КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

В І С Н И К

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

№2 2021

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
випуск №2, 2021,
Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Физика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, механіко-математичного факультетів, факультету радіофізики, електроніки та комп’ютерних систем і факультету комп’ютерних наук та кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора, кандидата наук і PhD за спеціальностями 111, 112, 113, 104, 105 (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1188 від 24.09.2020) та за спеціальностями 121, 122, 123, 124 (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1471 від 26.11.2020), та реферується в Реферативному журналі Zentralblatt MATH, JournalTOCs, Crossref, ICI World of Journals, Road, Google Scholar і Науковій періодиці України.

Редакційна колегія:

Моклячук Михайло Павлович, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор;**

Розора Ірина Василівна, д.ф.-м.н., доц., **заст. головного редактора;**

Bartlova Milada, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;

Bavula Vladimir, Prof., University of Sheffield, Great Britain;

Beghin Luisa, Prof., Sapienza Università di Roma, Italy;

Futorny Vyacheslav, Prof., Universidade de São Paulo, Brazil;

Giuliano Rita, Prof., Università di Pisa, Italy;

Gorlatch Sergei, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;

Hudak Stefan, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;

Kukhtarev Nickolai, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;

Leonenko Nikolay, Prof., Cardiff University, Great Britain;

Medvids Arturs, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;

Olenko Andriy, Prof., La Trobe University, Australia;

Orsingher Enzo, Prof., Sapienza University of Rome, Italy;

Ostrovsky Eugene, Prof., Bar- Ilan University, Israel;

Pogany Tibor, Prof., University of Rijeka, Croatia;

Rontó Miklós, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;

Silvestrov Dmitrii, Prof., Stockholms universitet, Sweden;

Sottinen Tommi, Prof., University of Vaasa, Finland;

Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;

Trofimchuk Sergey, Prof., Universidadde Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;

Volodin Andrei, Prof., University of Regina, Canada;

Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;

Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;

Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;

Безущак Оксана Омелянівна, д.ф.-м.н., доцент;

Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;

Гаращенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;

Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;

Жук Ярослав Олександрович, д.ф.-м.н., проф.;

Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., проф.;

Курченко Олександр Олексійович, д.ф.-м.н., проф;

Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;
Львов Віктор Анатолійович, д.ф.-м.н., проф.;
Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;
Майборода Ростислав Євгенович, д.ф.-м.н., проф.;
Мішура Юлія Степанівна, д.ф.-м.н., проф.;
Пашко Анатолій Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Петравчук Анатолій Петрович, д.ф.-м.н., проф.;
Погорілий Сергій Дем'янович, д.т.н., проф.;
Савенков Сергій Миколайович, д.ф.-м.н., доц.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.;
Сливка-Тилищак Ганна Іванівна, д.ф.-м.н., проф.;
Хусаінов Денис Яхьєвич, д.ф.-м.н., проф.;

Редакційний відділ:
Затула Дмитро Васильович, **відповідальний секретар**;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
П'ятецька Олена Василівна, visnyk.phys-math@ukr.net;
Отто Георгій Костянтинович, **технічний редактор**, ottogk@gmail.com.

Адреса редакційної колегії:
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03022 Тел. (044) 259-01-49
fm.visnyk@ukr.net
ISBN 978-966-2142
ISSN 1812-5409

Засновник: Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Свідоцтво про державну реєстрацію:КВ №16299-4771Р від 11.12.2009 року

DOI: https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/2

Безкоштовно

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics
No. 2, 2021.

The journal contains results of new research in various fields of mathematics, computer science, mechanics, physics and radiophysics for researchers, academic staff, postgraduates, engineers and students. It is published on the recommendation of the Academic Councils of Faculty of Physics, Faculty of Radiophysics, Electronics and Computer Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics and the Faculty of Computer Science and Cybernetics.

Journal "Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics" is included in the List of scientific professional publications of Ukraine, in which the results of the thesises for obtaining the scientific degrees of a doctor and a candidate of sciences (PhD) in specialties 111, 112, 113, 104, 105, 121, 122, 123 and 124 can be published (approved by the orders of the Ministry of Education and Science of Ukraine No. 1188 dated September 24, 2020 and No. 1471 dated November 26, 2020).
Journal is referenced in the abstract journal **Zentralblatt MATH (zbMATH), JournalTOCs, Crossref, ICI World of Journals, Road, Google Scholar and Scientific periodicals of Ukraine.**

Editorial Board

Moklyachuk Mikhail Pavlovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine, Editor in Chief;
Rozora Iryna Vasylivna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine, Deputy Editor in Chief;
Bartlova Milada, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;
Bavula Vladimir, Prof., University of Sheffield, Great Britain;
Beghin Luisa, Prof., Sapienza Università di Roma, Italy;
Futorny Vyacheslav, Prof., Universidade de São Paulo, Brazil;
Giuliano Rita, Prof., Università di Pisa, Italy;
Gorlatch Sergei, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;
Hudak Stefan, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;
Kukhtarev Nickolai, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;
Leonenko Nikolay, Prof., Cardiff University, Great Britain;
Medvids Arturs, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;
Olenko Andriy, Prof., La Trobe University, Australia;
Orsingher Enzo, Prof., Sapienza University of Rome, Italy;
Ostrovsky Eugene, Prof., Bar-Ilan University, Israel;
Pog\'any Tibor, Prof., University of Rijeka, Croatia;
Rontó Miklós, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;
Silvestrov Dmitrii, Prof., Stockholm University, Sweden;
Sottinen Tommi, Prof., University of Vaasa, Finland;
Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;
Trofimchuk Sergey, Prof., Universidadde Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;
Volodin Andrei, Prof., University of Regina, Canada;
Akimenko Vitaliy Vladimirovich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Anisimov Igor Alekseevich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Anisimov Anatoliy Vasyl'ovych, Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Bezuschak Oksana Omelyanivna, Dr., Sci. Associate Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Voloshin Aleksey Fedorovich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Garaschenko Fedir Georgievich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Yezhov Stanislav Nikolaevich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Zhuk Yaroslav Aleksandrovich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Zaslavs'kyj Volodymyr Anatolijovych, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Kurchenko Oleksandr Oleksijovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Kudin Volodymyr Ivanovich, Dr. Sci., Sr. Sci. Researcher, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Lvov Victor Anatoliyovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Makarets' Nikolay Vladimirovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Maiboroda Rostyslav Yevhenovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Mishura Yuliya Stepanivna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Pashko Anatolij Oleksijovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Perestyuk Mykola Oleksijovych, Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Petravchuk Anatolij Petrovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Pogorily Serhiy Demyanovych, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Savenkov Serhij Mykolajovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Skrzyevsky Valery Antonovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Slyvka-Tylyshchak Anna Ivanivna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Uzhhorod National University, Uzhhorod, Ukraine;
Husainov Denys Yah'yevych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine.

ISSN: 2218-2055 (on-line version)

***ISBN*:** 978-966-2142
***ISSN*:** 1812-5409 (printed version)
***DOI**:* https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/2

Founders: Taras Shevchenko National University of Kyiv
Foundation year: 1991 (series of bulletins of Kyiv University "Mathematics and Mechanics", "Physics", "Modeling and Optimization of Complex Systems" was reorganized into "Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics").
Certificate of state registration: КВ № 16299-4771 P dated 11.12.2009
Issued: 4 times a year

Mailing Address
Taras Shevchenko National University of Kyiv
Faculty of Computer Science and Cybernetics,
03022, Ukraine, Kyiv, 4d Academician Glushkov avenue
Phone: (044) 259-01-49
fm.visnyk@ukr.net

ЗМІСТ

Мішура Ю.С., Моклячук М.П., Розора І.В., Сахно Л.М. Міжнародна наукова конференція «Сучасна стохастика: теорія та застосування.V» (MSTA-V). 1-4 червня 9
Бахчеджиоглу О.О. Теорія дуальності для увігнення функцій корисності в неповній моделі ринку 10
Василик О.І., Розора І.В., Яневич Т.О, Ловицька І.І. Про один з методів побудови моделів строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху 18
Голомозий В.В. Оцінка експоненційного моменту для часу одночасного відновлення двох випадкових блукань на півпрямій 26
Горбачук В. М.,Бардадим Т. О., Осипенко С.П. Задача децентралізованого прийняття рішень для сучасних хмарних послуг 32
Голіченко І. І., Масютка О. Ю., Моклячук М. П. Екстраполяція періодично корельованих стохастичних послідовностей з пропусками спостережень 39
Кириченко О.Л.,Малик І.В., Остапов С.Е. Стохастичні моделі в задачах штучного інтелекту 53
Кривошия Р.В. Про одне узагальнення поняття нормальних чисел 58
Макарчук О. П., Сальник К. С. Асимптотична поведінка модуля характеристичної функції розподілу Кантора 63
Самойленко І.В., Самойленко Т. А. , Довгай Б. В. Випадкові еволюції в схемі пуассонової апроксимації 69
Сахно Л.М., Василик О.І. Дослідження розв'язків дисперсійних рівнянь старшого порядку з φ-субгауссовими початковими умовами 78
Щестюк Н.Ю., Тищенко С.В. Метод Монте-Карло для оцінювання опціонів у субдифузійних моделях арифметичного броунівського руху 85

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Тетерук І.С. двовимірні узагальнені моментні зображення та апроксиманти типу Паде функції двох змінних, яка є узагальненням гіпергеометричних рядів 95

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Ніфтуллаєва Ш. Необхідні умови для розв'язків рівнянь змішаного типу 103
Симонов Д.І. Алгоритм визначення оптимального потоку в ланцюгах постачання з урахуванням багатокритеріальних умов та стохастичності процесів 109
Кузьменко О.В., Койбічук В.В., Яценко В.В., Гриценко К.Г. Дослідження світових тенденцій розвитку кіберспорту за допомогою методів Data Mining 117

СУЧАСНА ФІЗИКА

Соловйов Д.В., Іваньков О.І., Булавін Л.А., Дорошенко І.Ю., Онук М.М. Дослідження структурних особливостей взаємодії S-протеїну SARS-CoV-2 з ліпідними мембранами методом малокутового розсіяння нейтронів 127

CONTENTS

Mishura Yu.S., Moklyachuk M.P., Rozora I.V., Sakhno L.M. International scientifc conference "Modern Stochastics: Theory and Applications. V" (MSTA-V). 1-4 June 2021 9
Bahchedjioglou O.O. Duality theory for concavi_cation of utility functions in incomplete market model 10
Vasylyk O.I., Rozora I.V., Ianevych T.O., Lovytska I.I.On some method on model construction for strictly φ-sub-Gaussian generalized fractional Brownian motion 18
Golomoziy V.V. On estimating exponential moment for the simultaneous renewal time for two random walks on a half line 26
Gorbachuk V. M., Bardadaym T. O., Osypenko S. P. The problem of decentralized decision making for modern cloud services 32
Golichenko I. I., Masyutka O. Yu., Moklyachuk M. P. Extrapolation problem for periodically correlated stochastic sequences with missing observations 39
Kyrychenko O.L., Malyk I.V., Ostapov S.E. Stochastic models in artificial intelligence development 53
Kryvoshyia R.V. On a generalization of the concept of normal numbers 58
Makarchuk O. P., Salnik K. S. Asymptotic behavior of the module of the characteristic Cantor distribution function 63
Samoilenko I. V., Samoilenko T. A., Dovgai B. V.Random evolutions in Poisson approximation scheme 69
Sakhno L.M., Vasylyk O.I. Investigation of solutions to higher-order dispersive equations with φ-sub-Gaussian initial conditions-субгауссовими початковими умовами 78
Shchestyuk N.Y., Tyshchenko S.V., Monte-Carlo method for option pricing in sub-diffusive arithmetic models 85

DIFFERENTIAL EQUATIONS, MATHEMATICAL PHYSICS AND MECHANICS

Teteruk I.S. Two-dimensional generalized instantaneous images and approximations of the Pade type function of two variables, which is a generalization of hypergeometric series 95

COMPUTER SCIENCES AND INFORMATICS

Niftullayeva Sh. Necessary conditions for solutions for the mixed type equations 103
Symonov D.I. Algorithm for determining the optimal flow in Supply Chains, considering multi-criteria conditions and stochastic processes 109
Kuzmenko O.V., Koibichuk V.V., Yatsenko V.V., Hrytsenko K.G. Research of e-sports development world tendencies on the base of Data Mining methods 117

MODERN PHYSICS

Solovyov D.V., Ivankov O.I., Bulavin L.A., Doroshenko I.Yu., Onuk M.M. Investigation of structural features of SARSCoV-2 S-protein interaction with lipid membranes by small-angle neutron scattering 127

УДК 519.21 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/2.1

Ю.С. Мішура[1], *д.ф.-м.н., проф.*
М.П. Моклячук[1], *д.ф.-м.н., проф.*
І.В. Розора[1], *д.ф.-м.н., доц.*
Л.М. Сахно[1], *д.ф-м.н, с.н.с*

Міжнародна наукова конференція "Сучасна стохастика: теорія та застосування. V" (MSTA-V). 1-4 червня 2021

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64.
e-mails: myus@univ.kiev.ua, mmp@univ.kiev.ua irozora@bigmir.net, lms@univ.kiev.ua

Yu.S. Mishura[1], *Dr. of Sci., Prof.*
M.P. Moklyachuk[1], *Dr. of Sci., Prof.*
I.V. Rozora[1], *Dr. of Sci., Associate Prof.*
L.M. Sakhno[1], *Dr. of Sci., Senior Researcher*

International scientific conference "Modern Stochastics: Theory and Applications. V" (MSTA-V). 1-4 June 2021

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.
e-mails: myus@univ.kiev.ua, mmp@univ.kiev.ua irozora@bigmir.net, lms@univ.kiev.ua

З 1 по 4 червня 2021 року у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка було проведено (дистанційно) Міжнародну наукову конференцію "Modern Stochastics: Theory and Applications. V" (MSTA-V)). Конференцію було організовано кафедрою теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету. Загальна кількість учасників – близько 300.

На конференції було представлено 50 пленарних доповідей, зокрема із лекціями виступили професори Мартін Гротхаус (Німеччина), Ніколай Крилов (США), Доменіко Марінуччі (Італія), Марк Подольський (Швейцарія), Міклош Разоній (Угорщина), Рене Шіллінг (Німеччина).

Під час роботи конференції 132 доповіді було зроблено у рамках 10 секцій, що охоплювали різні галузі теорії ймовірностей, математичної статистики, теорії випадкових процесів, стохастичного аналізу та їх застосувань. Спеціальні секції було присвячено сучасним досягненням у напрямках наукових досліджень, започаткованих видатними математиками А.В. Скороходом, В.С. Королюком, І.М. Коваленком, Ю.В. Козаченком.

Перелік секцій демонструє широке охоплення сучаних наукових тематик та залучення провідних науковців до організації роботи секцій: 1) Stochastic dynamics. Development of research ideas of Anatoliy Skorokhod (керівники *В. Бок, Ю. Кондратьєв, В. Кошманенко, О. Веретеннікова*); 2) Evolution systems, branching processes and renewal theory. Dedicated to the main research topics of Volodymyr Korolyuk (керівники *О. Іксанов, Н. Лімніос, І. Самойленко*); 3) Reliability, queueing and information security. Dedicated to the development of scientific ideas of Igor Kovalenko (керівники *М. Кузнєцов, Є. Лебедєв, М. Савчук*); 4) Advanced topics in stochastic processes, fractional and related models. Dedicated to the achievements in the area of research of Yuriy Kozachenko (керівники *М. Леоненко, Ю. Мішура, Е. Орсінгер*); 5) Stochastic optimization (керівники *П. Кнопов, В. Норкін*); 6) Fractal analysis (керівники *М. Працьовитий, Г. Торбін*); 7) Risk processes and actuarial mathematics (керівник *Й. Шяуліс*); 8) Statistics of stochastic processes and random fields (керівники *О. Іванов, О. Кукуш, Р. Майборода*); 9) High-Dimensional Statistical Inference (керівники *Т. Боднар, О. Охрін*); 10) Stochastic analysis and stochastic differential equations (керівники *П. Імкеллер, Л. Вітасаарі*).

Участь у конференції взяли визнані науковці України та світу, та молоді дослідники, аспіранти і студенти. Географія учасників є надзвичайно широкою – конференція об'єднала науковців з 32 країни світу від Австралії і Японії до США і Канади, включаючи більшість європейських країн.

Конференція продемонструвала надзвичайну зацікавленість науковців в обміні науковими досягненнями, учасниками були представлені нові цікаві результати, в ході доповідей зав'язувались наукові дискусії, йшов плідний обмін думками. Опубліковано матеріали конференції, що містять 227 тез доповідей, електронний примірник розміщено на сайті конференції https://probability.knu.ua/msta5/.

Деякі результати, представлені на конференції, публікуються у цьому випуску журналу.

© Ю.С.Мішура, М.П.Моклячук, І.В.Розора, Л.М. Сахно, 2021

УДК 519.21 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/2.2

О.О. Бахчеджиоглу[1], *аспірант*

Теорія дуальності для увігнення функцій корисності в неповній моделі ринку

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64.
e-mail: [1]olenakharytonova06@gmail.com

O.O. Bahchedjioglou[1], *post-graduate student*

Duality theory for concavification of utility functions in incomplete market model

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64 Volodymyrska st.
e-mail: [1]olenakharytonova06@gmail.com

Основна мета цієї роботи полягає у доведенні існування оптимальної стратегії для стандартної та робастної задач максимізації функції корисності за умов неповної моделі ринку, коли інвестор не впевнений у ймовірнісній моделі та не сприймає як ризик, так і невизначеність моделі. Існуючі результати досліджень для строго увігнутих функцій корисності узагальнено для не увігнутих функцій корисності. Крім того, сформульовано умови, за яких оптимальна стратегія для задач з увігненою функцією корисності збігається з оптимальною стратегією для початкової функції корисності.

Результати дослідження доповідались на Міжнародній науковій конференції "Modern Stochastics: Theory and Applications. V" (MSTA-V).

Ключові слова: функціонал максимізації функції корисності, оптимальні стратегії, оптимальні інвестиції, увігнення.

The main goal for this paper is to prove the existence of the optimal investment strategies for the standard and robust problems of maximization for the concavified utility function in an incomplete market model. We extend the existing results for strictly concave utility functions to concavification of non-concave utility functions. Moreover, we present an assumption under which the optimal strategies for concavified problems are also optimal strategies for non-concave problems.

Keywords: standard utility maximization, robust utility maximization, optimal investments, non-concave utility, concavification.

1 Introduction

The optimal investment problem is one of the most actual problem nowadays. There is a lot of aspects that can be considered in this problem such as the concavity of utility function, market model, the assumptions on the value process, the set of probability measures and the possibility of constructing the optimal investment strategies etc. The main interest in constructing the optimal investment in the very general setup, with an incomplete market, general sets of prior models and non-concave utility functions.

2 Model setup

We will consider the model as in [3] with the additional assumption that the discounted price process is locally bounded. We impose the no-arbitrage type condition that the set of all equivalent local martingale measures $\mathcal{M}_e \neq \varnothing$, but we do not assume that the market model is complete.

We consider the discounted price process with d assets which modeled by a stochastic process $S = (S_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$. We assume that S is a d-dimensional locally bounded semimartingale on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ with respect to a filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$. The pair (x, ξ) is a self-financing trading strategy, where $x \in \mathbb{R}$ is the initial wealth and $\xi = (\xi_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ is a d-dimensional predictable and S is an integrable process. The corresponding value process X satisfies

$$X_t = X_0 + \int_0^t \xi_r dS_r, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

By $\mathcal{X}(x)$, $x > 0$ we denote the set of all such processes X, with $X_0 \leqslant x$ which are also admissible in the sense that $X_t \geqslant 0$, for $0 \leqslant t \leqslant T$.

Additionally, the authors of [3] impose the assumptions on the set of probability measures $\mathcal{Q}$ on $(\Omega, \mathcal{F})$.

© О.О. Бахчеджиоглу, 2021

Assumption 1. *(i) $\mathcal{Q}$ is convex;*

(ii) $\mathbb{P}[A] = 0$ if and only if $Q[A] = 0$ for all $Q \in \mathcal{Q}$;

(iii) The set $\mathcal{Z} := \{dQ/dP | Q \in \mathcal{Q}\}$ is closed in $L^0(\mathbb{P})$.

We add the following extra assumption to this set:

(iv) The set $\mathcal{Z}_e := \{dQ/dP | Q \in \mathcal{Q}_e\}$ is closed in $L^0(\mathbb{P})$,

where $\mathcal{Q}_e$ denotes the set of measures in $\mathcal{Q}$ that are equivalent to $\mathbb{P}$.

Let an investor have utility function $U(x)$; the conditions on $U(x)$ will be specified later. Consider the following value function of the robust utility problem:

$$u(x) := \sup_{X \in \mathcal{X}(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[U(X_T)].$$

Denote

$$u_Q(x) := \sup_{X \in \mathcal{X}(x)} E_Q[U(X_T)],$$

the value function of the optimal investment problem.

As in [4, 5], we will consider the following "abstract version" of $\mathcal{X}(x)$:

$$C(x) := \{g \in L^0_+(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}) | \\ 0 \leqslant g \leqslant X_T \text{ for some } X \in \mathcal{X}(x)\}.$$

It is easy to see that

$$u(x) = \sup_{X \in \mathcal{X}(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[U(X_T)] \\ = \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[U(g)];$$

$$u_Q(x) = \sup_{X \in \mathcal{X}(x)} E_Q[U(X_T)] = \sup_{g \in C(x)} E_Q[U(g)].$$

3 Main result

The aim of this article is to present the optimal investment strategies for the standard as well as the robust problem of maximization the concavified utility function, i.e. $\sup_{X \in \mathcal{X}(x)} \mathbb{E}[U_c(X_T)]$ and $\sup_{X \in \mathcal{X}(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[U(X_T)]$. The results and proofs of the present article borrow their main ideas and techniques from [3]. The main difference is that, contrary to [3], we do not assume the concavified utility function is strictly concave and we obtain results for a fixed probability measure. Moreover, we present a sufficient assumption for optimal strategies for concavified problems to be optimal strategies for non-concave problems as well.

Denote

$$u^c_P(x) = \sup_{X \in \mathcal{X}(x)} \mathbb{E}[U_c(X_T)].$$

To avoid trivialities, throughout the article we assume that

$$u^c_P(x) < \infty \text{ for some } x > 0. \tag{1}$$

3.1 Duality theory

In this section we will work with the convex conjugate V of U:

$$V(y) = \sup_{x>0}(U(x) - xy), \quad y > 0.$$

We do not assume that U is concave or satisfies the Inada condition in zero. As a result, in general, the concave envelope U_c is not strictly concave and the Inada condition in zero does not hold as well. Hence, the convex conjugate V in general is not smooth and not strictly decreasing. Nevertheless it follows from the [1, Lemma 2.9] that the utility U and its concave envelope U_c have the same convex conjugate and that the function V is convex, non-increasing and finite on $(0, \infty)$. Moreover, it holds that

$$U_c(x) - xy = V(y) \iff x \in -\partial V(y) \\ \iff y \in \partial U_c(x). \tag{2}$$

The dual value function v_P for u_P is given by

$$v_P(y) := \inf_{Y \in \mathcal{Y}(y)} \mathbb{E}[V(Y_T)], \quad y > 0,$$

where the space $\mathcal{Y}(y)$ is defined as

$$\mathcal{Y}(y) = \{Y \geqslant 0 | Y_0 = y \text{ and } XY \text{ is a} \\ \mathbb{P} - \text{supermartingale for all } X \in \mathcal{X}(1)\}.$$

In addition to $C(x)$, consider also the "abstract version" of $\mathcal{Y}(y)$:

$$D(y) = \{h \in L^0_+(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}) | \\ 0 \leqslant h \leqslant Y_T \text{ for some } Y \in \mathcal{Y}(y)\}.$$

It is easy to see that

$$u_P(x) = \sup_{g\in C(x)} \mathbb{E}[U(g)]$$
$$u_P^c(x) = \sup_{g\in C(x)} \mathbb{E}[U_c(g)]$$
$$v_P(y) = \inf_{h\in D(y)} \mathbb{E}[V(h)].$$

Moreover, the optimal g or h (if it exists) corresponds to some $X \in \mathcal{X}(x)$ or $Y \in \mathcal{Y}(y)$.

Recall that a subset S of $L^0_+(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ is called *solid* if from $0 \leqslant f \leqslant g$ and $g \in S$ it follows that $f \in S$.

By [4, Proposition 3.1], we have

(i) $C(x)$ and $D(y)$ are subsets of $L^0_+(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ which are convex, solid and closed in the topology of convergence in measure.

(ii)

$$g \in C(x) \Longleftrightarrow g \geqslant 0 \text{ and } \sup_{h\in D(y)} \mathbb{E}[hg] \leqslant xy$$
$$h \in D(y) \Longleftrightarrow h \geqslant 0 \text{ and } \sup_{g\in C(x)} \mathbb{E}[hg] \leqslant xy. \tag{3}$$

(iii) $C(x)$ is a bounded subset of $L^0_+(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$, containing the constant function x.

3.2 Optimal investments for the standard concavified utility functional problem

In this section we are going to present the optimal investment strategies for the problem of maximization the standard concavified utility function, i.e. $\sup_{X\in\mathcal{X}(x)} \mathbb{E}[U_c(X_T)]$.

Assume that

$$U_c(0) \geqslant 0, . \tag{4}$$

Then, for all $y > 0$,

$$V(y) = \sup_{x>0}(U_c(x) - xy) \geqslant U_c(0) \geqslant 0$$
$$V_n(y) = \sup_{0<x\leqslant n} (U_c(x) - xy) \geqslant U_c(0) \geqslant 0.$$

From the last inequality and the assumption (1), appealing to the proof of [4, Lemma 3.4], we obtain that

$$v_P(y) = \sup_{x>0}(u_P^c(x) - xy) \text{ for each } y > 0. \tag{5}$$

Theorem 2. *Let* (1) *and* (4) *hold.*

Then, for any $x_0 > 0$, there exists some $\widehat{g} \in C(x_0)$, $\widehat{y} > 0$ and $\widehat{h} \in D(\widehat{y})$ such that

(i) $u_P^c(x_0) = v_P(\widehat{y}) + x_0\widehat{y}$,

(ii) $u_P^c(x_0) = \inf_{y>0}(v_P(y) + x_0 y)$.

If, in addition, $v_P(y) < \infty$ for all $y > 0$, then

(iii) $v_P(\widehat{y}) = \mathbb{E}[V(\widehat{h})]$,

(iv) $u_P^c(x_0) = \mathbb{E}[U_c(\widehat{g})]$.

Moreover, $v_P(\cdot)$ is convex.

Proof. *Fix $x_0 > 0$. For all $y > 0$, we have*

$$u_P^c(x_0) \leqslant \sup_{x>0}[u_P^c(x) - xy] + x_0 y. \tag{6}$$

Let us prove that there exists $\widehat{y} > 0$, such that for all $x > 0$, the following holds:

$$u_P^c(x_0) \geqslant u_P^c(x) - x\widehat{y} + x_0\widehat{y}, \tag{7}$$

equivalently,

$$u_P^c(x) - u_P^c(x_0) \leqslant \widehat{y}(x - x_0).$$

Since u_P^c is concave (see [3, Lemma 3.1 (b)]), such $\widehat{y}$ exists. Moreover, from the inequality ${u^c}'_P(x_0^+) \leqslant {u^c}'_P(x_0^-)$ it follows that $\widehat{y} \in [{u^c}'_P(x_0^+), {u^c}'_P(x_0^-)]$.

Then, using (7),

$$u_P^c(x_0) \geqslant \sup_{x>0}[u_P^c(x) - x\widehat{y}] + x_0\widehat{y}.$$

Therefore, noting (6), *we have*

$$u_P^c(x_0) = \sup_{x>0}[u_P^c(x) - x\widehat{y}] + x_0\widehat{y}.$$

As a result, (5) *implies* (*i*).

To prove (*ii*), *observe that from* (5) *we have for all $x_0, y > 0$*

$$u_P^c(x_0) \leqslant v_P(y) + xy.$$

Hence,

$$u_P^c(x_0) \leqslant \inf_{y>0}(v_P(y) + x_0 y).$$

Using (*i*), *we get*

$$u_P^c(x_0) \geqslant \inf_{y>0}(v_P(y) + x_0 y),$$

which yields (*ii*).

From the definition of $v_P(\widehat{y})$ *it follows that there exists a sequence* $(h_n) \in D(\widehat{y})$ *such that*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[V(h_n)] = \inf_{h\in D(\widehat{y})} \mathbb{E}[V(h)].$$

Due to the Kolmos-type argument [2, Lemma A1.1], there is sequence $(\widehat{h}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in conv(h_n, h_{n+1}, \dots)$ *such that* $\widehat{h}_n$ *converges a.s. to some* $\widehat{h} \geqslant 0$.

Thanks to the convexity and closedness with respect to convergence in measure of $D(\widehat{y})$, $D(\widehat{y})$ *is closed under countable convex combinations, hence* $(\widehat{h}_n) \in D(\widehat{y})$. *Moreover, since* $D(\widehat{y})$ *is closed in the topology of convergence in measure, we have that* $\widehat{h} \in D(\widehat{y})$.

Further, for each $n \in \mathbb{N}$, *there exists a sequence* $\alpha_i^n \in \mathbb{R}^+$ *such that* $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i^n = 1$ *and* $\widehat{h}_n = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i^n h_{n+i-1}$.

Using the continuity of V *on* $(0,\infty)$ *(which follows from its convexity) and the assumptions of the theorem, we have*

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[V(\widehat{h}_n)] = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[V\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i^n h_{n+i-1}\right)\right]$$
$$\leqslant \limsup_{n\to\infty} \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i^n \cdot \mathbb{E}\left[V\left(h_{n+i-1}\right)\right] = \inf_{h\in D(\widehat{y})} \mathbb{E}[V(h)].$$

Since $\liminf\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}[V(\widehat{h}_n)] \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}[V(\widehat{h}_n)]$ *and* $\widehat{h}_n \in D(\widehat{y})$, *we obtain*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[V(\widehat{h}_n)] = \inf_{h\in D(\widehat{y})} \mathbb{E}[V(h)].$$

Noting that $V(y) \geqslant 0$, $y > 0$, *we have*

$$\mathbb{E}[V(\widehat{h})] = \mathbb{E}[\liminf_{n\to\infty} V(\widehat{h}_n)]$$
$$\leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[V(\widehat{h}_n)] = \inf_{h\in D(\widehat{y})} \mathbb{E}[V(h)],$$

arriving at (iii).

Since $v_P(y) < \infty$ *for* $y > 0$, *it follows from* (ii) *that*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{u_P^c(x)}{x} = 0.$$

Hence, (iv) *is an implication of [5, Lemma 1]. It remains to show that* $v_P(\cdot)$ *is convex. For* $0 < \lambda < 1$ *consider*

$$\lambda v_P(y_1) + (1-\lambda) v_P(y_2) = \lambda \mathbb{E}[V(\widehat{h}_1)] + (1-\lambda)\mathbb{E}[V(\widehat{h}_2)]$$
$$\geqslant \mathbb{E}[V(\lambda\widehat{h}_1 + (1-\lambda)\widehat{h}_2)]$$
$$\geqslant \inf_{h\in D(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)} \mathbb{E}[V(h)] = v_P(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2);$$

here we have used that $(\lambda\widehat{h}_1 + (1-\lambda)\widehat{h}_2) \in D(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)$. *for* $\widehat{h}_1 \in D(y_1)$ *and* $\widehat{h}_2 \in D(y_2)$. *The proof is now complete*

Theorem 3. *Assume that* $v_P(y) < \infty$ *for all* $y > 0$ *and that* (1), (4) *hold.*

Then, for any $x > 0$, *there exists an optimal strategy* $\widehat{X} \in \mathcal{X}(x)$ *such that*

$$u_P^c(x) = \mathbb{E}[U_c(\widehat{X}_T)].$$

There also exists some $\widehat{y} > 0$ *and* $\widehat{Y} \in \mathcal{Y}(\widehat{y})$ *such that*

$$v_P(\widehat{y}) = \mathbb{E}[V(\widehat{Y}_T)] \text{ and } u_P^c(x) = v_P(\widehat{y}) + x\widehat{y}.$$

Moreover, $\widehat{X}_T \in -\partial V(\widehat{Y}_T)$ *and* $\widehat{X}\widehat{Y}$ *is a martingale.*

Proof. *By Theorem 2* (iv), *for all* $x > 0$, *there exists an optimal strategy* $\widehat{X} \in \mathcal{X}(x)$ *(with* $\widehat{g} = \widehat{X}_T$*). Also from Theorem 2* (i), (iii) *there exists some* $\widehat{y} > 0$ *and* $\widehat{Y} \in \mathcal{Y}(\widehat{y})$ *(with* $\widehat{h} = \widehat{Y}_T$*) such that*

$$u_P^c(x) = \mathbb{E}[U_c(\widehat{X}_T)]$$
$$v_P(\widehat{y}) = \mathbb{E}[V(\widehat{Y}_T)]$$
$$u_P^c(x) = v_P(\widehat{y}) + x\widehat{y}.$$

By the definition of the convex conjugate V,

$$V(\widehat{h}) + \widehat{g}\widehat{h} - U_c(\widehat{g}) \geqslant 0.$$

Hence,

$$0 \leqslant \mathbb{E}[V(\widehat{h}) + \widehat{g}\widehat{h} - U_c(\widehat{g})] = v_P(\widehat{y}) + \mathbb{E}[\widehat{g}\widehat{h}] - u_P^c(x)$$
$$\overset{(3)}{\leqslant} v_P(\widehat{y}) + x\widehat{y} - u_P^c(x) = 0. \qquad (8)$$

Thus,

$$V(\widehat{h}) + \widehat{g}\widehat{h} - U_c(\widehat{g}) = 0.$$

From (2) *we have*

$$\widehat{g} \in -\partial V(\widehat{h}).$$

Equivalently,

$$\widehat{X}_T \in -\partial V(\widehat{Y}_T).$$

But (8) *implies that* $\mathbb{E}[\widehat{X}_T\widehat{Y}_T] = \mathbb{E}[\widehat{g}\widehat{h}] = x\widehat{y}$.

As a result, since $\widehat{X}\widehat{Y}$ *is a* $\mathbb{P}$*-supermartingale for all* $X \in \mathcal{X}(x)$, *we have*

$$\mathbb{E}[\widehat{X}_T\widehat{Y}_T|\mathcal{F}_s] \leqslant \widehat{X}_s\widehat{Y}_s, s \leqslant T.$$

This leads to

$$\mathbb{E}[\widehat{X}_T\widehat{Y}_T] \leqslant \mathbb{E}[\widehat{X}_s\widehat{Y}_s] \leqslant \widehat{X}_0\widehat{Y}_0 = x\widehat{y}.$$

Consequently, all the above inequalities turn to equalities, and for all $0 \leqslant s \leqslant T$ *it holds that*

$$\mathbb{E}[\widehat{X}_s\widehat{Y}_s] = \widehat{X}_0\widehat{Y}_0 = x\widehat{y}. \tag{9}$$

Assume that there exists $A \in \mathcal{F}$ *such that* $\mathbb{P}(A) > 0$ *and* $\mathbb{E}[\widehat{X}_t\widehat{Y}_t|\mathcal{F}_s] < \widehat{X}_s\widehat{Y}_s$ *on* A *for some* $0 \leqslant s \leqslant t$ *. Then we get* $\mathbb{E}[\widehat{X}_t\widehat{Y}_t] < \mathbb{E}[\widehat{X}_s\widehat{Y}_s]$*, which contradicts* (9)*. Therefore,* $\mathbb{E}[\widehat{X}_t\widehat{Y}_t|\mathcal{F}_s] = \widehat{X}_s\widehat{Y}_s$ $\mathbb{P}-a.s.$*, for all* $0 \leqslant s \leqslant t$*.*

3.3 Optimal investments for the robust concavified utility functional problem

In this section we are going to present the optimal investment strategies for the problem of maximization the robust concavified utility function, i.e. $\sup\limits_{X\in\mathcal{X}(x)} \inf\limits_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q[U_c(X_T)]$.

For a strictly increasing, strictly concave, continuously differentiable utility function, defined on the domain $(0,\infty)$ and satisfying the Inada conditions, this problem was solved by authors of [3] in general incomplete market. The concavified utility function U_c does not satisfy these assumptions. However, U_c is strictly increasing, concave, continuously differentiable on the $(0,\infty)$ and satisfies the Inada conditions in the ∞.

Moreover, we will assume that (4) holds, and, hence, $V(y) \geqslant 0$ and $V_n(y) = \sup\limits_{0<x\leqslant n} (U_c(x) - xy) \geqslant 0$ for all $y > 0$.

In this section we will often use the results of the [3], so we present the notation that they used.

Consider first the sets

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_Q(y) = \{&Y \geqslant 0 | Y_0 = y \text{ and } XY \text{ is a}\\ &Q - \text{supermartingale for all } X \in \mathcal{X}(1)\}\\ D_Q(y) = \{&h \in L^0_+(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}) | 0 \leqslant h \leqslant Y_T\\ &\text{for some } Y \in \mathcal{Y}_Q(y)\}\end{aligned}$$

Noting [3, Lemma 3.4]

$$u^c(x) = \inf_{Q\in\mathcal{Q}_e} u^c_Q(x). \tag{10}$$

Denote the dual value function v_Q by

$$v_Q(y) := \inf_{Y\in\mathcal{Y}_Q(y)} E_Q[V(Y_T)].$$

It is easy to see that $v_Q(y) = \inf\limits_{h\in D_Q(y)} E_Q[V(h)]$.

The dual value function of the robust problem defined by

$$v(y) := \inf_{Q\in\mathcal{Q}_e} v_Q(y).$$

Assume that for all $Q \in \mathcal{Q}_e$,

$$u^c_Q(x) < \infty \text{ for some } x > 0. \tag{11}$$

Theorem 4. *Let* $Q \in \mathcal{Q}_e$ *and assume that* (11) *and* (4) *hold.*

Then, for any $x_0 > 0$*, there exist some* $\widehat{g} \in C(x_0)$*,* $\widehat{y} > 0$ *and* $\widehat{h} \in D_Q(\widehat{y})$ *such that*

(i) $u^c_Q(x_0) = v_Q(\widehat{y}) + x_0\widehat{y}$,

(ii) $u^c_Q(x_0) = \inf\limits_{y>0}(v_Q(y) + x_0 y)$

If in addition $v_Q(y) < \infty$ *for all* $y > 0$*, then*

(iii) $v_Q(\widehat{y}) = E_Q[V(\widehat{h})]$,

(iv) $u^c_Q(x_0) = E_Q[U_c(\widehat{g})]$.

Moreover, $v_Q(\cdot)$ *is convex.*

Proof. *The proof is similar to the proof of Theorem 2.*

Now we are going to present a similar theorem, but for the robust problem. To ensure that the dual value function is finite, we introduce the following assumption:

$$v_Q(y) < \infty \text{ for all } Q \in \mathcal{Q}_e \text{ and all } y > 0. \tag{12}$$

Theorem 5. *Suppose that Assumption 3.1,* (11) (4) *and* (12) *hold. Additionally, assume that* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{u^c_Q(x)}{x} = 0$*, for each* $Q \in \mathcal{Q}_e$*.*

Then, for any $x_0 > 0$*, there exist some* $\widehat{Q} \in \mathcal{Q}_e$*,* $\widehat{y} > 0$ *and* $\widehat{h} \in D_{\widehat{Q}}(\widehat{y})$ *such that*

(i) $u^c(x_0) = u^c_{\widehat{Q}}(x_0)$,

(ii) $u^c(x_0) = \inf\limits_{y>0}(v(y) + x_0 y)$,

(iii) $u^c(x_0) = v(\widehat{y}) + x_0\widehat{y}$,

(iv) $v(\widehat{y}) = v_{\widehat{Q}}(\widehat{y}) = E_{\widehat{Q}}[V(\widehat{h})]$.

Proof. *The proof of* (i) *follows from [3, Lemma 3.4].*

Note that $\widehat{Z}$, *which is the density corresponding to* $\widehat{Q}$, *is an almost sure limit of a sequence* $Z_n \in \mathcal{Z}_e$ *and also that* $u^c_{Q_n}(x_0) \to u^c(x_0)$ *(see [3, Lemma 4.1 (a)]). Moreover, it follows from the first part of the proof of [3, Lemma 4.1 (a)] that*

$$u^{c\prime}(x_0^+) \leqslant \liminf_{n\to\infty} u^{c\prime}_{Q_n}(x_0^+) \leqslant \limsup_{n\to\infty} u^{c\prime}_{Q_n}(x_0^-) \leqslant u^{c\prime}(x_0^-). \tag{13}$$

From Theorem 4 (ii) *we deduce that for all* $Q \in Q_e$ *and* $y > 0$,

$$u^c_Q(x_0) \leqslant v_Q(y) + x_0 y.$$

Consequently,

$$\inf_{Q\in\mathcal{Q}_e} u^c_Q(x_0) \leqslant \inf_{Q\in\mathcal{Q}_e} (v_Q(y) + x_0 y).$$

Hence, it follows from the (10) *and definition of the dual value function for robust problem that*

$$u^c(x_0) \leqslant v(y) + x_0 y.$$

Since $y > 0$ *is arbitrary, we have*

$$u^c(x_0) \leqslant \inf_{y>0}(v(y) + x_0 y). \tag{14}$$

To prove the opposite inequality, consider sequence Q_n *(or, equivalently,* Z_n*) from the first part of the proof, and write*

$$u^c(x_0) = \lim_{n\to\infty} u^c_{Q_n}(x_0).$$

From the Theorem 4 (i) *it follows that for each* Q_n *there exists* $\widehat{y}_n \in [u^{c\prime}_{Q_n}(x_0^+), u^{c\prime}_{Q_n}(x_0^-)]$ *such that*

$$u^c_{Q_n}(x_0) = v_{Q_n}(\widehat{y}_n) + x_0\widehat{y}_n.$$

Passing, if necessary, to a subsequence, we can assume that sequence $(\widehat{y}_n)$ *converges to some* $\widehat{y} \in [u^{c\prime}(x_0^+), u^{c\prime}(x_0^-)]$, *due to* (13). *Since* u^c *is strictly increasing, we have* $\widehat{y} > 0$. *Therefore,*

$$\begin{aligned} u^c(x_0) &= \lim_{n\to\infty} u^c_{Q_n}(x_0) = \lim_{n\to\infty} (v_{Q_n}(\widehat{y}_n) + x_0\widehat{y}_n) \\ &\geqslant \limsup_{n\to\infty} (v(\widehat{y}_n) + x_0\widehat{y}_n) \geqslant \inf_{y>0}(v(y) + x_0 y). \end{aligned} \tag{15}$$

In view of (14), *we obtain* (ii).

In order to prove (iii), *we will use the results of the [3]. Thanks to* (4), $V(y) \geqslant 0$ *and* $V_n(y) \geqslant 0$. *Due to assumption* (12), *we have* $v(y) < \infty$. *Hence, it follows from the [3, Lemma 3.7] that* $v(y)$ *is convex, thus it is continuous on* $(0, \infty)$. *Since* $\widehat{y}_n$ *converges almost surely to* $\widehat{y} > 0$, *we derive from* (15) *that*

$$u^c(x_0) = \lim_{n\to\infty} (v(\widehat{y}_n) + x_0\widehat{y}_n) = v(\widehat{y}) + x_0\widehat{y}. \tag{16}$$

Thus, it remains to show (iv). *Combining* (15) *and* (16), *we get*

$$\lim_{n\to\infty} v_{Q_n}(\widehat{y}_n) = v(\widehat{y}).$$

Theorem 4 (iii) *yields for each* $n \in \mathbb{N}$ *the existence of* $h'_n \in D_{Q_n}(\widehat{y}_n)$ *such that*

$$v_{Q_n}(\widehat{y}_n) = E_{Q_n}[V(h'_n)].$$

This is equivalent to the existence of $h_n \in D(\widehat{y}_n)$ *such that*

$$v_{Q_n}(\widehat{y}_n) = \mathbb{E}\left[Z_n V\left(\frac{h_n}{Z_n}\right)\right],$$

where $Z_n \in \mathcal{Z}_e$ *are the densities which correspond to the measures* Q_n.

Due to the Kolmos-type argument, see [2, Lemma A1.1], there exists a sequence $(\widetilde{h}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in conv(h_n, h_{n+1}, \dots)$ *such that* $\widetilde{h}_n$ *converges* $\mathbb{P}$*-a.s. to some* $\widetilde{h}$.

Now we will show that $\widetilde{h} \in D(\widehat{y})$. *For each* $n \in \mathbb{N}$, *there is a sequence of* $\alpha^n_i \in [0,1]$ *such that* $\sum\limits_i \alpha^n_i = 1$ *and* $\widetilde{h}_n = \sum\limits_i \alpha^n_i h_{n+i-1}$. *Recalling* (3), *we obtain that*

$$h_n \geqslant 0 \text{ and } \sup_{g\in C(x)} \mathbb{E}[h_n g] \leqslant x\widehat{y}_n. \tag{17}$$

Now for all $g \in C(x)$ *we have*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\widetilde{h}g] = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} \sum_i \alpha^n_i h_{n+i-1} g] &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \sum_i \alpha^n_i \mathbb{E}[h_{n+i-1}g] \\ &\overset{(17)}{\leqslant} \liminf_{n\to\infty} \sum_i \alpha^n_i x\widehat{y}_{n+i-1} \\ &= x \liminf_{n\to\infty} \sum_i \alpha^n_i \widehat{y}_{n+i-1} = x \lim_{n\to\infty} \widehat{y}_n = x\widehat{y} \end{aligned}$$

Therefore, since $\widetilde{h} \geqslant 0$, *it follows from* (3) *that* $\widetilde{h} \in D(\widehat{y})$. *Hence, it follows from the proof of [3, Lemma 3.7] that*

$$v(\widehat{y}) = \mathbb{E}\left[\widehat{Z} V\left(\frac{\widetilde{h}}{\widehat{Z}}\right)\right].$$

This is equivalent to

$$v(\widehat{y}) = \mathbb{E}[\widehat{Z}V(\widehat{h})] = E_{\widehat{Q}}[V(\widehat{h})], \tag{18}$$

for $\widehat{h} \in D_{\widehat{Q}}(\widehat{y})$.

From the definitions we have

$$v(\widehat{y}) \leqslant v_{\widehat{Q}}(\widehat{y}) \leqslant E_{\widehat{Q}}[V(\widehat{h})],$$

for $\widehat{Q} \in \mathcal{Q}_e, \widehat{y} > 0$ *and* $\widehat{h} \in D_{\widehat{Q}}(\widehat{y})$.

Thus, in view of (18)*, we arrive at* (iv).

Theorem 6. *Suppose that all assumptions of Theorem 5 hold.*

Then, for any $x > 0$*, there exist some* $\widehat{X} \in \mathcal{X}(x)$ *and* $\widehat{Q} \in \mathcal{Q}_e$ *such that*

$$u^c(x) = \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[U_c(\widehat{X}_T)] = E_{\widehat{Q}}[U_c(\widehat{X}_T)] = u^c_{\widehat{Q}}(x) \tag{19}$$

There also exist some $\widehat{y} > 0$ *and* $\widehat{Y} \in \mathcal{Y}_{\widehat{Q}}(\widehat{y})$ *such that*

$$v(\widehat{y}) = E_{\widehat{Q}}[V(\widehat{Y}_T)] \text{ and } u^c(x) = v(\widehat{y}) + x\widehat{y}. \tag{20}$$

Moreover, $\widehat{X}_T \in -\partial V(\widehat{Y}_T)$*. Also,* $\widehat{X}\widehat{Y}$ *is a* $\widehat{Q}$*-martingale.*

Proof. *The equalities* (19) *follow from [3, Theorem 2.6 and Lemma 4.1 (a)] for* $\widehat{X}_T = \widehat{g}$*, while* (20) *follows from Theorem 5, with* $x_0 = x$ *and* $\widehat{Y}_T = \widehat{h}$.

To prove the remaining statements, consider, as in [3, proof of Theorem 2.6], $V(\widehat{h}) + \widehat{g}\widehat{h} - U_c(\widehat{g})$*. From the definition of* V*, we have that*

$$V(\widehat{h}) + \widehat{g}\widehat{h} - U_c(\widehat{g}) \geqslant 0. \tag{21}$$

Since $\widehat{h} \in D_{\widehat{Q}}(\widehat{y})$*, we have that for* $\widetilde{h} = \widehat{h}\widehat{Z} \in D(\widehat{y})$ *the following holds*

$$E_{\widehat{Q}}[\widehat{g}\widehat{h}] = \mathbb{E}\left[\widehat{g}\widetilde{h}\mathbb{I}_{\{\widehat{Z}>0\}}\right].$$

Hence,

$$\begin{aligned} E_{\widehat{Q}}[V(\widehat{h}) + \widehat{g}\widehat{h} - U_c(\widehat{g})] &= v(\widehat{y}) + \mathbb{E}\left[\widehat{g}\widetilde{h}\mathbb{I}_{\{\widehat{Z}>0\}}\right] - u^c(x) \\ &\overset{(3)}{\leqslant} v(\widehat{y}) + x\widehat{y} - u^c(x) = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

Thus, noting (21) *we have that* $V(\widehat{h}) + \widehat{g}\widehat{h} - U_c(\widehat{g}) = 0$*. From* (2) *we get*

$$\widehat{g} \in -\partial V(\widehat{h}),$$

equivalently,

$$\widehat{X}_T \in -\partial V(\widehat{Y}_T).$$

Observe that (22) *implies* $E_{\widehat{Q}}[\widehat{X}_T\widehat{Y}_T] = E_{\widehat{Q}}[\widehat{g}\widehat{h}] = x\widehat{y}$*. Hence, the proof of fact that* $\widehat{X}\widehat{Y}$ *is a* $\widehat{Q}$*-martingale is similar to the proof of Theorem 3.*

3.4 Optimal investments for the problem of maximization the non-concave utility functional

The goal of this section is to present assumptions, under which the solution to the problem of maximization of the concavified utility function will be also the solution to the problem of maximization of the non-concave utility function. To this end, we will use the result of [1, Lemma 5.7].

The following theorem works for both the standard utility maximization problem as well as for the robust utility maximization problem.

Theorem 7. *Suppose that Assumptions 3.1 and Assumption 5.1 hold.*

Additionally, assume that the optimal solution $g^\star$ *for concavified problem (either standard:* $\sup_{g \in C(x)} \mathbb{E}[U_c(g)]$ *or robust:* $\sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[U_c(g)]$*) is such that* $g^\star \in -\partial V(\lambda Z)$*, where* $Z \in \mathcal{Z}$ *has a continuous distribution.*

Then, $g^\star$ *is also an optimal solution for the corresponding non-concave problem.*

Proof. *For the standard utility maximization problem, the proof is the same as for the [1, Lemma 5.7].*

To prove the theorem for the robust utility maximization problem, note that it follows from the [1, Lemma 5.7] that under assumptions of the theorem $\mathbb{P}[g^\star \in \{U < U_c\}] = 0$.

Thus,

$$\inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g^\star)] = \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U(g^\star)]. \tag{23}$$

Since $g^\star$ *is an optimal solution for the concavified problem, we get*

$$\sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[U_c(g)] = \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[U_c(g^\star)].$$

Noting that $\mathcal{Q}_e \subseteq \mathcal{Q}$*, we have that*

$$\begin{aligned} \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[U_c(g)] = \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[U_c(g^\star)] &\leqslant \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g^\star)] \\ &\overset{(23)}{=} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U(g^\star)] \leqslant \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U(g)]. \end{aligned} \tag{24}$$

From [3, Proof of Lemma 3.4] and the fact that $U \leqslant U_c$*, we obtain that*

$$\begin{aligned} \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[U_c(g)] &\geqslant \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[U(g)] \\ &= \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U(g)]. \end{aligned}$$

Thus, all inequalities in (24) *are equalities. Hence, the argument of [3, Lemma 3.4] yields*

$$\sup_{g\in C(x)} \inf_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q[U(g)] = \inf_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q[U(g^\star)],$$

which concludes the proof.

4 Conclusions

In this paper, we proved the existence of the optimal investment strategies for standard as well as the robust maximization problem in incomplete market model. We considered the concavified utility function, which is not necessarily strictly concave. Also we presented assumptions under which the optimal investments for concavified problems are the optimal investments for non-concave utility function, to which this concavification corresponds.

In the future, it will be really helpful to study further the optimal investments in incomplete market for non-concave utility functions.

Список використаних джерел

1. *Reichlin, Christian Rochus August*: "Utility Maximization with a Given Pricing Measure When the Utility Is Not Necessarily Concave"; Mathematics and Financial Economics, Volume 7, Issue 4, pp 531-556, 2013

2. *Delbaen, F., Schachermayer, W.* A general version of the fundamental theorem of asset pricing. Math. Ann. 300 (1994), no. 3, 463-520.

3. *Schied, Alexander; Wu, Ching-Tang.* Duality theory for optimal investments under model uncertainty.

4. *Kramkov, D., Schachermayer, W.* The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets. Ann. Appl. Probab. 9, no. 3, 904-950 (1999).

5. *Kramkov, D., Schachermayer, W.* Necessary and sufficient conditions in the problem of optimal investment in incomplete markets. Ann. Appl. Probab., Vol. 13, no. 4 (2003).

References

1. Reichlin, Christian Rochus August: "Utility Maximization with a Given Pricing Measure When the Utility Is Not Necessarily Concave"; Mathematics and Financial Economics, Volume 7, Issue 4, pp 531-556, 2013

2. Delbaen, F., Schachermayer, W. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. Math. Ann. 300 (1994), no. 3, 463-520.

3. Schied, Alexander; Wu, Ching-Tang. Duality theory for optimal investments under model uncertainty.

4. Kramkov, D., Schachermayer, W. The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets. Ann. Appl. Probab. 9, no. 3, 904-950 (1999).

5. Kramkov, D., Schachermayer, W. Necessary and sufficient conditions in the problem of optimal investment in incomplete markets. Ann. Appl. Probab., Vol. 13, no. 4 (2003).

Received: 29.07.2021

УДК 519.21 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/2.3

О.І. Василик[1], *д.ф.-м.н., доцент*
І.В. Розора[2], *д.ф.-м.н., доцент*
Т.О. Яневич[3], *к.ф.-м.н., доцент*
І.І. Ловицька[4], *студ.*

Про один з методів побудови моделі строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху

[1]Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", 03056, Київ, проспект Перемоги, 37, e-mail: vasylyk@matan.kpi.ua

[2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64. e-mail: irozora@knu.ua

[3]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64. e-mail: yakovenkot@gmail.com

[4]Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", 03056, Київ, проспект Перемоги, 37, e-mail: pasko97ira@gmail.com

O.I. Vasylyk[1], *Dr.Sc., Associate Professor*
I.V. Rozora[2], *Dr.Sc., Associate Professor*
T.O. Ianevych[3], *PhD, Associate Professor*
I.I. Lovytska[4], *stud.*

On some method on model construction for strictly φ-sub-Gaussian generalized fractional Brownian motion

[1]National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", 37, Prosp. Peremohy, Kyiv, Ukraine, 03056, e-mail: vasylyk@matan.kpi.ua

[2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st. e-mail: irozora@knu.ua

[3]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st. e-mail: yakovenkot@gmail.com

[4]National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", 37, Prosp. Peremohy, Kyiv, Ukraine, 03056, e-mail: pasko97ira@gmail.com

У роботі розглядається задача моделювання процесів строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху. Отримано умови, за яких модель на основі розкладу в ряд наближає процес строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $C([0;1])$ у випадку, коли $\varphi(x) = \exp\{|x|\} - |x| - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Визначено параметри моделей та змодельовано траєкторії відповідних процесів для різних індексів Хюрста H і заданих значень точності та надійності у програмному середовищі R.

Результати дослідження доповідались на Міжнародній науковій конференції "Modern Stochastics: Theory and Applications. V" (MSTA-V).

Ключові слова: φ-субгауссові процеси, дробовий броунівський рух, моделювання випадкових процесів, точність і надійність моделювання.

In the paper, we consider the problem of simulation of a strictly φ-sub-Gaussian generalized fractional Brownian motion. Simulation of random processes and fields is used in many areas of natural and social sciences. A special place is occupied by methods of simulation of the Wiener process and fractional Brownian motion, as these processes are widely used in financial and actuarial mathematics, queueing theory etc. We study some specific class of processes of generalized fractional Brownian motion and derive conditions, under which the model based on a series representation approximates a strictly φ-sub-Gaussian generalized fractional Brownian motion with given reliability and accuracy in the space $C([0;1])$ in the case, when $\varphi(x) = \exp\{|x|\} - |x| - 1$, $x \in \mathbb{R}$. In order to obtain these results, we use some results from the theory of φ-sub-Gaussian random processes. Necessary simulation parameters are calculated and models of sample pathes of corresponding processes are constructed for various values of the Hurst parameter H and for given reliability and accuracy using the R programming environment.

Key Words: φ-sub-Gaussian processes, fractional Brownian motion, simulation of stochastic processes, accuracy and reliability of simulation.

Статтю представив д.ф.-м.н. Пашко А.О.

This work has been partially supported by Ministry of Education and Science of Ukraine: Grant of the

© О.І. Василик, І.В. Розора, Т.О. Яневич, І.І. Ловицька, 2021.

Ministry of Education and Science of Ukraine for perspective development of a scientific direction "Mathematical sciences and natural sciences" at Taras Shevchenko National University of Kyiv.

Вступ

Методи моделювання випадкових процесів та полів використовуються в багатьох областях природничих та соціальних наук. Стохастичне моделювання активно розвивається, починаючи з другої половини 20-го століття. Особливе місце займають методи і алгоритми моделювання вінерівського процесу та процесів дробового броунівського руху. Численні дослідження показують, що дані спостережень у теорії масового обслуговування, дослідженнях телекомунікаційних мереж, фінансовій математиці ефективно описуються процесами, які мають властивості самоподібності та сильної залежності від минулого. Якраз одним із таких процесів є процес дробового броунівського руху. Але для моделювання реальних випадкових процесів є сенс розглядати не тільки класичний гауссовий дробовий броунівський рух, а і його узагальнення, зокрема, процеси φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху.

У 1985 році Ю. Козаченко та Є. Островський [8] розглянули простори $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ випадкових величин, де φ є N-функцією Орліча. Простори $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$, або простори φ-субгауссових випадкових величин, – це простори центрованих випадкових величин з певними експоненціальними моментами. Клас φ-субгауссових випадкових процесів є більш широким, ніж клас субгауссових процесів, тому дає можливість краще моделювати реальні випадкові процеси.

В. Булдигін та Ю. Козаченко досліджували деякі властивості сум випадкових величин і процесів з просторів $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ [1]. Подальший розвиток теорія φ-субгауссових випадкових процесів отримала у роботах Ю. Козаченка та його учнів, наприклад, у монографії [7]. До класу φ-субгауссових випадкових процесів належать, зокрема, процеси дробового броунівського руху, а це означає, що до них можна застосувати отримані для φ-субгауссових процесів теоретичні результати.

Результати щодо застосування дробового броунівського руху в таких прикладних галузях, як теорія телекомунікаційних мереж та фінансова математика, можна знайти у працях І. Норроса, А. Ширяєва, Ю. Мішури, А. Свіщука, Т. Соттінена та ін.

Робота складається зі вступу та трьох розділів. У першому розділі наведено необхідні означення і властивості з теорії φ-субгауссових випадкових величин і процесів. Другий розділ присвячено моделюванню процесів узагальненого дробового броунівського руху. В ньому наведено означення моделі, загальну теорему про моделювання строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху, доведену в роботі [4], та основну теорему цієї роботи. Отримана нова теорема містить умови, за яких модель буде наближати процес строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $C([0;1])$ у випадку, коли $\varphi(x) = \exp\{|x|\} - |x| - 1$, $x \in \mathbb{R}$. У третьому розділі наведено параметри моделей для заданих значень індекса Хюрста H, точності $\delta > 0$ та надійності $1-\nu$, $\nu \in (0;1)$, і представлено реалізації моделей траєкторій таких процесів в програмному середовищі R.

Аналогчні результати отримано в роботі [9] у випадку, коли$\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $|x| \geq 1$, $p > 1$.

1 Необхідні відомості

У цьому розділі наведено необхідні означення та властивості з теорії φ-субгауссових випадкових величин і процесів [1, 3, 7].

Означення 1.1. Неперервна парна опукла функція $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається *N-функцією Орліча*, якщо $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) > 0$ при $x \neq 0$, $\frac{\varphi(x)}{x} \to 0$ при $x \to 0$ та $\frac{\varphi(x)}{x} \to \infty$ при $x \to \infty$.

Означення 1.2. Нехай $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ — деяка N-функція Орліча. Функція φ^* така, що $\varphi^*(x) := \sup_{y\in\mathbb{R}} (xy - \varphi(y))$, $x \geq 0$, називається перетворенням Юнга – Фенхеля функції φ.

Умова Q. Для N-функції φ виконується *умова Q*, якщо $\liminf\limits_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = C > 0$. Можливо, що $C = +\infty$.

У книзі [6] міститься детальна інформація щодо N-функцій Орліча та їх властивостей.

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – стандартний імовірнісний простір.

Означення 1.3. Нехай φ — N-функція Орліча, для якої виконується умова Q. Випадкова величина ξ належить простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ (простору φ-субгауссових випадкових величин), якщо $\mathsf{E}\xi = 0$, $\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\}$ існує для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ та існує така стала $a > 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\mathsf{E}\exp(\lambda\xi) \le \exp(\varphi(a\lambda)).$$

Теорема 1.1. [1] *Простір* $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ *є простором Банаха з нормою*

$$\tau_\varphi(\xi) = \sup_{\lambda\neq 0} \frac{\varphi^{-1}(\ln \mathsf{E}\exp(\lambda\xi))}{|\lambda|}$$

та для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ *виконуються нерівності*

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\exp(\lambda\xi) &\le \exp(\varphi(\lambda\tau_\varphi(\xi))), \qquad (1.1)\\ (\mathsf{E}\xi^2)^{\frac{1}{2}} &\le C\tau_\varphi(\xi), \end{aligned}$$

де $C > 0$ *— деяка стала.*

Означення 1.4. Випадковий процес $X = (X(t), t \in T)$ є φ-субгауссовим (тобто, належить простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$), якщо для всіх $t \in T$ випадкові величини $X(t) \in \mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$.

Якщо $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, то такий процес називається субгауссовим.

Приклад 1.1. Центрований гауссовий випадковий процес є субгауссовим.

Означення 1.5. Сім'я Δ випадкових величин із простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ називається строго φ-субгауссовою (позначається як $\Delta \in \mathrm{SSub}_\varphi(\Omega)$), якщо існує стала $C_\Delta > 0$ така, що для будь-якої зліченної множини I, $\xi_i \in \Delta$, $i \in I$, та для довільних $\lambda_i \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\tau_\varphi\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right) \le C_\Delta\left(\mathsf{E}\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (1.2)$$

Стала C_Δ називається визначальною сталою сім'ї Δ.

Означення 1.6. Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ називається строго φ-субгауссовим (тобто, $X \in \mathrm{SSub}_\varphi(\Omega)$), якщо сім'я випадкових величин $\{X(t), t \in T\}$ є строго φ-субгауссовою. Визначальна стала цієї сім'ї називається визначальною сталою процесу X та позначається C_X.

Приклад 1.2. [7] Нехай $X(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k\varphi_k(t)$, $t \in T$, де сім'я випадкових величин $\{\xi_k, k = 1, \infty\}$ є строго φ-субгауссовою з визначальною сталою C_ξ та ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k\varphi_k(t)$ збігається в середньому квадратичному. Тоді випадковий процес $X(t)$ є строго φ-субгауссовим випадковим процесом з визначальною сталою $C_X = C_\xi$.

2 Моделювання φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху

2.1 Узагальнений дробовий броунівський рух

Нехай $\{B_H(t), t \in [0,1]\}$ – це дробовий броунівський рух з індексом Хюрста $H \in (0,1)$. Це означає, що $B_H(t)$ є центрованим гауссовим випадковим процесом зі стаціонарними приростами і коваріаційною функцією

$$\mathsf{E}B_H(s)B_H(t) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |s-t|^{2H}).$$

Нехай $T = [a,b], 0 \le a < b < \infty$, або $T = \mathbb{R}^+$.

Означення 2.1. [4, 7] Будемо називати випадковий процес $Z_H = \{Z_H(t), t \in T\}$ узагальненим дробовим броунівським рухом (УДБР) з індексом Хюрста $H \in (0,1)$, якщо $\mathsf{E}Z_H(t) = 0$ та

$$R_H(t,s) = \mathsf{E}Z_H(s)Z_H(t) = \frac{1}{2}(t^{2H}+s^{2H}-|s-t|^{2H}).$$

Означення 2.2. [4, 7] Будемо називати випадковий процес $Z_H = \{Z_H(t),\ t \in T\}$ строго φ-субгауссовим узагальненим дробовим броунівським рухом (φ-УДБР) з індексом Хюрста $H \in (0,1)$, якщо Z_H з означення 2.1 є строго φ-субгауссовим.

У роботі [2] доведено, що дробовий броунівський рух $B_H(t)$ можна подати в наступному вигляді:

$$B_H(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x_n t}{x_n}X_n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos y_n t}{y_n}Y_n, \qquad (2.1)$$

де ряди в (2.1) збігаються в середньому квадратичному, $\{X_n, n = 1,2,\ldots\}$ та $\{Y_n, n = 1,2,\ldots\}$ – незалежні гауссові випадкові величини такі,

що $\mathsf{E}X_n = \mathsf{E}Y_n = 0$,

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}\, X_n &= 2C_H^2 x_n^{-2H} J_{1-H}^{-2}(x_n),\\ \mathbf{Var}\, Y_n &= 2C_H^2 y_n^{-2H} J_{-H}^{-2}(y_n),\\ C_H^2 &= \pi^{-1}\Gamma(1+2H)\sin(\pi H),\end{aligned}$$

$x_1 < x_2 < \ldots$, – додатні дійсні нулі функції Бесселя першого роду J_{-H}, а $y_1 < y_2 < \ldots$, – додатні дійсні нулі функції J_{1-H}.

У роботах [4, 7] показано, що зображення (2.1) можна переписати в такому вигляді:

$$B_H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{X}_n c_n^H \sin x_n t + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{Y}_n d_n^H (1-\cos y_n t),$$

де $\{\tilde{X}_n, n = 1,2,\ldots\}$ та $\{\tilde{Y}_n, n = 1,2,\ldots\}$ – незалежні гауссові центровані випадкові величини, такі що $\mathsf{E}\tilde{X}_n^2 = \mathsf{E}\tilde{Y}_n^2 = 1$,

$$c_n^H = \sqrt{2} C_H x_n^{-(H+1)} J_{1-H}^{-1}(x_n), \quad n = 1,2,\ldots, \tag{2.2}$$

$$d_n^H = \sqrt{2} C_H y_n^{-(H+1)} J_{-H}^{-1}(y_n), \quad n = 1,2,\ldots, \tag{2.3}$$

$$C_H^2 = \pi^{-1}\Gamma(1+2H)\sin(\pi H).$$

Ю.В. Козаченко, О.І. Василик та Т. Сottінен [4, 7] запропонували узагальнити даний розклад на випадок негауссових випадкових процесів, а саме розглянули такий ряд:

$$\tilde{Z}_H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n c_n^H \sin x_n t + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n d_n^H (1-\cos y_n t), \tag{2.4}$$

де $t \in [0,1]$, ξ_n, η_n – незалежні центровані випадкові величини такі, що $\mathsf{E}\xi_n^2 = \mathsf{E}\eta_n^2 = 1, n = 1,2,\ldots$. Вони довели наступні твердження.

Твердження 2.1. *[4, 7] Ряди в (2.4) збігаються в середньому квадратичному, та коваріаційна функція процесу $\tilde{Z}_H$ має вигляд:*

$$\mathsf{E}\tilde{Z}_H(s)\tilde{Z}_H(t) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |s-t|^{2H}).$$

Твердження 2.2. *[4] Ряди в (2.4) рівномірно збігаються з ймовірністю одиниця до процесу $\tilde{Z}_H(t)$ та процес $\tilde{Z}_H(t)$ є вибірково неперервним на $[0,1]$ з ймовірністю одиниця.*

2.2 Моделювання узагальненого дробового броунівського руху

У роботах [4, 5, 7] запропоновано алгоритм моделювання процесів строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $C([0;1])$ на основі розкладу в ряд:

$$Z_t = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(x_n t)\,\xi_n \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} d_n\big(1-\cos(y_n t)\big)\,\eta_n, \tag{2.5}$$

$t \in [0;1]$, де

$$\begin{aligned}c_n &= \frac{\pi^H\sqrt{2c}}{x_n^{H+1} J_{1-H}(x_n)}, \qquad n = 1,2,\ldots,\\ d_n &= \frac{\pi^H\sqrt{2c}}{y_n^{H+1} J_{-H}(y_n)}, \qquad n = 1,2,\ldots,\\ c &= \frac{\Gamma(2H+1)\sin(\pi H)}{\pi^{2H+1}}.\end{aligned}$$

ξ_n, η_n, $n = 1,2,\ldots,$ – незалежні однаково розподілені випадкові величини з простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$, $\mathsf{E}\xi_n^2 = \mathsf{E}\eta_n^2 = 1$, $n = 1,2,\ldots$. Тут і далі припускається, що функція $\varphi(\sqrt{\cdot})$ опукла.

З Твердження 2.1 та Прикладу 1.2 випливає, що випадковий процес Z виду (2.5) є строго φ-субгауссовим узагальненим дробовим броунівським рухом.

Означення 2.3. [7] Модель $\tilde{Z}$ наближає процес Z із заданими надійністю $1-\nu$, $0 < \nu < 1$, та точністю $\delta > 0$ в $C([0,1])$, якщо

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]} |Z_t - \tilde{Z}_t| > \delta\right) \le \nu.$$

Природною моделлю для процесу Z, є така сума $\sum\limits_{n=1}^{N}\big(c_n\sin(x_n t)\,\xi_n + d_n\big(1-\cos(y_n t)\big)\,\eta_n\big)$. Але більш реальним є припущення про те, що сталі c_n та d_n, а також нулі x_n, y_n обчислюються тільки приблизно. Зауважимо, що сталі c_n та d_n залежать від значень нулів відповідних функцій Бесселя [4, 7].

Позначимо через $\tilde{c}_n$ та $\tilde{d}_n$ наближені значення c_n та d_n, відповідно. Нехай

$$|\tilde{c}_n - c_n| \le \gamma_n^c, \quad |\tilde{d}_n - d_n| \le \gamma_n^d,$$

$n = 1,\ldots,N$. Похибки γ_n^c та γ_n^d вважаються відомими. Нехай $\tilde{x}_n$ та $\tilde{y}_n$ – наближені значення відповідних нулів x_n та y_n з похибками

$$|\tilde{x}_n - x_n| \le \gamma_n^x, \quad |\tilde{y}_n - y_n| \le \gamma_n^y.$$

Похибки γ_n^x та γ_n^y теж вважаються відомими.

Тоді модель процесу Z матиме вигляд

$$\tilde{Z}_t = \sum_{n=1}^{N} \Big(\tilde{c}_n \sin(\tilde{x}_n t)\, \xi_n \ + \ \tilde{d}_n \big(1 - \cos(\tilde{y}_n t)\big)\, \eta_n \Big). \tag{2.6}$$

А похибка моделювання дорівнює

$$\begin{aligned}\Delta_t &:= Z_t - \tilde{Z}_t \\ &= \sum_{n=1}^{N} \Big\{ \Big(c_n \sin(x_n t) - \tilde{c}_n \sin(\tilde{x}_n t) \Big)\, \xi_n \\ &\quad + \Big(d_n \big(1 - \cos(y_n t)\big) - \tilde{d}_n \big(1 - \cos(\tilde{y}_n t)\big) \Big)\, \eta_n \Big\} \\ &\quad + \sum_{n=N+1}^{\infty} \Big\{ c_n \sin(x_n t)\, \xi_n \ + \ d_n \big(1 - \cos(y_n t)\big) \eta_n \Big\}.\end{aligned}$$

Для того, щоб оцінити Δ в $C([0,1])$, потрібно було знайти оцінки для $\tau_\varphi(\Delta_t)$ та $\tau_\varphi(\Delta_t - \Delta_s)$ для всіх $s,t \in [0,1]$. [4, 7]

На основі отриманих оцінок для похибки моделювання та з використанням відповідних оцінок розподілів супремумів φ-субгауссових випадкових процесів було сформульовано загальну теорему про моделювання φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $C([0;1])$ (див. [4, 7]).

Теорема 2.1. *[4, 7] Нехай b та α такі числа, що $0 < b < \alpha < H$. Модель $\tilde{Z}$, визначена в (2.6), наближає випадковий процес Z, визначений за допомогою (2.5), із заданими надійністю $1-\nu$, $0 < \nu < 1$, та точністю $\delta > 0$ в $C([0,1])$, якщо виконуються такі три нерівності:*

$$\begin{aligned}&\gamma_0 < \delta, \\ &\frac{\beta\gamma_0}{\gamma_\alpha} < \frac{\delta}{2^\alpha (\exp\{\varphi(1)\} - 1)^\alpha}, \\ &\nu \geq 2 \exp\left\{ -\varphi^*\left(\frac{\delta}{\gamma_0} - 1 \right) \right\} \\ &\qquad \times \left(\frac{1}{2^b (1 - \frac{b}{\alpha})} \left(\frac{\gamma_\alpha \delta}{\beta \gamma_0} \right)^{\frac{b}{\alpha}} l^{(-1)}\left(\frac{\delta}{\gamma_0} - 1 \right) + 1 \right)^{\frac{2}{b}},\end{aligned}$$

де параметри $\gamma_0 = \gamma_0(N)$, $\gamma_\alpha = \gamma_\alpha(N)$ і $\beta = \min\{\gamma_0, \frac{\gamma_\alpha}{2^\alpha}\}$ грунтуються на оцінках, отриманих для похибки моделювання, та $l^{(-1)}$ – узагальнена обернена функція до щільності l функції φ.

Припустимо, що сталі c_n та d_n, а також нулі x_n та y_n обчислені точно.

Наслідок 2.1. *[4, 7] Нехай похибка наближення відсутня, тобто $\gamma_n^c = \gamma_n^d = \gamma_n^x = \gamma_n^y = 0$. Тоді умови теореми 2.1 виконуються, якщо*

$$N \geq \max\left\{ \left(\frac{A_0}{\delta} \right)^{\frac{1}{H}} + 1; \tag{2.7}$$

$$\left(\frac{A_0 (\exp\{\varphi(1)\} - 1)^\alpha}{\delta} \right)^{\frac{1}{H}} + 1;\ 2 \left(\frac{A_0}{A_\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right\}$$

та

$$\nu \geq 2 \exp\left\{ -\varphi^*\left(\frac{\delta N^H}{A_0} - 1 \right) \right\} \times \tag{2.8}$$

$$\left(\frac{(\delta A_\alpha)^{\frac{b}{\alpha}} (N+1)^{2Hb/\alpha}}{2^b \left(1 - \frac{b}{\alpha}\right) A_0^{\frac{2b}{\alpha}} N^{\frac{(H-\alpha)b}{\alpha}}} l^{-1}\left(\frac{\delta (N+1)^H}{A_0} - 1 \right) + 1 \right)^{\frac{2}{b}},$$

де

$$A_0 = a_\varphi \sqrt{\frac{5c}{2H}},$$

$$A_\alpha = 2^{1-\alpha} a_\varphi \pi^\alpha \sqrt{\frac{c}{H - \alpha}}.$$

На основі наведених вище результатів виведемо умови, за яких модель виду (2.6) наближатиме процес строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $C([0;1])$. У наступній теоремі припускається, що похибка наближення відсутня, тобто $\gamma_n^c = \gamma_n^d = \gamma_n^x = \gamma_n^y = 0$. Для зручності обчислень вибрано $\alpha = \frac{H}{2}$ і $b = \frac{H}{4}$.

Теорема 2.2. *Нехай $\varphi(x) = \exp\{|x|\} - |x| - 1$, $x \in \mathbb{R}$.*

У цьому випадку модель $\tilde{Z}$, визначена в (2.6), наближає процес узагальненого дробового броунівського руху Z, визначений за допомогою (2.5), із заданими надійністю $1-\nu$, $0 < \nu < 1$, та точністю $\delta > 0$ в $C([0,1])$, якщо виконуються такі умови:

$$N \geq \max\left\{ 1.025 \left(\frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{5c}{2H}} \right)^{1/H} + 1; \quad \frac{2^{2-\frac{4}{H}} 5^{\frac{1}{H}}}{\pi} \right\} \tag{2.9}$$

та

$$2\mu \exp\left\{ -\frac{\delta N^H}{\sqrt{\frac{5c}{2H}}} \ln\left(\frac{\delta N^H}{\sqrt{\frac{5c}{2H}}} \right) + \frac{\delta N^H}{\sqrt{\frac{5c}{2H}}} - 1 \right\} \times$$

$$\times N^6 \left(ln \left(\frac{\delta(N+1)^H)}{\sqrt{\frac{5c}{2H}}} \right) \right)^{\frac{8}{H}} \le \nu, \qquad (2.10)$$

де $\mu = \mu(H) = \pi^2 \delta^{\frac{4}{H}} \cdot 2^{\frac{18}{H}-4} \cdot 5^{-\frac{4}{H}} \left(\frac{H}{c}\right)^{\frac{2}{H}}$.

Доведення. Скористаємось наслідком 2.1 та припущенням, що $\alpha = \frac{H}{2}$, $b = \frac{H}{4}$.
Перетворення Юнга-Фенхеля такої функції φ має вигляд:
$\varphi^*(x) = (|x|+1)ln(|x|+1) - |x|, x \in \mathbb{R}$.
При $x \ge 0$ маємо:
$\varphi'(x) = e^x - 1 = l(x) \Rightarrow l^{(-1)}(x) = ln(x+1), x \ge 0$.
В умові (2.7) маємо:

$$\left(\frac{A_0(\exp\{\varphi(1)\} - 1)^\alpha}{\delta} \right)^{1/H} + 1 =$$

$$\left(\frac{A_0}{\delta} \left(e^{e-2} - 1\right)^{\frac{H}{2}} \right)^{\frac{1}{H}} + 1 =$$

$$\left(\frac{a_\varphi}{\delta} \sqrt{\frac{5c}{2H}} \right)^{\frac{1}{H}} \left(e^{e-2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} + 1 =$$

$$1.025 \cdot \left(\frac{a_\varphi}{\delta} \sqrt{\frac{5c}{2H}} \right)^{\frac{1}{H}} + 1 > \left(\frac{A_0}{H} \right)^{\frac{1}{H}} + 1.$$

$\Rightarrow$ Умова (2.7) має вигляд:

$$N \ge \max \left\{ 1.025 \left(\frac{a_\varphi}{\delta} \sqrt{\frac{5c}{2H}} \right)^{1/H} + 1; \frac{2^{2-\frac{4}{H}} 5^{\frac{1}{H}}}{\pi} \right\}$$

В умові (2.8) будемо мати:

$$\varphi^* \left(\frac{\delta N^H}{A_0} - 1 \right) = \left(\frac{\delta N^H}{A_0} - 1 + 1 \right) \times$$

$$\times \ln \left(\frac{\delta N^H}{A_0} - 1 + 1 \right) - \left(\frac{\delta N^H}{A_0} - 1 \right) =$$

$$= \frac{\delta N^H}{a_\varphi \sqrt{\frac{5c}{2H}}} \ln \left(\frac{\delta N^H}{a_\varphi \sqrt{\frac{5c}{2H}}} \right) - \frac{\delta N^H}{a_\varphi \sqrt{\frac{5c}{2H}}} + 1,$$

$$\left(\frac{(\delta A_\alpha)^{\frac{b}{\alpha}} (N+1)^{\frac{2Hb}{\alpha}}}{2^b (1-\frac{b}{\alpha}) A_0^{\frac{2b}{\alpha}} N^{\frac{(H-\alpha)b}{\alpha}}} l^{(-1)} \left(\frac{\delta(N+1)^H}{A_0} - 1 \right) + 1 \right)^{\frac{2}{b}} =$$

$$\left(\frac{\delta^{\frac{1}{2}} a_\varphi^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{H}{4}} 2^{\frac{1}{2}-\frac{H}{4}} \cdot (\frac{2c}{H})^{\frac{1}{4}} (N+1)^H}{2^{\frac{H}{4}-1} a_\varphi (\frac{5c}{2H})^{\frac{1}{2}} N^{\frac{H}{4}}} \cdot \ln \left(\frac{\delta(N+1)^H}{a_\varphi \sqrt{\frac{5c}{2H}}} \right) + 1 \right)^{\frac{8}{H}}$$

$$\approx (**)$$

При великих N $(**) \approx$

$$\approx \left(\frac{\delta}{a_\varphi} \right)^{\frac{4}{H}} \pi^2 2^{\frac{18}{H}-4} 5^{-\frac{4}{H}} \left(\frac{H}{c} \right)^{\frac{2}{H}} N^6 \left(\ln \left(\frac{\delta(N+1)^H}{a_\varphi \sqrt{\frac{5c}{2H}}} \right) \right)^{\frac{8}{H}}$$

Умова (2.8) набуде такого вигляду:

$$2\mu \exp \left\{ -\frac{\delta N^H}{a_\varphi \sqrt{\frac{5c}{2H}}} \ln \left(\frac{\delta N^H}{a_\varphi \sqrt{\frac{5c}{2H}}} \right) + \frac{\delta N^H}{a_\varphi \sqrt{\frac{5c}{2H}}} - 1 \right\} N^6 \times$$

$$\times \left(\ln \left(\frac{\delta(N+1)^H)}{a_\varphi \sqrt{\frac{5c}{2H}}} \right) \right)^{\frac{8}{H}} \le \nu,$$

де $\mu = \pi^2 \cdot 2^{\frac{18}{H}-4} \cdot 5^{-\frac{4}{H}} \left(\frac{H}{c}\right)^{\frac{2}{H}} \left(\frac{\delta}{a_\varphi}\right)^{\frac{4}{H}}$.

У випадку заданої в умові теореми функції φ параметр $a_\varphi = 1$. Звідси випливає твердження теореми 2.2, де $\mu = \pi^2 \delta^{\frac{4}{H}} \cdot 2^{\frac{18}{H}-4} \cdot 5^{-\frac{4}{H}} \left(\frac{H}{c}\right)^{\frac{2}{H}}$. □

3 Визначення числових параметрів моделей і комп'ютерне моделювання узагальненого дробового броунівського руху

На основі теореми 2.2 знайдемо числові параметри та побудуємо модель $\tilde{Z}$, визначену в (2.6), що наближає процес узагальненого дробового броунівського руху Z, визначений за допомогою (2.5), із заданими надійністю $1-\nu$ та точністю δ в просторі $C([0,1])$ для різних значень індекса Хюрста H. Умова (2.9) є досить простою і її розв'язки можна знайти у явному вигляді. Умова (2.10) досить складна, але вона розв'язується чисельними методами.

Алгоритми обчислення числових параметрів та побудови траєкторій відповідних моделей реалізовано у програмному середовищі R. Побудуємо модель траєкторії строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху для функції $\varphi(x) = \exp\{|x|\} - |x| - 1$, $x \in \mathbb{R}$, надійності $1 - \nu = 0.95$ та точності $\delta = 0.05$ та різних параметрів H.

1. $H_1 = \frac{3}{4}$. Тоді матимемо, що $c = 0.05373$; З теореми 2.2 випливає:
   - $\mu = 0.2518$,
   - З умови (2.9) маємо, що $N \ge \max\{18.68, 0.27\}$,
   - З умови (2.10) випливає, що $N \ge 1289$.

Отже, достатньо покласти $N = 1289$. На рисунку нижче зображено модель траєкторії строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху для $H = \frac{3}{4}$

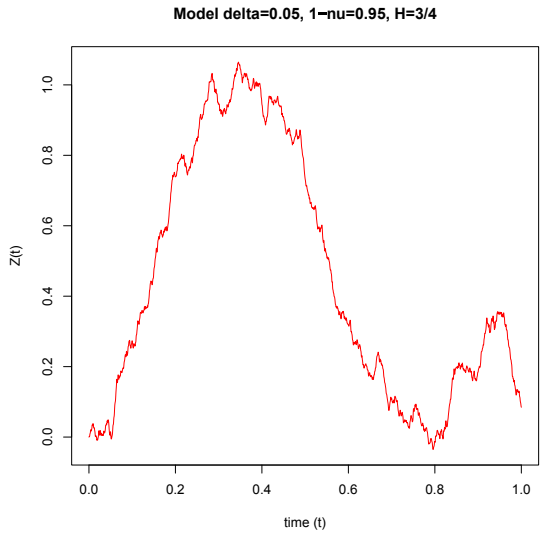


Рис. 1. Модель узагальненого дробового броунівського руху з параметром $H = \frac{3}{4}$

2. $H_2 = \frac{7}{8}$. Тоді матимемо, що $c = 0.02643$; З теореми 2.2 випливає:
   - $\mu = 2.0611$,
   - З умови (2.9) маємо, що $N \geq \max\{8.188, 0.337\}$,
   - З умови (2.10) випливає, що $N \geq 243$.

   Отже, достатньо покласти $N = 243$.

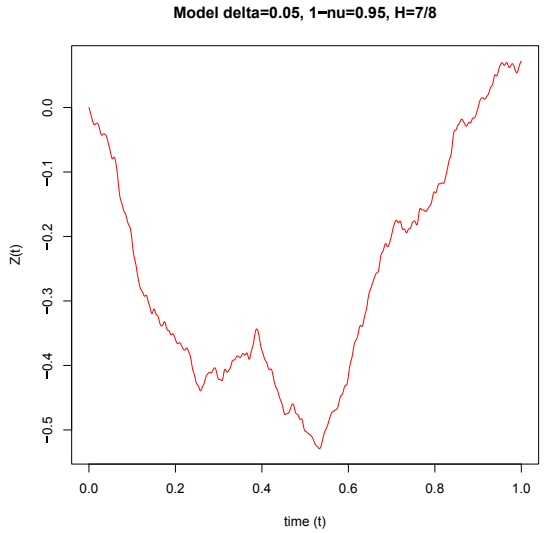


Рис. 2. Модель узагальненого дробового броунівського руху з параметром $H = \frac{7}{8}$

3. $H_3 = \frac{8}{9}$. Тоді матимемо, що $c = 0.02341$; З теореми 2.2 випливає:
   - $\mu = 2.7527$,
   - З умови (2.9) маємо, що $N \geq \max\{7.45, 0.344\}$,
   - З умови (2.10) випливає, що $N \geq 203$.

   Отже, достатньо покласти $N = 203$.

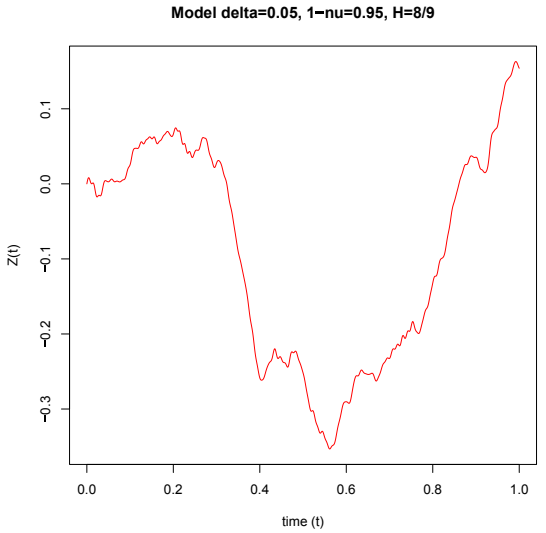


Рис. 3. Модель узагальненого дробового броунівського руху з параметром $H = \frac{8}{9}$

З рисунків бачимо, що чим більше значення індекса Хюрста H, тим гладшою є крива, при цьому і меншою є необхідна кількість доданків N у моделі.

Висновки

У роботі доведено теорему, що містить умови, за яких модель виду (2.6) наближає процес строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $C([0;1])$ у випадку, коли $\varphi(x) = \exp\{|x|\} - |x| - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Визначено параметри моделей та змодельовано траєкторії відповідних процесів для різних індексів Хюрста H і заданих значень точності та надійності у програмному середовищі R.

Список використаних джерел

1. *Buldygin V. V.*, Metric Characterization of Random Variables and Random Processes / V. V. Buldygin, Yu. V. Kozachenko. – American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. – 257 p.

2. *Dzhaparidze K.O.* A series expansion of fractional Brownian motion / K.O. Dzhaparidze, J. H. van Zanten // Probability Theory and Related Fields, 130, 2002 – P.39–55.

3. *Giuliano Antonini R.* Space of φ-sub-Gaussian random variables / R. Giuliano Antonini, Yu. V. Kozachenko, T. Nikitina. // Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. (5), 2003. – 27. – P.92–124.

4. *Kozachenko Yu.* Simulation of Weakly Self-Similar Stationary Increment $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$-Processes: A Series Expansion Approach / Yu. Kozachenko, T. Sottinen, O. Vasylyk // Methodology and Computing in Applied Probability, Vol. 7 (3), 2005. – P. 379–400.

5. *Kozachenko Yu.* Simulation of fractional Brownian motion with given reliability and accuracy in $C([0,1])$ / Yu. Kozachenko, O. Vasylyk // Theory of Stochastic Processes, Vol.12 (28), no.3-4, 2006. – P. 59–66.

6. *Krasnosel'skii M. A.* Convex Functions and Orlicz Spaces. / M. A. Krasnosel'skii, Ya. B. Rutickii. – Moscow, 1958 (in Russian). English translation: P.Noordhoff Ltd, Groningen, 1961. – 249p.

7. *Василик О.І.* φ-Субгауссові випадкові процеси / О.І. Василик, Ю.В. Козаченко, Р.Є. Ямненко. – К: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. – 231 с.

8. *Козаченко Ю.В.* Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовских / Ю.В. Козаченко, Е.И. Островский // Теория вероятн. и матем. статист. № 32, 1985. – С.42–53.

9. *Василик О.І.* Моделювання строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху // О.І. Василик, І.І. Ловицька //Вісник КНУ ім. Т. Шевченка. Серія: фіз.-матем. науки. №1, 2021. –С. 11–19. https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/1.1

References

1. BULDYGIN, V. V., KOZACHENKO, YU. V. (2000) *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes.* American Mathematical Society, Providence, RI, 257 p.

2. DZHAPARIDZE K.O., ZANTEN J. H. (2002) A series expansion of fractional Brownian motion. Probability Theory and Related Fields 130, p.39–55.

3. GIULIANO ANTONINI, R., KOZACHENKO, YU. V., NIKITINA, T. (2003) Space of φ-sub-Gaussian random variables. *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl.* (5) 27, p.92–124.

4. KOZACHENKO YU., SOTTINEN T., VASYLYK O. (2005) Simulation of Weakly Self-Similar Stationary Increment $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$-Processes: A Series Expansion Approach. *Methodology and Computing in Applied Probability*, Vol. 7 (3), p. 379–400.

5. KOZACHENKO YU., VASYLYK O. (2006) Simulation of fractional Brownian motion with given reliability and accuracy in $C([0,1])$. *Theory of Stochastic Processes*, Vol.12 (28), no.3-4 p. 59–66.

6. KRASNOSEL'SKII, M. A., RUTICKII, YA. B. (1961) *Convex Functions and Orlicz Spaces.* Moscow, 1958 (in Russian). English translation: P.Noordhoff Ltd, Groningen, 249p., 1961.

7. VASYLYK, O. I., KOZACHENKO, YU. V., YAMNENKO, R. E. (2008) *φ-sub-Gaussian random process*, Kyiv: Vydavnycho-Poligrafichnyi Tsentr "Kyivskyi Universytet", 231 p. (In Ukrainian)

8. KOZACHENKO, YU. V., OSTROVSKII E.I. (1985) Banach spaces of random variables of sub-Gaussian type. *Teor. Veroyatnost. i Mat. Statist.*, 32 , p. 42–53. (In Russian)

9. VASYLYK O.I., LOVYTSKA I.I. (2021) Simulation of a strictly φ-sub-Gaussian generalized fractional Brownian motion. *Bulletin of TSNUK. Series: Physics and Mathematics.* 1, p. 11–19. https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/1.1 (in Ukrainian)

Received: 22.08.2021

УДК 519.21

https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/2.4

В. Голомозий, *кандидат наук, доцент*

Оцінка експоненційного моменту для часу одночасного відновлення двох випадкових блукань на півпрямій.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська 64.

V. Golomoziy, *Ph.D., Associate Professor*

On estimating exponential moment for the simultaneous renewal time for two random walks on a half line

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.

В даній роботі ми розглядаємо умови існування та скінченості експоненційного моменту для часу одночасного відновлення двох випадкових блукань на півпрямій. Допускається, що випадкові блукання є неоднорідними за часом. Отримані умови за яких експоненційний момент скінчений для кожного окремого ланцюга а також для часу спільного потрапляння у множині. Показано, яким чином можна обчислити оцінки у практичних застосуваннях.

Результати дослідження доповідались на Міжнародній науковій конференції "Modern Stochastics: Theory and Applications. V" (MSTA-V).

Ключові слова: Теорія відновлення, склеювання, неоднорідні ланцюги Маркова.

This paper is devoted to studying the recurrence properties of a pair of time-inhomogeneous random walks on a half-line. We consider a chain of the form $X_{n+1} = (X_n + W_n)^+$, where X_0 is a given starting point (random or non-random), and increments W_n are independent, but not necessarily equally distributed random variables, which makes Markov chain $(X_n)_{n\geqslant 0}$ time-inhomogeneous. We demonstrate that there exists a set $C = [-c, c]$ such that under suitable conditions on W_n (which are the existence of a uniform geometric moment and uniformly negative expectation), the chain $(X_n)_{n\geqslant 0}$ has finite exponential moment for the return time to the set C. The exponential moment, thus obtained, is uniformly bounded on the C. We show how the parameter c can be calculated in terms of the distribution of W_n and provide formulas for the bound of the exponential moment, which are suitable for practical application. Later we extend this result to the pair of Markov chains of the same form. We demonstrate that under the same conditions, an exponential moment exists for the simultaneous return time for the pair of chains to the set $C \times C$. We also provide bounds that could be calculated in applications, provided that distributions of increments are known.

Key Words: Renewal theory, coupling, time-inhomogeneous Markov chains

Communicated by Prof. Moklyachuk M.P.

1 Вступ

Оцінки моментів для часу спільного потраплянння двох ланцюгів Маркова у певну множину відіграють ключову роль для побудови склеювання двох таких ланцюгів, що у свою чергу дозволяє розв'язувати широкий клас задач, зокрема отримувати оцінки стійкості перехідних ймовірностей за n кроків або оцінки стійкості функціоналів від двох ланцюгів. Важливим аспектом методу склеювання є те, що оцінки можна отримувати навіть для неоднорідного за часом випадку, що викликає великі труднощі при використанні класичних методів.

В даній роботі використовуються результати двох праць [2] та [3] у яких було розвинуто теорію для побудови оцінок експоненційного часу потрапляння у множину для атомарних та загальних ланцюгів Маркова відповідно. Важливо зазначити, що ключову роль у побудові оцінок відіграє умова зсуву (drift condition) яка широко використовується у класичній теорії однорідних ланцюгів Маркова (див. [4] та [1]).

У роботі [2] було отримано варіант умови зсуву для неоднорідних ланцюгів Маркова, який гарантує існування експоненційного моменту. Цю умову було використано для побудови оцінки одночасного потрапляння двох (можливо неоднорідних) ланцюгів Маркова у певний атом. У роботі [3] ці результати було узагальнено на випадок неатомарних множин, при цьому використовувався відомий метод розще-

© В. Голомозий 2021

плення (splitting method) - див. [4].

В результаті були отримані не лише умови існування експоненційного моменту, але і запропоновано підхід до обчислення оцінок цього моменту із використанням умови зсуву. Саме такий підхід і використовується у даній роботі.

Цікаво відзначити, що ланцюги, які розглядаються в даній роботі є атомарними (мають атом в 0). Однак, виявляється, що для розв'язання задачі, що розглядається більш зручно використовувати підхід із роботи [3], тобто виділити певну "малу" множину (в нашому випадку множину $[0,c]$, $c \in \mathbb{R}^+$), і побудуват пробну функцію яка задовільняє умові зсуву на цій множині а не на атомі $\{0\}$.

Зауважимо, що у даній роботі не припускається нормальність випадкового блукання. Натомість розглядається широкий клас розподілів на який накладаються умови, що запезпечують існування скінченого експоненційного моменту. Накладені умови є природніми і відповідають відомим умовам в однорідному випадку (див. [4]). Розглядаючи множину $[0,c]$ вдається виписати пробну функцію у майже явному вигляді для довільного розподілу, що задовільняє умовам описаним вище, а також отримати зручні вирази для оцінки експоненційного моменту. Для практичних застосувань, де розподіл інкременту випадкового блукання явно відомий, отримані оцінки можна обчислити за допомогою чисельних методів наближено обчисливши певні інтеграли.

2 Основні позначення та формулювання задачі

Будемо використовувати позначення $\mathbb{R}^+$ для множини невід'ємних дійсних чисел, та $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ - позначатиме борельову σ-алгебру на цій множині.

Розглядаємо два незалежні ланцюги Маркова $\{X_n^{(1)}, n \geqslant 0\}$ та $\{X_n^{(2)}, n \geqslant 0\}$, зі значеннями в $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$, заданих на спільному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ наступним чином:

$$X_n^{(1)} = \left(X_{n-1}^{(1)} + W_n\right)^+, n \geqslant 1$$

$$X_n^{(2)} = \left(X_{n-1}^{(2)} + Z_n\right)^+, n \geqslant 1,$$

де величини $W_n, Z_n, n \geqslant 0$ є незалежними в сукупності, задані на тому ж ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ та мають розподіли:

$$F_n(x) = \mathbb{P}\{X_n \in dx\},$$
$$G_n(x) = \mathbb{P}\{Z_n \in dx\}.$$

Таким чином обидва ланцюги є неоднорідними за часом.

Нехай

$$P_{i,n} \colon \mathbb{R}^+ \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \to [0,1],$$

це перехідні ймовірності на n-тому кроці для i-того ланцюга, $i \in \{1,2\}$. Тоді

$$P_{i,n}(x,A) = \mathbb{P}\left\{X_{n+1}^{(i)} \in A | X_n^{(i)} = x\right\}.$$

Будемо позначати через $\mathbb{P}_{i,x}$, $i \in \{1,2\}$, $x \in \mathbb{R}^+$ міру асоційовану з ланцюгом $X^{(i)}$, що стартує з точки $x \in \mathbb{R}^+$. Іншими словами:

$$\mathbb{P}_{i,x}\{A\} = \mathbb{P}\left\{X^{(1)} \in A | X_0^{(1)} = x\right\},$$

де $A \in (\mathcal{B}(\mathbb{R}^+))^\infty$ - множина з циліндричної σ-алгебри на множині $(\mathbb{R}^+)^\infty$. Відповідне математичне сподівання позначатимемо через $\mathbb{E}_{i,x}$. Будемо також використовувати позначення $\mathbb{P}_{x,y}$ та $\mathbb{E}_{x,y}$, $x,y \in \mathbb{R}^+$ для позначення аналогічної ймовірності та математичного сподівання породжених парою ланцюгів $\left(X^{(1)}, X^{(2)}\right)$.

Нехай $c > 0$ - константа, визначимо

$$\sigma_c^{(i)} = \min\left\{t \geqslant 1 : X_t^{(i)} \in [0,c]\right\},$$
$$\sigma_c = \min\left\{t \geqslant 1 : \left(X_t^{(1)}, X_t^{(2)}\right) \in [0,c] \times [0,c]\right\}, \quad (1)$$

як час першого повернення у множину $[0,c]$ та час першого спільного потрапляння у цю множину для обох ланцюгів відповідно.

Задача полягає у тому, щоб з'ясувати за яких умов існує таке $c > 0$ та $\beta > 1$, що

$$\mathbb{E}_{i,x}\left[\beta^{\sigma_c^{(i)}}\right] < \infty,$$

та

$$\mathbb{E}_{x,y}\left[\beta^{\sigma_c}\right] < \infty,$$

для всіх $i \in \{1,2\}$, $x,y \in \mathbb{R}^+$, а також отримати оцінки для вищеозначених математичних сподівань. Зауважимо, що $\sigma_c^{(i)}$ та σ_c можна вважати, як випадковими величинами заданими на просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, так і величинами на просторі $((\mathbb{R}^+)^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)^\infty)$ з мірами $\mathbb{P}_{i,x}$ та $\mathbb{P}_{x,y}$. Тому в подальшому ми будемо вільно використовувати, як символ $\mathbb{P}$ так і $\mathbb{P}_{i,x}$ для роботи з цими величинами, та будь-якими іншими, що є функціями від $X^{(i)}$. Зауважимо також, що β може бути різним у першій та другій нерівностях вище. Як ми побачимо далі, саме так і буде.

3 Умова зсуву для ланцюгів $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$

Розглянемо наступні умови, які, як ми побачимо далі, запезпечують скінченість експоненційних моментів та дозволяють отримати їх оцінки.

Умова (A) Нехай існує таке $\varepsilon > 0$, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} xF_n(dx) < -\varepsilon,$$

та

$$\int_{-\infty}^{\infty} xG_n(dx) < -\varepsilon,$$

для всіх $n \geqslant 0$.

Іншими словами,

$$\sup_{n\geqslant 1} \{\mathbb{E}[Z_n], \mathbb{E}[W_n]\} < -\varepsilon < 0.$$

Умова (B) Нехай існують такі $\rho_0 > 0$, та $M > 0$, що

$$\sup_{n\geqslant 0} \{\mathbb{E}[\exp(\rho_0 W_n)], \mathbb{E}[\exp(\rho_0 Z_n)]\} < M.$$

Іншими словами, існують скінчені експоненційні моменти для величин W_n та Z_n.

Основним інструментом дослідження буде умова зсуву у формі;

$$P_{i,n}V(x) \leqslant \lambda V(x) + b\mathbb{1}_{[0,c]}(x),$$

де $V\colon \mathbb{R}^+ \to [1,\infty]$- деяка пробна функція, $\lambda \in (0,1)$, $b < \infty$ - деякі константи. Ми покажемо, що за умов (A) та (B) виконується умова зсуву для обох ланцюгів $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$, та, обчислимо величини λ та b.

Теорема 3.1. *Нехай для ланцюгів $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ визначених вище виконані умови (A) та (B). Тоді*
1. Існує таке число $c > 0$, що для всіх $n \geqslant 0$

$$\int_{-c}^{\infty} xF_n(dx) < -\varepsilon/2,$$

та

$$\int_{-c}^{\infty} xG_n(dx) < -\varepsilon/2.$$

2. Існує таке $\rho > 0$, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{\rho y} - \rho y - 1| F_n(dy) \leqslant \rho\varepsilon/4,$$

та

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{\rho y} - \rho y - 1| G_n(dy) \leqslant \rho\varepsilon/4,$$

для всіх $n > 0$.
3. Для функції $V(x) = e^{\rho x}$, $n \geqslant 0$, $i \in \{1,2\}$ та довільного $x \geqslant 0$ має місце наступна нерівність

$$\mathbb{E}\left[V\left(X_{n+1}^{(i)}\right) | X_n^{(i)} = x\right] \leqslant \lambda V(x) + b\mathbb{1}_{[0,c]}(x),$$

де

$$\lambda = 1 - \rho\varepsilon/4 < 1,$$

$$b = \sup_{i\in\{1,2\}, 0\leqslant x\leqslant c, n\geqslant 0} \mathbb{E}\left[V\left(X_{n+1}^{(i)}\right) | X_n^{(i)} = x\right] < \infty.$$

Доведення.
Очевидно, умова (A) гарантує існування $c > 0$, що задовільняє твердження 1. теореми. Помітимо тепер, що

$$|e^{\rho y} - \rho y - 1| = \rho\left(\frac{e^{\rho y} - 1}{\rho} - \rho y\right) \to 0,\ \rho \to 0.$$

Окрім того,

$$|e^{\rho y} - \rho y - 1| \leqslant e^{\rho y} + \rho|y| + 1 \in L_1(F_n),$$

в силу умови (B). Отже існує таке $\rho < \rho_0$, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{\rho y} - \rho y - 1| F_n(dy) \leqslant \rho\varepsilon/4.$$

З умови (B) також випливає рівномірна інтегровність сімейств величини $\{W_n,\ n \geqslant 0\}$ та $\{Z_n,\ n \geqslant 0\}$, таким чином константу ρ можна вибрати не залежною від n і такою, що задовільняє твердження 2. теореми для F_n та G_n.

Розглянемо пробну функцію $V(x)$ у формі

$$V(x) = e^{\rho x}, \rho < \rho_0,$$

де ρ взято із 2. Розглянемо умову зсуву для $X^{(1)}$. Для довільних $n \geqslant 0$ та $x > c$ маємо

$$P_{1,n}V(x)/V(x) = e^{-\rho x}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\rho(x+y)^+} F_n(dy)$$

$$= e^{-\rho x}\left(F_n(-\infty, -x] + \int_{-x+0}^{\infty} e^{\rho(x+y)} F_n(dy)\right)$$

$$= F_n(-\infty, -x]e^{-\rho x} + \int_{-x+0}^{\infty} e^{\rho y} F_n(dy)$$

$$= F_n(-\infty, -x]e^{-\rho x} + \int_{-x+0}^{\infty} (e^{\rho y} - \rho y - 1) F_n(dy) + \int_{-x+0}^{\infty} (\rho y + 1) F_n(dy)$$

$$\leqslant F_n(-\infty, -x]e^{-\rho x} + \int_{-x+0}^{\infty} (e^{\rho y} - \rho y - 1) F_n(dy)$$

$$+\rho\int_{-c}^{\infty} yF_n(dy) + F(-x,\infty)$$
$$\leqslant 1-\rho\varepsilon/2 - F_n(-\infty,-x](1-e^{-\rho x})$$
$$+\int_{-x+0}^{\infty}(e^{\rho y}-\rho y-1)\,F_n(dy)$$
$$\leqslant 1-\rho\varepsilon/2 - F_n(-\infty,-x](1-e^{-\rho x})$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}|e^{\rho y}-\rho y-1|\,F_n(dy)\leqslant$$
$$\leqslant 1-\rho\varepsilon/2 - F_n(-\infty,-x](1-e^{-\rho x})+\rho\varepsilon/4$$
$$\leqslant 1-\rho\varepsilon/4=\lambda<1.$$

Очевидно аналогічні міркування справедливі також для G_n. Оскільки ланцюги $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ феллєрові, та $\rho < \rho_0$, то функція $\phi(x) = \mathbb{E}[V(X_{n+1}^{(i)})|X_n^{(i)} = x]$ є скінченою для кожного x та неперервною. А отже є обмеженою на компакті $[0,c]$.

□

4 Експоненційний момент для часу спільного попадання у множину $[0,c]$

Тепер скористаємось результатими з робіт [2] та [3] щоби встановити скінченість експоненційних моментів для $\sigma_c^{(i)}$ та σ_c.

Теорема 4.1. *Для ланцюгів $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ визначених вище, та для констант ρ, c, λ, b з Теореми* 3.1 *має місце нерівність*

$$E_x\left[\lambda^{-\sigma_c^{(i)}}\right]\leqslant e^{\rho x}+b\mathbb{1}_{[0,c]}(x),$$

для всіх $x\geqslant 0$, $i\in\{1,2\}$.

Доведення.
Дане твердження є прямим наслідком Теореми 1 з роботи [2].

□

Для встановлення оцінки для експоненційного момента для σ_c скористаємось Теоремою 4.3 із [3]. Для зручності, формулювання Теореми 4.3 з [3] наведено у додатку.

Спочатку покажемо, що множина $C=[0,c]$ є малою множиною для ланцюгів $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$. Цей результат гарантується наступною теоремою.

Але перед цим нам потрібно ввести поняття мінімуму двох мір. Нехай μ,ν дві міри задані на деякому ймовірнісному просторі. Нехай

$$f=\frac{\mu}{\mu+\nu},\ f'=\frac{\nu}{\mu+\nu},$$

тоді мінімумом двох мір μ та ν (або мінімальною мірою) називається ймовірнісна міра:

$$\mu\wedge\nu=(f\wedge f')\cdot(\mu+\nu),$$

де знак $\cdot$ слід розуміти як:

$$\mu\wedge\nu(A)=\int_A(f\wedge f')(x)(\mu+\nu)(dx),$$

для довільної вимірної A.

Аналогічним чином можна визначити мінімальну міру для зліченої сім'ї мір $\{\mu_n, n\geqslant 0\}$.

Лема 4.1. *Нехай $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ ланцюги які визначені вище. Припустимо для них виконані умови (A) та (B). Нехай $\tilde\nu$ - мінімальна міра для сім'ї ймовірнісних мір $\{P_{i,n}(x,\cdot), i\in\{1,2\},\ x\in[0,c]\}$. Тоді*

$$\alpha:=\tilde\nu(\mathbb{R}^+)>0,$$

та для $i\in\{1,2\}$, $x\in[0,c]$ та $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ має місце нерівність:

$$P_{i,n}(x,A)\geqslant\alpha\nu(A),$$

де $\nu(A)=\tilde\nu(A)/\alpha$ - ймовірнісна міра, причому $\nu([0,c])>0$.

Доведення.
В силу умови (B):

$$\inf_{n\geqslant 0}\{F_n(-\infty,0],G_n(-\infty,0]\}>0.$$

тоді для $x\in[0,c]$

$$\inf_{n\geqslant0}P_{1,n}(x,[0,c])=\inf_{n\geqslant0}F_n(-\infty,c-x]$$
$$\geqslant\inf_{n\geqslant0}F_n(-\infty,0]>0,$$

та аналогічна нерівність виконана для $P_{2,n}(x,[0,c])$. Таким чином міра $\tilde\nu$ ненульова та $\tilde\nu([0,c])>0$. Тоді, очевидно, ν коректно визначена ймовірнісна міра, для якої $\nu([0,c])>0$.

□

Тепер ми готові почати перевірку умов Теореми 4.3 з [3]. Не втрачаючи загальності, вважатимемо, що $\alpha<\rho$ визначене вище в Теоремі 3.1.

В якості функцій $V_t(x)$ з умови 1, Теореми 4.3. будемо використовувати функції $V(x)=e^{\alpha x}$. Зауважимо, що вони не залежать від t, і є

однаковими для всіх моментів часу. Скориставшись нерівністю Чернова, як у [2], розділ 3.2 отримаємо:

$$\mathbb{P}_x\{\sigma_c^{(i)} > n\} \leqslant e^{\alpha x}\lambda^n,$$

для $x > c$, та

$$\mathbb{P}_x\{\sigma_c^{(i)} > n\} \leqslant (\lambda e^{\alpha c} + b)\lambda^n,$$

для $x \in [0, c]$. Отже умова 1 Теореми 4.3. виконана, з константами

$$\beta_0 = \lambda^{-1},$$
$$D = \lambda e^{\alpha c} + b,$$

де константи c та b визначені в Теоремі 3.1. Перевіримо умову 2. Для цього треба розглянути

$$q_{n,x}^{(i)}(A) = \frac{P_{i,n}(x, A) - \alpha_t \nu_t(A)}{1 - \alpha_t}.$$

Оскільки в нашому випадку, α та ν не залежать від n маємо:

$$q_{n,x}^{(i)}(A) = \frac{P_{i,n}(x, A) - \alpha\nu(A)}{1 - \alpha}.$$

Для $i = 1$ маємо

$$q_{n,x}^{(i)}(A) = \frac{\int_{A\cap[0,\infty)} F_n(dy - x) - \alpha\nu(A)}{1 - \alpha} + \frac{\mathbb{1}_A(0)F_n(-\infty, -x]}{1 - \alpha}.$$

Тоді

$$q_{n,x}^{(1)}(V) = \frac{\int_{0+}^{\infty} \left(F_n(dy - x) - \alpha\nu(dy)\right) e^{\alpha y}}{1 - \alpha} + \frac{F_n(-\infty, -x]}{1 - \alpha}.$$

Очевидно, що аналогічна рівність має місце і для $q_{n,x}^{(2)}(V)$ якщо замінити, F_n на G_n. Тоді скориставшись умовою (B), отримаємо:

$$\begin{gathered}(1 - \alpha)\hat{Q} = (1 - \alpha) \sup_{n\geqslant 0, 0\leqslant x\leqslant c, i\in\{0,1\}} q_{n,x}^{(i)}(V) \\ \leqslant \left(M - \alpha\int_0^\infty e^{\alpha y}\nu(dy)\right) + \\ \sup_n \{F_n(-\infty, 0], G_n(-\infty, 0]\} < \infty\end{gathered} \tag{2}$$

Зокрема маємо таку грубу оцінку для $\hat{Q}$

$$\hat{Q} \leqslant \frac{M + 1}{1 - \alpha},$$

де M визначено в умові (B).

Умова 3 Теореми 4.3 з [3] гарантується Теоремою 4.1.

Таким чином всі умови Теореми 4.3. виконані і ми можемо сформулювати основний результат даної роботи.

Теорема 4.2. *Нехай $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ два ланцюги Маркова визначених вище, що задовільняють умови (A) та (B). Нехай $\lambda, \varepsilon, \rho, c$ - константи з Теореми 4.1 а α, ν - константа на міноризаційна міра з Леми 4.1. Тоді для довільних $x, y \in \mathbb{R}^+$*

$$E_{x,y}[\delta_1^{\sigma_c}] \leqslant M_0 \left(E_x\left[\delta_0^{\sigma_c^{(1)}}\right] S_1 + E_y\left[\delta_0^{\sigma_c^{(2)}}\right] S_2\right),$$

де

$$\delta_0 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{\alpha(\lambda^{-1} - 1)}{(1 - \alpha)\hat{Q}\lambda^{-1} + \alpha}}\right),$$

$$\gamma_0 = \left\{(1 - \alpha)\left(1 + \frac{(\delta_0^2 - 1)\lambda^{-1}}{\lambda^{-1} - \delta_0^2}\hat{Q}\right)\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$\hat{\varepsilon}$ - довільна мала константа

$$\gamma_1 = (\alpha\nu[0, c])^m \times,$$

α, ν визначено у Теоремі 4.1,

$$\times \exp\left(\ln\left(1 - \check{D}\delta^{-m}\right)\left(\frac{\delta_0^{m+1}}{\delta_0 - 1} - 1\right)\right),$$

$$\delta_1 = (1 + \hat{\varepsilon}/2)^{\frac{1}{m+n_0}},$$

$$\check{D} = D\frac{1 + \gamma_0}{1 - \gamma_0}\left(1 + \frac{(\delta_0 - 1)\lambda^{-1}}{\lambda^{-1} - \delta_0}\hat{Q}\right) \times,$$

$$D = \lambda e^{\alpha c} + b,$$

α, c та b з Теореми 3.1,

$$\times \left(1 + \frac{\delta_0(\lambda^{-1} - 1)}{\lambda^{-1} - \delta_0}\right),$$

$$m = \min\left\{n \geqslant 1 | \check{D}\delta_0^{-n} < 1\right\},$$

$$n_0 = \left\lfloor \ln\left(\frac{\hat{\varepsilon}(\delta_0 - \lambda^{-1})}{2\check{D}\lambda^{-m-1}}\right) / \ln\left(\frac{\lambda^{-1}}{\delta_0}\right)\right\rfloor + 3,$$

$$M_0 = \left(1 + \frac{1}{1 - \sqrt{(1 + \hat{\varepsilon})(1 - \gamma_1)}}\right)\left(\frac{1 + \gamma_0}{1 - \gamma_0}\right),$$

S_1 та S_2 визначено в Теоремі 4.2 з [3], та вони задовільняють нерівність

$$\max\{S_1, S_2\} \leqslant D(1 - \alpha)^{-1},$$

$\hat{Q}$ визначено у (2).

Доведення.
Зауважимо, що попередньо ми перевірили всі умови Теореми 4.3 з роботи [3], та знайшли вираз для $\hat{Q}$. Оскільки отримані δ_0 та δ_1 менші за $\beta_0 = \lambda^{-1}$ то очевидно також виконані умови Теореми 4.2 з [3]. Тоді нерівність

$$E_{x,y}[\delta_1^{\sigma_c}] \leqslant M_0 \left(E_x \left[\delta_0^{\sigma_c^{(1)}} \right] S_1 + E_y \left[\delta_0^{\sigma_c^{(2)}} \right] S_2 \right),$$

та вираз для M_0 випливають з Теореми 4.2 (з [3]), а формули для констант з Теореми 4.3 та попередніх міркувань. □

5 Додаток

Наводимо формулювання Теореми 4.3 з роботи [3]. За деталями позначень, та доведеннями відсилаємо читача до тексту самої роботи [3]. Всі посилання у формулюванні теореми відповідають оригінальній роботі.

Теорема 5.1. *Нехай $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ два ланцюги Маркова, що задовільняють умову міноризації (**Condition (A)** - в оригінальній роботі) та $\check{X}^{(1)}$, $\check{X}^{(2)}$ відповідні розщеплені ланцюги, що визначені у розділі 3, випадкові величини $\sigma_C^{(1)}$, $\sigma_C^{(2)}$ визначені в (1) та $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{M}_1(\mathcal{E})$. Позначимо $\check{\mu}_i = (1-\alpha_t)\mu_i \times \{0\} + \alpha_t \mu_i \times \{1\}$.*

1. Припустимо існує експоненційно домінуюча послідовність з константами $D > 0$, $\beta_0 > 1$ та вимірні функції $V_t^{(i)} \colon E \to \mathbb{R}_+$

$$\sup_{t \geqslant 0, x \in C} \mathbb{P}_x^t \left\{ \sigma_C^{(i)} > n \right\} \leqslant G_n = D\beta_0^{-n},$$

та для всіх $x \in E \setminus C$

$$\mathbb{P}_x^t \left\{ \sigma_C^{(i)} > n \right\} \leqslant G_n(x) = V_t^{(i)}(x)\beta_0^{-n}.$$

2. Для кожного $t \geqslant 0, x \in C, i \in \{0,1\}$ визначимо ймовірніcну міру $q_{t,x}^{(i)}(\cdot) \in \mathbb{M}_1$ таку що

$$q_{t,x}^{(i)}(A) = \frac{P_{t,i}(x,A) - \alpha_t \nu_t(A)}{1-\alpha_t}.$$

Припустимо, що

$$\hat{Q} = \sup_{t \geqslant 0, x \in C, i \in \{1,2\}} q_{t,x}^{(i)}(V_t^{(i)})$$

$$= \sup_{t \geqslant 0, x \in C,\ i \in \{1,2\}} \int_E q_{t,x}^{(i)}(dy) V_t^{(i)}(y) < \infty.$$

3. Нехай

$$\inf_{t \geqslant 0} \nu_t(C) > 0.$$

Якщо умови 1-3 виконані, тоді сталі $\delta_0 > 1, \delta_1 > 1, \gamma_0 > 0, \gamma_1 > 0$ та $\varepsilon > 0$ можуть бути обрані наступним чином:

$$\delta_0 < \sqrt{1 + \frac{\alpha(\beta_0 - 1)}{(1-\alpha)\beta_0 \hat{Q} + \alpha}},$$

$$\gamma_0 = \left\{ (1-\alpha) \left(1 + \frac{(\delta_0^2 - 1)\beta_0}{\beta_0 - \delta_0^2} \hat{Q} \right) \right\}^{\frac{1}{2}},$$

ε - довільна мала константа

$$\gamma_1 = \left(\alpha \inf_t \nu_t(C) \right)^m \exp\left(\ln\left(1 - \check{D}\delta^{-m}\right) \left(\frac{\delta_0^{m+1}}{\delta_0 - 1} - 1 \right) \right),$$

$$\delta_1 = (1 + \varepsilon/2)^{\frac{1}{m+n_0}},$$

$$\check{D} = D \frac{1+\gamma_0}{1-\gamma_0} \left(1 + \frac{(\delta_0 - 1)\beta_0}{\beta_0 - \delta_0} \hat{Q} \right) \left(1 + \frac{\delta_0(\beta_0 - 1)}{\beta_0 - \delta_0} \right),$$

$$m = \min\left\{ n \geqslant 1 | \check{D}\delta_0^{-n} < 1 \right\},$$

$$n_0 = \left\lfloor \ln\left(\frac{\varepsilon(\delta_0 - \beta_0)}{2\check{D}\beta_0^{m+1}} \right) / \ln\left(\frac{\beta_0}{\delta_0} \right) \right\rfloor + 3,$$

*та α визначено у **Condition (A)**.*

References

1. R. DOUC, E. MOULINES, P. PRIOURET and P. SOULIER, (2018) "Markov Chains", (Springer International Publishing, 2018), p. 757.

2. V. GOLOMOZIY (2021) "Computable bounds of exponential moments of simultaneous hitting time for two time-inhomogeneous atomic Markov chains", *Procedings of the International Conference on Stochastic Processes and Algebraic Structures,*, In Print.

3. V. GOLOMOZIY (2021) "Exponential moments of simultaneous hitting time for non-atomic Markov chains", *Glasnik Matematicki*, In print.

4. S. MEYN and R.L. TWEEDIE (2009) "Markov Chains and Stochastic Stability", 2nd edn. (Cambridge University Press, 2009), p. 624.

Отримано: 01.09.2021

УДК 519.8 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/2.5

Горбачук В. М.[1], д.ф.-м.н., с.н.с., зав. відділу,
Бардадим Т. О.[1], к.ф.-м.н., с.н.с., с.н.с.,
Осипенко С.П. [1], магістр, інженер-програміст

Задача децентралізованого прийняття рішень для сучасних хмарних послуг

[1] Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 03187, м. Київ, проспект Глушкова, 40,
e-mail: GorbachukVasyl@netscape.net

V. M. Gorbachuk[1], DSc,
T. O. Bardadaym[1], PhD,
S. P. Osypenko[1]

The problem of decentralized decision making for modern cloud services

[1] V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, 03187, Kyiv, Glushkov Avenue, 40,
e-mail: GorbachukVasyl@netscape.net

Організація сучасних хмарних послуг спирається як на теоретичні результати з логістики, дослідження операцій, ланцюгів постачання, мереж передачі (транспортування) інформації, так і на практичні досягнення новітніх інформаційно-комунікаційних технологій. Оскільки всі мешканці планети стають постійними користувачами і водночас творцями таких послуг, то питання децентралізованого прийняття рішень стають повсякденними. У роботі викладається постановка проблеми таких рішень з боку постачальників (провайдерів) хмарних послуг і пропонується математичне формулювання відповідної задачі оптимізації з ресурсними обмеженнями.

Результати дослідження доповідались на Міжнародній науковій конференції ``Modern Stochastics: Theory and Applications. V'' (MSTA-V).

Ключові слова:багатокритеріальна оптимізація , відображення, мережа.

The organization of modern cloud services is based on theoretical results in logistics, operations research, supply chains, information transmission (transportation) networks, and on the practical achievements of the novel information and communication technologies. As all the inhabitants of the planet become regular users and at the same time creators of such services, the issues of decentralized decision making are becoming everyday problems. The paper presents the setup for the problem of such solutions by suppliers (providers) of cloud services and suggests a mathematical formulation of the corresponding optimization problem with resource constraints. It is a starting point for further mathematical elaboration of the new everyday problems.

Key words: multicriteria optimization, mapping,network.

Ефективне забезпечення ресурсами є складною проблемою в середовищах хмарних обчислень (ХО) внаслідок їхньої динамічної природи й необхідності підтримки гетерогенних застосунків [1]. Хоча технологія віртуальних машин (Virtual Machine, VMs) дозволяє паралельно виконувати кілька робочих навантажень (workloads) і використовувати спільну інфраструктуру, ця технологія не гарантує продуктивності (performance) застосунку. Тому провайдери хмарних центрів обробки даних (ЦОД) надають перевагу статичному, а не динамічному розміщенню VMs, тобто неефективному використанню ресурсів, не даючи гарантій продуктивності [2].

Крім того, робочі навантаження можуть мати різні вимоги якості послуги (Quality of Service, QoS) через виконання різнотипних застосунків (веб-застосунків або застосунків високопродуктивних обчислень), що значно ускладнює забезпечення ресурсів [3].

Попередні дослідження зосереджувалася на єдиному типі угод про рівень обслуговування (Service Level Agreements, SLAs) чи зразків застосунків використання ресурсів (на веб-застосунках), призводячи до неефективного користування ресурсами. Можна запропонувати підходи до вирішення проблеми розподілу ресурсів у межах ЦОД з виконанням різних типів робочих навантажень застосунків, зокрема, неінтерактивних і трансакційних. Пропонуються контроль надходження і механізм планування, які не лише максимізують прибуток і використання ресурсів, але й гарантують те, що вимоги QoS користувачів задовольняються за SLAs [4]. Експериментально було доведено важливість урахування різних типів SLAs і штрафів за їх порушення, а також комбінацій

© Горбачук В.М., Бардадим Т.О., Осипенко С.П., 2021

робочих навантажень для кращого забезпечення ресурсів і використання ЦОД. Запропонований механізм [4] забезпечує суттєве поліпшення порівняно зі статичною консолідацією серверів і зменшує порушення SLAs.

ХО призвели до зміни парадигми, коли підприємства, замість підтримки своєї власної інфраструктури, почали здійснювати аутсорсинг своїх обчислювальних потреб та IT-потреб за рахунок сторонніх провайдерів послуг [1−5]. Хмари − це великомасштабні аутсорсингові ЦОД, які розташовують тисячі серверів, які можуть одночасно запускати багато VMs. Тому вони розташовують широкий спектр застосунків і створюють у користувачів уявлення необмежених обчислювальних ресурсів на основі плати відповідно до обсягу використання [2].

Одним з наслідків Інтернету речей (Internet of Things, IoT) є щоденна поява великих об'ємів даних, які не завжди знаходять належне застосування через істотні відстані чи затримки до відповідної хмари аналізу цих даних. Тому розробляється нова модель туманних (fog) і периферійних (edge) обчислень, здатна своєчасно аналізувати (сприймати) чутливі дані (в режимі реального часу) на мережевій периферії, суміжній з місцем появи даних, і підтримувати дії (реакції): у такій моделі лише відібрані дані надсилаються до хмари аналізу та тривалого зберігання. Крім того, хмарні послуги, які надаються великими компаніями (скажімо, Google), можна також локалізовувати, щоб мінімізувати час відгуку і збільшувати гнучкість обслуговування. Такої локалізації можна досягати шляхом розгортання маломасштабних ЦОД (cloudlets; хмарок), де це потрібно, близьких до клієнтів (пристроїв IoT) і з'єднаних з централізованою хмарою через мережі, формуючи периферійну хмару з множинним доступом (multi-access edge cloud, MEC). MEC включає принаймні три сторони − провайдерів Інтернет-інфраструктури (Internet as a service, IaaS), провайдерів застосунків (software as a service, SaaS), провайдерів мережі (network as a service, NaaS).

Ці сторони можуть мати різні цілі, ускладнюючи інтегрований менеджмент ресурсів MEC. Для такого менеджменту пропонуються різні методи в залежності від того, якого типу послуги треба розміщувати та як наявні ресурси слід розподіляти до застосунків клієнтів, зокрема мобільних застосунків. Тому замість централізованого менеджменту ресурсів припускається децентралізований менеджмент кожною із сторін IaaS, SaaS, NaaS, який мінімізує енергоспоживання інфраструктури та витрати споживачів, забезпечуючи роботу застосунків. За емпіричними оцінками (слідів реального робочого навантаження від кластера Google), підхід [4] дозволяє знижувати енергоспоживання на майже 12 % (в основному, за рахунок IaaS), а витрати користувачів − на близько 18 % (в основному, за рахунок NaaS), забезпечуючи досить якісну роботу застосунків.Такі застосунки в режимі реального часу, як онлайн-ігри та відеоконференції, мають обов'язкові вимоги (on-demand requirements) забезпечення високоякісних результатів у межах домовленого терміну, наприклад, вимоги коротшого часу відгуку через зв'язок з найближчим сервером застосунків.

Використання хмарної платформи для розгортання застосунків у реальному часі пропонує ряд переваг, включаючи зазвичай менші експлуатаційні витрати (operational expenditures, OpEx) та розподіл ресурсів на вимогу відповідно до потреб застосунку. Однак застосунки в режимі реального часу можуть бути чутливими до якості мережі, наприклад, до затримок (зв'язку) між користувачами та сервісами. Тому вимоги таких застосунків можуть задовольнятися через поєднання новопосталої технології периферійних обчислень з MEC та туманних обчислень, уможливлюючи здійснення операцій на периферії мережі. Сенс введення в експлуатацію цієї технології полягає в розподілі послуг або запуску застосунків ближче до клієнтів і до місць попиту на результати операцій. Це досягається через розгортання маломасштабних або мікромасштабних ЦОД близько до клієнтів і підключення до регіональних хмарних ЦОД. Зазначимо, систем менеджменту для запуску та практичного застосування таких інфраструктур на 2021 р. майже не було, за винятком AWS Outposts (https://aws.amazon.com/outposts/), що вийшли на ринок у 2019 р., та переглянутого OpenStack [3].

Крім того, у рамках MEC або туманних обчислень є певні питання, що потребують вивчення, наприклад: а) де слід розгортати ці малі ЦОД (хмарки); б) які сервіси слід встановлювати; в) де та які ресурси слід розподіляти застосункам користувачів; г) якою мобільністю користувачів (міграцією сервісів) слід управляти; д) як згадані рамки MEC слід оптимізувати (максимізувати чи мінімізувати різні цілі − монетарні витрати користувачів, енергоспоживання, продуктивність навантаження з погляду затримок, тривалості виконання тощо).

Хоча питання в), г), д), здебільшого, є схожими до традиційних хмар, але стратегії менеджменту з цих питань для туманної інфраструктури слід перепроектовувати.

Заслуговує уваги вивчення основних проблем розподілу чи розміщення ресурсів, пов'язаних з периферійними (туманними) обчислювальними платформами: а) де слід встановлювати малі ЦОД (хмарки на периферіях мереж), щоб задовольняти попит користувачів і водночас знижувати глобальні витрати інфраструктури (суму OpEx та капітальних витрат (capital expenditures, CapEx)); b) як слід розгортати послуги глобального контролю після встановлення платформи; c) якого розміру чи масштабу має бути платформа. Вирішення цих проблем відкриватиме можливості для консультацій про загальну структуру розподілу чи розміщення для різних видів туманних або периферійних послуг, а також про їх структуру менеджменту чи міграції.

Хоча сучасна модель ХО, яку забезпечують кілька надвеликих і великих провайдерів (Google, Amazon AWS), є широко вживаною, інноваційні та новітні технології (застосунки IoT, периферійні обчислення, MEC) впливають на розвиток цієї моделі. Щоб впоратися з цими технологічними змінами, хмарові та мережеві спільноти працюють у напрямку великомасштабних розподілених інфраструктур малорозмірних ЦОД (хмарок), встановлених на периферії мережі ближче до користувачів та їхніх пристроїв, тобто туманних інфраструктур (що містять застосунки розподіленої конфігурації, які складаються з різних модулів). Туманна, периферійна та хмарна парадигма привертає більший інтерес, зважаючи також на те, що вона поліпшує рухливість (agility) і продуктивність послуг з точки зору часу відгуку. Наприклад, застосунки IoT можуть скористатися розгортанням периферійних вузлів для здійснення аналізу в режимі реального часу, зберігаючи основні ЦОД для поглибленої аналітики даних: поєднується згадана парадигма з MEC (яка дає множинний, а не лише мобільний доступ), що перебуває в зоні мережі радіодоступу (radio access network, RAN), де туман або периферія може пов'язувати споживчі пристрої, агрегуючи дані від сенсорів (до їх передачі на віддалену хмару).

Крім того, хмарка як міні-ЦОД, що має відповідати нормам великого хмарного провайдера, могла б підтримувати таку агрегацію, розташовуючись на більшій відстані від клієнта, ніж сенсор або сенсори, без потреби перебування в зоні RAN.

Крім визначення того, де слід розгортати чи встановлювати периферійні хмари, рушії такої еволюції мають проектувати прийнятні системи менеджменту, які дозволятимуть: оператору (хмарі, мережі, периферії) агрегувати, спостерігати та виявляти такі масово розподілені ресурси; впроваджувати нові види послуг, які можуть розгортатися і керуватися оператором або користувачами. Однак проектування такої системи менеджменту є складним, бо туманні чи периферійні інфраструктури відрізняються від традиційних хмар щодо гетерогенності, динамічності, можливості великого розподілу ресурсів, економії від масштабу.

MECs пропонують обмежені ресурси на периферії мережі, уможливлюючи запуск застосунку користувача в безпосередній близькості від нього через різноманітні туманні обчислення, які входять у відповідні хмарки з певної хмари. Ресурс периферії надається на хмарці чи сервері MEC. Крім того, застосунок у хмарці працює принаймні на одній логічній (hop) відстані зв'язку, на відміну від своєї початкової реалізації на мобільному (туманному) пристрої чи основному (core) Інтернеті (віддаленій хмарі). Тому затримка застосунку може потенційно залежати від послуг мережі. Скінченна кількість ресурсів хмарки теж може впливати на ефективність їх розподілу до підключених користувачів: хоча є підходи до поділу ресурсів кількох хмарок у певній географічній зоні, проблема ефективності стає складною, коли ці ресурси пропонуються різними провайдерами послуг з різними цілями й завданнями.

Аналогічно до провайдерів, користувачі мобільних пристроїв, які запускають застосунки, мають різні цілі та конкурують за ресурси: кожний користувач хоче оптимізувати свій власний виграш або продуктивність застосунку.

Крім того, різні ресурси можуть пропонуватися при різних витратах, рівнях енергоспоживання та продуктивності. Розміщення ресурсів може істотно впливати на економіку провайдерів послуг (через IaaS) і споживачів (через SaaS): наприклад, нижча продуктивність застосунків збільшує витрати користувачів, а також енергоспоживання. Тому важливо забезпечувати відповідні ресурси для того, щоб задовольняти вимоги QoS застосунку та цілі провайдерів. Що стосується мобільності, то користувачі рухаються, а модулі застосунків явно мігрують серед хостів для підвищення

енергоефективності чи продуктивності, потенційно ускладнюючи менеджмент ресурсів. Серед відповідних методів менеджменту ресурсів для досягнення різних цілей суттєвими є: методи менеджменту інфраструктури та наявних ресурсів (IaaS, SaaS, NaaS) для підвищення рухливості послуг і продуктивності з точки зору часу відгуку, а також зниження енерговитрат; способи організації виконання навантажень користувачів, розташування та виділення необхідних ресурсів або сервісів; алгоритми ефективного розв'язання задач розміщення (мережевих та обчислювальних) ресурсів для підтримки новітніх мобільних застосунків MEC; підходи до реалізації та втілення моделей і алгоритмів у програмне забезпечення, які демонструють їх доцільність і практичність.

Проблема менеджменту ресурсів MEC складна тим, що пропонування якісних послуг кінцевим користувачам залежить від різноманітних гравців, цілі яких не є антагоністичними, але і не є однаковими. Такими гравцями є власники інфраструктури (IaaS), провайдерів застосунків (SaaS), мережевих операторів (NaaS). Кожний з них контролює певну частину всієї системи. Невід'ємною складовою є те, що комунікаційні та обчислювальні спроможності потрібні для гарантування високої QoS з точки зору малого часу відгуку та високої пропускної здатності. Оскільки гравці можуть мати різні цільові функції, то поведінка одного гравця може потенційно впливати на поведінку іншого гравця. Традиційний підхід припускає, що вся інфраструктура управляється єдиним гравцем, який здебільшого забезпечує ресурси, або відділяє керівництво мережі з ресурсами застосунків від базової периферійної обчислювальної спроможності. У підході [4, 5] розміщення ресурсів у MEC вважається результатом конкуренції гравців, кожний з яких може оптимізувати свою цільову функцію. Цілі сторін певним чином узгоджуються: оскільки недостатнє забезпечення застосунків знижуватиме доходи всіх сторін (клієнти шукатимуть застосунки деінде, а провайдери шукатимуть клієнтів), то у сторін є стимули діяти у діапазоні від виграшу всіх гравців разом до програшу всіх гравців. Оскільки звичайні методи оптимізації не гарантують виграшу всіх гравців разом у подібних сценаріях розміщення ресурсів, то можна звернутися до методів теорії ігор [6].

Як правило, провайдери SaaS розміщують свої застосунки на віртуалізованих ресурсах, що надаються провайдером IaaS. Крім того, провайдери SaaS мають дотримуватися кожної з вимог QoS застосунку, як сказано в SLA з користувачами, де визначається дохід SaaS на основі досягнутого рівня продуктивності. Однак продуктивність застосунків залежить не лише від обчислювальних ресурсів (що надаються провайдером IaaS), але також від пропускної здатності мережі (що надається провайдерами NaaS). Аналогічно провайдери послуг визначатимуть пріоритетність своїх робочих навантажень, виходячи з природи (своїх або сторонніх) застосунків. Оскільки у MEC провайдери NaaS можуть бути власниками IaaS (внутрішньої мережі) та сторонніми операторами (зовнішньої) мобільної мережі, то мережеві ресурси від різних провайдерів слід надавати за доступними цінами.

Провайдери SaaS приділяють основну увагу максимізації своїх доходів через мінімізацію SLAs, зменшуючи загальні витрати на обчислювальні ресурси (що надаються провайдерами IaaS), а також на мережеві ресурси (що надаються провайдерами NaaS і сторонніми провайдерами мережевих послуг). У випадку множинних провайдерів IaaS або множинності MECs, провайдери SaaS конкуруватимуть і висуватимуть свої цінові пропозиції на використання інфраструктурних ресурсів. З іншого боку, провайдери IaaS і сторонні провайдери мережевих послуг максимізуватимуть свої доходи шляхом більшого надання своїх віртуалізованих ресурсів. При цьому провайдери IaaS максимізуватимуть використання своїх ресурсів для мінімізації енергоспоживання.

У пропонованій теоретико-ігровій моделі є три гравці з різними цільовими функціями: IaaS мінімізує енергоспоживання через спрямування робочого навантаження на найменші ресурси; SaaS максимізує продуктивність обслуговування при обмеженнях SLAs, збільшуючи доходи; сторонні провайдери й оператори мережевих послуг мінімізують мережевий трафік для гарантування QoS у сенсі часу відгуку. Позначимо N множину (перелік) $\{1,2,...,N\}$ всіх таких гравців. Крім того, кожний гравець має набір (перелік) $K=\{1,2,...,K\}$ різних наявних у себе видів ресурсів, зокрема, обчислювальних (IaaS), застосункових (SaaS), комунікаційних (NaaS). Провайдер $m \in N$ послуг пропонує ресурси $C^m=\{C_1^m, C_2^m,...,C_K^m\}$, де C_k^m – пропонований ним обсяг ресурсу типу k. Таким

чином, всі N провайдерів (хостів) загалом пропонують набір ресурсів (спроможностей)

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{N} C_1^i, \sum_{i=1}^{N} C_2^i, ..., \sum_{i=1}^{N} C_K^i \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^{N} C_k^i \right\}_{k=1,...,K}.$$

Кожне конкретне завдання (job) j для застосунку з цієї множини (модуль застосунку) потребує (коаліційного) набору ресурсів, який належить множині $M = \{ M_1 \cup M_2 \cup ... \cup M_K \}$ всіх застосунків при умові, що кожному модулю застосунку виділено неподільні ресурси кожного гравця $m \in N$: модулем застосунку вважається те, що запускається рівно один раз. Нехай кожний модуль j застосунку запускається у віртуальній машині чи контейнері. Крім того, завдання може містити велику кількість контейнерів, віртуальних машин, мережевих ресурсів, які можуть мати спільне розташування; розташування лише однієї віртуальної машини чи контейнера на хості чи застосунку спрощує постановку задачі. Припустимо, що кожний модуль вимагає не більше однієї VM чи одного контейнера, а загальне число наданих VMs або контейнерів задовольнятиме ресурсні (resource) вимоги R_M застосунків.

Нехай система MEC має один кластер (хмарний ЦОД), кілька периферійних розташувань (хмарок) і численні мобільні чи туманні пристрої. Ці ресурси з'єднані між собою через мережі так, що хмарки перебувають у безпосередній близькості до туманних пристроїв.

Модулі застосунку розподіляються і запускаються на цих ресурсах. Хмарний ЦОД складається з H гетерогенних кластерних хостів (hosts) $h \in \{1,2,...,H\}$. Кожному хосту h відповідає вектор спроможності (capacity) $C^h = \{ c_1^h, c_2^h, ..., c_K^h \}$ за ресурсом типу $k \in K$: якщо ресурсами є процесор, пам'ять, сховище, мережа, то вектор $h = C^h = (4,3,2,1)$ означатиме хост, який має 4 одиниці процесорів (CPU), 3 одиниці пам'яті (RAM, вимірюваної у гігабайтах), 2 одиниці дискового сховища (вимірюваного у терабайтах), мережеву карту на одиницю пропускної здатності (гігабіт в секунду). Нехай також є M пертферійних розташувань (хмарок), а кожна периферійна хмарка $e \in \mathrm{M}$ складається з множини S гетерогенних хостів; подібно до вектора C^h, кожному периферійному хосту $s \in S$ відповідає вектор $C^g << C^h$ спроможності.

Кожна VM може запускати конкретний модуль застосунку чи завдання. Позначимо J_u застосунок або завдання, подане окремим користувачем $u \in \{1,2,...,U\}$.

Кожний застосунок містить кілька модулів, які працюють одночасно. Крім того, різноманітні типи VMs або контейнерів наперед визначаються кожним хмарним (або хмарковим) провайдером; ресурсам кожного типу відповідає вектор спроможності $R = \{ r_1, r_2, ..., r_U \}$.

Зазначимо, що кожна VM чи контейнер може здійснювати єдине завдання (модуль застосунку) у даний момент часу як на віддаленому ЦОД, так і на хмарках.

Ресурси різного типу хоста $h \in H$ чи хмарки $s \in S$ будуть зайнятими лише тоді, коли на цьому хості чи хмарці створено конкретну VM чи контейнер. Таким чином, міграція VMs уможливлює мобільність модулів застосунків.

За вищенаведених умов, запити (requests) ресурсів для конкретного завдання j (або користувача) можна визначити як матрицю $u \times v$, де рядок задає тип VM чи контейнера, а стовпець – різні ресурси, пов'язані з типом VM чи контейнера:

$$R^j = \begin{bmatrix} r_1^j \\ r_2^j \\ \vdots \\ r_u^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11}^j & r_{12}^j & \cdots & r_{1v}^j \\ r_{21}^j & r_{22}^j & \cdots & r_{2v}^j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{u1}^j & r_{u2}^j & \cdots & r_{uv}^j \end{bmatrix}.$$

Тоді всі запити (від усіх провайдерів послуг) визначаються розширеною матрицею $U \times V$ вимог ресурсів

$$R = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1V} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2V} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{U1} & r_{U2} & \cdots & r_{UV} \end{bmatrix}.$$

Припускаємо, що конкретне завдання можна призначити щонайбільше одному хосту. Нехай для конкретного хоста $h \in H$ можливий стан розміщення ресурсів задається матрицею розміщення (allocation) $u \times v$

$$A^h = \begin{bmatrix} a_1^h \\ a_2^h \\ \vdots \\ a_u^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^h & a_{12}^h & \cdots & a_{1v}^h \\ a_{21}^h & a_{22}^h & \cdots & a_{2v}^h \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{u1}^h & a_{u2}^h & \cdots & a_{uv}^h \end{bmatrix},$$

де a_{dk}^h – обсяг ресурсів k на конкретному хості h, виділених контейнеру чи VM d. Тоді, аналогічно до матриці всіх запитів, можна ввести матрицю всіх розміщень (від усіх провайдерів)

$$A=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_U \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1V} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2V} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{U1} & a_{U2} & \cdots & a_{UV} \end{bmatrix}.$$

Для кожного хоста рішення (decision) про розміщення ресурсів є набором усіх можливостей (possibilities), основаних на матриці R:

$$D=\{ A^1, A^2,..., A^h,..., A^P \}.$$

Мета проблеми розміщення ресурсів, при даних матриці R та наборі C, – обчислити прийнятне відображення від ресурсів до завдань користувача: різні гравці (провайдери ресурсів, застосунків, мережі) спільно приходять до єдиного рішення, що описує розміщення VMs, які є найкращими узгодженими розміщеннями для всієї системи MEC у сенсі оптимізації енергоспоживання та продуктивності (часу виконання завдань).

Якщо вважати цю проблему задачею однокритеріальної оптимізації, то кожний провайдер послуг окремо бажає максимізувати свою корисність шляхом такого розміщення своїх наявних ресурсів, що: IaaS мінімізує енергоспоживання та продуктивність робочого навантаження (сподіваний час виконання); SaaS мінімізує сподіваний час виконання застосунків; NaaS мінімізує мережевий трафік [7]. Ця задача полягає у виборі такої матриці A розміщення, яка максимізує суму корисностей усіх провайдерів $\sum_{j=1}^{N} u_j^n\left(A_{i\in M}^n\right)$.

Крім того, для кожної VM чи застосунку i її матриця A^i розміщення на кожному провайдері послуг $N \in \{\text{IaaS, SaaS, NaaS}\}$ задається функцією $X_{iN} \in \{0, 1\}$ відображення ресурсів на провайдери з обмеженням $\sum_{i=1}^{N} X_{iN} \le 1$, яке означає, що кожний застосунок розміщується рівно один раз на одному з провайдерів. Після розміщення застосунку i кожний користувач платить за нього ціну (price) p, яка складається з p_{in}^{IaaS}, p_{in}^{SaaS}, p_{in}^{NaaS} – вартостей (корисностей) послуг IaaS, SaaS, NaaS для застосунку, користувача, каналу i відповідно на хості (провайдері) $n \in N$. Тому корисність усієї системи MEC від конкретного користувача із застосунком i задається

$$U_i = X_{ij}(p_{ij}^{IaaS} + p_{ij}^{SaaS} + p_{ij}^{NaaS}),$$

де X_{ij} – функція відображення від застосунку i на провайдера j, а загальна корисність системи MEC (усіх провайдерів) від M застосунків задається $U=\sum_{i=1}^{M} U_i$.

Отже, мета всієї системи MEC полягає у максимізації корисності U при обмеженнях: розміщені ресурсні спроможності не можуть перевищувати загальних спроможностей; для кожного користувача розміщуються ресурси рівно один раз в його безпосередній близькості.

Вищезазначену проблему можна сформулювати як задачу багатокритеріальної оптимізації для MEC, що складається з ЦОД, кількох периферійних розташувань (хостів) і завдань користувачів, які працюють на різноманітних VMs: знайти відображення VMs до хостів таке, що мінімізує кумулятивне енергоспоживання MEC та максимізує продуктивність VM (мінімізує час виконання на VM). Аналогічно для SaaS має максимізуватися продуктивність різних застосунків. Крім того, для NaaS має максимізуватися доступна пропускна здатність (bandwidth) B. Вважатимемо продуктивністю час виконання на VM: чим довший час виконання на VM, тим гірше, і навпаки. Таким чином, можна мінімізувати згортку кількох згаданих критеріїв

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} e_{ij}\sum_{i=1}^{N} t_{ij}x_{ij} + \sum_{k=1}^{M} t_k - \sum B - U - \sum_{j=1}^{N} u_j^n\left(A_{i\in M}^n\right),$$

де x_{ij} – функція відображення VMs на хости ($x_{ij}=1$, якщо конкретна VM i відображається на хост j), e_{ij} – спожита енергія на хості j для VM i, t_{ij} – час виконання VM i на хості j, t_k – час виконання застосунку k. Ця мінімізація має брати до уваги обмеження, що різні ресурси k, розміщені для VMs, не можуть перевищувати спроможності хостів (провайдерів) n:

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ik}^n \le C_k^n.$$

Крім того, має братися до уваги обмеження, що для VMs пропонуються лише потрібні ресурси:

$$\sum_{l\in N}^{M} x_{ik}^l \le r_{ik}^n.$$

Зазначимо, що час виконання застосунку обернено пропорційний продуктивності мережі, яка, в свою чергу, не пропорційна енергоспоживанню.

При оптимізації за одним критерієм провайдер SaaS максимізуватиме свій дохід шляхом

мінімізації виграшів користувачів. Проте нижчі витрати на користувачів можуть збільшувати число клієнтів і попит на послуги, які небажано впливатимуть на робочі навантаження користувачів: такі нижчі витрати опосередковано передбачають збільшення порушень SLA. Ці порушення залежать від ресурсів, придбаних у відповідних провайдерів IaaS та NaaS (які мають близькі інтереси). Якщо провайдери пропонують послуги, насамперед, клієнтам з найвищою готовністю платити, то має братися до уваги додаткове обмеження: така пропозиція подібна перевазі (від провайдера IaaS) користувачів Gmail на кластері Google порівняно з кластером Azure MicroSoft .

Таким чином, проблема розміщення ресурсів МЕС є досить складною і такою, що потребує новітніх підходів до децентралізованого прийняття рішень у ситуаціях перебору великої кількості варіантів − аналізу великих даних.

Список використаних джерел

1. *Горбачук В.* Економіка Internet-застосунків і цифрового контенту / В. Горбачук, С. Гавриленко, Г. Голоцуков, Д. Ніколенко // The Role of Technology in the Socio-Economic Development of the Post-Quarantine World. M. Gavron-Lapuszek, A. Karpenko (eds.) Katowice: Katowice School of Technology, 2020. P. 81–88.
2. *Gorbachuk V.* The impact of cloud services pricing on provider profit, consumer surplus, and social welfare / V. Gorbachuk, S. Gavrylenko // CEUR Workshop Proceedings. – 2020. – 2866. – P. 237–245.
3. *Bardadym T.* On biomedical computations in cluster and cloud environment / T. Bardadym, V. Gorbachuk, N. Novoselova, S. Osypenko, V. Skobtsov, I. Tom // Cybernetics and Computer Technologies. − 2021. − № 2. − P. 76−84.
4. *Zakarya M.* epcAware: a game-based, energy, performance and cost efficient resource management technique for multi-access edge clouds / M. Zakarya, L. Gillam, H. Ali, I.U. Rahman, K. Salah, R. Khan, O. Rana, R. Buyya // IEEE Transactions on Services Computing. − 2020. − doi: 10.1109/TSC.2020.3005347.
5. *Li K.* A game theoretic approach to computation offloading strategy optimization for non-cooperative users in mobile edge computing / K. Li // IEEE Transactions on Sustainable Computing. – 2018. – doi: 10.1109/TSUSC.2018.2868655.
6. *Моклячук М.П.* Лекції з теорії вибору та прийняття рішень / М.П. Моклячук, Р.Є. Ямненко. Київ: Київський університет, 2007. 256 с.
7. *Gorbachuk V.M.* Wholesale price contracts under random demand / V. M. Gorbachuk // Modern Stochastics: Theory and Applications V. Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2021. P. 67−68.

References

1. GORBACHUK, V. et al. (2020) Economics of Internet-applications and digital content. In *The Role of Technology in the Socio-Economic Development of the Post-Quarantine World.* M. Gavron-Lapuszek, A. Karpenko (eds.) Katowice: Katowice School of Technology, pp. 81–88.
2. GORBACHUK, V. and GAVRYLENKO, S. (2020) The impact of cloud services pricing on provider profit, consumer surplus, and social welfare. In *CEUR Workshop Proceedings*, 2866, pp. 237–245.
3. BARDADYM, T. et al. (2021) On biomedical computations in cluster and cloud environment. *Cybernetics and Computer Technologies*, № 2, pp. 76−84.
4. ZAKARYA, M. et al. (2020) epcAware: a game-based, energy, performance and cost efficient resource management technique for multi-access edge clouds. *IEEE Transactions on Services Computing.* doi: 10.1109/TSC.2020.3005347.
5. LI, K. (2018) A game theoretic approach to computation offloading strategy optimization for non-cooperative users in mobile edge computing. *IEEE Transactions on Sustainable Computing*. doi: 10.1109/TSUSC.2018.2868655.
6. MOKLYACHUK, M.P., and YAMNENKO, R.E. (2007) Lectures on the choice theory and decision making. Kyiv: Kyyivskyj universytet. 256 p.
7. GORBACHUK, V.M. (2021) Wholesale price contracts under random demand. In *Modern Stochastics: Theory and Applications V.* Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv, pp. 67−68.

Надійшла до редколегії 30.08.21

УДК 519.21
https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/2.6

І. І. Голіченко[1], *к. ф.-м. н.*
О. Ю. Масютка[2], *к. ф.-м. н.*
М. П. Моклячук[2], *д. ф.-м. н., проф.*

Екстраполяція періодично корельованих стохастичних послідовностей з пропусками спостережень

[1]Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут Ігоря Сікорського", м. Київ 03056, Україна
e-mail: idubovetska@gmail.com
[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ 01601, Україна
e-mail: omasyutka@gmail.com
e-mail: moklyachuk@gmail.com

I. I. Golichenko[1], *Ph.D*
O. Yu. Masyutka[2], *Ph.D*
M. P. Moklyachuk[2], *Dr.Sci., Prof.*

Extrapolation problem for periodically correlated stochastic sequences with missing observations

[1] National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Politechnic Institute", Kyiv 03056, Ukraine
e-mail: idubovetska@gmail.com
[2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv 01601, Ukraine
e-mail: omasyutka@gmail.com
e-mail: moklyachuk@gmail.com

Досліджується задача оптимального оцінювання лінійних функціоналів $A\zeta = \sum_{j=1}^{\infty} a(j)\zeta(j)$, від невідомих значень періодично корельованої стохастичної послідовності $\zeta(j)$ на основі спостережень послідовності $\zeta(j) + \theta(j)$ в точках $j \in \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0\} \setminus S$, $S = \bigcup_{l=1}^{s-1}\{-M_l \cdot T + 1, \dots, -M_{l-1} \cdot T - N_l \cdot T\}$, де $\theta(j)$ - некорельована з $\zeta(j)$ періодично корельована стохастична послідовність. Отримано формули для обчислення значень середньоквадратичних похибок та спектральних характеристик оптимальних оцінок функціоналу $A\zeta$ для послідовностей з відомими спектральними щільностями. Формули, що визначають найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксно-робастні спектральні характеристики оптимальних лінійних оцінок функціоналів пропонуються у випадку, коли спектральні щільності послідовностей точно невідомі, а вказані множини допустимих спектральних щільностей.

Результати дослідження доповідались на Міжнародній науковій конференції "Modern Stochastics: Theory and Applications. V" (MSTA-V).

Ключові слова: Періодично корельована стохастична послідовність, мінімаксно-робастна оцінка, найменш сприятлива спектральна щільність, мінімаксно-робастна спектральна характеристика.

The problem of optimal estimation of the linear functionals $A\zeta = \sum_{j=1}^{\infty} a(j)\zeta(j)$, which depend on the unknown values of a periodically correlated stochastic sequence $\zeta(j)$ from observations of the sequence $\zeta(j) + \theta(j)$ at points $j \in \{..., -n, ..., -2, -1, 0\} \setminus S$, $S = \bigcup_{l=1}^{s-1}\{-M_l \cdot T + 1, \dots, -M_{l-1} \cdot T - N_l \cdot T\}$, is considered, where $\theta(j)$ is an uncorrelated with $\zeta(j)$ periodically correlated stochastic sequence. Formulas for calculation the mean square error and the spectral characteristic of the optimal estimate of the functional $A\zeta$ are proposed in the case where spectral densities of the sequences are exactly known. Formulas that determine the least favorable spectral densities and the minimax-robust spectral characteristics of the optimal estimates of functionals are proposed in the case of spectral uncertainty, where the spectral densities are not exactly known while some sets of admissible spectral densities are specified.

Key Words: Periodically correlated sequence, optimal linear estimate, mean square error, least favourable spectral density matrix, minimax spectral characteristic.

Mathematics Subject Classification – MSC2020. Primary: 60G10, 60G25, 60G35, Secondary: 62M20, 93E10, 93E11

© I. I. Golichenko, O. Yu. Masyutka, M. P. Moklyachuk, 2021

Introduction

W.R. Bennett [1] in 1958 started to explore cyclostationarity as a phenomenon and property of the process, which describes signals in channels of communication. Studying the statistical characteristics of information transmission, he calls the group of telegraph signals the cyclostationary process, that is the process whose group of statistics changes periodically with time. W.A. Gardner [5], [6] highlights the greatest similarity of cyclostationary processes, which are a subclass of nonstationary processes, with stationary processes. He presented the bibliography of works [7] in which properties and applications of cyclostationary processes were investigated till 1992. Recent developments and applications of cyclostationary signal analysis are reviewed in the papers by A. Napolitano [30], [31]. Note, that in other sources cyclostationary processes are called periodically stationary, periodically nonstationary, periodically correlated. We will use the term periodically correlated processes. E.G. Gladyshev [8] in 1961 was the first who started the analysis of spectral properties and representation of periodically correlated sequences based on its connection with vector stationary sequences. He formulated the necessary and sufficient conditions for determining of periodically correlated sequence in terms of the correlation function. A. Makagon with coauthrs [17], [18] presented detailed spectral analysis of periodically correlated sequences. Main ideas of the research of periodically correlated sequences are outlined in the book by H.L. Hurd and A. Miamee [12].

The linear extrapolation and interpolation problems for stationary stochastic processes under the condition that spectral densities are known exactly were first introduced by A. N. Kolmogorov [15]. Solutions of the extrapolation and filtering problems for stationary processes and sequences with rational spectral densities were proposed by N. Wiener [36] and A. M. Yaglom [37]. Estimation problems for vector stationary sequences were investigated by E. J. Hannan [11] and Yu. A. Rozanov [34]. Since stochastic processes often accompanied with undesirable noise it is naturally to assume that the exact value of spectral density is unknown and the model of process is given by a set of restrictions on spectral density. K.S. Vastola and H.V. Poor [35] have demonstrated that the described procedure can result in significant increasing of the value of error. This is a reason for searching estimates which are optimal for all densities from a certain class of admissible spectral densities. These estimates are called minimax since they minimize the maximal value of the error of estimates. A survey of results in minimax (robust) methods of data processing can be found in the paper by Kassam and Poor [14].

Ulf Grenander [10] was the first who proposed the minimax approach to the extrapolation problem for stationary processes. Formulation and investigation of the problems of extrapolation, interpolation and filtering of linear functionals which depend on the unknown values of stationary sequences and processes from observations with and without noise are presented by M.P. Moklyachuk [22], [23]. Results of investigation of the problems of optimal estimation of vector-valued stationary sequences and processes are published by M.P. Moklyachuk, O.Yu. Masyutka [25], [26], [27]. In their book M.M Luz and M.P. Moklyachuk [16] presented results of investigation of the minimax estimation problems for linear functionals which depends on unknown values of stochastic sequence with stationary increments. I.I. Golichenko and M.P. Moklyachuk [2], [3], [4], [24] investigated the interpolation, extrapolation and filtering problems of linear functionals from periodically correlated stochastic sequences and processes. The interpolation and filtering problems for stationary sequences with missing values was examined by M.P. Moklyachuk, O.Yu. Masyutka and M.I.Sidei [19], [21], [28], [29]. The interpolation problem of linear functionals from periodically correlated stochastic sequences with missing observations was investigated by I.I. Golichenko and M.P. Moklyachuk in [9].

In this paper we presented results of investigation of the problem of optimal linear estimation of the functional $A\zeta = \sum_{j=1}^{\infty} a(j)\zeta(j)$, which depends on the unknown values of a periodically correlated stochastic sequence $\zeta(j)$ from observations of the sequence $\zeta(j) + \theta(j)$ at points $j \in \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0\} \setminus S$, $S = \bigcup_{l=1}^{s-1}\{-M_l \cdot T + 1, \dots, -M_{l-1} \cdot T - N_l \cdot T\}$, where $\theta(j)$ is an uncorrelated with $\zeta(j)$ periodically correlated stochastic sequence. Formulas for calculation of the mean square error and the spectral characteristic of the optimal estimate of the functional $A\zeta$ are proposed in the case where spectral densities

are exactly known. Formulas that determine the least favorable spectral densities and the minimax-robust spectral characteristics of the optimal estimates of functionals are proposed in the case of spectral uncertainty, where the spectral densities are not exactly known while some sets of admissible spectral densities are specified.

1 Periodically correlated and multidimensional stationary sequences

The term *periodically correlated* process was introduced by E. G. Gladyshev [8] while W. R. Bennett [1] called random and periodic processes *cyclostationary* process.

Periodically correlated sequences are stochastic sequences that have periodic structure (see the book by H. L. Hurd and A. Miamee [12]).

Definition 1. *A complex valued stochastic sequence $\zeta(n), n \in \mathbb{Z}$ with zero mean, $\mathsf{E}\zeta(n) = 0$, and finite variance, $\mathsf{E}|\zeta(n)|^2 < +\infty$, is called cyclostationary or periodically correlated (PC) with period T (T-PC) if for every $n, m \in \mathbb{Z}$*

$$\mathsf{E}\zeta(n+T)\overline{\zeta(m+T)} = R(n+T, m+T) = R(n, m) \tag{1}$$

and there are no smaller values of $T > 0$ for which (1) holds true.

Definition 2. *A complex valued T-variate stochastic sequence $\vec{\xi}(n) = \{\xi_\nu(n)\}_{\nu=1}^T, n \in \mathbb{Z}$ with zero mean, $\mathsf{E}\xi_\nu(n) = 0, \nu = 1, \dots, T$, and $\mathsf{E}||\vec{\xi}(n)||^2 < \infty$ is called stationary if for all $n, m \in \mathbb{Z}$ and $\nu, \mu \in \{1, \dots, T\}$*

$$\mathsf{E}\xi_\nu(n)\overline{\xi_\mu(m)} = R_{\nu\mu}(n, m) = R_{\nu\mu}(n - m).$$

If this is the case, we denote $R(n) = \{R_{\nu\mu}(n)\}_{\nu,\mu=1}^T$ and call it the covariance matrix of T-variate stochastic sequence $\vec{\xi}(n)$.

Proposition 1.1. (E. G. Gladyshev [8]). *A stochastic sequence $\zeta(n)$ is PC with period T if and only if there exists a T-variate stationary sequence $\vec{\xi}(n) = \{\xi_\nu(n)\}_{\nu=1}^T$ such that $\zeta(n)$ has the representation*

$$\zeta(n) = \sum_{\nu=1}^{T} e^{2\pi i n\nu/T}\xi_\nu(n), \ n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

The sequence $\vec{\xi}(n)$ is called generating sequence of the sequence $\zeta(n)$.

Proposition 1.2. (E. G. Gladyshev [8]). *A complex valued stochastic sequence $\zeta(n), n \in \mathbb{Z}$ with zero mean and finite variance is PC with period T if and only if the T-variate blocked sequence $\vec{\zeta}(n)$ of the form*

$$[\vec{\zeta}(n)]_p = \zeta(nT + p), \ n \in \mathbb{Z}, p = 1, \dots, T \tag{3}$$

is stationary.

We will denote by $f^{\vec{\zeta}}(\lambda) = \left\{f^{\vec{\zeta}}_{\nu\mu}(\lambda)\right\}_{\nu,\mu=1}^T$ the matrix valued spectral density function of the T-variate stationary sequence $\vec{\zeta}(n) = (\zeta_1(n), \dots, \zeta_T(n))^\top$ arising from the T-blocking (3) of a univariate T-PC sequence $\zeta(n)$.

2 The classical projection method of linear extrapolation

Let $\zeta(j)$ and $\theta(j)$ be uncorrelated T-PC stochastic sequences. Consider the problem of optimal linear estimation of the functional

$$A\zeta = \sum_{j=1}^{\infty} a(j)\zeta(j),$$

that depends on the unknown values of T-PC stochastic sequence $\zeta(j)$, based on observations of the sequence $\zeta(j) + \theta(j)$ at points $j \in \{..., -n, ..., -1, 0\} \setminus S$, $S = \bigcup_{l=1}^s\{-M_l \cdot T + 1, \dots, -M_{l-1} \cdot T - N_l \cdot T\}$, $M_l = \sum_{k=0}^l(N_k + K_k)$, $N_0 = K_0 = 0$,.

Let assume that the coefficients $a(j), j \geq 1$ which determine the functional $A\zeta$ satisfy condition

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a(j)| < \infty \tag{4}$$

and are of the form

$$a(j) = a\left(\left(j - \left[\frac{j}{T}\right]T\right) + \left[\frac{j}{T}\right]T\right) = \\ = a(\nu + \tilde{j}T) = a(\tilde{j})e^{2\pi i\tilde{j}\nu/T}, \tag{5}$$
$$\nu = 1, \dots, T, \ \tilde{j} \geq 0,$$

where $\nu = T$ and $\tilde{j} = \lambda - 1$, if $j = T \cdot \lambda$, $\lambda \in \mathbb{Z}$, or $a(j) = a(T\cdot\lambda) = a(T+(\lambda-1)T) = a(\lambda-1)e^{2\pi i(\lambda-1)T/T}$.

Under the condition (4) the functional $A\zeta$ has the finite second moment.

Using Proposition 1.2, the linear functional $A\zeta$ can be written as follows

$$A\zeta = \sum_{j=1}^{\infty} a(j)\zeta(j) = \sum_{\tilde{j}=0}^{\infty} a(\tilde{j}) \sum_{\nu=1}^{T} e^{2\pi i\tilde{j}\nu/T}\zeta(\nu+\tilde{j}T) =$$

$$= \sum_{\widetilde{j}=0}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{T} a(\widetilde{j})e^{2\pi i\widetilde{j}\nu/T}\zeta_\nu(j) = \sum_{\widetilde{j}=0}^{\infty}\vec{a}^{\top}(\widetilde{j})\vec{\zeta}(\widetilde{j}) = A\vec{\zeta},$$

where

$$\vec{a}^{\top}(\widetilde{j}) = \Big(a_1(\widetilde{j}),\dots,a_T(\widetilde{j})\Big),$$

$$a_\nu(\widetilde{j}) = a(\widetilde{j})e^{2\pi i\widetilde{j}\nu/T},\ \nu = 1,\dots,T, \quad (6)$$

$\vec{\zeta}(\widetilde{j}) = \Big\{\zeta_\nu(\widetilde{j})\Big\}_{\nu=1}^{T}$ is T-variate stationary sequence, obtained by the T-blocking (3) of univariate T-PC sequence $\zeta(j)$, $j \geq 1$.

Let $\vec{\zeta}(j)$ and $\vec{\theta}(j)$ be uncorrelated T-variate stationary stochastic sequences with the spectral density matrices $f^{\vec{\zeta}}(\lambda) = \Big\{f^{\vec{\zeta}}_{\nu\mu}(\lambda)\Big\}_{\nu,\mu=1}^{T}$ and $f^{\vec{\theta}}(\lambda) = \Big\{f^{\vec{\theta}}_{\nu\mu}(\lambda)\Big\}_{\nu,\mu=1}^{T}$, respectively. Consider the problem of optimal linear estimation of the functional

$$A\vec{\zeta} = \sum_{\widetilde{j}=0}^{\infty}\vec{a}^{\top}(\widetilde{j})\vec{\zeta}(\widetilde{j}),$$

that depends on the unknown values of sequence $\vec{\zeta}(\widetilde{j})$, based on observations of the sequence $\vec{\zeta}(\widetilde{j}) + \vec{\theta}(\widetilde{j})$ at points $\widetilde{j} \in \{...,-n,...,-1\} \setminus \widetilde{S}$, $\widetilde{S} = \bigcup_{l=1}^{s}\{-M_l,\dots,-M_{l-1} - N_l - 1\}$, $M_l = \sum_{k=0}^{l}(N_k + K_k)$, $N_0 = K_0 = 0$,.

Let the spectral densities $f^{\vec{\zeta}}(\lambda)$ and $f^{\vec{\theta}}(\lambda)$ satisfy the minimality condition

$$\int_{-\pi}^{\pi} Tr\Big[(f^{\vec{\zeta}}(\lambda) + f^{\vec{\theta}}(\lambda))^{-1}\Big]d\lambda < +\infty. \quad (7)$$

Condition (7) is necessary and sufficient in order that the error-free extrapolation of unknown values of the sequence $\vec{\zeta}(j) + \vec{\theta}(j)$ is impossible [34].

Denote by $L_2(f)$ the Hilbert space of vector valued functions $\vec{b}(\lambda) = \{b_\nu(\lambda)\}_{\nu=1}^{T}$ that are integrable with respect to a measure with the density $f(\lambda) = \{f_{\nu\mu}(\lambda)\}_{\nu,\mu=1}^{T}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\vec{b}^{\top}(\lambda)f(\lambda)\overline{\vec{b}(\lambda)}d\lambda =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{\nu,\mu=1}^{T} b_\nu(\lambda)f_{\nu\mu}(\lambda)\overline{b_\mu(\lambda)}d\lambda < +\infty.$$

Denote by $L_2^s(f)$ the subspace in $L_2(f)$ generated by functions

$$e^{i\widetilde{j}\lambda}\delta_\nu, \delta_\nu = \{\delta_{\nu\mu}\}_{\mu=1}^{T},\ \nu = 1,\dots,T,$$

$$\widetilde{j} \in \{\dots,-n,\dots,-1\} \setminus \widetilde{S},$$

where $\delta_{\nu\nu}$ is the Kronecker delta: $\delta_{\nu\nu} = 1, \delta_{\nu\mu} = 0$ for $\nu \neq \mu$.

Every linear estimate $\widehat{A\vec{\zeta}}$ of the functional $A\vec{\zeta}$ from observations of the sequence $\vec{\zeta}(\widetilde{j}) + \vec{\theta}(\widetilde{j})$ at points $\widetilde{j} \in \{...,-n,...,-1\} \setminus \widetilde{S}$ has the form

$$\widehat{A\vec{\zeta}} = \int_{-\pi}^{\pi}\vec{h}^{\top}(e^{i\lambda})(Z^{\vec{\zeta}}(d\lambda) + Z^{\vec{\theta}}(d\lambda)) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{\nu=1}^{T} h_\nu(e^{i\lambda})(Z_\nu^{\vec{\zeta}}(d\lambda) + Z_\nu^{\vec{\theta}}(d\lambda)), \quad (8)$$

where $Z^{\vec{\zeta}}(\Delta) = \Big\{Z_\nu^{\vec{\xi}}(\Delta)\Big\}_{\nu=1}^{T}$ and $Z^{\vec{\theta}}(\Delta) = \Big\{Z_\nu^{\vec{\eta}}(\Delta)\Big\}_{\nu=1}^{T}$ are orthogonal random measures of the sequences $\vec{\zeta}(\widetilde{j})$ and $\vec{\theta}(\widetilde{j})$, and $\vec{h}(e^{i\lambda}) = \{h_\nu(e^{i\lambda})\}_{\nu=1}^{T}$ is the spectral characteristic of the estimate $\widehat{A\vec{\zeta}}$. The function $\vec{h}(e^{i\lambda}) \in L_2^s(f^{\vec{\zeta}} + f^{\vec{\theta}})$.

The mean square error $\Delta(\vec{h}; f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}})$ of the estimate $\widehat{A\vec{\zeta}}$ is calculated by the formula

$$\Delta(\vec{h}; f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}}) = E|A\vec{\zeta} - \widehat{A\vec{\zeta}}|^2 =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[A(e^{i\lambda}) - \vec{h}(e^{i\lambda})\Big]^{\top}f^{\vec{\zeta}}(\lambda)\overline{\Big[A(e^{i\lambda}) - \vec{h}(e^{i\lambda})\Big]}d\lambda +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\vec{h}^{\top}(e^{i\lambda})f^{\vec{\theta}}(\lambda)\overline{\vec{h}(e^{i\lambda})}d\lambda, \quad (9)$$

$$A(e^{i\lambda}) = \sum_{\widetilde{j}=0}^{\infty}\vec{a}(\widetilde{j})e^{i\widetilde{j}\lambda}.$$

The spectral characteristic $\vec{h}(f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}})$ of the optimal linear estimate of $A\vec{\zeta}$ minimizes the mean square error

$$\Delta(f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}}) = \Delta(\vec{h}(f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}}); f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}}) =$$

$$= \min_{\vec{h}\in L_2^s(f^{\vec{\zeta}}+f^{\vec{\theta}})}\Delta(\vec{h}; f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}}) = \min_{\widehat{A\vec{\zeta}}}E|A\vec{\zeta} - \widehat{A\vec{\zeta}}|^2. \quad (10)$$

With the help of the Hilbert space projection method proposed by A. N. Kolmogorov [15] we can find a solution of the optimization problem (10). The optimal linear estimate $\widehat{A\vec{\zeta}}$ is a projection of the functional $A\vec{\zeta}$ on the subspace $H^s[\vec{\zeta} + \vec{\theta}] = H^s[\zeta_\nu(\widetilde{j}) + \theta_\nu(\widetilde{j}),\ \widetilde{j} \in \{...,-n,...,-1\}\setminus\widetilde{S}, \nu = 1,\dots,T]$ of the Hilbert space $H = \{\zeta : \mathsf{E}\zeta = 0,\ \mathsf{E}|\zeta|^2 < \infty\}$, generated by values $\zeta_\nu(\widetilde{j}) +$

$\theta_\nu(\widetilde{j}), \widetilde{j} \in \{..., -n, ..., -1\}\backslash\widetilde{S}, \nu = 1, \dots, T$. The projection is characterized by following conditions

1) $\widehat{A\vec{\zeta}} \in H^s[\vec{\zeta} + \vec{\theta}]$,

2) $A\vec{\zeta} - \widehat{A\vec{\zeta}} \perp H^s[\vec{\zeta} + \vec{\theta}]$.

The condition 2) gives us the possibility to derive the formula for spectral characteristic of the estimate

$$\vec{h}^\top(f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}}) = \left(A^\top(e^{i\lambda})f^{\vec{\zeta}}(\lambda) - C^\top(e^{i\lambda})\right)\left[f^{\vec{\zeta}}(\lambda) + f^{\vec{\theta}}(\lambda)\right]^{-1} = = A^\top(e^{i\lambda}) - \left(A^\top(e^{i\lambda})f^{\vec{\theta}}(\lambda) + C^\top(e^{i\lambda})\right) \times \times \left[f^{\vec{\zeta}}(\lambda) + f^{\vec{\theta}}(\lambda)\right]^{-1}, \quad (11)$$

where

$$C(e^{i\lambda}) = \sum_{n\in\Gamma} \vec{c}(n)e^{in\lambda},$$

where $\Gamma = \widetilde{S} \cup \{0, 1, 2, ...\}$ and $\vec{c}(n), n \in \Gamma$, are unknown vectors of coefficients.

Condition 1) is satisfied if the system of equalities

$$\int_{-\pi}^{\pi} \vec{h}(f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}})e^{-im\lambda}d\lambda = 0, m \in \Gamma \quad (12)$$

holds true.

The last equalities (12) provide the following relations for all $m \in \Gamma$:

$$\sum_{\widetilde{j}=0}^{\infty} \vec{a}^\top(\widetilde{j})\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\vec{\zeta}}(\lambda)(f^{\vec{\zeta}}(\lambda)+f^{\vec{\theta}}(\lambda))^{-1}e^{i\lambda(\widetilde{j}-m)}d\lambda = \sum_{n\in\Gamma} \vec{c}^\top(n)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f^{\vec{\zeta}}(\lambda) + f^{\vec{\theta}}(\lambda))^{-1}e^{i\lambda(n-m)}d\lambda. \quad (13)$$

Denote the Fourier coefficients of the matrix functions $(f^{\vec{\zeta}}(\lambda) + f^{\vec{\theta}}(\lambda))^{-1}$ and $f^{\vec{\zeta}}(\lambda)(f^{\vec{\zeta}}(\lambda) + f^{\vec{\theta}}(\lambda))^{-1}$ as

$$B(m-n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f^{\vec{\zeta}}(\lambda) + f^{\vec{\theta}}(\lambda))^{-1}e^{i\lambda(n-m)}d\lambda,$$

$$R(m-\widetilde{j}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\vec{\zeta}}(\lambda)(f^{\vec{\zeta}}(\lambda)+f^{\vec{\theta}}(\lambda))^{-1}e^{i\lambda(\widetilde{j}-m)}d\lambda,$$

$$n, m \in \Gamma, \widetilde{j} = 0, 1, 2....$$

Denote by $\vec{\mathbf{a}}^\top = (\vec{0}^\top, ..., \vec{0}^\top, \vec{a}^\top(0), \vec{a}^\top(1), ...)$ a vector that has first $\sum_{i=1}^{s} K_i = K_1 + ... + K_s$ zero vectors $\vec{0}^\top = (\underbrace{0, ..., 0}_{T})$, next vectors $\vec{a}(0), \vec{a}(1), ...$ are constructed from coefficients of the functional $A\zeta$ by formula (6).

Rewrite the relation (13) in the matrix form

$$\mathbf{R}\vec{\mathbf{a}} = \mathbf{B}\vec{\mathbf{c}},$$

where $\vec{\mathbf{c}}^\top = (\vec{c}^\top(k))_{k\in\Gamma}$ is a vector of the unknown coefficients. The linear operator $\mathbf{B}$ is defined by the matrix

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_{s,s} & B_{s,s-1} & \dots & B_{s,1} & B_{s,n} \\ B_{s-1,s} & B_{s-1,s-1} & \dots & B_{s-1,1} & B_{s-1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ B_{1,s} & B_{1,s-1} & \dots & B_{1,1} & B_{1,n} \\ B_{n,s} & B_{n,s-1} & \dots & B_{n,1} & B_{n,n} \end{pmatrix},$$

constructed with the help of the block-matrices

$$B_{lm} = \{B_{lm}(k,j)\}_{k=-M_{l-1-N_l-1}}^{-M_l}{}_{j=-M_{m-1}-N_m-1}^{-M_m},$$
$$B_{lm}(k,j) = B(k-j),\ l, m = 1, ..., s,$$

$$B_{ln}(k,j) = \{B_{ln}(k,j)\}_{k=-M_{l-1-N_l-1}}^{-M_l}{}_{j=0}^{\infty},$$
$$B_{ln}(k,j) = B(k-j),\ l = 1, ..., s,$$

$$B_{nl}(k,j) = \{B_{nl}(k,j)\}_{k=0}^{\infty}{}_{j=-M_{m-1}-N_m-1}^{-M_m},$$
$$B_{nl}(k,j) = B(k-j),\ m = 1, ..., s,$$

$$B_{nn}(k,j) = \{B_{nn}(k,j)\}_{k=0}^{\infty}{}_{j=0}^{\infty},$$
$$B_{nn}(k,j) = B(k-j).$$

The linear operator $\mathbf{R}$ is defined by the corresponding matrix, which is constructed in the same manner as matrix $\mathbf{B}$.

The unknown coefficients $\vec{c}(k), k \in \Gamma$ are determined from the equation

$$\vec{\mathbf{c}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}\vec{\mathbf{a}}, \quad (14)$$

where the k-th component of the vector $\vec{\mathbf{c}}$ is the k-th component of vector $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}\vec{\mathbf{a}}$:

$$\vec{c}(k) = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}\vec{\mathbf{a}})(k),\ k \in \Gamma.$$

We will suppose that the operator $\mathbf{B}$ has the inverse matrix.

The mean-square error of the optimal estimate $\widehat{A\vec{\zeta}}$ is calculated by the formula (9) and is of the form

$$\Delta(\vec{h}, f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}}) = E|A\vec{\zeta} - \widehat{A\vec{\zeta}}|^2 =$$

$$= \sum_{\widetilde{j}=0}^{\infty}\sum_{\widetilde{k}=0}^{\infty} \vec{a}^{\top}(\widetilde{j})\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\vec{\zeta}}(\lambda)(f^{\vec{\zeta}}(\lambda)+f^{\vec{\theta}}(\lambda))^{-1}\times$$
$$\times f^{\vec{\theta}}(\lambda)e^{-i\lambda(\widetilde{j}-\widetilde{k})}d\lambda\cdot\overline{\vec{a}(\widetilde{k})}+$$

$$+\sum_{n\in\Gamma}\sum_{k\in\Gamma}\vec{c}^{\top}(\widetilde{j})\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f^{\vec{\zeta}}(\lambda)+f^{\vec{\theta}}(\lambda))^{-1}\times$$
$$\times e^{-i\lambda(n-k)}d\lambda\cdot\overline{\vec{c}(k)}=$$
$$=\langle \mathbf{D}\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{a}}\rangle+\langle \mathbf{B}\vec{\mathbf{c}},\vec{\mathbf{c}}\rangle, \qquad (15)$$

where $\langle a,b\rangle$ denotes the scalar product, $\mathbf{D}$ is defined by the corresponding matrix, which is constructed in the same manner as matrix $\mathbf{B}$, with elements

$$D(\widetilde{k}-\widetilde{j})=$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f^{\vec{\zeta}}(\lambda)(f^{\vec{\zeta}}(\lambda)+f^{\vec{\theta}}(\lambda))^{-1}f^{\vec{\theta}}(\lambda)\right]^{\top}e^{i(\widetilde{j}-\widetilde{k})\lambda}d\lambda,$$
$$\widetilde{k}\geq 0,\ \widetilde{j}\geq 0.$$

See [27] for more details.

Theorem 1. *Let $\zeta(j)$ and $\theta(j)$ be uncorrelated T-PC stochastic sequences with the spectral density matrices $f^{\vec{\zeta}}(\lambda)$ and $f^{\vec{\theta}}(\lambda)$ of T-variate stationary sequences $\vec{\zeta}(\widetilde{j})$ and $\vec{\theta}(\widetilde{j})$, respectively. Assume that $f^{\vec{\zeta}}(\lambda)$ and $f^{\vec{\theta}}(\lambda)$ satisfy the minimality condition (7). Assume that condition (4) is satisfied and operator $\boldsymbol{B}$ is invertible. The spectral characteristic $\vec{h}(f^{\vec{\zeta}},f^{\vec{\theta}})$ and the mean square error $\Delta(f^{\vec{\zeta}},f^{\vec{\theta}})$ of the optimal linear estimate of the functional $A\vec{\zeta}$ based on observations of the sequence $\vec{\zeta}(\widetilde{j})+\vec{\theta}(\widetilde{j})$ at points $\widetilde{j}\in\{...,-n,...,-1\}\setminus\widetilde{S}$, are calculated by formulas (11) and (15).*

Consider the mean-square estimation problem of $A\vec{\zeta}$ based on observations of the sequence $\vec{\zeta}(\widetilde{j})$ at points $\widetilde{j}\in\{...,-n,...,-1\}\setminus\widetilde{S}$. In this case the spectral density $f^{\vec{\theta}}(\lambda)=0$. The spectral characteristic $\vec{h}(f^{\vec{\zeta}})$ of the estimate $\widehat{A\vec{\zeta}}$ is of the form

$$\vec{h}^{\top}(f^{\vec{\zeta}})=A^{\top}(e^{i\lambda})-C^{\top}(e^{i\lambda})\left[f^{\vec{\zeta}}(\lambda)\right]^{-1}, \qquad (16)$$

where unknown coefficients $\vec{c}(k)$, $k\in\Gamma$ are determined from the relation

$$\mathbf{B}\vec{\mathbf{c}}=\vec{\mathbf{a}} \qquad (17)$$

or

$$\vec{\mathbf{c}}=\mathbf{B}^{-1}\vec{\mathbf{a}},$$

where the linear operator $\mathbf{B}$ is defined by the matrix

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} B_{s,s} & B_{s,s-1} & \dots & B_{s,1} & B_{s,n}\\ B_{s-1,s} & B_{s-1,s-1} & \dots & B_{s-1,1} & B_{s-1,n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ B_{1,s} & B_{1,s-1} & \dots & B_{1,1} & B_{1,n}\\ B_{n,s} & B_{n,s-1} & \dots & B_{n,1} & B_{n,n}\end{pmatrix},$$

constructed with the help of the block-matrices

$$B_{lm}=\{B_{lm}(k,j)\}_{k=-M_{l-1-N_l-1}}^{-M_l}{}_{j=-M_{m-1}-N_m-1}^{-M_m},$$
$$B_{lm}(k,j)=B(k-j),\ l,m=1,...,s,$$

$$B_{ln}(k,j)=\{B_{ln}(k,j)\}_{k=-M_{l-1-N_l-1}}^{-M_l}{}_{j=0}^{\infty},$$
$$B_{ln}(k,j)=B(k-j),\ l=1,...,s,$$

$$B_{nl}(k,j)=\{B_{nl}(k,j)\}_{k=0}^{\infty}{}_{j=-M_{m-1}-N_m-1}^{-M_m},$$
$$B_{nl}(k,j)=B(k-j),\ m=1,...,s,$$

$$B_{nn}(k,j)=\{B_{nn}(k,j)\}_{k=0}^{\infty}{}_{j=0}^{\infty},$$
$$B_{nn}(k,j)=B(k-j),$$

with elements

$$B(k-j)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[(f^{\vec{\zeta}}(\lambda))^{-1}\right]^{\top}e^{i(j-k)\lambda}d\lambda,$$
$$k\in\Gamma,\ j\in\Gamma.$$

The mean square error $\Delta(f^{\vec{\zeta}})$ is defined by the formula

$$\Delta(f^{\vec{\zeta}})=\langle\vec{\mathbf{c}},\vec{\mathbf{a}}\rangle. \qquad (18)$$

Thus, in the case without noise we have the following result.

Corollary 1. *Let $\zeta(j)$ be a T-PC stochastic sequence with the spectral density matrix $f^{\vec{\zeta}}(\lambda)$ of T-variate stationary sequence $\vec{\zeta}(j)$. Assume that $f^{\vec{\zeta}}(\lambda)$ satisfies the minimality condition*

$$\int_{-\pi}^{\pi}Tr\left[(f^{\vec{\zeta}}(\lambda))^{-1}\right]d\lambda<+\infty. \qquad (19)$$

Assume that condition (4) is satisfied and operator $\boldsymbol{B}$ is invertible. Then the optimal linear estimate

of $A\vec{\zeta}$ based on observations of $\vec{\zeta}(\widetilde{j})$ at points $\widetilde{j} \in \{..., -n, ..., -1\} \setminus \widetilde{S}$, is given by the formula

$$\widehat{A\vec{\zeta}} = \int_{-\pi}^{\pi} \vec{h}^{\top}(f^{\vec{\zeta}}) Z^{\vec{\zeta}}(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\nu=1}^{T} h_{\nu}(f^{\vec{\zeta}}) Z_{\nu}^{\vec{\zeta}}(d\lambda).$$

The spectral characteristic $\vec{h}(f^{\vec{\zeta}})$ and the mean square error $\Delta(f^{\vec{\zeta}})$ of $\widehat{A\vec{\zeta}}$ are calculated by formulas (16) and (18).

Let us consider the mean-square estimation problem of functional

$$A_N\zeta = \sum_{j=1}^{N\cdot T} a(j)\zeta(j)$$

that depends on unknown values of T-PC stochastic sequence $\zeta(j)$, based on observations of the sequence $\zeta(j) + \theta(j)$ at points $j \in \{..., -n, ..., -1, 0\} \setminus S$. $\theta(j)$ is uncorrelated with $\zeta(j)$ T-PC stochastic sequence.

Using Proposition 1.2, the linear functional $A_N\zeta$ can be written as follows

$$\begin{aligned} A_N\zeta &= \sum_{j=1}^{N\cdot T} a(j)\zeta(j) = \\ &= \sum_{\widetilde{j}=0}^{N-1} a(\widetilde{j}) \sum_{\nu=1}^{T} e^{2\pi i \widetilde{j}\nu/T} \zeta(\nu + \widetilde{j}T) = \\ &= \sum_{\widetilde{j}=0}^{N-1} \sum_{\nu=1}^{T} a(\widetilde{j}) e^{2\pi i \widetilde{j}\nu/T} \zeta_{\nu}(j) = \\ &= \sum_{\widetilde{j}=0}^{N-1} \vec{a}^{\top}(\widetilde{j}) \vec{\zeta}(\widetilde{j}) = A_N\vec{\zeta}, \end{aligned}$$

where $\vec{a}^{\top}(\widetilde{j})$ is defined by relation (6), $\vec{\zeta}(\widetilde{j}) = \left\{\zeta_{\nu}(\widetilde{j})\right\}_{\nu=1}^{T}$ is T-variate stationary sequence, obtained by the T-blocking (3) of univariate T-PC sequence $\zeta(j)$, $j \geq 1$.

Let $\vec{\zeta}(j)$ and $\vec{\theta}(j)$ be uncorrelated T-variate stationary stochastic sequences with the spectral density matrices $f^{\vec{\zeta}}(\lambda) = \left\{f_{\nu\mu}^{\vec{\zeta}}(\lambda)\right\}_{\nu,\mu=1}^{T}$ and $f^{\vec{\theta}}(\lambda) = \left\{f_{\nu\mu}^{\vec{\theta}}(\lambda)\right\}_{\nu,\mu=1}^{T}$, respectively. Consider the problem of optimal linear estimation of the functional

$$A_N\vec{\zeta} = \sum_{\widetilde{j}=0}^{N-1} \vec{a}^{\top}(\widetilde{j})\vec{\zeta}(\widetilde{j}), \tag{20}$$

that depends on the unknown values of sequence $\vec{\zeta}(\widetilde{j})$, based on observations of the sequence $\vec{\zeta}(\widetilde{j}) + \vec{\theta}(\widetilde{j})$ at points $\widetilde{j} \in \{..., -n, ..., -1\} \setminus \widetilde{S}$, $\widetilde{S} = \bigcup_{l=1}^{s}\{-M_l, \ldots, -M_{l-1} - N_l - 1\}$, $M_l = \sum_{k=0}^{l}(N_k + K_k)$, $N_0 = K_0 = 0$.

The estimate

$$\widehat{A_N\vec{\zeta}} = \int_{-\pi}^{\pi} \vec{h}_N^{\top}(e^{i\lambda}) Z^{\vec{\zeta}}(d\lambda) \tag{21}$$

of the functional $A_N\vec{\zeta}$ is defined by the spectral characteristic $\vec{h}_N(e^{i\lambda}) \in L_2^s(f^{\vec{\zeta}} + f^{\vec{\theta}})$.

Denote by $\vec{\mathbf{a}}_N^{\top} = (\vec{0}^{\top}, ..., \vec{0}^{\top}, \vec{a}^{\top}(0), ..., \vec{a}^{\top}(N-1), \vec{0}^{\top}, \vec{0}^{\top}, ...)$ a vector that has first $\sum_{i=1}^{s} K_i$ zero vectors $\vec{0}^{\top}$, next N vectors $\vec{a}(0), ..., \vec{a}(N-1)$ are constructed from coefficients of the functional $A_N\zeta$ by formula (6).

With the help of Hilbert space projection method we can derive the following relations for all $m \in \Gamma$:

$$\sum_{\widetilde{j}=0}^{N-1} \vec{a}^{\top}(\widetilde{j}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\vec{\zeta}}(\lambda)(f^{\vec{\zeta}}(\lambda) + f^{\vec{\theta}}(\lambda))^{-1} e^{i\lambda(\widetilde{j}-m)} d\lambda =$$

$$\sum_{n\in\Gamma} \vec{c}^{\top}(n) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f^{\vec{\zeta}}(\lambda) + f^{\vec{\theta}}(\lambda))^{-1} e^{i\lambda(n-m)} d\lambda. \tag{22}$$

Denote by $\mathbf{R}_N$ the linear operator which is defined as follows: $\mathbf{R}_N(k,j) = \mathbf{R}(k,j)$, $j \leq N-1$, $\mathbf{R}_N(k,j) = 0$, $j > N-1$. Then we can rewrite the relations (22) in the matrix form

$$\mathbf{R}_N\vec{\mathbf{a}}_N = \mathbf{B}\vec{\mathbf{c}}.$$

The unknown vectors $\vec{c}(k)$, $k \in \Gamma$, are determined from the equation

$$\vec{\mathbf{c}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}_N\vec{\mathbf{a}}_N.$$

The spectral characteristic of the optimal estimate $\widehat{A_N\vec{\zeta}}$ is calculated by formula

$$\begin{aligned} &\vec{h}_N^{\top}(e^{i\lambda}) = \\ &= \left(A_N^{\top}(e^{i\lambda}) f^{\vec{\zeta}}(\lambda) - C^{\top}(e^{i\lambda})\right) \left[f^{\vec{\zeta}}(\lambda) + f^{\vec{\theta}}(\lambda)\right]^{-1}, \end{aligned} \tag{23}$$

where

$$A_N(e^{i\lambda}) = \sum_{\widetilde{j}=0}^{N-1} \vec{a}(\widetilde{j}) e^{i\widetilde{j}\lambda}.$$

The mean-square error of the optimal estimate $\widehat{A_N\vec{\zeta}}$ is calculated by formula

$$\Delta(\vec{h}_N, f^{\vec{\zeta}}, f^{\vec{\theta}}) = E|A_N\vec{\zeta} - \widehat{A_N\vec{\zeta}}|^2 =$$

$$= \sum_{\widetilde{j}=0}^{N-1}\sum_{\widetilde{k}=0}^{N-1} \vec{a}^{\top}(\widetilde{j})\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\vec{\zeta}}(\lambda)(f^{\vec{\zeta}}(\lambda)+f^{\vec{\theta}}(\lambda))^{-1}\times \times f^{\vec{\theta}}(\lambda)e^{-i\lambda(\widetilde{j}-\widetilde{k})}d\lambda\cdot\overline{\vec{a}(\widetilde{k})}+$$

$$+\sum_{n\in\Gamma}\sum_{k\in\Gamma}\vec{c}^{\top}(\widetilde{j})\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f^{\vec{\zeta}}(\lambda)+f^{\vec{\theta}}(\lambda))^{-1}\times \times e^{-i\lambda(n-k)}d\lambda\cdot\overline{\vec{c}(k)} =$$

$$= \langle \mathbf{D}_N\vec{\mathbf{a}}_N,\vec{\mathbf{a}}_N\rangle + \langle \mathbf{B}\vec{\mathbf{c}},\vec{\mathbf{c}}\rangle, \qquad (24)$$

where linear operator $\mathbf{D}$ is defined as follows: $\mathbf{D}_N(k,j)=\mathbf{D}(k,j)$, $k,j\le N-1$, $\mathbf{D}_N(k,j)=0$ if $k>N-1$ or $j>N-1$.

Theorem 2. *Let $\zeta(j)$ and $\theta(j)$ be uncorrelated T-PC stochastic sequences with the spectral density matrices $f^{\vec{\zeta}}(\lambda)$ and $f^{\vec{\theta}}(\lambda)$ of T-variate stationary sequences $\vec{\zeta}(\widetilde{j})$ and $\vec{\theta}(\widetilde{j})$, respectively. Assume that $f^{\vec{\zeta}}(\lambda)$ and $f^{\vec{\theta}}(\lambda)$ satisfy the minimality condition (7). Assume that operator $\boldsymbol{B}$ is invertible. The spectral characteristic $\vec{h}_N(e^{i\lambda})$ and the mean square error $\Delta(\vec{h}_N;f^{\vec{\zeta}},f^{\vec{\theta}})$ of the optimal linear estimate of the functional $A_N\vec{\zeta}$ based on observations of the sequence $\vec{\zeta}(\widetilde{j})+\vec{\theta}(\widetilde{j})$ at points $\widetilde{j}\in\{...,-n,...,-1\}\setminus\widetilde{S}$, are calculated by formulas (23) and (24).*

In the case of observation without noise we have the following result.

Corollary 2. *Let $\zeta(j)$ be a T-PC stochastic sequence with the spectral density matrix $f^{\vec{\zeta}}(\lambda)$ of T-variate stationary sequence $\vec{\zeta}(j)$. Assume that $f^{\vec{\zeta}}(\lambda)$ satisfies the minimality condition (19). Assume that operator $\boldsymbol{B}$ is invertible. The spectral characteristic $\vec{h}_N(e^{i\lambda})$ and the mean square error $\Delta(f^{\vec{\zeta}})$ of $\widehat{A_N\vec{\zeta}}$ are calculated by formulas*

$$\vec{h}_N^{\top}(e^{i\lambda}) = A_N^{\top}(e^{i\lambda}) - C^{\top}(e^{i\lambda})\left[f^{\vec{\zeta}}(\lambda)\right]^{-1}, \quad (25)$$

$$\Delta(f^{\vec{\zeta}}) = \langle \vec{\mathbf{c}},\vec{\mathbf{a}}_N\rangle. \qquad (26)$$

The linear operator $\boldsymbol{B}$ is defined in Corollary 1, vector $\vec{\mathbf{c}}$ is defined by the equation $\vec{\mathbf{c}}=\boldsymbol{B}^{-1}\vec{\mathbf{a}}_N$.

Example 1. Let $\zeta(n)$, $n\in\mathbb{Z}$, be a 2-PC stochastic sequence such that $\zeta(2n)=\eta(n)$ is a univariate white noise with the spectral density $f(\lambda)=1$ and $\zeta(2n+1)=\gamma(n)$ is an uncorrelated with $\eta(n)$ univariate stationary Ornstein-Uhlenbeck sequence with the spectral density $g(\lambda)=\frac{1}{|1-e^{i\lambda}|^2}$. Consider the problem of estimation of the functional

$$A_1\zeta=\zeta(1)+\zeta(2)$$

based on observations of $\zeta(n), n\in\{...,-1,0\}\setminus\{-3,-2\}=\{...,-5,-4,-1,0\}$. Here $S=\{-3,-2\}$, $N_1=K_1=1$, $M_1=2$.

Rewrite functional $A_1\zeta$ in the form (20)

$$A_1\zeta=\zeta(1)+\zeta(2)= = (1,1)\cdot\begin{pmatrix}\zeta_1(0)\\ \zeta_2(0)\end{pmatrix} = \vec{a}^{\top}(0)\vec{\zeta}(0)=A_1\vec{\zeta},$$

where $\vec{a}(0)=(a(1+0\cdot 2)e^{2\pi i1\cdot 0/2}, a(2+0\cdot 2)e^{2\pi i2\cdot 0/2})^{\top}=(1,1)^{\top}$, $\vec{\zeta}(0)=(\zeta(1+0\cdot 2),\zeta(2+0\cdot 2))^{\top}=(\zeta_1(0),\zeta_2(0))^{\top}$, $\widetilde{S}=\{-2\}$. The spectral density matrix of 2-variate stationary sequence $\vec{\zeta}(n)$ is of the form

$$f^{\vec{\zeta}}(\lambda)=\begin{pmatrix}f(\lambda) & 0\\ 0 & g(\lambda)\end{pmatrix}$$

The matrix $\left[f^{\vec{\zeta}}(\lambda)\right]^{-1}$ is of the form

$$[f^{\vec{\zeta}}(\lambda)]^{-1}= = \begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}e^{-i\lambda}+\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}e^{i\lambda}= = B(0)+B(-1)e^{-i\lambda}+B(1)e^{i\lambda}$$

and satisfies the minimality condition (19). In the last equality matrices

$$B(0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix},\ B(-1)=B(1)=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

are the Fourier coefficients of the function $\left[f^{\vec{\zeta}}(\lambda)\right]^{-1}$. In order to find the spectral characteristic $\vec{h}_1(e^{i\lambda})$ and the mean-square error $\Delta(f^{\vec{\zeta}})$ of the estimate $\widehat{A_1\vec{\zeta}}$ let us use the Corollary 2. To find the unknown coefficients

$$\vec{c}(k)=(\mathbf{B}^{-1}\vec{\mathbf{a}}_N)(k), \quad k\in\Gamma=\widetilde{S}\cup\{0,1,...\}=\{-2,0,1,...\}$$

we use the equation (17), where vectors $\vec{\mathbf{c}}^{\top}=(\vec{c}^{\top}(-2),\vec{c}^{\top}(0),\vec{c}^{\top}(1),...)$, $\vec{\mathbf{a}}_1^{\top}=(\vec{0}^{\top},\vec{a}^{\top}(0),\vec{0}^{\top},...)$. The operator $\mathbf{B}$ is defined by matrix

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{1n}\\B_{n1}&B_{nn}\end{pmatrix},$$

with block-matrices

$$B_{11} = \{B_{11}(k,j)\}_{k=-2\,j=-2} = B(0),$$

$$B_{1n} = \{B_{1n}(k,j)\}_{k=-2\,j=0}^{\infty} = \\ = (B(-2)\,B(-3)\,B(-4)\,...) = (O_2\,O_2\,O_2\,...),$$

$$B_{n1} = \{B_{n1}(k,j)\}_{k=0\,j=-2} = \\ = (B(2)\,B(3)\,B(4)\,...)^{\top} = (O_2\,O_2\,O_2\,...)^{\top},$$

$$B_{nn} = \{B_{nn}(k,j)\}_{k=0\,j=0}^{\infty\,\infty} = \\ = \begin{pmatrix} B(0) & B(-1) & O_2 & ... \\ B(1) & B(0) & B(-1) & ... \\ O_2 & B(1) & B(0) & ... \\ . & . & . & ... \end{pmatrix},$$

where $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

The inverse matrix $\mathbf{B}^{-1}$ can be represented in the form

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & B_{nn}^{-1} \end{pmatrix},$$

where $B_{11}^{-1} = (B(0))^{-1}$, B_{nn}^{-1} is the inverse matrix to B_{nn}. To find B_{nn}^{-1} we use that matrix $[f^{\vec{\zeta}}(\lambda)]^{-1}$ admits factorization

$$[f^{\vec{\zeta}}(\lambda)]^{-1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} B(j)e^{ij\lambda} = \\ = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\psi(k)e^{-ik\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\psi(k)e^{-ik\lambda}\right)^{*} = \\ = \left(\left(\sum_{k=0}^{\infty}\varphi(k)e^{-ik\lambda}\right)^{*}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\varphi(k)e^{-ik\lambda}\right)\right)^{-1}.$$

where $\psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\psi(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\psi(k) = O_2, k \geq 2$ and $\varphi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\varphi(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, k \geq 1$.

If we denote by Ψ and Φ linear operators determined by matrices with elements $\Psi(i,j) = \psi(j-i)$, $\Phi(i,j) = \varphi(j-i)$, for $0 \leq i \leq j$, $\Psi(i,j) = 0$, $\Phi(i,j) = 0$, for $0 \leq j < i$. Then elements of the matrix B_{nn} can be represented in the form $B_{nn}(i,j) = (\Psi\Psi^*)(i,j)$. It is not hard to verify that $\Psi\Phi = \Phi\Psi = I$. This makes possible to write elements of B_{nn}^{-1} in the form $B_{nn}^{-1}(i,j) = (\Phi^*\Phi)(i,j) = \sum_{l=0}^{\min(i,j)}(\varphi(i-l))^*\varphi(j-l)$.

Using equation $\vec{\mathbf{c}} = \mathbf{B}^{-1}\vec{\mathbf{a}}_N$ we can represent the unknown coefficients $\vec{c}(k), k \in \Gamma$ in the form

$$\vec{c}(-2) = \vec{0},$$
$$\vec{c}(0) = B_{nn}^{-1}(0,0)\vec{a}(0),$$
$$\vec{c}(1) = B_{nn}^{-1}(1,0)\vec{a}(0),$$
$$...$$
$$\vec{c}(i) = B_{nn}^{-1}(i,0)\vec{a}(0),\ i \geq 2.$$

The spectral characteristic $\vec{h}_1(e^{i\lambda})$ is determined by the formula (25)

$$\vec{h}_1^{\top}(e^{i\lambda}) = -\vec{c}^{\top}(0)B(-1)e^{-i\lambda} = \\ = -B_{nn}^{-1}(0,0)\vec{a}(0)B(-1)e^{-i\lambda}.$$

Since $B_{nn}^{-1} = \varphi^*(0)\varphi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, the spectral characteristic is of the form

$$\vec{h}_1^{\top}(e^{i\lambda}) = -(0,-1)e^{-i\lambda}.$$

The optimal linear estimate $\widehat{A_1\vec{\zeta}}$ can be calculated by the formula (21)

$$\widehat{A_1\vec{\zeta}} = \zeta_2(-1) = \zeta(0).$$

The mean-square error of the estimate $\widehat{A_1\vec{\zeta}}$ determined by (26) equals

$$\Delta(f^{\vec{\zeta}}) = \langle \vec{\mathbf{c}}^{\top}, \vec{\mathbf{a}}_1 \rangle = 2.$$

3 Minimax (robust) method of linear extrapolation problem

Let $f(\lambda)$ and $g(\lambda)$ be the spectral density matrices of T-variate stationary sequences $\vec{\zeta}(j)$ and $\vec{\theta}(j)$, obtained by T-blocking (3) of T-PC sequences $\zeta(j)$ and $\theta(j)$, respectively.

The obtained formulas may be applied for finding the spectral characteristic and the mean square error of the optimal linear estimate of the functionals $A\vec{\zeta}$ and $A_N\vec{\zeta}$ only under the condition that the spectral density matrices $f(\lambda)$ and $g(\lambda)$ are exactly known. If the density matrices are not known exactly while a set $D = D_f \times D_g$ of possible spectral densities is given, the minimax (robust) approach to estimation of functionals from unknown values of stationary sequences is reasonable. In this case we find the estimate which minimizes the mean square error for all spectral densities from the given set simultaneously.

Definition 3. *For a given class of pairs of spectral densities $D = D_f \times D_g$ the spectral density matrices $f^0(\lambda) \in D_f$, $g^0(\lambda) \in D_g$ are called the least favorable in D for the optimal linear estimation of the functional $A\vec{\zeta}$ if*

$$\Delta(f^0, g^0) = \Delta(\vec{h}(f^0, g^0); f^0, g^0) = \\ = \max_{(f,g)\in D} \Delta(\vec{h}(f, g); f, g).$$

Definition 4. *For a given class of pairs of spectral densities $D = D_f \times D_g$ the spectral characteristic $\vec{h}^0(\lambda)$ of the optimal linear estimate of the functional $A\vec{\zeta}$ is called minimax (robust) if*

$$\vec{h}^0(\lambda) \in H_D = \bigcap_{(f,g)\in D} L_2^s(f + g),$$

$$\min_{\vec{h}\in H_D} \max_{(f,g)\in D} \Delta(\vec{h}; f, g) = \max_{(f,g)\in D} \Delta(\vec{h}^0; f, g).$$

Taking into consideration these definitions and the obtained relations we can verify that the following lemmas hold true.

Lemma 1. *The spectral density matrices $f^0(\lambda) \in D_f$, $g^0(\lambda) \in D_g$, that satisfy the minimality condition (7), are the least favorable in the class D for the optimal linear estimation of $A\vec{\zeta}$, if the Fourier coefficients of the matrix functions*

$$(f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^{-1}, \quad f^0(\lambda)(f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^{-1}, \\ f^0(\lambda)(f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^{-1} g^0(\lambda)$$

define matrices $\boldsymbol{B}^0, \boldsymbol{R}^0, \boldsymbol{D}^0$, that determine a solution of the constrained optimization problem

$$\max_{(f,g)\in D} (\langle \boldsymbol{R}\vec{a}, \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{R}\vec{a}\rangle) + \langle \boldsymbol{D}\vec{a}, \vec{a}\rangle) = \\ = \langle \boldsymbol{R}^0\vec{a}, (\boldsymbol{B}^0)^{-1}\boldsymbol{R}^0\vec{a}\rangle) + \langle \boldsymbol{D}^0\vec{a}, \vec{a}\rangle.$$

The minimax spectral characteristic $\vec{h}^0 = \vec{h}(f^0, g^0)$ is given by (11), if $\vec{h}(f^0, g^0) \in H_D$.

In the case of observations of the sequence without noise the following corollary holds true.

Corollary 3. *The spectral density matrix $f^0(\lambda) \in D_f$, that satisfies the minimality condition (19), is the least favorable in the class D_f for the optimal linear estimation of $A\vec{\zeta}$ based on observations of $\vec{\zeta}(\widetilde{j})$ at points $\widetilde{j} \in \{..., -n, ..., -1\} \setminus \widetilde{S}$, if the Fourier coefficients of the matrix function $(f^0(\lambda))^{-1}$ define the matrix $\boldsymbol{B}^0$, that determine a solution of the constrained optimization problem*

$$\max_{f\in D_f} \langle \boldsymbol{B}^{-1}\vec{a}, \vec{a}\rangle = \langle (\boldsymbol{B}^0)^{-1}\vec{a}, \vec{a}\rangle.$$

The minimax spectral characteristic $\vec{h}^0 = \vec{h}(f^0)$ is given by (16), if $\vec{h}(f^0) \in H_D$.

The least favorable spectral densities $f^0(\lambda) \in D_f$, $g^0(\lambda) \in D_g$ and the minimax spectral characteristic $\vec{h}^0 = \vec{h}(f^0, g^0)$ form a saddle point of the function $\Delta(\vec{h}; f, g)$ on the set $H_D \times D$. The saddle point inequalities

$$\Delta(\vec{h}^0; f, g) \le \Delta(\vec{h}^0; f^0, g^0) \le \Delta(\vec{h}; f^0, g^0), \\ \forall \vec{h} \in H_D, \forall f \in D_f, \forall g \in D_g$$

hold true when $\vec{h}^0 = \vec{h}(f^0, g^0)$, $\vec{h}(f^0, g^0) \in H_D$ and (f^0, g^0) is a solution of the constrained optimization problem

$$\Delta\left(\vec{h}(f^0, g^0); f, g\right) \to \sup, \\ (f, g) \in D_f \times D_g. \quad (27)$$

The linear functional $\Delta(\vec{h}(f^0, g^0); f, g)$ is calculated by the formula

$$\Delta(\vec{h}(f^0, g^0); f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(A^\top(e^{i\lambda})g^0(\lambda) + (C^0(e^{i\lambda}))^\top\right) (f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^{-1} f(\lambda)(f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^{-1} \times \\ \times \left(A^\top(e^{i\lambda})g^0(\lambda) + (C^0(e^{i\lambda}))^\top\right)^* d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(A^\top(e^{i\lambda})f^0(\lambda) - (C^0(e^{i\lambda}))^\top\right) (f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^{-1} \times \\ \times g(\lambda)(f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^{-1} \left(A^\top(e^{i\lambda})f^0(\lambda) - (C^0(e^{i\lambda}))^\top\right)^* d\lambda,$$

where $C^0(e^{i\lambda}) = \sum_{n\in\Gamma} \vec{c}^{\,0}(n)e^{in\lambda}$, column vectors $\vec{c}^{\,0}(n) = ((\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{R}^0\vec{\mathbf{a}})(n)$.

The constrained optimization problem (27) is equivalent to the unconstrained optimization problem [**?**]:

$$\Delta_D(f, g) = -\Delta(\vec{h}(f^0, g^0); f, g) + \\ + \delta((f, g)\,|D_f \times D_g) \to \inf, \quad (28)$$

where $\delta((f,g)|D_f \times D_g)$ is the indicator function of the set $D = D_f \times D_g$. A solution of the problem (28) is characterized by the condition $0 \in \partial\Delta_D(f^0, g^0)$, where $\partial\Delta_D(f^0, g^0)$ is the subdifferential of the convex functional $\Delta_D(f,g)$ at point (f^0, g^0) [33].

The form of the functional $\Delta(\vec{h}(f^0, g^0); f, g)$ admits finding the derivatives and differentials of the functional in the space $L_1 \times L_1$. Therefore the complexity of the optimization problem (28) is determined by the complexity of calculating of subdifferentials of the indicator functions $\delta((f,g)|D_f \times D_g)$ of the sets $D_f \times D_g$ [13].

Taking into consideration the introduced definitions and the derived relations we can verify that the following lemma holds true.

Lemma 2. *Let (f^0, g^0) be a solution to the optimization problem (28). The spectral densities $f^0(\lambda)$, $g^0(\lambda)$ are the least favorable in the class $D = D_f \times D_g$ and the spectral characteristic $\vec{h}^0 = \vec{h}(f^0, g^0)$ is the minimax of the optimal linear estimate of the functional $A\vec{\zeta}$ if $\vec{h}(f^0, g^0) \in H_D$.*

In the case of estimation of the functional based on observations without noise we have the following statement.

Lemma 3. *Let $f^0(\lambda)$ satisfies the condition (19) and be a solution of the constrained optimization problem*

$$\Delta(\vec{h}(f^0); f) \to sup, f(\lambda) \in D_f, \qquad (29)$$

$$\Delta(\vec{h}(f^0); f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big(C^0(e^{i\lambda})\Big)^{\top} \times \\ \times (f^0(\lambda))^{-1} f(\lambda)(f^0(\lambda))^{-1}\overline{(C^0(e^{i\lambda}))}d\lambda,$$

where $C^0(e^{i\lambda}) = \sum_{n\in\Gamma} \vec{c}^{\,0}(n)e^{in\lambda}$, column vectors $\vec{c}^{\,0}(n) = ((\boldsymbol{B}^0)^{-1}\vec{\mathbf{a}})(n)$.

Then $f^0(\lambda)$ is the least favorable spectral density matrix for the optimal linear estimation of $A\vec{\zeta}$ based on observations of $\vec{\zeta}(\widetilde{j})$ at points $\widetilde{j} \in \{..., -n, ..., -1\} \setminus \widetilde{S}$. The minimax spectral characteristic $\vec{h}^0 = \vec{h}(f^0)$ is given by (16), if $\vec{h}(f^0) \in H_D$.

4 The least favorable spectral densities in the class $D = D_0 \times D_V^U$

Let $f(\lambda)$ and $g(\lambda)$ be the spectral density matrices of T-variate stationary sequences $\vec{\zeta}(j)$ and $\vec{\theta}(j)$, obtained by T-blocking (3) of T-PC sequences $\zeta(j)$ and $\theta(j)$, respectively.

Consider the problem of minimax estimation of the functional $A\vec{\zeta}$ based on observations of the sequence $\vec{\zeta}(\widetilde{j})+\vec{\theta}(\widetilde{j})$ at points $\widetilde{j} \in \{..., -n, ..., -1\} \setminus \widetilde{S}$, under the condition that the spectral density matrices $f(\lambda)$ and $g(\lambda)$ belong to the class $D = D_0 \times D_V^U$, where

$$D_0^1 = \Big\{ f(\lambda)|\, \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)d\lambda = P \Big\},$$

$$D_V^{U1} = \Big\{ g(\lambda)|\, V(\lambda) \le g(\lambda) \le U(\lambda), \\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda)d\lambda = Q \Big\},$$

$$D_0^2 = \Big\{ f(\lambda)|\, \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Tr}\ f(\lambda)d\lambda = p \Big\},$$

$$D_V^{U2} = \Big\{ g(\lambda)|\, \mathrm{Tr}\ V(\lambda) \le \mathrm{Tr}\ g(\lambda) \le \mathrm{Tr}\ U(\lambda), \\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Tr}\ g(\lambda)d\lambda = q \Big\},$$

where P, Q are known positive definite Hermitian matrices, spectral densities $V(\lambda), U(\lambda)$ are known and fixed, p, q are known and fixed numbers.

With the help of the method of Lagrange multipliers we can find that solution $(f^0(\lambda), g^0(\lambda))$ of the constrained optimization problem (27) satisfy the following relations for these sets of admissible spectral densities.

For the pair $D_0^1 \times D_V^{U1}$ we have relations

$$(g^0(\lambda)\overline{A(e^{i\lambda})}+\overline{C^0(e^{i\lambda})})((g^0(\lambda))^{\top}A(e^{i\lambda})+C^0(e^{i\lambda}))^{\top} \\ = (f^0(\lambda)+g^0(\lambda))\overline{\vec{\alpha}}\vec{\alpha}^{\top}(f^0(\lambda)+g^0(\lambda)), \quad (30)$$

$$(f^0(\lambda)\overline{A(e^{i\lambda})}-\overline{C^0(e^{i\lambda})})((f^0(\lambda))^{\top}A(e^{i\lambda})-C^0(e^{i\lambda}))^{\top} \\ = (f^0(\lambda)+g^0(\lambda))(\overline{\vec{\beta}}\vec{\beta}^{\top}+\psi_1(\lambda)+\psi_2(\lambda))(f^0(\lambda)+g^0(\lambda)), \quad (31)$$

where $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ are Lagrange multipliers, $\psi_1(\lambda) \le 0$ and $\psi_1(\lambda) = 0$ if $g^0(\lambda) \ge V(\lambda)$, $\psi_2(\lambda) \ge 0$ and $\psi_2(\lambda) = 0$ if $g^0(\lambda) \le U(\lambda)$.

For the pair $D_0^2 \times D_V^{U2}$ we have relations

$$(g^0(\lambda)\overline{A(e^{i\lambda})}+\overline{C^0(e^{i\lambda})})((g^0(\lambda))^{\top}A(e^{i\lambda})+C^0(e^{i\lambda}))^{\top} \\ = \alpha^2(f^0(\lambda)+g^0(\lambda))^2, \quad (32)$$

$$(f^0(\lambda)\overline{A(e^{i\lambda})}-\overline{C^0(e^{i\lambda})})((f^0(\lambda))^\top A(e^{i\lambda})-C^0(e^{i\lambda}))^\top \quad (\overline{C^0(e^{i\lambda})})(C^0(e^{i\lambda}))^\top =$$
$$= (\beta^2+\varphi_1(\lambda)+\varphi_2(\lambda))(f^0(\lambda)+g^0(\lambda))^2, \quad (33)$$
$$= (\beta^2+\varphi_1(\lambda)+\varphi_2(\lambda))(f^0(\lambda))^2, \quad (37)$$

where α^2, β^2 are Lagrange multipliers, $\varphi_1(\lambda) \le 0$ and $\varphi_1(\lambda) = 0$ if Tr $g^0(\lambda) \ge$ Tr $V(\lambda)$, $\varphi_2(\lambda) \ge 0$ and $\varphi_2(\lambda) = 0$ if Tr $g^0(\lambda) \le$ Tr $U(\lambda)$.

Hence the following theorem holds true.

Theorem 3. *Let the spectral densities $f^0(\lambda)$ and $g^0(\lambda)$ satisfy the minimality condition (7). The least favorable spectral densities $f^0(\lambda)$, $g^0(\lambda)$ in the class $D_0^1 \times D_V^{U1}$ for the optimal linear extrapolation of the functional $A\vec{\zeta}$ are determined by relations (30), (31). The least favorable spectral densities $f^0(\lambda)$, $g^0(\lambda)$ in the class $D_0^2 \times D_V^{U2}$ for the optimal linear extrapolation of the functional $A\vec{\zeta}$ are determined by relations (32), (33). The minimax spectral characteristic of the optimal estimate of the functional $A\vec{\zeta}$ is determined by the formula (11).*

In the case of observations of the sequence without noise the following corollaries hold true.

Corollary 4. *Let the spectral density $f^0(\lambda)$ satisfies the minimality condition (19). The least favorable spectral density $f^0(\lambda)$ in the class D_0^1 or D_0^2 for the optimal linear extrapolation of the functional $A\vec{\zeta}$ based on observations of $\vec{\zeta}(\widetilde{j})$ at points $\widetilde{j} \in \{..., -n, ..., -1\} \setminus \widetilde{S}$ is determined by relations, respectively*

$$(\overline{C^0(e^{i\lambda})})(C^0(e^{i\lambda}))^\top = f^0(\lambda)\overline{\vec{\alpha}}\vec{\alpha}^\top f^0(\lambda), \quad (34)$$

$$(\overline{C^0(e^{i\lambda})})(C^0(e^{i\lambda}))^\top = \alpha^2(f^0(\lambda))^2, \quad (35)$$

by the constrained optimization problem (29) and restrictions on the density from the corresponding class D_0^1 or D_0^2. The minimax spectral characteristic of the optimal estimate of the functional $A\vec{\zeta}$ is determined by the formula (16).

Corollary 5. *Let the spectral density $f^0(\lambda)$ satisfies the minimality condition (19). The least favorable spectral density $f^0(\lambda)$ in the class D_V^{U1} or D_V^{U2} for the optimal linear extrapolation of the functional $A\vec{\zeta}$ based on observations of $\vec{\zeta}(\widetilde{j})$ at points $\widetilde{j} \in \{..., -n, ..., -1\} \setminus \widetilde{S}$ is determined by relations, respectively*

$$(\overline{C^0(e^{i\lambda})})(C^0(e^{i\lambda}))^\top =$$
$$= f^0(\lambda)(\overline{\vec{\beta}}\vec{\beta}^\top + \psi_1(\lambda) + \psi_2(\lambda))f^0(\lambda), \quad (36)$$

by the constrained optimization problem (29) and restrictions on the density from the corresponding class D_V^{U1} or D_V^{U2}. The minimax spectral characteristic of the optimal estimate of the functional $A\vec{\zeta}$ is determined by the formula (16).

5 Conclusions

In this article we study the extrapolation of the functionals $A\zeta$ and $A_N\zeta$ which depend on the unobserved values of a periodically correlated stochastic sequence $\zeta(j)$. Estimates are based on observations of a periodically correlated stochastic sequence $\zeta(j) + \theta(j)$ with missing observations, that means that observations of $\zeta(j) + \theta(j)$ are known at points $j \in \mathbb{Z} \setminus S$, $j \in \{..., -n, ..., -2, -1, 0\} \setminus S$, $S = \bigcup_{l=1}^{s-1}\{-M_l \cdot T + 1, \dots, -M_{l-1} \cdot T - N_l \cdot T\}$. The sequence $\theta(j)$ is an uncorrelated with $\zeta(j)$ additive noise.

The extrapolation problem is considered under the condition of spectral certainty and under the condition of spectral uncertainty. In the first case of spectral certainty the spectral density matrices $f(\lambda)$ and $g(\lambda)$ of the T-variate stationary sequences $\vec{\zeta}(n)$ and $\vec{\theta}(n)$, obtained by T-blocking of T-PC sequences $\zeta(j)$ and $\theta(j)$, respectively, are suppose to be known exactly. With the help of Hilbert space projection method formulas for calculating the spectral characteristic and the mean-square error of the optimal estimate of the functionals are proposed. In the second case of spectral uncertainty the spectral density matrices are not exactly known while a class $D = D_f \times D_g$ of admissible spectral densities is given. Using the minimax (robust) estimation method we derived relations that determine the least favorable spectral densities and the minimax spectral characteristic of the optimal estimate of the functional $A\zeta$. The problem is investigated in details for two special classes of admissible spectral densities. In each of cases of spectral certainty and uncertainty the case of observations of the sequence without noise $\theta(j)$ are presented.

References

1. W.R. Bennett, *Statistics of regenerative digital transmission*, Bell System Technical Journal, vol. 37, no. 6, pp. 1501–1542, 1958.

2. I.I. Dubovets'ka, O.Yu Masyutka and M.P. Moklyachuk, *Interpolation of periodically correlated stochastic sequences*, Theory of Probability and Mathematical Statistics, vol. 84, pp. 43–56, 2012.

3. I.I. Dubovets'ka and M.P. Moklyachuk, *Filtration of linear functionals of periodically correlated sequences*, Theory of Probability and Mathematical Statistics, vol. 86, pp. 51–64, 2013.

4. I.I. Dubovets'ka and M.P. Moklyachuk, *Extrapolation of periodically correlated processes from observations with noise*, Theory of Probability and Mathematical Statistics, vol. 88, pp. 67–83, 2014.

5. W.A. Gardner and L.E. Franks, *Characterization of cyclostationary random signal processes*, IEEE Transactions on information theory, vol. IT-21, no. 1, pp. 4–14, 1975.

6. W.A. Gardner, *Cyclostationarity in communications and signal processing*, New York: IEEE Press, 504 p., 1994.

7. W.A. Gardner, A.Napolitano and L.Paura, *Cyclostationarity: Half a century of research*, Signal Processing, vol. 86, pp. 639–697, 2006.

8. E. G. Gladyshev, *Periodically correlated random sequences*, Sov. Math. Dokl. vol, 2, pp. 385–388, 1961.

9. I. I. Golichenko and M.P. Moklyachuk, *Interpolation problem for periodically correlated stochastic sequences with missing observations*, Statistics, Optimization and Information Compututing, vol. 8, no. 2, pp. 631–654, 2020.

10. U. Grenander, *A prediction problem in game theory*, Arkiv för Matematik, vol. 3, pp. 371-379, 1957.

11. E.J. Hannan, *Multiple time series. 2nd rev. ed.*, John Wiley & Sons, New York, 536 p., 2009.

12. H. Hurd and A. Miamee, *Periodically correlated random sequences*, John Wiley & Sons, New York, 353 p., 2007.

13. A.D, Ioffe and V.M. Tihomirov, *Theory of extremal problems*, Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 6. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland Publishing Company. XII, 460 p., 1979.

14. S.A. Kassam and H.V. Poor, *Robust techniques for signal processing: A survey*, Proceedings of the IEEE, vol. 73, no. 3, pp. 433-481, 1985.

15. A.N. Kolmogorov, *Selected works by A.N. Kolmogorov. Vol. II: Probability theory and mathematical statistics*. Ed. by A.N. Shiryayev. Mathematics and Its Applications. Soviet Series. 26. Dordrecht etc. Kluwer Academic Publishers, 1992.

16. M. Luz and M. Moklyachuk, *Estimation of stochastic processes with stationary increments and cointegrated sequences*, London: ISTE; Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 282 p., 2019.

17. A. Makagon, *Theoretical prediction of periodically correlated sequences*, Probability and Mathematical Statistics, vol. 19, no. 2, pp. 287—322, 1999.

18. A. Makagon, A.G. Miamee, H. Salehi and A.R. Soltani, *Stationary sequences associated with a periodically correlated sequence*, Probability and Mathematical Statistics, vol. 31, no. 2, pp. 263–283, 2011.

19. O.Yu. Masyutka, M.P. Moklyachuk and M.I. Sidei *Extrapolation problem for multidimensional stationary sequences with missing observations*, Statistics, Optimization & Information Computing, vol. 7, no. 1, pp. 97–117, 2019.

20. O.Yu. Masyutka, M.P. Moklyachuk and M.I. Sidei *Interpolation problem for multidimensional stationary processes with missing observations*, Statistics, Optimization & Information Computing, vol. 7, no. 1, pp. 118–132, 2019.

21. O.Yu. Masyutka, M.P. Moklyachuk and M.I. Sidei *Filtering of multidimensional stationary sequences with missing observations*,

Carpathian Mathematical Publications, vol. 11, no. 2, pp. 361—378, 2019.

22. M.P. Moklyachuk, *Robust estimates for functionals of stochastic processes*, Kyiv, 320 p., 2008.

23. M.P. Moklyachuk, *Minimax-robust estimation problems for stationary stochastic sequences*, Statistics, Optimization and Information Computing, vol. 3, no. 4, pp. 348–419, 2015.

24. M.P. Moklyachuk and I. I. Golichenko, *Periodically correlated processes estimates*, LAP Lambert Academic Publishing, 308 p., 2016.

25. M.P. Moklyachuk and A.Yu. Masyutka, *Interpolation of multidimensional stationary sequences*, Theory of Probability and Mathematical Statistics, vol. 73, pp. 125–133, 2006.

26. M.P. Moklyachuk and A.Yu. Masyutka, *Minimax prediction problem for multidimensional stationary stochastic processes*, Communications in Statistics-Theory and Methods, vol. 40, no. 19-20, pp. 3700–3710, 2011.

27. M.P. Moklyachuk and A.Yu. Masyutka, *Minimax-robust estimation technique: For stationary stochastic processes*, LAP Lambert Academic Publishing, 296 p., 2012.

28. M. Moklyachuk and M. Sidei, *Extrapolation problem for stationary sequences with missing observations*, Statistics, Optimization & Information Computing, vol. 5, no. 3, pp. 212–233, 2017.

29. M. Moklyachuk, M. Sidei and O. Masyutka, *Estimation of stochastic processes with missing observations*, Mathematics Research Developments. New York, NY: Nova Science Publishers, 336 p., 2019.

30. A. Napolitano, *Cyclostationarity: Limits and generalizations*, Signal Processing, vol. 120, pp. 323–347, 2016.

31. A. Napolitano, *Cyclostationarity: New trends and applications*, Signal Processing, vol. 120, pp. 385–408, 2016.

32. B.N. Pshenichnyi, *Necessary conditions for an extremum*, Pure and Applied mathematics. 4. New York: Marcel Dekker, 230 p., 1971.

33. R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton, NJ: Princeton University Press, 451 p., 1997.

34. Yu.A. Rozanov, *Stationary stochastic processes*, Holden-Day, San Francisco, 1967.

35. S.K. Vastola and H.V. Poor, *An analysis of the effects of spectral uncertainty on Wiener filtering*, Automatica, vol. 19, no. 3, pp. 289-293, 1983.

36. N. Wiener, *Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary tine series. With engineering applications*, Cambridge, Mass.: The M. I. T. Press, 163 p., 1966.

37. A.M. Yaglom, *Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 1: Basic results; Vol. 2: Suplementary notes and references*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York etc., 1987.

Received: 06.06.2021

УДК 004.942,519.177, 519.217 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/2.7

Кириченко О.Л.[1], аспірант,
Малик І.В.[1], д.ф.-м.н., доц.,
Остапов С.Е.[1], д.ф.-м.н., проф.

Стохастичні моделі в задачах штучного інтелекту

[1] Чернівецький національних університет імені Юрія Федьковича, 58012, м. Чернівці, вул. Коцюбинського, 2, 58012
e-mail: o.kyrychenko@chnu.edu.ua, i.malyk@chnu.edu.ua, s.ostapov@chnu.edu.ua

O.L. Kyrychenko[1], postgraduate student,
I.V Malyk[1], Dr.Sc., Associate Professor,
S.E. Ostapov[1], Dr.Sc., Professor

Stochastic models in artificial intelligence development

[1] Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, 58012, Chernivtsi, Kotsiubynsky str, 2,

e-mail: o.kyrychenko@chnu.edu.ua, i.malyk@chnu.edu.ua, s.ostapov@chnu.edu.ua

У роботі розглянуто деякі властивості стохастичних матриць великих розмірностей за умов незалежності елементів матриці або за умов незалежності рядків (стовпців). Проаналізовано основні властивості спектру стохастичної матриці. Також розглянуто застосування даних результатів до задач кластеризації та вибору оптимального числа кластерів.

Результати дослідження доповідались на Міжнародній науковій конференції ``Modern Stochastics: Theory and Applications. V'' (MSTA-V).

Ключові слова: стохастична випадкова матриця, спектр матриці, оптимальне число кластерів.

In this paper, we consider some properties of stochastic random matrices of large dimensions under conditions of independence of matrix elements or under conditions of independence of rows (columns). The main properties of stochastic random matrices spectrum are analyzed and the result of convergence to 0 is proved of almost all eigenvalues. Also, the application of these results to clustering problems and selection of the optimal number of clusters is considered. Note that the results obtained in this work are consistent with the Marchenko - Pastur theorem on the asymptotic distribution of eigenvalues of random matrices with independent elements. The results proved in this paper can be interpreted as a law of large numbers and will be used in the study of the asymptotic behavior of the maximum.

Key Words: stochastic random matrix, spectrum of a matrix, optimal number of clusters.

Спектральний аналіз матриць [1, 2, 3] є одним із важливих підходів оптимізації кількості кластерів при кластеризації в задачах штучного інтелекту. Теорія випадкових матриць є однією із математичних моделей розумних мереж (Smart Grid) [4], що описує функціонування великих систем (переважно енергосистем). Одним із основних завдань, пов'язаних із побудовою великої системи є розподіл функцій між основними "центрами" системи. Крім того, вплив випадкових факторів в системі може бути описано саме за допомогою стохастичних випадкових матриць. Надалі, під стохастичною матрицею $A = A_{N\times N}$ будемо розуміти матрицю, що володіє наступними властивостями:

1. $A_{ij} \geq 0$;
2. $\sum_{j=1}^{N} A_{ij} = 1$.

Під випадковою матрицею будемо розуміти матрицю, елементами якої є випадкові величини, визначені на ймовірнісному просторі (Ω, F, P).

Основна ідея роботи полягає у локалізації власних значень стохастичної матриці великої розмірності. Для цього будемо користуватися тим фактом, що одним із власних значень стохастичної матриці, що відповідає незвідному ланцюгу Маркова, є 1 та всі власні значення стохастичної матриці не перевищують за абсолютним значенням одиницю. Таким чином, на основі даної властивості, розроблено алгоритм для визначення оптимальної кількості кластерів k_{opt}.

© Кириченко О.Л., Малик І.В., Остапов С.Е., 2021

Розглянемо основні позначення, які будуть використовуватися у даній роботі. Основними математичними об'єктами, які будуть використані нижче є граф та ланцюг Маркова. Граф будемо позначати через $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$, де $\mathrm{V} = \{1,2,\dots,\mathrm{N}\}$ – множина вершин графа, $\mathrm{E} = \{\mathrm{e}_1,\dots,\mathrm{e}_\mathrm{m}\}$ – множина ребер графа, що з'єднують вершини із V. Припустимо, що граф задається матрицею суміжності A:

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_{\mathrm{N}\times\mathrm{N}},$$

де елемент A_{ij} рівний ваговому коефіцієнту між вершинами i та j. Стохастична матриця

$$P_{ij} = \frac{A_{ij}}{\sum_{j=1}^{N} A_{ij}}, \qquad (1)$$

що відповідає графу G та задається матрицею суміжності A, задається співвідношенням (1). Матриця P й буде основним предметом дослідження в даній роботі. Надалі будемо впорядковувати власні значення матриці A наступним чином

$$|\lambda_1(A)| \geq |\lambda_2(A)| \geq \cdots \geq |\lambda_N(A)|.$$

Згідно зауваження зробленого вище, вірні наступні співвідношення

$$\begin{cases} \lambda_1(P) = 1, \\ |\lambda_i(A)| \leq 1, i \geq 1. \end{cases}$$

Теорема 1. Нехай виконуються наступні умови:

1. Всі елементи матриці $A = A_{N\times N}$ є незалежними та мають одинаковий розподіл

$$\mathrm{A}_{\mathrm{ij}} \sim \mathrm{Distr},$$

де розподіл $Distr$ має носієм підмножину $(0,\infty)$ та володіє скінченним моментом порядку $2+\delta, \delta > 0$;

2. Елементи матриці переходу за 1 крок P_{ij} визначаються із співвідношення (1)

$$\mathrm{P}_{\mathrm{ij}} = \frac{\mathrm{A}_{\mathrm{ij}}}{\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{A}_{\mathrm{ik}}}.$$

Тоді за ймовірністю має місце збіжність

$$\lambda_2(P) \to 0,$$

при $N \to \infty$.

Доведення. Для доведення даного факту відзначимо, що значення $\lambda_2(\mathrm{N})$, що відповідає значенням матриці

$$\mathrm{P}_{\mathrm{ij}} = \mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{A}_{\mathrm{ij}}}{\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{A}_{\mathrm{ij}}}\right)$$

рівне 0. Для доведення цього факту розглянемо власні значення матриці P у наступному вигляді

$$\det(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{P}) = \lambda^{\mathrm{n}} + \mathrm{c}_1\lambda^{\mathrm{n}-1} + \cdots \mathrm{c}_{\mathrm{n}-1}\lambda + \mathrm{c}_{\mathrm{n}},$$

де коефіцієнти c_{i} визначаються за наступною формулою

$$\mathrm{c}_{\mathrm{i}} = (-1)^{\mathrm{i}} \sum_{\mathrm{k}} \det\big(\mathrm{M}_{\mathrm{k}}(\mathrm{i})\big),$$

де $\mathrm{M}_{\mathrm{k}}(\mathrm{i})$ – головні мінори матриці P розмірності $\mathrm{i}\times\mathrm{i}$. Використовуючи дане представлення, отримаємо

$$\mathrm{c}_1 = -\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{P}_{\mathrm{kk}} = -\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{A}_{\mathrm{kk}}}{\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{A}_{\mathrm{kj}}}.$$

Згідно означення значень c_{i}, отримаємо на основі припущення 1 теореми

$$\mathrm{E}(\mathrm{c}_1) = -\mathrm{E}\left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{A}_{\mathrm{kk}}}{\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{A}_{\mathrm{kj}}}\right) = -\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{\mathrm{N}} = -1.$$

Для всіх інших значень $\mathrm{c}_{\mathrm{i}}, \mathrm{i} \geq 2$, отримаємо

$$\mathrm{E}(\mathrm{c}_{\mathrm{i}}) = (-1)^{\mathrm{i}}\mathrm{E}\left(\sum_{\mathrm{k}} \det\big(\mathrm{M}_{\mathrm{k}}(\mathrm{i})\big)\right) = (-1)^{\mathrm{i}} \sum_{\mathrm{k}} \mathrm{E}\big(\det\big(\mathrm{M}_{\mathrm{k}}(\mathrm{i})\big)\big).$$

Розглянемо значення $\mathrm{E}\big(\det\big(\mathrm{M}_{\mathrm{k}}(\mathrm{i})\big)\big)$. Для цього скористаємося тим фактом, що

$$\mathrm{E}\big(\det(\mathrm{Z})\big) = \det\big(\mathrm{E}(\mathrm{Z})\big)$$

при умові, що рядки (або стовпці) матриці Z незалежні векторні випадкові величини. У нашому випадку, рядки матриці P є незалежні в сукупності, тому має місце співвідношення:

$$\mathrm{E}\big(\det\big(\mathrm{M}_{\mathrm{k}}(\mathrm{i})\big)\big) = \det\Big(\mathrm{E}\big(\mathrm{M}_{\mathrm{k}}(\mathrm{i})\big)\Big),$$

причому всі значення матриці $\mathrm{E}\big(\mathrm{M}_{\mathrm{k}}(\mathrm{i})\big)$ рівні $\frac{1}{\mathrm{N}}$. Таким чином

$$\mathrm{E}\big(\det\big(\mathrm{M}_{\mathrm{k}}(\mathrm{i})\big)\big) = 0.$$

Використовуючи дані обчислення, знайдемо, що "усереднений характеристичний поліном" матриці P рівний

$$\mathrm{E}(\det(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{P})) = \mathrm{E}(\lambda^{\mathrm{n}} + \mathrm{c}_1\lambda^{\mathrm{n}-1} + \cdots \mathrm{c}_{\mathrm{n}-1}\lambda + \mathrm{c}_{\mathrm{n}}) = \lambda^{\mathrm{n}} + \mathrm{E}(\mathrm{c}_1)\lambda^{\mathrm{n}-1} + \cdots \mathrm{E}(\mathrm{c}_{\mathrm{n}-1})\lambda + \mathrm{E}(\mathrm{c}_{\mathrm{n}}) = \lambda^{\mathrm{n}} - \lambda^{\mathrm{n}-1}.$$

Отже, розв'язками характеристичного рівняння

$$\mathrm{E}(\det(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{P})) = 0$$

є два значення

$$\lambda_1 = 1, \lambda_{\mathrm{i}} = 0, \mathrm{i} = 2,\dots,\mathrm{N}.$$

Тобто, 'усереднене значення' власного значення λ_2 рівне 0 за умов теореми.

Для доведення збіжності до 0 випадкової величини λ_2 розглянемо дисперсії діагональних елементів

$$\mathrm{D}\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{P}_{\mathrm{ii}}\right) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{D}(\mathrm{P}_{\mathrm{ii}}) = \mathrm{N}\mathrm{D}(\mathrm{P}_{11}),$$

оскільки всі значення P_{ii} є незалежними та однаково розподілені. Обчислимо дисперсію випадкової величини

$$D(P_{11}) = E(P_{11}^2) - \frac{1}{N^2}.$$

Обчислимо другий момент для випадкової величини P_{11}^2, використовуючи існування та обмеженість другого моменту:

$$E(P_{11}^2) = E\left(\frac{A_{11}}{\sum_{j=1}^{N} A_{1j}}\right)^2.$$

Для великих N на основі центральної граничної теореми отримаємо

$$X = \sum_{j=1, j\neq i}^{N} A_{ij} = \sqrt{N-1} \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \frac{(A_{ij} - EA_{ij} +)}{\sqrt{N-1}} =$$

$$\sigma\sqrt{N-1} \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \frac{(A_{ij} - EA_{ij})}{\sigma\sqrt{N-1}} + Nm,$$

де $m = EA_{ij}$, $\sigma^2 = D(A_{ij})$. Використовуючи дане представлення, отримаємо

$$X \approx \sqrt{N-1}Z + Nm.$$

Тут випадкова величина Z має нормальний розподіл із параметрами $(0,1)$. На основі цього

$$E(P_{11}^2) = E\left(\frac{A_{11}}{\sum_{j=1}^{N} A_{1j}}\right)^2 \approx$$

$$E\left(\frac{A_{11}}{A_{11}+\sqrt{N-1}Z+Nm} I_{\{Z>0\}}\right)^2 =$$

$$E\left(\frac{A_{11}}{A_{11} + \sqrt{N-1}Z + Nm} I_{\{Z>0\}}\right)^2$$

$$\approx \frac{1}{N-1} E\left(\frac{\widetilde{A}_{11}}{\widetilde{A}_{11} + Z + \sqrt{N-1}m} I_{\{Z>0\}}\right)^2,$$

де

$$\widetilde{A}_{11} = \frac{A_{11}}{\sqrt{N-1}}.$$

Використовуючи дане представлення, отримаємо

$$E(P_{11}^2) = O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

та

$$D(P_{11}) = O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Таким чином, використовуючи дане представлення, отримаємо

$$D\left(\sum_{i=1}^{N} P_{ii}\right) = O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Для доведення того факту, що $\lambda_2(N)$ прямує до 0 за ймовірністю, використаємо наступне співвідношення

$$\sum_{i=1}^{N} (\mu_i(A) - \mu_i(B))^2 \leq Tr(A-B)^2,$$

де $\mu_i(A), \mu_i(B)$ – власні значення матриць A та B, впорядковані за спаданням.

Використовуючи дане співвідношення, отримаємо наступну оцінку для дисперсії $\lambda_2(N)$:

$$E(\lambda_2(N))^2 = D(\lambda_2(N))^2 \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N} D(\lambda_i(N)) \leq E\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left(P_{ik} - \frac{1}{N}\right)\left(P_{ki} - \frac{1}{N}\right)\right)$$

$$=$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{N}\left(P_{ii} - \frac{1}{N}\right)^k\right) = \sum_{i=1}^{N} E\left(P_{ii} - \frac{1}{N}\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} D(P_{ii}) = D\left(\sum_{i=1}^{N} P_{ii}\right).$$

Отже,

$$D(\lambda_2(N)) = O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Тоді, з врахуванням доведених вище представлень для моментів P_{ii}, твердження теореми є наслідком нерівності Чебишова.

Дослідженням оптимальної кількості кластерів автори займались в роботах [5,6]. Були розглянуті методи знаходження оптимальної кількості кластерів k-Core decomposition [7] та «метод ліктя» [8]. Цими методами визначались оптимальна кількість кластерів та центри кластерів для різних сегментів веб-простору. Розглянемо тепер задачу визначення оптимальної кількості кластерів на основі стохастичної матриці P, що задає переходи в деякій системі. Також будемо припускати, що стохастична матриця P має блочний вигляд, тобто має місце співвідношення

$$P = \begin{pmatrix} P^{(1)} & Err^{(1,2)} & \cdots & Err^{(1,k_{opt})} \\ Err^{(2,1)} & P^{(2)} & \cdots & Err^{(2,k_{opt})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Err^{(k_{opt},1)} & Err^{(k_{opt},2)} & \cdots & P^{(k_{opt})} \end{pmatrix}, (2)$$

де $P^{(i)}$ задають ймовірності переходу в i – му кластері та $Err^{(i,j)}$ – ймовірності переходу з i – го кластеру в j – ий кластер. Матриці $Err^{(i,j)}$ будемо характеризувати як "помилки" переходів між сусідніми кластерами. Нехай зв'язки всередині кластера є набагато сильнішими ніж зв'язки між кластерами. Дане припущення будемо виражати наступним чином

$$\min_{i\in 1,\ldots,k_{opt}} \min_{m\in 1,\ldots,n_i} \sum_{j=1}^{n_i} P_{mj}^{(i)} \geq$$

$$\geq \alpha \max_{i\in 1,\dots,k_{opt}} \max_{m\in 1,\dots,n_i} \left(1-\sum_{j=1}^{n_i} P_{mj}^{(i)}\right),$$

де n_i – розмірність матриці $P^{(i)}$, $\alpha \in (1,\infty)$ - деякий параметр подібності. Зауважимо, що при $\alpha \to \infty$ всі помилки $Err_{k,m}^{(i,j)} \to 0$. В цьому випадку матриця P перетворюється в блочно - діагональну матрицю вигляду

$$P' = \begin{pmatrix} P^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P^{(k_{opt})} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Тобто, матриця P' в цьому випадку задає чітко визначені k_{opt} кластери даних. Крім того, для матриці P, заданої співвідношенням (3),

$$\lambda_1(P') = \cdots = \lambda_{k_{opt}}(P') = 1$$

та

$$|\lambda_i(P') - 1| > \varepsilon, i > k_{opt},$$

де параметр ε залежить від розмірності системи (кількості об'єктів кластеризації) та параметру α. Для визначення оптимальної кількості кластерів ми будемо користуватися наступним співвідношенням

$$k_{opt} = \#\left\{\lambda_i : |\lambda_i(P) - 1| \leq \frac{1}{\alpha\sqrt{N}}\right\}. \quad (4)$$

Дане співвідношення є наслідком Теореми 1 та асимптотичної поведінки власних значень $\lambda_i(P)$, $i \leq k_{opt}$.

Зауважимо, що результати отримані в роботі узгоджуються із теоремою Марченко – Пастура [9] про асимптотичний розподіл власних значень випадкових матриць із незалежними елементами. Також, слід відмітити, що результати теореми можуть трактуватися як закон великих чисел. Крім того, визначення оптимальної кількості кластерів будується на асимптотиці власних значень матриці P при $N \to \infty$. Одержані результати можуть бути застосовані для визначення оптимальної кількості кластерів Grid system, складних мереж, при дослідженнях структури веб-простору тощо.

Список використаних джерел

1. *Andrew Y. Ng, Michael Jordan, and Yair Weiss.* (2002) On spectral clustering: Analysis and an algorithm, in NIPS, (2002).
2. *Frank Lin and William W. Cohen.* (2010) Power iteration clustering, in ICML(to appear), (2010).
3. *Zhidong Bai, Zhaoben Fang, Ying-Chang Liang* (2014). Spectral Theory of Large Dimensional Random Matrices and Its Applications to Wireless Communications and Finance Statistics : Random Matrix Theory and Its Applications. University of Science and Technology of China Press? World Scientific.
4. *Robert C. Qiu, Paul Antonik* (2017). Smart Grid using Big Data Analytics. A Random Matrix Theory Approach. Wiley Online Library, 2017.
5. *Кириченко О.Л.* Проведення оптимальної кластеризації структури веб-простору [Текст] / О.Л. Кириченко, С.Е. Остапов, І.Я. Кановський // Міжнародна науково-практична конференція «Проблеми інформатики та комп'ютерної техніки» (ПІКТ-2017, 05-08 жовтня). Праці конференції. – Чернівці: Видавничий дім «Родовід», 2017. – С. 67-69.

References

1. ANDREW Y. NG, MICHAEL JORDAN, AND YAIR WEISS. (2002) *On spectral clustering: Analysis and an algorithm*, in NIPS, (2002).
2. FRANK LIN AND WILLIAM W. COHEN. (2010) *Power iteration clustering*, in ICML(to appear), (2010).
3. ZHIDONG BAI, ZHAOBEN FANG, YING-CHANG LIANG (2014). *Spectral Theory of Large Dimensional Random Matrices and Its Applications to Wireless Communications and Finance Statistics : Random Matrix Theory and Its Applications*. University of Science and Technology of China Press, World Scientific.
4. ROBERT C. QIU, PAUL ANTONIK (2017). *Smart Grid using Big Data Analytics. A Random Matrix Theory Approach*. Wiley Online Library, 2017.
5. KYRYCHENKO O.L. *Provedennia optymalnoi klasteryzatsii struktury veb-prostoru* [Tekst] / O.L. Kyrychenko, S.E. Ostapov, I.Ia. Kanovskyi // Mizhnarodna

naukovo-praktychna konferentsiia «Problemy informatyky ta kompiuternoi tekhniky» (PIKT-2017, 05-08 zhovtnia). Pratsi konferentsii. – Chernivtsi: Vydavnychyi dim «Rodovid», 2017. – Pp. 67-69.

6. *Кириченко О.Л.* Застосування методу k-core decomposition для проведення оптимальної кластеризації / О.Л. Кириченко, С.Е. Остапов Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: тези доповідей XXVII міжнародної науково-практичної конференції MicroCAD-2019, 15-17 травня 2019 р.: у 4 ч. Ч. IV. / за ред. проф. Сокола Є.І. – Харків: НТУ «ХПІ». – С. 155.
7. *Sheng-Tzong Cheng, Yin-Chun Chen, and Meng-Shuan Tsai.* (2017) Using k-Core Decomposition to Find Cluster Centers for k-Means Algorithm in GraphX on Spark, CLOUD COMPUTING 2017: The Eighth International Conference on Cloud Computing, GRIDs, and Virtualization.
8. *Kuraria, Amit & Jharbade, Nitin & Soni, Manish*. (2018). Centroid Selection Process Using WCSS and Elbow Method for K-Mean Clustering Algorithm in Data Mining. International Journal of Scientific Research in Science, Engineering and Technology. Pp. 190-195. 10.32628/IJSRSET21841122.
9. *В. А. Марченко, Л. А. Пастур*, Распределение собственных значений в некоторых ансамблях случайных матриц, Матем. сб., 1967, том 72(114), номер 4, С. 507–536.

6. KYRYCHENKO O.L. *Zastosuvannia metodu k-core decomposition dlia provedennia optymalnoi klasteryzatsii* / O.L. Kyrychenko, S.E. Ostapov Informatsiini tekhnolohii: nauka, tekhnika, tekhnolohiia, osvita, zdorovia: tezy dopovidei KhXVII mizhnarodnoi naukovo-praktychnoi konferentsii MicroCAD-2019, 15-17 travnia 2019 r.: u 4 ch. Ch. IV. / za red. prof. Sokola Ye.I. – Kharkiv: NTU «KhPI». – pp. 155
7. SHENG-TZONG CHENG, YIN-CHUN CHEN, AND MENG-SHUAN TSAI. (2017) *Using k-Core Decomposition to Find Cluster Centers for k-Means Algorithm in GraphX on Spark*, CLOUD COMPUTING 2017: The Eighth International Conference on Cloud Computing, GRIDs, and Virtualization.
8. KURARIA, AMIT & JHARBADE, NITIN & SONI, MANISH. (2018). *Centroid Selection Process Using WCSS and Elbow Method for K-Mean Clustering Algorithm in Data Mining.* International Journal of Scientific Research in Science, Engineering and Technology. Pp. 190-195. 10.32628/IJSRSET21841122.
9. V. A. MARCHENKO, L. A. PASTUR, *Raspredelenye sobstvennыkh znachenyi v nekotorыkh ansambliakh sluchainыkh matryts*, Matem. sb., 1967, tom 72(114), nomer 4, Pp. 507–536.

Надійшла до редакції 28.08.2021

УДК 519.21 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/2.8

Р.В. Кривошия[1], *аспірант*

Про одне узагальнення поняття нормальних чисел

[1] Інститут математики НАН України, 01024, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3
e-mail: mostik19@gmail.com

R.V. Kryvoshyia[1], *PhD student*

On a generalization of the concept of normal numbers

[1]Institute of Mathematics National Academy of Sciences of Ukraine, 01024, Kyiv-4, Tereshchenkivska str., 3
e-mail: mostik19@gmail.com

В роботі розглядається узагальнення поняття нормальних чисел, в контексті класичного s-го представлення дійсних чисел, по відношенню до Q_s-представлення, вперше розглянутого М. Працьовитим. Поглиблюється результат І. Нівена та Г. Цукермана, по відношенню до метричної теорії нормальних чисел Е. Бореля. Показано, що множина всіх Q_s-нормальних чисел має міру Лебега 1. *Встановлюється зв'язок між властивістю нормальності та рівномірною розподіленістю послідовності чисел, породжених оператором зсуву по відношенню до відповідного числа. Було встановлено, що множина всіх чисел відрізку* $[0;1]$ *для яких відповідна послідовність породжена оператором лівостороннього зсуву Q_s-цифр є рівномірно розподіленою, має повну міру Лебега. Відповідні теореми поглиблюють результати метричної теорії Q_s-розкладів дійсних чисел відрізку* $[0;1]$ *отриманих М. Працьовитим та Г. Торбіним.*

Результати дослідження доповідались на Міжнародній науковій конференції "Modern Stochastics: Theory and Applications. V" (MSTA-V).

Ключові слова: Q_s-нормальне число, рівномірно розподілена послідовність, ергодичне перетворення, Q_s-циліндр.

The paper considers the generalization of the concept of normal numbers in the context of the classical s-th representation of real numbers, in relation to the Q_s-representation, first considered by M. Pratsiovytyi. The result of I. Nivena and H. Zukerman is deepened in relation to the metric theory of normal E. Borel numbers. It is shown that the set of all Q_s-normal numbers has a Lebesgue measure 1. *The connection between the property of normality and the uniform distribution of the sequence of numbers generated by the shift operator in relation to the corresponding number is established. It was found that the set of all numbers of the segment* $[0;1]$ *for which the corresponding sequence generated by the operator of left-hand shift Q_s-digits is uniformly distributed has a full Lebesgue measure. The corresponding theorems deepen the results of the metric theory Q_s-decompositions of real numbers of the segment* $[0;1]$ *obtained by M. Pratsiovytyi and G. Torbin.*

Key Words: Q_s-normal number, uniformly distributed sequence, ergodic transformation, Q_s-cylinder.

1 Вступ

Нехай $(q_0; q_1; ...; q_{s-1})$ — стохастичний вектор з строго додатними координатами. Відомо [1, **?**], що для довільного дійсного числа $x \in [0;1]$ існує послідовність чисел (в подальшому цифр) $\alpha_n \in \{0;1;...;s-1\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ така, що

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_{\alpha_n} \cdot q_{\alpha_{n-1}} \cdot q_{\alpha_{n-2}} \cdot \ldots \cdot q_{\alpha_1}, \qquad (1)$$

де $\beta_0 = 0, \beta_1 = q_0, \ldots, \beta_{s-1} = q_0 + q_1 + ... + q_{s-2}$.

Представлення 1 називається Q_s-представленням числа x. Число x у цьому випадку має зображення:

$$x = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}.$$

Існує зчислена множина чисел, які мають два представлення і відповідно зображення:

$$\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)} = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots(\alpha_n+1)(0)}.$$

Відповідні числа називаються Q_s-раціональними.

© Р.В. Кривошия, 2021

Число x будемо називати Q_s-слабонормальним, якщо для кожної цифри $\gamma \in \{0;1;...;s-1\}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(x;\gamma)}{n} = q_\gamma,$$

де $N_n(x;\gamma)$ — кількість цифр γ серед чисел $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.

Число x будемо називати Q_s-нормальним, якщо довільного набору цифр $(\gamma_1;\gamma_2;\ldots;\gamma_k)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(x;(\gamma_1;\gamma_2;\ldots;\gamma_k))}{n} = \prod_{j=1}^{k} q_{\gamma_j},$$

де $N_n(x;(\gamma_1;\gamma_2;\ldots;\gamma_k))$ — кількість блоків $(\gamma_1;\ldots;\gamma_k)$ серед чисел $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. Якщо бути точним $N_n(x;(\gamma_1;\gamma_2;\ldots;\gamma_k))$ — це кількість номерів $j \in \{1;\ldots;n-k-1\}$, таких що $\alpha_{j+i-1} = \gamma_i$ для кожного $i \in \{1;\ldots;k\}$.

Якщо $q_0 = q_1 = \ldots = q_{s-1} = \frac{1}{s}$, ми маємо класичне означення нормального та слабонормального числа для s-го представлення дійсних чисел [3].

Послідовність x_n називається рівномірно розподіленою за модулем 1, якщо для довільних дійсних $0 \leqslant a < b \leqslant 1$:

$$\frac{N_n([a;b])}{n} \to b-a \ \ (n\to\infty),$$

де $N_n([a;b])$ — кількість чисел серед $\{x_1\},\{x_2\},\ldots,\{x_n\}$, які належать відрізку $[a;b]$.

Добре відомо [4], що число x є нормальним в класичній s-ковій системі числення, тоді і тільки тоді коли послідовність $s^n x$ є рівномірно розподіленою.

2 Про структуру множини Q_s-нормальних чисел

Розглянемо наступний оператор зсуву

$$T(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_s}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots},$$

у випадку коли число є Q_s-раціональним домовимось використовувати його зображення з періодом (0).

Лема 1. *Перетворення $T(x)$ є ергодичним відносно міри Лебега.*

Доведення. Покажемо, що відповідне перетворення зберігає міру на борельовій сигма-алгебрі.

Зрозуміло, що

$$T^{-1}\left(\left[\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)};\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}\right]\right) =$$

$$= \bigcup_{k=0}^{s-1}\left[\Delta^{Q_s}_{k\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)};\Delta^{Q_s}_{k\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}\right].$$

$$\lambda\left(\left[\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)};\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}\right]\right) = \prod_{j=1}^{n} q_{\alpha_j},$$

$$\lambda\left[\Delta^{Q_s}_{k\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)};\Delta^{Q_s}_{k\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}\right] = q_k\prod_{j=1}^{n} q_{\alpha_j}.$$

Таким чином, маємо:

$$\lambda\left(\bigcup_{k=0}^{s-1}\left[\Delta^{Q_s}_{k\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)};\Delta^{Q_s}_{k\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}\right]\right) =$$

$$= \lambda\left(\left[\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)};\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}\right]\right).$$

Оскільки сукупність відрізків

$$[\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)};\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(1)}]$$

породжує $B(R)\cap[0;1]$, то для кожної множини $E \in B(R)$, маємо:

$$\lambda(T^{-1}(E)) = \lambda(E).$$

Покажемо, що перетворення $T(x)$ метрично транзитивне відносно міри Лебега. Припустимо, що існують множини U, W такі, що

$$U \cup W = [0;1];$$

$$U \cap W = \varnothing;$$

$$T^{-1}(U) = U;$$

$$T^{-1}(W) = W.$$

Нехай $u = \lambda(U) \in (0;1)$ та $X(t)$ — характеристична функція множини U:

$$X(t) = \begin{cases} 1, t \in U \\ 0, t \notin U. \end{cases}$$

Зрозуміло, що кожного

$$x = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots} \in U$$

і кожного натурального l число

$$x^{(l)} = \Delta^{Q_s}_{q_1q_2\ldots q_l\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$$

є прообразом x порядку l для перетворення $T(x)$.

Маємо:

$$X(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) = X(x^{(l)}).$$

Позначимо

$$B_l = [\Delta^{Q_s}_{a_1a_2\ldots a_l(0)}; \Delta^{Q_s}_{a_1a_2\ldots a_l(1)}],$$

маємо:

$$\lambda(U \cap B_l) = \int\limits_{B_l} X(t)d\lambda =$$

$$= q_{a_1}q_{a_2}\ldots q_{a_l}\int\limits_R X(t)d\lambda = uq_{a_1}q_{a_2}\ldots q_{a_l}.$$

Розглянемо число $\varepsilon > 0$ таке, що $1 - u > \varepsilon$. Оскільки множина U і її доповнення W до множини $[0;1]$ мають додатні міри Лебега, то за теоремою про точки щільності, існує точка щільності z. Таким чином, для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що

$$\frac{\lambda(U \cap \Delta)}{\lambda(\Delta)} > 1 - \varepsilon$$

для довільного відрізка Δ який містить точку z і міра Лебега якого строго менша δ.

Розглянемо число n_0 таке, що

$$(\max(q_0; q_1; ...; q_{s-1}))^{n_0} < \delta.$$

Позначимо:

$$z = \Delta^{Q_s}_{b_1b_2\ldots b_k\ldots}$$

і розглянемо відрізок

$$\Delta = B_{n_0} = [\Delta^{Q_s}_{b_1b_2\ldots b_{n_0},(0)}; \Delta^{Q_s}_{b_1b_2\ldots b_{n_0},(s-1)}].$$

Маємо:

$$\lambda(U \cap \Delta) = uq_{b_1}\ldots q_{b_{n_0}},$$

$$\lambda(U \cap \Delta) > (1-\varepsilon)\lambda(\Delta) = (1-\varepsilon)q_{b_1}\ldots q_{b_{n_0}},$$

$$uq_{b_1}\ldots q_{b_{n_0}} > (1-\varepsilon)q_{b_1}\ldots q_{b_{n_0}}$$

та

$$1 - u < \varepsilon.$$

Маємо суперечність.

Лема 2. *Для майже всіх чисел* $x = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ *послідовність*

$$x, T(x), T^2(x), \ldots, T^k(x), \ldots$$

є рівномірно розподіленою на $[0;1]$.

Доведення. Оскільки перетворення $T(x)$ є ергодичним відносно міри Лебега, то для заданого $h \in N$ за теоремою Біргкофа-Хінчина

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} cos(2\pi hT^k(x))}{n} \to \int\limits_0^1 cos(2\pi hx)dx = 0 \tag{2}$$

для майже всіх $x \in [0;1]$.

Позначимо через A_h множину тих чисел $x \in [0;1]$, для яких виконується умова (2), тоді $\lambda(A_h) = 1$. Зрозуміло, що $\lambda(A^*) = 1$, де

$$A^* = \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k.$$

Отже, для кожного натурального h та для довільного $x \in A^*$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\cos(2\pi hT^k(x))}{n} = 0.$$

Аналогічно показуємо, що існує множина B^* така, що $\lambda(B^*) = 1$ і для довільного натурального $h \in N$ та $x \in B^*$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sin(2\pi hT^k(x))}{n} \to \int\limits_0^1 \sin 2\pi hxdx = 0.$$

Отже, для кожного $x \in A^* \cap B^*$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} e^{2\pi ihT^k(x)}}{n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\cos(2\pi hT^k(x)) + i\sum\limits_{k=1}^{n}\sin(2\pi hT^k(x))}{n} = 0$$

тобто послідовність $T^n(x)$ є рівномірно розподіленою на $[0;1]$. Оскільки $\lambda(A^* \cap B^*) = 1$, маємо потрібне.

Відрізок

$$\Delta(\gamma_1;\gamma_2;\ldots;\gamma_l) = \left[\Delta^{Q_s}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_l(0)}; \Delta^{Q_s}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_l(s-1)}\right]$$

будемо називати Q_s-циліндром l-го рангу.

Лема 3. *Нехай* M *— множина всіх* Q_s*-циліндрів* l*-го рангу для кожного натурального* l*. Послідовність* x_n *є рівномірно розподіленою тоді і тільки тоді, коли*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N(x_n;A)}{n} = \lambda(A),$$

для кожної множини $A \in M$, де $\lambda(\cdot)$ — міра Лебега.

Доведення. Якщо x_n рівномірно розподілена, то очевидно рівність виконується. Розглянемо проміжок $[a;b]$, де $a > 0$ і $b < 1$ (випадок $a = 0$ або $b = 1$ розглядаються аналогічним чином).

Нехай

$$a = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots}\ b = \Delta^{Q_s}_{\beta_1\beta_2\ldots}$$

Розглянемо послідовність відрізків

$$C_n = \left[\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}; \Delta^{Q_s}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n(s-1)}\right],$$

$$\tilde{C}_n = \left[\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(s-1)}; \Delta^{Q_s}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n(0)}\right].$$

Зрозуміло, що знайдеться набір Q_s-циліндрів n-го рангу

$$\Delta\left(\eta_1^{(1)};\eta_2^{(1)};\ldots;\eta_n^{(1)}\right),\ \ldots,\ \Delta\left(\eta_1^{(j)};\eta_2^{(j)};\ldots;\eta_n^{(j)}\right),$$

такі, що

$$C_n = \bigcup_{i=1}^{j} \Delta\left(\eta_1^{(i)};\eta_2^{(i)};\ldots;\eta_n^{(i)}\right).$$

Маємо:

$$\lim_{l\to\infty}\frac{N_l(x_k;C_n)}{l} =$$

$$= \sum_{r=1}^{j}\lim_{l\to\infty}\frac{N_l\left(x_k;\Delta\left(\eta_1^{(r)};\ldots;\eta_n^{(r)}\right)\right)}{l} =$$

$$= \sum_{i=1}^{j}\lambda\left(\Delta\left(\eta_1^{(r)};\ldots;\eta_n^{(r)}\right)\right) = \lambda(C_n).$$

Аналогічно доводиться, що

$$\lim_{l\to\infty}\frac{N_l(x_k;\tilde{C}_n)}{l} = \lambda(\tilde{C}_n).$$

Оскільки для кожного натурального n:

$$\frac{N_l(x_k;\tilde{C}_n)}{l} \leqslant \frac{N_l(x_k;(a;b))}{l} \leqslant \frac{N_l(x_k;C_n)}{l}$$

то перейшовши до границі $l \to +\infty$ і врахувавши, що

$$\lim_{l\to\infty}\lambda(C_l) = b - a = \lim_{l\to\infty}\lambda(\tilde{C}_l),$$

маємо:

$$\lim_{l\to\infty}\frac{N_l(x_k;(a;b))}{l} = b - a.$$

Лема 4. *Число*

$$z = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots}$$

є Q_s-нормальним тоді і тільки тоді, коли послідовність $T^n(z)$ є рівномірно розподіленою.
Доведення. Нехай послідовність $T^n(z)$ рівномірно розподілена.

Зрозуміло, що $N_n(T^k(z);\Delta(\gamma_1;\gamma_2;\ldots;\gamma_l))$ дорівнює кількості блоків $(\gamma_1;\gamma_2;\ldots;\gamma_l)$ серед цифр $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$. Дійсно число $\Delta^{Q_2}_{\eta_1\eta_2\ldots}$ належить відрізку $\Delta(\gamma_1;\gamma_2;\ldots;\gamma_l)$ лише тоді, коли $\eta_r = \gamma_r$ для кожного $r \in \{1;\ldots;l\}$. Маємо:

$$\frac{N_n(z;(\gamma_1;\ldots;\gamma_l))}{n} = \frac{N_n(T_k(z);\Delta(\gamma_1;\ldots;\gamma_l))}{n} \to$$

$$\lambda(\Delta(\gamma_1;\ldots;\gamma_l)) = \prod_{j=1}^{l} q_{\gamma_j}(n \to +\infty)$$

тобто z є Q_s-нормальним.

Нехай z є Q_s-нормальним, тоді для кожного Q_s-циліндра $\Delta(\gamma_1;\ldots;\gamma_l)$ маємо:

$$\frac{N_n(T^n(z);\Delta(\gamma_1;\ldots;\gamma_l))}{n} = \frac{N_n(z;(\gamma_1;\ldots;\gamma_l))}{n} \to$$

$$\prod_{j=1}^{l} q_{\gamma_j} = \lambda(\Delta(\gamma_1;\ldots;\gamma_l))(n \to +\infty),$$

звідки враховуючи лему 3 отримаємо потрібне.

Таким чином, враховуючи леми 1-4 приходимо до висновку, що множина всіх Q_s-нормальних чисел має міру Лебега 1.

Теорема 1. *Нехай a_n послідовність додатних чисел така, що*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$

тоді число

$$x = \Delta^{Q_s}_{\underbrace{0\ldots0}_{[q_0a_1]}\underbrace{1\ldots1}_{[q_1a_1]}\ldots\underbrace{(s-1)\ldots(s-1)}_{[q_{s-1}a_1]}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{[q_0a_n]}\underbrace{1\ldots1}_{[q_1a_n]}\ldots}$$

є слабонормальним.

Доведення. Нехай $k-$ достатньо велике натуральне число, тоді існує натуральне число n таке, що

$$\sum_{j=1}^{n}\left([q_0a_j]+\ldots+[q_{s-1}a_j]\right) \leqslant k < \sum_{j=1}^{n+1}\left([q_0a_j]+\ldots+[q_{s-1}a_j]\right).$$

Зрозуміло, що

$$\frac{N_i(x;k)}{k} \geqslant \frac{\sum\limits_{j=1}^{n}[q_i a_j]}{\sum\limits_{j=1}^{n+1}\Big([q_0 a_j]+\ldots+[q_{s-1}a_j]\Big)}.$$

Позначимо

$$x_n = \sum_{j=1}^{n}[q_i a_j],$$

та

$$y_n = \sum_{j=1}^{n+1}\Big([q_0 a_j]+\ldots+[q_{s-1}a_j]\Big).$$

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \frac{[q_i a_{n+1}]}{[q_0 a_{n+2}]+\ldots+[q_{s-1}a_{n+2}]}.$$

Зрозуміло, що

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \geqslant \frac{q_i a_{n+1}-1}{q_0 a_{n+2}+\ldots+q_{s-1}a_{n+2}} =$$

$$= q_i\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} - \frac{1}{a_{n+2}} \to q_i \quad (n\to\infty).$$

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \leqslant \frac{q_i a_{n+1}}{q_0 a_{n+2}+\ldots+q_{s-1}a_{n+2}-(s-1)} =$$

$$= \frac{q_i}{\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - \frac{s-1}{a_{n+1}}} \to q_i \quad (n\to\infty).$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = q_i$$

і за теоремою Штольця

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = q_i.$$

Зрозуміло, що

$$\frac{N_i(x;k)}{k} \leqslant \frac{\sum\limits_{j=1}^{n+1}[q_i a_j]}{\sum\limits_{j=1}^{n}\Big([q_0 a_j]+\ldots+[q_{s-1}a_j]\Big)}.$$

Позначимо

$$z_n = \sum_{j=1}^{n+1}[q_i a_j]$$

та

$$t_n = \sum_{j=1}^{n}\Big([q_0 a_j]+\ldots+[q_{s-1}a_j]\Big).$$

Зрозуміло, що

$$\frac{z_{n+1}-z_n}{t_{n+1}-t_n} \geqslant \frac{q_i a_{n+2}-1}{q_0 a_{n+1}+\ldots+q_{s-1}a_{n+1}} =$$

$$= q_i\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+1}} \to q_i (n\to\infty).$$

$$\frac{z_{n+1}-z_n}{t_{n+1}-t_n} \leqslant \frac{q_i a_{n+2}}{q_0 a_{n+1}+\ldots+q_{s-1}a_{n+1}-(s-1)} =$$

$$\frac{q_i}{\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} - \frac{s-1}{a_{n+2}}} \to q_i (n\to\infty),$$

звідки випливає потрібне.

Список використаних джерел

1. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів / М. В. Працьовитий — Київ: Вид-во НПУ імені М.П Драгоманова, 1998. — 296с.

2. *Турбин А. Ф.* Фрактальные множества, функции, распределения / А. Ф. Турбин, Н. В. Працевитый — Киев: Наук. думка, 1992. — 208с.

3. *Borel E.* Les probabilies denombrables et leurs applications arithmetiques /E Borel //Rend. Circ. Mat. Palermo, 1909. — P. 247-271.

4. *Niven I., Zuckerman H.S.* On the definition of normal numbers /I. Niven, H.S. Zuckerman // Pacific J. Math., 1951, 1. — P. 103-109.

References

1. PRATSIOVYTYI, M. (1998) *Fractal approach in singular studies distributions.* Ed. Kyiv: M.P. Drahomanov National Pedagogical University Publishing House.

2. TURBIN, A.F., PRATSIOVYTYI, M.V. (1992) *Fractal sets, functions, distribution.* Ed. Kyiv: Naukova dumka.

3. BOREL E.(1909) Les probabilies denombrables et leurs applications arithmetiques. Rend. Circ. Mat. Palermo, p. 247-271.

4. NIVEN I, ZUCKERMAN H.S. (1951) On the definition of normal numbers. – Pacific J. Math., 1, p. 103-109.

Надійшла до редколегії 29.08.2021

УДК 519.21

https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/2.9

О. П. Макарчук[1], *к.ф.-м.н., доц*
К. С. Сальник[2], *аспірант*

Асимптотична поведінка модуля характеристичної функції розподілу Кантора

[1] Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, 25006, м. Кропивницький, вул. Шевченка, 1
e-mail: makolpet@gmail.com
[2] Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, 25006, м. Кропивницький, вул. Шевченка, 1
e-mail: vikasvat2013@gmail.com

O. P. Makarchuk[1], *PhD. Phys.-Math.Sci*
K. S. Salnik[2], *PhD student*

Asymptotic behavior of the module of the characteristic Cantor distribution function

[1]Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, 25006, Kropyvnytskyi, Shevchenko Str, 1
e-mail: makolpet@gmail.com
[2]Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, 25006, Kropyvnytskyi, Shevchenko Str, 1
e-mail: vikasvat2013@gmail.com

В роботі досліджується асимптотична поведінка модуля характеристичної функції випадкової величини, функцією розподілу якої являється класична сингулярна функція Кантора. Акцент здійснюється на обчисленні верхньої границі модуля характеристичної функції розподілу Кантора. Ймовірнісна міра, що відповідає розподілу Кантора входить до класу симетричних згорток Бернуллі, інтерес до яких на сьогоднішній день є значним. Симетричні згортки Бернуллі активно долсіджувались як вітчизняними математиками: М. Працьовитий, Г.Турбін, Г.Торбін, Я.Гончаренко, О. Барановський та іншими, так і зарубіжними: Erdos P, Peres Y, Schlag W, Solomyak B, Albeverio S та іншими. Величина верхньої границі модуля характеристичної функції відіграє важливу роль в проблемі визначення лебегівської структури розподілів сум напевно збіжних випадкових рядів з незалежними дискретними доданками (випадкових величин типу Джессена-Вінтера). В статті знайдено точне значення верхньої границі модуля характеристичної функції розподілу Кантора.

Результати дослідження доповідались на Міжнародній науковій конференції "Modern Stochastics: Theory and Applications. V" (MSTA-V).

Ключові слова: послідовність, випадкова величина, характеристична функція, розподіл Кантора, трійковий розклад.

The asymptotic behavior of the modulus of a characteristic function of a random variable, the distribution function of which is the classical singular Cantor function, is investigated. The emphasis is on calculating the upper bound of the modulus of the characteristic Cantor distribution function. The probabilistic measure corresponding to Cantor's distribution belongs to the class of Bernoulli's symmetric convolutions, the interest in which is considerable today. Bernoulli's symmetrical convolutions were actively studied by both domestic mathematicians: M. Pratsovyty, G. Turbin, G. Torbin, J. Honcharenko, O. Baranovsky and others, and foreign ones: Erdos P, Peres Y, Schlag W, Solomyak B, Albeverio, S and other. The value of the upper bound of the modulus of the characteristic function plays an important role in the problem of determining the Lebesgue structure of distributions of sums of probably convergent random series with independent discrete terms (random values of the Jessen-Winter type). The exact value of the upper bound of the module of the characteristic Cantor distribution function is found in the article.

Key Words: sequence, random variable, characteristic function, Cantor distribution, ternary decomposition.

© О.П. Макарчук, К.С. Сальник, 2021

1 Вступ

Нехай ξ_k — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0 та 2 з ймовірностями $\frac{1}{2}$ відповідно. Розглянемо випадкову величину

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k 3^{-k}.$$

Відомо [3], що $F_\xi(x)$ є класичною сингулярною функцією Кантора.

Для випадкової величини ψ та її характеристичної функції $f_\psi(t) = M(e^{it\psi})$ розглянемо величину

$$L_\psi = \lim_{|t|\to\infty} \sup |f_\psi(t)|.$$

Відомо [2], що якщо розподіл ψ дискретний, то $L_\psi = 1$, адже $f_\psi(t)$ є майже-періодичною функцією. Якщо розподіл ψ абсолютно неперевний, то $L_\psi = 0$. Якщо розподіл ψ сингулярний, то L_ψ може набувати довільного значення з відрізку $[0; 1]$. В роботі [8] Жиро навів приклад сингулярного розподілу ψ, для якого $L_\psi = 0$. Приклад характеристичної функції сингулярного розподілу ψ, для якого $L_\psi = 1$ наведено Вінтнером в роботі [10] та Єссеєном в [7]. Сингулярні розподіли ψ, для яких L_ψ набуває заданого значення з відрізку $[0; 1]$ побудовані Шварцем [9].

В цілому, проблема знаходження точного значення L_ψ, для випадкових величин ψ, що є сумами напевно збіжних випадкових рядів з незалежними дискретними доданками є нетривіальною, про що свідчать роботи [1, 4, 5, 6].

2 Величина верхньої границі модуля характеристичної функції розподілу Кантора

Теорема 1. *Виконується рівність:*

$$L_\xi = \prod_{n=1}^{+\infty} cos(\frac{\pi}{3^n}).$$

Доведення. Зрозуміло, що

$$|f_\xi(t)| = \prod_{k=1}^{\infty} |f_{\frac{\xi_k}{3^k}}(t)| = \prod_{k=1}^{+\infty} |cos(\frac{t}{3^k})|.$$

$$L_\xi \geqslant \overline{\lim_{n\to+\infty}} |f_\xi(\pi 3^n)| = \prod_{k=1}^{+\infty} cos(\frac{\pi}{3^k}). \quad (1)$$

Нехай πt_n — зростаюча необмежена послідовність дійсних чисел така, що

$$\lim_{n\to+\infty} |f_\xi(t_n)| = L_\xi.$$

Зрозуміло, що

$$\frac{\pi t_n}{3^{[log_3(t_n)]+2}} < \frac{\pi t_n}{3^{log_3(t_n)+1}} = \frac{\pi}{3}.$$

$$\frac{\pi t_n}{3^{[log_3(t_n)]+2}} \geqslant \frac{\pi t_n}{3^{log_3(t_n)+2}} = \frac{\pi}{9}.$$

Оскільки послідовність $\frac{\pi t_n}{3^{[log_3(t_n)]+2}}$ обмежена, то з неї можливо виділити збіжну підпослідовність. Отже, існує зростаюча необмежена послідовність дійсних чисел $\widetilde{t_n}$ така, що

$$\lim_{n\to+\infty} |f_\xi(\pi\widetilde{t_n})| = L_\xi. \quad (2)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\widetilde{t_n}}{3^{[log_3(\widetilde{t_n})]+2}} = \gamma \in [\frac{1}{9}; \frac{1}{3}].$$

Позначимо:

$$\gamma^*(n) = \frac{\widetilde{t_n}}{3^{[log_3(\widetilde{t_n})]+2}}.$$

Нехай

$$\gamma = \Delta^3_\alpha \underbrace{00...0}_{a_1}\underbrace{11...1}_{b_1}\underbrace{22...2}_{c_1}...\underbrace{00...0}_{a_n}\underbrace{11...1}_{b_n}\underbrace{22...2}_{c_n}...,$$

де $\alpha = 0$ або $\alpha = 1$.

Припустимо, що послідовності a_n та b_n обмежені, тобто для деякого натурального L та для кожного натурального n: $a_n \leqslant L$ та $b_n \leqslant L$. Розглянемо випадки.

Випадок 1. Існує $N_1 \in N$ такий, що для кожного натурального $n \geqslant N_1$: $a_n \geqslant 1$. Запишемо число γ в наступному вигляді:

$$\gamma = \Delta^3_{\alpha_{01}\alpha_{02}...\alpha_{0d_0}} \underbrace{00...0}_{e_1} \alpha_{11}\alpha_{12}...\alpha_{1d_1}...\underbrace{00...0}_{e_n}\alpha_{n1}\alpha_{n2}...\alpha_{nd_n}...$$

Нехай

$$\gamma^* = \Delta^3_{\alpha_{01}\alpha_{02}...\alpha_{0d_0}} \underbrace{00...0}_{e_1} \alpha_{11}\alpha_{12}...\alpha_{1d_1}...\underbrace{00...0}_{e_n}\alpha_{n1}\alpha_{n2}...\alpha_{nd_n}\tau_1\tau_2...,$$

де $\tau_1, \tau_2, ...$ — довільні цифри. Зрозуміло, що для кожного $k \in \{1; 2; ...; n-1\}$:

$$\gamma^* \cdot 3^{d_0+e_1+d_1+...+e_k+d_k} = w_k + \Delta^3 \underbrace{00...0}_{e_{k+1}}...,$$

де w_k — деяке ціле число, причому

$$\Delta^3_{\underbrace{00...0}_{e_{k+1}}...} \geqslant \Delta^3_{\underbrace{00...0}_{L}1(0)}.$$

Маємо:

$$|cos(\gamma^* \cdot 3^{d_0+e_1+d_1+...+e_k+d_k})| \leqslant |cos(\Delta^3_{\underbrace{00...0}_{L}1(0)})|.$$

Зрозуміло, що існує натуральне число l_0 таке, що

$$|cos(\Delta^3_{\underbrace{00...0}_{L}1(0)})|^{l_0} < L_\xi.$$

Зрозуміло, що існує натуральне число l_1 таке, що для кожного $n > l_1$ перші $d_0 + e_1 + d_1 + ... + e_{l_0} + d_{l_0}$ цифр трійкових зображень чисел $\gamma^*(n)$ та γ рівні.

Зрозуміло, що існує натуральне число l_2 таке, що для кожного $n > l_2$:

$$[log_3(\widetilde{t_n})] + 2 > d_0 + e_1 + d_1 + ... + e_{l_0} + d_{l_0}.$$

Нехай $l_3 = max(l_1; l_2)$, тоді при $n > l_3$ маємо:

$$|f_\xi(\pi\widetilde{t_n})| \leqslant \prod_{j=1}^{l_0} |cos(\gamma^*(n) \cdot 3^{d_0+e_1+d_1+...+e_j+d_j})| \leqslant$$

$$\leqslant |cos(\Delta^3_{\underbrace{00...0}_{L}1(0)})|^{l_0} < L_\xi.$$

Маємо суперечність з умовою 2.

Випадок 2. Існує $N_2 \in N$ такий, що для кожного натурального $n \geqslant N_2$ виконується умова $c_n \geqslant 1$. Запишемо число γ в наступному вигляді:

$$\gamma = \Delta^3_{\beta_{01}\beta_{02}...\beta_{0f_0}\underbrace{22...2}_{g_1}\beta_{11}\beta_{12}...\beta_{1f_1}...\underbrace{22...2}_{g_n}\beta_{n1}...\beta_{nf_n}...}.$$

Зрозуміло, що для кожного натурального k :

$$\Delta^3_{\underbrace{22...2}_{g_{k+1}}...} \leqslant \Delta^3_{\underbrace{22...2}_{L}2(0)}.$$

Міркуючи аналогічним чином, як і по відношенню до попереднього випадку отримаємо, що для достатньо великих n :

$$|f_\xi(\pi\widetilde{t_n})| < L_\xi.$$

Маємо суперечність з умовою 2.

Випадок 3. Існує $N_3 \in N$ такий, що для кожного натурального $n \geqslant N_3$ виконується умова $a_n = c_n = 0$.

Запишемо число γ в наступному вигляді:

$$\gamma = \Delta^3_{\delta_1\delta_2...\delta_j(1)}.$$

Маємо:

$$\gamma 3^j = 3^j(\frac{\delta_1}{3} + \frac{\delta_2}{3^2} + ... + \frac{\delta_j}{3^j}) + \frac{1}{2}.$$

При $(n \to +\infty)$ маємо:

$$\gamma^*(n) \cdot 3^j \to 3^j(\frac{\delta_1}{3} + \frac{\delta_2}{3^2} + ... + \frac{\delta_j}{3^j}) + \frac{1}{2}.$$

$$cos(\gamma^*(n) \cdot 3^j) \to cos(3^j(\frac{\delta_1}{3} + \frac{\delta_2}{3^2} + ... + \frac{\delta_j}{3^j}) + \frac{1}{2}) = 0.$$

Зрозуміло, що існує натуральне число r_3 таке, що для кожного $n > r_3$

$$[log_3(\widetilde{t_n})] + 2 > a_j.$$

Маємо:

$$|f_\xi(\pi\widetilde{t_n})| \leqslant cos(\gamma^*(n) \cdot 3^j) \to 0(n \to +\infty).$$

Маємо суперечність з умовою 2.

Отже, або послідовність a_n необмежена або необмеженою є послідовність c_n.

Випадок 4. Нехай γ — трійково-ірраціональне число $(\gamma \neq \frac{a}{3^b} \forall a, b \in N)$.

Випадок 4.1. Нехай a_n є необмеженою послідовністю.

Запишемо число γ у вигляді:

$$\gamma = \Delta^3_{\gamma_{01}\gamma_{02}...\gamma_{0h_0}\underbrace{00...0}_{k_1}\gamma_{11}\gamma_{12}...\gamma_{1h_1}...\underbrace{00...0}_{k_n}\gamma_{n1}...\gamma_{nh_n}...}.$$

Зрозуміло, що серед чисел $\gamma_{1h_1}, \gamma_{2h_2}, ...$ або нескінченна множина одиниць або нескінченна множина двійок.

Випадок 4.1.А. Серед чисел $\gamma_{1h_1}, \gamma_{2h_2}, ...$ нескінченна множина одиниць.

Запишемо число γ у вигляді:

$$\gamma = \Delta^3_{\varepsilon_{01}\varepsilon_{02}...\varepsilon_{0m_0}\underbrace{00...0}_{o_1}\varepsilon_{11}\varepsilon_{12}...\varepsilon_{1h_1}...\underbrace{00...0}_{o_n}\varepsilon_{n1}...\varepsilon_{nm_n}...}.$$

де послідовність o_n зростаюча.

Для заданого достатньо малого $\varepsilon > 0$ існує натуральне A^* таке, що

$$\frac{1}{3^{A^*}} < \varepsilon.$$

Зрозуміло, що існує натуральне число A таке, що

$$o_A > A^*.$$

Зрозуміло, що існує натуральне число N_4 таке, що для кожного $n > N_4$ перші $m_0 + o_1 + m_1 + ... + o_{l_0} + m_{l_0}$ цифр трійкових зображень чисел $\gamma^*(n)$ та γ рівні.

Зрозуміло, що існує натуральне число N_5 таке, що для кожного $n > N_5$:

$$[log_3(\widetilde{t_n})] + 2 > m_0 + o_1 + m_1 ... + o_A + m_A.$$

Нехай $N_6 = max(N_4; N_5)$, тоді при $n > N_6$ маємо:

$$\gamma^*(n) \cdot 3^{m_0 + \sum_{j=1}^{A-1}(o_j + m_j)} =$$

$$= \Delta^3_{\underbrace{100...0}_{o_A}\varepsilon_{1A}\varepsilon_{2A}...\varepsilon_{Am_A}...} \leqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{3^{o_A}} < \frac{1}{3} + \varepsilon.$$

Випадок 4.1.В. Серед чисел $\gamma_{1h_1}, \gamma_{2h_2}, ...$ нескінченна множина двійок.

Аналогічним чином, як і у випадку 4.2.А можливо отримати, що для деякої послідовності натуральних чисел p_n:

$$\lim_{n \to +\infty} |\gamma^*(n) 3^{p_n} - \frac{2}{3}| = 0.$$

Випадок 4.2. Нехай c_n є необмеженою послідовністю.

Запишемо число γ у вигляді:

$$\gamma = \Delta^3_{\theta_{01}\theta_{02}...\theta_{0r_0}\underbrace{22...2}_{s_1}\theta_{11}\theta_{12}...\theta_{1r_1}...\theta 22...2_{r_n}\theta_{n1}...\theta_{nr_n}...}.$$

Зрозуміло, що серед чисел $\theta_{1r_1}, \theta_{r_2}, ...$ або нескінченна множина нулів або нескінченна множина одиниць.

Якщо серед чисел $\theta_{1r_1}, \theta_{r_2}, ...$ нескінченна кількість нулів, можливо показати, що для деякої послідовності натуральних чисел q_n:

$$\lim_{n \to +\infty} |\gamma^*(n) 3^{q_n} - \frac{1}{3}| = 0.$$

Якщо серед чисел $\theta_{1r_1}, \theta_{r_2}, ...$ нескінченна кількість одиниць, можливо показати, що для деякої послідовності натуральних чисел u_n:

$$\lim_{n \to +\infty} |\gamma^*(n) 3^{u_n} - \frac{2}{3}| = 0.$$

Випадок 5. Нехай γ — трійковораціональне число, тобто для деяких натуральних a та b виконується рівність $\gamma = \frac{a}{3^b}$.

Число γ можливо записати у вигляді:

$$\gamma = \Delta^3_{\mu_1\mu_2...\mu_E(0)},$$

де μ_E дорівнює одиниці або двійкі.

З іншого боку число γ можливо записати у вигляді:

$$\gamma = \Delta^3_{\nu_1\nu_2...\nu_F(2)},$$

де ν_F дорівнює нулю або одиниці.

Легко бачити, що послідовність $\gamma^*(n)$ або містить нескінченну кількість членів виду

$$\gamma = \Delta^3_{\mu_1\mu_2...\mu_E\underbrace{00...0}_{x_n}...},$$

де x_n необмежена послідовність; або $\gamma^*(n)$ містить нескінченну кількість членів виду

$$\gamma = \Delta^3_{\nu_1\nu_2...\nu_F\underbrace{22...2}_{y_n}...},$$

де y_n необмежена.

Міркуючи аналогічно до випадку 4, можливо показати, що

$$\lim_{n \to +\infty} |\gamma^*(n) 3^{E-1} - \frac{\mu_E}{3}| = 0,$$

або

$$\lim_{n \to +\infty} |\gamma^*(n) 3^{F-1} - \frac{1 + \nu_F}{3}| = 0.$$

Отже, є вірним одне з тверджень.

Твердження 1. Для кожного додатного ε та натурального N існують натуральні числа $n > N$ та $H_n > 2$ такі, що

$$|\frac{\pi\widetilde{t_n}}{3^{H_n}} - \frac{\pi}{3}| < \varepsilon.$$

Твердження 2. Для кожного додатного ε та натурального T існують натуральні числа $n > T$ та $G_n > 2$ такі, що

$$|\frac{\pi\widetilde{t_n}}{3^{G_n}} - \frac{2\pi}{3}| < \varepsilon.$$

Припустимо, що

$$L_\xi > \prod_{k=1}^{+\infty} cos(\frac{\pi}{3^k}) = |f_\xi(\pi)|.$$

Виберемо додатне число δ так, що

$$\delta < \frac{1}{2}(L_\xi - \prod_{k=1}^{+\infty} cos(\frac{\pi}{3^k})),$$

звідки

$$L_\xi - \delta > \delta + \prod_{k=1}^{+\infty} cos(\frac{\pi}{3^k}),$$

тоді існує натуральне число N_7 таке, що для всіх натуральних $n > N_7$ виконується умова:

$$||f_\xi(\widetilde{t_n})| - L_\xi| < \delta,$$

звідки

$$|f_\xi(\widetilde{t_n})| > L_\xi - \delta. \quad (3)$$

Нехай виконується **твердження 1.** Оскільки функція $|f_\xi(x)|$ є неперервною, то існує $\varepsilon > 0$ таке, що для кожного числа x, яке задовольняє умову

$$|x - \pi| < \varepsilon,$$

виконується умова:

$$||f_\xi(x)| - |f_\xi(\pi)|| < \delta,$$

тобто

$$|f_\xi(x)| < |f_\xi(\pi)| + \delta = \delta + \prod_{k=1}^{+\infty} cos(\frac{\pi}{3^k}).$$

Зрозуміло, що існує натуральні числа $n > N_7$ та $H_n > 2$ такі, що

$$|\frac{\pi\widetilde{t_n}}{3^{H_n}} - \frac{\pi}{3}| < \frac{\varepsilon}{3},$$

звідки

$$|\frac{\pi\widetilde{t_n}}{3^{H_n-1}} - \pi| < \varepsilon,$$

а тому

$$|f_\xi(\frac{\pi\widetilde{t_n}}{3^{H_n-1}})| < |f_\xi(\pi)| + \delta.$$

Маємо:

$$|f_\xi(\widetilde{t_n})| = |f_\xi(\frac{\pi\widetilde{t_n}}{3^{H_n-1}})| \prod_{j=1}^{H_n-1} |cos(\frac{\widetilde{t_n}}{3^j})| \leqslant$$

$$\leqslant |f_\xi(\frac{\pi\widetilde{t_n}}{3^{H_n-1}})| < |f_\xi(\pi)| + \delta < L_\xi - \delta.$$

Маємо суперечність з умовою 3.

Нехай виконується **твердження 2.**

Зазначимо, що

$$|f_\xi(2\pi)| = |cos(\frac{2\pi}{3})| \prod_{k=2}^{+\infty} cos(\frac{2\pi}{3^k}) =$$

$$= cos(\frac{\pi}{3}) \prod_{k=2}^{+\infty} cos(\frac{2\pi}{3^k}) < \prod_{k=1}^{+\infty} cos(\frac{\pi}{3^k}) = |f_\xi(\pi)|.$$

Оскільки функція $|f_\xi(x)|$ є неперервною, то існує $\varepsilon > 0$ таке, що для кожного числа x, яке задовольняє умову

$$|x - 2\pi| < \varepsilon,$$

виконується умова:

$$||f_\xi(x)| - |f_\xi(2\pi)|| < \delta,$$

тобто

$$|f_\xi(x)| < |f_\xi(2\pi)| + \delta = \delta + \prod_{k=1}^{+\infty} |cos(\frac{2\pi}{3^k})|.$$

Зрозуміло, що існує натуральні числа $n > N_7$ та $G_n > 2$ такі, що

$$|\frac{\pi\widetilde{t_n}}{3^{G_n-1}} - 2\pi| < \varepsilon,$$

а тому

$$|f_\xi(\frac{\pi\widetilde{t_n}}{3^{G_n-1}})| < |f_\xi(2\pi)| + \delta.$$

Маємо:

$$|f_\xi(\widetilde{t_n})| = |f_\xi(\frac{\pi\widetilde{t_n}}{3^{G_n-1}})| \prod_{j=1}^{G_n-1} |cos(\frac{\widetilde{t_n}}{3^j})| \leqslant$$

$$\leqslant |f_\xi(\frac{\pi\widetilde{t_n}}{3^{G_n-1}})| < |f_\xi(2\pi)| + \delta < L_\xi - \delta.$$

Маємо суперечність з умовою 3.

Отже,

$$L_\xi \leqslant \prod_{k=1}^{+\infty} cos(\frac{\pi}{3^k}),$$

що разом з умовою 1 доводить твердження теореми.

3 Висновки

В роботі доведено, що

$$\lim_{|t|\to\infty} \sup |f_\xi(t)| = \prod_{n=1}^{+\infty} cos(\frac{\pi}{3^n}).$$

для характеристичної функції $f_\xi(t)$ випадкової величини ξ, функцією розподілу якої є сингулярна функція Кантора.

В результаті було також показано, що

$$\lim_{|t|\to\infty} \sup |f_\xi(t)| = \overline{\lim_{n\to+\infty}} |f_\xi(\pi n)|.$$

Список використаних джерел

1. *Гончаренко Я. В.* Асимптотичні властивості характеристичної функції випадкової величин з незалежними двійковими цифрами та згортки сингулярних розподілів /Я. В. Гончаренко // Наукові записки НПУ імені. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — №3, 2002. — С.376-390.

2. *Лукач Е.* Характеристические функции / Е. Лукач — М.: Наука, 1979.— 424с.

3. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів / М. В. Працьовитий — Київ: Вид-во НПУ імені М.П Драгоманова, 1998. — 296с.

4. *Працьовитий М. В.* Один клас випадкових величин типу Джессена-Вінтнера / М. В. Працьовитий, Г. М. Торбін // Доп. НАН України. — 1998. — №4. — С.48-54.

5. *Турбин А. Ф.* Фрактальные множества, функции, распределения / А. Ф. Турбин, Н. В. Працевитый — Киев: Наук. думка, 1992. — 208с.

6. *Albeverio S.*Convolutions of distributions of random variables with independent binary digits / S. Albeverio, Y. Goncharenko, M. Pratsiovyti, G. Torbin //Random Oper. Stochastic Equations, 2007. — .**15**.— №1. — P.89-97.

7. *Eseen C.G* Fourier analysis of distribution functions / C. G. Eseen // Acta Mathematica, 1945, 77. — P. 11-25.

8. *Girault M.* Les fonctions caracteristiques el leurs transformations / M. Girault // Publ.Inst.Statist.Univ. Paris, 1954, 4. — P. 223-239.

9. *Schvartz L.* Sur le module de la fonction caracteristicue du calcul des probabilites / L. Schvartz // C.R.Acad.Sci.Paris, 1941. — P.418-421.

10. *Jessen B.* Distribution function and Riemann Zeta-function / B. Jessen, A. Wintner // Trans.Amer.Math.Soc.38,1935. — P.48-88.

References

1. GONCHARENKO, Y. V. (2002) *Asymptotic properties of the characteristic function of random variables with independent binary digits and convolution of singular distributions.* Scientific notes of NPU named after. Drahomanov. Physical and mathematical sciences. (3), p.376-390.

2. LUKACH, E. (1979) *Characteristic functions.* Moskwa: Nauka.

3. PRATSIOVYTYI, M. (1998) *Fractal approach in singular studies distributions.* Ed. Kyiv: M.P. Drahomanov National Pedagogical University Publishing House.

4. PRATSIOVYTYI, M.V., TORBIN, G.M. (1998) *One class of random variables such as Jessen-Wintner* Add.NAS of Ukraine. (4), p.48-54.

5. TURBIN, A.F., PRATSIOVYTYI, M.V. (1992) *Fractal sets, functions, distribution.* Ed. Kyiv: Naukova dumka.

6. ALBEVERIO,S., GONCHARENKO.Y., PRATSIOVYTI, M.,TORBIN,G. (2007) *Convolutions of distributions of random variables with independent binary digits.* Random Oper. Stochastic Equations. Vol. 15(1), p.89-97.

7. ESEEN, C.G. (1945) *Fourier analysis of distribution functions.* Acta Mathematica, (77), p.11-25.

8. GIRAULT, M. (1954) *Les fonctions caracteristiques el leurs transformations.*Publ.Inst.Statist.Univ. Paris, (4), p. 223-239.

9. SCHVARTZ, L. (1941) *Sur le module de la fonction caracteristicue du calcul des probabilites.* C.R.Acad.Sci.Paris, p.418-421.

10. JESSEN ,B., WINTNER, A. (1935) *Distribution function and Riemann Zeta-function.* Trans.Amer.Math.Soc (38), p.48-88.

Надійшла до редколегії 27.08.2021

УДК 519.21
https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/2.10

І. В. Самойленко[1], *д.ф.-м.н., доцент*
Т. А. Самойленко[2], *к.ф.-м.н.*
Б. В. Довгай[3], *к.ф.-м.н., доцент*

Випадкові еволюції в схемі пуассонової апроксимації

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4г,
e-mail: isamoil@i.ua
[2] Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", 03056, м. Київ, пр-т Перемоги, 37,
e-mail: tsamoil@i.ua
[3] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4г,
e-mail: bogdov@gmail.com

I. V. Samoilenko[1], *PhD, Habil.*
T. A. Samoilenko[2], *PhD*
B. V. Dovgai[3], *PhD*

Random evolutions in Poisson approximation scheme

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, 4g Glushkova str.,
e-mail: isamoil@i.ua
[2]National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", 03056, Kyiv, 37 Prosp. Peremohy,
e-mail: tsamoil@i.ua
[3]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, 4g Glushkova str.,
e-mail: bogdov@gmail.com

Операторний підхід при дослідженні випадкових еволюцій дозволяє отримувати наступні результати у схемі пуассонової апроксимації: функціональні граничні теореми на зростаючих інтерваліах часу та розв'язок проблеми великих відхилень. Ми зосередимось на останній задачі.

Специфіка асимптотичного аналізу у схемі пуассонової апроксимації обумовлена тим, що значення стрибків стохастичної системи поділяються на дві частини: малі стрибки, що відбуваються з імовірностями, близькими до одиниці, і великі стрибки, що відбуваються з імовірностями які прагнуть до нуля разом з малим параметром серії $\varepsilon \to 0$.

Результати дослідження доповідались на Міжнародній науковій конференції "Modern Stochastics: Theory and Applications. V" (MSTA-V).

Ключові слова: Випадкові еволюції, пуассонівська апроксимація, проблема великих відхилень.

The operator approach in the study of random evolutions allows us to obtain the following results in the Poisson approximation scheme: functional limit theorems at increasing time intervals and the solution of the large deviations problem. We will focus on the last task.

To solve the problem, asymptotic analysis of nonlinear generators of random evolutions with Markov switching should be conducted in the series scheme. The specifics of asymptotic analysis is conditioned by the fact that the jump values of the stochastic system are split into two parts: a small jump taking values with probabilities close to one and a big jump taken values with probabilities tending to zero together with the series parameter $\varepsilon \to 0$. So, in the Poisson approximation principle the probabilities (or intensities) of jumps are normalized by the series parameter $\varepsilon > 0$.

Having the limit nonlinear generator, we are able to construct the rate functional to solve the large deviations problem.

Key Words: Random evolutions, Poisson approximation scheme, large deviations problem.

Під терміном *пуассонова апроксимація* треба розуміти схему, подібну до схеми усереднення чи дифузійної апроксимації, яка дозволяє вивчати граничну поведінку випадкових процесів на зростаючих інтервалах часу. Таким чином, це не є класична задача наближення випадкового процесу за допомогою пуассонових процесів.

Основна ідея пуассонової апроксимації (див. [5]) полягає у тому, що малим параметром серії нормуються імовірності (або інтенсивності) цих стрибків. Таким чином, стрибки роз-

© І.В. Самойленко, Т.А. Самойленко, Б.В. Довгай, 2021

ділені на два типи: малі стрибки з імовірностями, близькими до одиниці, та великі стрибки, які відбуваються з імовірністю, що прямує до 0 разом з малим параметром серії $\varepsilon \to 0$.

Приклад 1. Наведемо простий приклад випадкової величини з подібними властивостями. Нехай для α:

$$P\{\alpha = b\} = \varepsilon^2 p,$$

$$P\{\alpha = \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 b_1\} = 1 - \varepsilon^2 p.$$

Тоді маємо:

$$\mathbf{E}\alpha = \varepsilon a_1 + \varepsilon^2(bp + b_1) + o(\varepsilon^2),$$

$$\mathbf{E}\alpha^2 = \varepsilon^2(b^2 p + a_1^2) + o(\varepsilon^2).$$

Ці моментні умови характеризують апроксимацію Леві.

У випадку коли $a_1 = 0$, матимемо

$$\mathbf{E}\alpha = \varepsilon^2(bp + b_1) + o(\varepsilon^2),$$

$$\mathbf{E}\alpha^2 = \varepsilon^2 b^2 p + o(\varepsilon^2),$$

і тому, поклавши $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon^2$ отримаємо моментні умови, що характеризують пуассонову апроксимацію, яку і розглянемо далі задля спрощення викладок:

$$\mathbf{E}\alpha = \widetilde{\varepsilon}(bp + b_1) + o(\widetilde{\varepsilon}),$$

$$\mathbf{E}\alpha^2 = \widetilde{\varepsilon} b^2 p + o(\widetilde{\varepsilon}).$$

При дослідженні процесів з незалежними приростами моментні умови накладаються на відповідне ядро інтенсивності, нормоване малим параметром серії.

Нехай $C_3(\mathbf{R}^d)$ є класом функцій, що визначає міру та включає в себе дійснозначні обмежені функції, такі що $g(u)/|u|^2 \to 0$, при $|u| \to 0$ якщо $g \in C_3(\mathbf{R}^d)$ ([4, 5]).

Розглянемо сім'ю нормованих марковських процесів з траекторіями в $D_{\mathbf{R}}[0,\infty)$ та незалежними приростами в схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0$:

$$\eta_\varepsilon(t) = \eta(t/\varepsilon), t \geqslant 0,$$

що визначаються генераторами

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^\varepsilon \varphi(u) = \varepsilon^{-1} \int_{\mathbf{R}} [\varphi(u+v) - \varphi(u)] \widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv).$$

Нехай виконуються умови пуассонової апроксимації:

C1: *Пуассонова апроксимація.*

PA1 Апроксимация середніх:

$$b_\varepsilon = \int_{\mathbf{R}} v \widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv) = \varepsilon[b + \theta_b^\varepsilon],$$

та

$$c_\varepsilon = \int_{\mathbf{R}} v^2 \widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv) = \varepsilon[c + \theta_c^\varepsilon],$$

де

$$b < +\infty, c < +\infty.$$

PA2 Для ядра інтенсивностей має місце асимптотичне представлення

$$\widetilde{\Gamma}_g^\varepsilon = \int_{\mathbf{R}} g(v) \widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv) = \varepsilon[\widetilde{\Gamma}_g + \theta_g^\varepsilon]$$

для всіх $g \in C_3(\mathbf{R})$ - класу функцій, що визначає міру (див. [4]).
Ядро $\widetilde{\Gamma}^0(dv)$ задано на класі функцій, що визначає міру $C_3(\mathbf{R})$ співвідношенням

$$\widetilde{\Gamma}_g = \int_{\mathbf{R}} g(v) \widetilde{\Gamma}^0(dv), \quad g \in C_3(\mathbf{R}).$$

Знехтувально малі доданки $\theta_b^\varepsilon, \theta_c^\varepsilon, \theta_g^\varepsilon$ задовольняють умову

$$|\theta_\cdot^\varepsilon| \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

PA3 Має місце співвідношення

$$c := \int_{\mathbf{R}} v^2 \widetilde{\Gamma}^0(dv),$$

що зумовлює відсутність дифузійної складової в граничному генераторі.

C2: *Рівномірна квадратична інтегровність*:

$$\lim_{c \to \infty} \int_{|v|>c} v^2 \widetilde{\Gamma}^0(dv) = 0.$$

Лема 1. *Генератор процесу з незалежними приростами*

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^\varepsilon \varphi(u) = \varepsilon^{-1} \int_{\mathbf{R}} [\varphi(u+v) - \varphi(u)] \widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv)$$

в схемі пуассонової апроксимації має наступне асимптотичне представлення:

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^\varepsilon \varphi(u) = b\varphi'(u) + \int_{\mathbf{R}} [\varphi(u+v) - \varphi(u) - v\varphi'(u)] \widetilde{\Gamma}^0(dv) + \theta^\varepsilon \varphi,$$

де $|\theta^\varepsilon \varphi| \to 0, \varepsilon \to 0, \varepsilon > 0$.

Доведення. Перепишемо вираз для генератора наступним чином:

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^{\varepsilon}\varphi(u)=\varepsilon^{-1}\int_{\mathbf{R}}[\varphi(u+v)-\varphi(u)-v\varphi'(u)$$

$$-\frac{v^2}{2}\varphi''(u)]\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}(dv)+\varepsilon^{-1}\int_{\mathbf{R}}v\varphi'(u)\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}(dv)$$

$$+\frac{\varepsilon^{-1}}{2}\int_{\mathbf{R}}v^2\varphi'(u)\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}(dv).$$

Легко бачити, що функція $\psi_u(v)=\varphi(u+v)-\varphi(u)-v\varphi'(u)-\frac{v^2}{2}\varphi''(u)$ належить класу $C_3(\mathbf{R})$. Дійсно,

$$\psi_u(v)/v^2\to 0, v\to 0$$

рівномірно по u за умови обмеженості похідних функції $\varphi(u)$ на компакті. Крім того, ця функція неперервна і обмежена для $\varphi(u)\in C_0^2(\mathbf{R})$ за умови **PA1**.

Таким чином, з умов **PA1,PA2** маємо:

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^{\varepsilon}\varphi(u)=\int_{\mathbf{R}}[\varphi(u+v)-\varphi(u)-v\varphi'(u)$$

$$-\frac{v^2}{2}\varphi''(u)]\widetilde{\Gamma}^{0}(dv)+b\varphi'(u)+\frac{c}{2}\varphi''(u)+\theta_b^{\varepsilon}\varphi$$

$$+\theta_c^{\varepsilon}\varphi+\theta_{\psi}^{\varepsilon}\varphi.$$

Застосовуючи умову **PA3** остаточно отримаємо асимптотичне представлення:

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}^{\varepsilon}\varphi(u)=b\varphi'(u)+\int_{\mathbf{R}}[\varphi(u+v)$$

$$-\varphi(u)-v\varphi'(u)]\widetilde{\Gamma}^{0}(dv)+\theta^{\varepsilon}\varphi.$$

Лему доведено.

Розв'язок проблеми великих відхилень із використанням нелінійного експоненційного генератора, як правило, реалізується в 4 етапи [3]:

(1) *Обчислення граничного експоненційного (нелінійного) генератора* $\mathbf{H}$*, що визначає великі відхилення.*

(2) *Визначення експоненційної компактності сім'ї дограничних процесів.*

(3) *Визначення принципу порівняння для граничного генератора.*

(4) *Обчислення варіаційного представлення функціоналу дії.*

На третьому етапі даної програми доводиться єдиність розв'язку рівняння

$$(I-\alpha\mathbf{H})f=h, \alpha>0$$

для достатньо широкого класу функцій h. Наслідком цього факту є збіжність нелінійних напівгруп H_t^{ε}, що зумовлює принцип великих відхилень для скінченновимірних розподілів дограничних процесів, а за умови експоненційної компактності сім'ї дограничних процесів і принцип великих відхилень у просторі $D_E[0,\infty)$.

Етапи (2) – (4) для експоненційного генератора, що відповідають процесам які описано в статті, реалізовано в монографії [3]. А саме, питання експоненційної компактності для процесів з незалежними приростами розглянуто в Прикладах 1.5, 4.23 та в пп. 10.1.2 та 10.3.2; перевірка принципу порівняння для граничного експоненційного генератора вигляду $\widehat{\mathbf{H}}^0\varphi(u)=\mathbf{H}^0(\varphi'(u))$ проведена в пп. 10.1.3 із застосуванням Леми 9.15; варіаційне представлення граничного експоненційного генератора проведено в пп. 10.1.5 на с.200 із застосуванням Теореми 8.14.

Зауважимо також, що інтерпретація нелінійної напівгрупи як напівгрупи Нісіо та її зв'язок із задачею керування дозволяє будувати функціонал дії у найбільш зручному для дослідження вигляді (див. Приклад 2 нижче).

Розглянемо марковський процес $x(t), t\geqslant 0$, на стандартному фазовому просторі $(E,\mathcal{E})$. Нехай відповідний генератор $\mathbf{L}$ має щільну область визначення $\mathcal{D}(\mathbf{L})\subseteq\mathcal{B}_E$, яка містить неперервні разом зі своїми похідними функції. Тут $\mathcal{B}_E$ - банахів простір дійснозначних обмежених тест-функцій $\varphi(x)\in E$, з нормою: $\|\varphi\|:=\sup_{x\in E}|\varphi(x)|$.

Позначимо також через $C_b(E)$ простір неперервних функцій, що належать $\mathcal{B}_E$. Класична лінійна напівгрупа процесу $x(t), t\geqslant 0$ задається як

$$L_t\varphi(u):=E[\varphi(x(t))|x(0)=u],$$

а нелінійна напівгрупа:

$$H_t\varphi(u):=\ln E[e^{\varphi(x(t))}|x(0)=u],$$

або

$$H_t\varphi(u)=\ln L_t e^{\varphi(u)}. \qquad (1)$$

Це дійсно напівгрупа, бо маємо:

$$H_{t+s}\varphi(u)=\ln L_{t+s}e^{\varphi(u)}=\ln L_tL_se^{\varphi(u)}$$

$$=\ln L_te^{\ln L_se^{\varphi(u)}}=\ln L_te^{H_s\varphi(u)}=H_tH_s\varphi(u).$$

Доведемо наступний результат, який використовується без доведення, зокрема в [3].

Лема 2. *Нелінійний експоненційний генератор, що відповідає напівгрупі (1) має вигляд:*

$$\mathbf{H}\varphi(u) = e^{-\varphi(u)}\mathbf{L}e^{\varphi(u)}, e^{\varphi(u)} \in \mathcal{D}(\mathbf{L}).$$

Доведення: З урахуванням співвідношення

$$L_t - 1 = t\mathbf{L} + o(t), t \to 0,$$

маємо:

$$\mathbf{H}\varphi(u) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(H_t - I)\varphi(u) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(H_t\varphi(u) - \varphi(u)) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\ln L_t e^{\varphi(u)} - \ln e^{\varphi(u)})$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\ln e^{-\varphi(u)}L_t e^{\varphi(u)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\ln\{1 + [e^{-\varphi(u)}L_t e^{\varphi(u)} - 1]\} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\ln\{1 + e^{-\varphi(u)}[L_t e^{\varphi(u)} - e^{\varphi(u)}]\} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\ln\{1 + e^{-\varphi(u)}[t\mathbf{L}e^{\varphi(u)} + o(t)]\}$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}e^{-\varphi(u)}t\mathbf{L}e^{\varphi(u)} = e^{-\varphi(u)}\mathbf{L}e^{\varphi(u)}.$$

Лему доведено.

Використання нелінійного експоненційного генератора при дослідженні проблеми великих відхилень для марковських процесів вмотивоване наявністю зв'язку між нелінійною напівгрупою, що відповідає генератору та функціоналом дії. Наведемо наступні міркування, що демонструють такий зв'язок.

Проблема великих відхилень для марковського процесу $x^\varepsilon(t), t \geqslant 0$ в схемі серій з малим параметром $\varepsilon \to 0 (\varepsilon > 0)$ полягає у відшуканні функціоналу дії $I(x)$. Одне з можливих означень $I(x)$ наступне [3]:

Означення 0.1.

$$-I(x) = \lim_{\delta\to 0}\liminf_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln P\{x^\varepsilon(t) \in B_\delta(x)\} = \lim_{\delta\to 0}\limsup_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln P\{x^\varepsilon(t) \in \overline{B}_\delta(x)\},$$

де $B_\delta(x) := \{y \in E : r(x,y) < \delta\}$.

Має місце наступне твердження(Формула Брика [2])доведення якого можна знайти в [3], Твердження 3.8.

Твердження 1. *Нехай марковський процес $x^\varepsilon(t), t \geqslant 0$, $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon > 0)$ є експоненційно компактним в $D_E[0,\infty)$ та існує границя*

$$\Lambda(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln E[e^{\varphi(x^\varepsilon(t))/\varepsilon}]$$

для всіх $\varphi \in C_b(E)$.

Тоді $x^\varepsilon(t)$ задовольняє принципу великих відхилень з функціоналом дії

$$I(x) = \sup_{\varphi\in C_b(E)}\{\varphi(x) - \Lambda(\varphi)\}.$$

Таким чином, дослідження проблеми великих відхилень дійсно пов'язано з граничною поведінкою нелінійної напівгрупи

$$H_t^\varepsilon\varphi(u) := \varepsilon\ln Ee^{\varphi(x^\varepsilon(t))/\varepsilon}. \quad (2)$$

Наведемо наступний результат, який також використовується в [3] без належного доведення.

Лема 3. *Нелінійний експоненційний генератор, що відповідає напівгрупі (2) має вигляд:*

$$\mathbf{H}^\varepsilon\varphi(u) = e^{-\varphi(u)/\varepsilon}\varepsilon\mathbf{L}^\varepsilon e^{\varphi(u)/\varepsilon}, e^{\varphi(u)/\varepsilon} \in \mathcal{D}(\mathbf{L}^\varepsilon).$$

Доведення: З урахуванням співвідношення

$$L_t^\varepsilon - 1 = t\mathbf{L}^\varepsilon + o(t), t \to 0,$$

маємо:

$$\mathbf{H}^\varepsilon\varphi(u) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(H_t^\varepsilon - I)\varphi(u) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(H_t^\varepsilon\varphi(u) - \varphi(u)) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\varepsilon\ln L_t^\varepsilon e^{\varphi(u)/\varepsilon} - \varepsilon\ln e^{\varphi(u)/\varepsilon})$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{\varepsilon}{t}\ln e^{-\varphi(u)/\varepsilon}L_t^\varepsilon e^{\varphi(u)/\varepsilon} = \lim_{t\to 0}\frac{\varepsilon}{t}\ln\{1 + e^{-\varphi(u)/\varepsilon} \times [L_t^\varepsilon e^{\varphi(u)/\varepsilon} - e^{\varphi(u)/\varepsilon}]\} = \lim_{t\to 0}\frac{\varepsilon}{t}e^{-\varphi(u)/\varepsilon}t\mathbf{L}^\varepsilon e^{\varphi(u)/\varepsilon}$$
$$= e^{-\varphi(u)/\varepsilon}\varepsilon\mathbf{L}^\varepsilon e^{\varphi(u)/\varepsilon}.$$

Лему доведено.

Отже, граничну поведінку нелінійної напівгрупи можна визначати за рахунок асимптотичного аналізу відповідного нелінійного оператора.

Розглянемо випадок процесів з незалежними приростами, а саме сім'ю нормованих (тут $\varepsilon, \delta \to 0$ так що $\delta^{-1}\varepsilon \to 1$) марковських процесів з траєкторіями в $D_{\mathbf{R}}[0,\infty)$ та незалежними приростами

$$\eta_\varepsilon^\delta(t) = \varepsilon\eta^\varepsilon(t/\delta^2), t \geqslant 0,$$

що визначаються генераторами

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}_\varepsilon^\delta\varphi(u) = \delta^{-2}\int_{\mathbf{R}}[\varphi(u + \delta v) - \varphi(u)]\widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv). \quad (3)$$

Нехай виконуються умови пуассонової апроксимації **PA1-PA3**.

Розв'язок проблеми великих відхилень для процесів з незалежними приростами в схемі пуассонової апроксимації визначається за допомогою нелінійного експоненційного генератора:

$$\mathbf{H}_{\Gamma}^{\varepsilon,\delta}\varphi^{\delta}(u) = e^{-\varphi/\delta}\delta\mathbf{\Gamma}_{\varepsilon}^{\delta}e^{\varphi/\delta}. \tag{4}$$

Лема 4. *Експоненційний генератор (4) в схемі пуассонової апроксимаціїї має наступне асимптотичне представлення*

$$\mathbf{H}_{\Gamma}^{\varepsilon,\delta}\varphi(u) = \mathbf{H}_{\Gamma}\varphi(u) + \theta_{\Gamma}^{\varepsilon,\delta}\varphi, \tag{5}$$

де функції $\varphi(u) \in C_c^3(\mathbf{R})$, *і* $|\theta_{\Gamma}^{\varepsilon,\delta}\varphi| \to 0, \varepsilon, \delta \to 0$,

$$\mathbf{H}_{\Gamma}\varphi(u) = b\varphi'(u) + \int_{\mathbf{R}}[e^{v\varphi'(u)} - 1 - v\varphi'(u)]\widetilde{\Gamma}^0(dv). \tag{6}$$

Доведення: Враховуючи вигляд генератора (3), маємо для генератора (5):

$$\mathbf{H}_{\Gamma}^{\varepsilon,\delta}\varphi(u) = \delta^{-1}\int_{\mathbf{R}}[e^{\Delta_{delta}\varphi(u)} - 1]\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}(dv),$$

де

$$\Delta_{\varepsilon}\varphi(u) := \delta^{-1}[\varphi(u+\delta v) - \varphi(u)].$$

Перепишемо вираз для генератора наступним чином:

$$\mathbf{H}_{\Gamma}^{\varepsilon,\delta}\varphi(u) = \delta^{-1}\int_{\mathbf{R}}[e^{\Delta_{\delta}\varphi(u)} - 1 - \Delta_{\delta}\varphi(u)$$

$$-\frac{1}{2}(\Delta_{\delta}\varphi(u))^2]\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}(dv) + \delta^{-1}\int_{\mathbf{R}}[\Delta_{\delta}\varphi(u)$$

$$+\frac{1}{2}(\Delta_{\delta}\varphi(u))^2]\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}(dv).$$

Легко бачити, що функція $\psi_u^{\delta}(v) = e^{\Delta_{\delta}\varphi(u)} - 1 - \Delta_{\delta}\varphi(u) - \frac{1}{2}(\Delta_{\delta}\varphi(u))^2$ належить класу $C_3(\mathbf{R})$. Дійсно,

$$\psi_u^{\delta}(v)/v^2 \to 0, v \to 0.$$

Крім того, ця функція неперервна і обмежена для кожного δ за умови обмеженості функції $\varphi(u)$. Більше того, обмеженість функції $\psi_u^{\delta}(v)$ є рівномірною по u за умови **C2** та обмеженості похідної $\varphi'(u)$.

Таким чином, з умов **PA1,PA2** маємо:

$$\mathbf{H}_{\Gamma}^{\varepsilon,\delta}\varphi(u) = \delta^{-1}\varepsilon\int_{\mathbf{R}}[e^{\Delta_{\delta}\varphi(u)} - 1 - \Delta_{\delta}\varphi(u) - \frac{1}{2}$$

$$\times(\Delta_{\delta}\varphi(u))^2]\widetilde{\Gamma}^0(dv) + \delta^{-1}\int_{\mathbf{R}}[\Delta_{\delta}\varphi(u) - v\varphi'(u) - \delta\frac{v^2}{2}$$

$$\times\varphi''(u)]\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}(dv) + \delta^{-1}\varepsilon b\varphi'(u) + \frac{1}{2}\varepsilon c\varphi''(u) + \delta^{-1}$$

$$\times\int_{\mathbf{R}}[\frac{1}{2}(\Delta_{\delta}\varphi(u))^2 - \frac{v^2}{2}(\varphi'(u))^2]\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}(dv)$$

$$+\delta^{-1}\varepsilon\frac{1}{2}c(\varphi'(u))^2.$$

Застосовуючи формулу Тейлора до тест-функцій $\varphi(u) \in C_c^3(\mathbf{R})$, та умову **PA2** отримаємо:

$$\mathbf{H}_{\Gamma}^{\varepsilon,\delta}\varphi(u) = \delta^{-1}\varepsilon\int_{\mathbf{R}}[e^{v\varphi'(u)} - 1 - v\varphi'(u)$$

$$-\frac{v^2}{2}(\varphi'(u))^2]\widetilde{\Gamma}^0(dv) + \delta^{-1}\varepsilon\int_{\mathbf{R}}(e^{v\varphi'(u)}\delta\frac{v^2}{2}\varphi''(\widetilde{u})$$

$$-\delta\frac{v^2}{2}\varphi''(\widetilde{u}) - \delta^2\frac{v^4}{8}(\varphi''(\widetilde{u}))^2)\widetilde{\Gamma}^0(dv)$$

$$+\delta^{-1}\varepsilon\int_{\mathbf{R}}\delta^2\frac{v^3}{3!}\varphi'''(\widetilde{u})\widetilde{\Gamma}^0(dv) + \delta^{-1}\varepsilon b\varphi'(u) + \frac{1}{2}\delta c\varphi''(u)$$

$$+\delta^{-1}\varepsilon\int_{\mathbf{R}}\delta^2\frac{v^4}{4}(\varphi''(\widetilde{u}))^2\widetilde{\Gamma}^0(dv) + \delta^{-1}\varepsilon\frac{1}{2}c(\varphi'(u))^2.$$

Враховуючи **PA3** та граничну умову $\delta^{-1}\varepsilon \to 1$, остаточно маємо:

$$\mathbf{H}_{\Gamma}^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u) = \mathbf{H}_{\Gamma}(x)\varphi(u) + \theta_{\Gamma}^{\varepsilon,\delta}\varphi,$$

де $|\theta_{\Gamma}^{\varepsilon,\delta}\varphi| \to 0, \varepsilon, \delta \to 0$.

Лему доведено.

Залишається відкритим питання побудови варіаційного представлення функціоналу дії на основі граничного нелінійного оператора, тобто реалізація пункту 4) програми розв'язання проблеми великих відхилень [3]. Ця конструкція випливає з формули Брика та тісно пов'язана з мартингальною задачею керування.

Продемонструємо як саме пов'язані між собою нелінійна напівгрупа (1), відповідний нелінійний оператор та мартингальна задача керування. Для цього спочатку встановимо зв'язок між нелінійною напівгрупою (1) та напівгрупою Нісіо [7, 8].

Надалі для імовірнісної міри P, що задана на просторі E позначатимемо

$$E^P f(x) := \int_E f(x)dP(x).$$

Якщо для імовірнісної міри Q, абсолютно неперервної відносно іншої імовірнісної міри P виконується співвідношення

$$\frac{dQ}{dP} = e^{\varphi(u)}/C, C = E^P e^{\varphi(u)},$$

то маємо

$$\ln \frac{dQ}{dP} = \varphi(u) - \ln E^P e^{\varphi(u)},$$

звідки отримаємо тотожність

$$\ln E^P e^{\varphi(u)} = \varphi(u) - \ln \frac{dQ}{dP}.$$

Розглянемо нелінійну напівгрупу (1), побудовану по марковському процесу $x(t)$:

$$H_t\varphi(u) = \ln E^P[e^{\varphi(x(t))}|x(0) = u].$$

Застосуємо наступний результат ([1], Твердження 1.4.2):

Твердження 2. *Нехай E-вимірний простір, $P(E)$ - сім'я імовірнісних мір на просторі E, $\varphi(x)$-обмежена вимірна функція $\varphi : E \to \mathbf{R}$.*

Тоді має місце варіаційна формула

$$\ln E^P e^{\varphi(x(t))} = \sup_{Q\in P(E)} E^Q \left\{\varphi(x(t)) - \ln \frac{dQ}{dP}(x(\cdot))\right\}. \quad (7)$$

Інфімум досягається на імовірнісній мірі Q, яка є абсолютно неперервною відносно міри P і задовольняє умові

$$\frac{dQ}{dP}(x) = e^{\varphi(x)} \frac{1}{\int_E e^{\varphi(x)} dP}.$$

Праву частину рівності (7) можна інтерпретувати як нелінійну напівгрупу Нісіо. Ця напівгрупа використовується при розв'язанні мартингальної задачі керування в роботі [7]. Для побудови відповідного мартингала з керуванням скористаємось наступною лемою, яка випливає з більш загального результату - перетворення Гірсанова (див. лему 5.8 в [3]).

Лема 5. *Нехай $x(t) \in E$ є розв'язком мартингальної задачі для генератора*

$$\mathbf{L}\varphi(x) = q(x) \int_E (\varphi(y) - \varphi(x))P(x, dy)$$

з розподілом $P \in \mathcal{P}(D_E[0,\infty))$, та нехай $\mathbf{H}g(x) = e^{-g(x)}\mathbf{L}e^{g(x)}$.

Для будь-якого $T > 0$ означимо міру $Q \in \mathcal{P}(D_E[0,\infty))$ через

$$\frac{dQ}{dP}(x(\cdot)) = \exp\left\{g(x(t)) - g(x(0)) - \int_0^T \mathbf{H}g(x(s))ds\right\}. \quad (8)$$

Тоді по мірі Q марковський процес $\{x(t), 0 \leqslant t \leqslant T\}$ є розв'язком мартингальної задачі для $\mathbf{L}^g$, де

$$\mathbf{L}^g f(x) = e^{-g(x)}\mathbf{L}(\varphi(x)e^{g(x)}) - e^{-g(x)}\varphi(x)\mathbf{L}e^{g(x)}$$
$$= q(x) \int_E e^{g(y)-g(x)}(\varphi(y) - \varphi(x))P(x, dy). \quad (9)$$

З останньої леми випливає, що за мірою Q марковський процес $\{x(t), 0 \leqslant t \leqslant T\}$ є розв'язком мартингальної задачі для $\mathbf{L}^g$, а саме

$$\varphi(x(t)) - \varphi(x(0)) - \int_0^t \mathbf{L}^g\varphi(x(s))ds \quad (10)$$

є мартингалом з керуванням $g(x)$ відносно міри $Q \in \mathcal{P}(D_E[0,\infty))$.

Тепер покажемо, що нелінійній напівгрупі Нісіо дійсно відповідає нелінійний оператор, пов'язаний з задачею керування.

Згідно Теореми 3.1 [6] існує імовірнісний розподіл $Q_{t,x}$ на $\mathcal{P}(D_E[0,\infty))$ такий що напівгрупа Нісіо (7) має вигляд

$$H_t\varphi(x) = E^{Q_{t,x}}\left\{\varphi(x(t)) - \ln \frac{dQ_{t,x}}{dP}(x(\cdot))\right\}.$$

Взявши в Лемі 5 в якості міри Q розподіл $Q_{t,x}$ отримаємо (з урахуванням того, що (10) є мартингалом)

$$H_t\varphi(x) = E^{Q_{t,x}}\left\{\int_0^t \mathbf{L}^g\varphi(x(s))ds - \ln \frac{dQ_{t,x}}{dP}(x(\cdot))\right\} + \varphi(x(0)). \quad (11)$$

Підберемо функцію $A^g(x)$ так, щоб в правій частині (8)

$$g(x(t)) - g(x(0)) - \int_0^t \mathbf{H}g(x(s))ds =: \int_0^t A^g(x(s))ds. \quad (12)$$

Тут $\int_0^t A^g(x(s))ds$ - це саме той функціонал, щодо якого розв'язується проблема мінімізації в [6].

Нехай $R_{x,g}$ – розподіл розв'язку мартингальної задачі з керуванням при $g(x) = g, x(0) = x$, тоді з нерівностей

$$E^{Q_{t,x}}\left\{\int_0^t \inf_g (\mathbf{L}^g\varphi(x(s)) - A^g(x(s))ds)\right\} \leqslant H_t\varphi(x) - \varphi(x(0))$$

$$\leqslant \inf_g E^{R_{x,g}} \left\{ \int_0^t \mathbf{L}^g \varphi(x(s)) - A^g(x(s)) ds \right\}$$

можемо стверджувати рівномірну на E збіжність

$$\lim_{t\to 0} t^{-1}(H_t - I)\varphi(x) = \mathbf{H}\varphi(x)$$
$$= \inf_g (\mathbf{L}^g \varphi(x) - A^g(x)) \qquad (13)$$

за умов (i-vii) статті [6].

Умови (i-vii) гарантують збіжність нелінійних напівгруп до граничного нелінійного генератора $\mathbf{H}$. У разі, якщо вдасться відшукати генератор з керуванням $\mathbf{L}^g\varphi(x)$ та функцію з керуванням $A^g(x)$, які задовольняють умови (i-vii), можливо побудувати функціонал дії виходячи з наступних міркувань (див. Теореми 5.15 та 8.14 з [6]).

Отже, нехай існує границя для напівгруп Нісіо, що відповідають дограничним процесам, в схемі серій при $\varepsilon \to 0$

$$H_t^\varepsilon \varphi(u) := \varepsilon \ln E e^{\varphi(x^\varepsilon(t))/\varepsilon}$$

і вона дорівнює H_t.

Будуємо мартингальну задачу з керуванням

$$\int_{[0,t]} |\mathbf{L}^g \varphi(x(s))| ds < \infty, \forall g,$$

$$\varphi(x(t)) - \varphi(x(0)) - \int_{[0,t]} \mathbf{L}^g \varphi(x(s)) ds = 0, \quad (14)$$

якій відповідає напівгрупа Нісіо H_t, означена в (11). Згідно (7) її також можна представити у вигляді

$$H_t\varphi(u) = \ln E^P e^{\varphi(x(t))}$$

як границю $H_t^\varepsilon \varphi(u)$.

Наступне твердження одразу випливає з Твердження 1 та співвідношень (7), (8) та (12):

Твердження 3. *Функціонал дії для дограничного процесу $x^\varepsilon(t)$ має вигляд*

$$I(x) = I_0(x(0)) + \inf_{g:(x,g)\in\mathcal{T}} \int_{[0,\infty)} A^g(x(s)) ds,$$

де $\mathcal{T}$ - множина розв'язків мартингальної задачі (14).

При застосуванні цього методу дослідження маємо справу не з напівгрупами, а з дограничними нелінійними експоненційними генераторами $\mathbf{H}^\varepsilon\varphi(u)$, які відповідають марковському процесу $x^\varepsilon(t)$. Тому знайшовши граничний генератор $\mathbf{H}\varphi(x)$ можемо використати генератор з керуванням $\mathbf{L}^g\varphi(x)$ та співвідношення (13) для пошуку функції $A^g(x)$, а потім використати її для побудови функціоналу дії. Зрозуміло, що при цьому підході виникають питання про збіжність напівгруп саме до напівгрупи граничного генератора і про експоненційну компактність дограничного процесу. Саме на ці питання відповідають етапи 2) – 3), описані на початку статті та досліджені для випадку процесів з незалежними приростами в монографії [3].

Приклад 2. Повернемося до нормованих марковських процесів з незалежними приростами

$$\eta_\varepsilon^\delta(t) = \delta\eta^\varepsilon(t/\delta^2), t \geqslant 0.$$

Ми довели, що в умовах пуассонової апроксимації розв'язок проблеми великих відхилень для таких процесів визначається за допомогою нелінійного експоненційного генератора (6).

Обчислимо генератор процесу з незалежними приростами та керуванням g за формулою (9):

$$\mathbf{\Gamma}_g^{\varepsilon,\delta}\varphi(u) = e^{-g/\delta}\mathbf{\Gamma}_\varepsilon^\delta \varphi e^{g/\delta} - e^{-g/\delta}\varphi\mathbf{\Gamma}_\varepsilon^\delta e^{g/\delta}$$
$$= e^{-g/\delta}\delta^{-2}\int_{\mathbf{R}} [\varphi(u+\delta v)e^{g(u+\delta v)/\delta} - \varphi(u)e^{g(u)/\delta}$$
$$-\varphi(u)e^{g(u+\delta v)/\delta} + \varphi(u)e^{g(u)/\delta}]\widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv)$$
$$= \delta^{-2}\int_{\mathbf{R}} e^{\frac{g(u+\delta v)-g(u)}{\delta}}[\varphi(u+\delta v) - \varphi(u)]\widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv)$$
$$= \delta^{-2}\int_{\mathbf{R}} e^{\frac{g(u+\delta v)-g(u)}{\delta}}[\varphi(u+\delta v) - \varphi(u)$$
$$-\delta v\varphi'(u) - \delta^2\frac{v^2}{2}\varphi''(u)]\widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv)$$
$$+\delta^{-2}\int_{\mathbf{R}} e^{\frac{g(u+\delta v)-g(u)}{\delta}}[\delta v\varphi'(u) + \delta^2\frac{v^2}{2}\varphi''(u)]\widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv).$$

Оскільки підінтегральна функція у першому інтегралі належить класу $C_3(\mathbf{R})$, можемо застосувати умову пуассонової апроксимації **PA2**:

$$\mathbf{\Gamma}_g^{\varepsilon,\delta}\varphi(u) = \delta^{-2}\varepsilon\int_{\mathbf{R}} e^{\frac{g(u+\delta v)-g(u)}{\delta}}[\varphi(u+\delta v) - \varphi(u)$$
$$-\delta v\varphi'(u) - \delta^2\frac{v^2}{2}\varphi''(u)]\widetilde{\Gamma}^0(dv) + \delta^{-2}\int_{\mathbf{R}}[e^{vg'(u)}$$
$$+\delta e^{vg'(u)}\frac{v^2}{2}g''(\theta)][\delta v\varphi'(u) + \delta^2\frac{v^2}{2}\varphi''(u)]\widetilde{\Gamma}^\varepsilon(dv).$$

Підінтегральна функція у першому інтегралі має порядок δ^3, тому при $\varepsilon, \delta \to 0, \delta^{-1}\varepsilon \to$

1 перший інтеграл є $o(\varepsilon,\delta)$, натомість у другому інтегралі маємо:

$$\mathbf{\Gamma}_g^{\varepsilon,\delta}\varphi(u)=\delta^{-1}\varphi'(u)\int_{\mathbf{R}}ve^{vg'(u)}\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}(dv)+\int_{\mathbf{R}}[\frac{v^2}{2}\varphi''(u)$$

$$+o(\delta)]\widetilde{\Gamma}^{\varepsilon}(dv)+o(\varepsilon,\delta).$$

Знову використавши умови пуассонової апроксимації **PA1,PA2** отримаємо:

$$\mathbf{\Gamma}_g^{\varepsilon,\delta}\varphi(u)=\delta^{-1}\varepsilon\varphi'(u)\int_{\mathbf{R}}ve^{vg'}\widetilde{\Gamma}^{0}(dv)+o(\varepsilon,\delta).$$

Отже, позначивши $z=g'$ та поклавши $\psi(z)=\int_{\mathbf{R}}e^{vz}\widetilde{\Gamma}^0(dv)$ маємо граничний генератор з керуванням z у вигляді:

$$\mathbf{\Gamma}_z\varphi(u)=\varphi'(u)\psi'(z).$$

Покладемо $\varphi'=p,\psi'=q$ та обчислимо функцію $L(q)$ за формулою $(A(p,q):=\mathbf{\Gamma}_z\varphi(u))$:

$$L(q)=\sup_p(A(p,q)-H(p))=\sup_p(qp-H(p)),$$

де $H(p)$ визначається з явного вигляду генератора (6):

$$H(p):=H_\Gamma(\varphi')=bp-\int_{\mathbf{R}}[e^{vp}-1-vp]\widetilde{\Gamma}^0(dv).$$

Маємо:

$$(qp-H(p))'_p=(qp-bp-\int_{\mathbf{R}}[e^{vp}-1-vp]\widetilde{\Gamma}^0(dv))'_p$$

$$=q-b-\int_{\mathbf{R}}[ve^{vp}-v]\widetilde{\Gamma}^0(dv)=0,$$

тобто p визначається із співвідношення

$$\int_{\mathbf{R}}ve^{vp}\widetilde{\Gamma}^0(dv)=q-(b-b_0)<\infty.$$

Явний вигляд функції $L(q)$ можна отримати, підставивши отримане значення $p(q)$ в формулу

$$L(q)=qp-H(p).$$

Функціонал дії матиме вигляд:

$$I(x)=I_0(x(0))+\int_0^\infty L(x'(s))ds.$$

Більш детальний огляд результатів та прикладів можна знайти в монографії [9].

Список використаних джерел

1. *Dupuis P.* A weak convergence approach to the theory of large deviations / P. Dupuis, R.S. Ellis. — New York:Wiley, 1997. — 504 p.

2. *Bryc W.* Large deviations by the asymptotic value method / W. Bryc // Diffusion processes and related problems in analysis. — Basel:Birkhauser, 1990. — P. 447-472.

3. *Feng J.* Large deviation for stochastic processes / J. Feng, T.G. Kurtz. — Mathematical Surveys and Monographs, 131. Providence, RI, American Mathematical Society, 2006. — 410 p.

4. *Jacod J.* Limit theorems for stochastic processes / J. Jacod, A.N. Shiryaev. — Berlin: Springer-Verlag, 2003. — 601 p.

5. *Koroliuk V.S.* Stochastic systems in merging phase space / V.S. Koroliuk, N. Limnios. — Singapore: World Scientific Publishing Company, 2005. — 348 p.

6. *Koroliouk D.* Random evolutionary systems: asymptotic properties and large deviations / D. Koroliouk, I. Samoilenko. — London: ISTE-John Wiley and Sons, 2021. — 280 p.

7. *Kurtz T.G.* Martingale problems for controlled processes / T.G. Kurtz // Lecture notes in control and information sciences. — Berlin:Springer, 1987. — Vol. 91. , P. 75-90.

8. *Nisio M.* On a non-linear semi-group attached to stochastic optimal control / M. Nisio // Publ. RIMS, Kyoto Univ. — 1976. — No.13. — P. 513-537.

9. *Nisio M.* On stochastic optimal controls and envelope of Markovian semi-groups / M. Nisio // Proc. Intern. Symp. SDE, Kyoto. — Kinokuniya, 1976. — P. 297-325.

References

1. DUPUIS, P., ELLIS, R.S. (1997) A weak convergence approach to the theory of large deviations. New York: Wiley.

2. BRYC, W. (1990) *Large deviations by the asymptotic value method*. Diffusion processes and related problems in analysis. Basel: Birkhauser. pp. 447-472.

3. FENG, J., KURTZ, T.G. (2006) *Large deviation for stochastic processes*. Mathematical Surveys and Monographs, 131. Providence, RI, American Mathematical Society.

4. JACOD, J., SHIRYAEV, A.N. (2003) *Limit theorems for stochastic processes*. Berlin: Springer-Verlag.

5. KOROLIUK, V.S., LIMNIOS N. (2005) *Stochastic systems in merging phase space*. Singapore: World Scientific Publishing Company.

6. KURTZ, T.G. (1987) *Martingale problems for controlled processes*. Lecture notes in control and information sciences. Berlin: Springer.Vol.91. pp. 75-90.

7. NISIO, M. (1976) *On a non-linear semi-group attached to stochastic optimal control*. Publ. RIMS, Kyoto Univ. No.13. pp. 513-537.

8. NISIO, M. (1976) *On stochastic optimal controls and envelope of Markovian semigroups*. Proc. Intern. Symp. SDE. Kyoto: Kinokuniya. pp.297-325.

9. KOROLIOUK, D., SAMOILENKO I. (2021) *Random evolutionary systems: asymptotic properties and large deviations*. London: ISTE-John Wiley and Sons.

Надійшла до редколегії 27.08.2021

УДК 519.21
https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/2.11

Л.М. Сахно[1], *д.ф-м.н, с.н.с*
О.І. Василик[2], *д.ф.-м.н., доцент*

Дослідження розв'язків дисперсійних рівнянь старшого порядку з φ-субгауссовими початковими умовами

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, e-mail: lms@univ.kiev.ua

[2]Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", 03056, Київ, проспект Перемоги, 37, e-mail: vasylyk@matan.kpi.ua

L.M. Sakhno[1], *Dr.Sci, Senior Researcher*
O.I. Vasylyk[2], *Dr.Sci, Associate Professor*

Investigation of solutions to higher-order dispersive equations with φ-sub-Gaussian initial conditions

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st., e-mail: lms@univ.kiev.ua

[2]National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", 37, Prosp. Peremohy, Kyiv, Ukraine, 03056, e-mail: vasylyk@matan.kpi.ua

У цій роботі досліджуються властивості траєкторій випадкових процесів, що задають розв'язки дисперсійних рівнянь старших порядків з φ-субгауссовими гармонізованими випадковими початковими умовами. Основний результат роботи – це оцінки для швидкості росту вказаних процесів на необмежених множинах. Клас φ-субгауссових випадкових процесів з функцією $\varphi(x) = \frac{|x|^\alpha}{\alpha}$, $\alpha \in (1, 2]$, є природним узагальненням гауссових процесів. Для таких початкових умов оцінки розподілів супремумів розв'язків можуть бути обчислені в досить простому вигляді. Оцінки для швидкості росту розв'язків диференціальних рівнянь з частковими похідними старших порядків у випадку загального вигляду N-функції Орліча φ отримано в [9], де виведення грунтувалося на результатах роботи [12]. Тут ми використовуємо дещо інший підхід, який грунтується на використанні іншого ентропійного інтегралу і дає нам можливість у випадку $\varphi(x) = \frac{|x|^\alpha}{\alpha}$, $\alpha \in (1, 2]$, отримати вирази для оцінок у явному вигляді.

Результати дослідження доповідались на Міжнародній науковій конференції "Modern Stochastics: Theory and Applications. V" (MSTA-V).

Ключові слова: φ-субгауссові процеси, дисперсійні рівняння старших порядків, випадкові початкові умови, швидкість росту

In this paper, there are studied sample paths properties of stochastic processes representing solutions of higher-order dispersive equations with random initial conditions given by φ-sub-Gaussian harmonizable processes. The main results are the bounds for the rate of growth of such stochastic processes considered over unbounded domains. The class of φ-sub-Gaussian processes with $\varphi(x) = \frac{|x|^\alpha}{\alpha}$, $1 < \alpha \leq 2$, is a natural generalization of Gaussian processes. For such initial conditions the bounds for the distribution of supremum of solutions can be calculated in rather simple form. The bounds for the rate of growth of solution to higher-order partial differential equations with random initial conditions in the case of general φ were obtained in [9], the derivation was based on the results stated in [12]. Here we use another approach, which allows us, for the particular case $\varphi(x) = \frac{|x|^\alpha}{\alpha}$, $\alpha \in (1, 2]$, to present the expressions for the bounds in the closed form.

Key Words: φ-sub-Gaussian processes, higher-order dispersive equations, random initial condition, rate of growth

1 Introduction

Let $y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, be a real strictly φ-sub-Gaussian process with $\varphi(x) = \frac{|x|^\alpha}{\alpha}$, $1 < \alpha \leq 2$, determining constant C_y and its covariance $\mathsf{E}y(t)y(s) = \Gamma_y(s,t)$ has finite variation. Consider the related harmonizable process

$$\eta(x) = \int_{\mathbb{R}} \kappa(xu)\, dy(u),\ x \in \mathbb{R},$$

where $\kappa(v) = \cos v$ or $\kappa(v) = \sin v$. (The corresponding definitions are given in Appendix.)

© Л.М. Сахно, О.І. Василик 2021

Let

$$U(t,x)=\int_{-\infty}^{\infty} I(t,x,\lambda)\,dy(\lambda), \tag{1.1}$$

where

$$I(t,x,\lambda)=\kappa\left(\lambda x+t\sum_{k=1}^{N}a_k\lambda^{2k+1}(-1)^k\right), \tag{1.2}$$

$t\geq 0$, $x\in\mathbb{R}$, and $\{a_k\}_{k=1}^N$ are some constants.

Suppose that the following condition holds

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\lambda\mu|^{(2N+1)(\rho+1)}\,d|\Gamma_y(\lambda,\mu)|<\infty, \tag{1.3}$$

for some $0<\rho\leq 1$.

In [9, 10] it was shown that under the above settings, the random field $U(t,x)$ given by (1.1) is the classical solution to the initial value problem

$$\sum_{k=1}^{N}a_k\frac{\partial^{2k+1}U(t,x)}{\partial x^{2k+1}}=\frac{\partial U(t,x)}{\partial t},\ t>0,\ x\in\mathbb{R}, \tag{1.4}$$

$$U(0,x)=\eta(x),\ x\in\mathbb{R}. \tag{1.5}$$

We refer to [1, 9, 10] for rigorous definition of the classical solution and for a discussion on the above equation and more general ones in random and non-random contexts. Note that the equation (1.4) belongs to the class of linear dispersive equations whose study is important from many points of view, both in theoretical and practical aspects (see, e.g., [14]).

Conditions of existence of the classical solution to the problem (1.4)–(1.5) with random φ-sub-Gaussian initial condition for the case of general φ are stated in [1, 9], properties of solutions are investigated in [9, 10], in particular, different estimates for the distribution of supremum of solution, and in [9] bounds are presented for the rate of growth of solution.

The solutions of heat equations with sub-Gaussian random initial conditions were investigated in [7, 8]. In the papers [4, 5], there were studied sample paths properties of stochastic processes representing solutions (in $L_2(\Omega)$ sense) of the heat equation with random initial conditions given by φ-sub-Gaussian stationary processes. The main results were the bounds for the distributions of the suprema for such stochastic processes considered over bounded and unbounded domains.

The estimates for the distribution of supremum of solution to the problem (1.4)–(1.5) with random φ-sub-Gaussian initial conditions for the particular case of $\varphi(x)=\frac{|x|^\alpha}{\alpha}$, $1<\alpha\leq 2$, are given in [10].

Proposition 1 ([10], Cor.3.1). *Let $y(u)$, $u\in\mathbb{R}$, be a real strictly φ-sub-Gaussian random process with $\varphi(x)=\frac{|x|^\alpha}{\alpha}$, $\alpha\in(1,2]$, determining constant C_y and $\mathsf{E}y(t)y(s)=\Gamma_y(s,t)$.*

Let $U(t,x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}I(t,x,\lambda)\,dy(\lambda)$, where $I(t,x,\lambda)$ is given by (1.2), $a\leq t\leq b$, $c\leq x\leq d$, and $\varepsilon_0=\sup\limits_{\substack{a\leq t\leq b\\ c\leq x\leq d}}\tau_\varphi(U(t,x))$.

Further, let the constant $\rho\in(0,1]$ be such that (1.3) holds.

Then

(i) $U(t,x)$ exists, is continuous with probability one and for its sample paths the Hölder continuity holds in the form

$$\sup_{\substack{t,t_1\in[a,b]:|t-t_1|\leq h\\ x,x_1\in[c,d]:|x-x_1|\leq h}}\tau_\varphi(U(t,x)-U(t_1,x_1))\leq 2C_ZC_yh^\rho,$$

where C_Z is defined in (1.8);

(ii) for all $0<\theta<1$ such that $\theta\varepsilon_0<2C_ZC_y(\varkappa/2)^\rho$ with $\varkappa=\max(b-a,d-c)$, γ such that $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}=1$, and $u>0$ the following inequality holds true

$$P\Big\{\sup_{\substack{a\leq t\leq b\\ c\leq x\leq d}}|U(t,x)|>u\Big\}\leq 2\exp\Big\{-\frac{u^\gamma(1-\theta)^\gamma}{\gamma\varepsilon_0^\gamma}\Big\}\times(2eC_ZC_y)^{2/\rho}\varkappa^2(\theta\varepsilon_0)^{-2/\rho}. \tag{1.6}$$

In particular, if the process $y(u)$, $u\in\mathbb{R}\}$, is Gaussian, then

$$P\Big\{\sup_{\substack{a\leq t\leq b\\ c\leq x\leq d}}|U(t,x)|>u\Big\}\leq 2\exp\Big\{-\frac{u^2(1-\theta)^2}{2\varepsilon_0^2}\Big\}\times(2eC_Z)^{2/\rho}\varkappa^2(\theta\varepsilon)^{-2/\rho} \tag{1.7}$$

for all $0<\theta<1$ such that $\theta\Gamma<2C_Z(\varkappa/2)^\rho$ and $u>0$.

In the above proposition the following

constant is used

$$C_Z^2 = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \Big(\Big(\frac{|\lambda|}{2}\Big)^\rho + \Big|\frac{1}{2}\sum_{k=1}^N a_k\lambda^{2k+1}(-1)^k\Big|^\rho\Big) \times \Big(\Big(\frac{|\mu|}{2}\Big)^\rho + \Big|\frac{1}{2}\sum_{k=1}^N a_k\mu^{2k+1}(-1)^k\Big|^\rho\Big)\, d|\Gamma_y(\lambda,\mu)| \le \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2^{2\rho}}\Big(|\lambda|^\rho + \Big(\sum_{k=1}^N |a_k||\lambda|^{2k+1}\Big)^\rho\Big) \times \Big(|\mu|^\rho + \Big(\sum_{k=1}^N |a_k||\mu|^{2k+1}\Big)^\rho\Big)\, d|\Gamma_y(\lambda,\mu)|, \quad (1.8)$$

the convergence of the last integral is guaranteed by the condition (1.3).

Class of φ-sub-Gaussian processes with $\varphi(x) = \frac{|x|^\alpha}{\alpha}$, $1 < \alpha \le 2$, is a natural generalization of Gaussian processes. For such initial conditions in (1.5) the bounds for the distribution of supremum of solution can be calculated in the simple closed form as given in Proposition 1 above.

In the present paper we continue the study of the behavior of solution in this particular case and obtain the bounds for the rate of growth of solution.

Note that bounds for the rate of growth of solution (1.1) in the case of general φ were obtained in [9], the derivation was based on the results stated in [12]. Here we use another approach based on the use of Theorem 1 stated below in Section 2. This allows us, for the particular case under consideration, to present in Section 3 the expressions for bounds in the closed form. Some necessary definitions and statements are given in Appendix.

2 Estimates for the rate of growth of φ-sub-Gaussian processes

In this section we present some general results for φ-sub-Gaussian processes defined over bounded and unbounded domains.

Let $(\mathbf{T}, \rho)$ be a metric (pseudometric) space and $X(t), t \in \mathbf{T}$, be a φ-sub-Gaussian process. Introduce the following conditions.

Condition 1. Let the space $(\mathbf{T}, \rho)$ be separable, the process X be separable on this space, $\varepsilon_0 = \sup_{t\in\mathbf{T}} \tau_\varphi(X(t)) < \infty$, and there exists a strictly increasing continuous function $\sigma(h), h \ge 0$, such that $\sigma(0) = 0$ and

$$\sup_{\rho(t,s)<h} \tau_\varphi(X(t) - X(s)) \le \sigma(h).$$

Condition 2. The function $r(x), x \ge 1$, is non-negative nondecreasing and such that $r(e^y), y \ge 0$ is a convex function.

Let $N(u) = N_{\mathbf{T}}(u)$, $u > 0$, be the metric massiveness of the space $(\mathbf{T}, \rho)$, that is, $N(u)$ is the number of elements in the minimal u-covering of $(\mathbf{T}, \rho)$.

Denote

$$I_r(\delta) = \int_0^\delta r(N(\sigma^{(-1)}(u)))du,\ \delta > 0. \quad (2.9)$$

For a function $\sigma(t)$, $t \ge 0$, we denote by $\sigma^{(-1)}(u), u \ge 0$, the inverse function.

Proposition 2. *Let $X = \{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ be a φ-sub-Gaussian process, conditions 1–2 hold, $\rho(t,s) = \tau_\varphi(X(t) - X(s))$, $t, s \in T$. Suppose $I_r(\varepsilon_0) < \infty$.*

Then for all $0 < \theta < 1$ and $u > 0, \lambda > 0$

$$\mathsf{E}\exp\Big\{\lambda \sup_{t\in\mathbf{T}} |X(t)|\Big\} \le 2Q(\lambda,\theta),$$

and

$$P\Big\{\sup_{t\in\mathbf{T}} |X(t)| \ge u\Big\} \le 2A(\theta,u),$$

where

$$Q(\lambda,\theta) = \exp\Big\{\varphi\Big(\frac{\lambda\varepsilon_0}{1-\theta}\Big)\Big\} r^{(-1)}\Big(\frac{I_r(\theta\varepsilon_0)}{\theta\varepsilon_0}\Big),$$

$$A(\theta,u) = \exp\Big\{-\varphi^*\Big(\frac{u(1-\theta)}{\varepsilon_0}\Big)\Big\} r^{(-1)}\Big(\frac{I_r(\theta\varepsilon_0)}{\theta\varepsilon_0}\Big).$$

Proposition 2 is a variant of the result stated in [2, Theorem 4.4, p. 107] (see also [10, Theorem 2.3]).

Condition 3. Let $f(t)$, $t \ge 0$, be a continuous strictly increasing function such that $f(t) > 0$ and $f(t) \to \infty$ as $t \to \infty$. Introduce the sequence $b_0 = 0, b_{k+1} > b_k, b_k \to \infty, k \to \infty$, $b_{k+1} - b_k \ge 2A$. Denote $V_k = [b_k, b_{k+1}] \times [-A, A], k = 0, 1, \ldots$, $f_k = f(b_k)$, $\varepsilon_k = \sup_{(t,x)\in V_k} \tau_\varphi(\xi(t,x))$, and suppose that $0 < \varepsilon_k < \infty$.

Denote $\gamma_k = \sigma_k(b_{k+1} - b_k)$, where σ_k are introduced in the next theorem, $\tilde\theta = \inf_k \frac{\gamma_k}{\varepsilon_k}$.

Theorem 1. *Let $\xi(t,x)$, $(t,x) \in V$, $V = [0,+\infty) \times [-A, A]$, be a φ-sub-Gaussian separable random field and Conditions 2 and 3 hold. Suppose futher that:*

(*i*) *there exist the increasing continuous functions* $\sigma_k(h), h > 0$, *such that* $\sigma_k(h) \to 0$ *as* $h \to 0$,

$$\sup_{\substack{(t_i,x_i)\in V_k, i=1,2\\ |t_1-t_2|\le h,\\ |x_1-x_2|\le h}} \tau_\varphi(\xi(t_1,x_1)-\xi(t_2,x_2)) \le \sigma_k(h)$$

and for $k = 0, 1, \dots$

$$I_{r,k}(\gamma_k) = \int_0^{\gamma_k} r(N_{V_k}(\sigma_k^{(-1)}(u)))du < \infty;$$

(*ii*) $C = \sum_{k=0}^\infty \frac{\varepsilon_k}{f_k} < \infty$;

(*iii*) *for any* $\theta \in (0,1)$

$$S(\theta, r) = \sum_{k=0}^\infty \frac{\varepsilon_k}{f_k} \log\Big(r^{(-1)}\Big(\frac{I_{r,k}(\theta\varepsilon_k)}{\theta\varepsilon_k}\Big)\Big) < \infty.$$

Then

(*i*) *for any* $\theta \in (0, \min(1,\tilde\theta))$ *and any* $\lambda > 0$

$$\mathsf{E}\exp\Big\{\lambda \sup_{(t,x)\in V} \frac{|\xi(t,x)|}{f(t)}\Big\} \le 2\exp\Big\{\varphi\Big(\frac{\lambda C}{1-\theta}\Big)\Big\}\exp\Big\{\frac{S(\theta,r)}{C}\Big\}; \tag{2.10}$$

(*ii*) *for any* $\theta \in (0, \min(1,\tilde\theta))$ *and any* $u > 0$

$$P\Big\{\sup_{(t,x)\in V} \frac{|\xi(t,x)|}{f(t)} > u\Big\} \le 2\exp\Big\{-\varphi^*\Big(\frac{u(1-\theta)}{C}\Big)\Big\}\exp\Big\{\frac{S(\theta,r)}{C}\Big\}. \tag{2.11}$$

Proof. For the proof we use the same arguments as in [5], extended for the case of the domain of the form $[0,+\infty)\times[-A,A]$. Let $r_k > 0, k = 0, 1, \dots$ and $\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{r_k} = 1$. Then for any $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \mathsf{E}\exp\Big\{\lambda \sup_{(t,x)\in V} \frac{|\xi(t,x)|}{f(t)}\Big\} \\ &\le \mathsf{E}\exp\Big\{\lambda\sum_{k=0}^\infty \sup_{(t,x)\in V_k} \frac{|\xi(t,x)|}{f_k}\Big\} \\ &\le \prod_{k=0}^\infty \Big(\mathsf{E}\exp\Big\{\lambda r_k \sup_{(t,x)\in V_k} \frac{|\xi(t,x)|}{f_k}\Big\}\Big)^{\frac{1}{r_k}}. \end{aligned}$$

By using Proposition 2 we obtain

$$\begin{aligned} I(\lambda) &\le \prod_{k=0}^\infty 2^{1/r_k}\Big(\exp\Big\{\varphi\Big(\frac{\lambda r_k\varepsilon_k}{(1-\theta)f_k}\Big)\Big\}\Big)^{\frac{1}{r_k}} \\ &\quad\times\Big(r^{(-1)}\Big(\frac{I_{r,k}(\theta\varepsilon_k)}{\theta\varepsilon_k}\Big)\Big)^{\frac{1}{r_k}} \\ &= \exp\Big\{\sum_{k=0}^\infty \varphi\Big(\frac{\lambda r_k\varepsilon_k}{(1-\theta)f_k}\Big)\frac{1}{r_k}\Big\} \\ &\quad\times\prod_{k=0}^\infty 2^{1/r_k}\Big(r^{(-1)}\Big(\frac{I_{r,k}(\theta\varepsilon_k)}{\theta\varepsilon_k}\Big)\Big)^{\frac{1}{r_k}} \\ &= 2\exp\Big\{\sum_{k=0}^\infty \varphi\Big(\frac{\lambda r_k\varepsilon_k}{(1-\theta)f_k}\Big)\frac{1}{r_k}\Big\} \\ &\quad\times\exp\Big\{\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{r_k}\log\Big(r^{(-1)}\Big(\frac{I_{r,k}(\theta\varepsilon_k)}{\theta\varepsilon_k}\Big)\Big)\Big\}. \end{aligned}$$

Let $r_k = \frac{Cf_k}{\varepsilon_k}$. Then we obtain the estimate (2.10):

$$\begin{aligned} I(\lambda) &\le 2\exp\Big\{\varphi\Big(\frac{\lambda C}{1-\theta}\Big)\Big\} \\ &\quad\times\exp\Big\{\frac{1}{C}\sum_{k=0}^\infty \frac{\varepsilon_k}{a_k}\log\Big(r^{(-1)}\Big(\frac{I_{r,k}(\theta\varepsilon_k)}{\theta\varepsilon_k}\Big)\Big)\Big\}. \end{aligned}$$

The estimate (2.11) follows then by Chebyshev's inequality.

Corollary 1. *Let conditions of Theorem* 1 *hold with* $\sigma_k(h) = c_k h^\beta$, $c_k > 0$, $0 < \beta \le 1$, *and* $|b_{k+1} - b_k| \ge 2A$, *but condition* (*iii*) *is replaced by the following one*

(*iv*) *There exists* $0 < \gamma \le 1$ *such that*

$$S_1 = \sum_{k=0}^\infty \frac{\varepsilon_k^{1-\frac{2\gamma}{\beta}}(b_{k+1}-b_k)^{2\gamma}c_k^{\frac{2\gamma}{\beta}}}{f_k} < \infty.$$

Then

(*i*) *for any* $\theta \in (0, \min(1,\tilde\theta))$ *and any* $\lambda > 0$

$$\mathsf{E}\exp\Big\{\lambda \sup_{(t,x)\in V} \frac{|\xi(t,x)|}{f(t)}\Big\} \le 2^{\frac{4}{\beta}}\exp\Big\{\varphi\Big(\frac{\lambda C}{1-\theta}\Big)\Big\}A_1(\theta);$$

(*ii*) *for any* $\theta \in (0, \min(1,\tilde\theta))$ *and any* $u > 0$

$$P\Big\{\sup_{(t,x)\in V} \frac{|\xi(t,x))|}{f(t)} > u\Big\} \le 2^{\frac{4}{\beta}}\exp\Big\{-\varphi^*\Big(\frac{u(1-\theta)}{C}\Big)\Big\}A_1(\theta),$$

where

$$A_1(\theta) = \exp\Big\{\frac{S_1}{\gamma C}\Big(\frac{2^{\frac{4}{\beta}-2}}{\theta^{\frac{2}{\beta}}}\Big)^\gamma\Big\}.$$

Proof. Under the conditions of Theorem 1 we can write the estimate

$$I_{r,k}(\varepsilon_k) \le \hat{I}_{r,k}(\varepsilon_k) = \int_0^{\varepsilon_k} r\Big(\Big(\frac{b_{k+1}-b_k}{2\sigma_k^{(-1)}(u)}+1\Big)\Big(\frac{A}{\sigma_k^{(-1)}(u)}+1\Big)\Big)du.$$

Therefore, we can apply conditions of Theorem 1 using the integral $\hat{I}_{r,k}$.

We choose $r(x) = x^\alpha - 1, x \ge 1, 0 < \alpha < \beta$ in Theorem 1, then using similar calculations as in [5] (see Corollary 7 therein), we obtain

$$r^{(-1)}\Big(\frac{\hat{I}_{r,k}(\theta\varepsilon_k)}{\theta\varepsilon_k}\Big) \le 2^{\frac{4}{\beta}-1}\Big(\frac{(b_{k+1}-b_k)^2 c_k^{\frac{2}{\beta}} 2^{2(\frac{2}{\beta}-1)}}{(\theta\varepsilon_k)^{\frac{2}{\beta}}}+1\Big).$$

Applying the inequality $\log(1+x) \le \frac{x^\gamma}{\gamma}$, for $0 < \gamma \le 1$ and $x \ge 0$, we can write the estimate:

$$S(\theta, r) \le C\log(2^{\frac{4}{\beta}-1}) + \frac{1}{\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_k^{1-\frac{2\gamma}{\beta}}}{f_k}(b_{k+1}-b_k)^{2\gamma}\Big(\frac{c_k^{\frac{2}{\beta}}2^{\frac{4}{\beta}-2}}{\theta^{\frac{2}{\beta}}}\Big)^\gamma,$$

from which we obtain the expression for $A_1(\theta)$.

Statement (ii) follows from (i) in view of Chebyshev's inequality.

3 Estimates for the rate of growth of the fields $U(t,x)$ over unbounded domains

We apply now the results of the previous section for the filed $U(t,x)$ given by (1.1) with $(t,x) \in V = [0,+\infty)\times[-A,A]$.

Theorem 2. *Let $y(u)$, $u \in \mathbb{R}$, be a real strictly φ-sub-Gaussian random process with $\varphi(x) = \frac{|x|^\alpha}{\alpha}$, $\alpha \in (1,2]$, determining constant C_y and $\mathsf{E}y(t)y(s) = \Gamma_y(s,t)$.*

Let $U(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} I(t,x,\lambda)\,dy(\lambda)$, where $I(t,x,\lambda)$ is given by (1.2), $(t,x) \in V = [0,+\infty)\times[-A,A]$. Further, let the constant $\rho \in (0,1]$ be such that (1.3) holds.

Suppose that:

(i) Condition 2 is satisfied and Condition 3 holds with $\varepsilon_k = \sup_{(t,x)\in V}\tau_\varphi(U(t,x)) < \infty$;

(ii) $C = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_k}{f_k} < \infty$;

(iii) There exists $0 < \gamma \le 1$ such that

$$\widehat{S}_1 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_k^{1-\frac{2\gamma}{\rho}}(b_{k+1}-b_k)^{2\gamma}}{f_k} < \infty.$$

Then for any $\theta \in (0, \min(1,\tilde{\theta}))$ and any $u > 0$

$$P\Big\{\sup_{(t,x)\in V}\frac{|U(t,x))|}{f(t)} > u\Big\} \le 2^{\frac{4}{\rho}}\exp\Big\{-\frac{u^\beta(1-\theta)^\beta}{\beta C^\beta}\Big\}\widehat{A}_1(\theta),$$

where

$$\widehat{A}_1(\theta) = \exp\Big\{\frac{\widehat{S}_1(2C_ZC_y)^{2\gamma/\rho}}{\gamma C}\Big(\frac{2^{4/\rho-2}}{\theta^{2/\rho}}\Big)^\gamma\Big\},$$

β is such that $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$, C_Z is given by (1.8).

Proof. We apply Corollary 1. Conditions of Theorem 1 hold with $\sigma_k(h) = 2C_ZC_yh^\rho$, $\rho \in (0,1]$, therefore $c_k = 2C_ZC_y$. All other conditions are modified correspondingly and lead to the result.

Remark. The bounds for the rate of grows of the random field $U(t,x)$, $(t,x) \in V = [0,+\infty)\times[-A,A]$, which represents the solution to the problem (1.4)–(1.5), were studied in [9] for the case of a general φ. The approach in the present paper is based (following [10]) on consideration of the different entropy integral given by (2.9), which leads to the presentation of bounds in the explicit form, for $\varphi(x) = \frac{|x|^\alpha}{\alpha}$, $\alpha \in (1,2]$. The case of general φ should be further investigated.

Appendix

Definition 1. [2, 13] A continuous even convex function φ is *an Orlicz N-function* if $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) > 0$, $x \ne 0$, and $\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x} = 0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{x} = \infty$.

Condition Q. Let φ be an N-function which satisfies $\liminf_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x^2} = c > 0$, where the case $c = \infty$ is possible.

Definition 2. [2, 3, 11] Let φ be an N-function satisfying condition Q and $\{\Omega, L, \mathbf{P}\}$ be a standard probability space. The random variable ζ is φ-sub-Gaussian, or belongs to the space $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$, if $\mathsf{E}\zeta = 0$, $\mathsf{E}\exp\{\lambda\zeta\}$ exists for all $\lambda \in \mathbb{R}$ and there exists a constant $a > 0$ such that the following inequality holds for all $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathsf{E}\exp\{\lambda\zeta\} \le \exp\{\varphi(\lambda a)\}.$$

The random process $\zeta = \{\zeta(t), t \in T\}$ is called φ-sub-Gaussian if the random variables $\{\zeta(t), t \in T\}$ are φ-sub-Gaussian.

The space $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ is a Banach space with respect to the norm (see [2, 11]):

$$\tau_\varphi(\zeta) = \inf\{a > 0 : \mathsf{E}\exp\{\lambda\zeta\} \le \exp\{\varphi(a\lambda)\}.$$

Definition 3. [2, 13] The function φ^* defined by

$$\varphi^*(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}}(xy - \varphi(y))$$

is called *the Young-Fenchel transform (or convex conjugate)* of the function φ.

Definition 4. [3, 6] A family Δ of random variables $\zeta \in Sub_\varphi(\Omega)$ is called strictly φ-sub-Gaussian if there exists a constant C_Δ such that for all countable sets I of random variables $\zeta_i \in \Delta$, $i \in I$, the following inequality holds:

$$\tau_\varphi\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\zeta_i\right) \le C_\Delta\left(\mathsf{E}\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\zeta_i\right)^2\right)^{1/2}. \tag{3.12}$$

The constant C_Δ is called the *determining* constant of the family Δ.

The linear closure of a strictly φ-sub-Gaussian family Δ in $L_2(\Omega)$ is strictly φ-sub-Gaussian with the same determining constant ([6]).

Definition 5. [3, 6] Random process $\zeta(t), t \in T$ is called (strictly) φ-sub-Gaussian if the family of random variables $\{\zeta(t), t \in T\}$ is (strictly) φ-sub-Gaussian with a determining constant C_ζ.

Let K be a deterministic kernel and $X(t) = \int_T K(t,s)\,d\xi(s)$, $t \in T$, where ξ is a strictly φ-sub-Gaussian random process, and the integral is defined in the mean-square sense. Then X is strictly φ-sub-Gaussian with the same determining constant.

Definition 6. Real-valued second order random function $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$, is called harmonizable, if there exists a real-valued centered second order function $y(u)$, $u \in \mathbb{R}$, such that $X(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\sin tu\,\mathrm{d}y(u)$ or $X(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\cos tu\,\mathrm{d}y(u)$ and $\Gamma_y(t,s) = \mathsf{E}y(t)y(s)$ has finite variation. The integral is defined in the mean-square sense.

Proposition 3. *Real-valued second order function $X(t), t \in \mathbb{R}$, $\mathsf{E}X(t) = 0$, is harmonizable if and only if there exists the covariance function $\Gamma_y(u,v)$ with finite variation such that*

$$\Gamma_x(t,s) = \mathsf{E}X(t)X(s) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\kappa(tu)\kappa(sv)\,d\Gamma_y(u,v),$$

where $\kappa(v) = \cos v$ or $\kappa(v) = \sin v$.

Список використаних джерел

1. *Beghin L.* On the Solutions of Linear Odd-Order Heat-Type Equations with Random Initial Conditions / L. Beghin, Yu. Kozachenko, E. Orsingher, L. Sakhno // J. Stat. Phys. – 2007. – Vol. 127, Issue 4. – P. 721–739.

2. *Buldygin V. V.* Metric Characterization of Random Variables and Random Processes / V. V. Buldygin, Yu. V. Kozachenko. – AMS, Providence, RI, 2000. – 257 p.

3. *Василик О.І.* φ-субгауссові випадкові процеси / О.І. Василик, Ю.В. Козаченко, Р.Є. Ямненко. – К: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. – 231 с.

4. *Гопкало О.М.* Властивості φ-субгауссових випадкових процесів, пов'язаних із рівнянням теплопровідності з випадковими початковими умовами / О.М. Гопкало, Л.М. Сахно, О.І. Василик // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2020. – Вип. 1–2. – С. 17-24.

5. *Hopkalo O.* Investigation of sample paths properties for some classes of φ-sub-Gaussian stochastic processes / O. Hopkalo, L. Sakhno // Modern Stoch., Theory Appl. – 2021. – Vol.8, Iss.1. – P. 41–62.

6. *Kozachenko Yu.V.* Boundary value problems with random initial conditions and series of functions of $Sub_\varphi(\Omega)$. / Yu. V. Kozachenko, Yu. A. Koval'chuk // Ukr. Math. J. – 1998. – Vol. 50, No. 4. – P. 572–585.

7. *Kozachenko Yu.V.* Large deviations type inequality for the supremum of the heat random field / Yu. V. Kozachenko, G. M. Leonenko // Methods Func. Anal. Topol. – 2002. – 8, No. 3. – P. 46–49.

8. *Kozachenko Yu.V.* Extremal behavior of the heat random field. / Yu. V. Kozachenko, G. M. Leonenko // Extremes. – 2006. – Vol. 8. – P. 191–205.

9. *Kozachenko Yu.* Estimates for functional of solution to Higher-Order Heat-Type equation with random initial condition. / Yu. Kozachenko, E. Orsingher, L. Sakhno, O. Vasylyk // J. Stat. Phys. – 2018. – Vol. 72, No. 6. – P.1641–1662.

10. *Kozachenko Yu.* Estimates for distribution of suprema of solutions to higher-order partial differential equations with random initial conditions/ Yu. Kozachenko, E. Orsingher, L. Sakhno, O. Vasylyk // Modern Stoch., Theory Appl. – 2020. – Vol.7, Iss. 1.– P. 79–96.

11. *Kozachenko Yu. V.* Banach spaces of random variables of sub-Gaussian type / Yu. V. Kozachenko, E. I. Ostrovsky // Theor. Probab. Math. Stat. – 1985. – 32. – P.42–53.

12. *Kozachenko Yu.V.* On the increase rate of random fields from space $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ on unbounded domains / Yu. V. Kozachenko, A. I. Slyvka-Tylyshchak // Stat. Optim. Inf. Comput. – 2014. – 2, No. 2. – P. 79–92.

13. *Krasnosel'skii M. A.* Convex Functions and Orlicz Spaces. / M. A. Krasnosel'skii, Ya. B. Rutickii. – P.Noordhoff Ltd, 1961. – 249p.

14. *Tao T.* Nonlinear Dispersive Equations: Local and Global Analysis. CBMS Regional Conf. Ser. in Math., V. 106. – AMS, 2006. – 373p.

References

1. BEGHIN, L., KOZACHENKO, YU., ORSINGHER, E., SAKHNO, L. (2007) On the Solutions of Linear Odd-Order Heat-Type Equations with Random Initial Conditions *J. Stat. Phys.* Vol. 127, Issue 4, p. 721–739.

2. BULDYGIN, V. V., KOZACHENKO, YU. V. (2000) *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes.* AMS, Providence, RI, 257 p.

3. VASYLYK, O. I., KOZACHENKO, YU. V., YAMNENKO, R. E. (2008) *φ-sub-Gaussian random process.* Kyiv: Vydavnycho-Poligrafichnyi Tsentr "Kyivskyi Universytet", 231 p. (In Ukrainian)

4. HOPKALO, O.M., SAKHNO, L.M., VASYLYK O.I. (2020) Properties of φ-sub-Gaussian stochastic processes related to the heat equation with random initial conditions. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*, Iss. 1-2, p. 17–24.

5. HOPKALO, O., SAKHNO, L. (2021) Investigation of sample paths properties for some classes of φ-sub-Gaussian stochastic processes. *Modern Stoch., Theory Appl.*, Vol. 8, Iss. 1, p. 41–62.

6. KOZACHENKO, YU. V., KOVAL'CHUK, YU. A. (1998) Boundary value problems with random initial conditions and series of functions of $Sub_\varphi(\Omega)$. *Ukr. Math. J.* 50, p. 572–585.

7. KOZACHENKO, YU. V., LEONENKO, G.M.(2002) Large deviations type inequality for the supremum of the heat random field. *Methods Func. Anal. Topol.* 8 (3), p. 46–49.

8. KOZACHENKO, YU. V., LEONENKO, G. M.(2006) Extremal behavior of the heat random field. *Extremes.* Vol. 8, p. 191–205.

9. KOZACHENKO, YU., ORSINGHER, E., SAKHNO, L., VASYLYK, O. (2018) Estimates for functional of solution to Higher-Order Heat-Type equation with random initial condition. *J. Stat. Phys.* 72, p. 1641–1662.

10. KOZACHENKO, YU., ORSINGHER, E., SAKHNO, L., VASYLYK, O. (2020) Estimates for distribution of suprema of solutions to higher-order partial differential equations with random initial conditions. *Modern Stoch., Theory Appl.*, Vol. 7, Iss. 1, p. 79–96.

11. KOZACHENKO, YU. V., OSTROVSKY, E. I. (1985) Banach spaces of random variables of sub-Gaussian type, *Theor. Probab. Math. Stat.*. No. 32, p.42–53.

12. KOZACHENKO, YU. V., SLIVKA-TYLYSHCHAK, A. I. (2014) On the increase rate of random fields from space $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ on unbounded domains. *Stat. Optim. Inf. Comput.* 2, No. 2, p. 79–92.

13. KRASNOSEL'SKII, M. A., RUTICKII, YA. B. (1961) *Convex Functions and Orlicz Spaces.* P.Noordhoff Ltd, Groningen, 249p.

14. TAO, T. (2006) *Nonlinear Dispersive Equations: Local and Global Analysis.* CBMS Regional Conf. Series in Math., V.106, AMS. 373p.

Received: 10.07.2021

УДК 519.21
https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/2.12

Н. Ю. Щестюк , *к.ф.-м.н., доцент*
С. В. Тищенко , *магістр, студент-аспірант*

Метод Монте-Карло для оцінювання опціонів у субдифузійних моделях арифметичного броунівського руху

[1] Національний університет "Києво-Могилянська академія 04070, м. Київ, вул. Сковороди 2
e-mail: n.shchestiuk@ukma.edu.ua
[2] Національний університет "Києво-Могилянська академія 04070, м. Київ, вул. Сковороди 2
e-mail: s.tyshchenko@ukma.edu.ua

N. Y. Shchestyuk[1], *PhD, docent*
S. O. Tyshchenko[2], *master*

Monte-Carlo method for option pricing in sub-diffusion arithmetic Brownian motion models

[1] National University Of Kyiv-Mohyla Academy, Hryhoriya Skovorody St, 2, Kyiv, 04655
e-mail: n.shchestiuk@ukma.edu.ua
[2] National University Of Kyiv-Mohyla Academy, Hryhoriya Skovorody St, 2, Kyiv, 04655
e-mail: s.tyshchenko@ukma.edu.ua

Ця стаття присвячена застосуванню методу Монте-Карло до оцінювання опціонів на неліквідних ринках. Аномальна субдифузія - це добре відома модель для опису таких ринків, коли спостерігаються відносно тривалі періоди без будь-якої торгівлі. Для побудови субдифузійних моделей нам потрібно замінити календарний час t на деякий стохастичний процес S(t), який називається оберненим субординатором. Обернений субординатор S(t) інтерпретується як час першого досягнення деякої ціни, яка потім протягом тривалогу часу може не змінюватись і базується на використанні деякого іншого випадкового процесу, що називається субординатором. У цій роботі ми пропонуємо використати гамма-процес як субординатор для субдифузійної моделі Башельє. Використовуючи добре відомі властивості для гамма-процесів та обернених гамма-процесів, ми знаходимо коваріаційну структуру фрактальної моделі Башельє з FBM (фрактальним броунівським рухом) у якому замінюємо час на гамма-процес, а потім досліджуємо її асимптотичну поведінку. Потім ми застосовуємо метод Монте-Карло для оцінювання опціонів у цій субдифузійної моделі Башельє. Для цього ми використовуємо ітераційні схеми для моделювання N сценаріїв цін на акції для наших моделей. Також ми демонструємо числові результати.

Ключові слова: субдифузія, гамма-процес, метод Монте-Карло, оцінювання опціонів.

This paper focuses on applying Monte Carlo approach to option pricing in markets with illiquid assets. Anomalous sub-diffusion is a well-known model for describing such markets, when relatively long periods without any trading are observed. For constructing sub-diffusive models we need to replace a calendar time t with the some stochastic processes $S(t)$, which is called inverse subordinator. The inverse subordinator $S(t)$ means first hitting time and based on subordinator processes. In this paper we propose to use gamma gamma process as subordinator for Bashelie sub-diffusion model. Using well-known properties for gamma and inverse gamma processes we find the covariance structure of fractional Bachelier model with FBM time-changed by gamma process and then explore the asymptotic behavior of it. Then we apply Monte-Carlo method and propose procedure of option pricing for Bashelie sub-diffusion model. For this aim we use the iterative schemes for simulating N scenarios of stock prices for our models. Finally we demonstrate numerical results.

Key Words: sub-diffusion, gamma process, Monte-Carlo approach, option pricing.

1 Introduction

In recent decades time-changed stochastic processes are getting increasing attention.These stochastic processes are used for example in finance in fractal activity time (FAT) models to provide long memory (dependence) for log returns. In the papers [1], [2], [6]- [8] were presented option pricing for such models, which belong of the larger class of diffusion process with *"market"* time.

© Nataliya Shchestyuk, Serhii Tyshchenko 2021

Time-changed stochastic processes are also used in statistical physics to model anomalous diffusion phenomena. In markets with illiquid assets, we often see the similar anomalous sub-diffusion, when relatively long periods without any trading are observed. This feature is most common for emerging markets in which the number of participants, and thus the number of transactions, is rather low.

Sub-diffusion is a well known and established phenomenon in statistical physics. It occurs if we replace the calendar time t with $S(t)$, where $S(t)$ is called the inverse subordinator. The inverse subordinator means first hitting time and it is given by the following formula:

$$S(t) = \inf\{\tau > 0 : U(\tau) > t\}. \tag{1}$$

There are several methods for finding price values of $C_\psi(X_0, K, T, \alpha)$ for subdiffusion models. One of them is to find call or put option price as solution of the forward partial integro-differential equation (PIDE) with some initial conditions [5]. The another method is by approximating integral in opting pricing formula [3]. And finally the method we use is Monte-Carlo approach.

The Monte-Carlo method is based on modeling the trajectories of the inverse subordinator $S_\psi(t)$ in the interval $[0, T]$ and calculate the fair price as the mathematical expectation. This method already was applied for two kinds of subordinators [3]: α stable and tempered α stable.

In this paper we propose to use gamma processes as subordinators.

The paper is organized as follows. In Section 2 we recall what is non-fractional Bachelier model, how to find fair price for this model and how to estimate difference between Bachelier price $C^B = C(X_0, K, T, \sigma)$ and Black-Scholes price C^{BS}.

In Section 3 we we remain what is sub-diffusion and consider gamma processes as subordinators for Bashelie sub-diffusion model. Some basic well-known properties of the gamma process as a subordinator and some very useful properties of inverse gamma process as a inverse subordinator were considered. Then using these properties we find the covariance structure of fractional Bachelier model with FBM time-changed by gamma process and then explore the asymptotic behavior of it.

In Section 4 we apply Monte-Carlo method and propose procedure of option pricing for Bashelie sub-diffusion model. For this aim we use the iterative schemes for simulating N scenarios of stock prices for our models as in [9].

In Section 5 we present numerical results for evaluating fair prices for Bashelie sub-diffusion model with gamma process as a subordinator.

Last section contains conclusions.

2 Non-fractional Bachelier model

This section reviews some well-known results about option pricing in a arithmetic diffusion framework. We will consider later a time-changed version of this model.

It is worth to mention that recently in the day 2020-04-20, oil futures reached for first time in history negative values, where Bachelier model took an important role in option pricing and risk management. It demonstrates that sometimes using of Bachelier model is more reasonable than Black-Scholes.

Now we consider a financial market in which is traded a risk-free bond and a stock. The risk-free bond, noted A_t, earns a constant interest rate r and satisfies the differential equation:

$$\frac{dA_t}{A_t} = rdt \ A_0 = 1, \ t \geqslant 0. \tag{2}$$

We assume that the stock price, X_t, is ruled by a following diffusion:

$$dX_t = \mu dt + \sigma dB_t, \tag{3}$$

where $\mu \in \mathbb{R}$ is the drift parameter, $\sigma \in \mathbb{R}$ is the volatility.

It means that the stock price dynamic follows arithmetic Brownian motion:

$$X(t) = X_0 + \mu t + \sigma B(t), \ t \geqslant 0. \tag{4}$$

Here, $B(t)$ is the standard Wiener process or Brownian motion (BM) on the probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

The model (2)-(3) with solution (4) is arbitrage free and complete (see [3]). The option prices can be obtained by standard martingale method. The fair values of call and put on a stock X_t with expiry date T and strike price K are expressed as

$$C(X_0, K, T, \sigma) = \sigma\sqrt{T}\phi\left(\frac{X_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right) + (X_0 - K)N\left(\frac{X_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right), \quad (5)$$

$$P(X_0, K, T, \sigma) = \sigma\sqrt{T}\phi\left(\frac{K - X_0}{\sigma\sqrt{T}}\right) + (K - X_0)N\left(\frac{K - X_0}{\sigma\sqrt{T}}\right). \quad (6)$$

Here, ϕ and N are respectively the probability distribution function (PDF) and cumulative distribution functions (CDF) of the standard normal distribution.

The link between fair prices (5) and (6) for call and put options is given by the put-call parity formula:

$$P(X_0, K, T, \sigma) = C(X_0, K, T, \sigma) + K - X_0.$$

Notice, the values of fair prices computed by Bachelier and Black-Scholes approaches are very close. The difference between Bachelier price $C^B = C(X_0, K, T, \sigma)$ and Black-Scholes price C^{BS} was estimated in [3] as follows

$$0 \leqslant C^B - C^{BS} \leqslant \frac{X_0}{12\sqrt{2}}\sigma^B T^{3/2},$$

where σ^B is the implied volatility in the Bachelier model.

In the remaining of this paper, we explore the option pricing of a time-changed version of this model. We would like to extend Bachelier model for emerging market with periods, where assets price does not change. The next section introduces sub-diffusion and the stochastic clocks that we use as time-changes.

3 Sub-diffusion Bachelier model with Gamma subordinator

The usual model of sub-diffusion in physics is the celebrated Fractional Fokker-Planck equation. This equation was derived from the continuous-time random walk scheme with heavy-tailed waiting times. Equivalent description of sub-diffusion is in terms of subordination, where the standard diffusion process is time-changed by the so-called inverse subordinator.

A subordinator is a stochastic process of the evolution of time within another stochastic process, the subordinated stochastic process. In other words, a subordinator will determine the random number of "time steps"that occur within the subordinated process for a given unit of chronological time.

Thus, subordinator U_t is a stochastic process with positive, non-decreasing sample paths and taking value in $R+$.

We consider Levy subordinators for which increments are independent and homogeneously distributed. It is known that from the Levy–Khintchine formula the Laplace transform of Lévy subordinators has the following form:

$$\mathbb{E}\left(e^{-\omega U_t}\right) = e^{-tf(\omega)},$$

where $f(\omega) = b\omega + \int_0^{+\infty}(1 - e^{-\omega z})\overline{\nu}(dz)$ and $b \in \mathbb{R}^+$.

The inverse subordinator means first hitting time and it is defined by the formula (1).

This inverted Lévy subordinator is in general no more a Levy process. However S_t, $t \geqslant 0$, is positive and non-decreasing and has a [5] all requisite properties to be used as stochastic clock. By construction, the inverted process may be constant. Therefore, any process subordinated by S_t exhibits motionless periods. These random distributed motionless periods are characteristic for the subdiffusive dynamics and they represent the waiting times in which the test particle gets immobilized in the trap. In analogy with the physical description of sub-diffusion, we can consider the sub-diffusive arithmetic BM [3]:

$$X(S(t)) = X_0 + \mu S(t) + \sigma B_H(S(t)),\ t \geqslant 0, \quad (7)$$

where $S(t)$ is subordinating process and $B(t)$ and $S(t)$ are independent.

In recent years number of papers devoted to using the processes time-changed by inverse subordinators as models adequate for anomalous diffusion phenomena have grown rapidly. We only mention, for instance an inverse α - stable subordinator, the inverse tempered stable subordinator and the inverse gamma process as a time-change was examined in papers of M. Magdziarz, , A. Wyłomańska. The general case inverse subordinators based on infinite divisible processes were explored for example by T. R. Hurd and A. Kuznetsov, J..

In this paper we would like to use gamma process as a subordinator for description time periods in which price does not change. It is reasonable

because gamma process is a pure-jump increasing Lévy process and thus it is a good candidate for construction waiting time.

Suppose U_t, $t \geqslant 0$, is gamma process $\Gamma(t, \alpha, \beta)$, thus it is a positive nondecreasing process such that $U_0 = 0$, and its increments $U_{t+s} - Ut$, $t \geqslant 0$, are stationary independent and have gamma distribution.

$$f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}. \tag{8}$$

where $\alpha = s/\nu$, $\beta = 1$ and ν is a positive parameter. Some basic properties of the gamma process are well-known:

1) Multiplication of a gamma process by a scalar constant λ is again a gamma process with different mean increase rate.

$$\lambda\Gamma(t; \alpha, \beta) \simeq \Gamma(t; \alpha, \beta/\lambda).$$

3) The sum of two independent gamma processes is again a gamma process.

$$\Gamma(t; \alpha_1, \beta) + \Gamma(t; \alpha_2, \beta) \simeq \Gamma(t; \alpha_1 + \alpha_2, \beta).$$

4) The density function $f(x, t)$ for gamma process $U(t)$ is given by

$$f(x, t) = \frac{1}{\Gamma(t/v)} x^{\frac{t}{v}-1} e^{-y}, y > 0,$$

where $\Gamma(z)$ is the Gamma function.

5) The Laplace exponent for gamma process $U(t)$ is given by

$$\Psi_{U(u)} = \frac{1}{v} \log(1 + u).$$

6) The moments for gamma process $U(t)$:

$$E(U^q(t)) = \frac{\Gamma(q + t/\nu)}{\Gamma(t/\nu)} \sim \frac{t}{\nu}$$

if $t \to \infty$.

7) The correlation function is

$$Corr(U(s), U(t)) = \sqrt{\frac{s}{t}},$$

$s < t$, for any gamma process $U(t)$.

The inverse subordinator $S(t)$ defined by (1), with gamma process $U(t)$ has follows properties (see [4]):

1)The inverse subordinator $S(t)$ for gamma process $U(t)$ is inverse gamma process, and its tail behavior satisfies:

$$P(S(t) > x) \sim (\frac{2\pi x}{\nu})^{-1/2} e^{x/\nu - t} (\frac{\nu t}{x})^{x/\nu}$$

if $x \to \infty$.

2) The moments for $S(t)$ of first and second order can be computed as

$$M_1(t) = \mathbb{E}S(t) = \nu \left(t + \frac{1}{2}\right) - \nu e^{-t} \int_0^\infty \frac{e^{-yt}}{(1 + y)\left[(\log(y))^2 + \pi^2\right]} dy, \tag{9}$$

$$M_2(t) = \mathbb{E}S(t)^2 = \nu^2 \left(t + \frac{1}{12} + \frac{t^2}{2}\right) - 2\nu^2 e^{-t} \int_0^\infty \frac{e^{-yt} \log(y)}{(1 + y)\left[((\log(y))^2 + \pi^2)^2\right]} dy. \tag{10}$$

3) The covariation function is

$$\mathrm{Cov}(S_t, S_{t+k}) = \frac{1}{2} M_2(t) + \int_0^t M_1(t + k - y) dM_1(y) - M_1(t + k) M_1(t). \tag{11}$$

It is useful to find the covariance structure of fractional Bachelier model with FBM time-changed by gamma process and then explore the asymptotic behavior of it.

Proposition 1. *If X_t is a stochastic process given by (), where $U(t)$ is Gamma process, then, for any integer $k \geqslant 0$:*

$$\mathrm{Cov}(X(t), X(t + k)) = \mu^2 \mathrm{Cov}(S(t), S(t + k)) + \sigma^2 \mathrm{Cov}(B_H S(t), B_H S(t + k)), \tag{12}$$

where covariation function between $S(t)$ and $S(t + k)$ is defined by property (11) and covariation function between $B_H S(t)$ and $B_H S(t + k)$ was explored in [5]:

$$\mathrm{Cov}(B_H S(t), B_H S(t+k)) = M_{2H}(t) + 2H \int_0^t M_{2H-1}(t+k-y) dM_1(y). \tag{13}$$

where $M_q(t) = \mathbb{E}(S(t)^q(t))$, H *- is the Hurst exponent.*

The results follows from (9)-(11) and the fact that

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X(U(t), X(U(t+k)) = \mu^2 \mathrm{Cov}(S(t), S(t+k)) + \mu\sigma \mathrm{Cov}(S(t), B_H(S(t+k)) + \\ + \mu\sigma \mathrm{Cov}(B_H(S(t)), S(t+k)) + \sigma^2 \mathrm{Cov}(B_H(S(t)), B_H(S(t+k))),\end{aligned} \tag{14}$$

where $\mathrm{Cov}(S(t), B_H(S(t+k)) = \mathrm{Cov}(B_H(U(t)), S(t+k)) = 0$ because we suppose the inverse subordinator $S(t)$ and FBM $B_H(S(t))$ are independent.

4 Monte-Carlo Option pricing in sub-diffusion Bachelier model

For the sub-diffusion market described above the usual requirement for the fair option pricing is that arbitrage opportunities do not exist. For this it is enough to prove the existence of the equivalent martingale measure. In [3] was introduced the following measure

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A \exp\left\{-\gamma B(S_\psi(T)) - \frac{\gamma^2}{2} S_\psi(T)\right\} d\mathbb{P},$$

where $\gamma = \frac{\mu}{\sigma}$ and $A \in \mathcal{F}$, and was proved that the subdiffusive arithmetic BM $X(t)$ is a martingale with respect to Q. Also in [3] was shown that the market model, in which the asset price is described by the subdiffusive arithmetic BM, is arbitrage-free. The second question is completeness of market model. The Second Fundamental theorem of asset pricing states that the model is complete if and only if there is a unique martingale measure. In the paper [3] were given two different proofs of the incompleteness of financial market model based on subdiffusive ABM. If the subdiffusive model is incomplete, then it is reasonable to obtain different prices of derivatives depending on the choice of the martingale measure. The choice of the measure Q defined in this way is the natural extension of the martingale measure from the classical Bachelier model, in the context of subordination. Moreover, measure Q minimizes the relative entropy. So, from paper [3] we know that the subdiffusive model (7) is arbitrage-free, incomplete and the fair price of the European call option with expiry date T and strike price K is given by:

$$C_\psi(X_0, K, T, \alpha) = \langle C(X_0, K, S_\psi(T), \alpha)\rangle = \int_0^\infty C(X_0, K, x, \alpha) g_\psi(x, T)\, dx \tag{15}$$

where, g_ψ is the PDF of $S_\psi(T)$. There are some ways of finding fair price. One of them is by approximating integral in (15). But this approach requires that g is known exactly. The another method is to find call or put option price as solution of the forward partial integro-differential equation (PIDE) with some initial conditions. And finally the method we use is Monte-Carlo approach. The Monte-Carlo method is based on modeling the trajectories of the inverse subordinator $S_\psi(t)$ in the interval $[0, T]$ and calculate the fair price as the mathematical expectation.

This method already was applied for α stable and tempered α stable subordinators in [3]. In this paper we apply Monte-Carlo method for gamma subordinator.

5 Numerical Results

In this section, the algorithm for using Monte-Carlo approach are demonstrated.

We considered spot price $S_0 = 277.0$ for March 14, 2020. The strike price for call options with maturity $T = 1/12$ year is set at $K = 255; 260; 265; 270$, the yearly volatility for returns of the underlying asset is computed at $\sigma = 33.7\%$, the yearly riskless interest rate is set at $r = 5.8\%$.

The main steps in a basic Monte Carlo approach to estimating fair option price in the arithmetic sub-diffusion model are as follows:

1. First we simulate N trajectories of $U(t)$, that is a process of independent stationary increments having gamma distribution. We divide the interval $[0, T]$ into subintervals of length

$/delta$, where the increments $U(t+\delta) - U(t)$, $t = 0, \delta, 2\delta, ..., T - \delta$ have gamma distribution with parameters δ/ν and 1. We simulate T/δ independent random variables from this distribution. Finally, the trajectory of $U(t)$ is obtained as the cumulative sum of the increments.

2. In order to simulate the approximate trajectory of the inverse gamma subordinator we need to use following approximation scheme:

$$S_{\psi,\delta}(t) = (\min\{n \in \mathbb{N} : T_\psi(\delta n) > t\} - 1)\delta. \quad (16)$$

Here, $\delta > 0$ is the step length and $T_\psi(\tau)$ is the subordinator.

3. For a given time of maturity T generate N values of the inverse subordinator $S(T)$ and calculate N option price values, using formula (15). See Fig. 1.

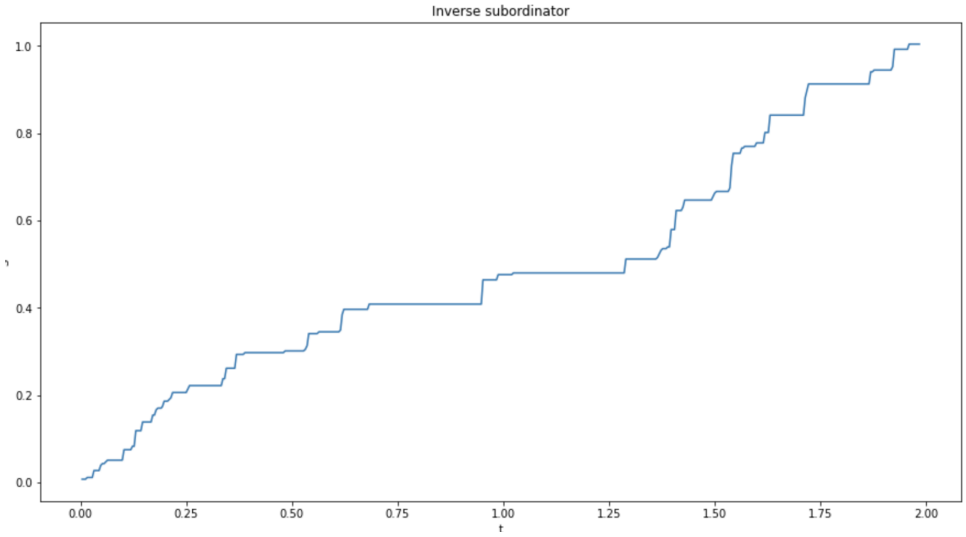


Рис. 1: The trajectories of inverse subordinator

4. Find the fair price as mean for N scenarios, obtained in the step 3.

The results of the above algorithm are presented in Fig. 2. We observe a typical trajectory of ABM with gamma waiting times. And we use the above algorithm to perform Monte Carlo simulations in order to approximate the fair option price for sub-diffusion model. Some basic results for European call options are presented in Table 1.

Табл. 1: Numerical comparisons

Strike Price	Last (Market)	Subdiffusion	Bachelier	Black-Scholes
255	32.60	31.09	30.34	26.67
260	28.67	26.82	25.80	22.76
265	27.00	24.81	23.97	19.17
270	23.00	20.53	19.35	15.92

In order to evaluate the accuracy of the proposed method and to compare it with fair pricing according to the Black-Scholes formula, we can compare their percentage errors. The percentage error for a given strike price K can be computed as a following ratio:

$$PercentageError = \frac{|c_{theoretical} - c_{market}|}{c_{market}} 100\%$$

Overall, the results show that average percentage errors for Subdiffusive pricing (7,5 %) and for

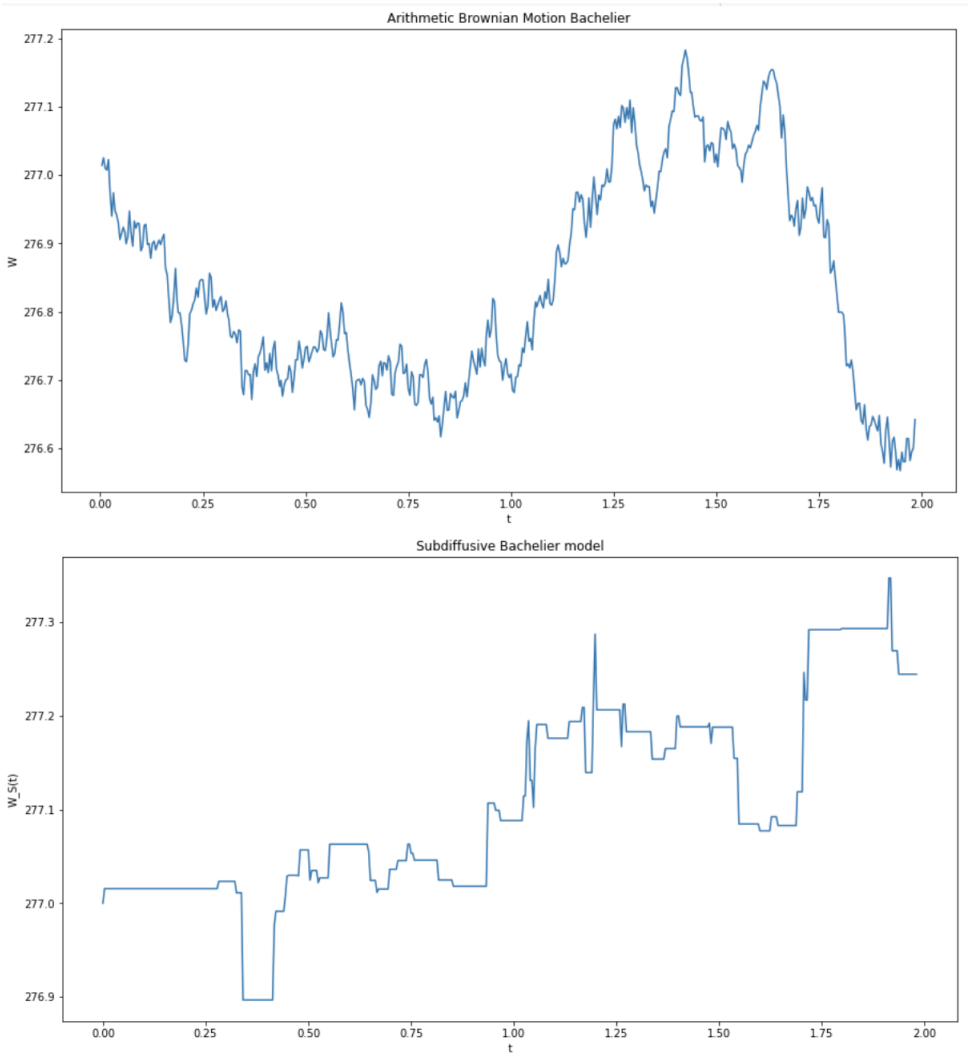


Рис. 2: Sample realizations of the standard ABM (top panel), and the corresponding subdiffusive ABM

Optimal ABM pricing (11 %) are less than for Fair Black-Scholes Pricing (24%).

However, these errors may indicate that the proposed model is very sensitive to volatility σ, and to the periods without price's changing.

Thus, we offer our approach as an alternative to the Bachelier and Black-Scholes formula for emerging markets.

6 Summary

Following the financial tsunami experiences of 2008 and the crisis of Covid19 in 2020, we can observe that some kinds of risky assets have the periods in their dynamic without change and the risk controls of derivative instruments on stocks and other financial assets have become extremely important. Thanks to sub-diffusion approach, the investor gets a tool, which allows him to take into account these features in the option pricing. Monte-Carlo approach with gamma subordinator allows evaluate option price easy.

References

1. Castelli F., Leonenko N. N. and Shchestyuk N. (2017). Student-like models for risky asset with dependence *Stochastic Analysis and Application*, **35, 3**, 452-464.

2. Kerss, A. D. J., Leonenko N. N., and Sikorskii, A. (2014). Risky asset models with tempered stable fractal activity time. *Stochastic Analysis and Applications*, **32(4)**, 642-663.

3. Magdziarz, M., Orzeł, S., and Weron, A. Option Pricing in Subdiffusive Bacheli-

er Model. *J Stat Phys* **145**, 187 (2011). https://doi.org/10.1007/s10955-011-0310-z

4. A. Kumar, A. Wyłomańska, R. Połoczański, S. Sundar, Fractional Brownian motion time-changed by gamma and inverse gamma process, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Volume **468**, 2017, Pages 648-667

5. Donatien H., Leonenko N. N. (2020). Option pricing in illiquid markets: A fractional jump–diffusion approach *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **381**.

6. Щестюк Н.Ю. (2012). Гамма-оберненні дифузійні моделі ціноутворення акцій.// Записки НаУКМА. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2012. – Том 113 – С.23-27

7. Щестюк Н.Ю., Фарфур А. (2013). Справедлива ціна Європейських опціонів для гама-обернених дифузійних моделей ціноутворення акцій / Записки НаУКМА. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2013. – Том. 139. – С 30-33.

8. Щестюк Н.Ю. (2014). Оцінка справедливої ціни опціонів в модифікаціях моделі Хейді-Леоненка //Математичне та комп'ютерне моделювання, Камянець-Подільський НУ, Сер. Фіз.-мат. науки. – 2014. – Вип. 11. – С.223-236

9. Boliukh K., Shchestyuk N. (2020). Simulating stochastic diffusion processes and processes with "market" time // Могилянський Математичний Журнал. – 2020. – Vol 3, pp 25-30

Надійшла до редколегії 29.01.2020

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

УДК 517.983.27 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/2.13

Тетерук І.С.[1], аспірант

Двовимірні узагальнені моментні зображення та апроксиманти типу Паде функції двох змінних, яка є узагальненням гіпергеометричних рядів

[1]Інститут математики НАН України, Київ
email: innna.teteruk@gmail.com

Teteruk I.S.[1], PhD student

Two-dimensional generalized instantaneous images and approximations of the Pade type function of two variables, which is a generalization of hypergeometric series

[1]Institute of Mathematics of NASU, Kyiv
email: innna.teteruk@gmail.com

Досліджується питання побудови апроксимант Паде для функції двох змінних. Побудована двовимірна функціональна послідовність, яка має узагальнене моментне зображення і визначені раціональні апроксиманти, що будуть узагальненнями одновимірних апроксимант Паде. Функція двох змінних, яка розглядається, повністю пов'язана з базисними гіпергеометричними рядами, а саме з q-аналогом експоненти e_q.

Ключові слова: апроксимант Паде, моментне зображення, гіпергеометричний ряд, раціональна апроксимація.

Generalized instantaneous image were introduced by V.K. Dzyaduk [1] in 1981 and proved to be a convenient tool for constructing and studying the Padé approximants and their generalizations (see [2]). The method of generalized instantaneous images proposed by Dzyadyk made it possible to construct and study rational Padé approximants and their generalizations for many classes of special functions from a single position. As an example, the Padé approximants is constructed for a class of basic hypergeometric series, which includes a q-analogue of the exponential function. In this paper the construction of the Pade approximants for the function of two variables is investigated. A two-dimensional functional sequence is constructed, which has a generalized instantaneous image, and rational approximants are determined, which will be generalizations of one-dimensional Padé approximants. The function of the two variables is entirely related to the basic hypergeometric series, namely with the q-analog of the exponent e_q.

Keywords: Pade approximation, instantaneous image, hypergeometric series, rational approximation.

Статтю представив д.ф.-м. н., проф., академік НАН України Перестюк М.О.

Вступ та теоретичні відомості.

Узагальнені моментні зображення були введені В.К. Дзядиком [1] у 1981 р. і виявилися зручним інструментом для побудови та вивчення апроксимацій Паде та їх узагальнень (див. [2]).

Означення. Будемо говорити, що для послідовності комплексних чисел $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ має місце узагальнене моментне зображення на добутку лінійних просторів X та Y за означеною на цьому добутку білінійною формою $\langle .,. \rangle$, якщо у просторі X вказано послідовність елементів $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, а у просторі Y -- послідовність елементів $\{y_j\}_{j=0}^{\infty}$ такі, що

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle \quad k, j \in \mathbb{Z}_+ \qquad (1)$$

По аналогії з (1) можна визначити узагальнені моментні зображення двовимірних числових послідовностей.

Означення. Будемо говорити, що для двовимірної числової послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ має місце узагальнене моментне зображення на добутку лінійних просторів X та Y за означеною на цьому добутку білінійною формою

©І. С. Тетерук, 2021

$\langle .,. \rangle$, якщо у просторі X вказано двовимірну послідовність елементів $\{x_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$, а у просторі Y -- двовимірну послідовність елементів $\{y_{j,n}\}_{j,n=0}^{\infty}$ такі, що

$$s_{k+j,m+n} = \langle x_{k,m}, y_{j,n} \rangle \quad k, j, m, n \in \mathbb{Z}_+ \qquad (2)$$

По аналогії з тим, як у відповідність числовій послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ можна поставити формальний степеневий ряд $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k$, двовимірній числовій послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ можна поставити у відповідність формальний степеневий ряд двох змінних

$$f(z,\omega) = \sum_{k,m=0}^{\infty} s_{k,m} z^k \omega^m \qquad (3)$$

Для рядів вигляду (3) можна визначити раціональні апроксиманти, що будуть узагальненнями одновимірних апроксимант Паде, за різними схемами (див. [3, с.323]). При цьому потрібно зафіксувати певні обмежені області N і D з $\mathbb{Z}_+^2$ та побудувати алгебраїчні многочлени

$$P_{\mathrm{N}}(z,\omega) = \sum_{(k,m)\in \mathrm{N}} p_{k,m} z^k \omega^m,$$

$$Q_{\mathrm{D}}(z,\omega) = \sum_{(k,m)\in \mathrm{D}} q_{k,m} z^k \omega^m,$$

таким чином, щоб якомога більше коефіцієнтів $e_{k,m}$ у розкладі

$$f(z,\omega) - \frac{P_{\mathrm{N}}(z,\omega)}{Q_{\mathrm{D}}(z,\omega)} = \sum_{(k,m)\in \mathbb{Z}_+^2} e_{k,m} z^k \omega^m$$

дорівнювали нулю.

Наступний результат є аналогом теореми В.К. Дзядика [1] для випадку функцій двох змінних (див.[4]):

Теорема 1. Нехай формальний степеневий ряд двох змінних має вигляд (3) і для двовимірної послідовності $\left\{s_{k,m}\right\}_{k,m=0}^{\infty}$ має місце узагальнене моментне зображення вигляду (2). Тоді якщо для деяких $N_1, N_2 \in \mathbb{Z}$ існує нетривіальний узагальнений поліном

$$Y_{N_1,N_2} = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} y_{j,n} \qquad (4)$$

такий, що виконуються умови біортогональності

$$\left\langle x_{k,m}, Y_{N_1,N_2} \right\rangle = 0 \qquad (5)$$

при $(k,m) \in \left([0,N_1]\times[0,N_2]\right)$, $\{(N_1,N_2)\}$ і $c_{N_1,N_2}^{(N_1,N_2)} \neq 0$, то раціональна функція

$$\frac{1}{Q_{N_1,N_2(z,\omega)}} \Big\{ \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2-1} z^k \omega^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{m} c_{N_1-j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m-n} +$$

$$+ z^{N_1} \sum_{k=0}^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2-1} z^k \omega^m \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{m} c_{j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k+j,m-n} +$$

$$+ \omega^{N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2} z^k \omega^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m+n} \Big\}$$

де $Q_{N_1,N_2}(z,\omega) = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} z^j \omega^n$ матиме розклад у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігатимуться з коефіцієнтами ряду (3) для всіх $(j,n) \in ([0,2N_1]\times[0,2N_2])$, $\{(2N_1,2N_2)\}$.

Насправді в теоремі 1 можна вибрати узагальнений поліном Y_{N_1,N_2} з умов біортогональності до елементів $x_{k,m}$ не для $(k,m) \in ([0,N_1]\times[0,N_2])$, $\{(N_1,N_2)\}$, а для $(k,m) \in \mathrm{H}$, де H -- певна множина з $\mathbb{Z}_+^2$ обмежена деякою кривою $\rho = \rho(\varphi), \varphi \in [0,\pi/2]$, що містить $(N_1+1)(N_2+1)-1$ точку. При цьому за N ми можемо вибрати будь-яку множину з $\mathbb{Z}_+^2$, $([N_1,\infty]\times[N_2,\infty])$, що є об'єднанням квадрата $[0,N_1-1]\times[0,N_2-1]$ з множинами вигляду $\{(k,m): k \in [0,N_1-1], m \in [N_2, x(k)]\}$ та $\{(k,m): m \in [0,N_2-1], k \in [N_1, y(m)]\}$, де $x(k), y(m)$ -- деякі функції з $\mathbb{Z}_+$ в $\mathbb{Z}_+$ такі, що $x(k) \geq N_2, y(m) \geq N_1$ для всіх k і m. Тоді множина E буде мати вигляд $\mathrm{N} \cup \mathrm{H} + (N_1,N_2)$, де $\mathrm{H} + (N_1,N_2)$ -- множина, отримана паралельним переміщенням множини H, при якому точка $(0;0)$ переходить у точку (N_1,N_2) (теорема 1` [4]).

Зауважимо, що як і у випадку одновимірних узагальнених моментних зображень, задача про двовимірні узагальнені моментні зображення

може бути сформульована в операторному вигляді. А саме, припустимо, що простори X та Y є нормованими і в просторі X існують комутуючі між собою обмежені оператори $A_1, A_2 : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ такі, що

$A_1 x_{k,m} = x_{k+1,m}$,

$A_2 x_{k,m} = x_{k,m+1}$,

при всіх $k, m \in \mathbb{Z}_+$. Нехай у просторі Y існують обмежені оператори $A_1^*, A_2^* : \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}$, спряжені до операторів A_1, A_2 відносно білінійної форми $\langle .,. \rangle$ в тому розумінні, що для будь-яких $x \in \mathrm{X}, y \in \mathrm{Y}$

$(A_1 x, y) = \langle x, A_1^* y \rangle$,

$(A_2 x, y) = \langle x, A_2^* y \rangle$.

Тоді зображення (2) можна записати у вигляді $s_{k,m} = \langle A_1^k A_2^m x_{0,0}, y_{0,0} \rangle, \quad k, m \in \mathbb{Z}_+$ і ряд (3) буде збіжним в околі початку координат до аналітичної функції, що має зображення $f(z, \omega) = \langle \Re(A_1)\Re(A_2) x_{0,0}, y_{0,0} \rangle$,

де резольвентна функція $\Re(A)$ визначається рівністю $\Re(A) = (I - zA)^{-1}$.

Означення. Для $|q|<1$ базисним гіпергеометричним рядом називається ряд вигляду

$$ {}_r\phi_s\left[\begin{matrix} a_1, a_2, ..., a_r \\ b_1, b_2, ..., b_r \end{matrix}; q; z\right] = $$

$$ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1;q)_n (a_2;q)_n \cdot \ldots \cdot (a_r;q)_n}{(b_1;q)_n (b_2;q)_n \cdot \ldots \cdot (b_s;q)_n} \left[(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \right]^{1+s-r} z^n, $$

(див. [3, с.23]) де $q-$ символ Похгаммера $(a;q)_n$ визначається формулою

$$ (a;q)_n = \begin{cases} (1-a)(1-aq)\cdot \ldots \cdot (1-aq^{n-1}), & n \geq 1 \\ 1, & n = 0, \\ \prod_{m=0}^{\infty} (1-aq^m) = \lim_{n\to\infty} (a;q)_n, & n = \infty. \end{cases} $$

Представниками базисних гіпергеометричних рядів є так звані q-аналоги експоненти

$$ e_q(z) = {}_1\phi_0(0; -; q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(q;q)_n} = \frac{1}{(z;q)_\infty}, \quad |z|<1, $$

та

$$ E_q(z) = {}_0\phi_0(-; -; q; -z) = $$

$$ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n-1)/2}}{(q;q)_n} z^n = (-z;q)_\infty, |z|<1. $$

В [5,6] запропоновано підходи до побудови та дослідження апроксимант Паде функції $e_q(z)$ та її узагальнень з використанням узагальнених моментних зображень. Зокрема, в [6] для цієї мети використано узагальнені моментні зображення вигляду

$s_k = \langle A^k x_0, y_0 \rangle, \quad k = \overline{0, \infty}$,

з оператором A та блінійною формою $\langle .,. \rangle$, що виражаються через $q-$інтеграл Джексона (див [3, с.39])

$$ (A\varphi)(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d_q\tau = t(1-q)\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(tq^k) q^k \qquad (6). $$

Цей же підхід був використаний і до побудови та вивчення апроксимант Паде функції $E_q(z)$ та її узагальнень (див. [7]). А саме, при $0 \leq \alpha < 1$ визначався лінійний простір

$\mathrm{X}_\alpha = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \exists M > 0,$

$|f(x)x^\alpha| < M \; \forall x \in [0,1] \}$ з нормою $\| f \|_\alpha = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)x^\alpha|$. Тоді X_α при кожному $0 \leq \alpha < 1$ буде банаховим простором. Неважко переконатися, що лінійний оператор A вигляду (6) є обмеженим в просторі X_α, а білінійна форма

$$ \langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 \varphi(\tau)\psi(\tau) d_q\tau \qquad (7) $$

є роздільно неперервною на добутку просторів $\mathrm{X}_\alpha \times \mathrm{X}_\alpha$.

Спряженим до оператора A відносно білінійної форми (7) буде оператор

$$ (A^*\psi)(t) = \int_{qt}^1 \varphi(\tau) d_q\tau = \int_0^1 \varphi(\tau) d_q\tau - \int_0^{qt} \psi(\tau) d_q\tau $$

(див. [6]).

Основний результат.

Розглянемо послідовність

$$x_k(t) = \left(A^k x_0\right)(t) = \frac{(1-q)^k}{(q,q)_k} t^k, k = 1, \infty,$$

де $x_0(t) \equiv 1$

і

$$y_j = A^{*j} y_0,\ j = 1, \infty, y_0(t) \equiv 1, \qquad (8)$$

а також

$$s_k = \left\langle A^k x_0; y_0 \right\rangle = \frac{(1-q)^{k+1}}{(q,q)_{k+1}}, k = \overline{0, \infty}. \qquad (9)$$

Покладемо

$$x_{k,m}(t) := x_k(t) + x_m(t), \quad y_{j,n}(t) := y_j(t) + y_n(t),$$

де $\left\{x_k(t)\right\}_{k=0}^{\infty}$ і $\left\{y_j(t)\right\}_{j=0}^{\infty}$ визначені формулами (8). Тоді

$$s_{k+j,m+n} := \left\langle x_{k,m}; y_{j,n} \right\rangle = \left\langle x_k + x_m; y_j + y_n \right\rangle =$$

$$= \left\langle x_k; y_j \right\rangle + \left\langle x_k; y_n \right\rangle + \left\langle x_m; y_j \right\rangle + \left\langle x_m; y_n \right\rangle = \qquad (10)$$

$$= s_{k+j} + s_{k+n} + s_{m+j} + s_{m+n,}$$

маємо $s_{k,m} = 2(s_k + s_m)$, де s_k визначено за формулою (9).

Таким чином, для числової послідовності (10) має місце узагальнене моментне зображення на добутку просторів $X_\alpha \times X_\alpha$ за білінійною формою (7).

Двовимірній числовій послідовності $\left\{s_{k,m}\right\}_{k,m=0}^{\infty}$, яка визначена формулою (10), можна поставити у відповідність формальний степеневий ряд двох змінних

$$f(z,\omega) = \sum_{k,m=0}^{\infty} s_{k,m} z^k \omega^m =$$

$$= 2\sum_{k,m=0}^{\infty} (s_k + s_m) z^k \omega^m = 2\sum_{k,m=0}^{\infty} s_k z^k \omega^m +$$

$$+2\sum_{k,m=0}^{\infty} s_m \omega^m z^k = 2\sum_{m=0}^{\infty} \omega^m \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-q)^{k+1}}{(q,q)_{k+1}} z^k \right) +$$

$$+2\sum_{k=0}^{\infty} z^k \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1-q)^{m+1}}{(q,q)_{m+1}} \omega^m \right) = \frac{2}{1-\omega} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-q)^k}{(q,q)_k} z^{k-1} +$$

$$+\frac{2}{1-z} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1-q)^m}{(q,q)_m} \omega^{m-1} = \frac{2}{1-\omega} \frac{e_q\left(z(1-q)\right)-1}{z} +$$

$$+\frac{2}{1-z} \frac{e_q\left(\omega(1-q)\right)-1}{\omega} \qquad (11)$$

Припустимо, що в просторі X_α існують комутуючі між собою обмежені оператори $A_1, A_2 : \mathrm{X}_\alpha \to \mathrm{X}_\alpha$:

$A_1 x_{k,m} = x_{k+1,m}, (k,m) \in \mathbb{Z}_+$

$A_2 x_{k,m} = x_{k,m+1}, (k,m) \in \mathbb{Z}_+$

Так як $x_{k,m} = x_k + x_m = x_m + x_k = x_{m,k}$, то $A_1 = A_2 : \mathrm{X}_\alpha \to \mathrm{X}_\alpha$.

Позначимо $A_1 = A_2 := \tilde{A}$.

Тоді

$$s_{k,m} = \langle A_1^k A_2^m x_{0,0}; y_{0,0} \rangle = \langle \tilde{A}^{k+m} x_{0,0}; y_{0,0} \rangle =$$

$$= 4\langle \tilde{A}^{k+m} x_0; y_0 \rangle$$

З іншого боку,

$$s_{k,m} = 2(s_k + s_m) = 2\left(\langle A^k x_0; y_0 \rangle + \langle A^m x_0; y_0 \rangle\right) =$$

$$= 2\langle (A^k + A^m) x_0; y_0 \rangle.$$

Тоді маємо, що

$$\tilde{A}^{k+m} x_0 = \frac{1}{2}(A^k + A^m) \cdot x_0 \qquad (12)$$

Як було зазначено в [8], функція зображена рядом (11) матиме вигляд

$$f(z,\omega) = \frac{\omega \tilde{f}(\omega) - z\tilde{f}(z)}{\omega - z} \qquad (13)$$

Далі розглянемо послідовність

$$\tilde{s}_i = \langle \tilde{A}^i x_{0,0}; y_{0,0} \rangle = 4\langle \tilde{A}^i x_0; y_0 \rangle =$$

$$= 2\langle (A^k + A^m)^i x_0; y_0 \rangle, \quad \text{де } k + m = i, i \in \mathbb{Z}_+$$

Для послідовності $\{\tilde{s}_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ виконується умова :

$\forall N \in \square \quad \exists \tilde{Y}_N = \sum_{j=0}^{N} \tilde{c}_j^{(N)} \tilde{y}_j = \sum_{j=0}^{N} \tilde{c}_j^{(N)} \tilde{A}^j y_{0,0}, \tilde{c}_N^{(N)} \neq 0$

і такий, що

$$\langle \tilde{x}_i; \tilde{Y}_N \rangle = \langle \tilde{A}^i x_{0,0}; Y_N \rangle = 0 \quad k = \overline{0, N-1} \qquad (14)$$

або

$\langle \tilde{x}_i; \tilde{Y}_N \rangle = 2\langle (A^k + A^m) x_0; Y_N \rangle = 0$ Умова (14) виконується за рахунок того факту, що для q--поліномів Лежандра $L_N(t;q)$, що задовольняють умови ортогональності:

$$\int_0^1 L_N(t;q) \cdot L_M(t;q) d_q t = 0$$

при $N \neq M$, відомо формули:

$$L_N(t;q) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(q^{-N};q)_k \cdot (q^{N+1};q)_k}{((q;q)_k)^2} (qt)^k$$

(див., напр. [1]).

В роботі [8] отримано наступний результат, який є узагальненням теореми 1`[4].

Теорема 2. Для аналітичної функції двох змінних f, що має зображення (13) за виконанням умови (14), раціональні функції

$$[\mathrm{N}/\mathrm{D}]_f(z,\omega) = \frac{P_{\mathrm{N}}(z,\omega)}{Q_{\mathrm{D}}(z,\omega)}$$

такі, що

$$Q_{\mathrm{D}}(z,\omega) = \sum_{j=0}^{N} \sum_{n=0}^{N} c_{N-j,N-n}^{(N,N)} z^j \omega^n$$

$$P_{\mathrm{N}}(z,\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} z^k \omega^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{m} c_{N-j,N-n}^{(N,N)} s_{k-j,m-n} +$$

$$+ z^N \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1-m} z^k \omega^m \sum_{j=0}^{N} \sum_{n=0}^{m} c_{j,N-n}^{(N,N)} s_{k+j,m-n} +$$

$$+ \omega^N \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1-k} z^k \omega^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{N} c_{N-j,n}^{(N,N)} s_{k-j,m+n}.$$

а коефіцієнти $c_{k,m}^{N,N}, k, m = \overline{0, N}$ задовольняють рівності

$\sum_{k=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} c_{k,m}^{(N,N)} y_{k,m} = \sum_{j=0}^{2N} \tilde{c}_j^{(2N)} \tilde{y}_j = \tilde{Y}_N$ матимуть розклади в степеневі ряди, коефіцієнти яких збігатимуться з коефіцієнтами ряду (3) для функції f для всіх

$(j,n) \in \mathrm{E} = \{(j,n) \in \square_+^2, j + n \leq 4N - 1\}$

Таким чином, функція (13) задовольняє умовам теореми 2 і ми можемо побудувати апроксимант Паде функції (11).

Висновки.

Побудована двовимірна функціолнальна послідовність, яка має узагальнене моментне зображення і визначені раціональні апроксиманти, що будуть узагальненнями одновимірних апроксимант Паде для функцій двох змінних, яка є узагальненням q-аналога експоненти e_q.

Список використаних джерел

1. *Дзядик В. К.* Про узагальнення проблеми моментів / Дзядик В. К. // Доп.АН УРСР №6, 1981. - С.8–12.
2. *Голуб А. П.* Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде / Голуб А. П. // Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. - 222 с.
3. *Бейкер Дж.* Апроксимации Паде / Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.Р // М: Мир, 1986. -502 с.
4. *Голуб А. П.* Двовимірні узагальнені моментні зображення та раціональні апроксимації функцій двох змінних / Голуб А. П., Чернецька Л. О // Укр.мат.журн. Т.65№8, 2013. - С.1035–1058.

References

1. DZYADYK V. K.,(1981) On the generalization of the problem of moments, Dop.AN URSR 6, p. 8–12. (In Ukrainian)
2. GOLUB A. P., (2002) Generalized moment representations and Pade approximants, Proceedings of the Institute of Mathematics NAS Ukraine, 222 p. (In Ukrainian)
3. BEJKER DZH. and GREJVS-MORRIS P.R., Padé Approximants (1986), 502 p.
4. GOLUB A. P. and CHERNECKA L. O., (2013) Two Dimensional Generalized Moment Representations and Rational Approximations of Functions of Two Variables, UMJ 65,8, p. 1035–1058. (In Ukrainian)

5. *Голуб А. П.* Обобщенные моментные представления базисных гипергеометрических рядов / Голуб А. П. // Укр.мат.журн. Т.41№6, 1981. - С.803-808.
6. *Голуб А. П.* Об одной разновидности обобщенных моментных представлений / Голуб А. П // Укр.мат.журн. Т.41 №11, 1989. - С.1455-1460.
7. *Голуб А. П.* Апроксиманти Паде q-аналогів експоненти та їх узагальнень, Теорія наближення функцій та суміжні питання / Голуб А. П // Збірник праць Інституту математики НАН України Т.12 №4, 2015. - С.144–153.
8. *Голуб А. П. та Тетерук І. С.* Узагальнені моментні зображення та апроксиманти типу Паде деяких базисних гіпергеометричних рядів двох змінних / Голуб А.П., Тетерук І. С. // Збірник праць Інституту математики НАН України Т.16 №2, 2019. - С.1–8.

5. GOLUB A. P., (1981) Generalized moment representations of basic hypergeometric series, UMJ 41№6, p. 803-808. (In Russian)
6. GOLUB A. P., (1989) On one kind of generalized moment representations, UMJ 41 №11 (1989), p.1455- 1460. (In Russian)
7. GOLUB A. P.,(2015) Padé approximants of q-analogues, exponents and their generalizations, Theory of approximation of functions and related questions. Proceedings of the Institute of Mathematics NAS Ukraine T.12 №4, p. 144–153. (In Ukrainian)
8. GOLUB A. P. and TETERUK I. S., (2019) Generalized instantaneous images and Pade-type approximants of some basic hypergeometric series of two variables, Proceedings of the Institute of Mathematics NAS Ukraine t.16 №2, p. 16–23 (In Ukrainian)

Надійшла до редколегії 10.08.21

КОМП’ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 517.946 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/2.14

Ш. Ніфтуллаєва, докторант

Необхідні умови для розв'язків рівнянь змішаного типу

Ланкаранський державний університет,
пр-т Генерала Ази Асланова, 50, Ланкаран,
Азербайджанська Республіка, Az 4200
e-mail: sebineniftullayeva_90@gmail.ru

Sh. Niftullayeva, doctoral student

Necessary conditions for solutions for the mixed type equations

Lankaran State University,
General Hazi Aslanov Ave., 50, Lankaran,
Azerbaijan Republic, Az 4200
e-mail: sebineniftullayeva_90@gmail.ru

Представлена робота присвячена дослідженню необхідних умов для лінійних рівнянь змішаного типу в обмеженій області на площині. Ці необхідні умови визначаються за допомогою інтегральних співвідношень і при цьому використовуються фундаментальні розв'язки таких рівнянь.

Ключові слова: змішаний тип рівняння, фундаментальний розв'язок, інтегральне співвідношення, необхідні умови.

The presented work consists of investigations of necessary conditions for linear mixed type equations in the limited area on a plane. These necessary conditions are determined by the help of integral relations and at the same time the fundamental solutions of such equations are used.

Key words: mixed type equation, fundamental solution, integral relation, necessary conditions.

Статтю представив д.ф.-м.н. Хусаінов Д.Я.

I. INTRODUCTION

The mathematical physics equations [1] - [3] and special derivative equations [4] - [7] mainly dealt with problems for three types of equations. They are equations of hyperbolic, parabolic, and elliptical types, that Cauchy problem and mixed problems were considered for the equations of hyperbolic and parabolic types, but for the equations of elliptical type Boundary value problem.

For the first time, Tricomi [8] considered an equation that was belonged to hyperbolic in one and elliptical in the leftover part of the area. Now this equation is called the Tricomi equation. This is a mixed type equation with a changeable coefficient.

Later, were also considered problems for mixed type equations with constant [9].

Finally, Hadamard considered such equation, that let this equation has both ellipticity and hyperbolicity characteristics at any point in the area, which is under consideration [10]. This is called a composite type equation.

Later, Gellersted, Bitsadze and his students [11]-[20] dealt with these problems. Eventually, they dealt with the investigation of Boundary value problems for the mixed and composite type equations [17] - [20]. These problems are considered within local Boundary conditions. We consider nonlocal problems and global (containing integrals) problems within Boundary conditions [21] - [27].

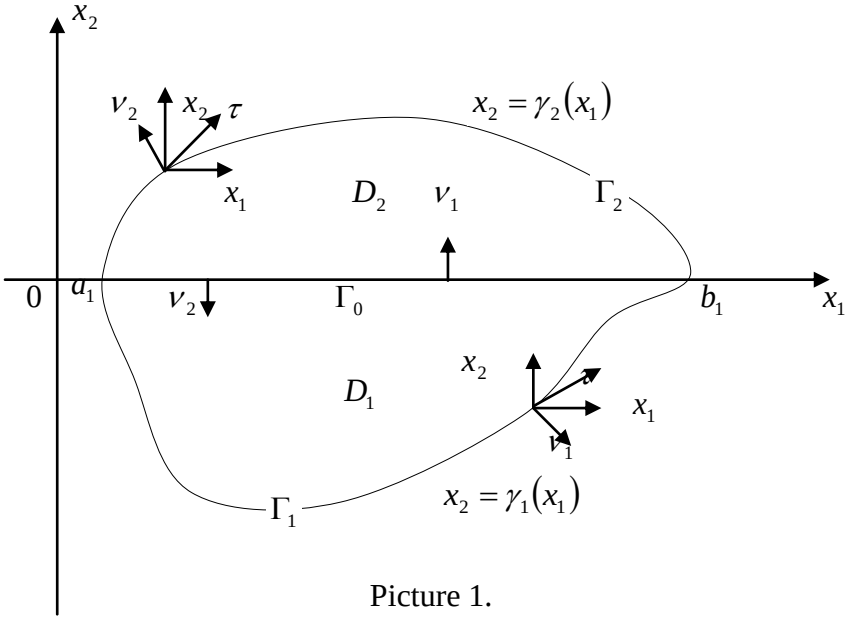
II. PROBLEM STATEMENT

Suppose $D = D_1 \cup D_2 \subset R^2$ being limited flatness area in the right semi-flatness $D_1 = \{x \in (x_1, x_2): 0 < a_1 < x_1 < b_1,\ \gamma_1(x_1) < x_2 < 0\}$, limited area located in the fourth quarter, $D_2 = \{x \in (x_1, x_2): 0 < a_1 < x_1 < b_1,\ 0 < x_2 < \gamma_2(x_1)\}$, but, limited area in the first quarter.

© Sh. Niftullaeva, 2021

Here is drawn external normal with ν_1 and of the area D_1 to the border ∂D_1, external normal with ν_2 of the area D_2 to the border ∂D_2. If equation $x_2 = \gamma_1(x_1), \quad x_1 \in [a_1, b_1]$ the lower border of the area Γ_1, D_1.

If equation $x_2 = \gamma_2(x_1), \quad x_1 \in [a_1, b_1]\, \Gamma_2$ but the upper border of the area D_2. The common border of the areas D_1 and D_2, but Γ_0, $x_2 = 0$, $x_1 \in [a_1, b_1]$, is a finite piece on the true axis. A complete description of this area was given in the picture1.



Picture 1.

Now, let to see the following equation in the D:

$$\frac{\partial^3 u_s(x)}{\partial x_1 \partial x_2^2} + i^s \frac{\partial^3 u_s(x)}{\partial x_1^2 \partial x_2} = 0,\ x = (x_1, x_2) \in D_s,\ s = 1,2, \quad (1)$$

here $i = \sqrt{-1}$, $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$,
but it is the Lyapunov line, if $s = 1$ the resulting equation, it means

$$\frac{\partial^3 u_1(x)}{\partial x_1 \partial x_2^2} + i \frac{\partial^3 u_1(x)}{\partial x_1^2 \partial x_2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2} + i \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1}\right) = 0, \quad x \in D_1, \quad (2)$$

equation, in D_1 is composite type (a mixed derivative of the Cauchy-Riemann, an elliptical type),
if $s = 2$,but

$$\frac{\partial^3 u_2(x)}{\partial x_1 \partial x_2^2} - \frac{\partial^3 u_2(x)}{\partial x_1^2 \partial x_2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_1}\right) = 0, \quad x \in D_2, \quad (3)$$

is hyperbolic equation.

If we look at the classical works, the analogue of such an equation is derived from the Tricomy equation. Therefore, equation (1) is called a mixed and composite type equation.

III. FUNDAMENTAL SOLUTIONS

Given in the Cauchy-Riemann equation [3]:

$$U(x - \xi) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)},\ x, \xi \in R^2, \quad (4)$$

for a fundamental solution of equation (2) using a fundamental solution

$$U_1(x-\xi)=-\frac{i}{2\pi}\left[x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)\right]\cdot\left\{\ln\left[x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)\right]-1\right\},$$
$$x,\xi\in R^2, \quad (5)$$

we get the statement.

For equation (3) in the same way

$$U_2(x-\xi)=\int\limits_{x_1-\xi_1}^{\frac{1}{2}[(x_2-\xi_2)+(x_1-\xi_1)]}\theta(t)\theta(x_2-\xi_2+x_1-\xi_1-t)dt,$$
$$x,\xi\in R^2, \quad (6)$$

we have received a fundamental solution.

In the above statement $\theta(t)$ - this is Heaviside's only function.

Theorem 1. The fundamental solution of the given equation (2) is in the form (5), and the fundamental solution of the equation (3) is in the form (6).

IV. MAIN APPROACHES

These approaches are obtained from the second Green formula by applying the Gauss-Ostrogradsky formula (part by part integration), after integration on the appropriate area multiplying equations (2) and (3) by their fundamental solutions (5) and (6). Then these equations (2), (3) and their fundamental solution multiplying to derivatives of (5), (6) by integrating along the appropriate areas and applying the Gauss-Ostrogradsky formula are obtained from the analog of the second Green formula. So that, in obtaining of these basic approaches part by part integration should be done in such a way that, integration on the area neither the solutions of equations nor should more than three derivatives of fundamental solutions be involved.

Two of the main approaches we have mentioned are the following:

$$\int\limits_{\partial D_1}\left\{\left[\frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_1\partial x_2}U_1(x-\xi)+u_1(x)\frac{\partial^2 U_1(x-\xi)}{\partial x_1\partial x_2}-\right.\right.$$
$$\left.-i\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1}\frac{\partial U_1(x-\xi)}{\partial x_1}\right]\cos(\nu_1,x_2)+$$
$$+\left[-\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial U_1(x-\xi)}{\partial x_2}+i\frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_1\partial x_2}U_1(x-\xi)+\right.$$
$$\left.\left.+iu_1(x)\frac{\partial^2 U_1(x-\xi)}{\partial x_1\partial x_2}\right]\cos(\nu_1,x_1)\right\}dx=$$
$$=\begin{cases}u_1(\xi), & \xi\in D_1,\\ \frac{1}{2}u_1(\xi), & \xi\in\partial D_1,\end{cases} \quad (7)$$

But now $u_2(x)$ paid by the function (3) equation and let us bring the first main approach obtained with the help of a fundamental solution (6).

$$\int\limits_{\partial D_2}\left\{\left[\frac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_1\partial x_2}U_2(x-\xi)+u_2(x)\frac{\partial^2 U_2(x-\xi)}{\partial x_1\partial x_2}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_1}\frac{\partial U_2(x-\xi)}{\partial x_1}\right]\cos(\nu_2,x_2)+$$
$$+\left[-\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial U_2(x-\xi)}{\partial x_2}-\frac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_1\partial x_2}U_2(x-\xi)-\right.$$
$$\left.\left.-u_2(x)\frac{\partial^2 U_2(x-\xi)}{\partial x_1\partial x_2}\right]\cos(\nu_2,x_1)\right\}dx=$$
$$=\begin{cases}u_2(\xi), & \xi\in D_2,\\ \frac{1}{2}u_2(\xi), & \xi\in\partial D_2,\end{cases} \quad (8)$$

Thus, each of the main approaches we have obtained consists of two parts. The first parts are the solutions of the equations (2), (3), their derivatives and the analytical statements for the linear combinations, but the second parts give the necessary conditions.

Theorem 2. In the direction of $D=D_1\cup D_2$ - x_2 convex limited flatness area, if $\partial D=\Gamma_1\cup\Gamma_2$ - is the Lyapunov line, then arbitrary solution of equation (1) pays main approaches.

V. NECESSARY CONDITIONS

At first let us give the necessary conditions, obtained from (7).

$$u_1(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{u_1(x_1,\gamma_1(x_1))\left[1-i\gamma_1'(x_1)\right]dx_1}{\gamma_1(x_1)-\gamma_1(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{u_1(x_1,0)}{-\gamma_1(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}dx_1+$$

$$+\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\left[\gamma_1\ x_1\ -\gamma_1\ \xi_1\ +i\ x_1-\xi_1\ \right]\times$$

$$\times\ \ln\left[\gamma_1\ x_1\ -\gamma_1\ \xi_1\ +i\ x_1-\xi_1\ \right]-1\ \frac{\partial^2 u_1\ x}{\partial x_1\partial x_2}\Bigg|_{x_2=\gamma_1\ x_1}\ \times$$

$$\times\left[1-i\gamma_1'\ x_1\ \right]dx_1+\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\left[\gamma_1\ \xi_1\ -i\ x_1-\xi_1\ \right]\times$$

$$\times\ \ln\left[-\gamma_1\ \xi_1\ +i\ x_1-\xi_1\ \right]-1\ \frac{\partial^2 u_1\ x}{\partial x_1\partial x_2}\Bigg|_{x_2=0}\ dx_1+$$

$$+\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\ln\left[\gamma_1\ x_1\ -\gamma_1\ \xi_1\ +i\ x_1-\xi_1\ \right]\frac{\partial u_1\ x}{\partial x_1}\Bigg|_{x_2=\gamma_1\ x_1}\ dx_1-$$

$$-\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\ln\left[-\gamma_1\ \xi_1\ +i\ x_1-\xi_1\ \right]\frac{\partial u_1\ x}{\partial x_1}\Bigg|_{x_2=0}\ dx_1+$$

$$+\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\ln\left[\gamma_1\ x_1\ -\gamma_1\ \xi_1\ +i\ x_1-\xi_1\ \right]\times$$

$$\times\frac{\partial u_1\ x}{\partial x_2}\Bigg|_{x_2=\gamma_1\ x_1}\ \gamma_1'\ x_1\ dx_1, \qquad (9)$$

$$u_1\ \xi_1,0\ =-\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u_1\ x_1,\gamma_1\ x_1}{\gamma_1\ x_1\ +i\ x_1-\xi_1}\times$$

$$\times\left[1-i\gamma_1'\ x_1\ \right]dx_1-\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u_1\ x_1,0}{x_1-\xi_1}dx_1+$$

$$+\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\left[\gamma_1\ x_1\ +i\ x_1-\xi_1\ \right]\times$$

$$\times\left\{\ln\left[\gamma_1(x_1)+i(x_1-\xi_1)\right]-1\right\}\frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_1\partial x_2}\Bigg|_{x_2=\gamma_1(x_1)}\ \times$$

$$\times\left[1-i\gamma_1'\ x_1\ \right]dx_1+\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\ x_1-\xi_1\ \times$$

$$\times\ \ln\left[i\ x_1-\xi_1\ \right]-1\ \frac{\partial^2 u_1\ x}{\partial x_1\partial x_2}\Bigg|_{x_2=0}\ dx_1+$$

$$+\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\ln\left[\gamma_1\ x_1\ +i\ x_1-\xi_1\ \right]\frac{\partial u_1\ x}{\partial x_1}\Bigg|_{x_2=\gamma_1\ x_1}\ dx_1-$$

$$-\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\ln\left[i(x_1-\xi_1)\right]\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1}\Bigg|_{x_2=0}\ dx_1+$$

$$+\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\ln\left[\gamma_1\ x_1\ +i\ x_1-\xi_1\ \right]\times$$

$$\times\frac{\partial u_1\ x}{\partial x_2}\Bigg|_{x_2=\gamma_1\ x_1}\ \gamma_1'\ x_1\ dx_1. \qquad (10)$$

In the same way in all approaches necessary conditions are separated.

Finally, as can be seen from obtained main approaches each of these statements give two necessary conditions, the first of which are conditions from obtained by integrating of equations (2) and (3), but the remaining second parts become the same as in ordinary differential equations.

These necessary conditions are the following:

$$\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\partial u_1\ \xi}{\partial\xi_2}+i\frac{\partial u_1\ \xi}{\partial\xi_1}\right)\Bigg|_{\xi_2=\gamma_1\ \xi_1}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\partial u_1\ \xi}{\partial\xi_2}+i\frac{\partial u_1\ \xi}{\partial\xi_1}\right)\Bigg|_{\xi_2=0}=0, \qquad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{\partial u_1\ \xi}{\partial\xi_2}+i\frac{\partial u_1\ \xi}{\partial\xi_1}\right)\Bigg|_{\xi_2=\gamma_1\ \xi_1}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{\partial u_1\ \xi}{\partial\xi_2}+i\frac{\partial u_1\ \xi}{\partial\xi_1}\right)\Bigg|_{\xi_2=0}=0, \qquad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\partial u_2\ \xi}{\partial\xi_2}-\frac{\partial u_2\ \xi}{\partial\xi_1}\right)\Bigg|_{\xi_2=0}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\partial u_2\ \xi}{\partial\xi_2}-\frac{\partial u_2\ \xi}{\partial\xi_1}\right)\Bigg|_{\xi_2=\gamma_2\ \xi_1}=0, \qquad (13)$$

and

$$\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{\partial u_2\ \xi}{\partial\xi_2}-\frac{\partial u_2\ \xi}{\partial\xi_1}\right)\Bigg|_{\xi_2=0}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{\partial u_2\ \xi}{\partial\xi_2}-\frac{\partial u_2\ \xi}{\partial\xi_1}\right)\Bigg|_{\xi_2=\gamma_2\ \xi_1}=0, \qquad (14)$$

The main purpose of this work is to determine all possible linearly independent necessary conditions for a given equation (1).

Theorem 3. An arbitrary solution of equation (1) within the conditions of Theorem 2 pays all the necessary conditions.

These necessary conditions are made up of a linear combination of the necessary conditions given by the main approaches.

Список використаних джерел

1. Соболев С.Л. Уравнения математической физики / С.Л.Соболев. – М.:ГИТТЛ, 1954. – 444с.

2. Михлин С.Г. Курс математической физики / С.Г. Михлин. – М.:Наука, 1968. – 576с.

3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1981. – 512 с.

4. Михайлов В. П., Дифференциальные уравнения в частных производных / В.П. Михайлов. – М.:Наука, 1976. - 392 с.

5. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И.Г. Петровский. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 400 с.

6. Берс Л. Уравнения с частными производными/ Л. Берс, Ж. Джон, М. Шехтер. – М.:Мир, 1966. – 352 с.

7. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных / С.Г. Михлин. – М.: Высшая школа, 1977. – 432 с.

8. Trikomi F. Ulteriori richerche sullequazione $yz_{xx}+z_{yy}=0$. / F.Trikomi. – Rendiconti del Cirolo Mathematico di Palermo, S 2, 1928. – P. 63-90.

9. Лаврентьев М.А. К проблеме уравнений смешанного типа / М.А. Лаврентьев, А.В. Бицадзе // Доклады АН СССР. – 1950. – Т.70, №3. – С.373-376.

10. Hadamard J. Proprites dune equation lineaire aux derivees partielles du quatriemc ordre / J. Hadamard// Tohoku math. J. – 1933. – V.37. – P.133-150.

11. Джураев Т.Д. Об одной краевой задаче для уравнения составного типа/ Т.Д. Джураев// Доклады АН Узб. ССР. – 1962. – №4. – Р.5-8.

12. Салахатдинов М.С. О некоторых корректных задач для уравнения $y^m u_{xxx}+u_{xyy}=0$. / М.С. Салахатдинов // Док. АН СССР. – 1963. – Т.150, №3. – С.492-495.

13. Gellerstedt S. Sur un probleme aux limites pour lequation $y^{2s}u_{xx}+u_{yy}=0$./ S. Gellerstedt. – Arkiev f.M.A.O.F., 25 A. – 1936. – T.10. – P.1-12.

14. Бицадзе А.В. К проблеме уравнений смещанного типа/ А.В.Бицадзе. – Труды Матем. Ин-та АН СССР, 1953, т.41. – 340 с.

15. Бицадзе А.В. О корректной постановке задач для уравнений смешанного типа в многомерных областях/ А.В.Бицадзе, А.М.Нахушев// Докл.АН СССР. – 1972. – Т.205, №1. – С.84-87.

16. Бицадзе А.В. К теории уравнения смещанного типа в многомерных областях/ А.В.Бицадзе, А.М.Нахушев// ДУ. – 1974. – Т.10., №12. – С.131-140.

References

1. СОБОЛЕВ, С.Л. (1954) *Уравнения математической физики*, ГИТТЛ, Москва 1954, 444 с.

2. МИХЛИН, С.Г. (1968) *Курс математической физики*, Наука, Москва, 576 с.

3. ВЛАДИМИРОВ, В.С. (1981) *Уравнения математической физики*, М.: Наука, 512 с.

4. МИХАЙЛОВ, В.П. (1976) *Дифференциальные уравнения в частных производных*, М.: Наука, 392 с.

5. ПЕТРОВСКИЙ И.Г. (1961) *Лекции об уравнениях с частными производными*, М.: ГИФМЛ, 400 с.

6. БЕРС, Л., ДЖОН, Ж., ШЕХТЕР, М. (1962) *Уравнения с частными производными*, М.: Мир, 352 с.

7. МИХЛИН, С.Г. (1977) *Линейные уравнения в частных производных*, М.:Высшая школа, 432с.

8. TRIKOMI, F., (1928) "Ulteriori richerche sullequazione $yz_{xx}+z_{yy}=0$". *Rendiconti del Cirolo Mathematico di Palermo*, S.2, p.63-90.

9. ЛАВРЕНТЬЕВ, М.А., БИЦАДЗЕ, А.В. (1950) "К проблеме уравнений смешанного типа", *Доклады АН СССР*, т.70, №3, с.373-376.

10. HADAMARD, J. (1933) "Proprites dune equation lineaire aux derivees partielles du quatriemc ordre", *The Tohoku math. J.,* v.37, p.133-150.

11. ДЖУРАЕВ, Т.Д. (1962) "Об одной краевой задаче для уравнения составного типа", *Доклады АН Узб. ССР.*, №4, с. 5-8.

12. САЛАХАТДИНОВ, М.С. (1963) "О некоторых корректных задач для уравнения $y^m u_{xxx}+u_{xyy}=0$", *Доклады АН СССР*, т.150, №3, с.492-495.

13. GELLERSTEDT, S. (1936) "Sur un probleme aux limites pour lequation $y^{2s}u_{xx}+u_{yy}=0$", *Arkiev f.M.A.O.F.*, 25 A, t.10, p.1-12.

14. БИЦАДЗЕ, А.В. (1953) "К проблеме уравнений смещанного типа", *Труды Матем. Инта АН СССР*, т.41, 340 с.

15. БИЦАДЗЕ, А.В., НАХУШЕВ, А.М. (1972) "О корректной постановке задач для уравнений смешанного типа в многомерных областях", *Докл.АНСССР,* т.205, №1, с.84-87.

16. БИЦАДЗЕ, А.В., НАХУШЕВ, А.М. (1974) "К теории уравнения смещанного типа в многомерных областях", ДУ, т.10., №12, с.131-140.

17. БИЦАДЗЕ, А.В., САЛАХАТДИНОВ, М.С. (1961) "К теории уравнения смешанно-составного типа", *Сиб.мат.жур.*, т.II, №1, с.36-49.

17. Бицадзе А.В. К теории уравнения смешанно-составного типа/ А.В.Бицадзе, М.С. Салахатдинов// Сиб.мат.жур. – 1961. – Т.II, №1. – С.36-49.

18. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов/Т.Д.Джураев. –Ташкент.ФАН,1979. – 263с.

19. Джураев Т.Д. О некоторых краевых задачах для уравнения смешанно-составного типа/ Т.Д. Джураев// Сиб.мат.ж. – 1963. – Т.IV, №4. – С. 52-61.

20. Бицадзе А.В. Об уравнениях смешанно-составного типа /А.В.Бицадзе. – В сб. "Некоторые проблемы математики и механики (к 60- летию акад. М.Л.Лаврентьева)", Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1961. – 243 с.

21. Алиев Н.А. Задача смешанного типа для уравнения первого порядка / Н.А. Алиев, Ф.О.Мамедов // Изв.АН Азерб.ССР. Сер. ФТМН. – 1983. – №6. – С.110-113.

22. Aliev N. Sufficient conditions for reduction of the BYP including a mixed PDE with non-lokal boundary conditions to Fredholm inteqral equations / N.Aliev, M. Jahanshahi // INT. J. Math. Educ. Sci. Technol. – 1997. – V.28, №3. – C.419-425.

23. Aliev N.A. Investigation of solutions of boundary value problems for a composite type equation with non-lokal boundary conditions/ N.A.Aliev, A.M.Aliev // USA, arxiv,0807.1697 v.1. (math.AP) 10June, 2008. – P.1-6.

24. Delshad Gharehgheshlaghi A.Y., Aliev N.A. On Fredholm property of boundary value problems for a composite type model equation with general boundary conditions/ //Int.J.of Comp. Math, 2011. – P.124-135.

25. Delshad Gharehgheslaghi A. General boundary value problem for the third order linear differential equation of composite type / A.Delshad Gharehgheslaghi, N. Aliyev // J. of Math.Phys., Analysis, Geometry, Kharkov, Ukraine. – 2012. – V.8, N2. – P.1-16.

26. Aliyev N. Investigation of the solution of non-local and global boundary value problem for mixed type equations // N. Aliyev, N. Ibrahimov, S. Niftullayeva // Scientific news, Natural sciences series Lankaran State University. – 2016. – P. 3-13.

27. Aliyev N. Investigation of the boundary problem for thecomposite type equation with boundarycondition involving non-local and global terms / N. Aliyev, N. Ibrahimov, Sh. Niftullayeva// Bulletin of Taras Shevchenko National university of Kyiv, Series Phisics&Mathematics. – 2017. – №1. – P.27-34.

18. ДЖУРАЕВ, Т.Д. (1979) *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов*, Ташкент, ФАН, 263 с.

19. ДЖУРАЕВ, Т.Д. (1963) "О некоторых краевых задачах для уравнения смешанно-составного типа", *Сиб.мат.ж.*, т.IV, №4, с. 52-61.

20. БИЦАДЗЕ, А.В. (1961) "Об уравнения смешанно-составного типа", в сб. "*Некоторые проблемы математики и механики* (к 60- летию акад. М.Л.Лаврентьева)", изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 243 с.

21. АЛИЕВ, Н.А., МАМЕДОВ, Ф.О. (1983) "Задача смешанного типа для уравнения первого порядка", *Изв.АН Азерб.ССР*, Сер.ФТМН, №6, с.110-113.

22. ALIEV, N., JAHANSHAHI, M. (1997) "Sufficient conditions for reduction of the BYP including a mixed PDE with non-lokal boundary conditions to Fredholm inteqral equations", *Int. J.Math.Educ.Sci.Technol*., v.28, №3, p.419-425.

23. ALIEV, N.A., ALIEV, A.M. (2008) "Investigation of solutions of boundary value problems for a composite type equation with non-lokal boundary conditions", USA, arxiv,0807.1697 v.1. (math.AP) 10Jne, 2008, p.1-6.

24. DELSHAD GHAREHGHESHLAGHI A.Y., ALIEV N.A. (2011) "On Fredholm property of boundary value problems for a composite type model equation with general boundary conditions", *Int. J. of Comp.Math*, p.124-135.

25. DELSHAD GHAREHGHESLAGHI, A., ALIYEV, N. (2012) "General Boundary Value Problem for the Third Order Linear Differential Equation of composite Type", J.*of Math.Phys., Analysis, Geometry*, Kharkov, Ukraine, v.8, N:2, p. 1-16.

26. ALIYEV, N., IBRAHIMOV, N., NIFTULLAYEVA, S. (2016) "Investigation of the solution of non-local and global boundary value problem for mixed type equations", *Scientific news, Natural sciences series Lankaran State University*, p. 3- 13.

27. ALIYEV, N., IBRAHIMOV, N., NIFTULLAYEVA, SH. (2017) "Investigation of the boundary problem for thecomposite type equation with boundarycondition involving non-local and global terms", *Bulletin of Taras Shevchenko National university of Kyiv, Series Phisics&Mathematics*, №1, p.27-34.

Надійшла до редколегії 19.05.2019

https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/2.15

УДК 519.81

Д.І. Симонов[1], аспірант

D.I. Symonov[1], PhD Student.

Алгоритм визначення оптимального потоку в ланцюгах постачання з урахуванням багатокритеріальних умов та стохастичності процесів

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 03187, Україна, м. Київ, пр-т Академіка Глушкова, 40
e-mail: denys.symonov@gmail.com

Algorithm for determining the optimal flow in Supply Chains, considering multi-criteria conditions and stochastic processes

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 03187, Ukraine, Kyiv, Academician Glushkov Avenue, 40
e-mail: denys.symonov@gmail.com

У роботі розглядається алгоритм розрахунку оптимального значення потоку в ланцюгах постачання з урахуванням вимог та сподівань ключових зацікавлених сторін процесу постачання. Алгоритм передбачає пошук балансу між «вимогами» та «очікуваннями» за допомогою математичного моделювання багатокритеріальної задачі для кожної сторони процесу постачання. Отримані параметри розрахунків багатокритеріальних задач пропонується використовувати в якості «вхідних» даних для ітераційного алгоритму пошуку оптимального значення потоку. Пропонована модель дозволяє врахувати імовірнісні коливання в процесах за допомогою використання стохастичного програмування, та передбачає можливість розглядати сторонам процесу поставки альтернативні пропозиції перш ніж формулювати обов'язки за контрактом, тобто ґрунтуючись на залишкових можливостях після обрання найкращої альтернативи.

Ключові слова: потік, ланцюг постачання, граф ланцюга постачання, багатокритеріальна задача, стохастичне програмування, алгоритм пошуку максимального потоку в ланцюгу постачання.

One of the main criteria for planning and evaluating supply chains is the indicator of the flow capacity, which affects the structure of the supply graph, terms of supply, risks, opportunities and the need to differentiate supply channels. The paper analyse an algorithm for calculating the optimal value of the flow in supply chains, taking into account the requirements and expectations of key stakeholders in the supply process. The algorithm provides for finding a balance between "requirements" and "expectations" by mathematical modelling of a multicriteria problem for each side of the supply process. It proposed to use the obtained parameters for calculating multicriteria problems as "input" data for an iterative algorithm for finding the optimal flow value. The proposed model allows one to take into account probabilistic fluctuations in processes by using stochastic programming. The model allows the parties to the procurement process to consider alternative proposals before the formation of contractual obligations, that is, based on residual capacity after choosing the best alternative.

Key Words: flow, Supply Chain, Supply Chain graph, multicriteria problem, stochastic programming, algorithm for finding the maximum flow in the Supply Chain.

Вступ

Організації, функціонування яких пов'язано з виробництвом товарів і послуг, мають необхідність концентрувати свою увагу на якість ланцюгів постачання. Ефективність функціонування ланцюгів впливає на конкурентоспроможність організації та перспективу розвитку ринків споживання вироблених ними товарів і послуг. Контрагенти в рамках ланцюга постачання виконують такі завдання, як: проектування характеристик продукту або послуги; закупівля сировини та матеріалів; обробка матеріалів та виробництво продукції; розподіл продукції та гарантійне

Д. І. Симонов, 2021

обслуговування [1]. Отже, ланцюг постачання об'єднує кілька організацій через скоординовані висхідні і низхідні потоки матеріалів, інформації та фінансів таким чином, щоб задовольнити потреби контрагентів і споживачів [2].

Потік в ланцюгах постачання

Одними з основних критеріїв для планування і оцінки ланцюгів постачання є показник пропускної здатності потоку.

Потік – це вимірний показник руху матеріальних і не матеріальних цінностей від постачальника до споживача, виражений в умовних одиницях виміру (штуки, послуги, метри, кілограми, долари, обсяг інформації та інш.). Успіх функціонування організації залежить від її здатності інтегрувати і координувати складну мережу ділових відносин між партнерами по ланцюгу постачання [3].

Для моделювання процесу аналізу пропускної здатності потоку необхідно виконати декомпозицію ланцюгів постачання за видами ресурсів (конкретного товару або послуги). В межах цієї статті не передбачено детальний аналіз впливу зриву графіку постачання одного товару або послуги на необхідність коригування програми виробництва та перегляд програми постачання інших товарів, необхідних для виробництва готової продукції або послуги.

На кожному етапі ланцюга постачання необхідно фіксувати параметри змінних (як фактичні, так і прогнозні значення), щоб мати можливість використовувати їх значення для виявлення обмежень в математичних моделях існуючої системи постачання, та мати можливість виявити стохастичність процесів. Кількісні дані не завжди можуть бути легко доступні, тому для планування і аналізу може бути досить описової інформації або альтернативних даних [4].

В межах ланцюгів постачання прагнуть інтегрувати всі необхідні процеси для підвищення ефективності і результативності потоків матеріалів, інформації та активів [5]. Сучасні умови глобалізації сприяють поступовому глобальному розподілу виробничо-збутових операцій, між різними країнами. Ланцюги будуються за принципом спеціалізації, виробничої орієнтації і доступності сировинної бази в кожній конкретній країні [6]. Сучасні організації в значній мірі залежать від широкого спектру продуктів і послуг, вироблених на глобальному конкурентному ринку, для організації власної діяльності [7]. Мережі поставок зазвичай пов'язані з іншими мережами, в тому числі покупців, постачальників, продавців, дистриб'юторів, роздрібних торговців, транспортних компаній та інших посередників, що вимагає використовувати інструменти для аналізу альтернатив.

Ланцюги постачання мають відповідати за стабільність потоку матеріалів, інформації та фінансових елементів, необхідних у виробничому процесі [8]. Це вимагає аналізувати багатовимірні параметри, що впливають на кінцевий результат. Ланцюг постачання є інтегрованою системою, яка синхронізує ряд взаємопов'язаних процесів, з метою [9]:

- створити попит на продукти або послуги;
- купувати сировину, матеріали та інші ресурси;
- перетворити придбану сировину і матеріали в готову продукцію;
- підвищити цінність продуктів, що виробляються;
- поширити вироблені продукти роздрібним торговцям або покупцям;
- сприяти обміну інформацією між різними ланками ланцюга.

В якості двох основних процесів організації можна виділити управління вхідним потоком, коли організація виступає в ролі покупця, і управління вихідним потоком, коли організація виступає в якості продавця (рисунок 1). Уздовж ланцюга постачання може бути кілька зацікавлених сторін: декілька постачальників, виробників, дистриб'юторів, постачальників логістичних послуг, регулюючих органів, роздрібних продавців та клієнтів.

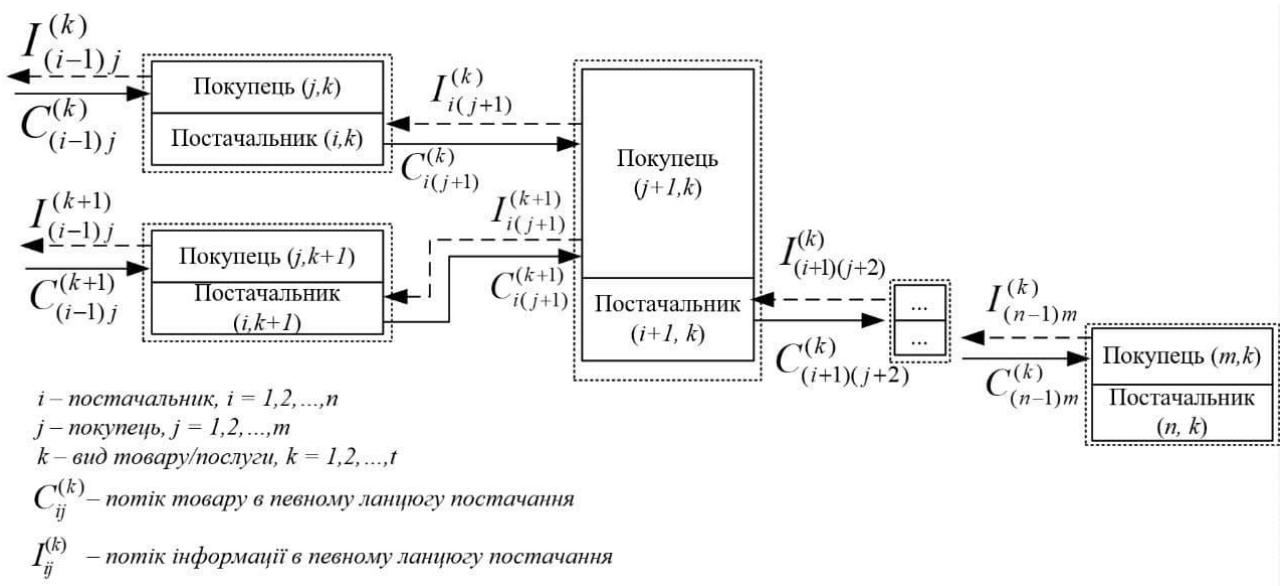


Рис.1 Розподіл потоків всередині ланцюга постачання

Як можна побачити на рисунку 1, кожна ланка ланцюга може мати кілька вхідних і кілька вихідних потоків, що впливає на пропускну здатність потоку з конкретним контрагентом в ланцюзі. Потоки всередині ланцюга постачання включають в себе всі логістичні операції, пов'язані з обслуговуванням клієнтів і дії, пов'язані з обслуговуванням контрактів: прийом і обробка замовлень, планування поставок, управління запасами, зберігання, ціноутворення, комунікації з постачальниками і споживачами, повернення товару, гарантійне обслуговування та інше. Визначення пропускної здатності потоку є вкрай важливим для будь-якої організації, що обумовлено необхідністю наявності інформації про доступність ресурсу, його характеристик та умов постачання. Наприклад, через наявність високого рівня пропускної здатності потоку матеріали певного типу часто можливо придбати великими партіями зі значною економією, а стандартизація операцій дозволяє знизити час обробки, але це може негативно вплинути на час обробки запасів, що вплине на обсяг складських запасів і пов'язані з цим витрати [10]. З іншого боку, зростання факторів невизначеності (виникнення форс-мажорних обставин) в ланцюгах з низьким запасом пропускної здатності з боку постачальника тягне до виникнення зривів в програмах виробництва по всьому ланцюгу. Прикладом є ситуація з дефіцитом чіпів на ринку автомобілебудування, яка виникла літом 2021 року [11].

Постановка задачі визначення потоку

Для визначення максимальної продуктивності ланцюга постачання, тобто оптимального потоку, який задовольняє обидві зацікавлені сторони (постачальник і покупець) та для спрощення розуміння завдання представимо ланку ланцюга постачання у вигляді графа з одним джерелом (з боку постачальника) і з одним стоком (з боку покупця) [12].

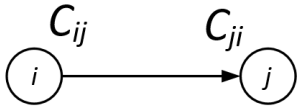


Рис.2 Фрагмент графа ланцюга постачання

На рисунку 2 представлена прямий зв'язок від *i* (постачальник) до *j* (покупець), де в якості параметра C_{ij} - пропускна здатність генерувати потік поставки товару, C_{ji} - пропускна здатність приймати потік товарів.

Перш ніж переходити процесу пошуку максимального потоку на певній ділянці ланцюга поставок необхідно визначити C_{ij} і C_{ji}. Кожен з компонентів ланцюга балансує в системі вимог та обмежень, що зводить задачу

пошуку максимального потоку на певній ділянці до багатокритеріальної задачі аналізу альтернатив та прийняття рішень. Отже, для кожної ланки ланцюга постачання (мається на увазі детермінований процес постачання між постачальником та покупцем) необхідно сформулювати математичну модель багатокритеріальної задачі прийняття рішень.

Визначимо цільову функцію сукупності вимог:

$$C_{ij} = \begin{cases} f_i(a) \to max \\ f_i(a) \to min \end{cases}, i = \overline{1,n} \qquad (1)$$

або

$$C_{ji} = \begin{cases} f_i(a) \to max \\ f_i(a) \to min \end{cases}, i = \overline{1,n} \qquad (2)$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} A_{ij}x_i = B_j \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,n} \end{cases} \qquad (3)$$

де $f_i(a)$ – функція і-й умови, за якою здійснюється оцінка альтернативи.

Для розв'язку багатокритеріальної задачі можливо використовувати метод обмежень. Функцій нормованих відносних витрат ω_i матимуть наступний вигляд [13]:

- для цільової функції, що необхідно максимізувати:

$$\omega_i(f_i(x)) = \frac{f_i^0 - f_i(x)}{f_i^0 - f_{i(\min)}};\ i = \overline{1,n} \qquad (4)$$

- для цільової функції, що необхідно мінімізувати:

$$\omega_i(f_i(x)) = \frac{f_i(x) - f_i^0}{f_{i(\max)} - f_i^0};\ i = \overline{1,n} \qquad (5)$$

де f_i^0 – оптимальне значення і-ї цільової функції, $f_{i(\min)}$ – найменше значення, що максимізується, $f_{i(\max)}$ – найбільше значення, що мінімізується.

Відповідно, компромісним розв'язкам на певній ділянці ланцюга постачання буде ефективний розв'язок для x_i, що відповідає умовам:

$$k_1\omega_1 = k_2\omega_2 = \ldots = k_n\omega_n$$

де k_i – вектор (коефіцієнт) переваг рішення, до якого існують наступні обмеження:

$$k = \{k_i: k_i > 0, i = \overline{1,n}, \sum_{i=1}^{n} k_i = 1\} \qquad (5)$$

Отже, отримає рішення має бути оптимальним балансом вимог та обмежень, розраховане для кожної сторони процесу постачання, та бути «вхідним» параметром для пошуку контрагентів і прийняттю рішення про поставку.

Стохастичність обмежень при пошуку оптимального значення потоку

Вважаючи що властивості попиту та пропозиції мають тенденцію до волатильності, тобто змінність характеристик в межах коридору параметрів, то бажаним є використання стохастичного програмування для пошуку значень змінних коефіцієнтів рівнянь обмежень математичної моделі.

Розглянимо процес моделювання математичної моделі обмежень в межах однієї з цільових функції загальної задачі оптимізації ланцюга постачання з позиції покупця (1). Необхідно відмітити, що математична задача зі сторони постачальника (продавця) буде мати ідентичні процеси, але з урахування індивідуальних умов постачальника. Тобто розглянутий метод формування математичної моделі буде мати загальний характер як для покупця, так і для постачальника.

Отже, цільова функція:

$$f_i(\alpha_i) \to max$$

при обмеженнях:

$$P\{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i\} \geq \alpha_i, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n} \qquad (6)$$
$$x_{ij} \geq 0$$

де α_i – імовірність виконання, встановлюється в межах не менш ніж 1-α_i, та $\{\alpha_i | \ 0 \leq \alpha_i \leq 1\}$.

Випадкова величина a_{ij} має нормальний розподіл [14]. Введемо додаткову змінну y_i,

яка, відповідно, також буде мати нормальний розподіл.

$$y_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j; \quad (7)$$

Математичне сподівання буде:

$$\mu_i\{y_i\} = \sum_{j=1}^{n} \mu\{a_{ij}\} x_j; \quad (8)$$

Дисперсія становить:

$$\sigma_i^2\{y_i\} = \sum_{j=1}^{n} \sigma^2\{a_{ij}\} x_j^2; \quad (9)$$

Відповідно, випадкова величина y_i має наступні властивості:

$$y_i \in N\left(x_j; \mu_i\{y_i\}, \sigma_i^2\{y_i\}\right) \quad (10)$$

Необхідні умови (6) можливо записати в наступному вигляді:

$$P\{y_i \le b_i\} \ge \alpha_i; \quad (10)$$

Вважаючи, що функція нормального розподілу становить [15]:

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt; \quad (11)$$

отримаємо:

$$P\{y_i \le b_i\} = \Phi\left\{\frac{b_i - \mu_i(y_i)}{\sqrt{\sigma_i(y_i)}}\right\}; \quad (12)$$

де Ф – функція розподілу стандартного нормального розподілу.

Звідси:

$$\frac{b_i - \mu_i(y_i)}{\sqrt{\sigma_i(y_i)}} \ge 1 - \alpha_i; \quad (13)$$

Для зручності розрахунків введемо додаткову змінну α_0, яка дорівнює:

$$\alpha_0 = 1 - \alpha_i; \quad (14)$$

В результаті перетворень отримаємо наступний вигляд детермінованого нелінійного обмеження:

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_i\{y_i\} + \Phi(\alpha_0) \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_i\{y_i\}} \le b_i; \quad (15)$$

або,

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_i\{a_{ij}\} x_j + \Phi(\alpha_0) \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_i^2\{a_{ij}\} x_j^2} \le b_i \quad (16)$$

Ґрунтуючись на вище наведеному, зведемо математичну модель очікувань зацікавленої сторони (певного ланцюга) незалежно від її ролі в процесі постачання.

Цільова функція:

$$C_{ij} = \begin{cases} f_i(a) \to max \\ f_i(a) \to min \end{cases}, i = \overline{1,n}$$

при обмеженнях:

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_i\{a_{ij}\} x_j + \Phi(\alpha_0) \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_i^2\{a_{ij}\} x_j^2} \le b_i,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ i = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,m},$$

$$x_{ij} \ge 0.$$

За допомогою рішення багатокритеріальної задачі, отримаємо інформацію про необхідні властивості параметрів контракту на постачання товару або послуг. Цю інформацію використовують для пошуку постачальника, то розрахунку максимально можливого потоку постачання по контракту. Параметри, отримані на даному етапі також являють собою обмеження для вибору альтернатив каналів постачання.

Алгоритм пошуку максимального потоку в ланцюгу постачання

Виконавши розрахунки цільових функцій обох зацікавлених сторін в певної ланці ланцюга постачання (рисунок 2), та отримавши значення C_{ij} та C_{ji}, переходимо до пошуку максимального потоку в певному напрямку. На рівень (потужність) потоку впливає наявність альтернативного попиту та пропозиції, що впливає на кількість конкурентних ланок в проектованому графі.

На рівень складності графа також впливає кількість проміжних ланок у ланцюгу постачання від i до j.

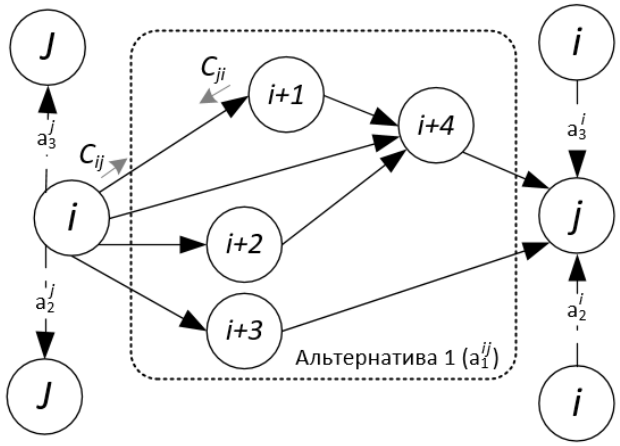


Рис.3 – Граф ланцюга постачання

На рисунку 3 наведено узагальнену схему ланцюга постачання де $i+n$ – це певна ланка в ланцюгу постачання (склад, посередник, виконавець послуг та інше), a_n^i – існуючі альтернативи постачальника, a_n^j – існуючі альтернативи покупця, C_{ij} – об'єм потоку від постачальника до покупця на певній ланці ланцюга постачання, C_{ji} – наявність резерву для постачання по певній ланці ланцюга постачання.

Функціонування потоку передбачає наявності умови зацікавленості як постачальника, так і покупця в наявності руху товару або послуги за маршрутом в обсязі, що задовольняє умови певної альтернативи.

Пошук максимального потоку передбачає наявність ітераційного процесу пошуку напрямків переміщення, що задовольняють умові: $C_{ij} \geq 0$. Сумарний обсяг товару (послуги) від постачальника до покупця може бути переміщено як за допомогою одного напрямку потоку, так і розподіллено між альтернативними потоками в залежності від параметрів мережі.

Розрахунок напрямку потоку виконується з урахуванням залишкової пропускної здатності ланки, яка змінюється в момент надходження товару (послуги) в цю ланку, в тому числі з альтернативних шляхів.

Задачу пошуку максимального потоку можливо вирішити за допомогою динамічного програмування. Для рішення задачі призначимо маркер вузла $\left[a_n^{ij}; p_j\right]$, де a_n^{ij} – напрямок альтернативного потоку от вузла i до вузла j; p_j – величина потоку от вузла i до вузла j, j – номер вузла покупця в графі ланцюга постачання (визначається, як $j = i + n$, де n – кількість ланок в ланцюгу).

Алгоритм пошуку рішення передбачає виконання наступних етапів [12]:

1. Визначаємо пропускну властивість для кожної ланки ланцюга постачання для всіх ребер $\left[a_n^{i,i+1}; p_j\right]$, зробимо певне припущення, то для зручності демонстрації роботи алгоритму приймемо позначення на проміжних ланках ланцюга постачання $a_n^{i,i+1} = a_n^{i,j}$. Для початкового вузла $\left[a_n^i; p_j\right]$ зробимо припущення, що аналізуємо першу альтернативу постачання, тобто n = 1, та призначимо метку $[a_1^0; \infty, -]$. Переходимо до наступного етапу.

2. Формуємо множину альтернативних переходів з поточного вузла в бік вузла j (покупця), яку визначимо як M_i. Необхідна умова і достатня умова: $C_{ij} \geq 0, \forall j \in M_i$. Якщо на даному етапі $M_i \neq \emptyset$, то переходимо до наступного етапу. Якщо $M_i = \emptyset$, то третій етап пропускаємо, та переходимо до етапу чотири.

3. Аналізуємо множину альтернативних переходів M_i з метою визначення $v = i + n$, вузла для якого виконується умова:

$$C_{ij}^v = \max_{j \in M_i}\{C_{ij}\}; \qquad (17)$$

Якщо обрано в якості найкращої альтернативи вузол з індексом стоку (тобто індекс покупця, остання ланка в ланцюгу постачання), то алгоритм передбачає перехід на п'ятий етап, в іншому випадку виконується повернення на другий етап.

4. Операція повернення. Якщо $i = 0$, то рішення немає і виконання алгоритму необхідно перервати. В іншому випадку, повертаємося на попередній вузол, в якому було знайдено найкраще рішення на попередньої ітерації алгоритму, та починаємо виконання алгоритму з другого етапу,

попередньо виключивши з альтернатив ланку, з якої виконується операція повернення.

5. Визначимо оптимальний маршрут за наявністю максимального потоку. Для цього визначимо множину $V_p = \{1, v_1, v_2, \dots, n\}$, елементи якої позначають компоненти знайденого оптимального маршруту від постачальника (вузол *i*) до покупця (вузол *j*).

Таким чином, максимальний потік, що проходить шляхом компонентів множини V_p, можливо розрахувати за допомогою формули:

$$F_p = min\{p_1, p_2, \dots, p_n\}; \qquad (18)$$

Залишкові (профіцитні) пропускні можливості кожної ланки ланцюга постачання, тобто ребер, які складають оптимальний шлях (множина V_p), зменшуються на розмір F_p в напрямку переміщення потоку та збільшуються на розмір F_p в протилежному напрямку.

Таким чином, для ребра графа $\left[a_n^{i,i+1}; p_j\right]$, який є складовою частиною оптимального шляху (множина V_p), поточні залишкові пропускні можливості змінюються наступним чином:

$$\begin{cases} (1): \left(C_{ij} - F_p, C_{ji} + F_p\right) \\ (2): \left(C_{ij} + F_p, C_{ji} - F_p\right) \end{cases}; \qquad (19)$$

де (1) – якщо потік в напрямку від *i* до *j*, (2) – якщо потік в напрямку від *j* до *i*.

Відновлюємо всі ланки, що були видалені на четвертому етапі, та робимо припущення, що $i = 0$ і переходимо до другого етапу нової ітерації.

6. Формулювання оптимального рішення.

Максимальний потік розраховується за формулою:

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_m; \qquad (20)$$

Якщо мати значення початкових параметрів кожного ребра (C_{ij}, C_{ji}) та значень після перетворень (кінцевих розрахунків) - (C'_{ij},C'_{ji}), то можливо розрахувати пропускну властивість певної ланки (ребра). Алгоритм розрахунку передбачає визначення значення (a_1, a_2)=$(C_{ij} - C'_{ij},\ C_{ji} - C'_{ji})$. Якщо $a_1 < 0$, то потік через ребро дорівнює a_1. Якщо $a_2 > 0$, то потік в зворотному напрямку через ребро дорівнює a_2.

Отже, після проходження декілька ітерацій по алгоритму можливо отримати оптимальний потік з максимальним значенням пропускної здатності.

Задачу пошуку максимального потоку також можливо звести до багатокритеріального варіанту, за допомогою якого при обранні шляху, що дозволяє максимізувати потік, враховувати додаткові параметри, які потрібно максимізувати, або мінімізувати.

Висновки

В роботі розглянуто алгоритм ітераційного процесу пошуку оптимального потоку в ланцюгах постачання з урахуванням багатокритеріальних умов та стохастичності процесів. Запропонований алгоритм дозволяє мінімізувати ризики зриву контрактних зобов'язань за рахунок попереднього аналізу інтересів зацікавлених сторін – учасників процесу постачання, їх потреб і можливостей, та аналізу ризиків.

Список використаних джерел

1. SU Y-F, YANG C. (2010) Why are enterprise resource planning systems indispensable to supply chain management? *European Journal of Operational Research.* 203(1), p.81-94.

2. STADTLER H. (2005) Supply chain management and advanced planning—basics, overview and challenges. *European Journal of Operational Research.* 163(3), p.575-588.

3. DOUGLAS M LAMBERT, MARTHA C COOPER. (2000) Issues in supply chain management. ndustrial marketing management. *Elsevier*. 29(1), p. 65-83.

4. ALAN RUSHTON, PHIL CROUCHER and PETER BAKER. (2014) *The Handbook of Logistics and Distribution Management: Understanding the Supply Chain*. 5th Ed. London: Kogan Page Ltd.

5. COSTINOT, A., J. VOGEL, and S. WANG. (2013) An Elementary Theory of Global Supply Chains. *The Review of Economic Studies*, 80(1), p.109-144.

6. SUKATI I, HAMID A.B., BAHARUN R., and YUSOFF R.M. (2012) The study of supply chain management strategy and practices on supply chain performance. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*. 40(1), p.225-233.

7. JACK MEREDITH, SCOTT SHAFER. (2016) *Operations and Supply Chain Management for MBAs*. 6th Ed. Hoboken: John Wiley & Sons

8. JORGE LUIS GARCÍA-ALCARAZ, CUAUHTÉMOC SÁNCHEZ-RAMÍREZ, LILIANA AVELAR-SOSA, and GINER ALOR-HERNÁNDEZ. (2020). *Techniques, Tools and Methodologies Applied to Global Supply Chain Ecosystems*. Cham: Springer International Publishing.

9. HOKEY MIN. (2015) *Essentials of Supply Chain Management, The: New Business Concepts and Applications.* Hoboken: Pearson FT Press.

10. ADEBISI ADEWOLE, JOHN J. STRUTHERS. (2019). *Logistics and Global Value Chains in Africa. The Impact on Trade and Development*. Cham: Palgrave Macmillan.

11. IDC. (2021) *The PC Shipment Wave Continues as Volumes Are Forecast to Grow 18.2% in 2021 with a 5-Year CAGR of 2.5%, According to IDC*. [Online] Available from: https://www.idc.com/getdoc.jsp?containerId=prUS47523121&utm_medium=rss_feed&utm_source=alert&utm_campaign=rss_syndication. [Accessed: 19th September 2021].

12. HAMDY A. TAHA. (2017) *Operations Research: An Introduction*. 10th Ed. NJ: Pearson Education Inc.

13. *Зайченко О.Ю., Зайченко Ю.П.* Дослідження операцій. Збірник задач. -Київ: Видавничий Дім «Слово», 2007. - 472 с.

14. HOSANG JUNG, FENGSHAN FRANK CHEN, AND BONGJU JEONG. (2007) *Trends in Supply Chain Design and Management.* Berlin: Springer.

15. *Кобзарь А.И.* «Прикладная матиматическая статистика. Для инженеров и научных работников». - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2006. - 816 с.

Надійшла до редакції 20.07.2021

УДК 519.6 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/2.16

Кузьменко О.В.[1], д.е.н., проф.
Койбічук В.В.[2], к.е.н., доц.
Яценко В.В.[3], к.т.н., доц.
Гриценко К.Г.[4], к.т.н., доц.

Дослідження світових тенденцій розвитку кіберспорту за допомогою методів Data Mining

[1] Сумський державний університет, 40000, м. Суми, вул. Римського-Корсакова, 2,
e-mail: o.kuzmenko@biem.sumdu.edu.ua
[2] Сумський державний університет, 40000, м. Суми, вул. Римського-Корсакова, 2,,
e-mail: v.koibichuk@uabs.sumdu.edu.ua
[3] Сумський державний університет, 40000, м. Суми, вул. Римського-Корсакова, 2,
e-mail: v.yatsenko@uabs.sumdu.edu.ua
[4]Сумський державний університет, 40000, м. Суми, вул. Римського-Корсакова, 2,,
e-mail: k.hrytsenko@uabs.sumdu.edu.ua

O.V. Kuzmenko[1], D.Sc., Prof.,
V.V. Koibichuk[2], Ph.D, Associate Prof.
V.V. Yatsenko[3], Ph.D, Associate Prof.
K.G. Hrytsenko[4], Ph.D, Associate Prof.

Research of e-sports development world tendencies on the base of Data Mining methods

[1] Sumy State University, 40000, Sumy, Rimsky-Korsakov str., 1,
e-mail: o.kuzmenko@biem.sumdu.edu.ua
[2] Sumy State University, 40000, Sumy, Rimsky-Korsakov str., 1,
e-mail: v.koibichuk@uabs.sumdu.edu.ua
[3] Sumy State University, 40000, Sumy, Rimsky-Korsakov str., 1,
e-mail: v.yatsenko@uabs.sumdu.edu.ua
[4] Sumy State University, 40000, Sumy, Rimsky-Korsakov str., 1,
e-mail: k.hrytsenko@uabs.sumdu.edu.ua

У статті проведено аналіз сучасного стану та тенденцій розвитку кіберспорту у світі за допомогою дослідження часового ряду кількості запитів інтернет-користувачів, отриманого шляхом застосування Google Trends. Визначено основні фактори підйому зацікавленості у кіберспорті. Ідентифіковано позитивні та негативні наслідки розвитку кіберспорту у світі. Проведене прогнозування світових тенденцій кіберспорту за допомогою методів інтелектуального аналізу даних - побудови MAR-сплайнів. Встановлено, що кіберспорт виступає основою практичного застосування кіберспортивних технологій у різних галузях.

Ключові слова: кіберспорт, Google Trends, MAR-сплайни.

The article analyzes the current state and trends of e-sports in the world by studying the time series of the number of requests from Internet users, obtained through the use of Google Trends. The positive and negative consequences of e-sports development in the world have been identified. The forecasting of world tendencies of e-sports by means of methods of data mining is carried out. Using the application of multivariate adaptive regression splines (MARSplines), a model of the relationship between the predictor - a time indicator and the dependent variable - the time series of the number of requests of Internet users, which are non-monotonic in nature and provide the possibility of regression switching points. The adequacy of the constructed model is proved by means of regression statistics and histogram of correspondence of residuals to the normal distribution law. The expediency of using the method of multivariate adaptive regression splines (MARSplines) before other statistical methods is substantiated.

Key Words: eSports, Google Trends, MAR splines

.

Статтю представив д.ф.-м.н. Пашко А.О.

© Кузьменко О.В., Койбічук В.В., Яценко В.В., Гриценко К.Г.

Уведіть текст тут

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями

Кіберспорт сформував новітню індустрію, що набуває все більшої економічної, соціальної та культурної ролі в суспільстві. Вже сьогодні кіберспорт є глобальним явищем, яке притаманне навіть країнам, що розвиваються. У той же час, справедливо зазначити, що стрімке поширення кіберспорту спричиняє суттєвий дисбаланс з огляду на його внесок у соціально-економічний розвиток суспільства. Поряд з популярністю та прихильність, кіберспорт опинився на перетині протилежних поглядів на взаємозв'язок та взаємовплив людини й комп'ютерної техніки. Орієнтуючись на наявні результати досліджень з цього питання, формується висновок, що такий дисбаланс є наслідком різних підходів держави до цього явища, а також освіченості, культури й ментальності населення певної країни. Кіберспорт охоплює значну чисельність населення держави та широкий спектр професій. Так у кіберспортивній галузі задіяні не тільки гравці, але й програмісти, розробники ігор, менеджери по розвитку команд та організації турнірів, маркетологи, телерадіокомпанії, численні спонсорські організації та державні органи влади.

Зважаючи на щорічне зростання впливу кіберспорт в суспільстві та економіці держави, актуальності набуває дослідження світових тенденцій його розвитку. В якості інструменту встановлення вектору руху кіберспорту запропоновано обрати Data Mining.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Досліджуючи категорію «кіберспорт», вчені опікуються рядом важливих питань та проблемних аспектів, які мають прямий чи опосередкований зв'язок з цим поняттям, а саме: Скотт М. Дж., Саммерлі Р., Бесомбес Н., Конноллі К., Гаврисяк Дж., Халеві Т., Патрік Вільямс Дж. [1] розробляють навчальні програми з кіберспорту у вищих навчальних закладах; Санауджа-Перис Г., Камачо М. М., Баладо-Альбиол М. [2] описують консолідацію кіберспорту в умовах пандемії; Лим С., Юнг С., Ха Дж. [3] пропонують візуальний алгоритм віртуального кіберспорту для онлайн-охорони здоров'я; Уотсон Б., Сп'ют Дж., Кім Дж., Лістман Дж., Кім, С., Віммер Р., Лі Б. [4] описують конкурентоспроможність кіберспорту; Кригштейн, С., Мартин-Нидекен, А. Л., Турмо Видал, Л., Кларковски, М., Роджерс, К., Туркай, С., Хямяляйнен, П [0] розкривають теперішнє та майбутнє кіберспорту; Гьондоду С., Колак О.Х., Доган Е.А., Гюльбетекин Е., Полат Е. [6] оцінюють розумову втому та стрес гравців, які займаються кіберспортом, за допомогою злиття даних. Особливості аналізу та оцінювання функціонування та розвитку кіберспорту у своїх трактатах розкривають такі фахівці: Ван Х., Хуо Х. та Чжан Д. [7] щодо структурного аналізу мережі промислових асоціацій кіберспорту на основі складної теорії мережі. Досвід різних країн світу у кіберспортивній галузі висвітлюються у наукових надбаннях сучасних науковців: Го Х. [8] відносно дослідження рекламного маркетингу кіберспорту в Китаї; Бал М. А. [8] стосовно комунікацій у кіберспорті у Туреччині;

Для вивчення сучасного стану та тенденцій розвитку кіберспорту у світі було проведено аналіз літератури шляхом бібліографії терміну «e-sport» (кіберспорт) за останні роки, у різних галузях знань з застосуванням програми VOSViewerv.1.6.10. Результати досліджень представлені у графічному вигляді (рис.1 та рис.2). Наукова бібліографія даного поняття представлена за допомогою карти з використанням архівних зібрань Scopus.

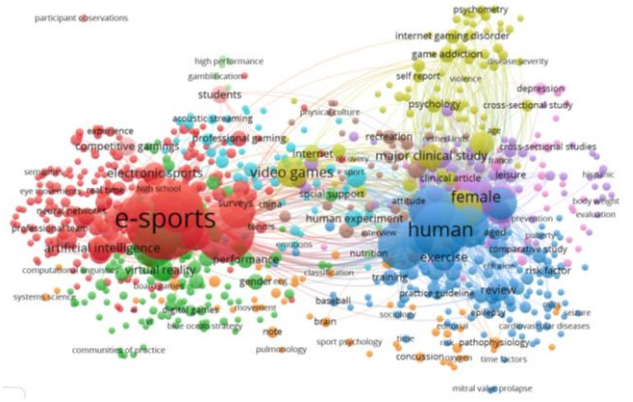


Рис.1 Наукова бібліографія поняття «e-sport» (кіберспорт) за останні роки з застосуванням програми VOSViewerv.1.6.10.

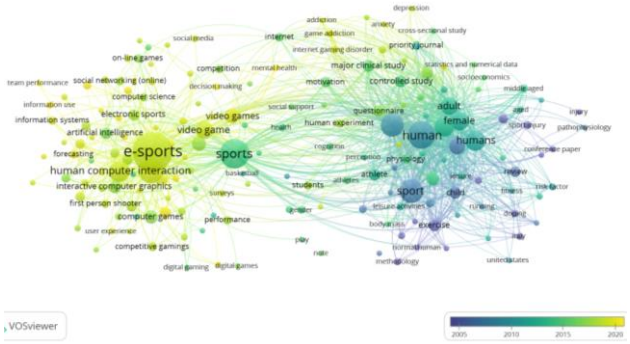


Рис.2 Періодограма наукової бібліографії поняття «e-sport» (кіберспорт) за останні роки з застосуванням програми VOSViewerv.1.6.10.

Розглянувши рис.1 та рис.2 можна стверджувати, що тема кіберспорту є досить актуальною в сучасних умовах розвитку наукової думки проте не досить розробленою. В своїй більшості, в наукових дослідженнях кіберспорт, асоціювався з багатьма іншими економічним поняттями, як інструмент реалізації певних процесів. Так, карта бібліографічного поняття «e-sport» (кіберспорт) представлена за допомогою кластерів, які згруповані за напрямком даного питання. Дане поняття включає в себе 5 кластерів, які позначено на графіку різними кольорами. Найбільш вагомими з них є кластери пов'язані з поняттями штучний інтелект, комп'ютерний геймінг, спорт, здоров'я та інші. З рис.2 чітко видно, що кіберспорт набув набільшої популярності саме за останній період.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується стаття.

Незважаючи на наявні досягнення у напрямку кіберспорту, наразі залишається ряд невирішених питань щодо особливостей функціонування та розвитку кіберспортивної галузі в частині визначення пріоритетних тенденцій її розвитку, що потребує подальших поглиблених досліджень.

Формулювання цілей статті

Метою статті є дослідження світових тенденцій розвитку кіберспорту за допомогою методів Data Mining.

Виклад основного матеріалу

Кіберспорт представляє собою спосіб on-line спілкування шляхом використання мережі Інтернет; певна розважальна діяльність, що передбачає змагання у електронних іграх. Наразі він займає основну споживчу нішу серед молодого покоління.

Дослідження світових джерел вказують на сильне зростання в останні роки галузі електронного спорту. Основними факторами такого підйому зацікавленості у кіберспорті є: значний попит на участь у кіберіграх та їх перегляд; масовість кіберспортивних заходів; вподобання молодого покоління; спалах пандемії; пріоритетність кіберспорту над традиційним спортом; популярність кіберспорту; значний потенціал розвитку; зручні та комфортні умови участі та проведення кібертурнірів і кіберзмагань; необмежена багатомільйонна глядацька аудиторія; значні та швидкі прибутки; численні пропозиції від інвесторів; мінімальна витратність кіберспортивних заходів; відсутня потреба у спеціальній фізичній спортивній підготовці; гнучкість кіберспортивної індустрії; немає прив'язки до місця кібергри; розвинена іфраструктура; та ін.

Розвиток кіберспортивних заходів сприяє виникненню ряду позитивних аспектів, а саме: підтримання певної культури дозвілля; отримання задоволення; зняття психологічного стресу; наявність фізичних вправ поряд з обмеженими фізичними навантаженнями; можливість медичного обслуговування без особистої присутності; можливість визначення результатів гри за допомогою комп'ютерного інтерфейсу; можливість прийняття участі у кіберспортивних заходах без спеціальної фізичної спортивної підготовки; можливість отримання значних сум гонорарів; можливість відвідання заходів з мінімальними витратами ресурсів; приймати участь може будь хто; доступність з будь-якої точки світу; та ін..

Розглядаючи особливості поняття «кіберспорт», варто звернути увагу на певні негативні аспекти, що він викликає: психологічні (інтелектуальні навантаження викликають стрес та розумову втому, тим самим знижуючи психологічну стійкість та продуктивність при виконанні роботи; після неуспішної гри виникає погіршення настрою, виникає тривожність, знижується впевненість у собі, що негативно відображається на психологічному здоров'ї); фізичні (зниження фізичної активності, що

викликає підвищення маси тіла та малорухливий спосіб життя; порушення харчування, що негативно відображається на фізичному здоров'ї; погіршення якості та тривалості сну, що сприяє хронічному недосипанню та втомі; виникнення захворювань таких як напруга та біль в очах, шиї та зап'ястях); правова проблематика кіберспорту; та ін. Перелічені переваги та недоліки кіберспорту повинні аналізуватись у поєднанні з напрямками його розвитку. Це дозволить оперативно зменшувати деструктивний вплив та примножувати позитивний. Отже, проведемо дослідження світових тенденцій розвитку кіберспорту за допомогою одного із методів Data Mining - багатомірних адаптивних регресивних MAR-сплайнів пропонується у вигляді наступної послідовні етапів реалізації.

1 етап. Формування вхідної бази дослідження. На даному етапі проводиться ідентифікація кількісної характеристики оцінювання тенденцій розвитку кіберспорту шляхом визначення рівнів часового ряду кількості запитів інтернет-користувачів до поняття «кіберспорт», здійснене за допомогою застосування Google Trends. Для реалізації даного етапу розглянуто період часу з січня 2004 по жовтень 2021 рр. за множиною країн світу. За результатами аналізу кількості запитів інтернет-користувачів до поняття «кіберспорт», виявлено, що країнами-лідерами виступають: Тайланд, Данія, Швеція, Норвегія, Словакія, Польща, Естонія, Угорщина, Фінляндія та Франція.

2 етап. Дослідження динаміки поведінки часового ряду кількості запитів інтернет-користувачів до поняття «кіберспорт». Попереднім етапом прогнозування світових тенденцій розвитку кіберспорту за допомогою застосування багатомірних адаптивних регресивних MAR-сплайнів до визначення залежності кількості запитів інтернет-користувачів до поняття «кіберспорт» проводиться дослідження динаміки поведінки регресора (рис. 1). Для реалізації даного етапу проведемо візуалізацію рівнів досліджуваного часового ряду шляхом побудови діаграми за допомогою інструментарію Statistics, Advanced Linear/Nonlinear Models, Time Series/Forecasting, Time Series ARIMA dialog. Даний етап виступає підготовчим для проведення безпосереднього сплайн-моделювання в розрізі визначення специфікації шуканої функціональної залежності.

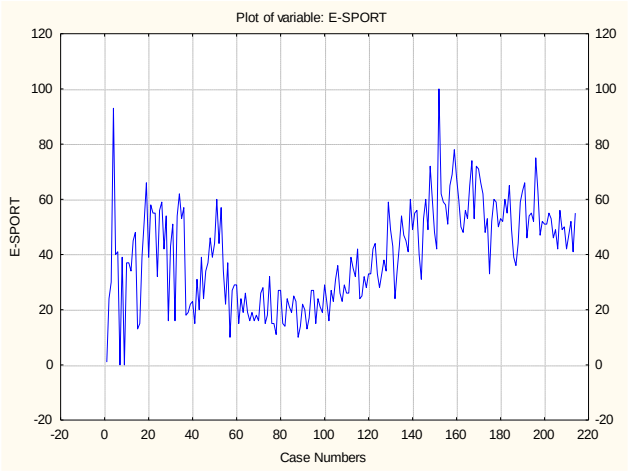


Рис. 1 Динаміка кількісної характеристики тенденцій розвитку кіберспорту - кількості запитів інтернет-користувачів до поняття «кіберспорт»

Аналіз рисунку 1 дозволяє констатувати наявність зростаючої тенденції даного часового ряду з чітко вираженою коливальною тенденцією. Причому з 2004 по 2009 роки спостерігалась значна волатильність кількості запитів інтернет-користувачів до поняття «кіберспорт», що свідчить про актуалізацію кіберспорту на світовому рівні. Починаючи з 2009 року спостерігається швидко зростаюча тенденція як індикатор підвищення уваги до кіберспорту та підвищення його впливу на зміну структури світового ринку комп'ютерних та цифрових ігор, сприйняття кіберспорту як інноваційного підходу до комунікації.

3 етап. Прогнозування світових тенденцій розвитку кіберспорту за допомогою застосування багатомірних адаптивних регресивних MAR-сплайнів. Для впровадження даного етапу пропонується використати можливостей інструментарію Statistics, Data Mining, MARSplines (Multivariate Adaptive Regression Splines). Підґрунтям застосування даного інструментарію виступає методика Фрідмана, призначена для розв'язування задач класифікації та регресії шляхом здійснення обробки двох типів змінних величин: неперервних та категоріальних не зважаючи на їх характер регресорів чи регресантів.

Побудова багатомірних адаптивних регресивних MAR-сплайнів ґрунтується на непараметричній процедурі визначення та опису залежності між пояснювальною та пояснюючими змінними за допомогою певного набору базисних функцій та коефіцієнтів, які формалізуються вхідним набором статистичних даних. Базою непараметричної процедури MAR-сплайнів виступає підхід, згідно з яким вхідні змінні

(пояснюючі факторні змінні) кластеризуються на групи, які описуються специфічними регресійними рівняннями та ознаками класифікації. Саме застосування описаної процедури дозволяє формалізувати адаптивні моделі, які в подальшому використовуються при наявних фактах точок переключення регресії та врахуванні немонотонного характеру взаємозв'язку між предикторами і регресантами, які неможливо формалізувати за допомогою параметричних моделей.

Для опису базисних функцій багатомірних адаптивних регресивних MAR-сплайнів до та після точки переключення регресії пропонується скористатись наступними співвідношеннями:

$$(x-k)_+ = \begin{cases} x-k, if\ x > k \\ 0, if\ x \le k \end{cases} \quad (1)$$

$$(x-k)_- = \begin{cases} t-k, if\ x < k \\ 0, if\ x \ge k \end{cases} \quad (2)$$

де k – точка перегину функції.

У програмному пакеті Statistica в розрізі інструментарію MARSplines (Multivariate Adaptive Regression Splines) базисні функції записуються наступним чином:

$$(x-k)_+ = \max(0; x-k) \quad (3)$$

$$(x-k)_- = \max(0; t-k) \quad (4)$$

В загальному вигляді адаптивні регресивні MAR-сплайни для r ненульових членів набувають вигляду комбінації зваженої суми базисних функцій та їх добутків:

$$y = f(X) = \beta_0 + \sum_{j=1}^{r} \beta_j \cdot C_j(X) \quad (5)$$

$$C = \{(x_i - k)_+, (k - x_i)_-\}_{\substack{k \in \{x_{1i}, \dots, x_{Ni}\} \\ i=1,\dots,n}}$$

де β_0 – постійна величина; β_j – постійна величина, параметр багатомірного адаптивного регресивного рівняння; r – загальна кількість базисних функцій; X – вектор вхідних змінних; $C_j(X)$ – j-та базисна функція із множини C або добуток двох чи більшої кількості таких функцій.

Переходячи до опису визначального принципу формалізації багатомірних адаптивних регресивних MAR-сплайнів зазначимо, що він вимагає чіткого визначення як базисних функцій, так і термів, саме які і формують кількість різних комбінації базисних функцій з урахуванням звернень до кожні із визначальних змінних.

Переходячи до побудови багатомірних адаптивних регресивних MAR-сплайнів залежності кількості запитів інтернет-користувачів до поняття «кіберспорт» від часового фактору, отримаємо наступні параметри (рис.2): кількість незалежних змінних – 1, кількість залежних змінних – 1, кількість термів – 4, кількість базисних функцій – 3, порядок взаємодії (кількість складових добутку базисних функцій) – 1, а також кількість звернень до фактора-регресора - 3.

	Model Summary
Model specifications	Value
Independents	1
Dependents	1
Number of terms	4
Number of basis functions	3
Order of interactions	1
Penalty	2,000000
Threshold	0,000500
GCV error	159,4393
Prune	Yes

Рис. 2 Параметри специфікації моделі MAR-сплану залежності кількості запитів інтернет-користувачів до поняття «кіберспорт» від часового фактору та кількість звернень до релевантних факторів-регресорів

	Model coefficients	
Coefficients, knots and basis functions	Coefficients e-sport	Knots t
Intercept	22,80541	
Term.1	0,26598	77,0000
Term.2	-1,03625	161,0000
Term.3	0,72314	105,0000

Рис. 3 Коефіцієнти моделі та терми моделі MAR-сплану залежності кількості запитів інтернет-користувачів до поняття «кіберспорт» від часового фактору

Отже, враховуючи представлені на рис.3 коефіцієнти, терми та параметри моделі MAR-сплану залежності кількості запитів інтернет-користувачів до поняття «кіберспорт» від часового фактору набуває вигляду:

.

$$\begin{aligned} e-sport = {} & 2{,}28054050642158e+001 + 2{,}65981697439486e-001 \\ & * \max(0;\ 7{,}70000000000000e+001 - t) - 1{,}03624613795730e \\ & + 000 * \max(0;\ t - 1{,}61000000000000e+002) \\ & + 7{,}23144135607471e-001 * \max(0;\ t - 1{,}05000000000000e \\ & + 002) \end{aligned} \quad (6)$$

4 етап. Перевірка адекватності моделі MAR-сплану залежності кількості запитів інтернет-користувачів до поняття «кіберспорт» від часового фактору.

Адекватність побудованої моделі MAR-сплану залежності кількості запитів інтернет-користувачів до поняття «кіберспорт» від часового фактору підтверджено: мінімальним значенням загального критерію якості моделі – узагальненого ковзного середнього помилки (GCV error), яке приймає значення 159,44 (рис.2); коефіцієнт детермінації набуває значення 0,53 (рис. 4); несуттєве відхилення фактичних та прогнозних значень кількості запитів інтернет-користувачів до поняття «кіберспорт»; відповідність нормальному закону розподілу залишків моделі (рис. 5).

Regression statistics	Regression statist e-sport
Mean (observed)	39,77103
Standard deviation (observed)	17,86146
Mean (predicted)	39,77103
Standard deviation (predicted)	13,00585
Mean (residual)	0,00000
Standard deviation (residual)	12,24254
R-square	0,53020
R-square adjusted	0,52121

Рис. 4 Регресивні статистики моделі MAR-сплану залежності кількості запитів інтернет-користувачів до поняття «кіберспорт» від часового фактору

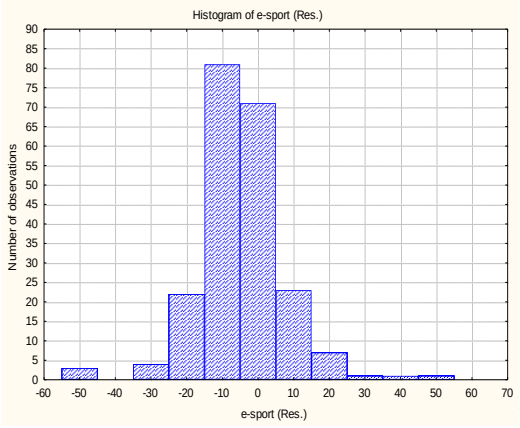


Рис. 5 Відповідність нормальному закону розподілу залишків моделі MAR-сплану залежності кількості запитів інтернет-користувачів до поняття «кіберспорт» від часового фактору

5 етап. Визначення тенденцій розвитку кіберспорту за допомогою побудованої моделі MAR-сплану. На даному етапі за допомогою формули (6) обчислимо прогнозні значення кількості запитів інтернет-користувачів до поняття «кіберспорт» за період з травня 2020 по серпень 2022 рр. (табл.1).

Таблиця 1

Прогнозні значення запитів інтернет-користувачів до поняття «кіберспорт»

Період	Прогноз e-sport	Період	Прогноз e-sport
2020-05	86,26	2021-07	95,57
2020-06	86,92	2021-08	96,24
2020-07	87,59	2021-09	96,9
2020-08	88,26	2021-10	97,57
2020-09	88,92	2021-11	98,24
2020-10	89,59	2021-12	98,9
2020-11	90,25	2022-01	99,56
2020-12	90,92	2022-02	100,23
2021-01	91,58	2022-03	100,89
2021-02	92,25	2022-04	101,56
2021-03	92,91	2022-05	102,22
2021-04	93,58	2022-06	102,89
2021-05	94,24	2022-07	103,55
2021-06	94,91	2022-08	104,22

Аналіз прогнозних значень запитів інтернет-користувачів до поняття «кіберспорт» від часового фактору за допомогою моделі MAR-сплану свідчить про підвищення актуальності кіберспорту, про що свідчить зростаючий тренд побудованої моделі.

Висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямі

Зауважимо, що проведене дослідження дозволяє стверджувати, що кіберспорт тільки починає набирати популярності в світі, численна аудиторія людей не обізнана або знає його поверхнево. Проте потенціал, який має кіберспорт та побудований прогноз дозволяє стверджувати, що зростання обсягів кіберспорт буде відбуватись не тільки за рахунок безпосереднього розвитку його обсягів й збільшення аудиторії гравців і глядачів, але й за рахунок практичного застосування кіберспортивних технологій у різних галузях, сприяючи продуктивності людської діяльності. Необхідно відзначити, що високо адекватним методом аналізу світових тенденцій розвитку кіберспорту є Data Mining. Використання наведеної методики дозволяє отримати достовірні результати вектору розвитку кіберспорту за неявними складовими, оскільки сформована єдина світова інформаційна база даних проведення численних турнірів відсутня. Користувачами отриманих результатів можуть бути усі суб'єкти формування екосистеми кіберігор, оскільки загальний тренд розвитку кіберспорт та використання технологій його організації формують основу багатьох видів сучасної Інтернет діяльності.

Список використаних джерел

1. Scott, M. J., Summerley, R., Besombes, N., Connolly, C., Gawrysiak, J., Halevi, T., . . . Patrick Williams, J. (2021). Towards a framework to support the design of esports curricula in higher education. Paper presented at the *Annual Conference on Innovation and Technology in Computer Science Education, ITiCSE,* 599-600. doi:10.1145/3456565.3461440 Retrieved from www.scopus.com
2. Sanahuja-Peris, G., Camacho, M. M., & Balado-Albiol, M. (2021). El afianzamiento de los e-sports en pandemia, una oportunidad para las marcas. [El afianzamiento de los e-sports en pandemia, una oportunidad para las marcas] *Prisma Social, 34,* 165-186. Retrieved from www.scopus.com
3. Lim, S. -., Jung, S. -., & Huh, J. -. (2021). Visual algorithm of vr e-sports for online health care. *Healthcare (Switzerland), 9*(7) doi:10.3390/healthcare9070824
4. Watson, B., Spjut, J., Kim, J., Listman, J., Kim, S., Wimmer, R., . . . Lee, B. (2021). Esports and high performance HCI. Paper presented at the *Conference on Human Factors in Computing Systems - Proceedings,* doi:10.1145/3411763.3441313 Retrieved from www.scopus.com

References

1. SCOTT, M. J., SUMMERLEY, R., BESOMBES, N., CONNOLLY, C., GAWRYSIAK, J., HALEVI, TPATRICK WILLIAMS, J. (2021). Towards a framework to support the design of esports curricula in higher education. Paper presented at the *Annual Conference on Innovation and Technology in Computer Science Education, ITiCSE,* 599-600. doi:10.1145/3456565.3461440 Retrieved from www.scopus.com
2. SANAHUJA-PERIS, G., CAMACHO, M. M., & BALADO-ALBIOL, M. -. (2021). El afianzamiento de los e-sports en pandemia, una oportunidad para las marcas. [El afianzamiento de los e-sports en pandemia, una oportunidad para las marcas] *Prisma Social, 34,* 165-186. Retrieved from www.scopus.com
3. LIM, S. -., JUNG, S. -., & HUH, J. -. (2021). Visual algorithm of vr e-sports for online health care. *Healthcare (Switzerland), 9*(7) doi:10.3390/healthcare9070824
4. WATSON, B., SPJUT, J., KIM, J., LISTMAN, J., KIM, S., WIMMER, R LEE, B. (2021). Esports and high performance HCI. Paper presented at the *Conference on Human Factors in Computing Systems - Proceedings,* doi:10.1145/3411763.3441313 Retrieved from www.scopus.com

5. Kriglstein, S., Martin-Niedecken, A. L., Turmo Vidal, L., Klarkowski, M., Rogers, K., Turkay, S., . . . Hämäläinen, P. (2021). Special interest group: The present and future of esports in HCI. Paper presented at the *Conference on Human Factors in Computing Systems - Proceedings,* doi:10.1145/3411763.3450402 Retrieved from www.scopus.com
6. Gündoğdu, S., Çolak, Ö. H., Doğan, E. A., Gülbetekin, E., & Polat, Ö. (2021). Assessment of mental fatigue and stress on electronic sport players with data fusion. *Medical and Biological Engineering and Computing, 59*(9), 1691-1707. doi:10.1007/s11517-021-02389-9.
7. Wang, H., Huo, H., & Zhang, D. (2021). Structural analysis of e-sports industrial association network based on complex network theory. *Revista De Psicologia Del Deporte, 30*(2), 298-308. Retrieved from www.scopus.com
8. Guo, X. (2021). Research on advertising marketing in E-sports competition in china. Paper presented at the *E3S Web of Conferences, , 235* doi:10.1051/e3sconf/202123503040 Retrieved from www.scopus.com
9. Bal, M. A. (2021). Marketing of sports and communication in digital area: E-sports and the case of turkey e-sports football league. *Digitalization and future of digital society* (pp. 347-356) Retrieved from www.scopus.com

5. KRIGLSTEIN, S., MARTIN-NIEDECKEN, A. L., TURMO VIDAL, L., KLARKOWSKI, M., ROGERS, K., TURKAY, S. HÄMÄLÄINEN, P. (2021). Special interest group: The present and future of esports in HCI. Paper presented at the *Conference on Human Factors in Computing Systems - Proceedings,* doi:10.1145/3411763.3450402 Retrieved from www.scopus.com
6. GÜNDOĞDU, S., ÇOLAK, Ö. H., Doğan, E. A., Gülbetekin, E., & Polat, Ö. (2021). Assessment of mental fatigue and stress on electronic sport players with data fusion. *Medical and Biological Engineering and Computing, 59*(9), 1691-1707. doi:10.1007/s11517-021-02389-9.
7. WANG, H., HUO, H., & ZHANG, D. (2021). Structural analysis of e-sports industrial association network based on complex network theory. *Revista De Psicologia Del Deporte, 30*(2), 298-308. Retrieved from www.scopus.com
8. GUO, X. (2021). Research on advertising marketing in E-sports competition in china. Paper presented at the *E3S Web of Conferences, , 235* doi:10.1051/e3sconf/202123503040 Retrieved from www.scopus.com
9. BAL, M. A. (2021). Marketing of sports and communication in digital area: E-sports and the case of turkey e-sports football league. *Digitalization and future of digital society* (pp. 347-356) Retrieved from www.scopus.com

Надійшла до редколегії 29.08.21

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 539.1 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/2.17

Соловйов Д.В.[1], д.ф.-м.н., н.с.,
Іваньков О.І.[1], к.ф.-м.н., м.н.с.,
Булавін Л.А.[2], д.ф.-м.н., проф.,
Дорошенко І.Ю.[2], д.ф.-м.н., ст.досл., пров.н.с.,
Онук М.М.[2], аспірант,

Дослідження структурних особливостей взаємодії *S*-протеїну *SARS-CoV-2* з ліпідними мембранами методом малокутового розсіяння нейтронів

[1]Інститут проблем безпеки АЕС НАН України, 03028, м. Київ, вул. Лисогірська, 12
[2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 64/13
e-mail: dimkaupml@gmail.com, aleksandr.ivankov@gmail.com, bulavin221@gmail.com, dori11@ukr.net, MartaOn379@gmail.com

D.V. Solovyov[1], Dr. Sci.,
O.I. Ivankov[1], Ph.D.,
L.A. Bulavin[2], Dr. Sci., Prof.
I.Yu. Doroshenko[2], Dr. Sci.,
M.M. Onuk[2], Ph.D student,

Investigation of structural features of SARS-CoV-2 S-protein interaction with lipid membranes by small-angle neutron scattering

[1]Institute for Safety Problems of NPP of the NAS of Ukraine, 03028, Kyiv, 12 Lysohirska Str,
[2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska Str.
e-mail: dimkaupml@gmail.com, aleksandr.ivankov@gmail.com, bulavin221@gmail.com, dori11@ukr.net, MartaOn379@gmail.com

Методом малокутового розсіяння нейтронів проведено дослідження впливу S-протеїну коронавірусу SARS-CoV-2 на структурні параметри модельної ліпідної мембрани на системах диміристоїлфосфатидилхоліну (ДМФХ) з домішками холестерину та мелатоніну. Висунуто припущення, що збільшення концентрації мелатоніну в мембрані запобігає взаємодії коронавірусного S-протеїну з ліпідною мембраною клітини. За присутності домішок холестерину в системі взаємодія ліпідної мембрани з активною частиною S-протеїну відбувається залежно від фазового стану ліпіду: у випадку гель-фази взаємодія не відбувається, а у рідкокристалічній фазі додавання RBD SARS-CoV-2 в систему призводить до зменшення товщини мембрани.

Ключові слова: S-протеїн, ліпідна мембрана, малокутове розсіяння нейтронів, холестерин, SARS-CoV-2.

The effect of SARS-CoV-2 coronavirus S-protein on the structural parameters of the model lipid membrane on dimyristoylphosphatidylcholine (DMPC) systems with cholesterol and melatonin impurities was studied by the method of small angle neutron scattering. It is shown that an increase in the concentration of melatonin in the lipid membrane leads to a decrease in the thickness of the lipid bilayer, and an increase in the concentration of cholesterol leads to an increase in it. It has been suggested that increasing the concentration of melatonin in the membrane prevents the interaction of coronaviral S-protein with the lipid membrane of the cell. In the presence of cholesterol impurities in the system, the interaction of the lipid membrane with the active part of the S-protein occurs depending on the phase state of the lipid. Thus, when the lipid is in the gel phase (at 10 ° C), the active part of the S-protein does not change the structural parameters of the lipid bilayer, i.e. the interaction between the lipid membrane and the active part of the S-protein does not occur. At 37 ° C, when the lipid is in the liquid crystalline phase, the addition of RBD SARS-CoV-2 in the system DMPC / 30% Cholesterol / D_2O leads to a decrease in membrane thickness, indicating the interaction of S-protein with the membrane.

KeyWords: S-protein, lipid membrane, small-angle neutron scattering, cholesterol, SARS-CoV-2.

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

Вступ

Ліпідна мембрана є однією з найважливіших складових будь-якої клітини. Біологічні мембрани мають значну композиційну та фазову неоднорідність завдяки сотням хімічно різних компонентів. Компонентний склад мембрани визначає її властивості, а також впливає на такі процеси життєдіяльності як мембранний транспорт, передача сигналів, поділ клітин, ендоцитоз, латеральна дифузія білкових та

© Д.В. Соловйов, О.І. Іваньков, Л.А. Булавін, І.Ю. Дорошенко, М.М. Онук 2021

ліпідних молекул та інші [1, 2]. Саме тому протягом останніх років було прикладено великі зусилля для дослідження структури та динаміки ліпідного бішару в контексті розуміння функціональних механізмів тих процесів, що відбуваються на поверхні мембрани [3]. Велика кількість робіт присвячена дослідженню зміни властивостей ліпідних мембран при додаванні в них різноманітних домішок, серед яких окремо виділяють холестерин та мелатонін [4, 5]. Холестерин відіграє роль своєрідного модифікатора ліпідної фази. Збільшення його кількості в мембрані призводить до більш щільної упаковки молекул в ліпідному бішарі, а також до формування ліпідних рафтів (доменів) в мембрані. В літературі наведено дані, що відзначають певну роль ліпідних рафтів у процесах зв'язування коронавірусів з клітиною [6, 7]. У деяких випадках наявність рафтів є необхідною умовою для проникнення вірусу в клітину (наприклад, всередині рафту міститься мембранний білок, який зв'язується з вірусом), але водночас відомі випадки (вірус мишачого гепатиту), коли наявність рафтів ускладнює проходження вірусу в клітину, хоча механізм такого впливу залишається невідомим.

Експериментальна частина

У нашій роботі для визначення впливу S-протеїну коронавірусу SARS-CoV-2 на структурні параметри модельної ліпідної мембрани було проведено дослідження методом малокутового розсіяння нейтронів (МКРН) на системах димиристоїлфосфатидилхоліну (ДМФХ, назва за IUPAC: (2R)-2,3-Bis(tetradecanoyloxy)propyl-2-(trimethylazaniumyl)ethyl phosphate), що містять домішки холестерину або мелатоніну. Експериментальні дослідження проводились для наступних систем: водний розчин ДМФХ, ДМФХ + 15% мелатоніну (або холестерину), ДМФХ + 30% мелатоніну (або холестерину), ДМФХ + 30% мелатоніну (або холестерину) + RBD SARS-CoV-2. Оскільки фазовий стан ліпідної системи залежить від температури, вимірювання проводились при двох температурах: 10 °C (гель фаза) та 37 °C (рідкокристалічна фаза). Як модель ліпідної мембрани розглядалась одношарова ліпідна везикула, основними структурними параметрами якої є товщина ліпідного бішару та внутрішній радіус везикули.

В результаті аналізу експериментально отриманих кривих малокутового розсіяння нейтронів на розчинах ліпідних везикул з домішками мелатоніну було визначено товщину ліпідного бішару та внутрішній радіус везикули для кожної з досліджуваних систем. Отримані структурні параметри наведені в Таблиці 1.

Таким чином, збільшення концентрації мелатоніну в ліпідній мембрані призвело до зменшення товщини ліпідного бішару. При додаванні RBD SARS-CoV-2 товщина ліпідного бішару продовжує зменшуватись. Крім того, з наведених даних видно, що при 10°C товщина ліпідного бішару більша, ніж при 37°C для усіх розглянутих систем.

Аналогічні дослідження були проведені для систем з додаванням холестерину. Отримані дані наведено в Таблиці 2. Видно, що збільшення концентрації холестерину в ліпідній системі призводить до збільшення товщини ліпідного бішару незалежно від фазового стану ліпідної системи.

На Рис. 1 представлено графік зміни товщини ліпідного бішару в залежності від доданих домішок в розчин ДМФХ/D_2O згідно з результатами експериментальних досліджень, наведених в Таблицях 1 та 2.

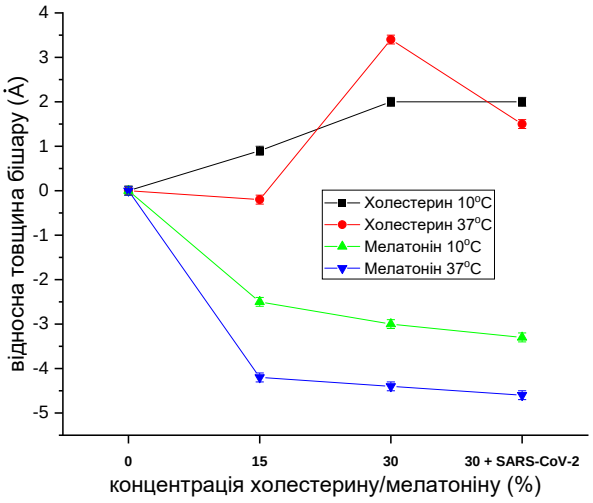


Рис. 1. Залежність відносної товщини бішару везикули від концентрації домішок холестерину або мелатоніну, доданих у систему. Значення нормовані відносно системи чистого розчину ДМФХ у D_2O за даної температури.

Як показали проведені експериментальні дослідження, додавання активної частини S-протеїну SARS-CoV-2 в ліпідну систему ДМФХ/30% Мелатонін/D_2O практично не змінило структурних параметрів ліпідного бішару при обох температурах у межах похибки експерименту. Оскільки мелатонін у ліпідному бішарі локалізується в області ліпідних голів, то він може заважати проникненню в цю область

молекулам S-протеїну. Таким чином можна стверджувати, що збільшення концентрації мелатоніну в мембрані запобігає взаємодії коронавірусного S-протеїну з ліпідною мембраною.

На відміну від систем з додаванням мелатоніну, за присутності домішок холестерину в системі взаємодія ліпідної мембрани з активною частиною S-протеїну вже відбувається, причому ця взаємодія різна в залежності від фазового стану ліпіду. Так, коли ліпід знаходиться в гель фазі (за температури 10°C), то активна частина S-протеїну

Таблиця 1

Товщини ліпідних бішарів та внутрішні радіуси везикул, визначені в результаті аналізу кривих малокутового розсіяння нейтронів

	Температура, °C	Внутрішній радіус везикули, Å	Товщина ліпідного бішару, Å
ДМФХ/D_2O	10	240	42,6 ± 0,1
	37	267	40,2 ± 0,1
ДМФХ/15% Мел/D_2O	10	236	40,1 ± 0,1
	37	249	36,0 ± 0,1
ДМФХ/30% Мел/D_2O	10	230	39,6 ± 0,1
	37	252	35,8 ± 0,1
ДМФХ/30% Мел/D_2O + RBD SARS-CoV-2	10	230	39,3 ± 0,1
	37	259	35,6 ± 0,1

Таблиця 2

Товщини ліпідних бішарів та внутрішні радіуси везикул, визначені в результаті підгонки кривих малокутового розсіяння нейтронів

	Температура, °C	Внутрішній радіус везикули, Å	Товщина ліпідного бішару, Å
ДМФХ/D2O	10	240	42,6 ± 0,1
	37	267	40,2 ± 0,1
ДМФХ/15% Хол/D2O	10	270	43,5 ± 0,1
	37	282	40,0 ± 0,1
ДМФХ/30% Хол/D2O	10	235	44,6 ± 0,1
	37	239	43,6 ± 0,1
ДМФХ/30% Хол/D2O + RBD SARS-CoV-2	10	250	44,6 ± 0,1
	37	233	41,7 ± 0,1

не змінює структурних параметрів ліпідного бішару. Це може означати, що взаємодія між ліпідною мембраною та активною частиною S-протеїну не відбувається. В свою чергу, за температури 37°C, коли ліпід перебуває в рідкокристалічній фазі, додавання RBD SARS-CoV-2 в систему ДМФХ/30% Холестерин/D_2O призводить до зменшення товщини мембрани, що свідчить про наявність взаємодії S-протеїну з мембраною. Відомо, що збільшення температури ліпідної системи призводить до порушення ступеня упаковки ліпідних молекул в мембрані. При цьому збільшується відстань між ліпідними головами, та з'являються порожнини, куди може проникати білкова молекула.

Висновки

Збільшення концентрації мелатоніну в мембрані запобігає взаємодії коронавірусного S-протеїну з ліпідною мембраною клітини.

За присутності домішок холестерину в системі взаємодія ліпідної мембрани з активною частиною S-протеїну відбувається залежно від фазового стану ліпіду: у випадку, коли ліпід знаходиться в гель-фазі взаємодія між ліпідною мембраною та активною частиною S-протеїну не відбувається; у випадку рідкокристалічної фази додавання RBD SARS-CoV- 2 в систему ДМФХ/30% Холестерин/D_2O призводить до зменшення товщини мембрани.

Список використаних джерел

1. *Elson E. L.* Phase separation in biological membranes: integration of theory and experiment / E. L. Elson, E. Fried, J.E. Dolbow, G.M. Genin // Annual review of biophysics. – 2010. – №39. – С. 207-226.

2. *Lingwood D.* Lipid rafts as a membrane-organizing principle / D. Lingwood, K. Simons // Science. – 2010. – Vol. 327. – №5961. – С. 46-50.

3. *Pabst G.* Liposomes, lipid bilayers and model membranes from basic research to application preface / G. Pabst, N. Kucherka, M.P. Nieh, J. Katsaras // Liposomes, lipid bilayers and model membranes from basic research to application preface. – 2014. – V. 2014. - P. IX- X.

4. *Severcan F.* Melatonin strongly interacts with zwitterionic model membranes - evidence from Fourier transform infrared spectroscopy and differential scanning calorimetry / F. Severcan, I. Sahin, N. Kazanci // Biochimica Et Biophysica Acta-Biomembranes. – 2005. – Vol. 1668. – №2. – С. 215-222.

5. *Bongiorno D.* Localization and interactions of melatonin in dry cholesterol/lecithin mixed reversed micelles used as cell membrane models / D. Bongiorno, L. Ceraulo, M. Ferrugia, F. Filizzola, A. Ruggirello, V. T. Liveri // Journal of Pineal Research. – 2005. – Vol. 38. – №4. – С. 292-298.

6. *Choi K.S.* Murine coronavirus requires lipid rafts for virus entry and cell-cell fusion but not for virus release / K. S. Choi, H. Aizaki, M. M. Lai // J. Virol. – 2005. – Vol. 79. – №15. – С. 9862-9871.

7. *Thorp E.B.* Requirements for CEACAMs and cholesterol during murine coronavirus cell entry / E.B. Thorp, T.M. Gallagher // J. Virol. – 2004. – Vol. 78 (6). – P. 2682-2692.

References

1. ELSON, E.L., FRIED, E., DOLBOW, J.E. and GENIN, G.M. (2010) Phase separation in biological membranes: integration of theory and experiment. *Annual review of biophysics.* 39. p. 207-226.

2. LINGWOOD, D. and SIMONS, K. (2010) Lipid Rafts As a Membrane-Organizing Principle. *Science,* 327(5961). p. 46-50.

3. PABST, G., KUCHRKA, N., NIEH, M.P., and KATSARAS, J. (2014). Liposomes, lipid bilayers and model membranes from basic research to application preface, *Liposomes, lipid bilayers and model membranes from basic research to application preface* 2014, p. ix – x.

4. SEVERCAN, F., SAHIN, I., and KAZANCI, N. (2005). Melatonin strongly interacts with zwitterionic model membranes - evidence from Fourier transform infrared spectroscopy and differential scanning calorimetry. *Biochimica Et Biophysica Acta-Biomembranes.* 1668(2). p. 215-222.

5. BONGIORNO, D., CERAULO, L., FERRUGIA, M., FILIZZOLA, F., RUGGIRELLO, A., and LIVERI, V.T. (2005) Localization and interactions of melatonin in dry cholesterol/lecithin mixed reversed micelles used as cell membrane models. *Journal of Pineal Research.* 38(4). p. 292-298.

6. CHOI, K.S., AIZAKI, H., and LAI, M.M. (2005) Murine coronavirus requires lipid rafts for virus entry and cell-cell fusion but not for virus release. *J Virol.* 79(15). p. 9862-9871.

7. THORP, E.B., and GALLAGHER T.M. (2004) Requirements for CEACAMs and cholesterol during murine coronavirus cell entry. *J Virol.* 78 (15). p. 2682-2692.

Надійшла до редколегії 25.07.2021