КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

В І С Н И К

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

№1 2021

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
випуск №1, 2021,
Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Физика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, механіко-математичного факультетів, факультету радіофізики, електроніки та комп’ютерних систем і факультету комп’ютерних наук та кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора, кандидата наук і PhD за спеціальностями 111, 112, 113, 104, 105 (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1188 від 24.09.2020) та за спеціальностями 121, 122, 123, 124 (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1471 від 26.11.2020), та реферується в Реферативному журналі Zentralblatt MATH, JournalTOCs, Crossref, ICI World of Journals, Google Scholar і Науковій періодиці України.

Редакційна колегія:

Моклячук Михайло Павлович, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор;**

Розора Ірина Василівна, д.ф.-м.н., доц., **заст. головного редактора;**

Bartlova Milada, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;

Bavula Vladimir, Prof., University of Sheffield, Great Britain;

Beghin Luisa, Prof., Sapienza Università di Roma, Italy;

Futorny Vyacheslav, Prof., Universidade de São Paulo, Brazil;

Giuliano Rita, Prof., Università di Pisa, Italy;

Gorlatch Sergei, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;

Hudak Stefan, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;

Kukhtarev Nickolai, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;

Leonenko Nikolay, Prof., Cardiff University, Great Britain;

Medvids Arturs, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;

Olenko Andriy, Prof., La Trobe University, Australia;

Orsingher Enzo, Prof., Sapienza University of Rome, Italy;

Ostrovsky Eugene, Prof., Bar- Ilan University, Israel;

Pogany Tibor, Prof., University of Rijeka, Croatia;

Rontó Miklós, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;

Silvestrov Dmitrii, Prof., Stockholms universitet, Sweden;

Sottinen Tommi, Prof., University of Vaasa, Finland;

Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;

Trofimchuk Sergey, Prof., Universidadde Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;

Volodin Andrei, Prof., University of Regina, Canada;

Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;

Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;

Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;

Безущак Оксана Омелянівна, д.ф.-м.н., доцент;

Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;

Гаращенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;

Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;

Жук Ярослав Олександрович, д.ф.-м.н., проф.;

Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., проф.;

Курченко Олександр Олексійович, д.ф.-м.н., проф;

Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;
Львов Віктор Анатолійович, д.ф.-м.н., проф.;
Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;
Майборода Ростислав Євгенович, д.ф.-м.н., проф.;
Мішура Юлія Степанівна, д.ф.-м.н., проф.;
Пашко Анатолій Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Петравчук Анатолій Петрович, д.ф.-м.н., проф.;
Погорілий Сергій Дем'янович, д.т.н., проф.;
Савенков Сергій Миколайович, д.ф.-м.н., доц.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.;
Сливка-Тилищак Ганна Іванівна, д.ф.-м.н., проф.;
Хусаінов Денис Яхьєвич, д.ф.-м.н., проф.;

Редакційний відділ:
Затула Дмитро Васильович, **відповідальний секретар**;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
П'ятецька Олена Василівна, visnyk.phys-math@ukr.net;
Отто Георгій Костянтинович, **технічний редактор**, ottogk@gmail.com.

Адреса редакційної колегії:
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03022 Тел. (044) 259-01-49
fm.visnyk@ukr.net
ISBN 978-966-2142
ISSN 1812-5409

Засновник: Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Свідоцтво про державну реєстрацію:КВ №16299-4771Р від 11.12.2009 року

DOI: https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/1

Безкоштовно

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics
No. 1, 2021.

The journal contains results of new research in various fields of mathematics, computer science, mechanics, physics and radiophysics for researchers, academic staff, postgraduates, engineers and students. It is published on the recommendation of the Academic Councils of Faculty of Physics, Faculty of Radiophysics, Electronics and Computer Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics and the Faculty of Computer Science and Cybernetics.

Journal "Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics" is included in the List of scientific professional publications of Ukraine, in which the results of the thesises for obtaining the scientific degrees of a doctor and a candidate of sciences (PhD) in specialties 111, 112, 113, 104, 105, 121, 122, 123 and 124 can be published (approved by the orders of the Ministry of Education and Science of Ukraine No. 1188 dated September 24, 2020 and No. 1471 dated November 26, 2020).
Journal is referenced in the abstract journal **Zentralblatt MATH (zbMATH), JournalTOCs, Crossref, ICI World of Journals, Google Scholar and Scientific periodicals of Ukraine.**

Editorial Board

Moklyachuk Mikhail Pavlovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine, Editor in Chief;
Rozora Iryna Vasylivna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine, Deputy Editor in Chief;
Bartlova Milada, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;
Bavula Vladimir, Prof., University of Sheffield, Great Britain;
Beghin Luisa, Prof., Sapienza Università di Roma, Italy;
Futorny Vyacheslav, Prof., Universidade de São Paulo, Brazil;
Giuliano Rita, Prof., Università di Pisa, Italy;
Gorlatch Sergei, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;
Hudak Stefan, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;
Kukhtarev Nickolai, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;
Leonenko Nikolay, Prof., Cardiff University, Great Britain;
Medvids Arturs, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;
Olenko Andriy, Prof., La Trobe University, Australia;
Orsingher Enzo, Prof., Sapienza University of Rome, Italy;
Ostrovsky Eugene, Prof., Bar-Ilan University, Israel;
Pog\'any Tibor, Prof., University of Rijeka, Croatia;
Rontó Miklós, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;
Silvestrov Dmitrii, Prof., Stockholm University, Sweden;
Sottinen Tommi, Prof., University of Vaasa, Finland;
Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;
Trofimchuk Sergey, Prof., Universidadde Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;
Volodin Andrei, Prof., University of Regina, Canada;
Akimenko Vitaliy Vladimirovich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Anisimov Igor Alekseevich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Anisimov Anatoliy Vasyl'ovych, Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Bezuschak Oksana Omelyanivna, Dr., Sci. Associate Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Voloshin Aleksey Fedorovich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Garaschenko Fedir Georgievich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Yezhov Stanislav Nikolaevich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Zhuk Yaroslav Aleksandrovich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Zaslavs'kyj Volodymyr Anatolijovych, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Kurchenko Oleksandr Oleksijovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Kudin Volodymyr Ivanovich, Dr. Sci., Sr. Sci. Researcher, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Lvov Victor Anatoliyovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Makarets' Nikolay Vladimirovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Maiboroda Rostyslav Yevhenovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Mishura Yuliya Stepanivna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Pashko Anatolij Oleksijovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Perestyuk Mykola Oleksijovych, Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Petravchuk Anatolij Petrovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Pogorily Serhiy Demyanovych, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Savenkov Serhij Mykolajovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Skrzyevsky Valery Antonovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Slyvka-Tylyshchak Anna Ivanivna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Uzhhorod National University, Uzhhorod, Ukraine;
Husainov Denys Yah'yevych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine.

ISSN: 2218-2055 (on-line version)

***ISBN*:** 978-966-2142
***ISSN*:** 1812-5409 (printed version)
***DOI**:* https://doi.org/10.17721/1812-5409

Founders: Taras Shevchenko National University of Kyiv
Foundation year: 1991 (series of bulletins of Kyiv University "Mathematics and Mechanics", "Physics", "Modeling and Optimization of Complex Systems" was reorganized into "Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics").
Certificate of state registration: КВ № 16299-4771 P dated 11.12.2009
Issued: 4 times a year

Mailing Address
Taras Shevchenko National University of Kyiv
Faculty of Computer Science and Cybernetics,
03022, Ukraine, Kyiv, 4d Academician Glushkov avenue
Phone: (044) 259-01-49
fm.visnyk@ukr.net

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Василик О.І., Ловицька І.І. Моделювання строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху 11
Джога А.С. Багаторукий бандит з розподілом Бернуллі в середовищі з затримками 20
Мірошниченко В.О. Швидкі розрахунки оцінок коваріаційних матриць методом складного ножа 27

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Затула Н.І., Затула Д.В. Апроксимація щільностей потенціалів для плоских в'язкопружних тіл із включеннями, що обмежені кусково-гладкими контурами 39
Рудницький О. Г., Рудницька М. О., Ткаченко Л..В., Печук Є. Д. Застосування нечіткої логіки при пошуку оптимального фільтру в задачах оптоакустики 43

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Бєда І.В. Локалізація зміни сцен у відео 57
Івохін Є.В, Махно М.Ф., Шкляр В.О. Оптимізація розподілу потужностей мережевих каналів на основі алгоритму Орліна 63
Івохін Є.В., Ваврик П.Р., Рудоман Н.В. Про оцінку перетину аудиторій в соціальних мережах 69
Кашпур О.Ф. Умови розв'язуваності систем нелінійних рівнянь в евклідових просторах 74
Колянова Т.В. Вплив керування на поведінку ізольованої логістичної популяції 81
Кулян В.Р., Юнькова О.О. Математична задача диверсифікації банківських активів 85
Омельчук Л.Л., Русіна Н.Г. Аналіз освітньо-професійних програм за спеціальністю 122 Комп'ютерні науки в розрізі програмних результатів навчання 89
Скуржанський О. Г., Марченко О. О. Огляд нейромережевих підходів для задач умовної генерації текст 102
Яворський А.Б. Аналіз та обробка сигналів кардіограми у реальному часі 108

СУЧАСНА ФІЗИКА

Данько В.П., Коваленко А.В., Коломієць Р.О. Джерело світла зі змінною довжиною хвилі на основі акустооптичного дефлектора 116

ALGEBRA, GEOMETRY AND PROBABILITY THEORY

Vasylyk O.I., Lovytska I.I. Simulation of a strictly φ-sub-Gaussian generalized fractional Brownian motion 11
Dzhoha A.S. Bernoulli multi-armed bandit problem under delayed feedback 20
Miroshnychenko V.O. Fast calculations of Jackknife covariance matrix estimator 27

DIFFERENTIAL EQUATIONS, MATHEMATICAL PHYSICS AND MECHANICS

Zatula N. I., Zatula D. V. Approximation of density of potentials for the at viscoelastic bodies with inclusions, bounded by a piecewise smooth contours 39
Rudnitskii A.G., Rudnytska M.A,. Tkachenko L.V., Pechuk E. D. Application of fuzzy logic in finding the optimal filter in optoacoustics problems 43

COMPUTER SCIENCES AND INFORMATICS

Bieda I.V. Scene Change Localization in a Video 57
Ivohin E.V., Makhno M.F., Shklyar V.O. Optimization of power distribution of network channels based on Orlin's algorithm 63
Ivohin E.V., Vavryk P. R., Rudoman N.V. About audience overlaps in the social media 69
Kashpur O. F.Conditions for the solvability of nonlinear equations systems in Euclidean spaces 74
Kulian V.R., Yunkova O.O. Mathetical problem of banking assets diversification 81
Omelchuk L.L., Rusina N.G. Analysis of educational and professional programs in the specialty 122 Computer Science in terms of program learning outcomes 85
Skurzhanskyi O. H., Marchenko A. A. Review of neural approaches for conditional text generation 89
Yavorskyi A.B. A. Real-Time Analysis and Processing of Cardiogram Signals 102
108

MODERN PHYSICS

Danko V.P., Kovalenko A.V., Kolomiiets R.O. Light source with variable wavelength based on acousto-optical deector 116

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 519.21 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/1.1

О.І. Василик[1], *д.ф.-м.н., доцент*
І.І. Ловицька[2], *студ.*

Моделювання строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху

[1]Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", 03056, Київ, проспект Перемоги, 37, e-mail: vasylyk@matan.kpi.ua

[2]Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", 03056, Київ, проспект Перемоги, 37, e-mail: pasko97ira@gmail.com

O.I. Vasylyk[1], *Dr.Sc., Associate Professor*
I.I. Lovytska[2], *stud.*

Simulation of a strictly φ-sub-Gaussian generalized fractional Brownian motion

[1]National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", 37, Prosp. Peremohy, Kyiv, Ukraine, 03056, e-mail: vasylyk@matan.kpi.ua

[2]National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", 37, Prosp. Peremohy, Kyiv, Ukraine, 03056, e-mail: pasko97ira@gmail.com

У роботі розглядається задача моделювання процесів строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху. Отримано умови, за яких модель на основі розкладу в ряд наближає процес строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $C([0;1])$ у випадку, коли $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $|x| \geq 1$, $p > 1$. Визначено параметри моделей та змодельовано траєкторії відповідних процесів для різних індексів Хюрста H і заданих значень точності та надійності у програмному середовищі R.

Ключові слова: φ-субгауссові процеси, дробовий броунівський рух, моделювання випадкових процесів, точність і надійність моделювання.

In the paper, we consider the problem of simulation of a strictly φ-sub-Gaussian generalized fractional Brownian motion. Simulation of random processes and fields is used in many areas of natural and social sciences. A special place is occupied by methods of simulation of the Wiener process and fractional Brownian motion, as these processes are widely used in financial and actuarial mathematics, queueing theory etc. We study some specific class of processes of generalized fractional Brownian motion and derive conditions, under which the model based on a series representation approximates a strictly φ-sub-Gaussian generalized fractional Brownian motion with given reliability and accuracy in the space $C([0;1])$ in the case, when $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $|x| \geq 1$, $p > 1$. In order to obtain these results, we use some results from the theory of φ-sub-Gaussian random processes. Necessary simulation parameters are calculated and models of sample pathes of corresponding processes are constructed for various values of the Hurst parameter H and for given reliability and accuracy using the R programming environment.

Key Words: φ-sub-Gaussian processes, fractional Brownian motion, simulation of stochastic processes, accuracy and reliability of simulation.

Статтю представила д.ф.-м.н. Розора І.В.

Вступ

Методи моделювання випадкових процесів та полів використовуються в багатьох областях природничих та соціальних наук. Стохастичне моделювання активно розвивається, починаючи з другої половини 20-го століття. Особливе місце займають методи і алгоритми моделювання вінерівського процесу та процесів дробового броунівського руху. Численні дослідження показують, що дані спостережень у теорії масового обслуговування, дослідженнях телекомунікаційних мереж, фінансовій математиці ефективно описуються процесами, які мають властивості самоподібності та сильної залежності від минулого. Якраз одним із таких процесів є процес дробового броунівського руху. Але для моделювання реальних випадкових процесів є сенс розглядати не тільки класичний гауссовий дробовий броунівський рух, а і його узагальнення, зокрема, процеси φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху.

У 1985 році Ю. Козаченко та Є. Остров-

© О.І. Василик, І.І. Ловицька, 2021

ський [8] розглянули простори $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ випадкових величин, де φ є N-функцією Орліча. Простори $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$, або простори φ-субгауссових випадкових величин, – це простори центрованих випадкових величин з певними експоненціальними моментами. Клас φ-субгауссових випадкових процесів є більш широким, ніж клас субгауссових процесів, тому дає можливість краще моделювати реальні випадкові процеси.

В. Булдигін та Ю. Козаченко досліджували деякі властивості сум випадкових величин і процесів з просторів $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ [1]. Подальший розвиток теорія φ-субгауссових випадкових процесів отримала у роботах Ю. Козаченка та його учнів, наприклад, у монографії [7]. До класу φ-субгауссових випадкових процесів належать, зокрема, процеси дробового броунівського руху, а це означає, що до них можна застосувати отримані для φ-субгауссових процесів теоретичні результати.

Результати щодо застосування дробового броунівського руху в таких прикладних галузях, як теорія телекомунікаційних мереж та фінансова математика, можна знайти у працях І. Норроса, А. Ширяєва, Ю. Мішури, А. Свіщука, Т. Соттінена та ін.

Робота складається зі вступу та трьох розділів. У першому розділі наведено необхідні означення і властивості з теорії φ-субгауссових випадкових величин і процесів. Другий розділ присвячено моделюванню процесів узагальненого дробового броунівського руху. В ньому наведено означення моделі, загальну теорему про моделювання строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху, доведену в роботі [4], та основну теорему цієї роботи. Отримана нова теорема містить умови, за яких модель буде наближати процес строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $C([0;1])$ у випадку, коли $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $|x| \geq 1$, $p > 1$. У третьому розділі наведено параметри моделей для заданих значень індекса Хюрста H, точності $\delta > 0$ та надійності $1-\nu$, $\nu \in (0;1)$, і представлено реалізації моделей траєкторій таких процесів в програмному середовищі R.

1 Необхідні відомості

У цьому розділі наведено необхідні означення та властивості з теорії φ-субгауссових випадкових величин і процесів [1, 3, 7].

Означення 1.1. Неперервна парна опукла функція $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається *N-функцією Орліча*, якщо $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) > 0$ при $x \neq 0$, $\frac{\varphi(x)}{x} \to 0$ при $x \to 0$ та $\frac{\varphi(x)}{x} \to \infty$ при $x \to \infty$.

Означення 1.2. Нехай $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ — деяка N-функція Орліча. Функція φ^* така, що $\varphi^*(x) := \sup_{y\in\mathbb{R}} (xy - \varphi(y))$, $x \geq 0$, називається перетворенням Юнга – Фенхеля функції φ.

Умова Q. Для N-функції φ виконується *умова Q*, якщо $\liminf\limits_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = C > 0$. Можливо, що $C = +\infty$.

У книзі [6] міститься детальна інформація щодо N-функцій Орліча та їх властивостей.

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – стандартний імовірнісний простір.

Означення 1.3. Нехай φ — N-функція Орліча, для якої виконується умова Q. Випадкова величина ξ належить простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ (простору φ-субгауссових випадкових величин), якщо $\mathsf{E}\xi = 0$, $\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\}$ існує для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ та існує така стала $a > 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\mathsf{E}\exp(\lambda\xi) \leq \exp(\varphi(a\lambda)).$$

Теорема 1.1. [1] *Простір $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ є простором Банаха з нормою*

$$\tau_\varphi(\xi) = \sup_{\lambda\neq 0} \frac{\varphi^{-1}(\ln \mathsf{E}\exp(\lambda\xi))}{|\lambda|}$$

та для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконуються нерівності

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\exp(\lambda\xi) &\leq \exp(\varphi(\lambda\tau_\varphi(\xi))), \qquad (1.1)\\ (\mathsf{E}\xi^2)^{\frac{1}{2}} &\leq C\tau_\varphi(\xi), \end{aligned}$$

де $C > 0$ — деяка стала.

Означення 1.4. Випадковий процес $X = (X(t), t \in T)$ є φ-субгауссовим (тобто, належить простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$), якщо для всіх $t \in T$ випадкові величини $X(t) \in \mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$.

Якщо $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, то такий процес називається субгауссовим.

Приклад 1.1. Центрований гауссовий випадковий процес є субгауссовим.

Означення 1.5. Сім'я Δ випадкових величин із простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ називається строго φ-субгауссовою (позначається як $\Delta \in \mathrm{SSub}_\varphi(\Omega)$), якщо існує стала $C_\Delta > 0$ така, що для будь-якої зліченної множини I, $\xi_i \in \Delta$, $i \in I$, та для довільних $\lambda_i \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\tau_\varphi\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right) \le C_\Delta\left(\mathsf{E}\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.2)$$

Стала C_Δ називається визначальною сталою сім'ї Δ.

Означення 1.6. Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ називається строго φ-субгауссовим (тобто, $X \in \mathrm{SSub}_\varphi(\Omega)$), якщо сім'я випадкових величин $\{X(t), t \in T\}$ є строго φ-субгауссовою. Визначальна стала цієї сім'ї називається визначальною сталою процесу X та позначається C_X.

Приклад 1.2. [7] Нехай $X(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k\varphi_k(t)$, $t \in T$, де сім'я випадкових величин $\{\xi_k, k = 1, \infty\}$ є строго φ-субгауссовою з визначальною сталою C_ξ та ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k\varphi_k(t)$ збігається в середньому квадратичному. Тоді випадковий процес $X(t)$ є строго φ-субгауссовим випадковим процесом з визначальною сталою $C_X = C_\xi$.

2 Моделювання φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху

2.1 Узагальнений дробовий броунівський рух

Нехай $\{B_H(t), t \in [0,1]\}$ – це дробовий броунівський рух з індексом Хюрста $H \in (0,1)$. Це означає, що $B_H(t)$ є центрованим гауссовим випадковим процесом зі стаціонарними приростами і коваріаційною функцією

$$\mathsf{E}B_H(s)B_H(t) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |s-t|^{2H}).$$

Нехай $T = [a,b], 0 \le a < b < \infty$, або $T = \mathbb{R}^+$.

Означення 2.1. [4, 7] Будемо називати випадковий процес $Z_H = \{Z_H(t), t \in T\}$ узагальненим дробовим броунівським рухом (УДБР) з індексом Хюрста $H \in (0,1)$, якщо $\mathsf{E}Z_H(t) = 0$ та

$$R_H(t,s) = \mathsf{E}Z_H(s)Z_H(t) = \frac{1}{2}(t^{2H}+s^{2H}-|s-t|^{2H}).$$

Означення 2.2. [4, 7] Будемо називати випадковий процес $Z_H = \{Z_H(t), t \in T\}$ строго φ-субгауссовим узагальненим дробовим броунівським рухом (φ-УДБР) з індексом Хюрста $H \in (0,1)$, якщо Z_H з означення 2.1 є строго φ-субгауссовим.

У роботі [2] доведено, що дробовий броунівський рух $B_H(t)$ можна подати в наступному вигляді:

$$B_H(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x_n t}{x_n}X_n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos y_n t}{y_n}Y_n, \quad (2.1)$$

де ряди в (2.1) збігаються в середньому квадратичному, $\{X_n, n = 1,2,\ldots\}$ та $\{Y_n, n = 1,2,\ldots\}$ – незалежні гауссові випадкові величини такі, що $\mathsf{E}X_n = \mathsf{E}Y_n = 0$,

$$\mathbf{Var}\,X_n = 2C_H^2 x_n^{-2H} J_{1-H}^{-2}(x_n),$$
$$\mathbf{Var}\,Y_n = 2C_H^2 y_n^{-2H} J_{-H}^{-2}(y_n),$$
$$C_H^2 = \pi^{-1}\Gamma(1+2H)\sin(\pi H),$$

$x_1 < x_2 < \ldots$, – додатні дійсні нулі функції Бесселя першого роду J_{-H}, а $y_1 < y_2 < \ldots$, – додатні дійсні нулі функції J_{1-H}.

У роботах [4, 7] показано, що зображення (2.1) можна переписати в такому вигляді:

$$B_H(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{X}_n c_n^H \sin x_n t + \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{Y}_n d_n^H(1-\cos y_n t),$$

де $\{\tilde{X}_n, n = 1,2,\ldots\}$ та $\{\tilde{Y}_n, n = 1,2,\ldots\}$ – незалежні гауссові центровані випадкові величини, такі що $\mathsf{E}\tilde{X}_n^2 = \mathsf{E}\tilde{Y}_n^2 = 1$,

$$c_n^H = \sqrt{2}C_H x_n^{-(H+1)} J_{1-H}^{-1}(x_n), \quad n = 1,2,\ldots, \quad (2.2)$$
$$d_n^H = \sqrt{2}C_H y_n^{-(H+1)} J_{-H}^{-1}(y_n), \quad n = 1,2,\ldots, \quad (2.3)$$
$$C_H^2 = \pi^{-1}\Gamma(1+2H)\sin(\pi H).$$

Ю.В. Козаченко, О.І. Василик та Т. Сottінен [4, 7] запропонували узагальнити даний розклад на випадок негауссових випадкових процесів, а саме розглянули такий ряд:

$$\tilde{Z}_H(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\xi_n c_n^H \sin x_n t + \sum_{n=1}^{\infty}\eta_n d_n^H(1-\cos y_n t), \quad (2.4)$$

де $t \in [0,1]$, ξ_n, η_n – незалежні центровані випадкові величини такі, що $\mathsf{E}\xi_n^2 = \mathsf{E}\eta_n^2 = 1, n = 1,2,\ldots$. Вони довели наступні твердження.

Твердження 2.1. *[4, 7] Ряди в (2.4) збігаються в середньому квадратичному, та коваріаційна функція процесу $\tilde{Z}_H$ має вигляд:*

$$\mathsf{E}\tilde{Z}_H(s)\tilde{Z}_H(t) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |s-t|^{2H}).$$

Твердження 2.2. *[4] Ряди в (2.4) рівномірно збігаються з ймовірністю одиниця до процесу $\tilde{Z}_H(t)$ та процес $\tilde{Z}_H(t)$ є вибірково неперервним на $[0,1]$ з ймовірністю одиниця.*

2.2 Моделювання узагальненого дробового броунівського руху

У роботах [4, 5, 7] запропоновано алгоритм моделювання процесів строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $C([0;1])$ на основі розкладу в ряд:

$$Z_t = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(x_n t)\,\xi_n \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} d_n\big(1-\cos(y_n t)\big)\,\eta_n, \tag{2.5}$$

$t \in [0;1]$, де

$$c_n = \frac{\pi^H\sqrt{2c}}{x_n^{H+1}J_{1-H}(x_n)}, \qquad n = 1,2,\dots,$$
$$d_n = \frac{\pi^H\sqrt{2c}}{y_n^{H+1}J_{-H}(y_n)}, \qquad n = 1,2,\dots,$$
$$c = \frac{\Gamma(2H+1)\sin(\pi H)}{\pi^{2H+1}}.$$

ξ_n, η_n, $n = 1,2,\dots,$ – незалежні однаково розподілені випадкові величини з простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$, $\mathsf{E}\xi_n^2 = \mathsf{E}\eta_n^2 = 1$, $n = 1,2,\dots$. Тут і далі припускається, що функція $\varphi(\sqrt{\cdot})$ опукла.

З Твердження 2.1 та Прикладу 1.2 випливає, що випадковий процес Z виду (2.5) є строго φ-субгауссовим узагальненим дробовим броунівським рухом.

Означення 2.3. [7] Модель $\tilde{Z}$ наближає процес Z із заданими надійністю $1-\nu$, $0<\nu<1$, та точністю $\delta>0$ в $C([0,1])$, якщо

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]}|Z_t - \tilde{Z}_t| > \delta\right) \le \nu.$$

Природною моделлю для процесу Z, є така сума

$$\sum_{n=1}^{N}\big(c_n\sin(x_n t)\,\xi_n \;+\; d_n\big(1-\cos(y_n t)\big)\,\eta_n\big)\,.$$

Але більш реальним є припущення про те, що сталі c_n та d_n, а також нулі x_n, y_n обчислюються тільки приблизно. Зауважимо, що сталі c_n та d_n залежать від значень нулів відповідних функцій Бесселя [4, 7].

Позначимо через $\tilde{c}_n$ та $\tilde{d}_n$ наближені значення c_n та d_n, відповідно. Нехай

$$|\tilde{c}_n - c_n| \le \gamma_n^c,$$

$$|\tilde{d}_n - d_n| \le \gamma_n^d,$$

$n = 1,\dots,N$. Похибки γ_n^c та γ_n^d вважаються відомими. Нехай $\tilde{x}_n$ та $\tilde{y}_n$ – наближені значення відповідних нулів x_n та y_n з похибками

$$|\tilde{x}_n - x_n| \le \gamma_n^x,$$

$$|\tilde{y}_n - y_n| \le \gamma_n^y.$$

Похибки γ_n^x та γ_n^y теж вважаються відомими.

Тоді модель процесу Z матиме вигляд

$$\tilde{Z}_t = \sum_{n=1}^{N}\Big(\tilde{c}_n\sin(\tilde{x}_n t)\,\xi_n \;+\; \tilde{d}_n\big(1-\cos(\tilde{y}_n t)\big)\,\eta_n\Big)\,. \tag{2.6}$$

А похибка моделювання дорівнює

$$\begin{aligned}\Delta_t &:= Z_t - \tilde{Z}_t \\ &= \sum_{n=1}^{N}\Big\{\Big(c_n\sin(x_n t) - \tilde{c}_n\sin(\tilde{x}_n t)\Big)\,\xi_n \\ &\quad + \Big(d_n\big(1-\cos(y_n t)\big) - \tilde{d}_n\big(1-\cos(\tilde{y}_n t)\big)\Big)\,\eta_n\Big\} \\ &\quad + \sum_{n=N+1}^{\infty}\Big\{c_n\sin(x_n t)\,\xi_n \;+\; d_n\big(1-\cos(y_n t)\big)\eta_n\Big\}.\end{aligned}$$

Для того, щоб оцінити Δ в $C([0,1])$, потрібно було знайти оцінки для $\tau_\varphi(\Delta_t)$ та $\tau_\varphi(\Delta_t - \Delta_s)$ для всіх $s,t\in[0,1]$. [4, 7]

На основі отриманих оцінок для похибки моделювання та з використанням відповідних оцінок розподілів супремумів φ-субгауссових випадкових процесів було сформульовано загальну теорему про моделювання φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $C([0;1])$ (див. [4, 7]).

Теорема 2.1. *[4, 7] Нехай b та α такі числа, що $0 < b < \alpha < H$. Модель $\tilde{Z}$, визначена в (2.6), наближає випадковий процес Z, визначений за допомогою (2.5), із заданими надійністю $1-\nu$, $0 < \nu < 1$, та точністю $\delta > 0$ в $C([0,1])$, якщо виконуються такі три нерівності:*

$$\gamma_0 < \delta,$$
$$\frac{\beta\gamma_0}{\gamma_\alpha} < \frac{\delta}{2^\alpha(\exp\{\varphi(1)\}-1)^\alpha},$$
$$\nu \geq 2\exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{\delta}{\gamma_0}-1\right)\right\} \times \left(\frac{1}{2^b(1-\frac{b}{\alpha})}\left(\frac{\gamma_\alpha\delta}{\beta\gamma_0}\right)^{\frac{b}{\alpha}} l^{(-1)}\left(\frac{\delta}{\gamma_0}-1\right)+1\right)^{\frac{2}{b}},$$

де параметри $\gamma_0 = \gamma_0(N)$, $\gamma_\alpha = \gamma_\alpha(N)$ і $\beta = \min\{\gamma_0, \frac{\gamma_\alpha}{2^\alpha}\}$ грунтуються на оцінках, отриманих для похибки моделювання, та $l^{(-1)}$ – узагальнена обернена функція до щільності l функції φ.

Припустимо, що сталі c_n та d_n, а також нулі x_n та y_n обчислені точно.

Наслідок 2.1. *[4, 7] Нехай похибка наближення відсутня, тобто $\gamma_n^c = \gamma_n^d = \gamma_n^x = \gamma_n^y = 0$. Тоді умови теореми 2.1 виконуються, якщо*

$$N \geq \max\left\{\left(\frac{A_0}{\delta}\right)^{\frac{1}{H}}+1;\right. \tag{2.7}$$
$$\left.\left(\frac{A_0(\exp\{\varphi(1)\}-1)^\alpha}{\delta}\right)^{\frac{1}{H}}+1;\ 2\left(\frac{A_0}{A_\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}$$

та

$$\nu \geq 2\exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{\delta N^H}{A_0}-1\right)\right\} \times \tag{2.8}$$
$$\left(\frac{(\delta A_\alpha)^{\frac{b}{\alpha}}(N+1)^{2Hb/\alpha}}{2^b\left(1-\frac{b}{\alpha}\right)A_0^{\frac{2b}{\alpha}}N^{\frac{(H-\alpha)b}{\alpha}}} l^{-1}\left(\frac{\delta(N+1)^H}{A_0}-1\right)+1\right)^{\frac{2}{b}}$$

де

$$A_0 = a_\varphi\sqrt{\frac{5c}{2H}},$$
$$A_\alpha = 2^{1-\alpha}a_\varphi\pi^\alpha\sqrt{\frac{c}{H-\alpha}}.$$

На основі наведених вище результатів виведемо умови, за яких модель виду (2.6) наближатиме процес строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $C([0;1])$ у випадку, коли

$$\varphi(x) = \begin{cases}\frac{|x|^p}{p}, & |x| \geq 1\\ \frac{|x|^2}{p}, & |x| < 1\end{cases}, \quad p > 1.$$

У наступній теоремі припускається, що похибка наближення відсутня, тобто $\gamma_n^c = \gamma_n^d = \gamma_n^x = \gamma_n^y = 0$.

Для зручності обчислень вибрано $\alpha = \frac{H}{2}$ і $b = \frac{H}{4}$.

Теорема 2.2. *Нехай $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $|x| \geq 1$, $p > 1$, та $\varphi(x) = \frac{|x|^2}{p}$, $|x| < 1$. У цьому випадку модель $\tilde{Z}$, визначена в (2.6), наближає процес узагальненого дробового броунівського руху Z, визначений за допомогою (2.5), із заданими надійністю $1-\nu$, $0 < \nu < 1$, та точністю $\delta > 0$ в $C([0,1])$, якщо виконуються такі умови:*

$$N \geq \max\left\{\left(\frac{a_\varphi}{\delta}\sqrt{\frac{5c}{2H}}\right)^{\frac{1}{H}}+1; \frac{2^{2-\frac{4}{H}}5^{\frac{1}{H}}}{\pi}\right\} \tag{2.9}$$

та

$$2\mu\exp\left\{-\frac{1}{q}\left(\frac{\delta N^H}{a_\varphi\sqrt{\frac{5c}{2H}}}-1\right)^q\right\} N^{\frac{2(3p+1)}{p-1}} \leq \nu, \tag{2.10}$$

де

$$\mu = \pi^2 2^{\frac{18}{H}+\frac{4}{H(p-1)}-4}5^{-\frac{4}{H}-\frac{4}{H(p-1)}} \times \left(\frac{H}{c}\right)^{\frac{2}{H}+\frac{4}{H(p-1)}}\left(\frac{\delta}{a_\varphi}\right)^{\frac{4(p+1)}{H(p-1)}},$$

$a_\varphi = \tau_\varphi(\xi_n) = \tau_\varphi(\eta_n)$.

Доведення. Оскільки ми припускаємо, що похибка наближення відсутня, то можемо скористатись наслідком 2.1.

У нашому випадку $\varphi^*(x) = \frac{x^q}{q}$, $x \geq 1$, де q таке число, що $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$; $l(x) = \varphi'(x) = x^{p-1}$, $x \geq 1$; $l^{(-1)}(x) = x^{\frac{1}{p-1}}$, $x \geq 1$.

За припущенням $\alpha = \frac{H}{2}$, $b = \frac{H}{4}$ матимемо: $A_\alpha = A_{\frac{H}{2}} = 2^{1-\frac{H}{2}}a_\varphi\pi^{\frac{H}{2}}\sqrt{\frac{2c}{H}}$.

Спочатку розглянемо умову (2.7). Для заданої функції φ отримаємо

$$\left(\frac{A_0(\exp\{\varphi(1)\}-1)^\alpha}{\delta}\right)^{1/H}+1 =$$

$$\left(\frac{A_0(e^{\frac{1}{p}}-1)^\alpha}{\delta}\right)^{\frac{1}{H}}+1\le\left(\frac{A_0}{\delta}\right)^{\frac{1}{H}}+1,$$

де $p>1, \alpha\in(0,1)$. Далі,

$$2\left(\frac{A_0}{A_\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=2\left(\frac{a_\varphi\sqrt{\frac{5c}{2H}}}{2^{1-\frac{H}{2}}a_\varphi\pi^{\frac{H}{2}}\sqrt{\frac{5c}{H}}}\right)^{\frac{2}{H}}=$$

$$2\left(\frac{1}{2^{1-\frac{H}{2}}\pi^{\frac{H}{2}}}\sqrt{\frac{5c}{2H}\cdot\frac{H}{2c}}\right)^{\frac{2}{H}}=$$

$$=\frac{2\cdot5^{\frac{1}{H}}}{2^{\frac{2}{H}-1}\pi\ 2^{\frac{2}{H}}}=\frac{2^{2-\frac{4}{H}}5^{\frac{1}{H}}}{\pi}.$$

Отже, умова (2.7) набуває вигляду

$$N\ge\max\left\{\left(\frac{a_\varphi}{\delta}\sqrt{\frac{5c}{H}}\right)^{\frac{1}{H}}+1;\frac{2^{2-\frac{4}{H}}5^{\frac{1}{H}}}{\pi}\right\}.$$

В умові (2.8) матимемо:

$$\varphi^*\left(\frac{\delta N^H}{A_0}-1\right)=\frac{1}{q}\left(\frac{\delta N^H}{a_\varphi\sqrt{\frac{5c}{2H}}}-1\right)^q,$$

$$\left(\frac{(\delta A_\alpha)^{\frac{b}{\alpha}}(N+1)^{\frac{2Hb}{\alpha}}}{2^b(1-\frac{b}{\alpha})A_0^{\frac{2b}{\alpha}}N^{\frac{(H-\alpha)b}{\alpha}}}\times\right.$$

$$\left.l^{(-1)}\left(\frac{\delta(N+1)^H}{A_0}-1\right)+1\right)^{\frac{2}{b}}=$$

$$=\left(\frac{\left(\delta a_\varphi\pi^{\frac{H}{2}}2^{1-\frac{H}{2}}\sqrt{\frac{2c}{H}}\right)^{\frac{1}{2}}(N+1)^{2H\cdot\frac{1}{2}}}{2^{\frac{H}{4}}(1-\frac{1}{2})\left(a_\varphi\sqrt{\frac{5c}{2H}}\right)^{2\cdot\frac{1}{2}}N^{(H-\frac{H}{2})\cdot\frac{1}{2}}}\times\right.$$

$$\left.\left(\frac{\delta(N+1)^H}{a_\varphi\sqrt{\frac{5c}{2H}}}-1\right)^{\frac{1}{p-1}}+1\right)^{\frac{8}{H}}=(*)$$

Оскільки N - велике число, то

$$(*)\approx\left(\frac{\delta^{\frac{1}{2}}a_\varphi^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{H}{4}}2^{\frac{1}{2}-\frac{H}{4}}\cdot(\frac{2c}{H})^{\frac{1}{4}}N^H}{2^{\frac{H}{4}-1}a_\varphi(\frac{5c}{2H})^{\frac{1}{2}}N^{\frac{H}{4}}}\cdot\frac{\delta^{\frac{1}{p-1}}N^{\frac{H}{p-1}}}{a_\varphi^{\frac{1}{p-1}}(\frac{5c}{2H})^{\frac{1}{2(p-1)}}}\right)^{\frac{8}{H}}=$$

$$=\pi^2\left(\frac{\delta}{a_\varphi}\right)^{\frac{4(p+1)}{H(p-1)}}\cdot2^{\frac{18}{H}+\frac{4}{H(p-1)}-4}\cdot5^{-\frac{4}{H}-\frac{4}{H(p-1)}}\times$$

$$\times\left(\frac{H}{c}\right)^{\frac{2}{H}+\frac{4}{H(p-1)}}\cdot N^{\frac{2(3p+1)}{p-1}}=\mu\cdot N^{\frac{2(3p+1)}{p-1}},$$

де μ наведено у твердженні цієї теореми.

Отже, умова (2.8) набуває вигляду:

$$2\mu\cdot exp\left\{-\frac{1}{q}\left(\frac{\delta N^H}{a_\varphi\sqrt{\frac{5c}{2H}}}-1\right)^q\right\}N^{\frac{2(3p+1)}{p-1}}\le\nu.$$

Таким чином, теорема доведена. □

3 Визначення числових параметрів моделей і комп'ютерне моделювання узагальненого дробового броунівського руху

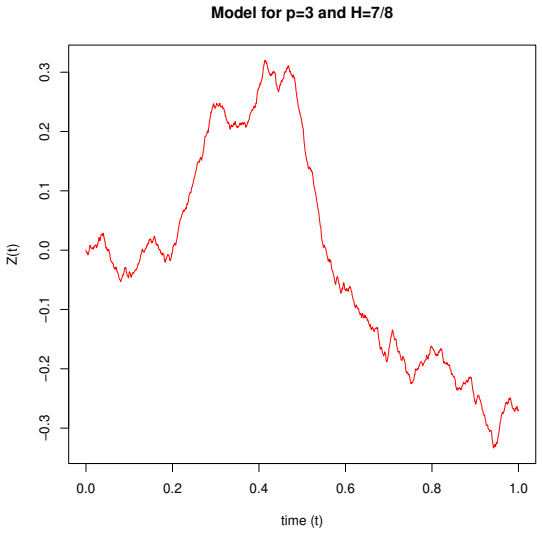
Нехай $\varphi(x)=\frac{|x|^p}{p}$, $|x|\ge1$, $p>1$. На основі теореми 2.2 знайдемо числові параметри та побудуємо модель $\tilde{Z}$, визначену в (2.6), що наближає процес узагальненого дробового броунівського руху Z, визначений за допомогою (2.5), із заданими надійністю $1-\nu$ та точністю δ в просторі $C([0,1])$ для різних значень індекса Хюрста H. Умова (2.9) для знаходження N представлена у явному вигляді, тому її можна легко застосувати. Умова (2.10) досить складна, але вона розв'язується чисельними методами.

Алгоритми обчислення числових параметрів та побудови траєкторій відповідних моделей реалізовано у програмному середовищі R.

1. Побудуємо модель траєкторії строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху для $\varphi(x)=\frac{|x|^3}{3}$, $|x|\ge1$ (тобто, $p=3$) та $H=\frac{7}{8}$ з надійністю $1-\nu=0.99$ та точністю $\delta=0.01$ в $C([0,1])$. У цьому випадку матимемо $c=0.02642778$. З теореми 2.2 випливає:

   - $\mu=3.4717*10^{-10}$,
   - з умови (2.9) маємо, що $N\ge max\{45.1,0.337\}$,
   - з умови (2.10) випливає, що $N\ge1361.837$.

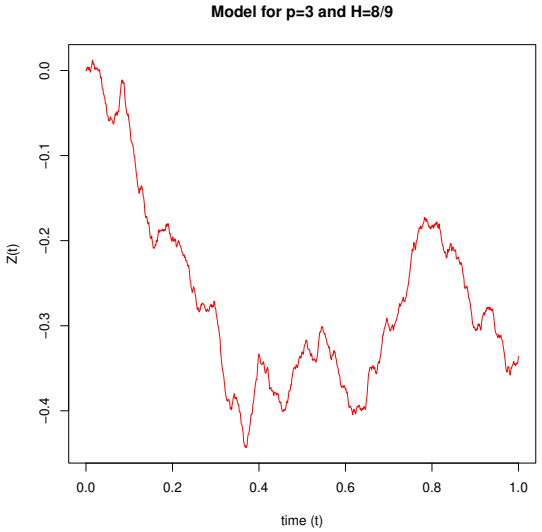
   Отже, достатньо взяти $N=1362$, щоб відповідна модель наближала такий узагальнений дробовий броунівський рух з надійністю 0.99 та точністю 0.01 в $C([0,1])$. На рисунку нижче зображено модель траєкторії строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху для $\varphi(x)=\frac{|x|^3}{3}$, $|x|\ge1$ та $H=\frac{7}{8}$.



2. $H = \frac{8}{9}$, $p = 3$, $1 - \nu = 0.99$, $\delta = 0.01$. Тоді матимемо, що $c = 0.02341$;
З теореми 2.2 випливає:

   - $\mu = 8.969 * 10^{-10}$,
   - з умови (2.9) маємо, що $N \geq max\{39.496, 0.344\}$,
   - з умови (2.10) випливає, що $N \geq 1110.654$.

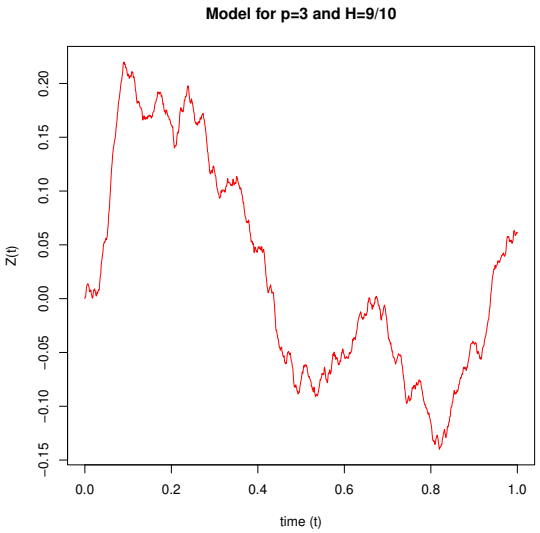
   Отже, достатньо покласти $N = 1111$. На рисунку нижче зображену відповідну модель траєкторії.



3. $H = \frac{9}{10}$, $p = 3$, $1 - \nu = 0.99$, $\delta = 0.01$. Тоді матимемо $c = 0.021007$.
З теореми 2.2 випливає:

   - $\mu = 1.9722 * 10^{-9}$,
   - з умови (2.9) маємо, що $N \geq max\{35.4, 0.3497\}$,
   - з умови (2.10) випливає, що $N \geq 941.8686$.

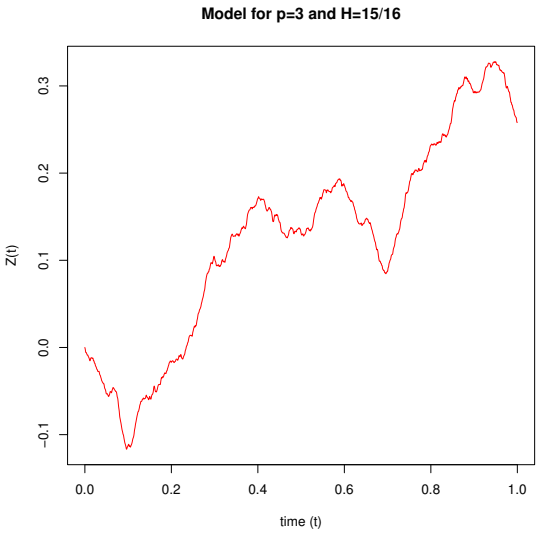
   Отже, достатньо покласти $N = 942$. На рисунку нижче зображену відповідну модель траєкторії.



4. $H = \frac{15}{16}$, $p = 3$, $1 - \nu = 0.99$, $\delta = 0.01$. Тоді матимемо $c = 0.012979$.
З теореми 2.2 випливає:

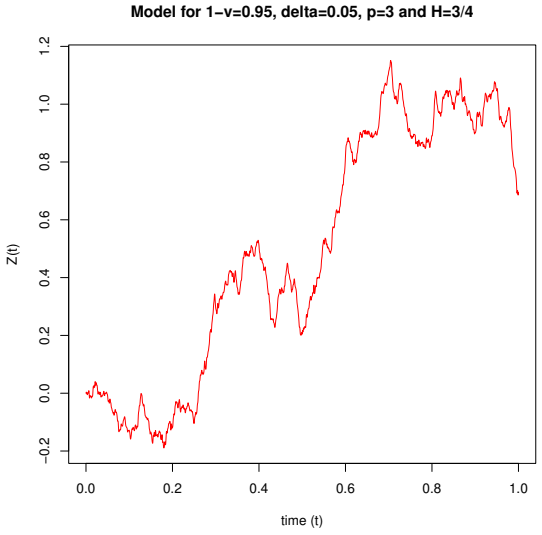
   - $\mu = 4.006 * 10^{-8}$,
   - з умови (2.9) маємо, що $N \geq max\{23.6, 0.368\}$,
   - з умови (2.10) випливає, що $N \geq 522.2371$.

   Отже, достатньо покласти $N = 523$.



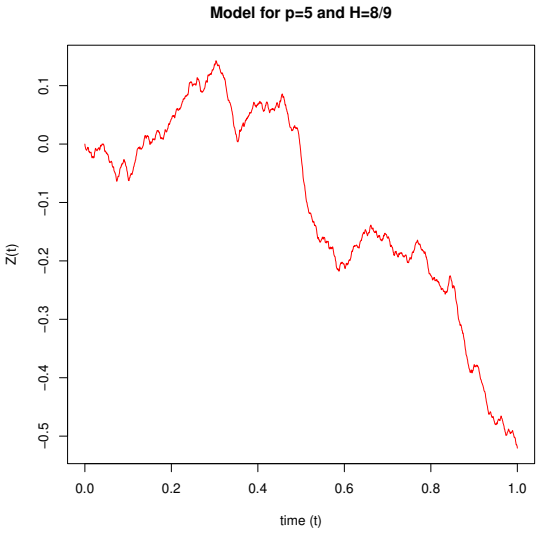
5. $H = \frac{3}{4}$, $p = 3$. Тепер візьмемо надійність $1 - \nu = 0.95$ та точність $\delta = 0.05$ (тоді отримаємо меншу необхідну кількість доданків у моделі). Тоді матимемо, що $c = 0.05373$.
   З теореми 2.2 випливає:
   - $\mu = 2.844 * 10^{-6}$,
   - з умови (2.9) маємо, що $N \geq max\{18.25, 0.27\}$,
   - з умови (2.10) випливає, що $N \geq 1005.4$.

   Отже, шукане значення $N = 1006$ (для порівняння, у випадку $1 - \nu = 0.99$, $\delta = 0.01$ $N = 9417$). Нижче зображено відповідну модель вибіркової траєкторії.



6. Нехай $\varphi(x) = \frac{|x|^5}{5}$, $|x| \geq 1$ (тобто, $p = 5$) та $H = \frac{8}{9}$, $1 - \nu = 0.99$, $\delta = 0.01$. Тоді матимемо $c = 0.02341$.
   З теореми 2.2 випливає:
   - $\mu = 1.329 * 10^{-6}$,
   - з умови (2.9) маємо, що $N \geq max\{39.5, 0.344\}$,
   - з умови (2.10) випливає, що $N \geq 1692.331$.

   Отже, шукане значення $N = 1693$. На рисунку нижче зображену відповідну модель траєкторії.



З рисунків бачимо, що чим більше значення індекса Хюрста H, тим гладшою є крива, при цьому і меншою є необхідна кількість доданків N у моделі. Також збільшення параметра p функції $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $|x| \geq 1$, за однакових значень точності, надійності та індекса Хюрста призводить до збільшення необхідної кількості доданків у моделі.

Висновки

У роботі доведено теорему, що містить умови, за яких модель виду (2.6) наближає процес строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $C([0;1])$ у випадку, коли $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $|x| \geq 1$, $p > 1$. Визначено параметри моделей та змодельовано траєкторії відповідних процесів для різних індексів Хюрста H і заданих значень точності та надійності у програмному середовищі R.

Список використаних джерел

1. *Buldygin V. V.*, Metric Characterization of Random Variables and Random Processes / V. V. Buldygin, Yu. V. Kozachenko. – American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. – 257 p.

2. *Dzhaparidze K.O.* A series expansion of fractional Brownian motion / K.O. Dzhaparidze, J. H. van Zanten // Probability Theory and Related Fields, 130, 2002 – P.39–55.

3. *Giuliano Antonini R.* Space of φ-sub-Gaussian random variables / R. Giuliano

Antonini, Yu. V. Kozachenko, T. Nikitina. // Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. (5), 2003. – 27. – P.92–124.

4. *Kozachenko Yu.* Simulation of Weakly Self-Similar Stationary Increment $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$-Processes: A Series Expansion Approach / Yu. Kozachenko, T. Sottinen, O. Vasylyk // Methodology and Computing in Applied Probability, Vol. 7 (3), 2005. – P. 379–400.

5. *Kozachenko Yu.* Simulation of fractional Brownian motion with given reliability and accuracy in $C([0,1])$ / Yu. Kozachenko, O. Vasylyk // Theory of Stochastic Processes, Vol.12 (28), no.3-4, 2006. – P. 59–66.

6. *Krasnosel'skii M. A.* Convex Functions and Orlicz Spaces. / M. A. Krasnosel'skii, Ya. B. Rutickii. – Moscow, 1958 (in Russian). English translation: P.Noordhoff Ltd, Groningen, 1961. – 249p.

7. *Василик О.І.* φ-Субгауссові випадкові процеси / О.І. Василик, Ю.В. Козаченко, Р.Є. Ямненко. – К: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. – 231 с.

8. *Козаченко Ю.В.* Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовских / Ю.В. Козаченко, Е.И. Островский // Теория вероятн. и матем. статист. № 32, 1985. – С.42–53.

References

1. BULDYGIN, V. V., KOZACHENKO, YU. V. (2000) *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes.* American Mathematical Society, Providence, RI, 257 p.

2. DZHAPARIDZE K.O., ZANTEN J. H. (2002) A series expansion of fractional Brownian motion. Probability Theory and Related Fields 130, p.39–55.

3. GIULIANO ANTONINI, R., KOZACHENKO, YU. V., NIKITINA, T. (2003) Space of φ-sub-Gaussian random variables. *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl.* (5) 27, p.92–124.

4. KOZACHENKO YU., SOTTINEN T., VASYLYK O. (2005) Simulation of Weakly Self-Similar Stationary Increment $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$-Processes: A Series Expansion Approach. *Methodology and Computing in Applied Probability*, Vol. 7 (3), p. 379–400.

5. KOZACHENKO YU., VASYLYK O. (2006) Simulation of fractional Brownian motion with given reliability and accuracy in $C([0,1])$. *Theory of Stochastic Processes*, Vol.12 (28), no.3-4 p. 59–66.

6. KRASNOSEL'SKII, M. A., RUTICKII, YA. B. (1961) *Convex Functions and Orlicz Spaces.* Moscow, 1958 (in Russian). English translation: P.Noordhoff Ltd, Groningen, 249p., 1961.

7. VASYLYK, O. I., KOZACHENKO, YU. V., YAMNENKO, R. E. (2008) *φ-sub-Gaussian random process*, Kyiv: Vydavnycho-Poligrafichnyi Tsentr "Kyivskyi Universytet", 231 p. (In Ukrainian)

8. KOZACHENKO, YU. V., OSTROVSKII E.I. (1985) Banach spaces of random variables of sub-Gaussian type. *Teor. Veroyatnost. i Mat. Statist.*, 32 , p. 42–53. (In Russian)

Received: 22.03.2021

УДК 519.814
https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/1.2

А. С. Джога, *аспірант*

Багаторукий бандит з розподілом Бернуллі в середовищі з затримками

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: andrew.djoga@gmail.com

A. S. Dzhoha, *PhD student*

Bernoulli multi-armed bandit problem under delayed feedback

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, 4d Glushkova str.,
e-mail: andrew.djoga@gmail.com

Останнім часом все більше уваги приділяється онлайновому навчанню машин з відкладеним зворотнім зв'язком. Навчання з затримками є доцільнішим в більшості практичних застосувань, оскільки зворотній зв'язок від навколишнього середовища не є миттєвим. Наприклад, в клінічних випробуваннях, результати яких ми використовуємо в даній роботі, прояв реакції на ліки може зайняти деякий час. У даній роботі розглядається проблема стаціонарного стохастичного багаторукого бандита в середовищі з затримками, де кожна дія задається розподілом Бернуллі, параметри якого не відомі заздалегідь. Головною метою моделі у представленому середовищу є максимізація сукупної винагороди на скінченному горизонті, що еквівалентно мінімізації сукупних втрат. Розглядається стратегія Explore-First для даного випадку, яка визначається кількістю разів кожна дія буде обрана для дослідження. Наводиться асимптотичний аналіз ефективності алгоритму і вивчається вплив затримок у середовищі. Отримані теоретичні результати використовуються для розробки програмного забезпечення для проведення чисельних експериментів.

Ключові слова: проблема багаторукого бандита, стохастичне середовище з затримками, чисельні експерименти.

Online learning under delayed feedback has been recently gaining increasing attention. Learning with delays is more natural in most practical applications since the feedback from the environment is not immediate. For example, the response to a drug in clinical trials could take a while. In this paper, we study the multi-armed bandit problem with Bernoulli distribution in the environment with delays by evaluating the Explore-First algorithm. We obtain the upper bounds of the algorithm, the theoretical results are applied to develop the software framework for conducting numerical experiments.

Key Words: multi-armed bandit problem, stochastic environment with delays, numerical experiments.

Communicated by Associate Prof. Rozora I. V.

1 Introduction

The multi-armed bandit (MAB, or just bandit) problem is an example of a sequential decision-making process under uncertainty in real-time and represents a dilemma between exploration of new possibilities and exploitation of already known actions with predicted results. This dilemma is known as the exploration-exploitation trade-off. The bandit problem was introduced by Thompson [1] while studying clinical trials for developing the response-adaptive design methods for sequential allocation of different possible medical treatments.

The essential part of the research of new drugs and medical treatments is the randomized controlled trial when patients are randomly divided into two or more groups with different treatment protocols prescribed and at the end of trials the results from each group are compared. This way of conducting a clinical trial may satisfy scientific purposes but doesn't consider subjects' well-being as a significant amount of patients would suffer from a lack of efficient treatment during the trial. The bandit problem as a methodology can be used to improve such situations by developing an adaptive strategy that allows to correct the treatment protocol according to the already observed effectiveness during the clinical trial.

In this article, we study the bandit problem in

© А.С. Джога, 2021

the clinical trial setting and conduct experiments by using data from The International Stroke Trial simulating delays in the environment. The classical bandit problem assumes no delays of results in the sequential decision-making process. But in settings like clinical trials delays are inevitable and there is a constant need for the next decision-making action with no observed results yet for the previous one. In this setup, existing algorithms need an adaptation to retain theoretical guarantees. One of the possible solutions is the meta-algorithm designed by Joulani et al. [2] which allows the use of existing algorithms in environments with delays with retaining theoretical guarantees by the cost of reducing effectiveness in an additive way with respect to delays.

We provide an asymptotic analysis of one of the algorithms (Explore-First) for the MAB problem with Bernoulli distribution, we analyze an impact of the environment with delays on the algorithm and provide numerical experiments supporting obtained theoretical results. The results are applied to develop the software framework for conducting numerical experiments.

2 The multi-armed bandit problem and its solutions review

The multi-armed bandit problem is a sequential game between an algorithm and an environment. The game is being played over positive natural n time steps called the horizon. On each time step $t \in [n]$ the algorithm chooses an action A_t from a given set $\mathcal{A}$, then a reward $X_t \in \mathbb{R}$ is revealed by the environment. The action choice depends on the history of the previously chosen actions and their results in terms of rewards $H_{t-1} = (A_1, X_1, \ldots, A_{t-1}, X_{t-1})$. The objective of the algorithm is a sequential selection of actions in order to maximize the sum of the rewards accumulated over n time steps $\sum_{t=1}^{n} X_t$.

Mathematically, the bandit problem is defined by the reward process associated with each action. Depending on the assumed nature of the reward process there are three fundamental formalizations: stochastic (stationary) bandits, Markov bandits, and adversarial bandits. In the stochastic MAB setting the reward process associated with each action is assumed to be described as an identically distributed random variable. In Markov MAB each action is associated with a Markov chain that evolves on each time step. The adversarial MAB setting has no assumptions about the origin of the considered reward process.

For the purpose of this article, we consider the stochastic multi-armed bandit problem with Bernoulli distribution for the reward process. This model is described as a system consisting of a collection of k actions denoted by $\mu = (\mu_1, ..., \mu_k)$, where each action is a Bernoulli distribution with parameter μ_i. The mean vector $\mu \in [0, 1]^k$ is not known in advance. In this model X_t is a realization of the random variable drawn from the distribution μ_{A_t} associated with the chosen action A_t on time step t, i.e $X_t \sim \text{Bernoulli}(\mu_{A_t})$ is a reward on a given time step.

As a metric of the effectiveness of the algorithms, it's common to use the notion of regret, which was introduced by Robbins [3]. The regret is the difference between the expected accumulated reward when choosing the optimal action (with the highest mean among others) during the whole horizon and the expected accumulated reward obtained by the algorithm following its policy. The regret after n time steps is represented as

$$R_n = n \max_{i \in \mathcal{A}} \mu_i - \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{n} X_t\right].$$

The regret can be rewritten as a function of the number of draws of each sub-optimal action. Let $\Delta_i = \max_{i \in \mathcal{A}} \mu_i - \mu_i$ denote a suboptimality gap of action i which has been chosen $N_i(n)$ times, then the regret decomposition [4] is defined by

$$R_n = \sum_{i=1}^{k} \Delta_i \, \mathbb{E}\left[N_i(n)\right]. \tag{2.1}$$

Policy, which maximizes the expected accumulated reward is equivalent to minimizing the regret. Asymptotic analysis of the algorithms consists of obtaining the regret bounds.

In this article, we consider the Explore-First algorithm as the main policy in the context of the Bernoulli bandit. This algorithm is characterized by the number of exploration m of each of the given k actions in the first phase, and exploiting the empirically best action in the second phase. Let $N_i(t)$ denote the number of times action i has been chosen by the algorithm after t time steps, then the average reward of action i after t time

steps can be defined as follows:

$$\hat{\mu}_i(t) = \frac{1}{N_i(t)} \sum_{j=1}^{t} \mathbf{1}_{(A_j=i)} X_j.$$

Hence the chosen action A_t on time step t can be described in the following form:

$$A_t = \begin{cases} (t \bmod k) + 1 & \text{if } t \leqslant mk \\ \arg\max_{i \in \mathcal{A}} \left(\hat{\mu}_i(mk)\right) & \text{if } t > mk. \end{cases} \quad (2.2)$$

The protocol of the Explore-First algorithm:

1) Exploration phase (first mk time steps): choose each action exactly m times
2) Exploitation phase (the rest $n - mk$ time steps): use an empirically best action $\arg\max_{i \in \mathcal{A}} \left(\hat{\mu}_i(mk)\right)$.

This algorithm appears in the paper by Robbins [3], where the author formulated the stochastic multi-armed bandit problem. There was shown that the regret of Explore-First is sublinear in the general case:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{R_n}{n} = 0.$$

Later Anscombe [5] considers this algorithm in the context of clinical trials and gives an asymptotic analysis for the MAB with Gaussian rewards, the author highlights many of the important considerations. For our work we use the results of the upper bound obtained by Slivkins [6] for Bernoulli MAB:

$$\mathbb{E}\left[R_n\right] \leqslant n^{2/3} \times O\left(k \log n\right)^{1/3}, \quad (2.3)$$

where the upper bound is minimized by choosing the following m:

$$m = (n/k)^{2/3} \cdot O\left(\log n\right)^{1/3}.$$

For the other algorithms overview, we refer the readers to Bubeck et al. [7].

3 Asymptotic analysis of the Explore-First algorithm

In order to obtain a stronger upper bound than in the inequality (2.3), we introduce a dependency on the MAB instance's mean vector. With help of concentration inequality, we show that a centered Bernoulli random variable is 1/2-sub-Gaussian, which allows us to utilize an additive property of sub-Gaussian random variables in the tail probability estimation for the MAB with a number of actions $k > 1$. The theory of the sub-Gaussian variables is presented in the monograph [8], in addition, we refer the readers to Kozachenko et al. [9]. Here we list only basic facts needed for obtaining the upper bound.

Definition 3.1. A random variable X with σ parameter is said to be σ-sub-Gaussian if for all $\lambda \in \mathbb{R}$, it holds that

$$\mathbb{E}\left[\exp(\lambda X)\right] \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2 \sigma^2}{2}\right).$$

For σ-sub-Gaussian random variable X we can write the exponential estimate of its tail probability, for any $\varepsilon \geqslant 0$, it holds that

$$\mathbb{P}(X \geqslant \varepsilon) \leqslant \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right). \quad (3.1)$$

In addition, sub-Gaussian random variables possess an additive property [9].

Lemma 3.1. *If X is a centered Bernoulli random variable with parameter p ($\mathbb{P}(X = 1 - p) = p, \mathbb{P}(X = -p) = 1 - p$), then X is 1/2-sub-Gaussian.*

Proof. Hoeffding's lemma [10] states that for a random variable X supported on the interval $[a, b]$ for all $\lambda \in \mathbb{R}$, holds that

$$\mathbb{E}\left[\exp(\lambda X)\right] \leqslant \exp\left(\lambda\, \mathbb{E}[X] + \frac{\lambda^2 (b-a)^2}{8}\right),$$

applying it to a centered Bernoulli random variable we get

$$\mathbb{E}\left[\exp(\lambda X)\right] \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2((1-p) - (-p))^2}{8}\right) = \exp\left(\frac{\lambda^2 (1/2)^2}{2}\right),$$

which shows that X is 1/2-sub-Gaussian random variable by definition. □

Theorem 3.1. *For the stochastic multi-armed bandit with Bernoulli rewards and $1 \leqslant m \leqslant n/k$, the regret of Explore-First algorithm satisfies:*

$$R_n \leqslant m \sum_{i=1}^{k} \Delta_i + (n - mk) \sum_{i=1}^{k} \Delta_i \exp\left(-m\Delta_i^2\right). \quad (3.2)$$

Proof. In order to obtain the upper bound, we use the regret decomposition (2.1), where we bound the expected number of times an action i has been chosen by the algorithm after n time steps $\mathbb{E}\left(N_i(n)\right)$. We follow similar steps as in [11] for the Gaussian use case.

Let $i^* = \arg\max_{i\in\mathcal{A}}\left(\mu_i\right)$ denote the optimal action. The probability of action i having the highest average reward received after mk time steps is $\mathbb{P}\left(\hat{\mu}_i(mk) \geqslant \max_{j\neq i}\hat{\mu}_j(mk)\right)$, then according to the algorithm's protocol (2.2) each action is chosen exactly m times during exploration and $n-mk$ times with the probability of having the highest average during the exploitation:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[N_i(n)\right] &\leqslant m + (n-mk)\,\mathbb{P}\left(\hat{\mu}_i(mk) \geqslant \max_{j\neq i}\hat{\mu}_j(mk)\right)\\ &\leqslant m + (n-mk)\,\mathbb{P}\left(\hat{\mu}_i(mk) \geqslant \hat{\mu_{i^*}}(mk)\right)\\ &= m + (n-mk)\,\mathbb{P}\left(\hat{\mu}_i(mk) - \hat{\mu_{i^*}}(mk) \geqslant \Delta_i - (\mu_{i^*}-\mu_i)\right)\\ &= m + (n-mk)\,\mathbb{P}\left(\hat{\mu}_i(mk) - \mu_i - (\hat{\mu_{i^*}}(mk) - \mu_{i^*}) \geqslant \Delta_i\right).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Next, we show that $\hat{\mu}_i(mk) - \mu_i - (\hat{\mu_{i^*}}(mk) - \mu_{i^*})$ is $1/\sqrt{2m}$-sub-Gaussian by using Lemma 3.1 which states that a centered Bernoulli random variable is 1/2-sub-Gaussian. Let Y_i denote a sampled reward from action i. By definition of the algorithm the exploration phase takes mk time steps, where each action gets chosen exactly m times, we have $\hat{\mu}_i(mk) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(Y_i\right)_j$, hence

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_i(mk) - \mu_i - (\hat{\mu_{i^*}}(mk) - \mu_{i^*}) &= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(Y_i\right)_j - \mu_i - \left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(Y_{i^*}\right)_j - \mu_{i^*}\right)\\ &= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\Big(\left(Y_i\right)_j - \mu_i\Big) - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\Big(\left(Y_{i^*}\right)_j - \mu_{i^*}\Big),\end{aligned}$$

where $\left(Y_i\right)_j - \mu_i$ is a centered Bernoulli random variable, which is 1/2-sub-Gaussian. The additive property of σ-sub-Gaussian random variables gives us that $\hat{\mu}_i(mk) - \mu_i - (\hat{\mu_{i^*}}(mk) - \mu_{i^*})$ is $1/\sqrt{2m}$-sub-Gaussian. Applying the exponential estimate (3.1) of $1/\sqrt{2m}$-sub-Gaussian random variable to the probability on the right-hand side of inequality (3.3) we obtain

$$\mathbb{P}\left(\hat{\mu}_i(mk) - \mu_i - (\hat{\mu_{i^*}}(mk) - \mu_{i^*}) \geqslant \Delta_i\right) \leqslant \exp\left(-\frac{\Delta_i^2}{2\left(1/\sqrt{2m}\right)^2}\right) = \exp\left(-m\Delta_i^2\right).$$

Hence the inequality (3.3) takes the following form:

$$\mathbb{E}\left[N_i(n)\right] \leqslant m + (n-mk)\exp\left(-m\Delta_i^2\right),$$

substituting into the regret decomposition (2.1) completes the proof. □

4 Multi-armed bandit with Bernoulli distribution under delays

Classical algorithms of multi-armed bandit problem assume no delays in rewards from the environment, that is to say, that realization of random variable X_t must be accessible by the algorithm at the same time step t when corresponding action has been chosen. The meta-algorithm [2] provides the framework to encapsulate the classical (base) algorithms in order to use them in the stochastic environment with delayed rewards without a need for an adaptation of the base algorithms to delays. When a delay of observation of the reward realization happens, the meta-algorithm doesn't use the base algorithm on the next step for the decision making, instead, it re-uses the action chosen by the base algorithm on the previous step (sends it to the environment) until one of the realizations of the chosen action is accessible. The meta-algorithm accumulates such delayed rewards when available in the internal buffer and uses them in the further time steps to feed the base algorithm without interaction with the environment. Assume that the first action has been chosen by the algorithm $I = A_1$, then the protocol of the meta-algorithm

is defined as follows:

1) If realization of the chosen action is available in the buffer then feed it to the base algorithm and ask for the next action I

2) Send the chosen action I to the environment

3) Receive all available (delayed) realizations from the environment and put them into the buffer; go to step 1.

Due to the stochasticity of delays, order and completeness of the sequence of realizations available for the algorithm are not guaranteed. The authors show that under such circumstances there is no impact on the base algorithm in the stochastic environment, that the independent and identically distributed property of the given subsequence is preserved:

Lemma 4.1. *[2] (see Lemma 4) Consider the multi-armed bandit problem with the stochastic environemnt under delays which are independent of the rewards. For any action i, for any $s \in \mathbb{N}$ let $Y_{i,s}$ denote the s^{th} reward the algorithm observes for selecting an action i. Then the sequence $\{Y_{i,s}\}_{s\in\mathbb{N}}$ is an i.i.d. sequence with the same distribution as the sequence of the rewards $\{X_{i,t}\}_{t\in\mathbb{N}}$.*

Also, it's shown that delays increase the upper bound of regret in an additive way with respect to the maximum delay $\tau^*_{i,n}$ of action i after n time steps [2] (see *Theorem 6*):

$$\mathbb{E}\left[R_n\right] \leqslant \mathbb{E}\left[R_n^{\text{Base}}\right] + \sum_{i=1}^{k} \Delta_i \, \mathbb{E}\left[\tau^*_{i,n}\right], \qquad (4.1)$$

where R_n^{Base} is the upper bound of the base algorithm. Hence, using the obtained inequality (3.2) we can write the upper bound of the Explore-First algorithm in the stochastic environment under delays in the scope of meta-algorithm:

$$R_n \leqslant m \sum_{i=1}^{k} \Delta_i + (n - mk) \sum_{i=1}^{k} \Delta_i \exp\left(-m\Delta_i^2\right) + \sum_{i=1}^{k} \Delta_i \, \mathbb{E}\left[\tau^*_{i,n}\right]. \qquad (4.2)$$

5 Numerical experiments

In this chapter, we present the results of the empirical tests of the Explore-First algorithm after we implemented software to simulate the multi-armed bandit in the stochastic environment with delays.

In the first experiment, we use the instance of the MAB with Bernoulli rewards with two actions of expectations 0.77 and 0.8 respectively, this structure is sufficient to study the delay impact, not the MAB problem itself. The experiment uses a horizon of $n = 1000$ time steps and is aggregated over 1000 independent runs. Results of numerical experiments and obtained theoretical upper bounds are shown in Figure 1.

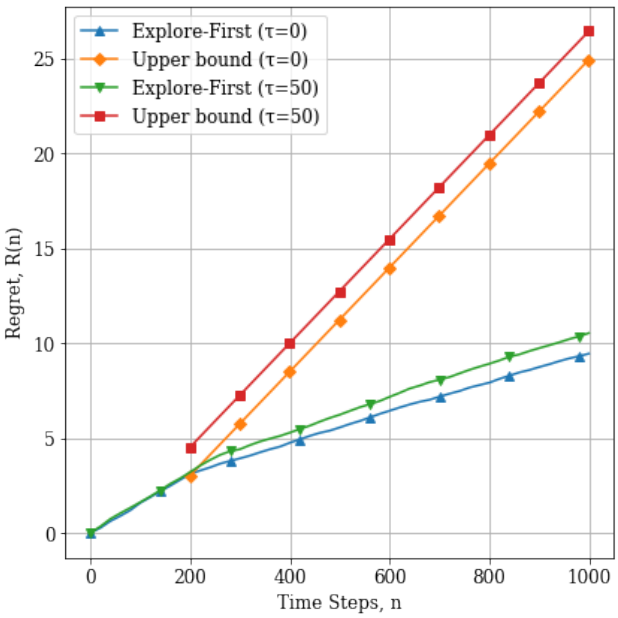


Figure 1: An empirical test of the Explore-First algorithm with delays $\tau = 0$ and $\tau = 50$ for a time horizon $n = 1000$, with the upper bounds (3.2) and (4.2)

There is a notable gap in an approximation of the upper bounds given by obtained inequalities (3.2) and (4.2) and empirical results, however, this gap is significantly smaller than in the case of inequality (2.3).

In the second experiment, we use data from a randomized clinical trial, The International Stroke Trial [12], that studied the effects of Heparin and Aspirin as combinations $H \times A$, where

$$H = \{\text{high heparin dose}, \text{low dose}, \text{no dose}\}$$
$$A = \{\text{with aspirin dose}, \text{no dose}\}.$$

19,435 patients took part in The International Stroke Trial studies, where long-term recovery (after 6 months) was being recorded. In this context, we consider recovery cases as a Bernoulli random variable, where were empirically computed the reward parameters of the original

study to obtain the mean vector across all subjects to simulate the experiment under the Bernoulli multi-armed bandit problem:

$$\mu = \{0.182, 0.178, 0.182, 0.201, 0.208, 0.206\}\,.$$

We simulate the experiment using the data given above to compare the Explore-First algorithm to the randomized controlled trial in the stochastic environment with delays. Results are aggregated over 500 independent runs and shown in Figure 2.

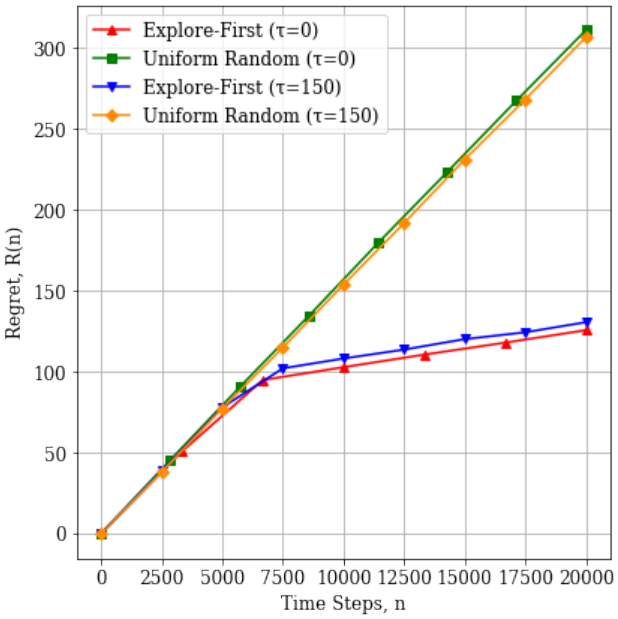


Figure 2: An empirical test of the algorithms Explore-First and Uniform Random (simulation of randomized controlled trial) with delays $\tau = 0$ and $\tau = 150$ for a time horizon $n = 20000$

The response-adaptive design has the potential to increase the effectiveness of the medical treatment within the clinical trial but often can reduce the statistical power. Another obstacle could be the delayed feedback, the existing algorithms need adaptation to such settings.

6 Conclusion

In this article, we considered the multi-armed bandit problem with Bernoulli distribution in the environment under delays. We presented an asymptotic analysis of the Explore-First algorithm in the considered settings by utilizing the exponential estimate of sub-Gaussian tail probability. Numerical experiments showed that the algorithm adapted to the environment with delays retains its theoretical guarantees by decreasing the effectiveness in an additive way with respect to the maximum delay. The developed software for simulation and numerical experiments have been published as an open-source library [13].

Список використаних джерел

1. *Thompson W. R.* On the likelihood that one unknown probability exceeds another in view of the evidence of two samples / W. R. Thompson // Biometrika. — 1933. — Vol. 25. — No. 3-4. — P. 285-294.

2. *Joulani P.* Online learning under delayed feedback / P. Joulani, A. Gyorgy, C. Szepesvri // PMLR. — 2013. — P. 1453-1461.

3. *Robbins H.* Some aspects of the sequential design of experiments / H. Robbins // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1952. — Vol. 58. — No. 5. — P. 527-535.

4. *Lai T. L.* Asymptotically efficient adaptive allocation rules / T. L. Lai, H. Robbins // Advances in applied mathematics. — 1985. — Vol. 6 —No. 1. — P. 4–22.

References

1. THOMPSON, W. R. (1933) On the likelihood that one unknown probability exceeds another in view of the evidence of two samples. *Biometrika*. 25 (3/4). p. 285-294.

2. JOULANI, P., GYORGY, A., & SZEPESVARI, C. (2013) Online learning under delayed feedback. In *International Conference on Machine Learning*. p. 1453-1461. PMLR.

3. ROBBINS, H. (1952) Some aspects of the sequential design of experiments. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 58 (5). p. 527-535.

4. LAI, T. L., & ROBBINS, H. (1985) Asymptotically efficient adaptive allocation rules. *Advances in applied mathematics*. 6 (1). p. 4-22.

5. *Anscombe F. J.* Sequential medical trials / F. J. Anscombe // Journal of the American Statistical Association. — 1963. — Vol. 58. — No. 302. — P. 365–383.

6. *Slivkins A.* Introduction to multi-armed bandits / A. Slivkins // Foundations and Trends in Machine Learning. — 2019. — Vol. 12. — No. 1-2. — P. 1–286.

7. *Bubeck S.* Regret analysis of stochastic and nonstochastic multi-armed bandit problems / S. Bubeck, N. Cesa-Bianchi // Foundations and Trends in Machine Learning. — 2012. — Vol. 5 — No. 1. — P. 1–122.

8. *Булдыгин В. В.* Метрические характеристики случайных величин и процессов / В. В. Булдыгин, Ю. В. Козаченко. — К.: ТВіМС, 1998. — 290 с.

9. *Kozachenko Yu. V.* Simulation of stochastic processes with given accuracy and reliability / Yu. V. Kozachenko, O. O. Pogorilyak, I. V. Rozora, A. M. Tegza. — Elsevier, 2016.

10. *Hoeffding W.* Probability Inequalities for Sums of Bounded Random Variables / W. Hoeffding // Journal of the American Statistical Association. — 1963. — Vol. 58. — No. 301. — P. 13–30.

11. *Lattimore T.* Bandit algorithms / T. Lattimore, C. Szepesvari. — Cambridge University Press, 2020. — 537 p.

12. *Sandercock P.* International stroke trial collaborative Group / P. Sandercock, M. Niewada, A. Czlonkowska // The international stroke trial database. Trials. — 2011. — Vol. 12. — No. 1. — P. 101.

13. *Dzhoha A.* Multi-armed bandit problem under delayed feedback: numerical experiments [Електронний ресурс] / A. Dzhoha. — 2021. — Режим доступу до ресурсу: https://github.com/djo/delayed-bandit.

5. ANSCOMBE, F. J. (1963) Sequential medical trials. *Journal of the American Statistical Association*. 58 (302). p. 365–383.

6. SLIVKINS, A. (2019) Introduction to multi-armed bandits. *Foundations and Trends in Machine Learning*. 12 (1–2). p. 1–286.

7. BUBECK, S., & CESA-BIANCHI, N. (2012) Regret analysis of stochastic and nonstochastic multi-armed bandit problems. *Foundations and Trends in Machine Learning*. 5 (1). p. 1–122.

8. BULDYGIN, V. V., KOZACHENKO, YU. V. (2000) *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes*. AMS, Providence, RI, 257 p.

9. KOZACHENKO, YU. V., POGORILYAK, O. O., ROZORA, I. V., & TEGZA, A. M. (2016) *Simulation of stochastic processes with given accuracy and reliability*. Elsevier.

10. HOEFFDING, W. (1963) Probability Inequalities for Sums of Bounded Random Variables. *Journal of the American Statistical Association*. 58 (301). p. 13–30.

11. LATTIMORE, T., & SZEPESVARI, C. (2020) *Bandit algorithms*. Cambridge University Press, 537 p.

12. SANDERCOCK, P., NIEWADA, M., & CZLONKOWSKA, A. (2011) International stroke trial collaborative Group. *The international stroke trial database. Trials*. 12 (1). p. 101.

13. DZHOHA, A. (2021) *Multi-armed bandit problem under delayed feedback: numerical experiments*. [Online] Available from: https://github.com/djo/delayed-bandit.

Received: 19.02.2021

УДК 519.21
https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/1.3

В.О. Мірошниченко[1], *асп.*

Швидкі розрахунки оцінок коваріаційних матриць методом складаного ножа

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64, e-mail: vitaliy.miroshnychenko@gmail.com.

V.O. Miroshnychenko[1], *PhD stud.*

Fast calculations of Jackknife covariance matrix estimator

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st., e-mail: vitaliy.miroshnychenko@gmail.com.

У роботі розглядається побудова довірчих еліпсоїдів для параметрів нелінійної регресії за спостереженнями з суміші кількох компонентів. Концентрації компонентів є різними для різних спостережень. Для побудови еліпсоїдів використовуються оцінки узагальненого методу найменших квадратів. Коваріаційні матриці цих оцінок оцінюються за допомогою різних модифікацій методу складаного ножа (jackknife). Якість отриманих еліпсоїдів у випадку логістичної функції регресії досліджується за допомогою імітаційного моделювання.

Ключові слова: асимптотична поведінка, метод оцінюючих рівнянь, модель суміші, нелінійна регресія, мінімаксні ваги, оцінка коваріації, jackknife.

We consider data in which each observed subject belongs to one of different subpopulations (components). The true number of component which a subject belongs to is unknown, but the researcher knows the probabilities that a subject belongs to a given component (concentration of the component in the mixture). The concentrations are different for different observations. So the distribution of the observed data is a mixture of components' distributions with varying concentrations. A set of variables is observed for each subject. Dependence between these variables is described by a nonlinear regression model. The coefficients of this model are different for different components. Normality of estimator for nonlinear regression parameters is demonstrated under general assumptions. A mixture of logistic regression models with continuous response is considered as an example. In the paper we construct confidence ellipsoids for the regression parameters based on the modified least squares estimators. The covariances of these estimators are estimated by the multiple modifications of jackknife technique. Performance of the obtained confidence ellipsoids is assessed by simulations.

Key Words: asymptotic behavior, generalized estimation equations, mixture model, non-linear regression, minimax weights, variance estimator, jackknife.

Статтю представив д.ф.-м.н., доцент Ямненко Р.Є.

1 Вступ

Моделі скінченних сумішей широко застосовуються у математичній статистиці для опису неоднорідних даних [1], [2]. У випадку, коли концентрації компонентів суміші є різними для різних спостережень, непараметричний підхід до оцінювання розподілів компонентів розглянуто у [3], [4]. Для суміші лінійних регресій модифікація оцінок методу найменших квадратів була запропонована у [5]. Для побудови довірчих інтервалів та еліпсоїдів для коефіцієнтів лінійної регресійної моделі можна використовувати техніку складаного ножа (СК, jackknife) [6].

Дана стаття продовжує започатковану у [9], [10] розробку техніки статистичного аналізу даних, що описуються моделлю суміші нелінійних регресій. У цих роботах введено узагальнені оцінки методу найменших квадратів для параметричних регресійних моделей компонентів суміші, отримані умови їхньої консистентності та асимптотичної нормальності. Тепер ми дослідимо можливості побудови довірчих еліпсоїдів на основі цих оцінок. Для цього нам будуть потрібні оцінки коваріаційних матриць параметрів регресії для різних компонентів суміші. Для цього ми використаємо метод СК, який вперше був запропонований у роботах Quenouille (1956)[7] та Tukey (1958) [8]. Загальна теорія цього методу для вибірок з незалежних, однаково розподілених спостережень викладена у п.

© В.О. Мірошниченко, 2021

5.5.2 [11].

У даній роботі розглянуто три модифікації оцінки СК, кожна із яких базується на використанні одного кроку процедури послідовного наближення Ньютона–Рафсона. Якість довірчих еліпсоїдів, побудованих на основі цих оцінок порівнюється у імітаційних експериментах на модельованих даних.

2 Модель суміші

Розглянемо модель суміші зі змінними концентраціями. Кожен досліджуваний об'єкт O належить одному із M класів (компонентів суміші). У кожного об'єкта є спостережувані та неспостережувані змінні. Номер компонента, якому належить об'єкт, не спостерігається. Його позначатимемо символом $\kappa(O) \in 1, ..., M$. Вектор спостережуваних змінних об'єкта O позначимо $\xi(O)$. Будемо вважати, що розподіл спостережуваних змінних для кожного компонента описується моделлю нелінійної структурної регресії. Таким чином

$$\xi(O) = \Big(Y(O), X^1(O), ..., X^d(O)\Big)^T,$$

де $Y(O)$ – відгук, $X(O) = \Big(X^1(O), ..., X^d(O)\Big)$ – регресори у моделі

$$Y(O) = g(X(O), b^{(\kappa(O))}) + \varepsilon(O).$$

Тут g – деяка відома функція $g\colon \mathbb{R}^D \times \Theta \to \mathbb{R}$, $b^{(\kappa)} = (b_1^{(\kappa)}, ..., b_D^{(\kappa)})^T \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^D,\ \kappa = 1, ..., M$ – невідомі коефіцієнти регресії, які відповідають κ-му компоненту суміші. Саме для цих коефіцієнтів далі буде побудовано довірчі еліпсоїди. $\varepsilon(O)$ – центрована випадкова похибка

$$\mathbb{E}[\varepsilon(O)|\kappa(O) = m] = 0, m = 1, ..., M,$$

зі скінченною дисперсією

$$\sigma_m^2 = \mathrm{Var}[\varepsilon(O)|\kappa(O) = m] < \infty.$$

(σ_m^2 невідомі).

Позначимо розподіл випадкової похибки $F_{\varepsilon,m}(A) = \mathbf{P}\Big(\varepsilon(O) \in A|\kappa(O) = m\Big)$, для довільної вимірної $A \subseteq \mathbb{R}$.

Вектори регресорів $X(O) = \Big(X^1(O), ..., X^D(O)\Big)$ вважаємо випадковими з розподілом, що залежить від $\kappa(O)$. Позначимо невідому функцію розподілу спостережуваних змінних $X(O)$

$$F_{X,m}(A) = \mathbf{P}\Big(X(O) \in A|\kappa(O) = m\Big),$$

для довільної вимірної $A \subseteq \mathbb{R}^D$.

Додатково ми припускаємо, що регресори $X(O)$ та похибки $\varepsilon(O)$ – незалежні при фіксованому $\kappa(O) = m,\ m = 1, ..., M$.

Вибірка Ξ_n, що спостерігається, складається зі значень $\xi_i = (Y_i, X_i^T)^T = \xi(O_i), i = 1, ..., n$, де $O_1, ..., O_n$ – незалежні об'єкти, які можуть належати до різних компонентів з ймовірностями

$$p_j^k = \mathbf{P}\{\kappa(O_j) = k\},$$

$$P = \Big(p^k\Big)_{k=1}^M = \Big(p_i^k\Big)_{i=\overline{1,n}}^{k=\overline{1,M}};\ \sum_{k=1}^M p_i^k = 1, 1 \leqslant i \leqslant n$$

(ці змішуючі ймовірності відомі для кожного об'єкта)

3 Оцінки параметрів, що отримані за допомогою оцінюючих рівнянь

Нехай далі k – фіксований номер компонента, для якого будується оцінка вектору параметрів $b^{(k)}$. Для побудови оцінок параметрів регресії різних компонент використаємо мінімаксні навантаження, визначені у [3]. Позначимо $\Gamma_n = \Big(\langle p^k, p^m\rangle\Big)_{k,m=1}^M$. Тоді матриця мінімаксних навантажень має вигляд

$$A = \Big(a_{i:n}^{(k)}\Big)_{k=\overline{1,M}}^{i=\overline{1,n}} = P\Gamma_n^{-1}. \tag{1}$$

Для оцінювання невідомих параметрів регресії природно використати навантажений метод найменших квадратів. Для цього складається функціонал МНК

$$G_n^k(\gamma) = \sum_{i=1}^n a_{i:n}^{(k)}\Big(Y_i - g(X_i, \gamma)\Big)^2.$$

Оцінки параметрів регресії є розв'язком оціночного рівняння, яке отримується шляхом диференціювання $G_n^k(b^{(k)})$:

$$\nabla G_n^k(\gamma) = \sum_{i=1}^n \nabla\Big(a_{i:n}^{(k)}(Y_i - g(X_i, \gamma))^2\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^n (-2) a_{i:n}^{(k)} s(\xi_i, \gamma) = 0, \tag{2}$$

де $s(z, \gamma)$ – елементарна оцінювальна функція і

$$s(z, \gamma) = \Big(y - g(x, \gamma)\Big)\nabla g(x, \gamma),\ z = (x, y).$$

Вектор оцінок буде стаціонарною точкою функціоналу $\nabla G_n^k(\gamma)$, але не завжди буде точкою мінімуму. У деяких випадках розв'язком рівняння (1) буде множина точок. У такому випадку як оцінку можна обрати будь-який елемент цієї множини, але ми вимагаємо, щоб оцінка була вимірною функцією від даних.

Позначимо $S_n(\gamma) = \sum_{i=1}^n a_{i:n}^{(k)} s(\xi_i, \gamma)$. Оцінки параметрів розглядатимуться для кожного компонента окремо, тому над оцінювальним виразом S_n не будемо писати індекс компонента k.

Означення: $\hat{b}_n^{(k)}$ – розв'язок оціночного рівняння (2), тобто така вимірна функція від даних Ξ_n, що $S_n(\hat{b}_n^{(k)}) = 0$ м.н., називається оцінкою методу найменших квадратів (МНК).

Введемо наступне позначення

$$\Gamma_\infty = \lim_{n\to\infty} n^{-1}\Gamma_n$$

Далі $X^{(m)}, Y^{(m)}, \varepsilon^{(m)}$ – випадкові величини із розподілами:

$$X^{(m)} \sim F_{X,m},\ \varepsilon^{(m)} \sim F_{\varepsilon,m} \text{ – незалежні,}$$

та

$$Y^{(m)} = g(X^{(m)}, b^{(m)}) + \varepsilon^{(m)}.$$

Також позначимо наступні суми

$$\langle a_{\cdot}^{(k)^2} p_{\cdot}^t p_{\cdot}^f \rangle_n = \sum_{i=1}^n a_{i:n}^{(k)^2} p_i^f p_i^t,$$

$$\langle a_{\cdot}^{(k)^2} p_{\cdot}^t \rangle_n = \sum_{f=1}^M \langle a_{\cdot}^{(k)^2} p_{\cdot}^t p_{\cdot}^f \rangle_n.$$

4 Складності оцінювання матриці коваріації оцінок параметрів регресії

У статті [10] наведено доведення асимптотичної нормальності оцінок регресії для моделі регресійної суміші. Далі наведено переформульовану теорему про асимптотичну нормальність оцінок МНК.

Позначимо

$$h(z) = \sup_{\gamma\in\Theta} ||\partial s(z,\gamma)/\partial\gamma||, i = \overline{1,n}.$$

Теорема 4.1. *Якщо має місце збіжність за ймовірністю послідовності оцінок $\hat{b}_n^{(k)}$ до $b^{(k)}$ і виконуються такі умови:*

1 Θ *– компактна множина, що включає* $b^{(k)}$

2 $\mathbb{E}_t||\xi^{(t)}||^\delta < \infty$, *для* $1 \leqslant t \leqslant M$ *та деякого* $\delta > 0$.

3 Нехай існують функції $\partial s(z,\gamma)/\partial\gamma$ *і для них виконуються наступні такі дві умови:*

3.a $\mathbb{E}_t|h(\xi^{(t)})|^{1+\delta} < \infty$ *для* $\delta > 0$ *з умови 2 та* $1 \leqslant t \leqslant M$.

3.b Для довільних $c > 0$ *та послідовності* $z_i \in \mathbb{R}^{D+1}$, *такої, що* $||z_i|| < c$, *і довільної відкритої множини* $U \in \Theta$, *функції* $\partial s(z_i,\gamma)/\partial\gamma$, $\gamma \in U$ *є рівностепеневонеперервними на* U.

4 $\exists \lim_{n\to\infty} n^{-1}\Gamma_n = \Gamma_\infty$

5 $\mathbb{E}_k||s(\xi^{(k)}, \theta^{(k)})||^2 < \infty$, $k = 1, ..., M$.

6 Існують граничні матриці $\lim_{n\to\infty} n \operatorname{Var} S_n(b^{(k)})$ *та* $\lim_{n\to\infty} L_n(b^{(k)}) = L(b^{(k)})$ *і вони невироджені, де* $L_n(b^{(k)}) = -\mathbb{E}\nabla S_n(b^{(k)})$.

Тоді

$$V_n^{-\frac{1}{2}}(\hat{b}_n^{(k)} - b^{(k)}) \to^w N_D(0, I_D),$$

$$V_n = L_n^{-1}(b^{(k)}) \operatorname{Var} S_n(b^{(k)}) L_n^{-1}(b^{(k)})^T,$$

$$L_n(b^{(k)}) = \mathbb{E}_k \nabla g(X^{(k)}, b^{(k)}) \nabla g^T(X^{(k)}, b^{(k)}),$$

$$\operatorname{Var} S_n(b^{(k)}) = \sum_{t=1}^M (\mathbb{E}_t s(\xi^{(t)}, b^{(k)}) s(\xi^{(t)}, b^{(k)})^T) \langle a_{\cdot}^{(k)^2} p_{\cdot}^t \rangle_n -$$

$$- \sum_{t=1}^M \sum_{f=1}^M (\mathbb{E}_t s(\xi^{(t)}, b^{(k)}) \mathbb{E}_f s(\xi^{(f)}, b^{(k)})^T) \langle a_{\cdot}^{(k)^2} p_{\cdot}^t p_{\cdot}^f \rangle_n.$$

Теорема 4.1 дає вигляд матриці коваріацій V_n, проте її використання ускладнюється декількома проблемами. Перша полягає в тому, що для деяких функцій $g(x,b)$ (наприклад логістичної, $g(x,b) = \sigma\Big(\langle x, b, \rangle\Big)$, важко порахувати математичні сподівання $\mathbb{E}_t s\big(\xi^{(t)}, b^{(k)}\big) s\big(\xi^{(t)}, b^{(k)}\big)^T$ і $\mathbb{E}_t s\big(\xi^{(t)}, b^{(k)}\big)$, $\forall k, t = 1, ..., M$. Інша проблема полягає в тому, що справжні значення параметрів для розрахунку матриці V_n невідомі. Експерименти зі статті [10] показали, що ці математичні сподівання можна рахувати наближено, і що замість справжніх параметрів регресії можна брати оцінки $\hat{b}_n^{(k)}$. Наведені дві проблеми можливо обійти, використовуючи техніку СК для оцінки матриці V_n.

Слідуючи [11] п. 5.5.2, опишемо стандартну процедуру СК. Далі $\hat{b}_n^{(k)}$ – оцінки методом оцінюючих рівнянь для k-го компонента, а $\hat{b}_{-1}^{(k)}, ..., \hat{b}_{-n}^{(k)}$ – оцінки отримані методом оцінюючих рівнянь із вилученими 1-м, ..., n-м спостереженнями відповідно. Символом $S_{i-}(\gamma)$ позначимо оцінювальну функцію із вилученим i-м спостереженням. Оцінки розглядатимуться для кожного компонента окремо, тому над оцінювальним виразом S_{i-} також не будемо писати індекс компонента k.

Означення. СК-оцінкою матриці розсіювання оцінок $\hat{b}_n^{(k)}$ називається матриця

$$\hat{V}_J = \sum_{i=1}^{n} (\hat{b}_{i-}^{(k)} - \hat{b}_n^{(k)})(\hat{b}_{i-}^{(k)} - \hat{b}_n^{(k)})^T. \qquad (3)$$

У статті [10], точність СК-оцінок визначених (3) була досліджена методом імітаційного моделювання. Потрібно зазначити, що дана процедура оцінки потребує багато обчислень, що є значним недоліком. У наступному розділі описано декілька можливих модифікацій оцінки для розв'язання цієї проблеми. Перша ідея – це використати оцінку, в якій при наближеному обчисленні оцінок $\hat{b}_{-1}^{(k)}, ..., \hat{b}_{-n}^{(k)}$ використовується лише один крок процедури Ньютона–Рафсона (НР). Інші два способи є модифікацією першого, якщо у однокроковій процедурі Ньютона–Рафсона замість гессіана відображення записати його оцінку.

5 Пришвидшення побудови оцінок матриці розсіювання методом СК

Процедура СК потребує розрахунку оцінок $\hat{b}_{i-}^{(k)}, i = 1, ..., n$, які в свою чергу будуються за навантаженнями $A_{(i-)}$. Ці навантаження можна рахувати кожен раз заново, проте у роботі [6] наведений алгоритм швидкого перерахунку $A_{(i-)}$ на основі вже відомої матриці навантажень A:

$$\Gamma_{(i-)}^{-1} = \Gamma^{-1} + \frac{1}{1-h_i}\Gamma_n^{-1} p_i p_i^T \Gamma_n^{-1},$$

тут $p_i = (p_i^1, ..., p_i^M)$ та $h_i = p_i^T \Gamma_n^{-1} p_i$

Наведена процедура зменшує кількість операцій розрахунку навантажень $A_{(i-)}$ із $o(n^2)$ до $o(n)$.

Для пришвидшення побудови оцінок $\hat{b}_{i-}^{(k)}, i = 1, ..., n$ далі використаємо однокрокову процедуру НР. Вона дає нам приблизні значення $\hat{b}_{i-}^{(k)}$ значно швидше, ніж точне розв'язування рівняння (1). Один крок методу НР у сторону зменшення узагальненого функціоналу найменших квадратів виглядає так:

$$\hat{b}_{i-}^{(k)} = \hat{b}_n^{(k)} - \Big[\nabla S_{i-}(\hat{b}_n^{(k)})\Big]^{-1} S_{i-}(\hat{b}_n^{(k)}), \qquad (4)$$

тут

$$S_{(i-)}(b) = \Sigma_{i\neq j} a_{j:n(-i)}^{(k)} \Big(Y_j - g(X_j, b)\Big) \nabla g(X_j, b),$$

та

$$\nabla S_{(i-)}(b) = -\Sigma_{i\neq j} a_{j:n(-i)}^{(k)} \nabla g(X_j, b) \nabla g^T(X_j, b) +$$

$$\Sigma_{i\neq j} a_{j:n(-i)}^{(k)} \Big(Y_j - g(X_j, b)\Big) Hg(X_j, b).$$

$Hg(X_j, b)$ – гессіан відображення g по параметру b.

Позначимо $SS_{JK} = \Big[\sum_{i=1}^{n} S_{i-}(\hat{b}_n^{(k)}) S_{i-}(\hat{b}_n^{(k)})^T\Big]$

Якщо підставити (4) у (3), то буде отримана перша модифікація оцінки $\hat{V}_J$

$$\hat{V}_{n,1} = \sum_{i=1}^{n} \Big[\nabla S_{i-}(\hat{b}_n^{(k)})\Big]^{-1} S_{i-}(\hat{b}_n^{(k)}) S_{i-}(\hat{b}_n^{(k)})^T \Big[\nabla S_{i-}(\hat{b}_n^{(k)})\Big]^{-1} \qquad (5)$$

Далі ми розглянемо дві модифікації, що отримані з (5) заміною виразу $\nabla S_{i-}(\hat{b}_n^{(k)}$ на $-\nabla S_n(\hat{b}_n^{(k)})$, або $L(\hat{b}_n^{(k)})$. Застосування цих двох модифікацій дають змогу не рахувати матриці $\nabla S_{i-}(\hat{b_n^{(k)}})$.

Заміна $\nabla S_{i-}(\hat{b}_n^{(k)})$ на $\nabla S_n(\hat{b}_n^{(k)})$ дає другу модифікацію оцінки V_n

$$\hat{V}_{n,2} = \Big[\nabla S_n(\hat{b}_n^{(k)})\Big]^{-1} SS_{JK} \Big[\nabla S_n(\hat{b}_n^{(k)})\Big]^{-1}.$$

Третя модифікація будується заміною $\nabla S_{i-}(\hat{b}_n^{(k)})$ на $-L(\hat{b}_n^{(k)})$. Тоді модифікована оцінка виглядатиме так:

$$\hat{V}_{n,3} = \Big[L(\hat{b}_n^{(k)})\Big]^{-1} SS_{JK} \Big[L(\hat{b}_n^{(k)})\Big]^{-1}.$$

6 Моделювання

Нехай $\hat{V}_n$ – консистентна оцінка V_n, тобто $V_n^{-1}\hat{V}_n$ збігається за ймовірністю до одиничної матриці при $n \to \infty$. Позначимо $\chi_D^2(\alpha)$ — квантиль рівня $1-\alpha$ χ^2-розподілу з D ступенями вільності,

$$B_{k;n} = \{b \in \mathbb{R}^D : \ (b - \hat{b}_n^{(k)})^T \hat{V}_n^{-1} (b - \hat{b}_n^{(k)}) <\leqslant \chi_D^2(\alpha)\}.$$

Тоді за теоремою 4.1

$$\mathbf{P}\{b^{(k)} \in B_{k;n}\} \to 1-\alpha,$$

тобто $B_{k;n}$ є асимптотичним довірчим еліпсоїдом для вектора справжніх значень коефіцієнтів регресії k-того компонента суміші.

Для перевірки точності таких довірчих еліпсоїдів, які використовують різні модифікації СК-оцінок коваріаційної матриці V_n, було проведено ряд імітаційних експериментів.

У кожному експерименті для заданого обсягу вибірки генерувались $N = 1000$ вибірок із суміші зі змінними концентраціями. По кожній згенерованій вибірці будувалася оцінка $\hat{b}^{(k)}$ вектора параметрів $b^{(k)}$ і їх матриця коваріації V_n оцінювалась трьома оцінками $\hat{V}_{n,t}$, де $t \in \{1,2,3\}$. Далі для кожної вибірки перевірялося попадання $b^{(k)}$ до довірчого еліпса із центром у $\hat{b}_n^{(k)}$ та матрицею коваріації, що дорівнювала $\hat{V}_{n,t}$. Номінальним рівнем довірчих еліпсоїдів обрано значення $\alpha = 0.05$. Результатами експериментів є частоти попадання справжніх значень у відповідні еліпсоїди.

Номери компонент генерованих об'єктів $\kappa_i = \kappa(O_i), i = 1,...,n$ обиралися відповідно до розподілів $(p_i^1,...,p_i^M)_{i=1}^n$, де ймовірності p_i^k згенеровані наступною процедурою:

$$p_i^k = \frac{u_i^k}{\sum_{t=1}^M u_i^t}; u_i^t \sim U[0,1]$$

Спостережувані характеристики об'єктів для m-го компонента суміші $\xi_i^{(m)} = (Y_i^{(m)}, X_i^{(m)})$ генерувалися наступним чином:

$$Y_i^m = g(X_i^m, b^{(m)}) + \varepsilon_i^{(m)};\ X_i^{(m)} \simeq N(\mu^{(m)}, \Sigma^{(m)}),$$

де

$$g(X,\gamma) = \frac{1}{1+e^{-\gamma_0 - \sum_{d=1}^D X_d\gamma_d}} = \sigma(X,\gamma).$$

Градієнт і гессіан функції $g(X,*)$, які потрібні для розрахунку модифікацій відповідно:

$$\nabla g(X,\gamma) = \sigma(X,\gamma)\Big(1-\sigma(X,\gamma)\Big)X,$$

$$Hg(X,\gamma) = \sigma(X,\gamma)\Big(1-\sigma(X,\gamma)\Big)\Big(1-2\sigma(X,\gamma)\Big)XX^T$$

Розрахунки були проведені окремо для різних розподілів похибки $\varepsilon_i^{(m)}$: нормального, рівномірного, та розподілу Стьюдента. Параметри розподілів та регресії наведені у таблиці 1.

	компонент	
	1	2
$\mu^{(m)}$	0.0	1.0
$\Sigma^{(m)}$	2.0	2.0
$b_0^{(m)}$	0.5	0.5
$b_1^{(m)}$	2	-1/3

Табл. 1: Таблиця параметрів моделювання

Експеримент 1 Значення параметрів для цього експерименту зазначено у таблиці (1). Похибки компонент ε^k мали один з таких розподілів: $\varepsilon_{1,i}^{(m)} \simeq N(0, 0.05^2)$; $\varepsilon_{2,i}^{(m)} \simeq U(-0.25, 0.25)$; $\varepsilon_{3,i}^{(m)} \simeq T_4/10$. Цей експеримент описується моделлю "повної роздільності", коли візуально спостереження можуть бути розділені на дві групи відповідно до різних компонент суміші. Приклад того, як виглядають модельовані дані, зображено на рисунку 1.

Як видно із таблиці 2, частоти включення справжніх значень параметрів до довірчих еліпсоїдів, що були отримані у результаті моделювання, прямує до теоретичного рівня $1-\alpha = 0.95$ зі збільшенням обсягу вибірки. Цей результат є очікуваним.

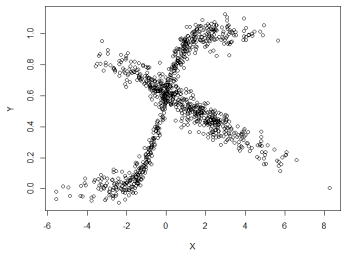


Рис. 1: Приклад діаграми розкиду пар X проти Y на даних з експерименту 1.

	$\varepsilon_{1,i}^{(m)}$		$\varepsilon_{2,i}^{(m)}$		$\varepsilon_{3,i}^{(m)}$	
n	1	2	1	2	1	2
100	0.863	0.899	0.843	0.891	0.85	0.903
500	0.931	0.941	0.928	0.931	0.934	0.939
1 000	0.945	0.945	0.942	0.928	0.946	0.930
5 000	0.948	0.954	0.947	0.940	0.931	0.937
7 500	0.936	0.954	0.949	0.941	0.943	0.936
10 000	0.951	0.952	0.943	0.937	0.953	0.944

Табл. 2: Частоти для $\hat{V}_{n,1}$ у експерименті 1

	$\varepsilon_{1,i}^{(m)}$		$\varepsilon_{2,i}^{(m)}$		$\varepsilon_{3,i}^{(m)}$	
n	1	2	1	2	1	2
100	0.852	0.897	0.845	0.879	Nan	Nan
500	0.927	0.944	0.92	0.923	0.802	0.959
1 000	0.948	0.942	0.94	0.93	0.850	0.931
5 000	0.939	0.93	0.939	0.936	0.931	0.939
7 500	0.944	0.943	0.93	0.944	0.943	0.933
10 000	0.941	0.937	0.938	0.953	0.944	0.942

Табл. 3: Частоти для $\hat{V}_{n,2}$ у експерименті 1

Експеримент 2 Для того, щоб подивитися вплив розкиду похибок регресії на якість різних методів, ми збільшили параметр дисперсії залишків у другому експерименті. Експерименти проведено окремо для різних розподілів похибки. Таблиці 5, 6, 7 показують, що частоти включення у наведеному експерименті менші, ніж аналогічні частоти у першому експерименті. І збільшення обсягу вибірки не дуже допомагає виправити ситуацію. Це означає, що випадок із великими значеннями параметру дисперсії є складним для наведеної моделі.

$\varepsilon_{1,i}^{(m)} \simeq N(0, 0.25^2)$; $\varepsilon_{2,i}^{(m)} \simeq U(-1.25, 1.25)$; $\varepsilon_{3,i}^{(m)} \simeq T_4/2$.

Всі інші параметри було залишено як у першому експерименті.

	$\varepsilon_{1,i}^{(m)}$		$\varepsilon_{2,i}^{(m)}$		$\varepsilon_{3,i}^{(m)}$	
n	1	2	1	2	1	2
100	0.845	0.905	0.82	0.907	0.797	0.919
500	0.93	0.922	0.915	0.939	0.919	0.943
1 000	0.939	0.942	0.931	0.933	0.925	0.944
5 000	0.95	0.938	0.943	0.946	0.944	0.945
7 500	0.951	0.955	0.941	0.943	0.945	0.938
10 000	0.943	0.938	0.955	0.931	0.950	0.930

Табл. 4: Частоти для $\hat{V}_{n,3}$ у експерименті 1

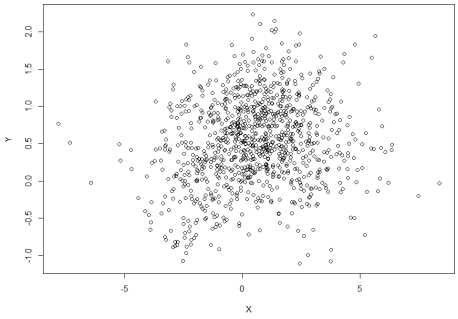


Рис. 2: Приклад діаграми розкиду пар X проти Y на данних з експерименту 2.

Експеримент 3

Параметри розподілу похибок регресії ті ж самі, що і у експерименті 2. Усі інші параметри підібрані таким чином, щоб продемонструвати роботу моделі у випадку, коли залишки регресії об'єктів з інших компонент не врівноважуються навантаженнями $a_{i:n}^{(k)}$. Прикладом цього є випадок, коли всередині k-го компонента, на деякій області B зосереджено близько третини спостережень, і їх відгуки концентруються біля значення 1. В той же час відгуки інших компонент зосереджені біля значення 0 і їхня кількість така, що ними не можна нехтувати. З огляду на таку ситуацію наближення $\hat{b}_n^{(k)}$ до $b^{(k)}$, означатиме збільшення значення функціоналу МНК і відповідно збільшення дисперсії відгуків.

У таблиці 8 наведені параметри розподілів і регресії цього експерименту.

З таблиць (9), (10), (11) видно, що частоти включення значно менші за теоретичне значення $1 - \alpha = 0.95$. Цей експеримент показує, що навіть при гарному виборі функції регресії і відносно малих значеннях похибок, в деяких випадках побудовані оцінки параметрів регресії і оцінки їх матриць коваріацій значно відрізняються від своїх справжніх значень.

	$\varepsilon_{1,i}^{(m)}$		$\varepsilon_{2,i}^{(m)}$		$\varepsilon_{3,i}^{(m)}$	
n	1	2	1	2	1	2
100	0.779	0.907	0.502	0.919	0.542	0.898
500	0.914	0.921	0.795	0.930	0.803	0.939
1 000	0.928	0.931	0.873	0.932	0.855	0.912
5 000	0.928	0.930	0.905	0.928	0.923	0.927
7 500	0.938	0.938	0.924	0.919	0.925	0.928
10 000	0.95	0.915	0.906	0.931	0.915	0.917

Табл. 5: Частоти для $\hat{V}_{n,1}$ у експерименті 2

	$\varepsilon_{1,i}^{(m)}$		$\varepsilon_{2,i}^{(m)}$		$\varepsilon_{3,i}^{(m)}$	
n	1	2	1	2	1	2
100	0.704	0.837	0.508	0.873	0.515	0.894
500	0.883	0.930	0.819	0.923	0.812	0.918
1 000	0.955	0.952	0.867	0.922	0.852	0.915
5 000	0.927	0.917	0.911	0.911	0.909	0.921
7 500	0.931	0.939	0.911	0.920	0.908	0.930
10 000	0.917	0.922	0.932	0.929	0.910	0.911

Табл. 6: Частоти для $\hat{V}_{n,2}$ у експерименті 2

	$\varepsilon_{1,i}^{(m)}$		$\varepsilon_{2,i}^{(m)}$		$\varepsilon_{3,i}^{(m)}$	
n	1	2	1	2	1	2
100	0.782	0.909	0.687	0.913	0.528	0.842
500	0.905	0.919	0.819	0.933	0.853	0.936
1 000	0.927	0.921	0.864	0.930	0.835	0.942
5 000	0.928	0.942	0.916	0.923	0.926	0.919
7 500	0.946	0.938	0.914	0.923	0.907	0.912
10 000	0.938	0.930	0.914	0.918	0.906	0.933

Табл. 7: Частоти для $\hat{V}_{n,3}$ у експерименті 2

7 Висновки

Нами побудовано декілька модифікацій оцінки матриці коваріації параметрів регресії на основі техніки складаного ножа для моделі суміші зі змінними концентраціями. Якість побудованих оцінок порівнюється за допомогою експериментів на модельованих даних. Результати експериментів показують, що надійності отриманих довірчих еліпсоїдів мало залежать від вибору варіанта оцінки коваріаційної матриці. Тому на практиці доцільно використовувати найбільш швидку з розглянутих оцінок — $\hat{V}_{n,3}$.

Список використаних джерел

1. D.M. Titterington, A.F. Smith, , U.E. Makov. Analysis of Finite Mixture Distributions / D.M. Titterington, A.F. Smith, , U.E. Makov // Wiley, New York (1985)

2. G.J. Mclachlan, D. Peel, Finite mixture models / G.J. Mclachlan, D. Peel // Wiley-Interscience (2000)

3. R.E. Maiboroda, Statistical analysis of mixtures // R.E. Maiboroda / Kyiv University Publishers, Kyiv (in Ukrainian) (2003)

4. R.E. Maiboroda, O.V. Sugakova, Statistics of mixtures with varying concentrations with application to DNA microarray data analysis// R.E. Maiboroda, O.V. Sugakova / Journal of nonparametric statistics. 24 , No 1 201–205 (2012)

5. R.E. Maiboroda, D. Liubashenko, Linear regression by observations from mixture wi-

	компонент	
	1	2
$\mu^{(m)}$	-2.5	2.5
$\Sigma^{(m)}$	2.0	2.0
$b_0^{(m)}$	0.5	-0.5
$b_1^{(m)}$	2	-2

Табл. 8: Таблиця параметрів моделювання

	$\varepsilon_{1,i}^{(m)}$		$\varepsilon_{2,i}^{(m)}$		$\varepsilon_{3,i}^{(m)}$	
n	1	2	1	2	1	2
100	0.311	0.258	0.197	0.187	0.170	0.170
500	0.609	0.490	0.466	0.397	0.487	0.412
1 000	0.717	0.618	0.597	0.496	0.604	0.514
5 000	0.907	0.840	0.835	0.724	0.831	0.727
7 500	0.929	0.881	0.864	0.766	0.862	0.776
10 000	0.928	0.885	0.872	0.782	0.886	0.799

Табл. 9: Частоти для $\hat{V}_{n,1}$ у експерименті 3

	$\varepsilon_{1,i}^{(m)}$		$\varepsilon_{2,i}^{(m)}$		$\varepsilon_{3,i}^{(m)}$	
n	1	2	1	2	1	2
100	0.27	0.223	0.172	0.178	0.189	0.159
500	0.599	0.5	0.292	0.266	0.454	0.402
1 000	0.755	0.646	0.609	0.512	0.602	0.492
5 000	0.758	0.643	0.829	0.745	0.849	0.724
7 500	0.927	0.871	0.888	0.798	0.851	0.721
10 000	0.932	0.916	0.875	0.831	0.867	0.778

Табл. 10: Частоти для $\hat{V}_{n,2}$ у експерименті 3

th varying concentrations // R.E. Maiboroda, D. Liubashenko / Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv, Ukraine

6. R.E. Maiboroda, O.V. Sugakova, Jackknife covariance matrix estimation for observations from mixture // R.E. Maiboroda, O.V. Sugakova / Modern Stochastics: Theory and Applications, 2019

7. M. H. Quenouille, Notes on bias in estimation / M. H. Quenouille // Biometrika, 43, 353-60 (1956).

8. J. W. Tukey, Bias and confidence in not quite large samples / J. W. Tukey // The Annals of Mathematical Statistics. 29 (2): 614 (1958)

9. V.O. Miroshnychenko, Generalized least squares estimates for mixture of nonlinear regressions // V.O. Miroshnychenko / Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv; Series: Physics Mathematics, 2019, 5

10. R.E. Maiboroda V.O. Miroshnichenko "Confidence ellipsoids for regression coefficients by observations from a mixture"// R.E. Maiboroda V.O. Miroshnichenko / Modern Stochastics: Theory and Applications, Vol.5, Iss.2 pp. 225 - 245, - 2018

11. V.O. Miroshnichenko, R.E. Maiboroda, Asymptotic normality of modified LS estimator for mixture of nonlinear regressions

	$\varepsilon_{1,i}^{(m)}$		$\varepsilon_{2,i}^{(m)}$		$\varepsilon_{3,i}^{(m)}$	
n	1	2	1	2	1	2
100	0.150	0.173	0.228	0.224	0.444	.445
500	0.689	0.649	0.467	0.502	0.508	0.555
1 000	0.706	0.643	0.657	0.627	0.708	0.681
5 000	0.921	0.888	0.848	0.780	0.838	0.782
7 500	0.933	0.916	0.879	0.835	0.864	0.835
10 000	0.941	0.924	0.863	0.840	0.879	0.860

Табл. 11: Частоти для $\hat{V}_{n,3}$ у експерименті 3

// V.O. Miroshnichenko, R.E. Maiboroda / Modern Stochastics: Theory and Applications, Vol.7, Iss.7 pp. 435 - 448, 2020

12. J. Shao, Mathematical Statistics // J. Shao / Springer, 2007

References

1. D. M. TITTETINGTON, A. F. SMITH, U. E. MAKOV (1985) Analysis of Finite Mixture Distributions. Wiley, New York
2. G.J. MCLACHLAN, D.PEEL (2000) Finite mixture models. Wiley-Interscience
3. R.E MAIBORODA (2003) Statistical analysis of mixtures. Kyiv University Publishers, Kyiv (in Ukrainian)
4. R.E. MAIBORODA, O.V. SUGAKOVA (2012) Statistics of mixtures with varying concentrations with application to DNA microarray data analysis. Journal of nonparametric statistics. 24 , No 1 201–205 (2012)
5. R.E MAIBORODA, D. LIUBASHENKO (2015) Linear regression by observations from mixture with varying concentrations, Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv, Ukraine
6. R.E. MAIBORODA, O.V. SUGAKOVA (2019) Jackknife covariance matrix estimation for observations from mixture, Modern Stochastics: Theory and Applications
7. M. H. QUENOUILLE (1956) Notes on bias in estimation. Biometrika, 43, 353-60 .
8. J. W. TUKEY (1958) Bias and confidence in not quite large samples. The Annals of Mathematical Statistics. 29 (2): 614
9. V.O. MIROSHNYCHENKO (2019) Generalized least squares estimates for mixture of nonlinear regressions, Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv; Series: Physics Mathematics, 2019, 5
10. V.O. MIROSHNYCHENKO, R.E. MAIBORODA (2020) Asymptotic normality of modified LS estimator for mixture of nonlinear regressions Modern Stochastics: Theory and Applications, Vol.7, Iss.7 pp. 435 - 448
11. J. Shao (2007) Mathematical Statistics, Springer

Received: 18.06.2020

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

УДК 539.376 + 519.642.2 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/1.4

Н.І. Затула[1], *к.ф.-м.н., доц.*
Д.В. Затула[2], *к.ф.-м.н.*

Апроксимація щільностей потенціалів для плоских в'язкопружних тіл із включеннями, що обмежені кусково-гладкими контурами

[1] Національний авіаційний університет, 03058, м. Київ, пр-т. Гузара Любомира 1,
e-mail: nelli.zatula@npp.nau.edu.ua
[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: dm_zatula@univ.kiev.ua

N. I. Zatula[1], *Ph.D., Associate Prof.*
D. V. Zatula[2], *Ph.D.*

Approximation of density of potentials for the flat viscoelastic bodies with inclusions, bounded by a piecewise smooth contours

[1] National Aviation University, 03058, Kyiv, 1 Liubomyra Huzara ave.,
e-mail: nelli.zatula@npp.nau.edu.ua
[2] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, 4d Glushkova str.,
e-mail: dm_zatula@univ.kiev.ua

Запропоновано підхід апроксимації невідомих щільностей потенціалів при дослідженні напруженого стану плоского в'язкопружного кусково-однорідного тіла з включеннями, що обмежені кусково-гладкими контурами. Метод базується на побудові системи гранично-часових інтегральних рівнянь для визначення невідомих щільностей потенціалів по контурах включень. Апроксимація невідомих щільностей потенціалів здійснювалася з урахуванням особливості напруженого стану плоского в'язкопружного тіла поблизу кутової точки лінії розділу областей.

Ключові слова: плоске в'язкопружне тіло, в'язкопружні характеристики областей, щільності потенціалів, принцип Вольтерра, резольвентні оператори, гранично-часові інтегральні рівняння, кутова точка, порядок сингулярності.

An approach for approximating unknown densities of potentials in the study of the stressed state of a flat viscoelastic piecewise homogeneous body with inclusions, bounded by piecewise smooth contours, is proposed. The method is based on the construction of a system of boundary-time integral equations to determine the unknown densities of potentials along the contours of the inclusions. The approximation of the unknown densities of potentials was performed taking into account the singularity of the stressed state of a flat viscoelastic body near the angular point of the dividing line of the regions.

Key Words: flat viscoelastic body, viscoelastic characteristics of regions, densities of potentials, Volterra principle, resolvent operators, boundary-time integral equations, angular point, singularity order.

Communicated by Prof. Moklyachuk M.P.

Wide application of composite materials in various industries and in the construction of structural elements requires the study of their strength properties, reliability and durability. It becomes necessary to solve specific problems of viscoelasticity when viscoelastic environments, consisting of homogeneous and isotropic regions with different values of viscoelastic parameters, are used as models of real objects. A detailed review of the approaches and methods of the theory of linear viscoelasticity is presented in [2].

One of the effective and applied numerical methods for solving boundary value problems of elasticity and viscoelasticity is the method of boundary integral equations, based on the theory of potential and methods of the modern theory of approximation. [5]. When solving the problems of deformation of piecewise homogeneous environments by the method of boundary integral equations, the resolving integral equations are obtained based on the conditions of continuity of movements and the corresponding components of the stress tensor at the contacting boundaries. Essential for solving this class of problems is the use of the apparatus of generalized functions and presentation of the viscoelastic parameters using

© N.I. Zatula, D.V. Zatula, 2021

unit characteristic functions in a form that is uniform for the entire region under consideration.

Let's use the approach proposed to study the stress state of a flat viscoelastic piecewise-homogeneous isotropic body occupying region D, exposed to a known force effects, consisting of a matrix D_0 and a finite number of inclusions D_p of arbitrary shape, bounded by piecewise-smooth contours Γ_0 and Γ_p, respectively ($p = \overline{1,\, n}$, n is the number of inclusions) [8].

To determine the stress state of the given region, we use the formulation of the second main problem of the theory of elasticity for inhomogeneous bodies in movements [6]:

$$\begin{gathered}\big(\lambda\, u_{l,l}\big)_{,i} + \Big[\mu\big(u_{i,j} + u_{j,i}\big)\Big]_{,j} + X_i = 0 \quad (x \in D),\\ \lambda\, u_{l,l}\, n_i + \mu\big(u_{i,j} + u_{j,i}\big) n_j = g_i \quad (x \in \Gamma), \qquad (1)\end{gathered}$$

where $u_i = u_i(x,\, t)$ — components of the motion vector, $X_i = X_i(x,\, t)$ and $g_i = g_i(x,\, t)$, $i = \overline{1,\, 2}$ — components of the vector of mass forces and the vector of surface forces, respectively; $n_j = \cos(\mathbf{n},\, x_j)$, $j = \overline{1,\, 2}$ — components of the unit normal vector $\mathbf{n}$ to the boundary Γ of the region D; $\lambda = \lambda(x,\, t)$, $\mu = \mu(x,\, t)$ — analogs of elastic Lamé constants that depend on time and are piecewise constant functions of coordinates and time. Solution (1) was performed by the integral-operator method using the Volterra principle [2].

In the absence of mass forces, and also when the unknown densities of potentials are the stresses on the contours of inclusions, based on the properties of the generalized functions $S\big(D_p\big)$ and $\delta(x,\, \xi)$, and due to Maxwell's theorem [6], we have

$$\begin{gathered}u_k(x,\, t) = \int_{\Gamma_0} g_i(\xi,\, t)\, U_k^i(x,\, \xi,\, t)\, d\gamma(\xi) -\\ - \frac{\overline{E}_p - \overline{E}_0}{\overline{E}_p} \int_{\Gamma_p} \sigma_{ij}^{(p)}(\xi,\, t)\, n_j(\xi)\, U_k^i(x,\, \xi,\, t)\, d\gamma(\xi). \qquad (2)\end{gathered}$$

Here

$$U_k^i(x,\, \xi,\, t) = \dot{U}_k^i(x,\, \xi,\, t) + \widehat{U}_k^i(x,\, \xi,\, t),$$

where $\dot{U}_k^i(x,\, \xi,\, t)$ is the fundamental solution for problems of two-dimensional flat-strain state of a viscoelastic infinite body; $\widehat{U}_k^i(x,\, \xi,\, t)$ — an additional term, which provides that the condition $g_k^i(x,\, \xi,\, t) = 0$ is satisfied for all $x \in \Gamma$ and $\xi \in D$ [8]; $\overline{E}_0$ and $\overline{E}_p$ — viscoelastic operators of homogeneous regions belonging to the class of resolvent operators [7]. The expression for $\sigma_{ij}^{(p)}(\xi,\, t)$ has the form

$$\begin{gathered}\sigma_{ij}^{(p)}(\xi,\, t) = \lambda_p(t)\, u_{l,l}(\xi,\, t)\, \delta_{ij} +\\ + \mu_p(t) \cdot \big(u_{i,j}(\xi,\, t) + u_{j,i}(\xi,\, t)\big),\end{gathered}$$

where $\lambda_0(t)$, $\mu_0(t)$, $\lambda_p(t)$, $\mu_p(t)$ — viscoelastic characteristics of the regions D_0 and D_p, respectively.

Using the Cauchy relations, Hooke's law, and formulas (2), we write the expression for the stress tensor components in the following form:

$$\begin{gathered}\sigma_{ij}(x,\, t) = \left(1 + \frac{\overline{E}_q - \overline{E}_0}{\overline{E}_0} S\big(D_q\big)\right) \times\\ \times \left[\int_{\Gamma_0} g_k(\xi, t)\, U_{ij}^k(x, \xi, t)\, d\gamma(\xi) - \right.\\ \left. - \frac{\overline{E}_p - \overline{E}_0}{\overline{E}_p} \int_{\Gamma_p} \sigma_{kl}^{(p)}(\xi, t)\, n_l(\xi)\, U_{ij}^k(x, \xi, t)\, d\gamma(\xi)\right], \qquad (3)\end{gathered}$$

where $U_{ij}^k(x, \xi, t)$ are stresses arising in a viscoelastic homogeneous body occupying region D under the action of unit concentrated forces at the point $\xi \in D$.

It follows from (3) that the stresses at any point of the considered region at an arbitrary time instant can be determined through the viscoelastic potentials of the double layer along the contour Γ_0 with a given density $g_k(\xi, t)$ and along the contours Γ_p with unknown densities $\sigma_{kl}^{(p)}(\xi, t)\, n_l(\xi)$. To determine the unknown densities, let us tend the point x to each of the contours Γ_p from inside the region D_p. Multiply both sides of (3) by $n_j(x)$ and obtain the system of boundary-time integral equations:

$$\begin{gathered}\sigma_{ij}^{(q)}(x,\, t)\, n_j(x) = \frac{2\overline{E}_q}{\overline{E}_q + \overline{E}_0} \times\\ \times \left[\int_{\Gamma_0} g_k(\xi, t)\, U_{ij}^k(x, \xi, t)\, n_j(x)\, d\gamma(\xi) - \right.\\ - \frac{\overline{E}_p - \overline{E}_0}{\overline{E}_p} \times\\ \left. \times \int_{\Gamma_p} \sigma_{kl}^{(p)}(\xi, t)\, n_l(\xi)\, U_{ij}^k(x, \xi, t)\, n_j(x)\, d\gamma(\xi)\right]. \qquad (4)\end{gathered}$$

For the numerical solution of system (4), let us discretize the contours of the inclusions by linear elements, which are characterized by the coordinates of their midpoints.

Let's approximate the unknown densities of potentials in expression (4). We introduce the function $f\left(x_n^{(p)}, \xi, t\right)$, that approximates the stresses at the n-th boundary element of the p-th inclusion with nodal point $x_n^{(p)}$ and depends on the time t. Then the unknown densities of potentials for an arbitrary, for example, n-th boundary element of the p-th inclusion can be represented as follows:

$$\sigma_{kl}^{(p)}(\xi, t)\, n_l(\xi) = \\ = A_{kl}\left(x_n^{(p)}, t\right) f\left(x_n^{(p)}, \xi, t\right) n_l\left(x_n^{(p)}\right), \quad (5)$$

where $A_{kl}\left(x_n^{(p)}, t\right)$ are unknown constants determined from discrete analogs of boundary-time integral equations (4); $n_l\left(x_n^{(p)}\right)$ — components of the outward normal vector to the contour of the inclusion at the point $x_n^{(p)}$.

For inclusions bounded by contours that do not contain angular points, the density of potential along each boundary element is assumed to be constant. In this case, the function $f\left(x_n^{(p)}, \xi\right)$, which approximates the stresses at each boundary element, does not depend on the time t and is equal to 1. Then expression (5) takes the form

$$\sigma_{kl}^{(p)}(\xi, t)\, n_l(\xi) = A_{kl}\left(x_n^{(p)}, t\right) n_l\left(x_n^{(p)}\right).$$

To take into account the influence of concentrators such as angular points on the stress-strain state in a viscoelastic piecewise homogeneous body, we use the approach proposed in [1]. Investigation of the singularity of the stress state in the flat problem for a compound viscoelastic body near the angular point of the dividing line of the regions leads to the solution of the transcendental equation [3, 4] depending on the viscoelastic parameters of the regions $\overline{E}$, $\overline{\nu}$, as well as the opening angles θ of these regions.

Solving this transcendental equation, we obtain the value of $s(t)$, which is its root with the least positive real part. In this case, the order of the singularity equals $\left|\operatorname{Re} s(t) - 1\right|$. Thus, the nature of the stress state at the vertex of the corner of a compound body is determined by the type of boundary conditions, viscoelastic characteristics of the material, geometry of the regions and does not depend on the type of loading.

For the angular boundary elements, we choose the approximation of the unknown densities of potentials corresponding to the peculiarity of the stress-strain state near the given angular point.

The densities of potentials in formula (4) are stresses, which in the vicinity of the angular point can be represented as

$$\sigma_{ij}(x, t) = o\left(r^{s_1(t)-1}\right), \quad (6)$$

where $s_1(t) = \operatorname{Re} s(t)$, $0 < s(t) < 1$, $s(t)$ is the root with the least positive real part of the transcendental equation [4].

Based on the above, we can conclude that in the case of a flat viscoelastic piecewise-homogeneous body consisting of a matrix D_0 and a finite number of inclusions D_p of arbitrary shape, bounded by piecewise-smooth contours Γ_0 and Γ_p, $p = \overline{1, n}$, respectively, the unknown densities of potentials for an arbitrary n-th boundary element of the p-th inclusion can be represented in the form (5).

Moreover, the function $f\left(x_n^{(p)}, \xi, t\right)$ in this formula has the following properties:

- $f\left(x_n^{(p)}, \xi, t\right) = 1$, if the nodal point $x_n^{(p)}$ belongs to an ordinary boundary element;
- $f\left(x_n^{(p)}, \xi, t\right) = \left(\frac{r}{d}\right)^{s_1(t)-1}$, if the nodal point $x_n^{(p)}$ belongs to an angular boundary element, and d is the length of this element; a_i, $i = \overline{1, 2}$ are the coordinates of the angular point, $r = \\ = \left[(\xi_i - a_i)\,(\xi_i - a_i)\right]^{\frac{1}{2}}$.

The advantage of the approach proposed in the paper is that for a given representation of unknown densities of potentials, there are no difficulties associated with aligning the nodal points with the angular points of the conjugated contours, since the values of the unknown densities are determined in the middle of the boundary elements.

The study of the singularities of the type of angular points shows that the influence of these singularities on the stress state in a viscoelastic piecewise-homogeneous body affects only in small neighborhoods of the angular points and practically does not affect the nature of the stress change in time. This is explained by the order of the

degree of the leading term of the asymptotics when solving the problem of the stress state of a compound region at certain values of the viscoelastic and geometric parameters.

Список використаних джерел

1. *Чобанян К.С.* Поведение поля напряжений около угловой точки линии раздела в задаче плоской деформации составного упругого тела / К.С. Чобанян, С.Х. Геворкян // Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. — 1971. — № 24 (5). — С. 16-24.

2. *Каминский А.А.* Механика длительного разрушения вязкоупругих тел с трещинами: теория, эксперимент (обзор) / А.А. Каминский // Прикладная механика. — 2014. — № 50 (5). — С. 3-79.

3. *Kaminskii A.A.* On the use of the "Trident" model for calculations of plastic zones near the crack tips and corner points / A.A. Kaminskii, L.A. Kipnis, V.A. Kolmakova, G.A. Khazin // International applied mechanics. — 2000. — № 35 (3). — С. 626-631.

4. *Kaminskii A.A.* Investigation of the stress-strain state of viscoelastic piecewise-homogeneous bodies by the method of boundary integral equations / A.A. Kaminskii, N.I. Zatula, V.N. Dyakon // Mechanics of composite materials. — 2002. — № 38 (3). — С. 209-214.

5. *Хуторянский Н.М.* Применение метода потенциала в задачах упругости и вязкоупругости. Прикладные проблемы прочности и пластичности / Н.М. Хуторянский // Горький: Изд. Горьковского ун-та. — 1979. — № 10. — С. 122-135.

6. *Ломакин В.А.* Теория упругости неоднородных тел / В.А. Ломакин. — М.: Изд. МГУ., 1976. — 368 с.

7. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. — 752 с.

8. *Zatula N.I.* Stressed-strained state of a viscous half-plane with circular inclusions / N.I. Zatula, V.I. Lavrenyuk // International applied mechanics. — 1995. — № 31 (9). — С. 754-760.

References

1. Chobanjan, K.S. and Gevorkjan, S.H., 1971. Povedenie polja naprjazhenij okolo uglovoj tochki linii razdela v zadache ploskoj deformacii sostavnogo uprugogo tela. *Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia*, 24(5), pp.16-24.

2. Kaminskii, A.A., 2014. Mehanika dlitel'nogo razrushenija vjazkouprugih tel s treshhinami: teorija, jeksperiment (obzor). *Prikladnaja mehanika*, 50(5), pp.3-79.

3. Kaminskii, A.A., Kipnis, L.A., Kolmakova, V.A. and Khazin, G.A., 2000. The use of the "trident" model in the analysis of plastic zones near crack tips and corner points. *International applied mechanics*, 36(3), pp.372-376.

4. Kaminskii, A.A., Zatula, N.I. and Dyakon, V.N., 2002. Investigation of the stress-strain state of viscoelastic piecewise-homogeneous bodies by the method of boundary integral equations. *Mechanics of composite materials*, 38(3), pp.209-214.

5. Xutoryanskyj, N.M., 1979. Primenenie metoda potenciala v zadachah uprugosti i vjazkouprugosti. Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti. *Gor'kij: Izd. Gor'kovskogo un-ta*, 10, pp.122-135.

6. Lomakyn, V.A., 1976. *Teorija uprugosti neodnorodnyh tel: Uchebnoe posobie*. MGU.

7. Rabotnov, Ju.N., 1966. *Polzuchest' jelementov konstrukcij*. M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit.

8. Zatula, N.I. and Lavrenyuk, V.I., 1995. Stressed-strained state of a viscous half-plane with circular inclusions. *International applied mechanics*, 31(9), pp.754-760.

Received: 11.02.2021

УДК 539.376 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/1.5

Рудницький О. Г., к.ф.-м.н., с.н.с.
Рудницька М. О., пров.інж.
Ткаченко Л.В., к.ф.-м.н., н.с.
Печук Є. Д., к.ф.-м.н., н.с.

Застосування нечіткої логіки при пошуку оптимального фільтру в задачах оптоакустики

Інститут гідромеханіки НАНУ,
03680, м. Київ, вул. Капніс 8/4
e-mail: lusia.tkch@gmail.com

A.G.Rudnitskii A.G., PhD (Phys.- Math.)
M.A.Rudnytska , Senior engineer
L.V.Tkachenko, PhD (Phys.- Math.)
E. D. Pechuk, PhD (Phys.- Math.).

Application of fuzzy logic in finding the optimal filter in optoacoustics problems

Institute of hydromechanics NASU,
03680, Kyiv, Kapnis str. 8/4
e-mail: lusia.tkch@gmail.com

У задачах оптоакустики знешумлення зареєстрованих сигналів є одним з найважливіших кроків. Сучасні методи видалення шумів, такі як вейвлет- або курвлет-фільтрація не завжди, на жаль, дають прийнятні результати при їх застосуванні в реальних умовах. Ефективність цих фільтрів суттєво залежить від апріорної інформації про вид шумів та сигналів, чисельних комбінацій та форм параметрів вейвлет-перетворення, а багатовимірне розширення таких фільтрів досить нетривіальне.

Кінцева мета нашого дослідження – виявити оптимальний за своїми характеристиками фільтр, зручний для застосування у лабораторній та медичній практиці, коли види шумів апріорі невідомі, а на налаштування фільтру не повинно витрачатися багато часу. У запропонованій роботі розглядаються просторові фільтри, які мають лише один параметр налаштування – розмір вікна. Аналізуються тривимірні розширення таких фільтрів, як медіанний фільтр та усереднюючий фільтр, їх адаптивні варіанти (просторовий фільтр Вінера та модифікований медіанний), а також ітеративний відсікаючий фільтр. За допомогою теорії нечітких множин в умовах багатокритеріального вибору було виявлено, що найкращими з перелічених фільтрів є модифікований медіанний та відсікаючий ітеративний фільтри, які демонструють найкращі результати за такими характеристиками якості, як відношення сигнал/шум, індекс структурної подібності, середньоквадратичне відхилення та пікове відношення сигнал/шум.

Ключові слова: обробка зображень, адаптивна фільтрація, просторова фільтрація, фотоакустична візуалізація, нечіткі множини.

Denoising is an important step in the early stage of signal preprocessing in optoacoustic applications.

The efficiency of such modern noise removal methods as wavelet or curvlet filtering depends significantly on the numerical combinations and forms of wavelet transform parameters, and the multidimensional extension of such filters is rather non-trivial. These issues are serious obstacle for using of these highly effective filters in the tasks of optoacoustic reconstruction, especially in real laboratorial or medical practice.

The objective of our study was to find the optimal filter, convenient for use in laboratorian and medical practice, when the types of noise are a priori unknown, and the filter settings should not take much time. In the offered work spatial filters which have only one parameter of adjustment - the size of a window are considered.

Three-dimensional extensions of such well-established denoising techniques, as mean filter, median filter, their adaptive variants (Wiener spatial filter and modified median filter), as well as iterative truncated arithmetic mean filter were analyzed. The proposed filters were tested on a test set that contains versions of Shepp-Logan's three-dimensional phantom with mixtures of Gaussian and alpha-stable noise, as well as speckle noise. The identification of the best filter for simultaneous suppression of these types of interference was carried out using the theory of fuzzy sets. In our tests, a modified median filter and an iterative truncated arithmetic mean filter were rated as the best choice when the goal is to minimize aberrations when noise is not known a priory.

Key words: image processing, adaptive filtering, spatial filtering, photoacoustic visualization, fuzzy sets.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я. О.

© О.Г. Рудницький, М.О. Рудницька.,
Л.В.Ткаченко, Є.Д. Печук 2021

Вступ

Специфічним явищем, зумовленим взаємодією лазерного випромінювання з речовиною, є збудження акустичних хвиль при імпульсному лазерному впливі. З точки зору взаємодії електромагнітного випромінювання з речовиною, отриманий при цьому акустичний відгук вміщує у собі інформацію про перехідні процеси, що відбуваються в опромінений області. Таким чином, оптично збуджені акустичні імпульси можуть бути використані як для визначення параметрів середовища, крізь яке пройшли ці імпульси (коефіцієнти теплового розширення, теплопровідності, та ін.), так і для дослідження неоднорідностей в об'єкті, що був опромінений, та на його поверхні. Це дозволяє активно використовувати можливості оптоакустичного методу в дефектоскопії, мікроскопії та томографії зразків. Слід зазначити, що оптоакустичний ефект, відкритий А. Белом ще у 1880 році, до створення лазерів використовувався лише в інфрачервоній спектроскопії газів. Розвиток лазерної техніки намітив основні шляхи розвитку оптоакустики: лазерне збудження акустичних відеоімпульсів у рідині, твердому тілі, напівпровідниках, створення гіперзвукових та релеєвських хвиль.

Розроблені згодом методи дистанційної оптичної реєстрації акустичних збурень на поверхні досліджуваного зразка дозволили зробити оптоакустичні дослідження безконтактними та неінвазивними, що зумовило їх широке використання у біомедичних дослідженнях та клінічній практиці (діагностичні програми з дослідженні онкологічних захворювань, візуалізації мозку, розвитку фармацевтичних засобів та моніторингу процесу лікування). Перевага такої методики полягає в тому, що вона використовує можливості висококонтрастного оптичного поглинання та глибокого ультразвукового проникнення. З її допомогою можливо отримувати характеристики, недосяжні на пристроях побудованих на інших фізичних принципах. Однак на цьому шляху існує багато проблем, пов'язаних із видаленням артефактів зображення, мультиспектральною обробкою даних, визначенням кількісних параметрів зображення, стратегіями відновлення зображень та труднощами, пов'язаними із швидкодією операцій реконструкції образів. Важливе місце серед цих проблем займає проблема зниження шумів у оптоакустичних (ОА) сигналах.

Відомо, що частотна смуга ОА-сигналів може бути досить широкою (кілька десятків МГц). Це зумовлено двома причинами. По-перше – частотна смуга оптоакустичного сигналу залежить від тривалості світлового імпульсу. По-друге, частотний спектр ОА-сигналів залежить від розміру цілі [1]. Крім того, ОА-сигнали дуже чутливі до шуму, що створюється периферійним обладнанням (джерело живлення, ступінчастий двигун напівпровідникового лазера тощо). Тому при обробці реальних ОА-сигналів дослідник має справу з ситуацією, коли спектр шуму перекриває смугу пропускання ОА-сигналу. Цей ефект призводить до спотворення компонентів зареєстрованого оптоакустичного сигналу. Отже, без попередньої обробки, реконструйовані зображення можуть страждати від низького співвідношення сигнал/шум та низької роздільної здатності.

Оскільки шумоподавлення знаходиться на самому початку операцій попередньої обробки, воно має великий вплив на результати подальших етапів. Головною перевагою надійного шумоподавлення є те, що воно може запобігти завищенню фону зображення та допомагає виділити слабкі, але суттєві особливості, одночасно запобігаючи утворенню хибних ознак [2]. Вагомою обставиною, також, є те, що задачі оптоакустичної томографії зазвичай вимагають використання погано обумовлених операторів, тому максимально очищені початкові дані можуть мати вирішальне значення для якісної реконструкції досліджуваних об'єктів.

Важливо зауважити, що більшість попередніх методів зниження рівня шумів у ОА-сигналах засновані на квазі-тривимірному підході, коли сигнали, зареєстровані на поверхні зразка очищаються від шумів послідовно від попереднього моменту часу до наступного. Потім з таких очищених фрагментів шар за шаром формується відфільтроване тривимірне зображення досліджуваного об'єкту. Цей підхід перетворює тривимірну просторово-часову задачу в послідовність двовимірних просторових задач. На жаль такий метод руйнує тісний зв'язок між фрагментами у часовому просторі. Залишковий шум та артефакти на відфільтрованих шарах відрізняються кадр до кадру, викликаючи таким чином неприємний суб'єктивно та шкідливий при реконструкції зображень ефект «мерехтіння». Тому результати реконструкції, заснованої на такому підході, на

практиці можуть давати спотворений та незадовільний результат. Крім того, у ОА-зображенні проблема реконструкції завжди тривимірна. Це пов'язано з характером оптоакустичного ефекту, коли для реконструкції об'єкту потрібна інформація з усього обсягу пов'язаних між собою тривимірних даних. Це означає, що більш доцільним і природним методом є тривимірна фільтрація, коли об'єктом фільтрації є об'ємне оригінальне 3D-зображення, а не послідовність двовимірних кадрів.

Надзвичайно важливим моментом у знешумленні ОА-сигналів є вибір фільтру.

У реальній лабораторній практиці види і склад шуму, який присутній в зображеннях, апріорі не відомі. Крім того, дуже часто необхідно автоматично проаналізувати програмним пакетом велику кількість зображень. Очевидно, що в цьому випадку сценарій зміни налаштувань фільтра по відношенню до різних видів шуму може бути досить складним для оператора і займатиме багато часу і зусиль. Одне з можливих рішень цієї проблеми – визначити фільтр, який би забезпечував найкращу продуктивність для одночасного придушення шумів різних видів. При цьому налаштування такого фільтра повинно бути максимально простим – бажано користуватися лише одним параметром.

Серед методів знешумлення, які б могли задовольняти цим умовам слід виділити такі: усереднення сигналу по множині зразків, «ковзаюче усереднення» та частотна фільтрація.

Ефективність першого способу – усереднення сигналу по множині зразків – суттєво обмежується фізіологічними змінами об'єкта у часі, рухами досліджуваної тканини через дихання, серцебиття, перистальтику або м'язовими рухами та механічними зрушеннями іншої природи.

«Ковзаюче усереднення» працює як фільтр низьких частот: воно зазвичай використовується для придушення високочастотних шумів, коли сам сигнал містить в основному низькочастотні компоненти. Частотна фільтрація може істотно знизити рівень шумових перешкод, якщо спектр шуму не перекривається (або має обмежене перекриття) з реальним спектром ОА-сигналу. Однак метод «ковзаючого усереднення» може знівелювати різкі зміни у корисному вихідному сигналі, а метод частотної фільтрації може відкинути потенційно корисні частотні компоненти, перекриті шумом.

Високу ефективність демонструють фільтри, основані на вейвлет-перетворенні, коли довільний сигнал (функція) розкладаються за деяким ортонормованим базисом, основними властивостями якого є частотно-часова локалізація та масштабованість. Якщо при цьому вдало підібрати базисні вейвлетні функції, метод фільтрації та параметри фільтру, то результати знешумлення для деяких видів шумів можуть бути дуже ефективними. На жаль, наявність великої кількості комбінацій вхідних параметрів (надто у тривимірному випадку) не дає можливості оперативно надавати перевагу якійсь з комбінацій при налаштуванні таких фільтрів у реальних умовах. Крім того, ефективність таких фільтрів суттєво залежить від апріорної інформації як про сам об'єкт, так і про шуми, яки спотворюють зображення. У біомедичних дослідженнях та умовах клінічної практики це можливо лише при роботі *in vitro*.

У зв'язку з вищезазначеним, метою цього дослідження був пошук (або розробка) простого, швидкого тривимірного фільтра для ефективного придушення невідомих апріорі шумів різних видів, які співіснують у ОА-сигналах. При цьому, такий фільтр повинен бути максимально простим і зрозумілим у налаштуванні.

Дизайн фільтрів

Більшість методів шумоподавлення для їх оптимальної роботи вимагають встановлення деяких параметрів вручну. Ці фільтри можуть давати дуже високу ефективність, але зазвичай вони не відповідають реальним умовам клінічної практики завдяки необхідності тонкого і тривалого налаштування численних параметрів. Тому, увага була зосереджена на найпростіших просторових фільтрах, які мають лише один параметр управління – розмір вікна. Цей параметр простий і інтуїтивно зрозумілий для оператора, оскільки він пов'язаний з мінімальним розміром об'єкта, який слід враховувати при аналізі зображень.

Перші два просторові фільтри, які ми розглядали, це усереднюючий (метод «ковзаючого усереднення») і медіанний фільтри. Усереднюючий фільтр (Mean) – це найпростіший лінійний фільтр, а медіанний – найпростіший нелінійний фільтр.

Перший з них є оптимальним для придушення адитивного гаусівського шуму (оптимальним з точки зору оцінки функції максимальної правдоподібності). На цій основі з'явилося багато лінійних фільтрів, які ефективно послаблюють адитивний гаусівський шум. На жаль, такі фільтри погано працюють з

довгохвостими шумами, розмивають дрібні структури зображення і спотворюють їх границі.

Навпаки, медіанний фільтр має переваги у придушенні довгохвостого шуму. Цей фільтр зазвичай застосовується для видалення імпульсних шумів на зображеннях і не розмиває краї.

Він є оптимальним для оцінки функції максимальної правдоподібності лапласівського шуму і до його недоліків слід віднести низьку ефективність у придушенні гаусівського шуму (погіршення може сягати 40% у порівнянні з лінійними фільтрами), сплощення трикутних верхівок, розмиття границь об'єктів на зображенні при збільшенні розмірів вікна.

Фільтр Вінера – фільтр з вдосконаленою лінійною технікою просторової фільтрації (фільтр мінімальної середньоквадратичної помилки MMSE). Цей фільтр адаптується до сигналу, пристосовуючись до його локальної дисперсії. Він виконує менше згладжування там, де дисперсія велика, тоді як в областях з малою дисперсією виконується більше згладжування. Найкраще цей фільтр працює з гаусівським або рівномірним шумом і для *n*-мірного гіперкуба визначається наступним чином:

$$b_w(d_1,...,d_n) = \mu + \frac{\sigma^2 - \nu^2}{\sigma^2}\left(a(d_1,...,d_n) - \mu\right),$$

де $d_1,...,d_n$ – координати дискретної точки в *n*-мірному гіперкубі;

$\mu = \frac{1}{\prod_{i=1,...,n} D_i} \sum_{d_1,...,d_n \in \eta} a(d_1,...,d_n)$ є місцевим (тобто віконним) середнім значенням; D_i – довжина *i*-го розміру гіперкуба;

$\sigma^2 = \frac{1}{\prod_{i=1,...,n} D_i} \sum_{d_1,...,d_n \in \eta} \left[a(d_1,...,d_n) - \mu\right]^2$ – дисперсія навколо кожного пікселя в *n*-мірному сигналі; $a(d_1,...,d_n)$ – значення кожного пікселя, що міститься в області η *n*-мірного сигналу, ν – загальна дисперсія шуму досліджуваного сигналу.

Працюючи таким чином, MMSE фільтр зберігає деталі зображення, одночасно усуває шум і зазвичай дає кращі результати, ніж стандартна неадаптивна лінійна фільтрація.

Для використання взаємодоповнюючих якостей та переваг медіанного фільтра та фільтра Вінера і взаємного усунення відповідних недоліків було запропоновано нелінійний адаптивний просторовий фільтр:

$$b_{mmwf}(d_1,...,d_n) = \widetilde{\mu} + \frac{\widetilde{\sigma}^2 - \widetilde{\nu}^2}{\widetilde{\sigma}^2}\left(a(d_1,...,d_n) - \widetilde{\mu}\right),$$

де $\widetilde{\sigma}^2 = \frac{1}{\prod_{i=1,...,n} D_i} \sum_{d_1,...,d_n \in \eta} \left[a(d_1,...,d_n) - \widetilde{\mu}\right]^2$ – дисперсія навколо кожного пікселя середньо-квадратичного відхилення *n*-мірного сигналу від медіани $\widetilde{\mu}$, $\widetilde{\mu} = Median\left[a(d_1,...,d_n)\right]$ – локальна (тобто віконна) медіана, $\widetilde{\nu}^2$ – це дисперсія шуму, яка оцінюється, як медіана усіх локальних дисперсій $\widetilde{\sigma}^2$, які обчислюються для кожного вікна, визначеного для кожної точки багатомірного сигналу.

Така модифікація оригінальної формули фільтра Вінера має дуже значні наслідки, спричинені введенням в адаптивний контекст медіанного оператора.

Зокрема, цей модифікований медіанний (MMedian) фільтр полегшує видалення імпульсних шумів з фону сигналу (властивість, типова для медіанного фільтра), зберігаючи незміненими краї. Тобто, на відміну від медіанного та вінерівського фільтра, цей фільтр гарно зберігає морфологію країв на ізольованих деталях зображення.

Ще одним фільтром, який також будується так, щоб забезпечити компроміс між перевагами та недоліками усереднюючого та медіанного фільтрів, є нещодавно запропонований ітераційний усікаючий середньоарифметичний фільтр (ITM) [7]. Цей фільтр ітераційно скорочує граничні значення сигналу у фільтруючому вікні до динамічного порогу. Цей поріг гарантує, що вихід фільтра сходиться до медіани вхідних вибірок. Правильний критерій зупинки дозволяє ITM-фільтру використовувати переваги, як середньоарифметичного, так і медіанних операторів.

In Silico експеримент

Для того, щоб оцінити ефективність різних підходів до видалення шумової перешкоди при предобробці реальних оптоакустичних сигналів, а також для порівняння впливу різних алгоритмів фільтрації на різні типи шуму, було проведено ряд числових експериментів у яких чисте синтетичне зображення спотворювалось різними видами штучно згенерованих шумів.

У якості чистого тестового образу виступав тривимірний Shepp-Logan фантом – синтетичне зображення, що широко використовується дослідниками в томографії. Цей фантом складається з відповідним чином впорядкованих

еліпсів (у тривимірному випадку – еліпсоїдів) різної величини, орієнтації та оптичної щільності (див. Рис.1). Така модель досліджуваного об'єкту була обрана в якості еталону завдяки своїй простоті, показовості з точки зору відображення анатомічних особливостей людської голови, а також завдяки широкому застосуванню такої моделі при дослідженні біомедицинських зображень.

Масиви даних (зображення), які були пошкоджені шумовими компонентами, створювались із різними піковими співвідношеннями сигнал/шум (PSNR) для гаусівського шуму, шуму «сіль та перець», суміші гаусівського та альфа-стабільного шумів, суміші гаусівського та спекл шумів.

Шум

Слід зазначити, що шум у реальному цифровому зображенні виникає не з одного джерела. Кожен елемент у ланцюжку перетворень, зареєстрованого датчиком сигналу дає свій внесок у остаточне спотворення вихідного зображення.
У реальній практиці типи та суміші шумів, присутні на зображеннях, апріорі невідомі. Ось чому ми використовували досить загальну модель для змішаного шуму, що містить адитивний та ексклюзивний шуми:

$$g(d_1,...,d_n)=\begin{cases} f(d_1,...,d_n)+n(d_1,...,d_n), & при \quad p \\ e(d_1,...,d_n), & при \quad 1-p \end{cases}$$

де $g(d_1,...,d_n)$ – пошкоджене шумом зображення, $f(d_1,...,d_n)$ – вільний від шумів оригінальний (вхідний) сигнал, $n(d_1,...,d_n)$ – адитивний шум (це може бути коротко- чи довгохвостий шум, такий як гаусівський або лапласівський шум) і $e(d_1,...,d_n)$ – це ексклюзивний шум. Ексклюзивним шумом може бути імпульсний шум, такий як «сіль та перець», або однорідно розподілений імпульсний шум. Поява кожного з цих двох типів шумів контролюється значенням ймовірності p, $p \in [0,1]$. Якщо p менше 1, виникає ексклюзивний шум, у іншому разі маємо справу з адитивним шумом.

Для адитивного шуму використовувався гаусівський та альфа-стабільний шум.

Альфа-стабільний шум, який також називають шумом Леві, був запропонований Леві, коли він вивчав узагальнену центральну граничну теорему [3,4]. Альфа-стабільний розподіл широко використовується для аналізу та моделювання сигналів з багатьох причин: у реальному житті існує багато негаусівських сигналів імпульсної природи і важкими хвостами їхнього розподілу. Це можуть бути підводні сигнали, сигнали атмосферного середовища, шуми телефонних ліній, деякі сигнали мобільного зв'язку тощо.

Для щільності ймовірності альфа-стабільного шуму не існує виразу у замкнутій формі, але його можна описати за допомогою характеристичної функції:

$$\varphi(t) = \exp\left(it\mu - \gamma^{\alpha} |t|^{\alpha} (1 - i\beta \operatorname{sgn}(t)\omega(t,\alpha))\right),$$

$$\omega(t,\alpha) = \begin{cases} \tan(\pi\alpha), & \alpha \neq 1; \\ 2\ln|t|/\pi, & \alpha = 1, \end{cases}$$

де характеристична експонента α є найважливішим параметром, що визначає особливості альфа-стабільного шуму $(0 < \alpha \leq 2)$. Чим менше значення α, тим важчим є хвіст розподілу та більш імпульсивний характер сигналу.

При α =2, альфа-стабільний розподіл стає розподілом Гауса із середнім значенням μ та дисперсією $\sigma^2 = 2\gamma^2$. У випадках α = 1, $\beta = 0$ та α =1/2, $\beta = 1$, альфа-стабільний розподіл перетворюється у розподіли Коші та Леві відповідно.

Ще одним видом шуму, який є дуже важливим при обробці ОА-сигналів, є спекл-шум [5]. Це «зернистий» шум, який зазвичай спостерігається майже у всіх когерентних системах візуалізації, таких як лазерні, акустичні та SAR (радар із синтетичною апертурою) зображення.

Спекл, спекл-структура (англ. *Speckle* – краплинка, плямка) – це випадкова інтерференційна картина створена взаємною інтерференцією когерентних хвиль, які мають випадкові зсуви фаз чи інтенсивностей. Нерівномірність фону при цьому обумовлюється когерентним додаванням сигналів, прийнятих від множини елементарних відзеркалювачів, зосереджених у межах одного елемента поверхні. Наявність спекл-шуму у зображенні призводить до зменшення контрасту зображення та ускладнення виконання таких операцій обробки, як виявлення країв або сегментація.

Математично спекл-шум може бути змодельований як різновид мультиплікативного шуму, коли зашумлене зображення $g(d_1,...,d_n)$, описується формулою

$g(d_1,...,d_n) = f(d_1,...,d_n)\cdot\left(1+n(d_1,...,d_n)\right)$,

де $f(d_1,...,d_n)$ – оригінальне (неспотворене зображення), а $n(d_1,...,d_n)$ – випадковий гаусівський процес з нульовим середнім. Тобто це – шум, що залежить від сигналу.

Запропоновані моделі шумів (гаусівський, «сіль та перець», альфа-стабільний, спекл-шум та їхні суміші) перекривають найбільш ймовірні види шумів, які можуть відповідати реальній лабораторній або медичній практиці при реконструкції оптоакустичних образів.

Тестування фільтрів

Оцінка якості зображення – одна з найважливіших частин процесу дослідження при розробці систем фільтрації та реконструкції образів [8,9].

Було обрано 4 міри якості зменшення шуму: середньоквадратична помилка (MSE), відношення сигнал/шум (SNR), пікове відношення сигнал/шум (PSNR) та індекс структурної подібності (SSIM – structure similarity).

Перші три показники визначаються співвідношеннями:

$$MSE = \frac{1}{mn}\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left[I(i,j)-K(i,j)\right]^2,$$

$$PSNR = 20\log_{10}\left(\frac{MAX_I}{\sqrt{MSE}}\right),$$

$$SNR = 10\log_{10}\left(\frac{P_{signal}}{P_{noise}}\right).$$

Тут MAX_I – це максимально можливе значення серед пікселів зображення (у випадку 8-біт представлення, це 255), *I(i, j)* – чисте оригінальне зображення розміру $m \times n$ у градаціях сірого, *K(i, j)* його зашумлене наближення і P – середня потужність.

Останні два показники виражаються у дБ.

Зазначені міри безпосередньо вимірюють різницю між зображеннями попіксельно. Вони є привабливими кількісними показниками втрати якості зображення завдяки простоті та математичній зручності. Але, на жаль, вони не завжди відповідають суб'єктивному зоровому сприйняттю якості зображення людиною.

Альтернативною оцінкою якості, заснованою на зміні структурної інформації, є індекс структурної самоподібності SSIM [10]. Цей індекс розроблявся для вдосконалення традиційних методів і вважається неофіційним стандартом оцінки якості зображень при наявності еталону. SSIM оцінює візуальний вплив трьох характеристик зображення: яскравості *(l(x,y))*, контрасту *(c(x,y))* та структури *(s(x,y))*. Загальний показник є мультиплікативною комбінацією трьох множників:

$SSIM(x,y)=[l(x,y)]^{\alpha}\cdot[c(x,y)]^{\beta}\cdot[s(x,y)]^{\gamma}$,

де

$$l(x,y) = \frac{2\mu_x\mu_x + c_1}{\mu_x^2+\mu_y^2+c_1},$$

$$c(x,y) = \frac{2\sigma_x\sigma_y + c_2}{\sigma_x^2+\sigma_y^2+c_2},$$

$$s(x,y) = \frac{\sigma_{xy} + c_3}{\sigma_x\sigma_y + c_3},$$

а μ_x, μ_y, σ_x,σ_y, та σ_{xy} – місцеві (віконні) середні значення, стандартні відхилення та перехресна коваріація оцінюваного зображення відповідно. При $\beta = \gamma = 1$ та $c_3 = c_2/2$, вираз для індекса спрощується:

$$SSIM(x,y) = \frac{(2\mu_x\mu_y + c_1)(2\sigma_{xy} + c_2)}{(\mu_x^2+\mu_y^2+c_1)(\sigma_x^2+\sigma_y^2+c_2)},$$

де $c_1 = (k_1 L)^2$, $c_2 = (k_2 L)^2$ дві змінні для стабілізації операції ділення з малими значеннями знаменника; L – динамічний діапазон значень пікселів (як правило, це $2^{\#bits/pxel}-1$); k_1=0.01 і k_2=0.03. Отриманий індекс SSIM приймає значення від – 1 до 1. Значення 1 досягається лише у випадку двох однакових наборів даних.

Як вже зазначалося, тестовим зображенням для оцінки ефективності розроблених алгоритмів виступав 3D-фантом Шеппа-Логана, центральні двовимірні перерізи якого вздовж осей x, y, z наведені на Рис.1. Для прогнозування того, які методи зменшення шуму можуть бути більш плідними, а також для порівняння впливу різних категорій шуму на різні алгоритми фільтрації використовувались зображення, штучно пошкоджені шумом. Набори даних були створені з різним піковим співвідношенням сигнал/шум (PSNR) для гаусівського шуму та для сумішей різних видів шуму. Було застосовано 5 розроблених 3D-фільтрів: усереднюючий фільтр, медіанний фільтр, просторовий фільтр Вінера, модифікований медіанний фільтр та ітеративний відсікаючий середньоарифметичний. У всіх випадках для всіх фільтрів використовувались 3-воксельні вікна. Розмір Шепп-Логан фантома був 256 × 256 × 256 (у вокселях). Для перших трьох фільтрів фільтрація виконувалась двічі для

одного зображення, а для ітеративного відсікаючого середньоарифметичного фільтра використовувалися лише 3 ітерації. Така невелика кількість ітерацій була обрана після дослідження, яке показало швидку збіжність фільтра.

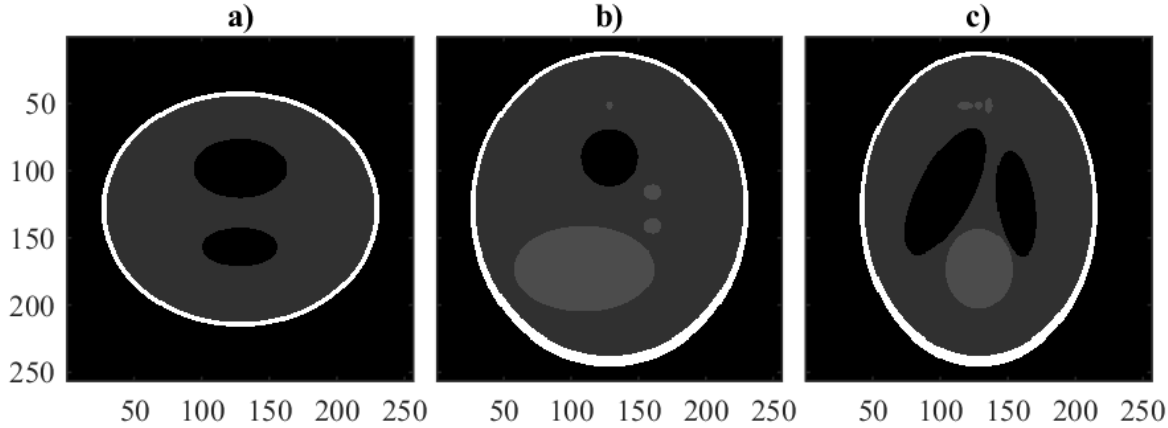


Рис.1. Центральні перерізи тривимірного Шепп-Логан фантома.

Загалом було проведено 20 числових експериментів для кожного з видів шумів та їх сумішей і для кожного фільтра, після чого були обчислені усереднені показники для кожної міри якості реконструкції (тобто для MSE, SNR, PSNR та індекса структурної подібності SSIM).

Нижче наведено приклади зображень із створених наборів для різних видів шумів, оброблених різними фільтрами. На Рис. 2(a) показані результати фільтрації 3D-зображень, пошкоджених гаусівським шумом з PSNR = 10 дБ, а на Рис.2(b) – результати фільтрації для суміші гаусівського та імпульсного шуму з PSNR = 10 дБ.

З рисунків видно, що для обраних категорій шумів візуально найкращі результати демонструють MMedian та ITM фільтри, у той час як усереднюючий фільтр розмиває границі на деталях зображення, а вінерівський фільтр суб'єктивно недосить чітко відтворює структуру образів, що рекоструювались.

Порівняти роботу MMedian та ITM фільтрів можна, аналізуючи Рис.3. На Рис.3(б) показані лінії профілю центральних перерізів фантома Шепа-Логана над його центральною областю. На Рис.3(а) це центральна вертикальна лінія на двовимірному перерізі, яка ділить образ на зашумлену частину (ліва половина рисунку) і відфільтровану (права половина). Видно, (особливо на врізці Рис.3(б)) що для цього конкретного випадку обидва фільтри добре зберігають границі деталей зображення, що аналізується, але дещо кращі результати дає MMedian-фільтрація.

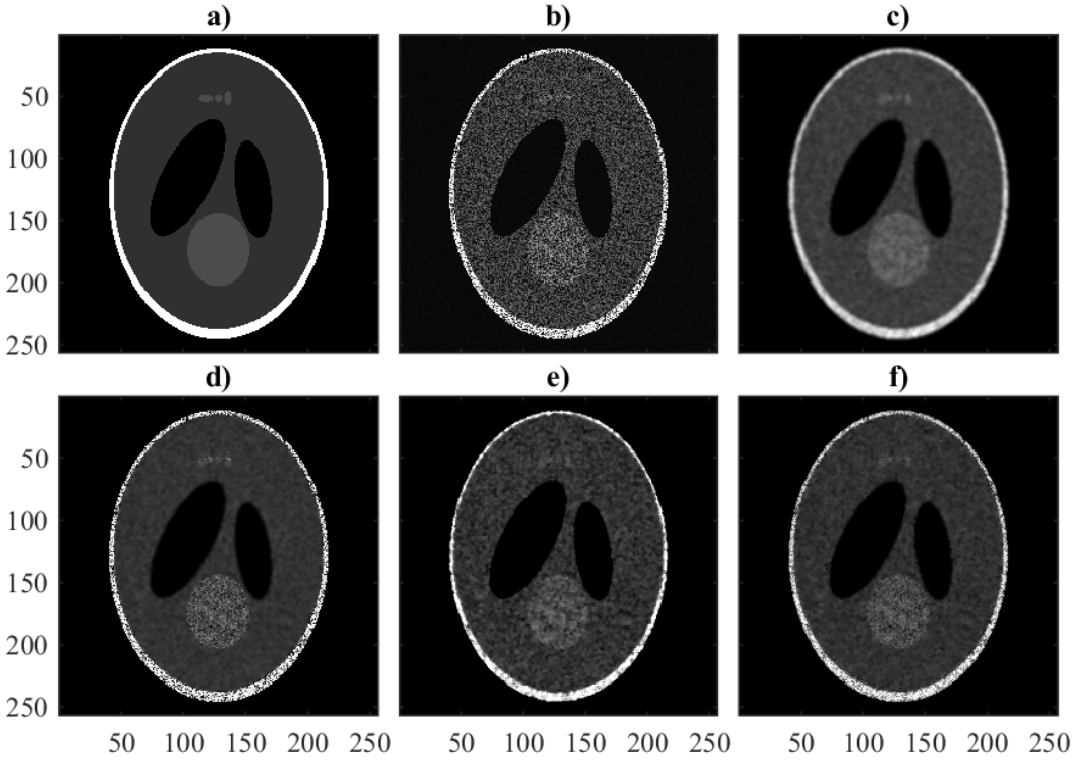


Рис.2. Центральний переріз Шепп-Логан-фантома вздовж вісі *z*: a) оригінальний образ; b)образ, пошкоджений сумішшю гаусівського та альфа-стабільного шуму (PSNR = 10 дБ); c) відфільтрований усереднюючим фільтром; d) відфільтрований вінерівським фільтром; e) відфільтрований модифікованим медіанним (MMedian) фільтром; f) відфільтрований ITM фільтром.

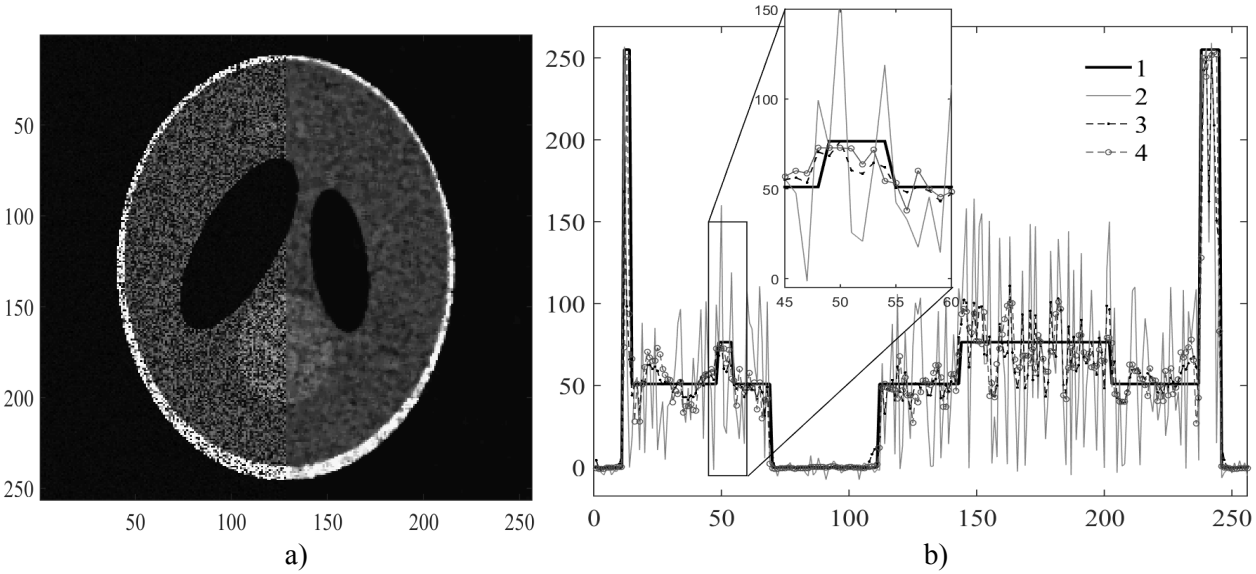


Рис.3 а) Центральний поперечний переріз у Шепп-Логан фантомі із сумішшю гаусівського та альфа-стабільного шуму (права частина) та після MMedian-фільтрації (ліва частина); б) Лінії профілю вздовж центрального вертикального перерізу Рис.3(а): лінія 1 – профіль вільного від шумів сигналу, 2 – зашумлений профіль, 3 – профіль після ITM-фільтрації, 4 – профіль після модифікованої медіанної фільтрації.

Узагальнене (по 20-ти вибірках) порівняння ефективності різних видів фільтрів для однієї з найбільш важливої з практичної точки зору і складної для обробки сумішей шумів – суми гаусівського та альфа-стабільного шуму (PSNR = 15 Дб) – представлене у Таблиці 1.

Таблиця 1

Суміш Альфа-стабільного та гаусівського та шуму

Міра / Фільтр	MSE	SNR	PSNR	SSIM	Time(s)
Noise	2057,5±16	50,96 ±0.03	15,00 ±0.03	0,09	
Mean	680,2 ±3	55,77 ±0.02	19,80 ±0.02	0,11	7
Wiener	482,28 ±7	57,26 ±0.06	21,30 ±0.06	0,13	8
MMedian	**113,55 ±2**	**63,54 ±0.07**	**27,58 ±0.07**	**0,16**	**485**
ITM	***271,98 ±4***	***59,75 ±0.09***	***23,79 ±0.09***	***0,14***	***53***

Як видно з таблиці, для цієї суміші шумів MMedian та ITM фільтри посідають перше та друге місця відповідно по всіх мірах якості.

.

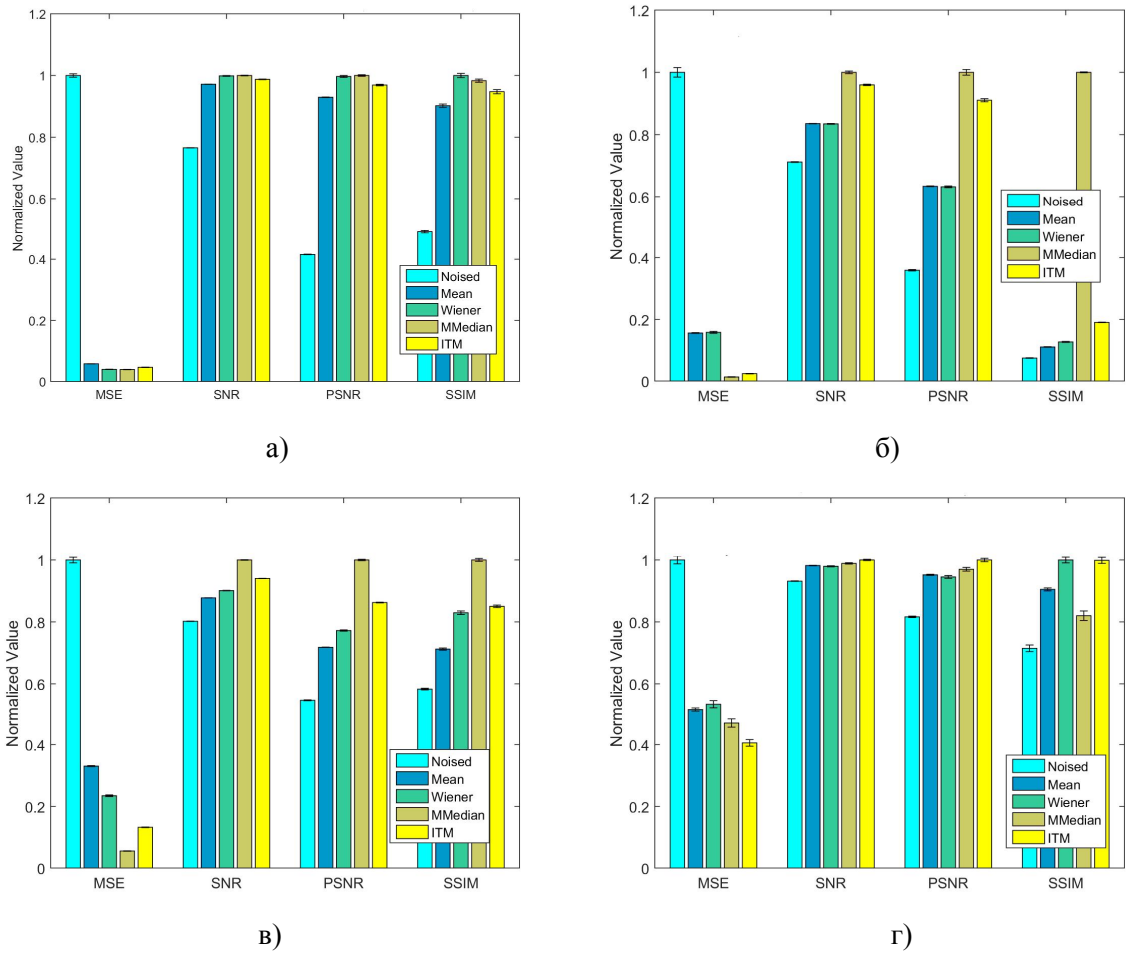


Рис.4. Ефективність різних фільтрів для різних видів шуму.а) Середні показники для гаусівського шуму (RSNR=10дБ); б) Середні показники для шуму "сіль та перець"; в) Середні показники для суміші гаусівського та альфа-стабільного шумів; г) Середні показники для суміші гаусівського та спекл шумів

Зауважимо, що час виконання процедури (останній стовпчик) також є важливим параметром для оцінки ефективності роботи різних методів. Алгоритм може втрачати свою цінність, якщо час його роботи затримує нормальний робочий процес.

Аналогічний аналіз був проведений і для інших видів шумів. Нормовані на відповідну міру, стовпчасті діаграми на Рис.4 демонструють ефективність запропонованих фільтрів для різних комбінацій фільтрів та шумів. Зробити усвідомлений вибір найкращого варіанту серед такого масиву графічних чи табличних даних дуже проблематично. Наприклад, у даному разі необхідно знайти найкращий варіант серед множини значень, представлених тривимірною матрицею із осями: вид метрики, вид шуму, вид фільтру. Нагадаємо, що метою дослідження було знайти глобально найкращий фільтр для всіх запропонованих категорій шуму по всім обраним метрікам. Крім того, перевагу одного фільтра над іншим бажано визначити кількісно і отримані оцінки мають бути ранжовані.

Оцінка нечітких множин

Отже, необхідно зробити чіткій вибір за умов, коли одна множина альтернатив краща в одних ситуаціях, інші альтернативи кращі за інших умов, і жоден з варіантів не дає найкращого результату загалом.

Одним із найпопулярніших та найефективніших підходів при прийнятті рішень в умовах невизначеності є підхід, заснований на теорії нечітких множин [9,10].

У класичній аристотелевій логіці твердження може бути лише істинним чи хибним і нічого між ними. Однак найчастіше реальні проблеми не завжди бувають однозначно істинними чи хибними. Зазвичай реальні ситуації є невизначеними, або мають на виході декілька варіантів. У нечіткій логіці замість величин істина і помилка (1 чи 0) істинність «розмита» і тому використовується деякий ступінь істини, який може приймати значення з нескінченної множини від 0 до 1 включно, тобто логічні операції задаються деякими характеристичними функціями. Числові значення таких функцій належності визначають ступінь сумісності кожного об'єкта із властивостями, характерними для всієї множини об'єктів.

У нашому випадку, концептуально функція належності призначалася для кількісної оцінки здатності фільтра видаляти шум і кожна з них будувалася в такий спосіб: для кожної оцінки шумозаглушення вибиралися мінімальне і максимальне значення міри якості (MSE, SNR, PSNR та SSIM). Потім відповідні міри нормувалися в діапазоні від 0 до 1 з урахуванням раніше оцінених мінімальних і максимальних значень цих мір. Відповідно до такого перемасштабування функція належності фільтра, який демонструє найкращі характеристики шумозаглушення для даного виду шуму і для обраної міри якості, приймала значення, яке дорівнює 1. І навпаки, фільтру, що дає найгіршу продуктивність шумозаглушення відповідала функція належності приймаюча нульові значення. Оскільки наша кінцева мета – визначити, який фільтр демонструє найкращу продуктивність у шумозаглушенні чотирьох різних категорій шуму для всіх розглянутих мір якості, до кожного із змодельованих шумів була застосована *максимінна* згортка нечітких відношень. Після застосування до отриманої множини значень принципу Беллмана-Заде була отримана Таблиця 2.

Таблиця 2

Ефективність фільтрів для різних видів шуму по всім мірам якості

Шум / Фільтр	Gauss	Impulse	Gauss+Impulse	Speckle+Gauss	Time(s)
Mean	0.81	0.13	**0.62**	**0.97**	**7**
Wiener	**0.99**	**0.17**	0.35	0.92	**8**
MMedian	***0.96***	***1.0***	***1.0***	***0.93***	485
ITM	**0.90**	**0.43**	**0.87**	**1.0**	**53**

З таблиці видно, що найкращі властивості для глобальної фільтрації по всім мірам якості демонструє MMedian-фільтр, який дає максимальний результат по мінімуму для

кожного класу. Зауважимо, що в представленій таблиці при підрахунку ефективності не приймався до уваги час фільтрації. Тут він представлений в секундах і передбачається, що оператор має його оцінювати на робочому місці, виходячи з конкретної ситуації. Зрозуміло, що цей параметр також легко може бути формалізований згідно до описаної процедури.

У результаті було отримано, що без врахування часових витрат найкращу продуктивність демонструє MMedian-фільтр, враховуючи ж швидкодію досліджуваних алгоритмів, слід віддати перевагу ITM-фільтру.

Зауважимо, що додатково до описаної вище (max-min)-композиції розраховувалась також (max-prod)-композиція нечітких відношень. Вона показала аналогічні результати. Тобто різні підходи багатокритеріальної оптимізації дають однакові результати. Відповідно до загальних рекомендацій прикладного системного аналізу відносно принципу багатомодельності, можна зробити висновок, про наявність стійкого зв'язку між елементами моделей. Стосовно розглядуваної проблеми, співпадіння результатів дає підстави для більш впевненого вибору найбільш ефективних методів фільтрації.

Висновки

Метою цього дослідження був пошук та розробка тривимірного фільтра, який би забезпечував поєднання високої ефективності по найбільш уживаним мірам якості з простотою налаштування, та нечутливістю до виду шуму. Для цього у пакеті МАТЛАБ були спроектовані тривимірні нелінійні адаптивні просторові MMedian та ITM фільтри, та три тривимірні загальновживані фільтри (усереднюючий, медіанний та вінерівський) для усунення чотирьох різних видів шуму: гаусівський (PSNR 10 Дб), суміш альфа-стабільного та гаусівського шуму (PSNR 10 Дб), суміш гаусівського та спекл-шуму (PSNR 10 Дб), та імпульсний шум "сіль та перець".

Комп'ютерне моделювання і наступне тестування розроблених алгоритмів на основі багатокритеріальної оптимізації нечітких множин показало, що найкращі результати з точки зору кількісних мір якості і візуальної оцінки демонструють ITM та MMedian-фільтри для одночасного придушення різних видів шуму (глобальна фільтрація).

Дослідження показало, що MMedian та ITM фільтри дозволяють ефективно придушувати шум, одночасно зберігаючи незмінені краї та морфологію деталей зображення. Для налаштування цих фільтрів потрібен лише один інтуїтивно зрозумілий параметр – розмір фільтруючого вікна. ITM-фільтр використовує лише арифметичні операції, тому він швидший, ніж фільтрація, основана на інших принципах. Розроблені тривимірні MMedian та ITM фільтри потребують мінімальний об'єм апріорної інформації і можуть використовуватися для нестаціонарних сигналів з неструктурованими варіаціями інтенсивності, а адаптивний характер цих фільтрів дозволяє розглядати їх як ефективний інструмент придушення різних типів шуму для широко кругу задач обробки багатовимірних сигналів.

Acknowledgements

A.G. Rudnitskii and M.A. Rudnytska were supported by VW Foundation program "Modeling, Analysis, and Approximation Theory toward application in tomography and inverse problems."

Список використаних джерел

1. Li C., Wang L. V., Photoacoustic tomography and sensing in biomedicine// Physics in Medicine and Biology. – 2009. – **54,** № 19. – P. 59-97.
2. Marengo, E., Robotti, E., Antonucci, F., Cecconi, D. et al., Numerical approaches for quantitative analysis of twodimensional maps: a review of commercial software and home-made systems. //Proteomics. – 2005. – **5**. – P. 654–666.
3. Mandelbrot B. The Pareto-Lévy Law and the Distribution of Income// International Economic Review 1960 – **1**, №. 2 P. – 79-106

References

1. LI C., WANG L. V.(2009), Photoacoustic tomography and sensing in biomedicine// *Physics in Medicine and Biology,* 54(19), p. 59-97.
2. MARENGO, E., ROBOTTI, E., ANTONUCCI F., CECCONI, D. et al.(2005), Numerical approaches for quantitative analysis of twodimensional maps: a review of commercial software and home-made systems. //*Proteomics,* 5 , p. 654–666.
3. MANDELBROT B.(1960) Pareto-Lévy Law and the Distribution of Income// *International Economic Review,*– **1(**2), p. – 79-106

4. Janicki A., Weron A. Simulation and Chaotic Behavior of Alpha-stable Stochastic Processes . – CRC Press, 1993. – 376 p.
5. M. Forouzanfar and H. Abrishami Moghaddam, Ultrasound Speckle Reduction in the Complex Wavelet Domain, in book "Principles of Waveform Diversity and Design", M. Wicks, E. Mokole, S. Blunt, R. Schneible, and V. Amuso (eds.), SciTech Publishing, 2010, Section B – Part V: Remote Sensing, pp. 558-77
6. Cannistraci, C. V., Montevecchi, F. M. & Alessio, M. Median-modified Wiener filter provides efficient denoising, preserving spot edge and morphology in 2-DE image processing.// Proteomics. – 2009. – **9**. – P. 4908–4919.
7. Xudong Jiang, Iterative Truncated Arithmetic Mean Filter and its Properties// IEEE Transactions on Image Processing. – 2012. – **21**, №4. – P.1537-1547.
8. Pedersen, M., Hardeberg, J. Y. Full-reference image quality metrics: Classification and evaluation // Foundations and Trends® in Computer Graphics and Vision, 2012, V. 7, № 1. – pp. 1–80.
9. Lin W., Kuo C. C. J. Perceptual visual quality metrics: A survey // Journal of Visual Communication and Image Representation.– 2011. – T. 22. – №. 4. – pp. 297–312.
10. Wang Zhou, Bovik, Alan C., Sheikh, Hamid R., and Simoncelli, Eero P. Image Qualifty Assessment: From Error Visibility to Structural Similarity. //IEEE Transactions on Image Processing, Volume 13, Issue 4, pp. 600–612, April 2004.
11. Zadeh, L. A., Fuzzy sets. //Inf. Control. – 1965. – 8. – P.338–353.
12. Zadeh, L. A., Toward a generalized theory of uncertainty. //Information Sciences. – 2005. – Vol. 172. – P. 1-40

4. JANICKI A., WERON A.(1993) *Simulation and Chaotic Behavior of Alpha-stable Stochastic Processes* . – CRC Press.
5. M. FOROUZANFAR and H. ABRISHAMI –MOGHADDAM (2010). Ultrasound Speckle Reduction in the Complex Wavelet Domain, in "Principles of Waveform Diversity and Design", M. Wicks, E. Mokole, S. Blunt, R. Schneible, and V. Amuso (eds.), *SciTech Publishing*, Section B – Part V: Remote Sensing, p. 558-77
6. CANNISTRACS, C. V., MONTEVECCHI, F. M. & ALESSIO, M.(2009). Median-modified Wiener filter provides efficient denoising, preserving spot edge and morphology in 2-DE image processing. *Proteomics,* 9, p.4908–4919.
7. XUDONG JIANG (2012). Iterative Truncated Arithmetic Mean Filter and its Properties. *IEEE Transactions on Image Processing,* 21(4), p.1537-1547.
8. PEDERSEN, M., Hardeberg, J. Y. (2012). Full-reference image quality metrics: Classification and evaluation. *Foundations and Trends® in Computer Graphics and Vision*, 7(1), p. 1–80.
9. LIN W., KUO C. C. J.(2011). Perceptual visual quality metrics: A survey. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 22(4), p. 297–312.
10. WANG ZHOU, BOVIK, ALAN C., SHEIKH, HAMID R., and SIMONCELLI, EERO P. (2004). Image Qualifty Assessment: From Error Visibility to Structural Similarity. *IEEE Transactions on Image Processing*, 13(4), p. 600–612.
11. ZADEH, L. A.(1965). Fuzzy sets. *Inf. Control*, 8, p.338–353.
12. ZADEH, L. A.(2005), Toward a generalized theory of uncertainty. //*Information Sciences*, 172. p. 1-40

Надійшла до редколегії 22.01.2021

КОМП’ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 004.4, 004.6, 004.932, 004.051, 004.021 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/1.6

І. Бєда[1], аспірант

Локалізація зміни сцен у відео

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна, 03022, м.Київ, просп. Академіка Глушкова, 4Д, 03022
e-mail: igor.beda@gmail.com

I. Bieda[1], PhD student

Scene Change Localization in a Video

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
4D, Academician Glushkov ave.,
Kyiv, Ukraine, 03022
e-mail: igor.beda@gmail.com

Мільйони відео щодня завантажуються на Youtube та подібні платформи. Однією з багатьох проблем, з якими стикаються ці служби, є вилучення корисних метаданих. Наприклад, розміщувати рекламу краще в середині відео, і рекламодавець вважає за краще показувати рекламу в перервах між сценами, де це буде менш нав'язливо. Інший приклад – подивитись лише найцікавіші чи найважливіші фрагменти відеозапису. Зрозуміло, що краще застосовувати автоматичний підхід до розпізнавання сцени замість того, щоб розмічати тисячі відеозаписів вручну. Виявлення змін сцени може допомогти автоматично проаналізувати відеопотік: відстежувати, які персонажі з'являються в яких сценах, як довго взаємодіють, їх стосунки та важливість. Потенційне рішення може враховувати різні фактори: появу об'єкта, зміну контрасту чи інтенсивності, зміну фону, зміни звуку.

У цій роботі запропоновано метод для ефективного виявлення зміни сцени, який базується на аналізі сцени з пороговими значенням, а також плавними змінами сцен. Він використовує підходи комп'ютерного зору та аналізу зображень для виявлення зміни сцени. Експериментальні результати демонструють ефективність запропонованого підходу до виявлення змін сцени.

Ключові слова: зміна сцени, переключення сцени, аналіз відео, локалізація сцени.

Millions of videos are uploaded each day to Youtube and similar platforms. One of the many issues that these services face is the extraction of useful metadata. There are a lot of tasks that arise with the processing of videos. For example, putting an ad is better in the middle of a video, and as an advertiser, one would probably prefer to show the ad in between scene cuts, where it would be less intrusive. Another example is when one would like to watch only through the most interesting or important pieces of video recording. In many cases, it is better to have an automatic scene cut detection approach instead of manually labeling thousands of videos. The scene change detection can help to analyze video-stream automatically: which characters appear in which scenes, how they interact and for how long, their relations and importance, and also to track many other issues. The potential solution can rely on different facts: objects appearance, contrast or intensity changed, other colorization, background chang, and also sound changes.

In this work, we propose the method for effective scene change detection, which is based on thresholding, and also fade-in/fade-out scene analysis. It uses computer vision and image analysis approaches to identify the scene cuts. Experiments demonstrate the effectiveness of the proposed scene change detection approach.

Keywords: scene change detection; scene cut; scene break; video analysis; scene localization.

Статтю представила к.ф.-м.н., доц. Розора І.В.

Вступ

Методи комп'ютерного зору (CV) допомагають вирішувати широкий спектр задач, використовуючи відповідні підходи: розпізнавати обличчя, виявляти різні об'єкти, застосовувати необхідні трансформації до сцен. Ще більше задач з'являється при аналізі відео. Так, можна реконструювати тривимірну сцену, відстежувати рухомі об'єкти. Одне з важливих завдань – виявлення зміни сцени. Під сценою ми маємо на увазі частину відео, в якій дія залишається на одному місці протягом деякого неперервного

© І. Бєда, 2021

періоду, а також усіх людей або речі, пов'язані з цим. Поняття сцени є корисним у багатьох випадках:

- розділити відео-потік на більш-менш незалежні та корисні частини (для різних цілей: реклама, ефективна пауза),
- проаналізувати присутність персонажів, що цікавлять, у певній зоні спостереження, та їх поведінку (діяльність акторів та аналіз частоти їх появи; з метою безпеки – знайти епізоди в записах з деякими конкретними видами діяльності; для таких ігор, як футбол – знайти моменти, що цікавлять, або кульмінації; відстеження дій гравців і персонажів),
- відстежувати людську діяльність або переміщення предметів у загальному контексті та знаходити моменти, що мають важливе значення, у відео-потоках або записах,
- для швидшого переміщення по відео,
- для кращої навігації по фільмах, телевізійних шоу або записах ігрових процесів після цього – для визначення моментів, що викликають найбільший інтерес; це однозначно покращить досвід перегляду для кінцевих користувачів.

Одне із завдань – розділити відео на окремі сцени – для подальшої анотації, спрощеної навігації, якщо користувачеві потрібна лише якась певна частина відео, та для подальшої обробки. Це спрощує збір наборів даних для багатьох нейронних мереж, які працюють з функціями з відео, економить час для користувачів, яким потрібно шукати певний момент на відео без тривалого перегляду, і пришвидшує роботу людей, що працюють з відео в цілому.

Існують методи, засновані на комп'ютерному зорі та машинному навчанні (ML), але вони не дають чудових результатів, і ми продемонструємо це далі в статті.

Основними критеріями цього завдання є точність та швидкість алгоритму для практичної зручності використання. Складність обчислень є також звичайним недоліком і перешкодою для реального використання для багатьох подібних алгоритмів, оскільки методи обробки відео зазвичай ресурсомісткі.

Деякі важливі результати щодо цієї задачі можна знайти у [1–7]. Здебільшого, сучасні роботи концентруються на певній підзадачі:

- виявлення зміни місця події у місті або вулиці (з зовнішніх вуличних камер, для міркувань безпеки),
- виявлення змін на супутникових знімках,
- розпізнавання рухомих об'єктів у відео безпілотних літальних апаратів (БПЛА),
- аналіз 3D-сцен з кількох камер,
- аналіз зображень радіолокатора із синтетичною апертурою (SAR).

Ми дослідимо класичне завдання виявлення сцени (або зміни сцени) у відео.

Аналіз індикаторів зміни сцени

Визначимо можливі показники зміни сцени. Не існує чіткого визначення такої події, але в нашому підході ми розглянемо наступне:

- затухання / згасання, плавний перехід, коли відео плавно зникає, а потім з'являється знову, але зі зміненим фоном (сценою),
- миттєва зміна сцени, коли фон відео негайно змінюється між двома послідовними кадрами,
- аналіз зсуву колірних компонентів та зміни значень об'єктів (інтенсивності, контрастності, насиченості, яскравості тощо) – у контексті різних колірних просторів; серед них ми проаналізуємо: інтенсивність (середнє значення кольорових каналів R, G, B) та контрастність (різниця максимальної та мінімальної насиченості пікселів у ділянці, поділена на суму мінімальної та максимальної насиченості),
- аналіз контурів об'єктів зображення (його структура, рух, інші зміни),
- аналіз покадрової різниці, який допомагає відстежувати, наскільки змінився вміст кадру (а не лише контури),
- розпізнавання обличчя для відстеження їх руху – для ідентифікації певних персонажів сцени,
- крім простого аналізу зображення в русі, може бути застосований аналізу звуку.

Одне з очевидних рішень, яке виникає при знаходженні відмінностей між двома зображеннями – використання оператора Кенні [8] для пошуку контурів зображення. Оператор Кенні дозволяє отримати матрицю з межами. Але матриця – це великий набір значень, який повільно обробляється. Тому ми пропонуємо розширити межі на цих матрицях, перетинати їх з контурами іншого кадру, а з отриманих накладок знаходити контури розбіжностей вже як масиви координат, а потім з'ясовувати, наскільки вони

змінилися між двома послідовними кадрами, описуючи це з одним значенням.

Таким чином, ми будемо обчислювати різницю не між місцями розташування, а між самими ланцюжками з точок, що утворюють контури. Цей шлях набагато репрезентативніший, оскільки нам потрібно знати, наскільки змінився вміст кадру, а не лише контури. Пропонуємо такий алгоритм дій:

• перетворити два послідовні кадри в чорно-білі, перевівши подання на кольорову схему HSV та видаливши насиченість (S),

• зменшити вплив шуму під час знаходження меж за допомогою розмиття Гауса,

• застосувати оператор Кенні і отримати матрицю меж для двох кадрів,

• розширити отримані межі,

• накласти розширені межі одного кадру на інший і навпаки – отримаємо два значення, які представляють, наскільки відрізняються межі, навіть розширюючись,

• знайти контури як масиви координат точок, які утворюють межі на матриці невідповідності,

• з'ясувати, наскільки велика різниця в контурах, взявши максимум з двох.

Введемо числову міру від 0 до 1, яка описує різницю контурів об'єктів між двома кадрами. Цей параметр є хорошим сигналом зміни сцени, оскільки він характеризує, наскільки сильно сцена могла змінитися з точки зору контуру об'єкта або зміни меж.

Цей підхід споживає багато обчислювальної потужності, тому його слід оптимізувати. Хороший момент полягає в тому, що його можна розпаралелювати природним шляхом – аналізом окремих кадрів. Зараз він працює в режимі реального часу в паралельному режимі на процесорі Intel Xeon E5 (16 ядер).

Обчислювальний експеримент та валідація моделі

Продемонструємо аналіз та етапи алгоритму на деяких експериментальних даних (аналіз прикладу відеозапису).

На рис. 1 показано зміну інтенсивності в часі, де кожен значний стрибок є потенційно можливою зміною сцени.

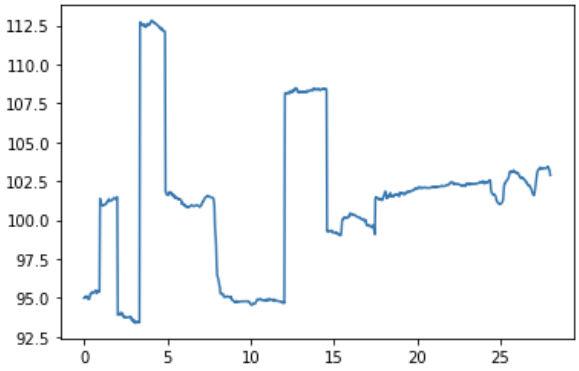


Рис. 1. Зміна інтенсивності освітлення у часі

Різниця міжкадрової інтенсивності в кожен момент часу показана на рис. 2.

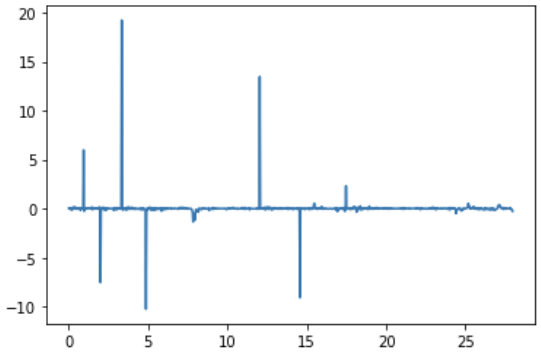


Рис. 2. Зміна відносної інтенсивності освітлення між кадрами

Справді, у нас спостерігаються зміни сцени в ці часові кліки, але є також кілька невеликих піків, і їх слід дослідити на предмет зміни сцени. У даному відео – 9 змін сцени. Отже, ми продовжуємо аналіз інших кольорових показників.

Графік зміни насиченості в залежності від часу представлений на рис. 3, де ми можемо побачити нові можливі точки зміни сцени. На рис. 4 видно різницю в насиченості кадрів.

Основні піки знаходяться в однакові моменти часу з попередніми графіками. У той же час менші піки втрачаються порівняно з рис. 2, показуючи, що на інтенсивність впливають також відтінок та значення компонентів кольорової схеми HSV. Отже, ми робимо висновок, що насиченість тут мало впливає на виявлення зміни сцени.

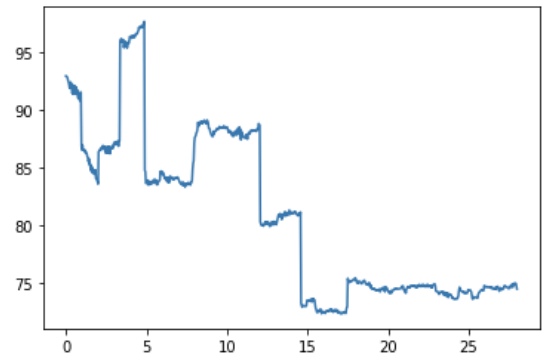


Рис. 3. Зміна насиченості освітлення у часі

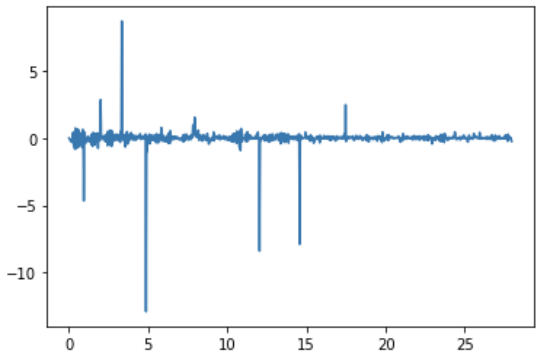


Рис. 4. Зміна відносної насиченості освітлення між кадрами

При такому аналізі пропускається щонайменше одна зміна сцени через її поступове зменшення / зменшення (плавну зміну). Отже, нам також потрібно знайти та дослідити локальні піки в коефіцієнті зміни кордонів (від 0 до 1), який був описаний вище.

З попереднього аналізу випливає, що найвищі піки зміни інтенсивності відображають негайну зміну сцени, тоді як серія суміжних, але нижчих піків показує часовий інтервал повільної (або зникаючої / згасаючої) зміни сцени. Також рекомендується поєднувати аналіз інтенсивності та насиченості одночасно, щоб не пропустити точки зміни сцени. Далі ми покажемо, як локалізувати ці піки. Повинен бути певний поріг, щоб їх виявити. Цей поріг не може бути статичним, оскільки він, очевидно, залежить від якості відео, і може виявити неважливі піки або пропустити зміну сцени на відео. Отже, нам потрібен певний адаптивний поріг.

Хорошими кандидатами на адаптивний поріг є ентропійне порогове значення та динамічне порогове значення на основі вікна, де однією з проблем є підрахування належного розміру вікна (кількість кадрів, які потрібно проаналізувати одночасно для отримання найбільш точних результатів роботи – власне, виявлення зміни сцени).

Використаємо рекурсивний адаптивний поріг пошуку та коригування. Це означає, що відео розділимо на частини за першим базовим порогом (обговорено пізніше) на основі зміни інтенсивності (рис. 5 – це рис. 2, взятий за модулем). Потім процес поділу відео триває рекурсивно, поки це залишається можливим – обчислюється новий пороговий рівень і знаходяться піки, які його перевищують. Наприклад, для розглянутого відео цей процес дав 3 ітерації (рис. 5).

Ми пропонуємо розраховувати поріг як різницю початкової та кінцевої інтенсивності (за модулем), помножену на деякий пороговий коефіцієнт. Його оптимальне значення було знайдено експериментально – див. Таблицю 1. Значення 5 дає найменше значення «Хибнопозитивні + хибні негативні» та більшість справжніх позитивних результатів у досліджуваному наборі відео.

Таблиця 1. Граничні коефіцієнти

Граничний коефіцієнт	True Positives	False Positives	False Negatives
2	17.8% (74)	82.2% (342)	0% (0)
5	97.4% (74)	2.6% (2)	0% (0)
8	100% (68)	0% (0)	8% (6)
15	100% (57)	0% (0)	23% (17)

Алгоритм зупиняється, коли на відео більше немає піків, які перевищують розрахований поріг для цієї конкретної частини відео.

Для змінення сцени з поступовим зменшенням нам все одно потрібно згрупувати локальні піки в кластери та проаналізувати їх. Нам потрібно встановити максимальний розмір кластера. Гіпотеза полягає в тому, що 0,5 секунди – це хороша оцінка. Цей розмір передбачувано залежить від загальної швидкості відео, а отже і від швидкості зміни сцени. Тут ми визначаємо найбільш підходяще середнє значення, яке зручно для більшості відео (принаймні, для проаналізованих зразків) і представляє найкраще

обране експериментальне значення на даний момент - див. Таблицю 2 для детальних розрахунків.

Таблиця 2. Максимальний розмір кластера

Макс. розмір кластера, сек.	True Positives	False Positives	False Negatives
0.2	4	0	7
0.5	11	0	0
0.7	11	2	0
1.2	11	7	0
2	11	22	0

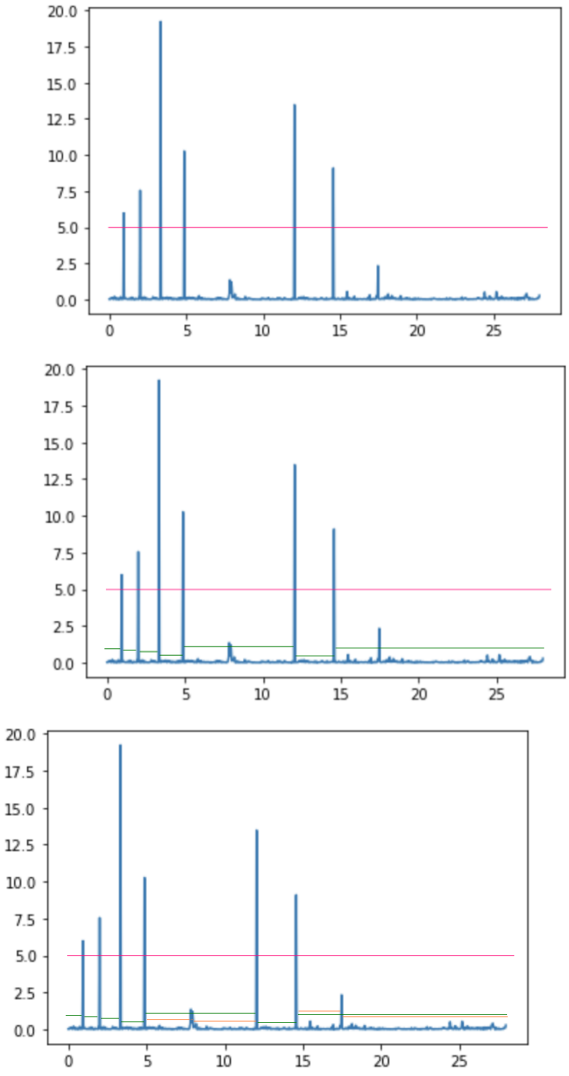


Рис. 5. Зміна відносної насиченості освітлення між кадрами

Дуже короткі періоди часу не фіксують всіх змін сцени (див. Стовпець "True positives"), тоді як тривалі періоди (більше приблизно 1 сек.) починають враховувати незначні локальні піки (за їх кількістю) і генерувати False Positives. Далі ми вибираємо часову позначку в кожному кластері з максимумом оператора Кенні, згаданого раніше, що є мірою різниці між кадрами.

Порівняння методу

Як ми помітили, запропонований метод може працювати в режимі реального часу. Щодо точності, порівняємо результати з PySceneDetect [9], як найбільш доступною бібліотекою для цієї задачі, за набором відео з різними типами змін сцени, з різним освітленням та динамікою. У 11 відео з набору даних є 68 змін сцени. Результати замірів наведено у таблиці 3.

Видно, що запропонований метод пропускає лише 4 з 64 змін сцени, і виявляє 94%, тоді як провідна бібліотека PySceneDetect виявила лише 77%. Ми також перевірили це на різних відібраних вручну відео з подібними результатами. Більше False Positives було виявлено через артефакти, які з'являються на місці несподівано. Таким чином, ми вважаємо, що це також можна зарахувати до зміни сцени.

Таблиця 3. Порівняння методу

Метод / Програмне забезпечення	True Positives	False Positives	False Negatives
PySceneDetect	49	2	19
Запропонований метод	64	6	4

Висновки

У даній роботі запропоновано ефективний підхід до виявлення зміни сцени. Актуальність та випадки використання було розглянуто у вступі. Метод є більш точним, ніж відомий PySceneDetect на підготовленому тестовому наборі відеозаписів.

Для подальшого підвищення точності методу ми додамо аудіоаналіз для виявлення змін або сигналів негайних змін сцени. Метод також можна покращити за допомогою більш точної локалізації фантомних об'єктів, які можуть з'являтися у відеопотоці, відокремлюючи їх від загальної ситуації зміни сцени.

Для оптимізації розрахунків ми спробуємо зменшити масштаб (зменшити роздільну здатність зображення – кадрів відео). Крім того, ми збираємось використовувати запропонований спосіб для обробки відео у промислових масштабах.

Список використаних джерел

1. *Reddy B.* Comparison of Scene Change Detection Algorithms for Videos / B. Reddy, A. Jadhav // 2015 Fifth International Conference on Advanced Computing & Communication Technologies (ACCT). –Haryana, India. – 2015. – pp. 84-89.
2. *Rotman D.* Robust and Efficient Video Scene Detection Using Optimal Sequential Grouping / D. Rotman, D. Porat, G. Ashour // 2016 IEEE International Symposium on Multimedia (ISM). – 2016. – pp. 275-280.
3. *Rotman D.* Robust video scene detection using multimodal fusion of optimally grouped features / D. Rotman, D. Porat, G. Ashour // 2017 IEEE 19th International Workshop on Multimedia Signal Processing (MMSP). – 2017. – pp. 1-6.
4. *Li Li.* Video shot segmentation using graph-based dominant-set clustering / Li Li, Xianglin Zeng, Xi Li, Weiming Hu, Pengfei Zhu // Proceedings of the First International Conference on Internet Multimedia Computing and Service (ICIMCS '09). – Association for Computing Machinery, New York, NY, USA. – 2009. – pp. 166–169.
5. *Zabih R.* A feature-based algorithm for detecting and classifying scene breaks / Ramin Zabih, Justin Miller, Kevin Mai // Proceedings of the third ACM international conference on Multimedia (MULTIMEDIA '95). – Association for Computing Machinery, New York, NY, USA. – 1995. – pp. 189–200.
6. *Sze K.-W.* Scene cut detection using the colored pattern appearance model / Kin-Wai Sze, Kin-Man Lam, G. Qiu // Proceedings 2003 International Conference on Image Processing. – 2003. – pp. II-1017.
7. *Krulikovská L.* Fast Algorithm of Shot Cut Detection / Krulikovská L., Polec J., Hirner, T. // World Academy of Science, Engineering and Technology, Open Science Index 67, International Journal of Electronics and Communication Engineering. – 2012. – № 6 (7), pp. 633-636.
8. *Canny J.* A Computational Approach To Edge Detection / Canny J. // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 1986. – № 8 (6). – pp. 679–698.
9. PySceneDetect documentation [Online]. – Resource Access mode: https://pyscenedetect.readthedocs.io/

References

1. REDDY, B., JADHAV, A. (2015): *Comparison of Scene Change Detection Algorithms for Videos*, 2015 Fifth International Conference on Advanced Computing & Communication Technologies (ACCT), Haryana, India, pp. 84-89.
2. ROTMAN, D., PORAT, D., ASHOUR, G. (2016): *Robust and Efficient Video Scene Detection Using Optimal Sequential Grouping*, 2016 IEEE International Symposium on Multimedia (ISM), pp. 275-280.
3. ROTMAN, D., PORAT, D., ASHOUR, G. (2017): *Robust video scene detection using multimodal fusion of optimally grouped features*, 2017 IEEE 19th International Workshop on Multimedia Signal Processing (MMSP), pp. 1-6.
4. LI, LI, ZENG, X., LI, XI, HU, W., ZHU, P. (2009): *Video shot segmentation using graph-based dominant-set clustering*, Proceedings of the First International Conference on Internet Multimedia Computing and Service (ICIMCS '09), Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, pp. 166–169.
5. ZABIH, R., MILLER, J., MAI, K. (1995): *A feature-based algorithm for detecting and classifying scene breaks*, Proceedings of the third ACM international conference on Multimedia (MULTIMEDIA '95), Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, pp. 189–200.
6. SZE, K.-W., LAN, K.-M., QIU, G. (2003): *Scene cut detection using the colored pattern appearance model*, Proceed. 2003 International Conference on Image Processing, pp. II-1017.
7. KRULIKOVSKÁ, L., POLEC, J., HIRNER, T. (2012): *Fast Algorithm of Shot Cut Detection*, World Academy of Science, Engineering and Technology, Open Science Index 67, Internatinal Journal of Electronics and Communication Engineering, 6 (7), pp. 633-636.
8. CANNY, J.,(1986):*A Computational Approach to Edge Detection*, IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 8 (6), pp. 679-698.
9. PySceneDetect documentation [Online] – Resource Access mode: https://pyscenedetect.readthedocs.io/

Надійшла до редколегії 23.10.2020

УДК 517.9 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/1.7

Івохін Є.В., д.ф.-м.н, професор,
Махно М.Ф., к.т.н,
Шкляр В.О., аспірант

Оптимізація розподілу потужностей мережевих каналів на основі алгоритму Орліна

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, м.Київ, пр-т Глушкова,
4д, e-mail: ivohin@univ.kiev.ua

Ivohin E.V., Dr.Sci., professor,
Makhno M.F., Ph.D.
Shklyar V.O., post-graduate

Optimization of power distribution of network channels based on Orlin's algorithm

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: ivohin@univ.kiev.ua

У статті запропоновано алгоритм розв'язання задачі оптимального розподілу потужностей каналів передачі даних між провайдерами та користувачами мережі Інтернет. Сформульовано математичну модель проблеми розподілу обмеженого однорідного ресурсу з обмеженнями транспортного типу. Розглянуто метод розв'язування на основі потокового алгоритму Орліна. Запропоновано практичне застосування алгоритму для розв'язання реальної задачі розподілу. Отримано результати пропускних спроможностей каналів реальної комп'ютерної мережі при перспективному збільшенні потужностей з'єднань, представлених інтервалами запланованих змін. Проведено аналіз рішень, отриманих при різній кількості комутаційних серверів, зроблені висновки про вибір провайдера для оптимального забезпечення інформаційних потреб користувачів.

Ключові слова: канали зв'язку, розподіл потужностей, оптимізація пропускної здатності, потоковий алгоритм

The article proposes an algorithm for solving the problem of optimal distribution of the capacity of data transmission channels between providers and Internet users. A mathematical model of the problem of distribution of a limited homogeneous resource with transport-type constraints is formulated. A solution method based on Orlin's stream algorithm is considered. A practical application of the algorithm for solving a real distribution problem is proposed. The results of the capacity of the channels of the computer network are obtained with a perspective increase in the capacity of the connections represented by the intervals of the planned changes. An analysis of the solutions obtained with different number of switching servers was made, conclusions about the choice of the provider to meet the optimal information needs of users were made.

Key words: communication channels, power distribution, optimization of transparency, flow algorithm

Роботу представив д.т.н, професор Кудін В.І.

Розв'язування прикладних багатоіндексних задач лінійного програмування транспортного типу [1], що відносяться до класу цілочисельних оптимізаційних задач [2], представляє особливий інтерес. Це пов'язано з тим, що на основі моделей багатоіндексних транспортних задач запропоновано підходи для вирішення ряду складних практичних проблем розподілу та планування. Однак, при цьому потрібно зауважити, що одним з перспективних напрямів при розробці ефективних алгоритмів розв'язання таких задач є виділення підкласів задач, для вирішення яких застосовуються потокові методи [3].

Формулювання проблеми. Важливою для вирішення та практичного впровадження є проблема розподілу обмежених потужностей каналів передачі даних між різними вузлами мережі Інтернет. Припустимо, що розглядається локальна комп'ютерна мережа підприємства або навчального закладу, яка забезпечує вихід користувачів в Інтернет. Доступ користувачів до глобальної мережі і отримання необхідної інформації проводиться за допомогою декількох комунікаційних серверів, розміщених на території інформаційно-обчислювального центру (ІОЦ) підприємства і підключених високошвидкісними зовнішніми каналами зв'язку з провайдерами Інтернет. Рівні пропускних спроможностей серверів лежать в межах смуги пропускання (bandwidth) локальної мережі. Припустимо, що відомі потреби абонентів мережі в збільшенні швидкості отримання тієї або іншої кількості інформації. Задані побажання (переваги) абонентів щодо можливих об'ємів збільшення пропускних спроможностей для

©Є.В.Івохін, М.Ф.Махно, В.О.Шкляр, 2021

передачі інформації від провайдера призначеному для користувача вузлу. Для реалізації побажань необхідно провести оновлення потужностей комутаційних серверів мережі шляхом розгортання нових, потужніших комп'ютерів або шляхом збільшення кількості існуючих серверів, що дозволяє збільшити сумарну пропускну спроможність групи комутаційних серверів. При цьому значення сумарної потужності серверів як у разі збільшення потужності наявного парку комп'ютерів, так і у разі збільшення кількості серверів передбачається однаковим.

Припустимо, що в мережі реалізовані умови ефективної комутації каналів (щодо їх пропускної спроможності), які забезпечуються програмованими мережевими пристроями (комунікаційними серверами, маршрутизаторами). Структура мережі та інформації, що розподіляється в ній, в загальному випадку може бути найрізноманітнішою. В даному випадку розглядається проблема розподілу потужностей каналів з наступними обмеженнями [4]:

- інформація розподіляється від провайдера до абонентів (вузлам) через комутаційні сервера по каналах зв'язку з пропускною спроможністю, що враховує задану ширину смуги пропускання;
- кожен абонент мережі обслуговується одним комутаційним сервером;
- пропускну спроможність отримання інформації для комутаційних вузлів і абонентів обмежено як зверху (принципові обмеження можливостей провайдера), так і знизу (мінімальна потреба абонентів в отримуваній інформації).

Виходячи з наявного резерву ширини смуги пропускання зовнішнього з'єднання, необхідно максимально ефективно збільшити сумарну пропускну спроможність каналів зв'язку користувачів шляхом зміни сумарній потужності комунікаційних серверів з урахуванням як потреб і побажань абонентів (користувачів), так і можливостей ІОЦ.

Загальна математична модель. Нехай N_1 – множина провайдерів глобальної мережі, N_2 – множина комунікаційних серверів, N_3 – множина абонентів. Через A_i^+, $i=\overline{1,N_1}$, позначимо величини максимальної ширини смуги пропускання каналу передачі даних, яку здатний надати провайдер i, $i=\overline{1,N_1}$; B_j^+, $j=\overline{1,N_2}$, – величини максимальної ширини смуги пропускання каналу передачі даних, яку здатен забезпечити комунікаційний вузол j, $j=\overline{1,N_2}$; C_k^-, C_k^+, $k=\overline{1,N_3}$, – значення мінімальної і максимальної ширини смуги пропускання каналу передачі даних, яку необхідно надати абоненту k, $k=\overline{1,N_3}$; t_k – пропускну здатність k-го абонентського пункту, $k=\overline{1,N_3}$. Тоді, припускаючи, що розподіл потужностей каналів зв'язку задовольняє умовам адитивності і пропорційності, можна розглядати задачу розподілу обмеженого однорідного ресурсу (смуги пропускання каналів зв'язку) з обмеженнями транспортного типу з метою знаходження оптимального плану передачі даних. Це забезпечує ефективне функціонування системи забезпечення користувачам Інтернет-доступу, яке полягає в знаходженні оптимальних значень пропускних спроможностей T_i передачі даних i-м постачальником інформації (провайдером), $i=\overline{1,N_1}$, і оптимальних значень пропускних спроможностей t_k використання локальних каналів зв'язку k-м користувачем, $k=\overline{1,N_3}$.

Формально постановка данної задачі може бути записана у вигляді [5]:

$$\max t_1;\ \max t_2;\ \dots\ \max t_{N_3}, \tag{1}$$

за наступних умов:

$$\sum_{k=1}^{N_3} t_k = \sum_{i=1}^{N_1} A_i^+; \tag{2}$$

$$T_i \le A_i^+,\ i=\overline{1,N_1}, \tag{3}$$

$$\tau_j \le B_j^+,\ j=\overline{1,N_2}, \tag{4}$$

$$C_k^- \le t_k \le C_k^+,\ k=\overline{1,N_3}, \tag{5}$$

і при обмеженні

$$\sum_{k=1}^{N_3} C_k^- \le \sum_{i=1}^{N_1} A_i^+ \le \sum_{k=1}^{N_3} C_k^+; \tag{6}$$

де τ_j – величини пропускних спроможностей каналів зв'язку, що забезпечуються j-м комунікаційним вузлом, $j=\overline{1,N_2}$.

Алгоритм Орліна для пошуку розв'язків у вигляді максимальних потоків. Алгоритм, запропонований Orlin J.B. [6], дозволяє звести задачу багатоіндексного лінійного програмування транспортного типу до потокової задачі, пропонуючи ефективну обчислювальну схему в порівнянні з оцінками складності загальних

методів вирішення завдань лінійного програмування.

Згідно (1) - (5) представимо багатоіндексную транспортну задачу розподілу однорідного ресурсу з проміжними пунктами в вигляді орієнтованого графа $G(V,E)$ без петель і паралельних ребер, заданого сукупністю непорожньої множини вершин V і множини E ребер вигляду:

$$E \subset \underset{v_i, v_j \in V, i \neq j}{\{v_i, v_j\}}, \; G(V,E) = \langle V,E \rangle, \; V \neq \varnothing, \qquad (7)$$

де $V = \{v_1, v_2, .., v_N\}$, $E = \{e_1, e_2, .., e_M\}$, N та M – загальна кількість вершин і ребер графа відповідно. При цьому відзначимо, що у сформульованій задачі множину V вершин графа $G(V,E)$ представлено сукупністю підмножин, які не перетинаються:

1. V_s - підмножина пунктів виробництва (початкових вузлів графа);

2. V_p - підмножина проміжних пунктів (проміжних вузлів орієнтованого графа);

3. V_e - підмножина пунктів споживання (кінці орієнтованого графа), тобто $V = V_s \cup V_p \cup V_e$, за умови, що $(V_s \cup V_p) \cap V_e = \varnothing$ та $|V_s| = N_1$, $|V_p| = N_2$, $|V_e| = N_3$, $N = N_1 + N_2 + N_3$.

Під сукупністю (об'єднанням) підмножин множини вершин пунктів виробництва V_s і проміжних пунктів V_p будемо розуміти підмножину розповсюджувачів $V_d = V_s \cup V_p$ однорідного неперервного ресурсу. Тоді вага ребер з множини E, що виходять з вершин підмножини V_d, визначається величиною відповідних коефіцієнтів розподілу $E' = \{e'_1, e'_2, .., e'_K\}$, де K - загальна кількість вершин графа $G(V,E)$, що належать підмножині V_d, тобто $|V_d| = K = |V_s| + |V_p| = N_1 + N_2$. Позначимо через $F(i) \subset E$ - підмножину множини ребер графа $G(V,E)$, які виходять з i-ї вершини. При цьому, $E = \bigcup_{i=1}^{N} F(i)$ і $\bigcap_{i=1}^{N} F(i) = \varnothing$.

Тоді, з урахуванням вищесказаного, задача оптимального розподілу однорідного ресурсу - це задача визначення ваг ребер, що виходять з вершин підмножини V_d, з урахуванням критерію

$$f(T_1, .., T_{N_1}, e'_1, .., e'_K) =$$

$$= (-1) \sum_{k=1}^{N_3} t_k (T_1, .., T_{N_1}, e'_1, .., e'_K) \to \min_{\substack{e'_1, .., e'_K \\ T_1, .., T_{N_1}}} \qquad (8)$$

при обмеженнях (2)-(5) і додаткового обмеження, накладеного на коефіцієнти розподілу, яке визначаються співвідношенням:

$$\sum_{j=1}^{J_k} e'^{k}_{j} = 1, \qquad (9)$$

де $e'^{k}_{j} \in F(k)$, $0 \le e'^{k}_{j} \le 1$, $j = \overline{1, J_k}$, $J_k = |F(k)|$, $F(k) \subset E$, $k = \overline{1, K}$.

Геометрію розв'язку багатоіндексної транспортної задачі розподілу однорідного неперервного ресурсу подано на рисунку 1.

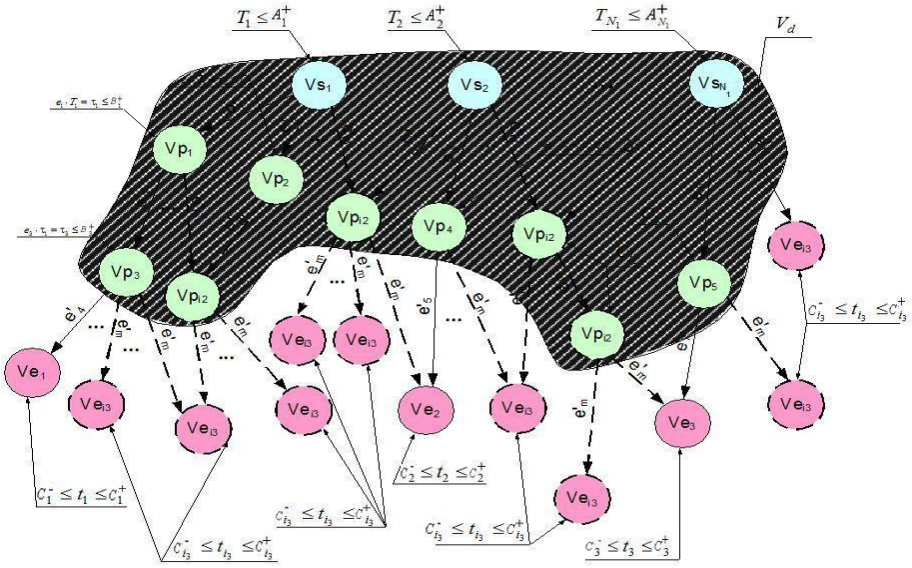


Рис.1. Геометрія розв'язку багатоіндексної транспортної задачі розподілу однорідного ресурсу

Для знаходження розв'язку оптимізаційної задачі (8) у вигляді векторної функції

$$t(T_1,..,T_{N_1},e'_1,..,e'_K)=$$

$$(t_1(T_1,..,T_{N_1},e'_1,..,e'_K),...,t_{N_3}(T_1,..,T_{N_1},e'_1,..,e'_K)),$$

k-й елемент якої характеризує величину розподіленого в *k*-й пункт споживання однорідного ресурсу ($k=\overline{1,N_3}$), введемо наступне позначення. Орієнтований граф $G(V,E)$ будемо задавати у вигляді матриць зв'язності розмірності $N\times M$ для прямого H^{in} і зворотного H^{out} потоків, елементи яких визначаються наступними чином

$$H^{in}_{i,m}=\begin{cases}1, \textit{якщо вузол} v_i \textit{ інцидентний ребру} e_m\\ i \textit{ є його кінцем}\\ 0, \textit{у протилежному випадку}\end{cases},$$

$$i=\overline{1,N}, m=\overline{1,M}; \quad (10)$$

$$H^{out}_{i,m}=\begin{cases}-1, \textit{якщо вузол} v_i \textit{ інцидентний ребру} e_m\\ i \textit{ є його початком}\\ 0, \textit{у протилежному випадку}\end{cases},$$

$$i=\overline{1,N}, m=\overline{1,M}. \quad (11)$$

Для орієнтованого графа $G(V,E)$ визначимо матрицю S^r розмірності $N\times N$, яка є матрицею зв'язності (тобто, якщо вершина v_p досяжна з вершини v_q, то (q,p)-й елемент матриці досяжності дорівнює 1, у протилежному випадку – 0, $q,p=\overline{1,N}$) для шляху кратності *r* (*r* задає кількість ребер, проходячи через які з вершини v_i є шлях у вершину v_p). Матриця S^r визначається рівністю

$$S^r=\left(H^{in}\left(-H^{out}\right)^T\right)^r. \quad (12)$$

Оскільки $G(V,E)$ є орієнтованим зв'язним графом без петель і паралельних ребер, величина *r* обмежена значенням *R*, яке визначає максимально можливу кількість ребер, проходячи через котрі існує шлях з *q*-ї вершини в *p*-у. Величина *R* визначається максимально допустимою кількістю переходів, для яких норма матрицы не дорівнює нулю, тобто $\|S^r\|\neq 0$, для всіх $r\le R$, а $\|S^{R+1}\|=0$.

Вектор-функція

$$w(T_1,..,T_{N_1},e'_1,..,e'_K)=$$

$$(w_1(T_1,..,T_{N_1},e'_1,..,e'_K),..., w_N(T_1,..,T_{N_1},e'_1,..,e'_K)),$$

j-й елемент якої характеризує обсяг ресурсу, котрий доставляється в *j*-ю вершину графа $G(V,E)$, $j=\overline{1,N}$, визначається наступним співвідношенням:

$$w_j(T_1,..,T_{N_1},e'_1,..,e'_K)=$$

$$=\left[\sum_{p=1}^{N}\left(H^{in}*diag\left(\gamma_R(T_1,..,T_{N_1},e'_1,..,e'_K)\right)*\left(-H^{out}\right)^T\right)\right]_j+$$

$$+w'_j(T_1,..,T_{N_1}) \quad (13)$$

де сума у першому доданку береться по усім *N* елементам *j*-го рядка матриці

$H^{in}*diag\left(\gamma_R(T_1,..,T_{N_1},e'_1,..,e'_K)\right)*\left(-H^{out}\right)^T$,

$w'(T_1,..,T_{N_1})=(w'_1(T_1,..,T_{N_1}),..., w'_N(T_1,..,T_{N_1}))$ – вектор-функція розмірності *N*, *j*-й елемент якої визначає величину ресурсу, котрий виробляється *j*-ю вершиною графа $G(V,E)$, $j=\overline{1,N}$;

$\gamma_R(T_1,..,T_{N_1},e'_1,..,e'_K)=(\gamma^1_R(T_1,..,T_{N_1},e'_1,..,e'_K),...,$ $\gamma^N_R(T_1,..,T_{N_1},e'_1,..,e'_K))$ – вектор-функція розмірності *N*, елементи якої обчислюються рекурентно за формулою

$$\gamma^m_r(T_1,..,T_{N_1},e'_1,..,e'_K)=$$

$$=\left[\sum_{q=1}^{M}\left(\beta(e'_1,..,e'_K)H^{in}diag\left(\gamma_{r-1}(T_1,..,T_{N_1},e'_1,..,e'_K)\right)\right)\right]_m+$$

$$+\gamma^m_1(T_1,..,T_{N_1},e'_1,..,e'_K), \quad (14)$$

$r=\overline{2,R}$, $m=\overline{1,N}$, а сума у першому доданку береться по всіх *M* елементах *m*-го рядка матриці $\beta(e'_1,..,e'_K)H^{in}diag\left(\gamma_{r-1}(T_1,..,T_{N_1},e'_1,..,e'_K)\right)$.

У рекурентному виразі (14) початкові значення елементів вектор-функції $\gamma_1(T_1,..,T_{N_1},e'_1,..,e'_K)$ та елементи матричної функції $\beta(e'_1,..,e'_K)$ визначаються співвідношеннями:

$$\gamma^m_1(T_1,..,T_{N_1},e'_1,..,e'_K)=$$

$$=\left[\sum_{p=1}^{N}\left(\beta(e'_1,..,e'_K)*diag(v'(T_1,..,T_{N_1}))\right)\right]_m,$$

$$m=\overline{1,N};$$

$$\beta(e'_1,..,e'_K)=[\left(-H^{out}\right)*diag(E'(e'_1,..,e'_K))]^T. \quad (15)$$

Тоді елементи векторної функції $w(T_1,..,T_{N_1},e'_1,..,e'_K)$ визначають елементи вихідної векторної функції $t(T_1,..,T_{N_1},e'_1,..,e'_K)$, яка є розв'язком задачі оптимізації (8):

$$t_k(T_1,..,T_{N_1},e'_1,..,e'_K)=w_{Q_k}(T_1,..,T_{N_1},e'_1,..,e'_K) \quad (16)$$

©Є.В.Івохін, М.Ф.Махно, В.О.Шкляр, 2021

де Q – вектор розмірності N_3, елементи якого визначають номери вершин графа $G(V,E)$, що складають підмножину V_e пунктів споживання ресурсу, $k=\overline{1,K}$.

Таким чином, багатоіндексну задачу розподілу однорідного неперервного ресурсу з умовами транспортного типу пропонується розв'язувати з урахуванням критерію оптимальності, шляхом багаторазового вирішення оптимізаційної задачі (8) з обмеженнями (9) і топології (10), (11) методами оптимізації другого порядку [5], які забезпечують найкращу збіжність.

Застосування алгоритму для розв'язання реальної задачі розподілу. Нехай в якості пунктів виробництва, проміжних пунктів і пунктів споживання розглядаються відповідно групи Інтернет-провайдерів глобальної мережі, комунікаційних серверів інформаційно-обчислювального центру та абонентів-споживачів інформації, якими є гуртожитки вищого навчального закладу. Схема підключення мережевих пристроїв користувачів і їх обслуговування на рівні комунікаційних серверів ІОЦ відповідає вимогам вихідної задачі. Однорідним ресурсом, що вимагає оптимального розподілу, буде пропускна здатність каналів зв'язку провайдер-користувач з урахуванням ширини смуги пропускання каналу, яку здатний надати провайдер, і максимальної ширини смуги пропускання, яку здатний обробити і реалізувати комунікаційний вузол.

Розглядається реальна комп'ютерна мережа, що використовує одне з 2 альтернативних зовнішніх підключень до мережі Інтернет (2 провайдера) і 2 або 3 комунікаційних сервера, сумарна ширина смуги пропускання яких однакова. Значення ширини пропускної смуги на поточний момент дорівнює 2 Гб/с, але може бути збільшено до 3 Гб/с. Внутрішні канали мережі з шириною смуги пропускання 1 Гб/с використовуються для обслуговування мережевих пристроїв 17 студентських гуртожитків. Комунікаційні сервери забезпечують підключення користувачів до зовнішніх каналів, ширина смуги пропускання яких 10 Гб/с.

На початковому етапі дослідження службами інформаційно-обчислювального центру використовувалися 2 комунікатора з шириною смуги пропускання 1 Гб/с. В результаті спостереження за величиною трафіку, який отримується мережевим обладнанням в гуртожитках, було встановлено, що максимальна пропускна здатність окремих підключень до комунікаційних серверів становить відповідно 260, 165, 150, 190, 275, 115, 175, 275, 155, 195, 125, 145 , 90, 370, 180, 90, 150 Мб / с (сумарний трафік = 3105 Мб / с), що перевищує загальну пропускну здатність серверного обладнання.

Зрозуміло, що забезпечити зазначені рівні пропускної здатності для всіх користувачів одночасно в даній конфігурації мережевого устаткування неможливо.

Реальна пропускна здатність, яка була реалізована виходячи із заданої ширини смуги пропускання кожного комунікатора, отримується при підключенні гуртожитків №8, 14, 15, 17 до 1 серверу, а інших - до сервера 2. Значення пропускної здатності локальних підключень дорівнюють 0; 99; 129; 0; 0; 122; 28; 284; 150; 0; 130; 150; 99; 378; 192; 93; 146 Мб/с. Ясно, що вирішення проблеми в вигляді відключення доступу в Інтернет користувачам, потужність каналу яких дорівнює 0, неприпустимо. У якості інноваційного розв'язання проблеми пропонується удосконалити наявне на ІОЦ мережеве обладнання. Це можна провести шляхом збільшення парку комунікаційних серверів мережевим комп'ютером з потужністю, що дорівнює двом наявним. Інший спосіб збільшення пропускної здатності каналів мережі полягає в придбанні двох нових більш потужних серверів.

При використанні 2 однакових комунікаційних серверів сумарної пропускної потужності 3 Гб/с, величини пропускної здатності локальних підключень дорівнюють 259, 159, 149, 166, 273, 115, 163, 274, 152, 148, 125, 144, 90, 365, 180, 89, 149 Мб/с відповідно, що в сумі становить 3 Гб/с. Використання 3 комунікаторів загальної пропускної спроможності 3 Гб/с (1 Гб/с кожен) дає значення потужності локальних підключень 260, 148, 146, 190, 258, 114, 175, 266, 146, 195, 124, 143, 90, 335, 180, 89, 141 Мб / с відповідно, що в сумі також становить 3 Гб/с.

Для прискорення доступу в Інтернет виникла необхідність у збільшенні пропускної здатності каналів передачі даних. Виходячи з аналізу існуючого трафіку та можливостей обладнання були запропоновані наступні максимальні величини пропускної здатності локальних підключень: 280, 180, 170, 200, 290, 125, 190, 290, 170, 210, 135, 160, 100, 390, 195, 95, 165 Мб / с.

Використання для цього двох комунікаційних серверів сумарною пропускної потужності 3 Гб/с забезпечує швидкості локальних підключень, які дорівнюють 128, 161, 160, 124, 284, 124, 152, 287, 165, 208, 134, 158, 100, 378, 194, 94 , 149 Мб/с відповідно (гуртожитки № 5; 8; 10; 14; 15 і 17 підключаються до сервера 1; інші - до сервера 2).

Використання 3 комунікаторів дає значення потужності локальних підключень 271, 146, 153, 65, 273, 123, 123, 284, 162, 206, 131, 158, 97, 378, 192, 92, 146 Мб/с відповідно (гуртожитки № 1; 5, 10, 12 і 16 підключаються до сервера 1; гуртожитки № 2; 3; 4; 6; 7; 9; 11 і 13 - до сервера 2; гуртожитки № 8; 14; 15; 17 - до сервера 3).

Необхідно відзначити, що схема оптимізації потужності мережевих каналів зв'язку на основі застосування алгоритму Орліна отримала практичне підтвердження у процесі проведення конструктивної реорганізації серверного парку ІОЦ. При цьому, треба зазначити, що розроблений потоковий алгоритм залишається достатньо ресурсномістким через використання ітераційної багатокрокової схеми. У випадку складних мережевих топологій потрібно застосовувати альтернативні алгоритми розв'язування вихідної задачі (1)-(6) (наприклад, [8]).

Висновки. У даній роботі розглянуто метод розв'язання оптимізаційної задачі транспортного типу для вирішення проблеми оптимального розподілу потужностей каналів передачі даних у мережі Інтернет. Для проведення дослідження сформульована задачі оптимізації пропускної здатності мережевих каналів зв'язку в схемі «провайдер - комунікаційний сервер - користувач» за наявності обмежень на обсяги споживання. Запропоновано застосування методу оптимізації розподілу потоків на основі алгоритму Орліна. Проведено обчислювальний експеримент, в результаті якого отримано величини пропускних спроможностей мережених каналів університету при перспективному збільшенні потужностей з'єднань. Результати наведено у вигляді их інтервалів запланованих змін. Проведено аналіз рішень, отриманих для різної кількості комутаційних серверів, зроблені висновки щодо забезпечення потреб користувачів у каналах зв'язку.

Список використаних джерел

1. *Раскин Л.Г., Кириченко И.О.* Многоиндексные задачи линейного программмирования. – М.: Радио и связь, 1982. – 240с.
2. *Схрейвер А.* Теория линейного и целочисленного программирования. – М.: Мир, 1991. – 360с.
3. *Прилуцкий М.Х.,Картомин А.Г.* Потоковые алгоритмы распределения ресурсов в иерархических системах // Исследовано в России. – 2003. – 39. – С. 444-452.
4. *Прилуцкий М.Х., Афраймович Л.Г.* Распределение ресурсов в иерархических системах транспортного типа. – Нижний Новгород, 2007. - 80с.
5. *Pentico D.W.* Assignment problems: A golden anniversary survey // European Journal of Operational Research. – 2007. – V. 176. – P.774-793.
6. *Orlin J.B.* A Faster strongly polynomial minimum cost flow algorithm // Operations research. – 1993. – V. 41. – N 2. – P.338-350.
7. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512с.
8. Івохін Є.В., Аджубей Л.Т. Про розв'язок однієї дворівневої моделі виробничо-транспортної задачі // Вісник КНУ імені Тараса Шевченка. Сер.ФМН.–2014.–№3. – С.122-125.

References

1. *Raskin L.G., Kirichenko I.O.* Mnogoindeksnyye zadachi lineynogo programmirovaniya. – M.: Radio i svyaz'. – 240 p.
2. *Skhreyver A.* Teoriya lineynogo i tselochislennogo programmirovaniya. – M.: Mir. – 360 p.
3. *Prilutskiy M.Kh., Kartomin A.G.* Potokovyye algoritmy raspredeleniya resursov v iyerarkhicheskikh sistemakh // Issledovano v Rossii. – 39. – P. 444-452.
4. *Prilutskiy M.Kh., Afraymovich L.G.* Raspredeleniye resursov v iyerarkhicheskikh sistemakh transportnogo tipa. Nizhniy Novgorod. – 80p.
5. *Pentico D.W.* Assignment problems: A golden anniversary survey // European Journal of Operational Research. – V. 176. – P.774-793.
6. *Orlin J.B.* A Faster strongly polynomial minimum cost flow algorithm // Operations research. – V. 41. – N 2. – P.338-350.
7. *Kalitkin N.N.* Chislennyye metody [Numerical methods]. – M.: Nauka. – 512p.
8. *Ivokhin E.V., Adzhubey L.T.* Pro rozv'yazok odniyeyi dvorivnevoyi modeli vyrobnycho-transportnoyi zadachi // Visnyk KNU imeni Tarasa Shevchenka. Ser. FMN. – №3. – P.122-125.

Надійшла до редколегії 26.03.2021

УДК 519.72 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/1.8

Івохін Є.В.[1], д.ф.-м.н., професор
Ваврик П.Р.[1], аспірант
Рудоман Н.В.[2], аспірант

Про оцінку перетину аудиторій в соціальних мережах

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м.Київ, Глушкова 4д,
e-mail: ivohin@univ.kiev.ua,
petro.vavryk@gmail.com
[2] Національний транспортний університет, 01010, м.Київ, вул.Омеляновича-Павленка, 1,
e-mail: kist.ntu.edu.ua@gmail.com

E.V. Ivohin[1], D.Sci., professor,
P. R. Vavryk[1], post-graduate,
N.V. Rudoman[2], post-graduate

About audience overlaps in the social media

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: ivohin@univ.kiev.ua,
petro.vavryk@gmail.com
[2] National Transport University, 01010, Kyiv, M.Omelianovycha-Pavlenka Str., 1,
e-mail: kist.ntu.edu.ua@gmail.com

У цій статті пропонується загальне формулювання мережі перетину аудиторій в соціальних мереж, а також простий алгоритм для визначення перетину аудиторії двох окремих користувачів, який базується на використанні публічних даних про їх послідовників. Запропоновано альтернативний підхід пошуку перетину аудиторій, який базується на схожості користувачів на основі лише загальнодоступних даних. Підхід дозволяє розглядати сигнали схожості контенту і особливостей поведінки для застосування у загальних статистичних моделях, що формалізують типові для мереж характеристики (коваріати), такі як пряма участь впливових осіб в загальних обговореннях; відносні розміри і історії впливових осіб, а також посилання на аналогічний сторонній контент для відновлення цензурованих мережевих структур і властивостей. Для валідації результатів застосовано процес калібрації і встановлено наявність залежності перетину аудиторій користувачів від схожості створеного ними контенту та особливостей їх поведінки.

Ключові слова: контент, перекриття, соціальні мережі, алгоритм.

In this paper we provided the definition of the Audience overlap network, as well as proposed a simple algorithm to compute overlap between two users on social media based on public data about their followers. There was proposed an alternative approach for computing overlaps based only on public data about users. This approach allows to include content overlap and activity patterns signals to be incorporated into more general statistical models featuring other covariates such as influencers' direct engagement in shared conversations; relative influencer sizes and histories and links to similar third-party content to recover otherwise censored network structures and properties. For validate results there was designed a calibration process which utilizes Evolution Strategies algorithm to find a set of conditions which will make Audience overlap network built using similarity measures structurally equivalent to the Audience overlap network build on full information about followers.

Key words: content, overlap, social media, algorithm.

Статтю представив д.т.н. Кудін В.І.

Introduction

With growing number of users in recent years, social media platforms have become not only the prime place for public discourse, but also a main source of news for many people. This massive development increased a need of their analysis on structural and content levels. Every level has its own state of the art tools and methods of research. But in many cases, understating of influence on social media requires performing analysis on both levels simultaneously and mapping "influencers" and ordinary users serving as their audiences. To map social media influencers to their audiences we explore a general approach for building Audience overlap networks (AONs). AONs can be used for multitude of applied problems e.g., detecting groups of users spreading disinformation, coordinated messaging campaigns, general community detection, etc. AONs can be built for most of modern social

media platforms (e.g., Facebook, Twitter, or YouTube), the only condition we require for these platforms is to have a follower-followee connections structure. While platforms like Twitter or Reddit grant unrestricted access to lists of followers or members of influential channels and profiles, others like YouTube or Facebook do not grant similar access or otherwise restrict its granularity. This puts additional pressure for general approach of building AONs but at the same time opens opportunity for exploration of deeper connections between influencers and their audiences.

In this paper, our aim is to provide a general definition of the AON, data processing steps needed for creating AON and the challenges faced when building AONs for social media platforms with minimal amount of public data available.

To demonstrate challenges faced while working with limited input data we first use Twitter to provide a baseline AONs which can be used for any out-of-sample testing. Our first pick was Twitter because not only Twitter holds the position of one of the most popular social networks (most official government accounts are present there e.g., President Biden, United Nations, World Health Organization) but also Twitter was designed in way that all interaction between users remain visible to everyone else. Twitter also has a flexible public application programming interface (API).

We will follow definitions in [1], where audience overlaps were computed by link and cross-link similarity.

Data processing

In this section we describe the topics and the process of collecting data for building AONs.

Topics and influencers

We consider four topics and influencer groups:

T_1: Democratic primaries. Conversations about the 2020 Democratic Party presidential primaries. Influencers are selected from the top presidential contenders.

T_2: Airline geeks. Conversation related to the airline industry and business air travel. Influencers include reviewers of frequent flyer programs, travel experience bloggers and industry insiders.

T_3: Global issues. Conversations about reporting, analysis and opinions on global environmental, climate and energy issues. Influencers include magazines like The Economist, and selected journalists and organizations like The World Economic Forum.

T_4: Technology investment. Conversations on technology investment, emerging technologies and entrepreneurship. Influencers include prominent venture capitalists and industry publications.

Influencers were selected for both relevance and focus on a topic and ability to generate engagements with their content. Table 1 lists selected influencers for every topic in alphabetical order for entities and last name for individuals.

In most of the cases the analysis of social networks is more effective when applied to specific subset of conversation (posts) and authors (users).

Table 1

Topics and influencers.

ID	Name	Influencers
T_1	Democratic primaries	Joe Biden, Mike Bloomberg, Pete Buttigieg, Kamala Harris, Amy Klobuchar, Bernie Sanders, Elizabeth Warren
T_2	Airline geeks	Boarding Area, French Painter, One Mile at a Time, Runway Girl, Secret Flying, Wander Me
T_3	Global issues	Inside Climate, Ro Khanna, Sierra Club, The Economist, World Bank, Yale E360, Chris J. Zullo
T_4	Technology investors	Adam Scrabble, Epsilon Theory, Eric R. Weinstein, Fast Company, Naval, Nick Timiraos, WIRED

We define social media topic as all authors and conversations which mention specific keywords. In our case keyword can represent a name or multiple spellings of author as well as some general expressions related to the area of interest.

For every topic, we used the Twitter API [2] to query and download all tweets for the first half of 2020, including tweets by identified influencers; then download the list of followers for every influencer.

Audience overlaps network

We define AON as graph with influencers as vertices, where the weight of the edge between vertices (influencers) defined as the number of shared followers between them (audience overlap). Consider Figure 1 as a visualization of the structure of some topic *X*. Here we have identified influencers *A* and *B* and eight followers. We calculate the audience overlap between *A* and *B* as

$$O(A, B) = \frac{|F_A \cap F_B|}{|F_A|},$$

where F_A and F_B denote sets of followers of A and B respectively. In this particular case $O(A, B) = 3/6$ and $O(B, A) = 3/5$. After downloading all followers for each influencer, we built the AON for every topic see Figure 2.

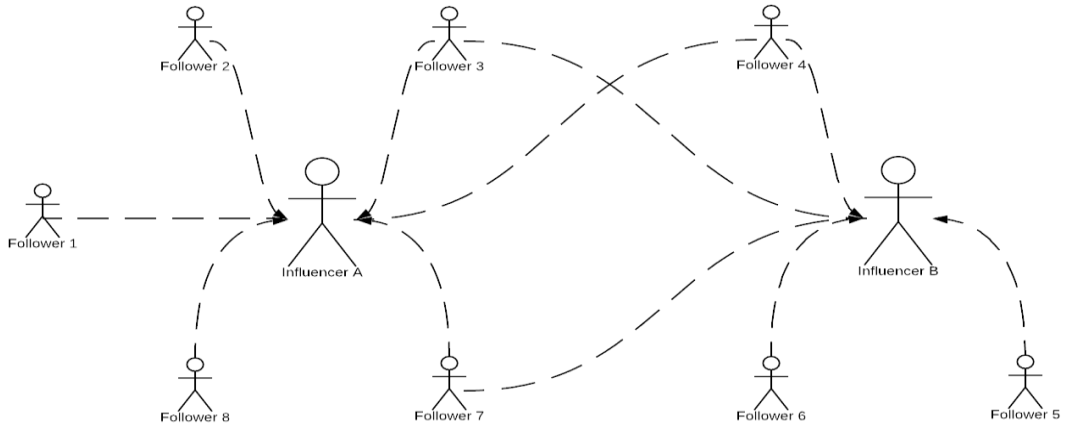
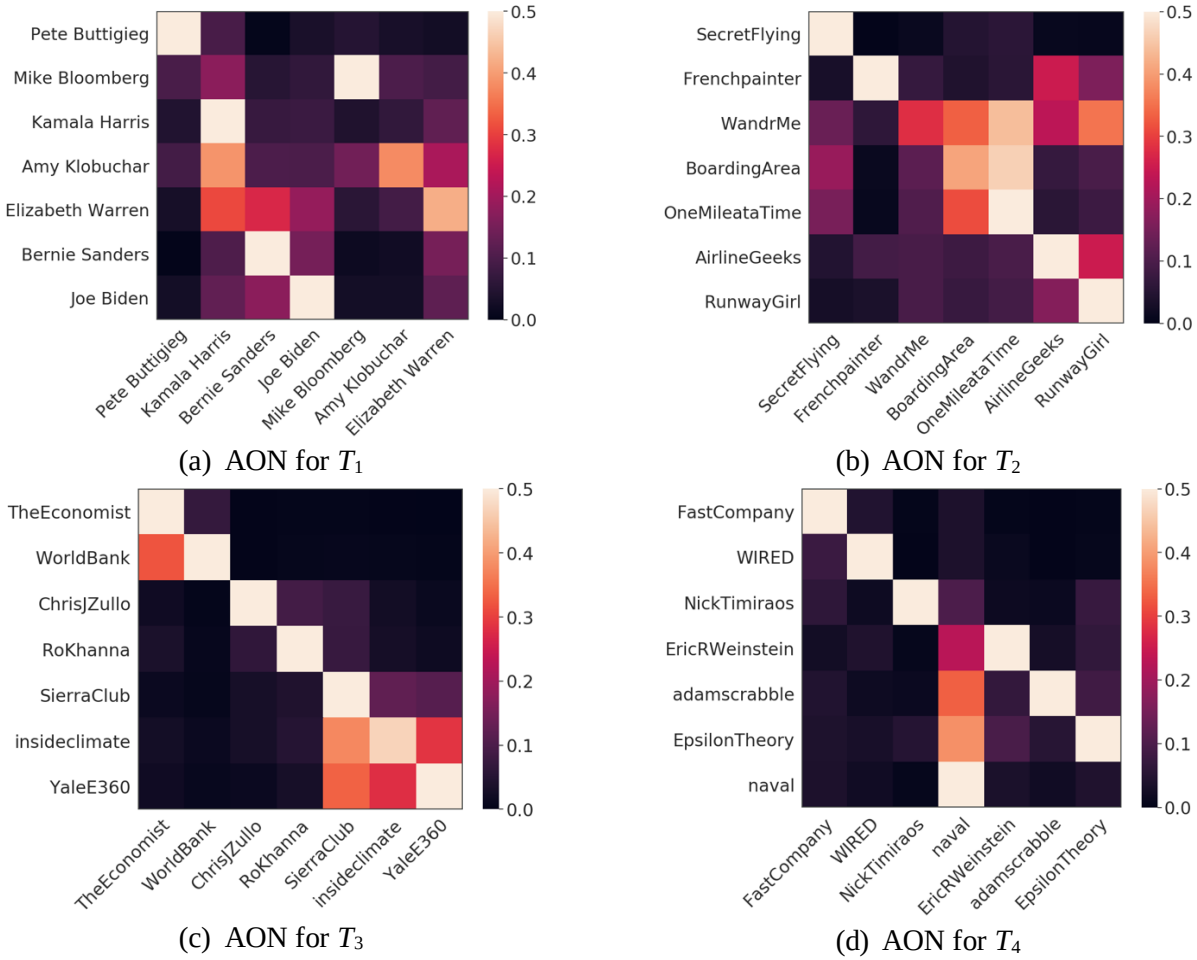


Figure 1: A sample follower-followee network for influencers A and B.



(a) AON for T_1 (b) AON for T_2

(c) AON for T_3 (d) AON for T_4

Figure 2: Visual presentation of AON for every topic in a table form where every cell is an average percentage of shared followers between two influencers.

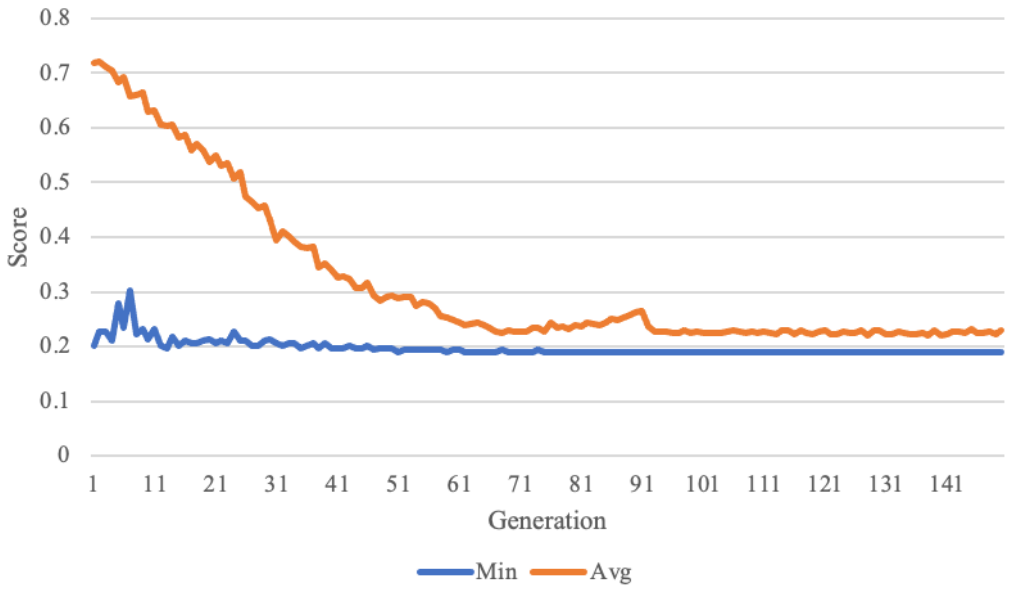


Figure 3: Calibration progress for the topic T_1.

Lack of data

The process of building AONs based on Twitter data raises no additional problems, at same time many large social media platforms have restricted public access to information about follower. This is the case with Facebook, even though the follower-followee structure is present on the platform we are unable to build AONs. At the same time Facebook still leaves a lot of information about influencers and their activity including content of posts, reactions, comments, all annotated with timestamps.

We defined a set of functions, each of them comparing similarity of two influencers based on some characteristic:

- $S_1(A, B)$ – compares similarity between content of A and B using cosine distance based on the features produced by Bag-of-Words method [3].
- $S_2(A, B)$ – performs a search for links to same resources ("http://*", "https://*"", "www.*", etc.) published by both A and B. This function also checks for domains similarity.
- $S_3(A, B)$ – compares distributions of publishing activities of A and B.
- $S_4(A, B)$ – compares distributions of comments under publications of A and B.

We consider that every comparison function has different weight within different topics, so the final comparison function is defined as

$$S(A,B) = \sum_{i=1}^{4} w_i * \max(0, (S_i(A,B) - b_i)),$$

where $S_i(A,B)$, $i=1,2,3,4$, - values defined above.

The solution for building AONs on partial data is to compare influencers using function $S(A, B)$ instead of comparing actual followers. But having multiple unknow parameters in comparison function doesn't instantly provide AON, but rather requires understating of the communities' structure from the platform with known followers.

Calibration

After we built AON for every topic of interest, we tried to find the set of values for weight parameters so that the AON built using $S(A,B)$ function will structurally match baseline Twitter AON. For this purpose, we designed a rigorous calibration process which utilizes Evolution Strategies algorithm [4] and performs a search over values of weight parameters to minimize structural difference between output and baseline AON.

We selected the following measurements of structural difference:

- Number of clusters (> 2, > 3, > 4, > 5).
- Diameter of the graph.
- Betweenness centrality.

To get more clear calibration results, we extended the list of influencers in every topic to 30.

Results

Figure 3. presents calibration results for the topic T_1 after 150 generations of the algorithm.

The optimization started optimistically by improving average score by factor of 3 in just 50 generations, but after 100 generations the algorithm couldn't find a better set of parameters. The same problem appeared in calibrations for the rest of the

topics. This is a clear indication that the function for measuring similarity can find only macro-level differences leaving micro-level differences unexplored. This problem can be solved by applying state of the art Natural Language Processing techniques for measuring content similarity [5] or by using methods for analyzing information flows in social networks (Social Network Mining) [6].

Summary

We identified the role of Audience overlap networks as a powerful tool for analysis of social media. We described a general approach for building AONs while having full understating of follower-followee relations. Using four topics, we showed that it is possible to build an approximation of AON using only minimal amount of input data. We are also certain that by applying better content similarity measures it is possible to improve process of building AONs and remove the need in knowing full structure of the followers.

Список використаних джерел

1. *Subhayan Mukerjee, Sílvia Majó-Vázquez, and Sandra González-Bailón.* Networks of Audience Overlap in the Consumption of Digital News// Journal of Communication.- 2008. - V.68. – Iss.1. – Pp.26–50.
2. Twitter API v1.1. [Online] – Available from: https://developer.twitter.com/en/docs/twitter-api/v1.
3. *Zhang Y, Jin R, Zhou Z H.* Understanding bag-of-words model: A statistical framework. // International Journal of Machine Learning and Cybernetics. – 2010. - 1(1). – Pp.43-52.
4. *Beyer, Hans-Georg, Schwefel, Hans-Paul.* Evolution strategies - A comprehensive introduction// Natural Computing. – 2002. - 1(1). – Pp.3-52.
5. *Daniel Cer, Yinfei Yang, Sheng-yi Kong, Nan Hua, Nicole Limtiaco, Rhomni St John, Noah Constant, Mario Guajardo-Cespedes,* et al. Universal sentence encoder// arXiv preprint, 2018. arXiv: 1803.11175.
6. *Гусарова Н.Ф.* Анализ социальных сетей. Основные понятия и метрики. – СПб.: Университет ИТМО, 2016. – 67с.

References

1. MUKERJEE, S., MAJÓ-VÁZQUEZ, S. and GONZÁLEZ-BAILÓN, S. (2018) *Networks of Audience Overlap in the Consumption of Digital News* // Journal of Communication. – V. 68. – Iss. 1. - Pp.26–50.
2. *Twitter API v1.1.* [Online] – Available from: https://developer.twitter.com/en/docs/twitter-api/v1.
3. ZHANG, Y., JIN, R. and ZHOU, Z.H. (2010) *Understanding bag-of-words model: A statistical framework* // International Journal of Machine Learning and Cybernetics. - 1(1). – Pp.43-52.
4. BEYER, H.-G. and SCHWEFEL, H.-P. (2002) *Evolution strategies - A comprehensive introduction* // Natural Computing. - 1(1). – Pp.3-52.
5. CER, D., YINFEI, Y., SHENG-YI KONG, NAN HUA, LIMTIACO, N., RHOMNI. St.J., CONSTANT, N., GUAJARDO-CESPEDES, M. et al. (2018). *Universal sentence encoder*// arXiv preprint. arXiv: 1803.11175.
6. GUSAROVA, N.F. (2016) *Analiz socialnykh setey. Osnovnye ponyatiya i metriki*. SPb.: Universitet ITMO.

Надійшла до редколегії 30.01.2021

УДК 517.988 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/1.9

О. Ф. Кашпур, *к.ф.-м.н., доц.*

Умови розв'язуваності систем нелінійних рівнянь в евклідових просторах

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64.
e-mail: olena.kashpur@gmail.com

O. F. Kashpur, *Ph.D., Associate Prof.*

Conditions for the solvability of nonlinear equations systems in Euclidean spaces

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.
e-mail: olena.kashpur@gmail.com

В роботі одержано умови розв'язуваності систем нелінійних (поліноміальних) рівнянь. Показано, що одержані умови еквівалентні умовам існування інтерполяційного полінома мінімальної норми першого степеня в евклідовому просторі.

Ключові слова: Інтерполяційний поліном, система нелінійних рівнянь, евклідовий простір, умови розв'язуваності.

The solution of many applied problems is to find a solution of nonlinear equations systems in finite-dimensional Euclidean spaces. The problem of finding the solution of a nonlinear system is divided into two problems: 1. The existence of a solution of a nonlinear equations system; in the case of nonunique of the solution, it is necessary to find the number of these solutions and their surroundings. 2. Finding the solution of a system of nonlinear equations with a given accuracy. Many publications are devoted to solving problem 2, namely the construction of iterative methods, their convergence and estimates of the solution accuracy. In contrast to problem 2, for problem 1 there is no general algorithm for solving this task, there are no constructive conditions for the existence of a solution of a nonlinear equations system in Euclidean spaces.

In this article, in finite-dimensional Euclidean spaces, the constructive conditions for the existence of a solution of nonlinear systems of polynomial form are found. The connection of these conditions with the linear polynomial interpolant of the minimum norm, generated by a scalar product with Gaussian measure and the conditions of its existence, is given.

Key Words: Interpolation polynomial, system of nonlinear equations, Euclidean space, solvability conditions.

Статтю представив проф. Анісімов А.В.

1 Вступ

Розв'язання багатьох прикладних задач зводиться до пошуку розв'язку систем нелінійних рівнянь в скінченновимірних евклідових просторах. Такі задачі виникають у випадку пошуку екстремума функції багатьох змінних, при застосуванні неявних методів інтегрування звичайних диференційних рівнянь та ін. Як відомо задача знаходження розв'язку нелінійної системи розпадається на дві задачі:

1. Питання про існування та єдиність розв'язку системи нелінійних рівнянь; у випадку неєдиності розв'язку потрібно знайти кількість цих розв'язків та їх окіл.

2. Знаходення розв'язку системи нелінійних рівнянь із заданою точністю.

Багато публікацій присвячено розв'язанню задачі 2 [1]–[3], а саме побудові ітераційних методів, питанням їх збіжності та оцінкам точності знайденого розв'язку. В [3] доведено теореми про знаходження розв'язку нелінійної системи в евклідових просторах, у випадку коли відомі деякі координати її розв'язку. На відміну від задачі 2, для задачі 1 не існує загального алгоритму розв'язання поставленої задачі, тобто не існує конструктивних умов існування розв'язку системи нелінійних рівнянь в евклідових просторах. Як і для одного нелінійного рівняння локалізація коренів нелінійної системи може бути зроблена за допомогою методів математичного аналізу на основі інформації про систему. У випадку системи нелінійних рівнянь з двома невідомими достатньо зручним є графічний метод. Але якщо змінних більше ніж дві, то для отримання відповіді на пита-

© О. Ф. Кашпур, 2021

ння про існування розв'язку системи та знаходження його околу потрібно використовувати методи математичного аналізу. Зауважимо, що в [4] наведено обзор теорем та тверджень, за допомогою яких можна з'ясувати питання про існування розв'язку нелінійної системи, але умови ці не є конструктивними. В деяких випадках знайдено умови існування розв'язку систем нелінійних рівнянь [5]. В [6] наведено умови розв'язуваності нелінійної системи, але вони містять початкове наближення із околу кореня, тобто це означає, що розв'язок системи існує. В роботі наведено конструктивні умови існування розв'язку нелінійних систем поліноміального вигляду в скінченновимірних евклідових просторах. Наведено зв'язок цих умов з поліноміальним інтерполянтом першого степеня в евклідових просторах та умовами його існування. Перейдемо до опису структури роботи.

Перший розділ містить відомі результати, що необхідні для подальшого викладу. Другий розділ присвячений умовам існування розв'язку систем нелінійних (поліноміальних) рівнянь та показано, що вони еквівалентні умовам існування інтерполяційного полінома першого степеня, значення якого на спеціальних інтерполяційних вузлах збігаються з відповідною лінійною системою алгебраїчних рівнянь, тобто лінійною системою, до якої зводиться система поліноміальних рівнянь за допомогою певної заміни змінних. Закінчується стаття висновками. Виклад ілюструється рядом конкретних прикладів.

2 Допоміжні результати

Наведемо результати, що будуть використані для подальшого викладення матеріалу. Розглянемо систему лінійних рівнянь

$$\alpha_{j1}x_1 + \alpha_{j2}x_2 + \cdots + \alpha_{jn}x_n - y_j = 0, \qquad (1)$$

$$j = 1, 2, \ldots, m.$$

Відповідно до [7] введемо такі означення.

Означення 2.1. Мінор Δ, що недорівнює нулю та складається із коефіцієнтів при невідомих системи (1) назвемо вузловим мінором цієї системи, якщо відношення до нього всіх визначників, що отримані із Δ додаванням ще одного стовбчика - вектора правих частин та будь-якого рядка матриці, невід'ємне. Останні мінори називають супроводжуючими.

Означення 2.2. Вузловий мінор Δ системи (1) назвемо невід'ємно (недодатньо) орієнтованим відносно невідомого x_k, якщо виконується одна із двох умов:

1. Жоден із коефіцієнтів при x_k системи (1) не є елементом мінора Δ.

2. Відношення мінора Δ до визначника, який отримано із Δ при заміні стовбчика коефіцієнтів при x_k стовбчиком відповідних правих частин системи (1), невід'ємне (недодатнє).

Означення 2.3. Послідовність чисел $s_1, s_2, \ldots, s_m$ назвемо цілком Δ-допустимою, якщо виконуються такі умови:

1. Δ є вузловим мінором системи (1).

2. Чи мінор Δ містить стовбчик, що визначається коефіцієнтами при x_k із системи (1) і при заміні елементів цього стовбця відповідними вільними членами y_j перетворюється на нуль, а при заміні відповідними числами s_j перетворюється на визначник Δ^*, що відповідає співвідношенню $\dfrac{\Delta^*}{\Delta} \leqslant 0$; чи Δ не перетворюється на нуль у випадку першої заміни чи взагалі не містить стовбця із коефіцієнтів при x_k.

Означення 2.4. Якщо існує вузловий мінор Δ системи (1) такий, що сукупність чисел $s_1, s_2, \ldots, s_m$ цілком Δ-допустима відносно кожного із невідомих $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$ (з одним і тим самим Δ), то назвемо цю послідовність цілком Δ-допустимою відносно сукупності цих невідомих.

На підставі доведеного в [7] має місце

Теорема 2.1. *(С. М. Черніков) Для того, щоб система лінійних рівнянь (1) мала хоча б один розв'язок строго від'ємний (строго додатній) відносно сукупності невідомих $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$ і недодатній (невід'ємний) відносно сукупності інших невідомих $x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_t}$, $0 \leqslant t \leqslant n-1$ необхідно та достатньо, щоб виконувалась одна із умов:*

1. $y_j = 0$ та $s_j = \sum_{i=1}^{k} a_{jn_i} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

2. Система (1) має хоча б один недодатньо (невід'ємно) орієнтований відносно сукупності невідомих $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$ та $x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_t}$ вузловий мінор Δ такий, що послідовність чисел $s_1, s_2, \ldots, s_m$ є цілком Δ-допустимою відносно сукупності цих невідомих.

Зазначимо, що в [8] також доведено теореми про знаки розв'язків системи (1). Але для перевірки виконання умов цих теорем потрібно обчилювати C_n^r визначників порядку r, де r - ранг матриці системи, n - число невідомих.

В подальшому в роботі буде показано зв'язок між умовами існування розв'язку нелінійної системи рівнянь та умовою існування інтерполяційного полінома в евклідовому просторі. У зв'язку із цим розглянемо розв'язання лінійної інтерполяційної задачі в скінченновимірному евклідовому просторі. Нехай $f : E_n \to R_1$, E_n – n-вимірний евклідовий простір, $u \in E_n$, $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Інтерполяційний поліном першого степеня для $f(u)$ має вигляд

$$P_1(u) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \tag{2}$$

та відповідає інтерполяційним умовам

$$P_1(u_k) = f(u_k) = y_k,\ k = \overline{0,m},\ y_0 = 0, \tag{3}$$

де $u_k,\ k = \overline{0,m}$ – вузли інтерполяції:

$$\begin{gathered} u_0 = (0,0,\dots,0), \\ u_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1n}), \\ u_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2n}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_m = (\alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \dots, \alpha_{mn}). \end{gathered} \tag{4}$$

На підставі теореми з [9] маємо:

Теорема 2.2. *Для розв'язання інтерполяційної задачі (2)-(4) необхідно та достатньо виконання рівності*

$$(E - \Gamma^{+}\Gamma)y = 0, \tag{5}$$

де $y = (0, y_1, y_2, \dots, y_m)$, $\Gamma = \| \sum_{p=o}^{1} (u_i, u_j)^p \|_{i,j=0}^{m}$, $0^0 = 1$, $(\cdot,\cdot)$ – *скалярний добуток в* E_n, Γ^{+} – *псевдообернена матриця Мура-Пенроуза [10] до матриці* Γ, E – *одинична матриця розмірності* $(m+1) \times (m+1)$.

При виконання умови (5) поліном

$$P_1(u) = \left\langle y, \Gamma^{+} \sum_{p=o}^{1} (u_i, u)^p \|_{i=0}^{m} \right\rangle$$

є розв'язком задачі (2)-(4), що має мінімальну норму, породжену скалярним добутком з гаусовою мірою [12], де $\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \beta_i$, $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m)$.

В [11] показано, що умова (5) є аналогом теореми Кронекера-Капеллі розв'язуваності системи лінійних алгебраїчних рівнять (1).

3 Умови розв'язуваності систем нелінійних рівнянь

Розглянемо систему нелінійних рівнянь над полем дійсних чисел вигляду:

$$\alpha_{j1} z_1^k + \alpha_{j2} z_2^k + \dots + \alpha_{jn} z_n^k - y_j = 0, \tag{6}$$

$$k \in N,\ j = 1, 2, \dots, m.$$

Систему (6) будемо називати поліноміальною системою. Постає питання про існування її розв'язку. Введемо позначення: $z_i^k = x_i,\ i = 1, 2, \dots, n$ та підставимо в (6).

В результаті підстановки система (6) набуває вигляду:

$$\alpha_{j1} x_1 + \alpha_{j2} x_2 + \dots + \alpha_{jn} x_n - y_j = 0, \tag{7}$$

$$j = 1, 2, \dots, m.$$

Отже, отримали систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Умовою існування розв'язку (7) є виконання умови (5). В [11] надано зв'язок між умовами розв'язності систем лінійних рівнянь та поліноміальним інтерполянтом першого степеня в евклідових просторах і умовами його існування. Оскільки поліноміальна система зводиться до (7), то умова існування розв'язку нелінійної системи (6) також буде еквівалентна умовам існування інтерполяційного полінома першого степеня в евклідовому просторі.

Розглянемо систему (6) у випадку, коли k – непарне. Задача розв'язання поліноміальної системи звелась до системи лінійних алгебраїчних рівнянь (7). Її розв'язок існує, якщо виконується умова (5). Таким чином маємо:

Теорема 3.1. *Нехай в (6)* $k = 2l - 1, l \in N$ *та виконується умова (5) теореми 2.2. Тоді система поліноміальних рівнянь (6) над полем дійсних чисел має розв'язок.*

Нехай в (6) k є парним. Одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (7) із обмеженнями

$$x_k \geqslant 0,\ \ k = 1, 2, \dots n. \tag{8}$$

Для того, щоб існував розв'язок системи (7) з умовами (8) необхідно щоб виконувались умови теореми 2.2, а виконання нерівностей (8) забезпечує виконання умов теореми 2.1. Одержали такий результат:

Теорема 3.2. *Нехай в (6) $k = 2l, l \in N$ та для системи (7) виконуються умови теорем 2.1 та 2.2. Тоді система нелінійних рівнянь (6) над полем дійсних чисел має розв'язок.*

Проілюструємо застосування теореми 3.2 на наступному прикладі.

Приклад 1. З'ясувати, чи існує розв'язок системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 = 0, \\ z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 + z_4^2 = 1, \\ 2z_1^2 - z_2^2 - 2z_3^2 + z_4^2 = -1/2. \end{cases} \quad (9)$$

Позначимо $z_i^2 = x_i,\ x_i \geqslant 0,\ i = \overline{1,4}$. Отримаємо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -1/2, \end{cases} \quad (10)$$

із обмеженнями (8). З'ясуємо, чи виконуються умови теореми 2.2. Побудуємо матрицю Γ. Для цього прикладу, відповідно до введених вище позначень:

$$\begin{aligned} u_0 &= (0,0,0,0), \\ u_1 &= (1,-1,1,-1), \\ u_2 &= (1,-1,-1,1), \\ u_3 &= (2,-1,-2,1), \\ y &= (0,0,1,-1/2), \end{aligned}$$

$$\Gamma = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 7 & 11 \end{Vmatrix}.$$

Матриця Γ невироджена, оскільки $det\Gamma = 16$, отже умова (5) виконується і система лінійних рівнянь (10) має розв'язок. Перевіримо, чи будуть виконуватись обмеження (8). Для цього необхідно, щоб виконувались умови теореми 2.1. Маємо: для системи (10) визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

що складається із коефіцієнтів при невідомих x_1 та x_3 із першого та другого рівняння є вузловим мінором. Покажемо, що він є невід'ємно орієнтованим відносно сукупності всіх невідомих (10). Згідно із пунктом 2 означення 2.2 невід'ємно орієнтованого вузлового мінора маємо:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1,\ \frac{\Delta}{\Delta_1} > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ \frac{\Delta}{\Delta_2} > 0,$$

отже умови виконуються і Δ є невід'ємно орієнтованим вузловим мінором відносно всіх невідомих системи (10). Оскільки сума $s_j,\ j = 1,2,3$ коєфіцієнтів при невідомих в будь-якому рівнянні (10) дорівнює нулю, то послідовність чисел s_1, s_2, s_3 є цілком Δ-допустимою відносно x_1, x_2, x_3, x_4. Таким чином, у прикладі виконується друга умова теореми 2.1 і всі розв'язки системи (10) - додатні, а отже і система (9) має розв'язок. Можна переконатись, що розв'язком системи (10) є вектор $(1, 1/2, 5/2, 3)$.

Розглянемо питання про існування розв'язку поліноміальної системи вигляду

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \tilde{y}_1, \\ g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \tilde{y}_2, \end{cases} \quad (11)$$

де $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - пара дійсних квадратичних форм від n невідомих. Ідея розв'язання поставленої задачі полягає у наступному: потрібно, щоб існувало єдине невироджене лінійне перетворення, яке одночасно переводить дві квадратичні форми $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ та $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ до канонічного вигляду.

Нехай $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - додатньо визначена квадратична форма. Тоді, відповідно до [13], існує невироджене лінійне перетворення, яке одночасно зводить форму $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ до нормального вигляду, а форму $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - до канонічного. В результаті одержимо таку систему

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{12}x_2^2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n^2 = y_1, \\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = y_2, \end{cases} \quad (12)$$

Система (12) є частинним випадком системи (6) у випадку, коли k є парним. Отже (12) має розв'язок, якщо виконуються умови теореми 3.2.

Теорема 3.3. *Нехай в (11) $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - пара дійсних квадратичних форм, форма $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – додатньо визначена та виконуються умови теореми 3.2 для системи рівнянь (12). Тоді система нелінійних рівнянь (11) має розв'язок.*

Нехай тепер в (11) $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - дві довільні дійсні квадратичні форми. Симетричні матриці A та B є матрицями квадратичних форм $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ та $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ відповідно. В [10] показано, що умова $AB = BA$ є необхідною та достатньою для одночасного зведення матриць A та B до діагонального вигляду за допомогою ортогонального перетворення. Таким чином, у випадку виконання рівності $AB = BA$ система (11) набуває вигляду (6), де $k = 2,\ m = 2$. Тоді теорему про існування розв'язку системи (11) в цьому випадку можна сформулювати таким чином.

Теорема 3.4. *Нехай в (11) $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - пара дійсних квадратичних форм яким відповідають матриці A та B. Якщо виконується рівність $AB = BA$ та умови теореми 3.2 для системи рівнянь (6), де $k = 2,\ m = 2$, то система нелінійних рівнянь (11) має розв'язок.*

Зазначимо, що всі умови одночасної діагоналізації двох дійсних симетричних матриць наведено в [10]. На підставі цих результатів теорему про розв'язуваність нелінійної системи (11) можна записати так:

Теорема 3.5. *Нехай в (11) $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - пара дійсних квадратичних форм яким відповідають матриці A та B, $detA \neq 0$. Якщо виконуються умови*

1. Рівняння $det(B - \lambda A) = 0$ має лише дійсні корені.

2. Матриця $B - \lambda A$ має всі лише прості елементарні дільники.

3. Виконуються умови теореми 3.2 для системи рівнянь (6), де $k = 2,\ m = 2$,

то система нелінійних рівнянь (11) має розв'язок.

Нехай $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - дійсні квадратичні форми від n невідомих. Розглянемо питання про існування розв'язку такої нелінійної системи рівнянь

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \tilde{y}_1, \\ g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \tilde{y}_2, \\ v(x_1, x_2, \dots, x_n) = \tilde{y}_3. \end{cases} \tag{13}$$

Наступним кроком потрібно звести всі три квадратичні форми до канонічного вигляду за допомогою одного лінійного невиродженого перетворення, тобто привести систему (13) до вигляду (6). Нехай квадратичним формам $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ відповідають симетричні матриці $A,\ B$ та C. В [14] знайдено необхідні та достатні умови одночасної діагоналізації трьох дійсних симетричних матриць. На підставі цих результатів теорему про існування розв'язку системи (13) можна подати у вигляді:

Теорема 3.6. *Нехай в (13) $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - дійсні квадратичні форми, яким відповідають матриці A, B та C, $detA \neq 0$. Якщо виконуються умови*

1. Рівняння $det(B - \lambda A) = 0$ має лише дійсні корені та матриця $B - \lambda A$ має всі лише прості елементарні дільники.

2. Рівняння $det(C - \beta A) = 0$ має лише дійсні корені та матриця $C - \beta A$ має всі лише прості елементарні дільники.

3. $BA^{-1}C = CA^{-1}B$.

4. Виконуються умови теореми 3.2 для системи рівнянь (6), де $k = 2,\ m = 3$,

тоді система нелінійних рівнянь (13) має розв'язок.

Зазначимо, що умова 3 теореми 3.6 є достатньо жорсткою умовою, оскільки невеликий клас матриць можуть її зодовольняти. Проілюструємо це на прикладі.

Приклад 2. З'ясувати чи буде мати розв'язок система рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2-\alpha^2}(x_1^2 + 2x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2) = -1,\ \alpha \in R^1, \\ \alpha^2 \neq 2, \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 = 1, \\ 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Квадратичним формам

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2-\alpha^2}(x_1^2 + 2x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2),$$

$$g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2,$$

$$v(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2$$

відповідають симетричні матриці

$$A = \frac{1}{2-\alpha^2}\begin{Vmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{Vmatrix}, B = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}, C = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Перевіримо виконання умови 3 теореми 3.6 для цих трьох матриць. Маємо:

$$BA^{-1}C = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$BA^{-1}C = \begin{Vmatrix} 3-\alpha & 1 \\ -3+\alpha & -1 \end{Vmatrix} \qquad (15)$$

$$CA^{-1}B = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$CA^{-1}B = \begin{Vmatrix} 3-\alpha & -3+\alpha \\ 3 & -1 \end{Vmatrix} \qquad (16)$$

Для виконання умови 3 потрібно щоб знайдені матриці в (15) та (16) співпадали. Отримаємо

$$-3+\alpha = 3,\ 1 = -3+\alpha.$$

Одержали суперечність. Отже при жодному $\alpha \in R^1$ умова 3 теореми 8 для системи (14) не виконується.

Зауваження. В [7] доведено теореми про існування додатніх розв'язків системи однорідних алгебраїчних рівнянь. Тому теореми, що наведено в даній статті на підставі результатів із [7] можна сформулювати для однорідних поліноміальних систем рівнянь. Також зазначимо, що в роботі [7] доведено ряд теорем про додатні розв'язки систем алгебраїчних рівнянь, отже у формулюванні всіх теорем даної статті можна посилатись на інші теореми із [7].

4 Висновки

В роботі знайдено умови існування розв'язку поліноміальної системи рівнянь в скінченновимірному евклідовому просторі та показано, що необхідні та достатні умови існування лінійного інтерполяційного полінома мінімальної норми з [11] еквівалентні необхідним та достатнім умовам сумісності системи поліноміальних рівнянь.

Список використаних джерел

1. *Трауб Дж.* Итерационные методы решения уравнений. / Дж. Трауб // М.: Мир. – 1985. – 263 с.

2. *Ostrowski A. M.* Solution of equations and systems of equations. / A. M. Ostrowski // University of Basel. Academic press. – 1960. – 220 p.

3. *Айзенберг Л. А.* К решению систем нелинейных алгебраических уравнений с помощью многомерного логарифмического вычета. О разрешимости в радикалах. / Л. Айзенберг, В. Болотов, А. Цих // Докл. АН СССР.– 1980.– 252, № 1.–С. 11-14.

4. *Ортега Дж.* Итерацонные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. / Дж. Ортега, В. Рейнболдт // М.: Мир. – 1975. – 560 с.

5. *Яковлев М. Н.* Разрешимость систем нелинейных уравнений при наличии (γ, δ) - пар сравнения. / М. Яковлев// Zap. Nauchn. Sem. POMI.– 1992.– № 202.– С. 185-189.

References

1. TRAUB D. (1985) *Iterative methods for solving equations*, M., Mir. – 263 p.

2. OSTROWSKI A. M. (1960) *Solution of equations and systems of equations*, University of Basel. Academic press. – 220 p.

3. AIZENBERG L., BOLOTOV V., TSYKH A. (1980) Solution of a systems of non-linear algebraic equations with the multidimensional logarithmic subtraction. About a solvability in radicals *Dokl. akad. nauk SSSR*, **252**, №1, P. 11-14.

4. ORTEGA D., RAINBOLDT V. (1975), Iterative methods for solving nonlinear systems of equations with many variables. M.: Mir, 560 p.

5. YAKOVLEV M. (1992) Solvability of the systems of nonlinear equations in the presence of comparison (γ, δ)-pairs. *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, **202**, P. 185-189.

6. *Чуйко С. М.* Обобщение теоремы Ньютона-Канторовича для систем нелинейных вещественных уравнений. / С. Чуйко // Доп. НАНУ.– 2020.– № 3.– С. 3-9.

7. *Черников С. Н.* Положительные и отрицательные решения систем линейных неравенств / С. Черников // Мат. сб. – 1956.– 38(80), №4.– С. 479-508.

8. *Михельсон В. С.* О знаках решения системы линейных уравнений. / В. Михельсон // УМН – 1954.– т. 9, №3(61).– С. 163-170.

9. *Макаров В. Л.* Основы теории полиномиального операторного интерполирования. / В. Макаров, В. Хлобыстов // Киев: НАН Украины. Ин-т математики. – 1998. – 278 с.

10. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. / Ф. Гантмахер // М.: физматлит. – 2010. – 558 с.

11. *Макаров В. Л.* Операторна інтерполяція та системи лінійних рівнянь і нерівностей в евклідових просторах. / В. Макаров, В. Хлобистов, О. Кашпур // УМЖ.– 2020.– (72) № 11.– С. 1524-1535.

12. *Егоров А. Д.* Приближенные методы вычисления континуальных интегралов. / А. Егоров, П. Соболеский, Л. Янович // Минск: Наука и техника. – 1985. – 310 с.

13. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. / А. Курош // М.: физматлит. – 1963. – 431 с.

14. *Новиков М. А.* Одновременная диагонализация трех вещественных симметрических матриц. / М. Новиков // Изв. вузов.– 2014.– № 12.– С. 70-81.

6. CHUJKO S. (2020) Generalization of the Newton-Kantorovich theorem for systems of nonlinear real equations *Dopov. NANU*, №3, P. 3-9.

7. CHERNIKOV S. (1956) Positive and negative solutions of linear inequalities systems *Math. Zb.*, **38(80)**, №4, P. 479-508.

8. MIKHELSON V. (1954) On the signs of the solution of a linear equations system *UMJ*, **9(61)**, №3, P. 163-170.

9. MAKAROV V., KHLOBYSTOV V. (1998) *The foundations of the polynomial operator interpolation theory.* Kyiv, Inst. of Math., NANU – 268 p.

10. GANTMAHER F. (2010) *Matrix theory.* M., Fizmatlit. – 558 p.

11. MAKAROV V., KHLOBYSTOV V., KASHPUR O. (2020) Operator interpolation and systems of linear equations and unequations in euclidean spaces. *UMJ*, **72**, №11, P. 1524-1535.

12. YEGOROV A., SOBOLEVSKIJ P., YANOVICH L. (1985) *Approximate calculation of continual integrals.* Minsk, Nauka i tekhnika. – 310 p.

13. KUROSH A. (1963) *Higher algebra course.* M., Fizmatlit. – 431 p.

14. NOVIKOV M. (2014) Simultaneous diagonalization of three real symmetric matrices *Izv. vuzov*, №12, P. 70-81.

Надійшла до редколегії: 15.01.2021

УДК 51-76

https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/1.10

Колянова Т.В., к.ф.-м. н.

T.V. Kolianova, PhD assistant

Вплив керування на поведінку ізольованої логістичної популяції

The impact of management on the behavior of an isolated logistics population

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,

e-mail: tania.kolianova@gmail.com

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,

e-mail: tania.kolianova@gmail.com

В статті розглядається ізольована популяція, що описується логістичним рівнянням, та вивчається вплив керування на зміну її чисельності. В залежності від значення параметру керування виникає три різних випадки поведінки ізольованої популяції. Досліджено стаціонарні точки на стійкість в усіх трьох випадках та представлені графіки поведінки популяції в залежності від різних початкових умов.

Ключові слова: логістична популяція, диференціальне рівняння, стаціонарна точка, стійкість, керування.

The article considers the isolated population described by the logistic equation and studies the influence of management on the change of its number. Depending on the value of the control parameter, there are three different cases of behavior of an isolated population. In the first case, when the quota is equal to the corresponding value, depending on the initial value, the population either goes to a stationary value, or dies out. In the second case, when the quota does not exceed the established value, depending on the initial population size, the population either goes to the largest stationary point, or dies out. And in the third case, when the quota exceeds the established value, regardless of the initial population size, the population dies out. Stationary points for stability in all three cases are studied and graphs of population behavior depending on different initial conditions are presented.

Key words: logistic population, differential equation, stationary point, stability, management.

Логістичне рівняння, також відоме як рівняння Ферхюльста (Верхюльста, 1838), спершу з'явилось при розгляді моделі зростання чисельності населення [1]. Зараз це рівняння широко застосовується для опису багатьох фізичних, хімічних, економічних та біологічних процесів тощо.

Нагадаємо логістичне рівняння [1]

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{q}\right), \quad x(0) = x_0, \qquad (1)$$

де r – темп росту популяції, q – ємність середовища.

Стаціонарні точки цього рівняння

$$x_1 = 0, \; x_2 = q.$$

Розв'язок рівняння (1) відомий та матиме вигляд:

$$x(t) = \frac{q}{1 - \left(\frac{x_0}{x_0 - q}\right)e^{-rt}} \qquad (2)$$

З розв'язку (2) видно, що при $t \to +\infty$ $x(t) \to q = x_2$.

Таким чином, маємо стійкий стан рівноваги при довільному початковому значенні $x_0 > 0$.

Пропонується розглянути логістичне рівняння для ізольованої популяції та ввести деякий параметр керування $u > 0, u = const$.

Тоді вихідна модель матиме вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{q}\right) - u, \quad x(0) = x_0 \qquad (3)$$

Дану модель (3) з параметром керування можна використовувати для розв'язання прикладних задач: у замкненому середовищі проводити розведення деяких біологічних видів, наприклад, на продаж. Це може бути популяції харчових сортів риби, тварини хутряних порід, птахи тощо. За допомогою параметру керування та початкової чисельності популяції з'ясувати – яку кількість особин із популяції можна

© Колянова Т.В., 2021

вилучити, щоб популяція не вимирала і залишалась на певному сталому рівні.

Отже, знайдемо стаціонарні точки [2] для (3):

$$x_{1,2} = \frac{q \pm \sqrt{q^2 - 4\frac{qu}{r}}}{2} = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{q}{r}u} \quad (4)$$

Все буде залежати від знаку підкореневого виразу. Позначимо його $D = \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{q}{r}u}$:

Отже, маємо три випадки

1) $D = 0 <=> u = {}^{rq}/_{4}$, тоді стаціонарна точка $x_{1,2} = {}^{q}/_{2}$.

2) $D > 0 <=> u < {}^{rq}/_{4}$, нехай $(u = {}^{rq}/_{4} - \varepsilon^2, \varepsilon > 0)$, тоді $x_{1,2} = \frac{q}{2} \pm \varepsilon\sqrt{\frac{q}{r}}$

3) $D < 0 <=> u > {}^{rq}/_{4}$, нехай $(u = {}^{rq}/_{4} - \varepsilon^2, \varepsilon > 0)$, тоді дійсних стаціонарних точок немає.

Розглянемо всі наші випадки.

1) Нехай $u = {}^{rq}/_{4}$, тоді $x_{1,2} = {}^{q}/_{2}$.

Вихідне рівняння матиме вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{q}\right) - \frac{rq}{4}, \quad x(0) = x_0 \quad (5)$$

Перепишемо в іншому вигляді

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{r}{q}\left(x - \frac{q}{2}\right)^2, \quad x(0) = x_0 \quad (6)$$

Розв'язавши рівняння (6), знайдемо, що

$$\frac{1}{x - \frac{q}{2}} = \frac{r}{q}t + C$$

Константа $C = \frac{1}{x_0 - \frac{q}{2}}$, $x_0 \neq \frac{q}{2}$.

Отже, розв'язок має вигляд

$$x(t) = \frac{q}{2} + \frac{1}{\frac{r}{q}t + \frac{1}{x_0 - \frac{q}{2}}}, \qquad x_0 \neq \frac{1}{2} \quad (7)$$

При $x_0 > {}^{q}/_{2}$ $x(t) \to {}^{q}/_{2}$ при $t \to +\infty$.

При $x_0 < {}^{q}/_{2}$ $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

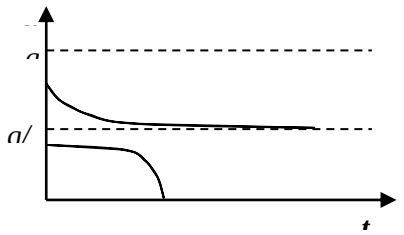


Рис.1. Поведінка ізольованої логістичної популяції при керуванні $u = {}^{rq}/_{4}$.

2) Нехай параметр керування $u < {}^{rq}/_{4}$.

Можемо нерівність перетворити у рівність наступним чином

$$u = {}^{rq}/_{4} - \varepsilon^2, \qquad (\varepsilon > 0),$$

тоді стаціонарні точки матимуть вигляд

$$x_{1,2} = \frac{rq}{2} \pm \varepsilon\sqrt{\frac{q}{r}}.$$

Вихідне рівняння матиме вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{q}\right) - \frac{rq}{4} + \varepsilon^2, \ x(0) = x_0 \quad (8)$$

Перепишемо в іншому вигляді

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{r}{q}\left(\left(x - \frac{q}{2}\right)^2 - \frac{q}{r}\varepsilon^2\right), x(0) = x_0 \quad (9)$$

Рівняння (9) – це табличний інтеграл.

Отже,

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon} ln\left|\frac{x - \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon}{x - \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon}\right| = -\frac{r}{q}t + lnC \quad (10)$$

Все залежить від початкового значення x_0, а це в свою чергу визначає з яким знаком розкривається модуль.

Перепишем рівняння (10)

$$\left|\frac{x - \left(\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon\right)}{x - \left(\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon\right)}\right| = Ce^{-2\varepsilon\sqrt{\frac{r}{q}}t} \qquad (11)$$

Константа має вигляд

$$C = \left|\frac{x_0 - \left(\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon\right)}{x_0 - \left(\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon\right)}\right|$$

Нехай

$$x_0 < \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon.$$

Тоді розкриваємо модуль зі знаком «+»:

$$x - \left(\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon\right) = Ce^{-2\varepsilon\sqrt{\frac{q}{r}}t}\left(x - \left(\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon\right)\right).$$

Після відповідних перетворень отримаємо

$$x(t) = \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon + \frac{2\varepsilon\sqrt{\frac{q}{r}}}{1 - Ce^{-2\varepsilon\sqrt{\frac{q}{r}}t}}. \quad (12)$$

До якого значення буде прямувати $x(t)$ при $t \to +\infty$. Для цього розглянемо поведінку похідної (9) на проміжку $\left(0; q/2 - \sqrt{q/r}\,\varepsilon\right)$

Припустимо, що

$$x_0 = \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon - a \ (a > 0).$$

Підставимо в похідну (9), отримаємо

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{r}{q}\left(\frac{q}{r}\varepsilon^2 + 2a\varepsilon\sqrt{\frac{q}{r}} + a^2 - \frac{q}{r}\varepsilon^2\right) < 0$$

Отже, похідна (9) на проміжку $\left(0; {}^{q}/_{2} - \sqrt{{}^{q}/_{r}}\,\varepsilon\right)$ спадає, тому розв'язок (12) при $t \to +\infty$ $x(t) \to 0$. Таким чином популяція не встигає відновлюватись, та поступово вимирає.

Нехай

$$\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon < x_0 < \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon.$$

Тоді розкриваємо модуль зі знаком «-»:

$$x - \left(\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon\right) = -Ce^{-2\varepsilon\sqrt{\frac{q}{r}}t}\left(x - \left(\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon\right)\right)$$

Після відповідних перетворень отримаємо

$$x(t) = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon - \frac{2\varepsilon\sqrt{\frac{q}{r}}Ce^{-2\varepsilon\sqrt{\frac{q}{r}}t}}{1 + Ce^{-2\varepsilon\sqrt{\frac{q}{r}}t}}. \quad (13)$$

До якого значення буде прямувати $x(t)$ при $t \to +\infty$. Для цього розглянемо поведінку похідної (9) на проміжку $\left({}^{q}/_{2} - \sqrt{{}^{q}/_{r}}\,\varepsilon; {}^{q}/_{2} + \sqrt{{}^{q}/_{r}}\,\varepsilon\right)$

Припустимо, що

$$x_0 = \frac{q}{2}.$$

Підставимо в похідну (9), отримаємо

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{r}{q}\left(-\frac{q}{r}\varepsilon^2\right) = \varepsilon^2 > 0$$

Отже, похідна (9) на проміжку $\left({}^{q}/_{2} - \sqrt{{}^{q}/_{r}}\,\varepsilon; {}^{q}/_{2} + \sqrt{{}^{q}/_{r}}\,\varepsilon\right)$ зростає, тому розв'язок (13) при $t \to +\infty$ $x(t) \to {}^{q}/_{2} + \sqrt{{}^{q}/_{r}}\,\varepsilon$ знизу.

Нехай

$$x_0 > \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon.$$

Тоді модуль розкривається зі знаком «+».

Після відповідних перетворень отримаємо

$$x(t) = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon - \frac{2\varepsilon\sqrt{\frac{q}{r}}Ce^{-2\varepsilon\sqrt{\frac{q}{r}}t}}{1 - Ce^{-2\varepsilon\sqrt{\frac{q}{r}}t}}. \quad (14)$$

До якого значення буде прямувати $x(t)$ при $t \to +\infty$. Для цього розглянемо поведінку похідної (9) на проміжку $\left({}^{q}/_{2} + \sqrt{{}^{q}/_{r}}\,\varepsilon; q\right)$

Припустимо, що

$$x_0 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon + a\ (a > 0).$$

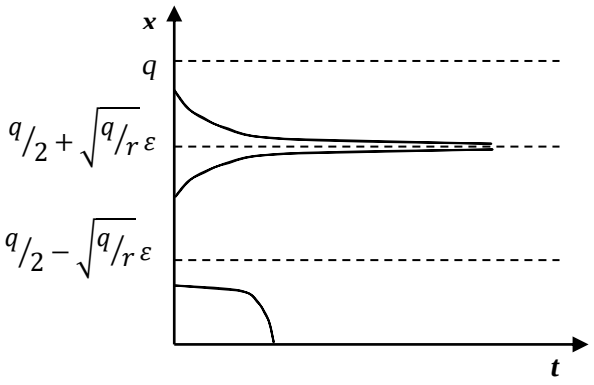
Підставимо в похідну (9), отримаємо

$$\frac{dx}{dt} == -\frac{r}{q}\left(\frac{q}{r}\varepsilon^2 + 2a\varepsilon\sqrt{\frac{q}{r}} + a^2 - \frac{q}{r}\varepsilon^2\right) < 0$$

Отже, похідна (9) на проміжку $\left({}^{q}/_{2} + \sqrt{{}^{q}/_{r}}\,\varepsilon; q\right)$ спадає, тому розв'язок (14) при $t \to +\infty$ $x(t) \to {}^{q}/_{2} + \sqrt{{}^{q}/_{r}}\,\varepsilon$ зверху.

Рис. 2. Поведінка ізольованої логістичної популяції при керуванні $u < {}^{rq}/_{4}$.

Таким чином, у нас тільки одна стійка стаціонарна точка x_2, до якої прямують траєкторії розв'язку. Отже, якщо початкова чисельність популяції належить проміжку



$\left({}^{q}/_{2} - \sqrt{{}^{q}/_{r}}\,\varepsilon; q\right)$ при параметрі керування $u < {}^{rq}/_{4}$ $x(t) \to {}^{q}/_{2} + \sqrt{{}^{q}/_{r}}\,\varepsilon$, в протилежному випадку популяція буде поступово вимирати.

3) Нехай $u > {}^{rq}/_{4}$ $(u = {}^{rq}/_{4} + \varepsilon^2, \varepsilon > 0)$, $x_{1,2}$ *не є дійсними*.

Вихідне рівняння матиме вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{q}\right) - \frac{rq}{4} - \varepsilon^2, \quad x(0) = x_0 \quad (15)$$

Перепишемо в іншому вигляді

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{r}{q}\left(\left(x - \frac{q}{2}\right)^2 + \frac{q}{r}\varepsilon^2\right), \quad x(0) = x_0 \quad (16)$$

Рівняння (16) – це табличний інтеграл.

Тоді, маємо

$$\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{r}{q}}\ arctg\frac{x-\frac{q}{2}}{\varepsilon\sqrt{\frac{q}{r}}} = -\frac{r}{q}t + C$$

Константа має вигляд

$$C = \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{r}{q}}\ arctg\frac{x_0-\frac{q}{2}}{\varepsilon\sqrt{\frac{q}{r}}}.$$

Після відповідних перетворень отримаємо

$$x(t) = \frac{q}{2} + \varepsilon\sqrt{\frac{q}{r}}tg(-\varepsilon\sqrt{\frac{r}{q}}t + C_1) \qquad (17)$$

Маємо наступний графік динаміки

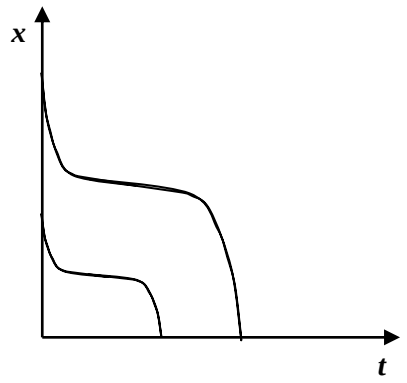


Рис. 3. Поведінка ізольованої логістичної популяції при керуванні $u > {}^{rq}/_{4}$.

В даному випадку якою б не була початкова чисельність при параметрі керування $u > {}^{rq}/_{4}$ популяція не встигатиме відновлюватись і буде вимирати, але чим більше початкова чисельність до ємності середовища, тим повільніше буде відбуватись вимирання.

Список використаних джерел

1. Verhulst, PF, Recherches Mathmatiques sur La Loi D'Accroissement de la Population, *Nouveaux Mmoires de l'Acadmie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles,* 18, Art. 1, 1-45, 1845 (Mathematical Researches into the Law of Population Growth Increase)
2. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. – Київ: «Либідь», – 2003. – 600 с.

References

1. VERHULST (1845), PF, Recherches Mathmatiques sur La Loi D'Accroissement de la Population, *Nouveaux Mmoires de l'Acadmie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles,* 18, Art. 1, 1-45 (Mathematical Researches into the Law of Population Growth Increase)
2. SAMOYLENKO A.M., PERESTYUK M.O., PARASYUK I.O. (2003) Dyferensialni rivniannia. – Kyiv: “Lybid”, p.600

Надійшла до редколегії 22.04.20

УДК 519.925.51 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/1.11

Кулян В.Р.[1], к.т.н.
Юнькова О.О.[2], к.ф.-м.н.

Математична задача диверсифікації банківських активів

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03127, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д
e-mail: v.kulyan@gmail.com
[2]Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана, м. Київ, 03680, пр-т Перемоги, 54/1
e-mail: olenayunkova@gmail.com

Victor R. Kulian[1], Ph.D.
Olena O. Yunkova[2], Ph.D.

Mathetical problem of banking assets diversification

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03068, Kyiv, Glushkova ave., 4d
e-mail: v.kulyan@gmail.com
[2]Vadym Getman National Economics University of Kyiv, 03680, Kyiv, Peremogy ave., 54/1
e-mail: olenayunkova@gmail.com

Розглядається математична задача оптимальної диверсифікації портфеля акцій на основі розв'язання двокритеріальної задачі оптимізації.

Ключові слова: математична модель, оптимальне інвестування, портфель акцій.

In article we consider a problem of optimal investment strategy by a commercial bank building. This task is actual and the development of a procedure to solve it can help in making investment banking decisions. The general formulation of the problem consists of two criteria. The first one is to maximize the expected return, and the second is to minimize the risk of the investment transaction. Mathematical formulation of the problem is considered as a problem of nonlinear programming under constraints. The procedure for solving such a two-criteria optimization problem allows to obtain many solutions, which requires further steps to make a single optimal solution. According to the algorithm proposed in the work, the problem is divided into two separate problems of single-criteria optimization. Each of these tasks allows to obtain the optimal values of the investment vector both in terms of its expected return and in terms of investment risk. Additional constraints in the mathematical formulation of the problem, make it possible to take into account factors that, from the point of view of the investor, may influence decision-making. The procedures presented in this work allow to obtain analytical representations of formulas that describe the optimal values of the investment distribution vector for both mathematical formulations of the problem.

Key words: mathematical model, optimal investment, stock portfolio

Статтю представив д.ф-м.н., професор Хусаїнов Д.Я.

Динамічні та статичні задачі управління активами і зобов'язаннями знайшли успішне застосування у сфері довгострокового фінансового планування, де необхідність неодноразового прийняття рішень визначається сутністю процесу. Приклади застосування таких математичних задач успішно реалізовано для інвестиційних задач фондового ринку, страхових та інвестиційних компаній, банків та університетських фондів.

Разом з тим, деякі класичні постановки задач моделювання на фондовому ринку знайшли своє застосування в інших прикладних сферах, наприклад, у банківському секторі економіки. Серед них можна виділити задачі Г. Марковиця та Д. Тобіна про інвестування у портфелі цінних паперів однорідної та змішаної структури відповідно. Задача Г. Марковиця про оптимізацію портфеля акцій з точки зору його очікуваної прибутковості у статичному випадку має такий вигляд

$$r_p = \sum_i x_i r_i \to \max_x ,$$

де x_i – частка акцій і-того виду у портфелі; r_i – очікувана прибутковість акції і-того виду. Часто інвестори задачу розглядають у такій постановці

$$r_p(T) = \sum_i x_i(T) r_i(T) \to \max_x ,$$

тут Т- горизонт інвестування;

© В.Р. Кулян, О.О. Юнькова, 2021

і полягає вона у побудові оптимального за очікуваною прибутковістю у кінцевий момент часу інвестиційного портфеля. Дослідження математиків і економістів у галузі фінансового аналізу спрямовані на вивчення різних змістових інтерпретацій, узагальнень існуючих постановок задач та поширення їх на нові сфери застосування.

Прикладами такого підходу можуть бути:

1. Задача про оптимальний розподіл інвестиційних ресурсів комерційного банку.
2. Задача про оптимальне кредитування комерційним банком.
3. Задача про оптимізацію розподілу активів комерційного банку з урахуванням обов'язкового резервування.

Для ознайомлення із математичною постановкою та підходами до розв'язання перших двох можна звернутись до [2]. Додамо лише, що формально задача про оптимальний розподіл інвестиційних ресурсів комерційного банку ідентична задачі інвестування у цінні папери на фондовому ринку, тому підходи, описані в [2], повністю або частково можна застосувати при розв'язанні задач п.1 та п.2.

Третя згадана задача є новою у сучасному банківському менеджменті, тому розглянемо її детально. При формальному математичному записі цієї задачі звернемо увагу на те, що іноді зручніше розглядати процеси інвестування не у частках капіталу, що виділяється для інвестування, а безпосередньо у сумі коштів W_i, що виділяються для інвестування у $i-$тий напрямок; $W-$загальна сума коштів. Тоді задача матиме вигляд

$$\sum_{i=1}^{n}(r_i - p_i)W_i \to \max_{\overline{W}}, \qquad (1)$$

де $\overline{W} = (W_1, W_2 ... W_n)^T$ - вектор-стовпчик, координатами якого є суми коштів, що виділяються для інвестування у відповідні напрямки; r та $p-$вектор-стовпчики розмірності $n \times 1$, перший з яких характеризує очікувану прибутковість $i-$того інвестиційного напрямку, а другий - відсоток від суми, що може бути інвестована у відповідний напрямок і який є обов'язковим для резервування. Згідно Марковицю, другий критерій класичної двокритеріальної задачі про оптимальний інвестиційний портфель має вигляд

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} W_i \sigma_{ij} W_j \to \min_{\overline{W}}, \qquad (2)$$

де $\sigma_{ij}-$коваріація між $i-$тим та $j-$тим інвестиційними напрямками.

Векторно-матричний вигляд задачі є таким

$$\begin{cases} R^T \overline{W} \to \max\limits_{\overline{W}} \\ (\overline{W})^T V \overline{W} \to \min\limits_{\overline{W}} \\ I^T \overline{W} = 1 \\ W_i \geq 0 \end{cases}, \qquad (3)$$

де $V-$коваріацйна матриця; $R-$вектор розмірності $n \times 1$, координатами якого є $r_i - p_i$, $i = \overline{1,n}$; символ Т- знак транспонування. Сформульована вище задача є двокритеріальною із суперечливими критеріями. Як правило, для розв'язання такого типу задач застосовують методи, що дозволяють будувати множини розв'язків. Серед них виділимо суб'єктивно-орієнтований підхід з прийняття інвестиційних рішень, що ґрунтується на побудові та аналізі допустимої та ефективної множин, а також метод побудови Парето – оптимальної множини розв'язків. Маючи на меті побудову аналітичного розв'язку задачі, і, виходячи із практичних міркувань, перший критерій в (3) замінимо рівністю

$R^T \overline{W} = S$.

Тоді (3) матиме вигляд нелінійної задачі одномірної оптимізації при обмеженнях

$$\begin{cases} (\overline{W})^T V \overline{W} \to \min\limits_{\overline{W}} \\ R^T \overline{W} = S \\ I^T \overline{W} = 1 \\ W_i \geq 0 \end{cases}, \qquad (4)$$

де $S-$бажаний рівень прибутку інвестиційної операції.

Застосуємо для її розв'язання метод множників Лагранжа. Функція Лагранжа

$$L = (\overline{W})^T V \overline{W} + \lambda_1 (R^T \overline{W} - S) + \lambda_2 (I^T \overline{W} - 1)$$

містить два невідомі параметри λ_1 і λ_2 і задача полягає у визначенні елементів вектора $\overline{W}$.

$$\frac{\partial L}{\partial \overline{W}} = 2V\overline{W} + \lambda_1 R + \lambda_2 I,$$

$$\overline{W} = (2V)^{-1}(-\lambda_1 R - \lambda_2 I). \qquad (5)$$

Параметри λ_1 та λ_2 визначимо із системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} R^T (2V)^{-1}(-\lambda_1 R - \lambda_2 I) = S, \\ I^T (2V)^{-1}(-\lambda_1 R - \lambda_2 I) = 1. \end{cases}$$

Із першого рівняння

$$-\lambda_1 R^T (2V)^{-1} R = S + \lambda_2 R^T (2V)^{-1} I,$$

$$-\lambda_1 = (R^T (2V)^{-1} R)^{-1}(S + -\lambda_2 R^T (2V)^{-1} I). \quad (6)$$

Із другого рівняння

$$-\lambda_1 I^T (2V)^{-1} R = 1 + \lambda_2 I^T (2V)^{-1} I,$$

$$-\lambda_1 = (I^T (2V)^{-1} R)^{-1}(1 + \lambda_2 I^T (2V)^{-1} I). \quad (7)$$

Прирівняємо (6) та (7)

$$(R^T (2V)^{-1} R)^{-1}(S + \lambda_2 R^T (2V)^{-1} I) = (I^T (2V)^{-1} R)^{-1}(1 + \lambda_2 I^T (2V)^{-1} I). \quad (8)$$

Отримали лінійне рівняння відносно λ_2. Розв'яжемо його і знайдене значення параметра λ_2 підставимо у (6) або (7) і визначимо λ_1.

Після підстановки визначених значень у (5) отримаємо шукані частки банківських інвестицій.

Для зменшення ризику портфеля часто банківські активи розподіляють не тільки серед ризикованих напрямків інвестування, але також і серед неризикованих. Прикладом такого вкладення ресурсів можуть бути державні та недержавні боргові зобов'язання, і це дозволяє ефективно диверсифікувати інвестиційний портфель.

Математична постановка задачі може бути такою

$$\begin{cases} R^T \overline{W} + R^0 W^0 \to \max\limits_{\overline{W}} \\ (\overline{W})^T V \overline{W} \to \min\limits_{\overline{W}} \\ I^T \overline{W} + W^0 = 1 \\ W_i \ge 0 \end{cases}, \quad (9)$$

де W^0 – сума коштів, що виділяються на інвестування у неризиковані цінні папери. Як і у випадку попередньої задачі, розглянемо однокритеріальну її постановку.

$$\begin{cases} (\overline{W})^T V \overline{W} \to \min\limits_{W} \\ R^T \overline{W} + R^0 W^0 = S \\ I^T \overline{W} + W^0 = 1 \\ W_i \ge 0 \end{cases}. \quad (10)$$

Функція Лагранжа

$$L = (\overline{W})^T V \overline{W} + \lambda_1 (R^T \overline{W} + R^0 W^0 - S) + \lambda_2 (I^T \overline{W} + W^0 - 1)$$

на відміну від попереднього випадку, містить додаткову невідому W^0.

$$\frac{\partial L}{\partial \overline{W}} = 2V\overline{W} + \lambda_1 R + \lambda_2 I = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial W^0} = \lambda_1 R^0 + \lambda_2 = 0, \quad (11)$$

$$\overline{W} = (2V)^{-1}(-\lambda_1 R - \lambda_2 I).$$

$$\lambda_2 = -\lambda_1 R^0. \quad (12)$$

Для визначення невідомих параметрів λ_1 та λ_2 скористаємось другим та третім рівняннями системи (10). Після підстановки в них λ_2 із (12) отримаємо лінійне алгебраїчне рівняння

$$R^0(1 - I^T \overline{W}(\lambda_1)) = S - R^T \overline{W}(\lambda_1),$$

що містить одне невідоме λ_1. Розв'яжемо його, підставимо λ_1 у (12) та визначимо λ_2. Тепер маємо можливість визначити оптимальні суми коштів, що можуть бути інвестовані у ризиковані та неризиковані проекти.

Як сказано раніше, поряд з наведеною вище задачею мінімізації ризику інвестиційної операції для заданого рівня прибутковості за умови обов'язкового резервування можна навести спряжену з нею задачу про максимізацію прибутку для заданого рівня ризику за умови обов'язкового резервування. Формальна постановка задачі оптимізації інвестиційного портфеля однорідної структури має такий вигляд

$$\begin{cases} R^T \overline{W} \to \max\limits_{\overline{W}} \\ (\overline{W})^T V \overline{W} = \tau \\ I^T \overline{W} = 1 \\ W_i \ge 0 \end{cases},$$

де τ - заданий допустимий рівень ризику. Цю задачу можна сформулювати і для випадку інвестиційного портфеля змішаної структури

$$\begin{cases} R^T \overline{W} + R^0 W^0 \to \max\limits_{\overline{W}, W^0} \\ (\overline{W})^T V \overline{W} = \tau \\ I^T \overline{W} + W^0 = 1 \\ W_i \ge 0 \end{cases}.$$

Підходи до розв'язання двох останніх задач можуть бути аналогічними застосованим вище.

У роботі сформульовано нові математичні постановки задач оптимізації прийняття інвестиційних рішень комерційним банком. Для задач оптимізації очікуваної прибутковості при заданому наперед рівні прийнятного ризику та оптимізації ризику при визначеному наперед рівні очікуваної прибутковості розроблено алгоритми та обчислювальні процедури. Обидві задачі розглядаються як задачі нелінійного програмування при визначених наперед обмеженнях. Подальші кроки оптимізації прийняття конструктивних рішень можуть бути пов'язані із застосуванням положень теорій Г. Марковиця та Д. Тобіна для формування динамічних стратегій диверсифікації портфелів інвестицій однорідної та змішаної структури.

Список використаних джерел

1. *Шарп У.* Инвестиции / *Уильям Ф. Шарп, Гордон Дж. Александер, Джеффри В. Бэйли*. – Москва: Инфра-М, 1999. – с.1027.
2. Гаращенко Ф.Г. Качественный анализ математических моделей инвестиционного менеджмента / Кулян В.Р., Рутицкая В.В. // Кибернетика и вычислительная техника. – 2005. – № 148. –с. 3-10.
3. Гаращенко Ф.Г. Моделирование динамики и диверсификация портфеля акций / Кулян В.Р., Петрович В.Н., Юнькова Е.А. // Проблемы управления и информатики.- 2016. - № 4.- с. 124-132.

Reference

1. SHARPE, W., ALEXANDER, G. and BAILEY, J. (1995) *Investments*. New Jersey: Prentice Hall.
2. GARASHCHENKO, F., KULYAN, V. and RUTITSKAYA, V. (2005*)* Quality analysis of mathematical models of investment management: *Cybernetics and computing engineering*. 148. p. 3-10.
3. GARASHCHENKO FEDIR, KULIAN VICTOR, PETROVICH VALENTINA and YUNKOVA OLENA (2016) Simulation of the Dynamics and Diversification of Stock Portfolio Journal of Automation and Information Sciences. - New York, Connecticut. - v. 48, issue 7. - P. 28-40.

Надійшла до редколегії 07.02.2021р.

УДК 004.657 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/1.12

Л.Л. Омельчук [1], *к.ф.-м.н, доц.*
Н.Г. Русіна [2], *к.п.н.*

Аналіз освітньо-професійних програм за спеціальністю 122 Комп'ютерні науки в розрізі програмних результатів навчання

[1.2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Академіка Глушкова 4д,

e-mail: [1] l.omelchuk@knu.ua
e-mail: [2] rusina@knu.ua

L.L. Omelchuk [1], *PhD., Associate Prof*
N.G. Rusina [2], *PhD.*

Analysis of educational and professional programs in the specialty 122 Computer Science in terms of program learning outcomes

[1.2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,

e-mail: [1] l.omelchuk@knu.ua
e-mail: [2] rusina@knu.ua

У статті наведено аналіз освітньо-професійної програми «Інформатика» першого (бакалаврського) рівня вищої освіти галузі знань 12 «Інформаційні технології», спеціальності 122 «Комп'ютерні науки», що реалізується на факультеті комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка з освітніми програмами того ж рівня й спеціальності інших закладів вищої освіти України в розрізі програмних результатів. При аналізі здійснювалось їх співставлення з затвердженим стандартом першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки» та порівняльний аналіз освітніх програм. Авторами розроблено базу даних освітніх програм, проаналізовано співвідношення програмних результатів в різних програмах за спільною спеціальністю.

Ключові слова: програмні результати навчання, комп'ютерні науки, інформатика, база даних, освітня програма.

The article presents an analysis of the educational and professional program "Informatics" of the first (bachelor's) level of higher education in the sphere of knowledge 12 "Information Technology", specialty 122 "Computer Science", implemented at the Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras National University of Kyiv Shevchenko with educational programs of the same level and specialty of other institutions of higher education of Ukraine in terms of program results. The analysis was done for monitoring and taking into account the experience of similar educational programs.

For comparison, four educational programs were chosen at random. During the analysis, they were compared with the approved standard of the first (bachelor's) level of higher education in the specialty 122 "Computer Science". Automated comparative analysis of educational programs was conducted separately. The authors developed a database of educational programs, analyzed the ratio of program results in different programs in a common specialty. The result of the study is the verification of the educational program for correctness, ie the lack of program learning outcomes that are not provided by any discipline.

Keywords — program learning outcomes, computer science, computer science, database, educational program.

Статтю представила д.ф.-м.н., доцент Розора І.В.

© Л.Л. Омельчук, Н.Г. Русіна, 2021

Вступ

Ринок ІТ-послуг в Україні розвивається динамічно, що вимагає якісної ІТ-освіти. Освітньо-професійна програма бакалаврського рівня «Інформатика», що реалізується на факультеті комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, є одним із лідерів серед освітніх програм бакалаврського рівня за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки» за кількісним та якісним складом випускників [1].

Здійснення моніторингу цієї програми та врахування досвіду аналогічних освітніх програм в Україні є важливим для підвищення рівня якості ІТ освіти за програмою. Таким чином, виникла необхідність порівняти наявні у вільному доступі освітні програми першого (бакалаврського) рівня за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки» з освітньо-професійною програмою «Інформатика».

В роботах [2, 3] проаналізовано та висвітлено питання проектування та розробки стандартів освітньо-професійної підготовки в галузі інформаційних технологій. В роботі [4] проаналізовано співвідношення загальних і фахових компетентностей та дисциплін в різних освітньо-професійних програмах (ОПП) бакалаврського рівня за спільною спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки».

Закон «Про вищу освіту» [5] та затверджений Наказом Міністерства освіти і науки України за №962 від 10.07.2019 році стандарт вищої освіти за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки» для першого (бакалаврського) рівня вищої освіти [6] стали базою для проведення дослідження освітньої програми.

Аналіз освітньо-професійної програми «Інформатика» з програмами інших закладів вищої освіти

Проведено аналіз освітньо-професійних програм на здобуття освітнього ступеня бакалавр галузі знань 12 «Інформаційні технології» за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки» на основі порівняння їх змісту відносно програмних результатів навчання (ПРН), визначених Стандартом.

Для дослідження авторами відібрано наступні ОПП:

- «Інформатика», що реалізується на факультеті комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (ФКНК «Інформатика») [7];
- «Комп'ютерні науки», яка вивчається на факультеті інформаційних технологій Київського національного університету імені Тараса Шевченка (ФІТ «Комп'ютерні науки») [8].
- «Інформатика», що реалізується на факультеті математики і інформатики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна (ХНУ імені В.Н. Каразіна «Інформатика») [9];
- «Інформатика», що вивчається на факультеті інформаційних технологій Державного вищого навчального закладу «Ужгородський національний університет» (УжНУ «Інформатика» [10];
- «Комп'ютерні науки», яка вивчається на факультеті Інформаційних технологій Національного університету біоресурсів і природокористування України (НУБіП «Комп'ютерні науки») [11].

Стандартом визначено сімнадцять ПРН. Але варто зазначити, що цей Стандарт містить технічну помилку, а саме в співпадінні ПРН13 та ПРН14. Різні заклади вищої освіти (ЗВО) інтерпретували цю помилку досить по-різному, а саме: дублювали ПРН13 та ПРН14, ігнорували ПРН14, і як результат мали тільки 16 ПРН, одну частину ПРН13 залишали в ПРН13 іншу переносили в ПРН14. Це ускладнило отримання валідних результатів.

Співвідношення освітніх компонент в відібраних ОПП за ПРН наведено в таблиці 1.

Таблиця 1. Співвідношення освітніх компонент в ОПП за ПРН

ФКНК «Інформатика»	ФІТ «Комп'ютерні науки»	ХНУ імені В.Н. Каразіна «Інформатика»	УжНУ «Інформатика»	НУБіП «Комп'ютерні науки»
ПР1				
вступ до університетських студій, українська та зарубіжна	вступ до університетських студій, філософія, математика для	математичний аналіз, елементи алгебри та теорії чисел, елементи математичної логіки,	історія та культура України, іноземна мова, ділова українська мова, філософія, основи психології та педагогіки,	вища математика, фізика, чисельні методи, дискретна математика,

культура, філософія, соціально-політичні студії, вибрані розділи трудового права і основ підприємницької діяльності, науковий образ світу, математична логіка, теорія алгоритмів, іноземна мова, підготовка кваліфікаційної роботи бакалавра, теорія програмування	комп'ютерних наук, дискретні структури, основи обчислювального інтелекту, системний аналіз, інтелектуальний аналіз даних, моделювання систем	елементарної та дискретної математики, аналітична геометрія, лінійна алгебра, дискретна математика, диференціальні рівняння, теорія ймовірностей та її застосування, вступ до математичної статистики, вступ до SQL баз даних, технічна англійська	дискретна математика та теорія алгоритмів, алгебра та аналітична геометрія, математичний аналіз, фізика, диференціальні рівняння, теорія ймовірностей, імовірнісні процеси та математична статистика, математичні методи дослідження операцій, теорія прийняття рішень, математичні методи дослідження операцій, теорія прийняття рішень, системний аналіз, алгоритмізація та програмування, вступ до іт, комп'ютерна графіка, алгоритми і структури даних, об'єктно-орієнтоване програмування, сучасні мови програмування, управління іт-проектами технологія програмування та створення програмних продуктів, організація баз даних і знань, методика викладання інформатики, методи та системи штучного інтелекту, технології розподілених систем та паралель-них обчислень, проектно-технологічна практика, переддипломна практика, виконання дипломної роботи бакалавра	теорія ймовірностей, імовірнісні процеси і математична статистика, екологія, математичні методи дослідження операцій, філософія, іноземна мова, правова культура особистості, програмування, інформаційні технології, методи та системи штучного інтелекту, комп'ютерна графіка, об'єктно-орієнтоване програмування, web-технології та web-дизайн, системний аналіз, комп'ютерні мережі, проектно-технологічна практика, виробнича практика, дипломне проектування та захист
ПР2				
алгебра та геометрія, математичний аналіз, підготовка кваліфікаційної роботи бакалавра, дискретна математика, диференціальні рівняння, теорія ймовірностей, математична статистика, обчислювальна геометрія та	математика для комп'ютерних наук, дискретні структури, моделювання систем	вступ до математичної статистики, програмування, вступ до SQL баз даних, технічна англійська	алгебра та аналітична геометрія, математичний аналіз, диференціальні рівняння, теорія ймовірностей, імовірнісні процеси та математична статистика, математичні методи дослідження операцій, теорія прийняття рішень, системний аналіз	вища математика, фізика, чисельні методи, дискретна математика, теорія ймовірностей, імовірнісні процеси і математична статистика, організація баз даних, дипломне проектування та захист

комп'ютерна графіка				
ПР3				
екологічні й економічні процеси та їх моделювання, теорія прийняття рішень, теорія ймовірностей, математична статистика, основи дослідження операцій, теорія керування та основи робототехніки	теорія ймовірностей для комп'ютерних наук, інтелектуальний аналіз даних, моделювання систем	програмування, вступ до SQL баз даних, технічна англійська	теорія ймовірностей, імовірнісні процеси та математична статистика, математичні методи дослідження операцій, теорія прийняття рішень, системний аналіз	теорія ймовірностей, імовірнісні процеси і математична статистика, екологія, математичні методи дослідження операцій, дипломне проектування та захист
ПР4				
обчислювальна геометрія та комп'ютерна графіка, теорія керування та основи робототехніки, інтелектуальні системи	основи обчислювального інтелекту	математичний аналіз, елементи алгебри та теорії чисел, елементи математичної логіки, елементарної та дискретної математики, аналітична геометрія, лінійна алгебра, дискретна математика, диференціальні рівняння, теорія і методи проектування реляційних баз даних, вступ до програмування паралельних процесів (мови C++ і Java), технічна англійська	методи та системи штучного інтелекту	методи та системи штучного інтелекту, теорія розпізнавання образів та класифікації в системах штучного інтелекту, дипломне проектування та захист
ПР5				
математична логіка, теорія алгоритмів, виробнича практика, програмування, підготовка кваліфікаційної роботи бакалавра, теорія програмування	алгоритмізація та програмування, проектування та аналіз алгоритмів	методи оптимізації і дослідження операцій, вступ до SQL баз даних, технології web-програмування, теорія і методи проектування реляційних баз даних, вступ до програмування паралельних процесів (мови C++ і Java), розробка компіляторів для предметно-орієнт. мов, технічна англійська	дискретна математика та теорія алгоритмів, алгебра та аналітична геометрія, математичний аналіз, диференціальні рівняння, алгоритмізація та програмування, вступ до іт, алгоритми і структури даних, об'єктно-орієнтоване програмування, сучасні мови програмування, управління іт-проектами технологія програмування та створення програмних продуктів, веб-технології та веб-дизайн,	чисельні методи, дискретна математика, програмування, комп'ютерна графіка, організація баз даних, web-технології та web-дизайн, дипломне проектування та захист

			організація баз даних і знань, методика викладання інформатики, методи та системи штучного інтелекту, технології розподілених систем та паралельних обчислень, проектно-технологічна практика, переддипломна практика, виконання дипломної роботи бакалавра	
ПР6				
диференціальні рівняння, чисельні методи	чисельні методи, моделювання систем	історія України, філософія, англійська мова, англійська мова за фахом, операційні системи, методи оптимізації і дослідження операцій, технології web-програмування, теорія і методи проектування реляційних баз даних, вступ до програмування паралельних процесів (мови C++ і Java), розробка компіляторів для предметно-орієнт. мов, паралельні та розподілені обчислення, технічна англійська	технології розподілених систем та паралельних обчислень	Вища математика, Чисельні методи, Дипломне проектування та захист
ПР7				
основи дослідження операцій, дослідження операцій	дослідження операцій, моделювання систем	операційні системи, методи оптимізації і дослідження операцій, вступ до SQL баз даних, технології web-програмування, технічна англійська	математичні методи дослідження операцій, теорія прийняття рішень, системний аналіз, технології розподілених систем та паралельних обчислень	Діловий протокол та етика спілкування, Об'єктно-орієнтоване програмування, Дипломне проектування та захист
ПР8				
екологічні й економічні процеси та їх моделювання, теорія прийняття рішень, підготовка кваліфікаційної роботи бакалавра	системний аналіз, проектування інформаційних систем	об'єктно-орієнтовне програмування (мова C++), об'єктно-орієнтоване програмуван. (мова Java), алгоритми і структури даних, архітектура обчислювальних систем, операційні	теорія прийняття рішень, системний аналіз, алгоритмізація та програмування, вступ до іт, алгоритми і структури даних, об'єктно-орієнтоване програмування, комп'ютерні мережі, сучасні мови	екологія, математичні методи дослідження операцій, системний аналіз, дипломне проектування та захист

		системи, математична логіка і мова Prolog, інформаційні мережі, методи оптимізації і дослідження операцій, вступ до SQL баз даних, технології web-програмування, декларативне програмування (Haskell і Prolog), теорія і методи проектування реляційних баз даних, вступ до програмування паралельних процесів (мови C++ і Java), розробка компіляторів для предметно-орієнт. мов, паралельні та розподілені обчислення, вступ до штучного інтелекту	програмування, управління іт-проектами, технологія програмування та створення програмних продуктів, організація баз даних і знань, методи та системи штучного інтелекту, технології розподілених систем та паралель-них обчислень, проектно-технологічна практика, переддипломна практика, виконання дипломної роботи бакалавра	
ПР9				
об'єктно-орієнтоване програмування, інструментальні середовища та технології програмування, інформаційні технології, програмування, підготовка кваліфікаційної роботи бакалавра	алгоритмізація та програмування, об'єктно-орієнтоване програмування, непроцедурне програмування	операційні системи, математична логіка і мова Prolog, методи оптимізації і дослідження операцій, технології web-програмування, розробка компіляторів для предметно-орієнт. мов	алгоритмізація та програмування, вступ до іт, алгоритми і структури даних, об'єктно-орієнтоване програмування, сучасні мови програмування, управління іт-проектами технологія програмування та створення програмних продуктів, організація баз даних і знань, методика викладання інформатики, методи та системи штучного інтелекту, технології розподілених систем та паралель-них обчислень, проектно-технологічна практика, переддипломна практика, виконання дипломної роботи бакалавра	програмування, комп'ютерна графіка, web-технології та web-дизайн, проектування інформаційних систем, дипломне проектування та захист
ПР10				
бази даних та інформаційні системи, підготовка кваліфікаційної	бази даних та знань, високопродуктивні обчислення,	математична логіка і мова Prolog	алгоритмізація та програмування, вступ до іт, комп'ютерна графіка, алгоритми і структури даних, об'єктно-	комп'ютерна схемотехніка та архітектура комп'ютерів, технологія

роботи бакалавра	проектування та розробка веб-застосувань		орієнтоване програмування, сучасні мови програмування, управління іт-проектами технологія програмування та створення програмних продуктів, організація баз даних і знань, методика викладання інформатики, методи та системи штучного інтелекту, технології розподілених систем та паралель-них обчислень, проектно-технологічна практика, переддипломна практика, виконання дипломної роботи бакалавра	створення програмних продуктів, управління іт-проектами, дипломне проектування та захист
ПР11				
інструментальні середовища та технології програмування, інформаційні технології, виробнича практика, іноземна мова, підготовка кваліфікаційної роботи бакалавра	технологія створення програмних продуктів, проектування інформаційних систем		Алгоритмізація та програмування, Вступ до ІТ, Об'єктно-орієнтоване програмування, Сучасні мови програмування, Управління ІТ-проектами, Технологія програмування та створення про-грамних продуктів, Веб-технології та веб-дизайн, Організація баз даних і знань, Методи та системи штучного інтелекту, Проектно-технологічна практика, Переддипломна практика, Виконання дипломної роботи бакалавра	Технологія створення програмних продуктів, Теорія розпізнавання образів та класифікації в системах штучного інтелекту, Проектування інформаційних систем, Дипломне проектування та захист
ПР12				
інтелектуальні системи	основи обчислювального інтелекту, інтелектуальний аналіз даних	математична логіка і мова Prolog, шаблони об'єктно-орієнтованого програмуван.	Методи та системи штучного інтелекту, Технології розподілених систем та паралельних обчислень	Методи та системи штучного інтелекту, Управління ІТ-проектами, Дипломне проектування та захист
ПР13				
системне програмування, архітектура обчислювальних	архітектура обчислювальних систем, комп’ютерні	математична логіка і мова Prolog, методи оптимізації і дослідження	вступ до іт, комп'ютерні мережі, управління іт-проектами, технологія програмування та	інформаційні технології, операційні системи,

систем та комп'ютерні мережі	мережі, операційні системи	операцій, технології web-програмування, методи розробки інтерфейсу користувача, шаблони об'єктно-орієнтованого програмуван., вступ до штучного інтелекту	створення програмних продуктів	дипломне проектування та захист
ПР14				
системне програмування, архітектура обчислювальних систем та комп'ютерні мережі	архітектура обчислювальних систем, комп'ютерні мережі, операційні системи	математична логіка і мова Prolog, методи оптимізації і дослідження операцій, технології web-програмування, методи розробки інтерфейсу користувача, шаблони об'єктно-орієнтованого програмуван., вступ до штучного інтелекту	алгоритмізація та програмування, вступ до іт, комп'ютерна графіка, об'єктно-орієнтоване програмування, сучасні мови програмування, управління іт-проектами технологія програмування та створення програмних продуктів, організація баз даних і знань, методика викладання інформатики, методи та системи штучного інтелекту, проектно-технологічна практика, педагогічна практика, переддипломна практика, виконання дипломної роботи бакалавра	системний аналіз, комп'ютерні мережі, дипломне проектування та захист
ПР15				
об'єктно-орієнтоване програмування, інструментальні середовища та технології програмування, інформаційні технології, виробнича практика, підготовка кваліфікаційної роботи бакалавра	об'єктно-орієнтоване програмування, системний аналіз, проектування інформаційних систем	інформаційні мережі, методи розробки інтерфейсу користувача, паралельні та розподілені обчислення, вступ до штучного інтелекту, науково-дослідницька практика	вступ до іт, комп'ютерні мережі, управління іт-проектами технологія програмування та створення програмних продуктів, організація баз даних і знань, методи та системи штучного інтелекту, технології розподілених систем та паралель-них обчислень, проектно-технологічна практика, переддипломна практика, виконання дипломної роботи бакалавра	програмування, web-технології та web-дизайн, теорія розпізнавання образів та класифікації в системах штучного інтелекту, дипломне проектування та захист
ПР16				
архітектура обчислювальних систем та комп'ютерні мережі, алгебраїчні	комп'ютерні мережі, операційні системи	інформаційні мережі, вступ до SQL баз даних, методи розробки інтерфейсу користувача, шаблони об'єктно-	методи та системи штучного інтелекту, технології розподілених систем та паралель-них обчислень	правова культура особистості, проектно-технологічна практика, виробнича

структури, криптографія та захист інформації		орієнтованого програмуван., курсова науково-дослідницька робота, вступ до штучного інтелекту		практика, дипломне проектування та захист
ПР17				
розподілене та паралельне програмування	високопродуктивні обчислення			технології розподільних систем та паралельних обчислень, дипломне проектування та захист

Теоретичне підгрунтя аналізу освітніх програм

В [4] було розглянуто математичну модель аналізу освітніх програм. Зокрема, було введено до розгляду поняття:

Множина спеціальностей:

$SP = \{sp_i \mid i=1..n\}$.

Для кожної $sp \in SP$ введемо до розгляду наступні поняття:

множина результатів навчання спеціальності: $LO_{sp} = \{lo_i \mid i=1..t\}$;

множина освітніх програм спеціальності: $OP_{sp} = \{op_i \mid j=1..m\}$.

Для кожної $op \in OP_{sp}$ введемо до розгляду поняття:

Множина обов'язкових освітніх компонент (дисциплін) освітньої програми:

$OK_{op[sp]} = \{ok_i \mid i=1..t\}$.

множина результатів навчання дисципліни: $LO_{ok} = \{ lo_{ok} \mid lo_{ok} \in LO_{sp} \,\&\, LOZ_{op[sp]}(lo_{ok}, ok)\}$.

Кількість результатів навчання дисципліни $\left|LO_{ok}\right|$.

Спільні результати навчання множини попарно різних дисциплін за освітніми програмами однієї спеціальності: $Sp_{lo}(OKD_{[sp]})$:

$k_{sp} \in Sp_{lo}(OKD_{[sp]}) \leftrightarrow lo_{ok} \in LO_{sp} \,\&$

$\forall\, ok_{sp} \in OKD_{[sp]}\, LOZ_{op[sp]}(lo_{ok}, ok_{sp})\}$.

Кількість спільних результатів навчання множини попарно різних дисциплін за освітніми програмами однієї спеціальності:

$\left| Sp_{lo}(OKD_{[sp]})\right|$.

Автоматизація аналізу порівняння ОПП

Засобом автоматизації аналізу авторами обрано СКБД MS SQL Server [12]. Для дослідження авторами розроблено базу даних EducationPrograms яка містить, зокрема, таблиці [4]:

– Universities ([PK] Id, Name, EDBO);

– Faculties ([PK] Id, Name, [FK] UniversityId);

– SpecialityCompetences ([PK] Id, Name, [FK] SpecialityId, [FK] CompetenceId);

– EdProgramsTypes ([PK] Id, TypeName);

– Specialisations ([PK] Id, Name);

– Competences ([PK] Id, Competence, [FK] CompetenceTypeId);

– EpSubjectCompetence ([PK] Id, [FK] SubjectId, [FK] SpecialityCompetenceId);

– Subjects ([PK] Id, Name, [FK] ERrogramId, Credit, [FK] ControlId);

– ControlTypes ([PK] Id, ControlTypeName);

– CompetencesTypes ([PK] Id, CompType);

– EpSubjectOutcomes ([PK] Id, [FK] SubjectId, [FK] LearningOutcomeId);

– EducationPrograms ([PK] Id, Name, [FK] SpecialityId, [FK] EdPrTypeId, EDBO, [FK] FacultyId, ImplementationDate);

– LearningOutcomes ([PK] Id, [FK] SpecialityId, LOName, LearningOutcome).

З метою здійснення аналізу ПРН авторами розроблено SQL-запити до сформованої бази даних.

На поточний момент в базі даних в наявності:

- одна спеціальність (122 «Комп'ютерні науки»); 17 програмних результатів навчання;
- 8 ОПП з 8 структурних підрозділів 7 ЗВО;
- 312 обов'язкових дисциплін;
- 7074 різних пар ПРН за описаними програмами.

Для порівняння було обрано довільно 4 освітні програми, які містять таблиці ПРН.

В роботі проаналізовано дисципліни ОПП за програмними результатами навчання. Відповідно до проведеного автоматизованого аналізу в ОПП «Інформатика» відсутні ПРН, які не забезпечуються жодною дисципліною.

В таблиці 2 наведено фрагмент порівняння дисциплін обраних для аналізу ОПП за відсотком подібності та кількості результатів навчання опанування яких забезпечується дисципліною.

Таблиця 2. Фрагмент порівняння дисциплін освітніх програм за відсотком подібності

Дисципліна 1 (ok_1)	**ОПП (op_1)**	**Дисципліна 2 (ok_2)**	**ОПП (op_2)**	**Відсот. подіб-ності Sp_{lo} ({ok_1, ok_2})**	**Кільк. Сп. ПРН |LO({ok_1, ok_2})|**	**Кільк. ПРН дисц 1 $\|LO_{ok2}\|$**	**Кільк. ПРН дисц. 2 $\|LO_{ok1}\|$**
Диференційні рівняння	ФКНК «Інформатика»	Математичний аналіз	ФКНК «Інформатика»	75	1	2	1
Філософія	ФІТ «Комп'ютерні науки»	Філософія	ФКНК «Інформатика»	100	1	1	1
Дослідження операцій	ФІТ «Комп'ютерні науки»	Дослідження операцій	ФКНК «Інформатика»	100	1	1	1
Основи обчислювального інтелекту	ФІТ «Комп'ютерні науки»	Інтелектуальні системи	ФКНК «Інформатика»	83,3	2	3	2
Методи оптимізації і дослідження операцій	ХНУ імені В.Н. Каразіна «Інформатика»	Системне програмування	ФКНК «Інформатика»	64,3	2	7	2
Методи розробки інтерфейсу користувача	ХНУ імені В.Н. Каразіна «Інформатика»	Алгебраїчні структури, крипт. та захист інформації	ФКНК «Інформатика»	62,5	1	4	1
Інформаційні мережі	ХНУ імені В.Н. Каразіна «Інформатика»	Теорія прийняття рішень	ФКНК «Інформатика»	41,7	1	3	2
Ділова українська мова	УжНУ «Інформатика»	Соціально-політичні студії	ФКНК «Інформатика»	100	1	1	1
Теорія ймов., імовірнісні процеси та мат. стат.	УжНУ «Інформатика»	Дискретна математика	ФКНК «Інформатика»	66,7	1	3	1
Виконання дипл. роботи бакалавра, атестація	УжНУ «Інформатика»	Виробнича практика	ФКНК «Інформатика»	66,7	3	9	3
Технологія програмування та створення прог. прод.	УжНУ «Інформатика»	Об'єктно-орієнтоване програмування	ФКНК «Інформатика»	61,1	2	9	2
Чисельні методи	НУБіП «Комп’ютерні науки»	Диференціальні рівняння	ФКНК «Інформатика»	75	1	1	2
WEB-технології та WEB-дизайн	НУБіП «Комп’ютерні науки»	Об'єктно-орієнтоване програмування	ФКНК «Інформатика»	75	2	4	2
Комп'ютерна графіка	НУБіП «Комп’ютерні науки»	Інформаційні технології	ФКНК «Інформатика»	33,3	1	3	3

Наведене в таблиці 2 співставлення дає наглядне уявлення про відсоток подібності конкретних обов'язкових освітніх компонент у різних ОПП за спільною спеціальністю в розрізі ПРН.

В таблицях 3-7 наглядно продемонстровано відсоток подібності ПРН за обов'язковими освітніми компонентами (ОК) на одну з дисциплін ФКНК «Інформатика» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки», а саме «Інструментальні середовища та технології програмування» (ІСтаТП) з освітніми компонентами (ОК) інших ОПП.

Таблиця 3. Відсоток подібності ІСтаТП з деякими ОК ХНУ імені В.Н. Каразіна «Інформатика»

Освітня компонента	Відсоток подібності
Операційні системи	29,17
Математична логіка і мова Prolog	25
Інформаційні мережі	33,33
Методи оптимізації і дослідження операцій	23,81
Методи розробки інтерфейсу користувача	29,17
Розробка компіляторів для предметно-орієнт. Мов	29,17
Паралельні та розподілені обчислення	33,33
Вступ до штучного інтелекту	26,67
Науково-дослідницька практика	66,67

Таблиця 4. Відсоток подібності ІСтаТП з деякими ОК УжНУ «Інформатика»

Освітня компонента	Відсоток подібності
Алгоритмізація та програмування	47,61
Вступ до ІТ	66,67
Алгоритми і структури даних	26,67
Об'єктно-орієнтоване програмування	45,83
Комп'ютерні мережі	33,33
Сучасні мови програмування	47,62
Управління ІТ-проектами	66,67
Технологія програмування та створення програмних продуктів	66,67
Веб-технології та веб-дизайн	75
Методика викладання інформатики	26,67

Таблиця 5. Відсоток подібності дисципліни ІСтаТП з іншими ОК НУБіП «Комп'ютерні науки»

Освітня компонента	Відсоток подібності
Програмування	58,33
Технологія створення програмних продуктів	41,67
WEB-технології та WEB-дизайн	58,33
Проектування інформаційних систем	83,33

Таблиця 6. Відсоток подібності ІСтаТП з деякими ОК ФКНК «Інформатика»

Освітня компонента	Відсоток подібності
Об'єктно-орієнтоване програмування	83,33
Інформаційні технології	100
Виробнича практика	66,67
Програмування	41,67
Підготовка кваліфікаційної роботи бакалавра	68,75

Таблиця 7. Відсоток подібності ІСтаТП з деякими ОК ФІТ «Комп'ютерні науки»

Освітня компонента	Відсоток подібності
Алгоритмізація та програмування	41,67
Об'єктно-орієнтоване програмування	83,33
Непроцедурне програмуваня	66,67
Системний аналіз	33,33
Проектування інформаційних систем	66,67
Технологія створення програмних продуктів	66,67

Висновки

Проведений аналіз освітньо-професійної програми першого (бакалаврського) рівня вищої освіти «Інформатика» галузі знань 12 «Інформаційні технології», спеціальності 122 «Комп'ютерні науки», що реалізуються на факультеті комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка з освітньо-професійними програмами того ж рівня вищої освіти й спеціальності інших закладів вищої освіти України показав: в ОПП «Інформатика» відсутні ПРН, що не забезпечуються жодною обов'язковою дисципліною.

Також проаналізовано співвідношення програмних результатів навчання та освітніх

компонент у різних ОПП, здійснено порівняльний аналіз дисциплін ОПП за програмними результатами навчання.

Проведений аналіз подібності дисциплін показує, що змістовно подібні дисципліни ОПП різних закладів вищої освіти за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки» забезпечують аналогічні результати навчання.

Список використаних джерел

1. 100 найкращих факультетів України. // Forbes. – 2021. – №3. – С. 127–139.

2. *Омельчук Л.Л.* Порівняльний аналіз українського стандарту освітньо-професійної підготовки з інформатики та Computer Science'2013 / Л.Л. Омельчук // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2013. – Вип. 2. – С. 216–227.

3. *Omelchuk L.* Development of the ICT-standard of Higher Education in Ukraine within the Framework of European Requirements / L. Omelchuk , N. Rusina, O. Shyshatska // Proc. 15th Int. Conf. on ICT in Education, Research and Industrial Applications. Integration, Harmonization and Knowledge Transfer (ICTERI2019). Volume I: Main Conference. – Kherson, Ukraine, June 12-15 (2019). PP. 262-273.

4. *Омельчук Л.Л.* Автоматизований аналіз освітньо-професійної програми «Інформатика», що реалізується на факультеті комп'ютерних наук та кібернетики, з програмами інших закладів вищої освіти за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки» / Л.Л.Омельчук, Н.Г.Русіна // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2020. – Вип. 4. – С. 49–62.

5. Закон України "Про вищу освіту" від 01.07.2014 р. №1556-VII // Відомості Верховної Ради України. – 2014. – № 37-38. – Ст. 2004 [Електронний ресурс]. – 2014. – Режим доступу до ресурсу: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1556-18#Text.

6. Наказ МОН України «Про затвердження стандарт вищої освіти за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки» для першого (бакалаврського) рівня вищої освіти» [Електронний ресурс]. – 2019. – Режим доступу до ресурсу: https://mon.gov.ua/storage/app/media/vishcha-osvita/zatverdzeni%20standarty/2019/07/12/122-kompyuterni-nauki-bakalavr.pdf.

7. Київський національний університету імені Тараса Шевченка. Освітньо-професійна програма "Інформатика". Спеціальність 122 Комп'ютерні науки [Електронний ресурс]. – 2019. – Режим доступу до ресурсу: http://csc.knu.ua/media/filer_public/09/f4/09f46516-6c61-46a5-ae81-f34b7d673499/opp_122_bac_2019_1.pdf.

References

1. 100 best faculties of Ukraine. // Forbes. - 2021. - №3. - P. 127–139.

2. OMELCHUK L.L. (2013) Comparative analysis of the Ukrainian standard of educational and professional training in computer science and Computer Science'2013 *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*. № 2, 216–227.

3. OMELCHUK L. Development of the ICT-standard of Higher Education in Ukraine within the Framework of European Requirements / L. Omelchuk , N. Rusina, O. Shyshatska // Proc. 15th Int. Conf. on ICT in Education, Research and Industrial Applications. Integration, Harmonization and Knowledge Transfer (ICTERI2019). Volume I: Main Conference. – Kherson, Ukraine, June 12-15 (2019). PP. 262-273.

4. OMELCHUK L.L. (2020) Automated analysis of the educational-professional program "Informatics", implemented at the faculty of computer science and cybernetics, with the programs of other institutions of higher education in the specialty 122 "Computer Science" /L. Omelchuk, N. Rusina, Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics. № 4. 49–62.

5. Law of Ukraine "On Higher Education", Bulletin of the Verkhovna Rada of Ukraine. - [Electronic resource]. - 2014. - Available from https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1556-18#Text

6. Order "On approval of the standard of higher education in the specialty 122" Computer Science "for the first (bachelor's) level of higher education", Ministry of Education and Science of Ukraine [Electronic resource]. - 2019. - Available from https://mon.gov.ua/storage/app/media/vishcha-osvita/zatverdzeni%20standarty/2019/07/12/122-kompyuterni-nauki-bakalavr.pdf.

7. Taras Shevchenko National University of Kyiv. Educational and professional program "Informatics". Specialty 122 Computer Science [Electronic resource]. - 2019. - Available from http://csc.knu.ua/media/filer_public/09/f4/09f46516-6c61-46a5-ae81-f34b7d673499/opp_122_bac_2019_1.pdf.

8. Київський національний університету імені Тараса Шевченка. Освітньо-професійна програма «Комп'ютерні науки». Спеціальність 122 Комп’ютерні науки [Електронний ресурс]. – 2019. – Режим доступу до ресурсу: http://fit.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/2019/07/ОПП-Компютерні-науки-122.pdf.

9. Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна. Освітньо-професійна-програма "Інформатика". Спеціальність 122 Комп’ютерні науки [Електронний ресурс]. – 2019. – Режим доступу до ресурсу: http://math.univer.kharkov.ua/StandProg/OPPInformBak.pdf.

10. Освітньо-професійна програма "Інформатика". Спеціальність 122 Комп’ютерні науки. Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет». [Електронний ресурс]. – 2020. – Режим доступу до ресурсу: https://nubip.edu.ua/sites/default/files/u284/122_e14egnai_ap.pdf.

11. Національний університет біоресурсів і природокористування в Україні. Освітньо-професійна програма «Комп'ютерні науки». Спеціальність 122 Комп’ютерні науки [Електронний ресурс]. – 2020. – Режим доступу до ресурсу: https://nubip.edu.ua/sites/default/files/u284/122_e14egnai_ap.pdf

12. Microsoft. SQL Server [Електронний ресурс]. – 2019. – Режим доступу до ресурсу: https://www.microsoft.com/ru-ru/sql-server/sql-server-2019.

8. Taras Shevchenko National University of Kyiv. Educational and professional program "Computer Science". Specialty 122 Computer Science [Electronic resource]. - 2019. - Available from http://fit.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/2019/07/ОПП-Компютерні-науки-122.pdf.

9. V.N. Karazin Kharkiv National University. Educational and professional program "Informatics". Specialty 122 Computer Science [Electronic resource]. - 2019. - Available from http://math.univer.kharkov.ua/StandProg/OPPInformBak.pdf.

10.Educational and professional program "Informatics" (2020). Specialty 122 Computer Science. Uzhhorod National University, https://www.uzhnu.edu.ua/uk/infocentre/get/26801.

11. Educational and professional program "Computer Science". (2020) Specialty 122 Computer Science. National University of life and environmental sciences of Ukraine, https://nubip.edu.ua/sites/default/files/u284/122_e14egnai_ap.pdf, last accessed 2021/02/12.

12. Microsoft. SQL Server [Electronic resource]. – 2019. – Available from https://www.microsoft.com/ru-ru/sql-server/sql-server-2019.

Надійшла до редколегії 24.02.2021

УДК 004.89 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/1.13

Скуржанський О. Г.[1], аспірант,
Марченко О. О.[1], д.ф.-м.н., проф.

Огляд нейромережевих підходів для задач умовної генерації тексту

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка,83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: alexskurzh97@gmail.com
rozenkrans17@gmail.com

O. H. Skurzhanskyi[1], Post-graduate,
A. A. Marchenko[1], Dr. Sci., Prof.

Review of neural approaches for conditional text generation

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,

e-mail: alexskurzh97@gmail.com
rozenkrans17@gmail.com

Стаття присвячена огляду задач умовної генерації тексту: перефразування, виправлення граматичних та орфографічних, спрощення тексту. Розглядаються джерела тренувальних даних, метрики оцінки якості роботи систем та сучасні нейромережеві підходи для розв'язання таких задач. Для кожного завдання розглядається його специфіка та вплив на запропоновані методи. Аналізуються спільні риси задач умовної генерації тексту та їх рішень.

Ключові слова: обробка природної мови, нейронні мережі, машинне навчання, умовна генерація тексту, перефразування, виправлення граматичних помилок, спрощення тексту.

The article is devoted to the review of conditional test generation, one of the most promising fields of natural language processing and artificial intelligence. Specifically, we explore monolingual local sequence transduction tasks: paraphrase generation, grammatical and spelling errors correction, text simplification. To give a better understanding of the considered tasks, we show examples of good rewrites. Then we take a deep look at such key aspects as publicly available datasets with the splits (training, validation, and testing), quality metrics for proper evaluation, and modern solutions based primarily on modern neural networks. For each task, we analyze its main characteristics and how they influence the state-of-the-art models. Eventually, we investigate the most significant shared features for the whole group of tasks in general and for approaches that provide solutions for them.

Key Words: natural language processing, neural networks, machine learning, conditional text generation, paraphrase generation, grammatical error correction, text simplification.

Статтю представив чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

Генерація тексту є чи не найбільш провідним напрямком обробки природної мови та штучного інтелекту, що найактивніше розвивається на сьогодні. Прорив здійснила нейронна мережа GPT-3 [1], натренована на 45 терабайтах тексту з 18.5 мільярдами параметрів. Вона змогла вирішувати великий спектр задач природної мови, навчаючись на звичайній генерації тексту. Суттєвою частиною цієї області є умовна генерація, коли на вхід подається певна інформація (умова) і текст (вихід) генерується з її врахуванням. До таких задач належить машинний переклад (умова – текст оригінальною мовою, вихід – текст мовою перекладу), виправлення граматичних та орфографічних помилок (умова – текст з помилками, вихід – текст без помилок), побудова діалогових систем (умова – попередні репліки, вихід – відповідь системи на них).

У цій роботі досліджується поточний стан деяких задач умовної генерації тексту (англійською мовою), а саме перефразування, виправлення граматичних та орфографічних помилок, спрощення тексту. Розглядаються

© О.Г. Скуржанський, О.О. Марченко, 2021

найефективніші підходи, джерела даних та метрики оцінки якості роботи систем.

Перефразування

Перефразування – переказ тексту іншими словами зі збереженням змісту. Наприклад, питання "How do I talk English fluently?" та "How can I improve my English speaking?" можна вважати парафразами. Особливістю даного напрямку у порівнянні з іншими задачами обробки природної мови є велика кількість робіт, які не використовують розмічені дані, а оперують лише звичайними моно корпусами тексту. Справа в тому, що умова і вихід для цієї задачі є взаємозамінними: якщо з речення $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ми можемо отримати речення $y_1, y_2, \ldots, y_k$ з великою ймовірністю, то й логічно що при умові $y_1, y_2, \ldots, y_k$ вихід $x_1, x_2, \ldots, x_m$ має мати велику ймовірність. Більше того, кожне речення не повинне мати строго 1 парафраз, а може бути переписано різними способами, що підкреслює імовірнісну природу задачі.

Для перефразування існує відносно велика кількість джерел даних різної якості та різного рівня (словосполучення, речення, абзаци). Серед них слід виділити:

- Quora Question Pairs (QQP) [2] складається з 404,290 пар питань з сайту Quora, які були помічені модераторами як дублікати і тому є гарантовано парафразами;
- ParaNMT [3] містить більше 50 млн пар англійською, згенерованих нейромережевим перекладом паралельних корпусів для задач машинного перекладу. Крім самих пар датасет включає у себе оцінки якості парафразів;
- LanguageNet [4] – набір парафразів отриманий "вирівнюванням" речень твітів, які посилались на один й той самий URL. Він налічує 51,524 пар речень розмічених анотаторами;
- MSCOCO [5] був розроблений для задачі створення субтитрів до зображень. Кожна картинка мала 5 підписів, які з великою ймовірністю є парафразами, що у сумі налічує 117 тисяч пар.

Найпопулярнішими метриками для задачі перефразування є BLEU [6] та ROUGE [7]. BLEU обчислюється наступним чином: для кожного $n \in [1, 2, 3, 4]$ рахуємо частку n-грам у реченні-кандидаті, які потрапляють у розмічене (правильне) речення і усереднюємо отримані числа. Далі множимо експоненту середнього на штраф за коротку довжину речення.

$$p_n = \frac{\sum count_{clip}(n-gram)}{\sum count(n-gram)}$$

$$B = \begin{cases} \exp(1-|ref|/|hyp|, & якщо\ |ref| > |hyp| \\ 1, & інакше \end{cases}$$

$$BLEU = B \cdot \exp[\frac{1}{N}\sum_n p_n]$$

Таким чином, BLEU намагається порахувати відсоток "правильних" n-грам у реченні, при цьому щоб отримане речення не було коротше за "золоте". ROUGE – набір метрик, які враховують повноту: ROUGE-n – рахує F_1 міру для n-грам аналогічно як точність рахується у BLEU, а ROUGE-L рахує найдовшу підпослідовність токенів з речення-кандидата у розміченому реченні.

Проаналізувавши літературу по перефразуванню можна прийти до наступного висновку: найкращою системою для поточної задачі є LBOW-Topk з роботи Paraphrase Generation with Latent Bag of Words [8]. Модель – енкодер-декодер LSTM з модифікаціями для врахування специфіки задачі перефразування.

У класичному seq2seq підході модель спочатку кодує вхідну послідовність $x = x_1, x_2, \ldots, x_m$ у послідовність h латентного простору, а потім декодує її у цільову послідовність y.

Енкодер enc_φ та декодер dec_θ – нейронні мережі, а функція втрат рахується наступним чином:

$$h = enc_\varphi(x)$$

$$p(y \mid x) = dec_\theta(h)$$

$$L_{S2S} = \mathrm{E}_{(x^*, y^*)\sim \mathrm{P}}[-\log\ p_\theta(y^* \mid x^*)],$$

де P^* – справжній розподіл даних.

Запропонована ж модель використовує слова з вхідного речення для передбачення їх "сусідів" в мішку слів з цільового речення. З передбачених "сусідів" береться випадковим чином підмножина слів, яка й використовується для передбачення цільового речення. Робиться це наступним чином.

Нехай маємо словник розміру V, тоді мішок слів z розміру k - це вектор з R^V, де k – кількість одиниць, а всі інші значення нулі. Припускається, що z отримується шляхом семплінгу з базового категоріально розподілу $p(\tilde{z} \mid x)$ k разів без замін. Для кожного слова x_i з вхідної послідовності моделюється "сусід" $z_{ij} \in R^V$:

$$p(z_{ij} \mid x_i) = Categorical(\phi_{ij}(x)),$$

де ϕ_{ij} – нейронна мережа. На практиці застосовується лінійний шар з softmax на виході h енкодеру enc_φ. Припускається, що кожен вихідний токен x_i має максимальну кількість

сусідів *l*. Далі ймовірності всіх "сусідів" перемішуються усередненням:

$$\tilde{z} \sim p_\phi(\tilde{z} \mid x) = \frac{1}{ml} \sum_{i,j} p(z_{ij} \mid x).$$

Як було згадано вище, мішок слів z семплиться *k* разів без замін з розподілу $p(\tilde{z} \mid x)$. Тоді *z* використовується для контрольованого декодування вихідної послідовності y:

$$z \sim p_\phi(\tilde{z} \mid x)$$

$$y \sim p_\theta(y \mid x, z) = dec_\theta(x, z)$$

Тоді фінальна функція втрат враховує як коректність передбачення мішку слів, так і декодування:

$$L_{S2S'} = \mathrm{E}_{(x^*, y^*) \sim \mathrm{P}, z \sim p_\phi(\tilde{z}|x)}[-\log\ p_\theta(y^* \mid x^*, z)]$$

$$L_{BOW} = \mathrm{E}_{z^* \sim P^*}[-\log\ p_\phi(z^* \mid x)]$$

$$L = L_{S2S'} + L_{BOW},$$

де z^* представляє мішок слів цільової послідовності.

Сам по собі семплінг z є недиференційованим. Щоб мати змогу рахувати градієнти зворотного поширення помилки використову-ється параметрична оцінка градієнтів через gumbel-softmax. Нехай ймовірність $\tilde{z}$ дорівнює $p(\tilde{z} = i \mid x) = \pi_i, i \in 1, \ldots, V.$ Збурені ваги і ймовірності отримуються наступним чином:

$$a_i = \log\ \pi_i + g_i$$

$$g_i \sim Gumbel\ (0, 1)$$

Вибір *k* найбільших вагів з $x = x_1, x_2, \ldots, x_V$ дасть той самий результат, що й семплінг *k* разів без замін.

Виправлення граматичних та орфографічних помилок

Назва задачі говорить сама за себе: на вхід (як умова) подається речення, в якому потенційно можуть бути помилки, на вихід система має видати виправлене речення, тобто без помилок. Характерною особливістю напрямку є те, що вихідне речення не сильно відрізняється від вхідного – відносно мала відстань Левенштейна по словам. Через це багато робіт у даній області не переписують речення повністю, а лише пропонують виправлення. Таким чином, підходи з маркування послідовностей працюють на рівні з seq2seq.

Для задачі виправлення граматичних та орфографічних помилок існує доволі велика кількість розмічених даних, більшість з яких отримані з курсів вивчення англійської. Серед них:

- National University of Singapore Corpus of Learner English (NUCLE) [9] містить 1,400 есе написаних студентами та проанотованих професійними викладачами англійської. Всього налічує 56,958 речень, кожне з яких проанотоване 2 спеціалістами;
- Lang-8 Learner Corpora [10] є найбільшим серед відомих відкритих корпусів. Містить майже мільйон пар речень англійською з сайту Lang-8, де користувачі виправляють грамматику один одного;
- First Certificate in English (FCE) [11] corpus складається 1,244 виправлених відповідей до екзаменаційних питань FCE;
- W&I+LOCNESS [12] містить 34,304 пар речень, які були написані студентами та розмічені професійними анотаторами з Write & Improve. Крім самих пар міститься інформація про те, який рівень англійської здавав студент.

Оскільки існує консенсус як має виглядати граматично правильне речення англійської, а виправлені речення не сильно відрізняються від оригінальних, оцінювання переписувань систем є більш простим та зрозумілим у порівнянні з іншими задачами природної мови. Зокрема застосовується MaxMatch (M2) Scorer [13] та ERRANT [14]. Обидві метрики є нічим іншим як $F_{0.5}$ мірою кількості правильних виправлень. Різниця між ними тільки у алгоритмі підрахунку виправлень.

$$F_{0.5} = \frac{1.25 \cdot precision \cdot recall}{0.25 \cdot precision + recall}$$

Найкращою системою для виправлення граматичних і орфографічних помилок є GECToR з роботи GECToR – Grammatical Error Correction: Tag, Not Rewrite [15]. Модель, замість того щоб передбачати правильне речення, передбачає виправлення, які потрібно зробити. З точки зору архітектури – це трансформер XLNet [16], дотренований на передбаченні граматичних та орфографічних виправлень. Нейронна мережа намагається вирішити одразу 2 задачі: передбачити чи потрібно робити виправлення для поточного токена x_i послідовності $x = x_1, x_2, \ldots, x_m$ та яке саме виправлення потрібно зробити. Для цього отримане після енкодера представлення h_i подається одразу на 2 лінійні шари:

$$h = enc_\varphi(x)$$

$$p_l = W_l h + b_l$$

$$p_d = W_d h + b_d.$$

Далі для обох передбачень рахується функція втрат та сумується:

$$L = L_{labeling} + L_{\det ection}$$

Існують різні типи виправлень, які передбачає модель:

- KEEP – не чіпати поточний токен;
- DELETE – видалити поточний токен;
- APPEND_w_i – вставити слово w_i після поточного токену;
- REPLACE_w_i – замінити поточний токен на слово w_i;
- CASE – змінити регістр поточного токену;
- MERGE – "з'єднати" поточний токен з наступним;
- SPLIT – розбити поточний токен на два;
- NOUN NUMBER – змінити множину поточного іменника;
- VERB FORM – змінити форму поточного дієслова

Оскільки дана модель є неавторегресивною та має лише енкодер (декодер відсутній), вона є відносно швидкою (приблизно в 2-3 рази за авторегресивні моделі).

Спрощення тексту

Спрощення тексту — переписування тексту таким чином, що граматика та структура значно спрощуються, а основне значення та інформація залишаються незмінними. Наприклад, для речення "Both men and women when attending a mosque must adhere to these guidelines." спрощеним буде "Both men and women when going a mosque must follow these rules."

В порівнянні з попередніми задачами джерел даних для задачі спрощення тексту помітно менше. Серед них:

- WikiLarge [17] складається з 296 тисяч пар речень (складних і відповідних простих), створених напівавтоматичним чином зі змін у Вікіпедії;
- Newsela [18] містить 1,130 статей новин, переписаних аннотаторами для дітей різних класів з різним "рівнем" спрощення. Налічує 95 тисяч пар речень та є більш якісним у порівнянні з WikiLarge.

Як основні метрики для оцінки якості систем спрощення тексту використовуються SARI [19] та FKGL [20]. SARI рахується як середнє арифметичне між F_1 мірами для n-грам трьох операцій add (додавання нових токенів), keep (для токенів, що залишились у спрощених варіантах переписувань систем та розмічених речення) та delete (видалення токенів з оригінального речення).

$$ope \in [add, keep, del]$$

$$f_{ope}(n) = \frac{2 \cdot p_{ope}(n) \cdot r_{ope}(n)}{p_{ope}(n) + r_{ope}(n)}$$

$$F_{ope} = \frac{1}{k} \sum_{n=[1,\ldots,k]} f_{ope}(n)$$

$$SARI = \frac{F_{add} + F_{keep} + F_{del}}{3}$$

FKGL – міра читабельності речення; лінійна комбінація кількості слів на речення та кількості складів на слово:

$$FKGL = 0.39 \frac{\#\,words}{\#\,sentences} + 11.8 \frac{\#\,syllables}{\#\,words} - 15.59$$

Метрика не використовує правильні (розмічені) речення, а тому має застосовуватися у комбінації з SARI.

Згідно вищезазначених метрик якості, найкращою системою на сьогоднішній день є нейрона мережа з роботи Multilingual Unsupervised Sentence Simplification [21]. Це seq2seq модель архітектури transformer - BART [22].

У роботі значна увага приділяється контрольованій генерації тексту. Для цього під час навчання на вхід, крім оригінальних (складних) речень подаються також спеціальні токени, які відповідають певним атрибутам спрощення:

- NbChars – співвідношення літер у оригінальному і спрощеному реченні. Відповідає за рівень "компресії" переписаного;
- LevSim – нормалізована схожість Левенштейна між реченнями на рівні літер. Тобто на скільки відрізняється переписане речення від оригінального;
- WordRank вимірює те, на скільки слова з отриманого речення є вживаними у порівнянні з вхідним;
- DepTreeDepth відповідає глибині Dependency tree для речень. Порівнює синтаксичну складність.

Далі під час генерації тексту подаються ці 4 спеціальні токени в залежності від того, яким ми хочемо бачити переписане речення. Наприклад, щоб отримати максимально коротке речення можна подати токен, який відповідає NbChars = 0.1.

Порівняльний аналіз

Слід зазначити, що вищезгадані задачі мають спільну рису – в усіх задачах переписування тексту відбувається зі збереженням змісту. Тобто якщо "форма" змінюється, то сенс залишається тим самим. Підходи до вирішення задач теж мають ряд спільного.

Насамперед це модель трансформер. З моменту її представлення у роботі Attention is all

you need [23], трансформери стали де-факто стандартом для state of the art підходів у області обробки природної мови. Суттєву роль у цьому зіграло так зване попереднє тренування моделей на більш загальних текстових задачах. Зазвичай для таких задач не потрібні розмічені дані – достатньо великих моно корпусів для анотацій. Наприклад, у найпопулярнішому варіанті Masked Language Modelling, 15% випадкових токенів маскуються і моделі слід відгадати справжні.

Другим спільним моментом усіх підходів є те, що створюються архітектурні особливості під кожну задачу. Так у задачі перефразування для врахування стохастичності виходу (для речення не існує строго одного парафразу) використовується Latent Bag of Words, який допомагає випадковим чином вибрати токени майбутнього речення та, застосовуючи їх, згенерувати текст. Для врахування того факту, що речення суттєво не змінюється у виправленні граматичних помилок передбачаються виправлення замість генерації всього тексту. У спрощенні тексту в модель закладаються її атрибути: наскільки текст має бути коротший, простіший (з лексичної та синтаксичної точки зору) та як сильно відрізнятися від вхідного.

Третя риса – архітектура seq2seq, що є універсальною на сьогоднішний день. Покращена cross-attention з трансформеру, seq2seq дуже добре передає контекст отриманий з енкодеру у декодер. Звісно це призводить до авторегресивної генерації, що у свою чергу сповільнює модель, але одночасно дає хорошу якість.

Список використаних джерел

1. *Brown T. B. et al.* Language Models are Few-Shot Learners – Режим доступу до статті: https://arxiv.org/abs/2005.14165
2. Quora Duplicate Questions | Kaggle [Електронний ресурс] – Режим доступу: https://www.kaggle.com/aymenmouelhi/quora-duplicate-questions
3. *Wieting J., Gimpel K.* PARANMT-50M: Pushing the Limits of Paraphrastic Sentence Embeddings with Millions of Machine Translations – Режим доступу до статті: https://www.aclweb.org/anthology/P18-1042.pdf
4. *Lan W., Qiu S., He H., Xu. W.* A Continuously Growing Dataset of Sentential Paraphrases – Режим доступу до статті: https://www.aclweb.org/anthology/D17-1126.pdf
5. *Lin T. et al*. Microsoft COCO: Common Objects in Context – Режим доступу до статті: https://arxiv.org/pdf/1405.0312.pdf
6. *Papineni K., Roukos S., Ward T., Zhu W.* BLEU: a Method for Automatic Evaluation of Machine Translation – Режим доступу до статті: https://www.aclweb.org/anthology/P02-1040.pdf
7. *Lin C.* ROUGE: A Package for Automatic Evaluation of Summaries – Режим доступу до статті: https://www.aclweb.org/anthology/W04-1013.pdf
8. *Fu Y., Feng Y.* Paraphrase Generation with Latent Bag of Words Summaries – Режим доступу до статті: https://arxiv.org/pdf/2001.01941.pdf
9. *Dahlmeier D., Ng H. T., Wu S. M.* Building a Large Annotated Corpus of Learner English: The NUS Corpus of Learner English Summaries – Режим доступу до статті: https://www.aclweb.org/anthology/W13-1703.pdf
10. *Tajiri T., Komachi M., Matsumoto Y.* Tense and Aspect Error Correction for ESL Learners Using Global Context – Режим доступу до статті: https://www.aclweb.org/anthology/P12-2039.pdf
11. *Yannakoudakis H., Briscoe T., Medlock B.* A New Dataset and Method for Automatically Grading ESOL Texts Context – Режим доступу до статті: https://www.aclweb.org/anthology/P11-1019.pdf
12. *Bryant C., Felice M., Andersen Ø.E., Briscoe T.* The BEA-2019 Shared Task on Grammatical Error Correction – Режим доступу до статті: https://www.aclweb.org/anthology/W19-4406.pdf
13. *Dahlemeier D., Ng H.W.* Better Evaluation for Grammatical Error Correction – Режим доступу до статті: https://www.aclweb.org/anthology/N12-1067.pdf
14. *Bryant C., Felice M., Briscoe T.* Automatic Annotation and Evaluation of Error Types for Grammatical Error Correction – Режим доступу до статті: https://www.aclweb.org/anthology/P17-1074.pdf
15. *Omelianchuk K., Atrasevych V., Chernodub A., Skurzhanskyi O.* GECToR – Grammatical Error Correction: Tag, Not Rewrite – Режим доступу до статті: https://www.aclweb.org/anthology/2020.bea-1.16.pdf
16. *Yang Z. et al.* XLNet: Generalized Autoregressive Pretraining for Language

Understanding Rewrite – Режим доступу до статті: https://arxiv.org/pdf/1906.08237.pdf
17. *Zhang X., Lapata M.* Sentence Simplification with Deep Reinforcement Learning – Режим доступу до статті: https://www.aclweb.org/anthology/D17-1062.pdf
18. *Xu W., Callsion C., Napoles C.* Problems in Current Text Simplification Research: New Data Can Help – Режим доступу до статті: https://www.aclweb.org/anthology/Q15-1021.pdf
19. *Xu W. et al* Optimizing Statistical Machine Translation for Text Simplification – Режим доступу до статті: https://www.aclweb.org/anthology/Q16-1029.pdf
20. *Kincaid J.P. et al.* Derivation of new readability formulas (automated readability index, fog count and flesch reading ease formula) for navy enlisted personnel
21. *Martin L. et al.* MUSS: Multilingual Unsupervised Sentence Simplification by Mining Paraphrases – Режим доступу до статті: https://arxiv.org/pdf/2005.00352.pdf
22. *Lewis M. et al.* BART: Denoising Sequence-to-Sequence Pre-training for Natural Language Generation, Translation, and Comprehension – Режим доступу до статті: https://arxiv.org/pdf/1910.13461.pdf
23. *Vaswani A. et al.* Attention Is All You Need – Режим доступу до статті: https://arxiv.org/pdf/1706.03762.pdf

References

1. BROWN, T.B. et al. (2020) Language Models are Few-Shot Learners. In *NeurIPS 2020*
2. KAGGLE. (2017) *Quora Duplicate Questions* [Online] – Available from: https://www.kaggle.com/aymenmouelhi/quora-duplicate-questions [Accessed: 19th June 2012].
3. WIETING, J. and GIMPEL, K. (2017) PARANMT-50M: Pushing the Limits of Paraphrastic Embeddings with Millions of Machine Translations. In *ACL 2017*
4. LAN, W. et al. (2017) A Continuously Growing Dataset of Sentential Paraphrases. In *EMNLP 2017*
5. LIN, T. et al. (2014) Microsoft COCO: Common Objects in Context. In *ECCV 2014*
6. PAPINENI, K. et al. (2002) Bleu: a Method for Automatic Evaluation of Machine Translation. In *ACL 2002*
7. LIN, C. (2004) ROUGE: A Package for Automatic Evaluation for Summary. In *ACL 2004*
8. FU, Y. and FENG, Y. (2019) Paraphrase Generation with Latent Bag of Words. In *NeurIPS 2019*
9. DAHLMEIER, D. et al. (2013) Building a Large Annotated Corpus of Learner English: The NUS Corpus of Learner English. In *BEA 2013*
10. TAJIRI, T. et al. (2012) Tense and Aspect Error Correction for ESL Learners Using Global Context. In *ACL 2012*
11. YANNAKOUDAKIS, H. et al. (2011) A New Dataset and Method for Automatically Grading ESOL Texts. In *ACL 2011*
12. BRYANT, C. et al. (2019) The BEA-2019 Shared Task on Grammatical Error Correction. In *ACL 2019*
13. DAHLMEIER, D. and NH, T. H. (2012) Better Evaluation for Grammatical Error Correction. In *NAACL 2012*
14. BRYANT, C. et al. (2017) Automatic Annotation and Evaluation of Error Types for Grammatical Error Correction. In *ACL 2017*
15. OMELIANCHUK, K. et al. (2019) GECToR – Grammatical Error Correction: Tag, Not Rewrite. In *BEA 2019*
16. YANG, Z. et al. (2019) XLNet: Generalized Autoregressive Pretraining for Language Understanding. In *NeurIPS 2019*
17. ZHANG, X. and LAPATA, M. (2017) Sentence Simplification with Deep Reinforcement Learning. In *EMNLP 2017*
18. XU, W. et al. (2015) Problems in Current Text Simplification Research: New Data Can Help. In *TACL 2015*
19. XU, W. et al. (2016) Optimizing Statistical Machine Translation for Text Simplification. In *TACL 2016*
20. KINCAID, J. P. et al. (1975) *Derivation Of New Readability Formulas*. Institute for Simulation and Training, 56
21. MARTIN, L. et al. (2020) Multilingual Unsupervised Sentence Simplification
22. LEWIS, M. et al. (2019) BART: Denoising Sequence-to-Sequence Pre-training for Natural Language Generation, Translation, and Comprehension. In *ACL 2020*
23. VASWANI, A. (2017) Attention is all you need. In *NIPS 2017*

Надійшла до редколегії 29.01.21

УДК 004.4, 004.6, 004.942, 004.021: 519.6, 616.12 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/1.14

А. Яворський[1], аспірант

Аналіз та обробка сигналів кардіограми у реальному часі

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна, 03022, м.Київ, просп. Академіка Глушкова, 4Д, 03022
e-mail: andrii.yavorskyi@gmail.com

A. Yavorskyi[1], PhD student

Real-Time Analysis and Processing of Cardiogram Signals

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 4D, Academician Glushkov ave., Kyiv, Ukraine, 03022
e-mail: andrii.yavorskyi@gmail.com

Аналіз сигналів електрокардіограми (ЕКГ) є важливим завданням для збереження та покращення людського життя, оскільки основною причиною смерті є хвороби серця та їх наслідки. У багатьох випадках рання діагностика таких проблем може врятувати і продовжити життя.

У даній роботі розроблено підхід до виявлення фібриляції передсердь у реальному часі, яка є загальною серцевою аритмією. Її важко діагностувати, особливо на ранній стадії – тож потрібне автоматичне та неінвазивне ефективне виявлення в реальному часі, щоб допомогти діагностувати такий тип проблем на ранніх термінах. Своєчасне медичне втручання може врятувати життя. ЕКГ як запис електричної активності серця широко використовується для виявлення різних серцевих вад. У той же час аритмію важко виявити через її нерегулярність, а також через те, що ефективність моделей виявлення залежить від якості даних та проаналізованих характеристик.

Дослідження базується на наборі даних PhysioNet Computing in Cardiology Challenge 2017. Він містить 8528 записів ЕКГ з одним відведенням серцевих ритмів (9-61 сек.). Запропонований метод та натренована математична модель досягають кращих результатів, ніж відомі, водночас, модель є простішою, і, отже, менш енергоємною, щоб бути реалізованою у вбудованому пристрої.

Ключові слова: випадковий ліс, електрокардіограма, ЕКГ, моніторинг стану здоров'я, аналіз ЕКГ в реальному часі, ефективна обробка даних.

Analysis of Electrocardiogram (ECG) signals is an important task to save and enhance human life because a major cause of death is heart disease and the consequences. In many cases, early diagnostics of such problems can save and prolong life.

In this work, we develop and present an approach to the real-time detection of Atrial Fibrillation (AF) Arrhythmia, which is a common cardiac arrhythmia affecting a large number of people. Being undetected, it develops into chronic disability or even early mortality. At the same time, This disease is hard to diagnose, especially in its early stage. A real-time automatic and non-invasive effective detection is needed to help diagnose this kind of health problem early. In-time medical intervention can save human life. ECG as a record of the heart electrical activity is widely used for detecting different heart disabilities. At the same time, AF is hard to detect due to its non-regular nature, and also because the performance of detection models depends largely on the quality of data and careful feature engineering.

The research is based on the dataset from PhysioNet Computing in Cardiology Challenge 2017. It contains 8528 single-lead ECG recordings of short-term heart rhythms (9-61 sec.). Our method and the trained model reach the known state-of-the-art results in this field, but, at the same time, it is much less computationally intensive, and, thus, less power consumptive to be implemented in an embedded device.

Keywords: random forest; electrocardiogram; ECG; healthcare; health monitoring; real-time ECG analysis; ECG features; effective data processing.

Статтю представила к.ф.-м.н., доц. Розора І.В.

© А. Яворський, 2021

Вступ

Як зазначено в [1], завдання моніторингу здоров'я в режимі реального часу є досить актуальним. Водночас більшість проблем зі здоров'ям пов'язані із захворюваннями серцево-судинної системи. Більшість з них можна запобігти за допомогою моніторингу та постійного аналізу з подальшими реакціями на сигнали проблем.

Одним із підходів до контролю за станом здоров'я в цьому контексті є моніторинг серцевої діяльності в реальному часі за допомогою аналізу електрокардіограми (ЕКГ). Конвеєр обробки є наступним: вимірювання ЕКГ-сигналу –> його обробка та аналіз у реальному часі –> рекомендації або попередження або попередження. Ця обробка та аналіз не повинні споживати багато ресурсів, щоб забезпечити тривалий час безперервного функціонування, оперативну та надійну роботу пристрою контролю та системи в цілому. Отже, як і для багатьох інших завдань, слід знайти розумний компроміс між якістю результату та обмеженими ресурсами вбудованого пристрою, що означає низьку потужність обробки та низьку ємність акумулятора.

Для розв'язання цієї задачі було розроблено багато методів і прийомів, проте більшість з них ресурсоємні. Більше того, нові методи, зазвичай, стають дедалі більш обчислювально складні. Це означає, що вони працюватимуть на вбудованому електронному пристрої набагато повільніше, споживатимуть більше енергії, і при цьому будуть служити коротший час між зарядженнями акумулятора.

Отже, ми можемо сформулювати цю проблему як задачу обробки даних для вбудованого пристрою.

Аналіз підходів

Щоб розробити підхід до обробки сигналів ЕКГ, слід визначити модель та навчити її на основі наявного набору даних.

Хоча проблема класифікації фібриляції передсердь була виявлена і досліджена вже більше століття тому, якісні загальнодоступні масиви даних було важко знайти з численних причин, включаючи проблеми конфіденційності.

У цьому дослідженні ми використовуємо набір даних PhysioNet / Computing in Cardiology (CinC) Challenge 2017 з конкурсу для дослідників ЕКГ (https://physionet.org/content/challenge-2017/1.0.0/). Цей набір даних був використаний для конкурсу «AF Classification from a Short Single Lead ECG Recording – The PhysioNet Computing in Cardiology Challenge 2017» [2]. PhysioNet / CinC Challenge 2017 мав на меті заохотити розробку алгоритмів для класифікації ЕКГ (переважно тривалістю від 30 сек. до 60 сек.) – а саме, з'ясувати, чи відображає запис нормальний синусовий ритм (Normal), фібриляцію передсердя (AF), альтернативний ритм (Other) або занадто шумний запис, щоб класифікуватися (Noisy).

Тренувальний набір містить 8528 записів ЕКГ тривалістю від 9 секунд. до 61 сек. [2]. Записи ЕКГ мають дискретизацію 300 Гц. На рис. 1 показані приклади сигналів ЕКГ (20 сек.) для чотирьох класів із набору даних. Є форми ЕКГ нормального ритму, аритмії, іншого ритму та зашумлених записів.

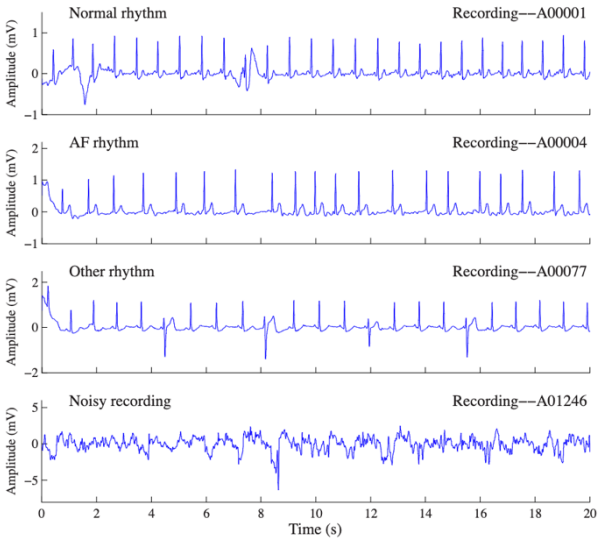


Рис. 1. Приклади записів ЕКГ з набору даних PhysioNet / CinC Challenge 2017

Різні типи серцевих аритмій [3] можна класифікувати за:

- походженням: передсердна аритмія, сполучна вузлова аритмія або шлуночкова аритмія,
- частотою: тахікардія (більше 100 ударів на хвилину у дорослих) або брадикардія (менше 60 ударів на хвилину),
- механізмах: автоматичність, повторний вхід, тригер,

- атріовентрикулярному проведенню AV: нормальне, відстрочене, заблоковане,
- тривалості: нетривала (менше 30 сек.) чи постійна (30 сек. і більше).

Фібриляція передсердя (ФП) визначається як «тахіаритмія, що характеризується переважно некоординованою активацією передсердь із наслідком погіршення механічної функції передсердь». ФП є найпоширенішою стійкою серцевою аритмією, яка зустрічається у 1-2% всього населення [3] і пов'язана зі значною смертністю та захворюваністю через пов'язаний ризик смерті, інсульту, госпіталізації, серцевої недостатності та ішемічної хвороби тощо [3]. Багато людей страждають на ФП, і її поширеність зростатиме протягом наступних років [3]. Що ще важливіше, захворюваність на ФП зростає з віком, від менш ніж 0,5% у віці 40-50 років, до 5-15% для 80-річних [3].

Тривалий час діагностика ФП ґрунтувалася на досвіді лікарів щодо читання визначених особливостей ЕКГ, але зараз є набагато більше можливостей використовувати необроблені дані з можливою попередньою обробкою із застосуванням сучасних методів машинного навчання та глибокого навчання [4].

Виявлення ФП залишається проблематичним, оскільки прояви можуть бути епізодичними. Детектори ФП можуть належати до однієї з категорій: методи, засновані на аналізі передсердної активності, або методи аналізу шлуночкової реакції [3]. Детектори ФП на основі аналізу передсердної активності засновані на аналізі відсутності зубців P або присутності фібриляторних хвиль f в інтервалі TQ.

Попередні дослідження, що стосуються класифікації ФП, як правило, обмежені у застосуванні [2], оскільки

1) проводилась лише класифікація нормальних та ритмів ФП,

2) ефективність була продемонстрована лише на ретельно відібраних чистих даних,

3) окремий набір тестових даних не з цієї вибірки не використовували, або

4) використовували лише невелику кількість пацієнтів.

Надійно виявити ФП за одним відведенням ЕКГ досить складно, і широка систематика ритмів ускладнює це. Зокрема, у багатьох ритмів, що не стосуються AF, спостерігаються нерегулярні інтервали RR, які можуть бути подібними до AF [2].

Сюди ж ми додаємо ще одне обмеження - складність обчислень. Багато моделей, особливо нові та засновані на глибокому навчанні моделі, занадто важкі для тренувань, для повторної підготовки (для популярних підходів до навчання з підкріпленням) та, найголовніше, для наступного регулярного використання. І це ще одне важливе питання.

Для оцінки цього завдання використовується метрика F_1, яка є середнім значенням F_1 для кожного типу класифікації (1). Правила підрахунку наведено у таблиці 1 та формулах (1)-(3), як показано нижче:

Таблиця 1. Матриця крос-валідації

		Прогноз				
		Normal	AF	Other	Noisy	Разом
Справжнє значення	Normal	*Nn*	*Na*	*No*	*Np*	*SN*
	AF	*An*	*Aa*	*Ao*	*Ap*	*SA*
	Other	*On*	*Oa*	*Oo*	*Op*	*SO*
	Noisy	*Pn*	*Pa*	*Po*	*Pp*	*SP*
	Разом	*Sn*	*Sa*	*So*	*Sp*	

$$F_{1n} = \frac{2 * Nn}{SN + Sn}$$
$$F_{1a} = \frac{2 * Aa}{SA + Sa}$$
$$F_{1o} = \frac{2 * Oo}{SO + So} \quad (1)$$
$$F_{1p} = \frac{2 * Pp}{SP + Sp}$$

У [2] під загальною мірою F_1 розуміють середню з чотирьох (2):

$$F_1 = \frac{F_{1n} + F_{1a} + F_{1o} + F_{1p}}{4} \quad (2)$$

але у більшості подальших робіт [4] загальну міру F_1 рахують по середньому з трьох (3) – окрім зашумлених кардіограм:

$$F_1 = \frac{F_{1n} + F_{1a} + F_{1o}}{3} \quad (3)$$

Сучасні методи (моделі) та їх оцінки F_1 було детально розглянуто у [4]. Узагальнення та відповідні оцінки наведено у таблиці 2.

Таблиця 2. Моделі рішення задачі та їх метрики

Модель	Міри F_1			
Main Technique	Performance			
	F_{1n}	F_{1a}	F_{1o}	F_1
79 features crafted, classified with XGBoost, RNN and LDA classifier	0.903	0.855	0.736	0.831
491 features crafted, classified with random forest	0.909 (0.905)	0.835 (0.794)	0.734 (0.756)	0.826 (0.818)
150 features crafted, classified with multilevel of AdaBoost	0.916 (0.909)	0.823 (0.797)	0.750 (0.772)	0.829 (0.826)
combine expert feature, centerwave feature and deep feature(based on DNN), classified with XGBoost	0.912	0.813	0.751	0.825
Fine tuned CNN 13 layers	0.920	0.800	0.790	0.830
3 recurrent layers on top of 16 residual blocks	0.919	0.858	0.816	0.864
188 features crafted, classified with AdaBoost	0.910	0.860	0.740	0.825
external data augmentation, ECG transformed to 2D spectrogram by FFT trained and classify with DenseNet	0.910	0.830	0.720	0.820
30 features crafted, classified with decision tree ensemble	0.910	0.820	0.730	0.820
55 features crafted, classified with SVM	0.920	0.820	0.750	0.830
ECG transformed into spectro-temporal data matrix, then trained and classify with DenseNet	0.888	0.796	0.721	0.802

Запропонований метод

Було розроблено наступний метод аналізу. Його етапами є гамільтонова локалізація й визначення R-піків з подальшим аналізом кількох показників (Rhythm, SDNN, RR Moda, AMo, MxDMn, IN). Після цього – підготовка дерева рішень для класифікації ЕКГ за відібраними та попередньо розрахованими показниками.

Розроблений метод дає результати, які мають вищу точність (precision and recall), а міра F_1 складає 0,90 для аритмії, що є більшим, ніж найкращий із відомих раніше (а саме – 0,86) [4].

Для пошуку R-піків використовується алгоритм виявлення комплексу QRS, який був запропонований у [5]. Ідея полягає в скануванні сигналу ЕКГ та оцінці його відповідно до наступного набору правил:

1. Ігнорування усіх піків, що передують чи слідують за великими піками менше ніж на 200 мс.

2. Якщо пік більше порогу знаходження – це QRS комплекс, в іншому випадку – шум.

3. Якщо з моменту останнього знаходження пройшов інтервал, який в 1,5 рази перевищує середній RR інтервал, в цьому інтервалі був пік, який був більший за половину порогу знаходження, і пік слідував за попереднім знайденим піком не менш ніж на 360 мс, відповідно це – QRS комплекс.

4. Поріг знаходження є функцією середнього шуму та середніх пікових значень QRS.

5. Середній пік шуму, середній пік QRS і середній RR інтервал обчислюються як середнє значення останніх восьми значень.

Виявлені R-піки завдяки цьому алгоритму представлені на рис.2

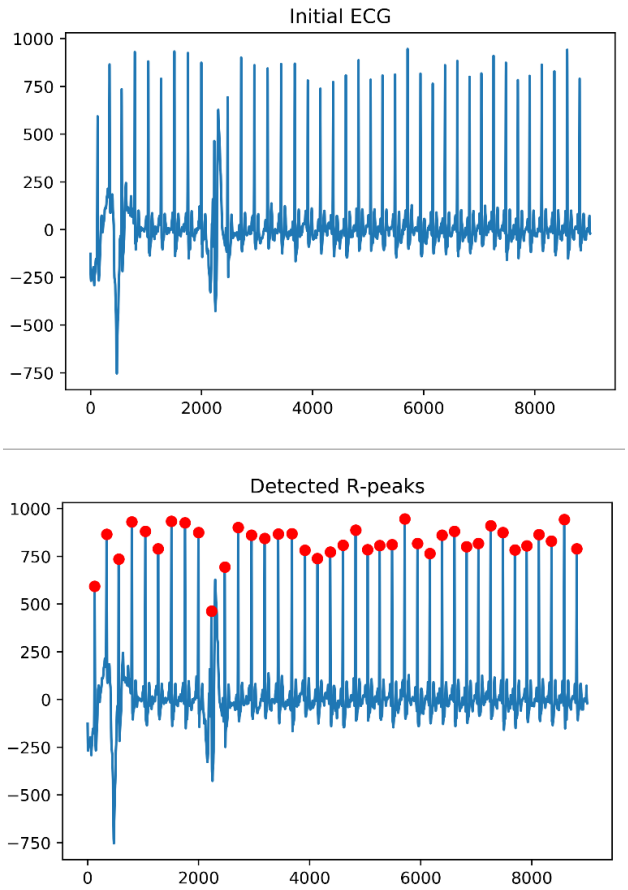


Рис. 2. Локалізація R-піків ЕКГ

Відповідно до отриманих інтервалів RR з виявлених піків R були розраховані наступні ознаки:

1) середнє значення тривалості RR інтервалу (NN),

2) стандартне відхилення повного масиву RR інтервалів (SDNN), що є сумарним ефектом впливу симпатичного та парасимпатичного відділів вегетативної системи на синусів вузол,

3) мода – найбільш імовірне значення тривалості RR інтервалів (Mo), що є найбільш імовірним рівнем функціонування серцево-судинної системи,

4) амплітуда моди (AMo), що є умовним показником активності симпатичної ланки регуляції,

5) розмах – різниця між максимальним та мінімальним значеннями RR інтервалів (MxDMn), що є максимальною амплітудою регуляторних впливів,

6) індекс напруги (SI), що є ступенем напруги регуляторних систем,

7) кількість пар послідовних RR інтервалів, які відрізняються більше ніж на 50 мс (NN50),

8) доля NN50, що ділиться на загальну кількість RR інтервалів (pNN50),

9) кількість пар послідовних RR інтервалів, які відрізняються більше ніж на 20 мс (NN20),

10) доля NN20, що ділиться на загальну кількість RR інтервалів (pNN20),

11) медіана (median),

12) асиметрія (skew),

13) ексцес (kurt),

14) перший квартиль (Q1),

15) третій квартиль (Q3),

16) п'ятий перцентиль (P5),

17) дев'яносто-п'ятий перцентиль (P95),

18) міжквартильний розмах – різниця між Q3 і Q3 (IQR),

19) коефіцієнт варіації (CoV),

20) індекс вегетативної рівноваги (VBI) – для визначення відношення симпатичної і парасимпатичної регуляції роботи серця,

21) вегетативний показник серця (VRI) – для оцінки вегетативного балансу (чим менший VRI, тим більше вегетативний баланс зміщений в сторону переважання парасимпатичної регуляції),

22) показник адекватності процесів регуляції (AIoRP) – для виявлення відповідності між рівнем функціонування синусового вузла та симпатичною активністю.

Після цього алгоритм Random Forest будує багато дерев рішень на різних підмножинах даних. Головною умовою такого підходу є те, що підвибірки мають мінімальну кореляцію між собою, оскільки згідно з теорією bagging (ансамблів), багато некорельованих моделей передбачають більш точно, ніж будь-яка окрема модель. Суть цієї теорії полягає в тому, що таким чином моделі "захищають" одна одну від своїх окремих помилок, принаймні до тих пір, поки вони постійно не помиляються в одному напрямку.

Перевагами алгоритму випадкового лісу є:

- здатність ефективно обробляти великі масиви даних,
- нечутливість до масштабування кількості та значень ознак,
- є корисними для вирішення проблеми перенавчання,
- його можна використовувати для відбору ознак.

Оптимальний ліс ми отримали шляхом навчання моделі лісу з 5-кратною (5-fold) перехресною валідацією. Найкращий отриманий ансамбль складається з 640 окремих дерев. На рис. 3 подано нормалізовану матрицю невідповідностей (крос-валідації) для розрахунку міри F_1. Бачимо, що міри $F_{1n} = 0{,}97$, $F_{1n} = 0{,}96$, $F_{1n} = 0{,}9$, $F_{1n} = 0{,}89$, а зашальне середнє значення $F_1 = 0{,}94$ відповідно до [4] та $F_1 = 0{,}93$ відповідно до [2], що краще ніж у найкращому з відомих раніше результатів (табл. 2).

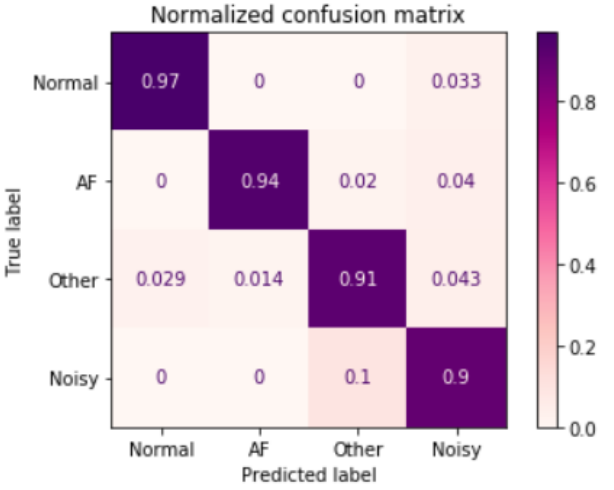


Рис. 3. Нормалізована матриця невідповідностей

Крім того, варто підкреслити, що запропонований метод є менш обчислювально складним, ніж інші сучасні методи, а саме, складність навчання нейронних мереж пропорційна (кількість вхідних даних) * (кількість показників) * (кулькість вузлів) $^{\text{(кількість рівнів)}}$ * (кількість ітерацій навчання), тоді як для випадкового лісу (Random Forest) складність навчання – це просто (кількість дерев) * (кількість даних) * log (кількість даних), що набагато менше.

Крім того, цей метод може виявитися чутливим до даних, зокрема до якості даних. Отже, для подальшої роботи заплановано вичерпне та широке тестування.

Звичайно, цей метод слід додатково перевірити на інших наборах даних, таких як MIMIC-IV та

МІТ-ВТН [3], щоб уникнути перенавчання моделі з даними [2]. Крім того, його слід ретельно впроваджувати та тестувати в реальних умовах, використовуючи мобільний кардіограф з 1 відведенням, моделей якого вже розроблено багато на сьогодні, щоб судити про точність запропонованого методу.

Висновки

Розроблено метод класифікації ЕКГ для виявлення ФП. Для запропонованого методу досліджено матрицю невідповідностей, пораховано міри точності. Запропонована модель змогла досягти кращих показників міри F_1, але з меншою обчислювальною складністю. Таким чином, дану модель можна вбудувати у мобільні пристрої-кардіографи для аналізу в режимі реального часу та для економії часу і автономності роботи. Таким чином, система моніторингу може слугувати довше і, сподіваємось, у майбутньому – врятувати більше людських життів.

Список використаних джерел

1. *Панченко Т.В.* Моніторинг стану здоров'я в реальному часі за допомогою ЕКГ-аналізу / Т.В. Панченко, В.О. Будіченко // Штучний інтелект. – Київ. – 2016. – № 4 (74). – С.98-100.
2. *Clifford G.D.* AF Classification from a Short Single Lead ECG Recording: The PhysioNet – Computing in Cardiology Challenge 2017 / G.D. Clifford, Ch. Liu, B. Moody, L.H. Lehman, I. Silva, Q. Li, A.E. Johnson and R.G. Mark // Computing in Cardiology. – 2017. – P.1-4.
3. *Goldberger A.* PhysioBank, PhysioToolkit, and PhysioNet: Components of a New Research Resource for Complex Physiologic Signals / A. Goldberger, L. Amaral, L. Glass, J. Hausdorff, P.C. Ivanov, R. Mark, J.E. Mietus, G.B. Moody, C.K. Peng, and H.E. Stanley // Circulation [Online]. – 2000. – # 101 (23). – P. e215–e220.
4. *Chen D.* Electrocardiogram Classification and Visual Diagnosis of Atrial Fibrillation with DenseECG (Preprint) / D. Chen, D. Li, X. Xu, R. Yang and S.-K. Ng // ArXiV. – 2021. – 10p.
5. *Hamilton P.* Open source ECG analysis / P. Hamilton // Computers in Cardiology. – 2002. – P. 101-104.

References

1. PANCHENKO, T.V., BUDICHENKO, V.O. (2016): *Real-time Health Monitoring via ECG Analysis*, "Artificial Intelligence", No. 4 (74), pp. 98-100.
2. CLIFFORD, G.D., LIU, Ch., MOODY, B., LEHMAN, L.H., SILVA, I., LI, Q., JOHNSON, A.E., MARK, R.G. (2017): *AF Classification from a Short Single Lead ECG Recording: The PhysioNet – Computing in Cardiology Challenge 2017*, "Computing in Cardiology", pp.1-4, doi: 10.22489/CinC.2017.065-469.
3. GOLDBERGER, A., AMARAL, L., GLASS, L., HAUSDORFF, J., IVANOV, P.C., MARK, R., MIETUS, J.E., MOODY, G.B., PENG, C.K., STANLEY, H.E. (2000): *PhysioBank, Physio-Toolkit, and PhysioNet: Components of a New Research Resource for Complex Physiologic Signals*, # 101 (23), pp.e215–e220, https://physionet.org/content/challenge-2017
4. CHEN, D., LI, D., XU, X., YANG, R., NG, S.-K. (2021): *Electrocardiogram Classification and Visual Diagnosis of Atrial Fibrillation with DenseECG*, 10 p., https://arxiv.org/pdf/2101.07535.pdf
5. HAMILTON, P. (2002): *Open source ECG analysis*, "Computers in Cardiology", pp. 101-104, doi: 10.1109/CIC.2002.1166717.

Надійшла до редколегії 30.10.2020

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 535.421:534.2
https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/1.15

В.П.Данько, *к.ф.-м.н.*
А.В.Коваленко, *к.ф.-м.н., доц.*
Р.О.Коломієць, *студент*

Джерело світла зі змінною довжиною хвилі на основі акустооптичного дефлектора

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна, 01601, місто Київ, вул. Володимирська, 64/13
e-mail: vdan1962@gmail.com

V.P.Danko, *PhD*
A.V.Kovalenko, *PhD, Associate Professor*
R.O.Kolomiiets, *student*

Light source with variable wavelength based on acousto-optical deflector

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 64/13, Volodymyrska st., Kyiv, Ukraine, 01601
e-mail: vdan1962@gmail.com

Показано можливість створення монохроматичного джерела світла зі змінною довжиною хвилі та шириною спектра близько 5 нм з використанням акустооптичного дефлектора як елемента, що здійснює перелаштування довжини хвилі. Наведено порівняння експериментальних даних з розрахунковими, показано хороше їх узгодження.

Ключові слова: монохроматичне джерело світла, акустооптичний дефлектор, акустооптичний фільтр, монохроматор.

The proposed work analyzes the design features of the acousto-optical deflector and filter on paratelurite. It is shown that under certain conditions the acousto-optical deflector can be used as an acousto-optical filter (as an element that performs spectral filtering of the incident light beam). The fundamental possibility of creating a monochromatic light source with a variable wavelength and a spectrum width of about 5 nm using an acousto-optical deflector as an element that adjusts the original wavelength is shown experimentally. As a broadband light source in this system, a semiconductor laser operating in subthreshold mode was used. The dependence of the output wavelength on the acoustic frequency is obtained. The comparison of experimental data with the calculated ones is given, it is shown that they have small differences.

Key Words: monochromatic light source, acousto-optical deflector, acousto-optical filter, monochromator.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Савенков С.М.

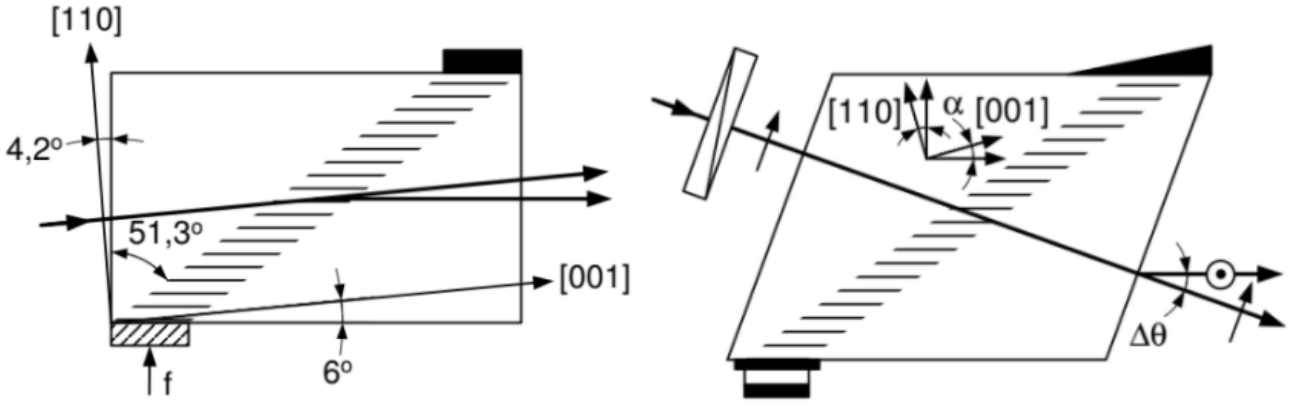
В оптичних дослідженнях часто виникає необхідність використання монохроматичного джерела світла, довжину хвилі якого можна змінювати в деяких межах. Найпростіше використати для цієї мети лазер зі змінною довжиною хвилі, як це зроблено, наприклад, в [1]. Проте часто може бути необхідним з тих чи інших причин для отримання світлового пучка з вузьким спектром використовувати фільтрацію світла від джерела зі значною спектральною шириною, яким є, наприклад світлодіод. У цьому випадку доцільно звернутися до акустооптики.

Взаємодія світла і ультразвуку застосовується в науці і техніці, зокрема, в оптиці, акустиці, оптоелектроніці і оптичній обробці інформації. Акустооптичні модулятори, дефлектори (АОД) і фільтри (АОФ) характеризуються широкими функціональними можливостями, надійністю, простотою електронного керування та малим енергоспоживанням, тому акустооптичні пристрої успішно використовуються в оптиці і спектроскопії, лазерній техніці та оптичному зв'язку, медицині, екології, астрономії і багатьох інших областях. У зв'язку з тим, що найбільшого поширення набули акустооптичні дефлектори, ми покажемо в цій роботі можливість використання АОД на кристалі парателуриту (TeO_2) як елемента, що здійснює перелаштування довжини хвилі монохроматичного джерела. Така можливість випливає з аналізу геометрії АОД та АОФ.

Типова геометрія АОД та АОФ на кристалі парателуриту вказана на рис. 1a та 1b відповідно [2, 3]. З їх порівняння можна зробити висновок що головними відмінностями дефле-

© В.П. Данько, А.В. Коваленко, Р.О.Коломієць 2021

ктора та фільтра є кут зрізу α, розмір п'єзоперетворювача (більший для фільтра та менший для дефлектора) та кут падіння світлової хвилі.



(a) (b)

Рис. 1: Типова геометрія акустооптичного дефлектора (а) та фільтра (б) на парателуриті [2, 3]

Отже, при відповідному орієнтуванні відносно падаючого пучка АОД може бути використаний в якості АОФ з дещо гіршою ефективністю та ширшою смугою пропускання. При цьому також збільшаться втрати на відбиття у зв'язку з неортогональним падінням світла на вхідну та вихідну площини кристалу. Центральна довжина хвилі АОФ визначається виразом [4]:

$$\lambda_t \approx (v/f)\left(n_i \sin\theta_i - \sqrt{n_0^2 - n_i^2\cos^2\theta_i}\right), \quad (1)$$

смуга пропускання – виразом [5]:

$$\Delta\lambda \leqslant \frac{0.8\lambda_t}{l_0 \cos\psi\,(n_e - n_o)\sin^2(\theta_i + \alpha)}, \quad (2)$$

де f – акустична частота; v – швидкість ультразвукової хвилі в площині (110); $n_0 = 2.26$ і $n_e = 2.412$ – показники заломлення для звичайного і незвичайного променів; n_i – ефективний показник заломлення для падаючої хвилі; θ_i – кут падіння пучка; α – кут зрізу кристала; l_0 – ширина п'єзоперетворювача; ψ – кут зносу акустичної енергії.

Швидкість ультразвукової хвилі визначається виразом [4]:

$$v = \sqrt{\left(\frac{c_{11} - c_{12}}{2}\cos^2\alpha + c_{44}\sin^2\alpha\right)\Big/\rho}, \quad (3)$$

$\rho = 6$ г/см^3 – питома вага парателуриту; $c_{11} = 5.59 \times 10^{11}$ дин/см^2, $c_{12} = 5.13 \times 10^{11}$ дин/см^2, $c_{44} = 2.67 \times 10^{11}$ дин/см^2 – константи пружності парателуриту.

Ефективний показник заломлення дорівнює [4]

$$n_i = n_0 n_e \left[n_e^2\cos(\theta_i + \alpha) + n_0^2\sin^2(\theta_i + \alpha)\right]^{-1/2}, \quad (4)$$

Оптична схема експериментальної установки показана на рис. 2. Головним елементом є АОД 4 на парателуриті з параметрами кристала, близькими до типових (рис. 1а), та розмірами п'єзоперетворювача 2,0×12,0 мм. зорієнтований так, щоб падаючий пучок був спрямований під кутом близько 20° до осі кристала. Це відповідало куту падіння пучка на вхідну грань АОД близько 50°. При такому куті падіння АОД працює як регульований фільтр, проте розмір падаючого пучка не може перевищувати кількох міліметрів, що пов'язано з геометричними обмеженнями (пучок входить в АОД та виходить з нього поряд з ребром кристала). На п'єзоперетворювач подається керуючий сигнал з ВЧ генератора 1 AFG-3101. В якості джерела світла 3 було використано червоний напівпровідниковий лазер ($\lambda = 655$ нм $P = 35$ мВт), що працює зі зниженим струмом накачки в режимі світлодіода. При цьому діаметр пучка та його розбіжність залишаються малими, оскільки це забезпечується конструкцією лазера. Джерело живлення 4 служить для живлення лазера постійним струмом.

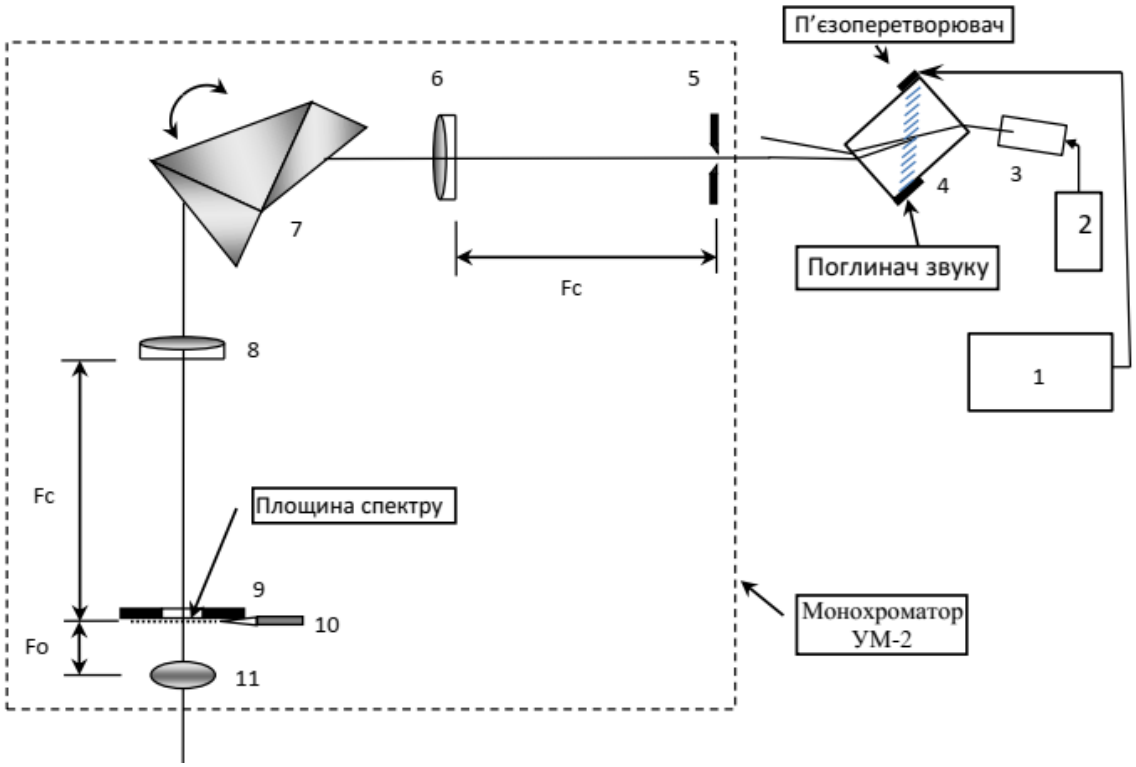


Рис. 2: Схема експериментальної установки

Для спостереження спектру продифрагованого пучка та визначення його довжини хвилі було використано монохроматор УМ-2 (елементи 5 – 10) на основі призми Аббе. Спектри можна було спостерігати за допомогою окуляра 11.Для реєстрації отриманих зображень замість окуляра встановлювалась камера Sanyo VCB-3385P з об'єктивом Гелиос-44-2, під'єднана до комп'ютера. Зображення з камери захоплювались фрейм-грабером на основі IC SAA7135. Калібрування монохроматора здійснювалося за допомогою напівпровідникового лазера (λ = 650 нм), DPSS лазера (λ = 532 нм, в спектрі присутні також лінії λ = 808 нм та λ = 1.064 мкм) та ртутної лампи.

Пороговий струм накачки для застосованого напівпровідникового лазера становив 40 мА. Щоб уникнути неконтрольованого переходу лазера в режим генерації, ми працювали при струмі 38 мА. Спектр випромінювання лазера в такому режимі показано на рис. 3.

Максимальна інтенсивність продифрагованого світла в режимі генерації досягалась на частоті 82,1 МГц. Зразки відфільтрованого спектру н/п лазера в режимі генерації та в допороговому режимі показано на рис. 4. Ширина спектру у випадку (б) складає $\Delta\lambda \approx 5$ нм.



Рис. 3: Спектр випромінювання лазера в допороговому режимі

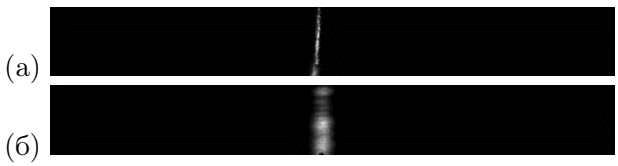


Рис. 4: Зразки відфільтрованого спектру н/п лазера в режимі генерації (а) та в допороговому режимі (б)

Була знята залежність вихідної довжини хвилі від частоти, що подавалась на дефлектор.

Для порівняння було теоретично розраховано залежність вихідної довжини хвилі від акустичної частоти за формулами (1) – (4) при

типовому для АОД значенні кута зрізу кристала ($\alpha = 6°$) для кута падіння пучка $\theta_i = 19.9°$.

Отримані результати показано на рис. 5. Видно, що отримані розрахункові та експериментальні залежності центральної довжини хвилі отриманого фільтра досить близькі.

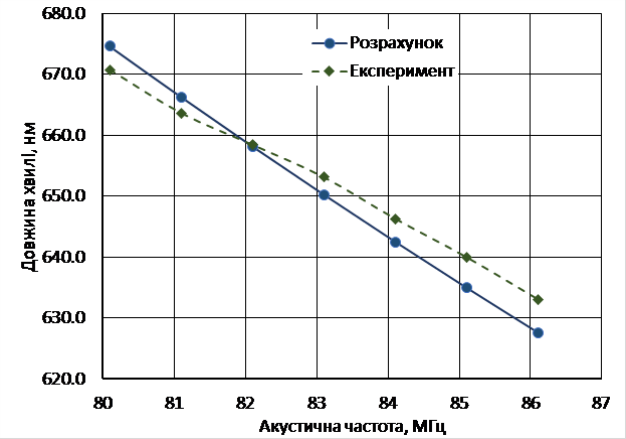


Рис. 5: Розрахункова та експериментальна залежності вихідної довжини хвилі від акустичної частоти

Розрахункова смуга пропускання фільтра $\Delta\lambda_c \approx 4.7$ нм теж близька до отриманої в експерименті.

Таким чином, ми показали можливість створення джерела світла з перелаштуванням довжини хвилі на основі акустооптичного дефлектора на парателуриті, розміщеного в нестандартній геометрії. Проте зібраний макет ще не може бути використано як джерело світла в оптичному експерименті, оскільки потужність застосованого н/п лазера в режимі світлодіода дуже низька (P<8 мкВт).

Робота виконана за сприяння Київського національного університету імені Тараса Шевченка в рамках НДР № 19БФ052-01.

Список використаних джерел

1. *Andreoli D.* Deterministic control of broadband light through a multiply scattering medium via the multispectral transmission matrix / D. Andreoli, [et al.] // Scientific Reports. — 2015. — Vol. 5. — Art. 510347.

2. *Магдич Л.Н.* Акустооптические устройства и их применение / Магдич Л.Н., Молчанов В.Я. — М: Сов. Радио, 1978. — 112 с.

3. *Балакший В.И.* Физические основы акустооптики / Балакший В.И., Парыгин В.Н., Чирков Л.Е. — М.: Радио и связь, 1985. — 278 с.

4. *Зубринов И.И.* Широкополосный акустооптический фильтр / И.И. Зубринов, В.К. Сапожников, Д.В. Шелопут // Журнал технической физики. — 1997. — Т. 67, № 6. — С. 50 – 53.

5. *Волошинов В.Б.* Акустооптический фильтр неполяризованного электромагнитного излучения / В.Б. Волошинов, В.Я. Молчанов, Т.М.Бабкина // Журнал технической физики. — 2000. — Т. 70, № 9. — С. 93 – 98.

References

1. ANDREOLI, D. et al. (2015) Deterministic control of broadband light through a multiply scattering medium via the multispectral transmission matrix. In *Scientific Reports*, 5., 510347.

2. MAGDICH, L.N. & MOLCHANOV, V.Ya. (1978) *Akustoopticheskie ustroistva i ih primenenie*, M: Sov. Radio, 112 p.

3. BALAKSHIJ, V.I., PARYGIN, V.N. and CHIRKOV, L.E. (1985) *Fizicheskie osnovy akustooptiki*, M: Radio i Sviaz, 112 p.

4. ZUBRINOV, I.I., SAPOZHNIKOV, V.K. and SHELOPUT, D.V. (1997) Shirokopolosnyj akustoopticheskij filtr. In *Zhurnal tehnicheskoj fiziki*, 67(6), 50-53.

5. VOLOSHYNOV, V.B., MOLCHANOV, V.Ya. and BABKINA, T.M. (2000) Akustoopticheskij filtr nepolarizovannogo elektromagnitnogo izluchenija. In *Zhurnal tehnicheskoj fiziki*, 70(9), 93-98.

Надійшла до редколегії 05.02.2021