КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

В І С Н И К

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

№3 2020

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
випуск №3, 2020,
Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Физика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, механіко-математичного факультетів, факультету радіофізики, електроніки та комп’ютерних систем і факультету комп’ютерних наук та кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора, кандидата наук і PhD за спеціальностями 111, 112, 113, 104, 105 (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1188 від 24.09.2020) та за спеціальностями 121, 122, 123, 124 (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1471 від 26.11.2020), та реферується в Реферативному журналі,Zentralblatt MATH.

Редакційна колегія:

Моклячук Михайло Павлович, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор;**

Розора Ірина Василівна, д.ф.-м.н., доц., **зам. головного редактора;**

Bartlova Milada, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;

Bavula Vladimir, Prof., University of Sheffield, Great Britain;

Beghin Luisa, Prof., Sapienza Università di Roma, Italy;

Futorny Vyacheslav, Prof., Universidade de São Paulo, Brazil;

Giuliano Rita, Prof., Università di Pisa, Italy;

Gorlatch Sergei, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;

Hudak Stefan, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;

Kukhtarev Nickolai, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;

Leonenko Nikolay, Prof., Cardiff University, Great Britain;

Medvids Arturs, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;

Olenko Andriy, Prof., La Trobe University, Australia;

Orsingher Enzo, Prof., Sapienza University of Rome, Italy;

Ostrovsky Eugene, Prof., Bar- Ilan University, Israel;

Pogany Tibor, Prof., University of Rijeka, Croatia;

Rontó Miklós, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;

Silvestrov Dmitrii, Prof., Stockholms universitet, Sweden;

Sottinen Tommi, Prof., University of Vaasa, Finland;

Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;

Trofimchuk Sergey, Prof., Universidadde Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;

Volodin Andrei, Prof., University of Regina, Canada;

Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;

Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;

Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;

Безущак Оксана Омелянівна, д.ф.-м.н., доцент;

Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;

Гаращенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;

Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;

Жук Ярослав Олександрович, д.ф.-м.н., проф.;

Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., проф.;

Курченко Олександр Олексійович, д.ф.-м.н., проф;

Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;
Львов Віктор Анатолійович, д.ф.-м.н., проф.;
Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;
Майборода Ростислав Євгенович, д.ф.-м.н., проф.;
Мішура Юлія Степанівна, д.ф.-м.н., проф.;
Пашко Анатолій Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Петравчук Анатолій Петрович, д.ф.-м.н., проф.;
Погорілий Сергій Дем'янович, д.т.н., проф.;
Савенков Сергій Миколайович, д.ф.-м.н., доц.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.;
Сливка-Тилищак Ганна Іванівна, д.ф.-м.н., проф.;
Хусаінов Денис Яхьєвич, д.ф.-м.н., проф.;

Редакційний відділ:
Затула Дмитро Васильович, **відповідальний секретар**;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
П'ятецька Олена Василівна, visnyk.phys-math@ukr.net;
Отто Георгій Костянтинович, **технічний редактор**, ottogk@gmail.com.

Адреса редакційної колегії:
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03022 Тел. (044) 259-01-49
fm.visnyk@ukr.net
ISBN 978-966-2142
ISSN 1812-5409

Засновник: Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Свідоцтво про державну реєстрацію:КВ №16299-4771Р від 11.12.2009 року

DOI: https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/3

Безкоштовно

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics
No. 3, 2020.

The journal contains results of new research in various fields of mathematics, computer science, mechanics, physics and radiophysics for researchers, academic staff, postgraduates, engineers and students. It is published on the recommendation of the Academic Councils of Faculty of Physics, Faculty of Radiophysics, Electronics and Computer Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics and the Faculty of Computer Science and Cybernetics.

Journal "Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics" is included in the List of scientific professional publications of Ukraine, in which the results of the thesises for obtaining the scientific degrees of a doctor and a candidate of sciences (PhD) in specialties 111, 112, 113, 104, 105, 121, 122, 123 and 124 can be published (approved by the orders of the Ministry of Education and Science of Ukraine No. 1188 dated September 24, 2020 and No. 1471 dated November 26, 2020).
Journal is referenced in the abstract journal **Zentralblatt MATH (zbMATH)**.

Editorial Board

Moklyachuk Mikhail Pavlovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine, Editor in Chief;
Rozora Iryna Vasylivna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine, Deputy Editor in Chief;
Bartlova Milada, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;
Bavula Vladimir, Prof., University of Sheffield, Great Britain;
Beghin Luisa, Prof., Sapienza Università di Roma, Italy;
Futorny Vyacheslav, Prof., Universidade de São Paulo, Brazil;
Giuliano Rita, Prof., Università di Pisa, Italy;
Gorlatch Sergei, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;
Hudak Stefan, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;
Kukhtarev Nickolai, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;
Leonenko Nikolay, Prof., Cardiff University, Great Britain;
Medvids Arturs, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;
Olenko Andriy, Prof., La Trobe University, Australia;
Orsingher Enzo, Prof., Sapienza University of Rome, Italy;
Ostrovsky Eugene, Prof., Bar-Ilan University, Israel;
Pog\'any Tibor, Prof., University of Rijeka, Croatia;
Rontó Miklós, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;
Silvestrov Dmitrii, Prof., Stockholm University, Sweden;
Sottinen Tommi, Prof., University of Vaasa, Finland;
Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;
Trofimchuk Sergey, Prof., Universidadde Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;
Volodin Andrei, Prof., University of Regina, Canada;
Akimenko Vitaliy Vladimirovich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Anisimov Igor Alekseevich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Anisimov Anatoliy Vasyl'ovych, Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Bezuschak Oksana Omelyanivna, Dr., Sci. Associate Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Voloshin Aleksey Fedorovich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Garaschenko Fedir Georgievich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Yezhov Stanislav Nikolaevich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Zhuk Yaroslav Aleksandrovich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Zaslavs'kyj Volodymyr Anatolijovych, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Kurchenko Oleksandr Oleksijovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Kudin Volodymyr Ivanovich, Dr. Sci., Sr. Sci. Researcher, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Lvov Victor Anatoliyovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Makarets' Nikolay Vladimirovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Maiboroda Rostyslav Yevhenovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Mishura Yuliya Stepanivna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Pashko Anatolij Oleksijovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Perestyuk Mykola Oleksijovych, Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Petravchuk Anatolij Petrovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Pogorily Serhiy Demyanovych, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Savenkov Serhij Mykolajovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Skrzyevsky Valery Antonovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Slyvka-Tylyshchak Anna Ivanivna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Uzhhorod National University, Uzhhorod, Ukraine;
Husainov Denys Yah'yevych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine.

ISSN: 2218-2055 (on-line version)

***ISBN*:** 978-966-2142
***ISSN*:** 1812-5409 (printed version)
***DOI**:* https://doi.org/10.17721/1812-5409

Founders: Taras Shevchenko National University of Kyiv
Foundation year: 1991 (series of bulletins of Kyiv University "Mathematics and Mechanics", "Physics", "Modeling and Optimization of Complex Systems" was reorganized into "Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics").
Certificate of state registration: КВ № 16299-4771 P dated 11.12.2009
Issued: 4 times a year

Mailing Address
Taras Shevchenko National University of Kyiv
Faculty of Computer Science and Cybernetics,
03022, Ukraine, Kyiv, 4d Academician Glushkov avenue
Phone: (044) 259-01-49
fm.visnyk@ukr.net

ЗМІСТ

Василик О.І., Мішура Ю.С., Моклячук М.П., Перестюк М.О., Розора І.В., Сахно Л.М., Ямненко Р.Є., Професор Ю.В. Козаченко (01.12.1940 – 05.05.2020) – видатний вчений і педагог 9
Козаченко А.В. Родинні спогади про Юрія Васильовича Козаченка 30
Пашко А.О. Зустрічі з Козаченко Ю.В. 33

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Богданський В.Ю., Клесов О.І. Рівномірний підсилений закон великих чисел без припущень стосовно класу множин 39
Василик О.І., Ямненко Р.Є., Яневич Т.О. Оцінювання ймовірності виходу траєкторії строго φ-субгауссового процесу квазідробового ефекту за криву 49
Закусило О.К., Мацак І.К. Гранична теорема для часу першого перетину рівня регенеруючим процесом 57
Луз М.М., Моклячук М.П. Мінімаксно-робастні задачі оцінювання послідовностей з періодично стаціонарними приростами, що спостерігаються з шумом 68
Оленко А.Я. Від субгауссовості до стохастичної апроксимації і моделювання 84
Петранова М.Ю. Моделювання гауссового стаціонарного процесу зі стійкою кореляційною функцією із заданою надійністю та точністю 89
Розора І.В. Вибіркова неперервність з імовірністю одиниця для оцінки імпульсної перехідної функції 96
Сливка-Тилищак Г.І., Михасюк М.М., Погоріляк О.О. Задача Коші для рівняння теплопровідності на площині з випадковою правою частиною з простору Орліча 103
Бондаренко В.М., Зубарук О.В. Про матричні зображення наднапівгруп напівгрупи, породженої взаємно анульованими 2-потентним і 2-нільпотентним елементами 110
Ганюшкін О. Г., Десятерик О. О. Група автоморфізмів варіанта решітки розбиттів скінченної множини 115

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Петрова Т.О., Чукалов І.П. Деякі негативні результати для інтерполяційного монотонного наближення функцій, що мають дробову похідну 122

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Усар І.Я., Макушенко І.А. Аналіз та оптимізація систем з повторними викликами і чергою зі змінною інтенсивністю вхідного потоку 130

CONTENTS

Vasylyk O.I., Mishura Yu.S., Moklyachuk M.P., Perestyuk M.O., Rozora I.V., Sakhno L.M., Yamnenko R.Ye. Professor Yu.V. Kozachenko (01.12.1940 - 05.05.2020) – prominent scientist and teacher 9
Kozachenko A.V. Family memories about Yuriy Vasylyovych Kozachenko 30
Pashko A.O. Meetings with Kozachenko Yu.V. 33

ALGEBRA, GEOMETRY AND PROBABILITY THEORY

Bogdanskii V. Yu., Klesov O. I. The uniform strong law of large numbers without any assumption on a family of sets 39
Vasylyk O.I., Yamnenko R.E., Ianevych T.O. Estimation of probability of exceeding a curve by a strictly 49
Zakusylo O. K., Matsak I. K. Limits theorem of ¯rst passages times to regenerative processes 57
Luz M. M., Moklyachuk M. P. Minimax-robust estimation problems for sequences with periodically stationary increments observed with noise 68
Olenko A. Ya. From subgaussianity to stochastic approximation and modelling. 84
Petranova M. Yu. Simulation of a Gaussian stationary process with a stable correlation function with a given reliability and accuracy 89
Rozora I.V. Sample continuity with probability one for the estimator of impulse response function 96
Slyvka-Tylyshchak A.I., Mykhasiuk M.M., Pohoriliak O.O. The Cauchy problem for the heat equation on the plane with a random right part from the Orlicz space 103
Bondarenko V. M., Zubaruk O. V. On matrix representations of oversemigroups of semigroups generated by mutually annihilating 2-potent and 2-nilpotent elements 110
Ganyushkin O. G., Desiateryk O. O. Automorphism group of the variant of the lattice of partitions of a finite set 115

DIFFERENTIAL EQUATIONS, MATHEMATICAL PHYSICS AND MECHANICS

Petrova T.O., Chukalov I.P. Some negative results for the interpolation monotone approximation of functions having a fractional derivative 122

COMPUTER SCIENCES AND INFORMATICS

Usar I.Ya., Makushenko I.A. Analysis and optimization of retrial systems and queue with variable rate of input flow 130

УДК 519.21 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/3.1

О.І. Василик[1], *д.ф.-м.н., доц.*
Ю.С. Мішура[2], *д.ф.-м.н., проф.*
М.П. Моклячук[2], *д.ф.-м.н., проф.*
М.О. Перестюк[2], *д.ф.-м.н., проф., ак. НАНУ*
І.В. Розора[2], *д.ф.-м.н., доц.*
Л.М. Сахно[2], *д.ф-м.н, с.н.с*
Р.Є.Ямненко[2], *д.ф.-м.н., доц.*

Професор Ю.В. Козаченко (01.12.1940 – 05.05.2020) – видатний вчений і педагог

[1]Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", 03056, Київ, проспект Перемоги, 37,
e-mail: vasylyk@matan.kpi.ua

[2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64.
e-mail: myus@univ.kiev.ua, mmp@univ.kiev.ua
pmo@univ.kiev.ua, irozora@bigmir.net
lms@univ.kiev.ua, yamnenko@univ.kiev.ua

O.I. Vasylyk[1], *Dr of Sci., Associate Prof.*
Yu.S. Mishura[2], *Dr of Sci., Prof.*
M.P. Moklyachuk[2], *Dr of Sci., Prof.*
M.O. Perestyuk[2], *Dr of Sci., Prof., Ac. NASU*
I.V. Rozora[2], *Dr of Sci., Associate Prof.*
L.M. Sakhno[2], *Dr of Sci., Senior Researcher*
R.Ye.Yamnenko[2], *Dr of Sci., Associate Prof.*

Professor Yu.V. Kozachenko (01.12.1940 – 05.05.2020) – prominent scientist and teacher

[1]National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", 37, Prosp. Peremohy, Kyiv, Ukraine, 03056,
e-mail: vasylyk@matan.kpi.ua

[2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.
e-mail: myus@univ.kiev.ua, mmp@univ.kiev.ua
pmo@univ.kiev.ua, irozora@bigmir.net
lms@univ.kiev.ua, yamnenko@univ.kiev.ua

Живе лиш той, хто не живе для
себе, хто для інших виборює життя.

В. Симоненко



5 травня 2020 року обірвалося життя багатогранної і непересічної особистості, видатного вченого–математика, доктора фізико–математичних наук, професора Юрія Васильовича Козаченка. Він пройшов шлях від студента Київського національного університету імені Тараса Шевченка до професора, завідувача кафедри теорії ймовірностей та матема-

© О.І. Василик, Ю.С. Мішура, М.П. Моклячук, М.О. Перестюк, І.В. Розора, Л.М. Сахно, Р.Є. Ямненко 2020

тичної статистики, яку він очолював з 1998 по 2003 рік. Для цілої плеяди талановитої молоді, студентів, аспірантів та науковців Юрій Васильович був дорогим Вчителем, Провідником у світ науки, а також еталоном інтелігентності та надзвичайно чуйною та доброю людиною.

Професор Козаченко Ю.В. був одним з лідерів української школи з теорії ймовірностей та математичної статистики, визнаним в світі фахівцем у галузі теорії і моделювання випадкових процесів у функціональних просторах. Козаченко Ю.В. є одним із творців теорії субгауссових та φ-субгауссових випадкових процесів, випадкових процесів з просторів Орліча. Він створив новий науковий напрямок – моделювання випадкових процесів у різних функціональних просторах із заданою точністю та надійністю. Професор Козаченко Ю.В. отримав вагомі наукові результати у дослідженні аналітичних властивостей випадкових процесів, рівнянь математичної фізики із випадковими початковими умовами, статистиці випадкових процесів, вейвлет-аналізі.

Юрій Васильович народився 1 грудня 1940 року у місті Києві.

У 1963 році закінчив Київський державний університет імені Тараса Шевченка за спеціальністю теорія ймовірностей і математична статистика. Навчання в аспірантурі Інституту математики АН УРСР протягом 1964-1965 років перервала служба в армії у космічних військах. У травні 1968 року в Інституті математики АН УРСР під керівництвом Михайла Йосиповича Ядренка він захистив кандидатську дисертацію за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика на тему "Про рівномірну збіжність стохастичних інтегралів, рядів і властивості неперервних випадкових полів". Його опонентами були відомі математики Беляєв Ю.К. та Гіхман Й.І. Варто відмітити, що коли видавництво "Мир" надрукувало переклад книги Г.Крамера і М.Лідбеттера "Стационарные случайные процессы. Свойства выборочных функций и их приложения" у 1969 році, то Беляєв Ю.К. у додатку зробив огляд нових досліджень з цієї тематики і досить детально та з великою повагою і шаною описав результати Юрія Васильовича, отримані у 1967-1968 роках.

З 1967 року і до останніх днів Юрій Васильович працював у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка на кафедрі теорії ймовірностей та математичної статистики (з 2009 року – кафедрі теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики) механіко-математичного факультету. У 1974-1975 роках викладав у Інституті нафти і газу міста Будермес (Алжир).



Співробітники кафедри теорії ймовірностей та математичної статистики, 2004 рік.
Верхній ряд: Оленко А.Я., Майборода Р.Є., Пономаренко О.І., Борисенко О.Д., Моклячук М.П., Ямненко Р.Є., Михайловський В.І., Козаченко Ю.В., Масол В.В., Сахно Л.М., Клокун С.Ю.; нижній ряд: Федорянич Т.В., Лапіда Т.М., Зінченко Н.М., Ядренко М.Й., Мішура Ю.С., Багро Г.С., Василик О.І., Розора І.В., Ільченко С.А.

У 1985 році Юрій Васильович захистив докторську дисертацію на тему "Випадкові процеси у просторах Орліча. Властивості траєкторій, збіжність рядів та інтегралів". Протягом 1998-2003 років очолював кафедру теорії ймовірностей та математичної статистики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.



Співробітники кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики 2015 рік.
Верхній ряд: Шкляр С.В., Ральченко К.В., Шевченко Г.М., Голомозий В.В., Борисенко О.Д.;
середній ряд: Давиденко Л.В., Ямненко Р.Є., Козаченко Ю.В., Моклячук М.П., Майборода Р.Є., Макогін В.І., Татаренко О.Ф.;
нижній ряд: Рагуліна О.Ю., Яневич Т.О., Василик О.І., Мішура Ю.С., Сахно Л.М., Капуста І.В., Мунчак Є.Ю.

Основні напрямки наукової діяльності Юрія Васильовича – це дослідження властивостей випадкових процесів у різних функціональних просторах, моделювання та статистика випадкових процесів, теорія вейвлет-розкладів випадкових процесів. Він ініціював і активно розвивав дослідження з визначення точності та надійності комп'ютерного моделювання випадкових процесів.

Юрій Васильович є автором понад 300 наукових праць, 15 навчальних посібників та монографій, серед яких "Метрические характеристики случайных величин и процессов" (1998, спільно з Булдигіним В.В.), яку перевидано англійською мовою у 2000 році Американським математичним товариством, "Моделювання випадкових процесів" (1999, спільно з Пашком А.О.), "Моделювання випадкових процесів і полів" (2007, спільно з Розорою І.В. та Пашком А.О.), "Крайові задачі математичної фізики з випадковими факторами" (2008, спільно зі Сливкою-Тилищак Г.І. та Довгаєм Б.В.), "φ-субгауссові випадкові процеси" (2008, спільно з Василик О.І. та Ямненком Р.Є.), "Квазібанахові простори випадкових величин" (2015, спільно з Млавцем Ю.Ю., Моклячуком О.М.), "Точність і надійність моделювання випадкових процесів та полів в рівномірній метриці" (2016, спільно з Пашком А.О.), "Simulation of Stochastic Processes with Given Accuracy and Reliability" (2016, спільно з Погоріляком О.О., Розорою І.В. та Тегзою А.М., що вийшла англійською мовою у видавництві ISTE Press Ltd, London and Elsevier Ltd Oxford), "Estimation of Covariance Functions of Gaussian Stochastic Fields and their Simulation" (2017, спільно з Гудивок Т.В., Трошкі В.Б., Трошкі Н.В.), "Випадкові процеси в задачах математичної фізики" (2017, спільно з Кучінкою К.Й. та Сливкою-Тилищак Г.І.), "Теореми

Леві-Бакстера для випадкових полів та їх застосування" (2018, спільно з Курченком О.О., Синявською О.О.).

Як науковий керівник Юрій Васильович підготував 42 кандидати фізико-математичних наук. Згодом деякі з них – Майборода Р.Є., Сливка-Тилищак Г.І., Пашко А.О., Розора І.В., Ямненко Р.Є. та Василик О.І. – захистили докторські дисертації. Крім цього, Юрій Васильович був науковим консультантом під час написання ще чотирьох докторських дисертацій – Юрачківського А.П., Курченка О.О., Мацака І.К. та Сугакової О.В. Його учні продовжують активну наукову діяльність у провідних університетах та установах світу. Він щедро ділився своїми глибокими і різносторонніми знаннями зі студентами, аспірантами, докторантами, друзями та колегами.



Дерево наукових учнів Козаченка Ю.В.

Наукові учні Юрія Васильовича Козаченка

- Доктори фізико-математичних наук

1. **Майборода Р.Є.** (1994) "Непараметрична статистика неоднорідних спостережень"
2. **Юрачківський А.П.** (2003) "Дослідження мірозначних і пов'язаних з ними числових випадкових процесів методами статистичного аналізу"
3. **Курченко О.О.** (2004) "Граничні теореми для бакстерівських сум випадкових функцій та їх застосування для оцінок параметрів"
4. **Мацак І.К.** (2005) "Граничні теореми для випадкових елементів у банахових ґратках"
5. **Сливка-Тилищак Г.І.** (2015) "Задачі математичної фізики з випадковими факторами"

6. **Пашко А.О.** (2015) "Статистичне моделювання випадкових процесів та полів із заданими точністю і надійністю"
7. **Сугакова О.В.** (2017) "Адаптивні методи статистичного аналізу"
8. **Розора І.В.** (2020) "Статистичні властивості оцінок імпульсних перехідних функцій"
9. **Ямненко Р.Є.** (2020) "Дослідження процесів накопичення з просторів Орліча"
10. **Василик О.І.** (2020) "Узагальнення φ-субгауссових випадкових процесів та їх застосування"

- Кандидати фізико-математичних наук

1. **Бейсенбаєв Е.** (1979) "Умови збіжності випадкових рядів і крайові задачі математичної фізики із випадковими початковими умовами"
2. **Бенмалек А.** (1981) "Рівномірна збіжність стохастичних інтегралів і локальні властивості гауссових випадкових полів"
3. **Каніовська І.Ю.** (1981) "Асимптотичні властивості марківських процедур стохастичної апроксимації з негладкими функціями регресії"
4. **Зелепугіна І.М.** (1985) "Про швидкість збіжності розкладів випадкових процесів і полів"
5. **Майборода Р.Є.** (1986) "Емпіричні твірні функції моментів випадкових векторів"
6. **Абжанов Е.А.** (1987) "Асимптотичні властивості випадкових процесів у банахових K_σ-просторах випадкових величин"
7. **Бесклінська О.П.**(1988) "Теореми типу Леві-Бакстера для строго передгауссових випадкових процесів"
8. **Пашко А.О.** (1989) "Рівномірна збіжність гауссівських рядів та інтегралів і моделювання випадкових процесів"
9. **Рязанцева В.В.** (1990) "Дослідження розкладів і аналітичних властивостей випадкових процесів субгауссового типу в просторах Орліча"
10. **Стадник А.І.** (1992) "Передгауссові процеси і швидкість збіжності оцінок коваріаційних функцій"
11. **Олешко Т.А.** (1992) "Аналітичні властивості передгауссових і χ^2 процесів"
12. **Енджиргли М.В.** (1993) "Умови та оцінки швидкості рівномірної збіжності стохастичних рядів та інтегралів із просторів $Sub_\varphi(\Omega)$"
13. **Тригуб С.Г.** (1994) "Збіжність випадкових рядів у нормах просторів Орліча"
14. **Вовк Л.Б.** (1994) "Оцінки швидкості збіжності в бакстеровських теоремах та їх застосування"
15. **Багро С.В.** (1994) "Умови обмеженості та неперервності випадкових процесів з просторів Орліча в термінах мажоруючих мір"
16. **Сидоренко О.О.** (1994) "Оцінки розподілу супремуму передгауссових випадкових процесів та їх застосування"
17. **Великоіваненко Г.В.** (1995) "Аналітичні властивості банаховозначних випадкових процесів із просторів Орліча"
18. **Барраса де Ла Крус Е.** (1995) "Умови збіжності випадкових рядів в нормах просторів Орліча та крайові задачі математичної фізики з випадковими початковими умовами"
19. **Лівінська О.І.** (1997) "Аналітичні властивості деяких класів передгауссових випадкових процесів"

20. **Ковальчук Ю.О.** (1999) "Крайові задачі з випадковими початковими умовами і функціональні ряди із просторів Орліча"
21. **Стусь О.В.** (2001) "Передгауссові випадкові процеси і оцінювання коваріаційних функцій"
22. **Василик О.І.** (2003) "Випадкові процеси з класів $V(\varphi, \psi)$"
23. **Тегза А.М.** (2003) "Обґрунтування оцінок точності і надійності моделювання гауссових стаціонарних випадкових процесів"
24. **Сливка Г.І.** (2004) "Крайові задачі математичної фізики з випадковими початковими умовами"
25. **Федорянич Т.В.** (2005) "Критерії для перевірки гіпотез про вигляд кореляційної функції гауссових випадкових процесів і полів"
26. **Яковенко Т.О.** (2005) "Випадкові процеси в функціональних просторах Орліча"
27. **Розора І.В.** (2005) "Моделювання випадкових процесів та полів із даною точністю та надійністю"
28. **Ямненко Р.Є.** (2006) "Експоненціальні оцінки розподілів деяких функціоналів від φ-субгауссових випадкових процесів"
29. **Довгай Б.В.** (2007) "Властивості розв'язків крайових задач математичної фізики з випадковими факторами"
30. **Погоріляк О.О.** (2008) "Моделювання випадкових процесів Кокса"
31. **Перестюк М.М.** (2009) "Оцінки розподілів супремумів випадкових процесів та рівномірна збіжність їх вейвлет розкладів"
32. **Турчин Є.В.** (2009) "Збіжність зображень випадкових процесів у вигляді рядів, породжених вейвлетами"
33. **Дарійчук І.В.** (2010) "Випадкові процеси дробового ефекту"
34. **Полосьмак О.В.** (2010) "Вейвлет розклади випадкових процесів та їх властивості"
35. **Вереш К.Й.** (2011) "Крайові задачі математичної фізики з випадковими факторами"
36. **Моклячук О.М.** (2011) "Моделювання випадкових процесів з K_σ-просторів випадкових величин"
37. **Каменщикова О.Є.** (2011) "Апроксимація випадкових процесів із заданою точністю та надійністю"
38. **Млавець Ю.Ю.** (2013) "Простори випадкових величин $F(Q)$ та їх застосування"
39. **Сергієнко М.П.** (2015) "Метод мажоруючих мір в статистиці випадкових процесів"
40. **Трошкі Н.В.** (2015) "Моделювання випадкових полів"
41. **Трошкі В.Б.** (2016) "Квадратично φ-субгауссові випадкові величини та процеси"
42. **Затула Д.В.** (2017) "Оцінки розподілу напівнорм Гельдера від випадкових процесів та їх застосування"

Юрій Васильович підтримував численні міжнародні зв'язки з відомими науковцями з Австралії, Великобританії, Італії, Канади, США, Фінляндії, Хорватії, Швеції та інших країн. Його неодноразово запрошували для участі у наукових програмах в Австралію, Італію, Іспанію, Хорватію, Фінляндію, Швецію. Юрій Васильович проводив наукові дослідження в рамках кількох міжнародних проектів, фінансованих грантами NATO, TEMPUS-TACIS Європейського Союзу та ін. Він керував багатьма господарчо-договірними

темами, зокрема, з СКБ заводу "Арсенал" та АНТК імені Олега Антонова.

Наукові досягнення Юрія Васильовича Козаченка неодноразово були відзначені нагородами. У 2003 році він став лауреатом Державної премії України в галузі науки і техніки; у 2005 році удостоєний звання "Почесний доктор Ужгородського національного університету", у 2009 році – звання "Заслужений професор Київського національного університету імені Тараса Шевченка", у 2010 році – звання "Заслужений діяч науки і техніки України", у 2013 році відзначений премією ім. М.М. Крилова президії НАН України, а в 2018 – Орденом "За заслуги" III ступеня.



На отриманні державної премії України в галузі науки і техніки: Козаченко Ю.В., Ядренко М.Й., Кучма Л.М., Патон Б.Є., Королюк В.С, Портенко М.І., Булдигін В.В., Дороговцев А.А.

Юрій Васильович вів активну наукову, організаційну, педагогічну і громадську діяльність: він був заступником голови спеціалізованої вченої ради механіко-математичного факультету, членом Експертної ради Міністерства освіти та науки України, членом редколегій багатьох наукових журналів, зокрема, заступником головного редактора наукового журналу "Теорія ймовірностей та математична статистика". У 2018 році став головним редактором журналу "Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки". Впродовж багатьох років Юрій Васильович був заступником голови Технічного комітету стандартизації "Застосування статистичних методів" (ТК 70), де разом з Мішурою Ю.С. очолював розробку стандартів зі статистичної термінології.

Студенти із задоволенням слухали основні та спеціальні курси, які він натхненно викладав на механіко-математичному факультеті Київського національного університету: "Теорія ймовірностей та математична статистика", "Узагальнений аналіз Фур'є", "Моделювання випадкових процесів", "Теорія випадкових процесів з просторів Орліча", "Вейвлет-аналіз" та інші.

Коло інтересів Юрія Васильовича Козаченка було надзвичайно широким. Він добре знав літературу, історію України, цікавився політичним життям, захоплювався класичною музикою та мистецтвом. І щедро ділився своїми знаннями з учнями, колегами та друзями.



Портрет математика проф. Козаченка Ю.В.
С. Григор'єв, 1978



Портрет Юрія Козаченка,
В.Зарецький

Юрій Васильович був яскравою "зіркою" як на математичному небосхилі, так і на педагогічній ниві. Всі, хто спілкувався та співпрацював з Юрієм Васильовичем, мав з ним справи, бачили доброзичливу, щиру, глибоко порядну та інтелігентну людину, що готова у будь-який момент прийти іншому на допомогу. Світла пам'ять Великому Вчителю, Великій Людині!!!

Монографії, підручники і навчальні посібники:

1. Козаченко Ю.В., Курченко О.О., Синявська О.О. "Теореми Леві-Бакстера для випадкових полів та їх застосування". Ужгород, "Шарк", 228 с. – 2018.

2. Козаченко Ю.В., Кучінка К.Й., Сливка-Тилищак Г.І. "Випадкові процеси в задачах математичної фізики". Ужгород, Вид-во ТОВ "РІК-у", 256 с.– 2017.

3. Kozachenko Yu., Hudyvok T.V., Troshki V.B., Troshki N.N. "Estimation of Covariance Functions of Gaussian Stochastic Fields and their Simulation". Uzhhorod, "Shark", 232 p. – 2017.

4. Kozachenko Yu., Pogorilyak O., Rozora I., Tegza A. "Simulation of Stochastic Processes with Given Accuracy and Reliability". ISTE Press Ltd, London and Elsevier Ltd Oxford, 346 p.– 2016.

5. Козаченко Ю.В., Пашко А.О. "Точність і надійність моделювання випадкових процесів та полів в рівномірній метриці". Київ, ТОВ "СІК ГРУП Україна", 215 с. – 2016.

6. Козаченко Ю.В., Млавець Ю.Ю., Моколячук О.М. "Квазібанахові простори випадкових величин". Ужгород, "Карпати", 212 с. – 2015.

7. Козаченко Ю.В., Погоріляк О.О., Тегза А.М. "Моделювання гауссових випадкових процесів та процесів Кокса". Ужгород, "Карпати", – 2012.

8. Дарійчук І.В., Козаченко Ю.В., Перестюк М.М. "Випадкові процеси з просторів Орліча". Золоті литаври, 212 с. – 2011.

9. Довгай Б.В., Козаченко Ю.В., Розора І.В. "Моделювання випадкових процесів у фізичних системах". Задруга, 230 с. – 2010.

10. Василик О.І., Козаченко Ю.В., Ямненко Р.Є. "φ–субгауссові випадкові процеси". К.: ВПЦ "Київський університет", 231 с. – 2008.

11. Довгай Б.В., Козаченко Ю.В., Сливка-Тилищак Г.І. "Крайові задачі математичної фізики з випадковими факторами". К.: ВПЦ "Київський університет", 173 с. – 2008.

12. Козаченко Ю.В., Пашко А.О., Розора І.В. "Моделювання випадкових процесів і полів". К.: Задруга, 230 с. – 2007.

13. Козаченко Ю.В. "Лекції з вейвлет аналізу". К.: ТВіМС, 147 с. – 2004.

14. Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V. "Metric characterization of random variables and random processes.". Translations of Mathematical Monographs. 188. Providence, RI: AMS, American Mathematical Society. 257 p. – 2000.

15. Козаченко Ю.В., Пашко А.О. "Моделювання випадкових процесів". К.: ВПЦ "Київський університет", 223 с. – 1999.

16. Булдыгин В.В., Козаченко Ю.В. "Метрические характеристики случайных величин и процессов". К.: ТВіМС, 290 с. – 1998.

Основні наукові роботи Ю.В. Козаченка:

1. Kozachenko Yu., Sakhno L., Orsingher E., Hopkalo O. "Sample Paths Properties of Stochastic Processes from Orlicz Spaces, with Applications to Partial Differential Equations". Statistics, Optimization and Information Computing, vol. 8, no. 3, 2020, pp. 722 – 739.

2. Kozachenko Yu., Ianevych T., Troshki V. "On test for checking hypothesis on expectation and covariance function of stochastic process". Communications in Statistics-Theory and Methods, 2020, 12 p., https://doi.org/10.1080/03610926.2020.1749280.

3. Kozachenko Yu., Tegza A., Troshki N. " The accuracy of modeling of Gaussian stochastic process in some Orlicz spaces ". Statistics, Optimization & Information Computing, vol. 8, no. 1, 2020, pp. 127 – 135.

4. Kozachenko Yu., Ivanov A., Moskvychova K. "Large deviations of the correlogram estimator of the random noise covariance function in the nonlinear regression model", Communications in Statistics – Theory and Methods, 2020, 19 p., https://doi.org/10.1080/03610926.2020.1713369.

5. Kozachenko Yu., Rozora I. "Conditions for the sample continuity with probability one for square-Gaussian stochastic processes". Theory of Probability and Mathematical Statistics, vol. 101, 2020, pp. 153 – 166.

6. Formica M., Kozachenko Y., Ostrovsky E., Sirota L. "Exponential tail estimates in the law of ordinary logarithm (LOL) for triangular arrays of random variables", Lithuanian Mathematical Journal, 2020, vol. 60, no. 3, pp. 330 – 358.

7. Kozachenko Yu., Sakhno L., Orsingher E., Vasylyk O. "Estimates for distribution of suprema of solutions to higher-order partial differential equations with random initial conditions", Modern Stochastics: Theory and Applications, vol. 7, no. 1, 2020, pp. 79 – 96.

8. Козаченко Ю., Василик О., Сахно Л., Гопкало О. "Деякі властивості та оцінки для φ-субгауссових випадкових процесів", Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки, вип.4, 2019, с. 18 – 22.

9. Kozachenko Yu., Rozora I. "Construction of the Karhunen–Loeve model for an input Gaussian process in a linear system by using the output process", Theory of Probability and Mathematical Statistics, vol. 99, 2019, pp. 113 – 124.

10. Kozachenko Yu., Zatula D. "Estimates for distributions of *Hölder* semi-norms of random processes from $F_\Psi(\Omega)$ spaces, defined on the interval $[0,\infty)$", Statistics, Optimization and Information Computing, vol. 7, no.1, 2019, pp. 198 – 210.

11. Kozachenko Yu., Pashko A. and Vasylyk O. "Simulation of generalized fractional Brownian motion in $C([0,T])$". Monte Carlo Methods Appl., vol.24, no.3, 2018, pp. 179 – 192.

12. Kozachenko Yu., Orsingher E., Sakhno L., Vasylyk O. "Estimates for Functionals of Solutions to Higher-Order Heat-Type Equations with Random Initial Conditions", Journal of Statistical Physics, vol.172, no.6, 2018, pp. 1641 – 1662.

13. Kozachenko Yu., Dozzi M., Mishura Yu., Ralchenko K. "Asymptotic growth of trajectories of multifractional Brownian motion with statistical applications to drift parameter estimation". Statistical Inference for Stochastic processes, vol.21, no.1, 2018, pp. 21 – 52.

14. Kozachenko Yu., Mlavets Yu., Yurchenko N.V. "Weak convergence of random processes from space $F_\Psi(\Omega)$". Statistics, Optimization and Information Computing, vol.6, no.2, 2018, pp. 266 – 277.

15. Kozachenko Yu., Troshki V. "Construction of criterion for testing hypothesis about covariance function of a stationary Gaussian stochastic process with unknown mean". Communication in Statistics. Theory and Methods, vol.47, no.18, 2018, pp. 4556 – 4567.

16. Kozachenko Yu., Pashko A., Vasylyk O. "Simulation of a fractional Brownian motion in the space $L_p([0,T])$", Theory of Probability and Mathematical Statistics, vol. 97, 2018, pp. 99 – 111.

17. Козаченко Ю., Василик О. "Рівномірна збіжність вейвлет-розкладів випадкових процесів з класів $V(\varphi,\psi)$", Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: Математика і Інформатика, вип.1, № 32, 2018, с. 108 – 115.

18. Kozachenko Yu., Ianevych T., Troshki V. "Goodness-of-fit tests for random sequences incorporating several components". Random Operator and Stochastic Equations, vol.25, no.1, 2017, pp. 1 – 10.

19. Kozachenko Yu., Petranova M. "Proper complex random processes". Statistics, Optimization and Information computing, vol.5, 2017, pp. 137 – 146.

20. Kozachenko Yu., Tegza A. "Construction of a Model of Gaussian Stationary Random Process in some Orlicz Spaces with Given Accuracy and Reliability". Columbia International Publishing Journal of Applied Mathematics and Statistics, vol.4, no.2, 2017, pp. 70 – 77.

21. Kozachenko Yu., Petranova M. "Simulation of Gaussian stationary Ornstein-Uhlenbeck process with given reliability and accuracy in space $C([0,T])$". Monte Carlo Methods and Applications, vol.23, no.4, 2017, pp. 277 – 286.

22. Козаченко Ю., Петранова М. "Дійсні стаціонарні гауссові процеси зі стійкими кореляційними функціями", Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: Математика і Інформатика, вип.31, № 2, 2017, с. 90 – 100.

23. Kozachenko Yu., Marina Izabella "Justification of application of Fourier method for parabolic equations with random boundary conditions from Orlicz spaces". Journal of Applied Mathematics and Statistics, vol.3, no.1, 2016, pp. 27 – 43.

24. Kozachenko Yu., Olenko A. "Whitaker-Kotelnikov-Shanon approximation of φ-sub-Gaussian random processes". Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol.442, no.2, 2016, pp. 924 – 946.

25. Kozachenko Yu., Rozora I. "A criterion for testing hypothesis about impulse response function". Statistics, Optimization and Information Computing, vol.4, no.3, 2016, pp. 214 – 232.

26. Kozachenko Yu., Olenko A. "Aliasing-Truncation errors in sampling approximations of Sub-Gaussian signals". IEEE Transactions on Information Theory, vol.62, no.10, 2016, pp. 5831 – 5838.

27. Dozzi M., Kozachenko Yu., Mishura Yu., Ralchenko K. "Asymptotic growth of trajectories of multifractional Brownian motion, with statistical applications to drift parameter estimation". Statistical Inference for Stochastic Processes, - 2016.

28. Kozachenko Yu., Troshki N. "Accuracy and reliability of a model of Gaussian random processes in $C(T)$ space". International Journal of Statistics and Management System, vol.10, no.1-2, 2015, pp. 1 – 15.

29. Kozachenko Y., Melnikov A., Mishura Y. "On drift parameter estimation in models with fractional Brownian motion". Statistics. A Journal of Theoretical and Applied Statistics, vol.49, no.1, 2015, pp. 35 – 62.

30. Kozachenko Yu., Olenko A., Polosmak O. "Convergence in $L_p([0,T])$ of wavelet expansions of φ-sub-Gaussian random processes". Methodology and Computing in Applied Probability, vol.17, no.1, 2015, pp. 139 – 153.

31. Козаченко Ю., Млавець Ю. "Застосування теорії $F_\Psi(\Omega)$ для обчислення кратних інтегралів методом Монте-Карло", Теор. Ймовір. та Матем. Статист., вип. 92, 2015, с. 61 – 70.

32. Kozachenko Yu., Troshki V. "The restricted isometry property for random matrices with φ-subgaussian entries". Random Operators and Stochastic Equations, vol.23, no.3, 2015, pp. 169 – 178.

33. Kozachenko Yu., Mlavets Yu. "Reliability and accuracy in the space $L_p(T)$ for the calculation of integrals depending on a parameter by the Monte Carlo method". Monte Carlo Methods and Applications, vol.21, no.3, 2015, pp. 233 – 244.

34. Козаченко Ю., Розора І. "Про корелограмні оцінки імпульсних перехідних функцій". Теор. Ймовір. та Матем. Статист., Вип. 93, 2015, с. 75–86.

35. Козаченко Ю.В., Затула Д.В. "Умови Ліпшиця для випадкових процесів з банахових просторів $F_\psi(\Omega)$ випадкових величин". Доповіді Національної академії наук України, № 9, 2014, с. 19–24.

36. Kozachenko Yu., Makogin V. "Probability distributions of extremes of self-similar Gaussian random fields." Journal of Classical Analysis, Vol.5, Iss.1, 2014, pp. 25 – 42.

37. Kozachenko Yu., Mlavets Yu. "Stochastic processes from $F_\psi(\Omega)$ spaces". Columbia, International publishing contemporary mathematics and statistics, v. 2, no. 1, 2014, pp. 55–75.

38. Kozachenko Yu., Slyvka-Tylyshchak A. "The Cauchy problem for the heat equation with a random right part from the space $Sub_\varphi(\Omega)$". Applied Mathematics, no. 5, 2014, pp. 2318–2333.

39. Kozachenko Yu., Sergienko M. "The criterion for hypothesis testing on the covariance function of a Gaussian stochastic process". Monte Carlo Methods and Applications, v. 20, no. 2, 2014, pp. 137–144.

40. Kozachenko Yu., Pashko A. "Accuracy of simulations of the Gaussian random processes with continuous spectrum". Computer Modelling and New Technologies, v. 18, no. 3, 2014, pp. 7–12.

41. Kozachenko Yu., Slyvka-Tylyshchak A. "On the increase rate of random fields from the space $Sub_\varphi(\Omega)$ on unbounded domains." Statistics, Optimization and Information Computing, v. 2, no. 2, 2014, pp.79–92.

42. Kozachenko Yu., Olenko A., Polosmak O. "Uniform convergence of compactly supported wavelet expansions of Gaussian random processes". Communication in Statistics, Theory and Methods, v. 43, no. 10–12, 2014, pp. 2549–2562.

43. Kozachenko Yu., Yamnenko R., Buchmitch D. "Generalized sub-Gaussian fractional Brownian queueing model". Queueing Systems, v. 77, 2014, pp. 75–96.

44. Kozachenko Yu., Slyvka-Tylyshchak A. "The Cauchy problem for the heat equation with random right side". Random Oper. and Stoch. Equation, v. 22, no. 1, 2014, pp. 53–64.

45. Kozachenko Yu., Yamnenko R. "Application of φ-sub-Gaussian Random Processes in Queueing Theory". Springer Optimization and its Applications, v. 90, Modern Stochastics and Application, 2014, pp. 21–38.

46. Kozachenko Yu., Troshki V. "A criterion for testing hypotheses about the covariance function of a stationary Gaussian stochastic process." Modern Stochastics: Theory and Applications, v. 1, Iss. 2, 2014, pp. 139–149.

47. Kozachenko Yu., Ianevych T. "Some goodness of fit tests for random sequences". Lithuanian Journal of Statistics, v. 52, no. 1, 2013, pp. 5–13.

48. Kozachenko Yu., Kurchenko O., Synyavska O. "Levy-Baxter theorems for one class of non-Gaussian random fields". Monte Carlo Methods and Applications, v. 12, no. 3, 2013, pp. 171–182.

49. Kozachenko Yu., Olenko A., Polosmak O. "On convergence of general wavelet decompositions of nonstationary stochastic processes". Electronic Journal of Probability, 18 no. 69, 2013, pp. 1–21.

50. Kozachenko Yu., Giuliano Antonini R., Tien-Chung Hu, Volodin A. "On application of φ-subgaussian technique to Fourie analysis". Journal of Mathematical Analysis and Application, v. 408, 2013, pp. 114– 124.

51. Kozachenko Yu., Olenko A., Polosmak O. "Convergence Rate of Wavelet Expansions of Gaussian Random Processes". Communication in Statistics -– Theory and Methods, v. 42, no. 21, 2013, pp. 3853–3872.

52. Козаченко Ю.В., Млавець Ю.Ю. "Простори Банаха випадкових величин $F_\psi(\Omega)$". Теорія ймовірностей та математична статистика, № 86, 2012, с. 92–107.

53. Козаченко Ю.В., Моца А.І., Дзямко В.Й. "Про зображення φ-субгауссових періодичних випадкових процесів у вигляді рядів", Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика і інформатика, вип. 23, № 1, 2012, с. 42 – 54.

54. Козаченко Ю.В., Моца А.І., Дзямко В.Й. "Умови рівномірної збіжності зображень φ-субгауссових випадкових процесів у вигляді тригонометричних рядів", Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика і інформатика, вип. 23, № 2, 2012, с. 42 – 50.

55. Kozachenko Yu., Kurchenko O. "Levy-Baxter theorems for one class of non-Gaussian stochastic processes". Random Operators and Stochastic Equations, v. 19, no. 4, 2011, pp. 21–34.

56. Kozachenko Yu., Rozora I., Turchyn Ye. "Property of some random series". Communications in Statistics – Theory and Methods, v. 40, no. 19-20, 2011, pp. 3672–3683.

57. Kozachenko Yu., Pogoriliak O. "Simulation of Cox processes driven by random Gaussian field". Methodology and Computing in Applied Probability, v. 13, 2011, pp. 511–521.

58. Kozachenko Yu., Mlavets Yu. "Probability of large deviations of sums of random processes from Orlicz space". Monte Carlo Methods and Applications, v. 17, no. 2, 2011, pp. 155–168.

59. Kozachenko Yu., Olenko A., Polosmak O. "Uniform convergence of wavelet expansions of Gaussian random processes". Stochastic Analysis and Applications, v. 29, no. 2, 2011, pp. 169–184.

60. Козаченко Ю., Мішура Ю., Братик М. "Збіжність максимальної ймовірності успіху в задачі квантильного хеджування для моделі процесу ціни акції, заданої за допомогою броунівського та дробово-броунівського рухів", Теор. Ймовір. та Матем. Статист., Вип. 84, 2011, с. 18–33.

61. Козаченко Ю., Моклячук О.М. "Випадкові процеси у просторах $D\{V, W\}$", Теор. Ймовір. та Матем. Статист., Вип. 82, 2010, с. 56–66.

62. Козаченко Ю., Василик О.І., Соттінен Т. "Умови Ліпшиця для $Sub_\varphi(\Omega)$-процесів. Застосування до слабко автомодельних процесів зі стаціонарними приростами", Теор. Ймовір. та Матем. Статист., Вип. 82, 2010, с. 67–81.

63. Dovgay B.V., Kozachenko Yu.V. "Properties of the solution of nonhomogeneous string oscillation equations with φ-subgaussian right side." Random Oper. Stoch. Equ., 17 (3), 2009, pp. 221 – 241.

64. Kozachenko Yu., Olenko A., Polosmak O. "Uniform convergence of wavelet expansions of Gaussian random processes". Proceedings of 57-th session of the International Statistical Institute Durban South Africa, – 2009.

65. Козаченко Ю.В., Дарійчук І.В. "Розподіл супремуму передгауссових дробових процесів". Теорія ймовір. та матем. статист., вип. 80, 2009, с. 76–90.

66. Василик О., Козаченко Ю., Яковенко Т. "Моделювання стаціонарних випадкових послідовностей". Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. науки. № 1, 2009, с. 7– 10.

67. Козаченко Ю.В., Вереш К.Й. "Рівняння теплопровідності з випадковими початковими умовами із просторів Орліча". Теорія ймовір. та матем. статист. Вип. 80, 2009, с. 63–75.

68. Kozachenko Yu., Polosmak O. "Uniform convergence in probability of wavelet expansions of random processes from $L_2(\Omega)$". Random Oper. Stoch. Equ., vol. 16, No. 4, 2008, pp. 325 – 355.

69. Dariychuk I., Kozachenko Yu. "Estimates for the distribution of the supremum of θ-pre-Gaussian random processes.", Random Oper. Stoch. Equ., vol. 16, No. 1, 2008, pp. 39 – 78.

70. Kozachenko Yu., Perestyuk M. "On the uniform convergence of wavelet expansions of random processes from Orlicz spaces of random variables. II." Ukr. Math. J., vol. 60, No. 6, 2008, pp. 876 – 900.

71. Giuliano Antonini R., Kozachenko Yu., Volodin A. "Convergence of series of dependent φ-sub-Gaussian random variables." J. Math. Anal. Appl., vol. 338, No. 2, 2008, pp. 1188 – 1203.

72. Kozachenko Yu., Mishura Yu. "Maximal upper bounds for the moments of stochastic integrals and solutions of stochastic differential equations with respect to fractional Brownian motion with Hurst index. II." Theory Probab. Math. Stat. 76, 2008, pp. 59 – 76.

73. Kozachenko Yu., Pogorilyak O. "A method of modelling log Gaussian Cox processes." Theory Probab. Math. Stat. 77, 2008, pp. 91 – 105.

74. Kozachenko Yu., Pogorilyak O. "Modelling log Gaussian Cox processes with a given reliability and accuracy." Theory Probab. Math. Stat. vol. 76, 2008 pp. 77 – 91.

75. Kozachenko Yu., Turchyn Ye. "On Karhunen-Loeve-like expansion for a class of random processes". International Journal of Statistics and Management System, vol. 3, no.1-2, 2008.

76. Kozachenko Yu., Sottinen T., Vasylyk O. "Lipschitz conditions for $Sub_\varphi(\Omega)$-processes with application to weakly self-similar stationary increment processes". Reports in Mathematics University of Helsinki, 2008, 34 p.

77. Kozachenko Yu., Perestyuk M. "On the uniform convergence of wavelet expansions of random processes from Orlicz spaces of random variables. I.". Ukr. Math. J., vol. 59, No. 12, 2007, pp. 1850 – 1869.

78. Kozachenko Yu., Rozora I., Turchyn Ye. "On an expansion of random processes in series." Random Oper. Stoch. Equ. vol. 15, No. 1, 2007, pp. 15 – 33.

79. Kozachenko Yu., Mishura Yu. "Maximal upper bounds for the moments of stochastic integrals and solutions of stochastic differential equations containing fractional Brownian motion with Hurst index $H < \frac{1}{2}$. I.". Theory Probab. Math. Stat. vol. 75, 2007, pp. 51 – 64.

80. Kozachenko Yu., Slivka G. "Modeling a solution of a hyperbolic equation with random initial conditions.". Theory Probab. Math. Stat. 74, 2007, pp. 59 – 75.

81. Kozachenko Yu., Vasylyk O. "Simulation of fractional Brownian motion with given reliability and accuracy in $C([0;1])$." Theory Stoch. Process. 12, vol. 28, no. 3-4, 2006, pp. 55 – 62.

82. Kozachenko Yu., Rozora I. "Application of the theory of square-Gaussian processes to simulation of stochastic processes." Theory Stoch. Process. 12, vol. 28, no.2006, 3-4, pp. 43 – 54.

83. Kozachenko Yu.V., Yakovenko T.O. "Stochastic processes in Sobolev-Orlicz spaces.". Ukr. Math. J. 58, No. 10, 2006, pp. 1517 – 1537.

84. Kozachenko Yu., Perestyuk M., Vasylyk O. "On uniform convergence of wavelet expansions of φ-sub-Gaussian random processes." Random Oper. Stoch. Equ., vol. 14, No. 3, 2006, pp. 209 – 232.

85. Kozachenko Yu., Pogorilyak O. "Simulation of Cox processes controlled by a random field". Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat. Pryr. Tekh. Nauky 2006, No. 10, 2006, pp. 20 – 23.

86. Kozachenko Yu.V., Fedoryanich T.V. "Estimates for the distribution of the supremum of square-Gaussian stochastic processes defined on noncompact sets.". Theory Probab. Math. Stat., Vol 73, 2006, pp. 81 – 97.

87. Kozachenko Yu.V., Dovgay B.V. "The conditions for application of Fourier method to solution of nonhomogeneous string oscillation equation with f-sub-Gaussian right side.". Random Oper. Stoch. Equ. 13, No. 3, 2005, pp. 281 – 296.

88. Kozachenko Yu., Vasylyk O., Yamnenko R. "Upper estimate of overrunning by $Sub_\varphi(\Omega)$ random process the level specified by continuous function". Random Oper. Stoch. Equ. 13, No. 2, 2005,pp. 111 – 128.

89. Kozachenko Yu.V., Leonenko G.M. "Extremal behavior of the heat random field." Extremes 8, No. 3, 2005, pp. 191 – 205.

90. Giuliano Antonini R., Kozachenko Yu.V. "A note on the asymptotic behaviour of sequences of generalized subGaussian random vectors." Random Oper. Stoch. Equ. 13, No. 1, 2005, pp. 39 – 52.

91. Kozachenko Yu., Sottinen T., Vasylyk O. "Simulation of weakly self-similar stationary increment $Sub_\varphi(\Omega)$-processes: A series expansion approach." Methodol. Comput. Appl. Probab. 7, No. 3, 2005, pp. 379 – 400.

92. Kozachenko Yu.V., Rozora I.V. "Accuracy and reliability of models of stochastic processes of the space $Sub_\varphi(\Omega)$". Theory Probab. Math. Stat. 71, 2005, pp. 105 – 117.

93. Kozachenko Yu.V., Fedoryanych T.V. "A criterion for testing hypotheses about the covariance function of a Gaussian stationary process." Theory Probab. Math. Stat. 69, 2004, pp. 85 – 94.

94. Kozachenko Yu.V., Slivka G.I. "Justification of the Fourier method for hyperbolic equations with random initial conditions." Theory Probab. Math. Stat. 69, 2004, pp. 67 – 83.

95. Kozachenko Yu., Slivka A."Boundary-value problems for equations of mathematical physics with strictly $Sub_\varphi(\Omega)$ random initial conditions." Theory Stoch. Process. 10(26), No. 1-2, 2004, pp. 60 – 71.

96. Kozachenko Yu., Rozora I. "Simulation of Gaussian stochastic fields." Theory Stoch. Process. 10(26), No. 1-2, 2004, pp. 48 – 59.

97. Kozachenko Yu.V., Rozora I.V. "On simulation of stochastic processes from the space $Sub_\varphi(\Omega)$." Prykl. Stat., Aktuarna Finans. Mat. No. 1, 2004, pp. 72 – 78.

98. Kozachenko Yu., Vasylyk O. "Sample paths continuity and estimates of distributions of increments of separable stochastic processes from the class $V(\varphi, \psi)$ defined on a compact set." Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv.Ser. Physics and Mathematics, No. 2, 2004, pp. 45 – 50.

99. Kozachenko Yu.V., Fedoryanych T.V. "Criteria for testing of hypotheses about a covariance function." Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat. Pryr. Tekh. Nauky No. 5,2004, pp. 11 – 16.

100. Kozachenko Yu.V., Yakovenko T.O. "Stochastic processes in the Orlicz spaces. " Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat. Pryr. Tekh. Nauky 2004, No. 3, pp. 7 – 11.

101. Kozachenko Yu., Vasylyk O., Yamnenko R. "On the probability of exceeding some curve by φ-subGaussian random process." Theory Stoch. Process. 9(25), No. 3-4, 2003, pp. 70 – 80.

102. Kozachenko Yu., Rozora I. "Simulation of Gaussian stochastic processes." Random Oper. Stoch. Equ. 11, No. 3, 2003, pp. 257 – 296.

103. Kozachenko Yu. V., Slyvka G. I. "Boundary-value problems of mathematical physics with random initial conditions from the $Sub_\varphi(\Omega)$ space." Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat. Pryr. Tekh. Nauky 2003, No. 12, 2003, pp. 7 – 10.

104. Kozachenko Yu., Moklyachuk O. "Large deviation probabilities in terms of majorizing measures." Random Oper. Stoch. Equ. 11, No.1, 2003, pp. 1 – 20.

105. Kozachenko Yu.V., Tegza A.M. "Applications of the theory of $Sub_\varphi(\Omega)$ spaces of random variables for modelling stationary Gaussian processes." Theory Probab. Math. Stat. 67, 2003, pp. 79 – 96.

106. Giuliano Antonini R., Kozachenko Yu.V., Nikitina T. "Spaces of φ-subgaussian random variables." Rendiconti Accademia Nazionale delle Scienze XL. Memorie di Matematica e Applicazioni 121. Vol. XXVII, 2003, pp. 95 – 124.

107. Giuliano Antonini R., Kozachenko Yu. V., Sorokulov, V. V. "On accuracy and reliability of simulation of some random processes from the space $Sub_\varphi(\Omega)$." Theory Stoch. Process. 9(25), No. 3-4, 2003, pp. 50 – 57.

108. Giuliano Antonini R., Kozachenko Yu.V., Tegza A.M. "Inequalities for the norms of sub-Gaussian vectors and the accuracy of the modelling of random processes." Theory Probab. Math. Stat. 66, 2003, pp. 63 – 72.

109. Kozachenko Yu., Vasylyk O., Sottinen T. "Path space large deviations of a large buffer with Gaussian input traffic." Queueing Systems, 42, No.2, 2002, pp. 113 – 129.

110. Kozachenko Yu.V., Yakovenko T.O. "Conditions under which stochastic processes belong to some functional Orlicz spaces." Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv.Ser. Physics and Mathematics, No.5, 2002, pp. 64 – 74.

111. Giuliano Antonini R., Kozachenko Yu.V., Tegza A.M. "Accuracy of simulation in Lp of Gaussian random processes. " Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv.Ser. Physics and Mathematics, No. 5, 2002, pp. 7 – 14.

112. Kozachenko Yu.V., Pashko A.O. "Estimation of accuracy of simulation of random fields on the sphere in L_p, $p \geq 2$." Visn., Mat. Mekh., Kyiv. Univ. im. Tarasa Shevchenka No.7, 2002, pp. 26 - 32.

113. Kozachenko Yu.V., Leonenko G.M. "Large deviation type inequality for the supremum of the heat random field operators. " Methods Funct. Anal. Topol. 8, No.3, 2002, pp. 46 – 49.

114. Kozachenko Yu., Sottinen T., Vasylyk O. "Self-similar processes with stationary increments from the space $SSub_{\varphi}(\Omega)$." Theory Probab. Math. Stat. 65, pp. 77 - 88, - 2002

115. Kozachenko Yu.V., Kozachenko L.F. "Modeling Gaussian isotropic random fields on a sphere." J. Math. Sci. 107, No.2, 2001, pp. 3751 – 3757.

116. Kozachenko Yu.V., Pashko A.O., Zelepugina I.M. "The accuracy of simulation of sub-Gaussian random fields in some functional spaces." Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat. Pryr. Tekh. Nauky 2001, No.1, 2001, pp. 11 – 17.

117. Kozachenko Yu.V., Vasylyk O.I. "Stochastic processes of the classes $V(\varphi, \psi)$." Theory Probab. Math. Stat. 63, 2001, pp. 109 – 121.

118. Kozachenko, Yu.V., Pashko, A.O. "On the simulation of random fields. II." Theory Probab. Math. Stat. 62, 2001, pp. 51 – 63.

119. Kozachenko Yu.V., Pashko A.O. "On the simulation of random fields. I." Theory Probab. Math. Stat. 61, 2000, pp. 61 – 74.

120. Kozachenko Yu., Moklyachuk O. "Square-Gaussian stochastic processes." Theory Stoch. Process. 6(22), No.3-4, 2000, pp. 98 – 121.

121. Kozachenko Yu.V., Kurchenko O.O. "Estimation of parameters of homogeneous Gaussian random fields." Ukr. Math. J. 52, No.8, 2000, pp. 1239 – 1246.

122. Kozachenko Yu.V. "Stochastic processes in Orlicz function spaces." Theory Probab. Math. Stat. 60, 2000, pp. 73 – 85.

123. Kozachenko Y., Moklyachuk O. "Large deviation probabilities for square-Gaussian stochastic processes." Extremes 2, 1999, pp. 269 – 293.

124. Kozachenko Yu., Kurchenko O. "An estimate for the multiparameter FBM. " Theory Stoch. Process. 5(21), 1999, No.3-4, pp. 113 – 119.

125. Kozachenko Yu.V., Stus' O.V. "Generalized strictly pre-Gaussian stochastic processes. " Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat. Pryr. Tekh. Nauky 1999, No.10, pp. 28 – 31.

126. Kozachenko Yu.V. “Distribution of the supremum of random processes from quasi-Banach Ks spaces. ” Ukr. Math. J. 51, No.7, 1999, pp. 1029 – 1043.

127. Kozachenko Yu.V., Pashko A.O. “Accuracy of simulation of stochastic processes in norms of Orlicz spaces. II.” Theory Probab. Math. Stat. 59, 1999, pp. 77 – 92.

128. Kozachenko Yu.V., Stus O.V. “Generalized strictly pre-Gaussian stochastic processes.” Theory Probab. Math. Stat. 58, 1999, pp. 67 – 81.

129. Kozachenko Yu.V., Pashko A.O. “Accuracy of simulation of stochastic processes in norms of Orlicz spaces. I.” Theory Probab. Math. Stat. 58, 1999, pp. 51 – 66.

130. Kozachenko Yu.V., Kozachenko L.F. “Modeling Gaussian isotropic random fields on a sphere.” Zh. Obchysl. Prykl. Mat. 83, 1998, pp. 57 – 64.

131. Kozachenko Yu.V., Vasilik O.I. “On the distribution of suprema of $Sub_{\varphi}(\Omega)$ random processes.” Theory Stoch. Process. 4(20), No.1-2, 1998, pp. 147 – 160.

132. Kozachenko Yu.V., Koval’chuk Yu.A. “Boundary-value problems with random initial conditions and functional series from $Sub_{\varphi}(\Omega)$. II.” Ukr. Math. J. 50, No.7, 1998, pp. 1019 – 1030.

133. Kozachenko Yu.V., Koval’chuk Yu.A. “Boundary-value problems with random initial conditions and functional series from $Sub_{\varphi}(\Omega)$. I.” Ukr. Math. J. 50, No.4, 1998, pp. 572 – 585.

134. Kozachenko Yu.V. “Pre-Gaussian random processes. ”. Butkovic, D. (ed.) et al., Functional analysis V. Proceedings of the postgraduate school and conference held at the Inter-University Centre, Dubrovnik, Croatia, September 14?28, 1997. Vol. I. Aarhus: Aarhus Universitet, Var. Publ. Ser., Aarhus Univ. 44, 1998, pp. 35 – 60.

135. Kozachenko Yu., Stus O. “Square-Gaussian random processes and estimators of covariance functions.” Math. Commun. 3, No.1, 1998, pp. 83 – 94.

136. Kozachenko Yu.V. “Conditions for convergence and rate of convergence of random series in K_{σ}-spaces of random variables. II.” Theory Probab. Math. Stat. 57, 1998, pp. 69 – 83.

137. Kozachenko Yu.V. “Conditions for convergence and rate of convergence of random series in K_{σ}-spaces of random variables. I.” Theory Probab. Math. Stat. 56, 1998, pp. 115 – 128.

138. Kozachenko Yu.V., Koval’chuk Yu.O. “On the convergence of strictly $Sub_{\varphi}(\Omega)$ random series in the norms of Orlicz spaces.” Dopov. Akad. Nauk Ukr. 1997, No.11, pp. 12 – 15.

139. Kozachenko Y.V., Trigub S.G. “The application of the Fourier method to boundary value problems with random initial conditions.” Theory Probab. Math. Stat. 54, 1997, pp. 77 – 86.

140. Kozachenko Yu.V., Majboroda R.E. “Estimation in the correlation-regression model and the dominant measure method.” Theory Probab. Math. Stat. 55, 1997, pp. 111 – 120.

141. Kozachenko Yu.V., Endzhyrgli M.V. “Justification of application of the Fourier method to boundary-value problems subject to random initial conditions. II.” Theory Probab. Math. Stat. 53, 1996, pp. 65 – 75.

142. Barrasa de la Krus E., Kozachenko Yu.V. “Boundary-value problems for equations of mathematical physics with strictly Orlicz random initial conditions. ” Random Operators & Stoch. Equat. 3, 1995, pp. 201 – 220.

143. Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V. “Bernstein functionals and exponential inequalities for distributions of sums of random variables.”. Dorogovtsev, A. Ya. (ed.), Mathematics today. 1994. No.9. Kyiv: Vyshcha Shkola, 1995, pp. 55 – 79.

144. Kozachenko Yu.V., Sidorenko A.A. "On a criterion for testing of a hypothesis on the correlation function for certain Gaussian stationary random processes $\overrightarrow{\xi}$." Arato, M. (ed.) et al., New trends in probability and mathematical statistics. Proceedings of the second Ukrainian-Hungarian conference, Mukachevo, Ukraine, September 25 October 1, 1992., pp. 365 – 373.

145. Kozachenko Yu.V., Livins'ka O.I. "Analytic properties of certain classes of stochastic processes from the space $Pred_{\varphi}(\Omega)$." Theory Probab. Math. Stat. 51, 1995, pp. 93 – 101.

146. Kozachenko Yu.V., Endzhyrgli M.V. "Justification of application of the Fourier method to boundary-value problems subject to random initial conditions. I." Theory Probab. Math. Stat. 51, 1995, pp. 81 – 92.

147. Kozachenko Yu.V., Moklyachuk O.M. "Pre-Gaussian random vectors and their applications. " Theory Probab. Math. Stat. 50, 1995, pp. 89 – 98.

148. Kozachenko Yu.V., Kozachenko L.F. "A test for a hypothesis on the correlation function of Gaussian random processes." J. Math. Sci., New York 77, No.5, 1995, pp. 3437 – 3444.

149. Kozachenko Yu.V., Endzhyrgly M.V. "Conditions for uniform convergence of $Sub_{\varphi}(\Omega)$-stochastic integrals." Theory Probab. Math. Stat. 48, 1994, pp. 47 – 54.

150. Bagro S.V., Kozachenko Yu.V. "Dominating measures and conditions for convergence of certain stochastic processes." Theory Prob. Math. Statist. 49, 1994, pp. 45 – 54.

151. Kozachenko Yu.V., Oleshko T.A. "Analytic properties of some classes of pre-Gaussian random processes." Theory Probab. Math. Stat. 48, 1994, pp. 25 – 34.

152. Zaitsev I.I., Kozachenko Yu.V. "Error distribution in sampled-data measurements." J. Math. Sci., New York 71, No.5, 1994, pp. 2678 – 2681.

153. Kozachenko Yu.V., Kozachenko L.F. "Simulation accuracy of stationary Gaussian stochastic processes in $L_2([0,T])$." J. Math. Sci., New York 72, No.3, 1994, pp. 3137 – 3143.

154. Kozachenko Yu.V., Kozachenko L.F. . "Simulation accuracy of Gaussian stochastic processes in $L_2([0,T])$". J. Math. Sci., New York 72, No.2, 1994, pp. 3040 – 3043.

155. Kozachenko Ю.В., Тригуб С.Г. "Про швидкість збіжності строго субгаусових випадкових рядів у нормі простору L_p." Теорія ймовірн. та матем. статистика, № 48, 1993, с.51 – 66

156. Kozachenko Yu.V., Kozachenko L.F. "A criterion of hypothesis testing for the covariance function of Gaussian stochastic processes. " Obchisl. Prikl. Mat. 77, 1993, pp. 61 – 74.

157. Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V. "Estimates of the supremum distribution for a certain class of random processes." Ukr. Mat. Zh. 45, No.5, 1993, pp. 596 – 608.

158. Kozachenko Yu.V., Oleshko T.A. "On the distribution of supremum of square-Gaussian random processes." Theory Probab. Math. Stat. 47, 1993, pp. 57 – 64.

159. Kozachenko Yu.V., Kozachenko L.F. "On the modelling of Gaussian stationary processes with absolutely continuous spectrum." Theory Probab. Math. Stat. 47, 1993, pp. 49 – 55.

160. Vovk L.B., Kozachenko Yu.V. "On the rate of convergence in the Levy-Baxter theorems for certain classes of random processes." Theory Probab. Math. Stat. 46, 1993, pp. 23 – 32.

161. Zajtsev I.I., Kozachenko Yu.V. "Distribution of errors in case of measurements by the impulse method." Vychisl. Prikl. Mat. 73, 1992, pp. 66 – 70.

162. Kozachenko Yu.V., Kozachenko L.F. "On accuracy of modeling of Gaussian stochastic processes in $L_2([0,T])$." Vychisl. Prikl. Mat. 74, 1992, pp. 88 – 93.

163. Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V., Leonenko N.N. "Works of M. I. Yadrenko in the theory of random fields. " Ukr. Math. J. 44, No.11, 1992, pp. 1343 – 1348.

164. Kozachenko Yu.V., Stadnik A.I. "Pre-Gaussian processes and convergence in $C(T)$ of estimators of covariance functions." Theory Probab. Math. Stat. 45, 1992, pp. 51 – 57.

165. Kozachenko Yu.V., Stadnik A.I. "On convergence of some functionals of Gaussian vectors in Orlicz spaces. " Theory Probab. Math. Stat., 44, 1992, pp. 77 – 83.

166. Kozachenko Yu.V., Ryazantseva V.V. "Conditions for boundedness and continuity in terms of majorizing measures of random processes in certain Orlicz spaces." Theory Probab. Math. Stat., 44, 1992, pp. 69 – 75.

167. Kozachenko Yu.V., Kozachenko L.F. "Accuracy of modeling stationary Gaussian stochastic processes in $L_2([0,T])$." Vychisl. Prikl. Mat. 75, 1991, pp. 108 – 115.

168. Besklinskaya E.P., Kozachenko Yu.V. "On the rate of convergence for sub-Gaussian random vectors of strict type in Levy-Baxter-type theorems." Issled. Oper. ASU 37, 1991, pp. 32 – 37.

169. Kozachenko Yu.V. "Convergence of stochastic integrals in Orlicz spaces." Theory Probab. Math. Stat. 40, 1990, pp. 43 – 50.

170. Besklins'ka O.P., Kozachenko Yu.V. "On the convergence of sums of Baxter type in Orlicz spaces." Visn. Kiev. Univ., Mat. Mekh. 32, 1990, pp. 3 – 7.

171. Kozachenko Yu.V., Kozachenko L.F. "Simulation accuracy of Gaussian stochastic processes in $L_2([0,T])$". Vychisl. Prikl. Mat. 74, 1990, pp. 88 – 93.

172. Kozachenko Yu.V., Pashko A.A. "Estimates on the distribution of the supremum of a stationary Gaussian process." Ukr. Math. J. 41, No.3, 1989, pp. 279 – 286.

173. Zelepugina I.N., Kozachenko Yu.V. "On the rate of convergence of Karhunen-Loeve expansions of Gaussian random processes. " Theory Probab. Math. Stat. 38, 1989, pp. 41 – 51.

174. Kozachenko Yu.V., Ryazantseva V.V. "Sufficient conditions of uniform convergence in the Orlicz spaces of spectral decompositions of stationary processes." Selected problems of the modern theory of stochastic processes, Collect. Sci. Works, 1988, pp. 84 – 89.

175. Kozachenko Yu.V., Pashko A.A. "Modeling the Gaussian stationary stochastic processes representable in the form of stochastic integrals." Theory and applications of statistical modelling, Collect. Sci. Works, Novosibirsk, 1988, pp. 10 – 24.

176. Zelepugina I.N., Kozachenko Yu.V. "On accuracy estimations in modelling random fields in spaces L_p, $p \geq 1$." Issled. Oper. ASU 32, 1988, pp. 10 – 14.

177. Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V. "Sub-Gaussian random vectors and processes." Theory Probab. Math. Stat. 36, 1988, pp. 9 – 20.

178. Kozachenko Yu.V., Buldygin V.V. "Levy-Baxter type theorems and strong sub-Gaussian random processes." Probability theory and mathematical statistics, Proc. 4th Conf., Vilnius/USSR 1985, Vol. 2, 1987, pp. 87 – 102.

179. Besklinskaya E.P., Kozachenko Yu.V. "Convergence in Orlicz space norms and Levy-Baxter theorems". Theory Probab. Math. Stat. 35, 19887, pp. 1 – 4.

180. Abzhanov E.A., Kozachenko Yu.V. "Stochastic processes in quasi-Banach K_σ-spaces of random variables." Probabilistic methods for the investigation of systems with an infinite number of degrees of freedom, Collect. sci. Works, Kiev 1986, pp. 4 – 11.

181. Kozachenko Yu.V., Ostrovskij E.I. "Banach spaces of random variables of sub-Gaussian type." Theory Probab. Math. Stat. 32, 1986, pp. 45 – 56.

182. Abzhanov E.A., Kozachenko Yu.V. "Some properties of random processes in Banach K_σ-spaces.". Ukr. Mat. Zh. 37, 1985, No.3, pp. 275 – 280.

183. Kozachenko Yu.V. "Random processes in Orlicz spaces. II." Theory Probab. Math. Stat., 31, 1985, pp. 51 – 58.

184. Kozachenko Yu.V. "Random processes in Orlicz spaces. I." Theory Probab. Math. Stat., 30, 1985, pp. 103 – 117.

185. Bejsenbaev E., Kozachenko Yu.V. "Uniform convergence of random series in norms of an Orlicz space. " Some questions of the theory of stochastic processes, Collect. sci. Works, Kiev 1984, pp. 10 – 16.

186. Kozachenko Yu.V. "Conditions for the uniform convergence, in the Luxemburg norm, of Gaussian trigonometric series and series close to them." Theory Probab. Math. Stat. 28, 1984, pp. 65 – 77.

187. Kozachenko Yu.V. "Properties of random processes of sub-Gaussian type." Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR, Ser. A 1984, No.9, pp. 14 – 16.

188. Kozachenko Yu.V. "Properties of random processes in Orlicz spaces." Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR, Ser. A 1984, No.8, pp. 19 - 21, - 1984

189. Kozachenko Yu.V. "On the uniform convergence of stochastic integrals with respect to the norm of the Orlicz space. " Teor. Veroyatn. Mat. Stat. 29, 1983, pp. 52 – 64.

190. Kozachenko Yu.V. "On uniform convergence in the mean of random processes representable in the form of stochastic integrals. " Theory Probab. Math. Stat. 27, 1983, pp. 73 – 81.

191. Zelepugina I.P., Kozachenko Yu.V. "On the question of the simulation of Gaussian stochastic processes." Some questions of the theory of stochastic processes, Collect. sci. Work Kiev 1982, pp. 47 – 56.

192. Benmalek A., Kozachenko Yu.V. "Conditions for uniform convergence in probability of Gaussian stochastic integrals." Theory Probab. Math. Stat. 25, 1982, pp. 1 – 11.

193. Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V. "Sub-Gaussian random variables." Ukr. Math. J. 32, 1981, pp. 483 – 489.

194. Bejsenbaev E., Kozachenko Yu.V. "Uniform convergence in probability of random series and solutions of boundary value problems with random initial conditions. " Theory Probab. Math. Stat. 21, 1980, pp. 9 – 23.

195. Gladkaya O.N., Kozachenko Yu.V. "Uniform convergence conditions for some stochastic series." Math. Notes 26, 1980, pp. 567 – 570.

196. Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V. "To the question of the applicability of the Fourier method for solving problems with random boundary conditions." Stochastic processes in problems of mathematical physics, Collect. Sci. Works, Kiev 1979, pp. 4 – 35.

197. Kozachenko Yu.V., Yadrenko M.I. "Local properties of the sample functions of random fields. II." Theory Probab. Math. Stat. 15, 1978, pp. 83 – 99.

198. Гладкая О.Н., Козаченко Ю.В. "Условия равномерной сходимости по вероятности стохастических интегралов." Мат. анализ и теория вероятн. Сб. научн. трудов, Киев, "Наукова думка", 1978, с. 31–34.

199. Kozachenko Yu.V., Yadrenko M.I. "Local properties of sample functions of random fields. I. " Theory Probab. Math. Stat. 14, 1977, pp. 55 – 69.

200. Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V. "On local properties of realizations of some stochastic processes and fields." Theory Probab. Math. Stat. 10, 1976, pp. 37 – 45.

201. Kozachenko Yu.V., Rudomanov V.I. "On the probability that a stationary Gaussian random process exceeds a given function." Theory Probab. Math. Stat. 12, 1976, pp. 65 – 78.

202. Kozachenko Yu.V. "Sufficient conditions for the continuity with probability one of sub- Gaussian random processes." Select. Translat. Math. Stat. Probab. 14, 1978, pp. 103 – 105.

203. Kozachenko Yu.V., Senchenkova A.Yu. "Sufficient conditions for sample differentiability of random processes." Theor. Probab. Math. Statist. 7, 1972, pp. 71 – 75.

204. Kozachenko Yu.V. "On uniform convergence of some random series." Theor. Probab. Math. Statist. 2, 1970, pp. 103 – 109.

205. Kozachenko Yu.V. "Local properties of the sample functions of a class of stochastic processes." Theor. Probab. Math. Statist. 1, 1970, pp. 109 – 116.

206. Kozachenko Yu.V. "Local properties of sums of certain random series. " Math. Notes 3, 1968, pp. 167 – 172.

207. Козаченко Ю. "О равномерной сходимости рядов со случайными коэффициентами и стохастических интегралов." ДАН УССР, 1968, №1, с.10 – 13.

208. Козаченко Ю. "Достаточные условия непрерывности с вероятностью единица субгауссовских случайных процессов." ДАН УССР, 1968, № 2, с.113 – 115.

209. Козаченко Ю. "Локальные свойства траекторий некоторых случайных функций." Укр. матем. журнал, 19, № 2, 1967, с.109 – 116.

210. Козаченко Ю. "Условия непрерывности с вероятностью единица некоторых случайных функций." ДАН УССР, 1967, № 1, с.25 – 28.



УДК 519.21:519.6 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/3.2

Козаченко А.В.

Родинні спогади про Юрія Васильовича Козаченка

Національна музична академія України імені П.І. Чайковського, 02000, Київ, вул. архітектора Городецького, 1-3/11,
e-mail: valentynkozachenko@gmail.com

Kozachenko A.V.

Family memories of Yuriy Vasylyovych Kozachenko

Petro Tchaikovsky National Music Academy of Ukraine, 02000, Kyiv, Gorodetsky str., 1-3/11
e-mail: valentynkozachenko@gmail.com

Стаття присвячена спогадам рідної сестри видатного вченого, доктора фізико-математичних наук, професора Юрія Васильовича Козаченка. Розповідається про дружню та творчу родину Козаченків, в якій зростав майбутній математик. Із величезною теплотою описуються деякі історії з дитинства Юрія Васильовича.

The article is dedicated to the memoirs of the sister of the outstanding scientist, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor Yuriy Kozachenko. It tells about the friendly and creative family of Kozachenkos, in which the future mathematician grew up. Some stories from the childhood of Yuriy Kozachenko are described with great warmth.

В кінці квітня 2020 року, якраз на Великдень, ми з братом Валентином мали чи не останню розмову з Юрієм Васильовичем. Йшлося про майбутнє братове 80- річчя, яке мало б відбутися 1 грудня 2020 року. Мабуть, ми першими були запрошені на свято Дня народження. Бажання зустрітися було взаємним! Але, на початку травня раптова передчасна смерть Юрія перекреслила наші надії!

Сьогоднішні дні промовляють для мене згадками щасливих, дитячих літ у великій дружній родині. Мені б хотілося перегорнути декілька сторінок з історії нашої сім'ї та висвітлити деякі епізоди ще з тих давніх часів, коли ми з братами росли у великій та дружній сім'ї. Юрій Васильович народився в сім'ї письменника Василя Павловича Козаченка. Мати Ірина Сігізмундівна Завістовська працювала редактором в дитячому журналі «Барвінок» і закінчила філологічний факультет університету та вечірню консерваторію по класу фортепіано, знала декілька іноземних мов

.



Письменник Василь Павлович Козаченко



Ірина Сігізмундівна Завістовська-Козаченко

© А.В. Козаченко, 2020

Ймовірно, для чотирирічного Юрія поява одразу двох молодших брата та сестри – близнюків Аліни та Валентина – була несподіванкою, «завдяки» якій він раптом став «дорослим». Але, не дивлячись ні на що, він бездоганно справлявся з обов'язками старшого брата. Ми не були схожими між собою, і у нас були різні захоплення, різні емоційні світи, та у кожного своє коло друзів. Батьки нас підтримували по життю, не наполягаючи на виборі професії. Певною мірою нас надихала творча атмосфера вдома, багата бібліотека, картини на стінах квартири, два рояля, а також постійні знайомства з відомими українськими та зарубіжними письменниками, художниками, музикантами та іншими митцями, які нерідко заходили до нашого будинку, сповнюючи його враженнями від своїх цікавих розповідей. Ми, діти, так звикли, що кожна людина, яка переступала поріг нашої оселі, була унікальною і несла в собі щось світле, цікаве та повчальне, переповнюючи наші дитячі душі відчуттям прекрасного.



Валентин, Аліна та Юрій Козаченки

В цій атмосфері ріс і мій старший брат Юрій. Його власна зацікавленість музикою та мистецтвом допомогла йому розширити горизонти інтелектуального та емоційного світів та в поєднанні з його власними людськими якостями створила унікальний образ розумної, інтелігентної, освіченої, впевненої та неймовірно доброї людини. Можливо, Юрію не було цікаво з нами, малюками, але, не дивлячись на різницю у віці, я завжди відчувала його увагу та чуйність, а також постійне бажання застерегти від якоїсь небезпеки. А ще Юрій щедро ділився своїми математичними здібностями та навичками, які потім стали його професією та допомогли йому набути статусу всесвітньо відомого науковця. Для мене, тоді тільки школярки, була дуже приємною та увага, з якою Юрій пояснював мені важкі математичні задачі. Завдяки його впевненості, терпінню та порадам, я навчилася братись за будь-яку, подекуди невідому мені справу із задоволенням, допитливістю та завзяттям.



Валентин, Аліна та Юрій Козаченки

Я пишаюся своїм братом, можна дуже довго перелічувати його відзнаки. Він був розумною, творчою людиною і мав багато ідей... Впевнена, що це стало запорукою його успішної викладацької роботи. Підготувати велику кількість наукових праць, викохати 42 кандидати та 10 докторів наук – це вже з «теорії неймовірності». Але мені він казав: «Знаєш, що ти зробила в житті найліпшого? – народила прекрасну дочку» – Портенко Ірену Миколаївну разом із чоловіком, колегою Юрія Васильовича – доктором наук, членом-кореспондентом НАН України Миколою Івановичем Портенком. Почувши ці слова від мого старшого брата, я відчула себе щасливою!

Я дуже сумую за моїм старшим братом, з яким мені було так затишно і цікаво, яким я пишалась та пишаюсь все більше та більше. Я вдячна долі, що мої перші роки проходили під знаком сімейного тепла, підтримки, дружби та нескінченного творчого польоту, ще закладеними нашими батьками. Завдяки їх талантам та важкій невпинній праці вдалося створити надійну основу для виховання цілісних особистостей із широким світоглядом, для того, щоб передати ці глибокі цінності наступним поколінням дітей та онуків.

Аліна Василівна Козаченко – заслужена артистка України, працюю в Національній опері України, доцент Національної музичної академії України. Брат-близнюк – Валентин Васильович Козаченко, народний артист України, режисер.

Надійшла до редакції 02.11.2020

УДК 519.21 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/3.3

Пашко А.О.[1], д. ф.-м. н., проф.,

Зустрічі з Козаченко Ю.В.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: aap2011@ukr.net

A. O. Pashko[1], Dr.Sc., prof.,

Meetings with Kozachenko Yu.V.

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: aap2011@ukr.net

Юрій Васильович Козаченко – видатний український математик, мій Вчитель. Ми були знайомі і плідно працювали більш як 40 років. Професор Козаченко Ю.В. був одним з лідерів української школи з теорії ймовірностей та математичної статистики, визнаним в світі фахівцем у галузі теорії моделювання випадкових процесів у функціональних просторах, одним із творців теорії субгауссових випадкових процесів та процесів із просторів Орліча. Він створив новий науковий напрямок – моделювання випадкових процесів у різних функціональних просторах із заданою точністю та надійністю. Козаченко Ю.В. отримав вагомі наукові результати у дослідженні аналітичних властивостей випадкових процесів, рівнянь математичної фізики із випадковими початковими умовами, статистиці випадкових процесів, вейвлет-аналізі.

Про найбільш яскраві сторінки нашої співпраці ця публікація.

Ключові слова: субгауссові випадкові процеси, статистичне моделювання, простори Орліча.

Yuriy Kozachenko is an outstanding Ukrainian mathematician, my teacher. We have known each other and worked fruitfully for more than 40 years. Professor Kozachenko Yu.V. was one of the leaders of the Ukrainian school of probability theory and mathematical statistics, a world-renowned expert in the theory of modelling random processes in functional spaces, one of the creators of the theory of sub-Gaussian random processes and processes from Orlich spaces. He created a new scientific direction - simulation of random processes in different functional spaces with a given accuracy and reliability. Kozachenko Yu.V. received significant scientific results in the study of analytical properties of random processes, equations of mathematical physics with random initial conditions, statistics of random processes, wavelet analysis.

This publication is about the brightest pages of our cooperation.

Key Words: subgaussian random processes, statistical modeling, Orlich spaces.

Статтю представила д. ф.-м. н. Розора І.В.

Моя перша зустріч з Юрієм Васильовичем відбулась влітку 1979 року. Йшли вступні іспити на механіко-математичний факультет КДУ імені Т.Г. Шевченка. Щоб вступити достатньо було здати математику письмово і усно на 9 балів. За письмовий іспит я отримав 5 балів. І от математика усно. Екзаменатори – молода жінка в темно синьому платті і високий світлочолий чоловік. Це і був Козаченко Ю.В. Здавав іспит я йому. В білеті два питання і задача. Друге питання і задача – здано, зауважень немає. А от відповідь на перше питання – що таке об'єм кулі, у викладача викликало запитання. Я навів з десяток підходів до обчислення об'єму кулі, але строгого екзаменатора вони не задовольнили. Він запитав про оцінку за письмовий іспит. На мою відповідь «п'ятірка», сказав, щоб я йшов у приймальну комісію і назвав номер кімнати. Скільки він мені поставив Юрій Васильович не сказав. Це у мене викликало тривогу, коли 1 вересня на зустрічі зі студентами першого курсу декан факультету професор С.Т. Завало сказав, що ті студенти, хто здав математику на дві п'ятірки обов'язково отримають стипендію, інших

© Пашко А.О., 2020

буде визначати комісія. Правда, я стипендію також отримав.

В період навчання на факультеті з Козаченком Ю.В. я більше не зустрічався. В нашій групі він нічого не викладав. Зустріч відбулася на 5 курсі. Я звернувся до Михайла Йосиповича Ядренка з проханням писати диплом під його керівництвом. Ядренко М.Й. спочатку погодився. Але через деякий час сказав:

- Ти ж програмуєш, я пам'ятаю твою роботу на госптемі, ти писав хороші програми. Я пропоную тобі звернутись до Козаченка Ю.В., він працює над моделюванням випадкових процесів. У вас може вийти хороша робота.

На третьому-четвертому курсах, впродовж 3-х семестрів я працював на кафедральній темі. Темою від кафедри керував Ю.М. Рижов. Ми писали програми на Фортрані для обчислення функцій щільності та функцій розподілу випадкових величин, статистичного аналізу, побудова генераторів випадкових чисел.

На першій зустрічі з Козаченком Ю.В. я вже мав тему диплому. Правда, з моделюванням вона ще не була пов'язана – властивості випадкових процесів з просторів Орліча. Моделювання з'явилось, коли ми обговорювали тему досліджень в аспірантурі.

В той час Юрій Васильович готував до захисту докторську дисертацію.

Одного разу розповів про пошук свого шляху в математиці. Після захисту кандидатської дисертації (науковий керівник Ядренко М.Й.) були задачі пов'язані з аналітичними властивостями випадкових процесів та полів. Як казав Юрій Васильович – не його. Шукав своє. Коли працював в бібліотеці університету натрапив на статтю Кахана Ж. про субгауссові випадкові величини. З неї все і почалося. Ввів поняття субгауссових випадкових процесів, досліджував властивості траєкторій в просторах Орліча.

Випуск 1984 року був перший випуск, коли без київської прописки не брали на роботу в м. Києві. За рекомендацією Ядренка М.Й. мене розподілили в інститут випробувань машин (ВНДІВМОТ), що знаходився в с. Дослідницьке, недалеко від Києва (70 км). Зараз УкрНДІПВТ імені Л. Погорілого.

Серед задач, які мені запропонували в інституті, були і задачі пов'язані з прискореними випробуваннями сільськогосподарської техніки – оцінка коефіцієнтів прискорення випробувань, моделювання на стендах навантаження на несучі конструкції сільськогосподарських машин, тощо.

В аспірантуру, за порадою Юрія Васильовича, я поступив на заочне відділення.

В інституті я працював у відділі АСУ, перша посада інженер-програміст. Окрім випробувань, було багато задач пов'язаних з обробкою результатів випробувань, з програмуванням, в основному це створення автоматизованих робочих місць спеціалістів.

Там і виникла тема про моделювання випадкових процесів. Елементи алгоритмів, що розроблені в дисертації, були впроваджені при проведенні прискорених випробувань на автоматизованих стендах.

В інституті мене познайомили із звітами 15-річної даності (1970 –і роки). Це звіти про господарські теми між ВНДІВМОТ і КДУ ім. Т.Г. Шевченка (кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики). Серед виконавців тем був і Козаченко Ю.В. Колеги по відділу АСУ показали фото – приїзд науковців кафедри, похід в поле, де відбувалась постановка задачі в явному вигляді. І результат – математичні моделі для проріджувачів цукрових буряків, параметри точного посіву, і статті в журналі «Теорія ймовірностей та математична статистика». І я тепер під керівництвом Ю.В. Козаченка продовжував ці роботи – прискорені випробування проріджувачів, оцінка надійності, розробка програмного забезпечення.

Була ще одна цікава історія. В 1986 році в журналі «Наука і життя» була надрукована стаття Б.В. Гнеденка «Математик виходить в поле». Текст статті мені передав М.Й. Ядренко. Я показав її керівництву відділу АСУ, і написав декілька програм, що реалізували описані в статті задачі.

В січні 1987 року я разом з Ядренком М.Й. був у Москві, в МДУ, на конференції, що присвячена 50 річчю кафедри теорії ймовірностей і 75 – річчю Б.В. Гнеденка. Коли Ядренко М.Й. знайомив Б.В. Гнеденка зі мною, він нагадав Гнеденку Б.В. про його статтю і згадав про мої програми. Це сподобалось Гнеденку Б.В. Він запросив мене на другий день на кафедру і ми декілька годин провели в розмові. Б.В. Гнеденко розпитував про інститут, про задачі, якими я займався, зацікавився моделюванням випадкових процесів при випробуваннях. Я розповів про стенди, які були в інституті, про алгоритми моделювання для різних стендів. Б.В. Гнеденко дав декілька цінних порад і запросив відвідувати кафедру, коли у мене буде час. На прощання підписав книгу.

До чого це. Точно не пам'ятаю, в 1988 чи в 1989 році я був у відрядженні в Москві, і в цей час в Москві був Козаченко Ю.В. (він був опонентом на захисті дисертації одного з учнів Пітербарга В.І.). Головою спецради був Б.В. Гнеденко. З Ю.В. Козаченком ми зустрілись в МДУ, піднялись на кафедру. Нас зустрів Б.В. Гнеденко. Було дуже приємно, що Б.В. Гнеденко мене впізнав. Козаченка Ю.В. він знав. Дізнавшись, що Юрій Васильович мій науковий керівник, Б.В. Гнеденко поцікавився нашими справами, побажав успіху, висловив свою підтримку.

В той період я часто бував у відрядженні в Москві, заходив в МДУ, але більше з Б.В. Гнеденком я не зустрічався.

В 1988 році я підготував дисертацію і мав представити її на спеціалізованій раді. Відкритим було питання про опонентів. Серед можливих кандидатів в опоненти був Хобзей П.К. В той час він працював у Львові, в інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача (ІППММ). Другого опонента запропонував Козаченко Ю.В. – це був професор В.В. Анісімов. Михайло Йосипович підтримав кандидатури і спецрада затвердила їх офіційними опонентами, провідною організацією обрали обчислювальний центр сибірського відділення АН СРСР (м. Новосибірськ). Захист було заплановано на червень-вересень 1989 року.

В травні 1989 року я поїхав до Львова, де мав виступити на семінарі в інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача. Виступ відбувся 22 травня, після завершення семінару я разом з Хобзеєм П.К. і ще групою друзів пішов на проспект Свободи, де відбувався мітинг присвячений відкриттю пам'ятного знаку. Пам'ятний знак на честь побудови пам'ятника Т.Г. Шевченку (пам'ятник мали виготовити в Аргентині, його відкриття відбулось 24 серпня 1992 року). Мітинг розігнала міліція. Ми попали під міліцейські кийки. Тільки добре знання центру Львова врятувало нас від серйозних наслідків.

Захист було призначено на 11 вересня 1989 року.

А в червні Юрій Васильович оголосив, що написав заяву про вихід з рядів КПРС. Це був поступок чесної і сміливої людини. У мене пробігли мурашки по спині.

- Не хвилюйся, - сказав мій вчитель, - це не вплине на твій захист.

У вересні прикладу Юрія Васильовича послідувало багато викладачів факультету. Але саме Юрій Васильович був першим.

Так склалось, що 8-10 вересня в Києві відбувся установчий з'їзд народного руху. Хобзей П.К. був членом делегації Львівської області на цьому з'їзді.

В понеділок відбувся захист. Банкети після захисту були заборонені, і ми в тісному колі зібрались на квартирі родичів. Перші дві-три години нашої зустрічі ми слухали розповідь Хобзея П.К. про з'їзд і записи основних виступів на з'їзді, потім їх обговорювали. Козаченко Ю.В. брав активну участь у обговоренні, висловлював свої передбачення. Найбільший інтерес визвала доповідь Л.М. Кравчука. Роз'їхались далеко за північ.

В січні 1990 року я отримав підтвердження з Москви.

В подальшому наші зустрічі носили робочий характер. Обговорювали шляхи моїх подальших досліджень, спільні статті. В 1992 році я вперше виступив в якості офіційного опонента на захисті однієї з дисертацій учнів

Юрія Васильовича Козаченка. З того часу я багато разів був опонентом на захистах його учнів.

Г. Сливка була першою ластівкою з Ужгородського університету, потім була А. Тегза. Так формувалась ужгородська школа Юрія Васильовича.

В 1997 році за підтримки Юрія Васильовича вступив до докторантури КНУ імені Тараса Шевченка.

Але плідної співпраці не вийшло. Я поміняв місце роботи і докторську дисертацію захистив лише в 2015 році.

Пам'ятаю 2000 рік, Козаченку Ю.В. 60 років. Святкували на факультеті. Юрій Васильович був ровесником механіко-математичного факультету. До дня факультету (13 грудня) була випущена ювілейна медаль. Він першим її отримав.

Запам'яталась поведінка мами Юрія Васильовича. Вона прийшла в супроводі Людмили Федорівни, дружини Юрія Васильовича, сіла на призначене для неї місце, дістала із сумочки дзеркало, подивилась в нього, спитала – як я виглядаю?

Коли отримала позитивну відповідь, почала розпитувати про гостей. Леді!

В 2008 році ми мали їхати з Юрієм Васильовичем до Умані, де проходила конференція пам'яті Гіхмана І.І. (90 років від дня народження) і відкривався пам'ятний знак. Ми вже сіли в маршрутку, коли зателефонували Юрію Васильовичу – померла мама. До Умані він не поїхав.

Пам'ятаю нашу поїздку до Львова осінню 2000 року, на конференцію присвячену 70-річчю академіка Скорохода А.В.

Ми разом відвідали львівську оперу, декілька музеїв. Юрій Васильович багато розповідав, він цікавився живописом, скульптурою. З багатьма митцями він був знайомий особисто. Він любив образотворче мистецтво, розумівся на картинах, скульптурі, літературі.

Юрій Васильович цікавився і цінував творчість Іоана Георга Пінзеля. У 1759-61 роках, для оздоблення собору Святого Юра у Львові І.Г. Пінзель виконує монументальні статуї святих Атанасія, Леона, кінну статую святого Юра. До нашого часу вціліли фігури святих Миколая, Августина, Домініка, виконані Пінзелем. Пінзель виконав статую Матері Божої з дитятком в орторіумі кляшторному за великим вівтарем у соборі Святого Юра. Про все це розповідав Юрій Васильович, коли ми відвідали Національний музей. А потім і сам собор Святого Юра.

У Львові плідно працював С. Банах, ми відвідали будинок № 27 на проспекті Шевченка, де колись містилася «Шотландська кав'ярня» (*Kawiarnia Szkocka*), де збиралися львівські математики на чолі з Стефаном Банахом.

Юрій Васильович добре знав історію української літератури. Його розповіді сильно вплинули на мої погляди на українську літературу. Я зацікавився творами Пантелеймона Куліша, Івана Нечуй-Левицького.

Свого часу Юрій Васильович розповів історію Григора Тютюнника та Віктора Близнеця. Так, я заново пізнавав українську літературу.

Початок 2000 –х років був плідний в роботі Юрія Васильовича, формувалась ужгородська школа. Разом з Булдигіним В.В. він керував науковим семінаром з теорії випадкових процесів у НТТУ «КПІ імені Ігоря Сікорського».

Цей період – це окрема сторінка в науковій біографії Козаченка Ю.В.

Вдячний долі що звела мене з Козаченком Ю.В., людиною, що зіграла велику роль в моєму житті.

Вічна пам'ять.

Надійшла до редколегії 28.09.20

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 519.21
https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/3.4

В. Ю. Богданський[1], *аспірант*
О. І. Клесов[2], *д. ф. м. н., професор*

Рівномірний підсилений закон великих чисел без припущень стосовно класу множин

[1]Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", проспект Перемоги, 37, 03056, м. Київ
e-mail: myemailaddress4567@gmail.com

[2]Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", проспект Перемоги, 37, 03056, м. Київ
e-mail: klesov@matan.kpi.ua

V. Yu. Bogdanskii[1], *Ph. D. Student*
O. I. Klesov[2], *Professor*

The uniform strong law of large numbers without any assumption on a family of sets

[1]National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Peremogy Avenue, 37, 03056 Kyiv, Ukraine
e-mail: myemailaddress4567@gmail.com

[2]National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Peremogy Avenue, 03056 37, Kyiv, Ukraine
e-mail: klesov@matan.kpi.ua

Ми вивчаємо суми однаково розподілених випадкових величин, індекси яких належать множинам з певної сім'ї $\mathcal{A}$ в $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$. Для таких сум доведено так звану рівномірну у класі множин теорему про підсилений закон великих чисел без жодного обмеження на $\mathcal{A}$ у випадку попарно незалежних випадкових величин зі скінченим математичним сподіванням. Відома теорема Басса–Пайка є аналогом отриманого результату, в якій використовується певне додаткове обмеження на границі множин, а також припущення про незалежність у сукупності відповідних випадкових величин. За рахунок цих додаткових припущень результат Басса–Пайка є більш точним, але результат, отриманий у цій роботі, справджується для більш широкого класу випадкових величин та сім'ї $\mathcal{A}$. В роботі також показано, що запропонований підхід є оптимальним для інших нормувань, які задовольняють умову Мартікайнена–Петрова. Ми наводимо також низку прикладів та контрприкладів, які пояснюють суть умови Басса–Пайка стосовно сім'ї $\mathcal{A}$. Наведено зв'язок отриманого результату та підсиленого закону великих чисел для підпослідовностей.

Ключові слова: суми випадкових величин, рівномірні у класі множин граничні теореми, підсилений закон великих чисел.

We study the sums of identically distributed random variables whose indices belong to certain sets of a given family $\mathcal{A}$ in $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$. We prove that sums over scaling sets $S(kA)$ possess a kind of the uniform in $\mathcal{A}$ strong law of large numbers without any assumption on the class $\mathcal{A}$ in the case of pairwise independent random variables with finite mean. The well known theorem due to R. Bass and R. Pyke is a counterpart of our result proved under a certain extra metric assumption on the boundaries of the sets of $\mathcal{A}$ and with an additional assumption that the underlying random variables are mutually independent. These assumptions allow to obtain a slightly better result than in our case. As shown in the paper, the approach proposed here is optimal for a wide class of other normalization sequences satisfying the Martikainen–Petrov condition and other families $\mathcal{A}$. In a number of examples we discuss the necessity of the Bass–Pyke conditions. We also provide a relationship between the uniform strong law of large numbers and the one for subsequences.

Key Words: sums of random variables, uniform in a family of sets limit results, strong law of large numbers.

Статтю представив д.ф.-м.н. Моклячук М.П.

© В. Ю. Богданський, О. І. Клесов, 2020

1 Вступ

В роботі [1] С. Чатерджі сформулював наступне емпіричне правило: *якщо певна асимптотична властивість справджується для будь-якої послідовності незалежних однаково розподілених випадкових величин зі скінченим математичним сподіванням, то з будь-якої послідовності випадкових величин* (X_n) *(як завгодно залежних), для яких*

$$\sup_{n\geqslant 1} \mathsf{E}\,|X_n| < \infty$$

можна вибрати таку підпослідовність (X_{n_k})*, що зазначена властивість виконується для підпослідовності* (X_{n_k}).

Це правило пізніше отримало назву *принципу підпослідовностей* й було підтверджено різними авторами для багатьох граничних теорем теорії ймовірностей, включно з підсиленим законом великих чисел [2], центральною граничною теоремою [3], законом повторного логарифму [4] тощо.

Подібний універсальний закон Чатерджі привернув значну увагу до вивчення граничних закономірностей у теорії ймовірностей, які виконуються для підпослідовностей. Наприклад, так звана *повна збіжність* для підпослідовностей досліджувалась у роботі [5], а умови для скінченості

$$\mathsf{E} \sup_{k\geqslant 1} \left| \frac{S_{n_k}}{n_k} \right|$$

для сум незалежних однаково розподілених випадкових величин — в [6].

В цій роботі ми розглядаємо більш загальну постановку, частковим випадком якої є підсилений закон великих чисел для сум незалежних однаково розподілених величин для підпослідовностей. Для такої постановки ми доводимо так звану теорему Марцинкевича–Зігмунда.

Роботу побудовано наступним чином. В розділі 2 ми наводимо кілька загальних прикладів та означень, які пояснюють постановку задачі про рівномірні у класі множин граничні теореми та її зв'язок з граничними теоремами для підпослідовностей. Основні результати роботи (теореми 2 та 3) та їх доведення наведено у розділі 3. У розділі 4 наведено кілька прикладів та контрприкладів, які пояснюють необхідність умов, за яких виконується основний результат. У розділі 5 ми коротко обговорюємо можливі узагальнення отриманого результату.

2 Мотивація

Існує кілька пояснень мотивації авторів вивчати рівномірні у класі множин граничні теореми теорії ймовірностей (див. [7]–[8], а також [9]–[10]). Нижче ми наводимо ще одне пояснення, яке виявляє тісний зв'язок між нашою задачею та граничними теоремами для підпослідовностей. Спочатку ми обговоримо кілька загальних прикладів, які допомагають краще зрозуміти постановку задачі, яка вивчається в цій роботі.

Нехай $d \geqslant 1$, а $A \subset \mathbb{R}^d$. Позначимо через tA — масштабовану множину,

$$tA = \{t\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in A\}.$$

Тут і всюди нижче в цій роботі під $t\boldsymbol{x}$ ми розуміємо вектор $(tx_1, \ldots, tx_d)$ для $t \in \mathbb{R}$ та $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$.

Означення 1. З кожною підмножиною $A \subset \mathbb{N}$ пов'яжемо набір підмножин

$$s(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{kA \cap \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}\}.$$

У подальшому через $\overline{1,k}$ ми позначаємо відрізок $\{1, \ldots, k\}$ ряду натуральних чисел, $\overline{1,k} = \{1, \ldots, k\}$.

Приклад 1. Нехай $d = 1$ та $A = (0, 1]$. Тоді $s(A)$ складається з відрізків $\overline{1,k}$, $k \in \mathbb{N}$. З іншого боку, якщо $A = (0, 2]$, то $s(A)$ складається з відрізків $\overline{1,(2k)}$, $k \in \mathbb{N}$.

В кожному з цих випадків, ми можемо записати

$$s(A) = \{\overline{1,n_k},\ k \in \mathbb{N}\} \tag{1}$$

для відповідної підпослідовності (n_k).

Приклад 2. Варто відзначити, що не для довільної підпослідовності (n_k) існує інтервал виду $A = (0, a)$ або $A = (0, a]$, для якого виконується (1). Наприклад, саме такою є підпослідовність, першими членами якої є $n_1 = 2$, $n_2 = 4$, $n_3 = 7$. З іншого боку, співвідношення (1) для такої підпослідовності виконується для $A = (0, 2] \cup \left\{\frac{7}{3}\right\}$.

Означення 2. Нехай $d \geqslant 1$, а $\mathcal{A}$ — довільна сім'я підмножин з $\mathbb{R}^d$. З сім'єю $\mathcal{A}$ пов'яжемо набір підмножин

$$s(\mathcal{A}) = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} s(A). \tag{2}$$

Зрозуміло, що $s(\mathcal{A})$ може містити набагато більше різноманітних множин, ніж у випадках, розглянутих у прикладах1–2.

2.1 Суми випадкових величин у множинах та класичні граничні теореми

Розглянемо сім'ю однаково розподілених випадкових величин $\{X(\boldsymbol{n})\}$, індексованих елементами цілочисельної решітки $\mathbb{N}^d$,

$$\mathbb{N}^d = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d),\ x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{N}\}.$$

Ми будемо вивчати суми вигляду

$$S(A) = \sum_{\boldsymbol{j} \in A} X(\boldsymbol{j}).$$

Приклад 3. Нехай $d = 1$, а множина A така ж, як і у прикладі 1. Тоді $S(kA)$, $k \in \mathbb{N}$, — це звичайні часткові суми випадкових величин, які у класичних граничних теоремах теорії ймовірностей позначаються S_t, $t \in \mathbb{N}$. В рамках такого підходу підсилений закон великих чисел у випадку незалежних випадкових величин з скінченим математичним сподіванням $\mu = \mathsf{E}\, X_1$ можна записати наступним чином

$$\lim_{k\to\infty} \frac{S(kA)}{k} = \mu \qquad \text{майже напевно.} \tag{3}$$

Як ми бачили у прикладах 1 та 2, підсилений закон великих чисел

$$\lim_{k\to\infty} \frac{S_{n_k}}{n_k} = \mu \qquad \text{майже напевно}$$

можна записати аналогічно для певного класу підпослідовностей (n_k).

Зважаючи на означення 2, у роботі [11] поставлено питання про знаходження умов для виконання рівномірного у класі підмножин $\mathbb{R}^d$ підсиленого закону великих чисел, а саме для

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{S(nA)}{n^d} - \mu\,|A| \right| = 0 \qquad \text{майже напевно,} \tag{4}$$

де $|A|$ — це міра Лебега множини A.

2.2 Рівномірний у класі множин підсилений закон великих чисел

Для будь-якої підмножини $A \subset \mathbb{R}^d$ позначимо через ∂A — межу множини A, а через $A(\delta)$ — δ-окіл множини A,

$$A(\delta) \stackrel{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \rho(\boldsymbol{x}, \partial A) < \delta\},$$

де ρ — евклідова відстань в $\mathbb{R}^d$.

Нехай $\mathcal{A}$ — довільний клас підмножин з $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{A : A \in \mathbb{R}^d\}$. Позначимо

$$r(\delta) = \sup_{A\in\mathcal{A}} |A(\delta)|\,.$$

Слідуючи роботі [11], у подальшому будемо припускати, що виконано умову

$$\lim_{\delta\to 0} r(\delta) = 0. \tag{5}$$

Теорема 1 (Басс, Пайк [11])**.** *Нехай $\{X(\boldsymbol{n})\}$ незалежні однаково розподілені випадкові величини, індексовані елементами цілочисельної решітки $\mathbb{N}^d$, $d \geqslant 1$, які мають скінчене математичне сподівання μ.*

Нехай $\mathcal{A}$ — довільний клас вимірних підмножин з $[0,1]^d$.

Якщо виконано умову (5)*, то виконано рівномірний відносно сім'ї $\mathcal{A}$ підсилений закон великих чисел* (4)*.*

Теорему 1 узагальнено у роботах [7], [8], [9]–[10] на випадок випадкових мір замість $S(nA)$.

Зауваження 1. *В теоремі* 1 *можна дозволити різну швидкість зростання множини A для різних координат, замінивши операцію n A на $\boldsymbol{n} \cdot A$, $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^d$, де $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x}$ для $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^d$ та $x \in \mathbb{R}^d$ означає вектор з координатами*

$$(n_1 x_1, \ldots, n_d x_d).$$

В такому випадку замість теореми Колмогорова про підсилений закон великих чисел для звичайних сум необхідно використати підсилений закон великих чисел Смайза для кратних сум (див. [12]). При цьому до умови існування математичного сподівання треба додати умову існування моменту $\mathsf{E}\,|X(\boldsymbol{n})| \left(\log^+ |X(\boldsymbol{n})|\right)^{d-1}$.

3 Основні результати

Теорема 2. *Нехай $\{X(\boldsymbol{k})\}$ попарно незалежні однаково розподілені випадкові величини, індексовані елементами цілочисельної решітки $\mathbb{N}^d$, $d \geqslant 1$, які мають скінчене математичне сподівання. Нехай $\mathcal{A}$ — довільний клас підмножин з $\mathbb{R}^d$. Тоді*

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{A\in\mathcal{A}} \left| \frac{S(nA)}{n^d} \right| \leqslant \varkappa \qquad \textit{майже напевно,} \tag{6}$$

де

$$\varkappa = \mathsf{E}\,|X|,$$

а X — це копія $X(\boldsymbol{k})$.

Зауваження 2. *На відміну від теореми* 1, *де випадкові величини є незалежними у сукупності, твердження теореми* 2 *виконується для попарно незалежних випадкових величин.*

Зауваження 3. *Ще однією відмінністю теореми* 2 *від теореми* 1 *є відсутність жодного обмеження на сім'ю* $\mathcal{A}$. *Платою за таке узагальнення є менш інформативний результат* (6) *замість* (4).

У наступному результаті ми розглядаємо рівномірний підсилений закон великих чисел для інших нормалізуючих послідовностей. Відзначимо, що нормування, яке використовується в теоремі 2, не задовольняє умові (8) у теоремі 3.

Теорема 3. *Нехай* $\{X(\boldsymbol{k})\}$ *однаково розподілені випадкові величини, індексовані елементами цілочисельної решітки* $\mathbb{N}^d$, $d \geqslant 1$. *Нехай* $\mathcal{A}$ *— довільний клас підмножин з* $\mathbb{R}^d$. *Нехай* $\{a_n\}$ *— неспадна послідовність додатних чисел, для якої*

$$\frac{n}{a_n} \to 0, \qquad n \to \infty, \tag{7}$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{a_k} = O\left(\frac{n}{a_n}\right). \tag{8}$$

Якщо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\left(|X_1| \geqslant a_n\right) < \infty, \tag{9}$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{A\in\mathcal{A}} \left|\frac{S(nA)}{a_n}\right| = 0 \qquad \textit{майже напевно.} \tag{10}$$

Зауваження 4. *На перший погляд може здатися, що з огляду на умову* (7), *підсилений закон великих чисел* (10) *є наслідком* (4). *Проте це не так навіть у випадку незалежних у сукупності випадкових величин* $X(\boldsymbol{k})$, *оскільки умова* (9) *є менш обмежливою, ніж умова існування першого моменту, яка є необхідною для теореми* 1. *Для підтвердження цього висновку ми наводимо один з можливих наслідків теореми* (3) *для* $a_n = n^{d/p}$, $0 < p < 1$, *у якому використовується моментна умова* (11) *замість існування першого моменту.*

Наслідок 1. *Нехай* $\{X(\boldsymbol{k})\}$ *однаково розподілені випадкові величини, індексовані елементами цілочисельної решітки* $\mathbb{N}^d$, $d \geqslant 1$. *Нехай* $\mathcal{A}$ *— довільний клас підмножин з* $\mathbb{R}^d$. *Якщо* $0 < p < 1$ *та додатково виконано умову*

$$\mathsf{E}\,|X|^{1/p} < \infty, \tag{11}$$

де X *— це копія* $X(\boldsymbol{k})$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{A\in\mathcal{A}} \left|\frac{S(nA)}{n^{d/p}}\right| = 0 \qquad \textit{майже напевно.} \tag{12}$$

Зауваження 5. *Умова* (8) *є аналогом відомої умови Феллера для підсиленого закону великих чисел*

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{a_k^2} = O\left(\frac{n}{a_n^2}\right).$$

Вперше умова (8) *з'явилась у роботі* [13]. *Нижче ми наводимо відповідний результат з* [13] (*див. теорему* 4). *Зауважимо також, що умова* (9) *є необхідною для підсиленого закону великих чисел.*

3.1 Доведення

3.1.1 Доведення теореми 2

Нехай $\boldsymbol{I} = [0,1]^d$. Зрозуміло, що

$$|S(nA)| \leqslant \sum_{\boldsymbol{j}\in n\boldsymbol{I}} |X(\boldsymbol{j})| \tag{13}$$

для будь-якого $A \subset \boldsymbol{I}$. З підсиленого закону великих чисел Етемаді [15] випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^d} \sum_{\boldsymbol{j}\in n\boldsymbol{I}} |X(\boldsymbol{j})| = \varkappa \qquad \text{майже напевно.}$$

Поєднуючи ці два результати, отримуємо (6).

3.1.2 Доведення теореми 3

Підсилений закон великих чисел (10) випливає з нерівності (13) та

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_{n^d}} \sum_{\boldsymbol{j}\in n\boldsymbol{I}} |X(\boldsymbol{j})| = 0 \qquad \text{майже напевно,}$$

що є наслідком теореми 4.

3.2 ПЗВЧ для сум однаково розподілених випадкових величин

Для зручності наведемо необхідне у доведенні теореми 3 твердження про підсилений закон великих чисел. На відміну від підсиленого закону великих чисел Колмогорова цей результат справджується без припущення про незалежність випадкових величин.

Теорема 4 (Мартікайнен, Петров [13]). *Нехай $\{X_n\}$ — послідовність однаково розподілених випадкових величин. Нехай $\{a_n\}$ — неспадна послідовність додатних чисел, для якої виконана умова* (8). *Якщо додатково виконано умову* (9), *то*

$$\frac{S_n}{a_n} \to 0 \qquad \text{майже напевно}, \tag{14}$$

де $S_1 = X_1$,

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n, \qquad n \geqslant 2.$$

4 Приклади та контрприклади

Для $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_d)$, $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d)$, $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^d$, позначатимемо

$$|\boldsymbol{t}| = \prod_{i=1}^{d} t_i, \qquad [\boldsymbol{t}, \boldsymbol{s}] = [t_1, s_1] \times \ldots \times [t_d, s_d],$$
$$\boldsymbol{t} + \boldsymbol{s} = (t_1 + s_1, \ldots, t_d + s_d).$$

Для $A \subset \mathbb{R}^d$ і $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^d_+$ позначимо $\boldsymbol{t} \cdot A = \{(t_1 x_1, \ldots, t_d x_d) : \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in A\}$.

Покладемо також $I = (\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, де $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$, $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$.

Для $m \geqslant 1$ і $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^d$ позначимо

$$C_m(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{m}(\boldsymbol{k} - \mathbf{1}, \boldsymbol{k}].$$

Крім того, нехай

$$A'_m = \bigcup_{C_m(\boldsymbol{k}) \subseteq A} C_m(\boldsymbol{k}),$$
$$A''_m = \bigcup_{C_m(\boldsymbol{k}) \cap A \neq \varnothing} C_m(\boldsymbol{k})$$

для $A \subset \mathbb{R}^d$.

У статті [10] доводиться наступне твердження:

Теорема 5 (Клесов, Молчанов [10]). *Нехай ξ — випадковий заряд, визначений на обмежених борелевських підмножинах $\mathbb{R}^d_+$, такий, що для кожної обмеженої борелевської множини A існує $\mathsf{E}\,|\xi(A)|$.*

Нехай $\mathcal{A}$ — деяка сукупність борелевських підмножин I.

Припустимо, що виконуються дві умови:

(Z1) Майже напевно виконується

$$\lim_{|\boldsymbol{t}| \to \infty} \frac{\xi(\boldsymbol{t} \cdot I) - \mathsf{E}\,[\xi(\boldsymbol{t} \cdot I)]}{|\boldsymbol{t}|} = 0 \tag{15}$$

(Z2) Існує така випадкова міра η, що $\eta(A) \geqslant |\xi(A)|$ для кожної обмеженої борелевської множини A, і виконується

$$\lim_{|\boldsymbol{t}| \to \infty} \frac{\eta(\boldsymbol{t} \cdot I) - \mathsf{E}\,[\eta(\boldsymbol{t} \cdot I)]}{|\boldsymbol{t}|} = 0 \qquad \text{м. н.}, \tag{16}$$

$$\lim_{m \to \infty} \limsup_{|\boldsymbol{t}| \to \infty} \sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \frac{\mathsf{E}\,[\eta(\boldsymbol{t} \cdot (A''_m \setminus A'_m))]}{|\boldsymbol{t}|} \right| = 0. \tag{17}$$

Тоді

(Z3) Майже напевно виконується

$$\lim_{|\boldsymbol{t}| \to \infty} \sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \frac{\xi(\boldsymbol{t} \cdot A) - \mathsf{E}\,[\xi(\boldsymbol{t} \cdot A)]}{|\boldsymbol{t}|} \right| = 0. \tag{18}$$

Стосовно теореми 5 виникає питання: для яких $d \in \mathbb{N}$ і $\mathcal{A}$ умова (Z2) не є суттєвою, тобто у якому випадку для кожного випадкового заряду ξ, що задовольняє (Z1), виконується також (Z3)?

Нехай α — заряд, заданий на обмежених борелевських підмножинах $\mathbb{R}^d_+$. Позначимо:

(Z4)

$$\lim_{|\boldsymbol{t}| \to \infty} \frac{\alpha(\boldsymbol{t}I)}{|\boldsymbol{t}|} = 0, \tag{19}$$

(Z5)

$$\lim_{|\boldsymbol{t}| \to \infty} \sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \frac{\alpha(\boldsymbol{t}A)}{|\boldsymbol{t}|} \right| = 0. \tag{20}$$

Тоді для $d \in \mathbb{N}$ і $\mathcal{A}$ твердження

$$\forall\, \xi : (Z1) \Rightarrow (Z3)$$

є рівносильним твердженню

$$\forall\, \alpha : \ (Z4) \Rightarrow (Z5).$$

Дійсно, нехай існує заряд α, для якого виконується (Z4), але не виконується (Z5). Візьмемо $\Omega = \{0, 1\}$, $\mathsf{P}\,(\{0\}) = \mathsf{P}\,(\{1\}) = \frac{1}{2}$, $\xi = \alpha$ при $\omega = 0$, $\xi = -\alpha$ при $\omega = 1$. Тоді ξ є випадковим

зарядом, $E[\xi] = 0$, і для ξ буде виконуватись (Z1), але не (Z3).

Нехай існує ξ, для якого виконується (Z1), але не (Z3). Тоді $\exists\, \omega \in \Omega$, для якого виконується (15), але не (18). Візьмемо $\alpha = \xi(\omega) - \mathsf{E}[\xi]$. Тоді α — це заряд, і для нього виконується (Z4), але не (Z5).

Наведемо три приклади: в одному з них умова (Z2) є зайвою, а у інших двох вона є необхідною.

Приклад 1. *$d = 1$, $\mathcal{A}$ - множина всіх об'єднань скінченної кількості відкритих зліва півінтервалів, що належать I. Тоді умова (Z2) є необхідною.*

Доведення: Покладемо в непарні натуральні числа заряд 1, а в парні натуральні числа заряд (-1) (відповідно, $\alpha(A)$ — це кількість непарних натуральних точок, які належать A, мінус кількість парних натуральних точок, які належать A).

Для цього $\alpha(A)$ виконується (Z4), але не виконується (Z5), оскільки $\sup_{A\in\mathcal{A}} |\alpha(tA)| \geqslant \dfrac{|t|-1}{2}$ (ми обираємо таке $A \in \mathcal{A}$, щоб tA з цілих точок від 1 до $[t]$ містило непарні і тільки непарні).

Приклад 2. *$d = 1$, $\mathcal{A}$ - множина всіх відкритих зліва півінтервалів, що належать I. Тоді умова (Z2) є зайвою.*

Доведення: Позначимо $f(x) = \alpha((0, x])$. Тоді (Z4) рівносильно $\dfrac{|f(x)|}{x} \to 0, x \to \infty$. Візьмемо $N, M > 0$ так, щоб $M > |f(x)|, \forall\, x \leqslant N$; $x > |f(x)|, \forall\, x \geqslant N$.

Позначимо через $\mathcal{D}$ множину $\{(0, x], x \in I\}$. Оскільки $\forall\, A \in \mathcal{A}\ \ \exists\, D_1, D_2 \in \mathcal{D} : A = D_1 \setminus D_2$, то

$$\begin{aligned}\sup_{A\in\mathcal{A}}\left|\frac{\alpha(tA)}{t}\right| &\leqslant 2\sup_{D\in\mathcal{D}}\left|\frac{\alpha(tD)}{t}\right| = 2\sup_{0<x\leqslant t}\frac{|f(x)|}{t}\\ &\leqslant 2\sup_{0<x\leqslant\sqrt{t}}\frac{|f(x)|}{t} + 2\sup_{\sqrt{t}<x\leqslant t}\frac{|f(x)|}{t}\\ &\leqslant \frac{2\max\{\sqrt{t}, M\}}{t} + 2\sup_{\sqrt{t}<x\leqslant t}\frac{|f(x)|}{x}\\ &\to 0, \qquad t\to\infty.\end{aligned}$$

Отже, для α виконується (Z5).

Приклад 3. *$d = 2$, $\mathcal{A} = \{A_n\}$, где $A_n = \left(\mathbf{0}, \left(\dfrac{1}{n}, 1\right)\right]$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді умова (Z2) є необхідною.*

Доведення: Задамо функцію g наступним чином: $g\left(n, \dfrac{1}{n}\right) = n$, $g\left(n+1, \dfrac{1}{n}\right) = (-2n-1)$, $g\left(n+2, \dfrac{1}{n}\right) = n+1$, $n \in \mathbb{N}$. Позначимо через V множину точок, на яких g задана. Нехай $\alpha(A) = \sum_{x\in V\bigcap A} g(x)$.

Покажемо, що для цього заряду α виконується (Z4) і не виконується (Z5).

Так як $\alpha(\mathbf{t}_n A_n) = \alpha((\mathbf{0}, (n^2, \frac{1}{n^2})]) = g\left(n^2, \dfrac{1}{n^2}\right) = n^2$, (Z5) не виконується, оскільки при $\mathbf{t}_n = (n^3, \frac{1}{n^2})$ $|\mathbf{t}_n| = n \to \infty$, $n \to \infty$, і

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sup_{A\in\mathcal{A}}\left|\frac{\alpha(\mathbf{t}_n A)}{|\mathbf{t}_n|}\right| &= \lim_{n\to\infty}\sup_{m\in\mathbb{N}}\left|\frac{\alpha(\mathbf{t}_n A_m)}{|\mathbf{t}_n|}\right|\\ &\geqslant \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\mathbf{t}_n A_n)}{|\mathbf{t}_n|}\right|\\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2}{n}\right| = +\infty.\end{aligned}$$

Доведемо, що (Z4) виконується. Достатньо довести, що $\alpha(\mathbf{t}I)$ обмежена на $\{|\mathbf{t}| \geqslant 3\}$. Оскільки $\{\mathbf{t} = (x, y)\,|\,x < 3\}$ містить всього 3 точки з V, то достатньо довести, що якщо $|\mathbf{t}| = xy \geqslant 3$ і $x \geqslant 3$, то $\alpha(\mathbf{t}I) = 0$.

Нехай $m = [x] \geqslant 3$, $xy \geqslant 3$, s — мінімальне натуральне число, для якого виконується $\frac{1}{s} \leqslant y$. Тоді $\alpha(\mathbf{t}I) = \alpha((m, \frac{1}{s})I)$, причому $s \leqslant m-1$ (інакше $s \geqslant m$ і $\dfrac{3s-3}{s-1} \geqslant \dfrac{m+1}{s-1} > xy \geqslant 3$, протиріччя). Отже,

$$\begin{aligned}\alpha(\mathbf{t}I) = \alpha((m, \frac{1}{s})I) &= g_{m,m} + g_{m,m-1} + g_{m-1,m-1}\\ &\quad + \sum_{k=s}^{m-2}(g_{k,k} + g_{k+1,k} + g_{k+2,k}) = 0,\end{aligned}$$

де $g_{i,j} = g\left(i, \frac{1}{j}\right)$.

Позначимо через $\mathcal{C}$ сукупність множин $\left(0, \dfrac{\boldsymbol{j}}{m}\right] \subset I$, де $\boldsymbol{j} \in \mathbb{N}^d$, $m \in \mathbb{N}$.

Як і вище, через $|A|$ позначатимемо міру Лебега множини $A \subset \mathbb{R}^d$.

У статті [8] доводиться наступне твердження:

Теорема 6 (Богданський, Клесов [8]). *Нехай ξ і $\mathcal{A}$ є такими ж, як і в теоремі 5, причому $\mathcal{A}$ задовольняє умову* (5).

Припустимо, що додатково виконуються дві умови:

(Z6) Існує випадкова величина μ, така, що майже напевно $\forall\, B \in \mathcal{C}$ виконується

$$\frac{\xi(nB)}{n^d} \to \mu \cdot |B|, \qquad n \to \infty. \tag{21}$$

(Z7) Існує випадкова міра η, визначена на обмежених борелевських підмножинах $\mathbb{R}_+^d$, така, що $\eta(A) \geqslant |\xi(A)|$ для кожної обмеженої борелевської множини A, і випадкова величина λ, така, що майже напевно $\forall\, B \in \mathcal{C}$ виконується

$$\frac{\eta(nB)}{n^d} \to \lambda \cdot |B|, \qquad n \to \infty. \tag{22}$$

Тоді

(Z8) Майже напевно виконується

$$\sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \frac{\xi(nA)}{n^d} - \mu|A| \right| \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{23}$$

Чи є умова (Z7) необхідною для теореми 6?

Приклад 4. *Контрприклад, що показує необхідність умови* (Z7).

Нехай $d = 1$, $\mu \equiv 1$, $\mathcal{A} = \left\{ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \right\}$, ξ не залежить від ω. Задамо невипадковий заряд ξ наступним чином:

$D_k = \left\{ \frac{n}{k} \right\}_{n \geqslant 1}$;

$A_n = \left(\frac{n}{\sqrt{2}} - a_n, \frac{n}{\sqrt{2}} + a_n \right)$, де $a_n > 0$ підібрані так, щоб $\forall\, m \leqslant n$ множини A_n і D_m не перетинались;

$A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Помітимо, що $\forall\, m \in \mathbb{N}$ множини A і D_m мають лише скінченну кількість спільних точок.

Покладемо $h(x) = 1$, якщо $x \notin A$; $h\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right) = 2$, $n \in \mathbb{N}$; функція h є лінійною на $\left(\frac{n}{\sqrt{2}} - a_n, \frac{n}{\sqrt{2}} \right)$ і $\left(\frac{n}{\sqrt{2}}, \frac{n}{\sqrt{2}} + a_n \right)$.

Покладемо $f(x) = xh(x)$; тоді f — неперервна функція $[0, +\infty) \to \mathbb{R}$ з $f(0) = 0$, і існує заряд ξ, такий, що $\xi((0, x]) = f(x), \forall\, x > 0$.

Для цього ξ (Z6) виконується, а (Z8) не виконується.

5 Заключні зауваження

Зважаючи на принцип підпослідовностей Чатерджі та зв'язок між граничними теоремами для підпослідовностей та для $S(nA)$, можна поставити задачу про рівномірну у класі множин швидкість збіжності випадкових рядів.

Припустимо, що ряд $\sum X_n$ збігається майже напевно. Його хвіст позначимо через

$$\zeta_n = \sum_{k \geqslant n} X_k.$$

Якщо невипадкова послідовність (b_n) спадає до нуля, $b_n \to 0$, причому

$$\frac{\zeta_n}{b_n} \to 0 \qquad \text{майже напевно,}$$

то швидкість збіжності ряду $\sum X_n$ можна охарактеризувати як $o(b_n)$. Питання швидкості збіжності для нерівномірної постановки вивчалось в [16]–[17]. Наскільки відомо авторам, це питання для рівномірної постановки ще не досліджено.

Схожу задачу можна поставити й для граничних теорем для процесів відновлення. Таку задачу розглянуто в [8], але її можна узагальнити з використанням загальних методів дослідження асимптотичних квазі-обернених функцій (див. [18]–[19]).

Список використаних джерел

1. *Chatterji, S. D.* Un principe de sous-suites dans la théorie des probabilités / S. D. Chatterji — Séminaire de Probabilités VI Université de Strasbourg. — (ed. N. Bourbaki). — Springer, Berlin. — (1972). — pp. 72–89. Режим доступу до журн.: https://www.springer.com/gp/book/9783540057734

2. *Komlós, J.* A generalization of a problem of Steinhaus / J. Komlós — Acta Math. Hungar. — 18. — (1967). — pp. 217–229. Avalaible from: https://link.springer.com/article/10.1007/BF02020976

3. *Chatterji, S. D.* A principle of subsequences in probability theory: the central limit theorem / S. D. Chatterji — Adv. Math. — 13. — (1974). — pp. 31–54. Режим доступу до журн.:

https://pdf.sciencedirectassets.com/272585/1-s2.0-S0001870800X03969/1-s2.0-0001870874900644/main.pdf?X-Amz-Security-Token=IQoJb3JpZ2luX2VjEKv

4. *Гапошкин, В. Ф.* Лакунарные ряды и независимые функции / В. Ф. Гапошкин — Успехи матем. наук. — т. XXI. — вып. 6 (12). — (1966). — с. 3–82. Режим доступу до журн.: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=rm&paperid=5939&option_lang=rus

5. *Gut, A.* On complete convergence in the law of large numbers for subsequences / A. Gut — Ann. Probab. — 1985. — vol. 13. — no. 4. — pp. 1286–1291. Режим доступу до журн.: https://projecteuclid.org/euclid.aop/1176992812

6. *Klesov, O. I.* On integrability of $|S_{n_k}/n_k|$ / O. I. Klesov — in book New Trends in Probability and Statistics. Proceedings of the Bakuriani Colloquium in honour of Yu. V. Prokhorov, Bakuriani, Georgia, USSR, 24 February–4March 1990 (eds. V. V. Sazonov and T. Shervashidze). — vol. 1. — 1990. — Mokslas and VSP. — Vilnius, Lithuania, and Utrecht, the Netherlands. — pp. 38–42

7. *Bogdanskii, V. Yu., Klesov, O. I., Molchanov, I.* Uniform strong law of large numbers / V. Yu. Bogdanskii, O. I. Klesov, I. Molchanov // Methodol. Comput. Appl. Probab. — 2019. — Режим доступу до журн.: https://link.springer.com/article/10.1007/s11009-019-09711-x.

8. *Богданський, В. Ю., Клесов, О. І.* До статті Басса і Пайка / В. Ю. Богданський, О. І. Клесов // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. —2020. — №2. — С. 34–41. — Режим доступу до журн.: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).34-41

9. *Klesov, O. I., Molchanov, I.* Moment conditions in strong laws of large numbers for multiple sums and random measures / O. I. Klesov, I. Molchanov // Stat. Probab. Lett. — 2017. — vol 131. — pp. 56–63. Режим доступу до журн.: https://www.sciencedirect.com/science /article/abs/pii/S0167715217302675

10. *Klesov, O. I., Molchanov, I.* Uniform strong law of large numbers / O. I. Klesov, I. Molchanov // in book Modern Mathematics and Mechanics: Fundamentals, Problems and Challenges (editors V. A. Sadovnichiy and M. Z. Zgurovsky). — Springer International Publishing AG. — Cham (Switzerland). — pp. 335–350. Режим доступу до журн.: https://link.springer.com/article/10.1007/s11009-019-09711-x

11. *Bass, R. F. and Pyke, R.* A strong law of large numbers for partial-sum processes indexed by sets / R. F. Bass and R. Pyke // Ann. Probab. — 1984. — vol. **12**. — issue 1. — pp. 268–271.

12. *Klesov, O. I.* Limit Theorems for Multi-Indexed Sums of Random Variables / O. I. Klesov // Springer. — Berlin. 2014. — xviii+483 pp. Режим доступу до монографії: http://www.springer.com/mathematics/probability/book/978-3-662-44387-3

13. *Мартикайнен, А. И., Петров В. В.* Об одной теореме Феллера / А. И. Мартикайнен, В. В. Петров // Теор. вероятност. применен. — 1980. — том 25. — №1. — стр. 194–197. Режим доступу до журн.: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=tvp&paperid=1050&option_lang=rus

14. *Feller, W.* A limit theorem with infinite moments / W. Feller // Amer. J. Math. — 1946. — vol. 68. — issue 2. — pp. 257–262. Режим доступу до журн.: https://www.jstor.org/stable/2371837?seq=1

15. *Etemadi, N.* An elementary proof of the strong law of large numbers / N. Etemadi // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb. — 1981. — vol. 55. issue 1. — pp. 119–122 Режим доступу до журн.: https://link.springer.com/article/10.1007/BF01013465

16. *Клесов, О. И.* О скорости сходимости рядов случайных величин / О. И. Клесов // Укр. матем. журнал. — 1983. том 35. — №3. с. 309–314.

17. *Клесов, О. И.* Скорость сходимости некоторых случайных рядов / О. И. Клесов // Теор. вероятн. мат. стат. — 1984. — вып.

30. — стр. 81–92. Режим доступу до журн.: http://probability.univ.kiev.ua/tims/?year=1984&volume=30

18. *Булдигін, В. В., Клесов, О. И., Штайнебах, Й. Г.* Властивості асимптотично квазі-інверсних функцій та їхні застосування. I / В. В. Булдигін, О. И. Клесов, Й. Г. Штайнебах // Теор. ймовірн. мат. стат. — 2004. — вип. 70. — стр. 9–25. Режим доступу до журн.: http://probability.univ.kiev.ua/tims/issues-new/70/PDF/4.pdf

19. *Булдигін, В. В., Клесов, О. И., Штайнебах, Й. Г.* Властивості асимптотично квазі-інверсних функцій та їхні застосування. I / В. В. Булдигін, О. И. Клесов, Й. Г. Штайнебах // Теор. ймовірн. мат. стат. — 2007. — вип. 77. — стр. 13–27. Режим доступу до журн.: http://probability.univ.kiev.ua/tims/issues-new/77/PDF/4.pdf

References

1. CHATTERJI S. D. (1972) *Un principe de sous-suites dans la théorie des probabilités*, Séminaire de Probabilités VI Université de Strasbourg (ed. N. Bourbaki), Springer, Berlin, pp. 72–89. Avalaible from: https://www.springer.com/gp/book/9783540057734

2. KOMLÓS J. (1967) *A generalization of a problem of Steinhaus*, Acta Math. Hungar. 18 (1967) pp. 217–229. Avalaible from: https://link.springer.com/article/10.1007/BF02020976

3. CHATTERJI S. D. (1974) *A principle of subsequences in probability theory: the central limit theorem*, Adv. Math., 13, pp. 31–54. Avalaible from: https://pdf.sciencedirectassets.com/272585/1-s2.0-S0001870800X03969/1-s2.0-0001870874900644/main.pdf?X-Amz-Security-Token=IQoJb3JpZ2luX2VjEKv

4. GAPOSHKIN V. F. (1966), *Lacunary series and independent functions*, Russian Mathematical Surveys, 21:6, 1–82. Avalaible from: http://mr.crossref.org/iPage?doi=10.1070

5. GUT A. (1985), *On complete convergence in the law of large numbers for subsequences*, Ann. Probab., vol. 13, no. 4, pp. 1286–1291. Avalaible from: https://projecteuclid.org/euclid.aop/1176992812

6. KLESOV O. I. (1990), *On integrability of* $|S_{n_k}/n_k|$, in book New Trends in Probability and Statistics. Proceedings of the Bakuriani Colloquium in honour of Yu. V. Prokhorov, Bakuriani, Georgia, USSR, 24 February–4March 1990 (eds. V. V. Sazonov and T. Shervashidze), vol. 1, 1990, Mokslas and VSP, Vilnius, Lithuania, and Utrecht, the Netherlands, pp. 38–42.

7. BOGDANSKII, V. Yu., KLESOV, O. I., MOLCHANOV, I. (2019) *Uniform strong law of large numbers*, Methodol. Comput. Appl. Probab. Avalaible from: https://link.springer.com/article/10.1007/s11009-019-09711-x.

8. BOGDANSKII, V. Yu. and KLESOV, O. I. (2020) *On a theorem of Pyke and Bass*, Nauk. visnyk Uzhgorod Univ., №2, pp. 34–41. Avalaible from: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).34-41

9. KLESOV O. I. and MOLCHANOV I. (2017) *Moment conditions in strong laws of large numbers for multiple sums and random measures*, Stat. Probab. Lett., vol. 131, pp. 56–63. Avalaible from: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0167715217302675

10. KLESOV O. I. and MOLCHANOV I. (2019) *Uniform strong law of large numbers*, in book Modern Mathematics and Mechanics: Fundamentals, Problems and Challenges (editors V. A. Sadovnichiy and M. Z. Zgurovsky), Springer International Publishing AG, Cham (Switzerland), pp. 335–350. Avalaible from: https://link.springer.com/article/10.1007/s11009-019-09711-x

11. BASS R. F. and PYKE R. (1984) *A strong law of large numbers for partial-sum processes indexed by sets* Ann. Probab., vol. **12**, issue 1, pp. 268–271.

12. KLESOV, O. I. *Limit Theorems for Multi-Indexed Sums of Random Variables*, Springer, Berlin, 2014, xviii+483 pp. Avalaible from: http://www.springer.com/mathematics/probability/book/978-3-662-44387-3

13. MARTIKAINEN, A. I. and PETROV, V. V. (1980) *On a Theorem of Feller*. Theor. Probab. Appl. vol. 25, issue 1, pp. 191–193. Avalaible from: https://epubs.siam.org/doi/10.1137/1125023

14. Feller, W. (1946) *A limit theorem with infinite moments*. Amer. J. Math., vol. 68, issue 2, pp. 257–262. Avalaible from: https://www.jstor.org/stable/2371837?seq=1

15. ETEMADI, N. (1981) *An elementary proof of the strong law of large numbers*. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb. vol. 55, issue 1, pp. 119–122 Avalaible from: https://link.springer.com/article/10.1007/BF01013465

16. KLESOV O. I. (1983), *Rate of convergence of series of random variables*, Ukrainian Math. J., vol. 35, pp. 264–268. Avalaible from: https://link.springer.com/article/10.1007%2FBF01092173

17. KLESOV O. I. (1985), *Rate of convergence of some random series*, Theor. Probab. Math. Statist., vol. 30, pp. 91–101.

18. BULDYGIN V. V., KLESOV O. I., and Steinebach J. G. (2004) Properties of asymptotically quasi-inverse functions and their applications. I Theory Probab. Math. Statist. — vol. 70. — pp. 11–28. Avalaible from: http://probability.univ.kiev.ua/tims/issues-new/70/PDF/4.pdf

19. BULDYGIN V. V., KLESOV O. I., and Steinebach J. G. (2008) *On some properties of asymptotically quasi-inverse functions*. Theory Probab. Math. Statist. — vol. 77. — pp. 15–30. Avalaible from: http://www.ams.org/journals/tpms/2005-70-00/S0094-9000-05-00627-7/S0094-9000-05-00627-7.pdf

Надійшла до редколегії 1.10.2020

https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/3.5

УДК 519.21

О.І. Василик[1], *д.ф.-м.н., доцент*
Р.Є. Ямненко[2], *д.ф.-м.н., доцент*
Т.О. Яневич[2], *к.ф.-м.н., доцент*

Оцінювання ймовірності виходу траєкторії строго φ-субгауссового процесу квазідробового ефекту за криву

[1]Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", 03056, Київ, проспект Перемоги, 37, e-mail: vasylyk@matan.kpi.ua

[2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13,
e-mail: yamnenko@univ.kiev.ua
tetianayanevych@knu.ua

O.I. Vasylyk[1], *Dr.Sc., Associate Professor*
R.E. Yamnenko[2], *Dr.Sc., Associate Professor*
T.O. Ianevych[2], *Ph.D., Associate Professor*

Estimation of probability of exceeding a curve by a strictly φ-sub-Gaussian quasi shot noise process

[1]National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", 37, Prosp. Peremohy, Kyiv, Ukraine, 03056,
e-mail: vasylyk@matan.kpi.ua

[2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 64/13 Volodymyrska st., Kyiv, Ukraine, 01601,
e-mail: yamnenko@univ.kiev.ua
tetianayanevych@knu.ua

У цій роботі ми продовжуємо вивчати властивості строго φ-субгауссового процесу квазідробового ефекту $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,u)d\xi(u)$, $t \in \mathbb{R}$, породженого функцією відгуку g та строго φ-субгауссовим випадковим процесом $\xi = (\xi(t), t \in \mathbb{R})$ з некорельованими приростами, таким що $\mathsf{E}(\xi(t) - \xi(s))^2 = t - s$, $t > s \in \mathbb{R}$. Отримано оцінки для ймовірності виходу траєкторії сепарабельного строго φ-субгауссового процесу квазідробового ефекту за криву, задану деякою неперервною функцією. Такі оцінки можуть бути застосовані при дослідженні процесів дробового ефекту, які виникають у задачах фінансової математики, теорії телекомунікаційних мереж тощо.

Ключові слова: процеси дробового ефекту, φ-субгауссові процеси.

In this paper, we continue to study the properties of a separable strictly φ-sub-Gaussian quasi shot noise process $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,u)d\xi(u)$, $t \in \mathbb{R}$, generated by the response function g and the strictly φ-sub-Gaussian process $\xi = (\xi(t), t \in \mathbb{R})$ with uncorrelated increments, such that $\mathsf{E}(\xi(t)-\xi(s))^2 = t-s$, $t > s \in \mathbb{R}$. We consider the problem of estimating the probability of exceeding some level by such a process on the interval $[a;b]$, $a, b \in \mathbb{R}$. The level is given by a continuous function $f = \{f(t), t \in [a;b]\}$, which satisfies some given conditions. In order to solve this problem, we apply the theorems obtained for random processes from a class $V(\varphi, \psi)$, which generalizes the class of φ-sub-Gaussian processes. As a result, several estimates for probability of exceeding the curve f by sample pathes of a separable strictly φ-sub-Gaussian quasi shot noise process are obtained. Such estimates can be used in the study of shot noise processes that arise in the problems of financial mathematics, telecommunication networks theory, and other applications.

Key Words: shot noise processes, φ-sub-Gaussian processes.

Статтю представила д.ф.-м.н. Розора І.В.

Присвячуємо цю роботу пам'яті нашого наукового керівника професора Юрія Васильовича Козаченка, якому ми безмежно вдячні за все, чому він нас навчив. Він завжди був для нас взірцем людяності, інтелігентності, педагогічної майстерності, чуйного і шанобливого ставлення до своїх учнів, обізнаності і щирої зацікавленості не тільки в математиці, а й у літературі, історії, мистецтві. Світла і вічна пам'ять дорогому Вчителю і видатній Людині!

1 Вступ

Один з напрямків наукової роботи Юрія Васильовича Козаченка присвячений дослідженню випадкових процесів дробового ефекту, які

© О.І. Василик, Р.Є. Ямненко, Т.О. Яневич, 2020

ще називають дробовими процесами. Зокрема, Ю.В. Козаченко та І.В. Дарійчук досліджували властивості Θ-передгауссових процесів дробового ефекту та запропонували методи моделювання таких процесів [4, 6, 7]. У цій роботі ми продовжуємо вивчати дробові процеси, а саме досліджуємо властивості сепарабельних строго φ-субгауссових процесів квазідробового ефекту. Вперше такі процеси розглядалися у роботі [14], де, зокрема, досліджувалися умови їх вибіркової неперевності. Оцінки розподілів супремумів сепарабельних строго φ-субгауссових процесів квазідробового ефекту отримано у роботах [1, 2]. Задачі оцінювання ймовірності виходу траєкторії φ-субгауссового випадкового процесу за криву розглядалися у роботах [3, 10, 15].

Процеси дробового ефекту є математичними моделями різних явищ і досліджуються від початку XX століття. Зараз процеси дробового ефекту застосовуються у фізиці, страхуванні, фінансовій математиці, теорії телекомунікаційних мереж тощо [9, 12, 13].

У класичній моделі дробового ефекту припускається, що в деяку систему надходять імпульси згідно зі стандартним пуассонівським процесом, величини реакції (відгуку) на імпульс є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, незалежними від пуассонівського процесу надходження імпульсів, а після моменту імпульсу реакція «затухає» згідно з експоненціальним законом розподілу. Але із часом з'явилося дуже багато варіацій цієї моделі. У даній роботі розглядається випадок, коли $\xi = (\xi(t), t \in \mathbb{R})$ є строго φ-субгауссовим випадковим процесом із некорельованими приростами, таким що $E(\xi(t) - \xi(s))^2 = t - s$, $t > s \in \mathbb{R}$. Породжений ним процес $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,u)d\xi(u)$ називатимемо строго φ-субгауссовим процесом квазідробового ефекту.

Робота складається зі вступу та трьох розділів. У розділі 2 наведено основні поняття та деякі необхідні результати щодо випадкових величин та процесів із простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$, які далі застосовуються для дослідження властивостей процесів квазідробового ефекту. У розділі 3 наведено означення строго φ-субгауссового процесу квазідробового ефекту та обгрунтовано існування таких процесів. Основні результати наведено у розділі 4, а саме, отримано оцінки для ймовірності виходу траєкторії строго φ-субгауссового процесу квазідробового ефекту за криву, задану деякою неперервною функцією.

2 Необхідні відомості

У цьому розділі наведено необхідні означення [3, 5, 8] та результати, отримані для φ-субгауссових випадкових величин та процесів [3, 10].

Означення 2.1. Неперервна парна опукла функція $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається *N-функцією Орлича*, якщо $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) > 0$ при $x \neq 0$, $\frac{\varphi(x)}{x} \to 0$ при $x \to 0$ та $\frac{\varphi(x)}{x} \to \infty$ при $x \to \infty$.

Означення 2.2. Нехай $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ — деяка N-функція Орлича. Функція φ^* така, що $\varphi^*(x) := \sup_{y\in\mathbb{R}} (xy - \varphi(y))$, $x \geq 0$, називається перетворенням Юнга – Фенхеля функції φ.

Умова Q. Для N-функції φ виконується *умова Q*, якщо $\liminf\limits_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = C > 0$. Можливо, що $C = +\infty$.

У книзі [11] міститься детальна інформація щодо N-функцій Орлича та їх властивостей.

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – стандартний імовірнісний простір.

Означення 2.3. Нехай φ — N-функція Орлича, для якої виконується умова Q. Випадкова величина ξ належить простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ (простору φ-субгауссових випадкових величин), якщо $\mathsf{E}\xi = 0$, $\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\}$ існує для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ та існує така стала $a > 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\mathsf{E}\exp(\lambda\xi) \leq \exp(\varphi(a\lambda)).$$

Теорема 2.1. [5] *Простір* $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ *є простором Банаха з нормою*

$$\tau_\varphi(\xi) = \sup_{\lambda\neq 0} \frac{\varphi^{-1}(\ln \mathsf{E}\exp(\lambda\xi))}{|\lambda|}$$

та для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ *виконуються нерівності*

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\exp(\lambda\xi) &\leq \exp(\varphi(\lambda\tau_\varphi(\xi))), \qquad (2.1)\\ (\mathsf{E}\xi^2)^{\frac{1}{2}} &\leq C\tau_\varphi(\xi), \end{aligned}$$

де $C > 0$ — *деяка стала.*

Означення 2.4. Нехай (T, ρ) — деякий псевдометричний або метричний простір. Метричною

ентропією (відносно псевдометрики/метрики ρ) називається функція $H_T(\varepsilon) := \ln N_T(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, де $N_T(\varepsilon)$ — це метрична масивність множини T, тобто, кількість елементів у найменшому ε-покритті цієї множини.

Означення 2.5. Випадковий процес $X = (X(t), t \in T)$ є φ-субгауссовим (тобто, належить простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$), якщо для всіх $t \in T$ випадкові величини $X(t) \in \mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$.

Якщо $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, то такий процес називається субгауссовим.

Приклад 2.1. Центрований гауссовий випадковий процес є субгауссовим.

Означення 2.6. Сім'я Δ випадкових величин із простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ називається строго φ-субгауссовою (позначається як $\Delta \in \mathrm{SSub}_\varphi(\Omega)$), якщо існує стала $C_\Delta > 0$ така, що для будь-якої зліченної множини I, $\xi_i \in \Delta$, $i \in I$, та для довільних $\lambda_i \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\tau_\varphi\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right) \le C_\Delta\left(\mathsf{E}\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.2)$$

Стала C_Δ називається визначальною сталою сім'ї Δ.

Означення 2.7. Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ називається строго φ-субгауссовим (тобто, $X \in \mathrm{SSub}_\varphi(\Omega)$), якщо сім'я випадкових величин $\{X(t), t \in T\}$ є строго φ-субгауссовою. Визначальна стала цієї сім'ї називається визначальною сталою процесу X та позначається C_X.

Означення 2.8. Нехай $\varphi \prec \psi$ – дві N-функції Орліча. Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ належить класу $V(\varphi, \psi)$, якщо для всіх $t \in T$ процес $X(t)$ належить простору $\mathrm{Sub}_\psi(\Omega)$ та для всіх $s, t \in T$ прирости $(X(t) - X(s))$ належать простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$.

Нехай (T, ρ) – псевдометричний (метричний) сепарабельний простір з псевдометрикою (метрикою) ρ.

Припустимо, що для сепарабельного випадкового процесу $X = \{X(t), t \in T\}$ з класу $V(\varphi, \psi)$ існує така неперервна монотонно зростаюча функція $\sigma = \{\sigma(h), h > 0\}$, що $\sigma(h) \to 0$, коли $h \to 0$, та має місце нерівність

$$\sup_{\rho(t,s)\le h} \tau_\varphi(X(t) - X(s)) \le \sigma(h). \quad (2.3)$$

Нехай B – компактна множина, $B \subset T$, $\gamma(u) = \tau_\psi(X(u)) < \infty$, $\beta > 0$ – деяке число, таке що $\beta \le \sigma\left(\inf\limits_{s\in B}\sup\limits_{t\in B}\rho(t,s)\right)$.

Наступні дві теореми містять оцінки ймовірності виходу траєкторії випадкового процесу із класу $V(\varphi, \psi)$ за криву [3, 10].

Теорема 2.2. *Нехай для випадкового процесу $X(t) = (X(t),\ t \in B)$ із класу $V(\varphi, \psi)$ виконується умова (2.3), і нехай $f = \{f(t), t \in B\}$ – неперервна функція, така що $|f(u) - f(v)| \le \delta(\rho(u, v))$, де $\delta = \{\delta(s), s > 0\}$ – деяка монотонно зростаюча невід'ємна функція, а $r = \{r(u)\colon u \ge 1\}$ – така неперервна функція, що $r(u) > 0$ при $u > 1$, $r(1) = 0$, а функція $s(t) = r(\exp\{t\}), t \ge 0$, опукла. Тоді при виконанні умови*

$$J_r(\beta) = \int_0^\beta \frac{r(\mathsf{N}_B(\sigma^{(-1)}(u)))}{\varphi^{(-1)}(\mathsf{H}_B(\sigma^{(-1)}(u)))}\,du < \infty \quad (2.4)$$

процес $X_f(t) = X(t) - f(t)$ обмежений з ймовірністю одиниця, та для всіх $p \in (0; 1)$ і $x > 0$ виконуються нерівності

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in B}(X(t) - f(t)) > x\right\} \le Z_r(p, \beta, x), \quad (2.5)$$

$$\mathbf{P}\left\{\inf_{t\in B}(X(t) - f(t)) < -x\right\} \le Z_r(p, \beta, x), \quad (2.6)$$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in B}|X(t) - f(t)| > x\right\} \le 2Z_r(p, \beta, x), \quad (2.7)$$

де

$$Z_r(p,\beta,x) = \inf_{\lambda>0}\exp\left\{W(\lambda,p,\beta) + p\varphi\left(\frac{\lambda\beta}{1-p}\right) + \right.$$

$$\left. + \lambda\left(\sum_{k=2}^{\infty}\delta\left(\sigma^{(-1)}\left(\beta p^{k-1}\right)\right) - x\right)\right\} \times$$

$$\times\left(r^{(-1)}\left(\frac{\lambda}{p(1-p)}J_r(\beta p^2)\right)\right)^2,$$

$$W(\lambda,p,\beta) = \inf_{v\ge(1-p)^{-1}}\left(\frac{1}{v}\mathsf{H}_B(\sigma^{(-1)}(\beta p)) + \right.$$

$$\left. + \sup_{u\in B}\left(\frac{\psi(\lambda\gamma(u)v)}{v} - \lambda f(u)\right)\right).$$

Теорема 2.3. *Нехай для випадкового процесу* $X(t) = (X(t),\ t \in B)$ *із класу* $V(\varphi, \psi)$ *виконується умова (2.3), і нехай* $f = \{f(t), t \in B\}$ *– неперервна функція, така що* $|f(u) - f(v)| \le \delta(\rho(u,v))$, *де* $\delta = \{\delta(s), s > 0\}$ *– деяка монотонно зростаюча невід'ємна функція. Нехай також* $r = \{r(u)\colon u \ge 1\}$ *– така неперервна функція, що* $r(u) > 0$ *при* $u > 1$, $r(1) = 0$, *а функція* $s(t) = r(\exp\{t\}), t \ge 0$, *опукла, причому виконується умова*

$$I_r(\beta) = \int_0^\beta r(N(\sigma^{(-1)}(u)))\,du < \infty. \qquad (2.8)$$

Тоді процес $X_f(t) = X(t) - f(t)$ *обмежений з ймовірністю одиниця, та для всіх* $p \in (0;1)$ *і* $x > 0$ *виконуються нерівності*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in B}(X(t) - f(t)) > x\right\} \le U_r(p,\beta,x), \quad (2.9)$$

$$\mathbf{P}\left\{\inf_{t\in B}(X(t) - f(t)) < -x\right\} \le U_r(p,\beta,x), \quad (2.10)$$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in B}|X(t) - f(t)| > x\right\} \le 2U_r(p,\beta,x), \quad (2.11)$$

де

$$U_r(p,\beta,x) = \inf_{\lambda>0}\exp\left\{\theta_\psi(\lambda,p) + p\varphi\left(\frac{\lambda\beta}{1-p}\right) + \right.$$

$$\left. +\lambda\left(\sum_{k=2}^{\infty}\delta(\sigma^{(-1)}(\beta p^{k-1})) - x\right)\right\} r^{(-1)}\left(\frac{I_r(\beta p)}{\beta p}\right),$$

$$\theta_\psi(\lambda,p) = \sup_{u\in T}\left((1-p)\psi\left(\frac{\lambda\gamma(u)}{1-p}\right) - \lambda f(u)\right).$$

3 Строго φ-субгауссові процеси квазідробового ефекту

Нехай $\xi = (\xi(t), t \in \mathbb{R})$ — дійснозначний центрований випадковий процес з некорельованими приростами, визначений на стандартному ймовірнісному просторі, та

$$\mathsf{E}(\xi(t) - \xi(s))^2 = t - s, \quad t > s \in \mathbb{R}.$$

Нехай $g = (g(t,u), t, u \in \mathbb{R})$ — дійснозначна функція, яка задовольняє умову:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t,u)\mathrm{d}u < \infty, \quad t \in \mathbb{R}. \qquad (3.1)$$

Означення 3.1. Будемо називати процес

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,u)\mathrm{d}\xi(u), \quad t \in \mathbb{R}, \qquad (3.2)$$

процесом дробового ефекту, породженим процесом ξ *та функцією відгуку* g, де інтеграл у (3.2) визначений у середньому квадратичному.

Коваріаційна функція процесу X має вигляд

$$\mathsf{E}X(t)X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,u)g(s,u)\mathrm{d}u, \quad t,s \in \mathbb{R}.$$

У наступній лемі з роботи [14] доведено, що строго φ-субгауссові процеси вигляду (3.2) існують, а також виведено оцінки для норми такого процесу та норми його приростів.

Лема 3.1. *Нехай* $\xi = (\xi(t), t \in \mathbb{R})$ *— строго* φ*-субгауссовий випадковий процес із некорельованими приростами та* $\mathsf{E}(\xi(t) - \xi(s))^2 = t - s$, $t > s \in \mathbb{R}$. *Тоді процес* $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,u)d\xi(u)$, $t \in \mathbb{R}$, *теж є строго* φ*-субгауссовим процесом та для довільних* $t, s \in \mathbb{R}$

$$\tau_\varphi(X(t)) \le c_\xi\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t,u)\,du\right)^{1/2}, \qquad (3.3)$$

$$\tau_\varphi(X(t) - X(s)) \le$$
$$c_\xi\left(\int_{-\infty}^{+\infty}(g(t,u) - g(s,u))^2\,du\right)^{1/2}, \quad (3.4)$$

де c_ξ *— визначальна стала процесу* ξ.

Означення 3.2. Будемо називати процес $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,u)\mathrm{d}\xi(u)$ *строго* φ*-субгауссовим процесом квазідробового ефекту*, якщо ξ є строго φ-субгауссовим випадковим процесом.

4 Оцінювання ймовірності виходу траєкторії строго φ-субгауссового процесу квазідробового ефекту за криву

Нехай $X = \{X(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ – сепарабельний строго φ-субгауссовий процес квазідробового ефекту. Припустимо, що існують такі функції $\varkappa = (\varkappa(h), h \ge 0)$ та $k = (k(u), u \in \mathbb{R})$, що

$$|g(t,u) - g(s,u)| \le \varkappa(t-s)k(u), \quad t,s,u \in \mathbb{R}, \qquad (4.1)$$

причому функція $\varkappa$ є такою невід'ємною неперервною монотонно зростаючою функцією, що $\varkappa(h) \to 0$ при $h \to 0$, та функція k є невід'ємною неперервною функцією, яка задовольняє умову $\int_{\mathbb{R}} k^2(u)\mathrm{d}u < \infty$.

Теорема 4.1. *Нехай $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ – сепарабельний строго φ-субгауссовий процес квазідробового ефекту з функцією відгуку g, яка задовольняє умову (4.1). Нехай $f = \{f(t), t \in [a;b]\}$, $a, b \in \mathbb{R}\}$ – неперервна функція, така що $|f(u) - f(v)| \le \delta(\rho(u,v))$, де $\delta = \{\delta(s), s > 0\}$ – деяка монотонно зростаюча невід'ємна функція, а $r = \{r(u)\colon u \ge 1\}$ – така неперервна функція, що $r(u) > 0$ при $u > 1$, $r(1) = 0$, а функція $s(t) = r(\exp\{t\}), t \ge 0$, – опукла. Тоді при виконанні умови*

$$J_r^*(\beta) = \int\limits_0^\beta \frac{r\left(\frac{b-a}{2\varkappa^{(-1)}(cu)} + 1\right)}{\varphi^{(-1)}\left(\ln\left(\frac{b-a}{2\varkappa^{(-1)}(cu)} + 1\right)\right)} du < \infty \tag{4.2}$$

процес $X_f(t) = X(t) - f(t)$, $t \in [a;b]$, обмежений з ймовірністю одиниця та для всіх $p \in (0;1)$ і $x > 0$ справедливі такі оцінки ймовірності виходу траєкторії процесу X за криву f на відрізку $[a;b]$:

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in[a;b]}(X(t) - f(t)) > x\right\} \le Z_r^*(p,\beta,x), \tag{4.3}$$

$$\mathbf{P}\left\{\inf_{t\in[a;b]}(X(t) - f(t)) < -x\right\} \le Z_r^*(p,\beta,x), \tag{4.4}$$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in[a;b]}|X(t) - f(t)| > x\right\} \le 2Z_r^*(p,\beta,x), \tag{4.5}$$

де $\beta > 0$ – деяке число, таке що

$$\beta \le c^{-1}\varkappa\left(\inf_{s\in[a;b]}\sup_{t\in[a;b]}|t-s|\right),$$

$$Z_r^*(p,\beta,x) = \inf_{\lambda>0}\exp\left\{W^*(\lambda,p,\beta) + p\varphi\left(\frac{\lambda\beta}{1-p}\right)\right.$$
$$\left.+\lambda\left(\sum_{k=2}^{\infty}\delta\left(\varkappa^{(-1)}\left(c\beta p^{k-1}\right)\right) - x\right)\right\} \times$$
$$\times\left(r^{(-1)}\left(\frac{\lambda J_r^*(\beta p^2)}{p(1-p)}\right)\right)^2,$$

$$W^*(\lambda,p,\beta) = \inf_{v\ge(1-p)^{-1}}\left(\frac{1}{v}\ln\left(\frac{b-a}{2\varkappa^{(-1)}(c\beta p)} + 1\right)\right.$$
$$\left.+\sup_{u\in[a;b]}\left(\frac{\varphi(\lambda\gamma(u)v)}{v} - \lambda f(u)\right)\right)$$

та $c = \left(c_\xi\left(\int_{-\infty}^{+\infty}k^2(u)\,du\right)^{1/2}\right)^{-1}$.

Доведення. Передусім зауважимо, що строго φ-субгауссовий процес квазідробового ефекту $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ належить класу $V(\varphi,\varphi)$, тому для його дослідження можна застосовувати результати, отримані для випадкових процесів з класів $V(\varphi,\psi)$.

Якщо виконується умова (4.1) для функції відгуку g, то з леми 3.1 випливає, що для $t, s \in [a,b]$

$$\tau_\varphi(X(t) - X(s)) \le$$
$$\le c_\xi\left(\int_{-\infty}^{+\infty}(g(t,u) - g(s,u))^2\mathrm{d}u\right)^{1/2} \le$$
$$\le c_\xi\left(\int_{-\infty}^{+\infty}(\varkappa(t-s)k(u))^2\mathrm{d}u\right)^{1/2} =$$
$$= c_\xi\varkappa(t-s)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}k^2(u)\mathrm{d}u\right)^{1/2},$$

де, згідно з умовою (4.1), функція $\varkappa = (\varkappa(h), h \ge 0)$ є невід'ємною неперервною монотонно зростаючою функцією, $\varkappa(h) \to 0$ при $h \to 0$, а функція $k = (k(u), u \in \mathbb{R})$ є невід'ємною і задовольняє умову $\int_{\mathbb{R}}k^2(u)\mathrm{d}u < \infty$. Це означає, що існує неперервна монотонно зростаюча функція

$$\sigma(h) = c_\xi\varkappa(h)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}k^2(u)\mathrm{d}u\right)^{1/2}, \quad h \ge 0,$$

така, що $\sigma(h) \to 0$ при $h \to 0$, та для якої виконується умова (2.3) у випадку $B = [a,b]$, $\rho(t,s) = |t-s|$, $t, s \in [a;b]$:

$$\sup_{|t-s|\le h}\tau_\varphi(X(t) - X(s)) \le \sigma(h).$$

Тоді матимемо: $\sigma^{(-1)}(u) = \varkappa^{(-1)}(cu)$,

$$N_B(\sigma^{(-1)}(u)) \le \frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 = \frac{b-a}{2\varkappa^{(-1)}(cu)} + 1,$$

$$H_B(\sigma^{(-1)}(u)) \le \ln\left(\frac{b-a}{2\varkappa^{(-1)}(cu)} + 1\right).$$

Функція $\frac{r(e^v)}{\varphi^{(-1)}(v)}$ є неперервною монотонно зростаючою функцією, тому

$$\int\limits_0^\beta\frac{r(N_B(\sigma^{(-1)}(u)))}{\varphi^{(-1)}(H_B(\sigma^{(-1)}(u)))}\mathrm{d}u \le$$
$$\le\int\limits_0^\beta\frac{r\left(\frac{b-a}{2\varkappa^{(-1)}(cu)} + 1\right)}{\varphi^{(-1)}\left(\ln\left(\frac{b-a}{2\varkappa^{(-1)}(cu)} + 1\right)\right)}\mathrm{d}u$$

і з виконання умови (4.6) випливає виконання умови (2.8).

Отже, якщо виконуються умови теореми 4.1, то процес X задовольняє умови теореми 2.2 і для нього мають місце наведені в ній оцінки. При цьому для функцій у оцінках (2.9)–(2.11) з урахуванням отриманих вище нерівностей і того, що $\psi = \varphi$, справедливі такі співвідношення:

$$W(\lambda,p,\beta) \le \inf_{v\ge(1-p)^{-1}} \left(\frac{1}{v} \ln \left(\frac{b-a}{2\varkappa^{(-1)}(c\beta p)} + 1 \right) + \right.$$

$$\left. + \sup_{u\in[a;b]} \left(\frac{\varphi(\lambda\gamma(u)v)}{v} - \lambda f(u) \right) \right) =: W^*(\lambda,p,\beta),$$

і, відповідно,

$$Z_r(p,\beta,x) \le \inf_{\lambda>0} \exp\left\{ W^*(\lambda,p,\beta) + p\varphi\left(\frac{\lambda\beta}{1-p}\right) + \right.$$

$$\left. +\lambda \left(\sum_{k=2}^{\infty} \delta\left(\varkappa^{(-1)}\left(c\beta p^{k-1} \right) \right) - x \right) \right\} \times$$

$$\times \left(r^{(-1)} \left(\frac{\lambda}{p(1-p)} J_r^*(\beta p^2) \right) \right)^2 =: Z_r^*(p,\beta,x).$$

Звідси отримуємо оцінки (4.7)–(4.9).
Теорему доведено. □

Використовуючи аналогічний підхід до доведення теореми 4.1, із теореми 2.3 отримуємо наступний набір оцінок.

Теорема 4.2. *Нехай $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ – сепарабельний строго φ-субгауссовий процес квазідробового ефекту з функцією відгуку g, яка задовольняє умову (4.1). Нехай $f = \{f(t), t \in [a;b]$, $a, b \in \mathbb{R}\}$ – неперервна функція, така що $|f(u) - f(v)| \le \delta(\rho(u,v))$, де $\delta = \{\delta(s), s > 0\}$ – деяка монотонно зростаюча невід'ємна функція. Нехай також $r = \{r(u)\colon u \ge 1\}$ – така неперервна функція, що $r(u) > 0$ при $u > 1$, $r(1) = 0$, а функція $s(t) = r(\exp\{t\}), t \ge 0$, – опукла, та*

$$I_r^*(\beta) = \int_0^{\beta} r\left(\frac{b-a}{2\varkappa^{(-1)}(cu)} + 1 \right) du < \infty. \quad (4.6)$$

Тоді процес $X_f(t) = X(t) - f(t)$, $t \in [a;b]$, обмежений з ймовірністю одиниця та для всіх $p \in (0;1)$ і $x > 0$ справедливі такі оцінки ймовірності виходу траєкторії процесу X за криву f на відрізку $[a;b]$:

$$\mathbf{P}\left\{ \sup_{t\in[a;b]} (X(t) - f(t)) > x \right\} \le U_r^*(p,\beta,x), \quad (4.7)$$

$$\mathbf{P}\left\{ \inf_{t\in[a;b]} (X(t) - f(t)) < -x \right\} \le U_r^*(p,\beta,x), \quad (4.8)$$

$$\mathbf{P}\left\{ \sup_{t\in[a;b]} |X(t) - f(t)| > x \right\} \le 2U_r^*(p,\beta,x), \quad (4.9)$$

де $\beta > 0$ – деяке число, таке що

$$\beta \le c^{-1}\varkappa\left(\inf_{s\in[a;b]} \sup_{t\in[a;b]} |t-s| \right),$$

$$U_r^*(p,\beta,x) = \inf_{\lambda>0} \exp\left\{ \theta_\varphi(\lambda,p) + p\varphi\left(\frac{\lambda\beta}{1-p}\right) + \right.$$

$$\left. +\lambda \left(\sum_{k=2}^{\infty} \delta(\varkappa^{(-1)}(c\beta p^{k-1})) - x \right) \right\} r^{(-1)} \left(\frac{I_r^*(\beta p)}{\beta p} \right),$$

$$\theta_\varphi(\lambda,p) = \sup_{u\in[a;b]} \left((1-p)\varphi\left(\frac{\lambda\gamma(u)}{1-p} \right) - \lambda f(u) \right)$$

та $c = \left(c_\xi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} k^2(u)\,du \right)^{1/2} \right)^{-1}$.

Висновки

У роботі отримано оцінки ймовірності виходу траєкторії сепарабельного строго φ-субгауссового процесу квазідробового ефекту, визначеного на відрізку, за криву, задану деякою неперервною функцією. Такі оцінки можуть бути застосовані при дослідженні процесів дробового ефекту, які виникають у задачах фінансової математики, теорії телекомунікаційних мереж тощо.

Список використаних джерел

1. *Василик О.І.* Властивості строго φ-субгауссових процесів квазі-дробового ефекту // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2019. – Вип. 101. – С. 49–62.

2. *Василик О.І.* Оцінювання розподілу супремуму строго φ-субгауссового процесу квазідробового ефекту // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2019. – №2. – С.9 – 18.

3. *Василик О.І.* φ-Субгауссові випадкові процеси / О.І. Василик, Ю.В. Козаченко, Р.Є.

Ямненко. – К: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. – 231 с.

4. *Дарійчук І.В.* Випадкові процеси з просторів Орліча / І.В. Дарійчук, Ю.В. Козаченко, М.М. Перестюк. – Чернівці: "Золоті литаври", 2011. – 212 с.

5. *Buldygin V. V.*, Metric Characterization of Random Variables and Random Processes / V. V. Buldygin, Yu. V. Kozachenko. – American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. – 257 p.

6. *Dariychuk I. V.* Some properties of pre-Gaussian shot noise processes / I. V. Dariychuk, Yu. V. Kozachenko // Stochastic Analysis and Random Dynamics. International Conference. Abstracts, Lviv, Ukraine, 2009. – C. 57–59.

7. *Dariychuk I. V.* The distribution of the supremum of Θ-pre-Gaussian shot noise processes / I. V. Dariychuk, Yu. V. Kozachenko // Theory of Probability and Mathematical Statistics, 2010. – No. 80. – P.85–100.

8. *Giuliano Antonini R.* Space of φ-sub-Gaussian random variables / R. Giuliano Antonini, Yu. V. Kozachenko, T. Nikitina. // Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. (5), 2003. – 27. – P.92–124.

9. Koops D. T. Networks of $\cdot/G/\infty$ Queues with Shot-Noise-Driven Arrival Intensities / D. T. Koops, O. J. Boxma, and M. R. H. Mandjes // Queueing Systems, August 2016, DOI: 10.1007/s11134-017-9520-7.

10. *Kozachenko Yu.* Upper estimate of overrunning by $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ random process the level specified by continuous function /Yu. Kozachenko, R. Yamnenko, O. Vasylyk // Random Oper. Stoch. Equ., 2005. – 13, no. 2. – P.111–128.

11. *Krasnosel'skii M. A.* Convex Functions and Orlicz Spaces. / M. A. Krasnosel'skii, Ya. B. Rutickii. – Moscow, 1958 (in Russian). English translation: P.Noordhoff Ltd, Groningen, 1961. – 249p.

12. *Schmidt T.* Catastrophe insurance modeled by shot-noise processes // Risks, ISSN 2227-9091, MDPI, Basel, 2014. – 2, Iss. 1. – P.3–24. – http://dx.doi.org/10.3390/risks2010003.

13. *Schmidt T.* Shot-noise processes in finance // arXiv:1612.06616v1, 2016.

14. *Vasylyk O. I.* Strictly φ-sub-Gaussian quasi shot noise processes // Statistics, Optimization and Information Computing, 2017. – 5. P.109–120.

15. *Yamnenko R.* Random process from the class $V(\varphi, \psi)$: Exceeding a curve / R. Yamnenko, O. Vasylyk // Theory of Stochastic Processes. – 2007. – Vol.13 (29), no.4. – P. 219–232.

References

1. VASYLYK, O.I. (2019) Properties of strictly φ-sub-Gaussian quasi shot noise processes, *Teoriya Imovirnostei ta Matematychna Statystyka*, 2(101), p. 49–62.

2. VASYLYK, O.I. (2019) Estimation of distribution of suprema of a strictly φ-sub-Gaussian quasi shot noise process, *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics* Iss.2., p.9 – 18.

3. VASYLYK, O. I., KOZACHENKO, YU. V., YAMNENKO, R. E. (2008) *φ-sub-Gaussian random process*, Kyiv: Vydavnycho-Poligrafichnyi Tsentr "Kyivskyi Universytet", 231 p. (In Ukrainian)

4. DARIYCHUK, I. V., KOZACHENKO, YU. V., and PERESTYUK, M.M. (2011) *Stochastic processes from Orlicz spaces.* Chernivtsi: "Zoloti lytavry", 212 p. (In Ukrainian)

5. BULDYGIN, V. V., KOZACHENKO, YU. V. (2000) *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes.* American Mathematical Society, Providence, RI, 257 p.

6. DARIYCHUK, I. V., KOZACHENKO, YU. V. (2009) Some properties of pre-Gaussian shot noise processes. *Stochastic Analysis and Random Dynamics. International Conference. Abstracts.* Lviv, Ukraine, p.57–59.

7. DARIYCHUK, I. V., KOZACHENKO, YU. V. (2010) The distribution of the supremum of Θ-pre-Gaussian shot noise processes. *Theory of Probability and Mathematical Statistics.* No.80, p.85–100.

8. GIULIANO ANTONINI, R., KOZACHENKO, YU. V., NIKITINA, T. (2003) Space of φ-sub-Gaussian random variables. *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl.* (5) 27, p.92–124.

9. KOOPS, D. T., BOXMA, O. J. AND MANDJES, M. R. H. (2016) Networks of $\cdot/G/\infty$ Queues with Shot-Noise-Driven Arrival Intensities. *Queueing Systems.* August 2016, DOI: 10.1007/s11134-017-9520-7.

10. KOZACHENKO, YU., YAMNENKO, R., VASYLYK, O. (2005) Upper estimate of overrunning by $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ random process the level specified by continuous function. *Random Oper. Stoch. Equ.* 13, no. 2, p.111–128.

11. KRASNOSEL'SKII, M. A., RUTICKII, YA. B. (1961) *Convex Functions and Orlicz Spaces.* Moscow, 1958 (in Russian). English translation: P.Noordhoff Ltd, Groningen, 249p., 1961.

12. SCHMIDT, T. (2014) Catastrophe insurance modeled by shot-noise processes, *Risks.* ISSN 2227-9091, MDPI, Basel, 2, Iss. 1, p.3–24. http://dx.doi.org/10.3390/risks2010003.

13. SCHMIDT, T. (2016) Shot-noise processes in finance. arXiv:1612.06616v1.

14. VASYLYK, O. I. (2017) Strictly φ-sub-Gaussian quasi shot noise processes. *Statistics, Optimization and Information Computing.* 5, p.109–120.

15. YAMNENKO, R., VASYLYK O. (2007) Random process from the class $V(\varphi, \psi)$: Exceeding a curve. *Theory of Stochastic Processes.* Vol.13 (29), no.4, p. 219–232.

Received: 24.11.2020



Моклячук М.П., Ямненко Р.Є., Яневич Т.О., Козаченко Ю.В., Василик О.І., Майборода Р.Є.
Листопад, 2015 р.

УДК 519.21
https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/3.6

О.К.Закусило,[1], *д.ф.-м.н., проф.*
І. К. Мацак[2], *д.ф.-м.н., с.н.с.*

Гранична теорема для часу першого перетину рівня регенеруючим процесом

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова, 2/6,
e-mail: zakusylo@univ.net.ua
[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова, 2/6,
e-mail: i.m.k@ukr.net

O. K. Zakusylo[1], *Full Professor, Dr.Hab.*
I. K.Matsak[2], *Dr.Hab.*

Limits theorem of first passages times to regenerative processes

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, 2/6, Glushkova str.,
e-mail: zakusylo@univ.net.ua
[2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, 2/6, Glushkova str.,
e-mail: i.m.k@ukr.net

Присв'ячується пам'яті Ю.В.Козаченка, нашого вчителя і друга.

Анотація.

Установлюється загальна гранична теорема для часу першого перетину рівня регенеруючим процесом. Доведення грунтується на одній важливій лемі для деяких випадкових сум. Наводяться приклади застосувань до задач теорії масового обслуговування та теорії надійності.

Ключові слова: Регенеруючі процеси, випадкові суми, системи масового обслуговування .

Abstract.

The current work continues the author's investigation in the field of extreme values analysis. The investigation is concerned with the first passage time of a level u for a wide class of regenerative random processes. The common statement of the problem in most of works in the field under consideration dealt with cases when time of observation, t, and u tend to infinity. Alternatively, we investigate the case when t tends to infinity, whereas u is a fixed number. We establish a general limit theorem for the first passage time of a level u by a regenerative process. This topic is closely associated with the asymptotic behavior of extreme values of regenerative processes. In proving the main result, we establish an important lemma concerning the asymptotic behavior of probabilities for a class of random sums, which may be of independent interest. Necessity of the study of such sums occurs in many areas: mathematical reliability theory, queuing theory, some statistical physics problems. In addition, the work provides examples of applications of the obtained general results to some problems, which arise in applied areas: model of counters of type Geiger-Muller, estimation of the reliability of a redundant system with recovery, the problem of the first passage time of a level u by queue length in the queuing system M/M/1.

Key Words: regenerative processes, random sums, queuing systems.

Статтю представив д.ф.-м.н. Моклячук М.П.

1 Вступ. Основна теорема

Розглянемо регенеруючий випадковий процес (в.п.) $X(t), t \geqslant 0$,

$$X(t) = \xi_k(t - S_{k-1}), \quad \text{при} \quad t \in [S_{k-1}, S_k),$$

де $S_k = T_1 + \ldots + T_k, k \geqslant 1, \quad S_0 = 0, \quad \pounds_k = (T_k, \xi_k(t)), \quad k \geqslant 1,$ нескінченна послідовність незалежних циклів, однаково розподілених з циклом $\pounds = (T, \xi(t))$ [1]. Точки S_k називають моментами регенерації, а проміжок $[S_{k-1}, S_k)$ – k - м періодом регенерації. Регенеруючий в.п. досить популярний і важливий об'єкт теорії ймовірностей (див., наприклад, [1], [2], гл.11, §8,).

На в.п. $\xi_i(t)$ будемо накладати умову сепарабельності. Тоді можна розглянути наступні величини:

$$\bar{X}(t) = \sup_{0 \leqslant s < t} X(s), \quad t \geqslant 0,$$

© О.К.Закусило, І.К. Мацак, 2020

$$Z_k = \sup_{S_{k-1} \leqslant s < S_k} X(s), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Із означення зрозуміло, що (Z_k) - це послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин (н.о.р.в.в.). Будемо вважати, що Z_k майже напевне (м.н.) скінчена в.в., для якої

$$0 < q(u) = q_X(u) = \mathbf{P}(Z_1 \geqslant u) < 1. \tag{1}$$

Позначимо через $\mathfrak{T}(u)$ момент першого перетину процесом $X(t)$ рівня u, тобто

$$\mathfrak{T}(u) = \mathfrak{T}_X(u) = \inf(t \geqslant 0 : \quad X(t) \geqslant u).$$

І нехай $P_{\mathfrak{T}(u)}(t) = \mathbf{P}(\mathfrak{T}(u) \geqslant t)$. Нас буде цікавити асимптотична поведінка ймовірності $P_{\mathfrak{T}(u)}(t)$ при великих t. В силу імплікації

$$\forall t > 0 \quad \{\bar{X}(t) \leqslant u\} \Leftrightarrow \{\mathfrak{T}(u) \geqslant t\}, \tag{2}$$

наша задача близька до задачі про асимптотику ймовірності $\mathbf{P}(\bar{X}(t) \leqslant u)$.

Таким чином ясно, що ця тематика тісно пов'язана з асимптотикою екстремальних значень відповідних процесів (див. [3], [4], [5], [6] та літературу там). При цьому звичайно припускається, що змінні t та u відповідним чином необмежено зростають. Відмінність даної роботи полягає в тому, що ми досліджуємо випадок коли $t \to \infty$, а u - фіксоване число.

Щоб сформулювати теорему, введемо деякі необхідні позначення та умови. Нехай $\hat{T}$ - це або час досягнення рівня u на одному циклі регенерації, або тривалість циклу, якщо на ньому рівень u не досягається. Покладемо

$$F_T(t) = \mathbf{P}(T < t), \quad F_{\hat{T}}(t) = \mathbf{P}(\hat{T} < t),$$

$$F_{T,u}(t) = \mathbf{P}(T_1 < t, Z_1 < u),$$

$\kappa > 0$ - корінь рівняння

$$\int_0^\infty \exp(\kappa t) dF_{T,u}(t) = 1, \tag{3}$$

$$\alpha = \int_0^\infty t \exp(\kappa t) dF_{T,u}(t) < \infty, \tag{4}$$

$$\beta = \int_0^\infty (1 - F_{\hat{T}}(t)) \exp(\kappa t) dt < \infty. \tag{5}$$

Теорема 1. *Нехай $X(t), t \geqslant 0$, регенеруючий випадковий процес, розподіл $F_{T,u}(t)$ не є арифметичним, u - фіксоване число, для якого виконується умова (1). Припустимо, що існує $\kappa > 0$ - корінь рівняння (3) і виконуються умови (4), (5).*

Тоді

$$\lim_{t \to \infty} P_{\mathfrak{T}(u)}(t) \exp(\kappa t) = \frac{\beta}{\alpha}, \tag{6}$$

причому $\beta_* \leqslant \beta \leqslant \beta^*$, *де*

$$\beta_* = \frac{q(u)}{\kappa}, \quad \beta^* = \int_0^\infty (1 - F_T(t)) \exp(\kappa t) dt < \infty.$$

Зауваження 1. Припустимо, що випадковий процес $X(t), t \geqslant 0$, задовольняє умови теореми 1. Тоді наслідком імплікації (2) та (6) буде така асимптотична рівність:

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{P}(\bar{X}(t) \leqslant u) \exp(\kappa t) = \frac{\beta}{\alpha}. \tag{7}$$

Доведення теореми 1 буде грунтуватися на твердженні про асимптотику ймовірностей для одного класу випадкових сум, яке можливо має і самостійний інтерес. Необхідність дослідження подібних сум виникає у багатьох областях (математична теорія надійності, теорія масового обслуговування, деякі статистичні задачі фізики) (див. [7], [8], [9], [10],[11], [12]).

Окрім того, у роботі наводиться ряд прикладів застосувань отриманих загальних результатів про час першого перетину рівня до деяких випадкових процесів, які виникають в прикладних задачах.

2 Одна лема для випадкових сум

Нехай ζ та ϵ випадкові величини такі, що

$$\mathbf{P}(\epsilon = 1) = q, \quad \mathbf{P}(\epsilon = 0) = 1 - q, \quad 0 < q < 1,$$

$$\mathbf{P}(\zeta \geqslant 0) = 1, \quad \mathbf{P}(\zeta = 0) < 1.$$

В загальному випадку в.в. ζ та ϵ залежні між собою.

Розглянемо послідовність (ζ_n, ϵ_n) незалежних копій пари (ζ, ϵ) . Далі визначимо випад-

кову суму S_ν :

$$S_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} \zeta_i, \tag{8}$$

де

$$\nu = \min(n \geqslant 1 : \quad \epsilon_n = 1).$$

Добре відомо, що ν має геометричний розподіл

$$\mathbf{P}(\nu = n) = q(1-q)^{n-1}, \quad n \geqslant 1,$$

Якщо в.в. ζ та ϵ незалежні, то S_ν називають геометричною сумою. Основні результати для геометричних сум та відповідну бібліографію можна знайти в книжці [9]. Найбільш відомий результат тут - це теорема Реньї:

$$\lim_{q\to 0} \mathbf{P}(qS_\nu < t) = 1 - \exp(-\frac{t}{a}). \tag{9}$$

де $a = \mathbf{E}\zeta$.

Відомо [12], що при широких умовах рівність (9) залишиться вірною і для загальних сум виду (8)(достатньо, щоб в.в. ζ була рівномірно інтегровною по q).

Далі будемо вважати, що в.в. S_ν задається рівністю (8) і покладемо

$$\begin{aligned} F_\zeta(t) &= \mathbf{P}(\zeta < t), \quad F_{\zeta,0}(t) = \mathbf{P}(\zeta < t, \epsilon = 0), \\ F_S(t) &= \mathbf{P}(S_\nu < t), \quad P_S(t) = 1 - F_S(t). \end{aligned}$$

У наступній лемі установлюється асимптотика ймовірності $P_S(t)$, коли величина q фіксована, а $t \to \infty$.

Лема 1. *Нехай розподіл $F_{\zeta,0}(t)$ не є арифметичним, q фіксоване число, $0 < q < 1$. Якщо існує $\kappa > 0$ таке, що*

$$\int_0^\infty \exp(\kappa t) dF_{\zeta,0}(t) = 1, \tag{10}$$

і

$$\alpha = \int_0^\infty t \exp(\kappa t) dF_{\zeta,0}(t) < \infty, \tag{11}$$

$$\beta = \int_0^\infty (1 - F_\zeta(t)) \exp(\kappa t) dt < \infty, \tag{12}$$

то

$$\lim_{t\to\infty} P_S(t) \exp(\kappa t) = \frac{\beta}{\alpha}. \tag{13}$$

Доведення леми 1. У роботі [12] установлено, що функція $P_S(t)$ задовольняє таке інтегральне рівняння

$$P_S(t) = 1 - F_\zeta(t) + \int_0^t P_S(t-y) dF_{\zeta,0}(y). \tag{14}$$

Подальше доведення, окрім рівності (14), буде спиратися на відомі міркування (див. [2], гл.11, §6), які використовувались при дослідженні асимптотики процесів відновлення з обривами.

Домножимо праву і ліву частини рівності (14) на $\exp(\kappa t)$. Тоді отримаємо наступне рівняння відновлення

$$Z(t) = z(t) + \int_0^t Z(t-y) d\tilde{F}(y), \tag{15}$$

де

$$Z(t) = P_S(t)\exp(\kappa t), \quad z(t) = (1 - F_\zeta(t))\exp(\kappa t),$$

$$\tilde{F}(t) = \int_0^t \exp(\kappa y) dF_{\zeta,0}(y).$$

За умовою (12) функція $z(t)$ інтегровна на $(0,\infty)$, а функція $z(t)\exp(-\kappa t)$ очевидно не зростаюча. Тому $z(t)$ безпосередньо інтегровна за Ріманом ([13], гл.6, §4, твердження 6.4.1). Звідси та рівності (15) за теоремою відновлення (альтернативна форма, див.[2], гл.11, §1) маємо: при $t \to \infty$

$$P_S(t)\exp(\kappa t) = Z(t) \to \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty z(t)dt = \frac{\beta}{\alpha},$$

що еквівалентно (13).

□

Припустимо, що в.в. ζ та ϵ незалежні, тобто S_ν - геометрична сума. Тоді
$F_{\zeta,0}(t) = (1-q)F_\zeta(t), \quad \kappa > 0$, визначається із рівності

$$\int_0^\infty \exp(\kappa t) dF_\zeta(t) = \frac{1}{1-q}, \tag{16}$$

$$\beta = \int_0^\infty (1 - F_\zeta(t))\exp(\kappa t)dt = \frac{1}{\kappa}(-1 + \frac{1}{1-q}) = \frac{q}{\kappa(1-q)}.$$

Таким чином із леми 1 маємо наступний

Наслідок 1. *Нехай у випадку геометричних сум S_ν розподіл $F_\zeta(t)$ не є арифметичним, q фіксоване число, $0 < q < 1$. Якщо існує $\kappa > 0$ корінь рівняння (16) і*

$$\int_0^\infty t\exp(\kappa t)dF_\zeta(t) < \infty,$$

то

$$\lim_{x\to\infty} P_S(t)\exp(\kappa t) =$$

$$= \frac{q}{\kappa(1-q)^2\int_0^\infty t\exp(\kappa t)dF_\zeta(t)}. \qquad (17)$$

Наслідок 1 - це відомий результат *H.Cramér* (див. [9], гл.4).

Зауваження 2. Припустимо, що в.в. ζ із наслідку 1 задовольняє такі умови:

$$\exists s_0, 0 < s_0 \leqslant \infty, \quad \text{таке, що}$$

$$\forall s \in (0, s_0) \quad \mathbf{E}\exp(s\zeta) < \infty, \qquad (18)$$

$$\text{при} \quad s \uparrow s_0 \quad \mathbf{E}\exp(s\zeta) \uparrow \infty. \qquad (19)$$

Тоді існує існує $\kappa > 0$ корінь рівняння (16) [3].

Відзначимо тут також наступну просту лему для геометричних сум, яка буде нам потрібна при доведенні теореми 1.

Лема 2. *Нехай в.в. ζ та є незалежні, S_ν - геометрична сума, визначена рівністю (8). Тоді*

$$\mathbf{P}(\sum_{k=1}^{\nu-1}\zeta_k \geqslant t) = (1-q)\mathbf{P}(S_\nu \geqslant t). \qquad (20)$$

(доведення леми 3 наводиться в [14]).

3 Доведення теореми 1

Покладемо

$$\epsilon_k(u) = I(Z_k \geqslant u),$$

$$\nu(u) = \min(k \geqslant 1: \quad \epsilon_k(u) = 1),$$

де через $I(A)$ позначаємо індикатор події A.

І нехай

$$\hat{T}_k \quad = \quad \left\{ \begin{array}{ll} \eta_k, & \text{при} \quad \epsilon_k(u) = 1, \\ T_k, & \text{у противному випадку,} \end{array} \right\}$$

тут η_k - це час до перетину рівня u на k - му циклі при умові, що такий перетин відбудеться, тобто

$$\eta_k = \inf(t \geqslant 0 : \xi_k(t) \geqslant u/\epsilon_k(u) = 1).$$

Фактично, $(\hat{T}_k)$ - це послідовність незалежних копій в.в. $\hat{T}$, яка була введена вище.

Тоді маємо наступне зображення

$$\mathfrak{T}(u) = \sum_{k=1}^{\nu(u)}\hat{T}_k. \qquad (21)$$

Причому за побудовою в.в. $\hat{T}_k$

$$\mathbf{P}(\hat{T}_k < t,\, \epsilon_k(u) = 0) =$$

$$\mathbf{P}(T_k < t,\, \epsilon_k(u) = 0) = F_{T,u}(t).$$

Таким чином у відповідності з лемою 1 із рівності (21) одержуємо:
при $t \to \infty$

$$P_{\mathfrak{T}(u)}(t)\exp(\kappa t) \to \frac{\beta}{\alpha},$$

де κ, β та α визначені в теоремі 1.

Окрім того очевидно, що $\hat{T}_k \leqslant T_k$ майже напевно (м.н.). А отже $\beta \leqslant \beta^*$.

Залишається установити оцінку знизу

$$\frac{q}{\kappa} = \beta_* \leqslant \beta. \qquad (22)$$

Почнемо із очевидної нерівності

$$\sum_{k=1}^{\nu(u)-1}\hat{T}_k \leqslant \mathfrak{T}(u) \quad \text{м.н.} \qquad (23)$$

Далі введемо н.о.р.в.в. (T_k^*), які не залежать від $\nu(u)$ і задовольняють рівності

$$\mathbf{P}(T_k^* < t) = \mathbf{P}(T_k < t/\epsilon_k = 0) = \frac{1}{1-q}F_{T,u}(t).$$

Щоб оцінити випадкову суму зліва в (23), представимо її геометричною сумою(правда без одного доданка)

$$\sum_{k=1}^{\nu(u)-1}\hat{T}_k = \sum_{k=1}^{\nu(u)-1}T_k \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{\nu(u)-1}T_k^*, \qquad (24)$$

позначення $\xi_1 \stackrel{d}{=} \xi_2$ означає, що в.в. ξ_1, ξ_2 мають однаковий розподіл.

Збираючи разом рівність (24), наслідок 1 та лему 2, одержимо

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}(\sum_{k=1}^{\nu(u)-1}\hat{T}_k\geqslant t)\exp(\kappa t)=$$

$$=\lim_{t\to\infty}(1-q)\mathbf{P}(\sum_{k=1}^{\nu(u)}T_k^*\geqslant t)\exp(\kappa t)=\frac{q}{\kappa\alpha}.$$

Остання рівність та нерівність (23) і дають оцінку (22). □

4 Приклади

Приклад 1. (Лічильник Гейгера-Мюллера). Такий лічильник використовується для підрахунку космічних частинок, які надійшли в деяку область простору. Він діє наступним чином ([1], [2], гл.11, §5): після надходження частинки в лічильник відбувається розряд на протязі випадкового часу η. Під час розряду лічильник не регіструє нові частинки, які надходять.

Позначимо через $\mathfrak{T}$ час, на протязі якого лічильник не втратить жодної частинки, $P_{\mathfrak{T}}(t)=\mathbf{P}(\mathfrak{T}\geqslant t)$. Вважаємо, що в момент $t_0=0$ лічильник порожній, а $t_1,t_2,\dots,t_k,\dots$ моменти надходження частинок, $\tau_k=t_{k+1}-t_k, k\geqslant 0$.

Звичайно припускається, що частинки утворюють пуассонівський потік з деяким параметром λ, тобто $\mathbf{P}(\tau_k<t)=1-\exp(-\lambda t)$, $t\geqslant 0$.

Нехай η_k- це тривалість розряду частинки, яка надійшла в лічильник в момент t_k, (τ_k) та (η_k) незалежні випадкові послідовності,

$$\mathbf{P}(\eta_k\leqslant t)=G(t),\quad k\geqslant 1,\quad G(+0)=0,$$

і

$$\epsilon_k=I(\tau_k<\eta_k), k\geqslant 1,\quad \nu=\min(k\geqslant 1:\quad \epsilon_k=1). \tag{25}$$

Тоді має місце таке зображення

$$\mathfrak{T}=\tau_0+S_\nu,\quad S_\nu=\sum_{i=1}^{\nu}\tau_i. \tag{26}$$

Спочатку, спираючись на рівності (26) та лему 1, знайдемо асимптотику ймовірності $P_S(t)$. Покладемо

$$\zeta_i=\tau_i, i\geqslant 1,\quad F_\zeta(t)=1-\exp(-\lambda t),$$

$$q=\mathbf{P}(\tau_1<\eta_1)=\int_0^\infty(1-\exp(-\lambda t))dG(t),$$

$$F_{\zeta,0}(t)=\mathbf{P}(\tau_1<t,\tau_1\geqslant\eta_1)=$$

$$=\lambda\int_0^t G(x)\exp(-\lambda x)dx.$$

Таким чином рівняння (14) для даного прикладу матиме вигляд

$$P_S(t)=\exp(-\lambda t)+\lambda\int_0^t P_S(t-x)G(x)\exp(-\lambda x)dx. \tag{27}$$

Важливий параметр κ знаходимо із рівності

$$\lambda\int_0^\infty G(t)\exp(-(\lambda-\kappa)t)dt=1. \tag{28}$$

Відзначимо, що інтеграл зліва в (28) при $\kappa=0$ менший за 1, а при $\kappa\uparrow\lambda$ неперервно зростає до ∞. Тому корінь κ рівняння (28) існує і $0<\kappa<\lambda$.

Далі за формулами (11) та (12) знаходимо параметри α та β:

$$\alpha=\int_0^\infty t\exp(\kappa t)dF_{\zeta,0}(t)=$$

$$=\lambda\int_0^\infty t\exp(-(\lambda-\kappa)t)G(t)d(t)<\infty \tag{29}$$

$$\beta=\int_0^\infty\exp(-\lambda t)\exp(\kappa t)dt=\frac{1}{\lambda-\kappa}. \tag{30}$$

Щоб отримати асимптотику $P_S(t)$ застосуємо лему 1

$$\lim_{t\to\infty}P_S(t)\exp(\kappa t)=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{1}{\alpha(\lambda-\kappa)}, \tag{31}$$

де α визначено формулою (29).

На наступному кроці грунтуючись на співвідношенні (31), виведемо асимптотику ймовірності $P_{\mathfrak{T}}(t)$.

Із рівностей (26) зрозуміло, що подія $\{\mathfrak{T}\geqslant t\}$ відбувається, коли

$$\{\tau_0\geqslant t\}\quad\text{або}\quad\{\tau_0=x\leqslant t\}\bigcap\{S_\nu\geqslant t-x\}.$$

Підсумовуючи за всіма можливими x, одержимо

$$P_{\mathfrak{T}}(t) = \exp(-\lambda t) + \lambda \int_0^\infty P_S(t-x)\exp(-\lambda x) I(x \leqslant t) dx.$$

Так само, як і вище у лемі 1, домножимо останню рівність на $\exp(\kappa t)$

$$P_{\mathfrak{T}}(t)\exp(\kappa t) = \exp(-(\lambda-\kappa)t) + \lambda \int_0^\infty P_S(t-x)\exp(\kappa(t-x))\exp(-(\lambda-\kappa)x) I(x \leqslant t) dx. \quad (32)$$

Очевидно, що $\exp(-(\lambda-\kappa)t) \to 0$ при $t \to \infty$. А отже залишається знайти асимптотику інтегралу в (32).

Згідно рівності (31)

$$\sup_{t>0} P_S(t)\exp(\kappa t) = C < \infty.$$

Тому і весь підінтегральний вираз в (32) обмежений інтегровною функцією
$C\lambda\exp(-(\lambda-\kappa)x)$, тобто можна застосувати теорему Лебега про перехід до границі під інтегралом.

Ще раз скориставшись рівністю (31), одержимо: $\forall x > 0$, при $t \to \infty$

$$P_S(t-x)\exp(\kappa(t-x)) I(x \leqslant t) \to \frac{1}{\alpha(\lambda-\kappa)}.$$

Тому за теоремою Лебега

$$\lim_{t\to\infty} P_{\mathfrak{T}}(t)\exp(\kappa t) =$$

$$= \frac{\lambda}{\alpha(\lambda-\kappa)} \int_0^\infty \exp(-(\lambda-\kappa)x)dx = \frac{\lambda}{\alpha(\lambda-\kappa)^2}. \quad (33)$$

Приклад 2. (Дубльована система). Оцінка надійності резервованої системи з відновленням - це одна з найбільш важливих задач математичної теорії надійності (див., наприклад, [8], [15]).

Розглянемо простий випадок резервування — дублювання, коли до робочого (основного) елемента приєднують один резервний, який у випадку відмови робочого елемента замінює його. Елемент, який відмовив відновлюється, причому після ремонту його характеристики еквівалентні початковим.

Припустимо, що в системі є одна ремонтна одиниця. Окрім того вважаємо, що резервний елемент під час перебування в резерві не може відмовити("холодний"резерв) . Дубльована система перебуває в робочому стані, коли працює хоча б один елемент, а її відмова наступає, коли обидва елементи не справні.

Будемо припускати, що час безвідмовної роботи основного елемента τ має експоненційний розподіл:

$$\mathbf{P}(\tau < t) = F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad (34)$$

а η — час відновлення(ремонту) має довільний розподіл, $G(t) = \mathbf{P}(\eta < t)$, $G(0+) = 0$. Звичайно вважається, що τ та η н.в.в.

Нехай (τ_k) та (η_k) послідовності незалежних копій в.в. τ та η відповідно.

В.в. (ϵ_k) та ν вводяться так само, як і у попередньому прикладі, за формулами (25). Тоді

$$q = \mathbf{P}(\epsilon_k = 1) = \mathbf{P}(\tau_k < \eta_k) = 1 - \int_0^\infty e^{-\lambda x} dG(x).$$

Далі через $\xi(t)$ позначаємо число несправних елементів системи в момент часу t, $\xi(0) = 0$ майже напевне (м.н.),

$$P_{\mathfrak{T}}(t) = \mathbf{P}(\mathfrak{T} \geqslant t), \quad \mathfrak{T} = \inf(t > 0 : \xi(t) = 2),$$

тобто тут $\mathfrak{T}$ - це час до першої відмови дубльованої системи.

Б.В.Гнєденко ([7], [8]) знайшов інтегральне рівняння, якому задовольняє функція $P_{\mathfrak{T}}(t)$ і вивів формулу для перетворення Лапласа цієї функції. На жаль при загальних припушеннях відносно розподілу $G(t)$ явний вигляд функції $P_{\mathfrak{T}}(t)$ не знаходиться. Але грунтуючись на лемі 1 неважко знайти асимптотику функції $P_{\mathfrak{T}}(t)$ при $t \to \infty$.

Дійсно, для в.в. $\mathfrak{T}$ відоме таке зображення

$$\mathfrak{T} = \tau_0 + \tau_1 + \ldots + \tau_\nu$$

(див. [8], гл.6, §2).

Фактично ми маємо зображення еквівалентне (26). А отже, так само як і у попередньому прикладі, функція $P_{\mathfrak{T}}(t)$ задовольняє асимптотичну рівність (33), в якій κ - це корінь рівняння (28), а параметр α знаходимо за формулою (29).

Зауваження 3. У випадку, коли $F(t)$ довільна неперервна функція розподілу, міркування, наведені вище, дозволяють зробити висновок:
$P_{\mathfrak{T}}(t)$ задовольняє асимптотичну рівність (13), якщо

(i) існує $\kappa > 0$ корінь рівняння

$$\int_0^\infty \exp(\kappa t) G(t) dF(t) = 1, \tag{35}$$

(ii)

$$\alpha = \int_0^\infty t \exp(\kappa t) G(t) dF(t) < \infty, \tag{36}$$

причому параметри κ та α у формулі (13) задаються рівностями (35),(36), а

$$\beta = \frac{1}{\kappa} \left(\int_0^\infty \exp(\kappa t) dF(t) - 1 \right).$$

Приклад 3. (Система масового обслуговування $M/M/1$) .

Розглянемо одноканальну систему масового обслуговування (СМО) , на яку поступає пуассонівський потік заявок з інтенсивністю λ, а час обслуговування η має експоненційний розподіл

$$G(x) = \mathbf{P}(\eta < x) = 1 - \exp(-\mu x), x \geqslant 0.$$

Тобто в загальноприйнятих позначеннях - це СМО типу $M/M/1$ (див. [11], [16]).

Нехай $t_1, \dots, t_n, \dots$ - випадкові моменти надходження заявок в СМО. Тоді
$\tau_n = t_n - t_{n-1}, \quad n \geqslant 1$, - н.о.р.в.в. з функцією розподілу

$$F(x) = \mathbf{P}(\tau_n < x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \geqslant 0.$$

На параметри λ та μ накладемо умову

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1. \tag{37}$$

Під довжиною черги тут і далі будемо розуміти загальне число заявок, які знаходяться на обслуговуванні або чекають його. І позначаємо через $Q(t)$ довжину черги в момент часу t.

Казатимемо, що в момент t СМО знаходиться в стані k, якщо $Q(t) = k$.

Нехай в момент $S_0 = 0$ система порожня, а S_1 - це момент звільнення системи після 1-го періоду зайнятості. Відповідно S_k - це момент звільнення системи після k-го періоду зайнятості.

За умови (37) $Q(t)$ регенеруючий процес з моментами регенерації $S_0, S_1, \dots$ [3], [11].

Нехай

$$\mathfrak{T}(u) = \mathfrak{T}_Q(u) = \inf(t \geqslant 0 : \quad Q(t) \geqslant u).$$

Щоб застосувати теорему 1 для знаходження асмптотики $P_{\mathfrak{T}(u)}(t)$ необхідно обчислити параметри κ, α, β, які задаються формулами (3) - (5).

Зауваження 4. Наша задача тісно пов'язана з класичною задачею про обмежене випадкове блукання з поглинаючими екранами $x = 0$ та $x = u$, та ймовірностями переходів вверх $p = \lambda/(\lambda + \mu)$ та вниз $1 - p = \mu/(\lambda + \mu)$ ([17], гл.14). Так, наприклад, якщо вибрати початковий стан $z = 1$, то ймовірність того, що вкладений ланцюг Маркова СМО на n- у кроці попаде в точку $x = 0$ і при цьому не досягне рівня u, дорівнює ймовірності поглинання в точці $x = 0$ такого випадкового блукання, яке також стартує із точки $z = 1$.

Тому спочатку нагадаємо деякі відомі результати для такого випадкового блукання. Позначимо через $p_{1,0}^{(n)}$ та $p_{1,u}^{(n)}$ ймовірності того, що обмежене випадкове блукання, стартуючи з точки $z = 1$, закінчиться на n- у кроці поглинанням у точці $x = 0$ та $x = u$ відповідно. І нехай

$$P_{1,0}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{1,0}^{(n)} s^n, \quad P_{1,u}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{1,u}^{(n)} s^n \quad -$$

твірні функції розподілів $(p_{1,0}^{(n)})$ та $(p_{1,u}^{(n)})$.

Відомо, що при умові $2\sqrt{p(1-p)}\, s \leqslant 1$

$$P_{1,0}(s) = \frac{1-p}{p} \frac{h_1^{u-1}(s) - h_2^{u-1}(s)}{h_1^u(s) - h_2^u(s)}, \tag{38}$$

$$P_{1,u}(s) = \frac{h_1(s) - h_2(s)}{h_1^u(s) - h_2^u(s)}, \tag{39}$$

де

$$h_1(s) = \frac{1 + (1 - 4p(1-p)s^2)^{1/2}}{2ps},$$

$$h_2(s) = \frac{1 - (1 - 4p(1-p)s^2)^{1/2}}{2ps}.$$

Насправді функції $P_{1,0}(s)$ та $P_{1,u}(s)$ зображуються, як відношення деяких многочленів (корінь $(1-4p(1-p)s^2)^{1/2}$ скорочується). Причому

для $2\sqrt{p(1-p)}\,s > 1$ формули (38),(39) перепишуться у вигляді

$$P_{1,0}(s) = (\frac{1-p}{p})^{1/2}\,\frac{\sin(u-1)\varphi}{\sin u\varphi}, \qquad (40)$$

$$P_{1,u}(s) = (\frac{p}{1-p})^{1/2}\,\frac{\sin\varphi}{\sin u\varphi}, \qquad (41)$$

де змінні φ та s пов'язані рівністю

$$\frac{1}{\cos\varphi} = 2\sqrt{p(1-p)}\,s.$$

(див. [17], гл.14, §4, 5).

Далі, повторюючи міркування із [17], отримаємо: при $u > 2$ найменший корінь знаменників в (40), (41), який не є корнем чисельників, задається рівністю

$$s^* = \frac{1}{2\sqrt{p(1-p)}\cos\frac{\pi}{u}}.$$

Звідси та рівностей (38) - (41) випливають співвідношення:

$$0 < s < s^* \Rightarrow \quad P_{1,0}(s) < \infty, \quad P_{1,u}(s) < \infty,$$

$$s \uparrow s^* \Rightarrow \quad P_{1,0}(s) \uparrow \infty, \quad P_{1,u}(s) \uparrow \infty. \qquad (42)$$

Повернемось до задачі знаходження параметрів κ, α, β у випадку СМО $M/M/1$. Обчислимо значення інтегралу

$$J(\gamma) = \int_0^\infty \exp(\gamma t) dF_{T,u}(t), \quad \gamma > 0.$$

Нехай τ_1 - момент надходження першої заявки в СМО, T_1^b - це або час досягнення процесом $Q(t)$ точки $x = u$ на першому циклі регенерації при умові, що він стартує із точки $z = 1$ і $\epsilon_1 = 1$, або тривалість першого періоду зайнятості, якщо $\epsilon_1 = 0$. Ясно, що

$$\hat{T}_1 = \tau_1 + T_1^b, \quad I(\epsilon_1 = 0) = I(\sup_{0 \leqslant s < T_1} Q(s) < u).$$

Тоді, скориставшись незалежністю в.в. τ_1 від ϵ_1 та T_1^b, отримаємо

$$J(\gamma) = \mathbf{E}\exp(\gamma(\tau_1 + T_1^b))I(\epsilon_1 = 0) = \mathbf{E}\exp(\gamma\tau_1)\mathbf{E}\exp(\gamma T_1^b)I(\epsilon_1 = 0) = J_1(\gamma)J_2(\gamma). \qquad (43)$$

Перший співмножник в (43) рахується просто

$$J_1(\gamma) = \mathbf{E}\exp(\gamma\tau_1) = \frac{\lambda}{\lambda - \gamma}. \qquad (44)$$

Щоб знайти $J_2(\gamma)$, позначимо через ν_1 мінімальний час переходу вкладеного ланцюга Маркова СМО із стану $x = 1$ в один із станів $x = 0$ чи $x = u$ і представимо в.в. T_1^b наступним чином:

$$T_1^b = \sum_{k=1}^{\nu_1} \tilde{\tau}_k,$$

де $\tilde{\tau}_k$ - це час сидіння процесу $Q(t)$ на k- у кроці в деякому стані i_k. Відзначимо, що в.в. $\tilde{\tau}_k$ не залежить від вкладеного ланцюга Маркова і має експоненційний розподіл з параметром $(\lambda + \mu)$.

Звідси, враховуючи зауваження 4, маємо

$$\begin{aligned} J_2(\gamma) &= \mathbf{E}\exp(\gamma\sum_{k=1}^{\nu_1}\tilde{\tau}_k)I(\epsilon_1 = 0) = \sum_{n\geqslant 1} p_{1,0}^{(n)}\mathbf{E}\exp(\gamma\sum_{k=1}^{n}\tilde{\tau}_k) \\ &= \sum_{n\geqslant 1} p_{1,0}^{(n)}(\mathbf{E}\exp(\gamma\tilde{\tau}_k))^n = \sum_{n\geqslant 1} p_{1,0}^{(n)}(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu-\gamma})^n = P_{1,0}(s_\gamma), \end{aligned} \qquad (45)$$

де $s_\gamma = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu-\gamma}$.

Тобто, згідно (43)-(45)

$$J(\gamma) = \frac{\lambda}{\lambda-\gamma}P_{1,0}(s_\gamma). \qquad (46)$$

Очевидно, що функція $J_1(\gamma)$ монотонно зростає і неперервна на інтервалі $[0, \lambda)$. Причому $J_1(\gamma) \uparrow \infty$ коли $\gamma \uparrow \lambda$.

Подібне зауваження стосується і функції $J_2(\gamma)$. Дійсно, із (42), (45) випливає, що $J_2(\gamma) \uparrow \infty$ при $s_\gamma \uparrow s^*$ або, що еквівалентно, при $\gamma \uparrow \gamma^* = (\lambda+\mu)(1 - 2\sqrt{p(1-p)})\cos\frac{\pi}{u}$.

Таким чином інтеграл $J(\gamma)$ на інтервалі $(0, \min(\lambda, \gamma^*))$ монотонно і неперевно зростає до

нескінченості. Причому (див. [3], [6])

$$J(0) = 1 - q(u) < 1, \quad q(u) = (\frac{1}{\rho} - 1)\frac{\rho^n}{1-\rho^n}.$$

А отже, корінь κ рівняння

$$J(\kappa) = \frac{\lambda}{\lambda - \kappa} P_{1,0}(s_\kappa) = 1 \qquad (47)$$

існує, $\kappa \in (0, \min(\lambda, \gamma^*))$, і його можна знайти, скориставшись формулами (38), (40) та, наприклад, простим методом ділення відрізка навпіл.

Перейдемо до обчислення параметра α.

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_0^\infty t\exp(\kappa t) dF_{T,u}(t) = \mathbf{E}(\tau_1 + T_1^b)\exp(\kappa(\tau_1 + T_1^b))I(\epsilon_1 = 0) \\ &= \mathbf{E}\tau_1 \exp(\kappa\tau_1)\mathbf{E}\exp(\kappa T_1^b)I(\epsilon_1 = 0) + \mathbf{E}T_1^b \exp(\kappa T_1^b)I(\epsilon_1 = 0)\mathbf{E}\exp(\kappa\tau_1). \end{aligned} \qquad (48)$$

Просто знаходиться

$$\mathbf{E}\exp(\kappa\tau_1) = \frac{\lambda}{\lambda - \kappa}, \quad \mathbf{E}\tau_1\exp(\kappa\tau_1) = \frac{\lambda}{(\lambda-\kappa)^2}.$$

Наступна формула установлена вище (див. рівності (45))

$$\mathbf{E}\exp(\kappa T_1^b)I(\epsilon_1 = 0) = P_{1,0}(s_\kappa).$$

Ще раз скористаємось зауваженням 4, отримаємо

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}T_1^b\exp(\kappa T_1^b)I(\epsilon_1 = 0) = \mathbf{E}(\sum_{k=1}^{\nu_1}\tilde{\tau}_k)\exp(\kappa\sum_{k=1}^{\nu_1}\tilde{\tau}_k)I(\epsilon_1 = 0) \\ = &\sum_{n\geqslant 1} p_{1,0}^{(n)}\mathbf{E}(\sum_{k=1}^{n}\tilde{\tau}_k)\exp(\kappa\sum_{k=1}^{n}\tilde{\tau}_k) = \sum_{n\geqslant 1} p_{1,0}^{(n)} n\mathbf{E}(\tilde{\tau}_1)\exp(\kappa\tilde{\tau}_1)\mathbf{E}\exp(\kappa\sum_{k=2}^{n}\tilde{\tau}_k) \\ = &\sum_{n\geqslant 1} p_{1,0}^{(n)} n\frac{\lambda+\mu}{(\lambda+\mu-\kappa)^2}(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu-\kappa})^{n-1} = \frac{\lambda+\mu}{(\lambda+\mu-\kappa)^2}P'_{1,0}(s_\kappa) \end{aligned}$$

(очевидно, що усі ряди в останніх рівностях збігаються).

Збираючи отримані формули разом із (48) будемо мати

$$\alpha = \frac{\lambda}{\lambda-\kappa}(\frac{1}{\lambda-\kappa}P_{1,0}(s_\kappa) + \frac{\lambda+\mu}{(\lambda+\mu-\kappa)^2}P'_{1,0}(s_\kappa)). \qquad (49)$$

Залишається знайти параметр β. Маємо

$$\beta = \int_0^\infty (1 - F_{\hat{T}}(t))\exp(\kappa t)dt = \frac{1}{\kappa}(1 - F_{\hat{T}}(t))\exp(\kappa t))|_0^\infty + \frac{1}{\kappa}\int_0^\infty \exp(\kappa t)dF_{\hat{T}}(t). \qquad (50)$$

Спочатку установимо, що при $t \to \infty$

$$(1 - F_{\hat{T}}(t))\exp(\kappa t) \to 0. \qquad (51)$$

Виберемо γ так, щоб виконувались умови

$$\gamma = \kappa + \delta, \quad \delta > 0, \quad \gamma \in (0, \min(\lambda, \gamma^*)).$$

Очевидно, що

$$1 - F_{\hat{T}}(t) \leqslant \exp(-\gamma t)\mathbf{E}\exp(\gamma\hat{T}_1).$$

А отже, щоб установити (51), досить перевірити обмеженість величини $\mathbf{E}\exp(\gamma\hat{T}_1)$.

Міркування тут такі самі, як і у випадку рівності (45):

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \exp(\gamma t)dF_{\hat{T}}(t) &= \mathbf{E}\exp(\gamma\hat{T}_1) = \mathbf{E}\exp(\gamma\hat{T}_1)I(\epsilon_1=0) + \mathbf{E}\exp(\gamma\hat{T}_1)I(\epsilon_1=1)\\ &= \frac{\lambda}{\lambda-\gamma}\Big(\sum_{n\geqslant 1} p_{1,0}^{(n)}\mathbf{E}\exp(\gamma\sum_{k=1}^{n}\tilde{\tau}_k) + \sum_{n\geqslant 1} p_{1,u}^{(n)}\mathbf{E}\exp(\gamma\sum_{k=1}^{n}\tilde{\tau}_k)\Big)\\ &= \frac{\lambda}{\lambda-\gamma}(P_{1,0}(s_\gamma)+P_{1,u}(s_\gamma)) < \infty. \end{aligned} \tag{52}$$

Остання нерівність в (52) випливає із співідношень (42) та умови $\gamma \in (0, \min(\lambda, \gamma^*))$.

Отже перший доданок в правій частині рівності (50) дорівнює $-1/\kappa$.

Аналогічно (52) оцінюємо другий доданок в правій частині рівності (50).

$$\frac{1}{\kappa}\int_0^\infty \exp(\kappa t)dF_{\hat{T}}(t) = \frac{1}{\kappa}\mathbf{E}\exp(\kappa\hat{T}_1) = \frac{\lambda}{\kappa(\lambda-\kappa)}(P_{1,0}(s_\kappa)+P_{1,u}(s_\kappa)). \tag{53}$$

Із рівностей (47),(50),(53) знаходимо параметр β :

$$\beta = \frac{\lambda}{\kappa(\lambda-\kappa)}P_{1,u}(s_\kappa). \tag{54}$$

Таким чином для СМО $M/M/1$ за умови (37) функція $P_{\mathfrak{T}(u)}(t)$ задовольняє рівність (6), причому параметр κ, знаходиться із рівності (47), а параметри α та β задаються формулами (49), (54) відповідно.

Список використаних джерел

1. *Smith, W. L.* Renewal theory and its ramifications. /W. L. Smith // J. Royal Statist. Soc. — 1958.— **20.**—P. 243–302.

2. *Feller, W.* An introduction to probability theory and its applications, Vol.2./ W. Feller. — New York, London, Sydney, Toronto: John Wiley and Sons, 1968. — 752 p.

3. *Asmussen S.* Extreme values theory for queues via cycle maxima. / S. Asmussen // Extremes.–1998. – **1**. – P. 137–168.

4. *Glasserman, P.* Limits of first passages times to rare sets in regenerative processes./ P. Glasserman, S.G. Kou // Ann. Appl. Probab. — (1995). — **5**, P. 424–445.

5. *Iglehart D.L.* Extreme values in the GI/G/1 queue. / D.L. Iglehart // Ann. Math. Statist. — (1972). —**43**, P. 627–635.

6. *Закусило О.К.* Про екстремальні значення деяких регенеруючих процесів. /О.К.Закусило, І.К. Мацак// Теорія Ймовірн. Мат. Статист. — (2017). — **97**, С.58–71 .

7. *Гнеденко Б.В.* О дублировании с восстановлением. / Б.В. Гнеденко // Изв. Акад. Наук СССР, Тех. Кыберн. — (1964).— **5**, С. 111–118.

8. *Gnedenko B.V.* Mathematical methods of relaibility theory / B.V. Gnedenko, Yu.K. Belyaev and A.D. Solovyev. — New York, London: Academic Press, 1969. —524 p.

9. *Kalashnikov V.* Geometric sums : bounds for rare events wits applications / V. Kalashnikov. — Amsterdam: Springer-Science+Business Media. — 1997. — 268 p.

10. *Круглов В.М.* Предельные теоремы для случайных сумм /В.М.Круглов , В.Ю. Королев. — Москва: Издательство Московского Университета, 1990. — 232 с.

11. *Gnedenko B.V.* Introduction to Queueing Theory , 2nd ed. /B.V.Gnedenko, I.N. Kovalenko. — Boston: Mathematical Modeling, vol.5, Birkhäuser, 1989. — 432 p.

12. *Matsak I.K.* On Distributions of One Class of Random Sums and their Applications/I.K.Matsak, M.P.Moklyachuk// Statistics Opt. Inform. Comput. —(2020). — **8**, P. 153–164.

13. *Іксанов О.М.* Випадкові ряди спеціального вигляду, гіллясте випадкове блукання та саморозкладність / О.М. Іксанов. — Київ: KTI-PRINT, 2007. — 192 с.

14. *Закусило О.К.* Оцінки швидкості збіжності в граничній теоремі для екстремальних значень регенеруючих процесів /О.К.Закусило , І.К. Мацак // Укр. Мат. журн. — (2020). — **72**, С. 1064–1081.

15. *Королюк В.С.* Стохастичні моделі систем/В.С.Королюк. — Київ: Либідь, 1993. — 136 с.

16. *Riordan J.* Stochastic service systems/J. Riordan. — New York: John Wiley and Sons, 1962. — 184 p.

17. *Feller W.* An introduction to probability theory and its applications, Vol.1/ W.Feller. — New York, London: John Wiley and Sons, 1957. — 498 p.

References

1. SMITH, W. L. (1958) Renewal theory and its ramifications. *J. Royal Statist. Soc.* . **20**. p. 243–302.

2. FELLER, W. (1968). *An introduction to probability theory and its applications*, Vol.2. New York, London,Sydney, Toronto: John Wiley and Sons.

3. ASMUSSEN, S. (1998) Extreme values theory for queues via cycle maxima. *Extremes.* **1**. p. 137–168.

4. GLASSERMAN, P. and KOU S.G. (1995) Limits of first passages times to rare sets in regenerative processes. *Ann. Appl. Probab.* **5**, p. 424–445.

5. IGLEHART D.L. (1972) Extreme values in the GI/G/1 queue. *Ann. Math. Statist.* **43**, p. 627–635.

6. ZAKUSYLO O.K. and MATSAK I.K. (2017) Pro extremalyni znachennya deyakych regeneruyuchych procesiv . *Theoriya Imovir. Math. Statist.* **97**, p.58–71 .

7. GNEDENKO B.V. (1964) O dublirovanii z vosstanovleniem . *Izv.Akad.Nauk SSSR, Tekh.Kibern.* **5**, p. 111–118.

8. GNEDENKO B.V., BELYAEV YU.K. and SOLOVYEV A.D. (1969) *Mathematical methods of relaibility theory.* New York, London: Academic Press.

9. KALASHNIKOV V. (1997) *Geometric sums : bounds for rare events wits applications.* Amsterdam: Springer-Science+Business Media.

10. KRUGLOV V.M. and KOROLEV V.Yu.(1990) *Predelynye teoremy dlya sluchaynych sum.* Moskva: Izdatelstvo Moskovskogo Universiteta.

11. GNEDENKO B.V. and KOVALENKO I.N. (1989) *Introduction to Queueing Theory* , 2nd ed. Boston: Mathematical Modeling, vol.5, Birkhäuser.

12. MATSAK I.K. and MOKLYACHUK M.P.(2020) *On Distributions of One Class of Random Sums and their Applications*, Statistics Opt. Inform. Comput., **8**, p. 153–164.

13. *IKSANOV O.M.*(2007) *Vypadkovi ryady spetsialynogo vyglyadu, gillyaste vypadkove blukannya ta samoroskladnisty* . Kyiv: KTI-PRINT.

14. *ZAKUSYLO O.K. and MATSAK I.K.* (2020) Otsinky shvydkosti zbignosti v granychniy teoremi dlya extremalynych snacheny regeneruyuchych procesiv, Ukr. Math. J., **72**, p. 1064–1081.

15. *KOROLYUK V.S.* (1993) Stochastychni modeli system. Kyiv: Lybidy.

16. *RIORDAN J.* (1962) Stochastic service systems. New York: John Wiley and Sons..

17. *Feller W.*(1957) An introduction to probability theory and its applications, Vol.1. New York, London: John Wiley and Sons.

Надійшла до редколегії 18.10.2020

УДК 519.21
https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/3.7

М. М. Луз[1], *к. ф.-м. н.*
М. П. Моклячук[2], *д. ф.-м. н., проф.*

Мінімаксно-робастні задачі оцінювання послідовностей з періодично стаціонарними приростами, що спостерігаються з шумом

[1]BNP Paribas Cardif, Kyiv, Ukraine
e-mail: maksym.luz@gmail.com
[2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул. Володимирська 64
e-mail: moklyachuk@gmail.com

M. M. Luz[1], *PhD*
M. P. Moklyachuk[2], *Dr. Sci., Prof.*

Minimax-robust estimation problems for sequences with periodically stationary increments observed with noise

[1]BNP Paribas Cardif, Kyiv, Ukraine
e-mail: maksym.luz@gmail.com
[2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 64 Volodymyrska Str., Kyiv 01601, Ukraine
e-mail: moklyachuk@gmail.com

Досліджується задача оптимального оцінювання лінійних функціоналів від невідомих значень стохастичної послідовності з періодично стаціонарними приростами на основі спостережень послідовності зі стаціонарним шумом. Для послідовностей з відомими спектральними щільностями отримано формули для обчислення значень середньоквадратичних похибок та спектральних характеристик оптимальних оцінок функціоналів. Формули, що визначають найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксно-робастні спектральні характеристики оптимальних лінійних оцінок функціоналів пропонуються у випадку, коли спектральні щільності послідовностей точно невідомі, а вказані множини допустимих спектральних щільностей.
Ключові слова: періодично стаціонарні прирости, мінімаксно-робастна оцінка, найменш сприятлива спектральна щільність, мінімаксно-робастні спектральні характеристики.

The problem of optimal estimation of linear functionals constructed from the unobserved values of a stochastic sequence with periodically stationary increments based on observations of the sequence with stationary noise is considered. For sequences with known spectral densities, we obtain formulas for calculating values of the mean square errors and the spectral characteristics of the optimal estimates of the functionals. Formulas that determine the least favorable spectral densities and the minimax-robust spectral characteristics of the optimal linear estimates of functionals are proposed in the case where spectral densities of the sequence are not exactly known while some sets of admissible spectral densities are specified.
Key Words: periodically stationary increments, minimax-robust estimate, least favorable spectral density, minimax-robust spectral characteristics.

Introduction

The non-stationary and long memory time series models are of constant interest of researchers in the past decade (see, for example, papers by Dudek, Hurd and Wojtowicz [5], Johansen and Nielsen [12], Reisen et al. [38]). These models are used when analyzing data which arise in different field of economics, finance, climatology, air pollution, signal processing.

Since the first edition of the book by Box and Jenkins (1970), autoregressive moving average (ARMA) models integrated of order d are a standard tool for time series analysis. These models are described by the equation

$$\psi(B)(1-B)^d x_t = \theta(B)\varepsilon_t. \qquad (1)$$

where ε_t, $t \in \mathbb{Z}$, are zero mean i.i.d. random variables, $\psi(z)$, $\theta(z)$ are polynomials of p and q degrees respectively with roots outside the unit circle. This integrated ARIMA model is generalized by adding a seasonal component. A new model is described by the equation (see new edition of the book by Box and Jenkins [3] for details)

$$\Psi(B^s)(1-B^s)^D x_t = \Theta(B^s)\varepsilon_t, \qquad (2)$$

where $\Psi(z)$ and $\Theta(z)$ are polynomials of degrees of P and Q respectively which have roots outside the unit circle.

© M. M. Luz, M. P. Moklyachuk, 2020

When the ARIMA sequence determined by equation (1) is inserted into (2) instead of ε_t, we have a general multiplicative model

$$\Psi(B^s)\psi(B)(1-B)^d(1-B^s)^D x_t = \Theta(B^s)\theta(B)\varepsilon_t \tag{3}$$

with parameters $(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$, $d, D \in \mathbb{N}^*$, called SARIMA $(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$ model.

A good performance is shown by models which include a fractional integration, that is when parameters d and D are fractional. We refer to the paper by Porter-Hudak [37] who studied a seasonal ARFIMA model and applied it to the monetary aggregates used by U.S. Federal Reserve.

Another type of non-stationarity is described by periodically correlated, or cyclostationary, processes introduced by Gladyshev [8]. These processes are widely used in signal processing and communications (see Napolitano [35] for a review of recent works on cyclostationarity and its applications). Periodic time series may be considered as an extension of a SARIMA model (see Lund [19] for a test assessing if a PARMA model is preferable to a SARMA one) and are suitable for forecasting stream flows with quarterly, monthly or weekly cycles (see Osborn [36]). Baek, Davis and Pipiras [1] introduced a periodic dynamic factor model (PDFM) with periodic vector autoregressive (PVAR) factors, in contrast to seasonal VARIMA factors. Basawa, Lund and Shao [2] investigated first-order seasonal autoregressive processes with periodically varying parameters.

The models mentioned above are used in estimation of model's parameters and forecast issues. Note, that direct application of the developed results to real data may lead to significant increasing of values of errors of estimates due to the presence of outliers, measurement errors, incomplete information about the spectral, or model, structure etc. This is a reason of increasing interest to robust methods of estimation that are reasonable in such cases. For example, Reisen et al. [39] proposed a semiparametric robust estimator for the fractional parameters in the SARFIMA model and illustrated its application to forecasting of sulfur dioxide SO_2 pollutant concentrations. Solci et al. [41] proposed robust estimates of periodic autoregressive (PAR) model.

Robust approaches are successfully applied to the problem of estimation of linear functionals from unobserved values of stochastic processes. The paper by Grenander [9] should be marked as the first one where the minimax extrapolation problem for stationary processes was formulated as a game of two players and solved. Hosoya [11], Kassam [14], Kassam and Poor [15], Franke [6], Vastola and Poor [42], Moklyachuk [24] – [29], Liu et al. [18] studied minimax extrapolation (forecasting), interpolation (missing values estimation) and filtering (smoothing) problems for the stationary sequences and processes. Recent results of minimax extrapolation problems for stationary vector processes and periodically correlated processes belong to Moklyachuk and Masyutka [31, 32], Moklyachuk and Golichenko (Dubovets'ka) [4, 30] respectively. Processes with stationary increments are investigated by Luz and Moklyachuk [20]–[22]. We also mention works by Moklyachuk and Sidei [33, 34], Masyutka, Moklyachuk and Sidei [23], where the minimax estimates of stationary processes from observations with missed values are investigated. Moklyachuk and Kozak [17] studied the problem of interpolation of stochastic sequences with periodically stationary increments.

In this article we present results of investigation of the estimation problem for stochastic sequences with periodically stationary increments. In Section 1 we give definition of stochastic sequences $\xi(m)$ with periodically stationary (periodically correlated) increments. These nonstationary stochastic sequences combine periodic structure of covariation functions of sequences as well as the integrating one. The section also contains a short review of the spectral theory of vector-valued stationary increment sequences. Section 2 deals with the classical estimation problem for linear functionals in the case where spectral structure of the sequences $\xi(m)$ and $\eta(m)$ are exactly known. Estimates are obtained by representing the sequence $\xi(m)$ with periodically stationary increments as a vector sequence $\vec{\xi}(m)$ with stationary increments and applying the Hilbert space projection technique. In Section 3, we derive the minimax-robust estimates in the case, where spectral densities of sequences are not exactly known while some sets of admissible spectral densities are specified. In Subsection 3.1 we describe relations which determine the least favourable spectral densities and the minimax spectral characteristics of the optimal estimates of linear functionals for some sets of admissible spectral densities which are generalizations

of the corresponding sets of admissible spectral densities described in a survey article by Kassam and Poor [15] for the case of stationary stochastic processes.

1 Stochastic sequences with periodically stationary increments

In this section, we present a brief review of the spectral theory of stochastic sequences with periodically stationary nth increments.

Consider a stochastic sequence $\{\xi(m), m \in \mathbb{Z}\}$. By B_μ denote a backward shift operator with the step $\mu \in \mathbb{Z}$, such that $B_\mu \xi(m) = \xi(m-\mu)$; $B := B_1$. Recall the following definition [22, 43].

Definition 1.1. For a given stochastic sequence $\{\xi(m), m \in \mathbb{Z}\}$, the sequence

$$\xi^{(n)}(m,\mu) = (1-B_\mu)^n \xi(m) = \\ = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \binom{n}{l} \xi(m-l\mu), \quad (4)$$

where $\binom{n}{l} = \frac{n!}{l!(n-l)!}$, is called stochastic nth increment sequence with step $\mu \in \mathbb{Z}$.

The stochastic nth increment sequence $\xi^{(n)}(m,\mu)$ satisfies the following relations:

$$\xi^{(n)}(m,-\mu) = (-1)^n \xi^{(n)}(m+n\mu,\mu),$$

$$\xi^{(n)}(m,k\mu) = \sum_{l=0}^{(k-1)n} A_l \xi^{(n)}(m-l\mu,\mu), \quad k \in \mathbb{N},$$

where coefficients $\{A_l, l = 0,1,2,\ldots,(k-1)n\}$ are determined by the representation

$$(1+x+\ldots+x^{k-1})^n = \sum_{l=0}^{(k-1)n} A_l x^l.$$

Definition 1.2. The stochastic nth increment sequence $\xi^{(n)}(m,\mu)$ generated by stochastic sequence $\{\xi(m), m \in \mathbb{Z}\}$ is wide sense stationary if the mathematical expectations

$$E\xi^{(n)}(m_0,\mu) = c^{(n)}(\mu),$$

$$E\xi^{(n)}(m_0+m,\mu_1)\xi^{(n)}(m_0,\mu_2) = D^{(n)}(m,\mu_1,\mu_2)$$

exist for all $m_0, \mu, m, \mu_1, \mu_2$ and do not depend on m_0. The function $c^{(n)}(\mu)$ is called the mean value of the nth increment sequence $\xi^{(n)}(m,\mu)$ and the function $D^{(n)}(m,\mu_1,\mu_2)$ is called the structural function of the stationary nth increment sequence (or structural function of nth order of the stochastic sequence $\{\xi(m), m \in \mathbb{Z}\}$).

The stochastic sequence $\{\xi(m), m \in \mathbb{Z}\}$ which determines the stationary nth increment sequence $\xi^{(n)}(m,\mu)$ by formula (4) is called the stochastic sequence with stationary nth increments (or integrated sequence of order n)

Theorem 1.1. *The mean value $c^{(n)}(\mu)$ and the structural function $D^{(n)}(m,\mu_1,\mu_2)$ of the stochastic stationary nth increment sequence $\xi^{(n)}(m,\mu)$ can be represented in the forms*

$$c^{(n)}(\mu) = c\mu^n, \quad (5)$$

$$D^{(n)}(m;\mu_1,\mu_2) = \\ \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda m}(1-e^{-i\mu_1\lambda})^n (1-e^{i\mu_2\lambda})^n \frac{1}{\lambda^{2n}} dF(\lambda), \quad (6)$$

where c is a constant, $F(\lambda)$ is a left-continuous nondecreasing bounded function such that $F(-\pi) = 0$. The constant c and the function $F(\lambda)$ are determined uniquely by the increment sequence $\xi^{(n)}(m,\mu)$.

On the other hand, a function $c^{(n)}(\mu)$ which has form (5) with a constant c and a function $D^{(n)}(m;\mu_1,\mu_2)$ which has form (6) with a function $F(\lambda)$ which satisfies the indicated conditions are the mean value and the structural function of a stationary nth increment sequence $\xi^{(n)}(m,\mu)$.

Note that we will call by spectral function and spectral density of the stochastic sequence with stationary increments the spectral function and the spectral density of the corresponding stationary increment sequence.

Making use of representation (6) and the Karhunen theorem [13, 7] one can obtain the spectral representation of the stationary nth increment sequence $\xi^{(n)}(m,\mu)$:

$$\xi^{(n)}(m,\mu) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\lambda}(1-e^{-i\mu\lambda})^n \frac{1}{(i\lambda)^n} dZ_{\xi^{(n)}}(\lambda), \quad (7)$$

where $Z_{\eta^{(n)}}(\lambda)$ is a stochastic process with uncorrelated increments on $[-\pi,\pi)$ connected with the spectral function $F(\lambda)$ by the relation $(-\pi \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < \pi)$

$$\mathsf{E}|Z_{\xi^{(n)}}(\lambda_2) - Z_{\xi^{(n)}}(\lambda_1)|^2 = F(\lambda_2) - F(\lambda_1) < \infty.$$

Definition 1.3. A stochastic sequence $\{\xi(m), m \in \mathbb{Z}\}$ is called stochastic sequence with periodically stationary (periodically correlated) increments with period T if the nth increment sequence

$$\xi^{(n)}(m, \mu T) = (1 - B_{\mu T})^n \xi(m)$$

is stationary.

It follows from Definition 1.3 that the sequence

$$\xi_p(m) = \xi(mT+p-1), p = 1, 2, \dots, T; m \in \mathbb{Z} \quad (8)$$

forms a vector-valued sequence $\vec{\xi}(m) = \{\xi_p(m)\}_{p=1,2,\dots,T}, m \in \mathbb{Z}$ with stationary nth increments. Really, for all $p = 1, 2, \dots, T$,

$$\xi_p^{(n)}(m, \mu) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \binom{n}{l} \xi_p(m - l\mu) =$$
$$= \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \binom{n}{l} \xi((m - l\mu)T + p - 1) =$$
$$= \xi^{(n)}(mT + p - 1, \mu T),$$

where $\xi_p^{(n)}(m, \mu)$ is the nth increment of the p-th component of the vector-valued sequence $\vec{\xi}(m)$.

Theorem 1.2. *The structural function $D^{(n)}(m, \mu_1, \mu_2)$ of the vector-valued stochastic stationary nth increment sequence $\vec{\xi}^{(n)}(m, \mu)$ can be represented in the form*

$$D^{(n)}(m; \mu_1, \mu_2) =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda m} (1 - e^{-i\mu_1 \lambda})^n (1 - e^{i\mu_2 \lambda})^n \frac{1}{\lambda^{2n}} dF(\lambda), \quad (9)$$

where $F(\lambda)$ is the matrix-valued spectral function of the stationary stochastic sequence $\vec{\xi}^{(n)}(m, \mu)$. The stationary nth increment sequence $\vec{\xi}^{(n)}(m, \mu)$ admits the spectral representation

$$\vec{\xi}^{(n)}(m, \mu) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\lambda} (1 - e^{-i\mu\lambda})^n \frac{1}{(i\lambda)^n} d\vec{Z}_{\xi^{(n)}}(\lambda), \quad (10)$$

where $d\vec{Z}_{\xi^{(n)}}(\lambda) = \{Z_p(\lambda)\}_{p=1}^T$ is a (vector-valued) stochastic process with uncorrelated increments on $[-\pi, \pi)$ connected with the spectral function $F(\lambda)$ by the relation

$$\mathsf{E}(Z_p(\lambda_2) - Z_p(\lambda_1))(\overline{Z_q(\lambda_2) - Z_q(\lambda_1)}) =$$
$$= F_{pq}(\lambda_2) - F_{pq}(\lambda_1), -\pi \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < \pi.$$

2 Hilbert space projection method of estimation

Consider a vector-valued stochastic sequence with stationary nth increments $\vec{\xi}(m)$ constructed from the sequence $\xi(m)$ with the help of transformation (8). Let the stationary nth increment sequence $\vec{\xi}^{(n)}(m, \mu) = \{\xi_p^{(n)}(m, \mu)\}_{p=1}^T$ has an absolutely continuous spectral function $F(\lambda)$ and the spectral density $f(\lambda) = \{f_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^T$.

Let $\vec{\eta}(m) = \{\eta_p(m)\}_{p=1}^T$ be an uncorrelated with the sequence $\xi(m)$ stationary stochastic sequence with absolutely continuous spectral function $G(\lambda)$ and spectral density $g(\lambda) = \{g_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^T$.

We will assume that the mean values of the increment sequence $\vec{\xi}^{(n)}(m, \mu)$ and stationary sequence $\vec{\eta}(m)$ equal to 0. We will also consider the increment step $\mu > 0$.

Consider the problem of mean square optimal linear estimation of the functional

$$A_N\vec{\xi} = \sum_{k=0}^{N} (\vec{a}(k))^\top \vec{\xi}(k) \quad (11)$$

which depend on the unobserved values of the stochastic sequence $\vec{\xi}(k) = \{\xi_p(k)\}_{p=1}^T$ with stationary nth increments. Estimates are based on observations of the sequence $\vec{\zeta}(m) = \vec{\xi}(m) + \vec{\eta}(m)$ at points of the set $\mathbb{Z} \setminus \{0, 1, 2 \dots, N\}$.

Assume that spectral densities $f(\lambda)$ and $g(\lambda)$ satisfy the minimality condition

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Tr} \left[\frac{\lambda^{2n}}{|1 - e^{i\lambda\mu}|^{2n}} (f(\lambda) + \lambda^{2n} g(\lambda))^{-1} \right] d\lambda < \infty. \quad (12)$$

This is the necessary and sufficient condition under which the mean square errors of the optimal estimates of the functional $A_N\vec{\xi}$ is not equal to 0.

The classical Hilbert space estimation technique proposed by Kolmogorov [16] can be described as a 3-stage procedure: (i) define a target element of the space $H = L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ to be estimated, (ii) define a subspace of H generated by observations, (iii) find an estimate of the target element as an orthogonal projection on the defined subspace.

Stage i. The functional $A_N\vec{\xi}$ does not belong to the space H. With the help of the following lemma we describe representations of the functional as a sum of a functional with finite second moments belonging to H and a functional

depending on observed values of the sequence $\vec{\zeta}(k)$ ("initial values").

Lemma 2.1. The functional $A_N\vec{\zeta}$ admits the representation

$$A_N\vec{\xi} = A_N\vec{\zeta} - A_N\vec{\eta} = H_N\vec{\xi} - V_N\vec{\zeta}, \qquad (13)$$

where

$$H_N\vec{\xi} := B_N\vec{\zeta} - A_N\vec{\eta},$$

$$A_N\vec{\zeta} = \sum_{k=0}^{N}(\vec{a}(k))^\top\vec{\zeta}(k), \quad A_N\vec{\eta} = \sum_{k=0}^{N}(\vec{a}(k))^\top\vec{\eta}(k),$$

$$B_N\vec{\zeta} = \sum_{k=0}^{N}(\vec{b}_N(k))^\top\vec{\zeta}^{(n)}(k,\mu),$$

$$V_N\vec{\zeta} = \sum_{k=-\mu n}^{-1}(\vec{v}_N(k))^\top\vec{\zeta}(k),$$

the coefficients $\vec{v}_N(k)) = \{v_{N,p}(k)\}_{p=1}^T, k = -1,-2,\dots,-\mu n$ and $\vec{b}_N(k)) = \{b_{N,p}(k)\}_{p=1}^T, k = 0,1,\dots,N$ are calculated by the formulas

$$v_{N,p}(k) = \sum_{l=\left[-\frac{k}{\mu}\right]'}^{\min\left\{\left[\frac{N-k}{\mu}\right],n\right\}}(-1)^l\binom{n}{l}b_{N,p}(l\mu+k),$$
$$k = -1,-2,\dots,-\mu n, \quad (14)$$

$$b_{N,p}(k) = \sum_{m=k}^{N}a_p(m)d_\mu(m-k) = (D_N^\mu\mathbf{a}_{N,p})_k,$$
$$k = 0,1,\dots,N, \quad (15)$$

coefficients $\{d_\mu(k) : k \geqslant 0\}$ are determined by the relationship

$$\sum_{k=0}^{\infty}d_\mu(k)x^k = \left(\sum_{j=0}^{\infty}x^{\mu j}\right)^n,$$

D_N^μ is a linear transformation determined by a matrix with the entries $(D_N^\mu)_{k,j} = d_\mu(j-k)$ if $0 \leqslant k \leqslant j \leqslant N$, and $(D_N^\mu)_{k,j} = 0$ if $0 \leqslant j < k \leqslant N$; $D_N^\mu\mathbf{a}_N = \{D_N^\mu\mathbf{a}_{N,p}\}_{p=1}^T$, $\mathbf{a}_{N,p} = (a_p(0), a_p(1), a_p(2), \dots, a_p(N))^\top$, $p = 1,2,\dots,T$.

The functional $H_N\vec{\xi}$ from representation (13) has finite variance and the functional $V_N\vec{\zeta}$ depends on the known observations of the stochastic sequence $\vec{\zeta}(k)$ at points $k = -\mu n, -\mu n + 1, \dots, -1$. Therefore, estimates $\widehat{A}_N\vec{\xi}$ and $\widehat{H}_N\vec{\xi}$ of the functionals $A_N\vec{\xi}$ and $H_N\vec{\xi}$ and the mean-square errors $\Delta(f,g;\widehat{A}_N\vec{\xi}) = \mathsf{E}|A_N\vec{\xi} - \widehat{A}_N\vec{\xi}|^2$ and $\Delta(f,g;\widehat{H}_N\vec{\xi}) = \mathsf{E}|H_N\vec{\xi} - \widehat{H}_N\vec{\xi}|^2$ of the estimates $\widehat{A}_N\vec{\xi}$ and $\widehat{H}_N\vec{\xi}$ satisfy the following relations

$$\widehat{A}_N\vec{\xi} = \widehat{H}_N\vec{\xi} - V_N\vec{\zeta}, \qquad (16)$$

$$\Delta(f,g;\widehat{A}_N\vec{\xi}) = \mathsf{E}|A_N\vec{\xi} - \widehat{A}_N\vec{\xi}|^2 = \mathsf{E}|H_N\vec{\xi} - \widehat{H}_N\vec{\xi}|^2 = \Delta(f,g;\widehat{H}_N\vec{\xi}).$$

Therefore, the estimation problem for the functional $A_N\vec{\xi}$ is equivalent to the estimation problem for the functional $H_N\vec{\xi}$. This problem can be solved by applying the Hilbert space projection method proposed by Kolmogorov [16].

The stationary stochastic sequence $\vec{\eta}(m)$ admits the spectral representation

$$\vec{\eta}(m) = \int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda m}d\vec{Z}_\eta(\lambda),$$

where $\vec{Z}_\eta(\lambda)$ is a random process with uncorrelated increments on $[-\pi,\pi)$ corresponding to the spectral function $G(\lambda)$. The random processes $\vec{Z}_\eta(\lambda)$ and $\vec{Z}_{\eta^{(n)}}(\lambda)$ are connected by the relation $d\vec{Z}_{\eta^{(n)}}(\lambda) = (i\lambda)^n d\vec{Z}_\eta(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi,\pi)$, obtained in [20]. The spectral density $p(\lambda)$ of the sequence $\vec{\zeta}(m)$ is determined by spectral densities $f(\lambda)$ and $g(\lambda)$ by the relation

$$p(\lambda) = f(\lambda) + \lambda^{2n}g(\lambda).$$

With the help of the spectral representations of stochastic sequences involved we can write the following spectral representation of the functional

$$H_N\vec{\xi} = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\vec{B}_{\mu,N}(e^{i\lambda})\right)^\top\frac{(1-e^{-i\lambda\mu})^n}{(i\lambda)^n}d\vec{Z}_{\xi^{(n)}+\eta^{(n)}}(\lambda) - \int_{-\pi}^{\pi}\left(\vec{A}_N(e^{i\lambda})\right)^\top d\vec{Z}_\eta(\lambda),$$

where

$$\vec{B}_{\mu,N}(e^{i\lambda}) = \sum_{k=0}^{N}\vec{b}_{\mu,N}(k)e^{i\lambda k} = \sum_{k=0}^{N}(D_N^\mu\mathbf{a}_N)_k e^{i\lambda k}, \vec{A}_N(e^{i\lambda}) = \sum_{k=0}^{N}\vec{a}(k)e^{i\lambda k}.$$

At **stage ii**, we deal with the following notations. Denote by $H^{0-}(\xi_\mu^{(n)} + \eta_\mu^{(n)})$ the closed linear subspace generated by values $\{\xi_p^{(n)}(k,\mu) + \eta_p^{(n)}(k,\mu) : p = 1,\dots,T; k = -1,-2,-3,\dots\}$ in

the Hilbert space $H = L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ of random variables γ with zero mean value, $\mathsf{E}\gamma = 0$, finite variance, $\mathsf{E}|\gamma|^2 < \infty$, and the inner product $(\gamma_1; \gamma_2) = \mathsf{E}\gamma_1\overline{\gamma_2}$.

Denote by $H^{N+}(\xi_{-\mu}^{(n)} + \eta_{-\mu}^{(n)})$ the closed linear subspace of the Hilbert space $H = L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ generated by elements $\{\xi_p^{(n)}(k, -\mu) + \eta_p^{(n)}(k, -\mu) : p = 1, \dots, T; k \geqslant N + 1\}$.

The equality $\xi_p^{(n)}(k, -\mu) = (-1)^n \xi_p^{(n)}(k + \mu n, \mu)$ implies

$$H^{N+}(\xi_{-\mu}^{(n)} + \eta_{-\mu}^{(n)}) = H^{(N+\mu n)+}(\xi_{\mu}^{(n)} + \eta_{\mu}^{(n)}).$$

Denote by $L_2^{0-}(f(\lambda) + \lambda^{2n} g(\lambda))$ and $L_2^{N+}(f(\lambda) + \lambda^{2n} g(\lambda))$ the closed linear subspaces of the Hilbert space $L_2(f(\lambda) + \lambda^{2n} g(\lambda))$ of vector-valued functions with the inner product $\langle g_1; g_2 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} (g_1(\lambda))^\top (f(\lambda) + \lambda^{2n} g(\lambda)) \overline{g_2(\lambda)} d\lambda$ which is generated by the functions

$$e^{i\lambda k}(1 - e^{-i\lambda\mu})^n \frac{1}{(i\lambda)^n} \delta_l, \quad \delta_l = \{\delta_{lp}\}_{p=1}^T,$$
$$l = 1, \dots, T; \ k \leqslant -1, ; \ k \geqslant N + 1,$$

respectively, where δ_{lp} are Kronecker symbols.

The representation

$$\vec{\xi}^{(n)}(k, \mu) + \vec{\eta}^{(n)}(k, \mu) = \\ = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k}(1 - e^{-i\lambda\mu})^n \frac{1}{(i\lambda)^n} d\vec{Z}_{\xi^{(n)} + \eta^{(n)}}(\lambda)$$

yields a one to one correspondence between elements $e^{i\lambda k}(1 - e^{-i\lambda\mu})^n (i\lambda)^{-n}$ of the space

$$L_2^{0-}(f(\lambda) + \lambda^{2n} g(\lambda)) \oplus L_2^{N+}(f(\lambda) + \lambda^{2n} g(\lambda))$$

and elements $\vec{\xi}^{(n)}(k, \mu) + \vec{\eta}^{(n)}(k, \mu)$ of the space

$$H^{0-}(\xi_{\mu}^{(n)} + \eta_{\mu}^{(n)}) \oplus H^{N+}(\xi_{-\mu}^{(n)} + \eta_{-\mu}^{(n)}) = \\ = H^{0-}(\xi_{\mu}^{(n)} + \eta_{\mu}^{(n)}) \oplus H^{(N+\mu n)+}(\xi_{\mu}^{(n)} + \eta_{\mu}^{(n)}).$$

Relation (16) implies that every linear estimate $\widehat{A}\vec{\xi}$ of the functional $A\vec{\xi}$ can be represented in the form

$$\widehat{A}_N\vec{\xi} = \int_{-\pi}^{\pi} (\vec{h}_{\mu,N}(\lambda))^\top d\vec{Z}_{\xi^{(n)} + \eta^{(n)}}(\lambda) - \\ - \sum_{k=-\mu n}^{-1} (\vec{v}_\mu(k))^\top (\vec{\xi}(k) + \vec{\eta}(k)), \quad (17)$$

where $\vec{h}_{\mu,N}(\lambda) = \{h_p(\lambda)\}_{p=1}^T$ is the spectral characteristic of the optimal estimate $\widehat{H}_N\vec{\xi}$.

At **stage iii**, we find the mean square optimal estimate $\widehat{H}_N\vec{\xi}$ as a projection of the element $H_N\vec{\xi}$ on the subspace $H^{0-}(\xi_{\mu}^{(n)} + \eta_{\mu}^{(n)}) \oplus H^{(N+\mu n)+}(\xi_{\mu}^{(n)} + \eta_{\mu}^{(n)})$. This projection is determined by two conditions:

1) $\widehat{H}_N\vec{\xi} \in H^{0-}(\xi_{\mu}^{(n)} + \eta_{\mu}^{(n)}) \oplus H^{(N+\mu n)+}(\xi_{\mu}^{(n)} + \eta_{\mu}^{(n)})$;

2) $(H_N\vec{\xi} - \widehat{H}_N\vec{\xi}) \perp H^{0-}(\xi_{\mu}^{(n)} + \eta_{\mu}^{(n)}) \oplus H^{(N+\mu n)+}(\xi_{\mu}^{(n)} + \eta_{\mu}^{(n)})$.

The second condition implies the following relation which holds true for all $k \leqslant -1$ and $k \geqslant N + \mu n + 1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[\left(\vec{B}_{\mu,N}(e^{i\lambda}) \frac{(1 - e^{-i\lambda\mu})^n}{(i\lambda)^n} - \vec{h}_{\mu,N}(\lambda) \right)^\top p(\lambda) - \right. \\ \left. - (\vec{A}_N(e^{i\lambda})^\top g(\lambda)(-i\lambda)^n \right] \frac{(1 - e^{i\lambda\mu})^n}{(-i\lambda)^n} e^{-i\lambda k} d\lambda = 0.$$

This relation allows us to derive the spectral characteristic $\vec{h}_{\mu,N}(\lambda)$ of the estimate $\widehat{H}_N\vec{\xi}$ which can be represented in the form

$$(\vec{h}_{\mu,N}(\lambda))^\top = (\vec{B}_{\mu,N}(e^{i\lambda}))^\top \frac{(1 - e^{-i\lambda\mu})^n}{(i\lambda)^n} - \\ - \vec{A}_N(e^{i\lambda})^\top g(\lambda)(-i\lambda)^n (p(\lambda))^{-1} - \\ - \frac{(-i\lambda)^n (\vec{C}_{\mu,N}(e^{i\lambda}))^\top}{(1 - e^{i\lambda\mu})^n} (p(\lambda))^{-1}, \quad (18)$$

$$\vec{C}_{\mu,N}(e^{i\lambda}) = \sum_{k=0}^{N+\mu N} \vec{c}_{\mu,N}(k) e^{ik\lambda},$$

$\vec{c}_{\mu,N}(k) = \{c_{\mu,N,p}(k)\}_{p=1}^T, k = 0, 1, \dots, N + \mu n$, are unknown coefficients to be found.

It follows from condition 1) that the following equations should be satisfied for $0 \leqslant j \leqslant N + \mu n$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[(\vec{B}_{\mu,N}(e^{i\lambda}))^\top - \right. \\ - (\vec{A}_N(e^{i\lambda})^\top g(\lambda) \frac{(\lambda)^{2n}}{(1 - e^{-i\lambda\mu})^n} (p(\lambda))^{-1} - \\ \left. - \frac{\lambda^{2n} (\vec{C}_{\mu,N}(e^{i\lambda}))^\top}{(1 - e^{-i\lambda\mu})^n (1 - e^{i\lambda\mu})^n} (p(\lambda))^{-1} \right] e^{-ij\lambda} d\lambda = 0. \quad (19)$$

Define for $0 \leqslant k, j \leqslant N$ the Fourier coefficients of the corresponding functions

$$T_{k,j}^{\mu} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(j-k)} \frac{\lambda^{2n} g(\lambda)}{|1 - e^{i\lambda\mu}|^{2n}} (p(\lambda))^{-1} d\lambda;$$

$$P_{k,j}^{\mu} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(j-k)} \frac{\lambda^{2n}}{|1 - e^{i\lambda\mu}|^{2n}} (p(\lambda))^{-1} d\lambda;$$

$$Q_{k,j} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(j-k)} f(\lambda)g(\lambda)(p(\lambda))^{-1}d\lambda.$$

Making use of the defined Fourier coefficients, relation (19) can be presented as a system of $N+\mu n+1$ linear equations determining the unknown coefficients $\vec{c}_{\mu,N}(k)$, $0 \leqslant k \leqslant N+\mu n$.

$$\vec{b}_{\mu,N}(j) - \sum_{m=0}^{N+\mu n} T^{\mu}_{j,m}\vec{a}_{\mu,N}(m) = \sum_{k=0}^{N+\mu n} P^{\mu}_{j,k}\vec{c}_{\mu,N}(k), \quad 0 \leqslant j \leqslant N, \quad (20)$$

$$-\sum_{m=0}^{N+\mu n} T^{\mu}_{j,m}\vec{a}_{\mu,N}(m) = \sum_{k=0}^{N+\mu n} P^{\mu}_{j,k}\vec{c}_{\mu,N}(k), \quad N+1 \leqslant j \leqslant N+\mu n, \quad (21)$$

where coefficients $\{\vec{a}_{\mu,N}(m) : 0 \leqslant m \leqslant N+\mu n\}$ are calculated by the formula

$$\vec{a}_{\mu,N}(m) = \sum_{l=\max\left\{\left[\frac{m-N}{\mu}\right]',0\right\}}^{\min\left\{\left[\frac{m}{\mu}\right],n\right\}} (-1)^l \binom{n}{l}\vec{a}(m-\mu l), \quad 0 \leqslant m \leqslant N+\mu n, \quad (22)$$

Denote by $[D^{\mu}_N \mathbf{a}_N]_{+\mu n}$ a vector of dimension $(N+\mu n+1)T$ which is constructed by adding $(\mu n)T$ zeros to the vector $D^{\mu}_N\mathbf{a}_N$ of dimension $(N+1)T$. Making use of this definition the system (20) – (21) can be represented in the matrix form:

$$[D^{\mu}_N \mathbf{a}_N]_{+\mu n} - \mathbf{T}^{\mu}_N \mathbf{a}^{\mu}_N = \mathbf{P}^{\mu}_N \mathbf{c}^{\mu}_N,$$

$$\mathbf{a}^{\mu}_N = ((\vec{a}_{\mu,N}(0))^{\top}, (\vec{a}_{\mu,N}(1))^{\top}, \ldots, (\vec{a}_{\mu,N}(N+\mu n))^{\top})^{\top}$$

$$\mathbf{c}^{\mu}_N = ((\vec{c}_{\mu,N}(0))^{\top}, (\vec{c}_{\mu,N}(1))^{\top}, \ldots, (\vec{c}_{\mu,N}(N+\mu n))^{\top})^{\top}$$

are vectors of dimension $(N+\mu n+1)T$; $\mathbf{P}^{\mu}_N$ and $\mathbf{T}^{\mu}_N$ are matrices of dimension $(N+\mu n+1)T \times (N+\mu n+1)T$ with $T\times T$ matrix elements $(\mathbf{P}^{\mu}_N)_{j,k} = P^{\mu}_{j,k}$ and $(\mathbf{T}^{\mu}_N)_{j,k} = T^{\mu}_{j,k}$, $0 \leqslant j,k \leqslant N+\mu n$.

Thus, the coefficients $\vec{c}_{\mu,N}(k)$, $0 \leqslant k \leqslant N+\mu n$, are determined by the formula $0 \leqslant k \leqslant N+\mu n$

$$\vec{c}_{\mu,N}(k) = \left((\mathbf{P}^{\mu}_N)^{-1}[D^{\mu}_N\mathbf{a}_N]_{+\mu n} - (\mathbf{P}^{\mu}_N)^{-1}\mathbf{T}^{\mu}_N\mathbf{a}^{\mu}_N\right)_k,$$

where $\left((\mathbf{P}^{\mu}_N)^{-1}[D^{\mu}_N\mathbf{a}_N]_{+\mu n} - (\mathbf{P}^{\mu}_N)^{-1}\mathbf{T}^{\mu}_N\mathbf{a}^{\mu}_N\right)_k$, $0 \leqslant k \leqslant N+\mu n$, is the kth element of the vector $(\mathbf{P}^{\mu}_N)^{-1}[D^{\mu}_N\mathbf{a}_N]_{+\mu n} - (\mathbf{P}^{\mu}_N)^{-1}\mathbf{T}^{\mu}_N\mathbf{a}^{\mu}_N$.

The existence of the inverse matrix $(\mathbf{P}^{\mu}_N)^{-1}$ was shown in [22] under condition (12).

The spectral characteristic $\vec{h}_{\mu,N}(\lambda)$ of the estimate $\widehat{H}_N\xi$ of the functional $H_N\xi$ is calculated by formula (18), where

$$\vec{C}_{\mu,N}(e^{i\lambda}) = \sum_{k=0}^{N+\mu n}\left((\mathbf{P}^{\mu}_N)^{-1}[D^{\mu}_N\mathbf{a}_N]_{+\mu n} - (\mathbf{P}^{\mu}_N)^{-1}\mathbf{T}^{\mu}_N\mathbf{a}^{\mu}_N\right)_k e^{i\lambda k}. \quad (23)$$

The value of the mean-square errors of the estimates $\widehat{A}_N\vec{\xi}$ and $\widehat{H}_N\vec{\xi}$ can be calculated by the formula

$$\begin{aligned}\Delta(f,g;\widehat{A}\vec{\xi}) = \Delta(f,g;\widehat{H}\vec{\xi}) = \mathsf{E}|H\vec{\xi} - \widehat{H}\vec{\xi}|^2 = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\lambda^{2n}}{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}\left[(1-e^{i\lambda\mu})^n(\vec{A}_N(e^{i\lambda}))^{\top}g(\lambda) + (\vec{C}_{\mu,N}(e^{i\lambda}))^{\top}\right]\times \\ \times(p(\lambda))^{-1}f(\lambda)(p(\lambda))^{-1}\left[(1-e^{-i\lambda\mu})^n\vec{A}_N(e^{-i\lambda})g(\lambda) + (\vec{C}_{\mu,N}(e^{-i\lambda}))\right]d\lambda + \\ + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}\left[(1-e^{i\lambda\mu})^n(\vec{A}_N(e^{i\lambda}))^{\top}f(\lambda) - (\lambda)^{2n}(\vec{C}_{\mu,N}(e^{i\lambda}))^{\top}\right]\times \\ \times(p(\lambda))^{-1}g(\lambda)(p(\lambda))^{-1}\left[(1-e^{-i\lambda\mu})^n\vec{A}_N(e^{-i\lambda})f(\lambda) - (\lambda)^{2n}(\vec{C}_{\mu,N}(e^{-i\lambda}))\right]d\lambda = \\ = \left\langle[D^{\mu}_N\mathbf{a}_N]_{+\mu n} - \mathbf{T}^{\mu}_N\mathbf{a}^{\mu}_N, (\mathbf{P}^{\mu}_N)^{-1}[D^{\mu}_N\mathbf{a}_N]_{+\mu n} - (\mathbf{P}^{\mu}_N)^{-1}\mathbf{T}^{\mu}_N\mathbf{a}^{\mu}_N\right\rangle + \langle\mathbf{Q}_N\mathbf{a}_N,\mathbf{a}_N\rangle, \end{aligned} \quad (24)$$

where $\mathbf{Q}_N$ is a matrix of the dimension $(N+1)T\times(N+1)T$ with the $T\times T$ matrix elements $(\mathbf{Q}_N)_{j,k} = Q_{j,k}$, $0 \leqslant j,k \leqslant N$

Theorem 2.1. *Let $\{\vec{\xi}(m), m \in \mathbb{Z}\}$ be a stochastic sequence which defines the stationary nth increment sequence $\vec{\xi}^{(n)}(m,\mu)$ with the absolutely continuous spectral function $F(\lambda)$ whi-*

ch has spectral density $f(\lambda)$. Let $\{\vec{\eta}(m), m \in \mathbb{Z}\}$ be an uncorrelated with the sequence $\vec{\xi}(m)$ stationary stochastic sequence with an absolutely continuous spectral function $G(\lambda)$ which has spectral density $g(\lambda)$. Let the minimality condition (12) be satisfied. The optimal linear estimate $\widehat{A}_N\vec{\xi}$ of the functional $A_N\vec{\xi}$ which depends on the unknown values of elements $\vec{\xi}(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N$, from observations of the sequence $\vec{\xi}(m)+\vec{\eta}(m)$ at points of the set $Z \setminus \{0, 1, 2, \ldots, N\}$ is calculated by formula (17). The spectral characteristic $\vec{h}_{\mu,N}(\lambda)$ of the optimal estimate $\widehat{A}_N\vec{\xi}$ is calculated by formulas (18), (23). The value of the mean-square error $\Delta(f, g; \widehat{A}_N\vec{\xi})$ is calculated by formula (24).

Corollary 2.1. The spectral characteristic $\vec{h}_{\mu,N}(\lambda)$ (18) admits the representation $\vec{h}_{\mu,N}(\lambda) = \vec{h}^1_{\mu,N}(\lambda) - \vec{h}^2_{\mu,N}(\lambda)$, where

$$(\vec{h}^1_{\mu}(\lambda))^\top = \\ = (\vec{B}_{\mu,N}(e^{i\lambda}))^\top \frac{(1-e^{-i\lambda\mu})^n}{(i\lambda)^n} - \frac{(-i\lambda)^n}{(1-e^{i\lambda\mu})^n} \times \\ \times \left(\sum_{k=0}^{N+\mu n} \left((\mathbf{P}^{\mu}_N)^{-1} [D^{\mu}_N \mathbf{a}_N]_{+\mu n} \right)_k e^{i\lambda k} \right)^\top (p(\lambda))^{-1}, \tag{25}$$

$$(\vec{h}^2_{\mu,N}(\lambda))^\top = \\ = (\vec{A}_N(e^{i\lambda}))^\top (-i\lambda)^n g(\lambda)(p(\lambda))^{-1} - \frac{(-i\lambda)^n}{(1-e^{i\lambda\mu})^n} \times \\ \times \left(\sum_{k=0}^{N+\mu n} \left((\mathbf{P}^{\mu}_N)^{-1} \mathbf{T}^{\mu}_N \mathbf{a}^{\mu}_N \right)_k e^{i\lambda k} \right)^\top (p(\lambda))^{-1}. \tag{26}$$

Here $\vec{h}^1_{\mu,N}(\lambda)$ and $\vec{h}^2_{\mu,N}(\lambda)$ are spectral characteristics of the optimal estimates $\widehat{B}_N\vec{\zeta}$ and $\widehat{A}_N\vec{\eta}$ of the functionals $B_N\vec{\zeta}$ and $A_N\vec{\eta}$ respectively based on observations $\vec{\xi}(k) + \vec{\eta}(k)$ at points of the set $Z \setminus \{0, 1, 2, \ldots, N\}$.

2.1 Estimation of stochastic sequences with periodically stationary increment

Consider the problem of mean square optimal linear estimation of the functional

$$A_M\vartheta = \sum_{k=0}^{N} a^{(\vartheta)}(k)\vartheta(k) \tag{27}$$

which depend on unobserved values of the stochastic sequence $\vartheta(m)$ with periodically stationary increments. Estimates are based on observations of the sequence $\zeta(m) = \vartheta(m) + \eta(m)$ at points of the set $Z \setminus \{0, 1, 2, \ldots, N\}$.

The functional $A_M\vartheta$ can be represented in the form

$$A_M\vartheta = \sum_{k=0}^{M} a^{(\vartheta)}(k)\vartheta(k) = \\ = \sum_{m=0}^{N}\sum_{p=1}^{T} a^{(\vartheta)}(mT+p-1)\vartheta(mT+p-1) = \\ = \sum_{m=0}^{N}\sum_{p=1}^{T} a_p(m)\xi_p(m) = \\ = \sum_{m=0}^{N} (\vec{a}(m))^\top \vec{\xi}(m) = A_N\vec{\xi},$$

where $N = [\frac{M}{T}]$, the sequence $\vec{\xi}(m)$ is determined by the formula

$$\vec{\xi}(m) = (\xi_1(m), \xi_2(m), \ldots, \xi_T(m))^\top, \\ \xi_p(m) = \vartheta(mT+p-1);\ p = 1, 2, \ldots, T; \tag{28}$$

$$(\vec{a}(m))^\top = (a_1(m), a_2(m), \ldots, a_T(m))^\top, a_p(m) = \\ a^{\vartheta}(mT+p-1); 0 \leqslant m \leqslant N; mT+p-1 \leqslant M; \\ a_p(N) = 0; M+1 \leqslant NT+p-1 \leqslant (N+1)T-1. \tag{29}$$

Making use of the introduced notations and statements of Theorem 2.1 we can claim that the following theorem holds true.

Theorem 2.2. *Let a stochastic sequence $\vartheta(k)$ with periodically stationary increments generate by formula (28) a vector-valued stochastic sequence $\vec{\xi}(m)$ which determine a stationary stochastic nth increment sequence $\vec{\xi}^{(n)}(m, \mu)$ with the spectral density matrix $f(\lambda) = \{f_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^{T}$. Let $\{\vec{\eta}(m), m \in \mathbb{Z}\}$, $\vec{\eta}(m) = (\eta_1(m), \eta_2(m), \ldots, \eta_T(m))^\top$, $\eta_p(m) = \eta(mT + p - 1)$; $p = 1, 2, \ldots, T$, be uncorrelated with the sequence $\vec{\xi}(m)$ stationary stochastic sequence with an absolutely continuous spectral function $G(\lambda)$ which has spectral density $g(\lambda)$. Let the minimality condition (12) be satisfied. Let coefficients $\vec{a}(k), k \geqslant 0$ be determined by formula (29). The optimal linear estimate $\widehat{A}_M\zeta$ of the functional $A_M\zeta = A_N\vec{\xi}$ based on observations*

of the sequence $\zeta(m) = \vartheta(m) + \eta(m)$ *at points of the set* $Z \setminus \{0,1,2,\dots,N\}$ *is calculated by formula (17). The spectral characteristic* $\vec{h}_{\mu,N}(\lambda) = \{h_{\mu,N,p}(\lambda)\}_{p=1}^{T}$ *and the value of the mean square error* $\Delta(f;\widehat{A}_M\zeta)$ *are calculated by formulas (18), (23) and (24) respectively.*

3 Minimax-robust method of estimation

The values of the mean square errors and the spectral characteristics of the optimal estimate of the functional $A_N\vec{\xi}$ depending on the unobserved values of a stochastic sequence $\vec{\xi}(m)$ which determine a stationary stochastic nth increment sequence $\vec{\xi}^{(n)}(m,\mu)$ with the spectral density matrix $f(\lambda)$ based on observations of the sequence $\vec{\xi}(m) + \vec{\eta}(m)$ at points $Z \setminus \{0,1,2,\dots,N\}$ can be calculated by formulas (18), (23), (24) respectively, under the condition that spectral densities $f(\lambda)$ and $g(\lambda)$ of stochastic sequences $\vec{\xi}(m)$ and $\vec{\eta}(m)$ are exactly known.

In practical cases, however, spectral densities of sequences usually are not exactly known. If in such cases a set $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g$ of admissible spectral densities is defined, the minimax-robust approach to estimation of linear functionals depending on unobserved values of stochastic sequences with stationary increments may be applied. This method consists in finding an estimate that minimizes the maximal values of the mean square errors for all spectral densities from a given class $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g$ of admissible spectral densities simultaneously.

To formalize this approach we present the following definitions.

Definition 3.1. For a given class of spectral densities $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g$ the spectral densities $f_0(\lambda) \in \mathcal{D}_f$, $g_0(\lambda) \in \mathcal{D}_g$ are called least favorable in the class $\mathcal{D}$ for the optimal linear estimation of the functional $A_N\vec{\xi}$ if the following relation holds true:

$$\Delta(f_0,g_0) = \Delta(h(f_0,g_0);f_0,g_0) = \max_{(f,g)\in\mathcal{D}_f\times\mathcal{D}_g}\Delta(h(f,g);f,g).$$

Definition 3.2. For a given class of spectral densities $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g$ the spectral characteristic $h^0(\lambda)$ of the optimal linear estimate of the functional $A_N\vec{\xi}$ is called minimax-robust if there are satisfied the conditions

$$h^0(\lambda) \in H_{\mathcal{D}} = \bigcap_{(f,g)\in\mathcal{D}_f\times\mathcal{D}_g} L_2^{0-}(f(\lambda)+\lambda^{2n}g(\lambda)),$$

$$\min_{h\in H_{\mathcal{D}}}\max_{(f,g)\in\mathcal{D}_f\times\mathcal{D}_g}\Delta(h;f,g) = \max_{(f,g)\in\mathcal{D}_f\times\mathcal{D}_g}\Delta(h^0;f,g).$$

Taking into account the introduced definitions and the derived relations we can verify that the following lemma holds true.

Lemma 3.1. The spectral densities $f^0 \in \mathcal{D}_f$, $g^0 \in \mathcal{D}_g$ which satisfy the minimality condition (12) are least favorable in the class $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g$ for the optimal linear estimation of the functional $A_N\vec{\xi}$ based on observations of the sequence $\xi(m)+\eta(m)$ at points $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1,2,\dots,N\}$ if the matrices $(\mathbf{P}_N^{\mu})^0$, $(\mathbf{T}_N^{\mu})^0$, $(\mathbf{Q}_N)^0$ whose elements are defined by the Fourier coefficients of the functions

$$\frac{\lambda^{2n}g^0(\lambda)}{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}(p^0(\lambda))^{-1},\ \frac{\lambda^{2n}}{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}(p^0(\lambda))^{-1},$$

$$f^0(\lambda)g^0(\lambda)(p^0(\lambda))^{-1}$$

determine a solution of the constraint optimisation problem

$$\max_{(f,g)\in\mathcal{D}_f\times\mathcal{D}_g}\left(\left\langle [D_N^{\mu}\mathbf{a}_N]_{+\mu n} - \mathbf{T}_N^{\mu}\mathbf{a}_{\mu}, (\mathbf{P}_N^{\mu})^{-1}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times[D_N^{\mu}\mathbf{a}_N]_{+\mu n} - (\mathbf{P}_N^{\mu})^{-1}\mathbf{T}_N^{\mu}\mathbf{a}_N^{\mu}\right\rangle + \langle\mathbf{Q}_N\mathbf{a}_N,\mathbf{a}_N\rangle\right) =$$
$$\left\langle [D_N^{\mu}\mathbf{a}_N]_{+\mu n} - (\mathbf{T}_N^{\mu})^0\mathbf{a}_N^{\mu}, ((\mathbf{P}_N^{\mu})^0)^{-1}[D_N^{\mu}\mathbf{a}_N]_{+\mu n}\right.$$
$$\left. - ((\mathbf{P}_N^{\mu})^0)^{-1}(\mathbf{T}_N^{\mu})^0\mathbf{a}_N^{\mu}\right\rangle + \langle\mathbf{Q}_N^0\mathbf{a}_N,\mathbf{a}_N\rangle. \quad (30)$$

The minimax spectral characteristic $h^0 = h_{\mu,N}(f^0,g^0)$ is calculated by formula (18) if $h_{\mu,N}(f^0,g^0) \in H_{\mathcal{D}}$.

For more detailed analysis of properties of the least favorable spectral densities and minimax-robust spectral characteristics we observe that the minimax spectral characteristic h^0 and the least favourable spectral densities (f^0,g^0) form a saddle point of the function $\Delta(h;f,g)$ on the set $H_{\mathcal{D}} \times \mathcal{D}$.

The saddle point inequalities

$$\Delta(h;f^0,g^0) \geqslant \Delta(h^0;f^0,g^0) \geqslant \Delta(h^0;f,g)$$

$\forall f \in \mathcal{D}_f, \forall g \in \mathcal{D}_g, \forall h \in H_{\mathcal{D}}$ hold true if $h^0 = h_{\mu,N}(f^0,g^0)$ and $h_{\mu,N}(f^0,g^0) \in H_{\mathcal{D}}$, where (f^0,g^0) is a solution of the constraint optimisation problem

$$\widetilde{\Delta}(f,g) = -\Delta(h_{\mu,N}(f^0,g^0);f,g) \to \inf, (f,g) \in \mathcal{D}, \quad (31)$$

where the functional $\Delta(h_{\mu,N}(f^0,g^0);f,g)$ is calculated by the formula

$$\Delta(h_{\mu,N}(f^0,g^0);f,g) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\lambda^{2n}}{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}\left[(1-e^{i\lambda\mu})^n(\vec{A}_N(e^{i\lambda}))^\top g^0(\lambda)+(\vec{C}^0_{\mu,N}(e^{i\lambda}))^\top\right]\times$$
$$\times(p^0(\lambda))^{-1}f(\lambda)(p^0(\lambda))^{-1}\left[(1-e^{-i\lambda\mu})^n\vec{A}_N(e^{-i\lambda})g^0(\lambda)+\vec{C}^0_{\mu,N}(e^{-i\lambda})\right]d\lambda+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}\left[(1-e^{i\lambda\mu})^n(\vec{A}_N(e^{i\lambda}))^\top f^0(\lambda)-(\lambda)^{2n}(\vec{C}^0_{\mu,N}(e^{i\lambda}))^\top\right]\times$$
$$\times(p^0(\lambda))^{-1}g(\lambda)(p^0(\lambda))^{-1}\left[(1-e^{-i\lambda\mu})^n\vec{A}_N(e^{-i\lambda})f^0(\lambda)-(\lambda)^{2n}\vec{C}^0_{\mu,N}(e^{-i\lambda})\right]d\lambda,$$

where

$$\vec{C}^0_{\mu,N}(e^{i\lambda})=\sum_{k=0}^{\infty}(((\mathbf{P}^\mu_N)^0)^{-1}[D^\mu_N\mathbf{a}_N]_{+\mu n}-((\mathbf{P}^\mu_N)^0)^{-1}(\mathbf{T}^\mu_N)^0\mathbf{a}^\mu_N)_k e^{ik\lambda}.$$

The constrained optimisation problem (31) is equivalent to the unconstrained optimisation problem

$$\Delta_{\mathcal{D}}(f,g)=\widetilde{\Delta}(f,g)+\delta(f,g|\mathcal{D}_f\times\mathcal{D}_g)\to\inf,\quad(32)$$

where $\delta(f,g|\mathcal{D}_f\times\mathcal{D}_g)$ is the indicator function of the set $\mathcal{D}=\mathcal{D}_f\times\mathcal{D}_g$. Solution (f^0,g^0) to this unconstrained optimisation problem is characterized by the condition $0\in\partial\Delta_{\mathcal{D}}(f^0,g^0)$, where $\partial\Delta_{\mathcal{D}}(f^0,g^0)$ is the subdifferential of the functional $\Delta_{\mathcal{D}}(f,g)$ at point $(f^0,g^0)\in\mathcal{D}=\mathcal{D}_f\times\mathcal{D}_g$. This condition makes it possible to find the least favourable spectral densities in some special classes of spectral densities $\mathcal{D}=\mathcal{D}_f\times\mathcal{D}_g$.

The form of the functional $\Delta(h_{\mu,N}(f^0,g^0);f,g)$ is convenient for application the Lagrange method of indefinite multipliers for finding solution to the problem (32). Making use of the method of Lagrange multipliers and the form of subdifferentials of the indicator functions $\delta(f,g|\mathcal{D}_f\times\mathcal{D}_g)$ of the set $\mathcal{D}_f\times\mathcal{D}_g$ of spectral densities we describe relations that determine least favourable spectral densities in some special classes of spectral densities (see [29, 22] for additional details).

3.1 Least favorable spectral density in classes $\mathcal{D}_0\times\mathcal{D}_{1\delta}$

Consider the problem of optimal linear estimation of the functional $A_N\vec{\xi}$ which depends on unobserved values of a sequence $\vec{\xi}(m)$ with stationary increments based on observations of the sequence $\vec{\xi}(m)+\vec{\eta}(m)$ at points of the set $Z\setminus\{0,1,2,\dots,N\}$ under the condition that the sets of admissible spectral densities $\mathcal{D}^k_{f0},\mathcal{D}^k_{1\delta},k=1,2,3,4$ are defined as follows:

$$\mathcal{D}^1_{f0}=\left\{f\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}}f(\lambda)d\lambda=P\right.\right\},$$

$$\mathcal{D}^2_{f0}=\left\{f\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}}\mathrm{Tr}\,[f(\lambda)]d\lambda=p\right.\right\},$$

$$\mathcal{D}^3_{f0}=\left\{f\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}}f_{kk}(\lambda)d\lambda=p_k\right.\right\},$$

$$\mathcal{D}^4_{f0}=\left\{f\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}}\langle B_1,f(\lambda)\rangle\,d\lambda=p\right.\right\},$$

$$\mathcal{D}^1_{1\delta}=\left\{g\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\mathrm{Tr}(g(\lambda)-g_1(\lambda))|\,d\lambda\leqslant\delta\right.\right\},$$

$$\mathcal{D}^2_{1\delta}=\left\{g\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|g_{kk}(\lambda)-g^1_{kk}(\lambda)\right|d\lambda\leqslant\delta_k\right.\right\},$$

$$\mathcal{D}^3_{1\delta}=\left\{g\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\langle B_2,g(\lambda)-g_1(\lambda)\rangle|\,d\lambda\leqslant\delta\right.\right\},$$

$$\mathcal{D}^4_{1\delta}=\left\{g\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|g_{ij}(\lambda)-g^1_{ij}(\lambda)\right|d\lambda\leqslant\delta^j_i\right.\right\}.$$

Here $g_1(\lambda)$ is a fixed spectral density, $p,p_k,k=\overline{1,T}$, $\delta,\delta_k,k=\overline{1,T}$, $\delta^j_i,i,j=\overline{1,T}$, are given numbers, P,B_1,B_2 are given positive-definite Hermitian matrices.

From the condition $0\in\partial\Delta_{\mathcal{D}}(f^0,g^0)$ we find the following equations which determine the least favourable spectral densities for these given sets of admissible spectral densities. Define

$$C^{f0}_{\mu,N}(e^{i\lambda})=(1-e^{i\lambda\mu})^n\vec{A}_N(e^{i\lambda})g^0(\lambda)+\vec{C}^0_{\mu,N}(e^{i\lambda})$$

$$C^{g0}_{\mu,N}(e^{i\lambda})=(1-e^{i\lambda\mu})^n\vec{A}_N(e^{i\lambda})f^0(\lambda)-(\lambda)^{2n}\vec{C}^0_{\mu,N}(e^{i\lambda})$$

For the first set of admissible spectral densities $\mathcal{D}^1_{f0}\times\mathcal{D}^1_{1\delta}$ we have equations

$$\left(C^{f0}_{\mu,N}(e^{i\lambda})\right)\left(C^{f0}_{\mu,N}(e^{i\lambda})\right)^{*}=\left(\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}}p^{0}(\lambda)\right)\times\vec{\alpha}_{f}\cdot\vec{\alpha}^{*}_{f}\left(\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}}p^{0}(\lambda)\right),\quad(33)$$

$$\left(C^{g0}_{\mu,N}(e^{i\lambda})\right)\left(C^{g0}_{\mu,N}(e^{i\lambda})\right)^{*}=\beta^{2}\gamma_{2}(\lambda)|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}\left(p^{0}(\lambda)\right)^{2},\quad(34)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\mathrm{Tr}\,(g_{0}(\lambda)-g_{1}(\lambda))|\,d\lambda=\delta,\quad(35)$$

where $\vec{\alpha}_{f}$, β^{2}, are Lagrange multipliers, the function $|\gamma_{2}(\lambda)|\leqslant 1$ and

$$\gamma_{2}(\lambda)=\mathrm{sign}\,(\mathrm{Tr}\,(g_{0}(\lambda)-g_{1}(\lambda))).$$

For the second set of admissible spectral densities $\mathcal{D}^{2}_{f0}\times\mathcal{D}^{2}_{1\delta}$ we have equations

$$\left(C^{f0}_{\mu,N}(e^{i\lambda})\right)\left(C^{f0}_{\mu,N}(e^{i\lambda})\right)^{*}=\alpha^{2}_{f}\left(\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}}(p^{0}(\lambda))\right)^{2},\quad(36)$$

$$\left(C^{g0}_{\mu,N}(e^{i\lambda})\right)\left(C^{g0}_{\mu,N}(e^{i\lambda})\right)^{*}=\left(|1-e^{i\lambda\mu}|^{n}p^{0}(\lambda)\right)\times\left\{\beta^{2}_{k}\gamma^{2}_{k}(\lambda)\delta_{kl}\right\}^{T}_{k,l=1}\left(|1-e^{i\lambda\mu}|^{n}p^{0}(\lambda)\right),\quad(37)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|g^{0}_{kk}(\lambda)-g^{1}_{kk}(\lambda)\right|d\lambda=\delta_{k},\quad(38)$$

where α^{2}_{f}, β^{2}_{k} are Lagrange multipliers, the functions $\left|\gamma^{2}_{k}(\lambda)\right|\leqslant 1$ and

$$\gamma^{2}_{k}(\lambda)=\mathrm{sign}\,(g^{0}_{kk}(\lambda)-g^{1}_{kk}(\lambda)):\ k=\overline{1,T}.$$

For the third set of admissible spectral densities $\mathcal{D}^{3}_{f0}\times\mathcal{D}^{3}_{1\delta}$ we have equations

$$\left(C^{f0}_{\mu,N}(e^{i\lambda})\right)\left(C^{f0}_{\mu,N}(e^{i\lambda})\right)^{*}=\left(\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}}p^{0}(\lambda)\right)\times\left\{\alpha^{2}_{fk}\delta_{kl}\right\}^{T}_{k,l=1}\left(\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}}p^{0}(\lambda)\right),\quad(39)$$

$$\left(C^{g0}_{\mu,N}(e^{i\lambda})\right)\left(C^{g0}_{\mu,N}(e^{i\lambda})\right)^{*}=\beta^{2}\gamma'_{2}(\lambda)\times\left(|1-e^{i\lambda\mu}|^{n}p^{0}(\lambda)\right)B^{\top}_{2}\left(|1-e^{i\lambda\mu}|^{n}p^{0}(\lambda)\right),\quad(40)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\langle B_{2},g_{0}(\lambda)-g_{1}(\lambda)\rangle|\,d\lambda=\delta,\quad(41)$$

where α^{2}_{fk}, β^{2} are Lagrange multipliers, the function $|\gamma'_{2}(\lambda)|\leqslant 1$ and

$$\gamma'_{2}(\lambda)=\mathrm{sign}\ \langle B_{2},g_{0}(\lambda)-g_{1}(\lambda)\rangle\,.$$

For the fourth set of admissible spectral densities $\mathcal{D}^{4}_{f0}\times\mathcal{D}^{4}_{1\delta}$ we have equations

$$\left(C^{f0}_{\mu,N}(e^{i\lambda})\right)\left(C^{f0}_{\mu,N}(e^{i\lambda})\right)^{*}=\alpha^{2}_{f}\times\left(\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}}p^{0}(\lambda)\right)B^{\top}_{1}\left(\frac{|1-e^{i\lambda\mu}|^{2n}}{|\lambda|^{2n}}p^{0}(\lambda)\right),\quad(42)$$

$$\left(C^{g0}_{\mu,N}(e^{i\lambda})\right)\left(C^{g0}_{\mu,N}(e^{i\lambda})\right)^{*}=\left(|1-e^{i\lambda\mu}|^{n}p^{0}(\lambda)\right)\times\left\{\beta_{ij}(\lambda)\gamma_{ij}(\lambda)\right\}^{T}_{i,j=1}\left(|1-e^{i\lambda\mu}|^{n}p^{0}(\lambda)\right),\quad(43)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|g^{0}_{ij}(\lambda)-g^{1}_{ij}(\lambda)\right|d\lambda=\delta^{j}_{i},\quad(44)$$

where α^{2}_{f}, β_{ij} are Lagrange multipliers, the functions $|\gamma_{ij}(\lambda)|\leqslant 1$ and

$$\gamma_{ij}(\lambda)=\frac{g^{0}_{ij}(\lambda)-g^{1}_{ij}(\lambda)}{\left|g^{0}_{ij}(\lambda)-g^{1}_{ij}(\lambda)\right|}:\ g^{0}_{ij}(\lambda)-g^{1}_{ij}(\lambda)\neq 0.$$

The following theorem holds true.

Theorem 3.1. *The least favorable spectral densities $f_{0}(\lambda)$, $g_{0}(\lambda)$ in the classes $\mathcal{D}^{k}_{f0}\times\mathcal{D}^{k}_{1\delta}, k=1,2,3,4$ for the optimal linear estimation of the functional $A_{N}\vec{\xi}$ from observations of the sequence $\vec{\xi}(m)+\vec{\eta}(m)$ at points of the set $Z\setminus\{0,1,2,\ldots,N\}$ are determined by the minimality condition (12), equations (33)–(35), (36)–(38), (39)–(41), (42)–(44), respectively, the constrained optimization problem (30), and restrictions on densities from the corresponding classes $\mathcal{D}^{k}_{f0},\mathcal{D}^{k}_{1\delta}, k=1,2,3,4$. The minimax-robust spectral characteristic of the optimal estimate of the functional $A_{N}\vec{\xi}$ is determined by the formula (18).*

4 Conclusions

In this article, we present results of investigation of stochastic sequences with periodically stationary increments. We give definition of increment sequence and introduce stochastic sequences with periodically stationary (periodically correlated, cyclostationary) increments. These non-stationary stochastic sequences combine periodic structure of covariation functions of sequences as well as integrating one.

We describe methods of solution of the classical estimation problem for linear functionals constructed from unobserved values of a sequence with periodically stationary increments. Estimates are based on observations of the sequence with a stationary noise sequence. Estimates are obtained by representing the sequence under investigation as a vector-valued sequence with stationary increments. The problem is investigated in the case of spectral certainty, where spectral densities of sequences are exactly known. In this case we propose an approach based on the Hilbert space projection method. We derive formulas for calculating the spectral characteristics and the mean-square errors of the optimal estimates of the functionals. In the case of spectral uncertainty where the spectral densities are not exactly known while, instead, some sets of admissible spectral densities are specified, the minimax-robust method is applied. We propose a representation of the mean square error in the form of a linear functional in L_1 space with respect to spectral densities, which allows us to solve the corresponding constrained optimization problem and describe the minimax-robust estimates of the functionals. Formulas that determine the least favorable spectral densities and minimax-robust spectral characteristic of the optimal linear estimates of the functionals are derived for a collection of specific classes of admissible spectral densities.

These least favourable spectral density matrices are solutions of the optimization problem $\Delta_{\mathcal{D}}(f,g) = \widetilde{\Delta}(f,g) + \delta(f,g|\mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g) \to \inf$, where $\delta(f,g|\mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g)$ is the indicator function of the set $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g$. Solution (f^0, g^0) to this unconstraint optimisation problem is characterized by the condition $0 \in \partial\Delta_{\mathcal{D}}(f^0, g^0)$, where $\partial\Delta_{\mathcal{D}}(f^0, g^0)$ is the subdifferential of the functional $\Delta_{\mathcal{D}}(f,g)$ at point $(f^0, g^0) \in \mathcal{D} = \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g$. This condition makes it possible to find the least favourable spectral densities in some special classes of spectral densities. These are: classes D_0 of densities with the moment restrictions, classes $D_{1\delta}$ which describe the "δ-neighborhood" models in the space L_1 of a fixed bounded spectral density.

References

1. *Baek C.* Periodic dynamic factor models: estimation approaches and applications/ C. Baek, R.A. Davis, V. Pipiras // Electron. J. Stat. — 2018. — Vol. 12, No. 2. — P. 4377–4411.

2. *Basawa I. V.* First-order seasonal autoregressive processes with periodically varying parameters/ I.V. Basawa, R. Lund, Q. Shao // Stat. Probab. Lett. — 2004. — Vol. 67, No. 4. — P. 299–306.

3. *Box G. E. P.* Time Series Analysis: Forecasting and Control: [5th ed.]/ G.E.P. Box, G.M. Jenkins, G.C. Reinsel, G.M. Ljung. Hoboken, NJ: John Wiley and Sons Inc., 2016. — 712 p.

4. *Dubovets'ka I. I.* Interpolation of periodically correlated stochastic sequences/ I.I. Dubovets'ka, A.Yu. Masyutka, M.P. Moklyachuk // Theory Probab. Math. Stat. — 2012. — Vol. 84. — P. 43–55.

5. *Dudek A.* PARMA methods based on Fourier representation of periodic coefficients/ A. Dudek, H. Hurd, W. Wojtowicz // Wiley Interdiscipl. Reviews: Computational Statistics. — 2016. — Vol. 8, No. 3. — P. 130–149.

6. *Franke J.* Minimax-robust prediction of discrete time series / J. Franke // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verv. Geb. – 1985. – Vol. 68. – P. 337-364.

7. *Gikhman I. I.* The theory of stochastic processes. I. / I.I. Gikhman, A.V. Skorokhod. — Berlin: Springer, 2004. – 574 p.

8. *Gladyshev E. G.* Periodically correlated random sequences / E.G. Gladyshev // Sov. Math. Dokl. — 1961. — Vol. 2. — P. 385–388.

9. *Grenander U.* A prediction problem in game theory / U. Grenander // Ark. Mat. – 1957. – Vol. 3. – P. 371-379.

10. *Hannan E. J.* Multiple time series / E.J. Hannan. — New York: Wiley, 1970. — 536 p.

11. *Hosoya Y.* Robust linear extrapolations of second-order stationary processes / Y. Hosoya // Ann. Prob. – 1978. – Vol. 6, No. 4. – P. 574-584.

12. *Johansen S.* The role of initial values in conditional sum-of-squares estimation of nonstationary fractional time series models / S. Johansen, M.O. Nielsen // Econom. Theory. — 2016. — Vol. 32, No. 5. — P. 1095–1139.

13. *Karhunen K.* Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung / K. Karhunen // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I. — 1947. — Vol. 37. — P. 1–79.

14. *Kassam S. A.* Robust hypothesis testing and robust time series interpolation and regression / S.A. Kassam // J. Time Ser. Anal. — 1982. — Vol. 3, No. 3. — P. 185–194.

15. *Kassam S. A.* Robust techniques for signal processing: A survey / S.A. Kassam, H.V. Poor // Proc. IEEE. — 1985. — Vol. 73, No. 3. — P. 433–481.

16. *Kolmogorov A. N.* Selected works by A. N. Kolmogorov. Vol. II: Probability theory and mathematical statistics / A. N. Shiryayev (Ed.). — Kluwer Academic Publications, 1992. - 611p.

17. *Kozak P. S.* Estimates of functionals constructed from random sequences with periodically stationary increments / P.S. Kozak, M.P. Moklyachuk // Theory Probab. Math. Statist. — 2018. — Vol. 97. — P. 85–98.

18. *Liu Y.* Robust linear interpolation and extrapolation of stationary time series in Lp / Y. Liu, Yu. Xue, M. Taniguchi // J. Time Ser. Anal. — 2020. — Vol. 41, No. 2. — P. 229–248.

19. *Lund R.* Choosing seasonal autocovariance structures: PARMA or SARMA / R. Lund // In: Bell W.R., Holan S.H., McElroy T.S. (eds) Economic time series: modelling and seasonality. Chapman and Hall, London, 2011. — P. 63–80.

20. *Luz M.* Interpolation of functionals of stochastic sequences with stationary increments / M. Luz, M. Moklyachuk // Theory Probab. Math. Statist. — 2013. — Vol. 87. — P. 117–133.

21. *Luz M.* Minimax interpolation of sequences with stationary increments and cointegrated sequences / M. Luz, M. Moklyachuk // Modern Stochastics: Theory and Applications. — 2016. — Vol. 3, No. 1. — P. 59–78.

22. *Luz M.* Estimation of Stochastic Processes with Stationary Increments and Cointegrated Sequences / M. Luz, M. Moklyachuk. — London: ISTE; Hoboken, NJ: John Wiley and Sons, 2019 — 308 p.

23. *Masyutka O. Yu.* Interpolation problem for multidimensional stationary processes with missing observations / O.Yu. Masyutka, M.P. Moklyachuk, M.I. Sidei // Stat., Optim. Inf. Comput. — 2019. — Vol. 7, No. 1. — P. 118–132.

24. *Moklyachuk M. P.* Minimax extrapolation and autoregressive-moving average processes / M.P Moklyachuk // Theory Probab. Math. Statist. — 1990. — Vol. 41. — P. 77–84.

25. *Moklyachuk M. P.* Stochastic autoregressive sequences and minimax interpolation / M.P Moklyachuk // Theory Probab. Math. Statist. — 1994. — Vol. 48. — P. 95–104.

26. *Moklyachuk M. P.* Robust procedures in time series analysis / M.P Moklyachuk // Theory Stoch. Process. — 2000. — Vol. 6, No. 3-4. — P. 127–147.

27. *Moklyachuk M. P.* Game theory and convex optimization methods in robust estimation problems / M.P Moklyachuk // Theory Stoch. Process. — 2001. — Vol. 7, No. 1-2. — P. 253–264.

28. *Moklyachuk M. P.* Robust estimations of functionals of stochastic processes / M.P Moklyachuk // Київ: ВПЦ Київський університет, 2008. — 320 p.

29. *Moklyachuk M. P.* Minimax-robust estimation problems for stationary stochastic sequences / M.P.Moklyachuk // Stat., Optim. Inf. Comput. — 2015.— Vol. 3, No. 4. — P. 348–419.

30. *Moklyachuk M. P.* Periodically correlated processes estimates / M.P. Moklyachuk, I.I. Golichenko. — LAP Lambert Academic Publishing, 2016. — 308 p.

31. *Moklyachuk M. P.* Interpolation of multidimensional stationary sequences / M.P. Moklyachuk, O.Yu. Masyutka.// Theory Probab. Math. Statist. — 2006. — Vol. 73. — P. 125–133.

32. *Moklyachuk M. P.* Minimax prediction problem for multidimensional stationary stochastic processes / M.P. Moklyachuk, O.Yu. Masyutka.// Commun. Stat., Theory Methods. — 2011. — Vol. 40, No. 19-20. — P. 3700-3710.

33. *Moklyachuk M. P.* Interpolation of stationary sequences observed with a noise / M.P. Moklyachuk, M.I. Sidei // Theory Probab. Math. Statist. — 2016. — Vol. 93. — P. 153–167.

34. *Moklyachuk M. P.* Estimation of stochastic processes with missing observations / M.P. Moklyachuk, M.I. Sidei, O.Yu. Masyutka. — New York, NY: Nova Science Publishers, 2019. — 334 p.

35. *Napolitano A.* Cyclostationarity: New trends and applications / A. Napolitano // Signal Process. — 2016. — Vol. 120. — P. 385–408.

36. *Osborn D.* The implications of periodically varying coefficients for seasonal time-series processes / D. Osborn // J. Econom. — 1991. — Vol. 48, No. 3. — P. 373–384.

37. *Porter-Hudak S.* An application of the seasonal fractionally differenced model to the monetary aggegrates / S. Porter-Huda // J. Am. Stat. Assoc. — 1990. — Vol. 85, No. 410. — P. 338–344.

38. *Reisen V. A.* A semiparametric approach to estimate two seasonal fractional parameters in the SARFIMA model / V.A. Reisen, B. Zamprogno, W. Palma, J. Arteche // Math. Comput. Simul. — 2014. — Vol. 98. — P. 1–17.

39. *Reisen V. A.* Robust estimation of fractional seasonal processes: Modeling and forecasting daily average SO2 concentrations / V.A. Reisen, E.Z. Monte, G.C. Franco, A.M. Sgrancio, F.A.F. Molinares, P. Bondon, F.A. Ziegelmann, B. Abraham // Math. Comput. Simul. — 2018. — Vol. 146. — P. 27–43.

40. *Rockafellar R. T.* Convex Analysis / R.T. Rockafellar. — Princeton: Princeton University Press, 1997. — 472 p.

41. *Solci C. C.* Empirical study of robust estimation methods for PAR models with application to the air quality area / C.C. Solci, V.A. Reisen, A.J.Q. Sarnaglia, P. Bondon // Commun. Stat., Theory Methods. — 2020. — Vol 48, No. 1. — P. 152–168.

42. *Vastola S. K.* Robust Wiener-Kolmogorov theory / S.K. Vastola, H.V. Poor // IEEE Trans. Inform. Theory. – 1984. – Vol. 30, No. 2. – P. 316-327.

43. *Yaglom A. M.* Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 1: Basic results, Vol. 2: Suplementary notes and references / A.M. Yaglom. — Springer Series in Statistics. New York etc.: Springer-Verlag, 1987.

References

1. BAEK, C., DAVIS, R. A. and PIPIRAS, V. (2018) Periodic dynamic factor models: estimation approaches and applications. *Electron. J. Stat.* 12(2). p. 4377–4411.

2. BASAWA, I. V., LUND, R. and SHAO, Q. (2004) First-order seasonal autoregressive processes with periodically varying parameters. *Stat. Probab. Lett.* 67(4). p. 299–306.

3. BOX, G. E. P., JENKINS, G. M. and REINSEL, G. C. and LJUNG, G.M. (2016) *Time series analysis, Forecasting and control.* 5th ed., Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

4. DUBOVETS'KA, I. I., MASYUTKA, A. YU. and MOKLYACHUK, M. P. (2012)

Interpolation of periodically correlated stochastic sequences. *Theory Probab. Math. Stat.* 84. p. 43–55.

5. DUDEK, A., HURD, H. and WOJTOWICZ, W. (2016) PARMA methods based on Fourier representation of periodic coefficients. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics.* 8(3). p. 130–149.

6. FRANKE, J. (1985) Minimax robust prediction of discrete time series. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb.* 68. p. 337–364.

7. GIKHMAN, I. I. and SKOROKHOD, A. V. (2004) *The theory of stochastic processes. I.* Springer, Berlin.

8. GLADYSHEV, E. G. (1961) Periodically correlated random sequences. *Sov. Math. Dokl.* 2. p. 385–388.

9. GRENANDER, U. (1957) A prediction problem in game theory. *Ark. Mat.* 6. p. 371–379.

10. HANNAN, E. J. (1970) *Multiple time series.* Wiley, New York.

11. HOSOYA, Y. (1978) Robust linear extrapolations of second-order stationary processes. *Ann. Probab.* 6(4). p. 574–584.

12. JOHANSEN, S. and NIELSEN, M. O. (2016) The role of initial values in conditional sum-of-squares estimation of nonstationary fractional time series models. *Econom. Theory.* 32(5). p.1095–1139.

13. KARHUNEN, K. (1947) Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. AI.* 37. p. 1–79.

14. KASSAM, S. A. (1982) Robust hypothesis testing and robust time series interpolation and regression. *J. Time Ser. Anal.* 3(3). p. 185–194.

15. KASSAM, S. A. and POOR, H. V. (1985) Robust techniques for signal processing: A survey. *Proc. IEEE.* 73(3). p. 433–481.

16. KOLMOGOROV, A. N. (1992) In: Shiryayev A. N. (Ed.) *Selected works by A. N. Kolmogorov. Vol. II: Probability theory and mathematical statistics* Kluwer, Dordrecht etc.

17. KOZAK, P. S. and MOKLYACHUK, M. P. (2018) Estimates of functionals constructed from random sequences with periodically stationary increments. *Theory Probab. Math. Statist.* 97. p. 85–98.

18. LIU, Y., XUE, YU. and TANIGUCHI,M. (2020) Robust linear interpolation and extrapolation of stationary time series in Lp. *J. Time Ser. Anal.* 41(2). p. 229–248.

19. LUND, R. (2011) Choosing seasonal autocovariance structures: PARMA or SARMA. In: Bell WR, Holan SH, McElroy TS (eds) *Economic time series: modelling and seasonality.*, Chapman and Hall, London, 63–80.

20. LUZ, M. and MOKLYACHUK, M. (2013) Interpolation of functionals of stochastic sequences with stationary increments. *Theory Probab. Math. Statist.* 87. p. 117–133.

21. LUZ, M. and MOKLYACHUK, M. (2016) Minimax interpolation of sequences with stationary increments and cointegrated sequences / M. Luz, M. Moklyachuk // *Modern Stochastics: Theory and Applications.* 3(1). p. 59–78.

22. LUZ, M., MOKLYACHUK, M. (2019) *Estimation of Stochastic Processes with Stationary Increments and Cointegrated Sequences.* London: ISTE; Hoboken, NJ: John Wiley & Sons .

23. MASYUTKA, O.YU., MOKLYACHUK, M.P. and SIDEI, M. I. (2019) Interpolation problem for multidimensional stationary processes with missing observations. *Stat., Optim. Inf. Comput.* 7(1). p. 118–132.

24. MOKLYACHUK, M. P. (1990) Minimax extrapolation and autoregressive-moving average processes. *Theory Probab. Math. Statist.* 41. p. 77–84.

25. MOKLYACHUK, M. P. (1994) Stochastic autoregressive sequences and minimax interpolation. *Theory Probab. Math. Statist.* 48. p. 95–104.

26. MOKLYACHUK, M. P. (2000) Robust procedures in time series analysis / M.P Moklyachuk // *Theory Stoch. Process.* 6(3-4). p. 127–147.

27. MOKLYACHUK, M. P. (2001) Game theory and convex optimization methods in robust estimation problems / M.P Moklyachuk // *Theory Stoch. Process.* 7(1-2). p. 253–264.

28. MOKLYACHUK, M. P. (2008) Robust estimations of functionals of stochastic processes / M.P Moklyachuk // Київ: ВПЦ Київський університет.

29. MOKLYACHUK, M. P. (2015) Minimax-robust estimation problems for stationary stochastic sequences. *Stat., Optim. Inf. Comput.* 3(4). p. 348–419.

30. MOKLYACHUK, M. P. and GOLICHENKO, I. I. (2016) *Periodically correlated processes estimates.* LAP Lambert Academic Publishing.

31. MOKLYACHUK, M. P. and MASYUTKA, A.YU. (2006) Interpolation of multidimensional stationary sequences. *Theory Probab. Math. Statist.* 73. p. 125–133.

32. MOKLYACHUK, M. P. and MASYUTKA, A.YU. (2011) Minimax prediction problem for multidimensional stationary stochastic processes. *Commun. Stat., Theory Methods.* 40(19-20), p. 3700-3710.

33. MOKLYACHUK, M. P. and SIDEI, M. I. (2016) Interpolation of stationary sequences observed with a noise. *Theory Probab. Math. Statist.* 93. p.153–167.

34. MOKLYACHUK, M. P., SIDEI, M.I. and MASYUTKA, O.YU. (2019) *Estimation of stochastic processes with missing observations.* New York, NY: Nova Science Publishers.

35. NAPOLITANO, A. (2016) Cyclostationarity: New trends and applications. *Signal Process.* 120. p. 385–408.

36. OSBORN, D. (1991) The implications of periodically varying coefficients for seasonal time-series processes. *J. Econom.* 48(3). p. 373–384.

37. PORTER-HUDAK, S. (1990) An application of the seasonal fractionally differenced model to the monetary aggegrates. *J. Am. Stat. Assoc.* 85(410). p. 338–344.

38. REISEN, V. A. et al. (2014) A semiparametric approach to estimate two seasonal fractional parameters in the SARFIMA model. *Math. Comput. Simul.* 98. p. 1–17.

39. REISEN, V. A. et al. (2018) *Robust estimation of fractional seasonal processes: Modeling and forecasting daily average SO2 concentrations. Math. Comput. Simul.* 2018, 146, 27–43.

40. ROCKAFELLAR, R. T. (1997) *Convex Analysis.* Princeton University Press.

41. SOLCI, C. C. et al. (2020) Empirical study of robust estimation methods for PAR models with application to the air quality area. *Commun. Stat., Theory Methods.* 48(1). p. 152–168.

42. VASTOLA, S. K. and POOR, H. V. (1984) Robust Wiener-Kolmogorov theory. *IEEE Trans. Inform. Theory.* 30(2). p. 316–327.

43. YAGLOM, A. M. (1987) *Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 1: Basic results; Vol. 2: Supplementary notes and references.* Springer-Verlag, New York etc.

Received: 01.10.2020

УДК 519.21 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/3.8

А. Я. Оленко[1], *к.ф.-м.н.*

Від субгауссовості до стохастичної апроксимації і моделювання.

[1]Факультет інженерних і математичних наук, Ла Троб Університет, Мельбурн, 3086, Австралія
e-mail: a.olenko@latrobe.edu.au

A. Ya. Olenko[1], *PhD*

From subgaussianity to stochastic approximation and modelling.

[1]School of Engineering and Mathematical Sciences, La Trobe University, Melbourne 3086, Australia
e-mail: a.olenko@latrobe.edu.au

Сучасна теорія субгауссових випадкових величин і процесів була створена незалежними зусиллями кількох наукових шкіл у Франції, США і Україні. Професор Ю.В.Козаченка був засновником і лідером цього наукового напрямку всесвітньовідомої Української ймовірнісної школи. Ця замітка містить короткий нарис внеску Ю.В.Козаченка в теорію субгауссових випадкових величин і процесів. Введено клас φ-субгауссових випадкових величин і продемонстровано його основну властивість. Показано застосування цих результатів до стохастичної апроксимації та моделювання. Зокрема, продемонстровано як ці результати використовуються для наближення з заданою точністю і надійністю траєкторій φ-субгауссових випадкових процесів. Обговорено приклади застосувань до двох важливих алгоритмів у теорії передачі сигналів: інтерполяції Котельникова-Шеннона і вейвелет-розкладів. Також включені деякі особисті спогади автора про Ю.В.Козаченка.

Ключові слова: Ю.В.Козаченко, субгауссовий, стохастична апроксимація, стохастичне моделювання.

The modern theory of subgaussian random variables and processes was created by independent efforts of several research schools from France, USA and Ukraine. Professor Yu.Kozachenko was a founder and leading figure of this research direction of the Ukrainian probability school. An outline of Professor Yu.Kozachenko's contribution to the theory of sub-Gaussian random variables and processes is presented. The class of φ-subgaussian random variables is introduced and its key property is discussed. Then it is demonstrated how these results can be used in stochastic approximation and modeling. In particular, applications to approximation of trajectories of φ-subgaussian random processes with given accuracy and reliability are discussed. Two important clases of algorithms from the signal processing theory, the Shannon sampling method and wavelet decompositions, are used as examples. Some personal memories of the author about Yu. Kozachenko are included at the end of the paper.

Key Words: Yu.Kozachenko, subgaussian, stochastic approximation, stochastic modelling.

Статтю представив д.ф.-м.н. Моклячук М.П.

На спогад про Юрія Васильовича Козаченка (1940-2020)

Професор Юрій Васильович Козаченко - яскравий представник видатної української імовірнісної школи. У 1968 році він захистив кандидатську дисертацію "Про рівномірну збіжність стохастичних інтегралів, рядів і властивості неперервних випадкових полів". Керівником був Михайло Йосипович Ядренко - один із засновників цієї імовірнісної школи. Після захисту дисертації Юрій Васильович весь час працював на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка. У 1985 році він захистив докторську дисертацію. За більш ніж 50 річний період свої активної наукової діяльності він створив свою власну наукову школу, понад 40 його учнів захистили кандидатські й близько 10 докторські дисертації. Професор Козаченко отримав низку фундаментальних результатів у різних областях теорії випадкових процесів і полів, математичної статистики, стохастичного вейвелет аналізу, стохастичного моделювання і їх застосувань. Його науковий доробок включає

© А.Оленко, 2020

понад 10 монографій і 300 статей у провідних фахових вітчизняних і міжнародних журналах.

Однією з центральних тем у науковому доробку Юрія Васильовича був розвиток теорії субгауссових випадкових величин і процесів. Узагальнення теорії гауссових розподілів і стохастичних процесів є однією з важливих проблем теорії ймовірностей, роль якої зростає з розвитком сучасної науки про дані. Гауссові моделі дуже привабливі з математичної точки зору, оскільки часто допускають достатньо прості зображення чи результати в явній формі, але в більшості випадків реальні данні неможливо адекватно описати за допомогою таких моделей. Початок субгауссових досліджень був покладений у роботі Кахана [6], яка запропонувала узагальнення, що позбуваються гауссових припущень, але мають властивості подібні до гауссових. Ця робота ініціювала початок досліджень у цьому напрямку кількох визначних ймовірнісних груп, які незалежно отримали ряд фундаментальних результатів. Наприклад, у Франції яскравими представниками цього напрямку є Фернік, Талагран і Леду [5, 14, 15, 16], у США Дадлі [4, 3]. Професори Козаченко і Булдигін створили українську школу. Підходи зазначених вище шкіл відрізняються і представники кожної школи визнали внесок інших груп. Початок розробки цієї тематики в Україні було покладено роботою [8] професора Козаченко.

Зокрема, він запропонував і ґрунтовно дослідив наступне розширення класів гауссових і субгауссових випадкових величин:
Випадкова величина X називається φ-субгауссовою, якщо $E(X) = 0$ і існує скінченна стала $a > 0$ така, що

$$\mathbf{E}\exp(tX) \leqslant \exp(\varphi(at))$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$.

На перший погляд здається що це означення φ-субгаусссовості пов'язане з математичним сподіванням, але справжня суть його в тому, що воно характеризує поведінку хвостів розподілів, а саме,
Якщо $\varphi(\cdot)$ є N-функцією Орліча [7], *то для φ-субгауссових випадкових величин X справджується наступна нерівність*

$$\mathbf{P}\big(X \geqslant x\big) \leqslant \exp\left(-\psi\left(\frac{x}{\tau_\varphi(X)}\right)\right), \quad x > 0,$$

де $\tau_\varphi(X)$ - норма X у відповідному просторі.

Цей результат показує що класи φ-субгауссових випадкових величин і процесів можуть значно відрізнятись від гауссових, але хвости їх розподілів асимптотично обмежені подібно до гауссових, що дає змогу отримати різноманітні нові узагальнення. Зокрема, властивості траєкторій таких процесів залежать від їх середньоквадратичної регулярності. Змінюючи функцію $\varphi(\cdot)$ можна отримати різноманітні нові класи випадкових величин. Звичайно ці класи не обмежуються гауссовими розподілами, але, наприклад, також включають випадкові величини з симетризованими розподілами Вейбула, розподілами з обмеженим носієм і багато інших.

Результатом більш ніж 30-річної плідної праці стало створення теорії стохастичних процесів в різних метричних просторах, зокрема, просторах Орліча. Ключові результати і підходи ввійшли в монографію [1], яка також містить детальний огляд результатів у цьому напрямку на момент публікації. Ця монографія стала одним з найбільш цитованих класичних джерел з теорії субгауссових процесів і їх метричних властивостей.

У наступні роки Юрій Васильович продовжував розвивати цей напрямок і отримав ряд нових результатів зі своїми учнями, але фокус досліджень змістився до застосувань, зокрема апроксимації випадкових процесів і їх моделювання. Основною темою стало застосування загальних результатів до оцінки близькості траєкторій стохастичних процесів $\mathbf{X}(t)$ і їх апроксимацій $\mathbf{X}_n(t)$. У багатьох застосуваннях, особливо в інженерних науках і економетриці, класична методологія оцінки близькості процесу і його апроксимації базується на середньоквадратичному відхиленні $\sup_{t\in[0,T]} \mathbf{E}\left(\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_n(t)\right)^2$. Для гауссових процесів це відхилення досить просто обчислити що і обумовлює популярність цього підходу. Проте середньоквадратична метрика часто недостатня для адекватного оцінювання відхилень для реальних даних, особливо якщо потрібно використовувати поточкову чи рівномірну близькість. Класичними прикладами є відтворення зображень, де бажано мати невеликі відхилення в кожному пікселі екрана чи фотографії, або отримане радіоопромінення, яке складається з суми всіх відхилень від рекомендованого значення. Тому виникає потреба розглядати інші типи відстаней, наприклад,

$\sup_{t\in[0,T]} |\mathbf{X}(t)-\mathbf{X}_n(t)|$ чи $\int_0^T |\mathbf{X}(t)-\mathbf{X}_n(t)|^p\, dt$.

У циклі робіт професор Козаченко розробив методологію апроксимації й моделювання випадкових процесів з заданими точністю $\varepsilon>0$ і надійністю $1-\delta$, $0<\delta<1$, тобто одержання результатів вигляду

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^T |\mathbf{X}(t)-\mathbf{X}_n(t)|^p\, dt \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \delta \quad \text{і}$$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in[0,T]} |\mathbf{X}(t)-\mathbf{X}_n(t)| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \delta.$$

Наприклад, для апроксимації в $L_p([0,T])$ з точністю ε і надійністю $1-\delta$ потрібно накладати умови вигляду

$$\varepsilon > S_{n,p}\cdot\left(f\left(p\,(S_{n,p}/\varepsilon)^{1/p}\right)\right)^p,$$

$$\exp\left\{-\varphi^*\left((\varepsilon/S_{n,p})^{1/p}\right)\right\} \leqslant \delta/2,$$

де $\varphi^*(\cdot)$ і $f(\cdot)$ - перетворення Лежандра і щільність функції $\varphi(\cdot)$ відповідно, а $S_{n,p}$ - стала, яка залежить від класу процесів. Оскільки всі складові у таких формулах обчислюються явно, то, наприклад, це дає змогу розв'язувати важливу прикладну задачу - визначення необхідної кількості членів n у апроксимаційних формулах для досягнення заданих точності і надійності.

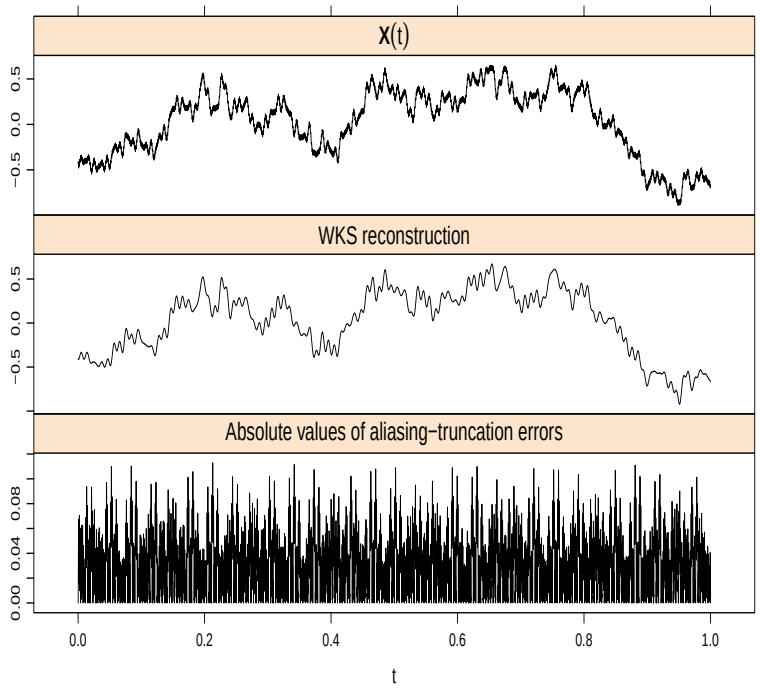


Рис. 1: Траєкторія процесу, її апроксимація і відповідна абсолютна помилка.

Такі результати були отримані для широких класів процесів (включаючи нестаціонарні процеси, випадкові поля, фрактальні процеси, і т.п.) і різних апроксимаційних схем. Наприклад, для класичної схеми Котельникова-Шеннона [9, 10], яка використовується у передачі радіосигналів і зображень з 50-х років минулого сторіччя,

$$\mathbf{X}_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} \frac{\sin\left(\omega\left(t-\frac{k\pi}{\omega}\right)\right)}{\omega\left(t-\frac{k\pi}{\omega}\right)}\,\mathbf{X}\left(\frac{k\pi}{\omega}\right).$$

де ω містить інформацію про діпазон дозволених частот. Рисунок 1 демострує реалізацію випадкового процесу $X(t)$, його апроксимацію $X_n(t)$ методом Котельникова-Шеннона та відповідні абсолютні значення помилки апроксимації $|X(t)-X_n(t)|$.

Інший приклад - вейвелет наближення стохастичних сигналів [11]

$$\mathbf{X}_{n,\mathbf{k}_n}(t) = \sum_{|k|\leqslant k_0'} \xi_{0k}\phi_{0k}(t) + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{|k|\leqslant k_j} \eta_{jk}\psi_{jk}(t)\,,$$

де $\mathbf{k}_n := (k_0', k_0, ..., k_{n-1})$,

$$\xi_{0k} = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{X}(t)\overline{\phi_{0k}(t)}\,dt, \quad \eta_{jk} = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{X}(t)\overline{\psi_{jk}(t)}\,dt\,,$$

а ϕ і ψ позначають базиси f та m вейвелетів.

Результати з моделювання й апроксимації випадкових процесів увійшли у нові монографії професора Козаченка з його учнями, наприклад, [2, 12, 13].

Підсумовуючи попереднє, можемо стверджувати що професором Козаченком була створена потужна завершена теорія випадкових процесів у різних метричних просторах з методологією моделювання й апроксимації важливих для практичних застосувань класів функціональних даних.

Ці, та інші результати досліджень Юрія Васильовича були відзначені багатьма нагородами, зокрема Державною премією України в галузі науки і техніки (2003) і премією НАН України імені М. М. Крилова (2012).

На завершення деякі особисті спогади про Юрія Васильовича. Автор цієї замітки був знайомий з ним з 1986 року, з того часу як Юрій Васильович читав йому курс математичної статистики. Ми працювали багато років на одній кафедрі, були разом у редколегій журналу Теорія Ймовірностей і Математична Статистика. Отримали з ним кілька сумісних грантів і Юрій Васильович кілька разів приїздив до Мельбурна. Як математик, Юрій Васильович, завжди вражав мене знанням дуже тонких результатів. Було не один раз, коли ми писали сумісні статті чи мені присилали на рецензію роботи його учнів, що в доведенні знаходилось важке місце чи неточність. І тут Юрій Васильович як з якоїсь магічної скрині виймав карколомну нерівність, яка виправляла все доведення.

Був ученим, який дійсно ставив математику понад усі особисті проблеми. Згадався один з його приїздів до Мельбурна. Одного дня ми домовились зустрітись в університеті щоб обговорити сумісну статтю. Їдучи з готелю в університет Юрій Васильович потрапив у серйозну аварію. Якби зустрічна машина вдарила машину в якій знаходився Юрій Васильович на пів метра лівіше, то можливо все закінчилось би для нього і водія дуже погано. Ситуація була стресова, на місце аварії приїхала поляція, у водія машини був нервовий зрив. Коли нарешті Юрій Васильович приїхав в університет, на мої схвильовані запитання про те як він себе почуває відповідь була: "Все добре, а от що я Вам хочу сказати про Теорему 2 ...".



Рис. 2: Ю.В.Козаченко з автором у Мельбурні

Одна з основних особистих рис Юрія Васильовича, яка мабуть і приваблювала до нього так багато учнів, була його відношення до інших. До кожного він говорив як до рівного, ніколи не показував своєї вищості в званнях, освіті чи положенні. Це створювало таку атмосферу простоти й доступності в спілкуванні, до якої тягнулись студенти, аспіранти, колеги. Його учнів можна знайти в університетах кожного регіону України. Здавалось що на кафедрі він ніколи не буває сам, весь час коло нього були його аспіранти й колишні учні. Для кожного у нього була задача і план статті. Він ще встигав їздити в Ужгород, Чернівці,... читати там курси й готувати кадри для місцевих університетів.

Юрій Васильович був вчителем у найвищому розумінні цього слова. Ще одна історія, яку я часто згадую, трапилась в мої університетські

роки. Один з моїх однокурстників мав складати іспит Юрію Васильовичу, але так захопився математичною логікою й основами математики, що майже не готувався до екзамену. Звичайно, Юрій Васильович це моментально з'ясував, але замість того щоб "вліпити"двійку, почав розпитувати чим цей студент займається. Зрозумівши що той не просто прогулює його предмет, а серйозно працює над іншими математичними проблемами, поставив відмінно.

Неформальне ставлення Юрія Васильовича до людей, вміння дивився в суть і відкинути другорядне, часто було більш дієвим і повчальним ніж слідування загальним нормам. Мабуть тому всі ми, його колишні студенти, аспіранти й колеги з вдячністю згадуємо не лише його наукові поради, але і його уроки справжньої людяності.

Список використаних джерел

1. *Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V.* Metric Characterization of Random Variables and Random Processes / V.V. Buldygin, Yu.V. Kozachenko. – Providence R.I.: American Mathematical Society, 2000. – 257 p.

2. *Василик О. І., Козаченко Ю. В., Ямненко Р. Є.* ϕ -субгаусссові випадкові процеси / О. І. Василик, Ю. В. Козаченко, Р. Є. Ямненко. – Київ: ВПЦ «Київський університет», 2008. – 231 с.

3. *Dudley R. M.* Universal Donsker classes and metric entropy / R. M. Dudley // Annals of Probability. – 1987. – Vol. 15. – P. 1306-1326.

4. *Dudley R. M.* Uniform central limit theorems / R. M. Dudley. – Cambridge: Cambridge University Press, 1999. – 436 p.

5. *Fernique X.* Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes / X. Fernique. In Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour IV-1974. Springer, 1975. – pp. 1–96.

6. *Kahane J.P.* Properties locales des fonctions a series de Fouries aleatories / J.P. Kahane // Studia Math. – 1960. – Vol. 19, no. 1. – P. 1–25.

7. *M.A. Krasnosel'skii, Ya.B. Rutickii.* Convex Functions and Orlicz Spaces / M.A. Krasnosel'skii, Ya.B. Rutickii. – Gröningen: Noordhof, 1961. – 249 p.

8. *Kozachenko Yu. V.* Sufficient conditions of continuity with probability one of sub-Gaussian random processes / Yu. V. Kozachenko // Dopovidi Akad. Nauk Ukr.SSR, Ser. A. – 1968. – No. 2. P. 113–115.

9. *Kozachenko Yu., Olenko A.* Whittaker-Kotel'nikov-Shannon approximation of φ-sub-Gaussian random processes / Yu. Kozachenko, A. Olenko // J. Math. Anal. Appl. – 2016. – Vol. 443(2). – P. 926–946.

10. *Kozachenko Yu., Olenko A.* Aliasing-Truncation Errors in Sampling Approximations of Sub-Gaussian Signals / Yu. Kozachenko, A. Olenko // IEEE Transactions on Information Theory. – 2016. – Vol. 62, no. 10. – P. 5831-5838.

11. *Kozachenko Yu., Olenko A., Polosmak O.* On convergence of general wavelet decompositions of nonstationary stochastic processes/ Yu. Kozachenko, A. Olenko, O. Polosmak // Electron. J. Probab. – 2013. – Vol. 18, no. 69. – P. 1–21.

12. *Козаченко Ю. В., Пашко А. О.* Моделювання випадкових процесів / Ю. В. Козаченко, А. О. Пашко. – Київ: ВПЦ Київський університет, 1999. – 223 с.

13. *Kozachenko Y., Pogorilyak O., Rozora I., Tegza A.* Simulation of Stochastic Processes with Given Accuracy and Reliability / Y.Kozachenko, O.Pogorilyak, I.Rozora, A.Tegza. – ISTE Press Ltd and Elsevier Ltd Oxford, 2016. – 346 p.

14. *Ledoux M., Talagrand M.* Probability in Banach spaces. Isoperimetry and processes / M. Ledoux, M. Talagrand. – Berlin: Springer-Verlag, 1991. – 482 p.

15. *Talagrand M.* The generic chaining. Upper and lower bounds of stochastic processes / M. Talagrand. – Berlin: Springer-Verlag, 2005. – 593 p.

16. *Talagrand M.* Upper and lower bounds for stochastic processes. Modern methods and classical problems / M. Talagrand. – Heidelberg: Springer, 2014. – 626 p.

Надійшла до редколегії 10.10.2020

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія: фізико-математичні науки

2020, 3

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series: Physics & Mathematics

УДК 519.21

https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/3.9

М.Ю. Петранова[1]

Моделювання гауссового стаціонарного процесу зі стійкою кореляційною функцією із заданою надійністю та точністю

[1] Донецький національний університет імені Василя Стуса, 21021, м. Вінниця, вул. 600-річчя, 21
e-mail: m.petranova@donnu.edu.ua

M. Yu. Petranova[1]

Simulation of a Gaussian stationary process with a stable correlation function with a given reliability and accuracy

[1]Vasyl' Stus Donetsk National University, 21021, 600-richchia str., 21
e-mail: m.petranova@donnu.edu.ua

У цій статті для побудови моделей стохастичних процесів, що наближає процеси із заданою надійністю та точністю в просторі $L_p([0,T])$ використано зображення випадкових процесів у вигляді випадкових рядів з некорельованими членами, отримані в роботі Ю. В. Козаченко, І. В. Розора, Є. В. Турчина (2007) [1]. Подібні конструкції були досліджені у книзі Ю. В. Козаченка та ін. [2] у загальному випадку. Однак виникають додаткові труднощі при побудові моделей конкретного процесу, такі як, наприклад, вибір відповідного базису в $L_2(\mathbb{R})$. У цій статті побудовані моделі, які наближають гауссовий процес зі стійкою кореляційною фунцією $\rho_\alpha(h) = EX_\alpha(t+h)X_\alpha(t) = B^2\exp\{-d|h|^\alpha\}$, $\alpha > 0, d > 0$ з параметром $\alpha = 2$, що є центрованим стаціонарним процесом із заданою надійністю та точністю в просторі $L_p([0,T])$. А також знайдено швидкості збіжності моделей, сформульовано відповідні теореми. Розглянуто способи зображення та основні властивості процесу зі стійкою кореляційною фунцією $\rho_2(h) = B^2\exp\left\{-d|h|^2\right\}$, $d > 0$. У якості базису в просторі $L_2(\mathbb{T})$ використовуються функції Ерміта.

Ключові слова: кореляційна фунція, моделювання, модель процесу, точність, надійність.

In this paper, the representation of random processes in the form of random series with uncorrelated members obtained in the work by Yu. V. Kozachenko, I.V. Rozora, E.V. Turchina (2007) [1]. Similar constructions were studied in the book by Yu. V. Kozachenko and others. [2] in the general case. However, there are additional difficulties in construction of models of specific process, such as, for example, selection of the appropriate basis in $L_2(\mathbb{R})$. In this paper, models are constructed that approximate the Gaussian process with a stable correlation function $\rho_\alpha(h) = EX_\alpha(t+h)X_\alpha(t) = B^2\exp\{-d|h|^\alpha\}$, $\alpha > 0, d > 0$ with parameter $\alpha = 2$, which is a centered stationary process with a given reliability and accuracy in the space $L_p([0,T])$. And also the rates of convergence of the models are found, the corresponding theorems are formulated. Methods of representation and main properties of the process with a stable correlation function $\rho_2(h) = B^2\exp\left\{-d|h|^2\right\}$, $d > 0$ are considered. As a basis in the space $L_2(\mathbb{T})$ Hermitian functions are used.

Key Words: correlation function, simulation, model of the process, accuracy, reliability.

Статтю представила д.ф.-м.н. Розора І.В.

1 Гауссовий процес зі стійкою кореляційною фунцією $\rho_2(h) = B^2\exp\left\{-d|h|^2\right\}$, $d > 0$

Означення 1.1. [3] Стаціонарний випадковий процес $X = \{X(t), t \in [0,T]\}$ називається гауссовим процесом зі стійкою кореляційною фунцією з параметром $\alpha = 2$, якщо $EX(t) = 0$ та

$$E(X(t+h)\overline{X(t)}) = \sigma^2 \cdot \exp\left\{-ah^2\right\},$$

де $\sigma^2 > 0$, $a > 0$ - деякі константи.

Щоб отримати зображення процесу у вигляді ряду некорельованих членів, потрібна наступна теорема.

Теорема 1.1 ([1])**.** *Нехай $X = \{X(t), t \in [0,T]\}$, $EX(t) = 0$ є випадковим процесом другого порядку з кореляційною функцією $R(t,s) = E(X(t)\overline{X(s)})$. Нехай $(\Lambda, \beta_\Lambda, \mu)$ – вимірний простір з σ-скінченною мірою μ, функція $f_i(t,\lambda)$,*

© М.Ю. Петранова, 2020

$t \in T, i = 1, ..., n$ *належать до* $L_2(\Lambda, \mu)$, *та* $\{g_k(\lambda), k \in \mathbb{R}\}$ – *ортонормований базис в* $L_2(\Lambda, \mu)$. *Нехай кореляційна функція* $R(t, s)$ *може бути представлена у формі*

$$R(t,s) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Lambda} f_i(t,\lambda) f_i(\bar{t},\lambda) d\mu(\lambda).$$

Тоді процес $Z(t)$ *може бути зображенний у вигляді ряду, збіжного у середньоквадратичному*

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{ik}(t) \xi_{ik},$$

де

$$a_{ik}(t) = \int_{\Lambda} f_i(t,\lambda) \bar{g_k}(\lambda) d\mu(\lambda),$$

$$E\xi_{ik} = 0, E\xi_{ik}\bar{\xi_{jl}} = \delta_{ij}\delta_{kl}.$$

$\delta_{kl} = \begin{cases} 0, k \neq l, \\ 1, k = l \end{cases}$ – *дельта-функція Кронекера.*

Означення 1.2. [4] Функції

$$g_k(u) = \frac{H_k(u)}{\sqrt{k!}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \exp\left\{-\frac{u^2}{4}\right\} \qquad (1)$$

називаються функціями Ерміта, де

$$H_k(u) = (-1)^k e^{u^2/2} \frac{d^n}{du^n} e^{-u^2/2} \qquad (2)$$

поліноми Ерміта.

[4] Система функцій

$$g_k(u) = \frac{H_k(u)}{\sqrt{k!}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \exp\left\{-\frac{u^2}{4}\right\}$$

– це повна ортонормальна система, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_k(u) g_m(u) = \begin{cases} 0, k \neq m, \\ 1, k = m. \end{cases}$$

Теорема 1.2. *Нехай* $X(t) = \{X(t), t \in [0, T]\}$ – *гауссовий процес зі стійкою кореляційною функцією* $\rho_2(h) = B^2 \exp\left\{-d|h|^2\right\}$, $d > 0$. *Тоді процес* $X(t)$ *може бути зображенний у вигляді ряду, збіжного у середньоквадратичному*

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kl}(t) \cdot \xi_k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k2}(t) \cdot \eta_k, \qquad (3)$$

де $E\xi_k = E\eta_k = 0$, $E\xi_k\xi_l = \delta_{kl}$, $E\eta_k\eta_l = \delta_{kl}$, $E\xi_k\eta_l = 0$,

$$a_{k1}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot g_k(u) du, \qquad (4)$$

$$a_{k2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \sin tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot g_k(u) du. \qquad (5)$$

Доведення. Доведення цієї теореми випливає з теореми 1.1. В нашому випадку маємо:

$$\begin{aligned} R(s,t) &= \sigma^2 \cdot \exp\left\{-a(t-s)^2\right\} = \\ &= \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos((t-s)x) \cdot \exp\left\{-\frac{u^2}{4a}\right\} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \exp\left\{-\frac{u^2}{8a}\right\} \cos tx\right) \times \\ &\quad \times \left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \exp\left\{-\frac{u^2}{8a}\right\} \cos sx\right) dx + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \exp\left\{-\frac{u^2}{8a}\right\} \sin tx\right) \times \\ &\quad \times \left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \exp\left\{-\frac{u^2}{8a}\right\} \sin sx\right) dx. \end{aligned}$$

Тобто, в позначеннях теореми 1.2 $n = 2$, a_{k1} і a_{k2} визначені в теоремі. □

Далі припускаємо, що $X(t)$ – процес Гаусса. У цьому випадку всі випадкові величини ξ_k та η_k є незалежними.

2 Модель гауссового стаціонарного процесу зі стійкою кореляційною фунцією $\rho_2(h) = B^2 \exp\left\{-d|h|^2\right\}$, $d > 0$ в просторі $L_p([0, T])$

Означення 2.1. Модель $X_N(t)$ наближає процес $X(t)$ з надійністю $1 - \alpha, \alpha > 0$ та точністю $\beta > 0$ у просторі $L_p([0, T]), p \geqslant 1, t \in [0, T]$, якщо

$$\begin{aligned} &P\left\{ \|X(t) - X_N(t)\|_p > \beta \right\} = \\ &= P\left\{ \left(\int_0^T |X(t) - X_N(t)|^p dt \right)^{1/p} > \beta \right\} \leqslant \alpha. \end{aligned} \qquad (6)$$

Лема 2.1. *Нехай $X(t)$ – гауссовий процес зі стійкою кореляційною фунцією $\rho_2(h) = B^2 \exp\left\{-d|h|^2\right\}$, $d > 0$. Якщо $X_N(t)$ – модель цього процесу, тоді має місце така оцінка*

$$\left(\sup_{t\in[0,T]} E(X(t) - X_N(t))^2\right)^{1/2} \leqslant B_N, \quad (7)$$

де

$$B_N = \frac{\sigma K}{(\pi a)^{1/4}\sqrt{N+2}} \times \left(\frac{2\sqrt{2\pi a}}{a} T^2 + 4(2a+1)T + \frac{2\pi a}{a}(2a^2+3a+1)\right). \quad (8)$$

Доведення. З теореми 1.2 та означення 1.2 випливає, що

$$E\left(X(t) - X_N(t)\right)^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(a_{k1}^2(t) + a_{k2}^2(t)\right), \quad (9)$$

де

$$a_{k1}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot g_k(u)du,$$

$$a_{k2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \sin tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot g_k(u)du,$$

$g_k(u) = \dfrac{H_k(u)}{\sqrt{k!}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \exp\left\{-\dfrac{u^2}{4}\right\}$ (див. означення 1.1). Потрібно оцінити $|a_{k1}|$ та $|a_{k2}|$:

$$|a_{k1}(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot g_k(u)du\right|.$$

Використовуючи інтегрування частинами, властивості поліномів Ерміта, аналогічно до міркувань, проведених в книзі Ю. В. Козаченко та ін. ([2]), отримуємо для $|a_{k1}(t)|$ наступні співвідношення

$$|a_{k1(t)}| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot g_k(u)du\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \times \frac{H_k(u)}{\sqrt{k!}} \cdot e^{-\frac{u^2}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} du\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \times \frac{e^{-\frac{u^2}{4}}}{\sqrt{k+1}\sqrt{(k+1)!}} \cdot \frac{\partial H_{k+1}(u)}{\partial u} \cdot du\right|.$$

З нерівності Крамера [5] випливає, що для будь-якого u маємо $|g_k(u) \leqslant K|$, де $K = 1,086435$. Таким чином,

$$\left|\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \cdot \frac{H_k(u)}{\sqrt{(k+1)!}} \exp\left\{-\frac{u^2}{4}\right\}\right| \leqslant const.$$

Тому $e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \cdot \dfrac{H_k(u)}{\sqrt{(k+1)!}} \exp\left\{-\dfrac{u^2}{4}\right\} \to 0$, коли $u \to \pm\infty$. Звідси

$$|a_{k1}(t)| = \left|-\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot \frac{u^2}{4}\right)}{\partial u} \times \frac{H_{k+1}(u)}{\sqrt{k+1}\sqrt{(k+1)!}}\right|.$$

За допомогою повторного інтегрування частинами, отримуємо

$$|a_{k1}(t)| = \left|-\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \times \frac{u^2}{4}\right)}{\partial u} \times \frac{H_{k+1}(u)}{\sqrt{k+1}\sqrt{(k+1)!}}\right| =$$

$$= \left|-\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot \frac{u^2}{4}\right)}{\partial u} \times \frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+2)}\sqrt{(k+2)!}} \cdot \frac{\partial H_{k+2}(u)}{\partial u}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot \frac{u^2}{4}\right)}{\partial u} \times \frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+2)}\sqrt{(k+2)!}} \cdot H_{k+1}(u)\right|_{-\infty}^{\infty} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot \frac{u^2}{4}\right)}{\partial u^2} \times \frac{H_{k+2}(u)}{\sqrt{(k+1)(k+2)}\sqrt{(k+2)!}} du \cdot H_{k+1}(u)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot \frac{u^2}{4}\right)}{\partial u^2} \times \frac{H_{k+2}(u)}{\sqrt{(k+1)(k+2)}\sqrt{(k+2)!}} du \cdot H_{k+1}(u)\right|.$$

З нерівності Крамера [5] ми отримуємо:

$$|a_{k1}(t)| \leqslant \frac{K}{\sqrt{(k+1)(k+2)}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} Z_1(t,u)du \right|, \tag{10}$$

де

$$Z_1(t,u) = \frac{\partial^2 \left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \right)}{\partial u^2} - u \frac{\partial \left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \right)}{\partial u} + \frac{u^2-2}{4} \left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \right).$$

Отже

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} Z_1(t,u)du \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}} \left(\frac{1}{16a^2} \cos tu \cdot (u^2(2a+1)^2 - (16a^2t^2+8a^2+4a))tu \times \sin tu \left(\frac{1}{2a}+1 \right) \right) du \right|.$$

Оцінимо вираз під знаком інтеграла

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} Z_1(t,u)du \right| &= \left| \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}} \left(\frac{1}{16a^2} \cos tu \times \right. \right. \\ &\times \left. \left. \left(u^2(2a+1)^2 - (16a^2t^2+8a^2+4a)\right) + \right. \right. \\ &\left. \left. + tu \cdot \sin tu \left(\frac{1}{2a}+1 \right) \right) du \right| \leqslant \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \left(\frac{1}{16a^2} \cos tu \times \right. \right. \\ &\times \left. \left(u^2(2a+1)^2 - (16a^2t^2+8a^2+4a)\right) + \right. \\ &\left. \left. + tu \cdot \sin tu \left(\frac{1}{2a}+1 \right) \right) \right| du \leqslant \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \left(\left| \frac{1}{16a^2} \right| |\cos tu| \cdot \left(\left| u^2(2a+1) \right| + \right. \right. \\ &\left. \left. + \left| -(16a^2t^2+8a^2+4a) \right| \right) + \right. \\ &\left. + |tu| \cdot |\sin tu| \left| \frac{1}{2a}+1 \right| \right) du \leqslant \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \left(\frac{1}{16a^2} \cdot \left(u^2(2a+1)^2 + \right. \right. \\ &\left. \left. + \left(16a^2t^2+8a^2+4a\right) \right) + t|u| \left(\frac{1}{2a}+1 \right) \right) du = \\ &= \frac{(2a+1)^2}{16a^2} \cdot \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot u^2 du + \\ &+ \left(16a^2t^2+8a^2+4a\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}} du + \\ &+ t\left(\frac{1}{2a}+1 \right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot |u| du. \end{aligned}$$

Тепер знайдемо значення наступних інтегралів:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2} \cdot \frac{1}{4a}} du \sqrt{2\pi}\sqrt{4a} = 2\sqrt{2\pi a},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}} u^2 du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} u^2 du \sqrt{2\pi}\sqrt{4a} = 4a\sqrt{2\pi}\sqrt{4a} = 8a\sqrt{2\pi a},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}} |u| du = 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} u du = 2\int_{-\infty}^{\infty} d\left(e^{-\frac{u^2}{8a}} \right) \cdot 4a = 8a.$$

Замінюємо ці значення на початкову нерівність

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} Z_1(t,u)du\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}}\left(\frac{(2a+1)^2}{16a^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}}\cdot u^2 du+\right.$$
$$+\frac{(16a^2t^2+8a^2+4a)}{16a^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}}du+$$
$$\left.+t\Big(\frac{1}{2a}+1\Big)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}}|u|du\right) =$$
$$=\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}}\left(\frac{(2a+1)^2}{16a^2}\cdot 8a\sqrt{2\pi a}+\right.$$
$$+\frac{\big(16a^2t^2+8a^2+4a\big)}{16a^2}\times$$
$$\left.\times 2\sqrt{2\pi a}+t\Big(\frac{1}{2a}+1\Big)8a\right) =$$
$$=\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}}\left(\frac{\sqrt{2\pi a}}{2a}\big((2a+1)^2+\right.$$
$$\left.+(4at^2+2a+1)\big)+4t(2a+1)\right) =$$
$$=\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}}\left(\frac{\sqrt{2\pi a}}{2a}\big(2at^2+2a^2+3a+1\big)+\right.$$
$$\left.+4t(2a+1)\right),$$

тоді

$$|a_{k1}(t)| \leqslant \frac{K}{\sqrt{(k+1)(k+2)}}\left|\int_{-\infty}^{\infty} Z_1(t,u)du\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{K}{\sqrt{(k+1)(k+2)}}\cdot\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}}\times$$
$$\times\left(\frac{\sqrt{2\pi a}}{a}\big(2at^2+2a^2+3a+1\big)+\right.$$
$$\left.+4t(2a+1)\right). \tag{11}$$

І з того, що $t\in[0,T]$, маємо

$$\sup_{t\in[0,T]]}|a_{k1}(t)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{K}{\sqrt{(k+1)(k+2)}}\cdot\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}}\times$$
$$\times\left(\frac{\sqrt{2\pi a}}{a}\big(2aT^2+2a^2+3a+1\big)+\right.$$
$$\left.+4T(2a+1)\right). \tag{12}$$

Аналогічно, до міркувань проведених вище, для функції

$$a_{k2}(t) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}}\cdot\sin tu\cdot e^{-\frac{u^2}{8a}}\cdot g_k(u)du$$

отримаємо таку оцінку:

$$\sup_{t\in[0,T]]}|a_{k2}(t)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{K}{\sqrt{(k+1)(k+2)}}\cdot\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}}\times$$
$$\times\left(\frac{\sqrt{2\pi a}}{a}\big(2aT^2+2a^2+3a+1\big)+4T(2a+1)\right). \tag{13}$$

І нарешті, отримуємо оцінку для $\sup\limits_{t\in[0,T]} E\big(X(t)-X_N(t)\big)^2$:

$$\sup_{t\in[0,T]} E\big(X(t)-X_N(t)\big)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty}\left(\frac{K}{\sqrt{(k+1)(k+2)}}\right)^2\times$$
$$\times 2\left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}}\Big(\frac{\sqrt{2\pi a}}{a}\big(2aT^2+2a^2+3a+1\big)+\right.$$
$$\left.+4T(2a+1)\Big)\right)^2 =$$
$$=\frac{\sigma^2K^2}{(\pi a)^{1/2}(N+2)}\left(\frac{2\sqrt{2\pi a}}{a}T^2+\right. \tag{14}$$
$$\left.+4(2a+1)T+\frac{\sqrt{2\pi a}}{a}\big(2a^2+3a+1\big)\right)^2. \tag{15}$$

Беремо квадратний корінь з обох сторін нерівності і отримуємо оцінку цієї леми. □

Теорема 2.1. *Нехай* $X(t) = \{X(t), t \in [0,T]\}$ *– гауссовий вимірний випадковий процес. Тоді для* $\varepsilon > C_p^{1/2}$, *де* $C = \int_0^T \Big(E(X(t))^2\Big)^{p/2} dt < \infty$, *має місце нерівність*

$$P\Big\{ \|X(t)\|_p > \varepsilon \Big\} \leqslant 2\exp\left\{ -\frac{\varepsilon^2}{2C^{2/p}} \right\}. \quad (16)$$

Доведення. Нерівність (16) випливає з наслідку 2.1 з роботи [6]. □

Лема 2.2. *Нехай* $X(t) = \{X(t), t \in [0,T]\}$ *– вимірний гауссовий процес зі стійкою кореляційною фунцією* $\rho_2(h) = B^2 \exp\Big\{-d|h|^2\Big\}$, $d > 0$. *Якщо* $X_N(t)$ *– модель цього процессу, тоді справедлива наступна оцінка*

$$\int_0^T \Big(E\big(X(t) - X_N(t)\big)^2\Big)^{p/2} dt \leqslant L_N^{p/2}, \quad (17)$$

де

$$L_N = \frac{\sigma^2 K^2}{(\pi a)^{1/2}(N+2)} \left(\frac{8\pi T^{\frac{2(2p+1)}{p}}}{a(2p+1)^{2/p}} + \right.$$
$$+ \frac{16\sqrt{2\pi a}(2a+1)}{a} \cdot \frac{T^{\frac{3p+2}{p}}}{\Big(\frac{3p}{2}+1\Big)^{2/p}} +$$
$$+ \left(16(2a+1)^2 + \frac{8\pi}{a}(2a^2+3a+1) \right) \times$$
$$\times \frac{T^{\frac{2(p+1)}{p}}}{(p+1)^{2/p}} + +8(2a+1)\frac{\sqrt{2\pi a}}{a} \times$$
$$\times (2a^2+3a+1)\frac{T^{\frac{p+2}{p}}}{\Big(\frac{p}{2}+1\Big)^{2/p}} +$$
$$\left. + \frac{2\pi}{a}(2a^2+3a+1)^2 T^{2/p} \right). \quad (18)$$

Доведення. Застосовуючи оцінки (9) та (14) з леми 2.1, отримаємо

$$E\big(X(t) - X_N(t)\big)^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} \big(a_{k1}^2(t) + a_{k2}^2(t)\big),$$

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \big(a_{k1}^2(t) + a_{k2}^2(t)\big) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\sigma^2 K^2}{(\pi a)^{1/2}(N+2)} \left(\frac{2\sqrt{2\pi a}}{a} t^2 + \right.$$
$$\left. + 4(2a+1)t + \frac{\sqrt{2\pi a}}{a}(2a^2+3a+1) \right)^2.$$

Отже,

$$\left(\int_0^T \Big(E\big(X(t) - X_N(t)\big)^2\Big)^{p/2} dt \right)^{2/p} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\sigma^2 K^2}{(\pi a)^{1/2}(N+2)} \Big(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 \Big) =$$
$$= \frac{\sigma^2 K^2}{(\pi a)^{1/2}(N+2)} \left(\frac{8\pi T^{\frac{2(2p+1)}{p}}}{a(2p+1)^{2/p}} + \right.$$
$$+ \frac{16\sqrt{2\pi a}(2a+1)}{a} \times$$
$$\times \frac{T^{\frac{3p+2}{p}}}{\Big(\frac{3p}{2}+1\Big)^{2/p}} + \left(16(2a+1)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{8\pi}{a}(2a^2+3a+1) \right) \cdot \frac{T^{\frac{2(p+1)}{p}}}{(p+1)^{2/p}} +$$
$$+ 8(2a+1)\frac{\sqrt{2\pi a} \cdot T^{\frac{p+2}{p}}}{a\big(\frac{p}{2}+1\big)^{2/p}}(2a^2+3a+1) +$$
$$\left. + \frac{2\pi}{a}(2a^2+3a+1)^2 T^{2/p} \right).$$

де

$$I_1 = \left(\int_0^T \Big(\frac{8\pi}{a} t^4\Big)^{p/2} dt \right)^{2/p},$$

$$I_2 = \left(\int_0^T \Big(\frac{16\sqrt{2\pi a}(2a+1)}{a} t^3\Big)^{p/2} dt \right)^{2/p},$$

$$I_3 = \left(\int_0^T \Big((16(2a+1)^2 + \frac{8\pi}{a}(2a^2+3a+1))t^2\Big)^{p/2} dt \right)^{2/p},$$

$$I_4 = \left(\int_0^T \Big(8(2a+1)\frac{\sqrt{2\pi a}}{a}(2a^2+3a+1)t\Big)^{p/2} dt \right)^{2/p},$$

$$I_5 = \left(\int_0^T \Big(\frac{2\pi}{a}(2a^2+3a+1)^2\Big)^{p/2} dt \right)^{2/p} \Big).$$

□

Теорема 2.2. *Нехай* $X(t) = \{X_N(t), t \in [0,T]\}$ *– вимірний гауссовий процес зі стійкою кореляційною фунцією* $\rho_2(h) = B^2 \exp\Big\{-d|h|^2\Big\}$, $d > 0$. *Модель* $X_N(t)$ *наближає процес* $X(t)$ *у просторі* $L_p([0,T])$ *з точністю* β *і надійністю* $1-\alpha, 0 < \alpha < 1$, *якщо* $N > 0$ *таке, що*

$$L_N \leqslant \frac{\beta^2}{p} \quad (19)$$

та

$$L_N \leqslant \frac{\beta^2}{\Big(2\big(\ln 2\big)\Big)}, \tag{20}$$

де L_N *визначається формулою* (18).

Доведення. З нерівності (16) і леми 2.2, якщо $\varepsilon > L_N^{1/p} p^{1/2}$ отримаємо

$$P\left\{|X(t) - X_N(t)|_p > \varepsilon\right\} \leqslant 2\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2L_N}\right\}. \tag{21}$$

Якщо в (21) замість ε покласти β, тоді умови теореми виконуються, якщо

$$\beta \geqslant L_N^{p/2} p^{1/2},$$

$$2\exp\left\{-\frac{\beta^2}{2L_N}\right\} \leqslant \alpha,$$

тобто, якщо виконуються умови (19) і (20), тоді має місце теорема. □

3 Висновки

У данній роботі побудовано моделі, які наближають гауссовий процес зі стійкою кореляційною фунцією $\rho_2(h) = B^2 \exp\left\{-d|h|^2\right\}$, $d > 0$ із заданою надійністю $1-\alpha, 0 < \alpha < 1$ та точністю $\beta > 0$ в просторі $L_p([0,T]), p \geqslant 1$.

Автор висловлює глибоку подяку своєму керівнику і наставнику Юрію Васильовичу Козаченко. З пам'яттю у серці...

Список використаних джерел

1. *Kozachenko Yu.V.* On expansion of random process in series / Yu.V. Kozachenko, I.V. Rozora, Ye. V. Turchyn. // Random Operators and Stohastic Equations. — 2007. — v. 15(1). —P. 15–35.

2. *Козаченко Ю.В.* Квазібанахові простори випадкових величин / Ю.В. Козаченко, Ю.Ю. Млавець, О.М. Моклячук — Ужгород: Карпати, 2015. — 212 с.

3. *Uhlenbeck G.E.* On the theory of Brownian motion / G.E. Uhlenbeck, L.S. Ornstein. // Phys. Rev. — 1930. — v. 36 P. 832–841.

4. *Kampe de Feriet J.* Fonctions de la Physique Mathematique / Kampe de Feriet J. — Paris: Paris Editions du CNRS, 1957. — 99 p.

5. *Erdelyi A.* Higher Transcendental Functions / A. Erdelyi. — New-York: McGraw-Hill, 1953. Vol. **II** — 414 p.

6. *Kamenschikova O.* On an expansion of random processes in the space $L_p(T)$ / O. Kamenschikova, Y. Kozachenko. // Theory Probab. And Math. Statist. — 2009. — v.79. —P. 83–88.

References

1. KOZACHENKO, YU.V., ROZORA, I.V., TURCHYN, YE. V. (2007) On expansion of random process in series. *Random Operators and Stohastic Equations*. v. 15(1). P. 15–35.

2. KOZACHENKO, YU.V., MLAVETS, YU. YU., MOKLIACHUK, O.M. (2015) *Kvazibanakhovi prostory vypadkovykh velychyn*. Uzhhorod: Karpaty.

3. UHLENBECK, G.E., ORNSTEIN, L.S. (1930) On the theory of Brownian motion *Phys. Rev.* v. 36 P. 832–841.

4. KAMPE DE FERIET J. (1957) *Fonctions de la Physique Mathematique*. Paris: Paris Editions du CNRS.

5. ERDELYI, A. (1953) *Higher Transcendental Functions*. New-York: McGraw-Hill. Vol. **II**.

6. KAMENSCHIKOVA, O., KOZACHENKO, Y. (2009) On an expansion of random processes in the space $L_p(T)$. *Theory Probab. And Math. Statist.*. v.79. P. 83–88.

Надійшла до редколегії 01.11.2020

УДК 519.21
https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/3.10

І.В. Розора, *д.ф.-м.н., доц.*

Вибіркова неперервність з імовірністю одиниця для оцінки імпульсної перехідної функції

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64.
e-mail: irozora@bigmir.net

I.V. Rozora, *D.Sc., Associate Prof.*

Sample continuity with probability one for the estimator of impulse response function

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.
e-mail: irozora@bigmir.net

В роботі досліджується фізично здійснима однорідна лінійна система з імпульсною перехідною функцією. В якості оцінки імпульсної функції розглядається сумісна корелограма між процесами на вході та виході системи. Знаходяться умови, за яких траєкторії оцінки імпульсної функції є рівномірно неперервними з імовірністю одиниця.

Ключові слова: імпульсна перехідна функція, лінійна однорідна система, гауссовий процес, сумісна корелограма, вибіркова неперервність.

The problem of estimation of a stochastic linear system has been a matter of active research for the last years. One of the simplest models considers a 'black box' with some input and a certain output. The input may be single or multiple and there is the same choice for the output. This generates a great amount of models that can be considered. The sphere of applications of these models is very extensive, ranging from signal processing and automatic control to econometrics (errors-in-variables models). In this paper a time-invariant continuous linear system is considered with a real-valued impulse response function. We assume that impulse function is square-integrable. Input signal is supposed to be Gaussian stationary stochastic process with known spectral density. A sample input–output cross-correlogram is taken as an estimator of the response function. The conditions on sample continuousness with probability one for impulse response function are investigated.

Key Words: impulse response function, linear time-invariant system (LTI), Gaussian process, cross-correlogram, sample continuity.

Статтю представив д.ф.-м.н.Моклячук М.П.

1 Вступ

Задача оцінювання характеристик лінійних систем різної фізичної природи виникає у багатьох галузях, наприклад, у радіофізиці, сейсмології, метеорології, теорії сигналів та автоматичного контролю, теорії фільтрації, фінансовій математиці тощо. Останнім чсом цей напрямок досить активно розвивається.

Деякі методи оцінювання невідомих імпульсних перехідних функцій лінійних систем та вивчення властивостей відповідних оцінок розглядались у роботах В.Булдигіна та його учнів. У класі лінійних систем важливий підклас складають неперервні однорідні системи. В якості оцінок беруться сумісні періодограми або сумісні корелограми між процесами на вході та виході системи.

Для корелограмної дискретної за часом оцінки у роботах В.Булдигіна, В.Зайця, В.Курочки та Ф.Уцета [3] вивчалися умови асимптотичної незміщеності та конзистентності у середньому квадратичному, а також умови асимптотичної нормальності як у сенсі збіжності скінченновимірних розподілів, так у сенсі збіжності відповідних розподілів у просторі неперервних функцій.

В працях В.Булдигіна та І.Блажієвської [1] встановлюється асимптотична незміщеність та конзистентність у середньому квадратичному корелограмної інтегральної оцінки; з менш обмежувальними умовами, ніж в статтях В.Булдигіна і Фу Лі, вивчались питання асимптотичної нормальності оцінки та похибки оцінювання у просторі неперервних функцій.

Потрібно зауважити, що у роботах професора Булдигіна В. та його учнів вивчаються асимптотичні властивості оцінок перехідної імпульсної функції і не приділяється увага зна-

© І.В. Розора, 2020

ходженню точних оцінок розподілів для супремуму похибки оцінювання. Вперше такі оцінки були знайдені в роботі Ю. Козаченка та І. Розори [4].

У статтях [5, 6] знайдені швидкість збіжності корелограмної оцінки перехідної функції в просторах $C(T)$ і $L_p(T)$ відповідно.

В даній роботі розглядається корелограмна інтегральна оцінка імпульсної перехідної функції та знаходиться достатні умови рівномірної неперервності траєкторій оцінок імпульсної перехідної функції. Ці результати грунтуються на теорії квадратично-гауссових випадових величин.

2 Корелограми та їх властивості

Розглянемо фізично здійсниму однорідну систему з імпульсною перехідною функцією $H(\tau)$, $\tau \in \mathbf{R}$. Це означає, що дійснозначна функція $H(\tau) = 0$ при $\tau < 0$, а реакція системи на допустимий вхідний сигнал $X(t)$, $t \in \mathbf{R}$, має вигляд

$$Y(t) = \int_0^\infty H(\tau)X(t-\tau)d\tau. \qquad (1)$$

При вивченні таких систем виникає задача оцінювання функції H за спостереженнями за реакцією системи на вхідний сигнал. У даній статті розглядається корелограмний метод оцінювання імпульсної перехідної функції H за умови $H \in L_2(\mathbf{R})$.

Розглянемо дійснозначний стаціонарний центрований гауссівський випадковий процес $X = (X(t),\, t \in \mathbf{R})$, що збурює систему (1). Нехай $f = (f(\lambda),\, \lambda \in \mathbf{R})$ — спектральна щільність процесу X. Припускаємо, що дана функція неперервна і задовольняє умовам

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda\in\mathbf{R}} |f(\lambda)| &< \infty; \\ K_X &\in L_1(\mathbf{R}), \end{aligned}$$

де $K_X(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(\lambda)d\lambda,\ t \in \mathbf{R}$, — кореляційна функція випадкового процесу X.

Оцінку для H в точці τ, $\tau > 0$, визначимо у вигляді сумісної емпіричної корелограми між вхідним та вихідним процесами (див., наприклад, [1])

$$\hat{H}_T(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T Y(t+\tau)X(t)dt,\ \tau > 0, \qquad (2)$$

де T — довжина інтервалу усереднення, при цьому підході до оцінювання H припускається також, що $X(t) = X_\Delta(t)$, тобто на вхід системи подається сім'я процесів, залежних від параметра $\Delta > 0$ та із певним виглядом спектральної щільності. В подальшому параметр Δ будемо опукати.

Припустимо, що $H \in L_2(\mathbf{R})$.

Через

$$H^*(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}H(t)dt, \quad \lambda \in \mathbf{R},$$

позначимо перетворення Фур'є- Планшереля функції H.

Зауваження 1. *Інтеграли в* (1) *та* (2) *розглядаються як середньоквадратичні інтеграли Рімана.*

Інтеграл в (1) *існує тоді і тільки тоді, коли існує інтеграл Рімана*

$$\int_0^\infty \int_0^\infty H(\tau)K_X(s-\tau)H(s)dsd\tau. \qquad (3)$$

Якщо в даному інтегралі використати зображення кореляційної функції через спектральну щільність та перетворення Фур'є-Планшереля для функції $H(\tau)$, отримаємо

$$\int_0^\infty \int_0^\infty H(\tau)K(s-\tau)H(s)dsd\tau = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} H^*(-\lambda)\cdot H^*(\lambda)f(\lambda)d\lambda.$$

Оскільки $\sup\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} |f(\lambda)| < \infty$ *і* $H \in L_2(\mathbf{R})$, *то інтеграл* (3) *існує, а отже, і існує інтеграл в* (1).

Будемо вважати, що інтеграл (3) *існує також як інтеграл Лебега.*

Легко підрахувати, що математичне сподівання $\hat{H}_T(\tau)$ дорівнює

$$E\hat{H}_T(\tau) = \int_0^\infty H(s)K_X(\tau-s)ds. \qquad (4)$$

Отже, з (4) маємо, що в загальному випадку

$$E\hat{H}_T(\tau) \neq H(\tau),\ \tau \in \mathbf{R}.$$

Це означає, що оцінка $\hat{H}_T(\tau)$ є зміщеною.

В роботах [1], [2] розглядаються послідовності коваріаційних функцій, які залежать від параметру Δ, і знаходяться умови, коли оцінка $\hat{H}_{T,\Delta}(\tau)$ є асимптотично незміщеною для $H(\tau)$ при $\Delta \to \infty$. Також показано, що за певних умов $\hat{H}_{T,\Delta}(\tau) \to H(\tau)$ з ймовірністю 1 при $\Delta \to \infty$ і $T \to \infty$.

Зауваження 2. *З роботи [1] випливає, що всі потрібні умови для асимптотичної незміщеності та для збіжності з ймовірністю 1 виконуються для послідовності таких спектральних щільностей*

$$f_\Delta(\lambda) = \frac{c}{2\pi} \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{\Delta}\right\}, \quad \lambda \in \mathbf{R},\ \Delta > 0. \quad (5)$$

Нехай

$$\hat{Z}_T(\tau) = \hat{H}_T(\tau) - E\hat{H}_T(\tau).$$

В [1] показано, що кореляцяційна функція $\hat{Z}_T(\tau)$ має вигляд

$$E\hat{Z}_T(\tau_1)\hat{Z}_T(\tau_2) =$$

$$= \frac{2\pi}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(e^{i(\tau_1-\tau_2)\lambda_2} |H^*(\lambda_2)|^2 +$$

$$+ e^{i(\tau_1\lambda_1+\tau_2\lambda_2)} H^*(\lambda_1)H^*(\lambda_2)\Big) \times$$

$$\times \Phi_T(\lambda_2-\lambda_1) f(\lambda_1) f(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2, \quad (6)$$

де $\Phi_T(\lambda)$ — ядро Фейєра

$$\Phi_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \left(\frac{\sin(T\lambda/2)}{\lambda/2} \right).$$

Нехай S — параметрична множина. Функція $\rho(t,s)$ називається псевдометрикою на S, якщо вона задовольняє всі аксіоми метрики, окрім того, що множина $\{(t,s) \in S \times S : \rho(t,s) = 0\}$ може бути більшою ніж діагональ $\{(t,s) \in S \times S : t = s\}$.

Розглянемо функцію (див. [2])

$$g_H(\tau) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |H^*(\lambda)|^2 \sin^2 \frac{\lambda\tau}{2} d\lambda \right]^{1/2}, \quad \tau > 0. \quad (7)$$

Оскільки $H \in L_2(\mathbf{R})$, то функція (7) коректно визначена та породжує псевдометрику

$$\sqrt{\sigma}(\tau_1,\tau_2) = \sqrt{g_H(|\tau_1-\tau_2|)}, \qquad \tau_1,\ \tau_2 \in \mathbf{R}.$$

Наступна лема дає оцінку стандартного відхилення для приростів процесу Z_T.

Лема 1. *[4] Припустимо, що $H \in L_2(\mathbf{R})$ і $\sup_{\lambda\in\mathbf{R}} |f(\lambda)| < \infty$, де $f(t)$ — спектральна щільність процесу $X(t)$. Тоді*

$$\left(E|\hat{Z}_T(\tau_1) - \hat{Z}_T(\tau_2)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{T}} \cdot \sup_{t\in\mathbf{R}} |f(t)| \cdot ||H^*||_2^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\sigma}(\tau_1,\tau_2), \quad \tau_1,\tau_2 > 0. \quad (8)$$

Доведемо таку лему.

Лема 2. *Нехай $\psi(u), u \geqslant 0$ — така неперервна, монотонно зростаюча функція, $\psi(0) = 0$, що функція $\frac{u}{\psi(u)}$ є неспадною при $u > u_0$, де стала $u_0 \geqslant 0$. Тоді для всіх $u \geqslant 0$ та $v > 0$ виконується наступна нерівність*

$$\left|\sin\frac{u}{v}\right| \leqslant \frac{\psi(u+u_0)}{\psi(v+u_0)}. \quad (9)$$

Доведення. Оскільки за умовою леми функція $\psi(u)$ є монотонно зростаючою, то при $u \geqslant v$

$$\frac{\psi(u+u_0)}{\psi(v+u_0)} \geqslant 1.$$

Тому в цьому випадку нерівність (9) є очевидною. Отже, (9) досить довести у випадку, коли $u < v$.

Оскільки функція $\frac{u}{\varphi(u)}$ є неспадною при $u > u_0$, то при $u < v$ має місце наступна оцінка

$$\frac{u+u_0}{v+u_0} \leqslant \frac{\psi(u+u_0)}{\psi(v+u_0)}.$$

А отже, справедливе й співвідношення

$$\left|\sin\frac{u}{v}\right| < \frac{u}{v} < \frac{u+u_0}{v+u_0} \leqslant \frac{\psi(u+u_0)}{\psi(v+u_0)}.$$

Що й доводить твердження леми. □

Приклад 1. Легко перевірити, що умови попередньої леми виконуються для функції

$$\psi(u) = K \cdot u^\alpha, \quad u \geqslant 0, \alpha \in (0,1],$$

де K — деяка стала, а значення $u_0 = 0$.

Теорема 2.1. *Припустимо, що* $H \in L_2(\mathbf{R})$ *і* $\sup\limits_{\lambda\in\mathbf{R}} |f(\lambda)| < \infty$, *де* $f(t)$ *– спектральна щільність процесу* $X(t)$. *Нехай функція* $\psi(u)$, $u \geqslant 0$, *задовольняє всі умови леми* 2 *та збігається інтеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H^*(\lambda)|^2 \psi^2\left(\frac{\lambda}{2}+u_0\right) d\lambda < \infty.$$

Тоді

$$\left(E|\hat{Z}_T(\tau_1)-\hat{Z}_T(\tau_2)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant K\cdot\psi^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{|\tau_1-\tau_2|}+u_0\right), \quad (10)$$

де $\tau_1, \tau_2 \in \mathbf{R}$, u_0 *– стала з леми* 2, *а* K *дорівнює*

$$K = K(T) = \frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{T}} \cdot \sup_{t\in\mathbf{R}} |f(t)| \cdot ||H^*||_2^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(\int_{-\infty}^{\infty} |H^*(\lambda)|^2 \psi^2\left(\frac{\lambda}{2}+u_0\right) d\lambda\right)^{1/4}. \quad (11)$$

Доведення. Доведення теореми випливає з (7), леми 1 і леми 2. Дійсно, з леми 2 маємо

$$\sin^2\frac{\lambda\tau}{2} \leqslant \frac{\psi^2\left(\frac{\lambda}{2}+u_0\right)}{\psi^2\left(\frac{1}{\tau}+u_0\right)}.$$

Тоді із співвідношення (7) та останньої нерівності випливає, що

$$\begin{aligned}\sqrt{\sigma}(\tau_1,\tau_2) &= \sqrt{g_H(|\tau_1-\tau_2|)} \leqslant \\ \leqslant\ & \psi^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{|\tau_1-\tau_2|}+u_0\right) \times \\ \times\ & \left(\int_{-\infty}^{\infty} |H^*(\lambda)|^2\psi^2\left(\frac{\lambda}{2}+u_0\right)d\lambda\right)^{1/4}.\end{aligned}$$

Теорему буде повністю доведено, якщо праву частину нерівності підставити у (8).

□

Наслідок 1. *Припустимо, що* $H \in L_2(\mathbf{R})$ *і* $\sup\limits_{\lambda\in\mathbf{R}} |f(\lambda)| < \infty$, *де* $f(t)$ *– спектральна щільність процесу* $X(t)$, *та*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H^*(\lambda)|^2 \lambda^{2\alpha} d\lambda < \infty, \quad \alpha \in (0,1].$$

Тоді

$$\left(E|\hat{Z}_T(\tau_1)-\hat{Z}_T(\tau_2)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant K_\alpha \cdot |\tau_1-\tau_2|^{\frac{\alpha}{2}}, \quad (12)$$

де $\alpha \in (0,1]$,, K_α *має вигляд*

$$K_\alpha = K_\alpha(T) = \frac{2^{2-\alpha/2}\sqrt{\pi}}{\sqrt{T}} \cdot \sup_{t\in\mathbf{R}} |f(t)| \times$$

$$\times ||H^*||_2^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} |H^*(\lambda)|^2 \lambda^{2\alpha} d\lambda\right)^{1/4}. \quad (13)$$

Доведення. Наслідок випливає з теореми 2.1 та прикладу 1. □

3 Квадратично-Гауссові випадкові процеси

В даному розділі розглядаються означення та деякі властивості квадратично-гауссових випадкових величин і процесів.

Нехай (Ω, F, P) — ймовірнісний простір та (T,ρ)— компактний метричний простір з метрикою ρ.

Означення 3.1. Нехай $\Xi = \{\xi_t, t \in \mathrm{T}\}$ — сім'я сумісно гауссівських випадкових величин, $E\xi_t = 0$ (наприклад, ξ_t, $t \in \mathrm{T}$, є гауссівським випадковим процесом).

Простір $SG_\Xi(\Omega)$ називається простором квадратично-гауссових випадкових величин, якщо кожен елемент $\eta \in SG_\Xi(\Omega)$ можна представити у вигляді

$$\eta = \bar{\xi}^T A\bar{\xi} - \mathsf{E}\bar{\xi}^T A\bar{\xi}, \quad (14)$$

де $\bar{\xi}^T = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $\xi_k \in \Xi$, $k = 1, \ldots, n$, A— дійснозначна матриця,

або $\eta \in SG_\Xi(\Omega)$ представляється як середньоквадратична границя послідовності випадкових величин з (14)

$$\eta = l.i.m._{n\to\infty}(\bar{\xi}_n^T A\bar{\xi}_n - \mathsf{E}\bar{\xi}_n^T A\bar{\xi}_n).$$

Означення 3.2. Випадковий процес $\xi(t) = \{\xi(t), t \in \mathrm{T}\}$ називається квадратично-гауссовим, якщо для кожного $t \in \mathrm{T}$ випадкова величина $\xi(t)$ належить простору $SG_\Xi(\Omega)$.

Відомо також, що

- $SG_\Xi(\Omega)$ є банаховим простором з нормою $\|\zeta\| = \sqrt{\mathsf{E}\zeta^2}$;
- $SG_\Xi(\Omega)$ є підпростором простору Орліча, що породжується функцією
$$U(x) = \exp|x| - 1;$$
- норма $\|\zeta\|_{L_U(\Omega)}$ на $SG_\Xi(\Omega)$ еквівалентна нормі $\sqrt{\mathsf{E}\zeta^2}$.

Приклад 2. Розглянемо сім'ю гауссівських центрованих випадкових процесів

$\xi_1(t)$, $\xi_2(t), \dots, \xi_n(t)$, $t \in \mathrm{T}$. Нехай матриця $A(t)$ є симетричною. Тоді

$$X(t) = \bar{\xi}^T(t)A(t)\bar{\xi}(t) - \mathsf{E}\bar{\xi}^T(t)A(t)\bar{\xi}(t),$$

де $\bar{\xi}^T(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t))$, є квадратично-гауссовим випадковим процесом.

Загальні властивості квадратично-гауссових випадкових процесів можна знайти в роботах [?], [?].

Через $N(u)$ позначимо мінімальну кількість замкнених куль радіуса u, що покривають множину T з метрикою ρ.

Нехай $\xi(t) = \{\xi(t),\, t \in \mathrm{T}\}$— квадратично-гауссовий випадковий процес. Припустимо, що існує функція $\sigma(h)$, $h > 0$, яка є монотонно зростаючою, неперервною і $\sigma(h) \to 0$ при $h \to 0$, а також

$$\sup_{\rho(t,s)\leqslant h} (\mathbf{Var}(\xi(t) - \xi(s)))^{\frac{1}{2}} \leqslant \sigma(h).$$

Визначимо деякі сталі:

$$\varepsilon_0 = \inf_{t\in\mathbf{T}} \sup_{s\in\mathbf{T}} \rho(t,s), \qquad t_0 = \sigma(\varepsilon_0),$$

$$\gamma_0 = \sup_{t\in\mathbf{T}} (\mathbf{Var}\,\xi(t))^{1/2},$$

Позначимо $C = \max\{t_0, \gamma_0\}$.

У роботі Козаченка Ю. і Розори І. [7] знайдено умови рівномірної вибіркової неперервності з імовірністю 1 для квадратичнно-гауссових випадкових процесів

Теорема 3.1. *Якщо для сепарабельного квадратично-гауссового процесу $\xi = \{\xi(t),\, t \in B\}$ виконуються умови попередньої теореми, то він є вибірково неперервним з імовірністю одиниця та для довільних $p \in (0,1)$, $\varepsilon > 0$ і $x > 0$*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{\rho(t,s)<\varepsilon} |\xi(t) - \xi(s)| > x\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2r^{(-1)}\left(\frac{1}{p\sigma(\varepsilon)}\int_0^{\sigma(\varepsilon)} r\left(N(\sigma^{(-1)}(u))\right)du\right)\times$$

$$\times\left(1 + \frac{\sqrt{2}xp(1-p)^2}{\sigma(\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{xp(1-p)^2}{\sqrt{2}\sigma(\varepsilon)}\right\}. \tag{15}$$

Наслідок 2. *Нехай $\xi(t) = \{\xi(t), t \in [a,b]\}$ — сепарабельний квадратично-гауссовий випадковий процес. Припустимо, що для нього виконується умова*

$$\sup_{|t-s|\leqslant h} (\mathbf{Var}\,(\xi(t) - \xi(s)))^{\frac{1}{2}} \leqslant K \cdot h^{\alpha}, \quad \alpha \in (0,1],$$

де стала $K > 0$. Тоді процес $X(t)$ є вибірково неперервним з імовірністю одиниця та для довільних $\varepsilon > 0$ і $x > 0$ справджується така оцінка

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{\substack{t,s\in[a,b]\\|t-s|<\varepsilon}} |\xi(t) - \xi(s)| > x\right\} \leqslant 2^{1+\frac{2}{\alpha}}(b-a)\varepsilon^{-1}\times$$

$$\times \min_{p\in(0,1)}\left[\left(1 + \frac{\sqrt{2}xp(1-p)^2}{K\varepsilon^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{xp(1-p)^2}{\sqrt{2}\varepsilon^{\alpha}}} p^{-2/\alpha}\right]. \tag{16}$$

Доведення. Результат теореми випливає з теореми 3.1 при $\sigma(h) = K \cdot h^{\alpha}$. Досить тільки знайти функцію $r(u)$, для якої виконується умова теореми, й оцінити вираз

$$r^{(-1)}\left(\frac{1}{p\sigma(\varepsilon)}\int_0^{\sigma(\varepsilon)} r\left(N\left(\sigma^{(-1)}(\nu)\right)\right)d\nu\right).$$

Очевидно, що обернена функція до $\sigma(h) = K \cdot h^{\alpha}$ дорівнює $\sigma^{(-1)}(h) = \left(\frac{h}{K}\right)^{1/\alpha}$.

Метрична масивність відрізка $[a,b]$ з метрикою $\rho(t,s) = |t-s|$ оцінюється як $N(u) \leqslant \frac{b-a}{2u}+1$. Отже,

$$N(\sigma^{(-1)}(u)) \leqslant \left(\frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right) =$$

$$= \left(\frac{b-a}{2}\left(\frac{K}{u}\right)^{1/\alpha} + 1\right).$$

У якості функції $r(u)$ можна взяти $r(u) = u^{\frac{\alpha}{2}} - 1$, для якої виконуються всі умови попередньої теореми. Оскільки $0 < p < 1$ та

$$t_0 = \sigma(\inf_{t\in\mathbf{[a,b]}} \sup_{s\in\mathbf{[a,b]}} |t-s|) = K\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\alpha},$$

то $\frac{b-a}{2}\left(\frac{K}{pt_0}\right)^{1/\alpha} > 1$. Тому, за умови $0 < u < t_0 p$ справджується нерівність

$$N(\sigma^{(-1)}(u)) \leqslant (b-a)\left(\frac{K}{u}\right)^{1/\alpha}.$$

Оскільки обернена функція до $r(u)$ дорівнює $r^{(-1)}(u) = (u+1)^{2/\alpha}$, то

$$r^{(-1)}\left(\frac{1}{p\sigma(\varepsilon)}\int_0^{\sigma(\varepsilon)} r\left(N\left(\sigma^{(-1)}(\nu)\right)\right)d\nu\right)$$
$$= \Big(\frac{1}{pK\varepsilon^\alpha}\int_0^{K\varepsilon^\alpha}\left(\big(\frac{b-a}{2}\Big(\frac{K}{u}\Big)^{1/\alpha}+1\big)^{\frac{\alpha}{2}}\right)du\Big)^{2/\alpha}$$
$$\leqslant \Big(\frac{1}{pK\varepsilon^\alpha}\int_0^{K\varepsilon^\alpha}\left((b-a)\Big(\frac{K}{u}\Big)^{1/\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{2}}du\Big)^{2/\alpha} \tag{17}$$

$$= \frac{2^{\frac{2}{\alpha}}(b-a)}{\varepsilon p^{\frac{1}{\alpha}}}. \tag{18}$$

Якщо в (15) підставити значення функції $\sigma(\varepsilon) = K\varepsilon^\alpha$ та оцінку (18), то нерівність (16) буде повністю доведено.

Якщо $\varepsilon \to 0$, то з нерівності (16) випливає, що

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{|t-s|<\varepsilon}|\xi(t)-\xi(s)|>x\right\}\to 0,$$

тобто при $\varepsilon \to 0$

$$\sup_{|t-s|<\varepsilon}|\xi(t)-\xi(s)| \xrightarrow{P} 0.$$

Отже, справедлива неперервність за імовірністю. А з монотонності супремуму випливає і збіжність з імовірністю одиниця, тобто

$$\sup_{|t-s|<\varepsilon}|\xi(t)-\xi(s)|\to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0 \text{ м.н.}$$

Таким чином, випадковий процес $\xi = \{\xi(t),\, t \in B\}$ є вибірково неперервним з ймовірністю одиниця. □

4 Вибіркова неперервність з ймовірністю одиниця для оцінки імпульсної перехідної функції

З теорем про рівномірну неперервність майже напевно траєкторій квадратично-гауссових випадкових процесів можна показати, що при певних умовах оцінка (2) імпульсної перехідної функції також буде вибірково непереревною з ймовірністю одиниця.

Покажемо, що процес $\hat{Z}_T(\tau) = \hat{H}_T(\tau) - E\hat{H}_T(\tau)$ є квадратчно-гауссовим. Даний факт тоді дозволить застосувати результати, що були доведені для квадратично-гауссових випадкових процесів.

Лема 3. *Випадковий процес $\hat{Z}_T(\tau) = \hat{H}_T(\tau) - E\hat{H}_T(\tau)$, $\tau > 0$, є квадратично-гауссовим.*

Доведення. Процес $\hat{Z}_T(\tau)$, $\tau > 0$, можна подати у вигляді

$$\hat{Z}_T(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T (Y(t+\tau)X(t) - EY(t+\tau)X(t))dt. \tag{19}$$

Оскільки кожна інтегральна сума (19)

$$\sum_k (Y(t_k+\tau)X(t_k) - EY(t_k+\tau)X(t_k)) \triangle t_k$$

належить простору $SG_\Xi(\Omega)$, а сам процес $\hat{Z}_T(\tau)$ є границею цих сум в середньому квадратичному, то $\hat{Z}_T(\tau)$ є квадратично-гауссовим процесом. Отже, лема повністю доведена. □

Теорема 4.1. *Нехай $X = (X(t),\, t \in \mathbb{R})$ – сепарабельний дійснозначний стаціонарний гауссовий процес, що збурює систему (1). Вважаємо, що спектральна щільність $f(t)$ процесу $X(t)$ є обмеженою $\sup\limits_{\lambda\in\mathbf{R}}|f(\lambda)| < \infty$ і перехідна функція $H \in L_2(\mathbf{R})$. Тоді, якщо виконується умова*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|H^*(\lambda)|^2\lambda^{2\alpha}d\lambda < \infty, \quad \alpha \in (0,1], \tag{20}$$

то оцінка імпульсної перехідної функції вигляду (2) є рівномірно вибірково неперервною на $[a,b]$ з ймовірністю одиниця.

Крім того, якщо виконується (20), то розподіл модуля неперервності $\hat{Z}_T = \hat{H}_T - E\hat{H}_T$ на відрізку $[a,b]$ оцінюється

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{\substack{t,s\in[a,b]\\|t-s|<\varepsilon}}|\hat{Z}_T(t)-\hat{Z}_T(s)|>x\right\} \leqslant 2^{1+\frac{4}{\alpha}}(b-a)\varepsilon^{-1}\times$$
$$\times \min_{p\in(0,1)}\left[\left(1+\frac{2\sqrt{2}xp(1-p)^2}{K\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{2xp(1-p)^2}{\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}} p^{-4/\alpha}\right], \tag{21}$$

де K визначено в (13).

Доведення. З леми 3 випливає, що випадковий процес $\hat{Z}_T(\tau) = \hat{H}_T(\tau) - E\hat{H}_T(\tau)$, $\tau > 0$, є квадратично-гауссовим. З наслідку 1 випливає, що за умови (20) має місце нерівність

$$\left(E|\hat{Z}_T(\tau_1) - \hat{Z}_T(\tau_2)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant K_\alpha \cdot |\tau_1 - \tau_2|^{\frac{\alpha}{2}},$$

де $\alpha \in (0,1]$, K_α з (13). Тому для процесу $\hat{Z}_T(\tau)$ виконується наслідок 2 про рівномірну вибіркову неперервність з ймовірністю одиниця. □

5 Висновки

В роботі розглядалась корелограмна інтегральна оцінка імпульсної перехідної функції лінійної однорідної системи. Знайдено достатні умови рівномірної вибіркової неперервності для оцінки імпульсної перехідної функції та отримано розподіл модуля неперервності для нього.

Список використаних джерел

1. *Булдигін В.В.* Асимптотичні властивості корелограмних оцінок імпульсних перехідних функцій лінійних систем / В.В. Булдигін, І.П. Блажієвська // Наукові вісті НТУУ "КПІ".– 2010.– № 4.– С. 16–27.
2. *Buldygin V.* On asymptotic normality of an estimation of unit impulse responses of linear system I, II / V. Buldygin, Fu Li // Theor. Probability and Math. Statist.–1997.— № 54, № 55.– P. 3–17, P.30-37.
3. *Buldygin V.*Asymptotic normality of cross-coorrelogram estimators of the response function/ V. Buldygin, F. Utzet, V. Zaiats // Statistical Infernce for Stochastic Processes. – 2004.–№7.–P.1–34.
4. *Козаченко Ю.* Про корелограмні оцінки імпульсних перехідних функцій / Ю.Козаченко, І.Розора // Теор. ймовір. та матем. статист.– 2015.– № 93.–С. 75-86.
5. *Розора І.* Швидкість збіжності для оцінки імпульсної перехідної функції у просторі неперервних функцій / І.Розора // Вісник КНУ.Серія:фізико-математичні науки.– 2018.– № 3.–С. 30-36.
6. *Розора І.* Про швидкість збіжності для оцінки імпульсної перехідної функції у просторі $L_p(T)$ / І.Розора // Вісник КНУ.Серія:фізико-математичні науки.– 2018.– № 4.–С. 36-41.
7. *Козаченко Ю.* Умови вибіркової неперервності з ймовірністю одиниця для квадратично-гауссових випадкових процесів / Ю.Козаченко, І.Розора // Теор. ймовір. та матем. статист.– 2019.– № 101.–С. 134-146.

References

1. BULDYGIN V., BLAZHIEVSKA I. (2010) Asymptotic properties of cross-correlogram estimators of impulse response functions in linear system *Research Bulletin of National Technical University of Ukraine "KPI*, **4**, 16–27.
2. BULDYGIN V., FU LI (1997) On asymptotic normality of an estimation of unit impulse responses of linear system I, II *Theor. Probability and Math. Statist.*, **54, 55**, 3–17, 30–37.
3. BULDYGIN V., UTZET F., ZAIATS V. (2004) Asymptotic normality of cross-coorrelogram estimators of the response function *Statistical Infernce for Stochastic Processes*, **7**, 1–34.
4. KOZACHENKO YU., ROZORA I. (2015) On cross-correlogram estimators of impulse response functions *Theor. Probability and Math. Statist.*, **93**, 75-86.
5. ROZORA I. (2018) Convergence rate for the estimation of impulse response function in the space of continious functions *Bulletiv of KNU. Series: Physics and Mathematics* , **3**, 30-36.
6. ROZORA I. (2018) On the convergence rate for the estimation of impulse response function in the space $L_p(T)$ *Bulletiv of KNU. Series: Physics and Mathematics* , **4**, 36-41.
7. KOZACHENKO YU., ROZORA I. (2019) Conditions of sample continuity with probability one for Square-Gaussian stochastic processes статист. *Theor. Probability and Math. Statist.*, **101**, 134-146.

Надійшла до редколегії: 2.10.2020

УДК 519.21
https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/3.11

Г.І. Сливка-Тилищак[1], *д. ф.-м. н.*
М.М. Михасюк[2], *асп.*
О.О. Погоріляк[3], *к. ф.-м. н.*

Задача Коші для рівняння теплопровідності на площині з випадковою правою частиною з простору Орліча

[1]Пряшівський університет в Пряшеві, м.Пряшів (Словаччина), вул. 17 Новембра, 15, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», 88000, м.Ужгород, пл. Народна, 3,
[2,3]ДВНЗ «Ужгородський національний університет», 88000, м.Ужгород, пл. Народна, 3,
e-mail: [1]anna.slyvka@uzhnu.edu.ua
[2]mykhailo.mykhasiuk@uzhnu.edu.ua
[3]oleksandr.pohoriliak@uzhnu.edu.ua

A.I. Slyvka-Tylyshchak[1], *Dr.Sci.*
M.M. Mykhasiuk[2], *PhD stud.*
O.O. Pohoriliak[3], *PhD.*

The Cauchy problem for the heat equation on the plane with a random right part from the Orlicz space

[1]Prešovska univerzita v Prešove, Prešov (Slovakia), 17. Novembra Square, 15,
Uzhhorod National University, 88000, Uzhhorod, Narodna Square, 3
[2,3] Uzhhorod National University, 88000, Uzhhorod, Narodna Square, 3
e-mail: e-mail: [1]anna.slyvka@uzhnu.edu.ua
[2]mykhailo.mykhasiuk@uzhnu.edu.ua
[3]oleksandr.pohoriliak@uzhnu.edu.ua

В роботі досліджується розв'язок задачі Коші для рівняння теплопровідності на площині, коли права частина є випадковим полем з простору Орліча.

Ключові слова: випадкові процеси з простору Орліча, рівняння теплопровідності, оцінка для розподілу супремуму розв'язку

The heat equation with random conditions is a classical problem of mathematical physics. Recently, a number of works appeared, which in many ways investigated this equation according to the type of random initial conditions. We consider a Cauchy problem for the heat equations with a random right part. We study the inhomogeneous heat equation on the plane with a random right part. We consider the right part as a random function of the Orlicz space. The conditions of existence with probability one classical solution of the problem are investigated. For such a problem has been got the estimation for the distribution of the supremum solution. Key words: stochastic processes of the Orlicz space, heat equation, estimation for the distribution of the supremum solution.

Стаття присвячена світлій пам'яті проф. Козаченко Ю.В.

1 Вступ

Рівняння теплопровідності з випадковими початковими умовами є класичною задачею математичної фізики. Зовсім недавно, кілька вчених досліджували розв'язок рівняння теплопровідності в залежності від різних типів випадкових умов. Роботи Н.Е. Ратанова та ін. [1], В.А. Войчінскі [2], Д. Сургайліса і В.А. Войчінскі [3] містять видатні результати по цій тематиці. Зокрема, отримані граничні теореми для рівняння теплопровідності і пов'язані з ним через Хопфа-Коула трансформації, так звані рівняння Бюргерса. В праці Ю.В. Козаченка та Г. М. Леоненко [4] досліджується задача Коші для рівняння теплопровідності, коли початкова умова є строго субгауссовим випадковим процесом. Лінійному рівнянню теплопровідності непарного порядку з випадковими початковими умовами присвячена робота Бегін І., Козаченка Ю. та ін. [5]. У роботах Козаченка Ю.В. та Вереш К. Й. [6, 7] обґрунтовано застосування методу Фур'є для однорідного параболічного рівняння з випадковими початковими умовами з простору Орліча, знайдено оцінки розподілу супремуму розв'язку однорідного рівняння теплопровідності з випадковими початковими умовами з простору Орліча, неоднорідного рівняння теплопровідності з випадковою правою частиною із просторів Орліча. У роботах Козаченка Ю.В. та Сливка-Тилищак Г.І. [8, 9, 10] знайдено достатні умови існування з імовірністю одиниця класичного розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності на прямій, коли права части-

© Г.І. Сливка-Тилищак, М.М. Михасюк, О.О. Погоріляк, 2020

на є випадковим полем з простору $Sub_{\varphi}(\Omega)$ та простору Орліча, а також знайдено оцінки для розподілу супремуму для відповідних розв'язків.

У роботі досліджується рівняння теплопровідності на площині, коли права частина є випадковим полем з простору Орліча. Для даної задачі отримано умови існування з імовірністю одиниця класичного розв'язку та оцінки для розподілу супремуму розв'язку.

2 Випадкові процеси з простору Орліча

Означення 2.1. [11] Парна неперервна опукла функція $U(x)$ називається C-функцією Орліча, якщо $U(0) = 0$ і $U(x)$ зростає при $x > 0$.

Означення 2.2. [11] Простором Орліча $L_U(\Omega)$ випадкових величин, породженим С-функцією $U(x)$, називається такий простір випадкових величин $\xi(\omega) = \xi$, $\omega \in \Omega$, якщо для кожної $\xi \in L_U(\Omega)$ існує така константа r_ξ, що $Eu\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) < \infty$.

Означення 2.3. [11] Процес $X = \{X(t), t \in T\}$ належить простору Орліча $L_U(\Omega)$, якщо для всіх $t \in T$ випадкова величина $X(t)$ належить $L_U(\Omega)$.

Теорема 1. *[13] Нехай* $\mathbf{R}^k$ *- k-вимірний простір,*

$$d(t,s) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} |t_i - s_i|,$$

$T = \{0 \leqslant t_i \leqslant T_i, i = 1,2,\ldots,k\}$, $X_n = \{X_n(t), t \in T\}$, $n = 1,2,\ldots$ *- послідовність випадкових процесів, що належать простору Орліча випадкових величин, де для функції и виконується g-умова. Нехай виконуються умови:*

1) *процеси* $X_n(t)$ *- сепарабельні;*
2) $X_n(t) \to X(t)$ *при* $n \to \infty$, $t \in T$ *за ймовірністю;*
3) $\sup\limits_{d(t,s)\leqslant h} \sup\limits_{n=\overline{1,\infty}} \|X_n(t) - X_n(s)\| \leqslant \sigma(h)$, *де* $\sigma = \{\sigma(h), h > 0\}$ *така неперервна монотонна зростаюча функція, що* $\sigma(h) \to 0$ *коли* $h \to 0$*;*
4) *для деякого* $\epsilon > 0$

$$\int_0^{\epsilon} U^{(-1)}\left(\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{T_i}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right)\right) du < \infty,$$

де $\sigma^{(-1)}(u)$ *– функція обернена до* $\sigma(u)$*.*

Тоді процеси $X_n(t)$ *збігаються за ймовірністю в просторі* $C(T)$*.*

Теорема 2 ([6])**.** *Нехай* (T,ρ) *метричний компактний простір,* $N(u)$ *— метрична масивність простору* (T,ρ)*,* $X = \{X(t),\ t \in T\}$ *— сепарабельний випадковий процес із простору* $L_U(\Omega)$*, де для* U *виконується умова g. Нехай існує така функція* $\sigma = \sigma(h)$, $0 \leqslant h \leqslant \sup\limits_{t,s\in T} \rho(t,s)$*, що* $\sigma(h)$ *монотонно зростає, неперервна і така що*

$$\sup_{\rho(t,s)\leqslant h} \|X(t) - X(s)\|_{L_U} \leqslant \sigma(h).$$

Якщо для деякого ε *виконується умова*

$$\int_0^{\varepsilon} \chi_U\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du < \infty,$$

де

$$\chi_U(n) = \begin{cases} n, & n < U(z_0); \\ C_U U^{(-1)}(n), & n \geqslant U(z_0), \end{cases}$$

$C_U = k(1 + U(z_0))\max(1, A)$, z_0, k, A *— константи з означення* (**??**)*,* $\sigma^{(-1)}(h)$ *— функція обернена до* $\sigma(h)$*. Тоді з імовірністю одиниця випадкова величина* $\sup\limits_{t\in T}|X(t)|$ *належить простору* $L_U(\Omega)$ *та*

$$\left\|\sup_{t\in T}|X(t)|\right\|_U \leqslant$$

$$\|X(t_0)\|_U + \frac{1}{\theta(1-\theta)} \int_0^{\omega_0\theta} \chi_U\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du =$$

$$B(t_0,\ \theta),$$

де t_0 *— довільна точка з* T, $\omega_0 = \sigma(\sup\limits_{t\in T}\rho(t_0,\ t))$, $0 < \theta < 1$*. Крім того, для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *має місце нерівність*

$$P\left\{\sup_{t\in T}|X(t)| > \varepsilon\right\} \leqslant \left(U\left(\frac{\varepsilon}{B(t_0,\theta)}\right)\right)^{-1}.$$

3 Рівняння теплопровідності на площині з випадковою правою частиною

Розглянемо задачу Коші для рівняння теплопровідності на площині

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}\right) + \xi(x,y,t), \tag{1}$$

$$-\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty, \quad t > 0,$$

з початковою умовою

$$u(x,y,0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, \quad . \tag{2}$$

Нехай $\xi(x,y,t) = \{\xi(x,y,t), \quad (x,y) \in R^2, \ t > 0\}$ — вибірково неперервне з імовірністю одиниця випадкове поле з простору Орліча, таке що $\mathbb{E}\xi(x,y,t) = 0$, $\mathbb{E}(\xi(x,y,t))^2 < +\infty$. $B(x,y,t,u,v,s) = \mathbb{E}\xi(x,y,t)\xi(u,v,s)$ — коваріаційна функція випадкового процесу $\xi(x,y,\ t)$. Нехай $B(x,y,t,u,v,s)$ неперервна функція.

Теорема 3. *Нехай існують інтеграли:*

$$G(u,v,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t e^{-a^2\left(u^2+v^2\right)(t-\tau)}\tilde{\xi}(u,v,\tau)d\tau,$$

$$\tilde{\xi}(u,v,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos xu\cos yv\xi(x,y,\tau)dxdy,$$

і

$$u(x,y,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos xu\cos yvG(u,v,t)dudv. \tag{3}$$

Якщо існують наступні інтеграли

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u\sin xu\cos yvG(u,v,t)dudv,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v\cos xu\sin yvG(u,v,t)dudv,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2\cos xu\cos yvG(u,v,t)dudv,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v^2\cos xu\cos yvG(u,v,t)dudv$$

і послідовності a_n, $a_n \to \infty$, b_k, $b_k \to \infty$ *при* $n \to \infty$ *та* $k \to \infty$, *такі, що для довільних* $A > 0$, $B > 0$ *і* $T > 0$ *послідовності інтегралів*

$$\int\limits_{-a_n}^{+a_n}\int\limits_{-b_k}^{+b_k}\cos xu\cos yvG(u,v,t)dudv, \tag{4}$$

$$\int\limits_{-a_n}^{+a_n}\int\limits_{-b_k}^{+b_k} u\sin xu\cos yvG(u,v,t)dudv, \tag{5}$$

$$\int\limits_{-a_n}^{+a_n}\int\limits_{-b_k}^{+b_k} v\cos xu\sin yvG(u,v,t)dudv, \tag{6}$$

$$\int\limits_{-a_n}^{+a_n}\int\limits_{-b_k}^{+b_k} u^2\cos xu\cos yvG(u,v,t)dudv, \tag{7}$$

$$\int\limits_{-a_n}^{+a_n}\int\limits_{-b_k}^{+b_k} v^2\cos xu\cos yvG(u,v,t)dudv \tag{8}$$

збігаються рівномірно за ймовірністю для $|x| \leqslant A$, $|y| \leqslant B$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *тоді функція* $u(x,y,t)$ *буде класичним розв'язком задачі* (1)–(2).

Доведення. Оскільки послідовності інтегралів (4)–(8) збігаються рівномірно за ймовірністю в області $|x| \leqslant A$, $|y| \leqslant B$, $0 \leqslant t \leqslant T$, то існують підпослідовності c_n, $c_n \to \infty$, d_k, $d_k \to \infty$ при $n \to \infty$ та $k \to \infty$ послідовностей a_n і b_k відповідно, такі що послідовності інтегралів

$$\int\limits_{-c_n}^{+c_n}\int\limits_{-d_k}^{+d_k}\cos xu\cos yvG(u,v,t)dudv,$$

$$\int\limits_{-c_n}^{+c_n}\int\limits_{-d_k}^{+d_k} u\sin xu\cos yvG(u,v,t)dudv,$$

$$\int\limits_{-c_n}^{+c_n}\int\limits_{-d_k}^{+d_k} v\cos xu\sin yvG(u,v,t)dudv,$$

$$\int\limits_{-c_n}^{+c_n}\int\limits_{-d_k}^{+d_k} u^2\cos xu\cos yvG(u,v,t)dudv,$$

$$\int\limits_{-c_n}^{+c_n}\int\limits_{-d_k}^{+d_k} v^2\cos xu\cos yvG(u,v,t)dudv$$

збігаються з ймовірністю одиниця до наступних інтегралів відповідно

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos xu\cos yvG(u,v,t)dudv,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u\sin xu\cos yvG(u,v,t)dudv,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v\cos xu\sin yvG(u,v,t)dudv,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2\cos xu\cos yvG(u,v,t)dudv,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v^2\cos xu\cos yvG(u,v,t)dudv$$

рівномірно для $|x|\leqslant A$, $|y|\leqslant B$, $0\leqslant t\leqslant T$.

Введемо позначення

$$u_{nk}(x,y,t)=\int\limits_{-c_n}^{+c_n}\int\limits_{-d_k}^{+d_k}\cos xu\cos yvG(u,v,t)dudv. \tag{9}$$

Диференціюючи (9) за змінними x, y та t, ми отримаємо

$$\frac{\partial u_{nk}(x,t)}{\partial t}=$$

$$-a^2\int\limits_{-c_n}^{+c_n}\int\limits_{-d_k}^{+d_k}(u^2+v^2)\cos xu\cos yvG(u,v,t)dudv+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-c_n}^{+c_n}\int\limits_{-d_k}^{+d_k}\cos xu\cos yv\tilde{\xi}(x,y,t)dudv,$$

$$\frac{\partial^2 u_{nk}(x,t)}{\partial x^2}=$$

$$-\int\limits_{-c_n}^{+c_n}\int\limits_{-d_k}^{+d_k}u^2\cos xu\cos yvG(u,v,t)dudv,$$

$$\frac{\partial^2 u_{nk}(x,t)}{\partial y^2}=$$

$$-\int\limits_{-c_n}^{+c_n}\int\limits_{-d_k}^{+d_k}v^2\cos xu\cos yvG(u,v,t)dudv.$$

Отже,

$$\frac{\partial u_{nk}(x,t)}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u_{nk}(x,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_{nk}(x,t)}{\partial y^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-c_n}^{+c_n}\int\limits_{-d_k}^{+d_k}\cos xu\cos yv\tilde{\xi}(x,y,t)dudv,$$

$$t>0\ |x|\leqslant A,|y|\leqslant B.$$

Тоді при $nk\to\infty$

$\frac{\partial u_{nk}(x,y,t)}{\partial t}$ збігається до $\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}$,

$\frac{\partial^2 u_{nk}(x,y,t)}{\partial x^2}$ збігається до $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$,

$\frac{\partial^2 u_{nk}(x,y,t)}{\partial y^2}$ збігається до $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial y^2}$

рівномірно для $|x|\leqslant A$, $|y|\leqslant B$, $0\leqslant t\leqslant T$ з ймовірністю одиниця. Отже, при $nk\to\infty$ ми отримаємо, що $u(x,y,t)$ задовольняє рівняння (1). □

Дійсно

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}=$$

$$-a^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(u^2+v^2)\cos xu\cos yvG(u,v,t)dudv+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos xu\cos yv\tilde{\xi}(x,y,t)dudv=$$

$$=a^2\left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}\right)+\xi(x,y,t).$$

Лема 1. *Нехай $\xi(x,y,t)$ — вибірково неперервне випадкове поле з простору Орліча із заданою коваріаційною функцією $B(x,y,t,u,v,s)$. Нехай для всіх $t>0,\ s>0$ виконуються умови:*

1) *Існують похідні $\frac{\partial^k B(x,y,t,u,v,s)}{\partial x^l\partial u^m}$, $k=0,\dots 4,\ l+m=k$, $\frac{\partial^k B(x,y,t,u,v,s)}{\partial y^p\partial v^q}$, $k=0,\dots 4,\ p+q=k$;*

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial^k B(x,y,t,u,v,s)}{\partial x^l\partial u^m}\right|dxdu\leqslant B(k,l,m)<\infty$, $k=0,\dots 4$, $l+m=k$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial^k B(x,y,t,u,v,s)}{\partial y^p\partial v^q}\right|dyddv\leqslant B(k,p,q)<\infty$, $k=0,\dots 4$, $p+q=k$,

3) $\frac{\partial^k B(x,y,t,u,v,s)}{\partial x^l \partial v^m} \to 0, k = 0, \dots 4,\ l+m=k,$ *при* $x \to \infty$ *або* $u \to \infty$. $\frac{\partial^k B(x,y,t,u,v,s)}{\partial y^p \partial v^q} \to 0, k = 0, \dots 4,\ p+q=k,$ *при* $y \to \infty$ *або* $v \to \infty$.

Тоді з імовірністю одиниця існують інтеграли

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos xu \cos yv G(u,v,t)dudv,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u \sin xu \cos yv G(u,v,t)dudv,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v \cos xu \sin yv G(u,v,t)dudv,$$

$$\int\limits_{\infty}^{+\infty}\int\limits_{\infty}^{+\infty} u^2 \cos xu \cos yv G(u,v,t)dudv,$$

$$\int\limits_{\infty}^{+\infty}\int\limits_{\infty}^{+\infty} v^2 \cos xu \cos yv G(u,v,t)dudv.$$

Доведення. Доведення леми випливає з доведення леми 2.6 роботи [9]. □

Позначимо для $n \geqslant 1$

$$u_{nk}^{(0)}(x,y,t) =$$

$$\int\limits_{-c_n}^{+c_n}\int\limits_{-d_k}^{+d_k} \cos xu \cos yv G(u,v,t)dudv,$$

$$u_{nk}^{(1)}(x,y,t) =$$

$$\int\limits_{-c_n}^{+c_n}\int\limits_{-d_k}^{+d_k} u \sin xu \cos yv G(u,v,t)dudv,$$

$$u_{nk}^{(2)}(x,y,t) =$$

$$\int\limits_{-c_n}^{+c_n}\int\limits_{-d_k}^{+d_k} v \cos xu \sin yv G(u,v,t)dudv,$$

$$u_{nk}^{(3)}(x,y,t) =$$

$$\int\limits_{-c_n}^{+c_n}\int\limits_{-d_k}^{+d_k} u^2 \cos xu \cos yv G(u,v,t)dudv,$$

$$u_{nk}^{(4)}(x,y,t) =$$

$$\int\limits_{-c_n}^{+c_n}\int\limits_{-d_k}^{+d_k} v^2 \cos xu \cos yv G(u,v,t)dudv.$$

Теорема 4. *Нехай* $\xi(x,y,t)$ *— вибірково неперервне з імовірністю одиниця випадкове поле з простору Орліча, для якого виконуються умови леми* 1 *і для* $j = 0,\ 1,\ 2,\ 3$

$$\sup_{\substack{|x-x_i|\leqslant h\\ y-y_i|\leqslant h\\ |t-t_1|\leqslant h}} \tau_\varphi \left(u_{nk}^{(j)}(x,y,t) - u_{nk}^{(j)}(x_1,y_1,t_1) \right) \leqslant \sigma_j(h),$$

де $\sigma_j(h)$ *— неперервні монотонно зростаючі функції, такі що* $\sigma_j(h) \to 0$ *при* $h \to 0$, *і виконується умова:*

$$\int_{0+}^{\varepsilon} U^{(-1)} \left(\left(\frac{A}{\sigma_j^{(-1)}(u)} + 1 \right) \left(\frac{B}{\sigma_j^{(-1)}(u)} + 1 \right) \left(\frac{T}{2\sigma_j^{(-1)}(u)} + 1 \right) \right) du < \infty \tag{10}$$

де $\sigma_k^{-1}(\varepsilon)$ *— обернені функції до* $\sigma_k(\varepsilon)$.

Тоді функція $u(x,y,t)$, *що зображена у вигляді* (3) *буде класичним розв'язком задачі* (1)–(2).

Доведення. Дана теорема випливає з теореми 1 і теореми 3. □

3.1 Оцінка розподілу супремуму розв'язку рівняння теплопровідності на площині з випадковою правою частиною з простору Орліча

Теорема 5. *Нехай в умовах теореми* 2

$$\widetilde{T} = \{(x,y,t):\ x \in [-A,A],\ y \in [-B,A],\ t \in [0,T]\},$$

$$\widetilde{\rho}(x,x_1,y,y_1t,t_1) = \max\{|x-x_1|,|y-y_1|,|t-t_1|\}.$$

Нехай

$$u(x,y,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos xu \cos yv G(u,v,t)dudv,$$

де

$$G(u,v,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^t e^{-a^2\left(u^2+v^2\right)(t-\tau)} \tilde{\xi}(u,v,\tau)d\tau,$$

$$\tilde{\xi}(u,v,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos xu\cos yv\xi(x,y,\tau)dxdy,$$

є сепарабельний випадковий процес з простору $L_U(\Omega)$*, і функція* U *задовольняє g-умову. Нехай існує монотонно зростаюча функція* $\sigma=\sigma(h)$, $0\leqslant h\leqslant \sup\limits_{t,s\in T}\widetilde{\rho}(x,x_1,y,y_1,t,t_1)$ *така, що*

$$\sup_{\substack{|x-x_1|\leqslant h\\ |y-y_1|\leqslant h\\ |t-t_1|\leqslant h}}\tau_\varphi\left(u(x,y,t)-u(x_1,y_1,t_1)\right)\leqslant\sigma_(h).$$

Якщо для деякого ε

$$\int_{0+}^{\varepsilon}U^{(-1)}\left(\left(\frac{A}{\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\times\right.$$

$$\left.\left(\frac{B}{\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\right)du<\infty,$$

де $\sigma^{(-1)}(h)$ *— обернена функція до* $\sigma(h)$*, то з імовірністю одиниця випадкова величина* $\sup\limits_{(x,y,t)\in\widetilde{T}}|u(x,y,t)|$ *належить простору* $L_U(\Omega)$ *та*

$$\left\|\sup_{(x,y,t)\in\widetilde{T}}|u(x,y,t)|\right\|_{L_U}\leqslant\|u(x_0,y_0,t_0)\|_U+$$

$$+\frac{1}{\theta(1-\theta)}\int\limits_0^{\omega_0\theta}U^{(-1)}\left(\left(\frac{A}{\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\times\right.$$

$$\left.\left(\frac{B}{\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\times\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\right)du=$$

$$=B(x_0,y_0,t_0,\ \theta),$$

де $(x_0,y_0,t_0)\in\widetilde{T}$, $\omega_0=\sigma(\sup\limits_{t\in T}\rho(x_0,x,y_0,y,t_0,t))$, $0<\theta<1$. *Крім того для будь-якого* $\varepsilon>0$ *має місце нерівність:*

$$P\left\{\sup_{(x,y,t)\in\widetilde{T}}|u(x,y,t)|>\varepsilon\right\}\leqslant$$

$$\left(U\left(\frac{\varepsilon}{B(x_0,y_0,t_0,\theta)}\right)\right)^{-1}.$$

Список використаних джерел

1. *Ratanov N. E.* Stabilization of the statistical solution of the parabolic equation / N. E. Ratanov, A. G. Shuhov, Yu. M. Suhov // Acta Appl. Math. – 1991. – 22. – P. 103–115.

2. Woyczynski W. A. Burgers-KPZ Turbulence / W. A. Woyczynski // Lecture Notes in Math. – Springer Verlag, Berlin, Heidelberg. – 1998. – Vol. 1700.

3. Surgailis D. Limit theorems for the Burgers equation initialized by data withlong-range dependence / D. Surgailis, W. A. Woyczynski // In: DoukhanP., Oppenheim, G., Taqqu, M. S (eds.) Theory and Applications of Long-range Dependence. – Birkhausser, Boston, 2003.

4. *Kozachenko Yu. V.* Extremal behavior of the heat random field / Yu. V. Kozachenko, G. M. Leonenko // Extremes. – 2006. – 8. – P. 191–205.

5. Beghin L. On the solution of linear odd-order heat-type equations with random initial / L. Beghin, Yu. Kozachenko, E. Orsingher, L. Sakhno // Journal of Statistical Physics. – 2007. – Vol. 127, No. 4. – P. 721–739.

6. *Kozachenko Yu. V.* The heat equation with random initial conditions from Orlicz space / Yu. V. Kozachenko, K. J. Veresh // Teor. Imovirnost. Matem. Statist. – 2009. – **80**. – P. 63–75;

7. Kozachenko Yu. V. Boundary-value problem for nonhomogeneousparabolic equation with Orlicz right side / Yu. V. Kozachenko, K. J. Veresh // Random Operators and Stochastic Equations. – 2010. – №18. – P. 97–119.

8. *Kozachenko Yu. V.* The Cauchy problem for the heat equation with a random right part from the space $Sub_\varphi(\Omega)$/ Yu. V. Kozachenko, A. I. Slyvka-Tylyshchak // Applied Mathematics. – 2014. – 5. – P. 2318–2333.

9. *Kozachenko Yu. V.* The Cauchy problem for the heat equation with a random right side / Yu. V. Kozachenko, A. I. Slyvka-Tylyshchak // Random Oper. and Stoch. Equ. – 2014. – 22(1). – P. 53–64.

10. *Slyvka-Tylyshchak A. I.* The heat equation on line with random right part from Orlicz space / A. I. Slyvka-Tylyshchak // Carpatian

Mathematical Publications. – 2014. – Vol. 6, №1. – P. 134-148.

11. *Buldygin V. V.* Metric Characterization of Random Variables and Random processes / V. V. Buldygin, Yu. V. Kozachenko. – American Mathematical Society, Providence, Rhode. – 2000.

12. *Маркович Б. М.* Рівняння математичної фізики / Б. М. Маркович. – Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2010. – 384 с.

13. *Козаченко Ю. В.* Обгрунтування методу Фур'є для гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами / Ю. В. Козаченко, Г. І. Сливка // Теорія ймов. та матем. статист. Вип. 69, – 2003. – С. 48–63.

References

1. RATANOV N. E., SHUHOV A. G., SUHOV Yu. M. (1991) "Stabilization of the statistical solution of the parabolic equation" , *Acta Appl. Math.*, **22**, pp. 103–115.

2. WOYCZYNSKI W. A.(1998) Burgers-KPZ Turbulence "Lecture Notes in Math". Springer Verlag, Berlin, Heidelberg., Vol. 1700.

3. SURGAILIAS D.,WOYCZYNSKI W. A. (2003) "Limit theorems for the Burgers equation initialized by data withlong-range dependence *Theory and Applications of Long-range Dependence*, Birkhausser, Boston.

4. KOZACHENKO Yu. V., LEONENKO G. M. (2006) " Extremal behavior of the heat random field", *Extremes*, **8**, pp. 191–205.

5. BEGHIN L., KOZACHENKO Yu. V., ORSINGHER E., SAKHNO L. (2007) "On the solution of linear odd-order heat-type equations with random initial", *Journal of Statistical Physics.*, Vol. 127, No. 4. P. 721–739.

6. KOZACHENKO Yu. V., VERESH K. J. (2009) "The heat equation with random initial conditions from Orlicz space", *Teor. Imovirnost. Matem. Statist.*, **8**, pp. 63–75.

7. KOZACHENKO Yu. V., VERESH K. J. (2010) "Boundary-value problem for nonhomogeneousparabolic equation with Orlicz right side" Random Operators and Stochastic Equations **18**., pp. 97–119.

8. KOZACHENKO Yu. V., SLYVKA-TYLYSHCHAK A. I.(2014) "The Cauchy problem for the heat equation with a random right part from the space $Sub_{\varphi}(\Omega)$", *Applied Mathematics*,**5**, pp. 2318–2333.

9. KOZACHENKO Yu. V., SLYVKA-TYLYSHCHAK A. I. (2014) "The Cauchy problem for the heat equation with a random right side", *Random Oper. and Stoch. Equ.*,**22(1)**, pp. 53–64.

10. SLYVKA-TYLYSHCHAK A. I. (2014) "The heat equation on line with random right part from Orlicz space", *Carpatian Mathematical Publications*, **6** no. 1., pp. 134-148.

11. BULDYGIN V. V., KOZACHENKO Yu. V. (2000) " Metric Characterization of Random Variables and Random processes", American Mathematical Society, Providence, Rhode, 285 p.

12. MARKOVICH B. M. (2010) "Equations of Mathematical Physics", Lviv: Lviv Polytechnic Publishing House, 2 384p.

13. KOZACHENKO Yu. V., SLYVKA G. I. (2003) "Justification of the Fourier method for hyperbolic equations with random initial conditions", *Theory Probab. and Mathem. Statist.*, **69**, pp. 67–83.

Надійшла до редколегії 12.10.2020

УДК 512.53+512.64
https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/3.12

В. М. Бондаренко[1], *д.ф.-м.н., проф.*
О. В. Зубарук[2], *к. ф.-м. н.*

Про матричні зображення наднапівгруп напівгрупи, породженої взаємно анульовними 2-потентним і 2-нільпотентним елементами

[1] Інститут математики НАН України, 01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3, e-mail: vitalij.bond@gmail.com
[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 64/13, e-mail: Sambrinka@ukr.net

V. M. Bondarenko[1], *Dr. Sci. (Phys.-Math.)*
O. V. Zubaruk[2], *Ph.D.*

On matrix representations of oversemigroups of semigroups generated by mutually annihilating 2-potent and 2-nilpotent elements

[1]Institute of Mathematics of NAS of Uktaine, 01024, Kyiv, Tereshchenkivska str., 3, e-mail: vitalij.bond@gmail.com
[2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska str., e-mail: Sambrinka@ukr.net

Серед старих результатів є лише окремі результати про зображувальний тип напівгруп, а саме для скінченної цілком простої напівгрупи (І. С. Понізовський) та деяких напівгруп всіх перетворень скінченної множини (І. С. Понізовський, К. Рінгель); в цих роботах розглядався скінченний зображувальний тип. Якщо ж говорити про нові результати, та ще й для класів напівгруп, то варто відзначити роботи про зображення напівгруп, породжених ідемпотентами з частковим нульовим множенням (В. М. Бондаренко, О. М. Тертична), напівгруп, породжених потентними елементами (В. М. Бондаренко, О. В. Зубарук) і зображення прямих добутків симетричної напівгрупи другого степеня (В. М. Бондаренко, Е. М. Костишин). Такі напівгрупи можуть мати як скінченне, так і нескінченне число нерозкладних зображень.

В. М. Бондаренко і Я. В. Заціха описали зображувальні типи напівгруп третього порядку над полем і вказали канонічну форму матричних зображень для довільної напівгрупи скінченного зображувального типу. Ця стаття присвячена дослідженню аналогічних задач для наднапівгруп комутативних напівгруп.

Ключові слова: поле, наднапівгрупа, визначальні співвідношення, матричні зображення, ручна і дика напівгрупа, напівгрупа скінченного і нескінченного типів, канонічна форма.

Among the old results, there are only some results on the representation type of semigroups, namely, for a finite quite simple semigroup (I. S. Ponizovsky) and some semigroups of all transformations of a finite set (I. S. Ponizovsky, C. Ringel); these papers were discussed on finite representation type. If we talk about new results, and even for semigroup classes, then it should be noted works on representations of the semigroups generated by idempotents with partial zero multiplication (V. M. Bondarenko, O. M. Tertychna), semigroups generated by the potential elements (V. M. Bondarenko, O. V. Zubaruk) and representations of direct products of the symmetric second-order semigroup (V. M. Bondarenko, E. M. Kostyshyn). Such semigroups can have both a finite and infinite representation type.

V. M. Bondarenko and Ja. V. Zatsikha described representation types of the third-order semigroups over a field, and indicate the canonical form of the matrix representations for any semigroup of finite representation type. This article is devoted to the study of similar problems for oversemigroups of commutative semigroups.

Key Words: field, oversemigroup, defining relations, matrix representations, tame and wild semigroup, semigroup of finite and infinite types, canonical form.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Петравчук А.П.

1. Вступ. Ця стаття присвячена матричним зображенням наднапівгруп спеціального вигляду, які зіставляються заданій напівгрупі третього порядку.

Напівгрупи третього порядку вперше описав Т. Тамура в 1953 р. [1]. Г. Е. Форсайт в

© В. М. Бондаренко, О. В. Зубарук, 2020

1955 р. [2] отримав аналогічний результат за допомогою комп'ютерної програми. В обох статтях опис отримано з точністю до ізоморфізму та дуальності в термінах таблиць Келі. Напівгрупи третього порядку вивчалися пізніше в [3]–[6]. Мінімальні системи твірних та відповідні визначальні співвідношення для всіх таких напівгруп вказані в [6].

Згідно з результатами роботи [6] комутативні напівгрупи третього порядку, що не є ні циклічними, ні циклічними з приєднаним одиничним чи нульовим елементом (а вони не є цікавими), вичерпуються такими напівгрупами:

a) $(0,b,c) = \langle b,c\rangle$: $b^2=0$, $c^2=0$, $bc=cb=0$;

b) $(0,b,c) = \langle b,c\rangle$: $b^2=0$, $c^2=c$, $bc=0$, $cb=0$;

c) $(0,b,c) = \langle b,c\rangle$: $b^2=b$, $c^2=c$, $bc=0$, $cb=0$;

d) $(c^2,b,c) = \langle b,c\rangle$: $b^3=b^2$, $c^3=c$, $b^2=c^2$, $bc=c$, $cb=c$.

Всі виписані системи твірних є мінімальними. В круглих дужках вказано всі елементи напівгрупи, а в кутових дужках вказано мінімальну систему твірних. Тривіальні визначальні співвідношення для одиничного і нульового твірних (якщо вони є) не виписуються.

Згідно з [6, Теорема 1] напівгрупи $b)-d)$ є напівгрупами скінченного зображувального типу над довільним полем K (тобто мають, з точністю до еквівалентності, скінченне число нерозкладних зображень), а напівгрупа *a*) — ручною напівгрупою нескінченного зображувального типу (відносно означення ручних та диких матричних задач див. роботу Ю. А. Дрозда [7]).

У статті [8] авторами розглядалася напівгрупа *c*), породжена двома взаємно анульовними ідемпотентами. Був визначений зображувальний тип для наднапівгруп такої напівгрупи, які будуються природним чином по визначальним співвідношенням. У цій статті аналогічний результат отримано для напівгрупи *b*), породженої взаємно анульовними 2-нільпотентним і 2-потентним (ідемпотентним) елементами, яку позначаємо через S.

Позначимо визначальні співвідношення $b^2=0$, $c^2=c$, $bc=0$, $cb=0$ відповідно через (b), (c), (bc), (cb) і введемо наступні напівгрупи:

$S^{(b)} := S\setminus(b) := (0,b,c) = \langle b,c\rangle$: $c^2=c$, $bc=0$, $cb=0$;

$S^{(c)} := S\setminus(c) := (0,b,c) = \langle b,c\rangle$: $b^2=0$, $bc=0$, $cb=0$;

$S^{(bc)} := S\setminus(bc) := (0,b,c) = \langle b,c\rangle$: $b^2=0$, $c^2=c$, $cb=0$;

$S^{(cb)} := S\setminus(cb) := (0,b,c) = \langle b,c\rangle$: $b^2=0$, $c^2=c$, $bc=0$.

Покладемо

$S^{(x,y)} := S\setminus\{(x),(y)\}$ для $x,y\in\{(b),(c),(bc),(cb)\}$, $x\neq y$;

$S^{(x,y,z)} := S\setminus\{(x),(y),(z)\}$ для $x,y,z\in\{(b),(c),(bc),(cb)\}$, $x\neq y$, $x\neq z$, $y\neq z$.

Очевидно, що при перестановці x,y,z напівгрупи $S^{(x,y)}$ і $S^{(x,y,z)}$ не змінюються. Введені таким чином напівгрупи для напівгрупи S мають фактор-напівгрупу, ізоморфну S, тобто є наднапівгрупами напівгрупи S.

Сформулюємо основний результат цієї статті.

Всі матричні зображення розглядаються над довільним фіксованим полем K.

Теорема 1. Для довільного поля K мають місце наступні твердження.

1) $S^{(x)}$ — напівгрупа скінченного зображувального типу для $x\in\{(bc),(cb)\}$;

2) $S^{(x)}$ — ручна напівгрупа нескінченного зображувального типу для $x\in\{(b),(c)\}$;

3) $S^{(x,y)}$ — ручна напівгрупа нескінченного зображувального типу для $x,y\in\{(b),(c)\}$ або $x,y\in\{(bc),(cb)\}$;

4) $S^{(x,y)}$ — дика напівгрупа для $x\in\{(b),(c)\}$, $y\in\{(bc),(cb)\}$ або $x\in\{(bc),(cb)\}$, $y\in\{(b),(c)\}$;

5) $S^{(x,y,z)}$ — дика напівгрупа для довільних $x,y,z\in\{(b),(c),(bc),(cb)\}$.

2. Доведення твердження 1) теореми 1. Матриця зображення, що відповідає твірному елементу b,c позначається відповідно через B,C. E позначає одиничну матрицю будь-якого розміру $n\times n$ $(n\geqslant 0)$.

Твердження 1) теореми 1 випливає із наступної теореми.

Теорема 2. Канонічна форма для матричних зображень напівгрупи $N := (0,b,c) = \langle b,c\rangle$: $b^2=0$, $c^2=c$, $bc=0$

така:

$$B=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&E&0\\ 0&0&0&0&0&E&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&E&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&E&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} E&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&E&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&E&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Дійсно, $S^{(cb)}=N$, а $S^{(bc)}=N^{op}$, де N^{op} — дуальна до N напівгрупа (з операцією множення $x\circ y=yx$), матричні зображення якої отримуються із матричних зображень N транспонуванням всіх матриць.

Доведення теореми 2. З матрицями B,C можна робити одночасні перетворення подібності і лише їх (бо саме такі перетворення відповідають переходу до еквівалентних зображень). За допомогою таких перетворень приведемо матрицю C до нормальної форми Жордана в такому вигляді:

$$C=\begin{pmatrix} E&0\\ 0&0 \end{pmatrix}.$$

Щоб не нагромаджувати індекси, приведену матрицю C, а також матрицю B, яка при цьому якось змінилася, будемо позначати тими ж самими буквами (і цим принципом будемо користуватися і надалі). Тоді, після розбиття матриці B на блоки (такого ж розміру, як і блоки матриці C) і використання рівності $BC=0$ (яка відповідає визначальному співвідношенню $bc=0$), вона має вигляд

$$B=\begin{pmatrix} 0&B_1\\ 0&B_2 \end{pmatrix},$$

де B_1,B_2 – деякі матриці. Рівність $B^2=0$ еквівалентна рівностям $B_1B_2=0$ і $B_2^2=0$. Перетвореннями подібності приведемо матрицю B_2 до нормальної форми Жордана у вигляді

$$B_2=\begin{pmatrix} 0&E&0\\ 0&0&0\\ 0&0&0 \end{pmatrix}$$

(яка переставно подібна прямій сумі відповідних клітин Жордана).

Розіб'ємо матрицю B на нові блоки:

$$B=\begin{pmatrix} 0&B_{12}&B_{13}&B_{14}\\ 0&0&E&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Співвідношення $B^2=0$ еквівалентне співвідношенню $B_{12}=0$.

Тепер з'ясуємо, коли матричне зображення $R=\{B,C\}$ еквівалентне матричному зображенню $\overline{R}=\{\overline{B},\overline{C}\}$ такого ж вигляду, а саме

$$\overline{B}=\begin{pmatrix} 0&0&\overline{B_{13}}&\overline{B_{14}}\\ 0&0&E&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},\overline{C}=\begin{pmatrix} E&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Нехай X — оборотна матриця, така що $\overline{B}=XBX^{-1}$, $\overline{C}=XCX^{-1}$, що еквівалентно $\overline{B}X=XB,\overline{C}X=XC$. Матрицю X вважаємо розбитою на блоки таким чином, щоб вказані множення матриць здійснювалися поблоково.

З рівності $\overline{C}X=XC$ випливає, що

$$X=\begin{pmatrix} X_{11}&0&0&0\\ 0&X_{22}&X_{23}&X_{24}\\ 0&X_{32}&X_{33}&X_{34}\\ 0&X_{42}&X_{43}&X_{44} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо рівність $\overline{B}X=XB$:

$$\begin{pmatrix} 0&0&\overline{B_{13}}&\overline{B_{14}}\\ 0&0&E&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{11}&0&0&0\\ 0&X_{22}&X_{23}&X_{24}\\ 0&X_{32}&X_{33}&X_{34}\\ 0&X_{42}&X_{43}&X_{44} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_{11}&0&0&0\\ 0&X_{22}&X_{23}&X_{24}\\ 0&X_{32}&X_{33}&X_{34}\\ 0&X_{42}&X_{43}&X_{44} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&B_{13}&B_{14}\\ 0&0&E&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Перемноживши матриці, маємо рівність

$$\begin{pmatrix} 0 & \overline{B_{13}}X_{32}+\overline{B_{14}}X_{42} & \overline{B_{13}}X_{33}+\overline{B_{14}}X_{43} & \overline{B_{13}}X_{34}+\overline{B_{14}}X_{44} \\ 0 & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_{11}B_{13} & X_{11}B_{14} \\ 0 & 0 & X_{22} & 0 \\ 0 & 0 & X_{32} & 0 \\ 0 & 0 & X_{42} & 0 \end{pmatrix}.$$

З цієї рівності одержуємо, що

$$X_{22}=X_{33},\ X_{32}=0,\ X_{34}=0,\ X_{42}=0,$$

$$\overline{B_{13}}X_{33}+\overline{B_{14}}X_{43}=X_{11}B_{13},\ \overline{B_{14}}X_{44}=X_{11}B_{14},$$

тобто зображення $R=\{B,C\}$ і $\overline{R}=\{\overline{B},\overline{C}\}$ еквівалентні тоді і лише тоді, коли еквівалентні пари матриць (B_{13},B_{14}) і $(\overline{B}_{13},\overline{B}_{14})$ як зображення частково впорядкованої множини із двох порівняльних елементів (якщо вважати, що індексу 14 відповідає мінімальний елемент).

Взявши канонічну форму матриць B_{13} і B_{14}, а саме

$$B_{13}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B_{14}=\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(див. [9]), і розбивши додатково матриці B і C на нові блоки, відповідно до розбиття матриць B_{13} і B_{14}, отримаємо зображення, вказане в умові теореми.

Теорема доведена.

3. Доведення тверджень 2) і 3) теореми 1. Напівгрупа $S^{((b),(c))}$ ручна нескінченного зображувального типу згідно §6 [10] і §5 [11], а напівгрупа $S^{((bc),(cb))}$ – згідно теорем 1, 2 [12].

Ручні напівгрупи $S^{(b)}$ і $S^{(c)}$ (як факторнапівгрупи ручної напівгрупи $S^{((b),(c))}$) мають нескінченний зображувальний тип, бо зображення $R=\{B,0\}$ і $\overline{R}=\{\overline{B},0\}$ напівгрупи $S^{(b)}$ еквівалентні тоді і лише тоді, коли подібні матриці B і $\overline{B}$, а зображення $R=\{0,C\}$ і $\overline{R}=\{0,\overline{C}\}$ напівгрупи $S^{(c)}$ — тоді і лише тоді, коли подібні матриці C і $\overline{C}$.

4. Доведення тверджень 4) і 5) теореми 1. В силу дуальності напівгруп $S^{(bc,y)}$ і $S^{(cb,y)}$ при $y\in\{(b),(c)\}$, для доведення твердження 4) достатньо розглянути напівгрупи $S^{(cb,b)}$ і $S^{(cb,c)}$. Дикість першої з них доведена в [8], а дикість другої випливає з дикості локальної алгебри з твірними x,y і співвідношеннями $x^2=0,\ y^3=0, xy=0, y^2x=0$ [13].

Твердження 5) випливає із твердження 4).

Список використаних джерел

1. *Tamura T.* Some remarks on semi-groups and all types of semi-groups of order 2, 3 / T. Tamura // J. Gakugei Tokushima Univ. — 1953. — **3**, — P. 1-11.

2. *Forsythe G.E.* SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4 / G.E. Forsythe // Proc. Amer. Math. Soc. — 1955. — **6**. — P. 443-447.

3. *Бондаренко В.М.* Про визначальні співвідношення для мінімальних систем твірних напівгруп третього порядку / В.М. Бондаренко, Я.В. Заціха // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова (Серія 1. Фізико-математичні науки). — 2013. — №14. — С. 62-67.

4. *Chotchaisthit S.* Simple proofs determining all nonisomorphic semigroups of order 3 / S. Chotchaisthit // Appl. Math. Sci. (Ruse). — 2014. — **8**. — P. 1261-1269.

5. *Bondarenko V.M.* On characteristic properties of semigroups / V.M. Bondarenko, Ya.V. Zaciha // Algebra Discrete Math. — 2015 — **20**, no. 1. — P. 32-39.

6. *Бондаренко В.М.* Канонічні форми матричних зображень напівгруп малого порядку / В.М. Бондаренко, Я.В. Заціха // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика). — 2018. — **32**, № 1. — С. 36-49.

7. *Дрозд Ю.А.* О ручных и диких матричных задачах / Ю.А. Дрозд // Матричные задачи. — Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1977. — С. 104-114.

8. *Бондаренко В.М.* Про матричні зображення наднапівгруп напівгрупи, породженої двома взаємно анульовними ідемпотентами / В.М. Бондаренко, О.В. Зубарук // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика

і інформатика). — 2020. — **36**, № 1. — С. 7-15.

9. *Клейнер М. М.* О точных представлениях частично упорядоченных множеств конечного типа / М. М. Клейнер // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 42–59.

10. *Гельфанд И.М.* Неразложимые представления группы Лоренца / И.М. Гельфанд, В.А. Пономарев // УМН.— 1968. — **40**, № 2. -=- С. 3–60.

11. *Назарова Л.А.* Применение модулей над диадой для классификации конечных p-групп, обладающих абелевой подгруппой индекса p, и пар взаимно аннулирующих операторов / Л.А. Назарова, А.В. Ройтер, В.В. Сергейчук, В.М. Бондаренко // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. — 1972. — **28**. — С. 69-92.

12. *Bondarenko V.M.* Linear operators on S-graded vector spaces / V.M. Bondarenko // Linear algebra Appl. — 2003. — **365**. — P. 45-90.

13. *Ringel C.M.* The representation type of local algebras / C.M. Ringel // Lecture Notes in Mathematics. – 1975. – **488**. – P. 282–305.

References

1. TAMURA, T. (1953). *Some remarks on semigroups and all types of semi-groups of order 2, 3.* J. Gakugei Tokushima Univ. 3, p. 1–11.

2. FORSYTHE, G. (1955). *SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4.* Proc. Amer. Math. Soc., 6, p. 443–447.

3. BONDARENKO, V., ZACIHA, Ja. (2013). *Pro vyznachalni spivvidnoshennya dlya minimalnykh system tvirnykh napivhrup tretoho poryadku.* Scientific journal of NPU named after M. P. Drahomanov, Series 1, Physics and Mathematics, 14, p. 62–67.

4. CHOTCHAISTHIT, S. (2014). *Simple proofs determining all nonisomorphic semigroups of order 3.* Appl. Math. Sci. (Ruse), 8, p. 1261–1269.

5. BONDARENKO, V., ZACIHA, Ya. (2015). *On characteristic properties of semigroups.* Algebra Discrete Math., 20, 1, p. 32–39.

6. BONDARENKO, V., ZACIHA, Ja. (2018). *Kanonichni formy matrychnykh zobrazhen napivhrup maloho poryadku.* Scientific Bulletin of Uzhhorod University, Series of Mathematics and Informatics, 32, 1, p. 36–49.

7. DROZD, Yu. (1977). *Pro ruchni ta dyki matrychni problemy.* Matrix problems – Institute of Math. of AN of Ukrain.SSR, p. 104–114.

8. BONDARENKO, V., ZUBARUK, O. (2020). *Pro matrychni zobrazhennya nadnapivhrup napivhrupy, porodzhenoyi dvoma vzayemno anul'ovnymy idempotentamy.* Scientific Bulletin of Uzhhorod University, Series of Mathematics and Informatics, 36, 1. p. 7-15.

9. KLEINER, M. (1972). *O tochnykh predstavleniyakh chastichno uporyadochennykh mnozhestv konechnogo tipa.* Zap. Nauch. Semin. LOMI, **28**, p. 42–59.

10. GELFAND, I., PONOMAREV, V. (1968). *Nerozkladni zobrazhennya hrupy Lorentsa.* Advances in Math. Sciences, 23, 2, p. 3–60.

11. NAZAROVA, L., ROITER, A., SERGEICHUK, V., BONDARENKO, V. (1972). *Primeneniye moduley nad diadoy dlya klassifikatsii konechnykh p-grupp, obladajuschih abelevoj podgruppoj indeksa p, i par vzaimno annulirujuschih operatorov.* Zap. nauch. seminarov LOMI., 28, p. 69-92.

12. BONDARENKO, V. (2003). *Linear operators on S-graded vector spaces.* Linear algebra Appl., 365, p. 45-90.

13. RINGEL, C. (1975). *The representation type of local algebras.* Lecture Notes in Mathematics, 488, p. 282–305.

Надійшла до редколегії 30.10.2020

УДК 512.53
https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/3.13

О. Г. Ганюшкін[1], *к.ф.-м.н., доц.*
О. О. Десятерик[2]

Група автоморфізмів варіанта решітки розбиттів скінченної множини

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03127, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е
e-mail: ganiyshk@gmail.com
[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03127, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е,
e-mail: sasha.desyaterik@gmail.com

O. G. Ganyushkin[1], *PhD*
O. O. Desiateryk[2]

Automorphism group of the variant of the lattice of partitions of a finite set

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03127, Kyiv, 4e Glushkova str.,
e-mail: ganiyshk@gmail.com
[2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03127, Kyiv, 4e Glushkova str.,
e-mail: sasha.desyaterik@gmail.com

У роботі вивчаються групи автоморфізмів варіантів напівгрупи решітки розбиттів скінченної множини. Доведено, що група автоморфізмів варіанта напівгрупи розбиттів скінченної множини ізоморфна узагальненому вінцевому добутку, в якому перший множник є прямим добутком вінцевих добутків, які задаються блоками, різних потужностей, розбиття, яке породжує варіант, а другий деякому набору симетричних груп.

Ключові слова: напівгрупа, варіант, решітка, група автоморфізмів .

In this paper we consider variants of the lattice of partitions of a finite set and study automorphism groups of this variants. We obtain irreducible generating sets for of the lattice of partitions of a finite set.

We prove that the automorphism group of the variant of the lattice of partitions of a finite set is a natural generalization of the wreath product. The first multiplier of this generalized wreath product is the direct product of the wreaths products, such that depends on the type of the variant generating partition and the second is defined by the certain set of symmetric groups.

Key Words: semigroup, variant, lattice, automorphism group.

Communicated by Prof. Bezushchak O.O.

Introduction

For any semigroup S with the fixed element $a \in S$ and arbitrary elements $x, y \in S$ we set $x *_a y = xay$. The operation $*_a$ defined on S by this equality is associative. This operation $*_a$ is called sandwich operation and the semigroup $(S, *_a)$ is called variant of S or a sandwich semigroup.

Lyapin was one of the first researchers who establish study of variants. In the monograph [1] he studied variants of transformation semigroups. Further various authors studied other types of semigroups, for example, papers [2] [3] [4] [5], chapter 13 in monograph [6] and references in this chapter. The study of transformation semigroups continues , for example, in [9].

We study variants of lattices which are considered as semigroups with respect to the operation $\wedge$. Here we set $\wedge$ as a greatest lower bound of two elements.

Let the *partition* of the set A on k blocks be any family of nonempty disjoined sets $\{A_1, \dots, A_k\}$ such that $A = A_1 \dot\cup \dots \dot\cup A_k$. We call sets $A_1, \dots, A_k$ *blocks* of the partition. The orders of blocks is not significant. The set of all partitions of the set A is denoted by by $\mathrm{Part}(A) = \bigcup\limits_{k \geqslant 1} \mathrm{Part}_k(A)$. If $\mathsf{N} = \{1, 2, \dots, n\}$ then instead of $\mathrm{Part}(\mathsf{N})$ we use the notation Part_n.

We call partition σ *granulation* or *subpartition* of a partition τ (denote $\sigma \leqslant \tau$) if each block of the partition τ is a union of blocks from partition σ (that is, each block of the partition σ belongs to some block of the partition τ). The relation $\leqslant$ is a partial order on the set $\mathrm{Part}(A)$ and the partially ordered set $(\mathrm{Part}(A), \leqslant)$ is a complete lattice.

Each lattice can be considered as a semigroup with respect to the operation $\wedge$. Note, that $\wedge$ if and only if $a \wedge b = a$. Furthermore, a transformation $\varphi : L \to L$ is an automorphism of a lattice L as a

© О. Г. Ганюшкін, О. О. Десятерик, 2020

only if $a \wedge b = a$. Furthermore, a transformation $\varphi : L \to L$ is an automorphism of a lattice L as a partially ordered set $(L, \leqslant)$ if and only if it is an automorphism of L as a semigroup $(L, \wedge)$.

In this paper we study groups of automorphism of the semigroup $(\mathrm{Part}_n, \wedge)$ variants and further we will denote this semigroup just by Part_n.

Variants of the semigroup $\mathbf{Part}_n$

Let Part_n be a lower semilattice. For any $\rho \in \mathrm{Part}_n$ by the Δ_ρ we denote the lower cone of the element ρ: $\Delta_\rho = \{\tau \in \mathrm{Part}_n | \tau \wedge \rho = \tau\}$. The lower cone Δ_ρ of the element ρ coincides with the interval $[0, \rho]$. Moreover if ρ is a partition of the set N on the blocks $M_1, \ldots, M_k$ with powers $m_1, \ldots, m_k$ respectively, then $[0, \rho] \simeq \mathrm{Part}_{m_1} \times \cdots \times \mathrm{Part}_{m_k}$.

Lemma 1. *Each set of variant* $(\mathrm{Part}_n, *_\rho)$ *generators contains a set* $\mathrm{Part}_n \setminus [0, \rho]$.

Доведення. Let element τ be decomposable in the variant $(\mathrm{Part}_n, *_\rho)$ then there exist $\mu, \nu \in \mathrm{Part}_n$, such that $\tau = \mu *_\rho \nu = \mu \wedge \rho \wedge \nu$. It follows that

$$\tau \wedge \rho = \mu \wedge \rho \wedge \nu \wedge \rho = \mu \wedge \rho \wedge \nu = \tau, \quad (1)$$

hence $\tau \in [0, \rho]$. Thus all elements from $\mathrm{Part}_n \setminus [0, \rho]$ are non decomposable, that is why these elements belong to each generating system. □

Note that if $\rho = 1$, then the variant $(\mathrm{Part}_n, *_\rho)$ coincides with the semigroup Part_n.

Proposition 1. *If* $\rho \neq 1$*, then the unique irreducible generating set of the variant* $(\mathrm{Part}_n, *_\rho)$ *is the set* $\mathrm{Part}_n \setminus [0, \rho]$.

Доведення. By the Lemma 1 each generating system of the variant $(\mathrm{Part}_n, *_\rho)$ must contain $\mathrm{Part}_n \setminus [0, \rho]$. Thus it is enough to show that the set $\mathrm{Part}_n \setminus [0, \rho]$ is a generating set of the variant $(\mathrm{Part}_n, *_\rho)$. To show this it is enough to prove that each element from $[0, \rho]$ is reducible into product of elements from $\mathrm{Part}_n \setminus [0, \rho]$.

Let the partition ρ be of the next form $\mathsf{N} = M_1 \cup \cdots \cup M_k$, $k \geqslant 2$. Obviously, that $\rho = 1 *_\rho 1$. Consider an arbitrary partition $\tau < \rho$. Let this partition have the form $\mathsf{N} = \left(\bigcup_{i=1}^{m_1} M_{1i}\right) \bigcup \cdots \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{m_k} M_{ki}\right)$, where $\bigcup_{i=1}^{m_j} M_{ji} = M_j$. Without loss of generality we set $m_1 \geqslant 2$. Let partitions μ and ν be obtained from τ by "gluing"blocks M_{11} with M_{21} and blocks M_{1m_1} with M_{21} respectively. Then partitions μ and ν belong to the set $\mathrm{Part}_n \setminus [0, \rho]$ and the equality $\tau = \mu *_\rho \nu$ holds. □

Lemma 2. *An element* $\tau \in \mathrm{Part}_n$ *is idempotent of the semigroup* $(\mathrm{Part}_n, *_\rho)$ *if and only if* $\tau \in [0, \rho]$.

Доведення. Let τ be an idempotent of the semigroup $(\mathrm{Part}_n, *_\rho)$. Then

$$\tau = \tau *_\rho \tau = \tau \wedge \rho \wedge \tau = \tau \wedge \rho, \quad \text{that is} \quad \tau \leqslant \rho.$$

Conversely, consider $\tau \leqslant \rho$. Thus $\tau = \tau \wedge \rho = \tau \wedge \rho \wedge \tau = \tau *_\rho \tau$. Hence τ is an idempotent of the semigroup $(\mathrm{Part}_n, *_\rho)$. □

Automorphisms of variants of the semigroup $\mathbf{Part}_n$

Theorem 1. *For each automorphism* $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Part}_n, *_\rho)$ *the lower cone* $[0, \rho]$ *is an invariant subset and the restriction of* φ *on* $[0, \rho]$ *is an automorphism of* $[0, \rho]$ *as a partially ordered set.*

Доведення. Note, that $\varphi(\rho) \leqslant \rho$. Thus by the rules of partial order for the lattice we got that $\varphi(\rho) = \varphi(\rho \wedge \rho \wedge \rho) = \varphi(\rho *_\rho \rho) = \varphi(\rho) *_\rho \varphi(\rho) = \varphi(\rho) \wedge \rho \wedge \varphi(\rho) = \rho \wedge \varphi(\rho)$. Hence $\varphi(\rho) \leqslant \rho$.

Further we show that $[0, \rho]$ is an invariant set for φ. If $x \leqslant \rho$, then $x = x \wedge \rho \wedge \rho = x *_\rho \rho$. Therefore $\varphi(x) = \varphi(x *_\rho \rho) = \varphi(x) *_\rho \varphi(\rho) = \varphi(x) \wedge \rho \wedge \varphi(\rho) = \varphi(x) \wedge \varphi(\rho) \leqslant \varphi(\rho) \leqslant \rho$.

If $x \leqslant y \leqslant \rho$, then $x = x \wedge \rho \wedge y = x *_\rho y$. Thus

$$\varphi(x) = \varphi(x) *_\rho \varphi(y) = \varphi(x) \wedge \rho \wedge \varphi(y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y).$$

Hence $\varphi(x) \leqslant \varphi(y)$ that is φ saves the partial order on $[0, \rho]$.

Thus the restriction $\varphi|_{[0,\rho]} : [0, \rho] \to [0, \rho]$ is a homomorphism of partially ordered sets. Since inverse mapping φ^{-1} belongs to $\mathrm{Aut}(L, *_a)$, then $\varphi|_{[0,\rho]}$ is bijective, that is $\varphi|_{[0,\rho]}$ is an automorphism of $[0, \rho]$ as partially ordered set. □

Corollary 1. *For each automorphism* $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Part}_n, *_\rho)$ *holds equality* $\varphi(\rho) = \rho$.

Theorem 2. $\mathrm{Aut}\,\mathrm{Part}_n \simeq S_n$.

Доведення. Схема доведення. For each permutation $\pi \in S_n$ we consider the mapping φ_π such that it maps the partition $a_1 \ldots a_k | \ldots | a_r \ldots a_n$ to the partition $a_1^\pi \ldots a_k^\pi | \ldots | a_r^\pi \ldots a_n^\pi$. Then the mapping φ_π is an automorphism of the lattice Part_n.

Conversely, consider $\psi \in \mathrm{Aut}\,\mathrm{Part}_n$. The lower cone of the element $\rho \in \mathrm{Part}_n$ is isomorphic to the lattice Part_{n-1} if and only if ρ have the form $a | \mathsf{N} \setminus \{a\}$. Thus ψ maps the partition $a | \mathsf{N} \setminus \{a\}$

to the partition $b|\mathsf{N}\setminus\{b\}$ of the same form. By such property for the automorphism ψ we naturally have the permutation $\pi_\psi \in S_n$ such that π_ψ maps a to b. The automorphism $\psi\varphi_{\pi_\psi}^{-1}$ leaves still each partition $a|\mathsf{N}\setminus\{a\}$. The partition $\tau = a|b|\mathsf{N}\setminus\{a,b\}$ is the only one which lays in lower cones of both partitions $\mu = a|\mathsf{N}\setminus\{a\}$ and $\nu = b|\mathsf{N}\setminus\{b\}$ and have a lower cone isomorphic to Part_{n-2}. Since automorphism $\psi\varphi_{\pi_\psi}^{-1}$ leaves still both partitions μ and ν, then it leaves still the partition τ.

Similarly it can be proved that $\psi\varphi_{\pi_\psi}^{-1}$ leaves still each partition of the form $a_1|a_2|\ldots|a_k|\mathsf{N}\setminus\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$ with only unique one-element block. Hence $\psi\varphi_{\pi_\psi}^{-1}$ leaves still all partitions. Thus $\psi = \varphi_{\pi_\psi}$. □

A partition τ has a *type* $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ if it contains l_1 blocks of cardinality 1, l_2 blocks of cardinality 2, l_n blocks of cardinality n. Obviously, that $l_1 + 2l_2 + \cdots + nl_n = n$.

Theorem 3. *Let τ be a partition of type $\langle l_1, l_2, \ldots, l_n\rangle$. Then automorphism group of the interval $[0,\tau]$ is isomorphic to the direct product $G_1\times G_2\times\cdots\times G_n$ of wreaths products $G_k = S_{l_k}\wr S_k$.*

Доведення. Схема доведення. The interval $[0,\tau]$ is isomorphic to the direct product of lattices of partitions

$$\underbrace{\mathrm{Part}_1\times\cdots\times\mathrm{Part}_1}_{l_1}\times\underbrace{\mathrm{Part}_2\times\cdots\times\mathrm{Part}_2}_{l_2}\times\cdots\times\underbrace{\mathrm{Part}_n\times\cdots\times\mathrm{Part}_n}_{l_n}.$$

We will show that isomorphism φ of the interval $[0,\tau]$ permute the same type multipliers of this product (in the wreath product for given k it corresponds to the multiplier S_{l_k}) and in each multiplier φ acts the automorphism of the corresponding lattice (in the wreath product it gives a multiplier S_k).

Obviously, that each element from $G_1\times G_2\times\cdots\times G_n$ is an automorphism of the interval $[0,\tau]$. In the proof of the fact that there is no other automorphisms not obvious only the part related to the permutation of multipliers. It can be proven in the next way: we pick k such that it is the biggest number for which $l_k\neq 0$ and one of multipliers Part_k. The identity of this multiplier is an element of rank k with the lower cone isomorphic to Part_k. Thus the identity is mapped to the element with the same properties and so cone of the identity goes forward... Hence a given multiplier Part_k is mapped to some element of the form Part_k, thus automorphism permute multipliers of the form Part_k. Also the part $\underbrace{\mathrm{Part}_k\times\cdots\times\mathrm{Part}_k}_{l_k}$ is an invariant.

Further we move to the smaller numbers k and use the same scheme of proof.

□

Corollary 2. *Automorphism of the interval $[0,\tau]$ save the type of the partition.*

Let A be a disjoined union $A = A_1\cup\cdots\cup A_k$ of the sets $A_1, \ldots, A_k$ of powers $m_1, \ldots, m_k$ respectively. By $n_r(m_1,\ldots,m_k)$ we denote the number of partitions of the set A on r blocks, such that each block contains not more than one element from each of sets $A_1, \ldots, A_k$.

By $[x]_k$ we denote falling factorial number k, such that $[x]_k = x(x-1)\cdots(x-k+1)$.

Proposition 2. *Two next equalities are met.*

a) $n_r(m) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } m = r; \\ 0, & \text{в інших випадках.}\end{cases}$

b) $n_r(m_1,\ldots,m_{i+1}) = \sum\limits_{j=0}^{m_{i+1}}\binom{m_{i+1}}{j} n_{r+j-m_i}\cdot$
$\cdot\,(m_1,\ldots,m_i)[r+j-m_i]_j.$

Доведення. a) Obvious, because all blocks in this case are one-element (singletons) blocks.

b) We group all partitions of the set $A_1\cup\cdots\cup A_i\cup A_{i+1}$ in classes by the number of singletons which belong to the set A_{i+1}. If there is j elements with this property, then they can be picked in $\binom{m_{i+1}}{j}$ ways. Other $m_{i+1}-j$ elements we join to the blocks of the partition of the set $A_1\cup\cdots\cup A_i$ on $r+j-m_i$ blocks. This partition can be obtained in $n_{r+j-m_i}(m_1,\ldots,m_i)$ ways. Since different elements must be joined to different blocks it can be done in $[r+j-m_i]_j$ ways. □

Denote the number $\sum\limits_{r\leqslant m_1+\cdots+m_k} n_r(m_1,\ldots,m_k)$ by $t(m_1,\ldots,m_k)$.

Proposition 3. *Let the partition $\rho\in\mathrm{Part}_n$ have a form*

$$\mathsf{N} = A_1\cup\cdots\cup A_p\cup B_1\cup\cdots\cup B_q,$$

and the partition $\tau\in[0,\rho]$ have the form

$$\mathsf{N} = C_1\cup\cdots\cup C_{m_1+\cdots+m_p}\cup B_1\cup\cdots\cup B_q,$$

where each block $A_1, \dots, A_r$ by the transition from ρ to τ is granulated on $m_1, \dots, m_p$ smaller blocks. Then the set

$$M_\tau = \{\mu \in \mathrm{Part}_n \mid \mu \wedge \rho = \tau\}$$

contains

$$R_\tau = \sum_{r \leqslant m_1+\dots+m_k} \sum_{k=1}^{q} n_r(m_1, \dots, m_p) S(q,k)(r+1)^k$$

elements, where $S(q,k)$ is a Stirling number of the second kind.

Доведення. The partition $\mu \wedge \rho$ contains a block B_i if and only if B_i belong to one of the blocks of the partition μ. There is the same for blocks of C_j. Furthermore, if different blocks C_{j_1} and C_{j_2} belong to the same block of the partition ρ, then they belong to the different blocks of the partition μ.

Thus partition μ belongs to the set M_τ if and only if it can be obtained by the next rules. Firstly, by unifying blocks $C_1, \dots, C_{m_1+\dots+m_p}$ we get r blocks of the partition μ, such that non of two different blocks C_{j_1} and C_{j_2} which belong to the one block of the partition ρ do not belong to the same block of the partition μ. It can be done in $n_r(m_1, \dots, m_p)$ ways. Secondly, by the unifying blocks $B_1, \dots, B_q$ we get k more blocks. It can be done in $S(q,k)$ ways. Each of these k blocks we do not change or join to one of r blocks, such that we get on the first step. It can be done in $(r+1)^k$ ways.

Finally, we count the sum by all possible r and k this gives us a power of the set M_τ. □

For the formulation of the main result about the automorphism group of the variant $(\mathcal{L}(V), *_A)$ we need the next construction.

Let (G, M) be a permutation group, $O_1, \dots, O_k$ are orbits of this group and $(H_1, N_1), \dots, (H_k, N_k)$ are permutation groups. The permutation group, such that elements of this group are sets $(g; f_1, \dots, f_k)$ where g is an elements G and for each i $1 \leqslant i \leqslant k$, f_i is a function from O_i to H_i is called *generalized wreath product*. The group $G \wr (H_1, \dots, H_k)$ acts on the set $\bigcup_{i=1}^{k}(O_i \times N_i)$ by the rule

$$(m,n)^{(g;f_1,\dots,f_k)} = (m^g, n^{f_i(m)}), \quad \text{if } m \in N_i.$$

Theorem 4. *Let $(\mathrm{Part}_n, \wedge)$ be a partition semigroup of the n-element set, $\rho \neq 1$ a partition of the type $\langle l_1, l_2, \dots, l_n\rangle$ from Part_n, $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_v$ are orbits of automorphism group of the interval $[0,\rho]$, τ_i a representative of the orbit $\mathcal{O}_i$ $(i = 1, 2, \dots, v)$. Then automorphism group of the variant $(\mathrm{Part}_n, *_\rho)$ isomorphic to the generalized wreath product $S = \big((S_{l_1} \wr S_1) \times \dots \times (S_{l_n} \wr S_n)\big) \wr (S_{R_{\tau_1}-1}, S_{R_{\tau_2}-1}, \dots, S_{R_{\tau_v}-1})$, where numbers R_{τ_i} are defined by the Proposition 3 and by S_m we denote a symmetric group of the power m.*

Доведення. The set Part_n is a disjoined union of sets $\tau \in [0,\rho]$. Further, consider elements $\mu \in \mathrm{Part}_n$ as an ordered pairs of the form $(\mu \wedge \rho, \mu)$.

Note that the set M_τ consists of the partition τ, such that belongs to the interval $[0,\rho]$ and the "tail"$M_\tau \setminus \{\tau\}$ of partitions, such that lay out of this interval.

By the theorem 1 the restriction of the automorphism $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Part}_n, *_\rho)$ on $[0,\rho]$ ia an automorphism of $[0,\rho]$. Additionally, by the theorem 3 automorphism group G of the interval $[0,\rho]$ ia isomorphic to the direct product $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ of the wreaths products $G_k = S_{l_k} \wr S_k$.

Consider $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Part}_n, *_\rho)$ and $\mu \in M_\tau$, thus $\mu \wedge \rho = \tau$. Then

$$\varphi(\tau) = \varphi(\mu \wedge \rho) = \varphi(\mu \wedge \rho \wedge \rho) = \varphi(\mu *_\rho \rho) = \\ = \varphi(\mu) *_\rho \varphi(\rho) = \varphi(\mu) *_\rho \rho = \varphi(\mu) \wedge \rho,$$

hence $\varphi(\mu) \in M_{\varphi(\tau)}$. Since a mapping φ^{-1} exists, it follows that φ induces a bijection M_τ on $M_{\varphi(\tau)}$. Partitions τ and $\varphi(\tau)$ belongs to the interval $[0,\rho]$, then φ induces a bijection of the "tail"$M_\tau \setminus \{\tau\}$ on the "tail"$M_{\varphi(\tau)} \setminus \{\varphi(\tau)\}$. It proves that $\mathrm{Aut}(\mathrm{Part}_n, *_\rho) \subseteq S$.

Conversely, consider $\psi = (g; f_1, \dots, f_v) \in S$. By the definition of S, follows that restriction of ψ on $[0,\rho]$ is an automorphism of $[0,\rho]$. Further it can be directly checked that the mapping

$$(\mu \wedge \rho, \mu) \mapsto \big((\mu \wedge \rho)^g, (\mu)^{f_i(\mu\wedge\rho)}\big), \quad \mu \wedge \rho \in \mathcal{O}_i,$$

is an automorphism $(\mathrm{Part}_n, *_\rho)$. It proves the converse statement. □

Список використаних джерел

1. *Ляпин Е.С.* Полугруппы / Е.С. Ляпин. — Москва: Физматгиз, 1960. — 592 с.

2. *Chase K.* Sendwich semigroups of binary relations/ K. Chase // Discrete Math. — 1979. — V. **28(3)**. — P. 231-236.

3. *Hickey J.* Semigroups under a sendwich operation / J. Hickey // Proc. Edinburg Math. Soc. (2) — 1983. — V. **26(3)**. — P. 371-382.

4. *Khan T., Lawson M.* Variants of regular semigroups/ T. Khan , M. Lawson // Semigroup Forum. — 2001. — V. **62(3)**. — P. 358-374.

5. *Mazorchuk V., Tsyaputa G.* Isolated subsemigroups in the variants of $\mathcal{T}_n$/V. Mazorchuk , G. Tsyaputa // Acta Math. Univ. Com. — 2008. — V. LXXVII, **1**. — P. 63-84.

6. *Ganyushkin O., Mazorchuk V.* Classical Finite Transformation Semirgoups. An Introduction. / O. Ganyushkin , V. Mazorchuk. — London: Springer–Verlag. Algebra and Applications, 2009. — XII, 328.

7. *Desiateryk O.* Variants of commutative bands with zero. / O. Desiateryk // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series: Phisics & Mathematics — 2015. — V. 4. — P. 15-20.

8. *Desiateryk O. O. , Ganyushkin O. G.* Variants of a lattice of partitions of a countable set / O. O. Desiateryk , O. G. Ganyushkin // Algebra and Discrete Mathematics — 2018. —Vol 26. No 1. — P. 8-18.

9. *Dolinka I., East J.* Variants of finite full transformation semigroups / I. Dolinka, J. East // Int. J. Algebra Comput. — 2015. — no. 8.**25** — P. 1187-1222.

References

1. LYAPIN, E. (1960) Polugruppy. Moskva: Fizmatgiz.

2. CHASE, K. (1979) Sendwich semigroups of binary relations. *Discrete Math.* V. **28(3)**. p. 231-236.

3. HICKEY, J. (1983) Semigroups under a sendwich operation. *Proc. Edinburg Math. Soc. (2).* V. **26(3)**. p. 371-382.

4. KHAN, T. *&* LAWSON, M. (2001) Variants of regular semigroups. *Semigroup Forum.* V. **62(3)**. p. 358-374.

5. MAZORCHUK, V. *&* TSYAPUTA, G. (2008) Isolated subsemigroups in the variants of $\mathcal{T}_n$ *Acta Math. Univ. Com.* V. LXXVII, **1**. p. 63-84.

6. GANYUSHKIN, O. *&* MAZORCHUK, V. (2009) Classical Finite Transformation Semirgoups. An Introduction. London: Springer–Verlag. Algebra and Applications.

7. DESIATERYK, O. (2015) Variants of commutative bands with zero. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series: Phisics & Mathematics.* V. 4. p. 15-20.

8. DESIATERYK, O. *&* GANYUSHKIN, O. (2018) Variants of a lattice of partitions of a countable set / *Algebra and Discrete Mathematics.* Vol 26. No 1. p. 8-18.

9. DOLINKA, I. *&* EAST, J. (2015) Variants of finite full transformation semigroups / *Int. J. Algebra Comput.* no. 8.**25**. p. 1187-1222.

Надійшла до редколегії 29.10.2020

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

УДК 519.9

https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/3.14

Петрова Т.О.[1], к.ф.-м.н., доц.
Чулаков І.П.

Деякі негативні результати для інтерполяційного монотонного наближення функцій, що мають дробову похідну

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка,83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е,
email:tamarapetrova2703@gmail.com
email:igorchzpua@gmail.com

Petrova T. O.[1], PhD, Associate Prof.
Chulakov I.P.

Some negative results for the interpolation monotone approximation of functions having a fractional derivative

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4e,
email:tamarapetrova2703@gmail.com
email:igorchzpua@gmail.com

Досліджується питання наближення функцій $f \in \mathrm{W}^r[0,1]\bigcap\Delta^1, r \in (3,4)$ *алгебраїчними поліномами* $p_n \in \Pi_n\bigcap\Delta^1$. *Побудовано контрприклад, який показує, що для* $f \in \mathrm{W}^r[0,1]\bigcap\Delta^1, r \in (3,4)$ *оцінка* $|f(x)-p_n(x)| \le c\frac{1}{n^2}(\sqrt{x(1-x)})^r, x \in [0,1]$ *є невірною.*

Ключові слова: Наближення функції, простір Соболєва, алгебраїчний поліном, монотонна функція, опукла функція.

We discuss whether on not it is possible to have interpolatory estimates in the approximation of a function $f \in \mathrm{W}^r[0,1]$ *by polynomials. The problem of positive approximation is to estimate the pointwise degree of approximation of a function* $f \in C^r[0,1]\cap\Delta^0$ *where* Δ^0 *is the set of positive functions on* $[0,1]$. *Estimates of the form (1) for positive approximation are known ([1],[2]). The problem of monotone approximation is that of estimating the degree of approximation of a monotone nondecreasing function by monotone nondecreasing polynomials. Estimates of the form (1) for monotone approximation were proved in [3],[4],[8]. In [3],[4] is consider* $r \in \square, r > 2$. *In [8] is consider* $r \in \square, r > 2$. *It was proved that for monotone approximation estimates of the form (1) are fails for* $r > 2, r \in \square$. *The problem of convex approximation is that of estimating the degree of approximation of a convex function by convex polynomials. The problem of convex approximation is that of estimating the degree of approximation of a convex function by convex polynomials. The problem of convex approximation is consider in ([5],[6]). In [5] is consider* $r \in \square, r > 2$. *In [6] is consider* $r \in \square, r > 2$. *It was proved that for convex approximation estimates of the form (1) are fails for* $r > 2, r \in \square$. *In this paper the question of approximation of function* $f \in \mathrm{W}^r\bigcap\Delta^1, r \in (3,4)$ *by algebraic polynomial* $p_n \in \Pi_n\bigcap\Delta^1$ *is consider. The main result of the work generalize the result of work [8] for* $r \in (3,4)$.

Key Words: Approximation of function, Sobolev space, algebraic polynomial, monotone function, convex function.

Статтю представив доктор фізико-математичних наук, професор, академік НАН України Перестюк М.О.

© Т.О. Петрова, І.П. Чулаков 2020

Вступ.

Нехай $W^r, r \in \mathbb{N}$ клас функцій $f \in C[0,1]$, таких, що мають абсолютно неперервну $(r-1)$ похідну і $\left|f^{(r)}(x)\right| \le 1$ майже скрізь на $[0,1]$.

Теляковський [1] для $r=1$ та Гопенгауз для $r \in \mathbb{N}$ [2] посилили пряму теорему Нікольського – Тіммана довівши, що кожну функцію $f \in W^r$ можна наблизити алгебраїчним многочленом p_n степеня $< n$ так, що

$$| f(x) - p_n(x) | \le c(r)\left(\frac{\sqrt{x(1-x)}}{n}\right)^r, n > r \qquad (1)$$

де c - абсолютна стала.

DeVore та Yu [3] довели, що при $r = 1,2$ оцінка (1) справедлива і при наближенні монотонної функції монотонним многочленом.

А саме, якщо монотонна функція $f \in W^r$, то існує монотонний многочлен p_n, такий, що має місце (1).

В роботі [4] доведено, що для натурального $r > 2, r \in \mathbb{N}$ оцінка (1), взагалі кажучи, невірна для мнотонного наближеня.

Для опуклого наближення при $r > 2, r \in \mathbb{N}$ доведено [5], що оцінка (1) також є невірною.

Для $r \in \mathbb{N}$ введемо клас функцій $W^r[0,1]$, таких, що $D_{0+}^{r-1} f$ абсолютно неперервна і $\left|D_{0+}^r f\right| \le 1$ майже скрізь на $[0,1]$ (тут $D_{0+}^{r-1} f$ - лівостороння дробова похідна [7]).

Будемо позначати через Π_n - множину всіх алгебраїчних поліномів степеня $\le n$ і через Δ^1 множину монотонних вниз на $[0,1]$ функцій.

Основним результатом є теорема, яка узагальнює результат роботи [8] на класи $W^r[0,1] \bigcap \Delta^1$ з $r \in (3,4), r \in \mathbb{N}$.

Основні означення та допоміжні твердження.

Спочатку нагадаємо основні означення та факти, які використовуються в роботі.

Означення 1. Нехай $\varphi(x) \in L_1(a,b)$. Інтеграли

$$(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x) \overset{def}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, x > \alpha \qquad (2)$$

$$(I_{b-}^{\alpha}\varphi)(x) \overset{def}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, x < b \qquad (3)$$

де $\alpha > 0$ називаються інтегралами дробового порядку α.

Перший називають лівостороннім, а другий правостороннім. Що стосується дробового диференціювання, то його слід ввести, як операцію обернену дробовому інтегруванню [7].

Означення 2. Для функції $f(x)$, що задана на відрізку [a,b] кожен із виразів

$$(D_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt \qquad (4)$$

$$(D_{b-}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt \qquad (5)$$

називається дробовою похідною порядку $\alpha, 0 < \alpha < 1$ відповідно лівосторонньою та правосторонньою.

Перейдемо до дробових похідних порядків $\alpha \ge 1$

$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$,

де $[\alpha]$-ціла частина числа α і $\{\alpha\}$-дробова частина чила α.

Якщо α - ціле число, то під дробовою похідною порядка α будемо розуміти звичайне диференціювання:

$$D_{a+}^{\alpha} = \left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}, D_{b-}^{\alpha} = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}, \alpha = 1,2,3... \qquad (6)$$

Якщо ж α-не ціле, то правильно ввести за формулами:

$$D_{a+}^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, n = [\alpha]+1 \qquad (7)$$

$$D_{b-}^{\alpha} f = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt, n = [\alpha]+1 \qquad (8)$$

Наступна теорема дає достатні умови для існування дробових похідних будь-якого порядку $\alpha, \alpha > 0$ [7].

Теорема 1. Нехай $\alpha > 0$ та функція $f(x)$ має абсолютно неперервну похідну порядку

$n, n=[\alpha]+1$. Тоді $D_{a+}^{\alpha} f$ існує майже скрізь і може бути представлена у вигляді

$$D_{a+}^{\alpha} f = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha} + \\ + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt. \quad (9)$$

Основним результатом є теорема, яка узагальнює результат роботи [8] на класи $W^r[0,1]$ при $r \in (3,4), r \in \square$.

Основний результат.

Теорема 2. Нехай $r \in (3,4)$. Тоді для кожного n існує функція $F = F_{r,n} \in W^r[0,1] \bigcap \Delta^1$ така, що для кожного полінома $p_n \in \Pi_n \bigcap \Delta^1$ і для будь-якої додатної на $(0;1)$ функції ψ, такої, що $\lim\limits_{x\to 0} \psi(x) = 0$ і $\lim\limits_{x\to 1} \psi(x) = 0$ справедлива одна з таких властивостей:

$$\overline{\lim_{x\to 0}} \frac{|F(x)-p_n(x)|}{\varphi^r(x)\psi(x)} = +\infty \quad (11)$$

або

$$\overline{\lim_{x\to 1}} \frac{|F(x)-p_n(x)|}{\varphi^r(x)\psi(x)} = +\infty \quad (12)$$

де $\varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}$.

Доведення. Нехай $r \in (3,4)$. Розглянемо функцію:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{(b-x)^4}{4!} + b^4(x+7) - \frac{b^4}{2}(1+x)^{-\frac{1}{b}+4} + \\ + \frac{b^4}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}+4}, \quad x \in [0,b] \\ b^4(x+7) - \frac{b^4}{2}(1+x)^{-\frac{1}{b}+4} + \\ + \frac{b^4}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}+4}, \quad x \in (b,1] \end{cases}$$

З явного вигляду функції $f(x)$ та її похідних, можна отримати нерівності:

$$f(1) \le \frac{45}{4}b^4,\ f(0) = \frac{163}{24}b^4 > 0,$$

$$f'(0) \sim b^4 + \frac{1}{12}b^3 > 0,\ f'(b) \sim b^4 + \frac{1}{4}b^3 e^{-1} > 0,$$

$$f'(1) \sim b^4,\ f''(0) \sim \frac{b^2}{4} > 0,$$

$$f''(b) \sim -\frac{b^2}{4}e^{-1} < 0,\ f''(1) \sim -\frac{b^2}{2}2^{-\frac{1}{b}} < 0,$$

$$f'''(0) \sim -\frac{3}{4}b < 0,\ f'''(b) \sim \frac{b}{4}e^{-1} > 0,$$

$$f'''(1) \sim \frac{b}{2}2^{-\frac{1}{b}} > 0.$$

Помітимо також, що

$f^{(4)}(b-) > 0,\ f^{(4)}(b+) < 0$ то

$\forall x \in [0,b): f^{(4)}(x) > 0, \forall x \in (b,1)]: f^{(4)}(x) < 0.$

З останніх нерівностей зрозуміло, що $\forall x \in [0,1]: f'(x) > 0$ і функція f зростає на $[0,1]$ та $\forall x \in [0,1]: f(x) \ge 0.$

Далі, існує

$x_1 \in (0,b): f''(x_1) = 0, \forall x \in [0,x_1]: f''(x) \ge 0$ та

$\forall x \in [x_1,1]: f''(x) < 0.$

Також існує $x_0 \in [x_1,b]: f''(x_0) = \min_{x\in[0,1]} f''(x).$

З явного вигляду $f''(x)$ отримаємо оцінку $\forall x \in [0,b]:$

$$f''(x) \ge -\frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{4}e^{-1} \ge -\frac{b^2}{2},$$

а саме, $f''(x_0) \ge -\frac{b^2}{2}$.

Далі розглянемо функцію $F(x) = x^4 f(x).$

Доведемо, що $F \in W^r[0,1] \cap \Delta^1.$

Розглянемо $F'(x) = 4x^3 f(x) + x^4 f'(x)$.

Так як $\forall x \in [0,1] f(x) \ge 0$ і $f'(x) \ge 0,$ то $\forall x \in [0,1]: F'(x) \ge 0.$ Таким чином $F \in \Delta^1.$

Тепер доведемо, що $F \in W^r[0,1]$.

За Теоремою 2.3 в роботі [7] маємо:

$$D_{0+}^r F(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{F^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-r)} x^{k-r} +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(m-r)} \int_0^x \frac{F^{(m)}(t)}{(x-t)^{r-m+1}} dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{3} \frac{F^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-r)} x^{k-r} + \frac{1}{\Gamma(4-r)} \int_0^x \frac{F^{(4)}(t)}{(x-t)^{r-3}} dt,$$

майже скрізь на $[0,1]$.

Так як $F^{(k)}(0) = 0$ при $k = 0,1,2,3,$ то

$$D_{0+}^r F(x) = \frac{1}{\Gamma(4-r)} \int_0^x \frac{F^{(4)}(t)}{(x-t)^{r-3}} dt$$

майже скрізь на $[0,1]$.

Очевидно, що $\exists c > 0, c \in$ така, що $\forall x \in [0,1] : | F^{(4)}(x) | \le c.$

Тоді

$$| D_{0+}^r F(x) | = \frac{c}{\Gamma(4-r)} \int_0^x \frac{dt}{(x-t)^{r-3}} =$$

$$= \frac{c}{\Gamma(4-r)} \frac{x^{4-r}}{4-r} \le \frac{c}{(4-r)\Gamma(4-r)}.$$

Таким чином, $D_{0+}^r F(x)$ існує майже скрізь на $[0,1]$.

Очевидно, що

$$D_{0+}^{r-1} F(x) = \frac{1}{\Gamma(3-r)} \int_0^x \frac{F^{(3)}(t)}{(x-t)^{r-3}} dt$$

буде абсолютно неперервною.

Таким чином, $F \in W^r[0,1] \bigcap \Delta^1$.

Нехай існує многочлен q_n, який монотонно зростає на $[0,1]$ і для якого умова (11) не виконується.

Тоді, для деякої сталої B маємо:

$$| F(x) - q_n(x) | \le B\varphi^r(x)\psi(x) \le Bx^{r/2}, 0 \le x \le b.$$

Звідси випливає, що

$q_n(0) = F(0) = 0$ і $q_n'(0) = F'(0) = 0$.

Так як q_n зростає на $[0,1]$ і $q_n(0) = 0,$ то $\forall x \in [0,1] : q_n(x) \ge 0.$ Тоді многочлен q_n має вигляд $q_n(x) = x^2 \cdot h_{n_1}(x),$ де h_{n_1} многочлен степеня $\le n_1, n_1 \le n$.

Розглянемо многочлен

$$\tilde{q}_n(x) = q_n(x) + f'(0)x + f(0).$$

Доведемо, що умова

$$\overline{\lim_{x \to 0}} \frac{| f(x) - \tilde{q}_n(x) |}{\phi^r(x)} = +\infty \qquad (13)$$

не виконується.

Розкладемо функцію $f(x)$ за формулою Тейлора:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o\left(x^3\right), \quad x \in [0;b]$$

.

Тоді

$$\overline{\lim_{x \to 0}} \frac{| f(x) - \tilde{q}_n(x) |}{\phi^r(x)} =$$

$$= \overline{\lim_{x \to 0}} \frac{\left| f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + o\left(x^3\right) - \tilde{q}_n(x) \right|}{x^{\frac{r}{2}}} =$$

$$= \overline{\lim_{x \to 0}} \frac{\left| \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + o\left(x^3\right) - q_n(x) \right|}{x^{\frac{r}{2}}} =$$

$$= \overline{\lim_{x \to 0}} \left| \left(\frac{f''(0)}{2} + \frac{f'''(0)}{6}x + o(x) - h_{n_1}(x) \right) x^{2-r/2} \right| = 0$$

Так як умова (13) не виконується, то

$\tilde{q}_n(0) = f(0), \tilde{q}_n'(0) = f'(0).$

За нерівністю Маркова маємо:

$$\frac{b^3}{18} < \frac{b^3}{12} + b^4 = | f'(0) | = | \tilde{q}_n'(0) | \le 2n^2 \| \tilde{q}_n \|.$$

За побудовою многочлена $\tilde{q}_n(x)$ бачимо, що він зростає.

Тоді $\| \tilde{q}_n \| = \tilde{q}(1).$

Так, як $\| \tilde{q}_n \| = \tilde{q}(1)$, то маємо

$$\frac{b^3}{18} \le 2n^2 q_n(1) \Rightarrow q_n(1) > \frac{b^3}{36n^2} \qquad (14)$$

З іншого боку,

$$f(1) \le \frac{45b^4}{4} = \frac{45b^3 \cdot b \cdot 36n^2}{36n^2 \cdot 4} = \frac{b^3}{36n^2} \cdot \frac{45bn^2 36}{4} =$$

$$= \frac{b^3}{36n^2} \cdot \frac{45 \frac{1}{468n^2} n^2 36}{4} = \frac{b^3}{36n^2} \cdot \frac{45 \cdot 36}{4 \cdot 468} =$$

$$= \frac{b^3}{36n^2} \cdot \frac{45 \cdot 9}{468} = \frac{b^3}{36n^2} \cdot \frac{405}{468} \le \frac{b^3}{36n^2} \qquad (15)$$

З нерівностей (14) та (15) маємо, що $f(1) \ne \tilde{q}_n(1)$, а саме $f(1) < \tilde{q}_n(1)$.

Далі розглянемо: $\tilde{q}_n(1) = q_n(1) + f'(0) + f(0)$.

Припустимо, що $q_n(1) = f(1)$.

Тоді $\tilde{q}_n(1) = f(1) + f'(0) + f(0)$.

З останнього маємо, що

$$f(1) = \tilde{q}_n - f'(0) - f(0)$$

Ми припускаємо, що $q_n(1) > 0$, бо в протилежному випадку твердження про те, що $f(1) \ne q_n(1)$ очевидно.

Маємо, що

$$8b^4 - 4b^4 2^{-\frac{1}{b}} = \tilde{q}_n(1) - \frac{b^3}{12} - b^4 - \frac{163}{12} b^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8b^4 - 4b^4 2^{-\frac{1}{b}} = \tilde{q}_n(1) - \frac{b^3}{12} - \frac{175}{12} b^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b^3}{12} = \tilde{q}_n(1) - \frac{271}{12} b^4 + 4b^4 2^{-\frac{1}{b}}.$$

Тоді, очевидно, що $\tilde{q}_n(1) \sim c \cdot b^3$, де $c \ge \frac{1}{12}, c = const$.

З останніх міркувань випливає, що $q_n(1) = \tilde{q}_n(1) - f'(0) - f(0) \sim c \cdot b^3 - \frac{b^3}{12} = c_1 \cdot b^3$, де $c_1 > 0, \quad c_1 = const$.

Але з іншого боку, $f(1) \sim 8b^4$.

Таким чином маємо суперечність з припущенням, $q_n(1) = f(1)$.
А отже $q_n(1) \ne f(1) = F(1)$.

Теорема доведена.

Висновки.

Доведено негативний результат для монотонного наближення функцій многочленами, який є узагальненням негативного результату доведеного в роботі [8].

Список використаних джерел

1. Теляковський С.А., Две теоремы о приближении функций алгебраическими полиномами, Мат. сб. 79 (1966), 252–265.
2. Gopengauz A. I., Pointwise estimates of Hermitian interpolation, Vol. 77, 1994
3. DeVore R.A. and Yu X.M., Pointwise estimates for monotone polynomial approximation, Constr. Approx. 1 (1985), 323–331.
4. H. H. Gonska, D. Leviatan, I. A. Shevchuk, and H. -J. Wenz, Interpolatory pointwise estimates for polynomial approximations, Constr. Approx. 16 (2000), 603–629.
5. Петрова Т.О., Контрприклад у інтерполяційному опуклому наближенні, праці Інституту математики НАН України "Математика та її застосування. Теорія наближення функцій 35 (2005), 107–112.
6. Петрова Т.О., Один контрприклад для наближення функцій, що мають дробову похідну, Вісник Київського університету. Фізико - математичні науки 4 (2006), 113–118.
7. Samko S. G., Kilbas A. A., and Marichev O.I., Fractional integrals and derivatives: theory and applications (1987)
8. Петрова Т.О., Про поточкові інтерполяційні оцінки монотонного наближення функцій, що мають дробову похідну, Вісник Київського університету. Математика–Механіка 9-10 (2003), 125–127.
9. Петрова Т.О. Про поточкові інтерполяційні оцінки монотонного наближення функцій, що мають дробову похідну, Вісник Київського університету. Математика–Механіка 7-8 (2002), 118

References

1. Telyakovskij S.A., Dve teoremy o priblizhenii funkcij algebraicheskimi polinomami, Mat. sb. 79 (1966), p.252–265.
2. Gopengauz A. I., Pointwise estimates of Hermitian interpolation, Vol. 77, 1994.
3. DeVore R.A. and Yu X.M., Pointwise estimates for monotone polynomial approximation, Constr. Approx. 1 (1985), 323–331.
4. H. H. Gonska, D. Leviatan, I. A. Shevchuk, and H. -J. Wenz, Interpolatory pointwise estimates for polynomial approximations, Constr. Approx. 16 (2000), 603–629.
5. Petrova T.O., Kontrpryklad u interpolyatsiinomu opuklomu nablyzhenni, Pratsi Instytutu matematyky NAN Ukrainy “Matematyka ta zastosuvannia. Teoriya nablyzhennia functsii 35 (2005)”, p.107–112.
6. Petrova T.O., Kontrpriklad u interpolyacijnomu opuklomu nablizhenni, praci Institutu matematiki NAN Ukrayini "Matematika ta yiyi zastosuvannya. Teoriya nablizhennya funkcij 4 (2006), p.113–118.
7. Samko S.G., Kilbas A. A., and Marichev O.I., Fractional integrals and derivatives: theory and applications (1987)
8. Petrova T.O., Pro potochkovi interpolyacijni ocinki monotonnogo nablizhennya funkcij, sho mayut drobovu pohidnu, Visnik Kiyivskogo universitetu. Matematika–Mehanika 9-10 (2003), 125–127
9. Petrova T.O. Pro potochkovi interpolyacijni ocinki monotonnogo nablizhennya funkcij, sho mayut drobovu pohidnu, Visnik Kiyivskogo universitetu. Matematika–Mehanika 7-8 (2002), 118–122

Надійшла до редколегії 15.10.20

КОМП’ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 519.21 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/3.15

Усар І.Я., к. ф.-м. н.
Макушенко І.А., к. ф.-м. н.

Аналіз та оптимізація систем з повторними викликами і чергою зі змінною інтенсивністю вхідного потоку

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
03680, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д,
e-mail: usar69@ukr.net

I.Ya. Usar, Ph.D.
I.A. Makushenko, Ph.D.

Analysis and optimization of retrial systems and queue with variable rate of input flow

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: usar69@ukr.net

У статті розглядається марковська модель системи з повторними викликами зі змінною інтенсивністю вхідного потоку з обмеженою чергою та без обмежень на ємність орбіти. Керування системою здійснюється за допомогою порогових стратегій. Для такої моделі з'ясовані умови існування стаціонарного режиму та досліджуються ймовірносні характеристики процесу. Метод досліджень базується на апроксимації вихідного процесу процесом з обмеженим простором станів. Для ймовірнісних характеристик процесу в стаціонарному режимі знайдені явні векторно-матричні формули. Поставлена і розв'язана задача максимізації загального прибутку від роботи системи для порогових стратегій керування.

Ключові слова: стохастична система, повторні виклики, порогова стратегія, стаціонарний режим, оптимізація.

The paper is focused on in-depth study of the promising area of the stochastic systems theory related with scrutiny of queuing systems with repeated calls. We research Markov`s models of retrial systems with queue and variable rate of input flow controlled by threshold strategy with no restriction on the capacity of the orbit. We defined stationary regime existence conditions and investigated probability characteristics of process for two-dimension Markov process with continuous time which we took as a main model of the specified system. In stationary regime for probability characteristics of the service process were found explicit formulas. Research methods which we used are based on the initial process approximation by the process with bounded state space. Results of the research allow us to evaluate convergence rates of stationary distribution of finite systems with repeated calls to stationary distribution of infinite systems. Method of probability flow equating is used for obtain explicit expressions for stationary system probabilities through the closed path which are defined in a special way. For threshold control strategies the optimization problem of the total income of the system was stated and solved.

Key Words: queue, repeated calls, threshold strategies, stationary regime, optimization.

Статтю представив д. т. н., проф. Заславський В.А.

Результати для систем з повторними викликами представляють один із важливих розділів теорії масового обслуговування. Детальний огляд відповідних результатів можна знайти в [1],[2]. Системи з повторними викликами виникають природним чином в нашій повсякденній діяльності в телефонних системах, комп'ютерних мережах, в області систем передачі інформації та ін. ([3],[4],[5]).

У даній роботі розглядається система з повторними викликами і чергою типу $\left[M\left|M\right|m\right|m+n\right]$, для якої m - кількість обслуговуючих приладів, n - кількість місць у черзі. Час обслуговування на кожному з приладів має показниковий розподіл з параметром μ. Вхідний потік містить дві складові – первинну і вторинну. Інтенсивність λ_j потоку первинних викликів залежить від числа j - джерел повторних викликів. Кожне джерело повторних викликів генерує пуассонівський потік інтенсивності ν.

В якості моделі процесу обслуговування розглянемо двовимірний ланцюг Маркова з

© І.Я. Усар, І.А. Макушенко, 2020

неперервним часом $Q(t)=\left(Q_1(t),Q_2(t)\right),\ t\ge 0$ у фазовому просторі $S=I\times J$, $I=\{0,1,\ldots,m+n\}$, $J=\{0,1,\ldots\}$. Компонента $Q_1(t)$ вказує на кількість зайнятих приладів і місць у черзі в момент часу t, а $Q_2(t)$ дорівнює кількості джерел повторних викликів.

Інфінітезимальні характеристики $q_{(i,j)(i',j')}$ для $Q(t)$ визначаються наступним чином:

1) якщо $i=0,1,...,m+n-1,\ j\in J$,

$$q_{(i,j)(i',j')}=\begin{cases}\lambda_j,\ при\ (i',j')=(i+1,j),\\ \min\{i,\mu\}\mu,\ при\ (i',j')=(i-1,j),\\ j\nu,\ при\ (i',j')=(i+1,j-1),\\ -(\lambda_j+i\mu+j\nu),\ при\ (i',j')=(i,j),\\ 0,\ в\ інших\ випадках;\end{cases}$$

2) якщо $i=m+n,\ j\in J$,

$$q_{(m+n,j)(i',j')}=\begin{cases}\lambda_j,\ при\ (i',j')=(m+n,j+1),\\ m\mu,\ при\ (i',j')=(m+n-1,j),\\ -(\lambda_j+m\mu),\ при\ (i',j')=(m,j),\\ 0,\ в\ інших\ випадках.\end{cases}$$

З'ясуємо умови існування стаціонарного режиму для процесу $Q(t),\ t\ge 0$.

Лема. Нехай $\lambda=\overline{\lim_{j\to\infty}}\lambda_j$. Тоді при $\frac{\lambda}{m\mu}<1$ ланцюг $Q(t)$ ергодичний і його граничний розподіл співпадає з єдиним стаціонарним.

Доведення. Розглянемо в якості тест-функцій Ляпунова наступні функції

$$\phi(i,j)=ai+j,\ (i,j)\in S,$$

де параметр "a" буде визначено пізніше.

Для обраних тест-функцій середній перенос

$$y_{ij}=\sum_{(i',j')\ne(i,j)} q_{(i,j)(i',j')}\left(\phi(i',j')-\phi(i,j)\right)$$

дорівнює

$$y_{ij}=\begin{cases}\lambda_j a-\min\{i,m\}\mu a+j\nu(a-1),\ 0\le i\le m-1,\\ \lambda_j-m\mu a,\ i=m.\end{cases}$$

При $\frac{\lambda}{m\mu}<1$ для будь-якого $a\in\left(\frac{\lambda}{m\mu},1\right)$ існує таке $\varepsilon>0$, що $y_{ij}<-\varepsilon$ для всіх $(i,j)\in S$ за винятком скінченного числа станів (i,j). Таким чином для тест-функцій $\phi(i,j),(i,j)\in S$ виконуються умови теореми Твіді ([1], стор.97).

Лему доведено.

Перейдемо до знаходження формул для стаціонарного розподілу при умові, що він існує. Для побудови розрахункових алгоритмів і явних формул спочатку розглянемо модель типу $\left[M|M|m|m+n\right]^{(N)}$, в якій скінченне число N місць для повторних викликів. При умові, що всі N місць зайнято, повторний виклик губиться і не отримує обслуговування в системі. Якщо знайти стаціонарний розподіл такої системи і перейти до границі $N\to\infty$ (в умовах леми), то ми отримаємо стаціонарний розподіл для системи $\left[M|M|m|m+n\right]$.

Позначимо через $Q^{(N)}(t)=(Q_1^{(N)}(t),Q_2^{(N)}(t))$ процес обслуговування для системи з чергою і скінченною орбітою. Інфінітезимальні характеристики $q^{(N)}_{(i,j)(i',j')}$ для $Q^{(N)}(t)$ у випадку $i=m+n,\ j=N$ будуть мати вигляд

$$q_{(m+n,j)(i',j')}=\begin{cases}m\mu,\ при\ (i',j')=(m+n-1,N),\\ -m\mu,\ при\ (i',j')=(m+n,N),\\ 0,\ в\ інших\ випадках.\end{cases}$$

Процес $Q^{(N)}(t)$ приймає значення в скінченній множині станів $S^{(N)}=I\times J^{(N)}$, $I=\{0,1,\ldots,m+n\}$, $J^{(N)}=\{0,1,\ldots,N\}$, і для нього існує стаціонарний режим. Знайдемо його стаціонарний розподіл $\pi^{(N)}_{ij},\ (i,j)\in S^{(N)}$.

Так як інтенсивність вхідного потоку залежить від кількості повторних викликів, для пошуку стаціонарних імовірностей застосування методу генератрис є неможливим. В даному випадку, використовуючи теорему про рівність потоків через замкнений контур в стаціонарному режимі, приведемо систему рівнянь Колмогорова до вигляду, який дозволить виписати стаціонарні ймовірності в явному векторно-матричному вигляді.

Щоб сформулювати основний результат, введемо наступні позначення.

Нехай $A(j)=\|a_{ik}(j)\|_{i,k=0}^{m+n-1},\ j=0,1,\ldots,N-1$ - тридіагональна матриця вигляду

$$a_{ik}(j)=\begin{cases}\lambda_j+i\mu+j\nu,\ k=i,\ i=0,1,\ldots,m,\\ \lambda_j+m\mu+j\nu,\ k=i,\ i=m+1,m+2,\ldots,m+n-1,\\ -\lambda_j,\ k=i+1,\ i=0,1,\ldots,m+n-2,\\ -i\mu,\ k=i-1,\ i=1,2,\ldots,m,\\ -m\mu,\ k=i-1,\ i=m+1,m+2,\ldots,m+n-1,\\ 0,\ otherwise,\end{cases}$$

$$B=\|b_{ik}\|_{i,k=0}^{m+n-1},\ b_{ik}=\begin{cases}1,\ k=i+1,\ i=0,1,...,m+n-2,\\ 0,\ otherwise,\end{cases}$$

$$C=\|c_{ik}\|_{i,k=0}^{m+n-1},\ c_{ik}=\begin{cases}1,\ k=m+n-1,\ i=0,1,...,m+n-1,\\ 0,\ otherwise,\end{cases}$$

Через $D(N)=\|d_{ij}(N)\|_{i,j=1}^{m+n-1},\ i,j=1,2,...,m+n-1$ позначимо трикутну матрицю:

$$d_{ij}(N)=\begin{cases}i\mu,\ j=i,\ i=1,2,\ldots,m,\\ m\mu,\ j=i,\ i=m+1,m+2,\ldots,m+n-1,\\ -(N\nu+\lambda_N),\ j=i-1,\ i=2,3,\ldots,m+n-1,\\ -N\nu,\ j=1,2,...,i-2,\ i=3,4,\ldots,m+n-1,\\ 0,\ otherwise.\end{cases}$$

Нам також необхідні будуть вектори:

$$\pi'^{(N)}(j)=\left(\pi_{0j}^{(N)},\pi_{1j}^{(N)},...,\pi_{m+n-1j}^{(N)}\right),$$

$$G'^{(N)}(j)=\frac{\pi'^{(N)}(j)}{\pi_{0N}^{(N)}}=\left(G_{0j}^{(N)},G_{1j}^{(N)},...,G_{m+n-1j}^{(N)}\right),$$

$\bar{1}(m+n-1)-(m+n-1)-$вимірний вектор, що складається з одиниць,

$e_i(m+n-1)-(m+n-1)-$вимірний вектор, i–та компонента якого дорівнює одиниці, а інші дорівнюють нулю. Через $\bar{1}, e_i$ будемо позначати такі ж вектори розмірності $m+n$.

Теорема. Якщо $\lambda_j>0,\ j=0,1,...,N$, то стаціонарні ймовірності $\pi_{ij}^{(N)},\ (i,j)\in S^{(N)}$ можна подати у вигляді:

$$\left(\pi_{1N}^{(N)},\pi_{2N}^{(N)},...,\pi_{m+n-1N}^{(N)}\right)'=$$

$$=\pi_{0N}^{(N)}D^{-1}(N)\left(N\nu\bar{1}(m+n-1)+\lambda_N e_1(m+n-1)\right),(1)$$

$$\pi_{m+nN}^{(N)}=\frac{\pi_{0N}^{(N)}}{m\mu}G'^{(N)}(N)\left(N\nu\bar{1}+\lambda_N e_{m+n}\right),$$

$$\pi_j'^{(N)}=\frac{\pi_{0N}^{(N)}N!\nu^{N-j}}{j!}G'^{(N)}(N)T(N-1)\times...\times T(j),(2)$$

$$\pi_{m+n\,j}^{(N)}=\frac{\pi_{0N}^{(N)}N!\nu^{N-j}}{\lambda_j j!}G'^{(N)}(N)\times$$

$$\times T(N-1)\times...\times T(j+1)\bar{1},\ j=0,1,\ldots,N-1,\quad(3)$$

де

$$\pi_{oN}^{(N)}=\left\{G'^{(N)}(N)\left(\bar{1}+N!\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\nu^{N-j}}{j!}T(N-1)\times...\times T(j+1)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left[T(j)+\frac{1}{\lambda_j}\right]\bar{1}+\frac{1}{m\mu}(N\nu\bar{1}+\lambda_N e_{m+n})\right)\right\}^{-1},\quad(4)$$

$$G^{(N)}(N)=\begin{pmatrix}1\\ D^{-1}(N)\left(N\nu\bar{1}(m+n-1)+\lambda_N e_1(m+n-1)\right)\end{pmatrix},(5)$$

$$T(j)=\left[B+\frac{m\mu}{\lambda_j}C\right]A^{-1}(j),\ j=0,1,...,N-1.$$

Доведення. Для зручності позначимо $\pi_{ij}^{(N)}=\tilde{\pi}_{ij}, G_{ij}^{(N)}=\tilde{G}_{ij}, (i,j)\in S^{(N)}$. Для кожного $k=0,1,...,m-1$ розіб'ємо $S^{(N)}$ на дві підмножини $E_k=\{(0,N),(1,N),...,(k,N)\}$ та $\bar{E}_k=S^{(N)}\setminus E_k$. В силу рівності потоків імовірностей через замкнений контур у стаціонарному режимі ([5], ст.49), будемо мати

$$\begin{cases}N\nu\tilde{\pi}_{0N}+N\nu\tilde{\pi}_{1N}+...+N\nu\tilde{\pi}_{k-1N}+(N\nu+\lambda_N)\tilde{\pi}_{kN}=\\ =(k+1)\mu\tilde{\pi}_{k+1N},\ k=0,1,...,m-1,\\ N\nu\tilde{\pi}_{0N}+N\nu\tilde{\pi}_{1N}+...+N\nu\tilde{\pi}_{k-1N}+(N\nu+\lambda_N)\tilde{\pi}_{kN}=\\ =m\mu\tilde{\pi}_{k+1N},\ k=m,m+1,...,m+n-1.\end{cases}\quad(6)$$

Для $\tilde{G}_{ij}=\frac{\tilde{\pi}_{ij}}{\tilde{\pi}_{0N}},(i,j)\in S^{(N)}$ перші $(m+n-1)$ рівняння із системи (6) мають вигляд

$$\begin{pmatrix}\tilde{G}_{1N}\\ ...\\ \tilde{G}_{m+n-1N}\end{pmatrix}=D^{-1}(N)\left(N\nu\bar{1}(m+n-1)+\lambda_N e_1(m+n-1)\right),$$

що дає нам (5). З (6) при $k=m+n-1$ знаходимо

$$\tilde{G}_{m+nN}=\frac{1}{m\mu}\tilde{G}'(N)(N\nu\bar{1}+\lambda_N e_{m+n}).\quad(7)$$

Знайдемо тепер $\tilde{G}_{m+n\,j}$ при умові, що $j=0,1,..N-1$. Розіб'ємо $S^{(N)}$ на дві підмножини $S_j^{(N)}=\{(\alpha,\beta)\in S^{(N)}:\beta\le j\}$ і $\bar{S}_j^{(N)}=S^{(N)}\setminus S_j^{(N)}$. Знову використовуючи рівність потоків імовірностей через замкнений контур, маємо

$$\lambda_j\tilde{\pi}_{m+n\,j}=(j+1)\nu\tilde{\pi}_{0\,j+1}+...+(j+1)\nu\tilde{\pi}_{m+n-1\,j+1},$$

звідки отримаємо

$$\tilde{G}_{m+n\,j}=\frac{(j+1)\nu}{\lambda_j}\tilde{G}'(j+1)\bar{1},\ j=0,1,..,N-1.\quad(8)$$

Розглянемо тепер $(m+n)\times N$ замкнених контурів, які містять одну точку (i,j) з області $\tilde{S}^{(N)}=\{0,1,\ldots,m+n-1\}\times\{0,1,\ldots N-1\}$. Відповідні рівняння для $G_{ij},\ (i,j)\in\tilde{S}^{(N)}$ мають вигляд

$$(\lambda_j+j\nu)\tilde{G}_{0j}=\mu\tilde{G}_{1j},\ i=0,\quad(9)$$

$$\begin{cases}(\lambda_j+i\mu+j\nu)\tilde{G}_{ij}=(j+1)\nu\tilde{G}_{i-1\,j+1}+\lambda_j\tilde{G}_{i-1\,j}+\\ +(i+1)\mu\tilde{G}_{i+1\,j},\ i=1,2,\ldots,m-1,\\ (\lambda_j+m\mu+j\nu)\tilde{G}_{ij}=(j+1)\nu\tilde{G}_{i-1\,j+1}+\lambda_j\tilde{G}_{i-1\,j}+\\ +m\mu\tilde{G}_{i+1\,j},\ i=m,m+1,\ldots,m+n-2.\end{cases} \quad (10)$$

При $i=m+n-1$ з урахуванням (8)

$$(\lambda_j+m\mu+j\nu)\tilde{G}_{m+n-1\,j}=(j+1)\nu\tilde{G}_{m+n-2\,j+1}+$$
$$+\lambda_j\tilde{G}_{m+n-2\,j}+\frac{(j+1)\nu m\mu}{\lambda_j}\tilde{G}'(j+1)\bar{1}. \quad (11)$$

Систему (9) - (11) можна представити в векторно-матричному вигляді

$$\tilde{G}'(j)=(j+1)\nu\tilde{G}'(j+1)\left[B+\frac{m\mu}{\lambda_j}C\right]A^{-1}(j)=$$
$$=(j+1)\nu\tilde{G}'(j+1)T(j),\ j=0,1,...,N-1. \quad (12)$$

Розв'язком рекурентного співвідношення (12) буде послідовність векторів

$$G'(j)=\frac{N!\nu^{N-j}}{j!}\tilde{G}'(N)T(N-1)\times\ldots\times T(j),$$
$$j=0,1,...,N-1. \quad (13)$$

Підставляючи праву частину (13) в (8), маємо

$$\tilde{G}_{m+n\,j}=\frac{N!\nu^{N-j}}{j!\lambda_j}\tilde{G}'(N)T(N-1)\times\ldots\times T(j+1)\bar{1},$$
$$j=0,1,...,N-1. \quad (14)$$

Умова нормування для стаціонарних імовірностей π_{ij}, $(i,j)\in S$ дозволяє знайти $\tilde{\pi}_{0N}$. Це дає формулу (4). Співвідношення (1)-(3) являються прямим наслідком (7), (13) та (14).

Теорема доведена.

Очевидно, ці формули являють собою ефективну рекурентну процедуру для обчислення стаціонарного розподілу.

Змінний характер інтенсивності вхідного потоку в моделях типу $\left[M|M|m|m+n\right]$ дає можливість ставити і розв'язувати для них оптимізаційні задачі. В зв'язку з цим розглянемо клас багатопорогових стратегій, які задаються порогами $H'=(H_1,H_2,...,H_{N-1})$,

$$0=H_0\le H_1\le\ldots\le H_{N-1}<H_N=\infty,$$

N - фіксоване число. Якщо в момент часу $t\ge 0$ число джерел повторних викликів $Q_2(t)\in[H_{i-1},H_i)$, $i=1,...,N$, то будемо казати, що система з повторними викликами функціонує в *i*-ому режимі і інтенсивність вхідного потоку дорівнює h_i. Інші параметри від режиму не залежать. Вибір порогової стратегії H означає фіксацію залежності λ_j від числа джерел повторних викликів: $\lambda_j=h_i$, $j\in[H_{i-1},H_i)$, $i=1,...,N$. Відповідний процес обслуговування і його характеристики будемо наділяти індексом H, $Q(t)=Q(t,H),...$.

Нехай $S_1(t,H)$ - число викликів, обслуговування яких завершено в системі за час t; $S_2(t,H)$ - число викликів, які отримали відмову в обслуговуванні і стали повторними викликами; $S_3(t,H)$ - число перемикань інтенсивності вхідного потоку. Якщо існують границі $\lim\limits_{t\to\infty}t^{-1}S_i(t,H)$, то будемо позначати їх через $S_i(H)$, $i=1,2,3$.

Розглянемо оптимізаційну задачу

$$W(H)=C_1S_1(H)-C_2S_2(H)-C_3S_3(H)\to\max,$$
$$0=H_0\le H_1\le\ldots\le H_{N-1}<H_N=\infty,$$
$$H_i\in\{0,1,...\},\ i=1,2,...,N-1,$$

де C_1 - прибуток, пов'язаний з обслуговуванням одного виклику; C_2 - штраф за відмову в обслуговуванні; C_3 - штраф за перемикання інтенсивності вхідного потоку.

Розв'язком даної оптимізаційної задачі є така багатопорогова стратегія H, яка максимізує середній прибуток від роботи системи.

Конкретизуємо цю задачу для випадку, коли зміна інтенсивності вхідного потоку пов'язана з пересуванням одного порогу $H_1=H$. Тоді для інтенсивності вхідного потоку маємо

$$\lambda_j=\begin{cases}h_1,\ 0\le j<H,\\ h_2,\ j\ge H.\end{cases}$$

Оскільки системи з обмеженою чергою апроксимують необмежені системи, то будемо вважати, що число повторних викликів обмежено деяким числом $N<\infty$.

В умовах існування стаціонарного режиму (умови леми) граничні функціонали $S_i(H)$, $i=1,2,3$ можуть бути виписані через стаціонарні імовірності π_{ij}, $(i,j)\in S$ наступним чином

$$S_1(H)=\sum_{j=0}^{N}\left(\sum_{i=1}^{m}i\mu\pi_{ij}(H)+\sum_{i=m+1}^{m+n}m\mu\pi_{ij}(H)\right),$$
$$S_2(H)=h_1\sum_{j=0}^{H-1}\pi_{m+n\,j}(H)+h_2\sum_{j=H}^{N}\pi_{m+n\,j}(H),$$
$$S_3(H)=h_1\pi_{m+n\,H-1}(H)+\nu H\sum_{i=0}^{m+n-1}\pi_{iH}(H).$$

Розглянемо приклад системи типу $\left[M\left|M\right|1\right|1+1\right]^{(20)}$, яка функціонує в двох режимах, вибір яких визначається порогом $H \in \{1,2,...,19\}$. Зафіксовані наступні параметри системи $h_1 = 4; h_2 = 0,5; \mu = 1; \nu = 0,1$.

Коефіцієнти якості $C_1 = 6, C_2 = 2, C_3 = 4.$

Програма, написана на основі отриманих формул, дає наступні значення цільового функціоналу:

$W(1) = 3.10832; W(2) = 3.1579; W(3) = 3.18552;$

$W(4) = 3.19712; W(5) = 3.19702; W(6) = 3.18834;$

$W(7) = 3.17337; W(8) = 3.15382; W(9) = 3.13095;$

$W(10) = 3.10571; W(11) = 3.07882; W(12) = 3.05079;$

$W(13) = 3.02192; W(14) = 2.99205; W(15) = 2.95971;$

$W(16) = 2.91864; W(17) = 2.84471; W(18) = 2.64105;$

$W(19) = 1.83259.$

Таким чином, максимум цільової функції 3.19712 досягається для порогу $H = 4$.

У статті в якості основної моделі системи $\left[M\left|M\right|m\right|m+n\right]$ розглядається двовимірний марковський процес з неперервним часом. Для нього з'ясовані умови існування стаціонарного режиму та досліджуються ймовірносні характеристики процесу. Метод дослідження базується на апроксимації вихідної системи системою з обмеженою орбітою Для ймовірносних характеристик процесу знайдені явні векторно-матричні формули для стаціонарних імовірностей. Метод знаходження стаціонарних імовірностей процесу полягає в прирівнюванні потоків імовірностей у стаціонарному режимі через замкнені контури, які обираються спеціальним чином.

Змінний характер інтенсивності вхідного потоку в моделі даного типу дозволяє поставити і розв'язати задачу оптимізації, яка полягає в максимізації загального прибутку від роботи системи у випадку, коли керування системою здійснюється за допомогою порогової стратегії. Наводиться приклад та аналізується ефективність застосування даного класу стратегії керування.

Список використаних джерел

1. *Falin G.I.* Retrial Queues / G.I. Falin, J.G.C. Templeton. – London Chapman & Hall, 1997. – 331 p.
2. *Artalejo J.R.* Retrial Queueing Systems. A Computational Approach / J.R. Artalejo, A. Gomes-Corral. – Springer-Verlag, 2008. – 318 p.
3. *Artalejo J.R.* Steady state solution of a single server queue with linear repeated request / J.R. Artalejo, A. Gomes-Corral // J. Applaid Probability. – 1997. – Vol.34. – P. 223-233.
4. *Лебєдєв Є.О.* Про системи з повторними викликами та керованим вхідним потоком / Є.О. Лебєдєв, І.Я. Усар // Доповіді національної академії наук України. – 2009. - №5. – С. 52-59.
5. *Уолрэнд Дж.* Введение в теорию массового обслуживания / Дж. Уолрэнд. – Москва: Мир, 1993. – 336 с.

References

1. FALIN, G.I., TEMPLETON, J.G.C. (1997) *Retrial Queues*, London Chapman & Hall.
2. ARTALEJO, J.R., GOMES-CORRAL, A. (2008) *Retrial Queueing Systems. A Computational Approach*, Springer-Verlag.
3. ARTALEJO, J.R., GOMES-CORRAL, A. (1997) "Steady state solution of a single server queue with linear repeated request", *J. Applied Probability*, vol.34, pp. 223-233.
4. LEBEDEV, E.O., USAR, I.Y., (2009) "About of retrial queueing systems and controlled of input flow". *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*. vol.5, pp. 52-59.
5. WALRAND, J. (1993) *An Introduction to queueing systems*, Moscow.

Надійшла до редколегії 26.11.2020