані за умов одночасної дії розтягу з крученням відсутні. Представлені розрахунки є виходом за межі експерименту. Тут значення деформацій $\varepsilon_{21}(t)$ розраховано при

дотичних напруженнях τ_{21} = 7,50 (1), 11,45 (2), 15,30 (3) Мпа.

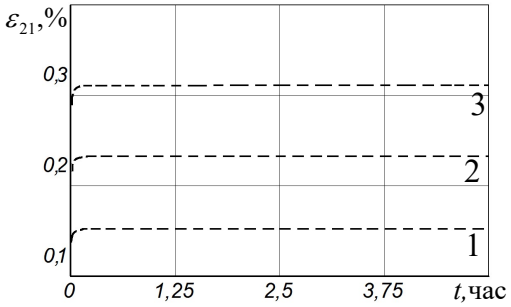


Рис.3 – Розрахунок деформацій зсуву оргскла СТ-1 за умов розтягу з крученням

5. Висновки

В роботі розв'язано актуальну задачу, що полягає у розрахунку деформацій зсуву в призматичних стержнях з оргскла СТ-1 за умов одночасної дії розтягу з крученням. В якості визначальних рівнянь використано рівняння у вигляді суперпозиції зсувної і об'ємної повзучості. Обґрунтувати область застосування моделі, виходячи з гіпотези існування єдиної діаграми миттєвого деформування та із критичного значення квантиля статистики, параметри ядер за умови складного напруженого стану знайдено на підставі співвідношень між ядрами за умов одновимірного напруженого стану, розраховано значення деформацій зсувної повзучості склопластика СТ-1за умов одночасної дії розтягу з крученням.

Список використаних джерел

1. *Работнув Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов. – Москва: Наука, 1966. – 752 с.
2. *Кристенсен Р.М.* Введение в теорию вязкоупругости / Р.М. Кристенсен. – Москва: Мир, 1974. – 340 с.
3. *Голуб В. П.* К задаче определения параметров ядер наследственности изотропных нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии / В.П. Голуб, Ю.М. Кобзарь, В.С. Рагулина // Теорет. и прикл. механика. – 2013. – №5(51). – С. 26-35.
4. *Голуб В.П.* К решению задач ползучести изотропных нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии / В.П. Голуб, Ю.М. Кобзарь, П.В. Фернати // Теор и прикл. механика. – 2014. – Вып 8 (54). – С. 45-56.

References

1. RABOTNOV, Yu. (1966) *Polzuchest` elementov konstrukciy*. Moskva: Nauka.
2. KRISTENSEN, R. (1974) Vvedenie v teoriyu vyazkouprugosty. Moskva: Mir.
3. GOLUB, V., KOBZAR, YU. & RAGULINA, V. (2013) K zadache opredeleniya parametrov yader nasledstvennosti izotropnyh nelinejno-vyazkouprugih materialov pri slozhnom napryazhennom sostoyanii. *Teoret. i prikl. mekhanika*. 5(51). p. 26-35.
4. GOLUB, V., KOBZAR, YU. & FERNATI P. K resheniyu zadach polzuchesti izotropnyh nelineino-vyazkouprugih materiaalov pri slozhnom napryazhennom sostoyanii. *Teoret. i prikl. mekhanika*. **8** (54). P. 45-56.

Надійшла до редколегії 07.06.2021

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми »Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

УДК 539.3 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.23

Середницька Х. І., к. ф.-м. н.

Параметр термічної ректифікації у біматеріалі з міжфазною тріщинуватістю

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б
e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

Kh. I. Serednytska, Ph. D. (Phys.-Math.)

Parameter of thermal rectification in the bimaterial with interfacial cracking

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, 79060, Lviv, Naukova str., 3-b
e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

Вивчено явище термічної ректифікації у біматеріалі з періодичною системою міжфазних щілин, заповнених газом. Враховано зміну термоопору та тиску заповнювача щілин під дією розтягувальних зусиль та однорідного теплового потоку. Тиск газу визначається з рівняння Клапейрона-Менделєєва. Термоопір газу прямо пропорційний розкриттю щілин і обернено пропорційний коефіцієнту теплопровідності газу. Задачу термопружності зведено до нелінійної системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь відносно розкриття щілин та стрибка температури між їх берегами. Для розв'язування системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь запропоновано аналітично-числову ітераційну процедуру. Визначено параметр термічної ректифікації та проаналізовано його залежність від прикладеного силового і теплового навантаження, теплопровідності та маси газу та коефіцієнта тріщинуватості біматеріалу. Встановлено нелінійну залежність параметра термічної ректифікації від густини теплового потоку та коефіцієнта міжфазної тріщинуватості. Термічна ректифікація проявляється в більшій мірі для більших значень теплового потоку та меншої теплопровідності газу.

Ключові слова: біматеріал, міжфазна тріщинуватість, параметр термічної ректифікації.

The phenomenon of thermal rectification in bi-material with a periodic system of gas-filled interfacial cracks has been studied. The change of thermal resistance and pressure of the crack filler under the action of tensile forces and uniform heat flow is taken into account. The gas pressure is determined from the Clapeyron-Mendeleev equation. The thermal resistance of the gas is directly proportional to the opening of the cracks and inversely proportional to the thermal conductivity of the gas. The thermo-elastic problem is reduced to nonlinear systems of singular integro-differential equations for an opening cracks and a temperature jump between the cracks faces. An analytical-numerical iterative procedure is proposed to solve the system of singular integro-differential equations. The parameter of thermal rectification is determined and its dependence on the applied on the thermal and mechanical loads, thermal conductivity and mass of the gas and the interfacial cracking factor of the bi-material is analyzed. The nonlinear dependence of the thermal rectification parameter on the heat flow density and the interfacial cracking factor is established. The thermal rectification is manifested to a greater extent for higher values of heat flow and lower thermal conductivity of gas.

Key Words: bi-material, interfacial cracking, parameter of thermal rectification.

Статтю представив член-кор. НАН України Жук Я.О.

1. Вступ

Передача тепла через з'єднані елементи суттєво залежить від термомеханічних параметрів тіл, прикладеного навантаження, геометричних характеристик поверхонь та властивостей заповнювача зазорів між ними. У праці [1] досліджено передачу тепла між спряженими поверхнями тіл за наявності середовища в інтерфейсних зазорах. Встановлено, що для матеріалів з різними термомеханічними властивостями спостерігається явище термічної ректифікації, яке полягає у залежності контактного термоопору від напряму теплового потоку. Для контакту двох тіл з шорсткими поверхнями явище термічної ректифікації експериментально було досліджено у праці [2], Теоретичні дослідження термічної ректифікації стосуються контакту пружних тіл з поверхневими виїмками, заповненими теплопровідним сере-

© Х. І. Середницька, 2021

довищем, та текстурованих тіл за наявності міжконтактного газу [3].

У даній статті вивчено явище термічної ректифікації для біматеріалу з періодичною системою міжфазних заповнених щілин під дією теплового потоку та розтягувального навантаження з урахуванням тиску і термоопору ідеального газу.

2. Формулювання задачі

Розглядаємо біматеріал, що складається з двох півплощин D_1 і D_2, матеріали яких характеризуються різними коефіцієнтами Пуассона (ν_1, ν_2), модулями зсуву (G_1, G_2), коефіцієнтами лінійного теплового розширення (α_1, α_2) та коефіцієнтами теплопровідності (λ_1, λ_2). На межі з'єднання півплощин розташована періодична система міжфазних щілин (рис. 1) завдовжки $2a$ з початковою висотою $h_0(x)$ та періодом розташування d. Порожнини щілин заповнені теплопровідним газом з коефіцієнтом теплопровідності λ_g, який чинить тиск P_g на їх береги.

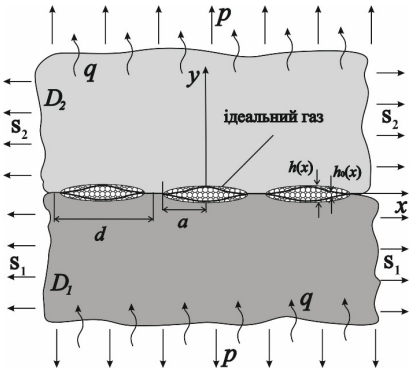


Рис. 1. Біматеріал з міжфазною тріщинуватістю.

На нескінченності до біматеріалу прикладено рівномірно розподілене розтягувальне навантаження p та стаціонарний тепловий потік q.

Тиск газу змінюється за законом ідеального газу (рівняння Клапейрона-Менделєєва)

$$P_g V_g = m_g R T_g / \mu_g , \qquad (1)$$

де m_g – маса газу, μ_g – молярна маса газу; T_g – абсолютна температура газу; $R = 8.3145$ Дж/(К·моль) – універсальна газова стала, $V_g = l\int_{-a}^{a} h(x)dx$ – об'єм газу, що припадає на одиницю довжини щілин l ($l = 1м$) в перпендикулярному напрямку, $h(x)$ – розкриття щілин, яке змінюється в процесі навантаження.

Вплив газу на передачу тепла між берегами щілин враховуємо умовою неідеального теплового контакту з термоопором $R(x)$:

$$T^- - T^+ = q_y^+ R(x), \qquad (2)$$

де термоопір щілин $R(x) = h(x)/\lambda_g$.

Контактно-крайові умови на ділянках щілин ($y = 0$, $x \in (-a + kd, a + kd)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2...$) мають вигляд:

$$T^- - T^+ = q_y^+ \frac{h(x)}{\lambda_c},\ q_y^+ = q_y^-, \qquad (3)$$

$$\sigma_y^+ = \sigma_y^- = P_g,\ \tau_{xy}^+ = 0,\ \tau_{xy}^- = 0. \qquad (4)$$

3. Сингулярні інтегро-диференціальні рівняння задачі

Використовуючи методику розв'язування задач термопружності для біматеріалу з міжфазними тріщинами [4] та задовольняючи умови (3)-(4), сформульовану задачу зведено до нелінійної системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь з ядром Гільберта відносно стрибка температури $\gamma(x)$ та розкриття щілин $h(x)$:

$$\frac{1}{d}\int_{-a}^{a} h'(t)\,ctg\left(\frac{\pi(t-x)}{d}\right)dt + \frac{\lambda\eta^-}{2}\left(\gamma(x) - \gamma_{ef}\right) =$$
$$= -\frac{G^*}{2}\left(p + P_g\right) + \frac{1}{d}\int_{-a}^{a} h_0'(t)\,ctg\left(\frac{\pi(t-x)}{d}\right)dt,$$
$$h(\pm a) = 0,\ |x| < a; \qquad (5)$$

$$\lambda_g \frac{\gamma(x)}{h(x)} - \frac{\lambda}{2d}\int_{-a}^{a} \gamma'(t)\,ctg\left(\frac{\pi(t-x)}{d}\right)dt = q,$$
$$\gamma(\pm a) = 0,\ |x| < a; \qquad (6)$$

де $\gamma_{ef} = \frac{1}{d}\int_{-a}^{a}\gamma(x)dx$; $\lambda = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$, $G^* = \frac{(1-\kappa_1\kappa_2)}{G_1(1-\kappa_2)}$, $\kappa_n = 3 - 4\nu_n$, $\eta^- = \eta_2 - \eta_1$, $\eta_n = \alpha_n(1+\nu_n)/\lambda_n$, $n = 1,2$.

Систему (5), (6) розв'язуємо за допомогою методів послідовних наближень та колокацій [4].

4. Ефективні параметри біматеріалу

Для термічних розрахунків матеріалів важливими характеристиками є так звані ефективні параметри: ефективний стрибок температури та ефективний термоопір.

Ефективний (усереднений) стрибок температури γ_{ef} визначає додатковий розподіл температури, зумовлений множиною щілин. Щільність розміщення щілин на міжфазній лінії характеризується коефіцієнтом міжфазної тріщинуватості $k_t = \dfrac{2a}{d}$, де $2a$ – довжина щілини, d – період розташування щілин.

Ефективний термічний опір R_{ef} на лінії контакту є функцією теплового потоку і визначається як $R_{ef}(q) = \dfrac{\partial \gamma_{ef}}{\partial q}$.

В залежності від напряму теплового потоку спостерігається якісно різний розподіл ефективного термоопору, тобто має місце явище термічної ректифікації [1]. Кількісною характеристикою термічної ректифікації є параметр $\delta = \left| \dfrac{R_{ef}^{+} - R_{ef}^{-}}{R_{ef}^{+}} \right| \cdot 100\%$, де R_{ef}^{+} – величина ефективного термоопору для теплового потоку скерованого до матеріалу з більшою термічною дистортивністю, R_{ef}^{-} – величина ефективного термоопору для теплового потоку скерованого до матеріалу з меншою термічною дистортивністю.

5. Числові результати та їх аналіз

Числові розрахунки проведено для наступних безрозмірних величин: тепловий потік $\overline{q} = qd\eta^{-}$, розтягувальні зусилля $\overline{p} = pG^{*}$, коефіцієнт теплопровідності газу $\overline{\lambda}_g = \dfrac{\lambda_g}{\lambda}$, маса газу $\overline{m}_g = \dfrac{m_g R G^{*} T_g}{\mu_g d^2 l}$, параметр термічної ректифікації $\delta = \left| \dfrac{\overline{R}_{ef}^{+} - \overline{R}_{ef}^{-}}{\overline{R}_{ef}^{+}} \right| \cdot 100\%$, $\overline{R}_{ef}^{+} = \dfrac{R_{ef}^{+} d}{\lambda}$, $\overline{R}_{ef}^{-} = \dfrac{R_{ef}^{-} d}{\lambda}$.

Початкова висота щілин $\overline{h}_0(\overline{x})$ визначена як функція $\overline{h}_0(\overline{x}) = 0.001\left(\overline{a}^2 - \overline{x}^2\right)^{3/2}$. Діапазон зміни коефіцієнта міжфазної тріщинуватості $0.1 \le k_t < 1$.

На рис. 2-5 проілюстровано зміну параметра термічної ректифікації $\overline{\delta}$ зі зміною густини теплового потоку $|\overline{q}|$ для різних значень маси газу $\overline{m}_g$, розтягувальних зусиль $\overline{p}$ та коефіцієнта міжфазної тріщинуватості k_t.

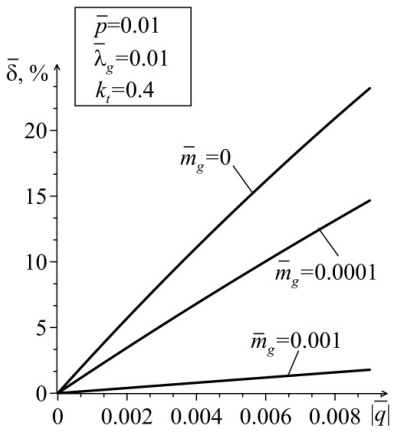


Рис. 2. Залежність параметра термічної ректифікації $\overline{\delta}$ від густини теплового потоку $|\overline{q}|$ для різних значень маси газу $\overline{m}_g$.

Спостерігається нелінійна залежність параметра термічної ректифікації від густини теплового потоку і його збільшення зі збільшенням густини потоку. При збільшенні маси газу $\overline{m}_g$ (рис. 2) параметр $\overline{\delta}$ зменшується і буде приймати найбільших значень у випадку неврахування тиску газу ($\overline{m}_g = 0$). У відсотковому відношенні для заданих вхідних даних не перевищує 30%.

Збільшення розтягувальних зусиль $\overline{p}$ (рис. 3) зумовлює зменшення параметра термічної ректифікації $\overline{\delta}$. Для розглянутих вхідних даних рівень термічної ректифікації становить 8-10%.

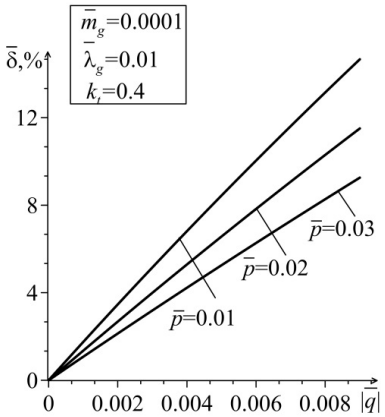


Рис. 3. Залежність параметра термічної ректифікації $\overline{\delta}$ від густини теплового потоку $|\overline{q}|$ для різних значень розтягувальних зусиль $\overline{p}$.

Залежність параметра термічної ректифікації $\overline{\delta}$ від коефіцієнта міжфазної тріщинуватості k_t для різних значень коефіцієнта теплопровідності

газу $\overline{\lambda}_g$ зображено на рис. 4. Бачимо, що зі збільшенням міжфазної тріщинуватості параметр $\overline{\delta}$ зростає, а зі збільшенням коефіцієнта теплопровідності газу спадає. Так для розглянутого діапазону зміни коефіцієнта k_t ($0.1 \le k_t < 0.8$) параметр термічної ректифікації змінюється в межах від 0.01 % до 28 % для $\overline{\lambda}_g = 0.01$, $\overline{\lambda}_g = 0.02$, $\overline{\lambda}_g = 0.04$.

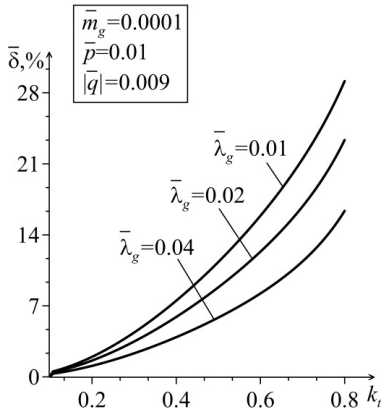


Рис. 4. Залежність параметра термічної ректифікації $\overline{\delta}$ від коефіцієнта тріщинуватості k_t для різних значень коефіцієнта теплопровідності $\overline{\lambda}_g$.

6. Висновки

Вивчено явище термічної ректифікації для біматеріалу з системою періодично розташованих міжфазних щілин, заповнених газом. Сформульовано задачу термопружності для розглянутого біматеріалу з урахуванням тиску і теплопровідності заповнювача щілин, що змінюються в процесі силового і теплового навантаження. Задачу термопружності зведено до системи сингулярних інтеро-диференціальних рівнянь відносно розкриття щілин та стрибка температури між їх берегами. Тиск газу визначено з рівняння Клапейрона-Менделєєва за моделлю ідеального газу. Теплопровідність газу враховано термоопором, що пропорційний висоті щілин і обернено пропорційний коефіцієнту теплопровідності газу. Проаналізовано залежність параметра термічної ректифікації від густини теплового потоку для різних значень маси та коефіцієнта теплопровідності газу, розтягувальних зусиль та коефіцієнта міжфазної тріщинуватості біматеріалу. Встановлено нелінійну залежність параметра термічної ректифікації від густини теплового потоку та коефіцієнта тріщинуватості біматеріалу. Показано, що термічна ректифікація проявляється в більшій мірі для більших значень теплового потоку та меншої теплопровідності газу.

Список використаних джерел

1. *Madhusudana C. V.* Thermal contact conduction and rectification at low joint pressures // Int. Comm. Heat Mass Transf. – 1993. – №1. – P. 123–132.
2. *Bahrami M., Yovanovich M.M., Culham J.R.* Thermal joint resistances of conforming rough surfaces with gas-filled gaps // J Thermophys Heat Transf. – 2004. – 18. – P. 318–325.
3. *Chumak K., Martynyak R.* Thermal rectification between two thermoelastic solids with a periodic array of rough zones at the interface // Int. J. Heat Mass Transf. – 2012. – №21–22. – P. 5603–5608.
4. Мартиняк Р.М. Контактні задачі термопружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах / Р.М. Мартиняк, Х.І. Середницька. – Львів: Растр-7, 2017. – 168 с.

References

1. MADHUSUDANA C. V. (1993) Thermal contact conduction and rectification at low joint pressures. *Int. Comm. Heat Mass Transf.* 20(1). pp. 123–132.
2. BAHRAMI M., YOVANOVICH M.M. & CULHAM J.R. (2004) Thermal joint resistances of conforming rough surfaces with gas-filled gaps. *J Thermophys Heat Transf.* 18. pp. 318–325.
3. CHUMAK K. & MARTYNYAK R. (2012) Thermal rectification between two thermoelastic solids with a periodic array of rough zones at the interface. *Int. J. Heat Mass Transf.* 55(21–22). pp. 5603–5608.
4. MARTYNYAK, R. M. & SEREDNYTSKA, K. I. (2017) *Kontaktni zadachi termoprugnosti dlya migfaznyh trishchyn v bimetrialnyh tilah*. Lviv: Rastr-7.

Надійшла до редколегії 28.08.21

УДК 539.3 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.24

Токовий Ю. В., д.ф.-м.н., с.н.с.,
Юзв'як М. Й., пров. мат.,
Ясінський А. В., д.ф.-м.н., с.н.с.

Подання розв'язків плоских задач теорії пружності для прямокутної області через функції Вігака

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б,
e-mail: tokovyy@gmail.com

Yu. V. Tokovyy, Dr. of Sci., Senior Scientist,
M. Yo. Yuzvyak, Math. Research Fellow,
A. V. Yasinskyy, Dr. of Sci.

Representation of solutions to the plane elasticity problems for a rectangular domain via Vihak's functions

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, NAS of Ukraine,
79060, Lviv, 3-B Naukova Str.
e-mail: tokovyy@ gmail.com

Узагальнено використання методу безпосереднього інтегрування ключових рівнянь основних задач теорії пружності для обмежених областей з кутовими точками. Важливим етапом реалізації методу є подання шуканих компонент тензора напружень через визначальні функції, вибір яких суттєво залежить від специфіки задачі, а тому вважається найслабшою ланкою алгоритму побудови розв'язку. У роботі наведено універсальний підхід до вибору визначальних функцій, названих авторами функціями Вігака (на честь основоположника та розробника методу безпосереднього інтегрування, професора Василя Михайловича Вігака), з використанням інтегральних співвідношень, отриманих на основі рівнянь рівноваги. Застосування підходу проілюстровано на прикладі плоскої задачі теорії пружності для прямокутної області. Показано зв'язок функції Вігака для розглянутої задачі з класичною бігармонічною функцією напружень Ері.

Ключові слова: пружна рівновага, плоска задача, прямокутна область, метод безпосереднього інтегрування, функції Вігака.

The paper presents the generalization of the direct integration method for the governing equations of the basic elasticity problems for the bounded domains with corner points. An important stage in the realization of the method is the representation of the unknown stress-tensor components via the key functions. The selection of these functions is motivated by some specific features of the problems and thus was regarded as a weakest part of the solution algorithm. Herein, we suggest an universal approach for the selection of the key functions, which we started to call the Vihak functions (to honor Prof. Vasyl M. Vihak, the founder and developer of the direct integration method) by using the integral relationships derived from the equilibrium equations. The approach is illustrated by the solution of a plane elasticity problem for an elastic rectangle. The relationship between Vihak's function for the considered problem and the classical biharmonic Airy stress function is shown.

Key Words: elastic equilibrium, plane problem, rectangular domain, direct integration method, Vihak's functions.

Статтю представив член-кор. НАН України Жук Я.О.

Вплив нових тенденцій розвитку техніки та технологій, зокрема, щодо мініатюризації технічних та електронних пристроїв і потреба якісної оцінки їх міцнісних характеристик сприяє відновленню інтересу до класичних задач механіки, постановка та розв'язки яких переосмислюються з урахуванням сучасних потреб. Особливу увагу привертають задачі для тіл з так званими концентраторами напружень, наявність яких обумовлена специфікою матеріалу або особливостями геометрії досліджуваних тіл. До задач такого класу належать задачі теорії пружності та термо-

© Ю.В. Токовий, М.Й. Юзв'як, А.В. Ясінський, 2021

пружності для обмежених тіл з кутовими точками, зокрема, плоска задача для пружного прямокутника [1]. Історія вивчення цієї задачі нараховує понад сторіччя, за яке напрацьовано низку наближених аналітичних, напіваналітичних і числових методів побудови її розв'язків [1–3]. Втім, не зважаючи на видиму простоту задачі, її точного аналітичного розв'язку у загальній постановці, наскільки відомо авторам, не було отримано. Це пов'язано насамперед з обмеженістю класичного методу відокремлення змінних для одночасного задоволення ключових рівнянь задачі та повного набору крайових умов на сторонах прямокутника. Цей факт спонукує до продовження досліджень задач такого класу та розробки ефективних методів їх розв'язання.

У роботах [4, 5] розвинуто метод безпосереднього інтегрування вихідних рівнянь плоских задач теорії пружності й термопружності для прямокутної області, яка зазнає впливу зовнішніх силових навантажень на усіх сторонах та внутрішнього розподілу температурного поля. Метод ґрунтується на вираженні шуканих компонент тензора напружень через визначальні функції з подальшим відшуканням останніх у вигляді розвинень у ряди за повними ортогональними системами власних і приєднаних функцій, що виокремлюють складові від само- й несамозрівноважених навантажень. Отримано необхідні умови для зовнішніх навантажень існування розв'язків таких задач. Початковим етапом застосування методу є вибір визначальних напружень, який не був достатньо обґрунтований. У цій статті запропоновано підхід до використання певних визначальних функцій для вираження компонент тензора напружень єдиним чином. Уведені з використанням інтегральних співвідношень, отриманих на основі рівнянь рівноваги, такі визначальні функції названо на честь основоположника методу, професора В.М. Вігака.

Розглянемо плоску задачу теорії пружності для прямокутної області $D=\{(x,y)\in[-a_x,a_x]\times[-a_y,a_y]\}$, на сторонах якої задано зовнішні силові навантаження

$$\begin{aligned}&\sigma_{xx}(\pm a_x,y)=-p_x^{\pm}(y),\quad \sigma_{xy}(\pm a_x,y)=\tau_{xy}^{\pm}(y),\\&\sigma_{yy}(x,\pm a_y)=-p_y^{\pm}(x),\quad \sigma_{xy}(x,\pm a_y)=\tau_{yx}^{\pm}(x).\end{aligned}\tag{1}$$

Тут $\sigma_{xx},\sigma_{yy},\sigma_{xy}$ – компоненти тензора напружень, а праві частини задано неперервно-диференційованими функціями. За відсутності масових сил напружений стан області D описується класичними рівняннями [1] рівноваги

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}=0\tag{2}$$

та суцільності

$$\left\langle\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right\rangle(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})=0\tag{3}$$

в напруженнях.

З використанням співвідношень, отриманих диференціюванням рівнянь рівноваги (2), запровадимо функцію

$$\mathrm{V}=\frac{\partial^2\sigma_{xx}}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\sigma_{yy}}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2\sigma_{xy}}{\partial x\partial y}.\tag{4}$$

Проінтегрувавши (4) з урахуванням умов (1), знайдемо вирази напружень через уведену функцію:

$$\begin{aligned}2\sigma_{xx}&=-p_x^{+}-p_x^{-}-(x-a_x)\frac{d\tau_{xy}^{+}}{dy}-(x+a_x)\frac{d\tau_{xy}^{-}}{dy}+\\&+\int_{-a_x}^{a_x}\mathrm{V}(\xi,y)\left|x-\xi\right|d\xi,\\2\sigma_{yy}&=-p_y^{+}-p_y^{-}-(y-a_y)\frac{d\tau_{yx}^{+}}{dx}-(y+a_y)\frac{d\tau_{yx}^{-}}{dx}\\&+\int_{-a_y}^{a_y}\mathrm{V}(x,\eta)\left|y-\eta\right|d\eta,\\4\sigma_{xy}&=2\left(\tau_{xy}^{+}+\tau_{xy}^{-}+\tau_{yx}^{+}+\tau_{yx}^{-}\right)\\&-\tau_{xy}^{+}(a_y)-\tau_{xy}^{+}(-a_y)-\tau_{xy}^{-}(a_y)-\tau_{xy}^{+}(-a_y)-\\&-\iint_D\mathrm{V}(\xi,\eta)\operatorname{sgn}(x-\xi)\operatorname{sgn}(y-\eta)d\xi d\eta\end{aligned}\tag{5}$$

та інтегральні умови для функції $\mathrm{V}(x,y)$

$$\begin{aligned}&\int_{-a_x}^{a_x}\mathrm{V}(x,y)dx=-\frac{d\tau_{xy}^{+}}{dy}+\frac{d\tau_{xy}^{-}}{dy},\\&\int_{-a_y}^{a_y}\mathrm{V}(x,y)dy=-\frac{d\tau_{yx}^{+}}{dx}+\frac{d\tau_{yx}^{-}}{dx},\\&\int_{-a_x}^{a_x}x\mathrm{V}(x,y)dx=p_x^{+}-p_x^{-}-a_x\left(\frac{d\tau_{xy}^{+}}{dy}+\frac{d\tau_{xy}^{-}}{dy}\right),\\&\int_{-a_y}^{a_y}y\mathrm{V}(x,y)dy=p_y^{+}-p_y^{-}-a_y\left(\frac{d\tau_{yx}^{+}}{dx}+\frac{d\tau_{yx}^{-}}{dx}\right).\end{aligned}\tag{6}$$

Аналогічні вирази та умови отримано в [4] для задачі термопружності. Шляхом інтегрування

умов (6) виводять інтегральні умови рівноваги та суцільності для зовнішніх навантажень (1), що співпадають зі знайденими в роботах [4, 5].

Таким чином, отримано подання (5) компонент тензора напружень через одну функцію $\mathrm{V}(x,y)$, а вісім граничних умов (1) еквівалентно замінено на чотири інтегральні умови (6). Функцію $\mathrm{V}(x,y)$ називатимемо функцією Вігака.

Порівнюючи вирази для компонент тензора напружень (4) з відповідними виразами через функцію напружень Ері $\Phi(x,y)$ [1], знаходимо співвідношення

$$\Phi(x,y)=\frac{1}{4}\iint\limits_D \mathrm{V}(\xi,\eta)\left|x-\xi\right|\left|y-\eta\right|d\xi d\eta,$$

$$\frac{\partial^4\Phi(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}=\mathrm{V}(x,y).$$

З використанням загальної стратегії методу безпосереднього інтегрування [4, 5], напружений стан в області D внаслідок силового навантаження (1) можна подати у вигляді суперпозиції самозрівноваженого та несамозрівноваженого напружених станів. Відповідно, функцію Вігака можна подати у вигляді $\mathrm{V}=\mathrm{V}_0+\mathrm{V}_\mathrm{s}$, де V_0 відповідає несамозрівноваженим (елементарним) розв'язкам для напружень [5], а V_s відповідає самозрівноваженим напруженням [4] і задовольняє однорідні інтегральні умови

$$\int\limits_{-a_x}^{a_x}\mathrm{V}_\mathrm{s}dx=\int\limits_{-a_x}^{a_x}x\mathrm{V}_\mathrm{s}dx=\int\limits_{-a_y}^{a_y}\mathrm{V}_\mathrm{s}dy=\int\limits_{-a_y}^{a_y}y\mathrm{V}_\mathrm{s}dy=0, \quad (7)$$

Подання самозрівноважених компонент тензора напружень $\tilde{\sigma}_{xx}$, $\tilde{\sigma}_{xy}$ [4] через функцію $\mathrm{V}_\mathrm{s}(x,y)$ мають вигляд

$$\tilde{\sigma}_{xx}=\frac{1}{2}\int\limits_{-a_x}^{a_x}\mathrm{V}_\mathrm{s}(\xi,y)\left|x-\xi\right|d\xi-$$

$$-\frac{(x+a_x)^2(2a_x-x)}{4a_x^3}\tilde{p}_x^+-\frac{(x-a_x)^2(2a_x+x)}{4a_x^3}\tilde{p}_x^--$$

$$-\frac{(x-a_x)^2}{4a_x^2}\left((x+a_x)\frac{d\tilde{\tau}_{xy}^+}{dy}+(x-a_x)\frac{\tilde{d}\tau_{xy}^+}{dy}\right)-$$

$$-\frac{1}{4a_y}\int\limits_{-a_x}^{a_x}(\tilde{\tau}_{yx}^+(\xi)-\tilde{\tau}_{yx}^-(\xi))\operatorname{sgn}(x-\xi)d\xi-$$

$$-\frac{3y}{4a_y^3}\left(a_y\int\limits_{-a_x}^{a_x}(\tilde{\tau}_{yx}^+(\xi)+\tilde{\tau}_{yx}^-(\xi))\operatorname{sgn}(x-\xi)d\xi+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{-a_x}^{a_x}(\tilde{p}_y^+(\xi)-\tilde{p}_y^-(\xi))\left|x-\xi\right|d\xi\right), \quad (8)$$

$$\tilde{\sigma}_{xy}=-\frac{1}{4}\iint\limits_D \mathrm{V}_\mathrm{s}(\xi,\eta)\operatorname{sgn}(x-\xi)\operatorname{sgn}(y-\eta)d\xi d\eta+$$

$$+\frac{a_x+x}{2a_x}\tilde{\tau}_{xy}^++\frac{a_x-x}{2a_x}\tilde{\tau}_{xy}^-+\frac{a_y+y}{2a_y}\tilde{\tau}_{yx}^++\frac{a_y-y}{2a_y}\tilde{\tau}_{yx}^-+$$

$$+3\frac{x^2-a_x^2}{a_x^2}\frac{\tilde{\tau}_{xy}^++\tilde{\tau}_{xy}^-}{4}+3\frac{y^2-a_y^2}{a_y^2}\frac{\tilde{\tau}_{yx}^++\tilde{\tau}_{yx}^-}{4}+$$

$$+\frac{3(x^2-a_x^2)}{8a_x^3}\int\limits_{-a_y}^{a_y}(\tilde{p}_x^+(\eta)-\tilde{p}_x^-(\eta))\operatorname{sgn}(y-\eta)d\eta$$

$$+\frac{3(y^2-a_y^2)}{8a_y^3}\int\limits_{-a_x}^{a_x}(\tilde{p}_y^+(\xi)-\tilde{p}_y^-(\xi))\operatorname{sgn}(x-\xi)d\xi.$$

Тут $\tilde{p}_x^\pm$, $\tilde{p}_y^\pm$ $\tilde{\tau}_{yx}^\pm$, $\tilde{\tau}_{yx}^\pm$ – відповідні самозрівноважені частини [4] крайових умов (1), а вираз для $\tilde{\sigma}_{yy}$ є аналогічним.

Підстановкою виразів (8) у рівняння (3) з використанням (2) отримуємо наступне інтегро-диференціальне рівняння суцільності

$$2\mathrm{V}_\mathrm{s}+\int\limits_{-a_x}^{a_x}\frac{\partial^2\mathrm{V}_\mathrm{s}(\xi,y)}{\partial y^2}\frac{\left|x-\xi\right|}{2}d\xi+$$

$$+\int\limits_{-a_y}^{a_y}\frac{\partial^2\mathrm{V}_\mathrm{s}(x,\eta)}{\partial x^2}\frac{\left|y-\eta\right|}{2}d\eta=$$

$$=-\frac{3x}{a_x^3}(\tilde{p}_x^+-\tilde{p}_x^-)+\frac{3x+a_x}{a_x^2}\frac{d\tilde{\tau}_{xy}^+}{dy}+\frac{3x-a_x}{a_x^2}\frac{d\tilde{\tau}_{xy}^-}{dy}+$$

$$+\frac{d^2}{dy^2}\left((x+a_x)^2\frac{2a_x-x}{4a_x^3}\tilde{p}_x^++(x-a_x)^2\frac{2a_x+x}{4a_x^3}\tilde{p}_x^-+\right.$$

$$\left.+\frac{(x+a_x)(x-a_x)^2}{4a_x^2}\frac{d\tilde{\tau}_{xy}^+}{dy}+\frac{(x-a_x)(x+a_x)^2}{4a_x^2}\frac{d\tilde{\tau}_{xy}^-}{dy}\right)-$$

$$-\frac{3y}{a_y^3}(\tilde{p}_y^+-\tilde{p}_y^-)+\frac{3y+a_y}{a_y^2}\frac{d\tilde{\tau}_{yx}^+}{dx}+\frac{3y-a_y}{a_y^2}\frac{d\tilde{\tau}_{yx}^-}{dx}+$$

$$+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{(2a_y-y)(y+a_y)^2}{4a_y^3}\tilde{p}_y^++\right.$$

$$+\frac{(2a_y+y)(y-a_y)^2}{4a_y^3}\tilde{p}_y^-+$$

$$\left.+\frac{(y+a_y)(y-a_y)^2}{4a_y^2}\frac{d\tilde{\tau}_{yx}^+}{dx}+\right.$$

$$+\frac{(y-a_y)(y+a_y)^2}{4a_y^2}\frac{d\tilde{\tau}_{yx}^-}{dx}\Bigg). \qquad (9)$$

Для побудови розв'язку отриманого ключового рівняння (9) з інтегральними умовами (7) використовується методика [4]. Побудову напружень, що відповідають несамозрівноваженій складовій V_0 наведено в роботі [5].

У такий спосіб запропоновано подання (5) компонентів тензорів напружень у випадку плоскої задачі теорії пружності через єдину визначальну функцію Вігака. Слід зауважити, що на відміну від бігармонічної функції Ері, використання функції Вігака не пов'язане з надлишковим диференціюванням, а також дозволяє залучити крайові умови, задані на сторонах прямокутника. У статті [6] наведено аналогічні подання для плоских задач термопружності вільних від силових навантажень прямокутній області, кільцевому та круговому секторах, а також для осесиметричної задачі термопружності у порожнистому циліндрі скінченної довжини. В [7] наведено приклад числової реалізації для останньої задачі та вказано не обчислювальні переваги застосування функцій Вігака.

Список використаних джерел

1. *Гринченко В.Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров / В.Т. Гринченко. – Киев: Наук. думка, 1978. – 264 с.
2. *Lurie S.A.* The biharmonic problem in the theory of elasticity / S.A. Lurie, V.V. Vasiliev. – Luxembourg: Gordon & Breach, 1995. – 265 p.
3. *Meleshko V.V.* Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem / V.V. Meleshko // Appl. Mech. Rev. – 2003. – **56,** No. 1. – P. 33–85.
4. *Vihak V.M.* The solution of the plane thermoelasticity problem for a rectangular domain / V.M. Vihak, M.Y. Yuzvyak, A V. Yasinskij // Journal of Thermal Stresses. – 1998. – **21**, No. 5. – P. 545–561.
5. *Vihak V*. Exact solution of the plane problem of elasticity in a rectangular region / V. Vihak, Yu. Tokovyi, A. Rychahivskyy // J. Comput. Appl. Mech. – 2002. – **3**, No. 2. – P. 193–206.
6. *Кушнір Р.М.* Зведення двовимірних задач термопружності для тіл з кутовими точками до ключових інтегро-диференціальних рівнянь / Р.М. Кушнір, Ю.В. Токовий, М.Й. Юз'вяк, А.В. Ясінський // Укр. мат. журнал. – 2021. – **73**, № 10.
7. Yuzvyak M. Axisymmetric thermal stresses in an elastic hollow cylinder of finite length / M. Yuzvyak, Yu. Tokovyy, A. Yasinskyy // Journal of Thermal Stresses. – 2021. – **44**, No. 3. – P. 359–376.

References

1. GRINCHENKO, V.T. (1978) *Ravnovesie i ustanovivshiesya kolebania uprugikh tel konechnykh razmerov.* Kiev: Naukova Dumka.
2. LURIE, S.A. & VASILIEV, V.V. (1995). *The biharmonic problem in the theory of elasticity*. Luxembourg: Gordon & Breach.
3. MELESHKO, V.V. (2003). Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem, *Appl. Mech. Rev.* 56(1). p. 33–85.
4. VIHAK, V.M., YUZVYAK, M.Y., & YASINSKIJ, A V. (1998). The solution of the plane thermoelasticity problem for a rectangular domain. *Journal of Thermal Stresses.* 21(5). p. 545–561.
5. VIHAK, V., TOKOVYI, Yu., & RYCHAHIVSKYY, A. (2002) Exact solution of the plane problem of elasticity in a rectangular region. *Journal of Computational and Applied Mechanics*. 3(2). p. 193–206.
6. KUSHNIR, R.M., TOKOVYY, YU.V., YUZVYAK, M.YO., & YASINSKYY, A.V. (2021) Zvedennya dvovymirnykh zadach termopruzhnosti dlya til z kutovymy tochkamy do klyuchovykh integro-differentialnykh rivnyan'. *Ukrainian Mathematical Journal*, 73(10).
7. YUZVYAK M., TOKOVYY, Yu., & YASINSKYY A. (2021) Axisymmetric thermal stresses in an elastic hollow cylinder of finite length. *Journal of Thermal Stresses*. 44(3). p. 359–376.

Надійшла до редколегії 29.08.21

КОМП’ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 004.657

https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.25

Л.Л. Омельчук [1], *к.ф.-м.н, доц.*
Н.Г. Русіна [2], *к.п.н.*

Порівняння освітніх програм в розрізі досяжності компетентностей і результатів навчання обов'язковими освітніми компонентами

[1.2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Академіка Глушкова 4д,

e-mail: [1] l.omelchuk@knu.ua
e-mail: [2] rusina@knu.ua

L.L. Omelchuk [1], *PhD., Associate Prof*
N.G. Rusina [2], *PhD.*

Comparing of educational programs in terms of achievement of competencies and learning outcomes of compulsory educational components

[1.2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,

e-mail: [1] l.omelchuk@knu.ua
e-mail: [2] rusina@knu.ua

Найважливішими елементами освітніх програм є освітні компоненти (дисципліни), а також компетентності й результати навчання, що ними забезпечуються. У статті наведено порівняльний аналіз окремих обов'язкових дисциплін освітньо-професійної програми «Інформатика» першого (бакалаврського) рівня вищої освіти галузі знань 12 «Інформаційні технології», спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» з дисциплінами освітньо-професійних програм того ж рівня та спеціальності інших закладів вищої освіти. В роботі проаналізовано освітньо-професійну програму «Інформатика» першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки», що реалізується факультетом комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка в розрізі порівняння обов'язкових освітніх компонент освітньо-професійної програми «Інформатика» та забезпечуваних (досяжних) ними стандартних результатів навчання й компетентностей з обов'язковими освітніми компонентами інших освітніх програм.

Ключові слова: комп'ютерні науки, інформатика, система керування базами даних, освітні компоненти, стандарт вищої освіти, освітня програма.

The most important elements of educational programs are the educational components (disciplines), as well as the competencies and learning outcomes they provide. The article presents a comparative analysis of some compulsory disciplines of the educational and professional program "Informatics" of the first (bachelor's) level of higher education in the field of knowledge 12 "Information Technology", specialty 122 "Computer Science" with disciplines of educational and professional programs of the same level and specialties of other institutions of higher education. The work analyzes the educational and professional program "Computer Science" of the first (bachelor's) level of higher education in the specialty 122 "Computer Science". It is implemented by the Faculty of Computer Science and Cybernetics of Taras Shevchenko National University of Kyiv in terms of comparing compulsory educational components educational-professional program "Informatics" and provided (achievable) standard learning outcomes and competencies with compulsory educational components of other educational programs.

Keywords: computer science, computer science, database management system, educational components, standard of higher education, educational program.

Статтю представила д.ф.-м.н., доцент Розора І.В.

© Л.Л. Омельчук, Н.Г. Русіна, 2021

Вступ

Моніторинг та переосмислення освітніх програм за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки», повинен враховувати вимоги Закону України «Про вищу освіту» [1] та Стандарту першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки», затвердженого Наказом Міністерства освіти і науки України за № 962 від 10.07.2019 році [2]. Важливим елементом на шляху до покращення програм є здійснення порівняльного аналізу освітньо-професійної програми «Інформатика» з аналогічними програмами інших закладів вищої освіти (ЗВО). У зв'язку з вимогами прозорості, що висунуті Законом України «Про вищу освіту» здійснити такий порівняльний виявляється можливим, адже освітні програми, що реалізуються різними ЗВО оприлюднюються для вільного доступу на їх офіційних сайтах.

Головними елементами освітніх програм є освітні компоненти та компетентності й результати навчання, що ними забезпечуються. В роботі авторами проаналізовано освітньо-професійну програму (ОПП) «Інформатика» першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки» [3], що реалізується факультетом комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Аналіз проведено в розрізі порівняння обов'язкових освітніх компонент ОПП «Інформатика» та забезпечуваних ними результатів навчання й компетентностей з обов'язковими освітніми компонентами інших ОПП.

Аналіз ОПП «Інформатика» з програмами інших закладів вищої освіти

Розробку освітніх програм (ОП) у вітчизняних ЗВО доцільно розглядати в контексті нових стандартів вищої освіти. Більшість стандартів вже прийняті та затверджені, окремі перебувають на стадії обговорення. Луговий В.І. та Таланова Ж.В. в процесі аналізу Міжнародного стандарту класифікації освіти обґрунтовують доцільність використання міжнародної класифікації для галузевої класифікації освітньої сфери в Україні [4]. Проте проблема аналізу саме обов'язкових дисциплін освітньо-професійної програми «Інформатика» першого (бакалаврського) рівня вищої освіти галузі знань 12 «Інформаційні технології», спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» є відносно новою та не до кінця дослідженою. В публікаціях [5-7] був проведений порівняльний аналіз українського стандарту освітньо-професійної підготовки та міжнародного стандарту Computer Science'2013, а також надано пропозиції для покращення українського освітнього стандарту. У роботах [8, 9] описано теоретичне підґрунтя для порівняння.

Для порівняльного аналізу ОПП «Інформатика», що реалізуються на факультеті комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка з ОПП того ж рівня вищої освіти й спеціальності інших ЗВО України введемо до розгляду поняття, частина з яких була описана в дослідженні [8, 9].

Множина спеціальностей:

$SP = \{sp_i \mid i=1..n\}$.

Для кожної $sp \in SP$ введемо до розгляду наступні поняття:

множина результатів навчання спеціальності:
$LO_{sp} = \{lo_i \mid i=1..t\}$;

множина освітніх програм спеціальності:
$OP_{sp} = \{op_i \mid j=1..m\}$.

Для кожної $op \in OP_{sp}$ введемо до розгляду поняття:

Множина обов'язкових освітніх компонент (дисциплін) освітньої програми:

$OK_{op[sp]} = \{ok_i \mid i=1..t\}$.

множина результатів навчання дисципліни:
$LO_{ok} = \{ lo_{ok} \mid lo_{ok} \in LO_{sp} \,\&\, LOZ_{op[sp]}(lo_{ok}, ok)\}$.

Кількість результатів навчання дисципліни $\left|LO_{ok}\right|$.

Спільні результати навчання множини попарно різних дисциплін за освітніми програмами однієї спеціальності: $Sp_{lo}(OKD_{[sp]})$:

$k_{sp} \in Sp_{lo}(OKD_{[sp]}) \leftrightarrow lo_{ok} \in LO_{sp}$ &
$\forall\, ok_{sp} \in OKD_{[sp]}\, LOZ_{op[sp]}(lo_{ok}, ok_{sp})\}$.

Кількість спільних результатів навчання множини попарно різних дисциплін за освітніми програмами однієї спеціальності:
$\left| Sp_{lo}(OKD_{[sp]}) \right|$.

Автоматизація аналізу порівняння ОПП

Засобом автоматизації аналізу авторами обрано СКБД MS SQL Server [15]. Для дослідження створено базу даних EducationPrograms, яка містить, зокрема, таблиці:

- таблиця Universities, містить інформацію про ЗВО та включає наступні поля: Id, Name, EDBO;
- таблиця Faculties, містить інформацію про факультети та включає наступні поля: Id, Name, UniversityId;

– таблиця SpecialityCompetences, містить інформацію про відповідність компетентностей спеціальностям, представлена наступними полями: Id, Name, SpecialityId, CompetenceId;

– довідникова таблиця EdProgramsTypes, містить типи освітніх програм, представлена наступними полями: Id, TypeName;

– довідникова таблиця Specialisations, містить перелік спеціальностей, заданих полями: Id, Name;

– таблиця Competences, містить компетентності, що класифіковані за типами: Id, Competence, CompetenceTypeId;

– таблиця EpSubjectCompetence містить інформацію про компетентності освітніх компонент: Id, SubjectId, SpecialityCompetenceId;

– таблиця Subjects містить відомості про освітні компоненти (дисципліни): Id, Name, EProgramId, Credit, ControlId;

– таблиця LearningOutcomes містить інформацію про результати навчання: Id, SpecialityId, LOName, LearningOutcome;

– довідникова таблиця ControlTypes містить перелік форм контролю освітніх компонент: Id, ControlTypeName;

– довідникова таблиця CompetencesTypes містить перелік типів компетентностей: Id, CompType;

– таблиця EpSubjectOutcomes пов'язує результати навчання з конкретними освітніми компонентами: Id, SubjectId, LearningOutcomeId;

– таблиця EducationPrograms містить дані про освітні програми: Id, Name, SpecialityId, EdPrTypeId, EDBO, FacultyId, ImplementationDate.

Діаграму бази даних EducationPrograms представлені на рисунку 1.



Рисунок 1. Фрагмент діаграми бази даних EducationPrograms

З метою здійснення аналізу ПРН авторами розроблено SQL-запити до сформованої бази даних.

Порівняльний аналіз освітньої програми «Інформатика» з іншими освітніми програмами спеціальності в розрізі обов'язкових дисциплін

Для дослідження відібрано наступні дисципліни з освітньо-професійні програми (ОПП) «Інформатика» [3], що реалізується на факультеті комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (Інф_КНУТШ):

- Програмування;
- Дискретна математика;
- Диференційні рівняння;
- Математична логіка;
- Об'єктно-орієнтоване програмування;
- Теорія програмування.

Компетентності та результати навчання в таблиці 1 іменуються відповідно до прийнятого Стандарту першого рівня вищої освіти за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки»[2].

В таблиці 1 представлено розподіл загальних та спеціальних компетентностей за деякими обов'язковими дисциплінами.

Таблиця 1. Розподіл компетентностей за дисциплінами

Компетентності (загальні (ЗК), спеціальні (СК))	**Програмні результати навчання (ПРН)**
Програмування	
ЗК13	ПРН4, ПРН8
Дискретна математика	
ЗК11, СК1, СК3	ПРН2
Диференційні рівняння	
СК1	ПРН1, ПРН5
Математична логіка	
СК1, СК3	ПРН1, ПРН5
Об'єктно-орієнтоване програмування	
ЗК2, ЗК12, СК8	ПРН9, ПРН15
Теорія програмування	
ЗК1, СК1, СК8	ПРН1, ПРН5

Представлені співвідношення деяких дисциплін ОПП «Інформатика» факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (Інф_КНУТШ) [3] та їх відсотку подібності за компетентностями (таблиці 2) і за ПРН (таблиці 3) до дисциплін інших ОПП того ж рівня й спеціальності.

ОПП (Кн_КНУТШ) – «Комп'ютерні науки», яка вивчається на факультеті інформаційних технологій Київського національного університету імені Тараса Шевченка [10].

ОПП (Інф_ХНУ) – «Інформатика», що реалізується на факультеті математики і інформатики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна (ХНУ імені В.Н. Каразіна) [11];

ОПП (Кн_ЗНУ) – «Комп'ютерні науки», що вивчається в Запорізькому національному університеті (ЗНУ) [12];

ОПП (Кн_ВНТУ) – «Комп'ютерні науки», що реалізується у Вінницькому національному технічному університеті [13];

ОПП (Інф_УНУ) – «Інформатика», Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет» [14].

В таблиці 2 представлено фрагмент порівняння подібності обраних для аналізу дисциплін відносно стандартних компетентностей.

Таблиця 2. Фрагмент подібності дисциплін за компетентностями Інф_КНУТШ

ОПП	**Назва дисципліни**	**Відсоток подібності**
Програмування		
Інф_ХНУ	Операційні системи	43,83%
Інф_ХНУ	Математична логіка і мова Prolog	45,84%
Кн_ЗНУ	Алгоритми та структури даних	43,33%
Кн_ВНТУ	Вступ до фаху	21,21%
Інф_УНУ	Теорія ймовірностей, імовірнісні процеси та математична статистика	29,17%
Кн_КНУТШ	Алгоритмізація та програмування	58,33%
Дискретна математика		
Кн_КНУТШ	Дискретні структури	50%
Інф_ХНУ	Вступ до математичної статистики	70%
Кн_ВНТУ	Дискретна математика	61,11%
Кн_ЗНУ	Комп'ютерна графіка	31,25%
Диференціальні рівняння		
Інф_УНУ	Математичний аналіз	35%
Інф_ХНУ	Вступ до математичної статистики	35%
Кн_ЗНУ	Організація та обробка електронної інформації	32,14%
Кн_ВНТУ	Чисельні методи	32,14%
Кн_КНУТШ	Вступ до математичної статистики	35%
Математична логіка		
Кн_КНУТШ	Дискретні структури	50%

Інф_ХНУ	Елементи математичної логіки, елементарної та дискретної математики	70%
Кн_ЗНУ	Алгоритми та структури даних	60%
Кн_ВНТУ	Дискретна математика	61,11%
Інф_УНУ	Алгоритми і структури даних	66,67%
	Об’єктно-орієнтоване програмування	
Кн_КНУТШ	Об'єктно-орієнтоване програмування	41,67%
Інф_ХНУ	Шаблони об'єктно-орієнтованого програмування	53,33%
Кн_ЗНУ	Об'єктно-орієнтоване програмування	41,67%
Інф_УНУ	Управління ІТ-проектами	60%
	Теорія програмування	
Кн_ВНТУ	Математичні методи дослідження операцій	50%
Кн_ЗНУ	Алгоритмізація та програмування	41,67%
Інф_ХНУ	Паралельні та розподілені обчислення	29,17%
Кн_КНУТШ	Алгоритмізація та програмування	29,17%

Наведене в таблиці 2 співставлення дає наглядне уявлення про співвідношення змісту конкретних обов’язкових освітніх компонент у різних ОПП за спільною спеціальністю відносно загальних та фахових компетентностей, визначених стандартом вищої освіти.

В таблиці 3 наведено фрагмент порівняння подібності обраних для аналізу дисциплін відносно стандартних результатів навчання.

Таблиця 3. Фрагмент подібності дисциплін за програмними результатами навчання Інф_КНУТШ

ОПП	**Назва дисципліни**	**Відсоток подібності**
	Програмування	
Кн_КНУТШ	Алгоритмізація та програмування	100%
Інф_ХНУ	Операційні системи	37,5%
Кн_ВНТУ	Алгоритмізація та програмування	75%
Кн_ЗНУ	Комп’ютерна графіка	41,67%
Інф_УНУ	Алгоритмізація та програмування	64,29%
	Дискретна математика	
Кн_КНУТШ	Математика для комп'ютерних наук	75%
Інф_ХНУ	Вступ до математичної статистики	75%
Кн_ВНТУ	Вища математика	75%
Кн_ЗНУ	Алгоритми та структури даних	62,5%
Інф_УНУ	Системний аналіз	58,33%
	Диференціальні рівняння	
Кн_ЗНУ	Алгебра та геометрія	50%
Кн_КНУТШ	Математика для комп'ютерних наук	50%
Інф_УНУ	Диференціальні рівняння	50%
Кн_ВНТУ	Вища математика	100%
Інф_ХНУ	Методи оптимізації і дослідження операцій	32,14%
	Математична логіка	
Кн_КНУТШ	Проектування та аналіз алгоритмів	75%
Інф_ХНУ	Елементи алгебри та теорії чисел	50%
Кн_ВНТУ	Управління ІТ-проектами	41,67%
Кн_ЗНУ	Алгоритми та структури даних	75%
	Об’єктно-орієнтоване програмування	
Кн_КНУТШ	Об'єктно-орієнтоване програмування	100%
Інф_ХНУ	Методи розробки інтерфейсу користувача	37,5%

Кн_ВНТУ	Технології комп'ютерного проектування	41,67%
Інф_УНУ	Технологія програмування та створення програмних продуктів	61,11%
Кн_ЗНУ	Комп'ютерна графіка	41,67%
Теорія програмування		
Кн_КНУТШ	Проектування та аналіз алгоритмів	75%
Інф_ХНУ	Елементи математичної логіки, елементарної та дискретної математики	50%
Інф_УНУ	Математичні методи дослідження операцій	37,5%
Кн_ВНТУ	Крос-платформне програмування	37,5%
Кн_ЗНУ	Архітектура обчислювальних систем	41,67%

Наведене в таблиці 3 співставлення дає наглядне уявлення про співвідношення змісту конкретних обов'язкових освітніх компонент у різних ОПП за спільною спеціальністю відносно програмних результатів навчання, визначених стандартом вищої освіти.

Висновки

Проведений порівняльний аналіз деяких обов'язкових дисциплін освітньо-професійної програми «Інформатика» першого (бакалаврського) рівня вищої освіти галузі знань 12 «Інформаційні технології», спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» з дисциплінами освітньо-професійних програмам того ж рівня та спеціальності інших закладів вищої освіти України показав, що подібні за змістом дисципліни різних освітніх програм досягають аналогічних стандартних результатів навчання, а також загальних та фахових компетентностей. Схожі за змістом обов'язкові освітні компоненти компоненти мають більше 50% подібності за компетентностями й результатами навчання, а для різних за змістом дисциплін, як правило, цей відсоток складає не більше 45%.

Освітні програми одного рівня вищої освіти та спеціальності містять подібні за досяжністю стандартних компетентностей і результатів навчання освітні компоненти.

Таким чином, обов'язкові дисципліни освітньо-професійної програми «Інформатика» першого (бакалаврського) рівня вищої освіти галузі знань 12 «Інформаційні технології», спеціальності 122 «Комп'ютерні науки», що реалізується на факультеті комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка мають свої аналоги в освітніх програмах того ж рівня вищої освіти та спеціальності інших закладів вищої освіти України.

Список використаних джерел

1. Закон України "Про вищу освіту" від 01.07.2014 р. №1556-VII // Відомості Верховної Ради України. – 2014. – № 37-38. – Ст. 2004 [Електронний ресурс]. – 2014. – Режим доступу до ресурсу: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1556-18#Text

2. Наказ МОН України «Про затвердження стандарт вищої освіти за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки» для першого (бакалаврського) рівня вищої освіти» [Електронний ресурс]. – 2019. – Режим доступу до ресурсу: https://mon.gov.ua/storage/app/media/vishcha-osvita/zatverdzeni%20standarty/2019/07/12/122-kompyuterni-nauki-bakalavr.pdf.

References

1. Law of Ukraine "On Higher Education", Bulletin of the Verkhovna Rada of Ukraine. (2014). [Online] Available from https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1556-18#Text

2. Order "On approval of the standard of higher education in the specialty 122" Computer Science "for the first (bachelor's) level of higher education", Ministry of Education and Science of Ukraine (2019). [Online]. Available from https://mon.gov.ua/storage/app/media/vishcha-osvita/zatverdzeni%20standarty/2019/07/12/122-kompyuterni-nauki-bakalavr.pdf.

3. Київський національний університету імені Тараса Шевченка. Освітньо-професійна програма "Інформатика". Спеціальність 122 Комп'ютерні науки [Електронний ресурс]. – 2019. – Режим доступу до ресурсу: http://csc.knu.ua/media/filer_public/09/f4/09f46516-6c61-46a5-ae81-f34b7d673499/opp_122_bac_2019_1.pdf.

4. Луговий В. І. Міжнародна стандартна класифікація освіти: галузі освіти та підготовки (засадничий аналіз та алгоритм застосування) / В. І. Луговий, Ж. В. Таланова // Педагогіка і психологія. Вісн. НАПН України. – 2014. – № 3. – С. 5–17.

5. Омельчук Л.Л. Порівняльний аналіз українського стандарту освітньо-професійної підготовки з інформатики та міжнародних освітніх стандартів / Л.Л. Омельчук // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2013. – Вип. 4. – С. 138–149.

6. Омельчук Л.Л. Порівняльний аналіз українського стандарту освітньо-професійної підготовки з інформатики та Computer Science'2013 / Л.Л. Омельчук // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2013. – Вип. 2. – С. 216–227.

7. Omelchuk L. Development of the ICT-standard of Higher Education in Ukraine within the Framework of European Requirements / L. Omelchuk , N. Rusina, O. Shyshatska // Proc. 15th Int. Conf. on ICT in Education, Research and Industrial Applications. Integration, Harmonization and Knowledge Transfer (ICTERI2019). Volume I: Main Conference. – Kherson, Ukraine, June 12-15 (2019). PP. 262-273.

8. Омельчук Л.Л., Автоматизований аналіз освітньо-професійної програми «Інформатика», що реалізується на факультеті комп'ютерних наук та кібернетики, з програмами інших закладів вищої освіти за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки» / Л.Л.Омельчук, Н.Г.Русіна // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2020. – Вип. 4. – С. 49–62.

9. Омельчук Л.Л., Русіна Н.Г. Аналіз освітньо-професійних програм за спеціальністю 122 Комп'ютерні науки в розрізі програмних результатів навчання/ Л.Л.Омельчук, Н.Г.Русіна // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2021. – Вип. 1. – С. 89–101.

3. Taras Shevchenko National University of Kyiv. Educational and professional program "Informatics" (2019). Specialty 122 Computer Science. [Online] Available from http://csc.knu.ua/media/filer_public/09/f4/09f46516-6c61-46a5-ae81-f34b7d673499/opp_122_bac_2019_1.pdf.

4. LUGOVYI V.I. (2014) International standard classification of education: education and training (basic analysis and application algorithm) / VI Lugovyi, Zh. V. Talanova // Pedagogy and Psychology. Visn. NAPS of Ukraine. № 3. 5–17.

5. OMELCHUK L.L. (2013) Comparative analysis of the Ukrainian standard of educational and professional training in informatics and international educational standards, Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics. № 4. 138–149.

6. OMELCHUK L.L. (2013) Comparative analysis of the Ukrainian standard of educational and professional training in computer science and Computer Science'2013 Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics. № 2, 216–227.

7. OMELCHUK L. Development of the ICT-standard of Higher Education in Ukraine within the Framework of European Requirements / L. Omelchuk , N. Rusina, O. Shyshatska // Proc. 15th Int. Conf. on ICT in Education, Research and Industrial Applications. Integration, Harmonization and Knowledge Transfer (ICTERI2019). Volume I: Main Conference. – Kherson, Ukraine, June 12-15 (2019). PP. 262-273.

8. OMELCHUK L.L., RUSINA N.G. (2020) Automated analysis of the educational-professional program "Informatics", implemented at the faculty of computer science and cybernetics, with the programs of other institutions of higher education in the specialty 122 "Computer Science" /L. Omelchuk, N. Rusina, Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics. № 4. 49–62.

9. OMELCHUK L.L., RUSINA N.G. (2021) Analysis of educational and professional programs in the specialty 122 Computer Science in terms of program learning outcomes /L. Omelchuk, N. Rusina, Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics. № 1. 89–101.

10. Освітньо-професійна програма «Комп'ютерні науки». Спеціальність 122 Комп'ютерні науки. Київський національний університету імені Тараса Шевченка. [Електронний ресурс]. – 2019. – Режим доступу до ресурсу: http://fit.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/2019/07/ОПП-Компютерні-науки-122.pdf.

11. Освітньо-професійна програма "Інформатика". Спеціальність 122 Комп'ютерні науки. Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна. [Електронний ресурс]. – 2019. – Режим доступу до ресурсу: http://math.univer.kharkov.ua/StandProg/OPPInformBak.pdf.

12. Освітньо-професійна програма «Комп'ютерні науки». Спеціальність 122 Комп'ютерні науки. Запорізький національний університет. [Електронний ресурс]. – 2020. – Режим доступу до ресурсу: https://www.znu.edu.ua/opp2020/bak/math/op_122_komp_nauki_bak.pdf.

13. Освітньо-професійна програма «Комп'ютерні науки». Спеціальність 122 Комп'ютерні науки. Вінницький національний технічний університет. [Електронний ресурс]. – 2020. – Режим доступу до ресурсу: http://vntu.edu.ua/uk/information-forenrollee/progmagbak.html.

14. Освітньо-професійна програма "Інформатика". Спеціальність 122 Комп'ютерні науки. Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет». [Електронний ресурс]. – 2020. – Режим доступу до ресурсу: https://www.uzhnu.edu.ua/uk/infocentre/15068.

15. Microsoft. SQL Server [Електронний ресурс]. – 2019. – Режим доступу до ресурсу: https://www.microsoft.com/ru-ru/sql-server/sql-server-2019.

10. Taras Shevchenko National University of Kyiv. Educational and professional program "Computer Science" (2019). Specialty 122 Computer Science. [Online] Available from http://fit.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/2019/07/ОПП-Компютерні-науки-122.pdf.

11. V.N. Karazin Kharkiv National University. Educational and professional program "Informatics" (2019). Specialty 122 Computer Science. [Online] Available from http://math.univer.kharkov.ua/StandProg/OPPInformBak.pdf.

12. Educational and professional program "Computer Science" (2019). Specialty 122 Computer Science. Zaporizhzhya National University [Online] Available from https://www.znu.edu.ua/opp2020/bak/math/op_122_komp_nauki_bak.pdf.

13. Educational and professional program "Computer Science" (2020). Specialty 122 Computer Science. Vinnytsia National Technical University. [Online] Available from http://vntu.edu.ua/uk/information-forenrollee/progmagbak.html.

14. Educational and professional program "Informatics" (2020). Specialty 122 Computer Science. Uzhhorod National University. [Online] Available from https://www.uzhnu.edu.ua/uk/infocentre/get/26801.

15. Microsoft. SQL Server (2019). [Online] Available from https://www.microsoft.com/ru-ru/sql-server/sql-server-2019.

Надійшла до редколегії 15.09.2021

СУЧАСНА ФІЗИКА

https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.26

УДК 535.3, 539.216.1

Дмитрук І. М.[1], д.ф.-м.н., проф.,
Березовська Н.І[1]., к.ф.-м.н., с.н.с.,
Майко К.О.[1], асп.,
Мамикін С.В.[2], к.ф.-м.н., с.н.с.,
Мамонтова І.Б.[2], к.ф.-м.н.

Самоорганізовані метал-напівпровідникові мікро- та наноструктури Au-GaAs для застосування у плазмонній фотовольтаїці

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 64/13,
e-mail: igor_dmytruk@knu.ua, n_berezovska@univ.kiev.ua, maiko_kate@ukr.net
[2] Інститут фізики напівпровідників імені В.Є. Лашкарьова, НАН України, 03028, м. Київ, пр-т. Науки, 45,
e-mail:mamykin@isp.kiev.ua, mirina@isp.kiev.ua

I. M. Dmitruk[1], D.Sci., Prof.,
N.I.Berezovska[1], PhD., Sen. Sci. Res.,
K.O.Maiko[1], PhD stud.,
S.V.Mamykin[2], PhD., Sen. Sci. Res.,
I.B.Mamontova[2], PhD.

Self-organized Au-GaAs metal-semiconductor micro- and nanostructures for applications in plasmonic photovoltaics

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, Volodymyrska str., 64/13,
e-mail: igor_dmytruk@knu.ua, n_berezovska@univ.kiev.ua, maiko_kate@ukr.net
[2] V.Ye. Lashkaryov Institute for Physics of Semiconductors, NAS of Ukraine, 03028, Kyiv, Nauky Prospect, 45,
e-mail: mamykin@isp.kiev.ua, mirina@isp.kiev.ua

Метал-напівпровідникові композитні мікроструктури Au-GaAs були отримані шляхом анізотропного травлення з подальшим фотостимульованим хімічним осадженням благородного металу (Au) на сформовані напівпровідникові квазігратки. Золото наносилося на структуровану поверхню GaAs у вигляді хаотично розміщених наночастинок металу та/або нанодротів на вершинах пагорбів напівпровідникової мікроструктури. Сформовані структури вивчаються за допомогою скануючої електронної мікроскопії, оптичної спектроскопії та фотоелектричних вимірювань. Створені метал-напівпровідникові мікроструктури Au-GaAs є перспективними для застосування в плазмонній фотовольтаїці, що підтверджується поведінкою спектрів фотолюмінесценції та змінами форми спектрів фотоструму.

Ключові слова: сонячний елемент, арсенід галію, наночастинка, поверхневий плазмон.

Au-GaAs metal-semiconductor composite microstructures have been prepared by an anisotropic etching of n-GaAs (100) wafers doped with Te (10^{16} to 10^{17} cm^{-3}) with subsequent photostimulated chemical deposition of noble metal (Au) on formed semiconductor quasigratings. The microrelief topology of GaAs surface is controlled by the anisotropic etching conditions. Au metal was deposited on the structured GaAs surface as randomly placed nanoparticles of various shape and size and/or nanowires on the top of the hills of formed semiconductor microstructure. As the number of Au nanoparticles increases, they tend to localize on the ledges of the GaAs microrelief forming a system of approximately parallel nanowires. Obtained periodic structures with submicron to microns periods without Au nanoparticles and with deposited nanoparticles have been studied by means of scanning electron microscopy, optical spectroscopy (photoluminescence spectroscopy at room temperature), and photoelectric measurements. The decrease of the relative intensity of main photoluminescence band for samples with Au nanostructures compared to ones without nanoparticles deposition and simultaniously changes of the shape of photocurrent spectra of Au-GaAs microstructures have been observed. Such correlation in behaviour of measured spectra make formed Au-GaA metal-semiconductor microstructures perspective for the application in plasmonic photovoltaics.

Key Words: solar cell, gallium arsenide, nanoparticle, surface plasmon.

Статтю представив д.ф.-м.н. Макарець М.В.

© І.М. Дмитрук, Н.І. Березовська, 2021

Introduction

In recent decades, silicon solar cells (SCs) are widely used in photovoltaics. Variety of techniques have been developed that allow the most efficient use of silicon to convert solar energy into electricity [1, 2]. At the same time, there are active studies of other semiconductor compounds that may be promising for solar energy, namely InP, CdS, GaAs, CIS-$CuInSe_2$; CIGS- $Cu(In,Ga)Se_2$; CIGSS- $Cu(In,Ga)(Se,S)_2$ [3]. Among these materials, it should be specially mentioned such direct bandgap semiconductor with zinc blende crystal structure as gallium arsenide (GaAs). GaAs is characterised with parameters (bandgap energy, absorption coefficient, resistance to ionizing radiation, reverse saturation current density) that give it a number of advantages not only in comparison with silicon, but also with other above-mentioned compounds [4]. Due to the high cost of material, the GaAs-based SCs are usually made in the form of thin films. At present, the scientists study structures based on A3B5 semiconductors deposited on a silicon substrate that could be perspective for highly efficient solar cells. Moreover, such structures could reduce the cost of multi-junction solar cells.

In the manufacture of effective SCs it is also important to use processing technologies that can improve the characteristics of material. The texturing of the front surface of the SC is a standard treatment aimed on reduction of reflection losses. It also provides the conditions under which the path of light in the element is not perpendicular to the plane of the p-n junction that makes it possible to bring the region of photogeneration of charge carriers closer to the p-n junction, thereby increasing the efficiency of carrier collection, especially in the case of low-energy photons. Moreover, it can provide additional benefits. Combination of surface relief with metal elements (for instant, nanoparticles (NPs)) can stimulate transfer of light energy into excitation of surface plasmons (SP) in NP or surface plasmon-polariton (SPP) in their periodical arrays (nanowires (NWs) on the top of the grooves) for efficient light trapping and increase of absorption in extremely thin layers (Fig. 1) [5, 6].

Another possibility is formation of nanosize semiconductor hills on the surface. Due to quantum size effect their energy spectrum is shifted to high energy side, that could result in photocurrent gain in blue spectral region due to reduce of surface recombination losses. It worth noting that not only front surface of the cell can be made relief. Relief

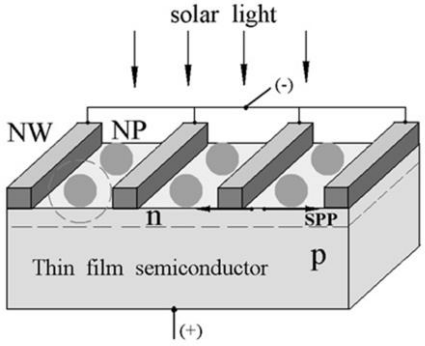


Fig.1. Interaction of light with metal-semiconductor microstructure

rear surface of semiconductor and metal back contact can also scatter transmitted light and support SPP on that interface. Texturing of semiconductor surface can be performed by different methods, for example, anisotropic chemical etching or ultrafast laser treatment [7]. Obtained relief is formed as a result of self-organization and/or interference of the incident laser radiation with surface electromagnetic waves. Its morphology depends on treatment conditions.

Experimental details

The metal-semiconductor composite microstructures have been fabricated on the n-GaAs (100) wafers doped with Te (10^{16} to 10^{17} cm^{-3}). Surface microrelief of the quasigrating type topology has been prepared by the method of wet chemical anisotropic etching in $2HF:2H_2SO_4:1H_2O_2$ during 3 or 5 minutes. Varying the etching conditions (etchant temperature and etching duration) allowed to change the relief depth and mean period of microstructures. The photoinduced chemical deposition of Au from aqueous salt $AuCl_3$ solution has been realized to prepare the nanoparticles of various shape and size located predominantly at the top of microrelief. If amount of deposited Au is large enough its nanoparticles can form the NWs on the top of the grooves of the quasigratings. Au NPs deposited on a flat GaAs surface do not display preferred directions and usually are randomly distributed on the surface.

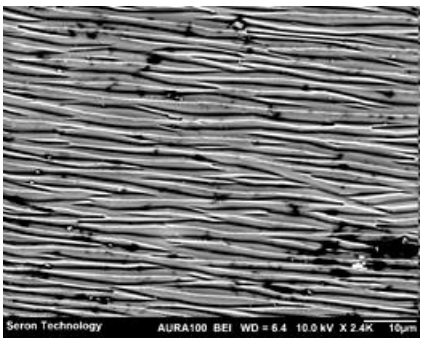
The morphology of treated GaAs surfaces has been analysed using a scanning electron microscope (SEM) AURA 100 (SERON Technology Inc.).

The photoluminescence (PL) spectra have been recorded with the setup based on a single-grating spectrometer MDR-3 under an excitation of Ar+ continuous laser λ_{ex} = 488 nm (E_{ex} =2.54 eV).

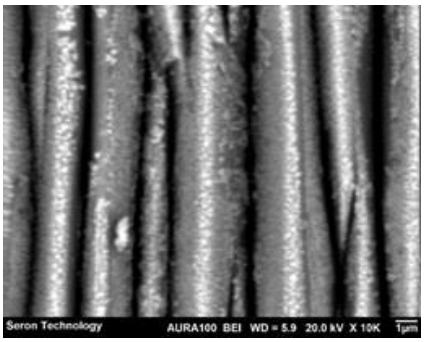
The Keithley SMU (Model 2420) device, which is a measuring source, has been used to measure the current-voltage characteristics.

Results and discussion

Morphology of microrelief formed on the surface of GaAs formed by anisotropic etching is presented in Fig. 2. The formed structure is quasigratings with submicron to microns periods. The relief depth was no more than 0.7 μm. These patterns is characterised by the triangular shape of the grooves. We did not quantify the filling of the structured surface with Au NPs. At this step, we controlled only the significant changes in the GaAs surface morphology. At certain amount, Au NPs localize on the ledges of the microrelief forming a system of approximately parallel NWs (see Fig. 2,b). Mean size of Au NPs aggregates which form NWs is evaluated as about 100 nm.



a)



b)

Fig. 2. SEM images of surface GaAs quasigrating structures (a) and surface Au-GaAs quasigrating structures with Au on the top of the grooves (b)

Photoluminescence (PL) spectra of Au-GaAs quasigrating structure are presented in Fig. 3. The main PL band around 1.4 eV is caused by recombination of free excitons or also localized excitons characteristic for direct bandgap GaAs semiconductor. Observed PL band is rather wide with long high-energy wing. This band is complex. This band shape could indicate the quantum confinement of excitons in GaAs nanostructures or the influence of transitions connected with impurities and defects in oxide layer that is formed during the etching procedure. Moreover, the behaviour of PL spectra of metal-semiconductor composite even at room temperature could be indicative for evaluation of the effectiveness of such microstructure with deposited NPs. The observed decrease of PL intensity for samples with Au nanostructures can be attributed to screening of GaAs with gold or to more efficient separation of carriers. The latter is consistent with increase of photocurrent for this kind of cells.

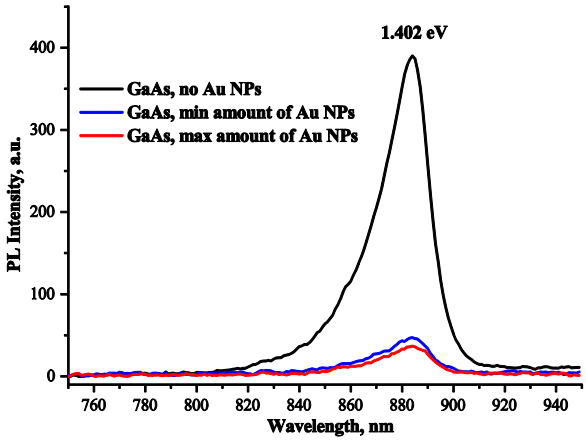


Fig. 3. PL spectra of Au-GaAs structures without and with different amounts of deposited Au NPs, $\lambda_{exc.}$ = 488.0 nm, T= 300 K

Photocurrent spectra of Au-GaAs cells with quasigrating surface topology (Fig. 4) demonstrate substantial increase in blue-green spectral range comparing to Schottki barrier GaAs cells with flat surface. Fine structure of these spectra depends on the amount of deposited gold weather it is present in the form of individual particles or nanowires on the top of the grooves.

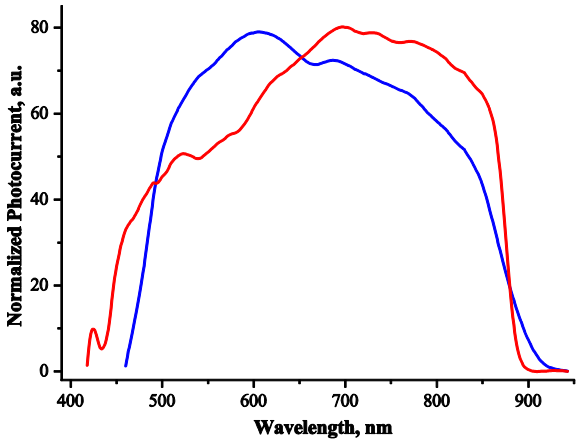


Fig. 4. Spectral dependence of short-circuit photocurrent of Au-GaAs quasigrating structures with different amounts of deposited Au NPs

Conclusions

Our results demonstrate that the deposition of noble metal (Au) nanoparticles on the textured surface of GaAs direct bandgap semiconductor results in the photocurrent enhancement. The microrelief topology of GaAs surface could be controlled by the conditions of chemical anisotropic etching. It was found that the formation of Au nanowires is more beneficial for the purposes of plasmonic photovoltaics. Nano sized metal features on the structured surface of semiconductor provide an increase of the light transformation into the surface plasmons and surface plasmon-polaritons, and consequent increase of photocurrent.

Список використаних джерел

1. *Dou B.* Enhanced Performance of Nanotextured Silicon Solar Cells with Excellent Light-Trapping Properties / B. Dou, R. Jia, Z. Xing, X. Yao, D. Xiao, Z. Jin, X. Liu // Photonics. – 2021. - V. 8. – Iss.7. – P.272.

2. *Spinelli P.* Plasmonic light trapping in thin-film Si solar cells / P. Spinelli, V.E. Ferry, J. van de Groep, M. van Lare, M.A. Verschuuren, R.E.I. Schropp, H.A. Atwater, A. Polman // Journal of Optics. –2012. – V.14. –No. 2. – P. 024002.

3. *Enrichi F.* Plasmonic enhanced solar cells: Summary of possible strategies and recent results / F. Enrichi, A. Quandt, G.C. Righini // Renewable and Sustainable Energy Reviews. – 2018. – V.82. – Part 3. – P.2433-2439.

4. *Papez N.* Overview of the Current State of Gallium Arsenide-Based Solar Cells / N. Papez, R. Dallaev, S. Ţalu, J. Kastyl // Materials. – 2021. – V.14. – Iss.11. – P. 3075.

5. *Dmitruk N.L.* Metal nanoparticle-enhanced photocurrent in GaAs photovoltaic structures with microtextured interfaces / N.L. Dmitruk, O.Yu. Borkovskaya, I.B. Mamontova, S.V. Mamykin, S.Z. Malynych, V.R.Romanyuk // Nanoscale Research Lett. – 2015. – V.10. – P.72.

6. *Liu X.* Au nanoparticle enhanced thin-film silicon solar cells / X. Liu, L. Jia, G. Fan, J. Gou, S.F. Liu, B. Yan // Solar Energy Materials and Solar Cells. – 2016. – V.147. – P.225-234.

7. *Berezovska N.* Self-Organized Structuring of Surface of Metal-Semiconductor Composite by Femtosecond Laser Processing / N. Berezovska, I. Dmitruk, A. Kalyuzhnyy, A. Dmytruk, I. Blonskyi // Ukrainian Journal of Physics. – 2018. – V.63. – No.5. – P.406-412.

References

1. DOU, B., JIA, R., XING, Z., YAO, X., XIAO, D., Z. Jin, & LIU, X. (2021) Enhanced Performance of Nanotextured Silicon Solar Cells with Excellent Light-Trapping Properties. *Photonics*. 8(7). p.272.

2. SPINELLI, P., FERRY, V.E., VAN de GROEP, J., VAN LARE, M., VERSCHUUREN, M.A., SCHROPP, R.E.I., ATWATER, H.A. & POLMAN, A. (2012) Plasmonic light trapping in thin-film Si solar cells. *Journal of Optics*. 14 (2). p.024002.

3. ENRICHI, F., QUANDT, A. & RIGHINI, G. C. (2018) Plasmonic enhanced solar cells: Summary of possible strategies and recent results. *Renewable and Sustainable Energy Reviews.* 82 (3). p. 2433-2439.

4. PAPEZ, N., DALLAEV, R., ŢALU, S. & KASTYL, J. (2021) Overview of the Current State of Gallium Arsenide-Based Solar Cells. *Materials.* 14 (11). p.3075.

5. DMITRUK, N.L., BORKOVSKAYA, O.Yu., MAMONTOVA, I.B., MAMYKIN, S.V., MALYNYCH, S.Z. & ROMANYUK, V.R. (2015) Metal nanoparticle-enhanced photocurrent in GaAs photovoltaic structures with microtextured interfaces. *Nanoscale Research Lett.* 10. p.72.

6. LIU, X., JIA, L., FAN, G., GOU, J., LIU, S.F. & YAN, B. (2016) Au nanoparticle enhanced thin-film silicon solar cells. *Solar Energy Materials and Solar Cells*. 147. p.225-234.

7. BEREZOVSKA N., DMITRUK, I., KALYUZHNYY, A., DMYTRUK, A. & BLONSKYI, I. (2018) Self-Organized Structuring of Surface of Metal-Semiconductor Composite by Femtosecond Laser Processing. *Ukrainian Journal of Physics*. 63 (5). p.406-412.

Надійшла до редколегії 01.09.2021