КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

В І С Н И К

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

№4 2020

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
випуск №4, 2020,
Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Физика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, механіко-математичного факультетів, факультету радіофізики, електроніки та комп’ютерних систем і факультету комп’ютерних наук та кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора, кандидата наук і PhD за спеціальностями 111, 112, 113, 104, 105 (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1188 від 24.09.2020) та за спеціальностями 121, 122, 123, 124 (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1471 від 26.11.2020), та реферується в Реферативному журналі,Zentralblatt MATH.

Редакційна колегія:

Моклячук Михайло Павлович, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор;**

Розора Ірина Василівна, д.ф.-м.н., доц., **зам. головного редактора;**

Bartlova Milada, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;

Bavula Vladimir, Prof., University of Sheffield, Great Britain;

Beghin Luisa, Prof., Sapienza Università di Roma, Italy;

Futorny Vyacheslav, Prof., Universidade de São Paulo, Brazil;

Giuliano Rita, Prof., Università di Pisa, Italy;

Gorlatch Sergei, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;

Hudak Stefan, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;

Kukhtarev Nickolai, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;

Leonenko Nikolay, Prof., Cardiff University, Great Britain;

Medvids Arturs, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;

Olenko Andriy, Prof., La Trobe University, Australia;

Orsingher Enzo, Prof., Sapienza University of Rome, Italy;

Ostrovsky Eugene, Prof., Bar- Ilan University, Israel;

Pogany Tibor, Prof., University of Rijeka, Croatia;

Rontó Miklós, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;

Silvestrov Dmitrii, Prof., Stockholms universitet, Sweden;

Sottinen Tommi, Prof., University of Vaasa, Finland;

Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;

Trofimchuk Sergey, Prof., Universidadde Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;

Volodin Andrei, Prof., University of Regina, Canada;

Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;

Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;

Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;

Безущак Оксана Омелянівна, д.ф.-м.н., доцент;

Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;

Гаращенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;

Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;

Жук Ярослав Олександрович, д.ф.-м.н., проф.;

Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., проф.;

Курченко Олександр Олексійович, д.ф.-м.н., проф;

Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;
Львов Віктор Анатолійович, д.ф.-м.н., проф.;
Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;
Майборода Ростислав Євгенович, д.ф.-м.н., проф.;
Мішура Юлія Степанівна, д.ф.-м.н., проф.;
Пашко Анатолій Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Петравчук Анатолій Петрович, д.ф.-м.н., проф.;
Погорілий Сергій Дем'янович, д.т.н., проф.;
Савенков Сергій Миколайович, д.ф.-м.н., доц.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.;
Сливка-Тилищак Ганна Іванівна, д.ф.-м.н., проф.;
Хусаінов Денис Яхьєвич, д.ф.-м.н., проф.;

Редакційний відділ:
Затула Дмитро Васильович, **відповідальний секретар**;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
П'ятецька Олена Василівна, visnyk.phys-math@ukr.net;
Отто Георгій Костянтинович, **технічний редактор**, ottogk@gmail.com.

Адреса редакційної колегії:
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, пр. Глушкова, 4 д, 03022 Тел. (044) 259-01-49
fm.visnyk@ukr.net
ISBN 978-966-2142
ISSN 1812-5409

Засновник: Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Свідоцтво про державну реєстрацію:КВ №16299-4771Р від 11.12.2009 року

DOI: https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/4

Безкоштовно

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics
No. 4, 2020.

The journal contains results of new research in various fields of mathematics, computer science, mechanics, physics and radiophysics for researchers, academic staff, postgraduates, engineers and students. It is published on the recommendation of the Academic Councils of Faculty of Physics, Faculty of Radiophysics, Electronics and Computer Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics and the Faculty of Computer Science and Cybernetics.

Journal "Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics" is included in the List of scientific professional publications of Ukraine, in which the results of the thesises for obtaining the scientific degrees of a doctor and a candidate of sciences (PhD) in specialties 111, 112, 113, 104, 105, 121, 122, 123 and 124 can be published (approved by the orders of the Ministry of Education and Science of Ukraine No. 1188 dated September 24, 2020 and No. 1471 dated November 26, 2020).
Journal is referenced in the abstract journal **Zentralblatt MATH (zbMATH)**.

Editorial Board

Moklyachuk Mikhail Pavlovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine, Editor in Chief;
Rozora Iryna Vasylivna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine, Deputy Editor in Chief;
Bartlova Milada, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;
Bavula Vladimir, Prof., University of Sheffield, Great Britain;
Beghin Luisa, Prof., Sapienza Università di Roma, Italy;
Futorny Vyacheslav, Prof., Universidade de São Paulo, Brazil;
Giuliano Rita, Prof., Università di Pisa, Italy;
Gorlatch Sergei, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;
Hudak Stefan, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;
Kukhtarev Nickolai, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;
Leonenko Nikolay, Prof., Cardiff University, Great Britain;
Medvids Arturs, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;
Olenko Andriy, Prof., La Trobe University, Australia;
Orsingher Enzo, Prof., Sapienza University of Rome, Italy;
Ostrovsky Eugene, Prof., Bar-Ilan University, Israel;
Pog\'any Tibor, Prof., University of Rijeka, Croatia;
Rontó Miklós, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;
Silvestrov Dmitrii, Prof., Stockholm University, Sweden;
Sottinen Tommi, Prof., University of Vaasa, Finland;
Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;
Trofimchuk Sergey, Prof., Universidadde Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;
Volodin Andrei, Prof., University of Regina, Canada;
Akimenko Vitaliy Vladimirovich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Anisimov Igor Alekseevich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Anisimov Anatoliy Vasyl'ovych, Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Bezuschak Oksana Omelyanivna, Dr., Sci. Associate Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Voloshin Aleksey Fedorovich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Garaschenko Fedir Georgievich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Yezhov Stanislav Nikolaevich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Zhuk Yaroslav Aleksandrovich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Zaslavs'kyj Volodymyr Anatolijovych, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Kurchenko Oleksandr Oleksijovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Kudin Volodymyr Ivanovich, Dr. Sci., Sr. Sci. Researcher, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Lvov Victor Anatoliyovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Makarets' Nikolay Vladimirovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Maiboroda Rostyslav Yevhenovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Mishura Yuliya Stepanivna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Pashko Anatolij Oleksijovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Perestyuk Mykola Oleksijovych, Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Petravchuk Anatolij Petrovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Pogorily Serhiy Demyanovych, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Savenkov Serhij Mykolajovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Skrzyevsky Valery Antonovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Slyvka-Tylyshchak Anna Ivanivna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Uzhhorod National University, Uzhhorod, Ukraine;
Husainov Denys Yah'yevych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine.

ISSN: 2218-2055 (on-line version)

***ISBN*:** 978-966-2142
***ISSN*:** 1812-5409 (printed version)
***DOI**:* https://doi.org/10.17721/1812-5409

Founders: Taras Shevchenko National University of Kyiv
Foundation year: 1991 (series of bulletins of Kyiv University "Mathematics and Mechanics", "Physics", "Modeling and Optimization of Complex Systems" was reorganized into "Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics").
Certificate of state registration: КВ № 16299-4771 P dated 11.12.2009
Issued: 4 times a year

Mailing Address
Taras Shevchenko National University of Kyiv
Faculty of Computer Science and Cybernetics,
03022, Ukraine, Kyiv, 4d Academician Glushkov avenue
Phone: (044) 259-01-49
fm.visnyk@ukr.net

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Розора І.В. Аналітичні властивості траєкторій деяких випадкових процесів 11
Стойка М.В., Стьопочкіна М.В. Про діаграми Хассе, зв'язані з частково впорядкованою множиною (1,2,7) 16

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Кізілова Н. М., Ричак Н. Л.Імовірнісні моделі менеджменту водними ресурсами на урбанізованих територіях 22
Когутич О. І., Маринець В. В. Характеристична задача Коші з передісторією у випадку нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних 28

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Завадський І.О.Метод швидкого пошук патерна в потоці бітів 36
Іванов С.М. Загальний розв'язок та адаптація до параметричного оцінювання SIR моделі 40
Івохін Є.В., Науменко Ю.О., Марчук А.М., Про одну методику оцінювання ефективності рекламного тексту 44
Омельчук Л.Л., Русіна Н.Г. Автоматизований аналіз освітньо-професійної програми «Інформатика», що реалізується на факультеті комп'ютерних наук та кібернетики, з програмами інших закладів вищої освіти за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки» 49
Терещенко В. М., Марченко О.О., Терещенко Я. В., Тара О. М. Оптимальний алгоритм динамічної підтримки Діаграми Вороного для множини точок 63
Собчук В. В., Барабаш О. В., Мусієнко А. П., Капустян О.А. Методи контролю і діагностування інформаційної системи підприємства за принципом адаптивного накопичення діагностичної інформації 69
Чечельницький О.А..Властивості моделі обслуговування паралельної структури 79

СУЧАСНА ФІЗИКА

Крищук Т. В., Кордубан О.М., Огенко В.М., Медведський М.М. Дослідження методом рентгенівської фотоелектронної спектроскопії процесу синтезу TiC при відпалі $TiH_2/TiO_2/C$ у вакуумі 85
Ямпольський А. Л., Макаренко О. В. Поляриметрія анізотропного поверх-невого шару на склі 95

ALGEBRA, GEOMETRY AND PROBABILITY THEORY

Rozora I.V. Analytical properties of trajectories of the some stochastic processes 11
Stoika M.V., Styopochkina M.V. On Hasse diagrams connected with the poset (1,2,7) 16

DIFFERENTIAL EQUATIONS, MATHEMATICAL PHYSICS AND MECHANICS

Kizilova N. M. , Rychak N. L. Probabilistic models of water resources management on urbanized areas 22
Kohutych O. I. , Marynets V. V. Characteristic Cauchy's problem with prehistory in the case of nonlinear differential equations in partial derivatives 28

COMPUTER SCIENCES AND INFORMATICS

Zavadskyi I.O.Fast pattern matching method for a bitstream 36
Ivanov S.M. Analytical solution and adaptation to the parameter estimation of the SIR model 40
Ivohin E.V., Naumenko Y.O., Marchuk A.M. About one method of evaluating the effectiveness of advertising text 44
Omelchuk L.L., Rusina N.G. Automated analysis of the educational-professional program "Informatics", implemented at the faculty of computer science and cybernetics, with the programs of other institutions of higher education in the specialty 122 "Computer Science" 49
Tereshchenko V.N., Marchenko A.A., Tereshchenko Y.V., Tara A.N.The optimal algorithm for dynamic support of the Voronoi Diagram for a set of points 63
Sobchuk V. V., Barabash O. V., Musienko A. P., Kapustian O.A. Control and diagnosis methods for the information system of the enterprise on the principle of adaptive accumulation of diagnostic information 69
Chechelnitsky O.A., The properties of the queuing model with the parallel structure 79

MODERN PHYSICS

Kryshchuk T.V., Korduban O.M., Ogenko V.M., Medvedskij M.M. Investigation by X-ray photoelectron spectroscopy of the process of TiC synthesis during annealing of TiH2/TiO2/C in vacuum 85
Yampolskiy A. L., Makarenko O. V. Polarimetry of anisotropic surface layer on glass 95

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 519.21
https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/4.1

I.В. Розора, *д.ф.-м.н., доц.*

Аналітичні властивості траєкторій деяких випадкових процесів

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64.
e-mail: irozora@bigmir.net

I.V. Rozora, *D.Sc., Associate Prof.*

Analytical properties of sample paths of some stochastic processes

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.
e-mail: irozora@bigmir.net

В роботі розглядаються квадратично-гауссові випадкові процеси. Знайдено умови, за яких траєкторії даних процесів є рівномірно неперервними з імовірністю одиниця. Отримано також оцінку розподілу модуля неперервності. У частовому випадку вивчаються властивості оцінки коваріацайної функції гауссового стаціонарного процесу.

Ключові слова: Гауссовий процес, квадратично-гауссовий процес, корелограма, вибіркова неперервність.

The study of the analytical properties of random processes and their functionals, without a doubt, was and remains the relevant topic of the theory of random processes. The first result from which the study of the local properties of random processes began is Kolmogorov's theorem on sample continuity with probability one. The classic result for Gaussian random processes is Dudley's theorem. This paper is devoted to the study of local properties of sample paths of random processes that can be represented as a sum of squares of Gaussian random processes. Such processes are called square-Gaussian. We investigate the sufficient conditions of sample continuity with probability 1 for square-Gaussian processes based on the convergence of entropy Dudley type integrals. The estimation of the distribution of the continuity module is studied for square-Gaussian random processes. It is considered in detail an example with an estimator (correlogram) of the covariance function of a Gaussian stationary random process. The conditions on continuity of correlogram's trajectories with probability one are found and the distribution of the continuity module is also estimated.

Key Words: Gaussian process, square-Gaussian process, correlogram, sample continuity.
Статтю представив проф. Пашко А.О.

1 Вступ

Вивчення аналітичних властивостей випадкових процесів та функціоналів від них, без сумніву, було і залишається актуальною задачею теорії випадкових процесів. Першим результатом, з якого почалося дослідження локальних властивостей випадкових процесів, є теорема Колмогорова про вибіркову неперервність з ймовірністю одиниця випадкових процесів.

Теорема Колмогорова (див. [3]) надає достатні умови вибіркової неперервності $L_2(\Omega)$-випадкових процесів. А саме, нехай $X(t)$, $t \in [0,T]$, – сепарабельний випадковий процес. Траєкторії цього процесу з ймовірністю одиниця будуть неперервними, якщо існують невід'ємні монотонно неспадні функції $g(h)$, $q(c,h)$, $h>0$ такі, що

$$\mathbf{P}\{\rho(X(t+h),X(t)) > Cg(h)\} \leqslant q(C,h)$$

і

$$G=\sum_{n=0}^{\infty} g(2^{-n}T) < \infty,$$

$$Q(C)=\sum_{n=1}^{\infty} 2^n q(C,2^{-n}T) < \infty.$$

Класичним результатом для гауссових випадкових процесів є теорема Дадлі [1], яка стверджує, що траєкторії гауссового процесу $X(t)$, $t \in \mathrm{T}$, є майже напевно (рівномірно) неперервні, якщо збігається ентропійний інтеграл Дадлі:

$$\int_0^{\infty} \sqrt{\ln N_{\mathrm{T}}(\varepsilon)}d\varepsilon < \infty,$$

© I.В. Розора, 2020

де $N_{\mathrm{T}}(\varepsilon)$ – метрична масивність множини T відносно псевдометрики

$$d(t,s) = \sqrt{\mathsf{E}|X(t) - X(s)|^2}.$$

(тобто мінімальна кількість куль радіуса ε, що покривають множину T відносно псевдометрики $d(t,s)$). В книзі [3] знайдені умови вибіркової рівномірної неперервності випадкових процесів з K-приростами. Ці умови базуються на збіжності інтегралу типу Дадлі, що пов'язано з ентропійними характеристиками випадкового процесу. В роботах Ю. Козаченка та М. Ядренка отримані такі умови для різних класів випадкових полів.

Велика плеяда науковців досліджували властивості розподілів супремумів випадкових процесів, вивчали умови існування моментів та експоненціальних моментів супремумів процесів, знаходили оцінки ймовірності великих відхилень $\mathbf{P}\{\sup\limits_{t\in T}|X(t)| > \varepsilon\}$ і т.д. Ці та інші результати містяться в книгах М. Лідбеттера, Г. Ліндгрена і Х. Рутсена [5], М. Леду і М. Талаграна [6], В. Булдигіна та Ю. Козаченка [3] тощо.

Починаючи з середини минулого століття велика увага приділялась дослідженню локальних властивостей гауссових процесів, зокрема, Ю. Бєляєв отримав умови вибіркової неперервності гауссових стаціонарних процесів та відому "альтернативу Бєляєва" [**?**].

Фундаментальні результати стосовно властивостей гауссових випадкових процесів отримали Р. Дадлі [1], М. Талагран, М. Леду тощо.

Дана робота присвячена дослідженню локальних властивостей траєкторій випадкових процесів, що можна зобразити як суму квадратів гауссових випадкових процесів. Такі процеси будемо називати квадратично-гауссовими. Для них знаходяться достатні умови вибіркової неперервності з ймовірністю 1, що грунтуються на збіжності ентропійних інтегралів типу Дадлі. У статті також вивчається оцінка розподілу модуля нперервності квадратично-гауссового випадкового процесу. Детально розглядається приклад з оцінкою коваріаційної функції гауссового стаціонарного випадкового процесу.

2 Квадратично-Гауссові випадкові процеси

В даному розділі розглядаються означення та деякі властивості квадратично-гауссових випадкових величин і процесів.

Нехай (Ω, F, P) — ймовірнісний простір та (T,ρ)— компактний метричний простір з метрикою ρ.

Означення 2.1. Нехай $\Xi = \{\xi_t, t \in \mathrm{T}\}$ — сім'я сумісно гауссівських випадкових величин, $E\xi_t = 0$ (наприклад, ξ_t, $t \in \mathrm{T}$, є гауссівським випадковим процесом).

Простір $SG_\Xi(\Omega)$ називається простором квадратично-гауссових випадкових величин, якщо кожен елемент $\eta \in SG_\Xi(\Omega)$ можна представити у вигляді

$$\eta = \bar{\xi}^T A\bar{\xi} - \mathsf{E}\bar{\xi}^T A\bar{\xi}, \qquad (1)$$

де $\bar{\xi}^T = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $\xi_k \in \Xi$, $k = 1, \dots, n$, A— дійснозначна матриця,

або $\eta \in SG_\Xi(\Omega)$ представляється як середньоквадратична границя послідовності випадкових величин з (1)

$$\eta = l.i.m._{n\to\infty}(\bar{\xi}_n^T A\bar{\xi}_n - \mathsf{E}\bar{\xi}_n^T A\bar{\xi}_n).$$

Означення 2.2. Випадковий процес $\xi(t) = \{\xi(t), t \in \mathrm{T}\}$ називається квадратично-гауссовим, якщо для кожного $t \in \mathrm{T}$ випадкова величина $\xi(t)$ належить простору $SG_\Xi(\Omega)$.

Відомо також, що

- $SG_\Xi(\Omega)$ є банаховим простором з нормою $\|\zeta\| = \sqrt{\mathsf{E}\zeta^2}$;
- $SG_\Xi(\Omega)$ є підпростором простору Орліча, що породжується функцією

$$U(x) = \exp|x| - 1;$$

- норма $\|\zeta\|_{L_U(\Omega)}$ на $SG_\Xi(\Omega)$ еквівалентна нормі $\sqrt{\mathsf{E}\zeta^2}$.

Приклад 1. Розглянемо сім'ю гауссівських центрованих випадкових процесів

$\xi_1(t)$, $\xi_2(t), \dots, \xi_n(t)$, $t \in \mathrm{T}$. Нехай матриця $A(t)$ є симетричною. Тоді

$$X(t) = \bar{\xi}^T(t)A(t)\bar{\xi}(t) - \mathsf{E}\bar{\xi}^T(t)A(t)\bar{\xi}(t),$$

де $\bar{\xi}^T(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t))$, є квадратично-гауссовим випадковим процесом.

Через $N(u)$ позначимо мінімальну кількість замкнених куль радіуса u, що покривають множину T з метрикою ρ.

Нехай $\xi(t) = \{\xi(t),\, t \in \mathrm{T}\}$— квадратично-гауссовий випадковий процес. Припустимо, що існує функція $\sigma(h)$, $h > 0$, яка є монотонно зростаючою, неперервною і $\sigma(h) \to 0$ при $h \to 0$, а також

$$\sup_{\rho(t,s)\leqslant h} (\mathbf{Var}(\xi(t) - \xi(s)))^{\frac{1}{2}} \leqslant \sigma(h).$$

Визначимо деякі сталі:

$$\varepsilon_0 = \inf_{t\in\mathbf{T}} \sup_{s\in\mathbf{T}} \rho(t,s), \qquad t_0 = \sigma(\varepsilon_0),$$

$$\gamma_0 = \sup_{t\in\mathbf{T}} (\mathbf{Var}\,\xi(t))^{1/2},$$

Позначимо $C = \max\{t_0, \gamma_0\}$.

Припустимо, що існує зростаюча функція $r(u) \geqslant 0, u \geqslant 1$ така, що $r(u) \to \infty$ при $u \to \infty$; функція $r(\exp\{t\})$ є опуклою вниз та

$$\int_0^{t_0} r(N(\sigma^{(-1)}(u))du < \infty.$$

У роботі Козаченка Ю. і Розори І. [4] знайдено умови рівномірної вибіркової неперервності з імовірністю 1 для квадратичнно-гауссових випадкових процесів

Теорема 2.1. *Якщо для сепарабельного квадратично-гауссового процесу $\xi = \{\xi(t),\, t \in B\}$ виконуються умови попередньої теореми, то він є вибірково неперервним з імовірністю одиниця та для довільних $p \in (0,1)$, $\varepsilon > 0$ і $x > 0$*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{\rho(t,s)<\varepsilon} |\xi(t) - \xi(s)| > x\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2r^{(-1)}\left(\frac{1}{p\sigma(\varepsilon)}\int_0^{\sigma(\varepsilon)} r\left(N(\sigma^{(-1)}(u))\right)du\right) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{\sqrt{2}xp(1-p)^2}{\sigma(\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{xp(1-p)^2}{\sqrt{2}\sigma(\varepsilon)}\right\}. \tag{2}$$

Теорема 2.2. *Нехай $X(t) = \{X(t), t \in \boldsymbol{T} = [a,b]\}$ – сепарабельний квадратично-гауссовий випадковий процес, для якого виконується умова*

$$\sup_{|t-s|\leqslant h} (\mathbf{Var}\,(X(t) - X(s)))^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{K_{\ln}}{\ln^{\alpha}\left(\frac{1}{h} + e^{\alpha}\right)},$$

де $\alpha > 1$, стала $K_{\ln} > 0$. Тоді процес $X(t)$ є вибірково неперервним з ймовірністю одиниця та для довільних $\varepsilon > 0$ і $x > 0$ має місце така оцінка

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} \quad & \{\sup_{\substack{t,s\in[a,b]\\ |t-s|<\varepsilon}} |X(t) - X(s)| \geqslant x\} \leqslant \\
\leqslant \quad & 2\,(b-a)^{\frac{\alpha}{p(\alpha-1)}} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} + e^{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{p(\alpha-1)}} \\
\times \quad & \left(1 + \frac{\sqrt{2}xp(1-p)^2\ln^{\alpha}\left(\frac{1}{\varepsilon} + e^{\alpha}\right)}{K_{\ln}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
\times \quad & \exp\left\{-\frac{xp(1-p)^2\ln^{\alpha}\left(\frac{1}{\varepsilon} + e^{\alpha}\right)}{\sqrt{2}K_{\ln}}\right\}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Доведення. Результат теореми випливає з теореми 2.1 при $\sigma(u) = \frac{K_{\ln}}{\ln^{\alpha}\left(\frac{1}{h}+e^{\alpha}\right)}$. Досить тільки оцінити вираз

$$r^{(-1)}\left(\frac{1}{p\sigma(\varepsilon)}\int_0^{\sigma(\varepsilon)} r\left(N\left(\sigma^{(-1)}(\nu)\right)\right)d\nu\right).$$

З умов теореми випливає, що

$$\sigma^{(-1)}(u) = \left(\exp\{(K_{\ln}/u)^{1/\alpha}\} - e^{\alpha}\right)^{-1}, \quad 0 < u < \frac{K_{\ln}}{\alpha^{\alpha}}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
N(\sigma^{(-1)}(u)) \quad &\leqslant \quad \left(\frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right) = \\
&= \quad \left(\frac{b-a}{2}(\exp\{(K_{\ln}/u)^{1/\alpha}\} - e^{\alpha}) + 1\right) \\
&\leqslant \quad (b-a)\exp\{(K_{\ln}/u)^{1/\alpha}\}.
\end{aligned}$$

Розглянемо тепер функцію

$$r(u) = \ln u,\ u \geqslant 1.$$

Легко перевірити, що вона задовольняє умовам теореми. А тому для $u \in (0, \sigma(\varepsilon))$ виконується наступне твердження

$$\begin{aligned}
r(N(\sigma^{(-1)}(u))) \quad &\leqslant \quad r\Big((b-a)\cdot\exp\{(K_{\ln}/u)^{1/\alpha}\}\Big) \\
&\leqslant \quad \ln(b-a) + (K_{\ln}/u)^{1/\alpha} \\
&\leqslant (\frac{K_{\ln}}{u})^{\beta/\alpha}\Big(\ln(b-a)\Big(\frac{\sigma(\varepsilon)}{K_{\ln}}\Big)^{1/\alpha} + 1\Big).
\end{aligned} \tag{4}$$

Оскільки обернена функція до $r(u)$ дорівнює $r^{(-1)}(u) = \exp\{x\}$, то, використовуючи оцінку (4) та значення $t_0 = \frac{K_{\ln}}{\ln^\alpha\left(\frac{2}{b-a}+e^\alpha\right)}$, маємо

$$r^{(-1)}\left(\frac{1}{p\sigma(\varepsilon)}\int_0^{\sigma(\varepsilon)} r\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du\right) =$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{p\sigma(\varepsilon)}\int_0^{\sigma(\varepsilon)} r\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du\right\} \leqslant$$

$$= \exp\left\{\frac{\alpha}{p(\alpha-1)}\Big(\ln(b-a)+\Big(\frac{K_{\ln}}{\sigma(\varepsilon)}\Big)^{1/\alpha}\Big)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{\alpha}{p(\alpha-1)}\Big(\ln(b-a)+\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}+e^\alpha\right)\Big)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{\alpha}{p(\alpha-1)}\ln\Big((b-a)\left(\frac{1}{\varepsilon}+e^\alpha\right)\Big)\right\} =$$

$$= (b-a)^{\frac{\alpha}{p(\alpha-1)}}\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon}+e^\alpha\right)^{\frac{\alpha}{p(\alpha-1)}}. \qquad (5)$$

Нерівність (3) буде доведено, якщо в (2) підставити значення функції $\sigma(\varepsilon) = \frac{K_{\ln}}{\ln^\alpha\left(\frac{1}{h}+e^\alpha\right)}$ та оцінку (5).

Якщо $\varepsilon \to 0$, то з нерівності (3) випливає, що $\mathbf{P}\left\{\sup_{|t-s|<\varepsilon}\ |X(t)-X(s)| > x\right\} \to 0$, тобто при $\varepsilon \to 0$

$$\sup_{|t-s|<\varepsilon}\ |X(t)-X(s)| \xrightarrow{P} 0.$$

Отже, має місце вибіркова неперервність за ймовірністю. А з монотонності супремума випливає і збіжність з ймовірністю одиниця

$$\sup_{|t-s|<\varepsilon}\ |X(t)-X(s)| \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0 \ \text{м.н.}.$$

Таким чином, випадковий процес $X = \{X(t),\, t \in B\}$ є вибірково неперервним з ймовірністю одиниця. □

У статті [4] доведено таку лему.

Лема 1. *Нехай $\psi(u), u \geqslant 0$ – така неперервна, монотонно зростаюча функція, $\psi(0) = 0$, що функція $\frac{u}{\psi(u)}$ є неспадною при $u > u_0$, де стала $u_0 \geqslant 0$. Тоді для всіх $u \geqslant 0$ та $v > 0$ виконується наступна нерівність*

$$\left|\sin\frac{u}{v}\right| \leqslant \frac{\psi(u+u_0)}{\psi(v+u_0)}. \qquad (6)$$

Приклад 2. Умови леми 1 виконуються у випадку $\psi(u) = \ln^\alpha(u+1)$, $\alpha > 0$, $u_0 = e^\alpha - 1$. Тоді нерівність (6) записується у вигляді

$$\left|\sin\frac{u}{v}\right| \leqslant \frac{\ln^\alpha(e^\alpha+u)}{\ln^\alpha(e^\alpha+v)}, \quad \alpha > 0. \qquad (7)$$

Приклад 3. Нехай $X = \{X(t), t \in \mathrm{T}\}$– дійснозначний центрований стаціонарний гауссовий випадковий процес з неперервною коваріаційною функцією $B(h) = \mathsf{E}X(t)X(t+h)$, $h \in R$. Однією із задач статистики випадкових процесів є оцінка або ідентифікація функції B за спостереженнями за однією траєкторією процесу X. В якості оцінки часто розглядають корелограму (емпіричну коваріаційну функцію)

$$\hat{B}_N(h) = \frac{1}{N}\int_0^N X(t)X(t+h)dt, \quad h > 0,$$

інтеграл тут розуміємо як середньоквадратичний інтеграл Рімана.

Тоді випадковий процес

$$Y_N(h) = \hat{B}_N(h) - \mathsf{E}\hat{B}_N(h),\ h \in [0,b],$$

є квадратично-гауссовим.

Нехай $f = (f(\lambda),\, \lambda \in R)$ – спектральна щільність випадкового процесу $X(t)$, $t \in T$, $f \in L_2(R)$. Припустимо, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln^{\alpha\cdot i}\left(\frac{|\lambda|}{2}+e^\alpha\right) f^2(\lambda)d\lambda, \quad i = 1,2, \quad \alpha > 2.$$

В книзі [3](Лема 4.1, ст. 200) показано, що

$$\mathsf{E}(Y_N(h_1) - Y_N(h_2))^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8\pi}{N}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda)\sin^2\frac{\lambda(h_1-h_2)}{2}d\lambda\right] +$$

$$+\frac{8\pi||f||_2}{N}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda)\sin^2\frac{\lambda(h_1-h_2)}{2}d\lambda\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (8)$$

де $N > 0,\ h_1, h_2 \geqslant 0$.

Для оцінки $\mathsf{E}(Y_N(h_1) - Y_N(h_2))^2$ з (8) використаємо нерівність (7) для синусів

$$\left|\sin\frac{u}{v}\right| \leqslant \frac{\ln^\alpha(e^\alpha+u)}{\ln^\alpha(e^\alpha+v)}, \quad \alpha > 0.$$

Тоді маємо

$$\mathsf{E}(Y_N(h_1)-Y_N(h_2))^2 \leqslant \frac{K_{\ln}^2}{\ln^\alpha\left(\frac{1}{|h_1-h_2|}+e^\alpha\right)}, \quad \alpha>2,$$

де значення $K_{\ln}$ дорівнює

$$K_{\ln}^2 = \frac{2^3\pi}{N}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\ln^\alpha\left(\frac{|\lambda|}{2}+e^\alpha\right)f^2(\lambda)d\lambda+\right.$$

$$\left.+||f||_2\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}\ln^{2\alpha}\left(\frac{|\lambda|}{2}+e^\alpha\right)f^2(\lambda)d\lambda}\right).$$

Отже, для процесу $Y_N(h)$, $h\in[0,b]$, виконуються умови теореми 2.2, а саме всі траєкторії процесу $Y_N(h)$ є рівномірно неперервними на $[0,b]$ для будь-якого $b>0$ та для розподілу модуля неперервності має місце така оцінка

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\ &\Big\{\sup_{\substack{t,s\in[0,b]\\|t-s|<\varepsilon}}|X(t)-X(s)|\geqslant x\Big\}\leqslant\\ \leqslant\ &2b^{\frac{\alpha}{p(\alpha-2)}}\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon}+e^\alpha\right)^{\frac{\alpha}{p(\alpha-2)}}\times\\ \times\ &\left(1+\frac{\sqrt{2}xp(1-p)^2\ln^{\alpha/2}\left(\frac{1}{\varepsilon}+e^\alpha\right)}{K_{\ln}}\right)^{\frac12}\\ \times\ &\exp\left\{-\frac{xp(1-p)^2\ln^{\alpha/2}\left(\frac{1}{\varepsilon}+e^\alpha\right)}{\sqrt{2}K_{\ln}}\right\}.\end{aligned}$$

3 Висновки

В роботі розглядались квадратично-гауссові випадкові процеси. Знайдено достатні умови рівномірної вибіркової неперервності для них з ймовірністю одиницята отримано розподіл модуля неперервності. Як приклад розглянуто оцінку коваріаційної функції гауссового стаціонарного випадкового процесу.

Список використаних джерел

1. *Dudley R.* Sample functions of the Gaussian processes/ R. Dudley // Annals of Probability.– 1973.– вип. 1, № 1.– С. 3–68.

2. *Булдыгин В.* Метрические характеристики случайных величин и процессов, / В.Булдыгин, Ю.Козаченко // Киев, ТВиМС.– 1998.

3. *Гихман И.И.* Теория случайных процессов, т.1 /И.И. Гихман, А.В. Скороход // М.: Наука. – 1971. – 664 с.

4. *Козаченко Ю.* Умови вибіркової неперервності з ймовірністю одиниця для квадратично-гауссових випадкових процесів / Ю.Козаченко, І.Розора // ТЙіМС.– 2019.– № 101.–С. 134-146.

5. *Leadbetter M.* Extremes and related properties of random sequences and processes. /M. Leadbetter M., G. Lindgren, H. Rootzen // Springer, Berlin.– 1983.

6. *Ledoux M.* Probability in Banach Spaces: Isoperimetry and Processes. /M. Ledoux, M. Talagrand //Springer Science and Business Media.– 2013.

References

1. DUDLEY R. (1973) Sample functions of the Gaussian processes *Annals of Probability.* **1**, № 1, 3–68.

2. BULDYGIN, V., KOZACHENKO, YU. (2000) *Metric characterization of random variables and random processes*, Amer. Math. Soc., Providence, RI.

3. GIKHMAN, I.I. and SKOROKHOD, A.V. (1971), *Teoriya sluchainyh processov, v.1*, M.: Nauka, 664 p.

4. KOZACHENKO YU., ROZORA I. (2019) Conditions of sample continuity with probability one for Square-Gaussian stochastic processes статист. *Theor. Probability and Math. Statist.*, **101**, 134-146.

5. LEADBETTER M., LINDGREN G., ROOTZEN H. (1983) *Extremes and related properties of random sequences and processes,* Springer, Berlin.

6. LEDOUX M., TALAGRAND M. (2013) *Probability in Banach Spaces: Isoperimetry and Processes*, Springer Science and Business Media.

Надійшла до редколегії: 7.12.2020

УДК 512.64+512.56 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/4.2

Стойка М. В.[1], к. ф.-м. н., доцент,
Стьопочкіна М. В.[2], к. ф.-м. н., доцент.

Про діаграми Хассе, зв'язані з частково впорядкованою множиною (1,2,7)

[1] Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II,
90202 м. Берегово, площа Кошута, 6,
e-mail: stoyka_m@yahoo.com
[2]Поліський національний університет,
10008, м. Житомир, Старий бульвар, 7,
e-mail: stmar@ukr.net

Stoika M. V.[1], Ph.D,
Styopochkina M. V.[2], Ph.D.

On Hasse diagrams connected with the poset $(1, 2, 7)$

[1]Ferenc Rakoczi II. Transcarpathian Hungarian Institute, 90202 Beregszász, Kossuth square, 6,
e-mail: stoyka_m@yahoo.com
[2]Polissia National University,
10008, Zhytomyr, Staryi Boulevard, 7,
e-mail: stmar@ukr.net

Зображення ч. в. множин, введених в 1972 р. Л. О. Назаровою і А. В. Ройтером, виникають при розв'язанні багатьох задач в різних областях математики. Однією з найважливіших задач в теорії зображень будь-яких об'єктів є опис випадків скінченного зображувального типу та ручного зображувального типу. Перша із цих задач для ч. в. множин розв'язана М. М. Клейнером, а друга Л. О. Назаровою. М. М. Клейнер довів, що ч. в. множина має скінченний тип тоді і тільки тоді, коли вона не містить підмножин виду $(1,1,1,1),(2,2,2),(1,3,3),(1,2,5)$ *і* $(И,4)$*, які на -зи ваються критичними множинами. Узагальнення цього критерію на ручний випадок отримано Л. О. Назаровою. Відповідні множини називаються суперкритичними і складаються вони з ч. в. множин* $(1,1,1,1,1)$*,* $(1,1,1,2)$*,* $(2,2,3)$*,* $(1,3,4)$*,* $(1,2,6)$ *і* $(И,5)$*. В. М. Бондаренко запропонував узагальнення критичних і суперкритичних ч. в. множин, назвавши їх 1-надсуперкритичними. У цій статті вивчаються комбінаторні властивості однієї з таких множин.*

Ключові слова: ч. в. множина, граф, критична та суперкритична ч. в. множина, 1-надсуперкритична ч. в. множина, антизоморфізм, діаграми Хассе, мінімаксна еквівалентність

Representations of posets introduced in 1972 by L. O. Nazarova and A. V. Roiter, arise when solving many problems in various fields of mathematics. One of the most important problem in the theory of representations of any objects is a description of the cases of representation finite type and representation tame type. The first of these problems for posets was solved by M. M. Kleiner, and the second L. O, Nazarova. M. M. Kleiner proved that a poset has finite type if and only if it does not contain subsets of the form $(1,1,1,1),(2,2,2),(1,3,3),(1,2,5)$ *and* $(И,4)$*, which are called the critical sets. A generalization of this criterion to the tame case was obtained by L. O. Nazarova. The corresponding sets are called supercritical and they consist of the posets* $(1,1,1,1,1)$*,* $(1,1,1,2)$*,* $(2,2,3)$*,* $(1,3,4)$*,* $(1,2,6)$ *and* $(И,5)$*. V. M. Bondarenko proposed a generalization of the critical and supercritical posets, calling them 1-oversupercritical. This paper studies the combinatorial properties of one of such sets.*

Key Words: poset, graph, critical and supercritical poset, 1-oversupercritical poset, anti-isomorphism, Hasse diagrams, minimax equivalence

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Петравчук А. П.

1 Introduction

In [1] M. M. Kleiner proved that a poset S is of finite representation type if and only if it does not contain the subsets of the form $(1,1,1,1),(2,2,2),(1,3,3),(1,2,5)$ and $(И,4)$; these posets are called the critical posets. In [2] it is proved that a poset is critical with respect to the positivity of the Tits quadratic form if and only if it is minimax equivalent to a critical poset (the minimax equivalence was introduced in [3]); all such posets were described in [2].

In [4] L. A. Nazarova proved that a poset S is tame if and only if it does not contain subsets of the form $(1,1,1,1,1)$, $(1,1,1,2)$, $(2,2,3)$, $(1,3,4)$, $(1,2,6)$ and $(И,5)$; these sets are called supercriti-

© М. В. Стойка, М. В. Стьопочкіна, 2020

cal. In [5] it is proved that a poset is critical with respect to the non-negativity of the Tits form if and only if it is minimax equivalent to a supercritical poset; all such critical posets was described in [6].

The posets that are differ from the supercritical sets in the way as the supercritical sets differ from critical posets are called 1-supersupcritical (see [7]).

In this paper we study combinatorial properties of the posets which are minimax equivalently to the 1-oversupercritical poset $(1, 2, 7)$.

The authors are grateful to Professor V. M. Bondarenko for his attention to the work.

2 Main theorems

The Hasse diagram of a finite poset S is the directed graph $H(S)$ with the vertices $x \in S$ and the arrows (x, y), where $x < y$ and there is no z such that $x < z < y$).

Recall some definitions from [8]. One calls the 0-length of an oriented path of $H(S)$ the number of its vertices. One denotes by $l_{min}(S)$ (respectively, $l_{max}(S)$) the 0-length of a most short maximal (respectively, most long) oriented path of $H(S)$. The number of all maximal oriented path of S is denoted by $n(S)$. One denotes by $[S]^{\sim}$ the set of all posets minimax equivalent to S [3] (see also [2, 5, 6, 9]) and put

$$L_{min}(S) = min_{X \in [S]^{\sim}} l_{min}(X),$$

$$L_{max}(S) = max_{X \in [S]^{\sim}} l_{max}(X).$$

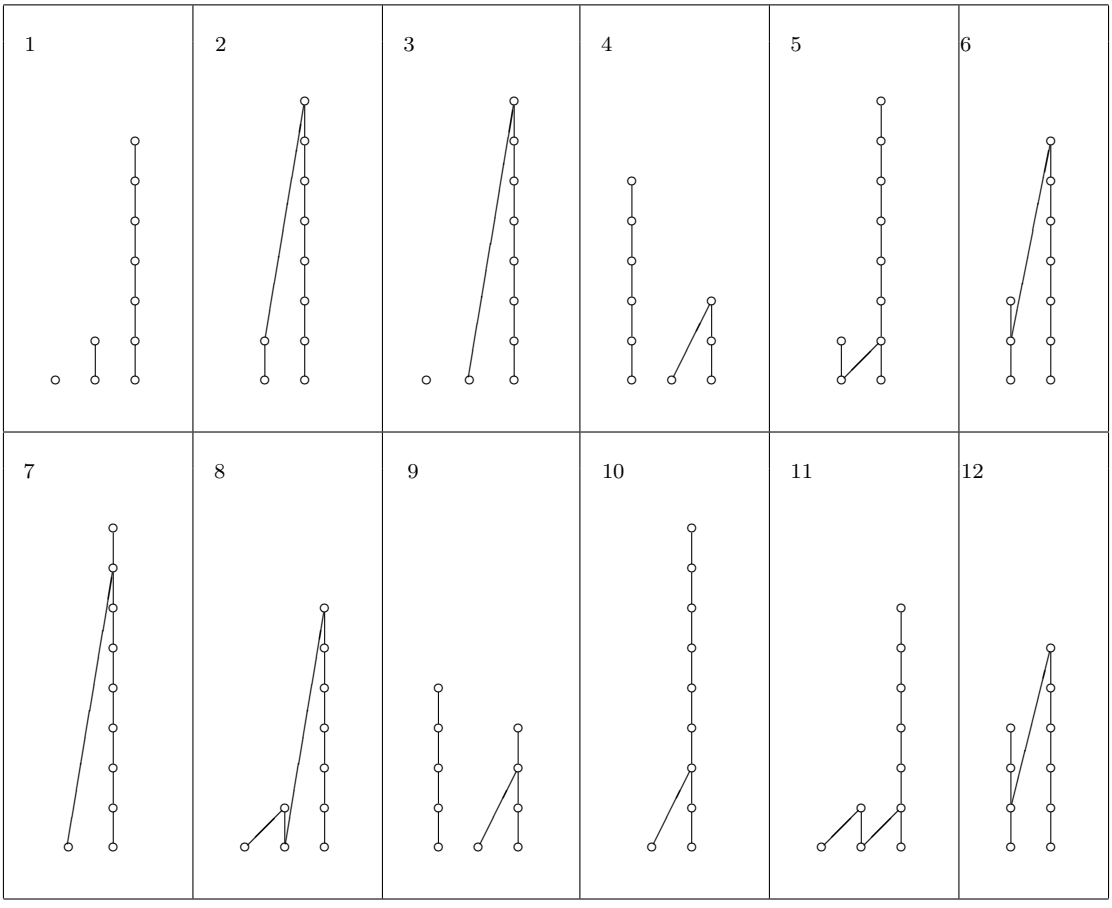
We prove the following theorems, which are analogous to Theorems 1 and 2 [9] for the 1-oversupercritical poset $(1, 3, 5)$.

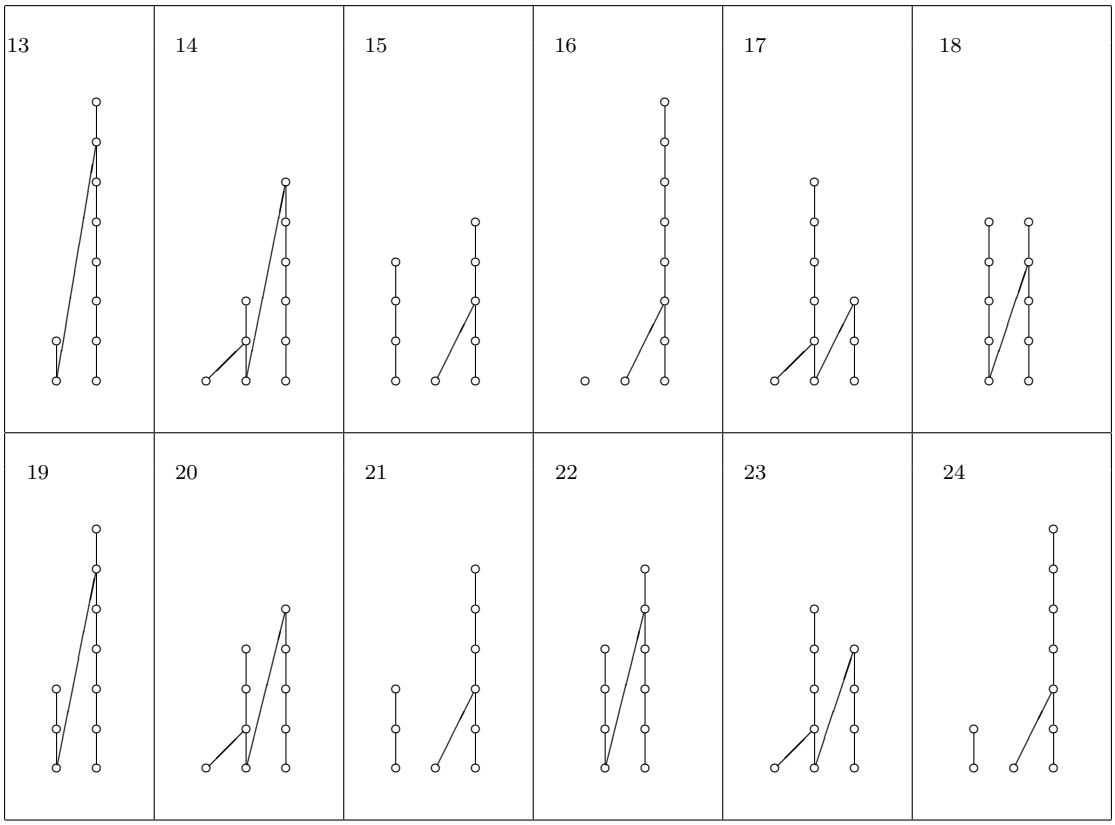
Theorem 1. *For* $S = (1, 2, 7)$, $L_{min}(S) = 1$, $L_{max}(S) = 9$.

Theorem 2. *Let* $X \in [(1, 2, 7)]^{\sim}$. *Then* $1 \leqslant l_{min}(X) \leqslant 8$, $5 \leqslant l_{max}(X) \leqslant 9$, $n(X) \in \{2, 3, 4\}$.

3 Proofs of the theorems.

The posets which are minimax equivalent to (1. 2 ,7) were classified in [7]. They are given (up to isomorphism and antiisomorphism) by the following table.





We have the next theorem.

Theorem 3. *The following holds for posets* 1 – 24:

N	l_{min}	l_{max}	n	N	l_{min}	l_{max}	n	N	l_{min}	l_{max}	n
1	1	7	3	9	3	5	3	17	2	6	4
2	3	8	2	10	8	9	2	18	3	5	3
3	1	8	3	11	2	7	4	19	3	7	3
4	2	6	3	12	3	6	3	20	2	5	4
5	2	8	3	13	2	8	3	21	3	6	3
6	3	7	3	14	2	6	4	22	3	6	3
7	3	9	2	15	4	5	3	23	2	5	4
8	2	7	4	16	1	8	3	24	2	7	3

Here $l_{min} = l_{min}(S_i)$, $l_{max} = l_{max}(S_i)$ and $n = n(S_i)$ for $i = 1, 2, \ldots, 24$, where S_i is the ith poset in the table.

The proof is proved by direct calculations. Theorems 1 and 2 follow from Theorem 3.

Список використаних джерел

1. *Клейнер М. М.* Частично упорядоченные множества конечного типа / М. М. Клейнер // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 32–41.

2. *Бондаренко В. М.* (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса / В. М. Бондаренко, М. В. Степочкина // Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**. – №3. – С. 18-58.

References

1. KLEINER M. M. (1972) Partially ordered sets of finite type. *Zap. Nauch. Semin. LOMI*, **28**, p. 32–41 (in Russian).

2. BONDARENKO V. M., STYOPOCHKINA M. V. (2005) (Min, max)-equivalence of partially ordered sets and the Tits quadratic form. *Problems of Analysis and Algebra: Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr.*, **2**, №3, p. 18-58 (in Russian).

3. *Bondarenko V. M.* On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms / V. M. Bondarenko // Bull. of Taras Shevchenko University of Kiev (series: Physics & Mathematics). – 2005. – № 1. – P. 24-25.

4. *Назарова Л. А.* Частично упорядоченные множества бесконечного типа / Л. А. Назарова // Изв. АН СССР. — 1975. — **39**, №5. — С. 963 - 991.

5. *Бондаренко В. М.* (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и неотрицательные формы Титса / В. М. Бондаренко, М. В. Степочкина // Укр. мат. журнал. – 2008. – **60**, №9. – С. 115-1167.

6. *Бондаренко В. М.* Описание частично упорядоченных множеств, критических относительно неотрицательности квадратичной формы Титса / В. М. Бондаренко, М. В. Степочкина // Укр. мат. журнал. – 2009. – **61**, №5. – С. 734-746.

7. *Бондаренко В. В.* 1-над-суперкритические частично упорядоченные множества с тривиальной группой автоморфизмов и min-эквивалентность. I. / В. В.Бондаренко, В. М. Бондаренко, М. В. Степочкина, И. В. Червяков // Наук. вісник Ужгородського ун-ту. Сер. матем. і інформатика. – 2011. – Вип. 22, № 2. – С. 17-25.

8. *Bondarenko V. M.* On Hasse diagrams connected with the 1-oversupercritical poset (1,3,5) / V. M. Bondarenko, Yu. M. Orlovskaja, M. V. Styopochkina // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2018. – вип. 16 – С. 30-32.

9. *Bondarenko V. M.* Strengthening of a theorem on Coxeter-Euclidean type of principal partyally ordered sets / V. M. Bondarenko, M. V. Styopochkina // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2018. – №4. – P. 8-15.

3. BONDARENKO V. M. (2005) On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms. *Bull. of Taras Shevchenko University of Kiev (series: Physics & Mathematics)*, № 1, p. 24-25.

4. NAZAROVA L. A. (1975) Partially ordered sets of infinite type. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **39**, №5, p. 963-991 (in Russian).

5. BONDARENKO V. M., STYOPOCHKINA M. V. (2008) (Min, max)-equivalency of posets and nonnegative Tits forms. *Ukrainian Math. J.*, **60**,№9, p. 1349-1359.

6. BONDARENKO V. M., STYOPOCHKINA M. V. (2009) Description of posets critical with respect to the nonnegativity of the quadratic Tits form. *Ukrainian Math. J.*, **61**, №5, p. 734-746. .

7. BONDARENKO V. V., BONDARENKO V. M., STYOPOCHKINA M. V., CHERVYAKOV ov I. V. (2011) 1-oversupercritical partially ordered sets with trivial group of automorphisms and min-equivalence. I. *Nauk. Visn. Uzhgorod. Univ., Ser. Mat.*, **22**, №2, p. 17-25 (in Russian).

8. BONDARENKO V. M., ORLOVSKAJA YU. M. STYOPOCHKINA M. V. (2018) On Hasse diagrams connected with the 1-oversupercritical poset (1,3,5). *Applied problems of mechanics and mathematics*, **16**, p. 30-32.

9. BONDARENKO V. M., STYOPOCHKINA M. V. (2018) Strengthening of a theorem on Coxeter-Euclidean type of principal partyally ordered sets. *Bulletin of University of Kyiv, Series: Physics and Mathematics*, № 4. p. 8-15.

Надійшла до редколегії 14.10.2020

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

УДК 519.233+556

https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/4.3

Кізілова Н. М., д. ф.-м. н., проф.
Ричак Н. Л., к. геогр. н., доцент

Імовірнісні моделі менеджменту водними ресурсами на урбанізованих територіях

[1]Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна, Харків, Україна,
e-mail: n.kizilova@gmail.com
[2]Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна, Харків, пл. Свободи, 4,
e-mail: rychak@ukr.net

N. M. Kizilova, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.
N. L. Rychak, PhD (Geogr.), docent

Probabilistic models of water resources management on urbanized areas

[1]V.N. Karazin Kharkiv National University, 61022, Kharkov, Svobody sq., 4,
e-mail: n.kizilova@gmail.com
[2]V.N. Karazin Kharkov National University, 61022, Kharkov, Svobody sq., 4,
e-mail: rychak@ukr.net

Поступові глобальні зміни клімату ставлять перед математичними науками нові задачі, які пов'язані з прогнозуванням метеорологічних умов, підготовкою інфраструктури до можливих злив, штормів, посух та ін. несприятливих подій. Одними з найбільш поширених підходів є синтетичні регресійно-імовірнісні моделі, які використовують просторово-часові функції густини імовірності опадів. В роботі такий підхід застосований до статистичних даних кількості опадів в Харківській області, яка показує тенденції до поступового підвищення температури повітря, високі індекси водного стресу, індекси загроз посух і повеней. Відкриті дані о розподілах температур і кількості опадів оброблено за допомогою різних імовірнісних статистик. Показано, що логнормальний розподіл найбільш точно відповідає даним вимірювань і дозволяє робити точніші прогнози. Проведені оцінки ймовірностей посух і повеней в Харківській області при різних сценаріях динаміки змін клімату. Результати дослідження можуть використатися для менеджменту водними ресурсами на урбанізованих територіях за умов потепління клімату.

Ключові слова: якість води, глобальні зміни клімату, математичне моделювання, імовірнісні моделі.

Gradual global climate change poses new challenges to the mathematical sciences, which are related to forecasting of meteorological conditions, preparing the infrastructure for possible rains, storms, droughts, and other climatic disasters. One of the most common approaches is synthetic regression-probability models, which use the spatio-temporal probability density functions of precipitation level. This approach is applied to the statistics of precipitation in the Kharkiv region, which shows the tendency to a gradual increase in air temperature, high indices of basic water stress, indices of drought and riverside flood threats. Open data on temperature distributions and precipitation were processed using various probability statistics. It is shown that the lognormal distribution most accurately describes the measurement data and allows making more accurate prognoses. Estimates of drought and flood probabilities in Kharkiv region under different scenarios of climate change dynamics have been carried out. The results of the study can be used for management of water resources on urban territories at global climate warming.

Key words: water quality, global climate change, mathematical modeling, probabilistic models.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я. О.

1. Вступ

Глобальні зміни клімату, які пов'язані з потеплінням і зниженням вологості повітря, таненням льодів Антарктиди і Гренландії, південною осциляцією Ель-Ніньо та ін., приводять до незворотних змін у природі: гибелі популяцій риб і тварин, раптових злив і повеней, суховіїв і лісових пожеж [1]. Відповідні фізичні процеси не є регулярними, а для їх дослідження і прогнозування використовують імовірнісні математичні

моделі. Згідно з даними[1] Всесвітнього Інституту Ресурсів (World Resources Institute), велика частина території України має високий (3-4) або середній (2-3) індекси стресу з водопостачанням, найвищий рівень засухи (0.8-1) і досить високий (3-5) індекс прибережних повеней [2]. Значення середньої, мінімальної та максимальної за місяць температур по Харківській області протягом року. наведені на Рис.1. Найнижчі та найвищі за весь період спостережень температури були зафіксовані в 1893-1964 рр. і 1931-2015 рр. відповідно, що свідчить про помітне потепління клімату на території області. Аналогічні висновки можна зробити і для інших областей України.

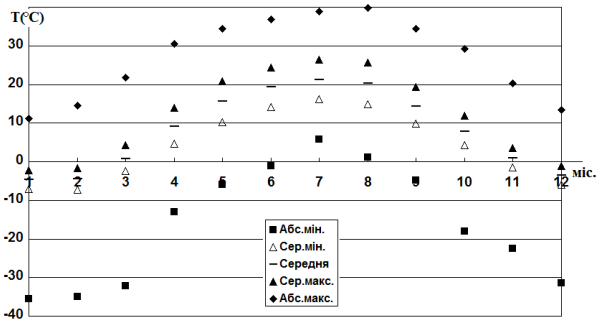


Рис.1. Значення середніх і абсолютних мінімальних і максимальних за місяць температур повітря на території Харківської області.[2]

Таким чином, для більшості територій України важливою є задача розробки локальних математичних моделей менеджменту водними ресурсами з урахуванням специфіки (урбанізованих, аграрних, туристичних та ін.) міст і областей [3]. Аналогічні моделі були побудовані для країн Європи, Африки, Америки [4-6], але практично відсутні для України.

2. Огляд математичних моделей

2.1. Регресійні моделі. Найбільш поширені моделі використовують регресійні залежності у вигляді статистично достовірних кривих тренду X(t), де X – кількісний показник опадів (злива, снігопад, град, лід, і т.д.), t – час (в місяцях, роках, і пр.). Для різних країн (областей, земель, міст) існують статистичні апроксимації, у тому числі для України. На жаль, немає встановлених періодів обробки метеорологічних даних, тому в різних статтях надаються різноманітні статистичні залежності для областей і великих міст України, а також для країни в цілому [7]. Наприклад, за період 1986-2010 рр. на території України було 1335 злив, 237 снігопадів, 131 град, 398 випадків сильного вітру, 164 шквали, 249 заметілей, 3 піщані бури, 70 складних льодових відкладень; разом 3031 несприятливих подій, з яких більшість складали зливи (52.9%). Відповідні регресійні залежності для кожної з областей наведені в [4] для тяжких і небезпечних злив і дощів з урахуванням повторюваності, інтенсивності і сезону. Останнім часом з'являються подібні статистичні дані для 2010-2020 рр., які мають інші регресивні залежності в зв'язку з потеплінням клімату [1]. Ці дані є дуже важливими для використання в математичних моделях, але стохастичний характер непогодних умов точніше описується з використанням імовірнісних моделей [8].

Однією з перших була введена концепція імовірної максимальної кількості опадів (V_{max}) за певну тривалість, яка фізично можлива для даного розміру штормової області в певному географічному розташуванні в певний час року[3]. Найпростіша математична модель вводить залежність середнього об'єму поверхневої води V_Σ ($м^3$) від середнього об'єму опадів V_V ($м^3$) як [9]

$$V_\Sigma = k_{V\Sigma} V_V + \varepsilon_\Sigma , \qquad (1)$$

де $k_{V\Sigma}$ - безрозмірний коефіцієнт, ε_Σ - імовірнісне відхилення від середніх значень, які розраховані за V_{max}.

Аналогічна залежність для об'ємної витрати потоку поверхневої води Q_Σ ($м^3/с$) можна записати як

$$Q_\Sigma = k_{V\Sigma} Q_V \frac{T_V}{T_\Sigma} + \varepsilon_Q , \qquad (2)$$

де T_V, T_Σ - тривалості опаду і поверхневого стоку, які бувають різними, Q_V і ε_Q - аналогічні значення для об'ємної витрати [9].

Маса забруднень M_Σ (кг) у поверхневих водах після опаду розраховується як

$$M_\Sigma = C_V V_V + \varepsilon_M , \qquad (3)$$

де C_V ($кг/м^3$) - концентрація забруднень у поверхневих водах, ε_M - аналог значень в (1),(2).

На урбаністичних територіях опади змивають як транспортні забруднення (паливо,

[1] https://www.wri.org/

[2] http://kharkiv.meteo.gov.ua/

[3] World Meteorological Organisation (WMO), https://public.wmo.int

масла, важкі метали та ін.), так і сільськогосподарські (добрива, нітрати, нітрити та ін.), а також можуть викликати переповнення стоків та попадання стічних вод до поверхневих, що є небезпечним для якості як питних, так і технічних вод [2,3,9]. Прийняття рішень проводиться після оцінки значень $V_\Sigma, Q_\Sigma, M_\Sigma$ у порівнянні з об'ємами резервних можливостей місцевих стоків. Значення $k_{V\Sigma}$ отримують з регресійних залежностей для даної місцевості, значення V_V, T_V, T_Σ, C_V - шляхом вимірювань, а значення $\varepsilon_\Sigma, \varepsilon_Q, \varepsilon_M$ - з імовірнісних моделей.

2.2. Імовірнісні моделі. Такі моделі базуються на визначенні імовірності розподілу поверхневого стоку $\{V_\Sigma, Q_\Sigma\}(t,x,y,z)$ від заданого «точкового» джерела опадів $\{V_V, Q_V\}(t, x_j, y_j, z_j)_{j=1}^n$ на визначеній території $\{\Sigma : x \in [x_1, x_2]; y \in [y_1, y_2]; z \in [z_1, z_2]\}$. Звичайні дощі, зливи, гради та ін. опади мають розподілений характер, що потребує визначення просторово-часових функцій $\{V_V, Q_V\}(t,x,y,z)$ від всіх розподілених джерел $j = 1,...,n$.

Один із методів заснований на стохастичному перенесенні шторму (stochastic storm transposition, SST), який поєднує в собі імовірності «прибуття», «накопичення» і «перенесення» опадів навіть на території, яка лежить поза зоною опаду, але має поверхневий стік від неї, з використанням теорем теорії імовірностей. Метод SST припускає, що шторми трапляються з однаковою імовірністю в будь-якій точці в області транспозиції. Імовірність того, що дана площа опадів (Σ) з певним водозбором буде перевантажена опадами, враховує локалізацію штормових центрів, які призвели до перевищення кількості опадів в околиці Σ. Імовірність цієї події обчислюється як відношення площини опаду до площини області транспозиції, яка оцінюється шляхом нормального розподілення транспозиції на велику кількість клітин сітки на площині Σ та біля неї [10]. Другий метод, який заснований на «стохастичній регресії шторму» (stochastic storm regression, SSR), поєднує криві частоти точкових опадів з оцінками регресії місцевих і накопичених опадів на області Σ. Максимуми опадів генеруються шляхом стохастичної вибірки незалежних змінних, де необхідні імовірності перевищення рівня опадів отримуються за допомогою теореми про загальну імовірність [11].

Багато моделей, які узагальнюють методи SST і SSR, були запропоновані в 1990-2020 рр. [9]. Згідно з імовірнісними моделями, для V_Σ замість (1) маємо

$$V_\Sigma = \sum_{j=1}^{k} k_j V_{Vj} + \varepsilon_\Sigma, \quad (4)$$

де k_j - регресійні коефіцієнти для найбільш імовірних та впливових опадів $j = 1,...,k$ (prime key sites, PKS); аналогічні узагальнення можна записати і замість (2), (3).

Крива частоти опадів на території ареалу виводиться з використанням загальної теореми теорії імовірностей, в якій імовірність того, що певна кількість опадів V_Σ на території Σ дорівнює або перевищує V*, зумовлюється імовірністю точкової кількості опадів на ключовій ділянці у вигляді [9]:

$$P(V_\Sigma \geq V^*) = \sum_{j=1}^{k} P(V_\Sigma \geq V^* \mid V_{\Sigma j}) \cdot P(V_{\Sigma j}). \quad (5)$$

Параметри в (5) піддаються епістемічній невизначеності, яка виникає внаслідок скінченного характеру наявних даних. Цю невизначеність можна охарактеризувати за допомогою параметричного bootstrap методу, а невизначеність у кореляції між максимумами опадів на ділянках PKS базується на припущенні, що перетворення коефіцієнта кореляції вибірки розподіляється зі стандартною похибкою [12]. З цією метою відношення, які використовуються для представлення гідрологічної варіабельності, самі випадково відбираються для відображення невизначеності, яка пов'язана з їх параметризацією.

Імовірність того, що середня кількість опадів V_Σ перевищує передбачену кількість V^*, може бути оцінена за допомогою загального інтегралу [10,12]

$$P(V_\Sigma \geq V^*) = \int_f P(V_\Sigma \geq V^* \mid f) \int_{As} p(f \mid A_s) p(A_s)\, dA_s\, df, \quad (6)$$

де f - глибина опадів шторму з площиною As; $P(V_\Sigma \geq V^* \mid f)$ - умовна імовірність того, що середня водозбірна кількість опадів є V_Σ V*, враховуючи нерозмірну глибину f; $p(f \mid A_s)$ - густина імовірності шторму на площі A_s в зоні переносу з глибиною f; p(As) - функція густини імовірності зразків штормових зон (вважається рівномірною).

Таким чином, статистичні дані про розподіл дощів за інтенсивністю та тривалістю вздовж сітки, побудованої на області , є основними вхідними даними для обох методів SST і SSR. Стандартизація та bias-корекція упередженості сіток з опадами проводиться регресійними і імовірнісними методами паралельно.

3. Результати математичного моделювання для статистичних даних Харківської області.

Дані метеорологічних спостережень за атмосферними опадами на довільних територіях доступні з відкритих джерел[4] і, як показують статистичні результати, такі дані потребують баєсовської фільтрації для усунення небажаних трендів [6-9]. В якості приклада необроблені та оброблені з використанням баєсівської фільтрації дані по Харківській області за 2000-2015 рр. у вигляді залежностей між гідрометеорологічним прогнозом опадів (мм) різними станціями (ThData) і виміряними після опаду (ExpData) наведені на Рис.2а,б. Видно, що після обробки баєсовським фільтром лінія тренду (регресійна залежність) позбувається невірного похилу, стає чіткішою і має значно меншу дисперсію ніж необроблена. Дисперсія даних на Рис.2б залежить від площини опаду; прогнозування точніше для менших площин.

Для обробки даних вимірювань ExpData використовуються наближення різними функціями розподілення ймовірностей (PDF, Probability Distribution Function) кількості опадів V, а саме Gamma, Lognormal, Normal, Weibull, Gumbel, Gumbel$^+$ моделі [5] відповідно:

$$F(V,\alpha,\beta,\zeta)=\begin{cases} |\beta|\left(\beta(V-\zeta)\right)^{\alpha-1}e^{-\beta(V-\zeta)}/\Gamma\alpha, \\ -\left|\log(V-\zeta)-\beta\right|^2/2\zeta^2\sqrt{2\pi\zeta(V-\zeta)}, \\ e^{(V-\beta)^2/2\alpha^2}/\alpha\sqrt{2\pi}, \\ (\zeta-1)e^{(V-\alpha)/\beta}/\alpha, \\ \left(e^{-(V-\zeta)/\alpha}/\exp(e^{-(V-\zeta)/\alpha})\right)/\alpha, \\ e^{-((1-\beta(V-\zeta)/\alpha)/\beta)}, \end{cases} \quad (2)$$

де Γ – гамма-функція, α,β,ζ - параметри.

[4] WMO Weather Stations https://www.arcgis.com/, WorldClim|Data Basin https://databasin.org/, worldweather.wmo.int/

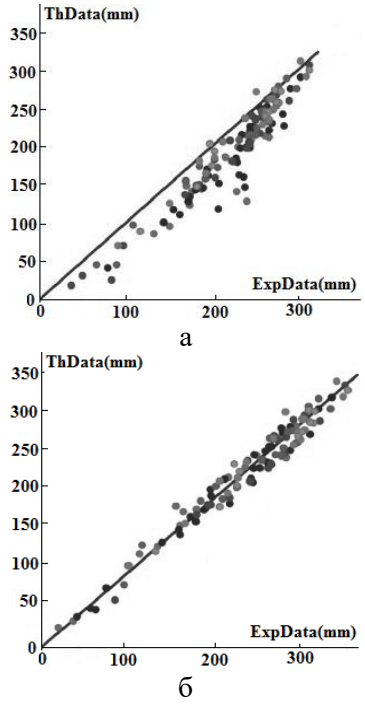


Рис.2. Статистичні розподілення Th/ExpData для початкових (а) та оброблених з bias (б) даних по Харківський області за 2000-2015 рр.

Для кожної з імовірнісної апроксимації (2) можна обчислити для кількості опадів, об'ємної швидкості, і т.д. функцію вірогідності (likelihood function, LHF) як $LHF=\sum_{j=1}^{n}\ln(F_j(V,\alpha,\beta,\zeta))$, де n – число спостережень. Апроксимації (2) для значень кількості h(мм) і об'ємної витрати Q(м^3/с) опадів, середньої температури T(C) та ін. показників проводилися для кожної з формул (2) шляхом підбору параметрів α,β,ζ методом найменших квадратів. Результати апроксимацій наведені на Рис.3 для залежності LHF(Q).

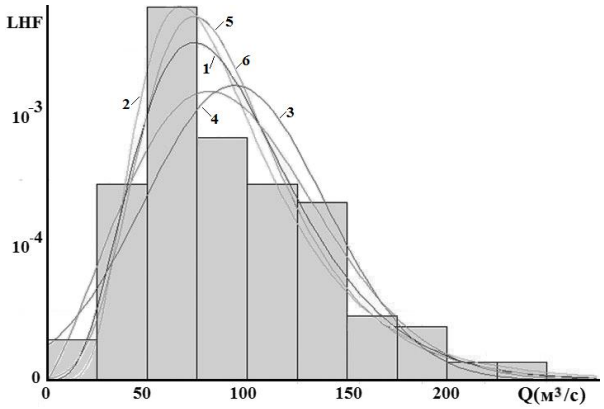


Рис.3. Залежності LHF(Q) ті їх апроксимації функціями Gamma (1), Lognormal (2), Normal (3), Weibull (4), Gumbel (5), Gumbel$^+$(6).

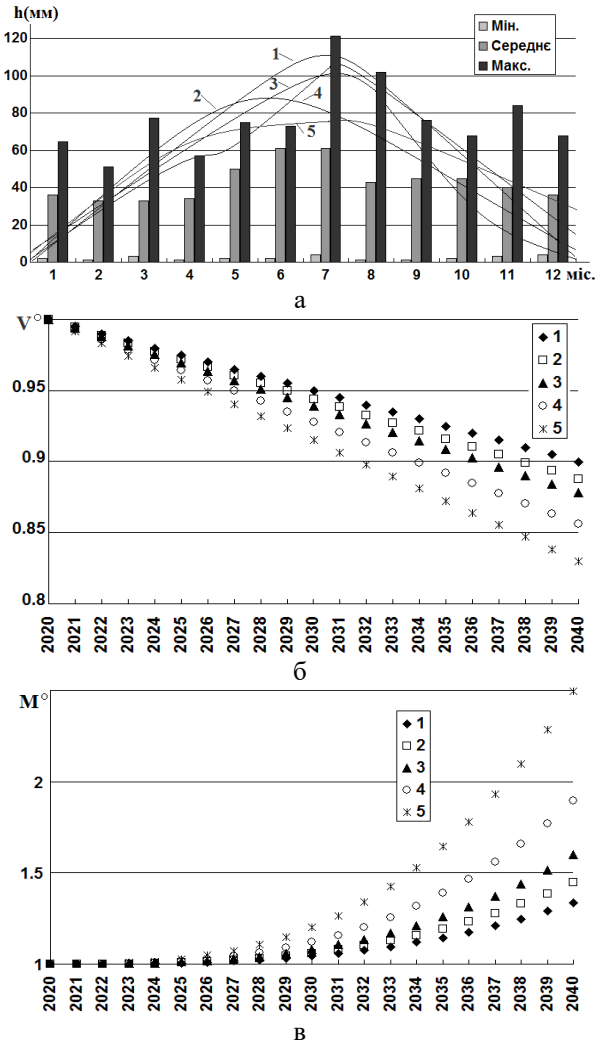


Рис.4. Валідація моделі та прогнози залежностей $h(t)$ (а), $V_V(t)$ (б), $Q_V(t)$, $Q_\Sigma(t)$ (в); криві 1-5 відповідають підвищенням температури на 0.5;1;1.5;2;2.5°C; кольори позначають мінімальні, середні та максимальні значення відповідних змінних.

Далі отримані імовірнісні наближення були використані для прогнозування імовірностей посух, повеней та їх наслідків у вигляді підйому рівня забруднень у поверхневих водах шляхом використання регресійно-імовірнісних моделей (1)-(6) для значень $V_V, V_\Sigma, Q_V, Q_\Sigma, M_\Sigma$. Кілька різних імовірнісних прогнозів потеплення клімату до 2040 р. (на 0.5;1;1.5;2;2.5°C) [2,3] були розглянуті. Результати моделювання у вигляді прогнозованих кривих $h(t), V^\circ(t) = V_V / V^*$, $M^\circ = M_\Sigma / M^*$, де V^*, M^* - дані за 2020р., наведені на Рис.4а-в відповідно.

Результати показують, що в найгіршим сценарії зміни клімату об'єм доступної води зменшиться майже на 20% (Рис.4б), а її забрудненість значно підвищиться (Рис.4в). Значні відміни в мінімальних, середніх та максимальних кількостях опадів (Рис.4а) в різні сезони, які теж пов'язані з нестійкістю клімату, не дають можливості точніших прогнозів і потребують ускладнення використаної математичної моделі, що буде зроблено в подальшій роботі.

4. Висновки.

Таким чином, в результаті статистичної обробки метеоданих з відкритих джерел було показано, що на всій території України спостерігається поступове підвищення середньої, максимальної і мінімальної температури повітря. Відповідні зміни рівня опадів не такі однозначні і мають значну варіабельність: від раптових затяжних злив до довгих періодів посухи. Регресійно-імовірнісні моделі являють собою корисний математичний інструмент для аналізу даних спостережень, апроксимації їх імовірнісними функціями з подальшим використанням в аналітичному вигляді в математичних моделях, які дозволяють обґрунтовано прогнозувати можливу недостачу питної води у разі посухи, недостатні потужності дамб і стічної системи у разі повеней, а також небезпечне поступове підвищення рівню забруднень у відкритих джерелах води. Це дозволяє своєчасно приймати рішення і проводити відповідні заходи на рівні області, краю, міста і т.д.

Побудовані та перевірені регресійно-імовірнісні моделі, а отримані завдяки ним результати будуть використані в подальшій розробці інформаційної системи моніторингу якості води і менеджменту водними ресурсами [2,3] на урбанізованих, сільськогосподарських і індустріальних територіях областей України.

Список використаних джерел

1. *Causes, Impacts and Solutions to Global Warming* / I. Dincer, C.O. Colpan, F. Kadioglu (eds.), Springer, 2013. 1185 p.

2. Кізілова Н.М., Ричак Н.Л., Чебукін Д.С., Лукієнко М.В. Екологічна оцінка якості поверхневих вод у бездощовий період в умовах міського водозбору. // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна, сер. «Геологія. Географія. Екологія». – 2020. – N53. – С.

3. Кізілова Н.М., Ричак Н.Л., Руднєв Ю.І. Підхід системної динаміки до контролю за якістю води на урбанізованих територіях. // Системи обробки інформації. – 2019. – N4(159). – С.87–92. doi:10.30748/soi.2019. 159.10
4. Mamman M.J., Martins O.Y., Ibrahim J., Shaba M.I. Evaluation of Best-Fit Probability Distribution Models for the Prediction of Inflows of Kainji Reservoir, Niger State, Nigeria. // Air, Soil and Water Research. – 2017. – Vol.10, – P. 1–7 doi:201710.1177/117862211
5. Langat P.K., Kumar L., Koech R. Identification of the most suitable probability distribution models for maximum, minimum, and mean streamflow. // Water. – 2019. – Vol. 11. - P. 734-741. doi:10.3390/w11040734
6. Sordo-Ward Á., Granados I., Martín-Carrasco F., Garrote L. Impact of hydrological uncertainty on water management decisions. // Water Resourses Management. – 2016. – Vol. 30(14). – P.323-339. doi:10.1007/s11269-016-1505-5
7. Balabukh V., Lavrynenko O., Bilaniuk V., et al. *Extreme Weather Events in Ukraine: Occurrence and Change.* / P.J. Sallis, ed. Intech Open, 2018. – 228 p. doi:10.5772/i77306
8. Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В. *Метрические характеристики случайных величин и процессов*, К.: ТВіМС. – 1998. – 290 с.
9. Nathan R., Jordan P., Scorah M., et al. Estimating the exceedance probability of extreme rainfalls up to the probable maximum precipitation. // Journal of Hydrology. – 2016. – Vol. 543. – С. 706–720. doi: 10.1016/j.jhydrol. 2016.10.044
10. Foufoula-Georgiou E. A probabilistic storm transposition for estimating exceedance probabilities of extreme precipitation depths. // Water Resourses Research. – 1989. – Vol. 25(5). - P. 799–815. doi: 10.1029/WR025i00
11. Schaefer M.G. Regional analysis of precipitation annual maxima in Washington State. Water Resourses Research. – 1990. – Vol. 26. – P. 119–131. doi: 10.1029/WR026i001p00119
12. Yevjevich V. *Probability and Statistics in Hydrology*. Water resources Publ., Colorado, USA. - 1984. – 312 p.

References

1. *Causes, Impacts and Solutions to Global Warming* (2013) / I. DINCER, C.O. COLPAN, F. KADIOGLU (eds.), Springer.

2. KIZILOVA N.N., RYCHAK N.L., CHEBUKIN D.S., LUKIJENKO M.V. (2020) Ecological assessment of surface water quality in the rainless period in the conditions of urban catchment. *Visnyk of V.N. Karazin Kharkov National University, Ser. «Geology. Geography. Ecology»*. Vol. 53. p.

3. KIZILOVA N.N., RYCHAK N.L., RUDNEV Y.I. (2019) The system dynamics approach to water quality control in urban areas. *Systems of information treatment*. Vol. 4(159). p.87–92. doi:10.30748/soi.2019. 159.10

4. MAMMAN M.J., MARTINS O.Y., IBRAHIM J., SHABA M.I. (2017) Evaluation of Best-Fit Probability Distribution Models for the Prediction of Inflows of Kainji Reservoir, Niger State, Nigeria. *Air, Soil and Water Research*. Vol.10. P. 1–7 doi:201710.1177/1178

5. LANGAT P.K., KUMAR L., KOECH R. (2019) Identification of the Most Suitable Probability Distribution Models for Maximum, Minimum, and Mean Streamflow. *Water*. Vol. 11. p. 734-741. doi:10.3390/w11040734

6. SORDO-WARD Á., GRANADOS I., MARTÍN-CARRASCO F., GARROTE L. (2016) Impact of Hydrological Uncertainty on Water Management Decisions. *Water Resourses Management*. Vol. 30(14). p. 323-339. doi:10.1007/s11269-016-1505-5

7. BALABUKH V., LAVRYNENKO O., BILANIUK V., et al. *Extreme Weather Events in Ukraine: Occurrence and Change*. / P.J. Sallis, ed. Intech Open, 2018. – 228 p. doi:10.5772/intechopen.77306

8. BULDYGIN V.V., KOZACHENKO Y.V. (1998) *Metric characteristics of random variables and processes*, K.: TBiMC. 290 p.

9. NATHAN R., JORDAN P., SCORAH M., et al. (2016) Estimating the exceedance probability of extreme rainfalls up to the probable maximum precipitation. *Journal of Hydrology*. Vol. 543. p. 706–720. doi: 10.1016/j.jhydrol. 2016.10.044

10. FOUFOULA-GEORGIOU E. A. (1989) probabilistic storm transposition for estimating exceedance probabilities of extreme precipitation depths. *Water Resourses Research*. Vol. 25(5). p. 799–815. doi: 10.1029/WR025i005p00799

11. SCHAEFER M.G. (1990) Regional analysis of precipitation annual maxima in Washington State. *Water Resourses Research*. Vol. 26. p. 119–131. doi: 10.1029/WR026i001p

12. YEVJEVICH V. (1984) *Probability and Statistics in Hydrology*. Water resources Publ., Colorado, USA. 312 p.

Надійшла до редколегії 6.11.2020 р.

УДК 517.946

https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/4.4

О. І. Когутич[1], *аспірантка*
В. В. Маринець[2], *д-р фіз.-мат. наук, професор*

Характеристична задача Коші з передісторією у випадку нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних

[1] Ужгородський національний університет, 88000, м. Ужгород, вул. Університетська, 14
e-mail: oksanakogutych97@gmail.com
[2] Ужгородський національний університет, 88000, м. Ужгород, вул. Університетська, 14
e-mail: vasyl.marynets@uzhnu.edu.ua

O. I. Kohutych[1], *PhD student*
V. V. Marynets[2], *Dr. Sc. (Phys.- Math.), Prof.*

Characteristic Cauchy's problem with prehistory in the case of nonlinear differential equations in partial derivatives

[1]Uzhhorod National University, 88000, Uzhhorod, Universytetska str., 14
e-mail: oksanakogutych97@gmail.com
[2]Uzhhorod National University, 88000, Uzhhorod, Universytetska str., 14
e-mail: vasyl.marynets@uzhnu.edu.ua

Будується конструктивний метод дослідження та наближеного розв'язання нелінійної задачі Гурса з передісторією. Одержано достатні умови існування, єдиності та знакосталості розв'язку розглядуваної задачі.

Ключові слова: двосторонній метод, достатні умови, «вільна» крива, характеристична задача Коші з передісторією.

We have built a constructive method of investigation and approximate solution for nonlinear Gursa's problem with prehistory. We have established sufficient condition of subsistence, existence of unity and constant signs solution of the investigated problem. At mathematical description to different nature process (gas sorption, the spread of moisture in the porous substances, pipes heating by a stream of hot water, drying by the airflow, etc. [1]) we often come to boundary value problems for nonlinear differential equations in partial derivatives, when not all output data are known, that is some of them need to be found from auxiliary nonlinear problems, which are mathematical models of processes that proceeded the research. These problems should be named as problems with prehistory. One approach to investigation and approximate solution to such a problem has been proposed in the current paper.

Key Words: two-sided method, sufficient conditions, «free» curves, characteristic Cauchy's problem with prehistory.

Нехай на площині xOy задана область $D = D_1 \cup D_2$, де $D_1 = \{(x,y) \mid x \in [x_0, x_1], y \in (g(x), y_0]\}$, $D_2 = \{(x,y) \mid x \in (x_0, x_1], y \in (y_0, y_1]\}$, а $y = g(x)$ $(x = \kappa(y))$ – «вільна» крива і $g'(x) < 0$, $g(x_0) = y_0$, $g(x_1) = y_0 - \alpha$, $\alpha > 0$ – const.

Постановка задачі: у просторі функцій $C^*(\overline{D}_2) := C^{(1.1)}(D_2) \cap C(\overline{D}_2)$ знайти розв'язок нелінійного ДРЧП [2]

$$D^{(1.1)}U_2(x,y) = f_2\left(x, y, U_2(x,y), D^{(1.0)}U_2(x,y),\ \ D^{(0.1)}U_2(x,y)\right) := f_2\left[U_2(x,y)\right], \tag{1}$$

який задовольняє умови

$$\begin{aligned} U_2(x_0, y) &= \varphi(y),\ y \in [y_0, y_1], \\ U_2(x, y_0) &= U_1(x, y_0),\ x \in [x_0, x_1], \end{aligned} \tag{2}$$

де $U_1(x,y) \in C^*(\overline{D}_1)$ є розв'язком задачі Коші.

$$\begin{aligned} D^{(1.1)}U_1(x,y) &= f_1(x, y, U_1(x,y), \\ D^{(1.0)}U_1(x,y), D^{(0.1)}U_1(x,y)) &:= \\ &= f_1[U_1(x,y)], \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} U_1(x, g(x)) &= \varphi_1(x), \\ D^{(0.1)}U_1(x, g(x)) &= \psi(x), x \in [x_0, x_1], \end{aligned} \tag{4}$$

причому виконується умова узгодженості

$$\varphi(y_0) = \varphi_1(x_0). \tag{5}$$

Надалі будемо вважати, що функції $f_i\left[U_i(x,y)\right] \in C(\overline{B}_i)$, $f_i : \overline{B}_i \to \mathbb{R}$, $\overline{B}_i \in \mathbb{R}^5$, $\Pr_{xOy}\overline{B}_i = \overline{D}_i$, $i = 1, 2$, а задані функції

© О.І. Когутич, В.В. Маринець, 2021

у вихідних даних (2), (4) $\varphi(y) \in C^1[y_0, y_1]$, $\varphi_1(x) \in C^1[x_0, x_1]$, $\psi(x) \in C[x_0, x_1]$.

Інтегруючи рівняння (1) в області $\overline{D}_2$ по x від x_0 до x і по y від y_0 до y, враховуючи умови (2), а рівняння (3) в області $\overline{D}_1$ по y в межах від $g(x)$ до y та по x від x_0 до x і, врахувавши умови (4), легко переконатися у справедливості наступної леми.

Лема 1. *Нехай $f_i[U_i(x,y)] \in C(\overline{B}_i)$. Тоді задача (1)—(5) і система інтегродиференціальних рівнянь*

$$U_i(x,y) = \Phi_i(x,y) + \varepsilon_i T_{1,i} f_1[U_1(\xi,\eta)] + \\ + T_i f_i[U_i(\xi,\eta)], (x,y) \in \overline{D}_i, i = 1,2, \tag{6}$$

де $\varepsilon_i = \begin{cases} 0, & \text{при } i = 1, \\ 1, & \text{при } i = 2, \end{cases}$

$$\Phi_1(x,y) := \varphi_1(x) - \int_{\kappa(y)}^{x} g'(\xi)\psi(\xi)d\xi \times$$

$$\times T_1 f_1[U_1(\xi,\eta)] := \int_{\kappa(y)}^{x}\int_{g(\xi)}^{y} f_1[U_1(\xi,\eta)]d\eta d\xi,$$

$$\Phi_2(x,y) := \varphi(y) - \varphi(y_0) + \varphi_1(x) - \int_{x_0}^{x} g'(\xi) \times \\ \times \psi(\xi)d\xi,$$

$$T_{1,2} f_1[U_1(\xi,\eta)] := \int_{x_0}^{x}\int_{g(\xi)}^{y_0} f_1[U_1(\xi,\eta)]d\eta d\xi,$$

$$T_2 f_2[U_2(\xi,\eta)] := \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f_2[U_2(\xi,\eta)]d\eta d\xi,$$

є еквівалентними.

Означення 1. Будемо вважати, що функції $f_i[U_i(x,y)] \in C_1(\overline{B}_i)$, якщо вони задовольняють наступні умови [3, 4]:

1) $f_i[U_i(x,y)] \in C(\overline{B}_i)$, $i = 1,2$;

2) у просторі функцій $C(\overline{B}_{1,i})$, $\overline{B}_{1,i} \in \mathbb{R}^8$, $\Pi p_{xOy}\overline{B}_{1,i} = \overline{D}_i, i = 1,2$, існують такі функції $H_i\left(x, y, z_i(x,y), D^{(1.0)}z_i(x,y), D^{(0.1)}z_i(x,y); v_i(x,y), D^{(1.0)}v_i(x,y), D^{(0.1)}v_i(x,y)\right) := = H_i[z_i(x,y); v_i(x,y)]$, $z_i(x,y), v_i(x,y) \in \overline{B}_{1,i}$ і є неперервно диференційовними, що $\forall U_i(x,y) \in C^1(\overline{D}_i)$:

   (a) $H_i[U_i(x,y); U_i(x,y)] \equiv f_i[U_i(x,y)]$, $(x,y) \in \overline{D}_i$, $i = 1,2$, $U_i(x,y) \in \overline{B}_{1,i}$,

   (b) для всяких неперевно диференційовних пар функцій $z_i(x,y)$, $v_i(x,y) \in \overline{B}_{1,i}$, які задовольняють умови $D^{(\kappa,s)}z_i(x,y) \geqslant D^{(\kappa,s)}V_i(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}_i$, $i = 1,2$, $\kappa = 0,1$, $s = 0,1$, $\kappa + s < 2$, в області $\overline{B}_{1,i}$ виконуються нерівності

$$H_i[z_i(x,y); v_i(x,y)] \geqslant \\ \geqslant H_i[v_i(x,y); z_i(x,y)], \\ (x,y) \in \overline{D}_i, \tag{7}$$

3) неперервні функції $H_i[z_i(x,y); v_i(x,y)]$ в області $\overline{B}_{1,i}$ задовольняють умову Ліпшиця, тобто для всяких з простору $C^1(\overline{D}_i)$ функцій $z_{i,r}(x,y), v_{i,r}(x,y) \in \overline{B}_{1,i}, r = 1,2$, виконуються умови

$$|H_i[z_{i,1}(x,y); z_{i,2}(x,y)] - \\ - H_i[v_{i,1}(x,y); v_{i,2}(x,y)]| \leqslant \\ \leqslant L_i \sum_{r=1}^{2} \left(|w_{i,r}(x,y)| + \right. \\ \left. + \left|D^{(1.0)}w_{i,r}(x,y)\right| + \left|D^{(0.1)}w_{i,r}(x,y)\right|\right),$$

де L_i—сталі Ліпшиця, $w_{i,r}(x,y) = z_{i,r}(x,y) - v_{i,r}(x,y)$, $i = 1,2$.

Зауважимо, якщо функції $f_i[U_i(x,y)] \in C(\overline{B}_i)$ і мають в області $\overline{B}_i$ обмежені частинні похідні першого порядку по всім своїм аргументам, розпочинаючи із третього, то вони завжди належать просторові $C_1(\overline{B}_i)$. Зворотнє твердження не справедливе.

Нехай функції $z_{i,p}(x,y), v_{i,p}(x,y) \in C^*(\overline{D}_i)$, належать області $\overline{B}_{1,i}, i = 1,2, p \in \mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Введемо позначення:

$$W_{i,p}(x,y) := z_{i,p}(x,y) - v_{i,p}(x,y), \\ f_i^p(x,y) := H_i[z_{i,p}(x,y); v_{i,p}(x,y)], \\ f_{i,p}(x,y) := H_i[v_{i,p}(x,y); z_{i,p}(x,y)]$$

$$\alpha_{i,p}(x,y) := z_{i,p}(x,y) - \Phi_i(x,y) - \varepsilon_i \times \\ \times T_{1,i} f_1^p(\xi,\eta) - T_i f_i^p(\xi,\eta) := z_{i,p}(x,y) - \\ - R_i^p(x,y), \\ \beta_{i,p}(x,y) := v_{i,p}(x,y) - \Phi_i(x,y) - \varepsilon_i \times \\ \times T_{1,i} f_{1,p}(\xi,\eta) - T_i f_{i,p}(\xi,\eta) := v_{i,p}(x,y) - \\ - R_{i,p}(x,y), \tag{8}$$

$$
\begin{gathered}
D^{(\kappa,s)}\overline{z}_{i,p}(x,y) := D^{(\kappa,s)}z_{i,p}(x,y)- \\
-q_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y)D^{(\kappa,s)}w_{i,p}(x,y), \\
D^{(\kappa,s)}\overline{v}_{i,p}(x,y) := D^{(\kappa,s)}v_{i,p}(x,y)+ \\
+c_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y)D^{(\kappa,s)}w_{i,p}(x,y), \\
\kappa,s=0,1,\kappa+s<2, i=1,2, p\in\mathbb{N}_0, \\
F_i^p(x,y) := H_i[\overline{z}_{i,p}(x,y);\overline{v}_{i,p}(x,y)], \\
F_{i,p}(x,y) := H_i[\overline{v}_{i,p}(x,y);\overline{z}_{i,p}(x,y)], \\
\overline{R}_i^p(x,y) := \Phi_i(x,y)+\varepsilon_i T_{1,i}F_1^p(\xi,\eta)+ \\
+T_iF_i^p(\xi,\eta), \\
\overline{R}_{i,p}(x,y) := \Phi_i(x,y)+\varepsilon_i T_{1,i}F_{1,p}(\xi,\eta)+ \\
+T_iF_{i,p}(\xi,\eta), \\
\overline{\alpha}_{i,p}(x,y) := z_{i,p}(x,y)-\overline{R}_i^p(x,y), \\
\overline{\beta}_{i,p}(x,y) := v_{i,p}(x,y)-\overline{R}_{i,p}(x,y),
\end{gathered}
\tag{9}
$$

де $q_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y)$ та $c_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y)$ є довільними із простору $C(\overline{D}_s)$ функціями, які задовольняють умови

$$
\begin{gathered}
0\leqslant q_{i,p}^{\kappa,s}(x,y)\leqslant 0,5, \\
0\leqslant c_{i,p}^{\kappa,s}(x,y)\leqslant 0,5, \\
p\in\mathbb{N}_0,(x,y)\in\overline{D}_i, \\
\kappa,s=0,1,\kappa+s<2.
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Побудуємо послідовності функцій $\{z_{i,p}(x,y)\}$ та $\{v_{i,p}(x,y)\}$ згідно закону [5, 6]

$$
\begin{gathered}
z_{i,p+1}(x,y)=\overline{R}_i^p(x,y), \\
v_{i,p+1}(x,y)=\overline{R}_{i,p}(x,y), \\
(x,y)\in\overline{D}_i,
\end{gathered}
\tag{11}
$$

де за нульове наближення $z_{i,0}(x,y)$, $v_{i,0}(x,y)\in\overline{B}_{1,i}$ вибираємо довільні із простору $C^*(\overline{D}_i)$ функції, які при $(x,y)\in\overline{D}_i$ задовольняють умови

$$
\begin{gathered}
D^{(\kappa,s)}w_{i,0}(x,y)\geqslant 0, D^{(\kappa,s)}\alpha_{i,0}(x,y)\geqslant 0, \\
D^{(\kappa,s)}\beta_{i,0}(x,y)\leqslant 0,(x,y)\in\overline{D}_i, i=1,2.
\end{gathered}
\tag{12}
$$

Означення 2. Функції $z_{i,0}(x,y)$, $v_{i,0}(x,y)\in C^*\overline{D}_i$, які належать області $\overline{B}_{1,i}$ і задовольняють умови (12), називаються функціями порівняння крайової задачі (1)—(5).

Із (8), (9), (11) маємо:

$$
\begin{gathered}
D^{(\kappa,s)}\left[z_{i,p}(x,y)-z_{i,p+1}(x,y)\right]= \\
=D^{(\kappa,s)}\alpha_{i,p}(x,y)+D^{(\kappa,s)}\{\varepsilon_i\times \\
\times T_{1,i}\left[f_1^p(\xi,\eta)-F_1^p(\xi,\eta)\right]+ \\
+T_i\left[f_i^p(\xi,\eta)-F_i^p(\xi,\eta)\right]\} \\
D^{(\kappa,s)}\left[v_{i,p}(x,y)-v_{i,p+1}(x,y)\right]= \\
=D^{(\kappa,s)}\beta_{i,p}(x,y)+D^{(\kappa,s)}\{\varepsilon_i\times \\
\times T_{1,i}\left[f_{1,p}(\xi,\eta)-F_{1,p}(\xi,\eta)\right]+ \\
T_i\left[f_{i,p}(\xi,\eta)-F_{i,p}(\xi,\eta)\right]\}
\end{gathered}
\tag{13}
$$

$$
\begin{gathered}
D^{(\kappa,s)}w_{i,p+1}(x,y)=D^{(\kappa,s)}\left[\overline{R}_i^p(x,y)- \right. \\
\left.-\overline{R}_{i,p}(x,y)\right],
\end{gathered}
\tag{14}
$$

$$
\begin{gathered}
D^{(\kappa,s)}\alpha_{i,p+1}(x,y)=D^{(\kappa,s)}\left[\overline{R}_i^p(x,y)- \right. \\
\left.-R_i^{p+1}(x,y)\right], \\
D^{(\kappa,s)}\beta_{i,p+1}(x,y)=D^{(\kappa,s)}\left[\overline{R}_{i,p}(x,y)- \right. \\
\left.-R_{i,p+1}(x,y)\right], \\
p\in\mathbb{N}_0,(x,y)\in\overline{D}_i, i=1,2,\kappa,s=0,1, \\
\kappa+s<2.
\end{gathered}
\tag{15}
$$

Відмітимо, що в силу (10)

$$
\begin{gathered}
D^{(\kappa,s)}v_{i,0}(x,y)\leqslant D^{(\kappa,s)}\overline{v}_{i,0}(x,y)\leqslant \\
\leqslant D^{(\kappa,s)}\overline{z}_{i,0}(x,y)\leqslant D^{(\kappa,s)}z_{i,0}(x,y),
\end{gathered}
$$

тобто, якщо $z_{i,0}(x,y), v_{i,0}(x,y)\in\overline{B}_{1,i}$, то і $\overline{z}_{i,0}(x,y)$ та $\overline{v}_{i,0}(x,y)$ також належать цій області.

Приймаючи до уваги (10), (12), (13)—(15), методом математичної індукції переконуємось, що якщо на кожному кроці ітерації (11) функції $q_{i,p}(x,y), c_{i,p}(x,y)$, які задовольняють умови (10), вибирати таким чином, щоб виконувалися нерівності

$$
\begin{gathered}
D^{(\kappa,s)}\left[z_{i,p}(x,y)-z_{i,p+1}(x,y)\right]- \\
-q_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y)D^{(\kappa,s)}w_{i,p}(x,y)\geqslant 0, \\
D^{(\kappa,s)}\left[v_{i,p}(x,y)-v_{i,p+1}(x,y)\right]+ \\
+c_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y)D^{(\kappa,s)}w_{i,p}(x,y)\leqslant 0, \\
(x,y)\in\overline{D}_i, i=1,2,\kappa,s=0,1, \\
\kappa+s<2,
\end{gathered}
\tag{16}
$$

то для довільних $p\in\mathbb{N}$ матимемо

$$
\begin{gathered}
D^{(\kappa,s)}v_{i,p}(x,y)\leqslant D^{(\kappa,s)}v_{i,p+1}(x,y)\leqslant \\
\leqslant D^{(\kappa,s)}z_{i,p+1}(x,y)\leqslant D^{(\kappa,s)}z_{i,p}(x,y), \\
D^{(\kappa,s)}\alpha_{i,p}(x,y)\geqslant 0, D^{(\kappa,s)}\beta_{i,p}(x,y)\leqslant 0, \\
\kappa,s=0,1,(x,y)\in\overline{D}_i, i=1,2.
\end{gathered}
\tag{17}
$$

Лема 2. *Якщо функції $f_i[U_i(x,y)]\in C_1(\overline{B}_i)$ та існують функції порівняння задачі (1)—(5), то множина функцій $q_{i,p}(x,y), c_{i,p}(x,y)$, які задовольняють умови (10), (16) не порожня.*

Доведення. Дійсно покладемо

$$q_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{D^{(\kappa,s)}\alpha_{i,p}(x,y)}{D^{(\kappa,s)}\tau_{i,p}(x,y)} & \text{при} D^{(\kappa,s)}w_{i,p}(x,y)\neq 0,\\ 0 & \text{при } D^{(\kappa,s)}w_{i,p}(x,y)=0,\end{cases}$$

$$c_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y)=\begin{cases}-\dfrac{D^{(\kappa,s)}\beta_{i,p}(x,y)}{D^{(\kappa,s)}\tau_{i,p}(x,y)} & \text{при} D^{(\kappa,s)}w_{i,p}(x,y)\neq 0,\\ 0 & \text{при } D^{(\kappa,s)}w_{i,p}(x,y)=0,\end{cases} \tag{18}$$

$$\tau_{i,p}(x,y):=\alpha_{i,p}(x,y)-\beta_{i,p}(x,y)+W_{i,p}(x,y),$$

$$\kappa,s=0,1,\kappa+s<2,(x,y)\in\overline{D}_i,i=1,2,p\in\mathbb{N}_0.$$

Функції $q_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y)$ та $c_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y)$ визначені згідно (18) задовольняють умови (10), а

$$\begin{gathered}D^{(\kappa,s)}\left[z_{i,p}(x,y)-z_{i,p+1}(x,y)\right]-\\ -q_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y)D^{(\kappa,s)}w_{i,p}(x,y)=\\ =D^{(\kappa,s)}\alpha_{i,p}(x,y)-q_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y)\times\\ \times D^{(\kappa,s)}w_{i,p}(x,y)+D^{(\kappa,s)}\left[R_i^p(x,y)-\right.\\ \left.-\overline{R}_i^p(x,y)\right]\geqslant D^{(\kappa,s)}\alpha_{i,p}(x,y)\times\\ \times\left(1-\frac{D^{(\kappa,s)}w_{i,p}(x,y)}{D^{(\kappa,s)}\tau_{i,p}(x,y)}\right)\geqslant 0\end{gathered}$$

для всіх $p\in\mathbb{N}_0$ та $(x,y)\in\overline{D}_i,i=1,2,\kappa,s=0,1,$ $\kappa+s<2$.

Аналогічно доводиться і друга із нерівностей (16), якщо $c_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y)$ вибирати згідно (18) і Лема 2 доведена. □

Таким чином справедлива наступна

Теорема 1. *Нехай функції $f_i[U_i(x,y)]\in C_1(\overline{B}_i)$ та існують функції порівняння задачі (1)—(5).*

Тоді для функцій $z_{i,p}(x,y),v_{i,p}(x,y)$ побудованих згідно закону (11), (12), де $q_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y)$, $c_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y)\in C(\overline{D}_i)$, $i=1,2$ задовольняють в області $\overline{B}_{1,i}$ умови (10), (16), справедливі нерівності (17) для всіх $p\in\mathbb{N}_0$ та $(x,y)\in\overline{D}_i,i=1,2$.

Введемо позначення:

$$\max_{i,\kappa,s}\sup_{\overline{D}_i}\left|D^{(\kappa,s)}w_{i,0}(x,y)\right|=d,\max_i L_i=l,$$

$$\max_{i,\kappa,s}\sup_{\overline{D}_i}\left(1-q_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y)-c_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y\right)\leqslant q,$$

$$\max\left\{1,\sup_{\overline{D}}(y-y_0+\alpha+x-x_0)\right\}=\gamma.$$

Тоді із (14) [7] неважко отримати оцінки

$$\left|D^{(\kappa,s)}w_{i,p}(x,y)\right|\leqslant\frac{A^p}{p!}d, \tag{19}$$

де $A:=6l\gamma q(y-y_0+\alpha+x-x_0)$.

Із оцінок (19) випливає, що

$$\lim_{p\to\infty}D^{(\kappa,s)}w_{i,p}(x,y)=0$$

для всіх $(x,y)\in\overline{D}_i,i=1,2,\kappa,s=0,1,\kappa+s<2$. Але тоді на підставі нерівностей (17)

$$\begin{gathered}\lim_{p\to\infty}D^{(\kappa,s)}z_{i,p}(x,y)=\lim_{p\to\infty}D^{(\kappa,s)}v_{i,p}(x,y):=\\ =U_i^{(\kappa,s)}(x,y).\end{gathered}$$

Очевидно

$$\begin{gathered}D^{(\kappa,s)}U_i^{(0,0)}(x,y):=D^{(\kappa,s)}U_i(x,y)=\\ =U_i^{(\kappa,s)}(x,y),\end{gathered}$$

де $U_i(x,y)\in C^*(\overline{D}_i)$ є розв'язком системи інтегродиференціальних рівнянь (6).

Теорема 2. *Нехай функції $f_i[U_i(x,y)]\in C_1(\overline{B}_i)$ та існують функції порівняння задачі (1)—(5). Тоді:*

1) *система рівнянь (6) у класі функцій $C^*(\overline{D}_i)$ має розв'язок і він єдиний при $(x,y)\in\overline{D}_i,i=1,2$,*
2) *послідовність функцій $\{D^{(\kappa,s)}z_{i,p}(x,y)\}$, $\{D^{(\kappa,s)}v_{i,p}(x,y)\}$, побудовані згідно закону (11), (12), (16), збігаються рівномірно при $(x,y)\in\overline{D}_i$ до єдиного розв'язку системи рівнянь (6),*
3) *мають місце оцінки (19),*
4) *для довільних $p\in\mathbb{N}_0$, $\kappa,s=0,1$, $\kappa+s<2$, та $(x,y)\in\overline{D}_i,i=1,2$ справедливі нерівності*

$$\begin{gathered}D^{(\kappa,s)}v_{i,p}(x,y)\leqslant D^{(\kappa,s)}v_{i,p+1}(x,y)\leqslant\\ \leqslant D^{(\kappa,s)}U_i(x,y)\leqslant\\ \leqslant D^{(\kappa,s)}z_{i,p+1}(x,y)\leqslant D^{(\kappa,s)}z_{i,p}(x,y),\end{gathered} \tag{20}$$

5) збіжність ітераційного методу (11), (12), (16) не повільніша збіжності методу, коли $q_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y) \equiv c_{i,p}^{(\kappa,s)}(x,y) \equiv 0$ *для всіх* $\kappa, s = 0,1$, $\kappa + s < 2$, $p \in \mathbb{N}_0$ *тобто*

$$z_{i,p+1}^{*}(x,y) = R_i^p(x,y),$$
$$v_{i,p+1}^{*}(x,y) = R_{i,p}(x,y),$$
$$(x,y) \in \overline{D}_i.$$

Єдиність розв'язку системи інтегродиференціальних рівнянь (6) доводиться методом від супротивного. Пункт 2) та оцінки (19) доведено вище. Для доведення справедливості диференціальних нерівностей (20) та пункту 5) Теореми 2 достатньо використати міркування, наведені у розділі IV монографії [5].

Наслідок 1. *Нехай виконуєтъ умови Теореми 1. Тоді задача (1)—(5) має в класі функцій* $C^*(\overline{D})$ *єдиний розв'язок.*

Наслідок 2. *Нехай функції* $f_i[U_i(x,y)] \in C_1(\overline{B}_i)$ *та* $f_i[U_i(x,y)] \equiv H_i[U_i(x,y);0]$, $i = 1,2$, *а* $\varphi(y) = 0$, $y \in [y_0, y_1]$, $\varphi_1(x) = \psi(x) = 0$, $x \in [x_0, x_1]$.

Тоді, якщо $f_i[0] \geqslant (\leqslant)0$, $i = 1,2$ *в області* $\overline{B}_i$, *то розв'язок задачі (1)—(5)* $U_i(x,y) \geqslant (\leqslant)0$ *при* $(x,y) \in \overline{D}_i$.

Розглянемо рівняння

$$D^{(1.1)}z(x,y) = f_3(x,y,z(x,y),D^{(1.0)}z(x,y),D^{(0.1)}z(x,y)) := f_3[z(x,y)],$$
$$f_3 : \overline{B}_2 \to \mathbb{R}, \overline{B}_2 \in \mathbb{R}^5. \tag{21}$$

Вважатимемо, що праві частини рівнянь (1) та (21) задовольняють наступні умови:

1) $f_2[U_2(x,y)] \in C_1(\overline{B}_2)$,

2) функція $f_3[z(x,y)] \in C(\overline{B}_2)$ і в області $\overline{B}_2$ має обмежені частинні похідні першого порядку по всім своїм аргументам, починаючи із третього, причому

$$\frac{\partial f_3[z(x,y)]}{\partial D^{(\kappa,s)}z(x,y)} := a_{\kappa,s}(x,y) \geqslant 0, \quad (x,y) \in \overline{D}_2, \tag{22}$$

3) для всякої з простору $C^*(\overline{D}_2)$ функції $v(x,y) \in \overline{B}_2$

$$f_3[v(x,y)] \geqslant (\leqslant) f_2[v(x,y)], \quad (x,y) \in \overline{D}_2. \tag{23}$$

Теорема 3. *Нехай для правих частин рівнянь (1), (21)* $f_2[U_2(x,y)]$ *та* $f_3[z(x,y)]$ *виконуються наведені вище умови 1-3 і в області* $\overline{B}_2$ *існують функції порівняння задачі (1)—(5) та (21), (2)—(5). Тоді для розв'язків цих задач при* $(x,y) \in \overline{D}_2$ *виконуються нерівності*

$$U_2(x,y) \leqslant (\geqslant) z(x,y). \tag{24}$$

Доведення. Згідно Теореми 2 та Наслідку 1 розв'язки задач (1)—(5) та (21), (2)—(5) існують і вони єдині у просторі функцій $C^*(\overline{D}_2)$, а отже, позначивши $W(x,y) := z(x,y) - U_2(x,y)$ і використавши теорему про скінченні прирости, матимемо

$$D^{(1.1)}W(x,y) = \widetilde{a}_{1,0}(x,y)D^{(1.0)}W(x,y) + \widetilde{a}_{0,1}(x,y)D^{(0.1)}W(x,y) + \widetilde{a}_{0,0}(x,y)W(x,y) + (f_3[U_2(x,y)] - f_2[U_2(x,y)]),$$

де $\widetilde{a}_{\kappa,s}(x,y)$—частинні похідні функції $f_3[z(x,y)]$ при деяких значеннях $D^{(\kappa,s)}z(x,y) \in \overline{B}_2$, $(x,y) \in \overline{D}_2$. Очевидно, функція $W(x,y)$ задовольняє однорідні умови (2)—(4), а права частина останнього рівняння відносно $W(x,y)$ належить просторові $C_1(\overline{B}_2)$, причому на підставі (23) вона задовольняє всім умовам Наслідку 2, а отже $W(x,y) \geqslant (\leqslant)0$ при $(x,y) \in \overline{D}_2$, тобто мають місце нерівності (24). □

Список використаних джерел

1. *Перестюк М.О.* Теорія рівнянь математичної фізики / М.О. Перестюк, В.В.Маринець. — К: ВПЦ «Київський університет», 2017. — 520 с.

2. *Collatz. L.* Funktionalanalysis und numerische Mathematik / L. Collatz. — Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1964.

3. *Marynets V.V.* On Goursat-Darboux boundary value problem for systems of nonlinear differential equations of hyperbolic

type / V.V. Marynets, K.V. Marynets // Miskolc Mathematical Notes. — 2013. — V.14. — №3. — С. 1009-1020.

4. *Маринець В.В.* Про один підхід дослідження крайової задачі для квазілінійного рівняння гіперболічного типу із розривною правою частиною / В.В.Маринець, О.І. Когутич // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. Збірник наукових праць. — 2019. — №19. — С. 71-77.

5. *Маринець В.В.* Аналітичні методи дослідження крайових задач / В.В.Маринець, К.В. Маринець, О.Ю. Питьовка. — Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2019. — 288 с.

6. *Красносельский М.А.* Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский, Г.М. Вайнико, П.П. Забрейко, Я.Б. Рутницький, Я.Б. Стеценко. — М: Наука, 1969. — 456 с.

7. *Marynets V.V.* On one constructive method of the differential equations of the hyperbolic type/ V.V. Marynets, K.V. Marynets, O.Yu. Pytovka // Науковий вісник Ужгородського університету. — 2015. — №2(27). — С. 76-85.

References

1. PERESTIUK, M. and MARYNETS, V. (2017) *Teoriia rivnian matematychnoi fizyky.* K: VPTs "Kyivskyi universytet".

2. COLLATZ, L. (1964) *Funktionalanalysis und numerische Mathematik.* Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag.

3. MARYNETS, V. & KOHUTYCH, O. (2019) Pro odyn pidkhid doslidzhennia kraiovoi zadachi dlia kvaziliniinoho rivniannia hiperbolichnoho typu iz rozryvnoiu pravoiu chastynoiu. *Matematychne ta kompiuterne modeliuvannia. Seriia:Fizyko-matematychni nauky. Zbirnyk naukovykh prats.* 19. p. 71-77.

4. MARYNETS, V. & MARYNETS, K. (2013) On Goursat-Darboux boundary value problem for systems of nonlinear differential equations of hyperbolic type. *Miskolc Mathematical Notes.* 14(3). p. 1009-1020.

5. MARYNETS, V., MARYNETS, K. and PYTOVKA, O. (2019) *Analitychni metody doslidzhennia kraiovykh zadach.* Uzhhorod: Vydavnytstvo UzhNU "Hoverla".

6. KRASNOSELSKYI, M., VAINYKO, H., ZABREIKO, P., RUTNYTSKYI, Ya. and STETSENKO, Ya. (1969) *Priblizhennoe reshenie operatornyh uravnenij..* M: Nauka.

7. MARYNETS, V. & MARYNETS, K. & PYTOVKA, O. (2015) On one constructive method of the differential equations of the hyperbolic type. *Naukovyi visnyk Uzhhorodskoho universytetu.* 2(27). p. 76-85.

Надійшла до редколегії 23.11.2020

КОМП’ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 519.72

https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/4.5

І.О. Завадський, д. ф.-м. н., доцент

Метод швидкого пошук патерна в потоці бітів

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: zava@ukr.net

Igor O. Zavadskyi, Associate Professor, Ph. D.

Fast pattern matching method for a bitstream

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d
e-mail: zava@ukr.net

Описано родину алгоритмів швидкого пошуку заданої послідовності бітів у бітовому потоці, який зберігається в пам'яті, умовно поділеній на байти та машинні слова. Ці алгоритми базуються на алгоритмах швидкого пошуку в тексті на 256-символьному алфавіті родини RZ. За швидкодією запропоновані алгоритми перевершують всі відомі аналоги для всіх довжин патерна від 20 до 500.

Ключові слова: пошук рядка, бітовий потік, алгоритм Фаро-Лекро, вікно пошуку.

A family of algorithms for fast pattern matching in a bitstream is described. A bitstream is assumed to be stored in a memory and divided into bytes and machine words. The proposed algorithms are based on RZ-family of algorithms for fast pattern matching in a 256-ary text and inherit such their properties as '1.5-byte read', double skip loop, right-to-left text processing as well as a special technique of multiple sliding windows. Beyond that, the new algorithms provide longer average shifts than the best known Binary Faro-Lecroq algorithm and more efficient technique of match checking. Applied to a text close to random, our algorithms outperform all known analogues for all pattern lengths from 20 up to 500.

Key words: pattern matching, Faro-Lecroq, fast search, bitstream, search window.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Анісімов А.В.

1. Вступ

Задача пошуку заданої послідовності бітів (патерна) у бітовому потоці є важливим різновидом загальної задачі пошуку рядка в тексті. Вона становить інтерес, оскільки широкий спектр даних прийнято подавати в бінарній формі, наприклад зображення, відео, архівні дані тощо. Ця задача відрізняється від задачі пошуку рядка в тексті на двійковому алфавіті, оскільки в останньому випадку за допомогою однієї операції можна зчитати один символ тексту (що може мати лише 2 різних значення), а в потоці бітів одна операція зчитує машинне слово (як правило, від 8 до 64 бітів).

Базова ідея будь-якого нетривіального алгоритму пошуку даних у бінарному потоці полягає в тому, щоб уникати виконання витратних операцій з окремими бітами настільки довго, наскільки це можливо. Таким чином, пошук виконується на рівні байтів, тобто в тексті на 256-символьному алфавіті. І тільки коли підрядок-кандидат знайдено, на рівні окремих бітів перевіряється, чи справді має місце збіг бітового патерна з частиною тексту.

Отже, будь-який алгоритм пошуку в бітовому потоці базується на певному загальному алгоритмі пошуку рядка в тексті, застосованому до 256-символьного алфавіту. Так, найперший з відомих нетривіальних алгоритмів бітового пошуку [1] базується на загальному пошуковому методі Боєра-Мура, а в найшвидшому з відомих на сьогодні, алгоритмі Binary Faro-Lecroq [2], комбінується багаторядкова версія алгоритму BNDM зі спрощеною пошуковою стратегією алгоритму Коментц-Волтер. Описані далі алгоритми пошуку в бітовому потоці *RZ-bit* базуватимуться на алгоритмах пошуку в 256-розрядному тексті родини RZ-byte, описаних в [3]. Відмінними рисами алгоритмів RZ-byte є виконання зсувів на основі опрацювання бітів більш ніж одного, але менш ніж двох байтів, подвійний цикл пропуску та ін. У [3] пояснено, як ці техніки підвищують ефективність пошуку.

Надалі розглядатимемо процесорну архітектуру зі зворотним зчитуванням байтів машинного слова (little endianness) і використовуватимемо такі позначення:

$T[0...n–1]$ – вхідний текст;

$P[0...m]$ – шуканий рядок (патерн).

© І.О. Завадський, 2020

Як останній байт патерна $P[m]$, так і останній байт тексту $T[n–1]$ може бути неповним і доповнюється справа нулями, якщо довжина тексту чи патерну не є кратною 8. Інакше припускаємо, що $P[m]=0$, а $T[n–1]$ — повний байт. Також завжди $P[m+1]=T[n]=0$. Бітову довжину патерна позначимо через l, а масив бітів патерна — через $p[0...l–1]$. Під «вікном пошуку» розумітимемо послідовність l бітів тексту, щодо якої робиться припущення про збіг з патерном.

2. Пошуковий алгоритм

У розглянутих в [3] алгоритмах байтового пошуку RZ-Byte на кожній ітерації пошукового «циклу пропуску» вікно пошуку зміщується на якомога більшу кількість символів уліво. У бітових алгоритмах вважатимемо, що *pos* — це номер найлівішого повного байта, що охоплюється вікном пошуку. Загалом це вікно охоплює повністю байти $T[pos],\ldots,T[pos+m–2]$, у той час як байти $T[pos–1]$, $T[pos+m–1]$ і, можливо, $T[pos+m]$ можуть містити лівий та правий «хвости» патерна.

Максимальний зсув вікна пошуку на $m–1$ байтів уліво можливий за виконання двох умов: пара байтів ($T[pos]$, $T[pos+1]$) не належить патерну та певний префікс цієї пари байтів довжиною більше 8 бітів не є суфіксом патерна. Таблиця зсувів Z заповнюється згідно цих умов на стадії передобчислень (алгоритм 3), та застосовується у фазі пошуку (рядки 5 і 8 алгоритму 1). Загалом блок псевдокоду в рядках 2–8 алгоритму 1 реалізує подвійний цикл пропуску, розглянутий у [3].

Після виходу з подвійного циклу пропуску ми перевіряємо, чи збігається патерн з вікном пошуку, зсунутим на q бітів уліво, $q = 0,\ldots,7$. Ця перевірка виконується процедурою *CheckMatch*(*q*,*pos*), що викликається в рядку 11 алгоритму 1. Замість перевірки всіх 7 значень q, яка була б неефективною, ми зберігаємо в множині $\lambda[c]$ всі такі значення $q < 8$, що підрядок патерна $p[q\ldots q+7]$ збігається з байтом c. Це означає, що всі такі можливі збіги, що байт тексту $T[pos]$ є найлівішим повним байтом, що охоплюється патерном, у рядках 10 та 11 алг. 1 будуть перевірені. Після цієї перевірки вказівник *pos* безпечно (тобто гарантовано без пропуску збігу) переміщується на 1 байт вліво після додавання в рядку 12 та віднімання в рядку 4 наступної ітерації основного циклу.

```
1  pos ← n – 1;
2  repeat
3    repeat
4      pos ← pos – m + 1;
5      while Z[word(T[pos], T[pos+1]) & mask]≠0 do
6        pos ← pos – m + 1;
7      pos ← pos + 1;
8    until Z[word(T[pos], T[pos+1]) & mask]≠0;
9    pos ← pos – 1;
10   foreach q ∈λ[T[pos]] do
11     CheckMatch(q,pos);
12   pos ← pos + m – 2;
13 until pos ≥ m – 1;
```

Алг. 1. Пошуковий цикл алгоритму *RZk-bit*

Тіло процедури CheckMatch наведено в алгоритмі 2. Потрібно перевірити, чи збігається з патерном фрагмент тексту, що починається з q молодших бітів байту $T[pos–1]$ та містить $l–q$ наступних бітів. Функція byte в рядку 2 обтинає двобайтне значення до молодшого байту. Мовою C її можна реалізувати через механізм зведення типів: (unsigned char). Загалом у циклі, наведеному в рядках 2–3, конструюється послідовність байтів на основі частин суміжних байтів тексту. А саме, беруться q молодших бітів байту $T[j]$ та $8 – q$ старших бітів байту $T[j+1]$. Сконструйовані байти порівнюються з байтами патерна. Якщо всі вони збігаються, то останній байт конструюється та порівнюється з $P[m]$ у рядку 5. Оскільки байт $P[m]$ неповний, сконструйований байт обтинається за допомогою маски *lastMask* лише до значущих бітів $P[m]$.

```
1  start ← j ← pos – 1;
2  while j – start < m AND
     byte((T[j] << (8 – q))|(T[j + 1] >> q)) = P[j – start] do
3      j ← j + 1
4  if  j – start = m  then
5    if ((T[j] << (8 – q))|(T[j + 1] >> q))&
                                  lastMask = P[m] then
6        output(start · k + q)
```

Алг. 2. Процедура CheckMatch (q,pos)

Зауважимо, що для коректного завершення роботи алгоритму 1 перед текстом треба дописати так званий «стоп-патерн», а умову в рядку 13 замінити на pos ≥ 0. Для спрощення відповідні операції в алгоритмі не наведено.

3. Передобчислення

Значення *lastMask*, як і інші значення й таблиці, що залишаються фіксованими протягом усієї фази пошуку, визначаються на стадії передобчислень, наведеній в алг. 3. Пояснимо, як конструюється пошукова таблиця Z у циклі в

рядках 7–15 цього алгоритму. Для кожного 16-бітного підрядка патерна, починаючи з позиції *i*, відповідний елемент масиву *Z* ініціалізується прапорцем 0, що позначає немаксимальний зсув (короткі суфікси патерна, $l - i \le 8$, не опрацьовуються, оскільки їхні можливі збіги з префіксами вікна пошуку не впливають на можливість безпечного зсуву довжиною m–1). Під час пошуку перевіряється, чи цей 16-бітний рядок збігається з деяким підрядком тексту з урахуванням того, що рівність деяких бітів не перевіряється через накладання маски (див. рис. 1 у [3]). Функція bitWord, що викликається в рядку 8 алгоритму 3, переставляє біти, як показано на рис. 1,б) у [3], і повертає згаданий підрядок у компактній формі, зображеній у нижній частині цього рисунку. Якщо цей 16-бітний рядок вирівняно за межами двобайтного слова в пам'яті, то така перестановка стає тривіальною і виконується за допомогою операції зведення типів. Саме так працює функція word, яка викликається в алгоритмі 1. Проте в бітовому потоці згаданий підрядок може містити частини 3 послідовних байтів патерна і перестановка ускладнюється. Її виконання описано в коментарях до алгоритму 4.

```
1  mask ← 2^k − 1; m ←[ l/8 ];
2  lastMask ← byte(0xFF << (8 − (l mod 8)));
3  foreach i ∈ [0;7] do
4      c ← (P[0] << i) | (P[1] >> (8 − i));
5      λ[c] ← λ[c]∪{i};
6  foreach i ∈ [0;2^k) do Z[i] ← 1;
7  foreach i ∈ [0;l−8) do
8    t ← bitWord(i,mask);
9    if l−i ≥ 16 then
10     Z[t] ← 0;
11   else
12     if l−i > 24−k then s ← 16−(l−i);        // рис. 1 (а)
13     else s ← k − 8;                          // рис. 1 (б)
14     foreach j ∈ [0;2^s) do
15       Z[ t | (j << 8)] ← 0;
```

Алг. 3. Фаза передобчислень алгоритму *RZk-bit*

Підрядок, відформатований функцією bitWord, присвоюється змінній *t* на кроці 8 алгоритму 3. Якщо $l - i \ge 16$, то весь цей підрядок належить патерну і $Z[t]=0$ (крок 10 алгоритму 3). Інакше підрядок обтинається на правій межі патерна й після перестановки bitWord всередині відформатованого підрядка може утворитися «прогалина» з несуттєвих бітів (рис. 1,а)). Довжина цієї прогалини обчислюється на кроках 12 (рис. 1, а)) або 13 (рис. 1, б)). На кроках 14 і 15 ця прогалина в рядку *t* заповнюється всіма можливими 2^s значеннями. У такий спосіб формується множина індексів усіх нульових елементів пошукової таблиці *Z*.

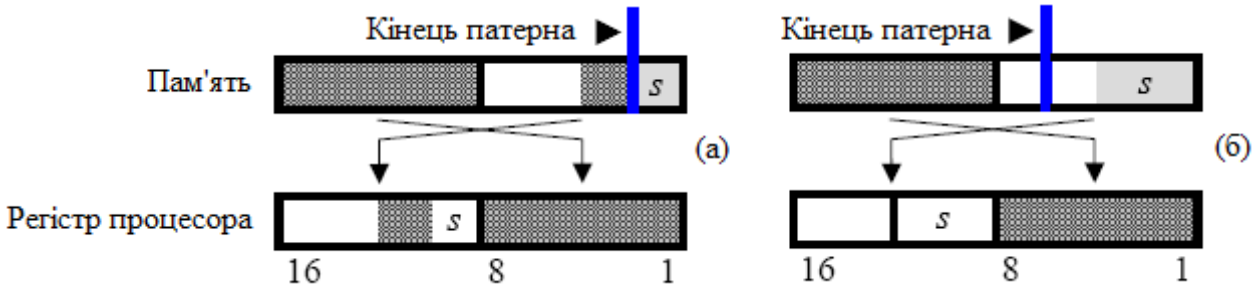


Рис. 1. Перестановка бітів bitWord на правій межі патерна: (а) патерн закінчується на суттєвих бітах правого байта; (б) паттерн закінчується на несуттєвих бітах. Біти, що не відкидаються після перестановки, зафарбовано темно-сірим. Біти, які залишилися б значущими після перестановки, якби не кінець патерна, зафарбовано світло-сірим.

```
1  r ← [ i/8 ];                                  // індекс найстаршого байту
2  s ← (P[r] << 16) | (P[r + 1] << 8) | P[r + 2];  // зчитування 3 байтів з пам'яті в прямому порядку
3  s ← s << (i mod 8);                           // зсув до лівої межі трибайтного слова
4  mask1 ← 0xFF0000;                             // маска для найстаршого байту
5  mask2 ← mask & 0xFF00;                        // маска для середнього байту
6  return ((s&mask1) >> 16) | (s&mask2);         // переміщення найстаршого байту в наймолодший
```

Алг. 4. Функція bitWord(i,mask)

4. Обчислювальні експерименти

Наведені в цій статті алгоритми було реалізовано мовою C++. Також було застосовано до пошукового методу відому методику *вікон, що ковзають* (sliding windows). Кількість таких вікон у табл. 1 вказано після літери w, а число

після літер RZ означає кількість бітів у масці *mask*. Для порівняння було взято найшвидший із відомих алгоритмів бітового пошуку — Binary Faro-Lecroq. Пошук виконувався у файлі обсягом 10 Мб, що являв собою архів англомовних текстів, створений одним із сучасних архіваторів. Результати усереднено за 500 пробігами кожного алгоритму на 40 різних комп'ютерах і нормовано таким чином, щоб значущість усіх комп'ютерів була однаковою. Час виконання найшвидших алгоритмів для кожної довжини патерна зафарбовано сірим.

Довжина патерна	20	40	60	80	100	200	300	400	500
RZ13-Bit	157,65	48,28	34,83	26,03	22,22	15,27	13,17	12,52	12,04
RZ14-Bit	148,76	44,52	32,22	23,74	20,37	13,90	12,14	11,49	11,15
RZ15-Bit	145,22	42,73	31,23	23,10	19,86	13,74	12,12	11,51	11,13
RZ13-Bit-w2	129,49	35,91	26,81	20,88	18,25	13,89	12,29	11,84	11,54
RZ14-Bit-w2	120,65	33,24	24,81	19,07	16,90	13,08	11,78	11,35	11,10
RZ15-Bit-w2	116,87	32,57	24,50	18,96	17,03	13,15	11,94	11,53	11,31
RZ13-Bit-w3	135,61	38,50	28,40	21,96	19,09	13,90	12,25	11,82	11,51
RZ14-Bit-w3	126,74	35,19	26,08	19,79	17,25	12,74	11,43	11,03	10,77
RZ15-Bit-w3	122,25	34,03	25,47	19,44	17,10	12,72	11,41	11,03	10,77
RZ16-Bit-w2	102,02	30,56	23,76	18,91	17,05	13,35	12,26	11,95	11,66
BFL	277,77	91,46	63,80	43,23	36,63	23,38	21,65	25,29	31,32
BFL/найкращий	2,72	2,99	2,68	2,28	2,16	1,83	1,89	2,29	2,68

Табл. 1. Час виконання алгоритмів у бітовому потоці (мілісекунди)

5. Висновки

Як видно з результатів експерименту, різні алгоритми родини RZ-bit є в 1,83 і більше разів швидшими за алг. BFL для всіх досліджених довжин патернів. Алгоритм BFL, своєю чергою, для таких довжин патернів є істотно (принаймні на 30%) швидшим за всі інші нетривіальні алгоритми пошуку патерна в бітовому потоці ([2]). Причинами такої переваги алгоритмів родини RZ-bit є насамперед переваги базових алгоритмів пошуку в 256-розрядних текстах, зазначені в [3], і, крім того, такі фактори:

- хоча максимальна довжина «довгого зсуву» в BFL становить $2m–1$, на практиці цей зсув часто дорівнює $2m–3$ або менше, в той час як будь-який максимальний зсув у двовіконній версії RZ-Bit становить $2m–2$, тобто є довшим у середньому;
- особливо велика різниця в часі виконання RZ-bit і BFL на коротких патернах свідчить про вищу ефективність техніки перевірки збігу в алгоритмах RZ-bit.

Список використаних джерел

1. Klein S. Accelerating Boyer Moore search on binary texts. / S. Klein, M.K. Ben-Nissan // Proceedings of International Conference on Implementation and Application of Automata, CIAA-07, 2007, p. 130–143.

2. Faro S. An efficient matching algorithm for encoded DNA sequences and binary strings / S. Faro, T. Lecroq // Proceedings of Combinatorial Pattern Matching, 2009, p. 106–115.

3. Завадський І.О. Пошук рядка в тексті з урахуванням обмежень на обсяг кеш-пам'яті / І.О. Завадський // Вісник КНУ ім. Т. Шевченка, серія: фіз.-мат. науки, вип. 3, 2019, с. 69–72.

References

1. KLEIN S., BEN-NISSAN M.K. (2007) Accelerating Boyer Moore search on binary texts. *Proceedings of International Conference on Implementation and Application of Automata,* CIAA-07, p. 130–143.

2. FARO S., LECROQ T. (2009) An efficient matching algorithm for encoded DNA sequences and binary strings. *Proceedings of International Conference on Implementation and Application of Automata,* p. 106–115.

3. ZAVADSKYI I.O. (2019) Pattern matching in text with respect to cache memory size. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics, no. 3, p. 69–72.*

Надійшло у редакції 4.12.2020

УДК 519.6 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/4.6

Іванов С.М., к.ф.-м.н.

Загальний розв'язок та адаптація до параметричного оцінювання SIR моделі

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 04116, м. Київ, вул. Богдана Гаврилишина 24,
e-mail: smivanov87@gmail.com

S. Ivanov, PhD (Phys.-Math.)

Analytical solution and adaptation to the parameter estimation of the SIR model

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 04116, Kyiv, Bohdan Havrylyshyn st., 24,
e-mail: smivanov87@gmail.com

У роботі розглядається SIR модель поширення епідемії. За допомогою заміни експоненціальної функції оберненою пропорційністю знаходиться наближений загальний розв'язок SIR моделі. Для параметричного оцінювання SIR моделі проводиться адаптація загального розв'язку до парних лінійних регресій. Отримані результати можуть бути цікавими студентам, аспірантам та науковцям, які займаються математичною епідеміологією.

Ключові слова: SIR модель, параметричне оцінювання, загальний розв'язок.

The article deals with analytical solution and adaptation to the parameter estimation of the SIR model of the epidemic. By a special replacement of the exponential function by inverse proportionality, the approximate general solution of the SIR model is found. It is spoken in detail about the process of integration of ordinary differential equations of the SIR model. The equality of the sum of the obtained analytical solutions and population size is checked. The obtained solutions are simple and understandable. To parametrically estimate the SIR model, its general solution is adapted to paired linear regressions. The article is of interest for students, graduate students and scientists involved in mathematical epidemiology.

Key Words: SIR model, parameter estimation, analytical solution.

Статтю представив д.т.н. Кудін В.І.

Протягом століть багато різних збудників захворювань поширювалися країнами, викликаючи пандемії, високу смертність і деградацію розвитку [1]. Останні найзначніші з пандемій за смертністю були: іспанський грип 1918 року, азіатський грип 1957 р., гонконгський грип 1968 року та свинячий грип 2009 року, а також поточна пандемія COVID-19 [1]. Для можливості моніторингу, розуміння впливових факторів на поширення епідемії, прогнозування кількості хворих, прийняття рішень щодо кількості ліжок, медичного персоналу та ін. застосовувалися різні підходи моделювання багатьма вченими. Одними з найвідоміших, засновників математичної епідеміології, є Андерсон Маккендрік та Вільям Кермак [2, 3], які запропонували спрощену SIR модель поширення епідемії

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta \cdot I \cdot S, \\ \dot{I} = \beta \cdot I \cdot S - \gamma \cdot I, \\ \dot{R} = \gamma \cdot I, \end{cases} \quad (1)$$

де за даною моделлю особини можуть перебувати у трьох станах: здорові, які можуть захворіти $S(t)$, хворі $I(t)$, одужавші та померлі $R(t)$ [2].

Для параметричної ідентифікації цієї моделі застосовують різні способи [4], зокрема за наявними статистичними даними можна знайти чисельні похідні $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ (також будемо позначати S, I, R) і застосувавши метод найменшої квадратичної похибки або максимальної правдоподібності, знайти параметри моделі. Також одним із способів параметричної ідентифікації є знаходження загального розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь і подальше оцінювання параметрів. Про знаходження розв'язку SIR моделі раніше вже повідомлялося, наприклад в [5], однак, цей розв'язок не був адаптований для безпосередньої параметричної ідентифікації.

Розв'язок SIR моделі.

Якщо розділити 1 і 2 рівняння системи (1) на 3 рівняння, то отримується система (2)

© С.М. Іванов, 2020

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dR} = -\dfrac{\beta}{\gamma} S, \\ \dfrac{dI}{dR} = \dfrac{\beta}{\gamma} S - 1, \\ \dfrac{dR}{dt} = \gamma \cdot I. \end{cases} \quad (2)$$

У перших двох рівняннях системи (2) можна розділити змінні та знайти загальний розв'язок $\int \frac{dS}{S} = -\frac{\beta}{\gamma}\int dR$, урахувавши, що $S > 0$, $\ln S = -\frac{\beta}{\gamma} R + C$, $S = e^{-\frac{\beta}{\gamma}R+C}$. При врахуванні початкових умов задачі Коші $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$, $R(0) = R_0 = 0$, перепишемо отриманий розв'язок у вигляді $S(t) = e^{-\frac{\beta}{\gamma}R(t)} \cdot e^C$ та знайдемо сталу інтегрування C, отже $S(0) = e^{-\frac{\beta}{\gamma}\cdot 0} \cdot e^C = e^C = S_0$,

$$S = S_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma}R}. \quad (3)$$

Знайдений розв'язок (3) підставимо у друге рівняння системи (2)

$$\begin{cases} \dfrac{dI}{dR} = \dfrac{\beta}{\gamma} S_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma}R} - 1, \\ I(0) = I_0. \end{cases} \quad (4)$$

У рівнянні (4) також можна розділити змінні та знайти загальний розв'язок

$$\int dI = \int \left(\frac{\beta}{\gamma} S_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma}R} - 1 \right) dR, I = \int \frac{\beta}{\gamma} S_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma}R} dR - R,$$

$$I + R = \int \frac{\beta}{\gamma} S_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma}R} dR = \begin{bmatrix} d\left(-\frac{\beta}{\gamma}R\right) = -\frac{\beta}{\gamma} dR \\ dR = -\frac{\gamma}{\beta} d\left(-\frac{\beta}{\gamma}R\right) \end{bmatrix} =$$

$$= -S_0 \int e^{-\frac{\beta}{\gamma}R} d\left(-\frac{\beta}{\gamma}R\right) = -S_0 \cdot e^{-\frac{\beta}{\gamma}R} + C.$$

Сталу інтегрування знайдемо з початкової умови $I(0) = I_0 = -S_0 \cdot e^{-\frac{\beta}{\gamma}0} - 0 + C = -S_0 + C$, $C = I_0 + S_0$, отже

$$I = -S_0 \cdot e^{-\frac{\beta}{\gamma}R} - R + I_0 + S_0. \quad (5)$$

Для знаходження $R(t)$ підставимо у третє рівняння системи (2) рівняння (5)

$$\dot{R} = \frac{dR}{dt} = -\gamma \cdot S_0 \cdot e^{-\frac{\beta}{\gamma}R} - \gamma \cdot R + \gamma \cdot I_0 + \gamma \cdot S_0.$$

В отриманому рівнянні також можна розділити змінні:

$$\int \frac{dR}{-\gamma \cdot S_0 \cdot e^{-\frac{\beta}{\gamma}R} - \gamma \cdot R + \gamma \cdot I_0 + \gamma \cdot S_0} = \int dt.$$

Отриманий інтеграл через відомі функції не знаходиться.

Перепишемо цей інтеграл

$$\int \frac{dR}{-S_0 \cdot e^{-\frac{\beta}{\gamma}R} - R + I_0 + S_0} = \gamma \int dt. \quad (5)$$

Для можливого знаходження даного інтеграла проведемо заміну функції $e^{-\frac{\beta}{\gamma}R} \approx \frac{1}{R}$, врахувавши, що $\beta > 0$ та $\gamma > 0$ (рис. 1), а різниця між значеннями цих функцій є прийнятно малою.

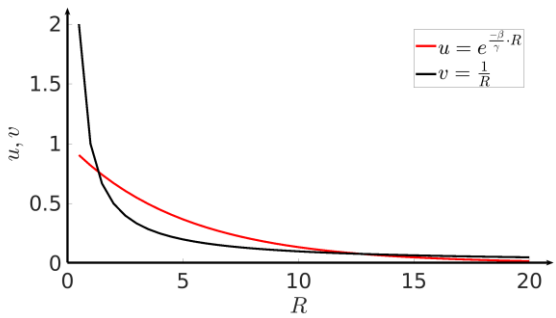


Рис. 1. Експоненціальна функція та обернена пропорційність

Для наближеного обчислення інтеграла (5) можна було б розкласти експоненту в ряд Тейлора-Маклорена, але тоді необхідно було б врахувати занадто багато членів ряду, що значно ускладнило б знаходження інтеграла.

$$\int \frac{dR}{-S_0 \cdot \frac{1}{R} - R + I_0 + S_0} = \left[I_o + S_0 = C \right] =$$

$$= \int \frac{RdR}{-S_0 - R^2 + CR} = -\int \frac{RdR}{R^2 - CR + S_0} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} d(R^2 - CR + S_0) = (2R - C)dR; \\ \left(\frac{1}{2}(2R - C) + \frac{C}{2}\right)dR; \\ R^2 - CR + S_0 = \left(R - \frac{C}{2}\right)^2 - \frac{C^2}{4} + S_0; \\ \frac{-(I_0 + S_0)^2 + 4S_0}{4} < 0; \end{array} \right] =$$

$$= -\int \frac{\left(\frac{1}{2}(2R - C) + \frac{C}{2}\right)}{\left(R - \frac{C}{2}\right)^2 - \frac{C^2}{4} + S_0} dR =$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{(2R - C)dR}{\left(R - \frac{C}{2}\right)^2 - \frac{C^2}{4} + S_0} - \frac{C}{2}\int \frac{dR}{\left(R - \frac{C}{2}\right)^2 - \frac{C^2}{4} + S_0}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(R^2 - CR + S_0\right)}{R^2 - CR + S_0} - \frac{C}{2}\int \frac{d\left(R - \frac{C}{2}\right)}{\left(R - \frac{C}{2}\right)^2 - \frac{C^2}{4} + S_0} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|R^2 - CR + S_0\right| -$$

$$-\frac{C}{4\sqrt{\frac{C^2}{4} - S_0}} \ln\left| \frac{R - \frac{C}{2} - \sqrt{\frac{C^2}{4} - S_0}}{R - \frac{C}{2} + \sqrt{\frac{C^2}{4} - S_0}} \right| + A_1.$$

Запишемо рівняння

$$\ln\left|R^2 - CR + S_0\right|^{-\frac{1}{2}} -$$

$$-\ln\left| \frac{R - \frac{C}{2} - \sqrt{\frac{C^2}{4} - S_0}}{R - \frac{C}{2} + \sqrt{\frac{C^2}{4} - S_0}} \right|^{\frac{C}{4\sqrt{\frac{C^2}{4} - S_0}}} = \gamma \cdot t + A_1.$$

Розглянемо сталі величини і спростимо вирази

1) $$\frac{C}{4\sqrt{\frac{C^2}{4} - S_0}} = \frac{I_0 + S_0}{4\sqrt{\frac{(I_0 + S_0)^2}{4} - S_0}} \approx$$

$$\approx \frac{S_0}{4\sqrt{\frac{S_0^2}{4} - S_0}} \approx \frac{S_0}{4\sqrt{\frac{1}{4}\left(S_0^2 - 4S_0\right)}} \approx$$

$$\approx \frac{S_0}{2\sqrt{S_0(S_0 - 4)}} \approx \frac{1}{2}.$$

2) $$\sqrt{\frac{C^2}{4} - S_0} \approx \sqrt{\frac{S_0^2}{4} - S_0} \approx \sqrt{\frac{1}{4}\left(S_0^2 - 4S_0\right)} \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}\sqrt{S_0^2 - 4S_0} \approx \frac{1}{2}\sqrt{S_0^2} \approx \frac{1}{2}S_0.$$

3) $$R - \frac{I_0 + S_0}{2} - \frac{1}{2}S_0 \approx R - S_0.$$

4) $$R - \frac{I_0 + S_0}{2} + \frac{1}{2}S_0 \approx R.$$

Отже, отримуємо наступне рівняння

$$\ln\left(\left|R^2 - CR + S_0\right|^{-\frac{1}{2}} \left|\frac{R - S_0}{R}\right|^{-\frac{1}{2}} \right) = \gamma \cdot t + A_1.$$

$$\left[R^2 - (I_0 + S_0)R + S_0 \approx R^2 - S_0(R - 1) \approx R(R - S_0) < 0\right]$$

Перепишемо рівняння

$$\ln\left((R(S_0 - R))^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{S_0 - R}{R}\right)^{-\frac{1}{2}} \right) = \gamma \cdot t + A_1,$$

$$\left(R(S_0 - R)\frac{(S_0 - R)}{R}\right)^{-\frac{1}{2}} = (S_0 - R)^{-1} = e^{\gamma \cdot t + A_1},$$

$$S_0 - R = A_1 e^{-\gamma \cdot t}, \quad R(t) = S_0 - A_1 e^{-\gamma \cdot t}.$$

Сталу інтегрування знайдемо з початкової умови $R(0) = 0$: $R(0) = 0 = S_0 - A_1$; $A_1 = S_0$.

$$R(t) = S_0 - S_0 e^{-\gamma \cdot t}. \qquad (6)$$

Очевидне виконання умови $S + I + R = S_0 + I_0 + R_0 = N$.

Загальний розв'язок має вигляд

$$\begin{cases} S(R) = S_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma}R(t)}, \\ I(R) = -S_0 \cdot e^{-\frac{\beta}{\gamma}R(t)} - R(t) + I_0 + S_0, \\ R(t) \approx S_0 - S_0 e^{-\gamma \cdot t}. \end{cases}$$

Адаптація до параметричного оцінювання параметрів SIR моделі. Зробимо деякі перетворення для знайдених розв'язків SIR моделі:

1) Рівняння (6): $R - S_0 = -S_0 e^{-\gamma \cdot t}$; $S_0 - R = S_0 e^{-\gamma \cdot t}$; $\ln(S_0 - R) = \ln S_0 - \gamma \cdot t$; $\ln\frac{S_0 - R}{S_0} = -\gamma \cdot t$. Нехай $-\gamma = b_1$; $\ln\frac{S_0 - R}{S_0} = y$.

Допараметризувавши рівняння з урахуванням заміни, отримаємо лінійну регресію $y = b_0 + b_1 t$.

Оцінивши параметри b_0, b_1, можна знайти коефіцієнт γ.

2) Для знаходження параметра β перепишемо рівняння (5):

$$I = -S_0 \cdot e^{-\frac{\beta}{\gamma}R} - R + I_0 + S_0,$$

$$I_0 + S_0 - I - R = S_0 \cdot e^{-\frac{\beta}{\gamma}R},$$

$$\ln\left(I_0 + S_0 - I - R\right) = \ln S_0 - \frac{\beta}{\gamma}R;$$

$$\ln\frac{I_0 + S_0 - I - R}{S_0} = -\frac{\beta}{\gamma}R.$$

Нехай $\left(-\frac{\beta}{\gamma} = c_1\right)$, $\ln\frac{I_0 + S_0 - I - R}{S_0} = z$.

Допараметризувавши рівняння з урахуванням заміни, отримаємо лінійну регресію $z = c_0 + c_1 R$.

Оцінивши параметри c_0, c_1, можна знайти коефіцієнт β.

Висновок. Аналітичні розрахунки показали конструктивність отриманого наближеного загального розв'язку SIR моделі через заміну експоненціальної функції на обернену пропорційність. Простота функцій загального розв'язку дозволяє їх зведення до найпростішої парної лінійної регресії для параметричного оцінювання.

Отримані результати можуть бути цікавими студентам, аспірантам та науковцям, які займаються математичною епідеміологією.

Список використаних джерел

1. *Akin L.* Understanding dynamics of pandemics / Akin L., Gozel M. G. // Turk. J. Med. Sci. – 2020. – № 50. – P. 515-519. – Режим доступу до журн.: doi:10.3906/sag-2004-133
2. *Братусь А.С.* Динамические системы и модели биологии / А.С. Братусь, А.С. Новожилов, А.П. Платонов. – Москва: Физматлит, 2009. – 400 с.
3. *Kermack W.O.* Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics. / W.O. Kermack, A.G. McKendrick // Proceedings of the Royal Statistical Society A. – 1927. – № 115. – P. 700–721. – Режим доступу до журн.: https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118
4. *Oli M.K.* Population dynamics of infectious diseases: A discrete time model. // Oli M.K., Venkataramana M., Klein P.A., Wendland L.D., Brown M.B. // Ecological modelling. – 2006. – № 198. – P. 183–194. – Режим доступу до журн.: https://doi.org/10.1016/j.ecolmodel.2006.04.007
5. *Harko T.* Exact analytical solutions of the Susceptible-Infected-Recovered (SIR) epidemic model and of the SIR model with equal death and birth rates. / T.Harko, S. N. Lobo Francisco, M. K. Mak // Applied Mathematics and Computation. – 2014. – № 236. – P. 184-194.

References

1. AKIN L. & GÖZEL M. G. (2020) Understanding dynamics of pandemics. *Turk. J. Med. Sci.*. 50. p. 515-519. doi:10.3906/sag-2004-133
2. BRATUS, A.S., NOVOZHILOV, A.S. and PLATONOV A.P. (2009) *Dinamicheskiye sistemy i modeli biologii*. Moskva: Fizmatlit.
3. KERMACK W.O. & MCKENDRICK A.G. (1927) Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics. *Proceedings of the Royal Statistical Society A.* 115. p. 700–721. doi: https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118
4. OLI, M.K., VENKATARAMANA, M., KLEIN, P. A., WENDLAND, L. D. and BROWN, M.B. (2006) Population dynamics of infectious diseases: A discrete time model. *Ecological modelling*. 198. p. 183–194. doi: https://doi.org/10.1016/j.ecolmodel.2006.04.007
5. HARKO T., LOBO FRANCISCO S. N. and MAK M. K. (2014) Exact analytical solutions of the Susceptible-Infected-Recovered (SIR) epidemic model and of the SIR model with equal death and birth rates. *Applied Mathematics and Computation*. 236. p. 184-194.

Надійшла до редколегії 5.12.2020

УДК 517.9 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/4.7

Івохін Є.В., д.ф.-м.н, професор,
Науменко Ю.О., к.т.н,
Марчук А.М., магістр

Про одну методику оцінювання ефективності рекламного тексту

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м.Київ, пр-т Глушкова, 4д, e-mail: ivohin@univ.kiev.ua

Ivohin E.V., Dr.Sci., professor,
Naumenko Y.O., Ph.D.
Marchuk A.M., magister

About one method of evaluating the effectiveness of advertising text

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: ivohin@univ.kiev.ua

У статті на прикладі аналізу текстів розглядається методика оцінки ефективності текстового змісту рекламних повідомлень. В основу запропонованої методики покладено лінгвістичні принципи, в рамках яких ефективність повідомлення аналізується з урахуванням декодування інформації цільовим адресатом повідомлення. Процедура оцінювання ґрунтується на виділенні в тексті ключових слів та фраз. Для оцінки якості змісту рекламного повідомлення використано аналог методу механічної перевірки релевантності тексту пошуковою системою, який було розширено параметрами експертної оцінки структури тексту. В якості матеріалу для дослідження розглянуто тексти, що використовуються при SEO просуванні інформаційних ресурсів.

The article considers the method of evaluating the effectiveness of the textual content of the advertising message. The basis of the proposed method is the linguistic principles, in which the effectiveness of the text is analyzed from the view of the decoding of information by the target recipient of the message. Materials used for the study were the texts used in SEO promotion of information resources, the method is based on the approach of breaking the text into keywords and phrases. The method of evaluating the effectiveness of the text is based on an analogue of the method of mechanical verification of the relevance of the text by the search engine, which was expanded by the parameters of expert evaluation of the quality of text construction.

Key words: advertising text; text effectiveness in advertising; verbal and non-verbal components; structure of the advertisment; relevance index

Роботу представив д.т.н, професор Волошин О.Ф.

Сучасна реклама є сукупністю комплексних засобів, які направлені на досягнення чітких маркетингових цілей. При здійсненні рекламних заходів необхідно пам’ятати, що перший план виступають фактори споживчого попиту. Однак, поведінкові реакції споживача суттєво пов'язані з рекламним текстом, його ефективністю та дієвістю. Ефективний рекламний текст повинен привернути увагу споживача, запам'ятатися йому, викликати або допомогти сформувати певне емоційне ставлення до закладеної в тексті інформації і, як наслідок, спонукати до певної дії. Ефективність рекламного повідомлення залежить від набору і комплектування брендових компонентів; від наявності зображення предмету рекламного повідомлення та від вказівки на товарну групу. Комунікативна функція рекламного звернення може бути реалізована вербально і граматично. Тому аналіз внутрішньої структури рекламного тексту з комунікативної точки зору є дуже важливим.

Досягнення ефекту від рекламних заходів базується на реалізації процесу комунікації, в якому послідовно досягаються певні цілі і сутність якого полягає у послідовному проходженні обов'язкових етапів. Для визначення цих етапів та їх опису потрібно формалізувати ефект, який досягається за допомогою реклами.

Ефекти рекламної комунікації розглядаються як відносно зважені та обмірковані асоціації споживача, за допомогою яких створюється позиція марки на ринку, а суб’єкт схиляється до рішення про покупку товару або користування послугою. Ефекти комунікації в моделі Дж. Р. Россітера і Л. Персі [1] виглядають так:

- потреба в товарній категорії;
- проінформованість про торгову марку (здатність ідентифікувати марку);
- ставлення до торгової марки;
- намір купити продукт певної торгової марки;
- сприяння покупці.

©Є.В.Івохін, Ю.О.Науменко, А.М.Марчук, 2020

Таким чином, під ефективною рекламною комунікацією розуміється послідовне формування у споживача, по-перше, обізнаності про марку, по-друге, ставлення до марки і, по-третє, поведінки щодо марки (купівля, повторна купівля товару або послуги).

Однак, рекламу потрібно розглядати не як тип інформації, а як комплекс психологічних заходів впливу на свідомість потенційних споживачів з метою активного просування на ринок об'єктів реклами (власне, товарів та послуг) [2]. Реклама, перш за все, — комунікація, тобто обмін інформацією, в ході якого адресант реалізує певні цілі. Якщо розглядати ефективність комунікації з точки зору її змісту (наміру), що адресант хотів сказати шляхом здійснення акту впливу на аудиторію [3], то цілком очевидно, що ефективною рекламою буде така комунікація, в якій авторський намір має дієвий ефект. Адресант в даному випадку розглядається як фактор, що породжує текстові повідомлення, оскільки створювана текстова інформація обробляється не тільки логічним способом, але й, зрозуміло, з використанням власних переваг, відчуття та емоцій, спрямованих на переконання одержувача інформації. В свою чергу, ця інформація обробляється одержувачем за принципами «люблю - не люблю», «подобається - не подобається», «добре - погано», «краще - гірше», «прийнятно - неприйнятно» [4]. Отже, одержувач рекламного тексту не завжди є споживачем товару або послуги, але він може їм стати набагато швидше, якщо текст рекламного повідомлення йому сподобається.

Формалізація процесу впливу реклами вимагає застосування різних організаційних моделей. Першими моделями аналізу рекламного впливу стали ієрархічні моделі. За своєю концепцією всі вони являють собою упорядковану послідовність будь-яких споживчих реакцій. Загальний принцип побудови такої послідовності може бути формалізований у вигляді схеми: вхідна інформація (реклама) - ряд проміжних ефектів - дія. Причому кожна наступна реакція є як би «вкладеною» по відношенню до попередньої, тобто вважається, що наступна в ієрархії споживча реакція настає лише після реалізації попередньої. Такими компонентами комунікативної ієрархії є [5]:

1. когнітивний компонент (розуміння, знання),
2. емоційний компонент (відношення),
3. конативний компонент (поведінка).

Потрібно зауважити, що поведінкові реакції споживача найменше пов'язані з рекламним текстом, тому основну увагу потрібно зосередити на перших двох компонентах комунікативної ефективності (сприйняття або розуміння повідомлення та ставлення або відношення до нього), які безпосередньо пов'язані з якістю рекламного повідомлення.

Таким чином, ефективний рекламний текст повинен привернути увагу споживача, запам'ятатися йому, викликати або допомогти сформувати певне емоційне ставлення до закладеної в тексті інформації і, в ідеалі, спонукати до певної дії. Однак, все це можливо лише в тому випадку, якщо рекламний текст буде зрозумілий одержувачу, тобто змістовна складова повідомлення буде декодована так, як хотів цього сам автор тексту. Оскільки створення та структура тексту часто є погано визначеними, то оцінювати ефективність тексту такого роду потрібно з позицій підходу, при якому сенс мовних одиниць характеризується як багаторівневий, багатовимірний, багатоплановий комплекс смислових компонентів, а результатом їх взаємодії є сутнісний сенс мовної одиниці — її «гіперсенс». Такий підхід має назву контрадиктно-синергетичний [6]. Отже, рекламний текст будучи особливим видом комунікації, не може мати в своїй структурі випадкових, комунікативно-хибних мовних одиниць, що призведе до втрати сенсу самого рекламного повідомлення.

Аналіз внутрішньої структури рекламного тексту з комунікативної точки зору дуже важливий. Якщо одержувач не може відповісти для себе на питання про те, що йому пропонується в конкретному випадку, то наявна інформаційна похибка рекламного повідомлення. У рекламному зверненні можливі дві стратегічні помилки – недостатня увага до специфіки одержувача (коли він не зможе зрозуміти адресоване йому послання, це зв’язано з недостатнім врахуванням таргетованості у посиланні), або, навпаки, надмірна увага, коли, як зазначалось вище, втрачається сенс використаних мовних одиниць. Чітке розуміння, кому адресоване повідомлення, дозволяє зробити текст більш ефективним. Такі фактори, як предмет обговорення, обізнаність про цільову аудиторію та поставлене перед автором завдання, визначають вибір мовних засобів і жанрово-стильові особливості майбутнього повідомлення. Таким чином, змістовна складова (тобто наміри автора при створенні повідомлення) реалізується в рекламному тексті у вигляді набору певних кодів, ключових слів/фраз. Виходячи із цих міркувань, пропонується оцінювати якість рекламного тексту за такими параметрами:

1. Визначення специфіки рекламного тексту і його адресата.
2. Аналіз невербальних компонентів рекламного тексту:
   - характеристика структури репрезентативного ряду (коди передачі, іконічні, іконо-графічні, риторичні, стилістичні коди) [7].
3. Аналіз структурних компонентів рекламного тексту:
   - характеристика композиційної структури рекламного тексту (заголовки комплекс, основний рекламний текст);
   - характеристика змістовної структури рекламного тексту (рекламне повідомлення, рекламне звернення, рекламне послання).
4. Аналіз вербальних компонентів рекламного тексту:
   - характеристика аргументації в рекламному тексті;
   - характеристика мовних особливостей рекламного тексту (фонетичний, лексичний, морфологічний, синтаксичний рівні мови).

Для отримання оцінок ефективності рекламного тексту пропонується методика, яка складається з декількох етапів. На першому етапі оцінюється лише ефективність тексту за допомогою методів, що застосовуються у SEO (search engine optimization)[8] у процесах просування інформаційних ресурсів сайтів у Інтернет-середовищі.

Будь-яка пошукова система індексує сайти та визначає їх релевантність. Так, при обробці пошукових запитів формується список відповідності (релевантності) сайтів до цього запиту і надається користувачу. З точки зору власника будь-якого інформаційного ресурсу, йому вигідно знаходитись на вищих позиціях цього списку, оскільки користувач нечасто переглядає результати пошуку далі 2-ї сторінки, а, частіше за все, переходить до одного з ресурсів, що з'явився на 1-ій сторінці результатів пошуку (згідно даним Google Webmaster Tools [9]). Тому власник ресурсу зацікавлений у тому, щоб підняти рівень релевантності свого сайту стосовно певних пошукових запитів для того, щоб користувачі відвідували саме його сторінку.

Оцінка релевантності формується пошуковою системою базуючись на великій кількості факторів. Наприклад, ресурси, які розміщені у Інтернеті більш тривалий час, мають потенціал отримати вищу релавантність за ресурси, що були нещодавно створені. При цьому одним з основних факторів формування оцінки є наявність великої кількості текстової інформації, що за змістом відповідає тематиці сайту. Так, одним із методів просування сайту є публікація спеціально створених статей відповідно до вимог самого ресурсу та пошукової системи. Для створення таких статей є спеціальні механізми (наприклад, vector space model для семантичної класифікації текстових даних [10]), які виділяють із тексту ключові слова та фрази, базуючись на тематиці тексту та повторюваності певних висловів. З технічної точки зору виділяється та структурується саме змістовна та дієва складова тексту.

Цей механізм можна також використовувати і для аналізу вже створених текстів. Так, при оцінці нового рекламного тексту певної тематики можна звернутись до вже існуючих текстів за цією тематикою (набору зразків або прецедентів), які мають великий рівень релевантності, і виділити з них ключові слова та фрази, поділивши їх на категорії згідно ефективності та частоти використання.

Отже, при аналізі нового тексту можна звернутися до вже існуючих текстів, з яких виділити N відповідних категорій ключових слів та фраз із оцінкою їх ефективності E_i (i — індекс відповідної категорії, $i=\overline{1,N}$, E_i приймає значення від 0 до 1). Аналіз нового тексту проводимо, виділяючи K його ключових слів та фраз з повторами, що належать до відповідних категорій. Таким чином, ефективність тексту буде визначатись як $T=\sum_{j=1}^{K}E_j \Big/ K$, де E_j — оцінка ефективності категорії, до якої належить відповідне ключове слово або фраза, $j=\overline{1,K}$.

При реалізації методики на першому етапі було проведено визначення специфіки рекламного тексту та його адресатів і аналіз структурних компонентів рекламного тексту. Очевидно, що така оцінка не буде остаточною, оскільки, виходячи із запропонованої логіки, для її підвищення використовувати лише ключові слова з найвищою ефективністю. Як наслідок, текст, який не буде нести жодного семантичного сенсу, а буде представлений лише як набір ключових слів, отримує найвищу оцінку ефективності. Така проблема є реальною: існує велика кількість сайтів створених для розповсюдження вірусів та шкідливого контенту, де саме завдяки такому механізму наповнення сайту вдається тимчасово зробити його релевантним та привернути до нього увагу користувачів.

Для реалізації другого етапу оцінки ефективності рекламного тексту пропонується оцінювати текст в цілому, тобто провести аналіз вербальних і невербальних компонентів рекламного тексту [11].

Процес автоматичного оцінювання компонентів тексту дуже складний. Для такої оцінки необхідно надати текст експерту для аналізу коректності його побудови. Пропонується проведення оцінювання створеного тексту у рамках експертної групи, результатом якого є величина А, що приймає значення від 0 до 100.

В якості оцінки змістовної та дієвої складової тексту з точки зору пошукової системи, на першому етапі отримуємо оцінку Т, що приймає значення від 0 до 1. На другому етапі експертами проводиться оцінка структури тексту, яка визначається величиною A. На третьому етапі пропонується обчислити збалансований індекс ефективності рекламного тексту, що приймає значення від 0 до 100 у вигляді $E_T = T * A$. Таким чином, рекламний текст аналізуються за усіма виділеними параметрами його якості. Це дозволяє на основі структури оцінки досягати балансу між збереженням змісту для зрозумілості повідомлення для аудиторії та його наповненням з точки зору тих рекламних функцій, що він має виконувати.

Варто зазначити, що запропоновану методику можна використовувати для аналізу аудіо- та відео-матеріалів. Проводиться аналіз виділеного з медіа-матеріалів тексту за методикою першого етапу, тобто розглядається ефективність його ключових слів та фраз. Експертні оцінки у цьому випадку мають бути отримані відповідно до якості побудови аудіо- та відео-матеріалів.

Для демонстрації методики проаналізуємо текст рекламної розсилки щодо відносно нового для українського ринку явища — розпродажу Чорної п'ятниці. Цей тренд було нещодавно запозичено із США, де він вже давно вважається звичайним щорічним явищем.

Припустимо, що текст рекламного оголошення, який буде проаналізовано задається так:

«Дуже хочете новий ***, а чекати на Чорну п'ятницю вже немає сил? У *** знижки на *** саме зараз! Чекаємо на Вас! Не відкладайте омріяну покупку до Чорної п'ятниці! У *** вже зараз знижки до -70% на ***, аксесуари та багато іншого!»

Зауважимо, що з тексту були виключені усі згадування назви магазину та рекламованого товару, але їх наявність у рекламному тексті буде врахована при аналізі.

Далі, проаналізуємо тексти з Інтернет-магазинів, які створили окремі сторінки під такий розпродаж. Як набір зразків було використано тексти перших 3-х сайтів, що пошукова система надає за запитом «чорна п'ятниця», та виділено їх найефективніші ключові слова та фрази (у рамках SEO це називається виділенням семантичного ядра).

У першу чергу визначається середній обсяг текстового повідомлення, характерний для реклами такого роду. Так, кількість символів без пропусків для тексту сторонки сайту складала близько 5000, а для невеликого повідомлення банерної реклами — близько 200.

У результаті отримано такі висновки. Найчастіше зустрічалися слова «чорна», «п'ятниця» та їх комбінація (приблизно 15 входжень на 5000 символів). Ключова фраза «чорна п'ятниця» отримує індекс ефективності 1. Далі, за частотою повторень йдуть повідомлення про акцію та пряме нагадування про товари та категорії товарів. Такі ключові слова як «знижка», «розпродаж», «акція», «товар», «аксесуар» і т.д., у середньому, згадуються 11-13 раз серед 5000 символів. Такі ключові слова отримують індекс ефективності 0.86. Наступним за показником частоти йде згадування назви самого магазину, що проводить розпродаж, що зустрічається приблизно 8 раз на 5000 символів. Таке ключове слово отримує індекс ефективності 0.53.

Обчислимо ефективність зазначеного вище рекламного оголошення, виходячи із виділених з набору зразків ключових слів та фраз. Цей текст має 4 згадування про товар (індекс 0.86), 2 згадування про знижки (індекс 0.86), 2 входження ключової фрази «чорна п'ятниця» (індекс 1), та 2 згадування про назву магазину (індекс 0.53). Отже, загальна кількість його ключових фраз із повторами K = 10. Визначаємо його оцінку ефективності T у порядку читання текстового повідомлення у вигляді:

$$T = \frac{0.86+1+0.53+0.86+0.86+1+0.53+0.86+0.86+0.86}{10} = 0.882.$$

Опитування та його обробка у рамках експертної групи дозволила оцінити якість структури даного рекламного повідомлення величиною A = 89. Із недоліків тексту було відзначено надмірний «дієвий тиск» на споживача та те, що обсяг тексту без пропусків складає менше, ніж рекомендовані для повідомлення такої тематики, 200 символів.

Таким чином, можна отримати загальний індекс ефективності даного тексту $E_T = T * A = 0.882 * 89 = 78.498$.

Для порівняння, текст повідомлення наступного змісту: «Хочете омріяну покупку на розпродажі Чорної п'ятниці? Готуйтеся, вас очікують знижки до 70%» за такою методикою отримує індекс ефективності $T = (0.86 + 1 + 0.86)/3 = 0.906$, але оцінка структури тексту, надана експертами, становіть лише 75, тоді, $E_T = T * A = 0.906 * 75 = 67.95$. Це дозволяє зробити висновок про більш високий рівень комунікативної ефективності першого рекламного повідомлення.

Висновки

В даній роботі розглянуто методику оцінювання ефективності текстових рекламних повідомлень. В основу запропонованої методики покладено лінгвістичні принципи, на основі яких аналізується ефективність змісту повідомлення з урахуванням декодування інформації цільовим адресатом повідомлення. Процедура оцінювання ґрунтується на виділенні в тексті ключових слів та фраз. Для оцінки якості контенту рекламного повідомлення використано аналог методу аналізу релевантності тексту за допомогою пошукових систем, зміст якого було розширено параметрами експертної оцінки структури тексту. В якості матеріалу для дослідження розглянуто та проаналізовано тексти, що використовуються при SEO-просуванні різних інформаційних ресурсів.

Список використаних джерел

1. *Росситер Дж.Р.* Реклама и продвижение товаров. – СПб. : Питер,2000. – 656 с.
2. *Феофанов О.А.* Реклама : Новые технологии – СПб. : Роза мира, 2000. – 384 с.
3. Остин Дж.Л. Слово как действие – М. : Прогресс, 1986. – Вып. XVII. – 22–130 с.
4. *Виханский О.С.* Менеджмент – М. : Экономистъ, 2008. – 648 с.
5. *Кутлалиев А.* Эффективность рекламы – М. : Эксмо, 2005. – 418 с.
6. *Мышкин, Н.Л.* Лингводинамика текста : контрадиктно-синергетический подход – Уфа, 1999. – 56с.
7. *Эко У.* Отсутствующие структуры. Введение в семиологию – М. : Прогресс, 1998. – 332 с.
8. [Інтернет-ресурс]. - Режим доступа: https://developers.google.com/search/docs/advanced/get-started
9. [Інтернет-ресурс]. - Режим доступа: https://www.theleverageway.com/blog/how-far-down-the-search-engine-results-page-will-most-people-go/
10. *Katrin Erk.* A structured vector space model for word meaning in context – EMNLP '08 Proceedings of the Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing, 2008.
11. *Фещенко Л.Г.* Структура рекламного текста – СПб. : Петербургский институт печати, 2003. – 232 с.

References

1. *Rossiter J.R.* Advertising Communications and Promotion Management. –SPb. : Piter,2000. – 656 p.
2. *Feofanov O.A.* Reklama : Novie tehnologii– SPb. : Roza mira, 2000. – 384 c.
3. *Austin J.L.* How to Do Things with Words – M. : Progress, 1986. – Ed. XVII. – 22–130 p.
4. *Vakhanskiy O.S.* Management – M. : Ekonomist, 2008. – 648 p.
5. *Kutlaliev A.*Effectivnost reklami – M. : Eksmo, 2005. – 418 p.
6. *Mishkin N.L.*. Lingvodinamika teksta – Ufa, 1999. – 56p.
7. *Eko U.* The Missing Structure. Introduction to Semiology – M. : Progres, 1998. – 332 p.
8. [Internet-resource]. – Source: https://developers.google.com/search/docs/advanced/get-started
9. [Internet-resource]. – Source: https://www.theleverageway.com/blog/how-far-down-the-search-engine-results-page-will-most-people-go/
10. *Katrin Erk.* A structured vector space model for word meaning in context – EMNLP '08 Proceedings of the Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing, 2008.
11. *Feschenko L.G.* Struktura reklamnogo teksta – SPb. : Peterburgskiy institute pechati, 2003. – 232 p.

Надійшла до редколегії 16.12.2020

УДК 004.657 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/4.8

Л.Л. Омельчук [1], *к.ф.-м.н, доц.*
Н.Г. Русіна [2], *к.п.н.*

Автоматизований аналіз освітньо-професійної програми «Інформатика», що реалізується на факультеті комп'ютерних наук та кібернетики, з програмами інших закладів вищої освіти за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки»

[1.2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Академіка Глушкова 4д,

e-mail: [1] l.omelchuk@knu.ua
e-mail: [2] rusina@knu.ua

L.L. Omelchuk [1], *PhD., Associate Prof*
N.G. Rusina [2], *PhD.*

Automated analysis of the educational-professional program "Informatics", implemented at the faculty of computer science and cybernetics, with the programs of other institutions of higher education in the specialty 122 "Computer Science"

[1.2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,

e-mail: [1] l.omelchuk@knu.ua
e-mail: [2] rusina@knu.ua

У статті наведено порівняльний аналіз освітньо-професійної програми «Інформатика» першого (бакалаврського) рівня вищої освіти галузі знань 12 «Інформаційні технології», спеціальності 122 «Комп'ютерні науки», що реалізується на факультеті комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка з освітньо-професійними програмами того ж рівня й спеціальності інших закладів вищої освіти України. При аналізі здійснювалось їх співставлення з затвердженим стандартом першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки». З метою проведення порівняльного аналізу авторами розроблено базу даних освітніх програм. Результатом дослідження є перевірка освітньої програми «Інформатика» на повноту та достатність. Проаналізовано співвідношення компетентностей та дисциплін в різних програмах за спільною спеціальністю.

Ключові слова: комп'ютерні науки, інформатика, база даних, освітня програма,.

The article presents a comparative analysis of the educational and professional program "Informatics" of the first (bachelor's) level of higher education in the field of knowledge 12 "Information Technology", specialty 122 "Computer Science", which is implemented at the Faculty of Computer Science and Cybernetics Taras Shevchenko National University of Kyiv with educational and professional programs of the same level and specialties of other institutions of higher education in Ukraine. During the analysis, they were compared with the approved standard of the first (bachelor's) level of higher education in the specialty 122 "Computer Science".

In order to conduct a comparative analysis, the authors developed and completed a educational program database. The result of the study is checking the educational program for completeness, that is lack of competencies that are not provided by any discipline and sufficiency, that is the lack of disciplines that do not provide any competence. The ratio of competencies and disciplines in different programs in a common specialty is analyzed.

Keywords — computer science, informatics, database, educational program.

Статтю представила д.ф.-м.н., доцент Розора І.В.

© Л.Л. Омельчук, Н.Г. Русіна, 2020

Вступ

ІТ-індустрія відіграє важливу роль для розвитку економіки в Україні, тому підготовці фахівців в галузі «Інформаційні технології» потрібно приділяти значну увагу.

В роботах [3, 4, 5] було проаналізовано та висвітлено проблеми, зокрема, проектування та розробки стандартів освітньо-професійної підготовки в галузі інформаційних технологій.

З метою моніторингу освітньо-професійної програми «Інформатика» та врахування досвіду аналогічних вітчизняних програм, покращення якості ІТ освіти виникла необхідність порівняти наявні у вільному доступі освітні програми першого (бакалаврського) рівня за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки».

Підґрунтям такого порівняння стали Закон «Про вищу освіту» [1] та затверджений Наказом Міністерства освіти і науки України за №962 від 10.07.2019 році стандарт вищої освіти за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки» для першого (бакалаврського) рівня вищої освіти [2].

Порівняльний аналіз ОПП «Інформатика» з програмами інших закладів вищої освіти за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки»

Проведено аналіз освітньо-професійних програм на здобуття освітнього ступеня бакалавр галузі знань 12 «Інформаційні технології» за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки» на основі порівняння їх змісту відносно загальних (ЗК) та спеціальних (фахових, СК) компетентностей, визначених Стандартом.

Для дослідження авторами відібрано наступні освітньо-професійні програми (ОПП):

- «Інформатика», що реалізується на факультеті математики і інформатики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна (ХНУ імені В.Н. Каразіна) [6];
- «Комп'ютерні науки», що вивчається на факультеті інформаційних технологій в Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка» (НТУ «Дніпровська політехніка») [7];
- «Системи і методи штучного інтелекту», яка викладається в Інституті прикладного системного аналізу Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут» (КПІ ім. Ігоря Сікорського) [8];
- «Інформатика», що реалізується на факультеті комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (ФКНК) [9];
- «Комп'ютерні науки», яка вивчається на факультеті інформаційних технологій Київського національного університету імені Тараса Шевченка (ФІТ) [10].

Стандартом визначено п'ятнадцять ЗК та шістнадцять СК. Зважаючи на більшу важливість для розвинення практичних навичок за фахом набуття спеціальних компетентностей в дослідженні зосередимося на них.

Співвідношення освітніх компонент та СК за обраними ОПП наведено в таблиці 1.

Таблиця 1. Співвідношення освітніх компонент та СК за ОПП

ФКНК	ФІТ	ХНУ імені В.Н. Каразіна	НТУ «Дніпровська політехніка»	КПІ ім. Ігоря Сікорського
СК01				
математична логіка, теорія алгоритмів, алгебра та геометрія, математичний аналіз, дискретна математика, диференціальні рівняння, теорія ймовірностей, математична статистика,	математика для комп'ютерних наук, дискретні структури, основи комп'ютерної графіки,	математичний аналіз, елементи алгебри та теорії чисел, елементи математичної логіки, елементарної та дискретної математики, аналітична геометрія, лінійна алгебра, дискретна математика, диференціальні рівняння, теорія	вища математика, дискретна математика	засади усного професійного мовлення (риторика), Україна в контексті історичного розвитку Європи, фізичне виховання, безпека життєдіяльності та цивільний

основи дослідження операцій, дослідження операцій, теорія програмування, теорія керування та основи робототехніки		ймовірностей та її застосування, вступ до математичної статистики, алгоритми і структури даних, математична логіка і мова Prolog, методи оптимізації і дослідження операцій, декларативне програмування (Haskell і Prolog), вступ до штучного інтелекту, науково-дослідницька практика, підготовка кваліфікаційної роботи		захист, методи та системи штучного інтелекту, теорія прийняття рішень
СК02				
екологічні й економічні процеси та їх моделювання, математичний аналіз, диференціальні рівняння, теорія ймовірностей	теорія ймовірностей для комп'ютерних наук, системний аналіз, моделювання систем	алгоритми і структури даних, математична логіка і мова Prolog, методи оптимізації і дослідження операцій, декларативне програмування (Haskell і Prolog), вступ до штучного інтелекту, науково-дослідницька практика, підготовка кваліфікаційної роботи	теорія ймовірностей та математична статистика	безпека життєдіяльності та цивільний захист
СК03				
математична логіка, теорія алгоритмів, дискретна математика	алгоритмізація та програмування, проектування та аналіз алгоритмів, курсова робота з проектування алгоритмів та програмування, випускна кваліфікаційна робота бакалавра	математичний аналіз, елементи алгебри та теорії чисел, елементи математичної логіки, елементарної та дискретної математики, аналітична геометрія, лінійна алгебра, дискретна математика, диференціальні рівняння, теорія ймовірностей та її	алгоритмізація та програмування, об'єктно-орієнтоване програмування, алгоритми та структури даних	економіка і організація виробництва, технології розподілених систем і паралельних обчислень

		застосування, вступ до математичної статистики, об'єктно-орієнтовне програмування (мова C++), об'єктно-орієнтоване програмуван. (мова Java), алгоритми і структури даних, математична логіка і мова Prolog, методи оптимізації і дослідження операцій, декларативне програмування (Haskell і Prolog), методи розробки інтерфейсу користувача, шаблони об'єктно-орієнтованого програмування, курсова науково-дослідницька робота, вступ до штучного інтелекту, науково-дослідницька практика, підготовка кваліфікаційної роботи		
СК04				
екологічні й економічні процеси та їх моделювання, чисельні методи, теорія керування та основи робототехніки	чисельні методи, моделювання систем	математичний аналіз, елементи алгебри та теорії чисел, елементи математичної логіки, елементарної та дискретної математики, аналітична геометрія, лінійна алгебра, дискретна математика, диференціальні рівняння, теорія ймовірностей та її застосування, вступ до математичної статистики, алгоритми і структури даних, математична логіка і	вища математика, моделювання систем	засади усного професійного мовлення (риторика), україна в контексті історичного розвитку європи, фізичне виховання, іноземна мова, економіка і організація виробництва, математичний аналіз, теоретичні основи електротехніки та електроніки, дослідження

		мова Prolog, методи оптимізації і дослідження операцій, декларативне програмування (Haskell і Prolog), курсова науково-дослідницька робота, вступ до штучного інтелекту, науково-дослідницька практика, підготовка кваліфікаційної роботи		операцій, курсова робота з об'єктно-орієнтованого програмування
СК05				
екологічні й економічні процеси та їх моделювання, основи дослідження операцій, дослідження операцій, чисельні методи	дослідження операцій, моделювання систем	алгоритми і структури даних , курсова науково-дослідницька робота, вступ до штучного інтелекту, науково-дослідницька практика, підготовка кваліфікаційної роботи	методи оптимізації та дослідження операцій	теорія ймовірностей, ймовірносні процеси та математична статистика, інтелектуальний аналіз даних, курсова робота з систем баз даних
СК06				
екологічні й економічні процеси та їх моделювання	системний аналіз, проектування інформаційних систем, проектно-технологічна практика, переддипломна практика, випускна кваліфікаційна робота бакалавра	архітектура обчислювальних систем, операційні системи, курсова науково-дослідницька робота, вступ до штучного інтелекту, науково-дослідницька практика, підготовка кваліфікаційної роботи	інтелектуальний аналіз даних	проектування інформаційних систем, моделювання систем, методи та системи штучного інтелекту, фізика коливальних процесів, комп'ютерна схемотехніка та архітектура комп'ютера, основи системного аналізу
СК07				
теорія прийняття рішень, підготовка кваліфікаційної роботи	моделювання систем, проектно-технологічна практика, переддипломна практика,	об'єктно-орієнтовне програмування (мова С++), об'єктно-орієнтоване програмуван. (мова Java), архітектура	інтелектуальний аналіз даних, моделювання систем	безпека життєдіяльності та цивільний захист, об'єктно-орієнтоване

бакалавра, теорія ймовірностей	випускна кваліфікаційна робота бакалавра	обчислювальних систем, операційні системи, методи розробки інтерфейсу користувача, розробка компіляторів для предметно-орієнт. мов, вступ до штучного інтелекту, науково-дослідницька практика, підготовка кваліфікаційної роботи		програмування, інтелектуальний аналіз даних, фізика коливальних процесів, теоретичні основи електротехніки та електроніки, курсова робота з теорії прийняття рішень
СК08				
об'єктно-орієнтоване програмування, інструментальні середовища та технології програмування, системне програмування, інформаційні технології, програмування, теорія програмування	алгоритмізація та програмування, об'єктно-орієнтоване програмування, проектування та аналіз алгоритмів, технологія створення програмних продуктів, непроцедурне програмування, курсова робота з проектування алгоритмів та програмування, проектно-технологічна практика, переддипломна практика, випускна кваліфікаційна робота бакалавра	програмування, об'єктно-орієнтовне програмування (мова C++), об'єктно-орієнтоване програмуван. (мова java), архітектура обчислювальних систем, операційні системи, математична логіка і мова Prolog, декларативне програмування (Haskell і Prolog), методи розробки інтерфейсу користувача, розробка компіляторів для предметно-орієнт. мов, шаблони об'єктно-орієнтованого програмуван., науково-дослідницька практика, підготовка кваліфікаційної роботи	алгоритмізація та програмування, об'єктно-орієнтоване програмування, алгоритми та структури даних, виконання кваліфікаційної роботи	економіка і організація виробництва, алгебра та аналітична геометрія, дискретна математика, алгоритмізація та програмування, лінійна алгебра, фізика коливальних процесів, технології розподілених систем і паралельних обчислень
СК09				
інструментальні середовища та технології програмування, інформаційні технології, бази	бази даних та знань, високопродуктивні обчислення, проектування та розробка веб-	архітектура обчислювальних систем, операційні системи, вступ до SQL баз даних, технології web-	організація баз даних та знань, курсова робота з організації баз даних та знань, web-технології	дискретна математика, фізика, курсова робота алгоритмізація та

даних та інформаційні системи	застосувань	програмування, теорія і методи проектування реляційних баз даних, курсова науково-дослідницька робота, науково-дослідницька практика, підготовка кваліфікаційної роботи	та web-дизайн	програмування, комп'ютерні мережі, теорія прийняття рішень
СК10				
інструментальні середовища та технології програмування, інформаційні технології, виробнича практика, підготовка кваліфікаційної роботи бакалавра	технологія створення програмних продуктів, проектування інформаційних систем, управління IT проектами	архітектура обчислювальних систем, операційні системи, технології web-програмування, курсова науково-дослідницька робота, підготовка кваліфікаційної роботи	проектування інформаційних систем, передатестаційна практика, виконання кваліфікаційної роботи	алгоритмізація та програмування, проектування інформаційних систем, обчислювальна математика, комп’ютерна схемотехніка та архітектура комп’ютера, теорія інформації та кодування
СК11				
теорія прийняття рішень, обчислювальна геометрія та комп'ютерна графіка, інтелектуальні системи	основи обчислювального інтелекту, інтелектуальний аналіз даних	вступ до SQL баз даних, теорія і методи проектування реляційних баз даних, курсова науково-дослідницька робота, науково-дослідницька практика, підготовка кваліфікаційної роботи	інтелектуальний аналіз даних, комп'ютерна графіка, передатестаційна практика	об’єктно-орієнтоване програмування, системи баз даних, математична логіка та теорія алгоритмів, технології розробки програмного забезпечення, основи системного аналізу, курсова робота з об’єктно-орієнтованого програмування
СК12				
системне програмування	архітектура обчислювальних систем, операційні	інформаційні мережі, науково-дослідницька практика, підготовка	адміністрування операційних систем, адміністрування	проектування та аналіз обчислюваль-них алгоритмів,

	системи	кваліфікаційної роботи	та моніторинг комп'ютерних мережевих систем, операційні системи, архітектура комп'ютерів	методи та системи штучного інтелекту, курсова робота з об'єктно-орієнтованого програмування
СК13				
підготовка кваліфікаційної роботи бакалавра, архітектура обчислювальних систем та комп'ютерні мережі	архітектура обчислювальних систем, комп'ютерні мережі, операційні системи	інформаційні мережі, вступ до SQL баз даних, технології web-програмування, теорія і методи проектування реляційних баз даних, науково-дослідницька практика, підготовка кваліфікаційної роботи	операційні системи, комп'ютерні мережі, курсова робота з комп'ютерних мереж	іноземна мова, комп'ютерні мережі, теоретичні основи електротехніки та електроніки, дослідження операцій
СК14				
алгебраїчні структури, криптографія та захист інформації	комп'ютерні мережі, операційні системи, технології захисту інформації та кібербезпека	науково-дослідницька практика, підготовка кваліфікаційної роботи	захист інформації в інформаційно-комунікаційних системах	моделювання систем, лінійна алгебра, технології розподілених систем і паралельних обчислень, курсова робота з теорії прийняття рішень
СК15				
інформаційні технології	системний аналіз, проектування інформаційних систем, управління ІТ проектами, проектно-технологічна практика, переддипломна практика, випускна кваліфікаційна робота бакалавра	методи розробки інтерфейсу користувача, курсова науково-дослідницька робота, науково-дослідницька практика, підготовка кваліфікаційної роботи	економіка і управління підприємством, системи штучного інтелекту	інтелектуальний аналіз даних
СК16				
системне програмування, інформаційні технології,	високопродуктивні обчислення,	вступ до програмування паралельних процесів (мови C++ і	технологія розподілених систем та паралельних	математичний аналіз, курсова робота з об'єктно-

розподілене та паралельне програмування		java), розробка компіляторів для предметно-орієнт. мов, паралельні та розподілені обчислення, науково-дослідницька практика, курсова науково-дослідницька робота, підготовка кваліфікаційної роботи	обчислень	орієнтованого програмування

Теоретичне підґрунтя аналізу ОП

З метою здійснення порівняльного аналізу освітньо-професійної програми «Інформатика» першого (бакалаврського) рівня вищої освіти галузі знань 12 «Інформаційні технології», спеціальності 122 «Комп'ютерні науки», що реалізуються на факультеті комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка з освітньо-професійними програмами того ж рівня вищої освіти і спеціальності інших закладів вищої освіти України введемо до розгляду наступні визначення.

Множина спеціальностей:

$SP = \{sp_i \mid i=1..n\}$.

Для кожної $sp \in SP$ введемо до розгляду наступні поняття:

множина загальних компетентностей спеціальності:

$ZK_{sp}=\{zk_i \mid i=1..z\}$;

множина фахових компетентностей спеціальності:

$FK_{sp}=\{fk_i \mid i=1..u\}$;

множина компетентностей спеціальності:

$K_{sp}= ZK_{sp} \cup FK_{sp}$;

множина освітніх програм спеціальності:

$OP_{sp}=\{op_i \mid j=1..m\}$.

Для кожної $op \in OP_{sp}$ введемо до розгляду поняття:

Множина обов'язкових освітніх компонент (дисциплін) освітньої програми:

$OK_{op[sp]} = \{ok_i \mid i=1..t\}$.

Для кожної дисципліни $ok \in OK_{op[sp]}$ введемо до розгляду поняття:

множина компетентностей дисципліни:

$K_{ok} = \{ k_{ok} \mid k_{ok} \in K_{sp} \ \& \ Z_{op[sp]}(k_{ok}, ok)\}$.

Кількість компетентностей дисципліни $\left|K_{ok}\right|$.

Бінарний предикат забезпечення компетентності дисципліною:

$Z_{op[sp]}(k_{sp}, ok_i) =$

T, якщо в $ok_i \in OK_{op[sp]}$ & $k_{sp} \in K_{sp}$ & в op наявна залежність k_{sp} та ok_i в матриці забезпечення компетентностей освітніми компонентами.

F, якщо в $ok_i \in OK_{op[sp]}$ & $k_{sp} \in K_{sp}$ & в op відсутня залежність k_{sp} та ok_i в матриці забезпечення компетентностей освітніми компонентами.

не визначено, для інших випадків.

Визначимо множину попарно різних дисциплін за освітніми програмами однієї спеціальності:

$OKD_{[sp]} = \forall\ ok_{sp} \in OKD_{[sp]} \rightarrow (\ \exists\ op_{sp} \in OP_{sp}\ \&\ ok_{sp} \in OK_{op[sp]}) \& (\forall\ ok_1\ \forall\ ok_1\ (ok_1 \in OKD_{[sp]} \& ok_2 \in OKD_{[sp]}) \rightarrow ok_1 \neq ok_2)$.

Спільні компетентності множини попарно різних дисциплін за освітніми програмами однієї спеціальності: $Spk(OKD_{[sp]})$:

$k_{sp} \in Spk(OKD_{[sp]}) \leftrightarrow k_{ok} \in K_{sp}\ \&$

$\forall\ ok_{sp} \in OKD_{[sp]}\ Z_{op[sp]}(k_{ok}, ok_{sp})\}$.

Кількість спільних компетентностей множини попарно різних дисциплін за освітніми програмами однієї спеціальності: $\left| Spk(OKD_{[sp]}) \right|$.

Тоді, назвемо *відсотком подібності множини* попарно різних дисциплін за освітніми програмами однієї спеціальності:

$$Pod(OKD_{[sp]}) = \left(\sum_{i=1}^{|OKD[sp]|} (Spk(OKD_{[sp]}) / \left|K_{ok[i]}\right|) \right) * 100 / \left| OKD_{[sp]} \right|.$$

Автоматизація аналізу ОПП

Засобом автоматизації аналізу авторами обрано СКБД MS SQL Server [11]. Для дослідження створено базу даних

EducationPrograms, яка містить наступні таблиці:

- Universities ([PK] Id, Name, EDBO);
- Faculties ([PK] Id, Name, [FK] UniversityId);
- SpecialityCompetences ([PK] Id, Name, [FK] SpecialityId, [FK] CompetenceId);
- EdProgramsTypes ([PK] Id, TypeName);
- Specialisations ([PK] Id, Name);
- Competences ([PK] Id, Competence, [FK] CompetenceTypeId);
- EpSubjectCompetence ([PK] Id, [FK] SubjectId, [FK] SpecialityCompetenceId);
- Subjects ([PK] Id, Name, [FK] ERrogramId, Credit, [FK] ControlId);
- ControlTypes ([PK] Id, ControlTypeName);
- CompetencesTypes ([PK] Id, CompType);
- EpSubjectOutcomes ([PK] Id, [FK] SubjectId, [FK] LearningOutcomeId);
- EducationPrograms ([PK] Id, Name, [FK] SpecialityId, [FK] EdPrTypeId, EDBO, [FK] FacultyId, ImplementationDate);
- LearningOutcomes ([PK] Id, [FK] SpecialityId, LOName, LearningOutcome).

З метою здійснення порівняльного аналізу авторами розроблено SQL-запити до сформованої бази даних.

На поточний момент в базі даних в наявності:

- одна спеціальність (122 «Комп'ютерні науки»);
- 15 ЗК, 16 СК та 17 програмних результатів навчання;
- 5 ОПП з 5 структурних підрозділів 4 ЗВО;
- 195 обов'язкових дисциплін;
- 766 співвідношень компетентностей до дисциплін.

З них сформовано 18915 різних пар дисциплін за описаними освітніми програмами. Серед яких, в 6455 парах є спільні компетентності. Для цих пар визначено описаний вище коефіцієнт подібності пар дисциплін.

Порівняльний аналіз ОПП

В роботі проаналізовано дисципліни ОПП за компетентностями (СК, ЗК). Відповідно до проведеного автоматизованого аналізу в ОПП «Інформатика» відсутні компетентності, що не забезпечуються жодною дисципліною (повнота програми); в ОПП «Інформатика» відсутні дисципліни, що не забезпечують жодної компетентності (достатність). Тобто освітня програма відповідає вимогам законодавства України.

В таблиці 2 наведено для співставлення середні кількості компетентностей, що визначені стандартом на одну обов'язкову дисципліну обраних для аналізу ОПП за спеціальністю 122 «Комп'ютетні науки».

Таблиця 2. Середня кількість компетентностей на дисципліну ОПП

Назва ОПП (ВНЗ)	Кількість компет.	Компет. (СК, ЗК)
Інформатика (ФКНК)	2,75	ЗК
Інформатика (ФКНК)	1,93	СК
Інформатика (ХНУ імені В.Н. Каразіна)	3,44	ЗК
Інформатика (ХНУ імені В.Н. Каразіна)	4,19	СК
Комп'ютерні науки (ФІТ)	4,39	ЗК
Комп'ютерні науки (ФІТ)	1,93	СК
Комп'ютерні науки (НТУ «Дніпровська політехніка»)	1,67	ЗК
Комп'ютерні науки (НТУ «Дніпровська політехніка»)	1,38	СК
Системи і методи штучного інтелекту (КПІ ім. Ігоря Сікорського)	2,24	ЗК
Системи і методи штучного інтелекту (КПІ ім. Ігоря Сікорського)	1,92	СК

Середнє значення кількості ЗК на одну дисципліну за дослідженими ОПП складає 2,89.

Середнє значення кількості СК на одну дисципліну за дослідженими ОПП складає 2,27.

Таким чином, за ЗК показник ОПП «Інформатика» (ФКНК) нижчий за середній показник на 0,13.

Таким чином, за СК показник ОПП «Інформатика» (ФКНК) нижчий за середній показник на 0,34.

Ці показники є найбільш наближеними до середніх серед усіх досліджених ОПП.

В таблиці 3 наведено для співставлення співвідношення середньої кількості кредитів та дисциплін обраних для аналізу ОПП за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки» на одну компетентність, що визначена стандартом вищої освіти. Таке співставлення дає можливість проаналізувати наповненість різних ОПП. за спільною спеціальністю.

Таблиця 3. Співвідношення середньої кількості кредитів та дисциплін ОПП на компетентності

Назва ОПП (ВНЗ)	Кільк. кред.	Кіль к.дис	Ком пет.
Інформатика (ФКНК)	22,73	4,40	ЗК
Інформатика (ФКНК)	17,00	3,38	СК
Інформатика (ХНУ імені В.Н. Каразіна)	41,86	8,86	ЗК
Інформатика (ХНУ імені В.Н. Каразіна)	37,69	8,13	СК
Комп'ютерні науки (ФІТ)	36,80	9,07	ЗК
Комп'ютерні науки (ФІТ)	16,25	3,38	СК
Комп'ютерні науки (НТУ «Дніпровська політехніка»)	10,80	2,00	ЗК
Комп'ютерні науки (НТУ «Дніпровська політехніка»)	10,75	2,25	СК
Системи і методи штучного інтелекту (КПІ ім. Ігоря Сікорського)	21,20	4,33	ЗК
Системи і методи штучного інтелекту (КПІ ім. Ігоря Сікорського)	19,25	4,31	СК

Середнє значення кількості кредитів на одну ЗК за дослідженими ОПП складає 26,68.

Середнє значення кількості кредитів на одну СК за дослідженими ОПП складає 20,19.

Тобто, показник співвідношення кількості кредитів на одну ЗК в ОПП «Інформатика» (ФКНК) нижчий за середній показник на 3,95, а показник співвідношення кількості кредитів на одну СК в ОПП «Інформатика» (ФКНК) нижчий за середній показник на 3,19.

Середнє значення кількості дисциплін в ОПП на одну ЗК за дослідженими ОПП складає 5,73.

Середнє значення кількості дисциплін в ОПП на одну СК за дослідженими ОПП складає 4,29.

Таким чином, показник співвідношення кількості дисциплін на одну ЗК в ОПП «Інформатика» (ФКНК) нижчий за середній показник на 1,33, а показник співвідношення кількості дисциплін на одну СК в ОПП «Інформатика» (ФКНК) нижчий за середній показник на 0,91.

Ці показники є одні з найбільш наближених до середніх результатів серед усіх досліджених ОПП.

В таблиці 4 наведено фрагмент порівняння дисциплін обраних для аналізу ОПП за відсотком подібності (*Spk*) та кількості компетентностей опанування яких забезпечується дисципліною.

Таблиця 4. Фрагмент порівняння дисциплін освітніх програм за відсотком подібності

Дисципліна 1 (ok_1)	**ОПП (op_1)**	**Дисципліна 2 (ok_2)**	**ОПП (op_2)**	**Відсоток подіб-ності Pod({ok_1, ok_2})**	**Кільк. Сп. Комп. |Spk({ok_1, ok_2})|**	**Кільк. комп. дисц 1 |K_{ok2}|**	**Кільк. комп. дисц. 2 |K_{ok1}|**
Диференціальні рівняння	Інформатика (ФКНК)	Математичний аналіз	Інформатика (ФКНК)	83	2	2	3
Інструмент. середовища та технології програм.	Інформатика (ФКНК)	Об'єктно-орієнтоване програмування	Інформатика (ФКНК)	80	3	5	3
Дослідження операцій	Інформатика (ФКНК)	Математична статистика	Інформатика (ФКНК)	75	1	2	1
Вища математика	Комп'ютерні науки (НТУ «Дніпров. політехніка»)	Теорія керування та основи робототех.	Інформатика (ФКНК)	83	2	3	2
Дискретна математика	Комп'ютерні науки (НТУ «Дніпров. політехніка»)	Теорія програмування	Інформатика (ФКНК)	83	2	2	3
Дискретні структури	Комп'ютерні науки (ФІТ)	Математичний аналіз	Інформатика (ФКНК)	83	2	2	3

Науковий образ світу	Комп'ютерні науки (ФІТ)	Науковий образ світу	Інформатика (ФКНК)	83	4	6	4
Алгоритмізація та програмування	Системи і методи штучного інтелекту (КПІ ім. Ігоря Сікорського)	Інструмент. середовища та технології програм.	Інформатика (ФКНК)	80	3	3	5
Цивілізаційні процеси в українському суспільстві	Комп'ютерні науки (НТУ «Дніпров. політехніка»)	Вступ до університетських студій	Інформатика (ФКНК)	80	3	3	5
Паралельні та розподілені обчислення	Інформатика (ХНУ імені В.Н. Каразіна)	Розподілене та паралельне програмування	Інформатика (ФКНК)	75	2	4	2
Організація баз даних та знань	Комп'ютерні науки (НТУ «Дніпров. політехніка»)	Бази даних та інформаційні системи	Інформатика (ФКНК)	75	1	1	2
Вступ до програм. паралельних процесів (мови С++ і Java)	Інформатика (ХНУ імені В.Н. Каразіна)	Розподілене та паралельне програмування	Інформатика (ФКНК)	75	2	4	2
Управління ІТ-проектами	Комп'ютерні науки (ФІТ)	Системне програмування	Інформатика (ФКНК)	16	1	8	5
Лінійна алгебра	Комп'ютерні науки (НТУ «Дніпров. політехніка»)	Інформаційні технології	Інформатика (ФКНК)	15	1	6	7

Наведене в таблиці 4 співставлення дає наглядне уявлення про співвідношення змісту конкретних обов'язкових освітніх компонент у різних ОПП за спільною спеціальністю.

Висновки

Проведений порівняльний аналіз освітньо-професійної програми першого (бакалаврського) рівня вищої освіти «Інформатика» галузі знань 12 «Інформаційні технології», спеціальності 122 «Комп'ютерні науки», що реалізуються на факультеті комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного універистету імені Тараса Шевченка з освітньо-професійними програмами того ж рівня вищої освіти й спеціальності інших закладів вищої освіти України показав: в ОПП «Інформатика» відсутні компетентності, що не забезпечуються жодною дисципліною (повнота програми); в ОПП «Інформатика» відсутні дисципліни, що не забезпечують жодної компетентності (достатність). Тобто освітня програма відповідає вимогам законодавства України.

Також проаналізовано співвідношення компетентностей та освітніх компонент у різних ОПП, проведено порівняльний аналіз дисциплін ОПП за компетентностями.

Проведений аналіз подібності дисциплін показує, що змістовно подібні дисципліни ОПП різних закладів вищої освіти за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки» забезпечують аналогічні компетентності.

Здійснений аналіз сприятиме покращенню рівня надання освітніх послуг за ОПП першого (бакалаврського) рівня вищої освіти «Інформатика», що реалізується на факультеті комп'ютерних наук та кібернетики Київського Національного університету імені Тараса Шевченка.

Список використаних джерел

1. Закон України “Про вищу освіту” від 01.07.2014 р. №1556-VII // Відомості Верховної Ради України. – 2014. – № 37-38. – Ст. 2004 [Електронний ресурс]. – 2014. – Режим доступу до ресурсу: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1556-18#Text
2. Наказ МОН України «Про затвердження стандарт вищої освіти за спеціальністю 122 «Комп’ютерні науки» для першого (бакалаврського) рівня вищої освіти» [Електронний ресурс]. – 2019. – Режим доступу до ресурсу: https://mon.gov.ua/storage/app/media/vishcha-osvita/zatverdzeni%20standarty/2019/07/12/122-kompyuterni-nauki-bakalavr.pdf.
3. Омельчук Л.Л. Порівняльний аналіз українського стандарту освітньо-професійної підготовки з інформатики та міжнародних освітніх стандартів / Л.Л. Омельчук // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2013. – Вип. 4. – С. 138–149.
4. Омельчук Л.Л. Порівняльний аналіз українського стандарту освітньо-професійної підготовки з інформатики та Computer Science’2013 / Л.Л. Омельчук // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2013. – Вип. 2. – С. 216–227.
5. Omelchuk L. Development of the ICT-standard of Higher Education in Ukraine within the Framework of European Requirements / L. Omelchuk , N. Rusina, O. Shyshatska // Proc. 15th Int. Conf. on ICT in Education, Research and Industrial Applications. Integration, Harmonization and Knowledge Transfer (ICTERI2019). Volume I: Main Conference. – Kherson, Ukraine, June 12-15 (2019). PP. 262-273.
6. Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна. Освітньо-професійна-програма "Інформатика". Спеціальність 122 Комп’ютерні науки [Електронний ресурс]. – 2019. – Режим доступу до ресурсу: http://math.univer.kharkov.ua/StandProg/OPPInformBak.pdf.
7. Національний технічний університет «Дніпровська політехніка». Освітньо-професійна програма «Комп'ютерні науки». Спеціальність 122 Комп’ютерні науки [Електронний ресурс]. – 2019. – Режим доступу до ресурсу: https://pzks.nmu.org.ua/ua/op/122_b1_2019.pdf.

References

1. Law of Ukraine “On Higher Education”, *Bulletin of the Verkhovna Rada of Ukraine*. - [Electronic resource]. - 2014. - Available from https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1556-18#Text
2. Order "On approval of the standard of higher education in the specialty 122" Computer Science "for the first (bachelor's) level of higher education", *Ministry of Education and Science of Ukraine* [Electronic resource]. - 2019. - Available from https://mon.gov.ua/storage/app/media/vishcha-osvita/zatverdzeni%20standarty/2019/07/12/122-kompyuterni-nauki-bakalavr.pdf.
3. Omelchuk L.L. (2013) Comparative analysis of the Ukrainian standard of educational and professional training in informatics and international educational standards, *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*. № 4. 138–149.
4. Omelchuk L.L. (2013) Comparative analysis of the Ukrainian standard of educational and professional training in computer science and Computer Science’2013 *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*. № 2, 216–227.
5. Omelchuk L. Development of the ICT-standard of Higher Education in Ukraine within the Framework of European Requirements / L. Omelchuk , N. Rusina, O. Shyshatska // Proc. 15th Int. Conf. on ICT in Education, Research and Industrial Applications. Integration, Harmonization and Knowledge Transfer (ICTERI2019). Volume I: Main Conference. – Kherson, Ukraine, June 12-15 (2019). PP. 262-273.
6. V.N.Karazin Kharkiv National University. Educational and professional program "Informatics". Specialty 122 Computer Science [Electronic resource]. - 2019. - Available from http://math.univer.kharkov.ua/StandProg/OPPInformBak.pdf.
7. Dnipro University of Technology. Educational and professional program "Computer Science". Specialty 122 Computer Science [Electronic resource]. - 2019. - Available from https://pzks.nmu.org.ua/ua/op/122_b1_2019.pdf.

8. Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут». Освітньо-професійна програма «Системи і методи штучного інтелекту». Спеціальність 122 Комп'ютерні науки [Електронний ресурс]. – 2020. – Режим доступу до ресурсу: https://osvita.kpi.ua/sites/default/files/op/122-B-Інтелектуальні%20сервіс-орієнтовані%20розподілені%20обчислювання.pdf
9. Київський національний університету імені Тараса Шевченка. Освітньо-професійна програма "Інформатика". Спеціальність 122 Комп'ютерні науки [Електронний ресурс]. – 2019. – Режим доступу до ресурсу: http://csc.knu.ua/media/filer_public/09/f4/09f46516-6c61-46a5-ae81-f34b7d673499/opp_122_bac_2019_1.pdf.
10. Київський національний університету імені Тараса Шевченка. Освітньо-професійна програма «Комп'ютерні науки». Спеціальність 122 Комп'ютерні науки [Електронний ресурс]. – 2019. – Режим доступу до ресурсу: http://fit.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/2019/07/ОПП-Компютерні-науки-122.pdf.
11. Microsoft. SQL Server [Електронний ресурс]. – 2019. – Режим доступу до ресурсу: https://www.microsoft.com/ru-ru/sql-server/sql-server-2019

8. National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute". Educational and professional program "Systems and methods of artificial intelligence". Specialty 122 Computer Science [Electronic resource]. - 2020. - Available from https://osvita.kpi.ua/sites/default/files/op/122-B-Intellectual%20service-oriented%20distributed%20computing.pdf.
9. Taras Shevchenko National University of Kyiv. Educational and professional program "Informatics". Specialty 122 Computer Science [Electronic resource]. - 2019. - Available from http://csc.knu.ua/media/filer_public/09/f4/09f46516-6c61-46a5-ae81-f34b7d673499/opp_122_bac_2019_1.pdf.
10. Taras Shevchenko National University of Kyiv. Educational and professional program "Computer Science". Specialty 122 Computer Science [Electronic resource]. - 2019. - Available from http://fit.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/2019/07/ОПП-Компютерні-науки-122.pdf.
11. Microsoft. SQL Server [Electronic resource]. – 2019. – Available from https://www.microsoft.com/ru-ru/sql-server/sql-server-2019.

Надійшла до редколегії 30.11.2020

https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/4.9

УДК 004.021+519.16

Терещенко В. М. [1], д.ф.-м.н., проф.,
Марченко О.О. [1], д.ф.-м.н., проф.
Терещенко Я. В.[1] , аспірант,
Тара О. М.[1] , студент

Оптимальний алгоритм динамічної підтримки Діаграми Вороного для множини точок

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка,83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,

e-mail: vtereshch@gmail.com,
rozenkrans17@gmail.com,
yter2016@gmail.com,
olexandr.tara@knu.ua

V.N. Tereshchenko[1], Dr. Sci., pof.
A.A. Marchenko[1], Dr. Sci., Prof.
Y.V. Tereshchenko[1], Post-graduate,
A.N. Tara[1], student

The optimal algorithm for dynamic support of the Voronoi Diagram for a set of points

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,

e-mail: vtereshch@gmail.com,
rozenkrans17@gmail.com,
yter2016@gmail.com,
olexandr.tara@knu.ua

Стаття присвячена розробці динамічної структури даних для розв'язання задач близькості на основі динамічної Діаграми Вороного. Така структура даних може бути ядром моделі єдиного алгоритмічного середовища (МЄАС) та архітектури її реалізації на основі єдиної алгоритмічної платформи, для розв'язання комплексу задач візуалізації та комп'ютерного моделювання.
Структура даних побудована на основі стратегії «розділяй та володарюй» при побудові діаграми Вороного. Подібно до оригінального алгоритму, ми зберігаємо двійкове дерево, яке представляє діаграму Вороного, але визначаємо три нові операції: вставка, видалення та балансування. Для забезпечення ефективності операцій пропонується використати червоно-чорне дерево. Загалом запропонована структура даних показує набагато кращі результати, ніж оригінальний статичний алгоритм. В порівнянні з існуючими алгоритмами, дана структура являється одночасно простою та ефективною. На базі динамічної діаграми Вороного можливо створити єдине алгоритмічне середовище для ефективного моделювання динамічних процесів.

Ключові слова: динамічні структури даних, алгоритм, розділяй та володарюй, діаграма Вороного, найближчі сусіди, модель єдиного алгоритмічного середовища

The article is devoted to the development of a dynamic data structure for solving proximity problems based on the dynamic Voronoi Diagram. This data structure can be used as the core of the common algorithmic space model for solving a set of visualization and computer modeling problems.
The data structure is based on the strategy of "divide and rule" for Voronoi diagram construction. Similar to the original algorithm, we store a binary tree that represents the Voronoi diagram, but define three new operations: insert, delete, and balance. To ensure the efficiency of operations, it is proposed to use red-black tree. In general, the proposed data structure shows much better results than the original static algorithm. Compared to existing algorithms, this data structure is both simple and efficient.

Key Words: dynamic data structures, algorithm, divide and conquer , Voronoi diagram, nearest neighbour, model of common algorithmic space

Статтю представив д.ф.-м.н., член. кор.. НАН України, проф. Анісімов А.В.

© Терещенко В.М., Марченко О.О., Терещенко Я.В., Тара О.М., 2020

Introduction

The nearest neighbor search is a fundamental problem of computational geometry, and its dynamic version is a powerful tool for solving many problems such as computer vision, statistical classification, DNA sequencing etc. Data structure that supports points insertions and deletions and queries for the nearest neighbor can be used to implement more complex systems like an autopilot for drones that uses computer vision. Firstly, Agarwal and Matoušek's in paper [1] proposed several data structures with updates in $O(n^{\varepsilon})$ amortized time and queries in $O(log\ n)$ worst-case time, while the other supports updates in $O(log^2 n)$ amortized time queries in$O(n^{\varepsilon})$ worst-case time, for any $\varepsilon > 0$.
Also techniques of Bentley and Saxe [2] yield an$O(log^2 n)$ amortized bound for updates and queries. In work Chan [3] obtained data structure with $O(log^3 n)$ insertion time , deletions in $O(log^6 n)$ amortized time, and nearest-neighbor queries in $O(log^2 n)$worst-case time. One of the possible solution of the nearest neighbour problem is to use a dynamic Voronoi diagram. Current version of dynamic Vorionoi diagram based on modified sweepline Fortune algorithm [4]. Additionally, this data structure could be used as a kernel for MCAS [5] to construct efficient computational geometry algorithms.
Despite the results of the mentioned works, the lower estimate of the complexity of the dynamic nearest neighbor search has not yet been achieved, and therefore work in this direction has not yet been completed.

Main approach

Data structure for a dynamic nearest neighbor

An important aspect of the choice of approach was novelty: during the analysis of existing papers, no works were found that use the principle of "divide and conquer" in a dynamic version. Although in the worst case the above algorithm loses to the already known ones, it is impractical to think only about the worst case, because it is rather exceptional. The efficiency of the above algorithm is ensured by the properties of the Voronoi diagram given above, which, however, do not hold in the general case.
Properties of the Voronoi diagram:
1. The dual graph to the Voronoi diagram (in the case of Euclidean space with point sites) corresponds to the Delaunay triangulation for the same set of points.
2. In the Euclidean plane, two points are adjacent on a convex hull if and only if their Voronoi cells share an infinitely long side.
3. If the space is normalized and the distance to each site is known (for example, when the site is a compact set or a closed sphere), then each Voronoi cell can be represented as a union of segments of rows coming from the sites.
4. Under relatively general conditions Voronoi cells have the property of stability: a small change in the shape of the sites, for example, a change caused by some transfer or distortion, leads to a small change in the shape of Voronoi cells. This is the geometric stability of Voronoi diagrams. This property does not occur in the general case, even if the space is two-dimensional and the plots are points.

Having a Voronoi diagram it is very easy to find the nearest neighbor of the entry point: you need to find a cell of the diagram that contains the entry point and the vertex of this cell will be the closest point to the entry point. The diagram itself does not allow you to quickly search for a cell, but using point localization algorithms, you can perform this operation in $O(log\ n)$.
The proposed data structure is based on a dynamic version of the known algorithm for constructing a static Voronoi diagram using the principle of "divide and conquer", so for a better understanding we present a static algorithm for constructing a Voronoi diagram.

Algorithm for static Voronoi diagram using the "divide and conquer" method.

Shamos and Hoey [6] presented the first $O(n\ log\ n)$ deterministic algorithm for computing the Voronoi diagram in the plane that is optimal in worst case sense. This algorithm is significant from a theoretical standpoint not only because it was the first one but also it uses the divide-and-conquer paradigm. The 'Divide-and-Conquer' is one of the fundamental paradigms for designing efficient algorithms. In this paradigm, the original problem is recursively divided into several simpler sub-problems of roughly equal size, and the solution of the original problem obtained by merging the solutions of the sub-problems. In the

© Терещенко В.М., Марченко О.О., Терещенко Я.В., Тара О.М., 2020

divide-and-conquer approach of Shamos and Hoey, the set of sites, S, is split up by a dividing line into subsets S_L and S_R same sizes. Then, the Voronoi diagram, $Vor(S_L)$, of subset S_L and Voronoi diagram, $Vor(S_R)$, of subset S_R are computed recursively [7].
The algorithm for static Voronoi Diagram:

INPUT: The number n > 3 of sites and the list $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$of the sites in increasing order with respect to x-coordinates.

OUTPUT: Voronoi diagram $Vor(S)$.
1. L
et t be the integral part of n/2 and split S into $S_L = (s_1, s_2, \dots, s_t)$ and $S_R = (s_{t+1}, s_{t+2}, \dots, s_n)$.
2. C
onstruct the Voronoi diagram $Vor(S_L)$ of $S_L$recursively.
3. C
onstruct the Voronoi diagram $Vor(S_R)$ of S_R recursively.
4. M
erge$Vor(S_L)$ and $Vor(S_R)$ into the Voronoi diagram of $Vor(S)$ i.e., $Vor(S) = Vor(S_L) \cup Vor(S_R)$ by algorithm MERGE_VORONOI.
5. R
eturn $Vor(S)$.

Dynamic Voronoi Diagram algorithm

The algorithm described in the previous section was used as a basis: the set of points sorted by x coordinate is divided by vertical lines in half recursively. We will keep such structure in a binary tree. The nodes contain a static Voronoi diagram. The leaves of the tree contain trivial diagrams no larger than three. An arbitrary vertex, except leaves, contains a diagram which is obtained by merging two diagrams contained in the two descendants of the vertex. Each vertex, except leaves, has exactly 2 descendants by construction.
The Voronoi dynamic diagram must support two basic operations: inserting and deleting a point.
Next we describe the logic of these operations.

Insertion:
```
IF Vor(S) is empty THEN root ← p
ELSE
   cur ←DESCEND(p)
   IF cur.diagram.size() < 3
      cur.diagram.insert(p)
      MERGE_UP()
   ELSE
      DIVIDE(cur.diagram + p)
      MERGE_UP()
```

In *cur* we get the minimum static Voronoi diagram with no more than 3 vertices (a tree leaf) by the DESCEND method. For it, the insertion of a point occurs through a complete rebuilding of the diagram. If *cur* contained 3 points, we split it into two diagrams of two points (3 from the original cur chart plus one that we inserted) using DIVIDE. Next is the restructuring of $Vor(S)$ from the bottom up. Here we rely on the property of the Voronoi stability diagram - inserting a single point requires a local change of the diagram, and therefore MERGE_UP doesn't rearrange the diagram completely most of the time. The DESCEND, DIVIDE, MERGE_UP will be described after the point removal algorithm.

Deletion:
```
IF Vor(S) contains p THEN
   cur ← DESCEND(p)
   IF cur.diagram.size == 3 THEN
   cur.diagram.remove(p)
   MERGE_UP()
ELSE
   cur <- cur.parent
   IF cur.left.diagram.size == 2 &&
      cur.right.diagram.size == 2 THEN
      vertices ←cur.diagram.vertices
      vertices.remove(p)
      cur ← NEW_DIAGRAM(vertices)
      MERGE_UP()
   ELSE
      DIVIDE(cur.diagram – p)
      MERGE_UP()
```

The point deletion algorithm works in such a way that a node cannot contain a diagram of size 1. Suppose that when deleting a point p we go down to a leaf containing diagrams $Vor(S_i)$ of size 2 formed from two of its descendants. If the size of $Vor(S_i)$is 3, then we simply remove the point p from $Vor(S_i)$. After that, as in the insertion algorithm, there is a merge from the bottom up using MERGE_UP.

DESCEND:
```
WHILE cur.diagram.size > 3
```

IF p is in cur.left THEN
cur ←cur.left
ELSE cur ←cur.right

To descend the tree, use the location of the point p relative to the dividing line. For example, if the point is to the left of the dividing line, then the desired trivial diagram is also to the left of the line. If the point is on the chain, it does not matter which way to go down.

MERGE_UP:
merged ← MERGE(cur.left.diagram, cur.right.diagram)
WHILE cur.diagram.dividing_chain != merged.dividing_chain DO
cur .diagram ← merged
cur ← cur.parent
merged ←MERGE(cur.left.diagram, cur.right.diagram)

The condition of completion of the merge algorithm is important: if after merging two diagrams $Vor(S_i)$, $Vor(S_j)$ the dividing chain of$Vor(S_i \cup S_j)$has not changed, the diagram will not change anymore and we can stop merging.

DIVIDE:
vertices ← diagram.vertices
vertices.sort()
cur.left ←StaticDiagram(vertices[1, 2])
cur.right ←StaticDiagram(vertices[3, 4])

An example insertion process can be seen in Fig. 1. This figure shows the resulting diagram after each insertion. Now let us look at the insertion process in depth. Fig. 2 and Fig. 3 shows the tree data structure representing the dynamic voronoi diagram. We can see that 5 point diagram is represented as 2 trivial diagrams: 3 points in the left diagram and 2 points in the right one. Since the 6th point lies within the left diagram, the DESCEND algorithm will add it to the left diagram. Now the left diagram grows from 3 points to 4. This means the resulting diagram is not trivial and we need to divide it using the DIVIDE algorithm into two trivial diagrams which are now children of the 4 point diagram.

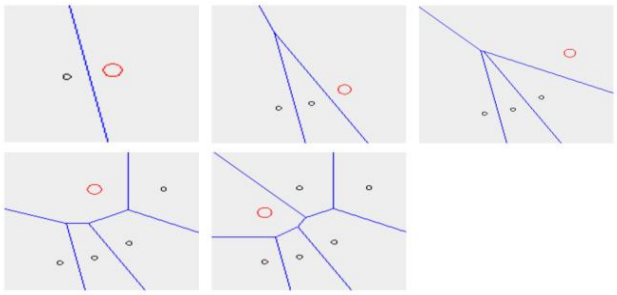


Fig. 1. Insertion of 6 points. Red circle denotes the newly added point.

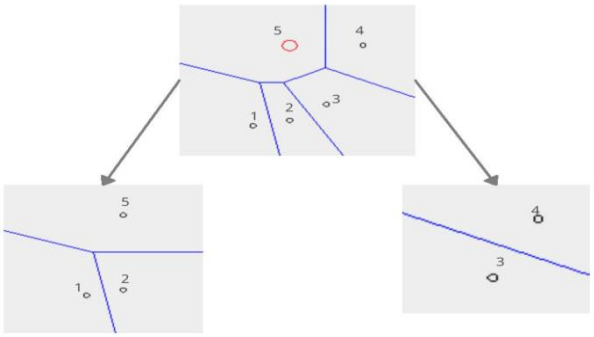


Fig. 2. Dynamic Voronoi diagram tree for first 5 points.

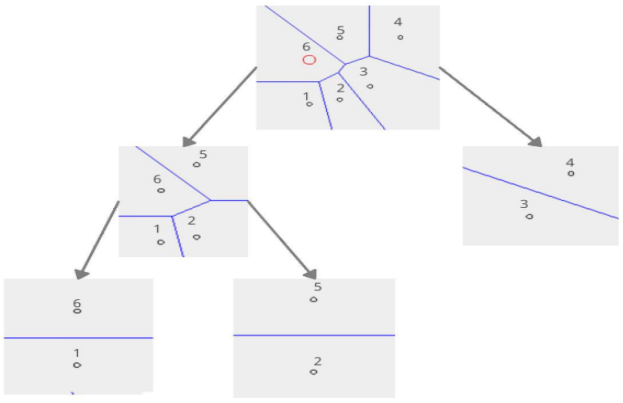


Fig. 3. Dynamic Voronoi Diagram tree for the final 6 point diagram.

Complexity analysis

Teorem. The data structure allows dynamic mainten the Voronoi Diagram, when a point is inserted or removed, for *O*(*n*) time in the worst case and *O*(log*n*) in average:
1) search for the nearest neighbor can be find in O(logn) time;
2) insert and delete a point in the data structure in O(logn) time.

Proof :

Lemma 1*(Nearest neighbour query).* Nearest neighbour query for dynamic Voronoi diagram can be done using $O(log\ n)$processing time.

Proof. To find the nearest point, you need to find the cell of the Voronoi diagram of the whole set of points and return its vertex. The Voronoi diagram of the whole set of points is located in the root of the tree, i.e. it is accessed in a constant time. Next, the search for the Voronoi cell to which the entry point belongs is performed using $O(log\ n)$localization algorithms. After that, we can immediately get the vertex of the localized cell, and hence the nearest point. Thus, the complexity of processing the search request for the nearest neighbor is $O(log\ n)$.

For optimal runtimes of insert and delete operations, an important factor is balancing the Voronoi diagram tree. Since the tree itself is binary, we can use red-black tree to keep it balanced. Next we will assume that the tree is balanced.

Lemma 2 *(Insertion and deletion)***.** Insertion and deletion for dynamic Voronoi diagram can be done using $O(n)$ processing time in worst case and $O(log\ n)$for a large amount of points.

Proof. When descending to the leaf of the tree we iterate over a logarithmic number of nodes. Each node takes a constant time. Therefore we can descend in $O(log\ n)$. The merge operation is done in linear time and in the worst case it is necessary to perform the merge all the way from the leaf to the root. Assuming the worst case scenario, we have a full binary tree with leaves containing 3-point trivial diagrams. In this case we start by merging two 3-point diagrams, then two 6-point diagrams and so on. Overall this results in:

$$\sum_{i=1}^{log_2(n)} 2^i \times 3 = 6(2^{log_2(n)} - 1) = 6(n-1)$$

which results in the computational complexity of the merge operation being $O(n)$. However, for large values, only a small part of the diagram will be updated: this follows from the stability property of the Voronoi diagram described in the first section. Therefore, time complexity for a large number of points could be reduced to $O(log\ n)$.

The deleting time complexity is the same as for insertion.

Comparison

Leading articles on the topic are Agarwal and Matushek [1] and Chan [3]. The first article describes two data structures: one supports inserting/deleting vertices in $O(n^{\varepsilon})$ on average and processing requests in $O(log\ n)$ in the worst case, and the second supports insertion/deletion in $O(log^2 n)$ on average and processes queries in $O(n^{\varepsilon})$ in the worst case, for an arbitrary $\varepsilon > 0$. The second article first describes the data structure that works in polylogarithmic time for shells in three-dimensional space, and hence for the two-dimensional case of the nearest neighbor. Chan's data structure supports insertions in$O(log^3 n)$ on average, deletions in $O(log^6 n)$ on average, and processing requests for an extreme point and the nearest neighbor in $O(log^2 n)$ in the worst case.

Thus, in the worst case, the proposed data structure behaves on par with the one proposed by Agarwal and Matushek, and on average even better than it.

Testing

We implemented a dynamic Voronoi diagram using the proposed algorithm. The implementation was done in Java with static implementation. The result is demonstrated in Fig. 4.

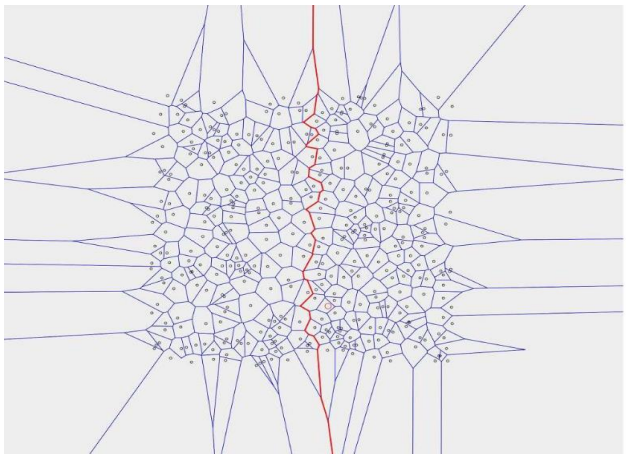


Fig. 4. Example diagram. Red line denotes the dividing chain of the root diagram.

It was tested on 1000 randomly generated set of points. The results are shown in Fig.5. The peaks on the dynamic times graph correspond to the rebalancing that is done by completely rebuilding the diagram. This process can be made faster by implementing a red-black tree data structure for the dynamic Voronoi diagram tree. The data for the yellow graph was obtained by building a new static Voronoi diagram at each point insertion.

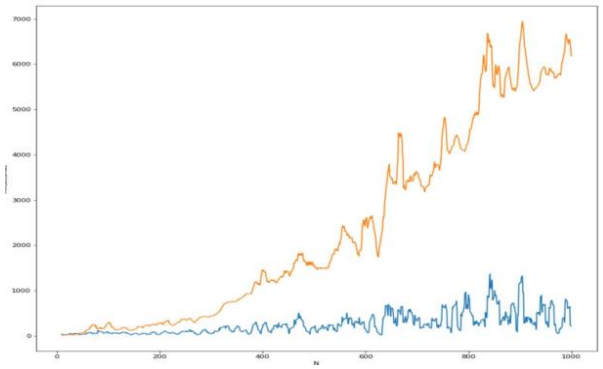


Fig. 5. Time taken to insert a point. Dynamic Voronoi diagram (blue) and Static Voronoi diagram rebuilding (yellow). 1000 points were inserted.

Conclusion

We showed a novel algorithm for the dynamic Voronoi diagram that performs significantly better than the full Voronoi diagram rebuild. It uses a well-known concept "divide and conquer" and therefore is easy to understand.

The algorithm for dynamic Voronoi diagram was implemented in Java and is now open-source. It was tested against a static Voronoi diagram.

Список використаних джерел

1. *Agarwal P. K., Matusek, J.* Dynamic half-space range reporting and its applications. Algorithmica. 13. p. 325–345., 1995
2. *Bently J. L., Saxe J. B.* Decomposable searching problems: Static-to-dynamic transformations. J. Algorithms. 1. p. 301–358., 1980
3. *Chan T. M.* A dynamic data structure for 3-D convex hulls and 2-D nearest neighbor queries. J. ACM. 57(3), # 16., 2010
4. *Fortune S. A.* sweepline algorithm for Voronoi diagrams. Algorithmica. 1987. Vol. 2, No. 1-4. P. 153–174.
5. *Tereshchenko V. N., Budjak I., Fisunenko A.* The Unified Algorithmic Platform for Solving Complex Problems of Computational Geometry, Parallel Computing Technologies. 2013. Vol. 7979. P. 424-429.
6. *Shamos, M. I., Hoey, D.* Closest-point problems. In 16th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. October 1975. pp. 151–162.
7. *Sack J. R., Urrutia* J., Handbook of Computational Geometry, Elsevier Science, Netherlands (2000)

References

1. AGARWAL P. K., MATUSEK, J.(1995). Dynamic half-space range reporting and its applications. Algorithmica. 13. p. 325–345.
2. BENTLY J. L., SAXE, J. B. (1980). Decomposable searching problems: Static-to-dynamic transformations. J. Algorithms. 1. p. 301–358.
3. CHAN T. M. (2010) A dynamic data structure for 3-D convex hulls and 2-D nearest neighbor queries. J. ACM. 57(3), # 16.
4. FORTUNE S. A. sweepline algorithm for Voronoi diagrams. Algorithmica. 1987. Vol. 2, No. 1-4. P. 153–174.
5. TERESHCHENKO V. N., BUDJAK I., FISUNENKO A. The Unified Algorithmic Platform for Solving Complex Problems of Computational Geometry, Parallel Computing Technologies. 2013. Vol. 7979. P. 424-429.
6. SHAMOS M. I., HOEY, D. (1975). Closest-point problems. In 16th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. October 1975. pp. 151–162.
7. SACK J. R., URRUTIA J., Handbook of Computational Geometry, Elsevier Science, Netherlands (2000)

Робота надійшла до редакції 29.11.20

УДК 519.1 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/4.10

Собчук В. В.[1], д.т.н., доц.,
Барабаш О. В.[2], д.т.н., проф.,
Мусієнко А. П.[3], д.т.н., доц.
Капустян[4] О.А. д.ф.-м.н., ст.н.с.

Методи контролю і діагностування інформаційної системи підприємства за принципом адаптивного накопичення діагностичної інформації

[1] Державний університет телекомунікацій, 03141, м. Київ, вул. Солом'язська, 7,
[2,3] Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 03056, м. Київ, вул. Політехнічна 6, корпус 5.
[4] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64.

V. V. Sobchuk[1], D.Sc., Associate Professor,
O. V. Barabash[2], D.Sc., Professor,
A. P. Musienko[3], D.Sc., Associate Professor,
O.A. Kapustian[4], D.Sc., Senior Researcher

Control and diagnosis methods for the information system of the enterprise on the principle of adaptive accumulation of diagnostic information

[1] State University of Telecommunications, 03141, Kyiv, st. Solomyazska, 7,
[2,3] National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute named after Igor Sikorsky", 03056, Kyiv, st. Polytechnic 6, building 5.
[4] Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska str.

e-mail: [1]v.v.sobchuk@gmail.com [2]bar64@ukr.net [3]mysienkoandrey@gmail.com [4]olena.kap@gmail.com

В роботі описано методологію побудови ефективної системи самодіагностування інформаційних систем підприємств. Викладено методику організації та здійснення самодіагностування, механізми виявлення, ідентифікації та локалізації модулів, що вийшли з ладу. Сформульовано критерії достатності діагностичної інформації при відсутності обмежень на виконання елементарних перевірок та критерію достатності діагностичної інформації за наявності обмежень на виконання елементарних перевірок.

Ключові слова: функціональна стійкість, діагностування, адаптивне діагностування, достатність діагностичної інформації.

The paper proposes a methodology for building an effective system of self-diagnostics of information systems on the example of Ukrainian enterprises in the metallurgical, energy and chemical industries.

The article shows that if the dependence of the probability of issuing information on the time of execution of the element of elementary checks is known, it is enough to carry out checks within a predetermined time, when a given probability value is given.

It is investigated that in the information system of the enterprise the self-control organized by means of elementary checks occurs at arbitrary moments of time of functioning of modules on purpose and the relation of probability of delivery of the information which occurs by comparison of deviations from average values.

Criteria for the adequacy of diagnostic information in the absence of restrictions on the implementation of basic tests and in the presence of restrictions on the implementation of basic tests.

Key Words: functional stability, diagnosis, adaptive diagnosis, sufficiency of diagnostic information.

Стрімкий розвиток сучасного високотехнологічного суспільства вимагає інтенсивного розвитку інформаційних технологій з високим ступенем автономності. Особливо гостро ця проблематика стосується виробничих підприємств, які функціонують в умовах впливу екстремальних факторів. Серед таких підприємств вирізняються підприємства металургії, енергетики, хімічної промисловості тощо. Функціонування виробничих підрозділів таких підприємств забезпечують інформаційні системи різного типу. За допомогою цих систем здійснюється планування та контроль усіх процесів. Вони працюють в автономному режимі

© В.В. Собчук, О.В. Барабаш, А.П. Мусієнко, О.А. Капустян 2020

під впливом зовнішніх та внутрішніх дестабілізуючих факторів [1–4]. За допомогою інформаційних систем можна забезпечити підвищення продуктивності праці усіх виробничих центів при зменшенні числа зайнятих у виробництві людей та значному зменшенні частки ручної праці [5,6]. Системи постійно модернізуються завдяки інтенсифікації капіталовкладень у виробничий процес.

Підкреслимо, що інформаційні системи підприємств функціонують в умовах впливу зовнішніх та внутрішніх дестабілізуючих факторів. За негативного впливу модулі систем можуть виходити з ладу. Проте, системи повинні функціонувати в автономному режимі протягом заданого часу. Таку умову функціонування можна виконати завдяки забезпеченню властивості функціональної стійкості. Функціональна стійкість — це можливість системою виконувати основні свої функції, можливо із зменшенням якості, протягом вказаного часу під впливом зовнішніх і внутрішніх дестабілізуючих факторів [8–10]. Під зовнішніми та внутрішніми дестабілізуючими факторами розуміються відмови, збої модулів системи, механічні пошкодження, теплові впливи, помилки обслуговуючого персоналу. Основними етапами забезпечення функціональної стійкості є виявлення модуля, який відмовив при контролі, локалізація несправного модуля, та відновлення функціонування інформаційної системи підприємства. Відтак однією з ключових передумов забезпечення функціональної стійкості є побудова ефективної системи діагностування основних агрегатів та виробничих центрів виробничого підприємства [7].

Ідея методу адаптивного самодіагностування

В роботі пропонується авторський підхід до діагностування складних технічних систем. Основна відмінність нового принципу полягає в новому підході до виконання процедури діагностування інформаційної системи підприємства. Основна суть полягає в такому:

по-перше, процедура діагностування може бути закінчена в будь який момент часу;

по-друге, вільний вибір модуля, який приймає рішення про стан інформаційної системи підприємства.

Коли система працює за призначенням перевірки відбуваються випадковим чином. Випадковість стосується вибору пари модулів, що перевіряють один одного та часу перевірки між ними. Тому після деякого часу в інформаційній системі може бути здійснено довільну кількість елементарних перевірок. Оцінка стану інформаційної системи підприємства на основі елементарних перевірок може бути представлена у вигляді двох методів:

методу самоконтролю;

методу адаптивного самодіагностування.

Адаптивність полягає в тому, що даний метод пристосовується до відмовної ситуації в інформаційній системі. При цьому діагностична інформація про стан модулів накопичується хаотичним чином. Обсяг такої інформації залежить від відмовної ситуації. Після накопичення інформації про стан системи отримана інформація обробляється і виявляється несправність із достовірністю не нижче заданої.

Метод самоконтролю використовуємо з метою перевірки наявності в інформаційній системі несправних модулів. У випадку виявлення несправних модулів використовується метод адаптивного самодіагностування. На основі даного методу локалізується знаходження несправного модуля інформаційної системи підприємства.

Однією із задач є визначення моменту закінчення роботи методу самоконтролю і видачі результату у випадку коли, результат всіх елементарних перевірок показує, що несправні модулі відсутні. При цьому результат контролю має певну достовірність, яка залежить від надійності модулів інформаційної системи та кількості виконаних перевірок.

Під час функціонування інформаційної системи підприємства за призначенням модулі системи окрім основних задач виконують взаємні перевірки. Період часу між двома послідовними видачами результату контролю інформаційної системи назвемо циклом самоконтролю. Цикл виконується або заданий час або задану кількість разів. Якщо під час виконання циклу самоконтролю не було отримано жодної елементарної перевірки, результат якої свідчить про наявність несправності в модулях системи, то видається результат самоконтролю тобто інформація, що система працює в штатному режимі. Після видачі результатів самоконтролю починається новий цикл перевірок. У випадку, коли під час виконання методу самоконтролю один з результатів елементарних перевірок виявляє несправність, то цикл самоконтролю припиняється і розпочинається робота методу адаптивного самодіагностування.

В залежності від того, який момент часу приймається за початок процедури адаптивного самодіагностування, можливі дві стратегії адаптивного самодіагностування.

Перша стратегія. Метод адаптивного самодіагностування починається в момент початку останнього циклу самоконтролю t_k. При цьому враховуються елементарні перевірки виконані за час τ. Згідно даної методики після появи результату елементарної перевірки, що показує наявність несправності в інформаційній системі підприємства, результати отримані до цього часу не аналізуються й апріорні ймовірності справного стану модулів системи на момент часу t_0 не визначаються. Дешифрація синдрому здійснюється після закінчення роботи методу адаптивного самодіагностування.

Друга стратегія. Метод адаптивного самодіагностування починається в момент часу t_0. На основі результатів елементарних перевірок, які виконані за час τ, визначаються апріорні ймовірності справності модулів інформаційної системи підприємства. Після виконання методу адаптивного самодіагностування обчислюються апріорні ймовірності справного та несправного стану модулів на основі якого формується результат адаптивного самодіагностування та визначається його достовірність.

Після отримання діагностичної інформації кожний модуль інформаційної системи підприємства оцінює свою готовність видачі результатів самоконтролю системи із заданою достовірністю.

Розробка методу самоконтролю інформаційної системи підприємства

Відповідно до розглянутих методів контролю та адаптивного самодіагностування інформаційної системи підприємства, в залежності від результатів елементарних перевірок, використовується метод контролю стану модулів системи або метод адаптивного самодіагностування. Дані методи мають різні цілі та способи реалізації.

При контролі технічного стану модулів системи основною задачею є контроль всіх модулів системи. Для цього потрібно отримати таку структуру перевірочних зв'язків при якій кожний модуль інформаційної системи підприємства перевіряється іншими модулями, щонайменше одним. Відсутність одиничних результатів елементарних перевірок свідчить про відсутність несправностей в системі або про те, що вони є але не проконтрольовані або не проконтрольовані в достатній мірі. Якщо вважати, що справний модуль системи під час елементарної перевірки з ймовірність 1 визначає технічний стан модуля, що перевіряється, то цієї елементарної перевірки достатньо, щоб вважати його справним (при нульовому результаті). Оскільки елементарні перевірки виконуються випадковим чином, то перевірити чи всі модулі системи були проконтрольовані можливо за допомого відслідковування структури перевірочних зв'язків (СПЗ).

В якості спрощення задачі відслідковування діагностичного графу системи пропонується використовувати параметри, які відображають структуру перевірочних зв'язків. Визначення таких параметрів є окремою задачею. Проте, в якості таких параметрів можуть бути розглянуті локальні степені вершин діагностичного графу інформаційної системи або кількість ребер діагностичного графу та інші. Дослідження свідчать, що найпростішим параметром є відслідковування кількості ребер системи, які відповідають кількості елементарних перевірок в системі. В свою чергу кількість перевірок залежить від часу виконання процедури самоконтролю. Тому структуру перевірочних зв'язків можна охарактеризувати аналізуючи затрачений час на виконання елементарних перевірок. У випадку коли, на виконання елементарних перевірок в інформаційній системі накладаються обмеження для визначення кількості елементарних перевірок в системі необхідно виконати вибір додаткових параметрів, щоб визначити властивості підмножин структурних зв'язків. Якщо ж в системі важко визначити кількість ребер в діагностичному графі, то можна використовувати суму локальних вершин графа. Відслідковування суми локальних степенів вершин діагностичного графа дозволяє в будь-який момент часу визначити кількість виконаних елементарних перевірок в інформаційній системі підприємства

$$K = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^+,$$

де α_i^+, $i = 1,2,\dots,N$ – кількість ребер, що виходить із і-ї вершини діагностичного графу, N – кількість вершин діагностичного графу (ДГ) інформаційної системи підприємства (ІСП).

Рис. 1. Метод самодіагностування інформаційної системи підприємства при випадковому виконанні елементарних перевірок

Інформаційна система підприємства організована таким чином, що робоча інформація передається в модуль системи після отримання сигналу про його готовність або справність. Тому необхідно забезпечити мінімальний час з моменту початку роботи методу самоконтролю до моменту видачі інформації про справність всіх модулів ІСП. Кожному моменту часу виконання процедури самоконтролю відповідає певне значення ймовірності того, що всі модулі ІСП проконтрольовані або визначена *ймовірність видачі інформації* P_{BI} про справність модулів.

Твердження 1. *Якщо відома залежність ймовірності видачі інформації* P_{BI} *від часу виконання набору елементарних перевірок, то достатньо виконувати перевірки на протязі наперед заданого часу при якому забезпечується задане значення ймовірності* P_{BI}. *Більше того, в при цьому немає необхідності відслідковувати поточні структури перевірочних зв'язків в інформаційній системі підприємства.*

Після досягнення заданого значення ймовірності P_{BI} процедура виконання елементарних перевірок завершується. Можливі два варіанти аналізу структури перевірочних зв'язків (СПЗ):

- *перший* ґрунтується на аналізі СПЗ для того, щоб встановити чи всі модулі були перевірені. Якщо всі модулі перевірені, то видається інформація про стравність модулів ІСП. Якщо не всі модулі перевірено, то процедура елементарних перевірок повторюється;
- *другий* варіант базується на тому, що аналіз СПЗ не проводиться, а відразу видається інформація про справність модулів ІСП.

Як окремий випадок можна розглянути самоконтроль з обмеженням на виконання елементарних перевірок до отримання повного діагностичного графу. При цьому в якості обмеження використовуємо умову відсутності кратних ребер в діагностичному графі. Отже, метод самодіагностування інформаційної системи підприємства при випадковому виконанні елементарних перевірок може бути представлений у вигляді наведеному на рис. 1.

Основними задачами даного методу є визначення залежності ймовірності P_{BI} від часу виконання набору елементарних перевірок та визначення оптимальної ймовірності $P_{BI}^{\text{ОПТ}}$ при якій досягається мінімум загального часу, що витрачається на всю процедуру самодіагностування.

Визначення критерію достатності діагностичної інформації при відсутності обмежень на виконання елементарних перевірок

В якості критерію достатності діагностичної інформації розглянемо ймовірність видачі інформації. При самоконтролі інформаційної системи підприємства елементарні перевірки

відбуваються в довільні моменти часу функціонування модулів за призначенням.

Позначимо через α_i, α_j та β_i, β_j, $i \neq j$, $i,j = 1,2,\dots,N$ значення часу зайнятості та свободи модуля під час виконання основних функцій в ІСП. Через M_i, $i = 1,2,\dots,N$ та M_j, $j = 1,2,\dots,N$ позначимо i-й та j-й модулі ІСП.

Час функціонування ІСП розбивається на рівні по величині інтервали τ_η, $\eta = 1,2,\dots,s$. Інтервал τ_η задовольняє умові $t_{\text{еп}} < \tau_\eta < \alpha_i$, де $t_{\text{еп}}$ – час виконання елементарної перевірки.

Ймовірність появи вільного проміжку в роботі i-го модуля в довільний момент часу обчислюється за формулою

$$P_i = \frac{\beta_{i\,\text{ср}}}{\alpha_{i\,\text{ср}}+\beta_{i\,\text{ср}}}, \qquad (1)$$

де $\alpha_{i\,\text{ср}} + \beta_{i\,\text{ср}}$ – середнє значення часу занятості та свободи ділянки.

Нехай ймовірність участі i-го модуля в елементарній перевірці t_{ij} або t_{ji} на інтервалі часу τ визначається двома подіями A_1 та A_2.

Суть події A_1 полягає в тому, що початок інтервалу часу τ попадає на вільний проміжок β_i роботи i-го модуля та залишок часу β_i^0 буде більше $t_{\text{еп}}$. Суть події A_2 полягає в тому, що початок інтервалу часу τ попадає на робочий (зайнятий) проміжок α_i i-го модуля та залишок часу α_i^0 буде $\alpha_i^0 < \tau - t_{\text{еп}}$.

Розглянемо окремо події A_1 та A_2. Подія A_1 визначається двома подіями B_1 та B_2: B_1 – початок інтервалу часу τ попадає на вільний проміжок. Ймовірність B_1 дорівнює ймовірності P_i та обчислюється за формулою (1); B_2 – ймовірність того, що час який залишився β_i^0 буде більший часу виконання елементарної перевірки $t_{\text{еп}}$. Ймовірність події B_2 обчислюється за формулою

$$P(B_2) = 1 - \int_0^{t_{\text{еп}}} \varphi_{\beta_i^0}(t)dt = \int_{t_{\text{еп}}}^{\beta_{i\,\text{ср}}} \varphi_{\beta_i^0}(t)dt,$$

де $\varphi_{\beta_i^0}$ – *щільність розподілу* випадкової величини β_i^0.

Припустимо, в межах інтервалу $[0, \beta_i^0]$ випадкова величина β_i^0 з рівною ймовірністю приймає будь-яке значення тобто має постійну щільність розподілу

$$\varphi_{\beta_i^0} = \begin{cases} \frac{1}{\beta_{i\,\text{ср}}}, & \text{якщо} \quad 0 < \beta_i^0 < \beta_{i\,\text{ср}}; \\ 0, & \text{якщо} \ \beta_i^0 < 0 \ \text{і} \ \beta_i^0 > \beta_i. \end{cases} \qquad (2)$$

Враховуючи (2) для ймовірності $P(B_2)$ отримаємо

$$P(B_2) = \int \frac{dt}{\beta_{i\,\text{ср}}} = \frac{\beta_{i\,\text{ср}} - t_{\text{еп}}}{\beta_{i\,\text{ср}}}.$$

Для ймовірності події A_1 маємо

$$P(A_1) = P(B_1) \cdot P(B_2) = \frac{\beta_{i\,\text{ср}} - t_{\text{еп}}}{\alpha_{i\,\text{ср}}+\beta_{i\,\text{ср}}}. \qquad (3)$$

Подія A_1 визначається двома подіями C_1 та C_2, де C_1 – подія, коли α_i^0 приймає таке значення, що $\alpha_i^0 < \tau - t_{\text{еп}}$, а ймовірність події C_2 обчислюється за формулою

$$P(C_2) = \int_0^{\tau - t_{\text{еп}}} \varphi_{\alpha_i^0}(t)dt,$$

де $\varphi_{\alpha_i^0}$ – *щільність розподілу* випадкової величини α_i^0.

На проміжку $[0, \alpha_i^0]$ випадкова величина α_i^0 має постійну щільність розподілу, що дорівнює $1/\alpha_{i\,\text{ср}}$. Тому,

$$P(C_2) = \int_0^{\tau - t_{\text{еп}}} \frac{dt}{\alpha_{i\,\text{ср}}} = \frac{\tau - t_{\text{еп}}}{\alpha_{i\,\text{ср}}}.$$

Отже, для ймовірності події A_2 отримуємо

$$P(A_2) = P(C_1) \cdot P(C_2) = \frac{\tau - t_{\text{еп}}}{\alpha_{i\,\text{ср}}+\beta_{i\,\text{ср}}}. \qquad (4)$$

Ймовірність участі i-го модуля в елементарній перевірці на інтервалі часу τ рівна

$$P_{i\,\text{еп}}(\tau) = P\{A_1 \cup A_2\} = P(A_1) + P(A_2).$$

Враховуючи (3) та (4) отримуємо

$$P_{i\,\text{еп}}(\tau) = \frac{\beta_{i\,\text{ср}} + \tau - 2t_{\text{еп}}}{\alpha_{i\,\text{ср}}+\beta_{i\,\text{ср}}}. \qquad (5)$$

Розглянемо загальний випадок виконання елементарних перевірок в ІСП. Коли допускається будь-яка кратність перевірок і модулі можуть перевіряти один одного. Тобто, якщо i-й модуль перевірив j-й, то і j-й модуль після перевірки може перевірити i-й.

Оскільки в кожній елементарній перевірці беруть участь два модулі, то на інтервалі τ може бути організовано максимально $\left[\frac{N}{2}\right]$ елементарних перевірок.

Ймовірність, що на інтервалі τ буде виконана одна елементарна перевірка дорівнює

ймовірності того, що в двох із N модулів співпадуть вільні проміжки і вони можуть бути задіяні в елементарній перевірці. Дана ймовірність $P_{i\,\text{еп}}(\tau)$ визначається як $P_{i\,\text{еп}}(\tau) = P_{2,N}$, де $P_{2,N}$ знаходиться з умови

$$\prod_{i=1}^{n}(q_{i\,\text{е}} + p_{i\,\text{е}}z) = \sum_{m=0}^{n} P_{n,m}z^m, \qquad (6)$$

де $q_{i\,\text{е}} + p_{i\,\text{е}} = 1, m = 2, n = N$.

Ймовірність виконання на інтервалі τ рівно k елементарних перевірок рівна

$$P_{k\,\text{еп}}(\tau) = P_{2k,N},$$

де $P_{k\,\text{еп}}(\tau)$ також визначається формулою (6).

В середньому на інтервалі часу τ буде виконано r елементарних перевірок, де

$$r = \sum_{k=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]} k \cdot P_{2k,N}.$$

За s інтервалів буде виконано rs елементарних перевірок. При $rs < N$ ймовірність того, що всі модулі перевірені дорівнює 0. При $rs > N$ ймовірність того, що всі модулі перевірені знаходиться на основі теореми про повторні випробування для випадку коли кожний експеримент може мати N виключаючи один одного наслідків з рівними ймовірностями $P = \frac{1}{N}$. Припустимо, що ймовірність наслідків рівна. В загальному випадку вони знаходиться за формулою (5). Тоді ймовірність P_{BI} буде обчислюватись за формулою

$$P_{BI} = \sum_L P_{m_1,m_2,\dots,m_N,sr}, \quad m_1, m_2, \dots, m_N \geq 1, \qquad (7)$$

де сума поширюється на всі можливі способи розбиття числа rs на N доданків $m_1, m_2, \dots, m_N$ $(0 \leq m_j \leq sr, j = 1, \dots, N)$;

$$\sum_{i=1}^{N} m_i = sr, \qquad \prod_{i=1}^{N} m_i \geq 1.$$

Сумовані ймовірності

$$P_{m_1,m_2,\dots,m_N,sr} = \frac{(sr)!}{m_1!\,m_2!\,\dots,m_N!} \cdot \frac{1}{N^{sr}}. \qquad (8)$$

Позначимо через $X_1, X_2, \dots, X_\eta$ відповідні члени $m_1!, m_2!, \dots, m_N!$ з формули (8). Через $Y_1, Y_2, \dots, Y_\xi$ позначимо члени $m_1!, m_2!, \dots, m_N!$ для яких

$$\prod_{i=1}^{N} m_i = 0.$$

Враховуючи введені позначення (7) можна переписати у вигляді

$$P_{BI} = \sum_{j=1}^{\eta} \frac{(sr)!}{X_j} \cdot \frac{1}{N^{sr}}. \qquad (9)$$

Позначимо суму $\sum_{j=1}^{\eta} \frac{1}{X_j}$ через D_s, де індекс s показує залежність даної суми від значення s. Тоді

$$P_{BI} = \frac{(sr)!}{N^{sr}} \cdot D_s. \qquad (10)$$

Після логарифмування (10) отримуємо

$$P_{BI} = D_s\, exp(-Brs + ln[(sr)!]), \qquad (11)$$

де $B = \ln N$.

Представимо шукану ймовірність P_{BI} у зручному вигляді. Оскільки сума по всім можливим комбінаціям Ω

$$\sum_{\Omega} P_{m_1,m_2,\dots,m_N,sr} = 1,$$

то

$$(sr)! \cdot \left(\sum_{j=1}^{\eta} \frac{1}{X_j} + \sum_{i=1}^{\xi} \frac{1}{Y_j}\right) = N^{sr}. \qquad (12)$$

Підставляючи (12) в (9) отримуємо формулу для обчислення ймовірності P_{BI}

$$P_{BI} = \left(1 + \frac{\sum_{i=1}^{\xi} \frac{1}{Y_j}}{\sum_{j=1}^{\eta} \frac{1}{X_j}}\right)^{-1} \qquad (13)$$

Таким способом доведено твердження.

Твердження 2. (критерій достатності діагностичної інформації) *В інформаційній системі підприємства самоконтролі організовані засобами елементарних перевірок відбуваються в довільні моменти часу функціонування модулів за призначенням, а ймовірність видачі інформації визначається співвідношенням* (13).

Розглянемо залежність X_j, Y_j від sr. Оскільки точно такі значення знайти складно, то знайдемо їх середні значення $X_{\text{ср}}(rs_k)$, $Y_{\text{ср}}(rs_k)$, де через s_k позначено номер останнього інтервалу розбиття часу функціонування інформаційної системи підприємства. Далі для знаходження середніх значень $X_{\text{ср}}$, $Y_{\text{ср}}$ необхідно визначити функцію $\tilde{P}_{BI}(rs_k)$. Дану функцію будемо вважати основною для знаходження значень ймовірності P_{BI}. Відповідність між функціями $P_{BI}(rs_k)$ і $\tilde{P}_{BI}(rs_k)$ встановлюється на основі обробки

певного об'єму обчислювальних значень $P_{BI}(rs_k)$ і $\tilde{P}_{BI}(rs_k)$.

Середні значення $X_{\text{ср}}(rs_k)$, $Y_{\text{ср}}(rs_k)$ знаходяться з співвідношень

$$X_{\text{ср}}(rs_k) = \frac{X_{\max}(rs_k)+X_{\min}(rs_k)}{2}, \quad Y_{\text{ср}}(rs_k) = \frac{Y_{\max}(rs_k)+Y_{\min}(rs_k)}{2}. \tag{14}$$

Позначимо rs_k через k і визначимо значення X_{min}, $X_{\max}$, $Y_{\min}$, $Y_{\max}$. Можна показати, що для $X_{\min}(k+1)$ справедливе рекурентне співвідношення

$$X_{\min}(k+1) = \left[\frac{k+1}{N}\right] X_{\min}(k). \tag{15}$$

Зі співвідношення (15) випливає, що

$$X_{\min}(k) = \left[\frac{k}{N}\right] \cdot \left[\frac{k-1}{N}\right] \cdot \ldots \cdot \left[\frac{k-(k-N)}{N}\right]. \tag{16}$$

Для $X_{\max}(k)$ справедливо

$$X_{\max}(k) = [k-(N-1)]!. \tag{17}$$

Отже для $X_{\text{ср}}(k)$ отримаємо

$$X_{\text{ср}}(k) = \frac{[k-(N-1)]!+\left[\frac{k}{N}\right]\cdot\left[\frac{k-1}{N}\right]\cdot\ldots\cdot\left[\frac{k-(k-N)}{N}\right]}{2}. \tag{18}$$

Для $Y_{\min}$ також справедливе рекурентне співвідношення

$$Y_{\min}(k) = \left[\frac{k-1}{N-1}\right] \cdot Y_{\min}(k-1).$$

Доведення аналогічне як і для $X_{\min}(k)$. Відмінність доведення в тому, що одне значення m_i в $Y_{\min}(k)$ рівне нулю. Тому значення N зменшиться на одиницю. Відтак в знаменнику дробу, що знаходиться під знаком [ ] стоїть $(N-1)$. Отже, для $Y_{\min}(k)$ можна записати

$$Y_{min}(k) = \left[\frac{k}{N-1}\right] \cdot \left[\frac{k-1}{N-1}\right] \cdot \ldots \cdot \left[\frac{k-(k-N+1)}{N-1}\right]. \tag{19}$$

Значення $Y_{\max}(k)$ визначається аналогічно $X_{\max}(k)$, тільки в даному випадку один елемент $m_i = k$, а інші $N-1$ елементів $\{m_j\}$, $j = 1,2,\ldots,N-1$ дорівнюють нулю. Тому

$$Y_{max}(k) = k!. \tag{20}$$

Отже, для $Y_{\text{ср}}(k)$ отримуємо

$$Y_{\text{ср}}(k) = \frac{k!+\left[\frac{k}{N-1}\right]\cdot\left[\frac{k-1}{N-1}\right]\cdot\ldots\cdot\left[\frac{k-(k-N+1)}{N-1}\right]}{2}. \tag{21}$$

Число доданків $|X_i|$ та $|Y_j|$ знаходиться як число різних розміщень з k перевірок по N різних модулів тобто

$$K_x = |X_i| = \binom{k-1}{N-1}; \tag{22}$$

$$K_y = |Y_j| = \binom{N+k-1}{N-1} - \binom{k-1}{N-1}. \tag{23}$$

В такому випадку вираз (13) приймає вигляд

$$\tilde{P}_{BI}(k) = \left(1 + \frac{K_y \cdot X_{\text{ср}}(k)}{K_x \cdot Y_{\text{ср}}(k)}\right)^{-1}, \tag{24}$$

де K_x, K_y, $X_{\text{ср}}(k)$, $Y_{\text{ср}}(k)$ знаходяться за формулами (18), (21) – (23). Тим самим доведено твердження.

Твердження 3. *В інформаційній системі підприємства самоконтролі організовані засобами елементарних перевірок відбуваються в довільні моменти часу функціонування модулів за призначенням. Ймовірність видачі інформації, що знаходиться через порівняння відхилень від середніх значень визначається співвідношенням* (24).

Слід зауважити, що значення $\tilde{P}_{BI}$ відображають значення P_{BI} з великою похибкою, тому для встановлення точного співвідношення між ними корекційну функцію $\varphi(k)$ слід експериментально визначати за допомого математичного моделювання.

Визначення критерію достатності діагностичної інформації при наявності обмежень на виконання елементарних перевірок

Введемо обмеження на виконання елементарних перевірок. Нехай цим обмеженням буде відсутність кратних ребер в діагностичному графі інформаційної системи підприємства. Тому максимальна кількість перевірок в системі, а отже і максимальна кількість ребер ДГ буде рівна $N(N-1)$, де N – кількість модулів в ІСП (вершини ДГ). При цьому кожна вершина може мати $N-1$ ребро, що входить.

Для випадку обмеженої кількості елементарних перевірок ймовірність P_{BI} знаходиться як сума ймовірностей різних комбінацій розміщення з k перевірок по N різних модулів так щоб кожний модуль хоча б один раз перевірявся другим модулем. Отже,

$$P_{BI} = \sum_{L} P_{m_1,m_2,\ldots,m_N,k},$$

де $\sum_{j=1}^{N} m_i = k$, $\prod_{i=1}^{N} m_i \geq 1$, $\max\{m_i\} \leq (N-1)$. Оскільки у випадку коли не накладаються умови на виконання елементарних перевірок ймовірність P_{BI} може бути представлена у вигляді функції $\tilde{P}_{BI}(k)$, визначене співвідношення (24).

Твердження 4. *Число доданків K_x визначається як число різних розміщень з k перевірок по N різних модулів так, щоб кожний модуль був перевірений хоча б раз і не було б жодного модуля в якого число перевірок більше ніж $N-1$. Число доданків K_y визначається як число різних розміщень з k перевірок по N різних модулів так, щоб хоча б один модуль був не перевірений і при цьому не було б жодного модуля в якого число перевірок більше ніж $N-1$.*

Проілюструємо це детально. Для визначення K_x можна використати функцію вигляду $A(x) = (x + x^2 + \cdots + x^m)^N$, де $m = N-1$.

Значення $\{K_x\}$ можна розглядати як послідовність функцій $A(x)$, де кожне значення K_x знаходиться як коефіцієнт при x^k. Таким чином

$$(x + x^2 + \cdots + x^m)^N = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_m=N} P_N(n_1, n_2, \dots, n_m) \times x^{n_1+2n_2+\cdots+mn_m}.$$

Для кожного значення k величини $n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \dots, n_m^{(k)}$ знаходяться як невід'ємні цілі розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} n_1 + 2n_2 + 3n_3 \dots + mn_m = k, \\ n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m = N. \end{cases} \quad (25)$$

Розв'язок системи (25) дозволяє визначити кожний доданок $P_N\left(n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \dots, n_m^{(k)}\right)$ у вигляді поліноміальних коефіцієнтів.

$$P_N\left(n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \dots, n_m^{(k)}\right) = \frac{N!}{n_1^{(k)}, ! \, n_2^{(k)}! \, \dots \, n_m^{(k)}!}.$$

Таким чином

$$K_x = \sum P_N\left(n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \dots, n_m^{(k)}\right).$$

Для визначення K_y вводимо параметр K_0, що дорівнює загальному числу різних розподілів k перевірок між N модулями, так щоб не було жодного модуля з кількістю перевірок більшою ніж $N-1$. Значення K_0 знаходиться за допомогою наступної функції

$$A(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^m)^N,$$

де $m = N-1$. З аналогії отримання K_x можемо визначити

$$K_0 = \sum P_N\left(n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \dots, n_m^{(k)}\right),$$

де $n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \dots, n_m^{(k)}$ є розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases} n_2 + 2n_3 + 3n_4 \dots + (m-1)n_m = k, \\ n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m = N. \end{cases}$$

Шукане значення K_y знаходиться як різниця $K_y = K_0 - K_x$. Середні значення $X_{\text{ср}}(k)$, $Y_{\text{ср}}(k)$ у виразі (24) визначаються згідно з (14). Значення $X_{\min}(k)$ і $Y_{\min}(k)$ знаходяться за формулами (16) та (19). Умова обмеженості кількості елементарних перевірок змінює $X_{\max}(k)$ і $Y_{\max}(k)$ в порівняні з формулами (17) та (20).

Максимальне значення $X_{\max}(k)$ буде тоді коли в $X(k)$ будуть входити максимальні члени тобто $m_i = N-1$ (тут m_i кількість перевірок i-го модуля). Нехай таких членів буде r_1. Тоді кількість перевірок для r_1 модулів буде $r_1(N-1)$. Кількість перевірок, що залишилися $k - r_1(N-1)$ будуть виконані $N - r_1$ модулями. Для того щоб $X_{\max}(k)$ було максимальне розподіл перевірок між $N - r_1$ модулями повинен бути таким, що $N - r_1 - 1$ модулів мають $m_j = 1$, $j = 1,2, \dots, N - r_1 - 1$, а один модуль має $m_\eta = k - r_1(N-1) - (N - r_1 - 1) = k - r_1(N-2) - (N-1)$. Тоді отримаємо

$$X_{\max}(k) = m_1! \, m_2! \dots m_N! = [(N-1)!]^{r_1}[k - r_1(N-2) - (N-1)]!$$

Значення r_1 можна знайти з нерівності

$$k - r_1(N-1) > N - r_1.$$

Дана нерівність означає, що кількість перевірок яка залишилася для $N - r_1$ модулів більша кількості цих модулів. Отже,

$$r_1 \leq \frac{k-N}{N-2} \quad \text{або} \quad r_1 = \left[\frac{k-N}{N-2}\right].$$

Максимальне значення $Y_{\max}(k)$ також буде тоді коли в $Y(k)$ будуть входити максимальні члени m_i тобто $m_i = N-1$. Припустимо, що таких членів r_2. Тоді кількість перевірок для r_2 буде $r_2(N-1)$. Кількість перевірок, що залишилися $k - r_2(N-1)$ будуть виконані $N -$

r_2 модулями. Для того щоб $Y(k)$ було максимальним розподіл перевірок між $N - r_2$ модулями повинен бути таким, що $N - r_2 - 1$ модулів мають $m_j = 0,\ j = 1,2, \dots, N - r_2 - 1$, а один модуль має $m_\eta = k - r_2(N-1)$. Тоді отримаємо

$$Y_{\max}(k) = m_1!\, m_2! \dots m_N! = [(N-1)!]^{r_2}[k - r_2(N-2)]!$$

Значення r_2 можна знайти з нерівності $r_2(N-1) \le k$ тобто $r_2 = \left[\frac{k}{N-1}\right]$.

Таким способом, в результаті виконання деякого числа елементарних перевірок отримується певна структура перевірочних зв'язків (СПЗ). Після проведення аналізу отриманої структури можна зробити висновок про результат контролю інформаційної системи підприємства.

Висновки.

Підсумовуючи, необхідно зазначити, що в роботі запропоновано методологію побудови ефективної системи самодіагностики інформаційних систем на прикладі українських підприємств у металургійній, енергетичній та хімічній промисловості.

В роботі показано, що якщо відома залежність ймовірності видачі інформації від часу виконання елемента елементарних перевірок, достатньо проводити перевірки протягом заздалегідь визначеного часу, коли надається задане значення ймовірності.

Досліджено, що в інформаційній системі підприємства самоконтроль, організований за допомогою елементарних перевірок, відбувається в довільні моменти часу функціонування модулів за призначенням та відношення ймовірності видачі інформації, яке відбувається шляхом порівняння відхилень від середнього значень.

Отримані критерії достатності діагностичної інформації за відсутності обмежень щодо виконання елементарних перевірок та за наявності обмежень щодо виконання елементарних перевірок.

Список використаних джерел

1. *Кучук Н.Г.* Оптимізація пропускних здатностей каналів зв'язку гіперконвективної системи / Кучук Н.Г., Лукова-Чуйко Н.В., Собчук В.В. // Наукове періодичне видання «Системи управління, навігації та зв'язку». – Полтава: ПНТУ, 2019. – Вип 3 (55). – С 120–125.
2. *Кучук Н.Г.* Перерозподіл інформаційних потоків у гіперконвергентній системі. / Кучук Н.Г., Гавриленко С.Ю., Лукова-Чуйко Н.В., Собчук В.В. // Науково-технічний журнал «Сучасні інформаційні системи». Харків: НТУ «Харківський політехнічний інститут», 2019. – Т. 3, No 2. – С. 116 – 121.
3. *Саланда І.П.* Система показників та критеріїв формалізації процесів забезпечення локальної функціональної стійкості розгалужених інформаційних мереж. / Саланда І.П., Барабаш О.В., Мусієнко А.П. // Наукове періодичне видання «Системи управління, навігації та зв'язку». Полтава: ПНТУ, 2017. – Вип. 1 (41). С. 122–126.
4. *Собчук В.В.* Аналіз використання ієрархічної структури для забезпечення функціональної стійкості автоматизованої системи управління підприємством. / Собчук В.В., Мусієнко А.П., Ільїн О.Ю. // Науковий журнал «Телекомунікаційні та інформаційні технології». К.: ДУТ, 2018. – No 4 (61). – С. 53–61.
5. *Собчук В.В.* Методика створення єдиного інформаційного простору на виробничому підприємстві з функціонально стійким виробничим процесом / Собчук В.В. // Наукове періодичне видання «Системи управління, навігації та зв'язку». – Полтава: ПНТУ, 2019. – Вип. 6 (58). – С 84–91.
6. *Собчук В.В.* Математична модель структури інформаційної мережі на основі нестаціонарної ієрархічної та стаціонарної гіпермережі / Собчук В.В., Лаптєв О.А., Саланда І.П., Сачук Ю.В. // Збірник наукових праць Військового інституту Київського національного університету імені Тараса Шевченка. – К.: ВІКНУ, 2019. – Вип. 64. – С. 124–132.
7. *Собчук В.В.* Метод діагностування прихованих відмов в інформаційній системі на основі застосування дворівневої системи забезпечення функціональної стійкості / Собчук В.В., Коваль М.О., Мусієнко А.П., Мацько О.Й. // Науковий журнал «Телекомунікаційні та

інформаційні технології». – К.: ДУТ, 2019. – № 1 (62). – С. 22–31.
8. *Sobchuk A.V.* Functionally sustainable wireless sensor network technologies aspects analysis / Sobchuk A.V., Sobchuk V.V., Barabash O.V., Lyashenko I.O. // Science and Education a New Dimension. Natural and Technical Sciences, 2019. – VII (23), Issue 193, Budapest, Hungary, pp. 46 – 48.
9. *Sobchuk A.V.* Assessment methods of functional stability of wireless sensor networks. / Sobchuk A.V., Barabash O.V., Musienko A.P. // Науковий журнал «Телекомунікаційні та інформаційні технології». Київ, ДУТ, 2019. – No 3 (64). – С. 46–54.
10. *Sobchuk Valentyn* The algorithm of control pricing policy in trade networks on the market of ferrous metals / Sobchuk Valentyn, Barabach Oleg, Musienko Andrii // Телекомунікаційні та інформаційні технології. 2020. – No 1 (66) – С. 120–128.

References

1. KUCUK N.G., LUKOVA-CHUYKO N.V. and SOBCHUK V.V. Optymizacija propusknyh zdatnostey kanaliv zv'jazku giperkonvektyvnoji systemy // Naukove periodychne vydannija "Systemy upravlinnja, navigacii ta zv'jazku". – Poltava: PNTU, 2019. – Vyp. 3 (55). – P. 120–125.
2. KUCUK N.G., GAVLENKO S.Yu., LUKOVA-CHUYKO N.V. and SOBCHUK V.V. Pererozpodil informaciynyh potokiv u giperkonvectyvniy systemi. // Naukovo tehnichnyy gurnal "Suchasni informaciyni systemy". Kharkiv: NTU «Kharkivskyy politehnichnyy instytut», 2019. – T. 3, No 2. – P. 116–121.
3. SALANDA I.P, BARABASH O.V., MUSIENKO A.P. Systemy pokaznykiv ta kryteriiv formalizacii procesiv zabezpechennja lokalnoii funkcionalnoii stiykosti rozgalugenyh informaciynyh mereg. // Naukove periodychne vydannija "Systemy upravlinnja, navigacii ta zv'jazku". – Poltava: PNTU, 2017. Vyp. 1 (41). – P. 122–126.
4. SOBCHUK V.V., MUSIENKO A.P. ILIIN O.Yu. Analiz vykorystannja ierarhichnoii struktury dla zabezpechennja funkcionalnoji stiykosti avtomatyzovanoii systemy upravlinnja pidpryemstvom. // Naukovyy gurnal "Telekomunikaciyni ta informacijni tehnologii" K.: DUT, 2018. – No 4 (61). – P. 53–61.
5. SOBCHUK V.V. Metodyca stvorennja edynogo informacijnogo prostoru na vyrobnychomu pidpryemsvi z funkcionalno stiykym vyrobnychym procesom. / Naukove periodychne vydannija "Systemy upravlinnja, navigacii ta zv'jazku". – Poltava: PNTU, 2019. – Vyp. 6 (58). – P 84–91.
6. SOBCHUK V.V., LAPTIEV. O.A., SALANDA I.P and SACHUK Yu.V. matematychna model struktury informacijnoii meregi na osnovi nestacionarnoii ierarhichnoii ta stacionarnoii gipermergi. // Zbirnyk naukovyh prac Viyskovogo instytutu Kyivskogo nacionalnogo universytetu imeni Tarasa Shevchenka. – K.: VIKNU, 2019. – Vyp. 64. – P. 124–132.
7. SOBCHUK V.V., KOVAL M.O., MUSIENKO A.P and MACKO O.Y. Metod diagnostuvannja pryhovanyh vidmov v informaciyniy systemi na osnovi zastosuvannja dvorivnevoji systemy zabezpechennja funkcionalnoii stiykosti. // Naukovyy gurnal "Telekomunikaciyni ta informacijni tehnologii" K.: DUT, 2019. – No 1 (62). – P. 22–31.
8. SOBCHUK A.V., SOBCHUK V.V., BARABASH O.V. and LYASHENKO I.O. Functionally sustainable wireless sensor network technologies aspects analysis // Science and Education a New Dimension. Natural and Technical Sciences, 2019. – VII (23), Issue 193, Budapest, Hungary, P. 46–48.
9. SOBCHUK A.V. BARABASH O.V. and MUSIENKO A.P. Assessment methods of functional stability of wireless sensor networks. // Науковий журнал «Телекомунікаційні та інформаційні технології». Київ, ДУТ, 2019. – No 3 (64). – С. 46–54.
10. SOBCHUK V.V., BARABACH O.V. and MUSIENKO A.P. The algorithm of control pricing policy in trade networks on the market of ferrous metals // Telekomunikaciyni ta informacijni tehnologii. 2020. – No 1 (66) – P. 120–128.

Надійшла до редколегії 27.11.2020

УДК 519.21 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/4.11

Чечельницький О.А.., к.ф.-м.н., доцент

Властивості моделі обслуговування паралельної структури/

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Академіка Глушкова 4д,
e-mail: achechelnitski@gmail.com

O.A. Chechelnitsky, PhD, Associate Professor.

The properties of the queuing model with the parallel structure.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: achechelnitski@gmail.com

В статті розглянута багатоканальна модель обслуговування паралельної структури.. Це означає, що ми розглядаємо модель, яка складається з двох паралельно функціонуючих систем обслуговування з нескінченою кількістю обслуговуючих приладів. Час обслуговування на кожній системі має довільний розподіл. Вивчення моделі ускладнюється тим, що її стохастична динаміка не може бути описана ланцюгом Маркова. Крім того, ми передбачаємо, що вимоги надходять до моделі згідно з двовимірним потоком Пуассона. Цей потік характеризується тим,що вимоги з нього можуть надходити парами одночасно. Вивчається стохастичний процес числа вимог у системах моделі. Отримано генератрису граничного розподілу цього процесу. Це дозволило виписати в явному вигляді вирази для математичного сподівання, дисперсії та кореляції числа вимог, які є на обслуговуванні.

Ключові слова: паралельна модель обслуговування, двовимірний вхідний потік, стаціонарний розподіл.

The present article is devoted to research the multi-channelk model with the parallel structure. It means that we consider the model which consists of two infinite-server queues.
The service time in the each system has general function of distribution. In this case the stochastic dynamic of our model cannot be defined by Markov chain. As a result, analysis of such models is much more difficult than that of the corresponding Markovian queueing models .Besides we assume that customers arrive to our model according a bivariate Poisson input flow. This input process is characterized by the fact that customers arrive according to a bivariate Poisson flow simultaneously. We consider the number of customers in the systems at time t. This stochastic process describes the state of our model. In present paper we find the limit joint distribution of the number of customers in the systems. In a general way (by differentiating the corresponding generating function.) we obtain the main characteristics of this distribution, such as the expected number of customers in the nodes, its variance and correlation . In the case when parameters of our model dependent on the parameter n (number of series) the limit normal distribution was obtained for the service process in the stationary regime.

Key Words: network model, bivariate input flow, stationary distribution

Статтю представила д.ф.-м. н. Розора І.В.

© О.А.Чечельницький 2020

1. Стаціонарні характеристики моделі.

Особливості реальних комп'ютерних мереж та мереж зв'язку вимагають застосуванням паралельного функціонування об'єктів різного типу. Це пов'язано з тим , що паралельність обробки масивів інформації, запитів, паралельність обчислень та інших операції, які виконуються в сучасних мережевих системах, дозволяють досягати найбільшої швидкості роботи та економії часу. Ось чому, велике значення має аналіз властивостей математичних моделей мережевих структур з паралельно функціонуючими елементами різних типів. У даній статті ми розглянемо модель паралельної структури, елементами якої є дві системи масового обслуговування типу $M/G/\infty$ з двовимірним вхідним потоком вимог Пуассона $(\nu_1(t),\nu_2(t))$ з параметрами $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, $b>0$. Вимоги з потоку $\nu_1(t)$ прибувають на першу систему, а вимоги з потоку $\nu_2(t)$ прибувають на другу систему обслуговування. Нехай ξ_1 і ξ_2 випадкові інтервали часу обслуговування в системах з функціями розподілу $G_1(t), G_2(t)$ відповідно, $\overline{G}_i(t)=1-G_i(t)$, $M\xi_i<+\infty$, $a_i=(M\xi_i)^{-1}$, $i=1,2$. Позначимо також через $X_1(t)$ число вимог, які обслуговуються в першій системі в момент часу t, а через $X_2(t)$- число вимог у другій системі в момент часу t. Кожна вимога обслуговується тільки на одній системі обслуговування.

Однією з ключових проблем, яка розв'язується в рамках теорії масового обслуговування, є дослідження стаціонарних характеристик моделі. Очевидно, що найбільш повним успіхом на цьому шляху є випадки, коли вдається знайти стаціонарний розподіл процесу обслуговування $(X_1(t),X_2(t))$. В зв'язку з цим має місце наступна теорема.

Теорема 1. Процес обслуговування $(X_1(t),X_2(t))$ в моделі $(M/G/\infty)^2$ з паралельною структурою та двовимірним пуассонівським потоком вимог $(\nu_1(t),\nu_2(t))$ має ергодичний розподіл з генератрисою наступного вигляду:

$$\varphi(z_1,z_2)=Mz_1^{X_1}z_2^{X_2}=$$
$$=\exp\left\{-\left(\frac{\lambda_1}{a_1}+b\left(\frac{1}{a_2}-M\min(\xi_1,\xi_2)\right)\right)(1-z_1)-\right.$$
$$-\left(\frac{\lambda_2}{a_2}+b\left(\frac{1}{a_2}-M\min(\xi_1,\xi_2)\right)\right)(1-z_2)-$$
$$\left.-bM\min(\xi_1,\xi_2)(1-z_1z_2)\right\}.$$

Доведення. В даній статті ми запропонуємо підхід, який базується на конструктивному представленні стохастичного процесу $(X_1(t),X_2(t))$ через суми індикаторних випадкових величин на вхідних пуассонівських потоках, кожна з яких буде описувати процес обслуговування окремо розглянутої вимоги. Введемо до розгляду три сімейства незалежних двовимірних випадкових величин з наступними розподілами . Двовимірна випадкова величина $\chi_k^1(t)$ нехай приймає значення $(1,0)$ з ймовірністю $1-G_1(t)=\overline{G}_1(t)$ та значення $(0,0)$ з ймовірністю $G_1(t)$. Випадкова величина $\chi_k^2(t)$ приймає значення $(0,1)$ з ймовірністю $1-G_2(t)=\overline{G}_2(t)$ та значення $(0,0)$ з ймовірністю $G_2(t)$. В свою чергу випадкова величина $\chi_k^3(t)$ приймає значення $(1,1)$ з ймовірністю $\overline{G}_1(t)\overline{G}_2(t)$, значення $(1,0)$ з ймовірністю $\overline{G_1}(t)G_2(t)$, значення $(0,1)$ з ймовірністю $G_1(t)\overline{G}_2(t)$ та значення $(0,0)$ з ймовірністю $G_1(t)G_2(t)$.

Тоді з ймовірністю 1 для двовимірного процесу обслуговування має місце наступне представлення:

$$(X_1(t),X_2(t))=\sum_{k=1}^{m_1}\chi_k^1(t)+\sum_{k=1}^{m_2}\chi_k^2(t)+$$
$$+\sum_{k=1}^{y_1(t)}\chi_k^1(t-t_k^1)+\sum_{k=1}^{y_2(t)}\chi_k^2(t-t_k^2)+\sum_{k=1}^{y_3(t)}\chi_k^3(t-t_k^3),$$

де $y_1(t),y_2(t),y_3(t)$ є незалежними пуассонівськими потоками з параметрами λ_1,λ_2,b відповідно і такими що, $\nu_1(t)=y_1(t)+y_3(t)$, $\nu_2(t)=y_2(t)+y_3(t)$, $t_k^i, i=1,2,3; k=1,2,...$ є моментами приходу вимог відповідно з потоку $y_i(t), i=1,2,3.$ У подальшому, не обмежуючи загальності, вважаємо $m_i=0, i=1,2$. Введемо до розгляду двовимірну генератрису величини

$(X_1(t), X_2(t))$: $\varphi(z_1, z_2, t) = Mz_1^{X_1(t)} z_2^{X_2(t)}$.
Використовуючи властивості умовного математичного сподівання, можемо записати: $\varphi(z_1, z_2, t) =$

$$= M\left\{M\left\{z_1^{X_1(t)} z_1^{X_2(t)} / t_1^i, ..., t_{y_i(t)}^i, i = 1,2,3\right\}\right\} =$$

$$= M\left\{\prod_{k=1}^{y_1(t)}\left(G_1\left(t - t_k^1\right) + z_1\overline{G}_1\left(t - t_k^1\right)\right)\times\right.$$

$$\times\prod_{k=1}^{y_2(t)}\left(\left(G_2\left(t - t_k^2\right)\right) + z_2\overline{G}_2\left(t - t_k^2\right)\right)\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{y_3(t)}\left\{G_1\left(t - t_k^3\right)G_2\left(t - t_k^3\right) + z_1\overline{G}_1\left(t - t_k^3\right)\times\right.$$

$$\times G_2\left(t - t_k^3\right) + z_2\overline{G}_2\left(t - t_k^3\right)G_1\left(t - t_k^3\right) +$$

$$\left.\left.+ z_1 z_2\overline{G}_1\left(t - t_k^3\right)\overline{G}_2\left(t - t_k^3\right)\right\}\right\}.$$

Знову скористаємося умовним математичним сподіванням стосовно величин $y_1(t), y_2(t)$ та $y_3(t)$. Тоді $\varphi(z_1, z_2, t) =$

$$= M\left\{M\left\{\prod_{k=1}^{y_1(t)}\left(G_1\left(t - t_k^1\right) + z_1\overline{G}\left(t - t_k^1\right)\right)\times\right.\right.$$

$$\times\prod_{k=1}^{y_2(t)}\left(G_2\left(t - t_k^2\right) + z_2\overline{G}_2\left(t - t_k^2\right)\right)\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{y_3(t)}\left\{G_1\left(t - t_k^3\right)G_2\left(t - t_k^3\right) + z_1\overline{G_1}\left(t - t_k^3\right)\times\right.$$

$$\times G_2\left(t - t_k^3\right) + z_2\overline{G}_2\left(t - t_k^3\right)G_1\left(t - t_k^3\right) +$$

$$\left.\left.\left.+ z_1 z_2\overline{G}_1\left(t - t_k^3\right)\overline{G}_2\left(t - t_k^3\right) / y_i(t), i = 1,2,3\right\}\right\}\right\}.$$

Підрахуємо умовне математичне сподівання в останньому виразі. Тоді ми отримаємо:
$\varphi(z_1, z_2, t) = M\left\{A_1(z_1, t)\right\}^{y_1(t)} M\left\{A_2(z_2, t)\right\}^{y_2(t)} \times$
$\times M\left\{A_3(z_1, z_2, t)\right\}^{y_3(t)}$, де вирази $A_1(z_1, t)$, $A_2(z_2, t)$, $A_3(z_1, z_2, t)$ мають наступний вигляд:

$$A_1(z_1, t) = = \frac{1}{t}\int_0^t\left(G_1(t-u) + z_1\overline{G}_1(t-u)\right)du;$$

$$A_2(z_2, t) = = \frac{1}{t}\int_0^t\left(G_2(t-u) + z_2\overline{G}_2(t-u)\right)du;$$

$$A_3(z_1, z_2, t) = \frac{1}{t}\int_0^t G_1(t-u)G_2(t-u) +$$

$$+\overline{G}_1(t-u)G_2(t-u)z_1 + G_1(t-u)\overline{G}_2(t-u)z_2 +$$

$$\left.+\overline{G}_1(t-u)\overline{G}_2(t-u)z_1 z_2\right)du$$

В останніх виразах для $A_1(z_1, t)$, $A_2(z_2, t)$ та $A_3(z_1, z_2, t)$ коефіцієнт $\frac{1}{t}$ є щільністю рівномірного на проміжку $[0,1]$ розподілу.
Остаточно, генератриси $A_1(z_1, t), A_2(z_2, t)$ та $A_3(z_1, z_2, t)$ будуть мати наступний вигляд :

$$A_1(z_1, t) = \frac{1}{t}\int_0^t\left(1 - \overline{G}_1(t-u)(1-z_1)\right)du;$$

$$A_2(z_1, t) = \frac{1}{t}\int_0^t\left(1 - \overline{G}_2(t-u)(1-z_2)\right)du;$$

$$A_3(z_1, z_2, t) = 1 - \frac{1}{t}\int_0^t\overline{G}_1(t-u)G_2(t-u)du(1-z_1) -$$

$$-\frac{1}{t}\int_0^t\overline{G_2}(t-u)G_1(t-u)du(1-z_2) -$$

$$-\frac{1}{t}\int_0^t\overline{G}_1(t-u)\overline{G}_2(t-u)du(1-z_1z_2)$$

Підставивши генератриси $A_1(z_1, t), A_2(z_2, t)$ та $A_3(z_1, z_2, t)$ в генератриси величин $y_1(t), y_2(t)$ та $y_3(t)$, отримаємо явний вираз генератриси $\varphi(z_1, z_2, t)$:
$\phi(z_1, z_2, t) =$

$$= \exp\left\{-\left(\lambda_1\int_0^t\overline{G}_1(u)du + b\int_0^t\overline{G_1}G_2(u)du\right)\times\right.$$

$$\times(1-z_1) - \left(\lambda_2\int_0^t\overline{G}_2(u)du + b\int_0^t\overline{G}_2G_1(u)du\right)(1-z_2) -$$

$$\left.-b\int_0^t\overline{G}_1\overline{G}_2(u)du(1-z_1z_2)\right\}.$$

Перейшовши в останньому виразі до границі при $t \to \infty$, ми отримаємо:
$\lim_{t\to\infty}\varphi(z_1, z_2, t) = \varphi(z_1, z_2) =$

$$= \exp\left\{-\left(\frac{\lambda_1}{a_1} + b\left(\frac{1}{a_1} - M\min(\xi_1, \xi_2)\right)\right)(1-z_1) -\right.$$

$$-\left(\frac{\lambda_2}{a_2}+b\left(\frac{1}{a_2}-M\min\left(\xi_1,\xi_2\right)\right)\right)\left(1-z_2\right)-$$

$$-bM\min\left(\xi_1,\xi_2\right)\left(1-z_1z_2\right)\Big\}.$$

Теорема доведена.

Висновки.

Будова граничного процесу обслуговування налічує п'ять незалежних пуассонівських компонент. Це означає, що в стаціонарному режимі одновимірний розподіл процесу обслуговування має наступну будову: $X_1=x_1+x_2+x^*$, $X_2=x_3+x_4+x^*$, де $x_i, i=1,4$ та x^* незалежні випадкові величини, розподілені за законами Пуассона з параметрами:

$\frac{\lambda_1}{a_1}$ для x_1, $b\left(\frac{1}{a_1}-M\min\left(\xi_1,\xi_2\right)\right)$ для x_2, $\frac{\lambda_2}{a_2}$ для x_3, $b\left(\frac{1}{a_2}-M\min\left(\xi_1,\xi_2\right)\right)$ для x_4 та $bM\min\left(\xi_1,\xi_2\right)$ для x^*.

Таким чином, в структурі процесу обслуговування з'являється дві додаткові незалежні компоненти x_2 та x_4. З цього можна зробити висновок, що наша модель в процесі свого функціонування послаблює залежність між компонентами потоків вимог. Компоненти x_2 та x_4 описують в побудові процесу обслуговування ті вимоги, які прийшли в парі з потоку $y_3(t)$, але залишилися в нашій моделі на обслуговуванні по одній зі своєї пари. Оскільки інша вимога з пари вже отримала обслуговування і вийшла з системи, пара розпалася, а значить і залежність між компонентами X_1 та X_2 зменшилась на величину залежності, яку вносила до процесу обслуговування дана пара вимог.

Список використаних джерел

1. Grifiths R.S. A class of bivariate Poisson process,/ Grifiths R.S.,Milne R.K. // *Journal Multivar. Anul*.– 1978 -Issue 8, - 3 - P.380-396

2. Lebedev E.A. Multi-channel queueing networks with interdependent input flows in heavy traffic,/E.A.Lebedev, A.A. Chechelnitsky ,A.V. Livinska // *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, -2018- Vol. 97 - P.113-125

Отже, можемо зробити наступні висновки: 1)математичне сподівання та дисперсія загального числа пар вимог, які «розпалися» в результаті обслуговування дорівнює $b\left(\frac{1}{a_1}-M\min\left(\xi_1,\xi_2\right)\right)+b\left(\frac{1}{a_2}-M\min\left(\xi_1,\xi_2\right)\right)$.

2) математичне сподівання та дисперсія повних пар вимог, які знаходяться на обслуговуванні в нашій моделі, дорівнює $bM\min\left(\xi_1,\xi_2\right)$.

3) коефіцієнт кореляції між компонентами процесу обслуговування вимог у нашій моделі:

$$r\left(X_1,X_2\right)=\frac{\operatorname{cov}\left(X_1,X_2\right)}{\sqrt{DX_1DX_2}}=\sqrt{a_1a_2}\,\frac{bM\min\left(\xi_1,\xi_2\right)}{\sqrt{\left(\lambda_1+b\right)\left(\lambda_2+b\right)}}.$$

2. Асимптотична нормальність стаціонарного розподілу процесу обслуговування .

В умовах зростання інтенсивностей вхідних потоків отримаємо теорему про слабку збіжність відповідно центрованого та нормованого вектора $\left(X_1,X_2\right)$ до двовимірного нормально розподіленого випадкового вектора $\left(\xi_1,\xi_2\right)$.

Теорема 2. Нехай параметри вхідного пуассонівського потоку залежать від номера серії n наступним чином:

$\lambda_1^{(n)}=\lambda_1 n, \lambda_2^{(n)}=\lambda_2 n, b^{(n)}=bn,\ n\geq 1.$

Тоді має місце слабка збіжність вектора

$$\left(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)}\right)=n^{-1/2}\left(X_1^{(n)}-\alpha_1 n, X_2^{(n)}-\alpha_2 n\right)\underset{n\to\infty}{\Rightarrow}\left(\xi_1,\xi_2\right)$$

Вектор $\left(\xi_1,\xi_2\right)$ має нормальний розподіл з нульовим вектором середніх значень і матрицею коваріацій

$$C=\begin{Vmatrix}\alpha_1 & a_3\\ a_3 & \alpha_2\end{Vmatrix},\ \alpha_1=\left(\lambda_1+b\right)/a_1,\ \alpha_2=\left(\lambda_2+b\right)/a_2$$

.

References

1. GRIFITHS, R.S., MINE R.K (1978). "A class of bivariate Poisson process", *Journal Multivar. Anul*. Issue 8, - 3 – pp.380-396

2. LEBEDEV, E.O., CHECHELNITSKY, A.A., LIVINSKA, A.V.,(2018)"Multi-channel queueing networks with interdependent input flows in heavy traffic". *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, vol. 97, pp. 113-125

Надійшла до редакції 05.12.2020

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 544.171.44 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/4.12

Крищук Т. В.[1], м.н.с.,
Кордубан О.М.[1], к.ф.-м.н., с.н.с.,
Огенко В.М.[1], д.х.н., проф.,
Медведський М.М.[2], к.ф.-м.н., с.н.с.,

Дослідження методом рентгенівської фотоелектронної спектроскопії процесу синтезу *TiC* при відпалі $TiH_2/TiO_2/C$ у вакуумі

[1]Інститут загальної та неорганічної хімії ім. В.І. Вернадського НАН України, 03142, м. Київ, просп. Академіка Палладіна, 32/34,
[2]Головна астрономічна обсерваторія НАН України, 03143, м. Київ, просп. Академіка Заболотного, 27.
e-mail:tarkry@ukr.net , akord.ignc@gmail.com
Vladimir.Ogenko@gmail.com
mmmedvedsky@gmail.com

T. Kryshchuk[1], Jr. Res. Sci.,
O. Korduban[1], PhD.,
V. Ogenko[1], Dr. Sci.
M. Medvedskij[2], PhD.,

Investigation by X-ray photoelectron spectroscopy of the process of *TiC* synthesis during annealing of $TiH_2/TiO_2/C$ in vacuum

[1]V.I. Vernadsky Institute of General and Inorganic Chemistry of National Academy of Sciences of Ukraine, 03142, Kyiv, Academic Palladin Avenue, 32/34,
[2]Main astronomical observatory of National Academy of Sciences of Ukraine, 03143, Kyiv, 27 Akademika Zabolotnoho Str.
e-mail:tarkry@ukr.net , akord.ignc@gmail.com
Vladimir.Ogenko@gmail.com
mmmedvedsky@gmail.com

Карбіди перехідних металів малої розмірності (MXenes) є перспективними матеріалами для розробки фотокаталізаторів і є високоефективними сокаталізаторами для промислового TiO_2 (P25). Так, в нанокомпозиті $Ti_3C_2@TiO_2$, отриманому нашаруванням нанопластинок Ti_3C_2, зростає здатність до розділення носіїв заряду внаслідок високої електропровідності TiC_{1-x}. Перспективною є задача формування нанокомпозиту $TiC_{1-x}@TiO_{2-x}$ прямим синтезом із n-TiO_2, що дозволяє збільшити якість контакту між оболонкою та ядром нанокомпозиту і скоротити число проміжних етапів синтезу. Крім того високодисперсний TiC має високі значення твердості, температури плавлення, модулів пружності та зсуву і має перспективу використання у матеріалознавстві при плазмовому формуванні покриттів. У роботі синтезовано TiC на поверхні TiO_2 (оболонки модифікованого мікропорошку $TiH_2/TiO_2/C$) при відновлювальному відпалі у вакуумі з використанням TiH_2 як джерела атомарного водню. Після серії відпалів при 535℃ - 600℃ отримано Ti2p- C1s- та O1s- спектри поверхневих атомів. Методом РФС встановлено основні етапи синтезу TiC у реакції перетворення TiO_2/C. Запропоновано використання TiH_2 як джерела атомарного водню у наносистемах типу «ядро/оболонка» для проведення локального синтезу на поверхні нанооб'єктів в умовах вакууму або інертної атмосфери.

Ключові слова: рентгенівська фотоелектронна спектроскопія, карбід титану, TiC, TiO_2, нанопорошки.

Small dimensional transition metal carbides (MXenes) are promising materials for the development of photocatalysts and are highly efficient cocatalysts for industrial TiO_2 (P25). Thus, in the $Ti_3C_2@TiO_2$ nanocomposite obtained by layering Ti_3C_2 nanoplates, the ability to separate charge carriers increases due to the high electrical conductivity of TiC_{1-x}. The task of forming the $TiC_{1-x}@TiO_{2-x}$ nanocomposite by direct synthesis with n-TiO_2 is promising, which allows to increase the quality of contact between the shell and the nanocomposite core and to reduce the number of intermediate stages of synthesis. In addition, highly dispersed TiC has high values of hardness, melting point, modulus of elasticity and shear and has the prospect of use in materials science in plasma spraying coatings. In work TiC was synthesized on the surface of TiO_2 - the shell of the modified micropowder $TiH_2/TiO_2/C$ during reductive annealing in vacuum using TiH_2 as a source of atomic hydrogen. After a series of annealing at 535℃ - 600℃, the Ti2p- C1s- and O1s- spectra of surface atoms were obtained. The main stages of TiC synthesis in the TiO_2/C conversion reaction were established by the XPS method. The use of TiH_2 as a source of atomic hydrogen in nanosystems of the «core/shell» type is proposed for local synthesis on the surface of nanoobjects in a vacuum or inert atmosphere.

KeyWords: X-ray photoelectron spectroscopy, XPS, titanium carbide, TiC, TiO_2, nanopowders.

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

© Т.В. Крищук, О.М. Кордубан,
В.М. Огенко,М.М. Медведський 2020

Вступ

Карбіди перехідних металів малої розмірності (MXenes-технологія) є перспективними матеріалами для розробки фотокаталізаторів [1 – 3]. Матеріалом, що найбільше досліджується, є Ti_3C_2-*OH*, який проявляє надвисоку каталітичну активність у реакції виділення водню під дією сонячного світла [3 – 6]. Карбід титана (Ti_3C_2) MXene має такі ж показники в реакції фотокаталітичного відновлення CO_2, як платина, і є високоефективним сокаталізатором для промислового TiO_2 (P25). Так, у нанокомпозиті Ti_3C_2-*OH*@TiO_2 зростає здатність до розділення носіїв заряду внаслідок високої електропровідності Ti_3C_2, а нанопластинки Ti_3C_2-*OH* утворюють лужне нанометрове покриття на поверхні *n*-TiO_2 і формують центри адсорбції та активації CO_2 [7 – 8].

Перспективною є задача формування нанокомпозиту TiC_{1-x}@TiO_{2-x} прямим синтезом з *n*-TiO_2, що дозволяє збільшення контакту між оболонкою та ядром нанокомпозиту і зменшення кількості проміжних етапів синтезу. Крім того, високодисперсний *TiC* має високі значення твердості, температури плавлення, модулів пружності та зсуву і має перспективу використання у матеріалознавстві при плазмовому формуванні покриттів [9 – 11].

Експериментальна частина

Досліджено процес відпалу у вакуумі модифікованого вуглецем гідриду титану TiH_2/C і можливість синтезу у процесі відпалу поверхневого шару TiC_{1-x} на TiO_2.

Використовувався промисловий гідрид титану з розміром фракції 100 мкм. Поверхня TiH_2 була модифікована вуглецем контактом мікропорошку з розчином масла ВМ-6 у гексані з вмістом 10^{-2} мг/мл. Зразки TiH_2/C у вигляді суспензії з гексаном було нанесено на дві мідні підкладинки з розмірами (10 х 10) мм. Після випаровування розчиннику утворювався тонкий шар TiH_2/C. Наявність окремого зразка для відпалив 600°С дозволила зберегти динаміку змін поверхні у цьому діапазоні. Перед дослідженням зразки витримувались за температури 250°С протягом 30 хв у вакуумі для активації міграційних процесів вуглецю та видалення частини адсорбованої води. Зразки TiH_2/C послідовно відпалено у вакуумній камері спектрометра: зразок 1 - у діапазоні (535 – 570)°С, зразок 2 - за 600°С. Час наступного відпалу визначався результатами рентгенівської фотоелектронної спектроскопії (РФС) для попереднього відпалу. Так, зразок 1 відпалювався за температури 535°С двічі з часом відпалу по 50 хв та за 570°С з часом відпалу 100 хв. Другий зразок відпалювався тричі по 20хв при 600°С. Після кожного відпалу отримувались *Ti2p* - *C1*s -та *O1*s - спектри поверхні зразків. Глибина аналізу РФС становила ~3 - 5 нм. Вакуум в аналітичній камері спектрометра складав $1\cdot10^{-7}$ Па, початковий вакуум у камері для обробки зразків був $1\cdot10^{-6}$ Па та при відпалах внаслідок виділення водню змінювався до $4\cdot10^{-3}$ Па.

Мікро- і наночастки TiH_2 мають оболонку з TiO_2 та ядро з TiH_2 [12] і після модифікації вуглецем – це система $TiH_2/TiO_2/C$. Мета експерименту полягала в ініціації під дією атомарного водню відновлювальних процесів (2) для заміни на поверхні $TiH_2/TiO_2/C$ зв'язків Ti-O на Ti-C при відпалі у вакуумі

$$TiH_2 \rightarrow Ti + 2H, \quad (1)$$

$$2H + O = H_2O. \quad (2)$$

Зміни зарядових станів *Ti*2p - *C1*s - та *O1*s - рівнів атомів на поверхні зразків після відпалів досліджувались методом РФС на спектрометрі з енергоаналізатором PHOIBOS-100/SPECS згідно методики [13]. Спектри отримано з використанням рентгенівського джерела з магнієвим анодом ($EMgK_a$ = 1253,6 еВ, P = 200 Вт). Спектри *Ti*2p - рівнів було розкладено на зв'язані між собою для врахування спін - орбітального розщеплення пари компонент $2p_{3/2}/2p_{1/2}$ з параметрами ΔE = 5,76 еВ; I_1/I_2 = 0,5 з повною шириною на половині висоти (ПШПВ) 1,42 еВ. Спектри *O1s* – рівня були розкладені на окремі компоненти з ПШПВ 1,1 еВ. Варіювалась інтенсивність компонент та їхня енергія зв'язку. Ширина компонент і співвідношення внесків гаусс - лоренцевого розподілів у процесі розкладання спектрів фіксувались. Розкладання проводилось методом Гаусса - Ньютона в режимі зв'язаних параметрів. Інтегральна інтенсивність компонент визначалась після вирахування фону методом Ширлі [14]. Отримані таким чином інтегральні інтенсивності компонент пропорційні вмісту в зразках нееквівалентних зарядових станів титану, вуглецю та кисню. Глибина аналізу РФС становить ~3 – 5 нм.

На рис. 1 – 5 представлено розкладені на компоненти *Ti*2p - *C1s* - та *O1s* - спектри поверхні модифікованого $TiH_2/TiO_2/C$ за різних температур

.

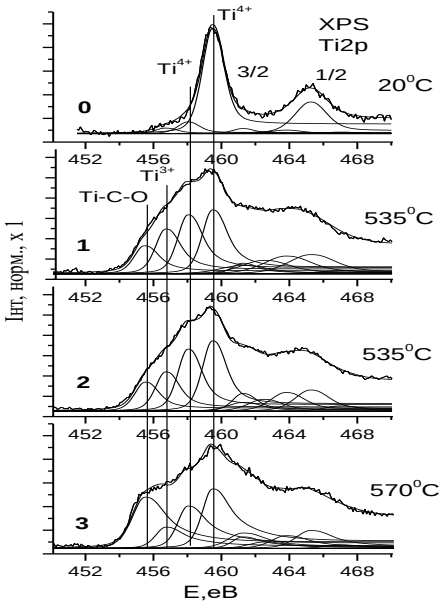


Рис. 1. Розкладені на компоненти *Ti*2p- спектри $TiH_2/TiO_2/C$.

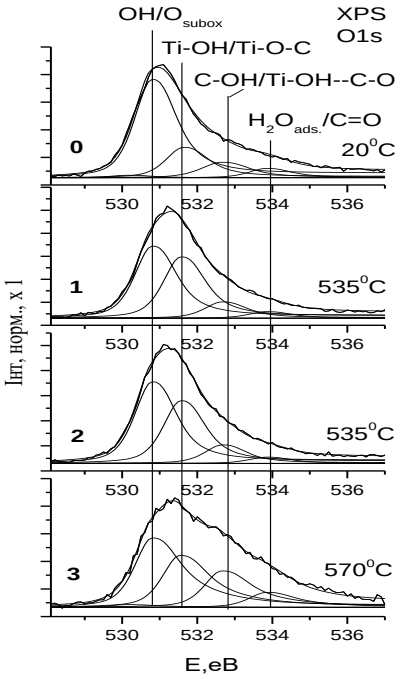


Рис. 2. Розкладені на компоненти *O1*s – спектри $TiH_2/TiO_2/C$.

(0 - вихідний зразок 20°C, 1- 535°C, 50 хв, 2- 535°C 50 хв, 3- 570°C 100 хв).

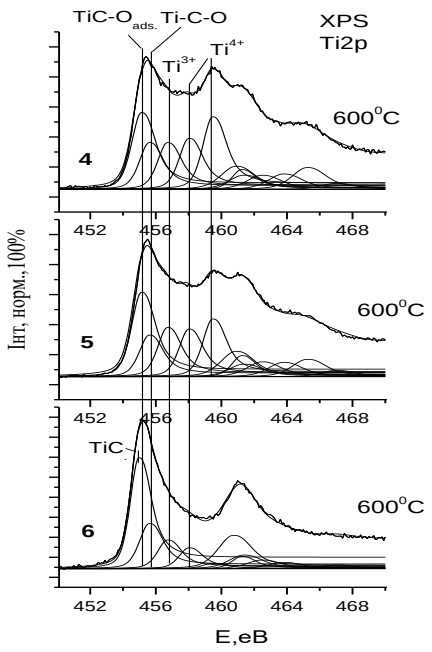


Рис. 3. Розкладені на компоненти Ti2p- спектри $TiH_2/TiO_2/C$.

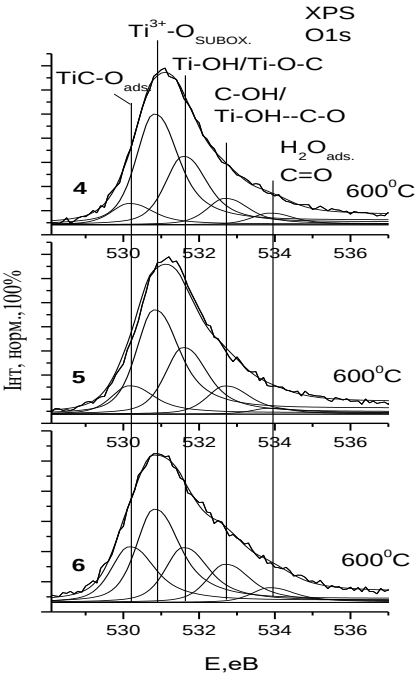


Рис. 4. Розкладені на компоненти O1s- спектри $TiH_2/TiO_2/C$.

(4- 600°C 20 хв, 5- 600°C 20 хв, 6- 600°C 20 хв).

відпалу. У таблицях 1 - 3 представлено відносні вклади компонент спектрів.

На поверхні мікрогранул $TiH_2/TiO_2/C$ у всьому діапазоні відпалів (рис. 1, 3) титан присутній як Ti^{4+} - стани TiO_2 ($E_{зв}Ti2p_{3/2}$ = 458,0 еВ), Ti^{4+} - стани гідроксидів титану ($E_{зв}Ti2p_{3/2}$ = 459,5 еВ та 461,2 еВ), Ti^{3+} - стани субоксиду TiO_{2-x} ($E_{зв}Ti2p_{3/2}$ = 456,7 еВ) [14 – 16, 20]. Карбід титану представлений Ti^{2+} - станами зв'язків $C – Ti – C$ у TiC ($E_{зв}Ti2p_{3/2}$ = 455,0 еВ) [2, 17, 18], у $TiC – O_{ads}$ з термінальним киснем на поверхні ($E_{зв}Ti2p_{3/2}$ = 455,1 еВ [8, 19]), в окисленому TiC - OH ($C – Ti$ - O) ($E_{зв}Ti2p_{3/2}$ = 455,5 еВ) [20, 21] (рис. 1 – 3, табл. 1).

Кисень на поверхні мікрогранул $TiH_2/TiO_2/C$ (рис. 2, 4) присутній як адсорбований на TiC - O_{ads} ($E_{зв}O1s$ = 530,1 еВ) [2, 19, 22], як кисень Ti^{3+} - O субоксидної гратки ($E_{зв}O1s$ = 530,8 еВ) [23], в зв'язках Ti - OH, $Ti – O$ - C ($E_{зв}O1s$ = 531,6 еВ) [2, 19, 20, 22, 26, 27], C - OH, Ti - OH — C - O, ($E_{зв}O1s$ = 532,7 еВ) [20, 24, 26, 28], H_2O_{ads}//поліефіри ($E_{зв}O1s$ = 533.9 еВ) [2, 20, 22, 29] (рис. 2 – 4, табл. 2).

Вуглець на поверхні $TiH_2/TiO_2/C$ (рис. 5) має кілька нееквівалентних станів: у TiC ($E_{зв}C1s$ = 282,0 еВ), в окисленому $Ti – C – O$ та TiC - O_{ads} ($E_{зв}C1s$ = 282,4 еВ), у зв'язках C-C/CH_x ($E_{зв}C1s$ = 284,5 еВ) [19, 24], $Ti – C – O$ ($E_{зв}C1s$ =285,5 еВ) [27], $C – O$ / C - OH ($E_{зв}C1s$ = 286,3 еВ) [7, 19, 22, 24 – 27] та C=O/ поліефіри ($E_{зв}C1s$ = 287,5 еВ) [25, 29] (рис. 5, табл. 3).

Після відпалів при 600°С на поверхні $TiH_2/TiO_2/C$ з'являються Ti^{2+}- стани карбіду титану TiC з $E_{зв}Ti2p_{3/2}$= 455,1 еВ [8] (рис. 3, (4-6)). Одночасно на C1s-спектрах (рис. 5, (4-6)) з'являються сигнали в області $E_{зв}$C1s =282,0 еВ та 282,4 еВ, що вказує на появу фаз карбіду титану.

На спектрах та таблицях відносних вкладів компонент (рис. 1 - 5, табл. 1 - 4) видно динаміку змін зарядових станів титану, кисню та вуглецю в усьому діапазоні відпалу. Згідно $Ti2p_{3/2}$ – спектрам уже при 535°С/1-2 (рис. 1) в області 455,5 еВ присутній вклад від окисленого TiC-OH (C-Ti^{2+}-O). При 570°С/3 внесок від TiC-OH у спектри швидко зростає за рахунок зменшення Ti^{3+}-станів TiO_{2-x}, а при 600°С/4-6 (рис. 3) уже з TiC-OH формуються фази TiC-O_{ads} (455,1еВ) та TiC (455,0 еВ) (1,3; табл. 1). Поява внесків з $E_{зв}Ti2p_{3/2}$=455,0 еВ та 455,1еВ указує на формування фаз TiC [8, 17, 18].

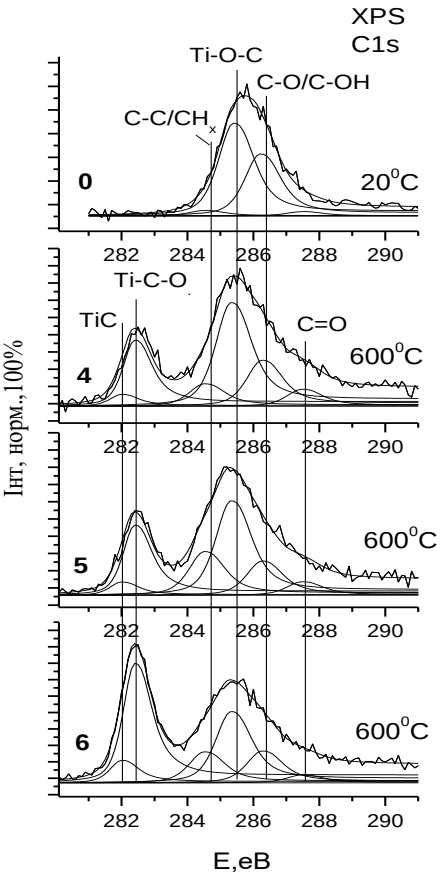


Рис. 5. Розкладені на компоненти C1s- спектри $TiH_2/TiO_2/C$ (0 -вихідний зразок, 20°С, 4 - 600°С 20 хв, 5 - 600°С 20 хв, 6 - 600°С 20 хв)

Згідно O1s-спектрам при 535 °С – 600 °С (рис. 2, 4; табл. 2) у них домінує внесок від граткового кисню субоксидів TiO_{2-x} (530,8 еВ), який поступово зменшується і корелює при цьому зі зменшенням Ti^{3+}- станів субоксиду TiO_{2-x} (рис. 6, криві 9, 7). Після відпалу при 600°С/4 з'являється і при подальших відпалах зростає вклад у спектри в області 530,1 еВ (рис. 4; табл. 2), який в [2, 19, 22] ідентифікується як адсорбований кисень на поверхні TiC. Зміни цього внеску з $E_{зв}$ =530,1 еВ у спектрах кисню корелюють зі змінами фази TiC (рис. 6, криві 4, 3). Компонента O1s-спектрів з $E_{зв}$ = 532,7 еВ присутня в усьому діапазоні відпалів та ідентифікується як зв'язок C-OH/Ti-OH--C-O. Цей внесок у O1s-спектрах також корелює з вкладом у спектрах титану від зв'язку C-Ti^{2+}-O (рис. 6, криві 1 - 2).

На C1s - спектрах (див. рис. 5, (4 - 6)) компонента з $E_{зв}$ = 282,4 еВ від Ti-C-O/TiC-O_{ads} з незначним внеском є вже в діапазоні 535ºC-570ºC. При 600ºC з'являється внесок з $E_{зв}$ = 282,0 еВ, який відноситься до TiC [24]. Внески компонент з 282,4 еВ та 282,0 еВ (рис. 6, криві 5, 6) корелюють із внесками від TiC у спектрах титану (рис. 6, крива 3).

У табл. 4 приведено інтегральні інтенсивності Ti2p- та C1s - спектрів фаз зі зв'язком C-Ti-C (TiC та TiC-$O_{ads.}$). З урахуванням [29-31], співвідношення атомів вуглецю до атомів титану в фазах TiC_x після всіх відпалів 600ºC становить x=1, тобто в області $E_{зв}Ti2p_{3/2}$ = 455,0 еВ та 455,1 еВ присутній сигнал, який вказує на формування TiC.

.

Таблиця 1

Результати розкладання на компоненти Ti2p – спектрів $TiH_2/TiO_2/C$ при відпалах 1 - 6 та відношення інтегральних інтенсивностей фаз C-Ti-C/C-Ti-O

	$Ti2p_{3/2}$						I(%)C-Ti-C / I(%)C- Ti -O
	I(%)Ti-C, $E_{зв}Ti\ 2p_{3/2}$, еВ		I(%)Ti-O, $E_{зв}Ti\ 2p_{3/2}$, еВ				
	Ti^{2+}-C TiC / 455.0 TiC--O/ 455.1	TiC-OH C-Ti^{2+}-O 455.5/455.6	Ti^{3+}-O 456.7	Ti^{4+}-O 458.0	Ti^{4+}-O 459.5	Ti^{4+}-O 461.2	
Вихідний, 20ºC	-	-	4.7	9.2	81.9	4.2	
2_535ºC 50 хв	-	13.5	21.9	28.7	30.7	5.2	
3_535ºC 50 хв	-	13.2	18.1	28.5	31.9	8.3	
4_570ºC 50 хв	-	29.0	11.2	22.4	31.4	6.0	
5_600ºC 20 хв	24.5	15.0	14.9	16.2	23.2	6.2	1.6
6_600ºC 20 хв	27.9	13.8	16.4	15.9	19.2	6.8	2.0
7_600ºC 20 хв	47.9	20.8	13.3	9.7	2.6	5.7	2.3

Таблиця 2

Результати розкладання на компоненти O1s – спектрів $TiH_2/TiO_2/C$ при відпалах 1-6

	$E_{зв}O1s$, еВ				
	TiC-O_{ads} 530.1	O-Ti^{3+} 530.8	Ti-OH, Ti –C-O 531.6	C-OH Ti-OH--C-O 532.7	H_2O_{ads}// polyetheres 533.9
Вихідний, 20ºC	-	63.6	19.1	11.4	5.9
2_535ºC 50 хв	-	46.0	39.4	10.5	4.1
3_535ºC 50 хв	-	48.2	37.2	11.0	3.6
4_570ºC 50 хв	-	44.5	29.0	19.7	6.8
5_600ºC 20 хв	8.92	46.5	28.7	11.03	4.86
6_600ºC 20 хв	12.14	44.8	28.5	12.06	2.53
7_600ºC 20 хв	21.53	36.2	21.6	14.96	5.73
Точність	±0.1				

Таблиця 3

Результати розкладання на компоненти C1s – спектрів $TiH_2/TiO_2/C$ при відпалах 1-6

	$E_{зв}C1s$, еВ					
	TiC 282. 0	Ti-C-O TiC-O_{ads} 282.4	C-C, CH_x 284.5	Ti-O -C 285.5	C-O C-OH 286.3	C=O поліефіри 287.5
Вихідний, 20ºC	-	2.5	26.0	25.1	34.1	12.3
2_535ºC 50 хв	-	2.3	28.4	24.1	31.6	13.6
3_535ºC 50 хв	-	2.6	32.1	22.3	31.2	11.8
4_570ºC 50 хв	-	5.7	23.9	35.0	22.7	12.7
5_600ºC 20 хв	3.8	21.3	8.7	41.2	18.2	6.8
6_600ºC 20 хв	4.2	22.4	17.3	37.3	13.5	5.3
7_600ºC 20 хв	7.1	37.8	12.0	27.6	12.3	3.2
Точність	±0.1					

Таблиця 4

Інтегральна інтенсивність I Ti2p- та I C1s компонент спектрів для зв'язку C-Ti-C в TiC.

N відпалу		$E_{зв}$Ti2p, eB 455.1-460.9 455.0-460.8 I Ti2p	$E_{зв}$C1s 282.0/282.4 eB I C1s	I C1s/ I Ti2p	Посилання
4	TiC, 600ºC	81147	80053	0.99	Scofield [31] Penn [32]
5	TiC, 600ºC	84132	86146	1.02	
6	TiC, 600ºC	152657	154124	1.01	

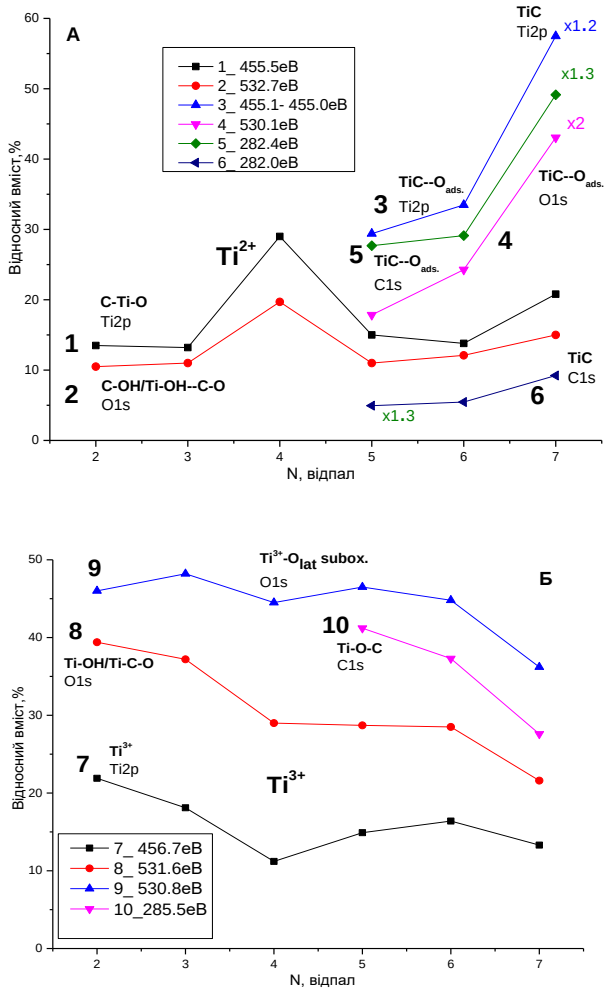


Рис. 6. Залежності відносних вкладів компонент $Ti2p_{3/2}$-, C1s- та O1s – спектрів, пов'язаних C-Ti-O та C-Ti-C зв'язками при відпалах $TiH_2/TiO_2/C$ у вакуумі.

З рис. 6 можна зробити кілька висновків. Видно, що криві 1 (C-Ti^{2+}-O) та 2 (C-OH/Ti-OH—CO) пов'язані між собою та відображають існування фази з Ti^{2+} станами. Криві 7 (Ti^{3+}) та 8 (Ti-OH/C-OH)/10(Ti-O-C) теж пов'язані між собою та відображають існування фази з Ti^{3+} станами. Видно, що обидві фазові стани змінюються у протилежних напрямках, причому зв'язки з Ti^{3+}-станами поступово замінюються зв'язками з Ti^{2+}-станами (відпал 2: Ti^{3+}(22%)/Ti^{2+}(14%); відпал 7: Ti^{3+}(13%)/Ti^{2+}(21%), (рис. 6, табл.1)).

Тобто формування окисленого TiC (C-Ti-O)/(крива 1), який містить у собі –COH,--$COH_{ads.}$ та -OH групи (крива 2) відбувається за рахунок Ti^{3+} станів (крива 7), які утворились з нестехіометричного оксиду TiO_{2-x} (O_{vac} -Ti^{3+}-OH) заповненням кисневих вакансій –COH групами (крива 8) і формуванням зв'язку Ti–COH і зв'язку Ti-O-CH_x (крива 10). Функціональні групи C-OH згідно [25] присутні на поверхні при 600ºC і зменшується тільки при подальшому нагріванні.

Враховуючи, що потік атомарного водню, згідно реакції 2, безперервно генерує нові кисневі вакансії $O_{vac.}$-Ti-O в оксидній матриці, які заповнюються –COH, --COH_{ads} групами, а також CH_x-групами (Ti-O-CH_x), поступово змінюється координаційне оточення титану з кисневого на вуглецеве, і після досягнення критичного рівня Ti-C/Ti-O відбувається зміна $Ti^{3+}\rightarrow Ti^{2+}$ зарядового стану титану.

Слід зазначити, що внесок кисню від Ti^{2+}-субоксиду ($E_{зв}$528,3 eB, [23]) в O1s- спектрах відсутній, що вказує на відсутність відновлення оксидної гратки до Ti^{2+}-станів TiO_{2-x} при синтезі TiC. Натомість присутні внески у спектри кисню компоненти з $E_{зв}$ = 530,8 eB, пов'язаної з гратковим киснем Ti^{3+}- субоксиду [23] (крива 9), які корелюють з Ti^{3+}-станами (крива 7).

У цілому неперервний перехід $Ti^{3+}\rightarrow Ti^{2+}$ можна описати схемою:

$$Ti^{4+}/(O\text{-}Ti\text{-}O)\rightarrow Ti^{3+}{}_{subox}/(O_{vac.}\text{-}Ti\text{-}OH)\rightarrow Ti^{3+}/(HO\text{-}C\text{-}Ti\text{-}OH)\rightarrow Ti^{2+}/(HO\text{-}C\text{-}Ti\text{-}OH)$$

Зв'язок C-Ti^{2+}-O може відображати неперервний розчин TiO-TiC, який під дією відновлювальних процесів зміщується у напрямку C-Ti-C.

Зі спектрів титану (рис. 3 (4 - 6), табл. 1) видно початок формування при відпалах 600ºC нової фази з $E_{зв}Ti2p_{3/2}$=455.1 eB, яка пов'язується з TiC, на поверхні якого присутній

адсорбований атом кисню $O_{ads.}$-Ti-C. На рис. 6 цій фазі відповідають перші дві точки кривої 3 (TiC—$O_{ads.}$). З кривою 3 корелюють крива 4 (кисень у TiC-$O_{ads.}$) і крива 5 (вуглець у TiC-$O_{ads.}$). При відпалах 600ºС у спектрах зникають внески від ОН-груп, що викликано реакцією OH+H=H_2O із випаровуванням води.

Одночасно з фазою $O_{ads.}$-Ti-C при відпалі 600ºС/6 починає формуватись фаза TiC. На спектрах титану спостерігається тільки зсув енергії зв'язку компоненти у напрямку 455,1 → 455,0 еВ (рис. 6, крива 3; $E_{зв}$ = 455,0 еВ зафіксовано тільки після останнього відпалу). А на спектрах вуглецю при відпалах 600ºС/4-6 фазу TiC можна виділити. Це компонента з $E_{зв}$ = 282,0 еВ, яка пов'язується з TiC [24] (рис. 6, крива 6).

Таким чином, при відпалі $TiH_2/TiO_2/C$ у вакуумі процес формування карбіду титану TiC з оксиду титану в цілому відбувається за схемою:

1.Ti^{4+}/(O-Ti-O) → 2.Ti^{3+}_{subox}/($O_{vac.}$-Ti-OH) → 3.Ti^{3+}/(HO-C-Ti-OH) → 4.Ti^{2+}/(HO-C-Ti- OH) → 5.Ti^{2+}/(C-Ti-C--O) → 6.Ti^{2+}/(C-Ti-C)

З гратки нестехіометричного TiO_{2-x} з Ti^{3+}-станами через заповнення кисневих вакансій C-OH/O-CH_x групами формується останній прекурсор синтезу карбіду титану. При цьому етап відновлення оксидного шару до Ti^{2+}/(O-Ti-O) є відсутнім.

Проведення процесу відпалу системи $TiH_2/TiO_2/C$ в вакуумі через активізацію відновлювальних процесів дозволяє отримувати інформацію про зарядові стани поверхні, що динамічно змінюються, з локальної зони синтезу товщиною 3 – 5 нм.

Отримані дані можуть бути використані при відновлювальних синтезах TiC з оксиду титану. Наприклад, методом електричного вибуху провідників (ЕВП) авторам не вдалося синтезувати помітну кількість TiC_{1-x}. Використання методу ЕВП для безпосереднього синтезу карбіду титану вибухом Ti/C - проволоки в атмосфері CH_4 є неефективним внаслідок різної кінетики реакції синтезу TiC та реакції продуктів вибуху з газовим середовищем у вибуховій камері. Це також підтверджується результатами роботи [11] - згідно представленим даним РФС видно (за величиною відношення сигнал/шум вихідного незгладженого Ti2p-спектру), що синтезовано не більше кількох відсотків фази TiC.

Перевагою методу ЕВП є можливість формування високодефектних наночастинок (наприклад, TiO_{2-x}/C) із високим вмістом на поверхні Ti^{2+}-, Ti^{3+}- станів (>50% у перші десятки секунд після вибуху) які за отриманими даними можуть виступати як прекурсори O-Ti^{3+}-C-OH та C-Ti^{2+}-OH при подальшому синтезі n-TiC та n-TiC_{1-x} @TiO_{2-x} у H_2/CH_4 плазмі за технологією, запропонованою в [32].

Висновки

Використання *TiH_2* як джерела атомарного водню в системі «ядро / оболонка» може бути використано для проведення локального синтезу на поверхні нанооб'єктів в умовах вакууму або інертної атмосфери.

Синтез *TiC* в умовах відновлювального відпалу системи $TiH_2/TiO_2/C$ у вакуумі починається при 600ºС, що значно нижче, ніж при класичних синтезах TiC.

Основні етапи формування TiC в умовах відновлювального відпалу:

1.Ti^{4+}/(O-Ti-O) → 2.Ti^{3+}_{subox}/($O_{vac.}$-Ti-OH) → 3.Ti^{3+}/(HO-C-Ti-OH) → 4.Ti^{2+}/(HO-C-Ti- OH) → 5.Ti^{2+}/(C-Ti-C--O) → 6.Ti^{2+}/(C-Ti-C)

З гратки субоксиду з Ti^{3+}-станами через заповнення кисневих вакансій C-OH/CH_x групами формується останній прекурсор синтезу карбіду титану.

Відновлення оксидного шару до Ti^{2+}/(O-Ti-O) при формуванні TiC відсутнє.

Запропоновано схему синтезу n-TiC, n-TiC-покриттів та композитів n-TiC_{1-x}@TiO_{2-x} із використанням ЕВП та відновлювальної H_2/CH_4 плазми.

Список використаних джерел

1. Novel Architecture Titanium Carbide ($Ti_3C_2T_X$) MXene Cocatalysts toward Photocatalytic Hydrogen Production: A Mini-Review / [V. H. Nguyen, B. S. Nguyen, C. Hu та ін.]. // Nanomaterials. – 2020. – Vol. 10. - № 4 – С. 602.

References

1. NGUYEN, V. H. & NGUYEN, B. S. & HU, C. et al. (2020) *Novel Architecture Titanium Carbide (Ti3C2Tx) MXene Cocatalysts toward Photocatalytic Hydrogen Production: A Mini-Review* Nanomaterials. Vol. 10, No 4, p. 602.

2. One MAX phase, different MXenes: a guideline to understand the crucial role of etching conditions on Ti3C2Tx surface chemistry / [M. Benchakar, L. Loupias, C. Garnerotaih.]. // Applied Surface Science. – 2020. – №530. – С. 147209.

3. One-step solution processing of Ag, Au and Pd@MXene hybrids for SERS/ [E. Satheeshkumar, T. Makaryan, A. Melikyantaih.]. // Sci. Rep. – 2016. – №6. – С.32049.

4. (111) TiO2-x /Ti3C2: synergy of active facets, interfacial charge transfer and Ti3+ doping for enhance photocatalytic activity / C.Peng, H. Wang, H. Yu, F. Peng. // Mater. Res. Bull.,. – 2017. – №89. – С. 16–25.

5. 2D-Layered Carbon/TiO2 Hybrids Derived from Ti3C2Mxenes for Photocatalytic Hydrogen Evolution under Visible Light Irradiation / [W. Yuan, L. Cheng, Y. Zhang таін.]. // Adv. Mater. Interfaces.. – 2017. – №4. – С. 1700577.

6. 2D visible-light-driven TiO2@Ti3C2/g-C3N4 ternary heterostructure for high photocatalytic activity / [X. H. Ding, Y. C. Li, C. H. Li таін.]. // J. Mater. Sci.. – 2019. – №54. – С. 9385–9396.

7. Boosting the Photocatalytic Activity of P25 for Carbon Dioxide Reduction using a Surface-Alkalinized Titanium Carbide MXene as Co-catalyst / [M. Ye, X. Wang, E. Liu таін.]. // ChemSusChem. – 2018. – №11. – С. 1606–1611.

8. Titanium carbide and its core-shelled derivative TiC@TiO2 as catalyst supports for proton exchange membrane fuel cells / [A. Ignaszak, C. Song, W. Zhu таін.]. // Electrochim. Acta.. – 2012. – №69. – С. 397−405.

9. Bihari Nayak B. Spectroscopic evaluation of tungsten carbide-titanium carbide composite prepared by arc plasma melting / B. Bihari Nayak, T. Dash, S. Pradhan. // Journal of Electron Spectroscopy and Related Phenomena. – 2020. – №254. – С. 146993.

10. Применение нановолокнистого углерода для получения высокодисперсного карбида титана / [Ю. Л. Крутский, Е. А. Ложкина, Е. А. Максимовский та ін.]. // Химическая технология. – 2017. – №254. – С. 146993.

11. Synthesis of titanium carbide nanoparticles by wire explosion process and its application in carbon dioxide adsorption / [S. Ghosh, P. Ranjan, A. Kumaartaih.]. // J. Alloy. Copd.. – 2019. – №794. – С. 645–653.

12. Surface Characterizations of TiH2 Powders before and after Dehydrogenation / [Y. Zhang, C. Wang, Y. Liu таін.]. // Appl. Surf. Sci.. – 2017. – №410. – С. 177–185.

2. BENCHAKAR, M. & LOUPIAS, L. & GARNEROTAIH, C. (2020) *One MAX phase, different MXenes: a guideline to understand the crucial role of etching conditions on $Ti_3C_2T_X$ surface chemistry.* Applied Surface Science. No 530, p. 147209.

3. SATHEESHKUMAR, E. & MAKARYAN, T. & MELIKYAN, A. et al. (2016). *One-step solution processing of Ag, Au and Pd@MXene hybrids for SERS* Sci. Rep. No 6, p. 32049.

4. PENG, C. & WANG, H. & YU, H. & PENG F. (2017) *(111) TiO_2-x /Ti_3C_2: synergy of active facets, interfacial charge transfer and Ti_3+ doping for enhance photocatalytic activity* Mater. Res. Bull. No 89, p. 16–25.

5. YUAN, W. & CHENG, L. & ZHANG, Y. et al. (2017) *2D-Layered Carbon/TiO2 Hybrids Derived from Ti3C2Mxenes for Photocatalytic Hydrogen Evolution under Visible Light Irradiation* Adv. Mater. Interfaces. No , p. 1700577.

6. DING, X. H. & LI, Y. C. & LI, C. H. (2019) *2D visible-light-driven TiO_2@Ti_3C_2/g-C_3N_4 ternary heterostructure for high photocatalytic activity* J. Mater. Sci. No 54, p. 9385–9396.

7. YE, M. & WANG, X. & LIU, E. (2018) *Boosting the Photocatalytic Activity of P25 for Carbon Dioxide Reduction using a Surface-Alkalinized Titanium Carbide MXene as Co-catalyst* ChemSusChem. No 11, p. 1606–1611.

8. IGNASZAK, A. & SONG, C. & ZHU, W. (2012) *Titanium carbide and its core-shelled derivative TiC@TiO_2 as catalyst supports for proton exchange membrane fuel cells* Electrochim. Acta. No 69, p. 397−405.

9. BIHARI NAYAK, B. & DASH, T. & PRADHAN, S. (2020) *Spectroscopic evaluation of tungsten carbide-titanium carbide composite prepared by arc plasma melting* Journal of Electron Spectroscopy and Related Phenomena. No 254, p. 146993.

10.KRUTSKYI, YU. L. & LOZHKINA, E. A. & MAKSYMOVSKYI E. A. et al. (2017) *Primenenie nanovoloknistogo ugleroda dlya polucheniya visokodispersnogo karbida titana* Khimicheskaya tekhnologiya. No 254. p. 146993.

11.GHOSH, S. & RANJAN, P. & KUMAAR, A. (2019) *Synthesis of titanium carbide nanoparticles by wire explosion process and its application in carbon dioxide adsorption* J. Alloy. Copd. No 794, p. 645–653.

12.Y. ZHANG, C. WANG, Y. LIU (2017) *Surface Characterizations of TiH_2 Powders before and after Dehydrogenation* Appl. Surf. Sci. No 410, p. 177–185.

13.XPS studies of the surface of nanocrystalline tungsten disulfide / [A. P. Shpak, A. M. Korduban, L. M. Kulikov таін.]. // J. Electron. Spectrosc. Relat. Phenom.. – 2010. – №181. – С. 234–238.

14. *Briggs D.* Practical surface analysis by Auger and X-ray photoelectron spectroscopy / D. Briggs, M. P. Seach. – New York: John Wiley & Sons, Chichester, 1983.

15. Handbook of X-ray Photoelectron Spectroscopy / C. D.Wagner, J. F. Moulder, L. E. Davis, W. M. Riggs. – New York: Perking-Elmer Corp, 1979. – 234 с.

16. *Нефедов В. И.*Рентгеноэлектронная спектроскопия химических соединений / В. И. Нефедов. – М.: Химия, 1984. – 256 с.

17. *Gong Y.* High-speed deposition of titanium carbide coatings by laser-assisted metal–organic CVD / Y. Gong, R. Tu, T. Goto. // Mater. Res. Bull.. – 2013. – №48. – С. 2766–2770.

18. *Zhang L.* A study on the oxidation and carbon diffusion of TiC in alumina-titanium carbide ceramics using XPS and Raman spectroscopy / L. Zhang, R. V. Koka. // Mater. Chem. Phys.. – 1998. – №57. – С. 23–32.

19. *Näslund L.* X-ray Photoelectron Spectroscopy of Ti3AlC2, Ti3C2Tz, and TiC Provides Evidence for the Electrostatic Interaction between Laminated Layers in MAX-Phase Materials / L. Näslund, P. Persson, J. Rosen. // J. Phys. Chem. – 2020. – №124. – С. 27732–27742.

20. On tuning the cytotoxicity of Ti3C2 (MXene) flakes to cancerous and benign cells by post-delamination surface modifications / [A. M. Jastrzębska, A. Szuplewska, A. Rozmysłowska-Wojciechowskaтаін.]. // 2D Mater.. – 2020. – №7. – С. 025018.

21. Sodium hydroxide and vacuum annealing modifications of the surface terminations of a Ti3C2 (MXene) epitaxial thin film / [J. Halim, L. Persson, P. Eklund таін.]. // RSC Adv.. – 2018. – №8. – С. 36785–36790.

22. Surface Termination Dependent Work Function and Electronic Properties of Ti_3C_2Tx Mxene / [T. Schultz, N. C. Frey, K. Hantanasirisakul та ін.]. // Chem. Mater. – 2019. – №31. – С. 6590–6597.

23. *Kumar P. M.* Nanocrystalline TiO2 studied by optical, FTIR and X-ray photoelectron spectroscopy: correlation to presence of surface states / P. M. Kumar, S. Badrinarayanan, M. Sastry. // Thin Solid Films. – 2000. – №358. – С. 122–130.

24. Biofunctionalized two-dimensional Ti3C2 MXenes for ultrasensitive detection of cancer biomarker / [S. Kumar, Y. Lei, N. H. Alsharee f та ін.]

13. SHPAK, A. P. & KORDUBAN, A. M. & KULIKOV, L. M. et al. (2010) *XPS studies of the surface of nanocrystalline tungsten disulfide* J. Electron. Spectrosc. Relat. Phenom. No 181, p. 234–238.

14. BRIGGS, D. & SEACH M. P. (1983) *Practical surface analysis by Auger and X-ray photoelectron spectroscopy* New York: John Wiley & Sons, Chichester.

15. WAGNER, C. D. & MOULDER, J. F. & DAVIS, L. E. & RIGGS, W. M. (1979) *Handbook of X-ray Photoelectron Spectroscopy* New York: Perking-Elmer Corp.

16. NEFEDOV V. I. (1984) *Rentgenoelektron-naya spektroskopiya khymicheskikh soedinenii* Moskva: Khymiya.

17. GONG Y. & TU, R. & GOTO, T. (2013) *High-speed deposition of titanium carbide coatings by laser-assisted metal–organic CVD* Mater. Res. Bull. №48, p. 2766–2770.

18. ZHANG, L. & KOKA, R. V. (1998) *A study on the oxidation and carbon diffusion of TiC in alumina-titanium carbide ceramics using XPS and Raman spectroscop*y Mater. Chem. Phys. No 57, p. 23–32.

19. NÄSLUND L. & PERSSON, P. & ROSEN, J. (2020) *X-ray Photoelectron Spectroscopy of Ti3AlC2, Ti3C2Tz, and TiC Provides Evidence for the Electrostatic Interaction between Laminated Layers in MAX-Phase Materials* J. Phys. Chem. No 124, p. 27732–27742.

20. JASTRZĘBSKA, A. M. & SZUPLEWSKA, A. & ROZMYSŁOWSKA-WOJCIECHOWSKA, A. et al. (2020) *On tuning the cytotoxicity of Ti_3C_2 (MXene) flakes to cancerous and benign cells by post-delamination surface modifications* 2D Mater. No 7, p. 025018.

21. HALIM, J. & PERSSON, L. & EKLUND, P. (2018) *Sodium hydroxide and vacuum annealing modifications of the surface terminations of a Ti_3C_2 (MXene) epitaxial thin film* RSC Adv. No 8, p. 36785–36790.

22. SCHULTZ, T. & FREY, N. C. & HANTANASIRISAKUL, K. et al. (2019) *Surface Termination Dependent Work Function and Electronic Properties of Ti_3C_2Tx Mxene* Chem. Mater. No 31, p. 6590–6597.

23. KUMAR, P. M. & BADRINARAYANAN, S. & SASTRY, M. (2000) *Nanocrystalline TiO_2 studied by optical, FTIR and X-ray photoelectron spectroscopy: correlation to presence of surface states* Thin Solid Films. No 358, p. 122–130.

24. KUMAR, S. & LEI, Y. & ALSHAREEF, N. H. et al (2018) *Biofunctionalized two-dimensional Ti3C2 MXenes for ultrasensitive detection of cancer biomarker*

// Biosens. Bioelectron. – 2018. – №121. – С. 243–249.

25. Probing the Thermal Deoxygenation of Graphene Oxide Using High-Resolution in Situ X-ray-Based Spectroscopies / A.Ganguly, S. Sharma, P. Papakonstantinou, J. Hamilton. // J. Phys. Chem. C. – 2011. – №115. – С. 17009–17019.

26. The nature of hydrogen in x-ray photoelectron spectroscopy: General patterns from hydroxides to hydrogen bonding / [S. J. Kerber, J. J. Bruckner, K. Wozniak таін.]. // J. Vac. Sci. Technol. A. – 1996. – №14.

27. *Zhanq J.* Highly-dispersed Boron-doped Graphene Nanosheets Loaded with TiO2 Nanoparticles for Enhancing CO2 Photoreduction / M.Xing, F. Shen, B. Qiu, J. Zhan. // Scientific Reports. – 2014. – №4. – С. 6341.

28. Holey Reduced Graphene Oxide Nanosheets for High Performance Room Temperature Gas Sensing D / [H. Wang, Y. Hu, J. J. Zhao таін.]. // J. Mater. Chem. A. – 2014. – №2. – С. 17415–17420.

29. A high pressureX-ray photoelectron spectroscopy experimental method for characterization of solid-liquid interfaces demonstrated with a Li-ion battery system / [J. Maibach, C. Xu, S. K. Eriksson таін.]. // Rev. Sci. Instrum. – 2015. – №86. – С. 044101.

30. *Scofield J. H.* Hartree-slater subshell photoionization cross-sections at 1254 and 1487 eV / Scofield. // Journal of Electron Spectroscopy and Related Phenomena. – 1976. – №8. – С. 129–137.

31. *Penn D. R.* Quantitative chemical analysis by ESCA / Penn. // J. Electron. Spectrosc. Relat. Phenom. – 1976. – №9. – С. 29–40.

32. Формування плазмових нанодисперсних покриттів на основі електровибухових нанопорошків оксиду вольфраму / О. М. Кордубан, Т. В. Крищук, В. В. Трачевський, М. М. Медведський. // Металлофиз. новейшие технол. – 2020. – №1.

Biosens. Bioelectron. No 121, p. 243–249.

25. GANGULY, A. & SHARMA, S. & PAPAKONSTANTINOU, P. & HAMILTON J. (2011) *Probing the Thermal Deoxygenation of Graphene Oxide Using High-Resolution in Situ X-ray-Based Spectroscopies* J. Phys. Chem. C. No 115, p. 17009–17019.

26. KERBER, S. J. & BRUCKNER, J. J. & WOZNIAK, K. et al (1996) *The nature of hydrogen in x-ray photoelectron spectroscopy: General patterns from hydroxides to hydrogen bonding* J. Vac. Sci. Technol. A. No 14.

27. XING, M. & SHEN, F. & QIU, B. & ZHAN, J. (2014) *Highly-dispersed Boron-doped Graphene Nanosheets Loaded with TiO_2 Nanoparticles for Enhancing CO_2 Photoreduction* Scientific Reports. No 4, p. 6341.

28. WANG, H. & HU, Y. & ZHAO, J. J. et al (2014) *Holey Reduced Graphene Oxide Nanosheets for High Performance Room Temperature Gas Sensing D* J. Mater. Chem. A. No 2, p. 17415–17420.

29. MAIBACH, J. & XU, C. & ERIKSSON, S. K. (2015) *A high pressure X-ray photoelectron spectroscopy experimental method for characterization of solid-liquid interfaces demonstrated with a Li-ion battery system* Rev. Sci. Instrum. No 86, p. 044101.

30. SCOFIELD J. H. (1976) *Hartree-slater subshell photoionization cross-sections at 1254 and 1487 eV / Scofield.* Journal of Electron Spectroscopy and Related Phenomena. No 8, p. 129–137.

31. PENN D. R. (1976) *Quantitative chemical analysis by ESCA* J. Electron. Spectrosc. Relat. Phenom. No 9, p. 29–40.

32. KORDUBAN, O. & KRYSHCHUK, T. & TRACHEVSKIJ, V. & MEDVEDSKIJ, M. (2020) *Formuvannya plazmovikh nanodispersnikh pokrittiv na osnovi elektrovibukhovikh nanoporoshkiv oksidu volframu* Metallofiz. Novejshie tekhnol. No 1.

Надійшла до редколегії 22.10.20

УДК 535.016. https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/4.13

Ямпольський А. Л.[1], асп.,
Макаренко О. В.[2], д.ф.-м.н., доц.

Поляриметрія анізотропного поверхневого шару на склі

[1,2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул. Володимирська 64/13,
[1]uv365nm@ukr.net

A. L. Yampolskiy[1], PhD stud.,
O. V. Makarenko[2]. Dr. Sci.

Polarimetry of anisotropic surface layer on glass

[1,2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
[1]uv365nm@ukr.net

Досліджуючи вектор Стокса відбитого від поверхні оптичного скла світла, встановлено наявність анізотропного поверхневого шару. Виявлено різницю фаз між p- та s-компонентами випромінювання, яка змінюється в залежності від кута падіння. Оскільки анізотропний шар має підвищений показник заломлення внаслідок його механічної обробки, його можна розглядати як деякого приповерхневий хвилевід. Було досліджено можливість введення випромінювання у такий планарний хвилевід за допомогою призми. Перевірка показала порушення повного внутрішнього відбивання, неоднакове для p- та s-поляризацій, що підтверджує наявність підповерхневого шару та його анізотропію.

Ключові слова: поляриметрія, неоднорідність, поверхневий шар, скло.

Investigating the Stokes vector of light reflected from the surface of the optical glass, the presence of an anisotropic surface layer was established. The phase difference between radiation p- and s-components is revealed, which varies depending on the angle of incidence. This shows a weak anisotropy. Assuming that the anisotropic layer has an increased refractive index due to its chemical-mechanical treatment, it can be considered as some near-surface weakly guiding gradient burried waveguide. The possibility of coming radiation into such a planar waveguide using a coupling total reflection prism was investigated. The inspection showed a violation of the total internal reflection, unequal for p- and s-polarizations, which confirms the presence of the subsurface layer and its anisotropy. The absorption of radiation, which could be compared with the excitation of modes, is small. This is due to the properties of the prism material. Also, higher order modes are absorbed better. There is no significant angular dependence of the polarization degree of the output beam; however, it is higher in the case of s-polarization.

Key Words: polarimetry, inhomogeneity, surface layer, glass.

Статтю представив д.ф.-м.н. Макарець М. В.

Вступ

Технологічна обробка діелектричних, зокрема, скляних поверхонь має велике значення у багатьох наукових і промислових галузях. Одержання якомога однорідніших інтерфейсів важливо, зокрема, у лазерній фізиці [1]. Разом з тим, відомо, що на поверхнях оптичних деталей через технологічні особливості завжди присутній тонкий поверхневий неоднорідний шар [2]. В деяких випадках, наприклад, створення елементів градієнтної оптики, безклейове поєднання деталей оптичним контактом [3], роль подібних шарів може бути суттєвою і потребує врахування. У зв'язку з цим лишаються актуальними питання удосконалення технології, а також забезпечення контролю та дослідження властивостей таких шарів.

В ідеалізованому випадку ідеально гладенької межі розділу ізотропних діелектричних середовищ зі співвідношень Френеля випливає, що різниця фаз між p- та s-компонентами взаємодіючого випромінювання не може відрізнятися від 0 або π. Це означає, що лінійно поляризоване випромінювання після відбивання залишиться лінійно поляризованим. В цьому випадку четвертий компонент його вектора Стокса повинен бути рівним нулю. Метою даної роботи стала демонстрація наявності на зразках скла поверхневого шару та дослідження його хвилеводних властивостей.

© А.Л. Ямпольський, О.В. Макаренко, 2020

Експериментальна частина.

В якості зразків для дослідження було обрано чотири плоскопаралельні пластинки з кольорового скла. Це стандартні світлофільтри з оптичних стекол марок СС-1, СЗС-20, СЗС-24, БС-8. Вони відрізняються показниками заломлення і поглинання в обраній області спектру.

Експериментальна установка (рис. 1) побудована за схемою Стокс-поляриметра. Випромінювання від джерела 1 з довжиною хвилі $\lambda = 625$ нм проходить через поляризатор 2 і падає на зразок 3. Після відбивання промінь проходить крізь чверть хвильову пластинку 4 та аналізатор 5 і реєструється приймачем 6. Поляризатор 2 задає напрямок площини поляризації падаючого світла, а фазова пластинка 4 разом з аналізатором 5 обертаються за спеціальним алгоритмом, що дозволяє виміряти 4 компоненти вектора Стокса.

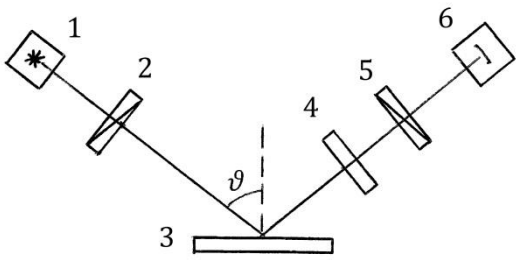


Рис. 1. Схема поляриметра. 1 – джерело випромінювання, 2 – поляризатор, 3 – зразок, 4 – компенсатор, 5 – аналізатор, 6 – приймач випромінювання.

Для збудження хвиль у порушеному шарі (якщо він здатний працювати як хвилевід) в цій схемі елемент 3 замінюється на зразок, притиснутий до грані скляної призми (рис. 2). Призма виконує роль контактного елементу. За відсутності зразка у ній відбувається повне внутрішнє відбивання, причому поблизу відбивальної поверхні (в області на відстані порядку довжини хвилі випромінювання) виникає неоднорідна хвиля. Якщо наблизити до відбивальної грані поверхню скла, яка містить неоднорідний шар (хвилевод) настільки, щоб край неоднорідної хвилі заходив у цей шар, тоді почнуть збуджуватися власні моди хвилеводу і частина енергії з падаючої хвилі буде перекачуватись у випромінювання, що поширюватиметься хвилеводом.

Показник заломлення використаної призми становить $n = 1{,}511$ в обраній частині спектру. Внутрішній кут падіння θ перераховується за законом Снеліуса.

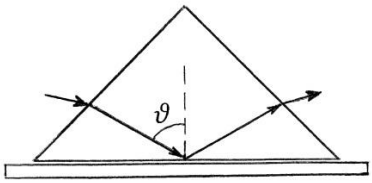


Рис. 2. Схема введення випромінювання у хвилевід.

Результати та їх обговорення.

На рис. 3 представлено кутові залежності 4-ї компоненти вектора Стокса для усіх чотирьох зразків при відбивання світла від їх поверхні. Спостерігається закономірне спадання цієї компоненти з переходом через нуль зі зменшенням кута падіння світла на зразок.

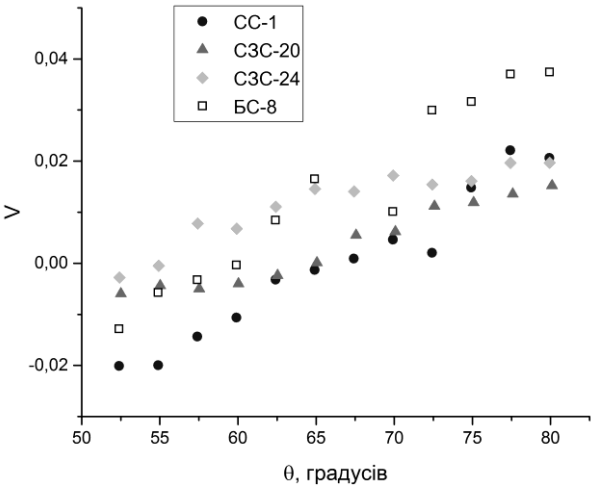


Рис. 3. Кутові залежності V-компоненти вектора Стокса досліджуваних зразків.

Порушений поверхневий шар утворюється в результаті хіміко-механічної обробки поверхні скла під час виготовлення оптичної деталі. Існують різні методики досягнення високого класу чистоти поверхні. На початковому етапі в будь-якому разі поверхня шліфується. Потім за допомогою спеціальних полірувальних сумішей відбувається поступове зняття мікронерівностей на поверхні. При цьому на поверхню чиниться тиск. Також іноді застосовують обробку магнітореологічними полірувальними суспензіями [3], що дозволяє виключити процес притирання полірувальника, керувати інтенсивністю зняття матеріалу і досягнути вищої якості поверхні. Існує також метод іонної обробки [3], що поступово видаляє певні компоненти скла з поверхні. У будь-якому разі, як свідчать літературні дані, оптичний профіль

має вигляд плавної кривої з максимумом на деякій глибині [3–5]. Верхня область має шорстку структуру, під нею знаходяться тріщинуваті області з механічними напруженнями (або слідами від них). А це означає, що таку структуру можна розглядати як слабонаправляючий градієнтний підповерхневий хвилевід.

Звичайно, очікувати, що у відбитому світлі з'являться лінії поглинання, пов'язані зі збудженням ТЕ і ТМ мод, не варто, адже завдяки неоднорідності такий хвилевід матиме високе затухання. Однак певні зміни в інтенсивності все ж повинні бути.

Існує кілька методів введення випромінювання в хвилевід, зокрема для цього використовується дифракційна гратка або призма внутрішнього відбивання. Використання призми в даному випадку простіше і дає кращий коефіцієнт спряження. Було виконано введення випромінювання з лінійною поляризацією, орієнтованою в p- і s-напрямках. Коефіцієнти відбивання для чотирьох зразків наведені на рис. 4 - рис. 7.

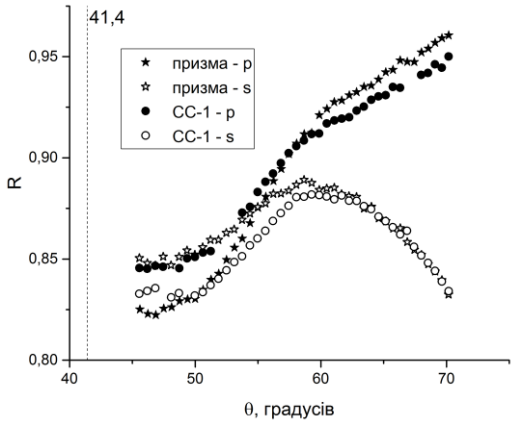


Рис. 4. Коефіцієнти відбивання для зразка СС-1.

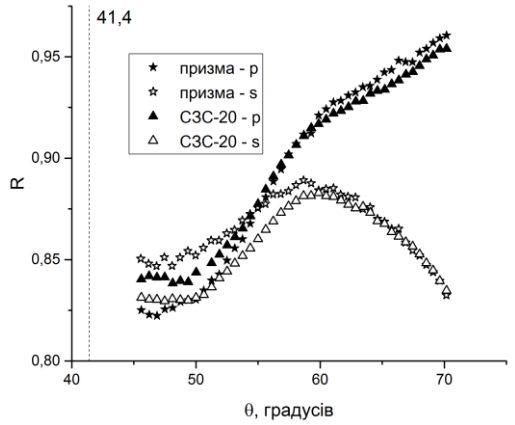


Рис. 5. Коефіцієнти відбивання для зразка СЗС-20.

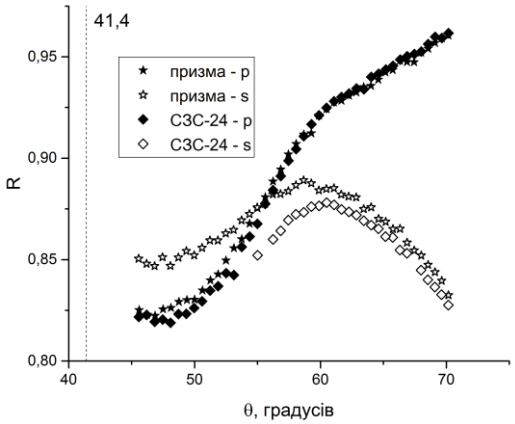


Рис. 6. Коефіцієнти відбивання для зразка СЗС-24.

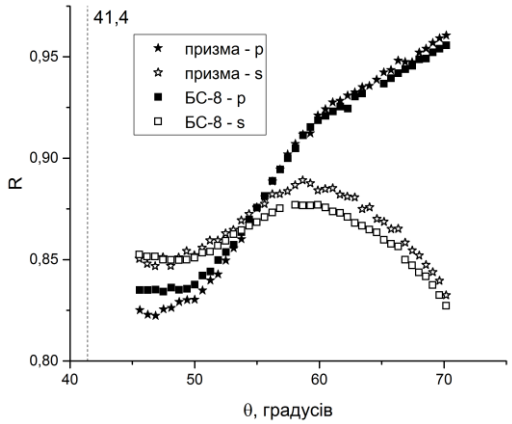


Рис. 7. Коефіцієнти відбивання для зразка БС-8.

На графіках спостерігаємо невелике (кілька відсотків) зниження коефіцієнтів відбивання, а отже, певна кількість енергії переходить у підповерхневий шар (поверхня гладенька, тож розсіянням нехтуємо). Для зразків СС, СЗС чітко спостерігається зменшення відбитої компоненти для випромінювання яке поляризоване в s напрямку, причому зі збільшенням кута падіння зменшується поглинання. В припущенні щодо збудження мод це означає, що ТЕ моди високих порядків поглинаються краще, а низьких – гірше. Це може бути пов'язано з більшою кількістю неоднорідностей на шляху променів, що відповідають модам вищих порядків. Інакша поведінка ТМ-мод (p-поляризація) є яскравим свідченням анізотропії.

Щодо скла БС-8, для нього практично немає різниці у відбиванні порівняно з самою призмою. Це може бути пояснене невдалим вибором матеріалу призми – у неї занадто низький показник заломлення (1,511), а в даного скла – високий (близько 1,72). Для ефективного введення випромінювання показник заломлення призми повинен бути вищим за показник

заломлення як оболонки, так і серцевини хвилеводу. Для інших зразків ця умова порушується менше, що й дало невелике поглинання. Остаточне з'ясування можливості збудження мод вимагає застосування призми з важких сортів скла.

Як показують розрахунки ступеню поляризації *p*, суттєвої його кутової залежності немає. Однак, у випадку s-поляризації надхідного променя ступінь поляризації відбитого променя в середньому на 0,015 вищий, порівняно з p-поляризацією. Це має місце як зі зразком, так і за його відсутності, з порожньою призмою. Але варто відзначити, що в присутності зразка спостерігається невеликий підйом *p* у випадку s-поляризації надхідного променя. Величина підйому складає 0,005 для СС-1, 0,000 для СЗС-24, 0,003 для СЗС-20 та 0,004 для БС-8.

Висновки

За допомогою Стокс-поляриметрії з призмовою схемою збудження хвилеводних мод (у припущенні справедливості гіпотези про його існування) показано, що поверхневий шар на оптичному склі є і він анізотропний.

Виходячи з невеликої варіації четвертого елементу вектора Стокса (0,02…0,05) відбитого від зразка променя не можна сказати, що ця анізотропія є істотною.

Список використаних джерел

1. *Новиков А.А.* Эллипсометрия неоднородных поверхностных слоев оптических элементов / А.А. Новиков, И.А. Храмцовский, В.Ю. Иванов, И.С. Федоров, А. Туркбоев // Приборостроение. Изв. вузов. – 2009. – №1. – с. 62-68.

2. *Храмцовский И.*А. Изменение оптических свойств поверхностного слоя при ионно-плазменном распылении кварцевого стекла / И.А. Храмцовский, Т.К. Вощенко, Л.А. Черезова, В.И. Пшеницын, А.А. Апинов // Оптика и спектроскопия. – 1988. – т. 65. – № 1. – с. 141-145.

3. *Горляк А.*Н. Определение оптических характеристик поверхностных слоев элементов оптотехники для их оптических соединений / А.Н. Горляк, А.Г. Новак, В.М. Солонуха, И.А. Храмцовский // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2013. – № 5 (87). – с. 62-66.

4. *Горляк А.*Н. Исследование нарушенных слоев полированной оптической поверхности и напряжений в клеевых и бесклеевых соединениях оптических элементов методом эллипсометрии / А.Н. Горляк, Ю.В. Лисицын, О.С. Дронь, А.И. Семененко // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2004. – т. 4. – № 5. – с. 30–34.

5. *Макаренко О.В.* Еліпсометрична діагностика поверхневого шару оптичного скла // О.В. Макаренко, Л.В. Поперенко, О.І. Заваліcтий, А.Л. Ямпольський // Український фізичний журнал. – 2019. – т. 64. - №5. – с. 442-447.

References

1. NOVIKOV, A.A., et. al. (2009) Ellipsometry of inhomogeneous surface layers of anisotropic optical elements. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Priborostroenie.* vol. 1, 62-68 pp. (in Russian)

2. KHRAMTSOVSKY, I.A., et. al. (1988) Optical properties changes of the surface layer during ion-plasma sputtering of quartz glass. *Optics and spectroscopy.* vol. 65, iss. 1, 141-145 pp. (in Russian)

3. GORLYAK A.N., et. al. (2013) Optical characteristics definition of optical technology surface elements for their optical connections. *Sci.Tech. J. Inf. Technol. Mech. Opt.* iss. 5(87), 62-66 pp. (in Russian)

4. GORLYAK A.N., et. al. (2004) Investigation of disturbed layers of polished optical surface and stresses in adhesive and glueless joints of optical elements by the method of ellipsometry. *Sci.Tech. J. Inf. Technol. Mech. Opt.* vol. 4, iss. 5, 30-34 pp. (in Russian)

5. MAKARENKO O.V., et. al. (2019) Ellipsometric diagnostics of a transient surface layer in optical glass. *Ukr. J. Phys.* vol. 64, iss, 5, 442-447 pp.

Надійшла до редколегії 23.11.2020