

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

№1-2 2020

**Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
випуск №1-2, 2020,**

Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Фізика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, механіко-математичного факультетів, факультету радіофізики, електроніки та комп’ютерних систем і факультету комп’ютерних наук та кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1222 від 07.10.2016), та реферується в Реферативному журналі, Zentralblatt MATH.

Редакційна колегія:

Козаченко Юрій Васильович, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор;**

Розора Ірина Василівна, к.ф.-м.н., доц., **зам. головного редактора;**

Bartlova Milada, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;

Bavula Vladimir, Prof., University of Sheffield, Great Britain;

Beghin Luisa, Prof., Sapienza Università di Roma, Italy;

Futorny Vyacheslav, Prof., Universidade de São Paulo, Brazil;

Giuliano Rita, Prof., Università di Pisa, Italy;

Gorlatch Sergei, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;

Hudak Stefan, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;

Kukhtarev Nickolai, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;

Leonenko Nikolay, Prof., Cardiff University, Great Britain;

Medvids Arturs, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;

Olenko Andriy, Prof., La Trobe University, Australia;

Orsingher Enzo, Prof., Sapienza University of Rome, Italy;

Ostrovsky Eugene, Prof., Bar-Ilan University, Israel;

Pogany Tibor, Prof., University of Rijeka, Croatia;

Rontó Miklós, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;

Silvestrov Dmitrii, Prof., Stockholms universitet, Sweden;

Sottinen Tommi, Prof., University of Vaasa, Finland;

Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;

Trofimchuk Sergey, Prof., Universidad de Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;

Volodin Andrei, Prof., University of Regina, Canada;

Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;

Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;

Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;

Безущак Оксана Омелянівна, к.ф.-м.н., доцент;

Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;

Гарашенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;

Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;

Жук Ярослав Олександрович, д.ф.-м.н., проф.;

Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., проф.;

Курченко Олександр Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;

Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;

Львов Віктор Анатолійович, д.ф.-м.н., проф.;

Макара Володимир Арсенійович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;

Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;

Майборода Ростислав Євгенович, д.ф.-м.н., проф.;

Мішура Юлія Степанівна, д.ф.-м.н., проф. і Степанівна, д.ф.-м.н., проф.;

Моклячук Михайло Павлович, д.ф.-м.н., проф.;

Пашко Анатолій Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;

Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;

Петравчук Анатолій Петрович, д.ф.-м.н., проф.;

Погорілий Сергій Дем’янович, д.т.н., проф.;

Савенков Сергій Миколайович, д.ф.-м.н., доц.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.;
Сливка-Тилищак Ганна Іванівна, д.ф.-м.н., проф.;
Хусаїнов Денис Ях'євич, д.ф.-м.н., проф.;

Редакційний відділ:

Затула Дмитро Васильович, **відповідальний секретар**;
Безущак Оксана Омелянівна, bezusch@univ.kiev.ua;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
П'ятецька Олена Василівна, visnyk.phys-math@ukr.net;
Отто Георгій Костянтинович, **технічний редактор**, ottogk@gmail.com.

Адреса редакційної колегії:

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49
fm.visnyk@ukr.net
ISBN 978-966-2142
ISSN 1812-5409

Засновник: Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Свідоцтво про державну реєстрацію: КВ №16299-4771Р від 11.12.2009 року

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/1-2>

Безкоштовно

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Голомозий В., Шаріпов С. Про центральні граничні теореми для гіллястих процесів із залежною міграцією	7
Гопкало О.М., Сахно Л.М., Василик О.І. Властивості ϕ -субгауссових випадкових процесів, пов'язаних із рівнянням теплопровідності з випадковими початковими умовами	17
Затула Д. В. Оцінки розподілу напівнорм Гельдера від дійсних стаціонарних гауссових процесів зі стійкою кореляційною функцією	25
Зубченко В.П., Костюк Є.О., Лукашук М.О., Ярошевський А.М., Класифікація зміни рейтингу фінансових показників страхових компаній	31
Колле О.Д., Ямненко Р.Є. Альтернативна оцінка ймовірності виходу за криву траєкторії субгауссового випадкового процесу	37
Пономарчук Б.С. Метрична розмірність прямої суми та прямого добутків метричних просторів	41

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Брауде Я.І., Кізілова Н. М. Дослідження періодичної вісесиметричної течії в'язкопружної рідини по циліндричній трубці	49
Валеева І. К. Адгезійний контакт пружних тіл зі стохастичною шершавістю	53
Вашіліна О. В., Лебедева І.В. Деякі особливості руху елементів бурильних установок	57
Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Визначення частот і форм вільних коливань п'ятикутних пластин методом скінченних елементів	61
Кізілова Н. М., Майко І.В. Узагальнення задачі Лайтхілла на випадок заповнених в'язкою рідиною трубок з ускладненою реологією стінки	67
Печук Є. Д., Краснопольська Т. С., Рудницька М. О. Хвильові характеристики кардіореспіраторної системи при підвищенні пульсу	71
Тетерук І.С. Двовимірні узагальнені моментні зображення та апроксиманти типу Паде функції двох змінних	75

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Розора І.В., Переяслов О.С. Розробка програмного забезпечення для моделювання випадкових процесів із заданою точністю та надійністю	83
Пашко А.О., Тесленко О.В. Огляд основних підходів до визначення активності водія з камер встановлених в автомобілі	89

РАДІОФІЗИКА

Ніконова В.В., Обуховський В.В. Знаходження та аналіз парціальних коефіцієнтів взаємодифузії для бінарних розчинів з хлороформом на основі комплексно-асоціативної моделі	97
---	----

CONTENTS

ALGEBRA, GEOMETRY AND PROBABILITY THEORY

Golomoziy V., Sharipov S. On central limit theorems for branching processes with dependent immigration	7
Hopkalo O.M., Sakhno L.M., Vasylyk O.I. Properties of φ -sub-Gaussian stochastic processes related to the heat equation with random initial conditions	17
Zatula D. V. Estimates for the distribution of Hölder semi-norms of real stationary Gaussian processes with a stable correlation function	25
Zubchenko V.P., Kostiuk Ye.O., Lukashchuk M.O., Yaroshevskyi A.M. Rating change classification of insurance companies indicators	31
Kollie O.D., Yamnenko R.E. Alternative estimate of curve exceeding probability of sub-Gaussian random process	37
Ponomarchuk B.S. Metric dimension of a direct sum and direct product of metric spaces	41

DIFFERENTIAL EQUATIONS, MATHEMATICAL PHYSICS AND MECHANICS

Braude J.I., Kizilova N. M. Investigation of the periodic axisymmetric flow of a viscoelastic fluid through a cylindrical tube	49
Valeeva I. K. Adhesive contact of elastic solids with stochastic roughness	53
Vashchilina O. V., Lebedyeva I. V. Some peculiarities of the drilling rigs elements movement	57
Grigorenko A.Ya, Borysenko M.Yu., Boychuk O.V. Determination of the frequencies and forms of free vibrations of pentagonal plates by the finite-element method	61
Kizilova N. M. , Maiko I.V. Generalization of the Lighthill problem for the viscous fluid filled tubes with complicated wall rheology	67
Pechuk E. D., Krasnopolskaya T. S., Rudnytska M. O. Wave characteristics of the cardiorespiratory system under increasing of a heart rate	71
Teteruk I.S. Two-dimensional generalized instantaneous images and approximations of the Pade type function of two variables	75

COMPUTER SCIENCES AND INFORMATICS

Rozora I.V., Pereiaslov O.S. The development of software for simulation of random processes with a given accuracy and reliability	83
Paschko A. O., Teslenko O. V., A survey of driver activity recognition from cameras installed in a car	89

RADIOPHYSICS

Nikonova V.V., Obukhovskiy V.V. Finding and analysis of the partial mutual diffusion coefficients for binary solutions with chloroform using the complex-associative model	97
--	----

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ ТА ТЕОРИЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/1-2.1>

В. Голомозий¹, кандидат наук, доцент
С. Шаріпов², аспірант

Про центральні граничні теореми для гіллястих процесів із залежною міграцією

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська 64.

²Інститут Математики імені В.І. Романовського АН РУз, вул. Мирзо-Улугбека 81, 100170 Ташкент, Узбекистан.

V. Golomoziy¹, Ph.D., Associate Professor
S. Sharipov², Post-graduate

On central limit theorems for branching processes with dependent immigration

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.

²V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Academy of Sciences of Uzbekistan, Mirzo Ulughbek str.81, 100170 Tashkent, Uzbekistan.

У даній роботі ми розглядаємо субкритичні та суперкритичні гіллясті процеси з імміграцією, що залежить від покоління частинок. У роботі доведено центральні граничні теореми для флуктуацій гіллястого процесу з m -залежною імміграцією у випадку коли середні значення іммігруючих частинок прямують до нескінченності. Встановлено слабку збіжність флуктуацій суперкритичного процесу до стандартного нормального розподілу за припущення регулярної зміни на нескінченності середнього та дисперсії імміграційного процесу, та слабку збіжність флуктуацій субкритичного процесу до стандартного нормального розподілу без такого припущення.

Ключові слова: Гіллясті процеси, імміграція, m -залежність.

In this paper we consider subcritical and supercritical discrete time branching processes with generation dependent immigration. We prove central limit theorems for fluctuation of branching processes with immigration when the mean of immigrating individuals tends to infinity with the generation number and immigration process is m -dependent. The first result states on weak convergence of the fluctuation subcritical branching processes with m -dependent immigration to standard normal distribution. In this case, we do not assume that the mean and variance of immigration process are regularly varying at infinity. In contrast, in Theorem 3.2, we suppose that the mean and variance are to be regularly varying at infinity. The proofs are based on direct analytic method of probability theory.

Key Words: Branching process, immigration, m -dependence

Communicated by Prof. Moklyachuk M.P.

1 Introduction

Let $\{Y_{k,i}, k \geq 1, i \geq 1\}$ and $\{\varepsilon_k, k \geq 1\}$ be two sequence of non-negative integer-valued random variables such that the two families $\{Y_{k,i}, k \geq 1, i \geq 1\}$ and $\{\varepsilon_k, k \geq 1\}$ are independent, $\{Y_{k,i}, k \geq 1, i \geq 1\}$ are independent and identically distributed (i.i.d.). We consider branching processes with immigration $\{W(k), k \geq 0\}$ defined recursively as

$$W(0) = 0, \quad W(k) = \sum_{i=1}^{W(k-1)} Y_{k,i} + \varepsilon_k, \quad k \geq 1. \quad (1)$$

We can interpret $Y_{k,i}$ as the number of offsprings produced by the i -th individual belonging to

the $(k-1)$ -th generation and ε_k is the number of immigrants in the k -th generation. In this interpretation $W(k)$ is the number of individuals in the k -th generation. Assume that $a = \mathbb{E}Y_{1,1} < \infty$. Process $W(k)$ is called subcritical, critical or supercritical depending on $a < 1$, $a = 1$ or $a > 1$, respectively.

The asymptotic behavior the distribution of $W(n)$ as $n \rightarrow \infty$ has been studied by many authors, see, e.g., the survey of Vatutin and Zubkov [45]. Early contribution is due to Sevast'yanov [42], who derived limit theorems for continuous-time Markov branching processes when immigration $\{\varepsilon_n, n \geq 1\}$ is an independent and distributed by Poisson law. Then many

research works appeared in which various generalizations of the immigration process were considered. For instance, when the sequence $\{\varepsilon_n, n \geq 1\}$ is i.i.d. the asymptotic behavior of $W(n)$ is well studied (see [10], [40], [41], [12], [30] and references therein). In the critical case, Nagaev [29] considered a wide-sense stationary immigration process $\{\varepsilon_n, n \geq 1\}$, and proved weak convergence of distribution of $n^{-1}W(n)$ as $n \rightarrow \infty$ to a gamma distribution. Asadullin and Nagaev [1] managed to weaken conditions of [29] up to the condition "type of ergodicity". More precisely, they studied weak convergence of $n^{-1}W(n)$ under more general situation that there exists a random variable ε , such that $n^{-1}E \left| \sum_{k=1}^n (\varepsilon_k - \varepsilon) \right| \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. Badalbaev and Zubkov [5] for the sequence of special random processes (including branching processes with immigration) proved a limit theorem which contains results of [29] and [1] as a special case. Concerning functional limit theorems for (1), we refer to Wei and Winnicki [46], Sriram [43], Li [25], [24], Ispány et al. [14], [15], Khusanbaev [19], [21], Iksanov and Kabluchko [13] and see references therein. We refer to papers [18], [20], [39] where the rates of convergence in central limit theorem for (1) were studied.

While most of previous literature was concerned with stationary immigration, the non-stationary (time-dependent or state-dependent) immigration case were studied by Foster and Williamson [7] and by Pakes [32]. In this class of processes, unlike in classical models, immigration rate may depend on time of immigration. For further investigations for branching processes with non-stationary immigration we refer to Pakes [31], Hering [11], Badalbaev and Rahimov [4], Mitov and Yanev [26]-[28] (see also [2], [3]). Rahimov [33]-[34] studied the case when immigration process is non-stationary and increasing and obtained for all cases central limit theorems (CLT's) for fluctuation of (1). A key reference is a monograph by Rahimov [35], where one can find a variety of results and references related to this process. Later, Rahimov [36] proved functional limit theorems for a fluctuation of critical process defined by (1). For deterministic approximation for $W(n)$, we refer to Rahimov [37], Khusanbaev [16]-[17] and see references therein.

However, in all of previous works, the immigration process was assumed to be independent.

Guo and Zhang [9] proved a functional limit theorem for fluctuations of the critical branching process (1) under the condition of m -dependent immigration. Recently, Khusanbaev et al. [22]-[23] obtained functional limit theorems for fluctuation of (1) when immigration process satisfies ϕ -mixing condition. The results of above cited papers showed that the limit behavior of fluctuations of process (1) clearly depends on the rate of convergence to infinity of the mean number of immigrants.

The purpose of this paper is to establish CLTs for fluctuations of subcritical and supercritical process $W(n)$ defined by (1) in the case when the immigration process is m -dependent and the mean of immigrants tends to infinity.

The paper is organized as follows. In Section 2, we provide basic facts and definitions. Section 3 contains main results and their proofs.

2 Notations and definitions

We begin by introducing basic facts. First, let us recall the notation of m -dependence.

Означення 2.1. It is said that a sequence of random variables $\{X_n, n \geq 1\}$ satisfies the m -dependence condition for some $m \geq 0$ if the random vectors $(X_1, \dots, X_k)$ and $(X_{k+m+1}, \dots)$ are independent for all $k \geq 1$ (see [6]).

Throughout the paper, we will assume that the immigration process is heterogeneous, i.e., random variables $\{\varepsilon_k, k \geq 1\}$ are non-identically distributed and m -dependent, and the particles entering the population act independently of the other particles and according to the same law as particles of the population. We denote by $Z_i^j(k)$, $k = i, i+1, \dots, 1 \leq j \leq \varepsilon_i$, the branching Galton-Watson process generated by j -th particles arriving at the moment i with $Z_i^j(i) = 1$. According to our assumptions branching processes $Z_i^j(k)$, $k \geq i$; $i, j \geq 1$ are independent and $Z_i^j(k+i)$, $k = 0, 1, \dots$ has the same distribution as $Z_1^1(k)$, $k = 1, 2, \dots$.

From now on, we assume that

$$b^2 := \text{Var}(Y_{1,1}) < \infty,$$

$$\gamma := \mathbb{E}Y_{1,1} (Y_{1,1} - 1) (Y_{1,1} - 2) < \infty.$$

We also assume that $\alpha(n) = \mathbb{E}\varepsilon_n < \infty$ and $\beta(n) = \text{Var}(\varepsilon_n) < \infty$ for all $n \in \mathbb{N}$.

Означення 2.2 ([8]). A measurable function $l : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ is slowly varying if for all $\lambda > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{l(\lambda x)}{l(x)} = 1.$$

Означення 2.3 ([8]). A measurable function $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ is called regularly varying at infinity if it can be represented in the form

$$f(x) = x^\rho l(x),$$

where ρ is called index of regular variation and $\rho \in (-\infty, \infty)$ and $l_\rho(x)$ is a slowly varying function.

Означення 2.4 ([8]). A sequence of positive numbers $\{x(n), n \geq 1\}$ is called a regularly varying sequence of index ρ if there is a sequence of positive terms $\{y(n), n \geq 1\}$ satisfying as $n \rightarrow \infty$

$$x(n) \sim Cy(n), \quad n(1 - (y(n-1)/y(n))) \rightarrow \rho < \infty.$$

If a sequence $\{x(n), n \geq 1\}$ is regularly varying with index ρ , we will write $\{x(n), n \geq 1\} \in R_\rho$.

Under the above assumptions $A(a, n) = \mathbb{E}W(n)$ and $B^2(a, n) = \text{Var}(W(n))$ are finite for all $n \geq 1$. Denote

$$f_k(t) = \mathbb{E}e^{itZ_1^{(k)}}, \quad \Psi_k(t) = \mathbb{E}e^{itW^{(k)}}, \quad k \geq 1.$$

Denote by $\Phi(x)$ distribution function of the standard normal law. In this paper, $a_n \sim b_n$ denotes $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ and $a_n = o(b_n)$ denotes

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, $a \wedge b = \min(a, b)$ and $\xrightarrow{P}$ denotes the convergence of random variables in probability. C denotes a generic constant which may be different from place to place.

3 Main results and their proofs

Now we are ready to formulate our main results. We begin with a simple Lemma which provides formulas for $A(a, n)$ and $B^2(a, n)$ when immigration processes are dependent.

Lemma 1. Let $W(n), n \geq 0$ be a branching processes with immigration given in (1). Then, for all $n \geq 1$,

$$A(a, n) = \sum_{i=1}^n a^{n-i} \alpha(i),$$

$$B^2(a, n) = \Delta^2(a, n) + \sigma^2(a, n) + 2\omega(a, n), \quad (2)$$

where

$$\Delta^2(a, n) = \frac{b^2}{1-a} \sum_{i=1}^n a^{n-i-1} (1-a^{n-i}) \alpha(i), \quad a \neq 1,$$

$$\sigma^2(a, n) = \sum_{i=1}^n a^{2(n-i)} \beta(i),$$

$$\omega(a, n) = \sum_{i=2}^n \sum_{k=1}^{i-1} a^{2n-i-k} \text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_k).$$

Доведення. By (1) and recurrence, for all $n \geq 1$,

$$A(a, n) = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{W(n-1)} Y_{n,i} \right] + \mathbb{E}\varepsilon_n =$$

$$= a\mathbb{E}W(n-1) + \alpha(n) = \dots = \sum_{i=1}^n a^{n-i} \alpha(i),$$

$$B^2(a, n) = \mathbb{E}W(n-1)\text{Var}(Y_{2,1}) +$$

$$+ \text{Var}(W(n-1))(\mathbb{E}(Y_{2,1}))^2 + 2 \text{cov} \left(\sum_{i=1}^{W(n-1)} Y_{n,i}, \varepsilon_n \right)$$

$$= b^2 A(n-1) + a^2 \text{Var}(W(n-1)) +$$

$$+ \beta(n) + 2 \text{cov} \left(\sum_{i=1}^{W(n-1)} Y_{n,i}, \varepsilon_n \right).$$

Note that

$$\text{cov} \left(\sum_{i=1}^{W(n-1)} Y_{n,i}, \varepsilon_n \right) =$$

$$= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^{W(n-1)} Y_{n,i} - \mathbb{E} \sum_{i=1}^{W(n-1)} Y_{n,i} \right) (\varepsilon_n - \mathbb{E}\varepsilon_n) \right]$$

$$= \mathbb{E}[(aW(n-1) - a\mathbb{E}W(n-1))(\varepsilon_n - \mathbb{E}\varepsilon_n)] =$$

$$= a \text{cov}(W(n-1), \varepsilon_n) =$$

$$= a\mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^{W(n-2)} Y_{n-1,i} + \varepsilon_{n-1} - a\mathbb{E}W(n-2) - \mathbb{E}\varepsilon_{n-1} \right) (\varepsilon_n - \mathbb{E}\varepsilon_n) \right]$$

Therefore

$$= a \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^{W(n-2)} Y_{n-1,i} - a \mathbb{E} W(n-2) + \varepsilon_{n-1} - \mathbb{E} \varepsilon_{n-1} \right) \left(\varepsilon_n - \mathbb{E} \varepsilon_n \right) \right] = e^{-it \frac{A(a,n)}{B(a,n)}} \mathbb{E} \prod_{k=1}^n f_{n-k}^{\varepsilon_k} \left(\frac{t}{B(a,n)} \right).$$

$$= a^2 \text{cov}(W(n-2), \varepsilon_n) + a \text{cov}(\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n) =$$

$$\dots = \sum_{j=1}^{n-1} a^{n-j} \text{cov}(\varepsilon_j, \varepsilon_n).$$

By iteration, we get (2). The Lemma 1 is proved. $\square$

First result deals with CLT for a fluctuation of subcritical branching process (1) with m -dependent and increasing immigration.

Theorem 3.1. *Let $a < 1$, $\gamma < \infty$ and the immigration process $\{\varepsilon_n, n \geq 1\}$ is m -dependent. Suppose $\alpha(n) \in R_\alpha$ and $\beta(n) \in R_\beta$ with $\alpha, \beta \geq 0$. If $\alpha(n) \rightarrow \infty$ and $\beta(n) = o(\alpha(n))$ as $n \rightarrow \infty$, then, as $n \rightarrow \infty$*

$$\mathbb{P} \left(\frac{W(n) - A(a,n)}{B(a,n)} < x \right) \rightarrow \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Доведення. First of all, we note that the process $W(k)$ can be represented as

$$W(k) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\varepsilon_i} Z_i^j(k), \quad k \geq 1. \quad (3)$$

By (3), in view of the independence of random variables $Z_i^j(k)$, it follows

$$\Psi_n(t) = \mathbb{E} \prod_{k=1}^n f_{n-k}^{\varepsilon_k}(t).$$

Indeed, $Z_i^j(k)$ are independent of $\varepsilon_n, n \geq 1$, since by assumption two sequences $\{Y_{k,i}, k \geq 1, i \geq 1\}$ and $\{\varepsilon_n, n \geq 1\}$ are independent, obtain

$$\Psi_n(t) = \mathbb{E} \exp(itW(n)) = \mathbb{E} \exp(it \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\varepsilon_i} Z_i^j(n))$$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E} [\mathbb{E} [\prod_{i=1}^n \exp(it \sum_{j=1}^{\varepsilon_i} Z_i^j(n)) | \sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)]] = \\ &= \mathbb{E} [\prod_{i=1}^n [\mathbb{E} (it Z_1^1(n))]^{\varepsilon_i}]. \end{aligned}$$

Since $\mathbb{E}[Z_1^1(k)]^3 < \infty$ then the Taylor series expansion is valid for the characteristic function $f_k(t)$

$$f_k(t) = 1 + it \mathbb{E} Z_1^1(k) -$$

$$- \frac{t^2}{2} \mathbb{E} [Z_1^1(k)]^2 + \theta_k \frac{it^3}{6} \mathbb{E} [Z_1^1(k)]^3,$$

where $|\theta_k| \leq 1, k \geq 1$.

It is well-known (see [3])

$$\mathbb{E} Z_1^1(k) = a^k,$$

$$\mathbb{E} [Z_1^1(k)]^2 = \frac{a^{k-1} (a^{k-1} - 1)}{a - 1} b^2 + a^{2k},$$

$$\mathbb{E} [Z_1^1(k)]^3 = \frac{a^{k-1} (a^{2k} - 1)}{a^2 - 1} \gamma +$$

$$+ \frac{3a^{k-1} (a^k - 1) (a^{k-1} - 1)}{(a - 1) (a^2 - 1)} (b^2 + a^2 - a)^2 +$$

$$+ \frac{3a^{k-1} (a^k - 1)}{a - 1} (b^2 + a^2 - a) + a^k. \quad (4)$$

Now using the expansion $\ln x = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + O((x - 1)^3)$, $x \rightarrow 1$ and (4), taking into account that $O((f_{n-k}(t) - 1)^3) = O(|t|^3)$, $t \rightarrow 0$, we get

$$\begin{aligned} \ln \left[e^{-it \frac{A(a,n)}{B(a,n)}} \prod_{k=1}^n f_{n-k}^{\varepsilon_k} \left(\frac{t}{B(a,n)} \right) \right] = \\ = iI_1(n) + I_2(n) + O(I_3(n)) \end{aligned} \quad (5)$$

where

$$I_1(n) = \frac{it}{B(a,n)} \sum_{k=1}^n a^{n-k} (\varepsilon_k - \alpha(k)),$$

$$I_2(n) = \frac{t^2}{2B^2(a,n)} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \frac{a^{n-k} (a^{n-k} - 1)}{a(a - 1)} b^2,$$

$$I_3(n) = \frac{t^3}{B^3(a, n)} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \left\{ \frac{a^{k-1}(a^{2k}-1)}{a^2-1} \gamma + \right. \\ \left. + \frac{3a^{k-1}(a^k-1)(a^{k-1}-1)}{(a-1)(a^2-1)} (b^2 + a^2 - a)^2 + \right. \\ \left. + \frac{3a^{k-1}(a^k-1)}{a-1} (b^2 + a^2 - a) + a^k \right\} + \\ + \frac{|t|^3}{B^3(a, n)} \sum_{k=1}^n a^{3(n-k)} \alpha(k).$$

Note that the equality in (5) is understood in almost surely sense. From [38], Lemma 3.2 we know that if $a < 1$, $b^2 > 0$ and $\alpha(n) \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ then, as $n \rightarrow \infty$

$$(i) \quad A(a, n) \sim \frac{\alpha(n)}{1-a}, \quad (ii) \quad \sigma^2(a, n) \sim \frac{\beta(n)}{1-a^2}, \\ (iii) \quad \Delta^2(a, n) \sim \frac{b^2 \alpha(n)}{(1-a^2)(1-a)}. \quad (6)$$

Thus from assumptions of Theorem 3.1 and (6) it entails that dominated term of $B^2(a, n)$ is $\Delta^2(a, n)$, i.e.,

$$B^2(a, n) \sim \Delta^2(a, n) \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

We treat each term of right hand side of (5) separately. First we consider $I_1(n)$. By Cauchy-Bunyakovsky inequality, the inequality $2xy \leq x^2 + y^2$ and (6) and also using the properties of regularly varying functions at infinity, we obtain

$$\mathbb{E}[I_1(n)]^2 = \frac{t^2}{B^2(a, n)} \sum_{k=1}^n a^{2(n-k)} \beta(k) + \\ + \frac{2t^2}{B^2(a, n)} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{(k+m-1) \wedge n} a^{2n-j-k} \text{cov}(\varepsilon_k, \varepsilon_j) \leq \\ \leq \frac{t^2 \beta(n)}{B^2(a, n)} \sum_{k=1}^n a^{2(n-k)} + \\ + \frac{2t^2}{B^2(a, n)} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{(k+m-1) \wedge n} a^{2n-j-k} \sqrt{\beta(j)} \sqrt{\beta(k)} \leq \\ \leq \frac{t^2 \beta(n)}{B^2(a, n)} \frac{a^{2n}-1}{a^2-1} +$$

$$+ \frac{t^2}{B^2(a, n)} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{(k+m-1) \wedge n} a^{2n-j-k} (\beta(j) + \beta(k)) \leq \\ \leq \frac{t^2 \beta(n)}{B^2(a, n)} \frac{a^{2n}-1}{a^2-1} + \\ + \frac{t^2}{B^2(a, n)} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{(k+m-1) \wedge n} a^{2n-j-k} \beta(k) + \\ + \frac{t^2}{B^2(a, n)} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{(k+m-1) \wedge n} a^{2n-j-k} \beta(j) \leq \\ \leq \frac{t^2 \beta(n)}{B^2(a, n)} \frac{a^{2n}-1}{a^2-1} + \\ + \frac{t^2}{B^2(a, n)} \beta(n) (m-1) \sum_{k=1}^n a^{2(n-k)} + \\ + \frac{t^2}{B^2(a, n)} \beta(n) (m-1) \sum_{k=1}^n a^{2(n-k)} \sim \\ \sim \frac{Ct^2(2m-1)}{\Delta^2(a, n)} \beta(n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Hence, by Chebyshev's inequality, we have

$$I_1(n) \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Now we consider $I_2(n)$. From (6)-(7), it follows

$$\mathbb{E}I_2(n) = -\frac{t^2}{2B^2(a, n)} \Delta^2(a, n) \rightarrow -\frac{t^2}{2}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (9)$$

By the Cauchy-Bunyakovsky inequality and taking into account the properties of regularly varying functions, we find

$$\text{Var}I_2(n) \leq \\ \leq \frac{t^4 \beta(n)}{4B^4(a, n)} \left[\sum_{k=1}^n \frac{a^{2(n-k)} (a^{n-k}-1)^2}{a^2(a-1)^2} b^4 + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{(k+m-1) \wedge n} \frac{a^{2n-2j} (a^{n-j}-1)^2}{a^2(a-1)^2} \sqrt{\beta(j)} \sqrt{\beta(k)} \right] \\ \leq \frac{t^4}{4B^4(a, n)} [C\beta(n) (a^{4n}-1) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{(k+m-1) \wedge n} \frac{a^{2n-2j} (a^{n-j} - 1)^2}{a^2 (a-1)^2} (\beta(j) + \beta(k)) \Bigg] \\
 & \leq \frac{(2m-1) \beta(n) b^4 t^4}{4a^2 (a-1)^2 B^4(a, n)} \frac{a^{4n} - 1}{a^4 - 1} \\
 & \leq \frac{C(2m-1) t^4}{B^4(a, n)} \beta(n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

Hence, from the last relation and by (9) and virtue of the Chebyshev inequality, we get

$$I_2(n) \xrightarrow{P} -\frac{t^2}{2}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Further, taking into account the conditions of the Theorem 3.1, we obtain as $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} |I_3(n)| \leq \\
 & \leq \frac{|t|^3}{B^3(a, n)} \left[\gamma \sum_{k=1}^n a^{n-k} (a^{2(n-k)} - 1) \alpha(k) + \right. \\
 & \left. + \sum_{k=1}^n a^{n-k} (a^{n-k} - 1) (a^{n-k-1} - 1) \alpha(k) + \right] \\
 & + \frac{(b^2 + a^2 - a) |t|^3}{2a(a-1) B^3(a, n)} \sum_{k=1}^n a^{n-k} (a^{n-k} - 1) \alpha(k) + \\
 & + \frac{|t|^3}{6B^3(a, n)} \sum_{k=1}^n a^{n-k} \alpha(k) + \\
 & + \frac{|t|^3}{B^3(a, n)} \sum_{k=1}^n a^{3(n-k)} \alpha(k) \sim \\
 & \sim C \frac{|t|^3}{B^3(a, n)} \alpha(n) + C \frac{|t|^3}{B^3(a, n)} \alpha(n) + \\
 & + \frac{|t|^3}{B^3(a, n)} + \frac{C|t|^3}{6B^3(a, n)} \alpha(n) + \frac{C|t|^3}{B^3(a, n)} \alpha(n) \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Consequently, by Markov inequality

$$I_3(n) \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Thus, combining relations (8)-(11), we obtain

$$\ln \left[e^{-it \frac{A(a, n)}{B(a, n)}} \prod_{k=1}^n f_{n-k}^{\varepsilon_k} \left(\frac{t}{B(a, n)} \right) \right] \xrightarrow{P} -\frac{t^2}{2}$$

as $n \rightarrow \infty$. Hence, according to the Lebesgue's majorized convergence theorem (see [44], Theorem 3, Chapter 2, p.234 and Remark, p.330), we may deduce

$$e^{-it \frac{A(a, n)}{B(a, n)}} \Psi_n \left(\frac{t}{B(a, n)} \right) \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad n \rightarrow \infty,$$

which finishes the proof of Theorem 3.1. $\square$

The next result provides conditions for validity of CLT for supercritical branching processes $W(n)$. Note that in this case the immigration mean and variance is not assumed to be a regularly varying at infinity.

Theorem 3.2. Assume $a > 1, \gamma < \infty$ and let $\{\varepsilon_n, n \geq 1\}$ be a sequence of m -dependent random variables. If $\chi(a, n) := \sum_{k=1}^n a^{-2k} \alpha(k) \rightarrow \infty$ and $\beta(n) = o(\chi(a, n))$ as $n \rightarrow \infty$ then as $n \rightarrow \infty$

$$\mathbb{P} \left(\frac{W(n) - A(a, n)}{B(a, n)} < x \right) \rightarrow \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Remark 1. Note that the condition $\chi(a, n) \rightarrow \infty$ holds if $\liminf \frac{\alpha(n+1)}{\alpha(n)} \geq a^2$. This means that immigration mean tends to infinity fast enough. Clearly, if $\alpha(n) \in R_\alpha$ then $\chi(a, n)$ does not converge to infinity.

Доведення. The proof of Theorem 3.2 follows the lines of Theorem 3.1. Again we use the relation (5), and we have to evaluate each term involved in the right-hand side of (5). Before we start, it should be pointed out the asymptotic behavior of $B^2(a, n)$ as $n \rightarrow \infty$. Observe that under conditions of Theorem 2, we have as $n \rightarrow \infty$,

$$B^2(a, n) \sim \Delta^2(a, n) \sim C a^{2n} \chi(a, n). \quad (12)$$

It is obvious $\mathbb{E}[I_1(n)] = 0$. By the same argument as in proof of relation (8), we have

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[I_1(n)]^2 & \leq \frac{t^2}{B^2(a, n)} \sum_{k=1}^n a^{2(n-k)} \beta(k) + \\
 & + \frac{2t^2}{B^2(a, n)} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{(k+m-1) \wedge n} a^{2n-j-k} \sqrt{\beta(k)} \sqrt{\beta(j)} \leq
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq C \frac{a^{2n} t^2}{B^2(a, n)} \max_{1 \leq k \leq n} \beta(k) + \\ &+ \frac{a^{2n} (m-1) t^2}{B^2(a, n)} \max_{1 \leq k \leq n} \beta(k) \sum_{k=1}^n a^{-2k} + \\ &+ \frac{a^{2n} (m-1) t^2}{B^2(a, n)} \sum_{k=1}^n a^{-2k} \beta(k) \sim \\ &\sim C m \frac{t^2}{\chi(a, n)} \max_{1 \leq k \leq n} \beta(k) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Hence, we may claim that

$$I_1(n) \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Let us consider $I_2(n)$. From (12) it follows that

$$\mathbb{E} I_2(n) = -\frac{t^2}{2B^2(a, n)} \Delta^2(a, n) \rightarrow -\frac{t^2}{2} \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

Now we estimate the variance of $I_2(n)$. Observe that

$$\begin{aligned} &\text{Var} I_2(n) \leq \\ &\leq \frac{(2m-1)t^4}{4B^4(a, n)} \sum_{k=1}^n \beta(k) \frac{a^{2(n-k)}(a^{n-k}-1)^2}{a^2(a-1)^2} b^4 \sim \end{aligned}$$

$$\sim \frac{C(2m-1)b^4 t^4}{4(a^{2n}\chi(a, n))^2} a^{4n} \max_{1 \leq k \leq n} \beta(k) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Thus, by Chebyshev's inequality

$$I_2(n) \xrightarrow{P} -\frac{t^2}{2}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Concerning $I_3(n)$, we proceed with the same arguments which were made in (11) and we get

$$\mathbb{E} |I_3(n)| \leq C \frac{\theta |t|^3 \alpha(n)}{\chi(a, n) \sqrt{\chi(a, n)}} +$$

$$+ \frac{C |t|^3 \alpha(n)}{\chi(a, n) \sqrt{\chi(a, n)}} + \frac{C |t|^3 \alpha(n)}{\chi(a, n) \sqrt{a^{2n} \chi(a, n)}} +$$

$$+ \frac{C |t|^3}{a^n \sqrt{a^{2n} \chi(a, n)}} + \frac{|t|^3 \alpha(n)}{\chi(a, n) \sqrt{\chi(a, n)}} \rightarrow 0 \quad (15)$$

as $n \rightarrow \infty$. Collecting relations (13)-(15), we obtain the statement of Theorem 3.2. Theorem 3.2 is completely proved. $\square$

References

1. Asadullin, M.Kh. and Nagaev, S.V. (1982) Limit theorems for critical branching processes with immigration, *Math Notes*, Vol. 32, pp. 537-548.
2. Asmussen, S. and Hering, H. (1983) "Branching processes", *Birkhauser*, Boston.
3. Athreya, K.B. and Ney, P.E. (1972) "Branching processes", *Springer-Verlag*, New York.
4. Badalbaev, I.S. and Rahimov, I. (1978) "Critical branching processes with immigration of decreasing intensity", *Theory of Probability and its Applications*, Vol. 23, pp. 275-283.
5. Badalbaev, I.S. and Zubkov, A.M. (1983) "A limit theorem for sequence of branching processes with immigration", *Theory Probability and its Applications*, Vol. 28, pp. 382-388.
6. Diananda, P.H. (1955) "The central limit theorem for m-dependent random variables", *Proc. Comb. Phil. Soc.*, Vol. 51, pp. 192-195.
7. Foster, J.H. and Williamson, J.A. (1971) "Limit theorems for the Galton-Watson process with time-dependent immigration", *Z. Wahrschein. Und Verw. Geb.*, Vol. 20, pp. 227-235.
8. Galambos, J. and Seneta, E. (1973), "Regularly varying sequences", *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 41, pp. 110-116.
9. Guo, H. and Zhang, M. (2014), "A fluctuation limit theorem for a critical branching process with dependent immigration", *Statistics and Probability Letters*, Vol. 94, pp. 29-38.
10. Heathcote, C.R. (1965), "A branching process allowing immigration", *J. R. Statist. Soc.*, Vol. 27, pp. 138-143.

11. Hering, H. (2014), "Asymptotic behaviour of immigration-branching processes with general set of types. I: Critical branching part", *Adv. Appl. Prob.*, Vol. 5, pp. 391-416.
12. Heyde, C.C. and Seneta, E. (1971), "Analogues of classical limit theorems for the super-critical Galton-Watson process with immigration", *Math. Biosci.*, Vol. 11, pp. 249-259.
13. Iksanov, A. and Kabluchko, Z. (2018), "Functional limit theorems for Galton-Watson processes with very active immigration", *Stochastic processes and their applications*, Vol. 128, pp. 291-305.
14. Ispány, M. and Pap, G. and Van Zuijlen, M.C.A. (2005), "Fluctuation limit theorem of branching processes with immigration and estimation of the mean", *Adv. Appl. Probab.*, Vol. 37, pp. 523-538.
15. Ispány, M. (2008), "Limit theorems for normalized nearly critical branching processes with immigration", *Publ. Math. Debrecen*, Vol. 72, pp. 17-34.
16. Khusanbaev, Ya.M. (2010), "On the asymptotics of a critical branching process with heterogeneous and increasing immigration", *Doklady of Academy of Sciences RUz*, pp. 6-10.
17. Khusanbaev, Ya.M. (2013), "On the asymptotic behavior of a subcritical branching process with immigration", *Ukrainian Mathematical Journal*, Vol. 65, pp. 835-843.
18. Khusanbaev, Ya.M. (2014), "On the convergence rate in one limit theorem for branching processes with immigration", *Siberian Mathematical Journal*, Vol. 55, pp. 178-187.
19. Khusanbaev, Ya.M. (2016), "On asymptotics of branching processes with immigration", *Discrete Math. Appl.*, Vol. 28, pp. 113-122.
20. Khusanbaev, Ya. and Sharipov, S. and Golomoziy, V. (2019), "Berry-Esseen bound for nearly critical branching processes with immigration", *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series: Physics and Mathematics*, Vol. 4, pp. 42-49.
21. Khusanbaev, Ya.M. and Sharipov, S.O. (2020), "On the asymptotic behavior of branching processes with stationary immigration", *Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences*, Vol. 3, pp. 59-73.
22. Khusanbaev, Y.M. and Sharipov, S.O. (2017), "Functional limit theorem for critical branching processes with dependent immigration", *Uzbek Mathematical Journal*, Vol 3, pp. 149-158.
23. Khusanbaev, Y.M. and Sharipov, S.O. (2018), "On convergence of branching processes with weakly dependent immigration", *Uzbek Mathematical Journal*, Vol 1, pp. 108-114.
24. Li, Z.H. (2000), "Ornstein-Uhlenbeck type processes and branching processes with immigration", *J. Appl. Probab.*, Vol. 37, pp. 627-634.
25. Li, Z.H. (2006), "Branching processes with immigration and related topics.", *Frontiers of Mathematics in China*, Vol. 1, pp. 73-97.
26. Mitov, K. V. and Yanev, N. M. (2006), "Critical branching processes with decreasing state-dependent immigration", *Acad. Bulgar. Sci.*, Vol. 36, pp. 193-196.
27. Mitov, K. V. and Yanev, N. M. (1984), "Critical Galton-Watson processes with decreasing state-dependent immigration", *J. Appl. Prob.*, Vol. 21, pp. 22-39.
28. Mitov, K. V. and Yanev, N. M. (1984), "Branching processes with decreasing state-dependent immigration", *Serdica*, Vol. 10, pp. 13-21.
29. Nagaev, S.V. (1975), "Limit theorem for branching processes with immigration", *Theory Probab. Appl.*, Vol. 20, pp. 178-180.
30. Pakes, A.G. (1971), "Some results for the supercritical branching process with immigration", *Math. Biosciences*, Vol. 11, pp. 355-363.
31. Pakes, A.G. (1971), "A branching process with a state dependent immigration component", *Advances in Applied Probability*, Vol. 3, pp. 301-314.

32. Pakes, A.G. (1975), "Some results for non-supercritical Galton-Watson processes with immigration", *Math. Biosciences*, Vol. 24, pp. 71-92.
33. Rahimov, I. (1978), "On critical Galton-Watson process with increasing immigration", *Izvestiya AN UZSSR. Seriya fiz.-mat.nauk*, Vol. 4, pp. 22-27.
34. Rahimov, I. (1981), "On branching random processes with increasing immigration", *Doklady AN UZSSR*, Vol. 1, pp. 3-5.
35. Rahimov, I. (1995), "Random Sums and Branching Stochastic Processes", *Springer*, New York.
36. Rahimov, I. (2007), "Functional limit theorems for critical processes with immigration", *Advances in Applied Probability*, Vol. 39, pp. 1054-1069.
37. Rahimov, I. (2008), "Deterministic approximation of a sequence of nearly critical branching processes", *Stochastic Analysis and Applications*, Vol. 26, pp. 1013-1024.
38. Rahimov, I. (2012), "Conditional least squares estimators for the offspring mean in a subcritical process with immigration", *Stochastic Analysis and Applications*, Vol. 41, pp. 2096-2110.
39. Rahimov, I. and Sirazhdinov, S.K. (1988), "Approximation of the distribution of a sum in a scheme for the summation of independent random variables", *Dokl. Math.*, Vol. 38, pp. 23-27.
40. Seneta, E. (1968), "On asymptotic properties of subcritical branching processes", *J. Australian Math. Soc.*, Vol. 8, pp. 671-682.
41. Seneta, E. (1970), "An explicit-limit theorem for the Critical Galton-Watson process with immigration", *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol. 32, pp. 149-152.
42. Sevast'yanov, B.A. (1957), "Limit theorems for branching processes of special form", *Theory Probab. Appl.*, Vol. 2, pp. 339-348.
43. Sriram, T.N. (1994), "Invalidity of bootstrap for critical branching processes with immigration", *Ann.Statist.*, Vol. 22, pp. 1013-1023.
44. Shiryaev, A.N. (2004), "Probability", *MCNMO*, Moscow.
45. Vatutin, V.A. and Zubkov, A.M. (1985), "Branching processes. I", *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Teor. Veroyatn. Mat. Stat. Teor. Kibern.*, Vol. 23, pp. 3-67.
46. Wei, C.Z. and Winnicki, J. (1989), "Some asymptotic results for the branching process with immigration", *Stochastic processes and their applications*, Vol. 31, pp. 261-282.

Received: 05.01.2020

УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/1-2.2>

О.М. Гопкало¹ аспірантка
Л.М. Сахно², д.ф.-м.н., с.н.с
О.І. Василик³, к.ф.-м.н., доцент

Властивості φ -субгауссових випадкових процесів, пов'язаних із рівнянням теплопровідності з випадковими початковими умовами

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, e-mail: olia_gopkalo@ukr.net

²Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, e-mail: lms@univ.kiev.ua

³Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, e-mail: ovasylyk@univ.kiev.ua

O.M. Hopkalo¹, Ph.D. Student
L.M. Sakhno², Dr., Senior Researcher
O.I. Vasylyk³, Ph.D., Associate Professor

Properties of φ -sub-Gaussian stochastic processes related to the heat equation with random initial conditions

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st., e-mail: olia_gopkalo@ukr.net

²Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st., e-mail: lms@univ.kiev.ua

³Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st., e-mail: ovasylyk@univ.kiev.ua

У роботі досліджуються властивості траєкторій випадкових процесів, що задають розв'язки (в $L_2(\Omega)$) для рівняння теплопровідності з φ -субгауссовими стаціонарними випадковими умовами. Основні результати роботи – це оцінки для розподілів супремумів вказаних процесів на обмежених та необмежених множинах.

Ключові слова: φ -субгауссові процеси, рівняння теплопровідності, випадкові початкові умови, розподіл супремуму

In this paper, there are studied sample paths properties of stochastic processes representing solutions (in $L_2(\Omega)$ sense) of the heat equation with random initial conditions given by φ -sub-Gaussian stationary processes. The main results are the bounds for the distributions of the suprema for such stochastic processes considered over bounded and unbounded domains.

Key Words: φ -sub-Gaussian processes, heat equation, random initial condition, distribution of supremum

1 Introduction

In this paper we investigate sample paths properties of stochastic processes representing solutions of the heat equation with random initial conditions given by φ -sub-Gaussian stationary processes. The general theory of φ -sub-Gaussian processes is presented in the classical monograph [2] and its further development can be found in numerous recent studies. Partial differential equations with random initial conditions have been intensively studied in the literature (from different points of view), starting from the papers by J. Kampé de Fériet (1955) and M. Rosenblatt (1967) who introduced rigorous probabilistic tools in this area. In particular, in [8, 9] solutions to PDE subject to random initial conditions were investigated by means of Fourier methods, representations

of solutions by uniformly convergent series and their approximations in different functional spaces were developed. The present paper is most closely related to the papers [1, 3, 4, 6].

We obtain the bounds for distribution of supremum for the processes related to the heat equations with φ -sub-Gaussian initial conditions. These results generalize the corresponding results from papers [3, 4] where the cases of Gaussian and sub-Gaussian initial conditions were considered. We also investigate the rate of growth of solutions on an unbounded domain and thus extend the results of [3, 4]. In [6] similar results were obtained for the case of higher order heat-type equations (see also [6] for more references on the theory of φ -sub-Gaussian processes and partial differential equations with random initial conditions).

The paper is organized as follows. Section 2 collects important definitions and facts on φ -sub-Gaussian processes needed for our study. In Section 3 we consider stochastic processes representing solutions (in $L_2(\Omega)$ sense) of the heat equation with random φ -sub-Gaussian initial conditions and state the results on the distributions of the suprema for such stochastic processes considered over bounded and unbounded domains. Section 4 discusses the conditions of convergence of the integral functional which represent the solution to the random heat equation. This consideration is based on the approach of paper [1] and a result from paper [8] (presented in Appendix).

2 Preliminaries

We present basic definitions and facts from the theory of φ -sub-Gaussian variables and processes which will be used in the paper.

Definition 2.1. [2, 10] Let $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ be a continuous even convex function. The function φ is an Orlicz N-function if $\varphi(0) = 0, \varphi(x) > 0$ as $x \neq 0$ and the following conditions hold: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty$.

Condition Q. Let φ be an N-function which satisfies $\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = c > 0$, where the case $c = \infty$ is possible.

Definition 2.2. [2, 7] Let φ be an N-function satisfying condition Q and $\{\Omega, L, \mathbf{P}\}$ be a standard probability space. The random variable ζ belongs to the space $Sub_\varphi(\Omega)$, if $E\zeta = 0, E \exp\{\lambda\zeta\}$ exists for all $\lambda \in \mathbb{R}$ and there exists a constant $a > 0$ such that the following inequality holds for all $\lambda \in \mathbb{R}$

$$E \exp\{\lambda\zeta\} \leq \exp\{\varphi(\lambda a)\}.$$

The space $Sub_\varphi(\Omega)$ is a Banach space with respect to the norm

$$\tau_\varphi(\zeta) = \sup_{\lambda \neq 0} \frac{\varphi^{(-1)}(\ln E \exp(\lambda\zeta))}{|\lambda|},$$

which can be written equivalently as $\tau_\varphi(\zeta) = \inf\{a > 0 : E \exp\{\lambda\zeta\} \leq \exp\{\varphi(a\lambda)\}\}$, and it is called the φ -sub-Gaussian standard of the random variable ζ .

Definition 2.3. [5] A family Δ of random variables $\zeta \in Sub_\varphi(\Omega)$ is called strictly φ -sub-Gaussian if there exists a constant C_Δ such that

for all countable sets I of random variables $\zeta_i \in \Delta, i \in I$, the following inequality holds:

$$\tau_\varphi\left(\sum_{i \in I} \lambda_i \zeta_i\right) \leq C_\Delta \left(E \left(\sum_{i \in I} \lambda_i \zeta_i\right)^2\right)^{1/2}. \quad (2.1)$$

The constant C_Δ is called the *determining* constant of the family Δ .

The linear closure of a strictly φ -sub-Gaussian family Δ in the space $L_2(\Omega)$ is the strictly φ -sub-Gaussian with the same determining constant ([5]).

Definition 2.4. [5] Random process $\zeta = \{\zeta(t), t \in T\}$ is called (strictly) φ -sub-Gaussian if the family of random variables $\{\zeta(t), t \in T\}$ is (strictly) φ -sub-Gaussian (with the determining constant C_ζ).

Let K be a deterministic kernel and suppose that the process $X = \{X(t), t \in T\}$ can be represented in the form $X(t) = \int_T K(t, s) d\xi(s)$, where $\xi(t), t \in T$, is a strictly φ -sub-Gaussian random process and the integral above is defined in the mean-square sense. Then the process $X(t), t \in T$, is strictly φ -sub-Gaussian random process with the same determining constant (see [5]).

Definition 2.5. [2, 10] Let $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ be an N-function. The function φ^* defined by

$$\varphi^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} (xy - \varphi(y))$$

is called the Young-Fenchel transform (or convex conjugate) of the function φ .

The Young-Fenchel transform is also known as the Legendre (or Legendre-Fenchel) transform, especially in the convex analysis and in the theory of large deviations.

The function φ^* plays an important role in the theory of φ -sub-Gaussian random variables and processes.

If ζ is a φ -sub-Gaussian random variable, then we can write exponential estimates for its tail probabilities, in particular, for all $u > 0$ we have the following bound:

$$P\{|\zeta| > u\} \leq 2 \exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{u}{\tau_\varphi(\zeta)}\right)\right\}. \quad (2.2)$$

By using the entropy methods, various estimates for the distribution of suprema of φ -sub-Gaussian random processes can be written in terms of the function φ^* (see [2]).

To derive the main results in Section 3 we will need additional notions and statements.

Lemma 2.1. *Let $Z(u), u \geq 0$ be a continuous monotonically increasing function such that $Z(u) > 0$ and $\frac{u}{Z(u)}$ is nondecreasing for $u \geq u_0$, where $u_0 \geq 0$ is a constant. Then for $u > 0, v > 0$*

$$\min\left(\frac{u}{v}, 1\right) < \frac{Z(u + u_0)}{Z(v + u_0)}.$$

Proof. For $0 < u < v$ we have

$$\frac{u}{v} < \frac{u + u_0}{v + u_0} \leq \frac{Z(u + u_0)}{Z(v + u_0)},$$

since the function $\frac{u}{Z(u)}$ is nondecreasing for $u \geq u_0$. $\square$

Definition 2.6. [6] The function $Z(u), u \geq 0$, is called admissible for the space $Sub_\phi(\Omega)$, if for Z the conditions of Lemma 2.1 hold and for some $\varepsilon > 0$

$$\int_0^\varepsilon \Psi\left(\ln\left(Z^{(-1)}\left(\frac{1}{s}\right) - u_0\right)\right) ds < \infty,$$

where $\Psi(v) = \frac{v}{\phi^{(-1)}(v)}, v > 0$.

Consider a separable φ -sub-Gaussian process defined on a separable metric space (T, d) , where $T = \{a_i \leq t_i \leq b_i, i = 1, 2\}$ and $d(t, s) = \max_{i=1,2} |t_i - s_i|$, $t = (t_1, t_2)$, $s = (s_1, s_2)$.

Theorem 2.1. [6] *Assume that $X = \{X(t), t \in T\}$ is a separable φ -sub-Gaussian process such that*

$$\sup_{\substack{d(t,s) \leq h, \\ t,s \in T}} \tau_\varphi(X(t) - X(s)) \leq \sigma(h), \quad (2.3)$$

where $\{\sigma(h), 0 < h \leq \max_{i=1,2} |b_i - a_i|\}$ is a monotonically increasing continuous function such that $\sigma(h) \rightarrow 0$ as $h \rightarrow 0$ and for some $\varepsilon > 0$

$$\int_0^\varepsilon \Psi\left(\ln \frac{1}{\sigma^{(-1)}(u)}\right) du < \infty, \quad (2.4)$$

where $\Psi(v) = \frac{v}{\varphi^{(-1)}(v)}$. Then

$$P\left\{\sup_{t \in T} |X(t)| > u\right\} \leq 2A(u, \theta)$$

for all $0 < \theta < 1$ and

$$u > \frac{2I_\varphi(\min(\theta\varepsilon_0, \gamma_0))}{\theta(1 - \theta)},$$

where

$$A(u, \theta) = \exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\left(u(1 - \theta) - \frac{2}{\theta}I_\varphi(\min(\theta\varepsilon_0, \gamma_0))\right)\right)\right\},$$

and

$$\varepsilon_0 = \sup_{t \in T} \tau_\varphi(X(t)), \quad \gamma_0 = \sigma\left(\max_{i=1,2} |b_i - a_i|\right),$$

$\varphi^*(u)$ is the Young-Fenchel transform of the function φ ,

$$I_\varphi(\delta) =$$

$$\int_0^\delta \Psi\left[\ln\left[\left(\frac{b_1 - a_1}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right)\left(\frac{b_2 - a_2}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right)\right]\right] du.$$

3 Main results

Consider the Cauchy problem for the heat equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, t > 0, x \in \mathbb{R}, \mu > 0, \quad (3.1)$$

subject to the random initial condition

$$u(0, x) = \eta(x), x \in \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

where $\eta(x), x \in \mathbb{R}$, is a stochastic process.

In [3, 4] the case of a sub-Gaussian process η was studied. We suppose that η is φ -sub-Gaussian process satisfying the next assumption.

H.1 $\eta(x), x \in \mathbb{R}$ is a real, measurable, mean-square continuous stationary (in wide sense) stochastic process, which is strictly φ -sub-Gaussian with the determining constant c_η .

Let $B(x), x \in \mathbb{R}$, be a covariance function of η , therefore, we have the representation

$$B(x) = \int_{\mathbb{R}} \cos(\lambda x) dF(\lambda), \quad (3.3)$$

where $F(\lambda)$ is a spectral measure, and for η the spectral representation holds

$$\eta(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x} Z(d\lambda). \quad (3.4)$$

The stochastic integral is considered as $L_2(\Omega)$ integral. The complex-valued orthogonal random measure Z is such that $E|Z(d\lambda)|^2 = F(d\lambda)$.

Consider the process $u(t, x), t > 0, x \in \mathbb{R}$, defined by

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} g(t, x - y) \eta(y) dy, \quad (3.5)$$

where

$$g(t, x) = \frac{1}{(4\pi\mu t)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{4\mu t} \right\}, t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (3.6)$$

is the fundamental solution to the heat equation (3.1).

Taking into account (3.4), we can write the following representation of the process given by (3.5):

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \exp \{ i\lambda x - \mu t \lambda^2 \} Z(d\lambda). \quad (3.7)$$

The process (3.7) can be interpreted as the mean-square or $L_2(\Omega)$ solution to the Cauchy problem (3.1)–(3.2), as justified in [4].

Theorem 3.1. Let $u(t, x), t > 0, x \in \mathbb{R}$, be the stochastic process given by (3.7) and assumption H.1 hold. Assume that $Z(u), u \geq 0$, is a function satisfying conditions of Lemma 2.1 and the following integral converges:

$$C_Z^2 = \int_{\mathbb{R}} \left(Z^2(\mu\lambda^2 + u_0) + 4Z^2\left(\frac{|\lambda|}{2} + u_0\right) \right) F(d\lambda) < \infty. \quad (3.8)$$

Then

$$\begin{aligned} \sigma(h) &:= \sup_{\max\{|t-t_1|, |x-x_1|\} \leq h} \tau_\varphi(u(t, x) - u(t_1, x_1)) \leq \\ &\leq c_\eta C_Z \left(Z\left(\frac{1}{h} + u_0\right) \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Proof. The proof is similar to the proof of Theorem 3.1 in [4]. We present the main steps. We have:

$$\begin{aligned} &\sup_{\max\{|t-t_1|, |x-x_1|\} \leq h} \tau_\varphi(u(t, x) - u(t_1, x_1)) \leq \\ &\leq c_\eta \sup_{\max\{|t-t_1|, |x-x_1|\} \leq h} \left(\mathbb{E}(u(t, x) - u(t_1, x_1))^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Using calculations from [4], we get

$$\mathbb{E}(u(t, x) - u(t_1, x_1))^2 = \int_{\mathbb{R}} |b(\lambda)|^2 F(d\lambda), \quad (3.11)$$

where

$$\begin{aligned} b(\lambda) &= \exp\{i\lambda x\} \exp\{-\mu\lambda^2 t\} \\ &\quad - \exp\{i\lambda x_1\} \exp\{-\mu\lambda^2 t_1\}. \end{aligned}$$

From formula (3.11) from [4] we have for $|t - t_1| \leq h$ and $|x - x_1| \leq h$:

$$|b(\lambda)| \leq \left(1 - \exp \left\{ -\mu\lambda^2 |t - t_1| \right\} \right)^2 +$$

$$\begin{aligned} &+ 4 \sin^2 \left(\frac{1}{2} \lambda (x - x_1) \right) \leq \left(\min(\mu\lambda^2 h, 1) \right)^2 + \\ &+ 4 \left(\min \left(\frac{h}{2} |\lambda|, 1 \right) \right)^2. \end{aligned}$$

Using Lemma 2.1 we can write the bound

$$|b(\lambda)| \leq \frac{Z(\mu\lambda^2 + u_0)}{Z(\frac{1}{h} + u_0)} + 4 \frac{Z(\frac{|\lambda|}{2} + u_0)}{Z(\frac{1}{h} + u_0)}. \quad (3.12)$$

Substituting (3.12) in (3.11) and using inequality (3.10), we obtain (3.9). $\square$

Theorem 3.2. Let $u(t, x), a \leq t \leq b, c \leq x \leq d$, be a separable modification of the stochastic process given by (3.7) and assumption H.1 hold. Assume that $Z(u), u \geq 0$, is an admissible function for the space $\text{Sub}_\phi(\Omega)$, and the integral (3.8) converges. Then for $0 < \theta < 1$ and

$$u > \frac{2\hat{I}_\varphi(\min(\theta\Gamma, \gamma_0))}{\theta(1 - \theta)}$$

the following inequality holds true:

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{\substack{a \leq t \leq b; \\ c \leq x \leq d}} |u(t, x)| > u \right\} \leq 2A(u, \theta), \quad (3.13)$$

where

$$\begin{aligned} &A(u, \theta) = \exp \left\{ -\varphi^* \left(\frac{1}{\Gamma} (u(1 - \theta) - \frac{2}{\theta} \hat{I}_\varphi(\min(\theta\Gamma, \gamma_0))) \right) \right\}; \\ &\hat{I}_\varphi(\sigma) = \int_0^\sigma \Psi \left(\ln \left[\left(\frac{b-a}{2} \left(Z^{(-1)} \left(\frac{c_\eta C_Z}{s} \right) - u_0 \right) + 1 \right) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left(\frac{d-c}{2} \left(Z^{(-1)} \left(\frac{c_\eta C_Z}{s} \right) - u_0 \right) + 1 \right) \right] \right) ds; \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\Gamma = c_\eta \left(\int_{\mathbb{R}} F(d\lambda) \right)^{1/2}, \quad \Psi(u) = \frac{u}{\varphi^{(-1)}(u)},$$

$$\gamma_0 = \frac{c_\eta C_Z}{Z(\frac{1}{\varkappa} + u_0)}, \quad \varkappa = \max(b - a, d - c);$$

C_Z is defined in (3.8).

Proof. The assertion of this theorem follows from Theorems 2.1 and 3.1.

Note, that from Theorem 3.1 we have that condition (2.3) of Theorem 2.1 holds with $\sigma(h) = c_\eta C_Z \left(Z\left(\frac{1}{h} + u_0\right) \right)^{-1}$. We also have

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \sup_{(t,x) \in [a,b] \times [c,d]} \tau_\phi(u(t,x)) \leq \\ &\leq c_\eta \sup_{(t,x) \in [a,b] \times [c,d]} \left(\mathbb{E}(u(t,x))^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq c_\eta \sup_{(t,x) \in [a,b] \times [c,d]} \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\{-2\mu\lambda^2 t\} F(d\lambda) \right)^{1/2} \leq \\ &\leq c_\eta \left(\int_{\mathbb{R}} F(d\lambda) \right)^{1/2} =: \Gamma < \infty. \end{aligned}$$

□

Example 3.1. Let $\eta = \{\eta(u), u \in \mathbb{R}\}$ be a centered Gaussian random process satisfying Assumption H.1. Then $c_\eta = 1$, $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, $\varphi^*(x) = \frac{x^2}{2}$, $\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x^{1/2}$. Consider the following admissible function

$$Z(u) = \ln^\alpha(u+1), \quad u \geq 0, \quad \alpha > 1/2.$$

In this case

$$u_0 = e^\alpha - 1, \quad Z^{(-1)}(v) = \exp\left\{v^{\frac{1}{\alpha}}\right\} - 1,$$

$$Z(v + u_0) = \ln^\alpha(v + e^\alpha),$$

$$C_Z^2 = \int_{\mathbb{R}} \left[\ln^{2\alpha}(\mu\lambda^2 + e^\alpha) + 4 \ln^{2\alpha}\left(\frac{|\lambda|}{2} + e^\alpha\right) \right] F(d\lambda).$$

The above integral converges if the following integral converges

$$\int_{\mathbb{R}} \ln^{2\alpha}(|\lambda| + e^\alpha) F(d\lambda). \quad (3.15)$$

That is, if condition (3.15) holds true, then Theorem 3.2 holds. It follows from (3.14) that

$$\begin{aligned} \hat{I}_\varphi(\delta) &= \int_0^\delta \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\ln \left[\left(\frac{b-a}{2} \left(\exp \left\{ \left(\frac{C_Z}{s} \right)^\alpha \right\} - e^\alpha \right) + 1 \right) \times \left(\frac{d-c}{2} \left(\exp \left\{ \left(\frac{C_Z}{s} \right)^\alpha \right\} - e^\alpha \right) + 1 \right) \right] \right)^{\frac{1}{2}} ds. \end{aligned}$$

Let $\frac{d-c}{2} e^\alpha > 1$ and $\frac{b-a}{2} e^\alpha > 1$, then

$$\begin{aligned} \hat{I}_\varphi(\delta) &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\times \int_0^\delta \left(\ln \left(\frac{d-c}{2} \frac{b-a}{2} \exp \left\{ 2 \left(\frac{C_Z}{s} \right)^\alpha \right\} \right) \right)^{\frac{1}{2}} ds \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\delta \ln \left(\frac{(d-c)(b-a)}{4} \right)^{\frac{1}{2}} ds \\ &\quad + \int_0^\delta \left(\frac{C_Z}{s} \right)^{\frac{1}{2\alpha}} ds \\ &= \frac{\delta}{\sqrt{2}} \left(\ln \left(\frac{(d-c)(b-a)}{4} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \delta \left(\frac{C_Z}{\delta} \right)^{\frac{1}{2\alpha}} \left(1 - \frac{1}{2\alpha} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

It follows from (3.13) that in this case for

$$u > \frac{2\hat{I}_\varphi(\min(\theta\Gamma, \gamma_0))}{\theta(1-\theta)}$$

we have

$$\begin{aligned} P\left\{ \sup_{\substack{a \leq t \leq b, \\ c \leq x \leq d}} |u(t,x)| > u \right\} &\leq \\ &\leq \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Gamma} \left(u(1-\theta) - \frac{2}{\theta} \hat{I}_\varphi(\min(\theta\Gamma, \gamma_0)) \right) \right)^2 \right\}, \\ \gamma_0 &= \frac{C_Z}{\ln^\alpha\left(\frac{1}{\varepsilon} + e^\alpha\right)}. \end{aligned}$$

If θ is such that $\theta\Gamma < \gamma_0$ ($\theta < \frac{\gamma_0}{\Gamma}$), then for

$$u > \sup_{0 < \theta < \frac{\gamma_0}{\Gamma}} \frac{2\hat{I}_\varphi(\theta\Gamma)}{\theta(1-\theta)}$$

$$\begin{aligned} P\left\{ \sup_{\substack{a \leq t \leq b, \\ c \leq x \leq d}} |u(t,x)| > u \right\} &\leq \\ &\leq \inf_{0 < \theta < \frac{\gamma_0}{\Gamma}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Gamma} \left(u(1-\theta) - \frac{2}{\theta} \hat{I}_\varphi(\theta\Gamma) \right) \right)^2 \right\}, \end{aligned}$$

and if $\frac{\gamma_0}{\Gamma} > 1$ then for

$$u > \sup_{0 < \theta < 1} \frac{2\hat{I}_\varphi(\theta\Gamma)}{\theta(1-\theta)}$$

we get

$$\begin{aligned} P\left\{ \sup_{\substack{a \leq t \leq b, \\ c \leq x \leq d}} |u(t,x)| > u \right\} &\leq \\ &\leq \inf_{0 < \theta \leq 1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Gamma} \left(u(1-\theta) - \frac{2}{\theta} \hat{I}_\varphi(\theta\Gamma) \right) \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Example 3.2. Let $\eta = \{\eta(u), u \in \mathbb{R}\}$ be a centered Gaussian random process, as in Example 3.1. Consider the admissible function $Z(u) = |u|^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$. In this case

$$u_0 = 0, \quad Z^{(-1)}(u) = u^{\frac{1}{\alpha}}, \quad u > 0,$$

$$C_Z^2 = \int_{\mathbb{R}} \left((\mu\lambda^2)^{2\alpha} + 4\left(\frac{|\lambda|}{2}\right)^{2\alpha} \right) F(d\lambda)$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \left((\mu\lambda^2)^{2\alpha} + 4^{1-\alpha}\lambda^{2\alpha} \right) F(d\lambda). \quad (3.17)$$

This integral converges if the next integral converges

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^{4\alpha} F(d\lambda) < \infty. \quad (3.18)$$

That is, if condition (3.18) holds, then Theorem 3.2 holds. It follows from (3.14) that

$$\hat{I}_\varphi(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\delta \left(\ln \left[\left(\frac{b-a}{2} \left(\frac{C_Z}{s} \right)^{\frac{1}{\alpha}} + 1 \right) \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{d-c}{2} \left(\frac{C_Z}{s} \right)^{\frac{1}{\alpha}} + 1 \right) \right] \right)^{\frac{1}{2}} ds.$$

For $0 \leq \beta < 1$, $x > 0$, $y > 0$, we have

$$\ln((1+x)(1+y)) = \frac{1}{\beta} \ln[(1+x)(1+y)]^\beta$$

$$= \frac{1}{\beta} [\ln(1+x)^\beta + \ln(1+y)^\beta]$$

$$\leq \frac{1}{\beta} [\ln(1+x^\beta) + \ln(1+y^\beta)]$$

$$\leq \frac{1}{\beta} (x^\beta + y^\beta),$$

therefore, in the case of $\beta < \alpha$ we obtain

$$\hat{I}_\varphi(\delta) \leq \frac{1}{\sqrt{2}\beta} (C_Z)^{\frac{\beta}{2\alpha}} \delta^{(1-\frac{\beta}{2\alpha})} \frac{1}{1-\frac{\beta}{2\alpha}} \left[\left(\frac{b-a}{2} \right)^{\frac{\beta}{2}} \right. \\ \left. + \left(\frac{d-c}{2} \right)^{\frac{\beta}{2}} \right] =: \hat{J}_\varphi(\delta, \beta). \quad (3.19)$$

It follows from (3.13) that in this case for

$$u > \frac{2\hat{J}_\varphi(\min(\theta\Gamma, \gamma_0), \beta)}{\theta(1-\theta)}, \quad \gamma_0 = C_Z \varkappa^\alpha$$

we get the estimate

$$P\left\{ \sup_{\substack{a \leq t \leq b \\ c \leq x \leq d}} |u(t, x)| > u \right\} \leq$$

$$\leq \inf_{\theta, \beta} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Gamma} \left(u(1-\theta) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{2}{\theta} \hat{J}_\varphi(\min(\theta\Gamma, \gamma_0), \beta) \right) \right)^2 \right\}.$$

Consider now the process $u(t, x)$, $(t, x) \in V$ defined on an unbounded domain of the following form: $V = [-A, A] \times [0, \infty)$, $A > 0$.

Introduce a family of segments $\{[b_k, b_{k+1}], k = 0, 1, \dots\}$ such that $b_0 = 0, b_k > b_{k+1}, b_k \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty; b_{k+1} - b_k \geq 2A$, define the sets $V_k = [-A, A] \times [b_k, b_{k+1}], k = 0, 1, \dots$ and $V = \bigcup_{k=0}^\infty V_k$.

Let $\{a(t), t \geq 0\}$ be a continuous strictly increasing function such that $a(t) > 0, t \geq 0$ and $a(t) \rightarrow \infty$, as $t \rightarrow \infty$.

Denote:

$$a_k = \min_{t \in [b_k, b_{k+1}]} a(t); \quad \varepsilon_k = \sup_{(x, t) \in V_k} \tau_\varphi(u(t, x)).$$

In the next theorem the rate of growth of $u(t, x)$, $(t, x) \in V$, is evaluated.

Theorem 3.3. Let $u(t, x)$, $(t, x) \in V$, be a separable modification of the stochastic process given by (3.7) and assumption H.1 hold. Assume that $Z(u), u \geq 0$, is an admissible function for the space $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$, and the integral (3.8) converges.

Suppose that the following conditions hold:

1. $\sup_{k=0, \infty} \frac{\varepsilon_k}{a_k} < \infty$.
2. For $\sigma > 0$

$$\hat{I}_\varphi(\sigma) = \int_0^\sigma \Psi \left(\ln \left[\left(A(Z^{(-1)}(\frac{c_\eta C_Z}{s}) - u_0 \right) + 1 \right) \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{b_{k+1} - b_k}{2} (Z^{(-1)}(\frac{c_\eta C_Z}{s}) - u_0) + 1 \right) \right] \right) ds$$

and for some θ , $0 < \theta < 1$

$$\sup_{k=0, \infty} \frac{\hat{I}_{\varphi, k}(\theta \varepsilon_k)}{a_k} < \infty.$$

3. The series $\sum_{k=0}^\infty \exp \left\{ -\varphi^* \left(\frac{sa_k(1-\theta)}{2\varepsilon_k} \right) \right\}$ converges for some s such that $\sup_{k=0, \infty} \frac{4\varepsilon_k}{a_k(1-\theta)} < s < \frac{u}{2}$.

Then for

$$u > \sup_{k=0, \infty} \frac{\hat{I}_{\varphi, k}(\theta \varepsilon_k)}{a_k} \frac{4}{\theta(1-\theta)},$$

$$P\left\{ \sup_{(t, x) \in V} \frac{|u(t, x)|}{a(t)} > u \right\} \leq 2 \exp \left\{ -\varphi^* \left(\frac{u}{s} \right) \right\}$$

$$\times \sum_{k=0}^\infty \exp \left\{ -\varphi^* \left(\frac{sa_k(1-\theta)}{2\varepsilon_k} \right) \right\} =: 2A(u). \quad (3.20)$$

Proof. The assertion of this theorem follows from Theorem 6.1 ([6]) (see also Theorem 3 in [9]). The arguments used for the proof are the same as that for Theorem 6.2. in [6]. $\square$

Corollary 3.1. *Let the assumptions of Theorem 3.3 hold true. Then there exists a random variable ξ such that*

$$P\{\xi > u\} \leq 2A(u)$$

for

$$u > \sup_{k=0,\infty} \frac{\hat{I}_{\varphi,k}(\theta\varepsilon_k)}{a_k} \frac{4}{\theta(1-\theta)}$$

and

$$|u(x, t)| < \xi a(t)$$

with probability one.

4 On convergence of the integral (3.7)

In the papers [1], [6] the integral functionals (with kernels of a particular form) of φ -sub-Gaussian random processes were studied as solutions of higher order partial differential equations with random initial conditions.

By using the same approach as in [1], we can state that under the conditions of Theorem 3.2 the integrals given by formula (3.7), that is,

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \exp \left\{ i\lambda x - \mu t \lambda^2 \right\} Z(d\lambda)$$

converge with probability 1 for $|x| \leq A$, $0 \leq t \leq T$, where $A > 0$ and $T > 0$ are some constants. For this end we can apply the result from [8] (see Theorem A.1 in Appendix). In view of Theorem A.1 it is sufficient to show that there exists a sequence $a_n > 0$, $a_n \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$, such that the sequence $u_n(t, x) = \int_{-a_n}^{a_n} \exp \left\{ i\lambda x - \mu t \lambda^2 \right\} Z(d\lambda)$ converges uniformly in probability for $|x| \leq A$, $0 \leq t \leq T$.

Reconsidering the proof of Theorem 3.1, we obtain

$$\begin{aligned} & \sup_{\max\{|t-t_1|, |x-x_1|\} \leq h} \tau_{\varphi}(u_n(t, x) - u_n(t_1, x_1)) \\ & \leq c_{\eta} \sup_{\max\{|t-t_1|, |x-x_1|\} \leq h} \left(\mathbb{E}(u_n(t, x) - u_n(t_1, x_1))^2 \right)^{1/2} \\ & \leq c_{\eta} \int_{\mathbb{R}} |b(\lambda)|^2 F(d\lambda) \leq c_{\eta} C_Z \left(Z \left(\frac{1}{h} + u_0 \right) \right)^{-1}, \end{aligned}$$

therefore, condition (5.21) of Theorem A.1 holds with

$$\sigma(h) = c_{\eta} C_Z \left(Z \left(\frac{1}{h} + u_0 \right) \right)^{-1}.$$

Taking into account that

$$\sigma^{(-1)}(\varepsilon) = \frac{1}{Z^{(-1)}\left(\frac{c_{\eta} C_Z}{\varepsilon}\right) - u_0}, \quad 0 < \varepsilon < \frac{Z(u_0)}{c_{\eta} C_Z},$$

and Z is an admissible function (see Definition 2.6), we conclude that condition (5.22) of Theorem A.1 holds as well.

5 Appendix

Let (T, d) be a compact metric space and $C(T)$ be the Banach space of continuous functions with uniform norm. Let $X_k = \{X_k(t), t \in T\}$ be a sequence of φ -subGaussian random processes such that $X_k \in C(T)$. The general conditions of convergence in probability of X_k in the space $C(T)$ are presented in the book [2]. In the paper [8] these conditions are presented for the case where T is a finite-dimensional space.

Theorem A.1. ([8]) *Let R^k be a k -dimensional space, $d(t, s) = \max_{1 \leq i \leq k} |t_i - s_i|$, $T = \{0 \leq t_i \leq T_i, i = 1, 2, \dots, k\}$, $T_i > 0$; $X_n = \{X_n(t), t \in T\}$ be a sequence of φ -subGaussian random processes such that $X_n \in C(T)$. Let us assume also that there exists a continuous increasing function $\sigma = \{\sigma(h), h > 0\}$, $\sigma(h) \rightarrow 0$ as $h \rightarrow 0$, such that*

$$\sup_{d(t,s) \leq h} \tau_{\varphi}(X_n(t) - X_n(s)) \leq \sigma(h) \quad (5.21)$$

and

$$\int_{0+} \Psi \left(\ln \frac{1}{\sigma^{(-1)}(\varepsilon)} \right) d\varepsilon < \infty, \quad (5.22)$$

where $\Psi(u) = \frac{u}{\varphi^{(-1)}(u)}$, $\sigma^{(-1)}(u)$ is the inverse function of $\sigma(u)$, $\varphi^{(-1)}(u)$ is the inverse function of $\varphi(u)$, for $u > 0$, and $\int_{0+} f(\varepsilon) d\varepsilon$ denotes $\int_0^{\delta} f(\varepsilon) d\varepsilon$ for sufficiently small $\delta > 0$. If the sequence of processes $X_n(t)$, $n \geq 1$, converges in probability to $X(t)$ for all $t \in T$, then $X_n(t)$ converges in probability to $X(t)$ in the space $C(T)$.

Список використаних джерел

References

1. Beghin L. On the Solutions of Linear Odd-Order Heat-Type Equations with Random Initial Conditions / L. Beghin, Yu. Kozachenko, E. Orsingher, L. Sakhno // J. Stat. Phys. – 2007. – Vol. 127, Issue 4. – P. 721–739.
2. Buldygin V. V. Metric Characterization of Random Variables and Random Processes / V. V. Buldygin, Yu. V. Kozachenko. – AMS, Providence, RI, 2000. – 257 p.
3. Kozachenko Yu.V. Large deviations type inequality for the supremum of the heat random field / Yu. V. Kozachenko, G. M. Leonenko // Methods Func. Anal. Topol. – 2002. – 8, No. 3. – P. 46–49.
4. Kozachenko Yu.V. Extremal behavior of the heat random field / Yu. V. Kozachenko, G. M. Leonenko // Extremes. – 2006. – Vol. 8. – P. 191–205.
5. Kozachenko Yu.V. Boundary value problems with random initial conditions and series of functions of $Sub_{\varphi}(\Omega)$ / Yu. V. Kozachenko, Yu. A. Koval'chuk // Ukr. Math. J. – 1998. – Vol. 50, No. 4. – P. 572–585.
6. Kozachenko Yu. Estimates for functional of solution to Higher-Order Heat-Type equation with random initial condition / Yu. Kozachenko, E. Orsingher, L. Sakhno, O. Vasylyk // J. Stat. Phys. – 2018. – Vol. 72, No. 6. – P.1641–1662.
7. Kozachenko Yu. V. Banach spaces of random variables of sub-Gaussian type / Yu. V. Kozachenko, E. I. Ostrovsky // Theor. Probab. Math. Stat. – 1985. – 32. – P.42–53.
8. Kozachenko Yu.V. Justification of the Fourier method for hyperbolic equations with random initial conditions / Yu. V. Kozachenko, G. I. Slivka // Theor. Probab. Math. Stat. – 2004. – 69. – P. 67–83.
9. Kozachenko Yu.V. On the increase rate of random fields from space $Sub_{\varphi}(\Omega)$ on unbounded domains / Yu. V. Kozachenko, A. I. Slyvka-Tylyshchak // Stat. Optim. Inf. Comput. – 2014. – 2, No. 2. – P. 79–92.
10. Krasnosel'skii M. A. Convex Functions and Orlicz Spaces / M. A. Krasnosel'skii, Ya. B. Rutickii. – P.Noordhoff Ltd, Groningen, 249p.
1. BEGHIN, L., KOZACHENKO, YU., ORSINGHER, E., SAKHNO, L. (2007) On the Solutions of Linear Odd-Order Heat-Type Equations with Random Initial Conditions *J. Stat. Phys.* Vol. 127, Issue 4, p. 721–739.
2. BULDYGIN, V. V., KOZACHENKO, YU. V. (2000) *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes*. AMS, Providence, RI, 257 p.
3. KOZACHENKO, YU. V., LEONENKO, G.M.(2002) Large deviations type inequality for the supremum of the heat random field. *Methods Func. Anal. Topol.* 8 (3), p. 46–49.
4. KOZACHENKO, YU. V., LEONENKO, G. M.(2006) Extremal behavior of the heat random field. *Extremes*. Vol. 8, p. 191–205.
5. KOZACHENKO, YU. V., KOVAL'CHUK, YU. A. (1998) Boundary value problems with random initial conditions and series of functions of $Sub_{\varphi}(\Omega)$. *Ukr. Math. J.* 50, p. 572–585.
6. KOZACHENKO, YU., ORSINGHER, E., SAKHNO, L., VASYLYK, O. (2018) Estimates for functional of solution to Higher-Order Heat-Type equation with random initial condition. *J. Stat. Phys.* 72, p. 1641–1662.
7. KOZACHENKO, YU. V., OSTROVSKY, E. I. (1985) Banach spaces of random variables of sub-Gaussian type, *Theor. Probab. Math. Stat.*. No. 32, p.42–53.
8. KOZACHENKO, YU. V., SLIVKA, G. I. (2004). Justification of the Fourier method for hyperbolic equations with random initial conditions. *Theor. Probab. Math. Stat.* 69, p. 67-83.
9. KOZACHENKO, YU. V., SLYVKA-TYLYSHCHAK, A.I. (2014) On the increase rate of random fields from space $Sub_{\varphi}(\Omega)$ on unbounded domains. *Stat. Optim. Inf. Comput.* 2, No. 2, p. 79–92.
10. KRASNOSEL'SKII, M. A., RUTICKII, YA. B. (1961) *Convex Functions and Orlicz Spaces*. P.Noordhoff Ltd, Groningen, 249p.

Received: 15.01.2020

УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/1-2.3>

Д. В. Затула¹, к.ф.-м.н.

Оцінки розподілу напівнорм Гельдера від дійсних стаціонарних гауссових процесів зі стійкою кореляційною функцією

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: ¹ dm_zatula@univ.kiev.ua

D. V. Zatula¹, Ph.D.

Estimates for the distribution of Hölder semi-norms of real stationary Gaussian processes with a stable correlation function

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, 4d Glushkova str.,
e-mail: ¹ dm_zatula@univ.kiev.ua

У роботі розглядаються дійсні стаціонарні гауссові процеси зі стійкою кореляційною функцією. Показано, що траєкторії стаціонарних гауссових власних комплексних випадкових процесів із нульовим математичним сподіванням належать простору Орліча, породженому функцією $U(x) = e^{\frac{x^2}{2}} - 1$. Отримано умови, за яких справджуються оцінки розподілу напівнорм Гельдера від гауссових власних комплексних випадкових процесів, визначених на компактi $\mathbb{T} = [0, T]$.

Ключові слова: стаціонарні гауссові процеси, власні комплексні випадкові процеси, простори Орліча, модулі неперервності, напівнорми Гельдера.

Complex random variables and processes with a vanishing pseudo-correlation are called proper. There is a class of stationary proper complex random processes that have a stable correlation function. In the present article we consider real stationary Gaussian processes with a stable correlation function. It is shown that the trajectories of stationary Gaussian proper complex random processes with zero mean belong to the Orlicz space generated by the function $U(x) = e^{\frac{x^2}{2}} - 1$. Estimates are obtained for the distribution of semi-norms of sample functions of Gaussian proper complex random processes with a stable correlation function, defined on the compact $\mathbb{T} = [0, T]$, in Hölder spaces.

Key Words: stationary Gaussian processes, proper complex random processes, Orlicz spaces, moduli of continuity, Hölder semi-norms.

Статтю представив д.ф.-м.н. Козаченко Ю.В.

1 Вступ

Нехай $(\mathbb{T}, \rho)$ — деякий метричний простір. Розглянемо такий випадковий процес $X = (X(t), t \in \mathbb{T})$, що з ймовірністю 1:

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\sup_{\substack{0 < \rho(t,s) \leq \varepsilon \\ t,s \in \mathbb{T}}} |X(t) - X(s)|}{f(\varepsilon)} \leq 1.$$

У цій нерівності функція f повинна бути модулем неперервності для процесу X .

Простір функцій з модулями неперервності f є простором Гельдера, а функціонал

$$\sup_{\substack{0 < \rho(t,s) \leq \varepsilon \\ t,s \in \mathbb{T}}} \frac{|X(t) - X(s)|}{f(\rho(t,s))}$$

є напівнормою у просторі Гельдера. У подальшому матимемо справу із оцінками розподілів напівнорм Гельдера від траєкторій

власних комплексних випадкових процесів $X_\alpha = (X_\alpha(t), t \in [0, T])$, тобто ймовірностей

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{\substack{0 < |t-s| \leq \varepsilon \\ t,s \in [0,T]}} \frac{|X_\alpha(t) - X_\alpha(s)|}{f(|t-s|)} > x \right\}.$$

Такі оцінки та припущення, згідно з якими напівнорми траєкторій процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ задовольняють умові Гельдера, були отримані в [2, 3]. Схожі результати для гауссових процесів, визначених на компактi, містяться у роботі [4]. Козаченко [5] узагальнив результати Дадлі для випадкових процесів, що належать до просторів Орліча (див. також [1, 6]).

2 Означення та попередні результати

Означення 2.1. ([7]) Випадковий комплексний процес $X_\alpha = (X_\alpha(t), t \in \mathbb{R})$ називається власним комплексним випадковим процесом, якщо псевдокореляційна функція цього процесу дорівнює нулю:

$$\mathbb{E}X_\alpha(t)X_\alpha(t + \tau) = 0,$$

тобто, коли виконуються умови:

$$\mathbb{E}X_c(t)X_c(t + \tau) = \mathbb{E}X_s(t)X_s(t + \tau),$$

$$\mathbb{E}X_c(t)X_s(t + \tau) = -\mathbb{E}X_s(t)X_c(t + \tau).$$

Означення 2.2. ([8]) Функція $r(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, називається стійкою кореляційною функцією, якщо

$$r(\tau) = \sigma^2 \exp \left\{ -c|\tau|^\alpha \left(1 + i\beta \frac{\tau}{|\tau|} \omega(\tau, \alpha) \right) \right\}, \quad (1)$$

де $\alpha \in (0, 2]$, $|\beta| \leq 1$, $c > 0$, $\sigma^2 > 0$ та

$$\omega(\tau, \alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2}, & \text{якщо } \alpha \neq 1; \\ \frac{2}{\pi} \ln |\tau|, & \text{якщо } \alpha = 1. \end{cases}$$

Означення 2.3. Стаціонарний власний комплексний випадковий процес називається власним стаціонарним комплексним випадковим процесом зі стійкою кореляційною функцією, якщо

$$\mathbb{E}\overline{X}_\alpha(t)X_\alpha(t + \tau) = r(\tau),$$

де функція $r(\tau)$ задана (1).

Означення 2.4. ([1]) Функцію $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називають $\mathbb{C}$ -функцією, якщо U — опукла, монотонно зростаюча при $x > 0$, парна, неперервна, а також $U(0) = 0$.

За означенням, $\mathbb{C}$ -функція $U(x)$, $x \geq 0$, має обернену функцію ([1]).

Означення 2.5. ([1]) Нехай U — довільна $\mathbb{C}$ -функція. Простором Орліча випадкових величин $L_U(\Omega)$ називається сім'я випадкових величин, що для кожної $\xi \in L_U(\Omega)$ існує така константа $r_\xi > 0$, що

$$\mathbb{E}U\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) < \infty.$$

Цей простір є простором Банаха з нормою

$$\|\xi\|_U = \inf \left\{ r > 0 : \mathbb{E}U\left(\frac{\xi}{r}\right) \leq 1 \right\}.$$

Означення 2.6. ([1]) Метрична масивність $N_{(\mathbb{T}, \rho)}(u) := N(u)$ — це мінімальна кількість замкнених куль (визначених відповідно до метрики ρ) радіусу u , якими можна покрити простір $\mathbb{T}$.

Означення 2.7. ([1]) $\mathbb{C}$ -функція U задовольняє Δ^2 -умові, якщо $U \sim U^2$, тобто $\exists x_0 \geq 0$, $\exists L > 1$ $\forall x \geq x_0$:

$$U^2(x) \leq U(Lx). \quad (2)$$

Розглянемо простір $\mathbb{T} = [0, T]$, $T > 0$, у якому введемо метрику

$$\rho(t, s) = |t - s|, \quad t, s \in \mathbb{T}.$$

Нехай $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — $\mathbb{C}$ -функція, що задовольняє Δ^2 -умові. Відповідний простір $L_U(\Omega)$ є простором Орліча з нормою $\|\cdot\|_U$.

Розглянемо стохастичний процес $X = (X(t), t \in \mathbb{T})$ з $L_U(\Omega)$ -приростами. Тоді

$$\rho_X(t, s) = \|X(t) - X(s)\|_U, \quad t, s \in \mathbb{T},$$

є псевдометрикою, породженою процесом X . Припустимо, що процес X є сепарабельним на $(\mathbb{T}, \rho)$.

Покладемо $N(u)$ — метрична масивність простору $(\mathbb{T}, \rho)$. Нехай $\sigma(u)$, $u > 0$, є деякою неперервною функцією такою, що $\sigma(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow 0$. Введемо умову на псевдометрику ρ_X :

$$\sup_{\rho(t,s) \leq u} \|X(t) - X(s)\|_U \leq \sigma(u), \quad \forall u > 0.$$

Оскільки $\mathbb{T} = [0, T]$, то за означенням 2.6 маємо, що

$$\frac{T}{2u} \leq N(u) \leq \frac{T}{2u} + 1.$$

Тому для $\sigma^{(-1)}(p)$ — оберненої функції до $\sigma(u)$, виконується нерівність:

$$N_{(\mathbb{T}, \rho_X)}(p) \leq \frac{T}{2\sigma^{(-1)}(p)} + 1.$$

Теорема 2.1. ([6]) Покладемо

$$\begin{aligned} f(\sigma(u)) &= \int_0^{\sigma(u)} U^{(-1)} \left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(p)} + 1 \right) dp = \\ &= [p = \sigma(t)] = \int_0^u U^{(-1)} \left(\frac{T}{2t} + 1 \right) d\sigma(t), \quad u > 0; \end{aligned}$$

$z_0 = \max\{x_0, L\}$, де x_0 та L — константи з означення 2.7; а також $u_* = \sigma^{(-1)}(T)$. Тоді існують функції $C(\sigma(u))$, $u \in (0, u_*)$, і $C_1(u)$, $u \in (0, T)$, такі, що $C(\sigma(u)) > 0 \forall u \in (0, u_*)$, $C_1(u) > 0 \forall u \in (0, T)$, $C_1(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow 0$, та $\forall x \geq z_0 \forall u \in (0, u_*)$ має місце нерівність:

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{\substack{t,s \in \mathbb{T} \\ 0 < |t-s| \leq u}} \frac{|X(t) - X(s)|}{C(\sigma(u))f(\sigma(|t-s|))} > x \right\} \leq \frac{C_1(u)}{U(x)}.$$

Для u таких, що $N(u) > U(z_0)$: $C_1(u) \leq 3 + \sqrt{2}$
і $C(\sigma(u)) \leq 3L(5 + 4L)$. Більше того,

$$\limsup_{u \downarrow 0} \frac{\Delta(X; u)}{3L(5 + 4L)z_0 f(\sigma(u))} \leq 1$$

майже напевно, де

$$\Delta(X; u) = \sup_{\substack{t,s \in \mathbb{T} \\ 0 < |t-s| \leq u}} |X(t) - X(s)|.$$

3 Основні результати

Нехай ξ — гауссова випадкова величина з нульовим математичним сподіванням та дисперсією σ^2 .

Теорема 3.1. Випадкова величина $\xi \sim N(0, \sigma^2)$ належить простору Орліча $L_U(\Omega)$ з функцією $U(x) = \exp\left\{\frac{x^2}{2}\right\} - 1$ та нормою $\|\xi\|_U = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma$.

Доведення. Оскільки $U(x) = \exp\left\{\frac{x^2}{2}\right\} - 1$, то

$$\mathbf{E} U\left(\frac{\xi}{r}\right) = \mathbf{E} \exp\left\{\frac{\xi^2}{2r^2}\right\} - 1$$

для довільного $r > \sigma$. Маємо, що

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \exp\left\{\frac{\xi^2}{2r^2}\right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{x^2}{2r^2}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{2} \cdot \frac{r^2 - \sigma^2}{r^2\sigma^2}\right\} dx = \\ &= \frac{\frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{r^2\sigma^2}{r^2 - \sigma^2}}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{r^2\sigma^2}{r^2 - \sigma^2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{2} \cdot \frac{r^2 - \sigma^2}{r^2\sigma^2}\right\} dx = \\ &= \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - \sigma^2}}. \end{aligned}$$

Отже, ξ належить простору Орліча $L_U(\Omega)$ за означенням 2.5. Її норма:

$$\begin{aligned} \|\xi\|_U &= \inf \left\{ r > 0 : \mathbf{E} \exp\left\{\frac{\xi^2}{2r^2}\right\} \leq 2 \right\} = \\ &= \inf \left\{ r > 0 : \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - \sigma^2}} \leq 2 \right\} = \\ &= \inf \left\{ r > 0 : r \geq \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma \right\} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma. \end{aligned}$$

□

Розглянемо $X_\alpha = (X_\alpha(t), t \in \mathbb{T})$ — стаціонарний гауссівський власний комплексний випадковий процес такий, що $X_\alpha(t) \sim N(0, \sigma^2) \forall t \in \mathbb{T}$. У такому разі, відповідно до теореми 3.1, $X_\alpha(t)$ належить простору Орліча, що породжується функцією $U(x) = \exp\left\{\frac{x^2}{2}\right\} - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Ця $\mathcal{C}$ -функція задовольняє Δ^2 -умові з константою $L \geq \sqrt{2}$ (див. означення 2.7), причому при $L = \sqrt{2}$ умова виконується для довільного $x > 0$. У відповідному просторі Орліча $L_U(\Omega)$ позначимо норму через $\|\cdot\|_U$.

Таким чином, функція

$$\rho_{X_\alpha}(t, s) = \|X_\alpha(t) - X_\alpha(s)\|_U, \quad t, s \in \mathbb{T},$$

є псевдометрикою, породженою процесом X_α . Припустимо, що процес X_α є сепарабельним на $(\mathbb{T}, \rho)$. Оскільки $\forall t \in \mathbb{T}$ та $\forall \tau \in [-t, T - t]$:

$$\mathbf{E} X_\alpha(t) X_\alpha(t + \tau) = r(\tau) = \sigma^2 \exp\{-c|\tau|^\alpha\},$$

то, використовуючи нерівність $1 - e^{-x} \leq x$, $x \geq 0$, маємо $\forall t, s \in \mathbb{T}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_\alpha(t) - X_\alpha(s))^2 &= 2r(0) - 2r(|t - s|) = \\ &= 2\sigma^2(1 - \exp\{-c|t - s|^\alpha\}) \leq 2c\sigma^2|t - s|^\alpha. \end{aligned}$$

Позначимо $\sigma_1(u) = 2\sigma\sqrt{\frac{2c}{3}}u^{\alpha/2}$, $u > 0$. Отже, згідно із теоремою 3.1, отримали умову на псевдометрику ρ_{X_α} : для довільного $u > 0$

$$\sup_{|t-s| \leq u} \|X_\alpha(t) - X_\alpha(s)\|_U \leq 2\sigma\sqrt{\frac{2c}{3}}u^{\alpha/2}. \quad (3)$$

Згідно із означенням метричної масивності $(N_{\rho_{X_\alpha}}(u))$ та оскільки $\sigma_1^{(-1)}(u) = \left(\frac{u}{2\sigma}\sqrt{\frac{3}{2c}}\right)^{2/\alpha}$ є оберненою функцією до $\sigma_1(u)$, то буде виконуватись нерівність:

$$N_{\rho_{X_\alpha}}(u) \leq 1 + \frac{T}{2} \left(\frac{u}{2\sigma}\sqrt{\frac{3}{2c}} \right)^{-2/\alpha}.$$

Для функції $U(x) = \exp\left\{\frac{x^2}{2}\right\} - 1$, $x \in \mathbb{R}$,
оберненою є $U^{(-1)}(y) = \sqrt{2 \ln(y+1)}$, $y > 0$. То-
му можемо оцінити значення функції

$$f(\sigma_1(u)) = \int_0^{\sigma_1(u)} U^{(-1)}\left(\frac{T}{2\sigma_1^{(-1)}(p)} + 1\right) dp =$$

$$= \int_0^{2\sigma\sqrt{\frac{2c}{3}}u^{\alpha/2}} \sqrt{2 \ln\left(2 + \frac{T}{2} \cdot \left(\frac{p}{2\sigma\sqrt{\frac{3}{2c}}}\right)^{-2/\alpha}\right)} dp.$$

Для цього скористаємося нерівністю

$$\ln(1+t) = \frac{1}{\beta} \ln(1+t)^\beta \leq \frac{t^\beta}{\beta}, \quad (4)$$

що справджується для будь-якого $t > 0$ та $\beta \in (0, 1)$. Маємо:

$$f(\sigma_1(u)) \leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{2}{\beta}} \int_0^{2\sigma\sqrt{\frac{2c}{3}}u^{\alpha/2}} \left(1 + \frac{T}{2} \cdot \left(\frac{p}{2\sigma\sqrt{\frac{3}{2c}}}\right)^{-2/\alpha}\right)^{\beta/2} dp,$$

де $\beta \in (0, 1)$. Припустимо, що

$$1 + \frac{T}{2} \cdot \left(\frac{p}{2\sigma\sqrt{\frac{3}{2c}}}\right)^{-2/\alpha} \leq c_1(u) \cdot p^{-2/\alpha},$$

тобто $c_1(u) \geq p^{2/\alpha} + \frac{T}{2} \cdot \left(2\sigma\sqrt{\frac{2c}{3}}\right)^{2/\alpha}$. Оскільки
ки $p \in (0, 2\sigma\sqrt{\frac{2c}{3}}u^{\alpha/2})$, то попередня нерівність
виконується при $c_1(u) = (u + \frac{T}{2}) \cdot \left(2\sigma\sqrt{\frac{2c}{3}}\right)^{2/\alpha}$.

Отже, за умови, що $\beta < \alpha$, має місце нерів-
ність:

$$f(\sigma_1(u)) \leq \sqrt{\frac{2}{\beta}} \int_0^{2\sigma\sqrt{\frac{2c}{3}}u^{\alpha/2}} \left(c_1(u) \cdot p^{-2/\alpha}\right)^{\beta/2} dp =$$

$$= \frac{4\alpha\sigma}{\alpha - \beta} \sqrt{\frac{c}{3\beta}} \left(u + \frac{T}{2}\right)^{\beta/2} u^{\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Таким чином, справджується наступна тео-
рема.

Теорема 3.2. *Покладемо*

$$g_\alpha(u) = \frac{4\alpha\sigma}{\alpha - \beta} \sqrt{\frac{c}{3\beta}} \left(u + \frac{T}{2}\right)^{\beta/2} u^{\frac{\alpha-\beta}{2}}, \quad u > 0,$$

де $c, \sigma > 0$, $\alpha \in (0, 2]$ та $\beta \in (0, \min\{1, \alpha\})$.
Також нехай $z_0 = \max\{x_0, L\}$, де x_0 та

L — константи з означення 2.7, а також
 $u_* = \sigma_1^{(-1)}(T) = \left(\frac{T}{2\sigma}\sqrt{\frac{3}{2c}}\right)^{2/\alpha}$. Тоді існують
функції $C(\sigma_1(u))$, $u \in (0, u_*)$, і $C_1(u)$, $u \in (0, T)$,
такі, що $C(\sigma_1(u)) > 0 \forall u \in (0, u_*)$, $C_1(u) > 0$
 $\forall u \in (0, T)$, $C_1(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow 0$, та $\forall x \geq z_0$
 $\forall u \in (0, u_*)$ має місце нерівність:

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{\substack{t, s \in \mathbb{T} \\ 0 < |t-s| \leq u}} \frac{|X_\alpha(t) - X_\alpha(s)|}{C(\sigma_1(u)) g_\alpha(|t-s|)} > x \right\} \leq$$

$$\leq \frac{C_1(u)}{\exp\left\{\frac{x^2}{2}\right\} - 1}.$$

Більше того,

$$\limsup_{u \downarrow 0} \frac{\Delta(X_\alpha; u)}{3L(5 + 4L)z_0 g_\alpha(u)} \leq 1$$

майже напевно, де

$$\Delta(X_\alpha; u) = \sup_{\substack{t, s \in \mathbb{T} \\ 0 < |t-s| \leq u}} |X_\alpha(t) - X_\alpha(s)|.$$

Наслідок 1. Оскільки Δ^2 -умова виконується
 $\forall x > 0$ при $L = \sqrt{2}$, то у такому випадку
 $z_0 = \sqrt{2}$ і для будь-якого $u < \frac{T}{2(e-2)} =: u_{**}$
виконується нерівність $N(u) > U(z_0)$. Тоді
 $\forall x \geq \sqrt{2}$ та $u \in (0, \min\{u_*, u_{**}\})$ справджує-
ться нерівність:

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{\substack{t, s \in \mathbb{T} \\ 0 < |t-s| \leq u}} \frac{|X_\alpha(t) - X_\alpha(s)|}{3(8 + 5\sqrt{2}) g_\alpha(|t-s|)} > x \right\} \leq$$

$$\leq \frac{3 + \sqrt{2}}{\exp\left\{\frac{x^2}{2}\right\} - 1}. \quad (5)$$

Більше того,

$$\limsup_{u \downarrow 0} \frac{\Delta(X_\alpha; u)}{6(5 + 4\sqrt{2}) g_\alpha(u)} \leq 1$$

майже напевно, де

$$\Delta(X_\alpha; u) = \sup_{\substack{t, s \in \mathbb{T} \\ 0 < |t-s| \leq u}} |X_\alpha(t) - X_\alpha(s)|.$$

Зауваження 1. Значення правої частини не-
рівності (5) менше 1 при $x > \sqrt{2 \ln(4 + \sqrt{2})}$.

Приклад 1. Нехай $T = 1$, $c = \frac{3}{2}$, $\sigma = \frac{1}{4}$ та $u = \frac{1}{2} \in \left(0, \min \left\{ \sqrt[3]{4}, \frac{1}{2(e-2)} \right\}\right)$. Якщо $\alpha \in (0, 2)$, то нехай $\beta = \frac{\alpha}{2}$, та $\beta = \frac{1}{2}$, якщо $\alpha = 2$. Отже, згідно із наслідком 1 та зауваженням 1, у такому випадку $\forall x \geq \sqrt{2 \ln(4 + \sqrt{2})}$ має місце нерівність:

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{\substack{t,s \in [0,1] \\ 0 < |t-s| \leq \frac{1}{2}}} \frac{|X_\alpha(t) - X_\alpha(s)|}{3(8 + 5\sqrt{2})h_1(\alpha)} > x \right\} \leq \frac{3 + \sqrt{2}}{e^{\frac{x^2}{2}} - 1},$$

де $h_1(\alpha) = \frac{2^{1-\frac{\alpha}{4}}}{\sqrt{\alpha}}$, якщо $\alpha \in (0, 2)$ та $h_1(2) = \frac{2^{3/4}}{3}$.

Якщо для $q \in (0, 1)$:

$$\frac{3 + \sqrt{2}}{e^{\frac{x^2}{2}} - 1} = q \Leftrightarrow x = \sqrt{2 \ln \left(1 + \frac{3 + \sqrt{2}}{q} \right)},$$

то з імовірністю, більшою за $1 - q$, справджується така оцінка $\forall \alpha \in (0, 2]$:

$$\sup_{\substack{t,s \in [0,1] \\ 0 < |t-s| \leq \frac{1}{2}}} |X_\alpha(t) - X_\alpha(s)| \leq 6(5 + 4\sqrt{2}) \times \\ \times \sqrt{\ln \left(1 + \frac{3 + \sqrt{2}}{q} \right)} \cdot h_1(\alpha). \quad (6)$$

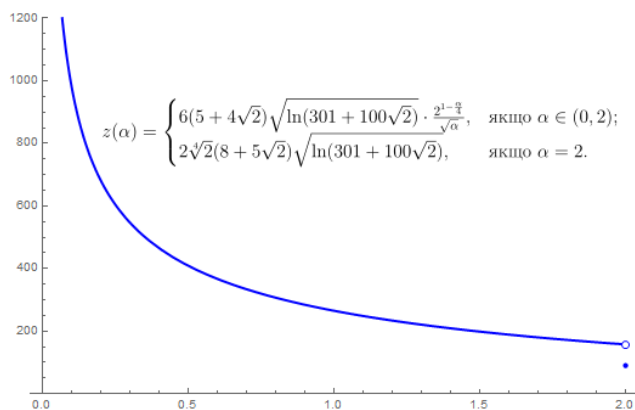


Рис. 1. Значення правої частини нерівності (6) в залежності від обраного α для $q = 0,01$

Приклад 2. Нехай $c = \frac{3}{2}$, $\sigma = \frac{1}{4}$ та $T = 2(1 - u)$. У такому разі для будь-яких $x \geq \sqrt{2 \ln(4 + \sqrt{2})}$, $\alpha \in (0, 2]$, $u \in \left(0, \frac{1}{e-1}\right)$ та $\beta \in (0, 1)$ згідно із наслідком 1 та зауваженням 1 має місце нерівність:

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{\substack{t,s \in [0,2(1-u)] \\ 0 < |t-s| \leq u}} \frac{|X_\alpha(t) - X_\alpha(s)|}{h_3(\alpha, u, \beta)} > x \right\} \leq \frac{3 + \sqrt{2}}{e^{\frac{x^2}{2}} - 1},$$

де $h_3(\alpha, u, \beta) = \frac{3\alpha(5+4\sqrt{2})}{\sqrt{\beta(\alpha-\beta)}} u^{\frac{\alpha-\beta}{2}}$.

Функцію $h_3(\alpha, u, \beta)$ можна мінімізувати по змінній β . З умови $\frac{\partial h_3(\alpha, u, \beta)}{\partial \beta} = 0$ маємо, що оптимальним є значення

$$\beta(\alpha, u) = \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{2 \ln u} - \frac{1}{2} \sqrt{\alpha^2 - \frac{2\alpha}{\ln u} + \frac{9}{\ln^2 u}}.$$

Аналогічно до попереднього прикладу, $\forall q \in (0, 1)$ наступна нерівність справджується $\forall \alpha \in (0, 2]$ та $u \in \left(0, \frac{1}{e-1}\right)$ з імовірністю, більшою за $1 - q$:

$$\sup_{\substack{t,s \in [0,2(1-u)] \\ 0 < |t-s| \leq u}} |X_\alpha(t) - X_\alpha(s)| \leq 6(5 + 4\sqrt{2}) \times \\ \times \sqrt{\ln \left(1 + \frac{3 + \sqrt{2}}{q} \right)} \cdot h_4(\alpha, u), \quad (7)$$

де $h_4(\alpha, u) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\beta(\alpha, u)(\alpha - \beta(\alpha, u))}} u^{\frac{\alpha - \beta(\alpha, u)}{2}}$,
 $\beta(\alpha, u) = \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{2 \ln u} - \frac{1}{2} \sqrt{\alpha^2 - \frac{2\alpha}{\ln u} + \frac{9}{\ln^2 u}}.$

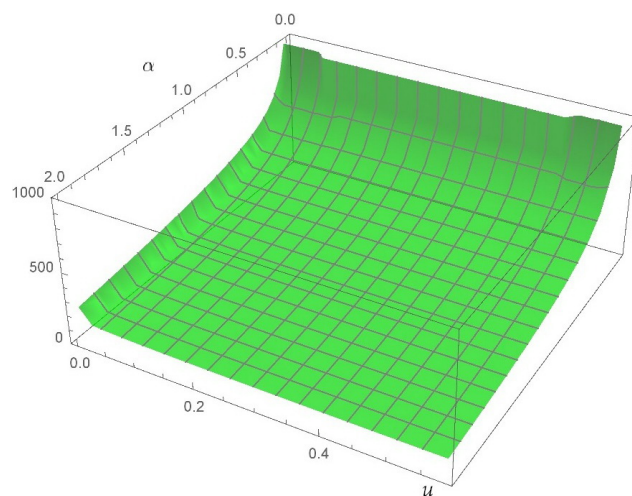


Рис. 2. Значення правої частини нерівності (7) в залежності від обраних α та u для $q = 0,01$

Висновки

У роботі проаналізовано оцінки розподілу деяких функціоналів для дійсних стаціонарних гауссових процесів. Зокрема, розглянуто зв'язок між траєкторіями стаціонарних гауссових власних комплексних випадкових процесів, що мають нульове математичне сподівання, та простором Орліча, що породжений функцією $U(x) = e^{\frac{x^2}{2}} - 1$. Для розподілу напівнорм від гауссових власних комплексних випадкових процесів, визначених на компакт $\mathbb{T} = [0, T]$, отримано оцінки у просторах Гельдера.

Список використаних джерел

1. Buldygin V.V. Metric Characterization of Random Variables and Random Processes / V.V. Buldygin, Yu.V. Kozachenko. — American Mathematical Society: Providence, RI, 2000. — 257 с.
2. Kozachenko Yu.V. Lipschitz conditions for stochastic processes in the Banach spaces $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ of random variables / Yu.V. Kozachenko, D.V. Zatula // Theory of Probability and Mathematical Statistics. — 2015. — №91. — С. 43-60.
3. Kozachenko Yu.V. Estimates for distributions of Hölder semi-norms of random processes from $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ spaces, defined on the interval $[0, \infty)$ / Yu.V. Kozachenko, D.V. Zatula // Statistics, Optimization & Information Computing. — 2019. — №7 (1). — С. 198-210.
4. Dudley R.M. Sample functions of the Gaussian processes. / R.M. Dudley // The Annals of Probability. — 1973. — №1 (1). — С. 3-68.
5. Козаченко Ю.В. Случайные процессы в пространствах Орлича. I. / Ю.В. Козаченко // Теория вероятн. и матем. статист. — 1984. — №30. — С. 92-107.
6. Затула Д.В. Модулі неперервності випадкових процесів з просторів Орліча випадкових величин, визначених на інтервалі / Д.В. Затула // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. — 2013. — №2. — С. 23-28.
7. Петранова М.Ю. Власні комплексні випадкові процеси. / М.Ю. Петранова, Ю.В. Козаченко // Збірники наукових праць професорсько-викладацького складу ДонНУ імені Василя Стуса. — 2017.
8. Козаченко Ю.В. Дійсні стаціонарні гаусові процеси зі стійкими кореляційними функціями. / Ю.В. Козаченко, М.Ю. Петранова // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика». — 2017. — №2 (31). — С. 90-100.

References

1. BULDYGIN, V.V. and KOZACHENKO, I.V. (2000) *Metric characterization of random variables and random processes* (Vol. 188). American Mathematical Soc.
2. KOZACHENKO, Yu.V. and ZATULA, D.V. (2015) Lipschitz conditions for stochastic processes in the Banach spaces $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ of random variables. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*. 91. pp.43-60.
3. KOZACHENKO, Yu.V. and ZATULA, D.V. (2019) Estimates for distributions of Hölder semi-norms of random processes from $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ spaces, defined on the interval $[0, \infty)$. *Statistics, Optimization & Information Computing*. 7 (1). pp.198-210.
4. DUDLEY, R.M. (1973) Sample functions of the Gaussian processes. *The Annals of Probability*. 1 (1). pp.3-68.
5. KOZACHENKO, Yu.V. (1985) Random processes in Orlicz spaces. I. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*. 30. pp.103-117. (in Russian)
6. ZATULA, D.V. (2013) Modules of continuity of random processes from Orlicz spaces of random variables, defined on the interval. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*. (2). pp.23-28.
7. PETRANOVA, M.Yu. and KOZACHENKO, Yu.V. (2017) Vlasni kompleksni vypadkovi procesy. *Zbirnyky naukovykh prac' profesors'ko-vykladac'koho skladu DonNU imeni Vasylya Stusa*.
8. KOZACHENKO, Yu.V. and PETRANOVA, M.Yu. (2017) Dijsni stacionarni hausovi procesy zi stijkymy korelyacijnymy funkciyamy. *Naukovyj visnyk Uzhhorods'koho universytetu. Seriya «Matematyka i informatyka»*. 2 (31). pp.90-100.

Надійшла до редколегії 11.08.2019

УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/1-2.4>

В.П. Зубченко¹, к.ф.-м.н.
Є.О. Костюк²,
М.О. Лукашук³,
А.М. Ярошевський⁴

Класифікація зміни рейтингу фінансових показників страхових компаній

¹⁻⁴Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Воло-
димирська, 64.

³Instituto Politecnico Nacional, Centro de
Investigacion en Computacion, Mexico City, Av.
Juan de Dios Batiz S/N, Nueva Industrial Vallejo,
Gustavo A. Madero, 07738 Ciudad de Mexico,
Mexico

e-mail: ¹v_zubchenko@ukr.net,

²kosteugeneo@gmail.com,

³lukashuk.nikola@gmail.com,

⁴yaro.andriy@gmail.com

V.P. Zubchenko¹, Ph.D.
Ye.O.Kostiuk²,
M.O. Lukashchuk³,
A.M. Yaroshevskiy⁴

Rating change classification of insurance companies indicators

¹⁻⁴Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.

³Instituto Politecnico Nacional, Centro de
Investigacion en Computacion, Mexico City, Av.
Juan de Dios Batiz S/N, Nueva Industrial Vallejo,
Gustavo A. Madero, 07738 Ciudad de Mexico,
Mexico

e-mail: ¹v_zubchenko@ukr.net,

²kosteugeneo@gmail.com,

³lukashuk.nikola@gmail.com,

⁴yaro.andriy@gmail.com

У роботі досліджуються залежності між фінансовими показниками страхових компаній та простором новин, який розглядається у вигляді сукупності тематик. Метою роботи є побудова моделі для передбачення напрямку зміни рейтингу страхової компанії за заданим показником (вгору або вниз від поточної позиції в рейтингу) на основі множини новинних статей за відповідний проміжок часу. Було створено підхід, який включає пошук найбільш впливових тем для заданого показника. Використано метод тематичного моделювання Latent Dirichlet Allocation (LDA) та наївний байєсів класифікатор. Для оцінки було використано Leave-One-Out валідацію часових рядів із метрикою точності.

Ключові слова: LDA, статистичний аналіз новин, тематичне моделювання, наївний байєсів класифікатор, фінансові показники страхової компанії.

In this paper we investigate the relationship between financial indicators of insurance companies and news space. The news space is considered as a set of topics. The goal of the paper is to fit the model in order to forecast company's rating change for given indicators – whether rating will go up or down regarding the current value. As the data set we use news articles of the relevant insurance topics for the specified time period. The approach we use includes search for the most influential topics for the given indicator. To retrieve topics, we used Latent Dirichlet Allocation (LDA) algorithm and Naive Bayes model. For the validation the Leave-One-Out approach was used with accuracy metric.

Key Words: LDA, news space analysis, topic modelling, Naive Bayes, financial indicators of insurance company.

1 Вступ

У роботі досліджується питання прогнозування зміни рейтингів фінансових показників страхових компаній. Використано відкриті дані страхового ринку України та, для прикладу, показник сумарних активів страхових компаній. Відкриті дані щодо історичних показників фінансового рейтингу страхо-

вих компаній України доступні за посиланням <https://forinsurer.com/ratings/nonlife>. Дана задача є важливою, оскільки в багатьох галузях, зокрема в страхуванні, недостатньо даних для побудови прогнозного механізму в режимі реального часу. Обмеження виникають з різних причин, таких як законодавче регулювання, занадто велика ціна підготовки фінансових звітів, недостатня автоматизація й цифровізація

бізнес-процесів компаній тощо. Наприклад, різниця між наявними даними щодо фінансової динаміки страхових компаній та ринком акцій полягає в тому, що інформація щодо ціни акцій компанії на біржі доступна майже у довільний час. Натомість щодо страхового ринку оперативної інформації дуже мало. Єдине, що відомо – це динаміка ключових фінансових показників страхових компаній на основі щоквартальних фінансових звітів. Також, страховики зобов'язані на щорічній основі публікувати баланс, звіт про прибутки та збитки, та дані щодо ключових показників страхової діяльності.

2 Попередні дослідження

Дослідження ринку показало, що вплив засобів масової інформації у фінансовому секторі за останні роки значно збільшився, особливо у сфері фондового ринку. Так, опубліковано велику кількість результатів щодо залежності між інформацією, поширеною в ЗМІ, та ціною акцій, волатильністю та трендом їх динаміки [7, 8, 9, 10]. Наприклад, у [11] було показано, що медіапростір пов'язаний із фондовими ринками. Такі зв'язки дуже складні і включають вплив на поведінку інвесторів.

У роботі [12] використовується метод LDA з класифікатором, який забезпечує прогнозування волатильності для часових діапазонів з 20-хвилинним зміщенням. Взявши за основу даний підхід, ми адаптуємо його для побудови моделі прогнозування руху рейтингів фінансових показників страхових компаній відносно конкурентів (на відміну від прогнозування абсолютних значень). У роботі [13] автор проводить аналіз впливу на фінансову динаміку акцій інформації із соціальних мереж та ЗМІ. У задачі прогнозування волатильності автору вдалося досягнути точності 83,2%.

Результатів щодо аналізу динаміки страхових компаній за допомогою методі машинного навчання та data-science значно менше, оскільки звітні дані доступні здебільшого лише на щоквартальній основі. Залежно від законодавчого регулювання конкретної країни звітні дані можуть подаватись із різною частотою, втім у відкритому доступі найчастіше доступна саме щоквартальна динаміка, на відміну від значно вищої частоти даних із фондових ринків, де ціни можна отримати практично в будь-який мо-

мент часу. Отже, страховий ринок має принципово іншу структуру даних, ніж фондовий ринок, оскільки ми не можемо щодня здійснювати моніторинг інформації щодо динаміки зміни фінансових показників страхових компаній. Також одним із факторів виступає доступ до інформаційних медіа ресурсів. Коли новини про фондові ринки досить популярні у суспільстві та мають величезну аудиторію, то зі страхуванням дещо важче. В Україні, де страхування досі є темою більш вузькоспеціалізованою, окремих медіа ресурсів, які спрямовані саме на цю тему не так багато. Зазвичай новини розріджені по всіх можливих журналах, сайтах тощо, що ускладнює задачу збору та аналізу даних.

3 Використані алгоритми

3.1 Latent Dirichlet allocation (LDA)

У роботі Blei et al. [1] була описана генеративна статистична модель, яка кожному документу ставить у відповідність ймовірності наявності у ньому наперед заданої кількості тематик. LDA спирається на деякі припущення щодо структури документів, такі як:

- порядок слів не має значення;
- кількість тем заздалегідь відома (або оцінюється заздалегідь);
- розподіл тематик моделюється розподілом Діріхле.

У LDA кожен документ складається з тематик, які розглядаються як латентні (приховані) змінні. Кожна тема розглядається як набір слів із ймовірностями кожного слова потрапити у тему. Відповідно, після процедури підгонки є можливим оцінити за цими ймовірностями розподіл тем на документ. Ці ймовірності і є “основними” параметрами моделі.

Більш детально, LDA – це ієрархічна баєсівська модель, що складається з двох рівнів: перший рівень складається з компонентів, які відповідають “тематикам” (або його ще називають латентним рівнем); другий рівень – мультиноміальна змінна з апіорним розподілом Діріхле, яка відповідає за класифікацію “тематик” у документі. Потім для кожного слова будується його розподіл належності до кожної з тем.

Однією з переваг підходу є робота на нерозмічених текстах. Досить часто розмітка є проблемою за рахунок вартості та часу. Як вже зазначалося, в умовах страхового медіа простору така розмітка та збір даних інколи є досить суттєвим обмеженням.

3.2 Тестування

Leave-One-Out валідація [4] – це метод оцінки моделі. Для проведення оцінки наявні дані діляться на n частини, де n – загальна кількість зразків у наборі даних. Потім $n - 1$ частини використовуються в процесі навчання, а для решти частини ми проводимо тести. Процес повторюється n разів. Таким чином для тестування використовується весь наявний набір даних, що покращує якість перевірки моделі. З іншого боку, такий підхід вимагає більшого часу роботи та ресурсів для навчання n моделей у порівнянні з класичним розбиттям на тренувальну та тестувальну вибірки. Однак з іншого боку, незважаючи на те, що такий підхід дає більш точне уявлення про якість моделі, він витрачає значно більше часу на впровадження – замість однієї моделі треба навчити n , а після – перевірити на всіх даних.

3.3 Коефіцієнт узгодженості

Коефіцієнт узгодженості [5] – коефіцієнт, який обчислюється для кожної теми. Його можна трактувати як оцінку смислової схожості чи спорідненості слів у зазначеній темі. Коефіцієнт узгодженості допомагає зрозуміти, як узгоджуються між собою слова, які визначають тематику. Існує багато різних підходів до обчислення цієї оцінки. У нашому випадку він обчислюється наступним чином. Покладемо $t_i = \{w_k^i, k = 1, \dots, K\}$ – тема, яка представлена за допомогою K найбільш імовірних слів. Нехай сумарна кількість тематик рівна T . Для векторизації слів використовувалися попередньо обчислені вектори fastText [3] для української мови¹. Вибір векторизації досить суттєвий. Було обрано саме цей згідно наступних причин:

- fastText досить непогано уміє працювати з одруковками, яких у наших текстах очікується немало;

- модель була аналізована на великих об'ємах тексту, що дозволило їй отримати хороші властивості у отриманого векторного простору;

Коефіцієнт обчислюється згідно наступної формули:

$$\frac{1}{T} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^T \sum_{\substack{i \neq j \\ i, j=1}}^K \cos(w_k^i, w_k^j)$$

Чим більший показник узгодженості – тим краще, оскільки ми очікуємо, що слова, які визначають тематику, мають багато спільного.

3.4 Наївний баєсів класифікатор

Ймовірнісна модель наївного баєсового класифікатора [2] – це умовна модель $p(C | F_1, \dots, F_n)$ над залежною змінною C , яка залежить від декількох змінних $F_1, \dots, F_n$. Умовний розподіл змінної C за $F_1, \dots, F_n$ можна зобразити у вигляді: $p(C | F_1, \dots, F_n) = \frac{1}{Z} p(C) \prod_{i=1}^n p(F_i | C)$, де Z – нормуючий множник, який залежить лише від $F_1, \dots, F_n$. Значення прогнозу C визначається згідно $\text{classify}(f_1, \dots, f_n) = \arg \max_c p(C = c) \prod_{i=1}^n p(F_i = f_i | C = c)$

4 Вибірка

Набір даних був отриманий з різних українських новинних веб-сайтів, які містять теги для статті, наприклад, “страхування” та мітку конкретно обраної компанії. Ми розглядали часовий діапазон з початку 2014 року до кінця 2019 року, розділений на квартали (загалом 24 різних періоди часу). Що стосується рейтингу показників для конкретної компанії – дані з відкритих джерел збиралися за кожен квартал. Рейтинги показників були отримані як позиції в рейтингу для досліджуваної страхової компанії відносно динаміки решти компаній у поточному кварталі. Ми зібрали 12829 новинних статей за вказаний часовий проміжок та дослідили рейтинги 22 фінансових показників.

4.1 Обробка ознак та відгуків

Як ознаки, простір новин розділили на відповідну кількість тем (більш докладний опис наведено в розділі “Експерименти та результати”). Для кожної теми $topic_t$ обчислюється сума її

¹<https://fasttext.cc/docs/en/crawl-vectors.html>

ймовірностей за визначений проміжок часу t . Після цього всі теми ранжуються за цим значенням із зміщенням на один часовий проміжок назад. Позначимо отриманий результат як $topic_t^r$. Після цього до кожної теми застосовується функція:

$$\begin{cases} 0 & \text{topic}_t^r \leq \text{topic}_{t-1}^r \\ 1 & \text{topic}_t^r > \text{topic}_{t-1}^r \end{cases}$$

Таким чином, простір новин перетворюємо на бінарний вхід, який показує зміни популярності тем з часом. Аналогічна функція була застосована до відгуку.

5 Експерименти та результати

Для того, щоб встановити характер залежності між поведінкою коефіцієнтів та поточним станом простору новин, на отриманих даних була побудована модель LDA. Кількість тематик була підібрана за допомогою коефіцієнту узгодженості та рівна 60. Як вхідні ознаки, були використані попередньо оброблені бінарні ознаки та відгуки. На цих даних була підлагоджена модель наївного баєсового класифікатора, яка досягла точності 0.77 тобто 17/22, із довірчим інтервалом рівня 0.95: [0.5463, 0.9218]. Для кожної тематики було проведено тест Фішера на перевірку значимості залежностей для кожної з тематик. Нижче наводимо основні результати, що свідчить про існування залежності між певними новинними тематиками та обраним фінансовим показником сумарних активів страхової компанії. Опис тематик з найбільш ймовірних 5 слів для кожної новинної тематки виглядає наступним чином:

- Тематика 18, p-value: 0,039, Кореляція: 0.441;
- Тематика 19, p-value: 0,039, Кореляція: 0.442;
- Тематика 26, p-value: 0,009, Кореляція: 0.541.
- Тематика 18; Слова: грудень, субота, понеділок, перенести, карта;
- Тематика 19; Слова: медичний, державний, суб'єкт, ступінь, ризик;
- Тематика 26; Слова: ліцензія, страхування, страховий, фінансовий, здійснювати.

Можна помітити, що слова, що визначають тематики вдалося отримати досить непогано - загалом, вони мають зміст. Можна виділити тему медичного страхування, яка була досить популярною в українському суспільстві. Також виділяється тема деяких часових новин - має місце сезонність новин - наприклад, зміна пор року та відповідні проблеми, що виникають під час таких процесів. Згідно отриманих результатів статистичних тестів можна стверджувати існування статистичної залежності між відгуком та ознаками.

6 Висновок

У роботі показано існування статистично значущої залежності між змінами простору новин у засобах масової інформації та ключовими показниками фінансової динаміки страхової компанії. Результат показує, що за допомогою використаних в роботі методів машинного навчання можна краще зрозуміти поточний фінансовий стан страхової компанії та спрогнозувати тренд її фінансової динаміки на конкурентному ринку. Використання більшої кількості даних та часових фрагментів може допомогти краще зрозуміти вплив ЗМІ на компанії, про які ми маємо обмежену кількість інформації. Дослідження можуть бути корисними для оцінювання ефективності потенційних інвестицій та трендів розвитку ринку.

Далі від дослідження локального ринку страхових послуг України ми плануємо перейти до дослідження ринків страхових послуг інших країн, зокрема Великобританії, США, Гонконгу, Білорусі та інші. Прогнозуємо, що таке дослідження може виявити схожість динаміки страхового ринку в країнах із однаковими політичними режимами, структурою економіки тощо. Подальший аналіз може показати й принципові відмінності між динамікою страхового ринку різних країн. Загалом використані методи покликані забезпечити можливість прогнозування ключових фінансових показників на основі інформації із ЗМІ та соціальних мереж навіть в умовах відсутності відкритого доступу до фінансової звітності страхових компаній. З іншого боку, такий аналіз дає краще розуміння залежностей новинного простору та його впливом на цілком реальні фінансові показники різних компаній. У епоху такого різнома-

ніття думок та суспільних ресурсів для компанії досить важливо мати надійний інструмент для підрахунку у відносних чи абсолютних значеннях змін у суспільній думці щодо компанії.

Більш того, часто необхідно зважувати та порівнювати ступінь впливу того чи іншого видання на кінцевий результат компанії.

Список використаних джерел

1. Blei, David M. and Ng, Andrew Y. and Jordan, Michael I. (2016), "Latent Dirichlet Allocation", *JMLR.org*, v. 3, pp. 993–1022.
2. Rish, Irina (2001), "An Empirical Study of the Naive Bayes Classifier", *Empir. methods Artif. Intell. Work. IJCAI 2001*, v. 22230, pp. 41-46.
3. Bojanowski, Piotr and Grave, Edouard and Joulin, Armand and Mikolov, Tomas (2017), "Enriching Word Vectors with Subword Information", *Transactions of the Association for Computational Linguistics*, v. 5, pp. 135-146.
4. Stone, M. (1974), "Cross-Validatory Choice and Assessment of Statistical Predictions", *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, v. 36, pp. 111-147.
5. Aletras, Nikolaos and Stevenson, Mark (2013), "Evaluating Topic Coherence Using Distributional Semantics", *Proceedings of the 10th International Conference on Computational Semantics (IWCS 2013) – Long Papers*, pp. 13-22.
6. Gagniuc, Paul A. (2017), *From Theory to Implementation and Experimentation*, John Wiley & Sons, pp. 1–235.
7. Shunrong Shen and Haomiao Jiang and Tongda Zhang (2012), *Stock Market Forecasting Using Machine Learning Algorithms*, Department of Electrical Engineering, Stanford University, Stanford, CA.
8. Hegazy, Osman and Soliman, Omar S. and Abdul Salam, Mustafa (2013), "A Machine Learning Model for Stock Market Prediction", *International Journal of Computer Science and Telecommunications*, v. 4, pp. 17-23.
9. Coupelon, Olivier (2007), "Neural network modeling for stock movement prediction: A state of the art", <https://cutt.ly/Js9lhiM>
10. Tetlock, Paul (2007), "Giving Content to Investor Sentiment: The Role of Media in the Stock Market", *Journal of Finance*, v. 62, pp. 1139-1168.
11. Engelberg, Joseph and Parsons, Christopher (2011), "The Causal Impact of Media in Financial Markets", *The Journal of Finance*, v. 66, pp. 67-97.
12. Atkins, Adam and Niranjana, Mahesan and Gerding, Enrico (2018), "Financial News Predicts Stock Market Volatility Better Than Close Price", *The Journal of Finance and Data Science*, v. 4.
13. Khan, Wasia and Ghazanfar, Mustansar ali and Azam, Muhammad Awaiz and Karami, Amin and Alyoubi, Khaled and Alfakeeh, Ahmed (2020), "Stock market prediction using machine learning classifiers and social media, news", *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*.
14. Floreddu, P. and Cabiddu, Francesca (2014), "Managing Online Reputation: The Role of Social Media in Insurance Industry", *Academy of Management Proceedings*, v. 1.
15. Cerqueira, Vitor and Torgo, Luis and Mozetic, Igor (2019), *Evaluating time series forecasting models: An empirical study on performance estimation methods*.

Received: 17.01.2020

УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/1-2.5>

О.Д. Колле¹, студент
Р.Є. Ямненко², д.ф.-м.н., доцент

**Альтернативна оцінка ймовірності
виходу за криву траєкторії
субгауссового випадкового процесу**

^{1,2}Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Воло-
димирська, 64.

e-mail: ¹aleksandra.kolle@gmail.com, ²yamnenko@univ.kiev.ua

O.D. Kollie¹, Student
R.E. Yamnenko², D.Sc., Associate Professor
**Alternative estimate of curve exceeding
probability of sub-Gaussian random
process**

^{1,2}Taras Shevchenko National University of
Kyiv, Ukraine 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska str.

У даній роботі було отримано альтернативну оцінку зверху ймовірності виходу траєкторій субгауссового процесу, заданого на компактi, за криву, зокрема за лінійну функцію. Дослідження базується на результатах, отриманих у роботі [3]. Субгауссові випадкові процеси представляють значний інтерес для дослідження, оскільки отримані результати також можна застосовувати до гауссових процесів.

Ключові слова: субгауссовий процес, метрична ентропія, розподіл супремуму, траєкторія випадкового процесу.

Investigation of sub-gaussian random processes are of special interest since obtained results can be applied to Gaussian processes. In this article the properties of trajectories of a sub-Gaussian process drifted by a curve are studied. The following functionals of extremal type from stochastic process are studied: $\sup_{t \in B} (X(t) - f(t))$, $\inf_{t \in B} (X(t) - f(t))$ and $\sup_{t \in B} |X(t) - f(t)|$. An alternative estimate of exceeding by sub-Gaussian process a level, given by a continuous linear curve is obtained. The research is based on the results obtained in the work [3]. The results can be applied to such problems of queueing theory and financial mathematics as estimation of buffer overflow probability and bankruptcy probability.

Key Words: sub-Gaussian process, metric entropy, supremum distribution, trajectory of random process.

Communicated by Prof. Mishura Yu.S.

1 Introduction

The paper continues cycle of works studying properties of sub-Gaussian random processes and their generalizations from the class $V(\varphi, \psi)$. Recall, that sub-gaussian random variables are majorized in distribution by Gaussian random variables, and thus are of particular interest as their natural generalization. Here we look at the probability of exceeding by a sub-Gaussian random process a level given by linear function from another view and obtain an alternative estimate. Such estimates can be useful in queueing theory, financial mathematics and in some engineering problems. For example, to support operations of electronic devices the electric current must be in between maximum permissible amperage and permissible voltage drop. The estimate $\mathbf{P}\{\sup_{t \in B} (X(t) - f(t)) > x\}$ determines the probability that the current exceeds the upper

bound $f(t)$, $\mathbf{P}\{\inf_{t \in B} (X(t) - f(t)) > -x\}$ determines the probability that the current falls below the lower bound $f(t)$.

The next part of this section contains some basic notions of random variables and processes from the spaces $Sub_{\varphi}(\Omega)$ and the class $V(\varphi, \psi)$. More details can be found in monographs [1, 2].

Let $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ be a standard probability space and T be some parametrical space.

Definition 1.1. [1] Metric entropy with regard to pseudometric (metric) ρ , or just metric entropy is a function $H_T(u) = H(u) = \begin{cases} \log N_{(T, \rho)}(u), & \text{if } N_{(T, \rho)}(u) < +\infty \\ +\infty, & \text{if } N_{(T, \rho)}(u) = +\infty \end{cases}$, where $N_T(u) = N(u)$ denotes the least number of closed ρ -balls with radius u covering space (T, ρ) .

Definition 1.2. [1] Let φ be such an Orlicz N-function, that $\varphi(x) = cx^2$ as $|x| \leq x_0$ for some $c > 0$; $x_0 > 0$. Centered random variable ξ belongs

to the space $Sub_\varphi(\Omega)$, if for all $\lambda \in \mathbb{R}$ there exists a constant $a \geq 0$, which satisfies the following inequality

$$E \exp(\lambda \xi) \leq \exp(\varphi(a\lambda)).$$

Definition 1.3. [3] N -function φ is subordinated by an Orlicz N -function ψ ($\varphi \prec \psi$) if there are exist such numbers $x_0 > 0$ and $k > 0$ that $\varphi(x) < \psi(kx)$ for $x > x_0$.

Definition 1.4. [3] Let $\varphi \prec \psi$ are two Orlicz N -functions. Random process $X = \{X(t), t \in T\}$ belongs to class $V(\varphi, \psi)$ if for all $t \in T$ the random variable $X(t)$ is from $Sub_\psi(\Omega)$ and for all $s, t \in T$ increments $(X(t) - X(s))$ belong to the family $Sub_\varphi(\Omega)$.

2 Main result

Let (T, ρ) be a pseudometrical (metrical) compact space with pseudometric (metric) ρ and $X = \{X(t), t \in T\}$ be a separable random process from the class $V(\varphi, \psi)$.

Condition Σ . Suppose there exists such a continuous monotonically increasing function $\sigma = \{\sigma(h), h > 0\}$, that $\sigma(h) \rightarrow 0$, as $h \rightarrow 0$, and the following inequality for increments of the process is true

$$\sup_{\rho(t,s) \leq h} \tau_\varphi(X(t) - X(s)) \leq \sigma(h). \quad (1)$$

Put $\gamma(u) = \tau_\psi(X(u)) < \infty$, and $\beta > 0$, be such a number that $\beta \leq \sigma(\inf_{s \in B} \sup_{t \in B} \rho(t, s))$.

The following lemma contains conditions on boundness of supremum of the drifted random process $X_f(t) = X(t) - f(t)$ and estimates of its exponential moments.

Lemma 1. [3] Let $X = \{X(t), t \in T\}$ be a separable random process from the class $V(\phi, \psi)$ satisfying Condition Σ and let $f = \{f(t), t \in T\}$ be a continuous function such that $|f(u) - f(v)| \leq \delta(\rho(u, v))$, where $\delta = \{\delta(s), s > 0\}$ is some monotonically increasing nonnegative function. Let $\{q_k, k = 1, 2, \dots\}$ be a sequence such that $q_k > 1$ and $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k} \leq 1$. Then for all $\lambda > 0$ and $p \in (0, 1)$ the following inequality holds true

$$E \exp\{\lambda \sup_{t \in B} X_f(t)\} \leq \prod_{k=1}^{\infty} (N_B(\sigma^{(-1)}(\beta p^k)))^{\frac{1}{q_k}} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{1}{q_1} \sup_{u \in B} (\psi(\lambda q_1 \gamma(u)) - \lambda q_1 f(u))\right\} \times \prod_{k=1}^{\infty} \exp\left\{\frac{1}{q_k} \varphi(\lambda q_k \beta p^{k-1}) + \lambda \delta(\sigma^{(-1)}(\beta p^{k-1}))\right\}. \quad (2)$$

Different kinds of sequences q_k were studied previously (see [2]), for example, $q'_k = ((1-p)p^{k-1})^{-1}$, and $q''_1 = v$, where v is such a number that $v \geq \frac{1}{1-p}$ and $q''_k = \frac{1}{\lambda \beta p^{k-1}} \varphi^{(-1)}\left(\varphi\left(\frac{\lambda \beta}{1-p}\right) + H(\varepsilon_k)\right)$, $k = 2, 3, \dots$

Consider another sequence $q_k = 2^k, k \geq 1$. As a example, let's apply Lemma 1 to to a sub-Gaussian random process X , for which $\sigma(h) = Ch^\alpha$, $C > 0$, drifted by the function $f(t) = at$, $a > 0$.

Theorem 2.1. Let $X = (X(t), t \in B)$ be a sub-Gaussian random process then the following equations hold true for $p \in (0, 1)$ and $x > 0$.

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t \in B} (X(t) - at) > x\right\} \leq Z(\lambda, p, \beta, x),$$

$$\mathbf{P}\left\{\inf_{t \in B} (X(t) - at) < -x\right\} \leq Z(\lambda, p, \beta, x),$$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t \in B} |X(t) - at| > x\right\} \leq 2Z(\lambda, p, \beta, x),$$

where $Z(\lambda, p, \beta, x) =$

$$r^{(-1)}\left(2 \int_0^{\frac{1}{2}} r\left(N(\sigma^{(-1)}(\beta p u^{\log_{\frac{1}{2}} p}))\right) du\right) \times \exp\left\{\frac{-\left(2au + x - \left(\frac{\beta}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \frac{p^{\frac{1}{\alpha}}}{1-p^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^2 (1-2p^2)}{2((1-2p^2) \sup_{u \in B} [2\gamma^2(u)] + 2\beta^2 2p^2)}\right\}.$$

Доведення. Let's consider each element of (2).

Note that $p^k = (\frac{1}{2})^{k \log_{\frac{1}{2}} p}$. Since

$$\int_{\frac{1}{2^{k+1}}}^{\frac{1}{2^k}} r(N(\sigma^{(-1)}(\beta u^{\log_{\frac{1}{2}} p^k}))) du \geq r(N(\sigma^{(-1)}(\beta p^k))) \left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}}\right),$$

we have that

$$\prod_{k=1}^{\infty} (N_B(\epsilon_k))^{\frac{1}{q_k}}$$

$$\begin{aligned} &\leq r^{(-1)} \left(2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^{k+1}}}^{\frac{1}{2^k}} r(N(\sigma^{(-1)}(\beta u^{\log_{\frac{1}{2}} p}))) du \right) \\ &= r^{(-1)} \left(2 \int_0^{\frac{1}{2}} r(N(\sigma^{(-1)}(\beta p u^{\log_{\frac{1}{2}} p}))) du \right) \quad (3) \end{aligned}$$

Let's consider other elements in (2). Since $\varphi(x) = \psi(x) = \frac{x^2}{2}$, $\delta(u) = a|u|$ and $\sigma^{(-1)}(h) = (\frac{h}{C})^{\frac{1}{\alpha}}$, we have that

$$\begin{aligned} &\exp \left\{ \frac{1}{q_1} \sup_{u \in B} (\psi(\lambda q_1 \gamma(u)) - \lambda q_1 f(u)) - \lambda x \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \sup_{u \in B} \left[\frac{(2\lambda \gamma(u))^2}{2} \right] - 2\lambda a u - \lambda x \right\}. \end{aligned}$$

Next,

$$\begin{aligned} &\prod_{k=1}^{\infty} \exp \left\{ \frac{1}{q_k} \varphi(\lambda q_k \beta p^{k-1}) \right\} \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \exp \left\{ \frac{1}{2^k} 2\lambda^2 2^{2k} \beta^2 p^{2k-2} \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{\lambda \beta^2}{2} \sum_{k=2}^{\infty} 2^k p^{2k-2} \right\} = \exp \left\{ \frac{\lambda \beta^2 2p^2}{1-2p^2} \right\}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} &\prod_{k=1}^{\infty} \exp \left\{ \lambda \delta(\sigma^{(-1)}(\beta p^{k-1})) \right\} \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \exp \left\{ \lambda \delta \left| \frac{\beta p^{k-1}}{C} \right|^{\frac{1}{\alpha}} \right\} \\ &= \exp \left\{ \left(\frac{\beta}{C} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} (p^{\frac{1}{\alpha}})^{k-1} \right\} \end{aligned}$$

Список використаних джерел

1. Buldygin, V.V., Kozachenko, Yu.V. Metric characterization of random variables and random processes / V.V. Buldygin, Yu.V. Kozachenko // AMS, Providence RI. – 2000.
2. Ямненко Р.Є., Юрченко Н.В. φ -субгауссові випадкові процеси: монографія / О. Васи́лик, Ю. Козаченко, Р. Ямненко // К: ВПЦ “Київський університет” – 2008. – 231 с.
3. Vasylyk, O., Yamnenko, R. Random Process from the Class $V(\varphi, \psi)$: Exceeding a Curve / O. Vasylyk, R. Yamnenko // Theory of Stochastic Processes – 2007. – Vol. 13(29), n. 4. – P. 219 – 232.

$$= \exp \left\{ \lambda \left(\frac{\beta}{C} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \frac{p^{\frac{1}{\alpha}}}{1-p^{\frac{1}{\alpha}}} \right\}.$$

Combining the above, consider only the exponential part, i.e.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sup_{u \in B} \left[\frac{(2\lambda \gamma(u))^2}{2} \right] - 2\lambda a u - \lambda x + \\ &+ \frac{\lambda^2 \beta^2 2p^2}{1-2p^2} + \lambda \left(\frac{\beta}{C} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \frac{p^{\frac{1}{\alpha}}}{1-p^{\frac{1}{\alpha}}} \quad (4) \end{aligned}$$

Then we can minimize this expression with respect to λ . Equating its partial derivative to zero, the following equation is obtained.

$$\begin{aligned} &\lambda \sup_{u \in B} [(2\gamma(u))^2] - 2au - x + \\ &+ \frac{2\lambda \beta^2 2p^2}{1-2p^2} + \lambda \left(\frac{\beta}{C} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \frac{p^{\frac{1}{\alpha}}}{1-p^{\frac{1}{\alpha}}} = 0 \end{aligned}$$

Its solution is

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2au + x - \left(\frac{\beta}{C} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \frac{p^{\frac{1}{\alpha}}}{1-p^{\frac{1}{\alpha}}}}{\sup_{u \in B} [(2\gamma(u))^2] + \frac{2\beta^2 2p^2}{1-2p^2}} \\ &= \frac{\left(2au + x - \left(\frac{\beta}{C} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \frac{p^{\frac{1}{\alpha}}}{1-p^{\frac{1}{\alpha}}} \right) (1-2p^2)}{(1-2p^2) \sup_{u \in B} [(2\gamma(u))^2] + 2\beta^2 2p^2}. \end{aligned}$$

After substituting this λ in (4), the assertion of the Theorem follows from (3) and Lemma 1. $\square$

References

1. BULDYGIN, V.V. and KOZACHENKO, Yu.V. (2000), *Metric characterization of random variables and random processes*, AMS, Providence RI.
2. VASYLYK, O., KOZACHENKO, Yu. and YAMNENKO R. (2008), *φ -subgaussovi vypadkovi protsesy: monographiya*, Kyiv: Vydavnycho-Poligrafichnyi Tsent, Kyivskiyi Universytet, 231 p.
3. VASYLYK, O. and YAMNENKO R. (2007), "Random Process from the Class $V(\varphi, \psi)$: Exceeding a Curve", *Theory of Stochastic Processes*, Vol. 13(29), n.4. pp. 219 – 232.

Received: 30.01.2020

УДК 519.1

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/1-2.6>

Б.С. Пономарчук¹

Метрична розмірність прямої суми та прямого добутків метричних просторів

¹Національний університет "Києво-Могилянська академія", 04655, м. Київ, вул. Григорія Сковороди, 2.
e-mail: ¹ponomarchuk.bogdan@gmail.com

B.S. Ponomarchuk¹

Metric dimension of a direct sum and direct product of metric spaces

¹National University of Kyiv-Mohyla Academy, 04655, Kyiv, 2 Scovoroda st.
e-mail: ¹ponomarchuk.bogdan@gmail.com

Для довільного метричного простору (X, d) підмножина $A \subset X$ називається розділяючою, якщо для деяких двох точок $x \neq y \in X$ існує точка a з множини A така, що $d(a, x) \neq d(a, y)$. Метричною розмірністю $md(X)$ простору X називається потужність розділяючої множини з найменшою кількістю елементів.

Загалом задача пошуку метричної розмірності метричного простору є NP-важкою задачею [1]. В даній роботі описано метричну розмірність для деяких конструкцій метричних просторів, зокрема повністю охарактеризовано метричну розмірність прямої суми метричних просторів і розглянуто певні властивості метричної розмірності прямого добутку метричних просторів.

Ключові слова: метрична розмірність, пряма сума метричних просторів, прямий добуток метричних просторів.

For an arbitrary metric space (X, d) subset $A \subset X$ is called resolving if for any two points $x \neq y \in X$ there exists point a in subset A for which following inequality holds $d(a, x) \neq d(a, y)$. Cardinality of the subset A with the least amount of points is called metric dimension.

In general, the problem of finding metric dimension of a metric space is NP-hard[1]. In this paper metric dimension for particular constructs of metric spaces is provided. In particular, it is fully characterized metric dimension for the direct sum of metric spaces and shown some properties of the metric dimension of direct product.

Key Words: metric dimension, direct sum of metric spaces, direct product of metric spaces.

1 Вступ

Поняття метричної розмірності метричних просторів було введено в 1953 році Блюменталем [2]. Через 20 років воно було застосоване до метричних просторів визначених на графах Харарі, Мелтером і Слатером [3, 4]. З'ясувалось, що метрична розмірність має широке коло застосувань, зокрема в хімії, робототехніці, для визначення місцезнаходження роботів, біології, комбінаторій оптимізації та інших [5, 4]. В загальному випадку пошук метричної розмірності простору, що визначається графами, є NP-важкою задачею, оскільки до задачі пошуку метричної розмірності зводиться задача пошуку кліки в графі [1]. Тому дослідження метричної розмірності проводились в декількох напрямках, зокрема опис метричної розмірності для певних родин графів [6, 4], або для певних конструкцій [7].

У 2013 році С. Бау та А. Ф. Беардон в роботі

[8] продовжили ідею Блюменталю досліджувати метричну розмірність метричних просторів. Зокрема, ними було обчислено метричну розмірність куль в k -вимірному Евклідовому просторі. Пізніше М. Хейдарпур та С. Махсауді обчислили метричну розмірність геометричних просторів. Зрозуміло, що в загальному випадку задача пошуку метричної розмірності метричних просторів є NP-важкою, оскільки вона є NP-важкою для просторів, визначених графами. Тому є цікавими, як і у випадку графів, випадки, коли можна отримати формулу для обчислення метричної розмірності для певних родин метричних просторів.

В цій замітці ми розглянемо метричну розмірність конструкцій метричних просторів. А саме, повністю охарактеризуємо метричну розмірність для прямої суми метричних просторів і отримаємо певні оцінки для метричної розмірності прямого добутку метричних просторів.

2 Метрична розмірність деяких просторів

Нагадаємо означення метричної розмірності метричних просторів [9].

Нехай (X, d) — метричний простір. Кажуть, що непорожня підмножина A множини X розділяє точки простору (X, d) якщо для довільних різних точок x і y простору X існує така точка $a \in A$, що виконується нерівність $d(x, a) \neq d(y, a)$. Точки цієї підмножини A називаються *розділяючими*. Метричною розмірністю $md(X)$ метричного простору (X, d) називають потужність мінімальної за відношенням включення множини B з усіх розділяючих підмножин множини X , а сама така підмножина B називається *метричним базисом* метричного простору (X, d) .

Твердження 1. Нехай (X, d) — метричний простір, у якого всі значення метрики d різні. В такому випадку $md(X) = 1$.

Нагадаємо, що метричний простір (Y, d_Y) називається *еквідистантним*, якщо існує таке додатнє дійсне число $c \in \mathbb{R}^+$, що для всіх $y_1, y_2 \in Y$ виконується рівність

$$d(y_1, y_2) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } y_1 = y_2, \\ c, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Твердження 2. Метричний базис n -точкового еквідистантного простору складається з $n - 1$ точок, тобто $md(Y) = |Y| - 1$.

Твердження 3. Нехай I — деяка множина індексів, $X = \{x_i\}_{i \in I}$ — підмножина множини дійсних чисел, для якої існує найбільший або найменший елемент x_0 . Тоді точка x_0 є метричним базисом простору X з Евклідовою метрикою, і, відповідно, $md(X) = 1$.

3 Пряма сума метричних просторів

Нехай $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ — скінченні метричні простори, причому вважатимемо, що $X_i \cap X_j = \emptyset$, для всіх i, j , $1 \leq i, j \leq n$.

Прямою сумою метричних просторів $X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n$ називається простір визначений на множині $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$ з метрикою

$$\tau_c(u, v) = \begin{cases} d_{X_i}(u, v), & \text{якщо } u, v \in X_i \\ c, & \text{в іншому випадку} \end{cases},$$

де c — деяке фіксоване додатнє число, для якого виконується нерівність

$$\max\{diam(X_1), \dots, diam(X_n)\} < c.$$

Тобто, якщо точки u та v належать до різних множин X_i та X_j , то відстань між ними дорівнює c . Якщо ж вони належать до однієї множини $u, v \in X_i$, то значення функції τ_c дорівнює відстані між цими точками відповідно до метрики визначеної на цій множині $d_{X_i}(u, v)$. Конструкція названа прямою сумою метричних просторів, оскільки група ізометрій прямої суми метричних просторів ізоморфна як група підстановок прямій сумі груп ізометрій цих просторів (див. [10]).

Теорема 1. Метрична розмірність прямої суми $X_1 \oplus \dots \oplus X_n$ метричних просторів $X_1, \dots, X_n$ дорівнює сумі метричних розмірностей цих просторів

$$md(X_1 \oplus \dots \oplus X_n) = \sum_{i=1}^n (md(X_i)).$$

Доведення. Нехай $V_i = \{v_1^i, \dots, v_{k_i}^i\}$ — метричний базис простору X_i , $1 \leq i \leq n$. Спочатку покажемо, що об'єднання множин $V = \bigcup_{i=1}^n V_i$ є розділяючою множиною. Справді, нехай x, y довільні точки простору $X_1 \oplus \dots \oplus X_n$. Якщо x і y належать одній множині X_j , $1 \leq j \leq n$, то існує точка v_i^j , $1 \leq i \leq k_j$, метричного базису V_j , а отже і множини V , що їх розділяє. Якщо x і y належать різним множинам X_j і X_q , $1 \leq j, q \leq n$, то вони розділятимуться довільною точкою множин V_j або V_q , які є підмножинами множини V .

Покажемо тепер, що множина V є метричним базисом прямої суми $X_1 \oplus \dots \oplus X_n$, тобто найменшою за відношенням включення розділяючою множиною.

Нехай $v_j^q \in V$ — деяка точка метричного базису простору (X_q, d_{X_q}) , $1 \leq q \leq n$, $1 \leq j \leq k_q$. Покажемо, що множина $V \setminus \{v_j^q\}$ не є метричним базисом $X_1 \oplus \dots \oplus X_n$. Оскільки точка, $v_j^q \in V$ входить до метричного базису простору (X_q, d_{X_q}) , то існують деякі точки $u, w \in X_q$, що розділяються точкою v_j^q і не розділяються іншими точками з V_q . Тоді точки $u, w \in X_q$ не розділятимуться довільною точкою множини $V \setminus \{v_j^q\}$. Справді, точками множини $V_q \setminus \{v_j^q\}$ вони не розділятимуться за вибором пари u, w . Крім того, згідно з визначенням метрики τ для довільної точки $v_i^l \in V$, $1 \leq l \leq n$, $l \neq q$,

$1 \leq i \leq k_l$, яка не є точкою підмножини X_q виконується рівність:

$$\tau(u, v_l) = \tau(w, v_l) = c.$$

Оскільки точку v_j^q ми вибирали довільну, то V є найменшою за відношенням включення розділяючою множиною $X_1 \oplus \dots \oplus X_n$, тобто метричним базисом. $\square$

4 Прямий добуток метричних просторів

Прямим добутком метричних просторів (X, d_X) та (Y, d_Y) називається метричний простір визначений на множині $X \times Y$ та заданою на ній однією з трьох метрик d_1, d_2 або d_∞ (див. [11]):

- 1) $d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2);$
- 2) $d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2};$
- 3) $d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2); d_Y(y_1, y_2)\}.$

Оскільки метричні простори $(X \times Y, d_1)$, $(X \times Y, d_2)$, $(X \times Y, d_\infty)$ топологічно еквівалентні, то часто не уточнюють, як саме задається метрика. З точки зору метричної розмірності всі три конструкції різні, і для відповідних метричних просторів метрична розмірність обчислюватиметься по-різному.

Теорема 2. Нехай X — деякий метричний простір, всі значення метрики в якому попарно різні, а Y — скінченний еквідистантний метричний простір, $|Y| = m \geq 4$. Тоді для метричного простору $(X \times Y, d_1)$ виконується рівність

$$md(X \times Y, d_1) = md(Y) = m - 1.$$

Доведення. Побудуємо розділяючу множину B метричного простору $(X \times Y, d_1)$ визначеного як прямий добуток просторів $X = \{x_i\}_{i \in I}$ та $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$, де I — деяка множина індексів.

Нехай маємо дві різні точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in (X \times Y, d_1)$. Припустимо, що ці точки розділяються деякою точкою $(x_i, y_j) \in B$, $i \in I$, $1 \leq j \leq m$. Тоді, згідно визначення матимемо:

$$d_1((x_1, y_1), (x_i, y_j)) \neq d_1((x_2, y_2), (x_i, y_j)).$$

Цю нерівність можна переписати в такому вигляді:

$$d_X(x_1, x_i) + d_Y(y_1, y_j) \neq d_X(x_2, x_i) + d_Y(y_2, y_j) \quad (1)$$

Розглянемо наступні випадки:

1. $x_1 = x_2$. В такому випадку в умові (1) доданки $d_X(x_1, x_i)$ та $d_X(x_2, x_i)$ будуть рівними і наша умова зведеться до

$$d_Y(y_1, y_j) \neq d_Y(y_2, y_j),$$

тобто y_j повинна розділяти точки y_1 і y_2 . А оскільки простір Y еквідистантний, і точки y_1 і y_2 ми вибирали довільним чином, то в множині B мають входити всі точки вигляду (x_i, y_j) , $1 \leq j \leq m - 1$, для деякого фіксованого i , $i \in I$.

2. $x_1 \neq x_2$. Покажемо, що довільна точка (x_i, y_j) , $1 \leq j \leq m - 1$, $y_j \neq y_1$, $y_j \neq y_2$, розділятиме точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in (X \times Y)$. Спочатку зауважимо, що в множині B така точка існує, оскільки $|Y| \geq 4$. Так як простір (Y, d_Y) — еквідистантний, то

$$d_Y(y_1, y_j) = d_Y(y_2, y_j),$$

а отже умова 1 зведеться до вигляду

$$d_X(x_1, x_i) \neq d_X(x_2, x_i).$$

Але в просторі (X, d_X) всі значення метрики попарно різні, тому нерівність виконуватиметься.

Зауважимо, що за побудовою, множина

$$B = \{(x_i, y_1), \dots, (x_i, y_{m-1})\},$$

де i деякий фіксований індекс з множини I , є такою мінімальною розділяючою множиною, тобто базисом. Таким чином матимемо, що розмірність прямого добутку метричних просторів дорівнює розмірності еквідистантного простору

$$md(X \times Y, d_1) = m - 1 = md(Y).$$

$\square$

Теорема 3. Якщо (X, d_X) та (Y, d_Y) — еквідистантні метричні простори, то метрична розмірність прямого добутку цих просторів з визначеною метрикою d_1 дорівнює

$$md(X \times Y, d_1) = md(X) + md(Y).$$

Доведення. Нехай $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ і $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$, для яких $md(X)$ та $md(Y)$ — їх метричні розмірності відповідно. Покажемо, що множина

$$B_{X \times Y} = \{(x_1, y_m), \dots, (x_{n-1}, y_m), \\ (x_{n-1}, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{m-1})\}$$

є базисом простору $(X \times Y, d_1)$. Справді, для будь-яких двох точок $(x_{u_1}, y_{v_1}), (x_{u_2}, y_{v_2})$ простору $X \times Y$, ми завжди можемо знайти розділяючу точку (x_u, y_v) таку, щоб одна з її координат співпадала з відповідною координатою точок $(x_{u_1}, y_{v_1}), (x_{u_2}, y_{v_2})$. Тобто, щоб виконувалась одна з рівностей $x_u = x_{u_1}$ чи $x_u = x_{u_2}$, $y_v = y_{v_1}$ чи $y_v = y_{v_2}$. Тоді один з доданків в сумах:

$$d_1((x_{u_1}, y_{v_1}), (x_u, y_v)) = d_X(x_{u_1}, x_u) + d_Y(y_{v_1}, y_v)$$

$$d_1((x_{u_2}, y_{v_2}), (x_u, y_v)) = d_X(x_{u_2}, x_u) + d_Y(y_{v_2}, y_v)$$

буде перетворюватися в 0. Відповідно, відстані будуть різними. Таким чином $B_{X \times Y}$ є розділяючою множиною.

Покажемо тепер, що $B_{X \times Y}$ є мінімальною за відношенням включення.

Припустимо, що метричним базисом буде множина $B_{X \times Y} = \{(x_1, y_m), \dots, (x_{n-1}, y_m), (x_{n-1}, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{m-1})\} \setminus \{(x_i, y_j)\}$, де $1 \leq i < n, j = m$ або $i = n - 1, 1 \leq j < m$. Розглянемо дві точки з координатами (x_i, y_j) та (x_i, y_m) . В множині B для них має існувати розділяюча точка з координатами (u, v) . Згідно визначення розділяючої точки матимемо:

$$d_1((u, v), (x_i, y_j)) \neq d_1((u, v), (x_i, y_m))$$

$$d_X(u, x_i) + d_Y(v, y_i) \neq d_X(u, x_i) + d_Y(v, y_m)$$

$$d_Y(v, y_i) \neq d_Y(v, y_m)$$

А так як наші простори еквідистантні то відстані $d_Y(v, y_i)$ та $d_Y(v, y_m)$ будуть рівними, тобто наше припущення неправильне і точка з координатами (x_i, y_j) має входити до метричного базису.

Розмір, таким чином, визначеного базису буде дорівнювати:

$$n - 1 + m - 1 = (n - 1) + (m - 1) = md(X) + md(Y)$$

□

Вводячи додаткові обмеження на метричні простори, кількість точок у базисі прямого добутку можна зменшити. Найтривіальнішим прикладом в даному разі буде випадок, коли простори (X, d_X) і (Y, d_Y) такі, що всі відстані в $(X \times Y, d_1)$ є попарно різними. Тоді, відповідно, метрична розмірність простору $(X \times Y, d_1)$ дорівнюватиме одиниці $md(X \times Y) = 1$.

Теорема 4. Якщо (X, d_X) та (Y, d_Y) — еквідистантні метричні простори, то метричний простір визначений на їх добуткові з Евклідовою метрикою

$$d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \\ = \sqrt{(d_X(x_1, x_2))^2 + (d_Y(y_1, y_2))^2}$$

матиме метричну розмірність, що дорівнює сумі метричних розмірностей цих просторів

$$(X \times Y, d_2) = md(X) + md(Y). \quad (2)$$

Доведення. Для просторів (X, d_X) та (Y, d_Y) , де $X = \{x_1, \dots, x_n\}, Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ визначимо підмножину $B_{X \times Y} = \{(x_1, y_m), \dots, (x_{n-1}, y_m), (x_{n-1}, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{m-1})\}$ прямого добутку $X \times Y$ й покажемо, що ця множина є розділяючою. Нехай маємо дві різні точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in (X \times Y)$ та розділяючу їх (x_i, y_j) . Згідно визначення метричного базису матимемо:

$$d_2((x_1, y_1), (x_i, y_j)) \neq d_2((x_2, y_2), (x_i, y_j))$$

$$\sqrt{d_X(x_1, x_i)^2 + d_Y(y_1, y_j)^2} \neq \\ \neq \sqrt{d_X(x_2, x_i)^2 + d_Y(y_2, y_j)^2}$$

$$d_X(x_1, x_i)^2 + d_Y(y_1, y_j)^2 \neq d_X(x_2, x_i)^2 + d_Y(y_2, y_j)^2$$

Далі застосовуючи міркування аналогічні неведеним в доведенні теореми (3) матимемо, що базис метричного простору $(X \times Y, d_2)$ такий самий як і для метричного простору $(X \times Y, d_1)$, а відповідно їх метричні розмірності збігаються. □

Зауваження 1. В теоремі 4 рівність (2) виконується така ж як і для метрики d_1 . Але, метрична розмірність просторів $(X \times Y, d_1)$

та $(X \times Y, d_2)$ збігається не завжди. Для прикладу можна взяти в якості простору X вершини прямокутного трикутника з відстанями між ними, що дорівнюють 3, 4 та 5. А простір Y визначити як дві точки з відстанню 3 між ними. В такому випадку до метричного базису $(X \times Y, d_1)$ входить лише одна точка, а в метричний базис простору $(X \times Y, d_2)$ входять дві точки. Тому матимемо, що $md(X \times Y, d_1) \neq md(X \times Y, d_2)$.

Теорема 5. Нехай (X, d_X) та (Y, d_Y) — еквідистантні метричні простори, на яких визначено прямий добуток $X \times Y$ з метрикою

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2); d_Y(y_1, y_2)\}.$$

Метрична розмірність метричного простору $(X \times Y, d_\infty)$ в такому випадку дорівнюватиме

$$md(X \times Y, d_\infty) = \begin{cases} |X| \times (|Y| - 1), & \text{у випадку,} \\ & \text{якщо } c_X > c_Y, \\ |Y| \times (|X| - 1), & \text{у випадку,} \\ & \text{якщо } c_X < c_Y, \\ |X| \times |Y| - 1, & \text{у випадку,} \\ & \text{якщо } c_X = c_Y. \end{cases}$$

де c_X і c_Y ненульові значення метрик просторів X і Y відповідно.

Доведення. Нехай, як і раніше, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ і $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ і $md(X)$ та $md(Y)$ — їх метричні розмірності відповідно. Розглянемо можливі випадки.

1. $c_X > c_Y$. Визначимо множину $B = \{(x_i, y_j) | i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m - 1\}$ й покажемо, що вона є метричним базисом простору $(X \times Y, d_\infty)$.

В такому випадку, для двох довільних точок (x_u, y_m) та (x_v, y_m) , що належать множині $X \times Y$ та не входять до метричного базису B ми зможемо взяти розділяючою деяку точку (x_u, y_j) й таким чином матимемо що

$$\begin{aligned} d_\infty((x_u, y_m), (x_u, y_j)) &= \\ = \max\{d_X(x_u, x_u); d_Y(y_m, y_j)\} &= \\ = d_Y(y_m, y_j) & \\ d_\infty((x_v, y_m), (x_u, y_j)) &= \\ = \max\{d_X(x_u, x_v); d_Y(y_m, y_j)\} &= \\ = d_X(x_u, x_v) & \\ d_Y(y_m, y_1) \neq d_X(x_u, x_v). \end{aligned}$$

В результаті наші відстані будуть різними й B буде розділяючою множиною. Тепер покажемо, що B є мінімальною.

Нехай існує деяка множина $B' = \{(x_i, y_j) | i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m - 1\} \setminus \{(x_{u'}, y_{v'})\}$, де $1 \leq u' \leq n, 1 \leq v' < m$, і припустимо, що вона є метричним базисом простору $(X \times Y, d_\infty)$. Нехай також задано пару точок $(x_{u'}, y_{v'})$ та $(x_{u'}, y_m)$ простору $X \times Y$. Якщо ця пара точок розділятиметься точкою з метричного базису $(x_u, y_v) \in B'$ матимемо:

1. $x_u \neq x_{u'}$. Розглянемо відстані між точками

$$\begin{aligned} d_\infty((x_{u'}, y_{v'}), (x_u, y_v)) &= \\ = \max\{d_X(x_{u'}, x_u); d_Y(y_{v'}, y_v)\} &= \\ = d_X(x_{u'}, x_u) &= \\ = \max\{d_X(x_{u'}, x_u); d_Y(y_m, y_v)\} &= \\ = d_\infty((x_{u'}, y_m), (x_u, y_v)). \end{aligned}$$

Тобто $d_\infty((x_{u'}, y_{v'}), (x_u, y_v)) = d_\infty((x_{u'}, y_m), (x_u, y_v))$. А це неможливо за визначенням метричного базису.

2. $x_u = x_{u'}$. В цьому разі наші відстані матимуть наступний вигляд

$$\begin{aligned} d_\infty((x_{u'}, y_{v'}), (x_u, y_v)) &= \\ = \max\{d_X(x_{u'}, x_u); d_Y(y_{v'}, y_v)\} &= \\ = d_Y(y_{v'}, y_v) = d_Y(y_m, y_v) &= \\ = \max\{d_X(x_{u'}, x_u); d_Y(y_m, y_v)\} &= \\ = d_\infty((x_{u'}, y_m), (x_u, y_v)). \end{aligned}$$

Що також неможливо за визначенням.

Таким чином точка $(x_{u'}, y_{v'})$ має входити до метричного базису B метричного простору $(X \times Y, d_\infty)$, а сама визначена нами множина B є мінімальною.

В результаті матимемо, що $md(X \times Y, d_\infty) = |X| \times (|Y| - 1)$.

2. $c_X < c_Y$. Використовуючи аналогічні попередні міркування, в цьому випадку отримаємо, що метрична розмірність прямого добутку становить

$$md(X \times Y, d_\infty) = |Y| \times (|X| - 1).$$

$c_X = c_Y$. Спробуємо побудувати розділяючу множину B для простору $(X \times Y, d_\infty)$. Нехай маємо дві різні точки $(x_{u_1}, y_{v_1}), (x_{u_2}, y_{v_2}) \in X \times Y$

та розділяючи їх $(x_i, y_j) \in B$. В такому випадку, згідно визначення, в нас має виконуватись наступна нерівність:

$$\max\{d_X(x_{u_1}, x_i); d_Y(y_{v_1}, y_j)\} \neq \max\{d_X(x_{u_2}, x_i); d_Y(y_{v_2}, y_j)\}$$

Так як наші відстані еквідистантних просторів X та Y однакові, то дана нерівність може виконуватись лише у випадку, коли один із ма-

ксимумів перетворюється в 0. Це можливо лише тоді, коли одна з точок $(x_{u_1}, y_{v_1}), (x_{u_2}, y_{v_2})$ співпадатиме з базисною. І так має бути для кожної з пар точок простору $(X \times Y, d_\infty)$. Таким чином в базис B входять усі точки окрім однієї, а метрична розмірність цього простору становитиме $md(X \times Y, d_\infty) = |X| \times |Y| - 1$. При чому за побудовою така множина B є мінімальною.

□

Список використаних джерел

1. Гарі М. Р., Джонсон Д. С. Комп'ютери та некерованість; Посібник з теорії NP-повноти., В. Х. Фріман і Ко., Нью-Йорк, 1990.
2. Блюменталь Л. М. Теорія та застосування геометрії відстаней. Кларендон Пресс, Оксфорд, 1953.
3. Харарі Ф., Мелтер Р. А. Про метричну розмірність грфу. Арс Комбін. 1976, 20, 191–195.
4. Слейтер П. Дж. Листя дерев. Конгр. Нумер. 1975, 14, 549–559.
5. Себо А., Танье Е. Про метричні генератори графів. Мат. Опер. Рес. 2004, 29 (2), 383–393.
6. Дуденко М., Олійник Б. Про уніциклічні графи метричної розмірності 2 з вершинами ступеня 4. Алгебра Дискретна Мат. 2018, 26 (2), 256–269.
7. Родрігес-Веласкес Ж.А., Єро І.Г. Примітка про часткову розмірність декартового добутку графів. Прикл. Мат. Обч. 2010, 217, 3571–3574.
8. Бау С., Бердон А. Метрична розмірність метричних просторів. Обч. Методи Функц. Теорія 2013, 13.
9. Гейдарпур М., Саїд М. Метрична розмірність геометричних просторів. Топологія Прикл. 2014, 178, 230–235.
10. Олійник Б. k -однорідність n -кратної прямої суми метричного простору з собою. Вісник Унів. Київ 2008, 36–39.
11. Сіркоїд М. Метрики. Спрінгер, Лондон, 2007.

References

1. GAREY, M. R. and JOHNSON, D. S. (1990) "Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness", W. H. Freeman & Co., New York.
2. BLUMENTHAL, L. M. (1953) "Theory and applications of distance geometry", Clarendon Press, Oxford.
3. HARARY, F. and MELTER R. A. (1976) "On the Metric Dimension of a Graph" Ars Combin. 20, pp. 191–195.
4. SLATER, P. J. (1975) "Leaves of Trees", Congr. Numer., 14, pp. 549–559.
5. SEBO, A. and TANNIER, E. (2004) "On Metric Generators of Graphs", Math. Oper. Res., 29 (2), pp. 383–393.
6. DUDENKO, M. and OLIYNYK, B. (2018) "On unicyclic graphs of metric dimension 2 with vertices of degree 4", Algebra Discrete Math., 26 (2), pp. 256–269.
7. RODRIGUEZ-VELAZQUEZ, J. A. and YERO, I. G. (2010) "A note on the partition dimension of Cartesian product graphs", Appl. Math. Comput., 217, pp. 3571–3574.
8. BAU, S. and BEARDON, A. (2013) "The Metric Dimension of Metric Spaces", Comput. Methods Funct. Theory, 13.
9. HEYDARPOUR, M. and SAEID, M. (2014) "The metric dimension of geometric spaces", Topology Appl., 178, pp. 230–235.
10. OLIYNYK, B. (2008) " k -homogeneity of the n -fold direct sum of metric space over itself", Bull Univ. Kyiv, pp. 36–39.
11. SEARCOID, M. (2007) "Metrics", Springer, London.

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ,
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА
ТА МЕХАНІКА**

УДК 532.5

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/1-2.7>

Брауде Я.І., студент
Кізілова Н. М., д. ф.-м. н., проф.

J.I. Braude, student
N. M. Kizilova, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

Дослідження періодичної вісесиметричної течії в'язкопружної рідини по циліндричній трубці

Investigation of the periodic axisymmetric flow of a viscoelastic fluid through a cylindrical tube

¹Харківський національний університет
ім. В.Н. Каразіна, Харків, пл. Свободи, 4,
e-mail: braude.yan@gmail.com

²Харківський національний університет
ім. В.Н. Каразіна, Харків, Україна,
e-mail: n.kizilova@gmail.com

¹V.N. Karazin Kharkiv National University, 61022,
Kharkov, Svobody sq., 4,
e-mail: braude.yan@gmail.com

²V.N. Karazin Kharkov National University,
61022, Kharkov, Svobody sq., 4,
e-mail: n.kizilova@gmail.com

Отримана узагальнена модель Womersley нестационарної вісесиметричної течії в'язкої нестисливої рідини крізь трубку кругового перетину за рахунок періодичних коливань тиску у вхідному перерізі трубки на випадок рідини з ускладненою реологією. Реологічні співвідношення для рідини має, крім в'язкості, ще чотири параметри, які мають значення коефіцієнтів релаксації деформацій та напружень першого і другого порядку. Такі реологічні співвідношення характерні для неньютонівських в'язкопружних рідин з мезоструктурою, а саме технічних та біологічних мікро/нанорідин. Було показано, що зі зростанням коефіцієнтів релаксації першого/другого порядку об'ємна витрата, середня і максимальні швидкості руху зменшуються/підвищуються. Одночасні зміни цих параметрів можуть призводити до складних змін профілю швидкості, особливо для вищих гармонік. Досліджені закономірності дозволяють пояснити відхилення параметрів течій різних мікро/нанорідин від значень, які передбачені класичним розв'язком Womersley для однорідної ньютонівської рідини, який не враховує в'язкої дисипації під час перестройки мезоструктури рідини.

Ключові слова: задача Womersley, в'язкопружні рідини, реологічні властивості, математичне моделювання.

A generalized Womersley model of a nonstationary axisymmetric flow of a viscous incompressible fluid through a tube of circular cross-section to periodic pressure fluctuations at the inlet of the tube is obtained due for the case of a fluid with complicated rheology. The rheological parameters of the fluid are viscosity and four relaxation coefficients for strains and stresses of the first and second order. Such rheology is proper to the non-Newtonian viscoelastic fluids with mesostructure, namely technical and biological micro/nanofluids. It was shown that with the increase of the relaxation coefficients of the first/second order the flow rate, the average and maximum velocities decrease/increase, accordingly. Simultaneous changes in these parameters can lead to complex changes in the velocity profile, especially for higher harmonics. The studied regularities can explain the deviations of the flow parameters of different micro/nanofluids from the values predicted by the classical Womersley solution for a homogeneous Newtonian fluid, which does not take into account viscous dissipation during the rearrangement of the fluid mesostructure.

Keywords: Womersley problem, viscoelastic fluids, rheological properties, mathematical modeling.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я. О.

1. Вступ

Вперше розв'язок задачі про нестационарну течію в'язкої нестисливої рідини крізь трубку кругового перерізу з

жорсткими стінками за рахунок періодичних коливань тиску на вході було отримано в серії праць J.R. Womersley [1]. Пізніше отриманий розв'язок був узагальнений

на випадок пружних, в'язкопружних, ізотропних і анізотропних, тонких і багат шарових стінок трубок, а також для ряду неньютонівських рідин, а саме дилатантних, псевдопластичних, в'язко-пластичних та в'язкопружних однорідних рідин і суспензій [2]. В останні роки значно підвищився інтерес до задач мікро- і нанофлюїдики, де вивчаються течії рідин с нестандартними реологічними параметрами біля мікро/наноармованих деформівних поверхонь, які мають не один, а кілька релаксаційних параметрів: для мезо-, мікро- і наноструктури відповідно [3]. В даній роботі розглядається узагальнення задачі Womersley на випадок в'язкопружної рідини з ускладненими реологічними властивостями, які відповідають як технічним, так і біологічним мікро- та нанорідинам.

1. Постановка задачі.

Рівняння Нав'є-Стокса для нестисливої рідини можна отримати з умов нестисливості і рівняння імпульсів у вигляді

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{v}) &= 0, \\ \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v}, \nabla) \vec{v} &= -\nabla p + \operatorname{div} \hat{\tau}, \end{aligned} \quad (1)$$

якщо підставити замість $\hat{\tau}$ тензор в'язких напружень для ньютонівської рідини $\hat{\tau} = 2\mu \hat{V}$, де $\hat{V}$ - тензор швидкостей деформацій, μ - в'язкість рідини.

Узагальнені моделі для неньютонівських рідин можна отримати за рахунок використання відповідних реологічних моделей. В даній роботі використана загальна модель в'язкопружної рідини, яка складається з кількох пружних, в'язких та інерційних моделей [2]

$$\alpha \frac{\partial^2 \hat{\tau}}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial \hat{\tau}}{\partial t} + \hat{\tau} = 2\mu \hat{V} + \lambda \frac{\partial \hat{V}}{\partial t} + \zeta \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial t^2}, \quad (2)$$

де $\alpha, \beta, \lambda, \zeta = \text{const}$ - реологічні параметри.

Граничні умови для задачі (1)-(2) є

$$\begin{aligned} \vec{v}|_{r=R} &= 0, \quad \left. \frac{\partial v_x}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \vec{v}|_{r=0} = 0, \\ p(t)|_{x=0} &= \sum_{j=0}^{\infty} p_j^0 e^{i\omega_j t}, \quad p|_{x=L} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

де $\vec{v} = v_x(t, r) \vec{e}_x$ - швидкість рідини, p - гідростатичний тиск, ω_j і p_j^0 - частоти і амплітуди Фур'є - розкладання тиску на вході в трубку. Таким чином, можна знайти розв'язок лінеаризованої задачі (1)-(2) у вигляді розкладань.

Лінеаризуємо друге рівняння (2) навколо стану спокою системи $\vec{v} = 0, p = p_0 = \text{const}$ та підставимо в нього тензор в'язких напружень (3) та отримаємо рівняння руху у вигляді

$$\begin{aligned} \rho \left(\alpha \frac{\partial^3 \vec{v}}{\partial t^3} + \beta \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) &= -\nabla p - \beta \frac{\partial}{\partial t} \nabla p - \\ &- \alpha \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla p + \mu \Delta \vec{v} + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \Delta \vec{v} + \zeta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta \vec{v} \end{aligned} \quad (4)$$

Термодинамічне обґрунтування моделей з підвищеним та дрібним порядками диференціальних операторів як за часом, так і за координатами, наведені в [4].

Розв'язок (4) може бути отриманий у формі Womersley [1] у вигляді плоских хвиль тиску та швидкості (малих збурень) в пов'язаній з трубкою циліндричній системі координат $\vec{v} = (r, \theta, x)$ як

$$\frac{\partial p(t)}{\partial x} = P \cdot e^{i\omega t}, \quad v_x(t, r) = U(r) \cdot e^{i\omega t}, \quad (5)$$

де P і $U(r)$ - амплітуди.

2. Розв'язок задачі.

Після підстановки (5) в (4) та перше рівняння (1), отримаємо наступну систему рівняння для визначення $U(r)$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right) - \Xi^2 U = P, \quad (6)$$

$$\text{де } \Xi^2 = i\omega\rho\chi, \quad \chi = \frac{1 + i\beta\omega - \alpha\omega^2}{\mu + i\lambda\omega - \zeta\omega^2}.$$

Розв'язок модифікованого рівняння Бесселя (6) з урахуванням перших двох граничних умов (3) має вигляд

$$U(r) = \frac{iP}{\omega\rho} \left(1 - \frac{J_0(i^{3/2}\Xi r)}{J_0(i^{3/2}\Xi R)} \right), \quad (7)$$

де $\Xi^2 = \omega\chi\rho$, J_0 - функція Бесселя першого роду порядку 0.

Інтеграл від (7) за перерізом трубки дає можливість обчислити об'ємну витрату рідини:

$$Q(t) = 2\pi \int_0^R r U(r) dr = \frac{iP\pi R^2}{\omega\rho} \left(1 - \frac{2J_1(i^{3/2}\Xi R)}{i^{3/2}\Xi R J_0(i^{3/2}\Xi R)} \right), \quad (8)$$

де J_1 - функція Бесселя першого роду порядку 1.

Для проведення чисельних розрахунків та аналізу впливу параметрів задачі в (6)-(8) треба відокремити дійсну, але тоді можна буде описати тільки синфазні коливання тиску та швидкості, чого не буває в дисипативних системах. Джерелом дисипації в даному

випадку будуть не тільки в'язкі ефекти, але й зміни за часом мезо-, мікро- та наноструктури рідини, які визначаються значеннями $\alpha, \beta, \lambda, \zeta$. Для цього використаємо підхід Womersley та приймемо $|\nabla p| = M \cos(\omega t - \phi)$, де M і ϕ - амплітуда і фаза градієнту тиску. Тоді після підстановки з (6), (7) отримаємо для швидкості

$$v(t, r) = \frac{M \tilde{M}_0(r)}{\mu \Xi^2} \sin(\omega t - \phi + \varepsilon_0), \quad (9)$$

де $\tilde{M}_0(r)$ - амплітуда функції $J_0(i^{3/2} \Xi r) = \tilde{M}_0(r) \exp(i \vartheta_0(r))$, $\delta_0 = \vartheta_0(R) - \vartheta_0(r)$,

$$\varepsilon_0 = \arctan \left(\frac{h_0 \sin \delta_0}{1 - h_0 \cos \delta_0} \right), \quad h_0 = \frac{\tilde{M}_0(r)}{\tilde{M}_0(R)},$$

$$\tilde{M}_0 = \sqrt{1 + h_0^2 - 2h_0 \cos \delta_0}.$$

Аналогічно для об'ємної витрати з (8) отримаємо

$$Q(t) = \frac{M \tilde{M}_{01}}{\mu \Xi^2} \sin(\omega t - \phi + \varepsilon_1), \quad (10)$$

де $\tilde{M}_1(r)$ - амплітуда функції $J_1(i^{3/2} \Xi r) = \tilde{M}_1(r) \exp(i \vartheta_1(r))$,

$$\tilde{M}_{01} = 2\pi \int_0^R r \tilde{M}_1(r) \cos(\varepsilon_1(r)) dr.$$

Розв'язок задачі (1)-(2) у вигляді (9)-(10) описує зсув фаз між коливаннями тиску та швидкості. Чисельні розрахунки за (9) дозволили Womersley вперше описати ефект зворотного руху рідини у в'язкому шарі біля стінки, який був засвідчений шляхом вимірювань профілю швидкості та об'ємної витрати крові в артеріальних судинах (прямі та ультразвукові методи) [1]. Отримані в даній роботі узагальнені результати (9)-(10) на випадок рідин з ускладненою реологією дозволяють дослідити вплив додаткових реологічних параметрів на течію рідини.

3. Чисельні розрахунки і аналіз результатів

Проведемо чисельні розрахунки за (9)-(10) з використанням параметрів моделі, які відповідають системі кровообігу людини [1] з метою порівняння отриманих результатів з класичною моделлю Womersley. Приймемо $\rho = 1050 \text{ кг/м}^3$, $\mu = 3.5 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$, $R = 2.5 \text{ мм}$, $L = 10 \text{ см}$, $\omega_0 = 2\pi f_0$, $f_0 = 1 \text{ Гц}$, $p^0 = 90 \text{ мм рт.ст.}$. Величини $\alpha, \beta, \lambda, \zeta$ мають різні фізичні розмірності та значення, але $\lambda / \mu \equiv \kappa_{\varepsilon 1}$ і $\zeta / \lambda \equiv \kappa_{\varepsilon 2}$ мають фізичне значення першого і другого часів релаксації, а $\beta \equiv \kappa_{\tau 1}$ і $\alpha / \beta \equiv \kappa_{\tau 2}$ - першого і другого часів ретардації рідини, які,

відповідно до чисельних експериментальних даних [1,2], змінюються в діапазонах 0.001-1 с.

Результати розрахунків профілю швидкості (9) від безрозмірної координати $\bar{r} = r/R$ при різних наборах параметрів ϕ , $\kappa_{\varepsilon 1}$, $\kappa_{\varepsilon 2}$, $\kappa_{\tau 1}$, $\kappa_{\tau 2}$, μ наведені на Рис. 1а-в.

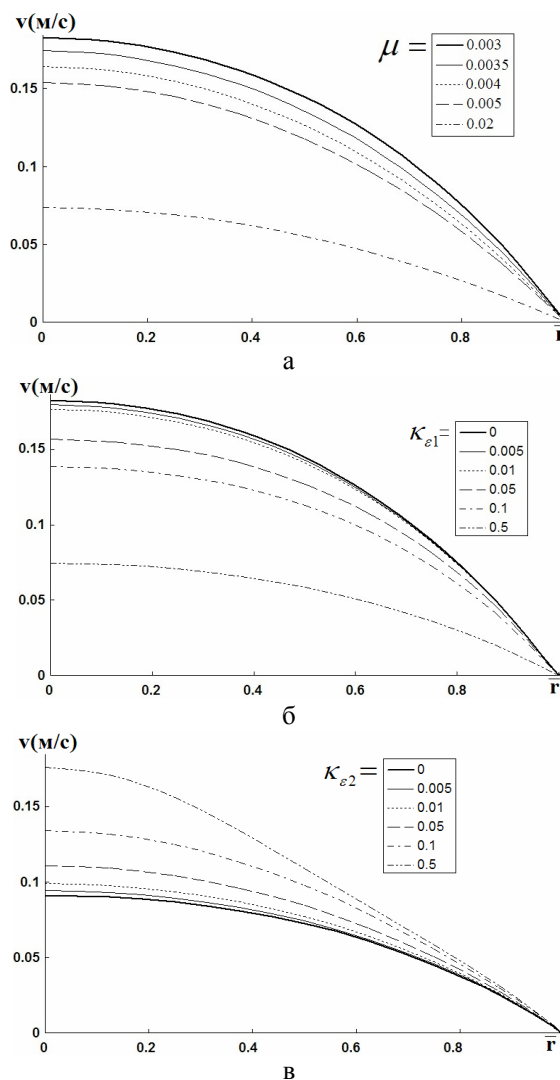


Рис.1. Залежності $v(\bar{r})$ для різних в'язкостей μ , Па·с (а), часів $\kappa_{\varepsilon 1}$, с (б) і $\kappa_{\varepsilon 2}$, с (в).

Зі зростанням в'язкості рідини об'ємна витрата, середня і максимальні швидкості руху зменшуються. Криві на Рис.1а відповідають відомому на сьогодні діапазону в'язкостей від нижньої границі норми до максимальних значень, які були виміряні у пацієнтів після холодового та електрошоку [1]. Додаткові механізми дисипації у вигляді в'язкої перебудови мезоструктури та перерозподілу рідини між твердими частинками структури теж ведуть до зменшення швидкості руху, особливо коли процеси перебудови повільні та розтягнуті

у часі (Рис.1б). Аналогічні зміни відбуваються при варіаціях κ_{r1} в тому ж діапазоні значень. Зміни часів релаксації другого порядку κ_{r2} , κ_{e2} викликають зворотній вплив на швидкість за рахунок зміни кривизни профілю швидкості поблизу стінок (Рис.1в). Комбінація одночасних змін всіх параметрів κ_{e1} , κ_{e2} , κ_{r1} , κ_{r2} , μ може призводити до складних змін профілю швидкості, особливо для вищих гармонік $f > f_0$.

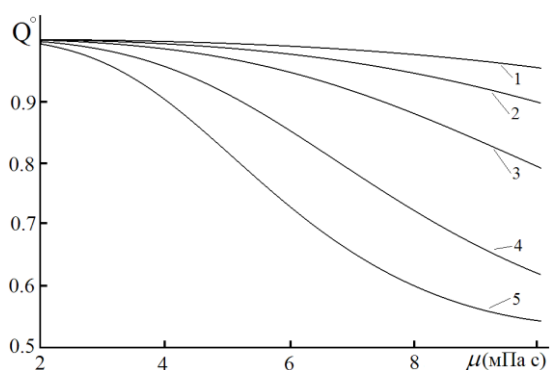


Рис.2. Залежності $Q^\circ(\mu)$ для випадків
 $\{\kappa_{e1}, \kappa_{e2}, \kappa_{r1}, \kappa_{r2}\} = \{0.01, 0, 0.01, 0\}$ (1),
 $\{0.1, 0.1, 0.1, 0\}$ (2), $\{0.1, 0, 0.1, 0\}$ (3), $\{0.5, 0.1, 0.1, 0.1\}$
(4), $\{0.5, 0, 0.5, 0\}$ (5).

Залежності безрозмірної об'ємної витрати течії рідини Q° від в'язкості μ наведені на Рис.2 для різних комбінацій параметрів κ_{e1} , κ_{e2} , κ_{r1} , κ_{r2} з тих значень, які використалися раніше (Рис.1а-в). В залежності від значень цих параметрів монотонно спадаюча залежність $Q^\circ(\mu)$ може бути опукла вниз, вгору, S- або N-подібна.

Були також розраховані профілі швидкості гармонік $f_0=2-16$ і показано, що відкритий Womersley ефект зворотного руху рідини у пристінному шарі зберігається також у рідин з

ускладненою реологією. Завдяки цьому ефекту загальний профіль швидкості, який складається з усіх гармонік, може суттєво відрізнятись від профілю, який передбачений класичною формулою Womersley, що неодноразово спостерігалось в експериментах з мікро- і нанорідинами.

5. Висновки

Отримана і досліджена узагальнена модель Womersley періодичної вісесиметричної течії рідини на випадок рідин, моделі яких містять пружний, в'язкий та інерційний елементи [2]. Показано, що при варіації всіх параметрів моделі зі зростанням коефіцієнтів релаксації першого/другого порядку об'ємна витрата, середня і максимальні швидкості руху зменшуються/підвищуються. Одночасні зміни цих параметрів викликають різноманітні зміни, так що зростання витрати за рахунок підвищення коефіцієнтів першого порядку може компенсуватися зменшенням витрати за рахунок підвищення коефіцієнтів другого порядку. Останні впливають на кривизну профілю швидкості поблизу стінок трубки, що проявляється в прискоренні швидкості в ядрі течії та слабкому зворотному руху при стінках. Аналогічні процеси в класичній моделі Womersley пов'язані з фазою коливань тиску у вхідному перерізі [1]. Досліджені залежності показують, що відхилення параметрів течій різних мікро/нанорідин [3] від значень, які передбачені класичною формулою Womersley для однорідної ньютонівської рідини можуть бути викликані додатковими джерелами в'язкої дисипації протягом перестройки мезоструктури під час періодичного прискорення-гальмування рідини у зсувній течії.

References

1. *McDonald's Blood Flow in Arteries*. (2011) By Ch. Vlachopoulos, M. O'Rourke, W.W. Nichols. CRC Press. 768p.
2. Fridtjov I. *Rheology and non-Newtonian fluids*. Springer. 199 p.
3. *Complex Fluid-Flows in Microfluidics*. (2017) Galindo-Rosales J.F.H. (ed.) Springer. 111p.
4. He J.-H., Ji F.-Y. Two-scale mathematics and fractional calculus for thermodynamics. // *Thermal Sci.* - 2019. - Vol.23,N4. - P.2131-2133.

Надійшла до редколегії 27.11.2019

УДК 531.43+539.3/.612+62-4

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/1-2.8>

Валєєва І. К.¹, к.ф.-м.н., ст. наук. співр.

I. K. Valeeva¹, Ph.D. (Phys.-Math.)

Адгезійний контакт пружних тіл зі стохастичною шершавістю

Adhesive contact of elastic solids with stochastic roughness

¹ Інститут проблем матеріалознавства
ім. І. М. Францевича НАН України, 03142,
м.Київ, вул. Кржижановського, 3

¹ Frantsevich Institute for Problems in Materials
Science NAS of Ukraine, Krzhizhanovsky str., 3,
Ukraine, 03142, Kyiv

Модель нормального адгезійного контакту між пружними тілами із стохастичною поверхневою шершавістю під розглядом. Шершавість симулюється нелінійним шаром Вінклера-Фусса, який може чинити опір до стискаючого і розтягуючого (у разі адгезії) контактної тиску. Механічні властивості шару визначаються статистичними теоріями адгезійного контакту між номінально плоскими шершавими поверхнями. Контакт твердих тіл описується нелінійними граничними інтегральними рівняннями з немонотонними операторами. Їх розв'язки визначають зменшення ефективної товщини шершавого шару, контактний тиск, область контакту, силу адгезії. Представлено формулу для обчислення сили адгезії для випадку, коли контакти окремих нерівностей описуються DMT-теорією та зазор між тілами у контакті параболічний.

Ключові слова: адгезійна взаємодія, контакт шершавих тіл, сила адгезії.

Model of normal adhesive contact between elastic bodies with stochastic surface roughness is under consideration. Roughness is simulated by Winkler-Fuss nonlinear layer, which can resist to compressive and tensile (in the case of adhesion) contact stresses. Mechanical properties of the layer are determined by statistical theories of adhesive contact between nominally flat rough surfaces. The contact of solids is described by nonlinear boundary integral equations with non-monotonic operators. Their solutions determine reduction of effective thickness of rough layer, contact stresses, contact region, adhesion force. Formulas for adhesion force calculation are presented for the most frequent nominal gap between solids in contact for DMT-theory of contact.

Key Words: adhesive interaction, contact of rough solids, adhesion force.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Врахування адгезійної взаємодії особливо важливо при необхідності маніпулювати об'єктами малих розмірів, використовуючи малі сили. Тому потрібне дослідження, що дозволяє оцінювати і прогнозувати адгезійну взаємодію, вивчати фактори, що впливають на адгезійний контакт, виробляти рекомендації для створення поверхонь з контрольованою адгезією. Роботи, присвячені теоретичним і експериментальним підходам до фізики адгезії, представлені в огляді [1], а огляди обчислювальних методів, які застосовуються для дослідження адгезійних контактів, представлені в роботах [2–4]. Адгезійним контактам присвячений і збірник [5].

Метою цього дослідження є вивчення адгезійного контакту між шершавими тілами з викривленою номінальною геометрією

поверхонь. Контакт тіл моделюється нелінійними граничними інтегральними рівняннями (ГІУ), розв'язання яких визначають розподіл номінального контактної тиску, номінальні області контакту, залежність нормальної сили P , що здавлює контактуючі тіла від їх зближення δ і силу адгезії. Запропоновано чисельний метод розв'язання ГІУ, дана його реалізація на прикладах нормального контакту. Залежність $P(\delta)$ не монотонна при наявності сил адгезійної взаємодії, і сила адгезії визначається як мінімум цієї залежності. Найчастіше зустрічається випадок номінальної геометрії контактуючих тіл, що відповідає параболічному зазору між тілами, які створюють пару тертя. Тому інтерес представляє оцінка величини сили адгезії при контакті тіл, що мають таку геометрію зазору,

за допомогою простих формул і визначення чинників, що впливають на величину сили адгезії, яку також називають силою відриву.

2. Рівняння моделі контакту шершавих пружних тіл

Шершавість моделюється пружним нелінійним шаром Вінклера-Фусса, що сприймає як стискання, так і розтягування. Механічні властивості цього шару визначаються статистичними теоріями адгезійного контакту між плоскими шершавими поверхнями [6–7] і у напрямі нормалі до них описуються функцією

$$p = p(\Delta) = \begin{cases} p_f(d = t_a - \Delta), & \Delta > 0 \\ 0, & \Delta \leq 0 \end{cases}, \quad (1)$$

де t_a – така відстань d між шершавими площинами, що при $d \geq t_a$ взаємодію між ними можна знехтувати; величина $\Delta > 0$ розглядається як зменшення шершавого шару, якому відповідає номінальний тиск p . Прийнято, що $p > 0$ відповідає стисканню, $p < 0$ – розтягуванню. Номінальний контактний тиск між поверхнями залежить від відстані між ними і визначається функцією [6]

$$p_f(d) = \frac{\eta_s P_c}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{d-\delta_p}^{\infty} g\left(\frac{\delta}{\delta_c}\right) \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) dz, \quad (2)$$

$$\delta = z - d$$

де $P_c = 1,5\pi wR$, $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ (rms), σ_1, σ_2 – стандартні відхилення висот нерівностей шершавих поверхонь, що мають розподіл Гауса; $R = (1/R_1 + 1/R_2)^{-1}$ – радіус кривизни умовних нерівностей; w – питома робота адгезії; $\eta_s = N/A_0$ – кількість висот нерівностей, що доводиться на одиницю площі; функціональна залежність $g(\delta/\delta_c)$ визначається теорією адгезії гладких пружних тіл, відповідно до якої взаємодіють окремі нерівності (наприклад, у разі DMT теорії $g(\delta/\delta_c) = 3^{-1/2} (\delta/\delta_c)^{3/2} - 4/3$ [6]), δ_p – абсолютна величина мінімального переміщення нерівності для конкретної теорії адгезії гладких пружних тіл: $\delta_p = 0$ в DMT-теорії; $\delta_p = \delta_c = (3\pi^2 w^2 R / (4K^2))^{1/3}$, $K = 4E^*/3$ в JKR-теорії контакту,

$E^* = ((1 - \nu_1^2)/E_1 + (1 - \nu_2^2)/E_2)^{-1}$ – приведений модуль Юнга контактуючих тіл, де E_1, E_2 і ν_1, ν_2 , відповідно, модулем Юнга і коефіцієнтом Пуассона матеріалів тіл. Параметри P_c і δ_c можна розглядати як характерні масштаби сил і зближень для окремих нерівностей при малих їх величинах.

Для тіл з викривленою поверхнею нормальний і ковзний контакт моделюється нелінійними граничними інтегральними рівняннями. Контактне завдання зводиться до дослідження одного рівняння типу Гаммерштейна [9–10] з параметром δ

$$u(\mathbf{x}) + \theta \int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p(u(\mathbf{y})) d\mathbf{y} = \delta - f(\mathbf{x}), \quad (3)$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \Omega,$$

де $u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, – невідома функція і невідоме зближення δ , Ω – довільна область, яка містить номінальну область контакту S , $\theta = (\pi E^*)^{-1}$, f – зазор між тілом і умовною межею адгезійної взаємодії, $K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{-1/2}$

У разі, коли $f(\mathbf{x}) = A|\mathbf{x}|^k$, $k \geq 1$ можна перейти до безрозмірних величин $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02})$, $\mathbf{y}_0 = (y_{01}, y_{02})$, $U, \delta_0, p_0, \tilde{p}_0, \Omega_0$:

$$\mathbf{x}_0 = (A/\delta)^{1/k} \mathbf{x}; \quad \mathbf{y}_0 = (A/\delta)^{1/k} \mathbf{y};$$

$$U(\mathbf{x}_0) = u(\mathbf{x}_0 (\delta/A)^{1/k}) \delta^{-1}; \quad \delta_0 = \delta/\delta_c;$$

$$p_0(\delta_0 U(\mathbf{x}_0)) = \theta \delta_c^{(1-k)/k} A^{-1/k} p(\delta_0 U(\mathbf{x}_0)) =$$

$$= \kappa p^*(\delta_0 U(\mathbf{x}_0)) \quad (4);$$

рівняння ковзного контакту (3) приймає вигляд:

$$U(\mathbf{x}_0) + \delta_0^{(1-k)/k} \int_{\Omega_0} K(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) p_0(\delta_0 U(\mathbf{y}_0)) d\mathbf{y}_0 =$$

$$= 1 - |\mathbf{x}_0|^k; \quad \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in \Omega_0 \quad (5)$$

де $U(\mathbf{x}_0)$, $\mathbf{x}_0 \in \Omega_0$ – невідома безрозмірна функція, $\Omega_0 = (|x_{01}| \leq 1 + \varepsilon; |x_{02}| \leq 1 + \varepsilon)$, і число $\varepsilon > 0$ вибирається так, щоб виконувалося включення $S_0 = \{\mathbf{x}_0 : U(\mathbf{x}_0) > 0\} \subseteq \Omega_0$, де S_0 – безрозмірна область контакту; функція $p^*(\cdot)$ визначаються формулою (3). Для дискретизації рівняння (5) застосовується метод колокації, і дискретне рівняння розв'язується модифікованим методом Ньютона, аналогічно тому як це зроблено в роботі [10]. Сила P ,

прикладена до тіл, представляється у вигляді [9–10]

$$P = \pi E^* \delta_c^{(1+k)/k} A^{-1/k} P_0, \\ P_0 = \delta_0^{2/k} \int_{\Omega_0} p_0(\delta_0 U(\mathbf{x}_0)) d\mathbf{x}_0. \quad (6)$$

3. Результати розрахунків та їх аналіз

Розглянемо вісесиметричну задачу, коли номінальний зазор між тілами до деформації визначається функцією $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}^2$. Аналізується випадок контакту шершавого напівпростору з твердим тілом, обмеженим сферичною шершавою поверхнею номінального радіуса R_s (т.е. $k = 2$, $A = (2R_s)^{-1}$), при безрозмірному параметрі $\kappa = 0,255$. Контакт окремих нерівностей описується DMT–теорією адгезійної взаємодії. У цьому разі механічні властивості шару Вінклера-Фусса описуються функцією (1)–(2). Контакт тіл моделюється нелінійними граничними інтегральними рівняннями (3) або в безрозмірному вигляді рівнянням (5). У рівнянні (5) використовуються безрозмірні залежності (4): $p_0(\Delta_0) = \kappa p^*(\Delta_0)$, де $\Delta_0 = \delta_0 U(\mathbf{x}_0)$. Графіки функцій $p^*(\Delta_0)$ представлені в роботах [9, 10]. Надавая величині δ_0 різні значення і розв'язуючи рівняння (5), чисельно будуються функціональні залежності $P_0(\delta_0)$ (Рис. 1). Залежності представлені для різних величин $\delta_c^* = \delta_c/\sigma$, які пов'язані з параметром адгезії Тейбора θ_a залежністю [11]: $\theta_a = 9\pi\delta_c^{*-3/2} / (8\sqrt{3})$. За наявності адгезії залежності $P_0(\delta_0)$ є немонотонними. Негативні значення навантаження при малих зближеннях обумовлені впливом адгезії. Силою адгезії є мінімум $F_0 = -\min_{\delta_0} P_0(\delta_0)$.

Розглядається випадок параболічного зазору між контактуючими тілами. Представлені рис. 2 графіки залежностей безрозмірної сили адгезії (сила відриву) F_0 від параметру κ при різних значеннях параметра шершавості δ_c^* основані на результатах комп'ютерного моделювання. На основі результатів великої кількості чисельних експериментів з моделювання адгезійного контакту при DMT–контактах окремих

нерівностей отримано формулу для оцінки безрозмірної сили адгезії

$$F_0 = 3.99\kappa^{0.982} 0.622^t, \quad t = (\sigma/\delta_c)^{1.78}.$$

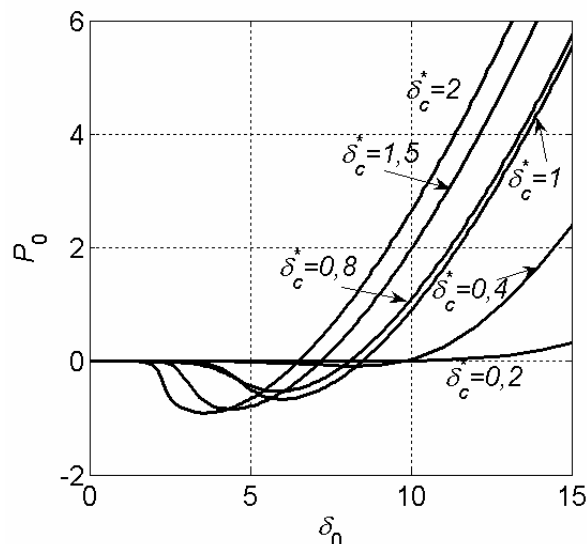


Рис. 1. Залежності нормованої сили, прикладеної до тіла від нормованого зближення

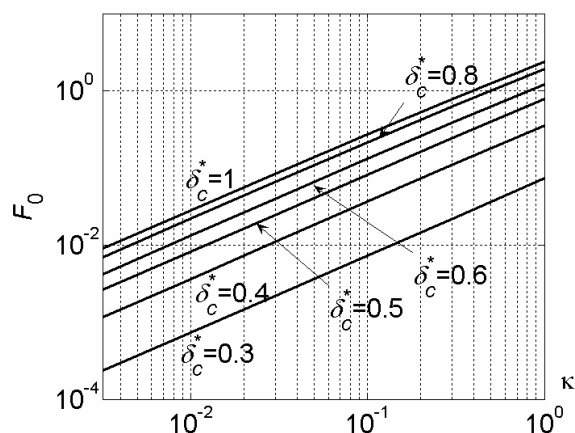


Рис. 2. Залежності нормованої сили адгезії від безрозмірного параметру κ

Формула отримана методом зважених найменших квадратів для параметрів з діапазону значень $\delta_c^* \geq 0.2$ і $0.3 \cdot 10^{-3} \leq \kappa \leq 3$. Перехід до розмірних змінних здійснюється за формулою (6), і силу адгезії при DMT–контактах можна визначати за формулою

$$F = 3.99\pi E^* \delta_c^{3/2} A^{-1/2} \kappa^{0.982} 0.622^t, \quad t = (1/\delta_c^*)^{1.78}.$$

4. Висновки

Моделювання адгезійного контакту шершавих тіл з викривленою номінальною

геометрією проводиться методом граничних інтегральних рівнянь. Отримані розв'язки визначають обтискання ефективної товщини шершавого шару, контактний тиск, номінальну область контакту при різних зближеннях контактуючих тіл і параметрах шершавості. Сила адгезії визначається чисельно при різних параметрах шершавості поверхні і макропараметрах контактуючих тіл.

При параболічному зазорі між контактуючими тілами отримано апроксимаційну формулу для визначення сили адгезії при різних мікропараметрах шершавості і макрогеометричних параметрах контактуючих тіл.

Список використаних джерел

1. Gerberich, W. W., Cordill, M. J. Physics of adhesion. Rep. Prog. Phys., – 2006. – 69:2157–2203.
2. Bourago N.G., Kukudzhano V.N. A review of contact algorithms / The Institute for problems in mechanics of RAS, Moscow, Izv. RAN, MTT, No. 1, pp. 45–87, 2005.
3. Sauer R.A. A Survey of Computational Models for Adhesion // The Journal of Adhesion – 2015. – 92, Issue 2, P. 1–43
4. Sauer R.A. Computational contact formulations for soft body adhesion Advances in soft Matter Mechanics (Chapter 2), Li, S., Sun, B. (Eds.), Springer – 2012. – 33 p.
5. Friction and Wear: From Elementary Mechanisms to Macroscopic Behavior. ed. by Popov V.L., Pohrt R. Front. Mech. Eng. 2019 doi:10.3389/fmech.2019.00047
6. Maugis D. Contact, Adhesion and Rupture of Elastic Solids. – Berlin: Springer-Verlag, 2000. – 414p.
7. Johnson K.L. Non-Hertzian contact of elastic spheres. In: The mechanics of the contact between deformable bodies, ed. by de Pater, Kalker. - Delft:University Press, 1975. - P. 26 - 40.
8. Fuller K.N.G., Tabor D. The effect of surface roughness on the adhesion of elastic solids // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1975. – 345. - P. 327-342.
9. Galanov B. A., Valeeva I. K. Sliding adhesive contact of elastic solids with stochastic roughness. Int. J. Eng. Sci. 101 (2016) 64–80.
10. Galanov B.A. Models of adhesive contact between rough elastic bodies. Int. J. Mech. Sci. 53. (2011) 968–977.
11. Tabor D. Surface forces and surface interactions // J. Colloids Interface Sci. 1997. V. 58. P. 2–13.

References

1. GERBERICH, W. W., CORDILL, M. J. (2006) Physics of adhesion. Rep. Prog. Phys., – 69. pp. 2157–2203.
2. BOURAGO N.G., KUKUDZHANO V.N. (2005) A review of contact algorithms / The Institute for problems in mechanics of RAS, Moscow, Izv. RAN, MTT, No. 1. pp. 45–87.
3. SAUER R.A. (2015) A Survey of Computational Models for Adhesion // The Journal of Adhesion. 92, Issue 2. pp. 1–43
4. SAUER R.A. (2012) Computational contact formulations for soft body adhesion Advances in soft Matter Mechanics (Chapter 2), Li, S., Sun, B. (Eds.), Springer.
5. Friction and Wear: From Elementary Mechanisms to Macroscopic Behavior (2019) ed. by Popov V.L., Pohrt R. Front. Mech. Eng. doi:10.3389/fmech.2019.00047
6. MAUGIS D. (2000) Contact, Adhesion and Rupture of Elastic Solids. – Berlin: Springer-Verlag.
7. JOHNSON K.L. (1975) Non-Hertzian contact of elastic spheres. In: The mechanics of the contact between deformable bodies, ed. by de Pater, Kalker. - Delft:University Press. pp. 26–40.
8. FULLER K.N.G., TABOR D. (1975) The effect of surface roughness on the adhesion of elastic solids // Proc. R. Soc. Lond. A. – 345. pp. 327–342.
9. GALANOV B. A., VALEEVA I. K. (2016) Sliding adhesive contact of elastic solids with stochastic roughness. Int. J. Eng. Sci. 101. pp. 64–80.
10. GALANOV B.A. (2011) Models of adhesive contact between rough elastic bodies. Int. J. Mech. Sci. 53. pp. 968–977.
11. TABOR D. (1997) Surface forces and surface interactions // J. Colloids Interface Sci. V. 58. pp. 2–13.

Надійшла до редколегії 13.03.2020

УДК 539.3

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/1-2.9>

Ващіліна О. В.¹, к. ф.-м. н., доц.,
Лебедева І. В.¹, к. ф.-м. н., доц.

O. V. Vashchilina¹, Ph.D. (Phys.-Math.), As.Prof.,
I. V. Lebedeva¹, Ph.D. (Phys.-Math.), As.Prof.

Деякі особливості руху елементів бурильних установок

Some peculiarities of the drilling rigs elements movement

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 04116, м. Київ, вул. Б. Гаврилишина, 24, e-mail: vashchilina@ukr.net.

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 04116, Kyiv, Bohdan Hawrylyshyn str. 24, e-mail: vashchilina@ukr.net.

У даній статті досліджується процес кружляння бурильного долота на шорсткуватій площині дна свердловини. Застосовано неголономні кінематичні моделі механічної взаємодії контактуючих тіл з недосконалостями на початковій стадії самозбурення системи. На основі результатів експериментальних досліджень вважається, що одним з основних чинників, що впливає на коливання кружляння, є геометрія долота. Припускається, що бурильне долото є абсолютно твердим тілом еліпсоїдальної форми, нижня поверхня свердловини вважається плоскою. Коливання, що виникають, пов'язані зі спонтанними згинними деформаціями бурильної колони, які супроводжуються безвідривним контактом долота і породи. Отримано рівняння руху долота в лінійному наближенні. Здійснено аналіз розв'язку лінеаризованих рівнянь, з якого знайдено частоти виникаючих періодичних рухів. Проаналізовано форми коливань за різних геометричних параметрів еліпсоїдального долота. Показано, що долото може обертатися у зворотному напрямі, кружляючи з кутовими швидкостями, які перевищують частоту обертання бурильної колони. Результати досліджень можуть бути застосовані в розробках бурильних установок нових типів.

Ключові слова: глибоке буріння, долото еліпсоїдальної форми, неголономна динаміка, пряме та зворотне кружляння.

This paper deals with investigation of the process of drill bit whirling on the rough plane of the well bottom. Nonholonomic kinematic models of the mechanical interaction of contacting bodies with defects at the initial stage of system self-excitation are applied. On the basis of the results of experimental studies, it is believed that one of the main factors influencing on the whirling vibrations is the geometry of the bit. The bit is considered to be an absolutely rigid ellipsoidal body, the well bottom surface is supposed to be a plane. The resulting oscillations are associated with spontaneous bending deformations of the drill string, which are accompanied by continuous contact of the bit and the rock. The equations of motion of the bit in the linear approximation are obtained. The analysis of the solution of the linearized equations is carried out, and the frequencies of the arising periodic motions are found. The forms of oscillations under different geometrical parameters of an ellipsoidal bit are analyzed. It is shown that the bit can rotate in backward direction, moving at angular velocities that exceed the angular frequency of the drill string. The research results can be used in the development of new types of drilling rigs.

Key Words: deep drilling, ellipsoidal bits, nonholonomic dynamics, forward and backward whirling.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

У практиці глибокого буріння нафтових та газових свердловин добре відомий деструктивний вплив коливань кружляння на бурильні колони і долота [1-4]. У залежності від напрямку обертального руху розрізняють прямі та зворотні кружляння. При цьому в оберненому напрямі кружляння швидкість обертання може досягати частоти у діапазоні від 5 до 30 разів

більшої від швидкості обертання самої колони. Такі швидкості роблять ефект коливання кружляння особливо руйнівним. Згідно з практичними дослідженнями, основним фактором, що впливає на коливання кружляння є геометрія долота. У роботах авторів [5, 6] аналізується випадок кружляння сферичного долота на сферичній поверхні шорсткого дна глибокої бурильної свердловини. У даній роботі розглянуто інший варіант задачі про кочення

долота по дну свердловини, який дозволяє моделювати її аналітичними методами, пов'язаний з малими коливаннями кружляння еліпсоїдального долота на плоскому дні свердловини.

2. Постановка задачі

Розглянемо випадок, коли долото з півсями c і d відхиляється від свого вертикального стану і починає котитися по нижній площині π , не торкаючись стінки свердловини (рис. 1).

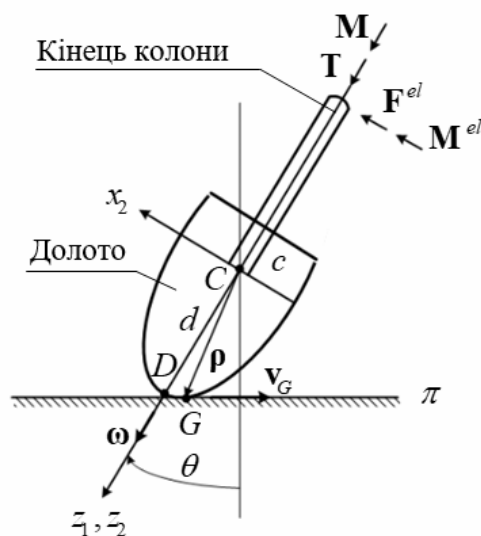


Рис 1. Кружляння еліпсоїдального долота на шорсткуватій площині

Нелінійні неголономні рівняння кочення еліпсоїдального долота по площині π виведені у роботі [2], виходячи з умови $\mathbf{v} = 0$. Вони представлені у вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{u} - \omega v + \dot{u}' \sqrt{c^2 \sin^2 \theta + d^2 \cos^2 \theta} + \\ + \omega \frac{(d^2 - c^2) \sin \theta_x \cos \theta_x}{\sqrt{c^2 \sin^2 \theta_x + d^2 \cos^2 \theta_x}} = 0, \\ \dot{v} + \omega v + \dot{v}' \sqrt{c^2 \sin^2 \theta + d^2 \cos^2 \theta} + \\ + \omega \frac{(d^2 - c^2) \sin \theta_y \cos \theta_y}{\sqrt{c^2 \sin^2 \theta_y + d^2 \cos^2 \theta_y}} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де $\theta = \sqrt{(u')^2 + (v')^2}$; u, v - малі поперечні пружні зміщеннями центра C долота, орієнтовані паралельно осям Ox, Oy відповідно.

Рівняння рівноваги моментів, прикладених до долота, мають вигляд [4]:

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + EI \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} \rho_z + T \rho_y = 0, \\ -EI \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - EI \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} \rho_z - T \rho_x = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут ρ_x, ρ_y, ρ_z є компонентами вектора $\mathbf{p}$, який з'єднує точку C з точкою G (рис. 1).

Візьмемо до уваги, що переміщення u і v малі, тоді $\theta_x \approx -v', \theta_y \approx u', \sin \theta_x \approx -v', \cos \theta_x \approx 1$, і рівняння (1), (2) можна переписати у лінеаризованій формі:

$$\begin{aligned} \dot{u} + d \cdot \dot{u}' - \omega v + \omega \frac{d^2 - c^2}{d} v' = 0, \\ \dot{v} + d \cdot \dot{v}' + \omega u + \omega \frac{d^2 - c^2}{d} u' = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} (g^{(1)} - h^{(1)} d) u + \left(-g + hd + \frac{T}{EI} \frac{d^2 - c^2}{d} \right) u' = 0, \\ (g^{(1)} - h^{(1)} d) v + \left(-g + hd + \frac{T}{EI} \frac{d^2 - c^2}{d} \right) v' = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Ця система лінійних рівнянь має сталі коефіцієнти, тому з рівнянь (4) випливає:

$$u' = tu, \quad v' = tv, \quad (5)$$

де величина t дорівнює:

$$t = - \frac{(g^{(1)} - h^{(1)} d)}{\left(-g + hd + \frac{T}{EI} \frac{d^2 - c^2}{d} \right)}, \quad (6)$$

Тому,

$$p = \frac{\left[1 + \frac{m(d^2 - c^2)}{d} \right]}{1 + md}. \quad (7)$$

Отже, рух долота у системі відліку $Oxyz$, що обертається, визначається рівностями

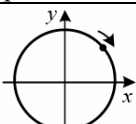
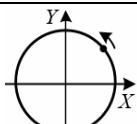
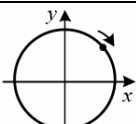
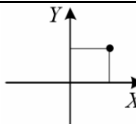
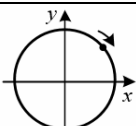
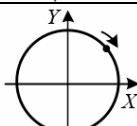
$$\begin{aligned} u(t) = C_1 \sin \omega p t + C_2 \cos \omega p t, \\ v(t) = C_2 \sin \omega p t - C_1 \cos \omega p t, \end{aligned} \quad (8)$$

і підпорядковується рівнянням

$$X(t) = C_1 \sin \omega(p-1)t + C_2 \cos \omega(p-1)t,$$

$$Y(t) = -C_2 \sin \omega(p-1)t + C_1 \cos \omega(p-1)t. \quad (9)$$

Таблиця 1 – Деякі форми коливань кружляння в залежності від значень частоти p

Номер позиції	Значення параметра p	Тип періодичного руху у системі відліку $Oxyz$, що обертається	Тип руху у фіксованій системі $OXYZ$
5	$0 < p < 1$	$\Omega_1 < \omega$ Зворотнє обертання 	$0 < \Omega_2 < \omega$ Пряме кружляння 
6	$p = 1$	$\Omega_1 = \omega$ Зворотнє обертання 	$\Omega_2 = 0$ Нерухомий стан 
9	$p > 2$	$\Omega_1 > 2\omega$ Зворотнє обертання 	$\Omega_2 > \omega$ Зворотнє кружляння 

Режими кружляння, що генеруються, представлені у таблиці, наведеній у статті [6], також можуть бути реалізовані для еліпсоїдальних долот у відповідних умовах, які визначаються параметром p . У таблиці 1 даної статті наведені лише позиції 5, 6 та 9 цієї таблиці. У випадку, що розглядається, найважливішим фактором є співвідношення c/d , яке дозволяє імітувати переходи від продовгуватих еліпсоїдів до сфер, і далі до сплюснених еліпсоїдів. Рис. 2 демонструє взаємозв'язок між значеннями параметра p і співвідношенням c/d для базової версії долота, розглянутої вище.

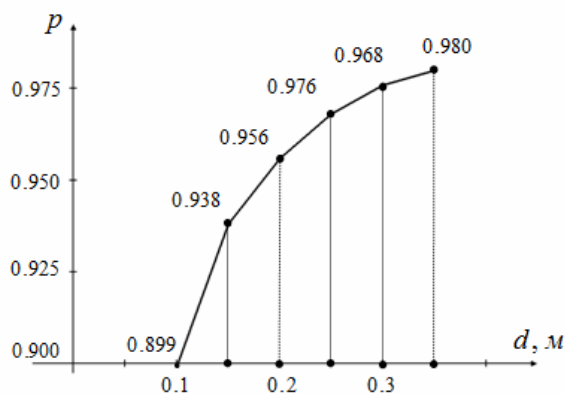


Рис. 2. Залежність параметра p від величини d (випадок $c = 0.1$ м)

Так, наприклад, якщо $0.05 \leq c = d \leq 0.25$ м і долото є сферичним, то частотний параметр p наближається до 1 із зменшенням c . Це означає,

що долото переходить у режим прямого кружляння (позиція 5 у таблиці). При цьому, він наближається до стану, коли $p \rightarrow 1$ для малих C , а центр C прямує до нерухомого стану у нерухомій системі координат (позиція 6 у таблиці). Причина цього полягає в тому, що якщо БК з малим долотом трохи відхилиться від початкової осьової лінії і долото відійде від осі обертання, то система може залишатися у цьому відхиленому стані, що призведе до зміни напрямку буріння. Показово, що зазначена ситуація не є рідкісною в буринній практиці.

Розглянута тенденція зберігається також і для довгастих еліпсоїдальних долот. Наприклад, якщо радіус кривизни у верхній точці еліпсоїда з півосями $c = 0,1$ м, $d = 0,3$ м дорівнює $r = 0,0333$ м то динаміку цього долота можна співставити з динамікою сферичного долота радіуса $a = 0,0333$ м.

Справді, значення параметра $p = 0.9760$ для еліпсоїдального долота еквівалентне значенню $p = 0.9811$ сферичного долота. Рис 2 ілюструє зміну параметра p із збільшенням d .

Однак ситуація суттєво змінюється, якщо еліпсоїд сплюснутий ($c > d$). У цьому випадку вібрація кружляння може набувати різних форм у залежності від співвідношення c/d півосей. Справді, при цьому співвідношення $(d^2 - c^2)/d^2$ у рівнянні (7) стає від'ємним, і параметр p може набувати додатного, нульового або від'ємного значень. Таким чином, згідно з формулою (7) для $c = 0,3$ м і $d = 0,1$ м маємо $p = 0,5308\pi$. Але

значення p зменшується із збільшенням c/d і воно набуває величини $p \approx 0$ для $c = 0,4$ м і $d = 0,083$ м. Цей результат узгоджується з позицією 4 у таблиці. У цьому випадку в нерухомій системі координат долото виконує обернене кружляння $\Omega_2 = \omega$.

Особливі випадки виникають коли $p > 2$. Тоді може бути реалізована нерівність $\Omega_2 > \omega$ (позиція 9 у таблиці) і долото може обертатися в оберненому напрямі, кружляючи з кутовими швидкостями, які перевищують частоту ω обертання бурильної колони.

3. Висновки.

Отримано рівняння руху долота у лінійному наближенні. Здійснено аналіз розв'язку лінеари-

зованих рівнянь, з якого знайдено частоти періодичних рухів, що виникають.

Проаналізовано форми коливань за різних геометричних параметрів еліпсоїдального долота.

Показано, що долото може обертатися в оберненому напрямі, кружляючи з кутовими швидкостями, які перевищують частоту ω обертання бурильної колони.

За допомогою розроблених методів отримано уявлення про найпростіші періодичні кружляння еліпсоїдальних долот на шорсткуватих плоских днищах свердловин. Можна припустити, що кружляння цих долот на криволінійних поверхнях буде відрізнятися більш складними режимами з різними частотами і складними типами рухів. Однак аналіз таких систем пов'язаний із серйозними труднощами.

References

- Список використаних джерел**
1. Борисов А. В. Избранные задачи неголономной механики / А.В. Борисов, И.С. Мамаев, А.А. Килин. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 290 с.
 2. Гуляев В.И. Моделирование нештатных ситуаций при бурении глубоких скважин / В.И. Гуляев, С.Н. Глазунов, О.В. Глушакова и др. – Киев : Изд. «Юстон», 2017. – 544 с.
 3. Chen S. L. Field investigation of the effects of stick-slip, lateral, and whirl vibrations on roller-cone bit performance / S. L. Chen, K. Blackwood, E. Lamine // SPE Drilling & Completion. – 2002. – V.17. – P.15 – 20.
 4. Ващіліна О. В. Технічні аспекти проблем глибокого буріння/ О.В. Ващіліна // Вісник Національного транспортного університету. Серія: «Технічні науки», 2017, №1(37), С.42 – 47.
 5. Глазунов С. М. Частотний аналіз періодичних режимів перекочування бурильного долота на шорсткому дні глибокої свердловини / С.М. Глазунов, О.В. Ващіліна, І.В. Лебедєва // Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки, 2016, №1, С. 41 – 44.
 6. Ващіліна О. В. Моделювання та чисельне дослідження явища самозбурення коливань кружляння бурильного долота/ О.В. Ващіліна, І.В. Лебедєва, О.І. Білобрицька // Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки, 2019, №1, С. 28 – 33.
 1. BORISOV, A. V., MAMAJEV, I. S. & KILIN A.A. (2005) *Izbrannyye zadachi negolo-nomnoy mekhaniki*. Moskva-Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy.
 2. GULYAYEV, V. I., GLAZUNOV, S. N., GLUSHAKOVA, O. V. et al (2017) *Modelirovaniye neshtatnykh situatsiy pri burenii glubokikh skvazhin*. Kiev: Yuston publishing.
 3. CHEN, S.L., BLACKWOOD, K. & LAMI-NE, E. (2002) *Field investigation of the effects of stick-slip, lateral, and whirl vibrations on roller-cone bit performance*. SPE: Drilling & Completion.
 4. VASHCHILINA, O. V. (2017) *Technical aspects of the problems of deep drilling*. Visnyk Natsional'noho transportnoho universytetu. Seriya: «Tekhnichni nauky» – № 1 (37), pp. 42 – 47.
 5. GLAZUNOV, S. M., VASHCHILINA, O. V. & LEBEDYEVA, I. V. (2016) *Frequency analysis of periodic regimes of drill bit rollings on uneven bottom of a deep bore-hole*. Visnyk Kyivsk'koho natsional'noho universytetu imeni Tarasa Shevchenka, Seriya: fizyko-matematychni nauky. №1, pp. 41 – 44.
 6. VASHCHILINA, O. V. , LEBEDYEVA, I. V. & O. I Bilobrytska (2019) *Modeling and numerical research of the self-excitation phenomenon of the drill bit whirlings vibrations*. Visnyk Kyivsk'koho natsional'noho universytetu imeni Tarasa Shevchenka, Seriya: fizyko-matematychni nauky. №1, pp. 28 – 33.

Надійшла до редколегії 15.02.20

УДК 539.3

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/1-2.10>

Григоренко О.Я.¹, д.ф.-м.н., проф.,
Борисенко М.Ю.¹, к.ф.-м.н.,
Бойчук О.В.², к.ф.-м.н.

A.Ya. Grigorenko¹, Dr Sci., Prof.,
M.Yu. Borysenko¹, Ph.D.,
O.V. Boychuk², Ph.D.

Визначення частот і форм вільних коливань п'ятикутних пластин методом скінченних елементів

Determination of the frequencies and forms of free vibrations of pentagonal plates by the finite-element method

¹ Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, 83000, м. Київ, вул. Нестерова, 3, e-mail: ayagrigorenko1991@gmail.com, mechanics530@gmail.com.

¹ Institute of Mechanics after S.P. Tymoshenko NAS of Ukraine, 83000, Kyiv, Nesterov st., 3, e-mail: ayagrigorenko1991@gmail.com, mechanics530@gmail.com.

² Миколаївський національний аграрний університет, 54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9, e-mail: boychuklena27@gmail.com.

² Nikolaev National Agrarian University, 54030, Nikolaev, Georgy Gongadze st., 9, e-mail: boychuklena27@gmail.com.

Визначаються методом скінченних елементів (МСЕ) частоти та форми вільних коливань ізотропної тонкої п'ятикутної пластини правильної форми з різними варіантами жорсткого закріплення на краях. Проводиться порівняння отриманих результатів для деяких п'ятикутних пластин з результатами отриманих для квадратних пластин еквівалентної маси з відповідними граничними умовами. Представленні форми коливань досліджуваних пластин та встановлена топологія форм коливань для деяких розглянутих пластин у відповідності до квадратних пластин з вільними краями і жорстко закріпленими краями. Достовірність отриманих результатів забезпечується використанням обґрунтованої математичної моделі, коректністю постановки задачі та практичною збіжністю розрахованих частот при застосуванні МСЕ.

Ключові слова: метод скінченних елементів, п'ятикутна пластина, частота та форма вільних коливань.

Frequencies and modes of free vibrations of an isotropic thin pentagonal plate of regular shape with various configurations of rigid attachment at the edges are determined using the finite element method (FEM). The results obtained for some pentagonal plates are compared with the results obtained for square plates of an equivalent mass with corresponding boundary conditions. We present the vibration modes of the studied plates and the topology of the vibration modes for some of the considered plates corresponding to the square plates with free edges and rigidly fixed edges. The reliability of the obtained results is ensured by the use of a substantiated mathematical model, the correct formulation of the problem and the practical convergence of the calculated frequencies when using the FEM.

Keywords: finite element method, pentagonal plate, frequency and shape of free vibrations.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

При проектуванні інженерних споруд, сучасних будівель, корпусів різноманітних машин та конструкцій широко застосовують пластини різної форми з різними варіантами закріплення. Необхідно мати інформацію про динамічні параметри таких пластин, зокрема інформацію про розподіл частот і форм вільних

коливань, оскільки в реальних умовах експлуатації потрібно уникати резонансних режимів. У зв'язку з цим постає актуальна проблема механіки та прикладної математики про поширення аналітичних, чисельних та експериментальних методів до розв'язання задач динаміки пластин різної форми.

В рамках класичної теорії тонких пластин

для визначення частот і форм вільних коливань використовується багато різних методів [9-11]. Поряд з аналітичними та експериментальними методами розв'язування задач динаміки теорії пластин та оболонок широкого практичного застосування набули чисельні методи, а саме методом скінченних елементів. Цей метод є основою роботи багатьох сучасних програм для інженерного розрахунку. Однією з таких програм є FEMAP з розв'язувачем NX Nastran [5]. Запропонований програмний засіб використовується в ряді досліджень [1-3, 6]. Розглянемо деякі публікації присвячені даній тематиці.

В [3] визначаються частоти та форми вільних коливань тонкої жорстко закріпленої квадратної пластини сталої товщини на основі двох чисельних методів, а саме, МСЕ, який реалізовано на FEMAP, і методом Релея-Рітца, який модифіковано та реалізовано на ЕОМ в середовищі Delphi. В [2] досліджуються динамічні характеристики тонкої ізотропної жорстко закріпленої квадратної пластини за допомогою реалізації неklasичного експерименту Хладні та МСЕ. Описується методика проведення експерименту і чисельного розрахунку. В [6] розглядаються тонкі пластини трикутної, квадратної та п'ятикутної форми з вільними краями. Проведено порівняльний аналіз розрахованих частот вільних коливань та встановлені залежності власних частот від фізичних та механічних характеристик матеріалу у вигляді коефіцієнтів. В [1] МСЕ досліджується тонка квадратна пластина з різними фізико-механічними характеристиками з вільними краями та проводиться порівняльний аналіз розрахованих власних частот квадратної пластини з частотами, які отримані чисельно та експериментально іншими авторами [4].

В [12] досліджено коливання вільних полігональних і заокруглених полігональних пластин за допомогою покращеного метода Рітца на класі гомотопічних форм. Представленні перші п'ять частот власних коливань пластин правильної форми та еволюція форм коливань. В [7] для визначення основної частоти коливань тонких пружних паралелограмних пластин запропоновано використовувати метод інтерполяції з введеною геометричною характеристикою пластини, яка є відношенням внутрішнього конформного радіуса до зовнішнього конформного радіуса. В [8] розглянуто коливання пружних ізотропних трапецієподібних пластин, запропоновано використовувати метод інтерполяції форм-фактора для визначення значення основної частоти.

Метою даної роботи є визначення методом

скінченних елементів частот та форм вільних коливань ізотропної тонкої п'ятикутної пластини правильної форми з різними варіантами жорсткого закріплення на краях, порівняння отриманих результатів для деяких п'ятикутних пластин з результатами отриманих для квадратних пластин еквівалентної маси з відповідними граничними умовами та встановлення топології форм коливань.

Основні співвідношення

Рівняння руху пластини в МСЕ за відсутності демпфування має вигляд

$$\mathbf{K}\vec{\Phi}_j + \mathbf{M}\ddot{\vec{\Phi}}_j = 0, \quad (1)$$

де $\mathbf{K}$ та $\mathbf{M}$ – матриця жорсткості та матриця мас механічної системи відповідно, $\vec{\Phi}_j$ – вектор переміщень вузлів системи, що відповідає j -тому ступеню вільності, який відтворює j -ту форму коливань.

При вільних коливаннях пластини всі вузлові точки здійснюють гармонічні коливання як функції часу:

$$\vec{\Phi}_j(t) = \vec{\Phi}_j \sin \omega_j t. \quad (2)$$

Після підстановки функцій (2) в рівняння руху пластини визначення власних частот і форм коливань зводиться до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{K}\vec{\Phi}_j - \omega_j^2 \mathbf{M}\vec{\Phi}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (3)$$

де ω_j – частота гармонічних коливань.

NX Nastran для визначення частот і форм вільних коливань при відсутності дисипації енергії і демпфування використовує, як основний, метод Ланцоша [5].

Побудова розрахункової моделі

За допомогою системи FEMAP побудовано геометрію п'ятикутної пластини правильної форми зі стороною $a = 106,73 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ і товщиною $d = 0,003 \text{ м}$. Площа п'ятикутної пластини еквівалентна площі квадратної пластини [3]. В якості матеріалу задавався алюміній з модулем Юнга $E = 110 \text{ ГПа}$, коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,34$, густиною $\rho = 2710 \text{ кг/м}^3$. Пластинка досліджувалась при різних варіантах жорстко (С) закріплених країв і вільних (F) країв (рис.1). Скінченно-елементна розбивка проводилась лінійними восьмикутними solid-елементами розміром сторони $1,5 \text{ мм}$. Проводився розрахунок частот і форм

вільних коливань п'ятикутних пластин з різними граничними умовами.

Результати

Достовірність отриманих результатів забезпечується використанням обґрунтованої математичної моделі, коректністю постановки задачі,

розв'язком тестових задач [3] та практичною збіжністю розрахованих частот при застосуванні методу скінченних елементів.

В результаті розрахунків отримано частоти вільних коливань п'ятикутних пластин з вісьма різними варіантами жорсткого закріплення країв

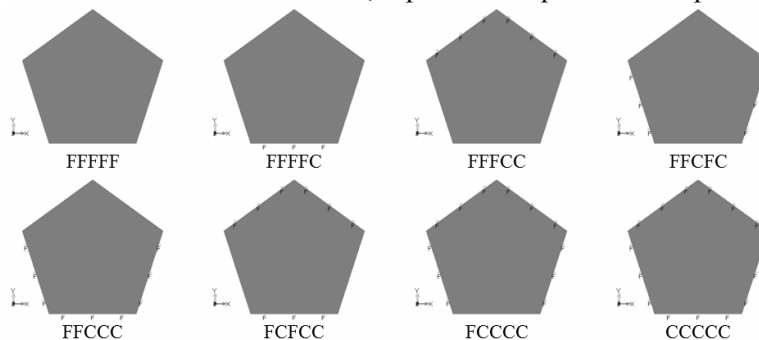


Рис. 1. Варіанти закріплення пластини

і вільних країв, які представлені в таблиці 1. Для наочності результати представлені у вигляді гістограм (рис. 2). Порівняння перших трьох форм коливань всіх розглянутих пластин представлені на рис. 3-5. Порівняння перших десяти частот для п'ятикутної пластини і квадратної пластини [3] еквівалентної маси з жорстко закріпленими всіма краями наведено в таблиці 2 та гістограмі (рис. 6).

Встановлена топологія форм коливань для деяких розглянутих пластин у відповідності до квадратних пластин з вільними краями [1, 12] (рис. 7) і жорстко закріпленими краями [3] (рис. 8).

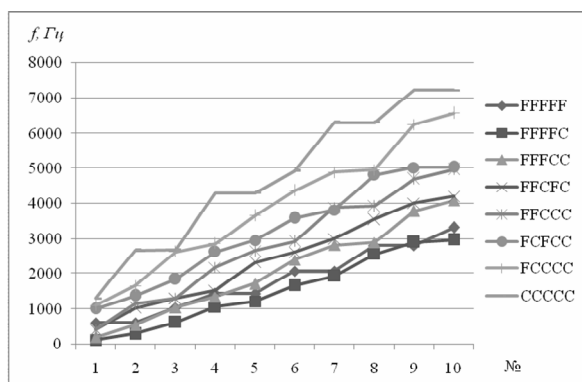


Рис. 2. Частоти вільних коливань п'ятикутних пластин

Таблиця 1

Частоти вільних коливань п'ятикутних пластин

№	$f, \text{Гц}$							
	FFFFF	FFFFC	FFFC	FFCFC	FFCCC	FC FCC	FCCCC	CCCCC
1	604	119	197	403	404	1013	1101	1300
2	604	293	537	1031	1161	1377	1649	2673
3	1039	615	1039	1305	1306	1833	2625	2675
4	1429	1061	1352	1524	2174	2623	2863	4302
5	1429	1212	1713	2317	2663	2967	3652	4304
6	2071	1659	2401	2619	2928	3583	4378	4919
7	2071	1931	2825	3010	3887	3815	4889	6319
8	2812	2562	2899	3549	3922	4816	4953	6320
9	2812	2905	3789	4011	4702	5022	6265	7224
10	3322	2977	4088	4209	4961	5027	6578	7228

Висновки

У роботі визначені частоти та форми вільних коливань ізотропних тонких п'ятикутних пластин правильної форми з різними варіантами жорсткого закріплення на краях. При цьому отримані такі конкретні результати:

1. Частоти п'ятикутної пластини з вільними кра-

ями не є самими низькими в порівнянні з відповідними частотами при інших варіантах закріплення.

2. Із збільшенням кількості закріплених торців відповідні частоти зростають.

3. Частоти пластини з жорстко закріпленими краями більші ніж в два рази за відповідні

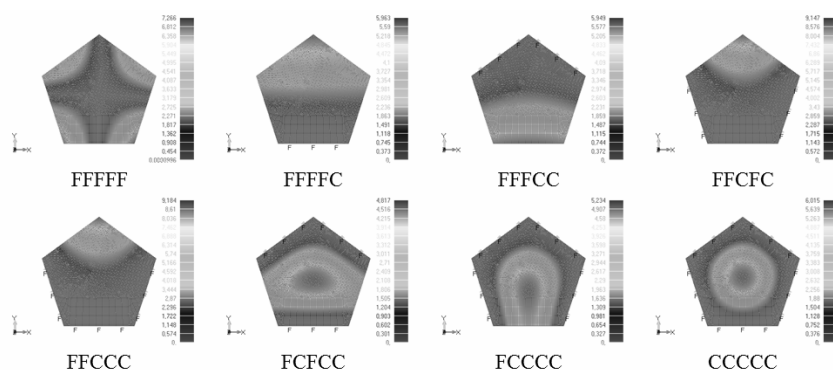


Рис. 3. Перша форма вільних коливань п'ятикутних пластин

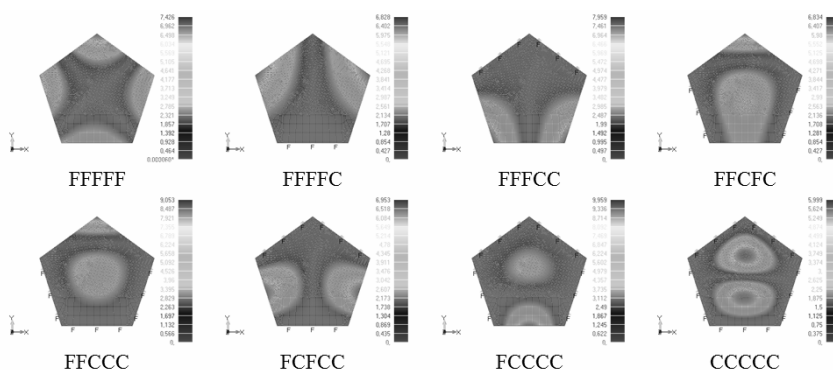


Рис. 4. Друга форма вільних коливань п'ятикутних пластин

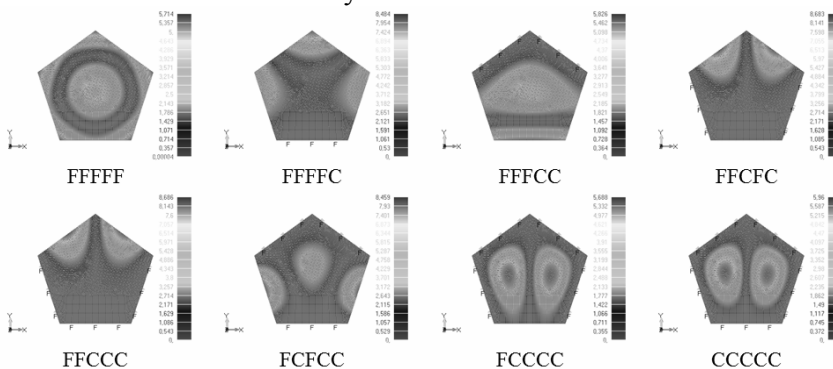


Рис. 5. Третя форма вільних коливань п'ятикутних пластин

Таблиця 2

Частоти вільних коливань п'ятикутної і квадратної пластини

№	$f, \Gamma\text{ц}$	
	CCCCC	CCCC [3]
1	1300	1373
2	2673	2789
3	2675	2789
4	4302	4096
5	4304	4972
6	4919	4997
7	6319	6211
8	6320	6211
9	7224	7900
10	7228	7900

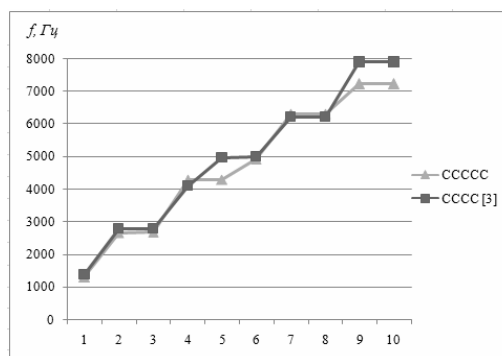


Рис. 6. Частоти вільних коливань п'ятикутної і квадратної пластини

частоти пластини з вільними краями.

4. Від варіанту жорсткого закріплення однакової кількості торців суттєво залежать перші частоти.

5. Спостерігається мала розбіжність відповідних частот та подібність форм коливань для пластин з парами закріплення: FFCFC і

FFCCC; FCCCC і CCCCC.

6. Частоти вільних коливань п'ятикутної і квадратної пластин з жорстко закріпленими краями мають незначну розбіжність.

7. Наведена топологія форм коливань для деяких розглянутих пластин у відповідності до квадратних пластин з вільними краями і жорстко закріпленими краями.

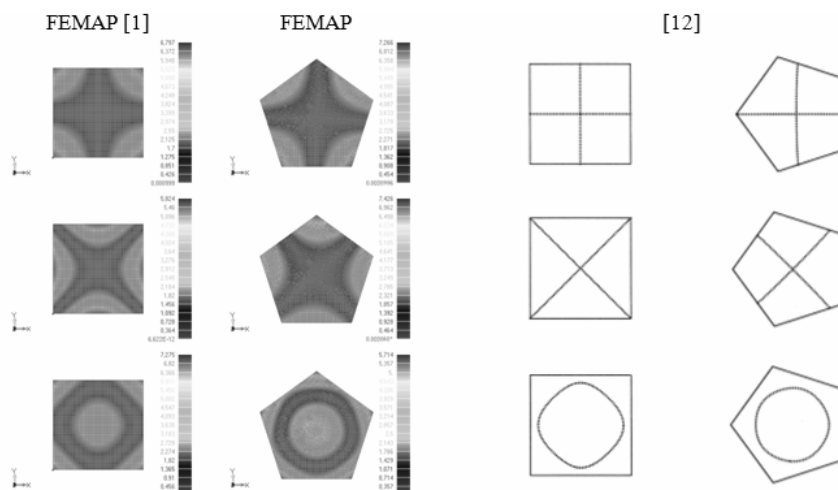


Рис. 7. Топологія форм коливань пластин з вільними краями

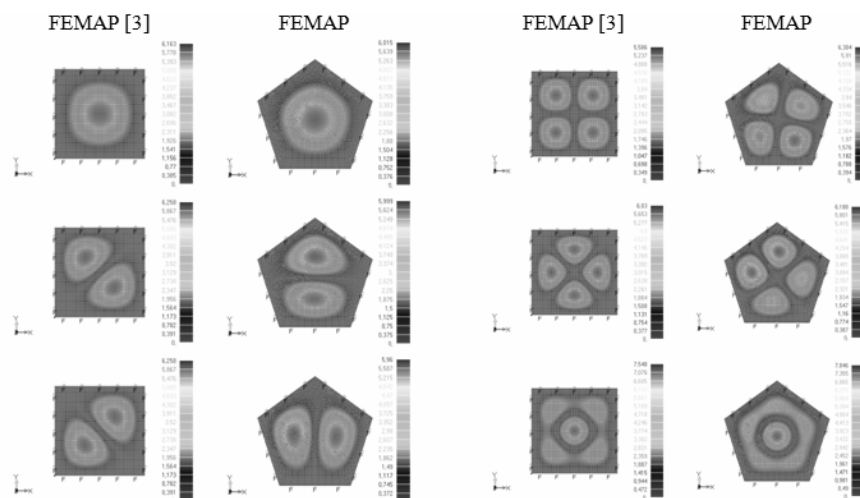


Рис. 8. Топологія форм коливань пластин з жорстко закріпленими краями

Список використаних джерел

1. Борисенко М.Ю. Комп'ютерне моделювання вільних коливань тонких пластин з різних матеріалів / М.Ю. Борисенко, О.В. Бойчук, І.А. Борисенко, Ю.О. Роговцов // Геометричне моделювання та інформаційні технології, 2016. – №2. – С. 29-33.
2. Григоренко О.Я. Застосування експериментального і чисельного методів до дослідження вільних коливань прямокутних пластин / О.Я. Григоренко, М.Ю. Борисенко, Е.В. Бойчук,

References

1. BORYSENKO M.Y., BOYCHUK O.V., BORYSENKO I.A., ROGOVTSOV Y.O. (2016) Computer modeling of free vibration of thin plates with different materials. *Science Journal of Geometric modeling and information technologies*. – No. 2. – P. 29-33.
2. GPIGORENKO O.Y., BORYSENKO M.Y., BOYCHUK O.V., NOVYTSKYI V.S. (2019) Application of experimental and numerical methods to the study of the free vibrations or rec-

- В.С. Новицький // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій, 2019. – №29. – С. 103-112.
3. Григоренко О.Я. Чисельний аналіз вільних коливань прямокутних пластин на основ різних підходів / О.Я. Григоренко, М.Ю. Борисенко, Е.В. Бойчук, В.С. Новицький // Вісник Запорізького національного університету, серія фізико-математичні науки, 2019. – №1. – С. 33-41.
4. Мелешко В.В. Изгибные колебания упругих прямоугольных пластин со свободными краями: от Хладни (1809) и Ритца (1990) до наших дней / В.В. Мелешко, С.О. Папков // Акустичний вісник. – 2009. – Т. 12, № 4. С. 34-51.
5. Рудаков К. М. FEMAP. Геометричне та скінченно-елементне моделювання конструкцій у MSC. visual Nastran for Windows. – К.: НТУУ «КПІ», 2005. – 218 с.
6. Borysenko M. Numerical analysis of frequencies and forms of own collars of different forms with free zone / M. Borysenko, A. Zavhorodnii, R. Skupskyi // Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics, 2019. – Vol.18, №1. – P. 5–13.
7. Chernyaev A.A. Improving the accuracy of geometric interpolation for determining fundamental frequency of parallelogram plates vibration / A.A. Chernyaev // Proc. Eng. 2017. – Vol. 206. – P. 31–34.
8. Korobko A.V. Determination of basic dynamic vibration frequency at trapezoid plates using conformal radius ratio interpolation technique / A.V. Korobko, A.A. Chernyaev, V.I. Korobko // Proc. Eng. 2017. – Vol.206. – P. 25–30.
9. Leissa A.W. The Free Vibration of Rectangular Plates / A. W. Leissa // Journal of Sound and Vibration. – 1973. – Vol. 31. – P. 257-293.
10. Leissa A.W. The historical bases of the Rayleigh and Ritz methods / A. W. Leissa // Journal of Sound and Vibration. – 2005. – Vol. 287. – P. 961-978.
11. Tomotika S.LX. The transverse vibration of a square plate clamped at four edges / S. Tomotika // Philosophical Magazine. – 1936. – Ser.7, Vol. 21, No. 142. – P. 745-760.
12. Wang C.Y. Vibrations of Completely Free Rounded Regular Polygonal Plates // International Journal of Acoustics and Vibration, 2015 – Vol. 20, №2. – P. 107-112.
3. GPIGORENKO O.Y., BORYSENKO M.Y., BOYCHUK O.V., NOVYTSKYI V.S. (2019) Numerical analysis of free vibrations for rectangular plates based different approaches. *Bulletin of Zaporizhzhia National University. Physical and Mathematical Sciences*. – No. 1. – P. 33-41.
4. MELESHKO V.V., PAPKOV S.O. (2009) Flexural vibration of elastic rectangular plates with free edges: from Chladni (1809) and Ritz (1990) to the present day. *Akustychnyi visnyk*. – Vol. 12, No. 4. – P. 34-51.
5. RUDAKOV K.N. (2005) *FEMAP. The Geometric and finite element modeling of structures in MSC. visual Nastran for Windows*. Kyiv: NTUU «KPI».
6. BORYSENKO M., ZAVHORODNII A., SKUPSKYI R. (2019) Numerical analysis of frequencies and forms of own collars of different forms with free zone. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*. – Vol. 18, No. 1. – P. 5–13.
7. CHERNYAEV A.A. (2017) Improving the accuracy of geometric interpolation for determining fundamental frequency of parallelogram plates vibration. *Procedia Engineering*. – Vol. 206. – P. 31–34.
8. KOROBKO A.V., CHERNYAEV A.A. KOROBKO V.I. (2017) Determination of basic dynamic vibration frequency at trapezoid plates using conformal radius ratio interpolation technique. *Procedia Engineering*. – Vol. 206. – P. 25–30.
9. LEISSA A.W. (1973) The Free Vibration of Rectangular Plates. *Journal of Sound and Vibration*. – Vol. 31. – P. 257-293.
10. LEISSA A.W. (2005) The historical bases of the Rayleigh and Ritz methods. *Journal of Sound and Vibration*. – Vol. 287. – P. 961-978.
11. TOMOTIKA S.LX. (1936) The transverse vibration of a square plate clamped at four edges. *Philosophical Magazine*. – Ser.7, Vol. 21, No. 142. –P. 745-760.
12. WANG C.Y. (2015) Vibrations of Completely Free Rounded Regular Polygonal Plates. *International Journal of Acoustics and Vibration*. – Vol. 20, No. 2. – P. 107-112.

Надійшла до редколегії 10.03.2020

УДК 532.5

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/1-2.11>

Кізілова Н. М., д. ф.-м. н., проф.
Майко І.В., студент

N. M. Kizilova, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.
I.V. Maiko, student

Узагальнення задачі Лайтхілла на випадок заповнених в'язкою рідиною трубок з ускладненою реологією стінки

Generalization of the Lighthill problem for the viscous fluid filled tubes with complicated wall rheology

¹Харківський національний університет
ім. В.Н. Каразіна, Харків, пл. Свободи, 4,
e-mail: n.kizilova@gmail.com

²Харківський національний університет
ім. В.Н. Каразіна, Харків, Україна,
e-mail: illia.maiko@ukr.net

¹V.N. Karazin Kharkiv National University, 61022,
Kharkov, Svobody sq., 4,
e-mail: n.kizilova@gmail.com

²V.N. Karazin Kharkov National University,
61022, Kharkov, Svobody sq., 4,
e-mail: illia.maiko@ukr.net

Запропоновано узагальнення моделі Лайтхілла розповсюдження плоских хвиль по в'язкопружних трубках, які заповнені в'язкою рідиною. Реологічне співвідношення для стінки трубки має по два часи релаксації напружень і деформацій. Отримані рівняння узагальненої моделі, які описують осереднені тиск, швидкість рідини, а також площину перерізу судини. Отримано розв'язок рівнянь у вигляді хвиль, які розповсюджуються, а також дисперсійне рівняння. Проаналізовані особливості розв'язку узагальненої моделі та дисперсії хвиль у порівнянні як з класичними задачами Лайтхілла та Шапіро, так і з в'язкопружною моделлю Кельвіна-Фойхта для матеріалу стінки. Чисельні розрахунки проведені для набору параметрів моделі, які відповідають системі кровообігу людини. Показано, що ускладнені властивості матеріалу дозволяють урахувати моди Юнга і Ляме, а також стабілізувати моди, які були нестійкими у випадку трубок з простішою реологією. Розроблена модель дозволяє проводити чисельні розрахунки на складних моделях артеріальних русел з суттєвою економією комп'ютерних ресурсів і часу.

Ключові слова: в'язкопружні трубки, пульсові хвилі, математичне моделювання, дисперсія хвиль.

A generalization of the Lighthill model of the plane waves propagation along fluid-filled viscoelastic tubes is proposed. The rheological relation of the wall has two relaxation times for strains and stresses. The equations of the generalized model for the averaged pressure, velocity and the cross-sectional area of the tube are obtained. The solution of the equations in the form of the running waves and the dispersion relation are obtained and compared to those for the Lighthill and Shapiro problems, and the viscoelastic Kelvin-Voigt model for the wall material. Numerical calculations for the model parameters corresponded to human circulation system have been carried out. It is shown, the complicated properties of the material allow accounting for both Young and Lamé wave modes, and stabilization the modes that were unstable in the case of simpler rheology. The developed model is helpful in performing the numerical calculations on complex models of arterial vasculatures at lower computation time and resources.

Key Words: viscoelastic tubes, pulse waves, mathematical modeling, wave dispersion.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. укр Я. О.

1. Вступ

Лінійна теорія плоских хвиль 1d в заповнених рідиною трубках була розроблена англійським математиком Дж. Лайтхіллом [1]. Було також отримано розв'язок задачі про поширення циліндричних хвиль 2d в прямих трубках кругового перетину 2, в трубках з

тонкими і товстими пружними стінками, що монотонно звужуються або розширюються, з в'язкопружними та багатошаровими стінками [3,4]. В кожному випадку було виписано розв'язки задач у вигляді нормальної моди і досліджено дисперсію хвиль.

Класична задача Лайтхілла заснована на законах збереження маси і імпульсів невязкої рідини, а також реологічному співвідношенню $F(P,U)=0$, де $P(t,x)$, $U(t,x)$ - тиск і поздовжня швидкість рідини, які осереднені за поперечним перерізом трубки, який може бути довільної форми. У разі вязкої рідини рівняння Лайтхілла були сформульовані А. Шапіро [5] і пізніше виведені шляхом осереднення рівнянь Нав'є-Стокса по перетину трубки [6]. Оскільки задача Лайтхілла та її узагальнення широко використовуються при моделюванні системи кровообігу [7], значний інтерес представляють узагальнення цієї задачі на випадок ускладненої реології стінки трубки та неньютоновських рідин [8,9]. У даній роботі наведено узагальнення моделі Лайтхілла на випадок вязкопружних стінок, що представлені різними поєднаннями пружного, вязкого і інерційного елемента І, е астис, іско s, і ертиа, а також досліджені властивості рішення узагальненої моделі та особливості дисперсії хвиль. Я модель відповідає сучасним мікро- і нано-структурованим композитам і має цікаві додаткові реологічні властивості.

1. Постановка задачі.

Розглянемо систему рівнянь Лайтхілла-Шапіро [9]

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(SU) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\mu}{S} U = 0, \quad (2)$$

для замикання якої використовуємо реологічне співвідношення І моделей, що містять 3-5 елементів:

$$d \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + c \frac{\partial S}{\partial t} + S = S_0 + k(P - P_0) + a \frac{\partial P}{\partial t} + b \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad (3)$$

де ρ і μ - густина і вязкість рідини, a, b, c, d - реологічні параметри, P_0 - тиск, при якому стінка трубки повністю розправлена і має перетин S_0 .

У класичній задачі Лайтхілла розглядається лінеаризована відносно рівноважного стану система 1 - 3 при $\mu, q, a, b, c, d \neq 0$, а її рішення розшукується у вигляді $P = P_0 + \tilde{P}$, $S = S_0 + \tilde{S}$, $U = \tilde{U}$, де $\tilde{P}, \tilde{S}, \tilde{U}$ - малі збурення змінних відносно рівноважного стану $\{P = P_0, S = S_0, U = 0\}$. Повторюючи цю процедуру, з 1 - 3 отримаємо лінеаризовану систему рівнянь для збурень

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + S_0 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} - \frac{\mu}{S_0} \tilde{U} = 0, \quad (5)$$

$$d \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial t^2} + c \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + \tilde{S} = k \tilde{P} + a \frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} + b \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial t^2}. \quad (6)$$

Виключаючи з 4 - 6 змінні $\tilde{P}, \tilde{S}$, отримаємо рівняння для $\tilde{U}$ позначення над змінними для простоти опущені

$$-b\rho \frac{\partial^4 U}{\partial t^4} + \left(\frac{b\mu\rho}{S_0} - a\rho \right) \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + \left(\frac{a\mu\rho}{S_0} - \rho k \right) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{k\mu\rho}{S_0} \frac{\partial U}{\partial t} + S_0 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + cS_0 \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} + dS_0 \frac{\partial^4 U}{\partial t^2 \partial x^2} = 0. \quad (7)$$

Знаходячи розв'язок 7 і підставляючи його в 4 і 5, отримаємо рівняння для $\tilde{P}, \tilde{S}$. Для дослідження особливостей поширення хвиль в трубках з ускладненою реологією будемо шукати розв'язок (4) - 6 у вигляді $f(t, x) = f^* \cdot \exp(i(\omega t - nx))$, де $f = \{P, S, U\}$, f^* і ω - амплітуда і частота хвилі, n - хвильове число.

2. Дисперсійне рівняння

Після вищезгаданої підстановки за умови існування розв'язку алгебраїчної системи рівнянь для амплітуд звичайним шляхом отримуємо дисперсійне співвідношення у вигляді

$$\omega^4 + iA\omega^3 + (B - Cn^2)\omega^2 + i(Dn^2 - E)\omega + n^2 = 0, \quad (8)$$

$$\text{де } A = \frac{\mu}{S_0} - \frac{a}{b}, \quad B = \frac{a\mu}{bS_0} - \frac{k}{b}, \quad C = \frac{dS_0}{b\rho}, \quad D = \frac{cS_0}{b\rho},$$

$$E = \frac{k\mu}{bS_0}, \quad F = \frac{S_0}{b\rho}.$$

Рівняння (8) має 4 комплексних кореня $\omega_{1,2,3,4}(n) = i \frac{A}{4} \pm \sqrt{z_1} \pm \sqrt{z_2} \pm \sqrt{z_3}$, де $z_{1,2,3}$ - корені кубічного рівняння, що пов'язане з (8) причому в залежності від параметрів моделі можливі випадки: $\{z_1 = z_2 = z_3\} \in \mathbb{R}$, $\{z_1 = z_2 \neq z_3\} \in \mathbb{R}$, $\{z_1 \neq z_2 \neq z_3\} \in \mathbb{R}$, $\{z_1 \in \mathbb{R}, \{z_2 = z_3^*\} \in \mathbb{C}\}$, де зірочка позначає комплексне сполучення. Таким чином, розв'язок 8 при будь-якому наборі параметрів має вигляд $\omega = \omega'(n) + i\omega''(n)$. Якщо $\omega''(n) > 0$, будь-які малі початкові збурення загасають за часом і система 4 - 6 є стійкою. Відповідно, фазову та групову швидкості хвилі можна обчислити як $\varphi = \varphi'(n) + i\varphi''(n)$, $V_g = V'(n) + iV''(n)$, де $V'(n) = d\omega'(n)/dn$, $V''(n) = d\omega''(n)/dn$, $\varphi'(n) = \omega'(n)/n$, $\varphi''(n) = \omega''(n)/n$.

Як відомо, в дисипативних середовищах групова швидкість зменшується зі зростанням частоти в разі нормальної дисперсії і збільшується в середовищах з аномальною дисперсією. В класичній задачі Лайтхілла ($\{a, b, c, d, \mu\} = 0$ розв'язок 8 має вигляд $\omega(n) = \sqrt{S_0 / \rho k n}$, тому фазова швидкість хвилі збігається з групою, що характерно для плоских хвиль в середовищах без дисперсії. У моделі Шапіро розв'язок 8 має вигляд

$$\omega_{1,2} = -i \frac{\mu}{2S_0} \pm \sqrt{\frac{S_0}{k\rho} n^2 - \left(\frac{\mu}{S_0}\right)^2}, \text{ так що за будь-}$$

яких наборах параметрів моделі фазова швидкість хвилі не збігається з групою. Подальше дослідження властивостей розв'язку 8 може бути проведено чисельними методами.

3. Чисельне рішення і аналіз результатів

Обмежимося випадком, який відповідає поширенню пульсових хвиль по артеріальній системі людини, і візьмемо $\rho = 1050 \text{ кг/м}^3$, $\mu = 3.5 \cdot 10^{-3} \text{ Па с}$, $k = 2\sqrt{\pi} E h S_0^{-3/2} / 3$, $E = 10^6 \text{ Па}$ – модуль Юнга, $h = 0.2 R_0$ – товщина стінки, $R_0 = \sqrt{S_0 / \pi} = 0.01 \text{ см}$ – радіус артерії. Величини $c \equiv \tau_\varepsilon$ і $a/k \equiv \tau_\sigma$ мають сенс часів релаксації деформацій та напружень в матеріалі стінки артерії і можна покласти $\tau_\varepsilon = \tau_\sigma = 0.01 \text{ с}$ [2,9].

експериментальні вимірювання параметрів b і d дають дуже різні діапазони значень, тому має сенс дослідити вплив саме цих параметрів на розв'язок і особливості дисперсії хвиль. При розрахунках використовувалися значення $d / \tau_\varepsilon \equiv \tilde{d}$ і $b / k \tau_\sigma \equiv \tilde{b}$, де $\tilde{d} = \tau_\varepsilon \sim 0.1 - 1 \text{ с}$ – часи релаксації деформацій і напружень другого порядку.

исельні розрахунки показали, що при всіх наборах параметрів моделі за наявності 4-х різних коренів 8 два з них відповідають поздовжнім повільним хвилям моди Юнга, а два інших – швидким хвилям моди Ламе, як і у випадку вісесиметричної 2d течії в'язкої рідини по товстостінній трубці 2. В класичних моделях Лайтхілла і Шапіро існує тільки один тип хвиль. У випадку в'язкопружної трубки, яка відповідає реологічній моделі Кельвіна-ойхта, отримуємо рівняння 8, яке має тільки три ненульових розв'язки, тому представлена EVI модель має більше число мод і, таким чином, більш різноманітний набір властивостей, у

тому числі резонансних 3,7. Крім цього, за рахунок додаткових членів в реологічному співвідношенні 3 ті моди, які були нестійкі при $\tilde{\tau}_\varepsilon = \tilde{\tau}_\sigma = 0$, можуть стати стабільними за певних значень $\tilde{\tau}_\varepsilon \neq \tilde{\tau}_\sigma \neq 0$, які можна знайти з умови стійкості $\omega''(n) > 0$ системи 1 – (3).

Результати розрахунків дисперсійних залежностей $\omega'(n)$ представлені на Рис.1а. Розглянуто випадки як коротких 1, так і довгих 1 хвиль. Вздовж вертикальної осі відкладена безрозмірна частота. За основну частоту прийнято значення частоти серцебиття 72 уд./хв. Розрахунки обмежені першими $m=8$ гармоніками, яких вистачає для апроксимації 96-98 пульсової хвилі 9.

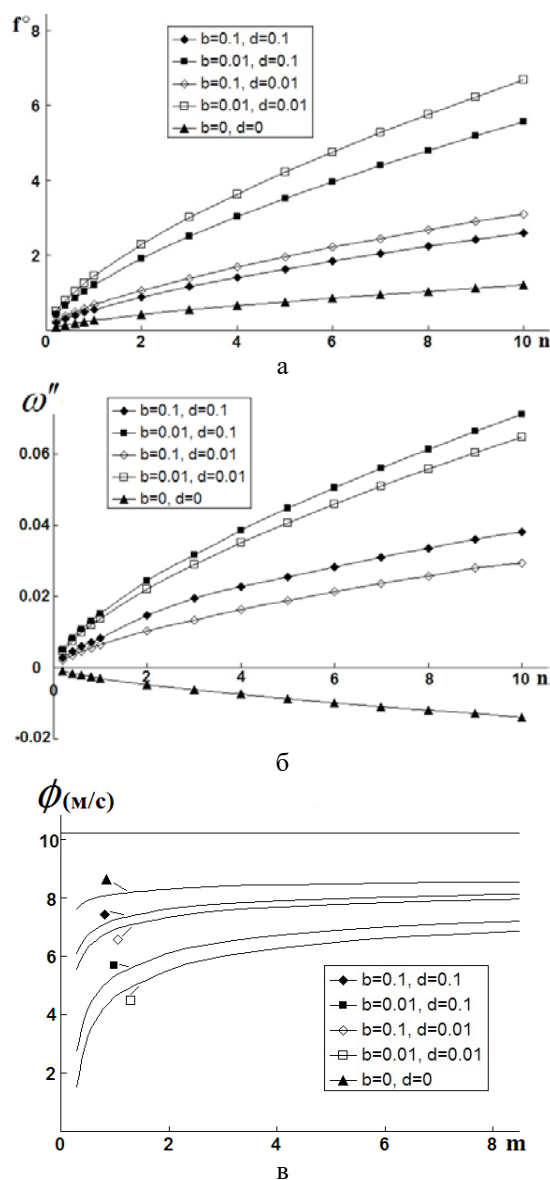


Рис.1. Залежності $f^\circ(n)$ а, $\omega''(n)$ б и $\phi'(m)$ в для різних наборів параметрів стінки.

На Рис.16 представлені залежності $\omega''(n)$ для випадку, коли вихідна мода була нестійкою, а за рахунок вибору ненульових параметрів $\tilde{\tau}_e \neq \tilde{\tau}_\sigma \neq 0$ її вдалося стабілізувати. На Рис.1в показані залежності $\phi'(\omega)$ при тих самих наборах параметрів задачі. Обчислені залежності добре відповідають даним вимірювань $\phi'(\omega)$ на артеріях з різними радіусами. Пряма лінія відповідає швидкості, яка розрахована при тих самих параметрах стінки і рідини для бездисперсійного розв'язку класичної задачі Лайтхілла. і значення, так само як і модель чисто пружної стінки, зазвичай завищують величину швидкості пульсової хвилі 9, тоді як моделі з урахуванням релаксацийних параметрів першого і другого порядку лежать ближче до експериментальних кривих 2,9,10.

Список використаних джерел

1. Лайтхилл Дж. *Волны в жидкостях*. М.:Мир. - 1981. – 600 с.
2. Womersley J.R. Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube. // *Phil.Mag.* – 1955. – v.46,N73. – P.199-221.
3. Kizilova N., Hamadiche M., Gad-el-Hak M. Flow in Compliant Tubes: Control and Stabilization by Multilayered Coatings. // *Intern. J. Flow Control*. - 2019. - v.1,N3. - P.199-211.
4. Sherwin S.J., Franke F., Piero J., Parker K.H. One-dimensional modelling of a vascular network in space-time variables. // *J.Eng.Math.* – 2003. – v.47. – P.217-250.
5. Shapiro A.H. Steady flow in collapsible tubes. // *J. Biomech. Eng.* – 1977. – v.99,N8. – P.126-147.
6. Smit C.H. On the modeling of the distributed outflow in one-dimensional models of arterial blood flow. // *Zeitschr. Angew. Mathem. Physik.* – 1981. – v.32. – P.408-420.
7. Гринченко В.Т., Комиссарова Г.Л. Свойства нормальн х волн упруго-жидкостного волновода, помещенного в жидкость. // *Акуст. вісн.* – 2006. – Т. 9, 4. – С. 17-34.
8. Pedley T.J., Blood flow in arteries and veins. // *Perspectives in Fluid dynamics*. Batchelor G.K., Mofatt H.K. (eds.). Cambridge: Cambridge Univ.Press. – 2000. – P.105-158.
9. Ghigo A.R., Lagrée P.-Y., Fullana J.-M. A time-dependent non-Newtonian extension of a 1D blood flow model. // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* – 2018. – V. 253. – P. 36–49.

5. Висновки

Запропонована узагальнена модель Лайтхілла-Шاپіро, яка описує розповсюдження хвиль в заповнених в'язкою рідиною трубках, реологічне співвідношення яких має 5 реологічних коефіцієнтів – окружну стисливість і по два часи релаксації напружень та деформацій. Розв'язок задачі може бути знайдено у вигляді хвиль тиску, швидкості, що біжать, та осциляцій стінки трубки. Дисперсійне рівняння описує швидкі й повільні моди Ламе і Юнга. Показано, що за рахунок додаткових параметрів можна стабілізувати нестійкі моди, а дисперсійні залежності стають ближчими до експериментальних ніж розв'язки класичних задач Лайтхілла, Шاپіро, і для випадку реологічної моделі Кельвіна- ойхта.

References

1. Lighthill J. (1978) *Waves in Fluids*. Cambridge Univ.Press. - 504 p.
2. Womersley J.R. (1955) Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube. *Phil. Mag.* Vol.46(73). p.199-221.
3. KIZILOVA N., HAMADICHE M., GAD-EL-HAK M. (2019) Flow in Compliant Tubes: Control and Stabilization by Multilayered Coatings. *Intern. J. Flow Control*. Vol.1(3). p.199-211.
4. SHERWIN S.J., FRANKE F., PIERO J., PARKER K.H. (2003) One-dimensional modelling of a vascular network in space-time variables. *J. Eng. Math.* Vol.47. p.217-250.
5. SHAPIRO A.H. (1977) Steady flow in collapsible tubes. *J. Biomech. Eng.* Vol.99(8). p.126-147.
6. SMIT C.H. (1981) On the modeling of the distributed outflow in one-dimensional models of arterial blood flow. *Zeitschr. Angew. Mathem. Physik.* Vol.32. p.408-420.
7. GRINCHENKO V.T., KOMISSAROVA G.L. (2006) Properties of normal waves of an elastic-liquid waveguide placed in a liquid. *Acoust. Visn.* Vol. 9(4). P. 17-34.
8. PEDLEY T.J. (2000) Blood flow in arteries and veins. In: *Perspectives in fluid dynamics*. Batchelor G.K., Mofatt H.K. (eds.). Cambridge: Cambridge Univ.Press. p.105-158.
9. GHIGO A.R., LAGRÉE P.-Y., FULLANA J.-M. (2018) A time-dependent non-Newtonian extension of a 1d blood flow model. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* Vol. 253. p. 36–49.

Надійшла до редколегії 27.11.2019

УДК 539.376

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/1-2.12>

Печук Є. Д., к.ф.-м.н., с.н.с.
Краснопольська Т. С., д.ф.-м.н., проф.
Рудницька М. О., пров.інж.

E. D. Pechuk, Dr.
T. S. Krasnopol'skaya, Dr. Sc. (Phys.- Math.), Prof.
M. O. Rudnytska.

Хвильові характеристики кардіореспіраторної системи при підвищенні пульсу

Wave characteristics of the cardiorespiratory system under increasing of a heart rate

Інститут гідромеханіки НАНУ,
03680, м. Київ, вул. Капініс 8/4
e-mail: t.krasnopol'skaya@tue.nl

Institute of hydromechanics NASU,
03680, Kyiv, Kapnis str. 8/4
e-mail: t.krasnopol'skaya@tue.nl

Досліджено вплив частоти серцевих скорочень на ступінь хаотизації динаміки моделі взаємодії серцево-судинної та респіраторної підсистем. Розглянута модель містить як прямий, так і зворотній механічний зв'язок між серцем та хвилями, що породжені рухом грудної клітини. Використано прикладні чисельні методи теорії динамічних систем. Показано, як збільшення пульсу може впливати на хвильові характеристики роботи серця.

Ключові слова: серцево-судинна система, респіраторна система, зворотній зв'язок, хаос.

The heart rate influence on chaotic dynamics of the model of interaction between cardiovascular and respiratory subsystems has been studied. The considered model contains both direct and inverse mechanical connection between the heart and the waves generated by the movement of the chest. Applied numerical methods of the theory of dynamical systems are used. It is shown how an increase in heart rate can affect the wave characteristics of the heart.

Key Words: cardiovascular system, respiratory system, limited excitation, chaos.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Однією з найбільш інформативних та легко вимірюваних характеристик серцево-судинної системи людини є частота серцевих скорочень (ЧСС) або пульс. По підвищенню або пониженню та взагалі зміні пульсу часто можливо виявити початок патологічних процесів в організмі людини. При цьому важливе значення має зовнішній вплив та емоційний стан пацієнта. Так, у людини в стані спокою ЧСС має бути майже постійною. При цьому, за 8 діб до раптової серцевої смерті серцевий ритм характеризується вираженою періодичністю [1]. У здорової людини серцевий ритм є хаотичним [1]. Звичайно, це не така ступінь хаотичності, як при аритмії або ішемічній хворобі серця, але здоровому серцю притаманна саме наявність хаотичної складової. Тому при моделюванні динаміки серцево-судинної системи необхідно

враховувати наявність зовнішнього впливу та різноманітних шумів. Зазвичай це досягається просто накладенням деякої стохастичної компоненти на саму модель або отриманий розв'язок. В наших попередніх роботах показано, як саме взаємодія серця та хвиль, що породжені рухами грудної клітки призводить до суттєвої хаотизації основних характеристик кардіоінтервалу, таких як верхній (систолічний) та нижній (діастолічний) тиск і пульс.

Відомо, що при різних хворобах, наприклад ГРВІ та грипі спостерігається підвищення температури тіла і частоти серцевих скорочень. Виникає питання, як така реакція організму позначається на регулярності чи хаотичності кардіосистеми. В цій роботі досліджується вплив підвищення пульсу на ступінь хаотизації всередині системи серце-легені.

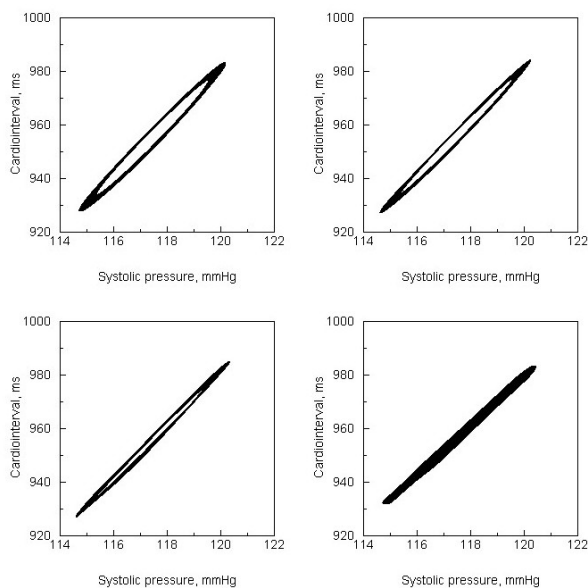


Рис. 1. Проекція фазового простору на площину кардіоінтервалу та систолічного тиску для випадку пульсу 60 та значень $\eta = 0.03$, $\eta = 0.07$, $\eta = 0.1$, $\eta = 0.17$ (зліва направо та зверху вниз).

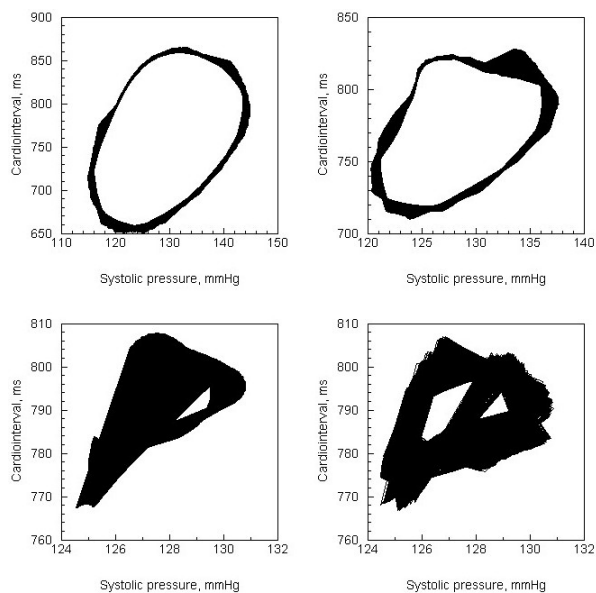


Рис. 2. Проекція фазового простору на площину кардіоінтервалу та систолічного тиску для випадку пульсу 90 та значень $\eta = 0.03$, $\eta = 0.07$, $\eta = 0.1$, $\eta = 0.17$ (зліва направо та зверху вниз).

2. Математична модель та результати чисельного моделювання

Модель взаємодії серцево-судинної і респіраторної систем, досліджувана в роботах [2-6], є системою дискретних відображень, що описують характеристики стану кардіоінтервалу при кожному скороченні серця.

Введемо наступні позначення:

систолічний тиск S , $S_0 = 120$ мм рт. ст.,

діастолічний тиск D , $D_0 = 80$ мм рт. ст.,

кардіоінтервал I , $I_0 = 800$ мс,

час артеріального загасання T , $T_0 = 1500$ мс.

$$\begin{cases} D'_i = c_1 S'_{i-1} \exp(-I'_{i-1} / T'_{i-1}) \\ S'_i = D'_i + \gamma \frac{T_0}{S_0} I'_{i-1} + \frac{(A + r_i)}{S_0} \sin \varphi_i + \frac{c_2}{S_0} \\ I'_i = G_v \frac{S_0}{T_0} \hat{S}'_{i-\tau_v} + G_\beta \frac{S_0}{T_0} F(\hat{S}', \tau_\beta) + \frac{c_3}{T_0}, (1) \\ T'_i = 1 + G_\alpha S_0 / T_0 - G_\alpha S_0 / T_0 F(\hat{S}', \tau_\alpha) \\ \hat{S}'_i = 1 + 18 / S_0 \arctan(S_0 (S'_i - 1) / 18) \end{cases}$$

де $i \geq 1$, $D' = D / S_0$, $S' = S / S_0$, $\hat{S}' = \hat{S} / S_0$,

$$I' = I / T_0, \quad T' = T / T_0, \quad c_1 = \frac{D_0}{S_0} \exp\left(\frac{I_0}{T_0}\right),$$

$$c_2 = S_0 - D_0 - \gamma I_0,$$

$$c_3 = I_0 - S_0 (G_v + G_\beta),$$

$$G_\alpha = 18 \text{ мс/мм рт.ст.}, \quad G_\beta = G_v = 9 \text{ мс/мм рт.ст.},$$

$$\gamma = 0.016 \text{ мм рт.ст./мс}, \quad A = 3 \text{ мм рт.ст.} - \text{амплітуда}$$

$$\text{зміни тиску систоли, обумовлена рухом грудної}$$

$$\text{клітки під час дихання, } f = 0.22 \text{ Гц} - \text{частота}$$

$$\text{дихання, } t_i = \sum_{k=0}^{i-1} I_k - \text{момент часу серцевого}$$

$$\text{скорочення,}$$

$$F = \frac{1}{9} (\hat{S}'_{i-\tau-2} + 2\hat{S}'_{i-\tau-1} + 3\hat{S}'_{i-\tau} + 2\hat{S}'_{i-\tau+1} + \hat{S}'_{i-\tau+2}),$$

$$\tau_\alpha = \tau_\beta = 4, \quad \tau_v = 0, \text{ якщо пульс менше за } 75$$

$$\text{удар/хв і } \tau_v = 1, \text{ якщо пульс більше ніж } 75$$

$$\text{удар/хв.}$$

Рухи грудної клітини, моделюються автоколивальною системою, що знаходиться під механічним імпульсним збуренням серцевих скорочень. При цьому, для моделювання впливу серцевих скорочень на дихальні осциляції використовуються рівняння дисипативного відображення Заславського, що узагальнені на випадок неперіодичних ударів серця різної інтенсивності [5-6].

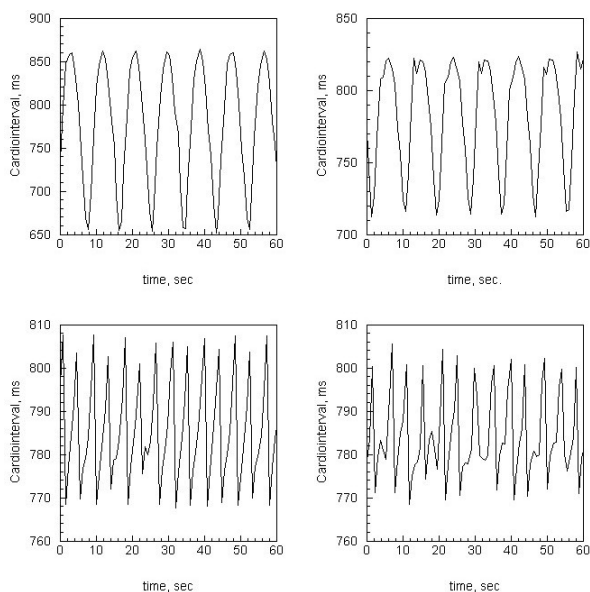


Рис. 3. Часові реалізації величини кардіоінтервалу для випадку пульсу 90 та значень $\eta = 0.03$, $\eta = 0.07$, $\eta = 0.1$, $\eta = 0.17$ (зліва направо та зверху вниз).

$$r_{n+1} = (r_n - \eta(S_n - S_0) \sin \varphi_n) \exp\{-\kappa I_n\}, \quad (2)$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + 2\pi f I_n + \nu(r_n - \eta(S_n - S_0) \sin \varphi_n) \frac{1 - \exp\{-\kappa I_n\}}{\kappa},$$

тут $\eta > 0$ - безрозмірний параметр, що характеризує інтенсивність дії серцевих скорочень на респіраторну активність, відхилення амплітуди від граничного циклу, $\kappa > 0$ - коефіцієнт загасання збурення амплітуди, що визначає швидкість повернення збуреної системи до граничного циклу, φ - фаза коливань, ν - постійний параметр, що відповідає за ступінь зміни добавки до фази в залежності від величини відхилення r .

Раніше виявлено [4-6], що в рамках такого підходу параметр η є біфуркаційним, тобто при збільшенні впливу серцевих скорочень на респіраторну активність в моделі породжується режим хаотичних автоколивань. Тепер розглянемо поведінку системи (1) при збільшенні пульсу з 60 до 90 ударів на хвилину. Для чисельного моделювання візьмемо наступні початкові значення:

$$I[0] = 0.45, \text{ при пульсі } 90 \text{ ударів на хвилину,}$$

$$I[0] = 0.67, \text{ при пульсі } 60 \text{ ударів на хвилину,}$$

$$S'[-j] = 1.08, \quad j = 0, \dots, 6.$$

На рис. 1 показано проекцію фазового простору на площину кардіоінтервалу та систолічного тиску для випадку пульсу 60 та значень $\eta = 0.03$, $\eta = 0.07$, $\eta = 0.1$, $\eta = 0.17$

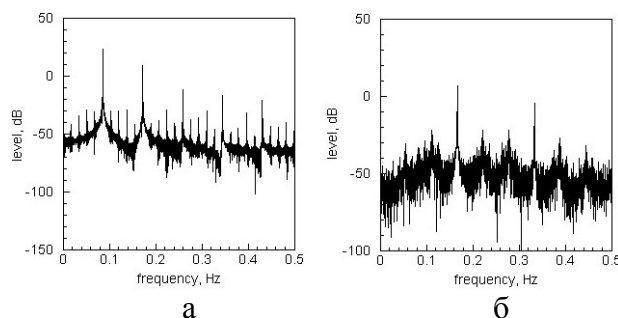


Рис. 4. Спектр потужності систолічного тиску для випадку пульсу 90 та значень а) $\eta = 0.03$, б) $\eta = 0.17$.

(зліва направо та зверху вниз). Як видно з графіків, незначна хаотизація спостерігається лише при $\eta = 0.17$. Аналогічні криві для випадку пульсу 90 ударів на хвилину зображено на рис. 2. В цьому випадку модель характеризується хаотичним режимом. На рис. 3 показано відповідні хвилюві реалізації величини кардіоінтервалу цих режимів за 60 секунд. Відхилення значень кардіоінтервалу проходить в області від 650 мс до 850 мс для регулярного режиму і від 770 мс до 810 мс для розвинутого хаосу. При цьому спостерігається також підвищення частоти пульсацій. Спектр потужності для значень параметру $\eta = 0.03$ та $\eta = 0.17$ побудовано на рис. 4. Обидва спектри мають неперервну структуру з добре вираженими сплесками в області хвиль Мейєра (0.1 Гц), при меншому значенні параметру $\eta = 0.03$. При $\eta = 0.17$ спектр зважений, з двома характерними піками на частоті 0.17 Гц та в області 0.335 Гц, що відповідає дещо підвищеній частоті хвиль дихання. Загальноприйнятою нормою дихання вважається частота 0.25 Гц [3], що відповідає періоду хвилі 4 секунди. Тобто модель демонструє збільшення частоти дихання при підвищенні пульсу, що також співпадає з експериментальними даними.

3. Висновок

Пульс дорослої людини без значних патологій в кардіосистемі становить близько 60 ударів на хвилину. При підвищенні температури тіла внаслідок вірусних інфекцій, його величина значно збільшується. В рамках моделі ДеБура та ін., яку узагальнено врахуванням зворотного впливу діяльності серця на хвилюві

характеристики рухів грудної клітини досліджено вплив підвищення пульсу до 90 ударів на хвилину. Виявлено, що процес хаотизації динамічного режиму настає при менших значеннях біфуркаційного параметру. Показано хаотичний режим та деякі його характеристики. Це може означати, що збільшення пульсу призводить

до підвищення загальної чутливості організму, внаслідок чутливої залежності хаотичних процесів від початкових умов і малих змін параметрів. Також виявлено ефект підвищення частоти дихальних осциляцій на частотному спектрі хаотичного і режиму величини кардіоінтервалу.

Список використаних джерел

1. *Goldberger Ary L. Clinical Electrocardiography: A Simplified Approach*, 7th ed. / Ary L. Goldberger. – Philadelphia: Mosby Elsevier, 2006. – 420 p.
2. *DeBoer R.W. Hemodynamic fluctuations and baroreflex sensitivity in humans: A beat-to-beat model* / R.W. DeBoer, J. M. Karemaker, J. Strakee // *Amer. J. Physiol.* – 1987. – **253**, – P. H680–H689.
3. *Гринченко В.Т. Модель взаимодействия сердечно-сосудистой и респираторной систем* / В.Т. Гринченко, А.Г. Рудницький // *Акустический вестник*. – 2006. – **9**, N 3. – С. 16–26.
4. *Краснопольська Т.С. Cardiorespiratory System with Strong Interaction* / Т. С. Краснопольська, Є. Д. Печук // *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM)*. – 2017. – № 1, – P.141 – 146.
5. *Печук Є.Д. Серцево-респіраторна система як система з обмеженим збудженням* / Є. Д. Печук, Т. С. Краснопольська, М. О. Рудницька // *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки*. – 2019. – № 2, – P.59 – 62.
6. *Печук Є.Д. Influence of the Heart Rate on Dynamics of Cardiorespiratory System* / Є. Д. Печук, Т. П. Коновалюк, Т. В. Соболев, Т. С. Краснопольська, // *In 12th Chaotic Modeling and Simulation International Conference*. Ed.: Christos H. Skiadas & Yiannis Dimotikalis. Springer Nature Switzerland AG 2020. – 2020. – P.211 – 216.

References

1. GOLDBERGER, ARY L. (2006) *Clinical Electro-cardiography: A Simplified Approach*, 7th ed. Philadelphia: Mosby Elsevier.
2. DEBOER, R.W., KAREMAKER, J. M. and STRAKEE, J. (1987). Hemodynamic fluctuations and baroreflex sensitivity in humans: A beat-to-beat model. *Amer. J. Physiol.*, 253, p.H680–H689.
3. GRINCHENKO, V.T. and RUDNITSKY, A.G. (2006) *Model' vzaimodeistvia serdechno-sosudistoi i respiratornoi sistem*. *Akusticheskii vestnik*, 9(3), p.16–26.
4. KRASNOPOLSKAYA T.S. and PECHUK E.D., (2017) Cardiorespiratory System with Strong Interaction, *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM)*, N1, p.141 – 146.
5. PECHUK E.D. KRASNOPOLSKAYA T.S. and RUDNYTSKA M.O. (2019) Cardiorespiratory system as system with limited excitation, *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics*, N2, p.59 – 62.
6. PECHUK E.D. et al. (2020) Influence of the Heart Rate on Dynamics of Cardiorespiratory System, *In 12th Chaotic Modeling and Simulation International Conference*. Ed.: Christos H. Skiadas & Yiannis Dimotikalis. Springer Nature Switzerland AG 2020, p.211 – 216.

Надійшла до редколегії 30.01.2020

УДК 517.983.27

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/1-2.13>

Тетерук І.С.¹, аспірант

Teteruk I.S.¹, PhD student

**Двовимірні узагальнені моментні
зображення та апроксиманти типу
Паде функції двох змінних**

**Two-dimensional generalized instantaneous
images and approximations of the Pade type
function of two variables**

¹Інститут математики НАН України, Київ
email: innna.teteruk@gmail.com

¹Institute of Mathematics of NASU, Kyiv
email: innna.teteruk@gmail.com

Досліджується питання побудови апроксимант Паде для функції двох змінних. Побудована двовимірний функціональна послідовність, яка має узагальнене моментне зображення і визначені раціональні апроксиманти, що будуть узагальненнями одновимірних апроксимант Паде. Функція двох змінних, яка розглядається, повністю пов'язана з базисними гіпергеометричними рядами.

Ключові слова: апроксимант Паде, моментне зображення, гіпергеометричний ряд, раціональна апроксимація.

Generalized instantaneous image were introduced by V.K. Dzyaduk [1] in 1981 and proved to be a convenient tool for constructing and studying the Padé approximants and their generalizations (see [2]). The method of generalized instantaneous images proposed by Dzyaduk made it possible to construct and study rational Padé approximants and their generalizations for many classes of special functions from a single position. As an example, the Padé approximants is constructed for a class of basic hypergeometric series, which includes a q-analogue of the exponential function. In this paper the construction of the Pade approximants for the function of two variables is investigated. A two-dimensional functional sequence is constructed, which has a generalized instantaneous image, and rational approximants are determined, which will be generalizations of one-dimensional Padé approximants. The function of the two variables is entirely related to the basic hypergeometric series.

Keywords: Pade approximation, instantaneous image, hypergeometric series, rational approximation.

Статтю представив д.ф.-м. н., проф., академік НАН України Перестюк М.О.

Вступ та теоретичні відомості.

Узагальнені моментні зображення були введені В.К. Дзядиком [1] у 1981 р. і виявилися зручним інструментом для побудови та вивчення апроксимацій Паде та їх узагальнень (див. [2]).

Означення. Будемо говорити, що для послідовності комплексних чисел $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ має місце узагальнене моментне зображення на добутку лінійних просторів X та Y за означеною на цьому добутку білінійною формою $\langle \cdot, \cdot \rangle$, якщо у просторі X вказано послідовність елементів $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, а у просторі Y -- послідовність елементів $\{y_j\}_{j=0}^{\infty}$ такі, що

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle \quad k, j \in \mathbb{N}_+ \quad (1)$$

По аналогії з (1) можна визначити узагальнені моментні зображення двовимірних числових послідовностей.

Означення. Будемо говорити, що для двовимірної числової послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ має місце узагальнене моментне зображення на добутку лінійних просторів X та Y за означеною на цьому добутку білінійною формою $\langle \cdot, \cdot \rangle$, якщо у просторі X вказано двовимірну послідовність елементів $\{x_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$, а у просторі Y -- двовимірну послідовність елементів $\{y_{j,n}\}_{j,n=0}^{\infty}$ такі, що

$$s_{k+j,m+n} = \langle x_{k,m}, y_{j,n} \rangle \quad k, j, m, n \in \mathbb{N}_+ \quad (2)$$

По аналогії з тим, як у відповідність числовій послідовності $\{s_k\}_{k=0}^\infty$ можна поставити

формальний степеневий ряд $f(z) = \sum_{k=0}^\infty s_k z^k$,

двовимірній числовій послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^\infty$ можна поставити у відповідність формальний степеневий ряд двох змінних

$$f(z, \omega) = \sum_{k,m=0}^\infty s_{k,m} z^k \omega^m \quad (3)$$

Для рядів вигляду (3) можна визначити раціональні апроксиманти, що будуть узагальненнями одновимірних апроксимант Паде, за різними схемами (див. [3, с.323]). При цьому потрібно зафіксувати певні обмежені області N і D з $\mathbb{N}_+^2$ та побудувати алгебраїчні многочлени

$$P_N(z, \omega) = \sum_{(k,m) \in N} p_{k,m} z^k \omega^m,$$

$$Q_D(z, \omega) = \sum_{(k,m) \in D} q_{k,m} z^k \omega^m,$$

таким чином, щоб якомога більше коефіцієнтів $e_{k,m}$ у розкладі

$$f(z, \omega) - \frac{P_N(z, \omega)}{Q_D(z, \omega)} = \sum_{(k,m) \in \mathbb{N}_+^2} e_{k,m} z^k \omega^m$$

дорівнювали нулю.

Наступний результат є аналогом теореми В.К. Дзядика [1] для випадку функцій двох змінних (див.[4]):

Теорема 1. Нехай формальний степеневий ряд двох змінних має вигляд (3) і для двовимірної послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^\infty$ має місце узагальнене моментне зображення вигляду (2). Тоді якщо для деяких $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ існує нетривіальний поліном

$$Y_{N_1, N_2} = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1, N_2)} y_{j,n} \quad (4)$$

такий, що виконуються умови біртогональності

$$\langle x_{k,m}, Y_{N_1, N_2} \rangle = 0 \quad (5)$$

при $(k, m) \in ([0, N_1] \times [0, N_2])$, $\{(N_1, N_2)\}$ і $c_{N_1, N_2}^{(N_1, N_2)} \neq 0$, то раціональна функція то раціональна функція

$$\frac{1}{Q_{N_1, N_2}(z, \omega)} \left\{ \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2-1} z^k \omega^m \sum_{j=0}^k \sum_{n=0}^m c_{N_1-j, N_2-n}^{(N_1, N_2)} s_{k-j, m-n} + \right. \\ \left. + z^{N_1} \sum_{k=0}^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2-1} z^k \omega^m \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^m c_{j, N_2-n}^{(N_1, N_2)} s_{k+j, m-n} + \right. \\ \left. + \omega^{N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2} z^k \omega^m \sum_{j=0}^k \sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j, n}^{(N_1, N_2)} s_{k-j, m+n} \right\}$$

$$\text{де } Q_{N_1, N_2}(z, \omega) = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j, N_2-n}^{(N_1, N_2)} z^j \omega^n$$

матиме розклад у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігатимуться з коефіцієнтами ряду (3) для всіх $(j, n) \in ([0, 2N_1] \times [0, 2N_2])$, $\{(2N_1, 2N_2)\}$.

Насправді в теоремі 1 можна вибрати узагальнений поліном Y_{N_1, N_2} з умов

біртогональності до елементів $x_{k,m}$ не для $(k, m) \in ([0, N_1] \times [0, N_2])$, $\{(N_1, N_2)\}$, а для

$(k, m) \in H$, де H -- певна множина з $\mathbb{N}_+^2$ обмежена деякою кривою $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [0, \pi/2]$, що містить $(N_1+1)(N_2+1)-1$ точку. При цьому за N ми можемо вибрати будь-яку множину з $\mathbb{N}_+^2$, $([N_1, \infty] \times [N_2, \infty])$, що є об'єднанням

квадрата $[0, N_1-1] \times [0, N_2-1]$ з множинами вигляду $\{(k, m) : k \in [0, N_1-1], m \in [N_2, x(k)]\}$ та

$\{(k, m) : m \in [0, N_2-1], k \in [N_1, y(m)]\}$, де $x(k), y(m)$ -- деякі функції з $\mathbb{N}_+$ в $\mathbb{N}_+$ такі, що $x(k) \geq N_2, y(m) \geq N_1$ для всіх k і m . Тоді множина E буде мати вигляд $N \cup H + (N_1, N_2)$, де $H + (N_1, N_2)$ -- множина, отримана паралельним переміщенням множини H , при якому точка $(0; 0)$ переходить у точку (N_1, N_2) (теорема 1' [4]).

Зауважимо, що як і у випадку одновимірних узагальнених моментних зображень, задача про двовимірні узагальнені моментні зображення може бути сформульована в операторному вигляді. А саме, припустимо, що простори X та Y є нормованими і в просторі X існують

комутуючі між собою обмежені оператори $A_1, A_2 : X \rightarrow X$ такі, що

$$A_1 x_{k,m} = x_{k+1,m},$$

$$A_2 x_{k,m} = x_{k,m+1},$$

при всіх $k, m \in \mathbb{N}_+$. Нехай у просторі Y існують обмежені оператори $A_1^*, A_2^* : Y \rightarrow Y$, спряжені до операторів A_1, A_2 відносно білінійної форми $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в тому розумінні, що для будь-яких $x \in X, y \in Y$

$$(A_1 x, y) = \langle x, A_1^* y \rangle,$$

$$(A_2 x, y) = \langle x, A_2^* y \rangle.$$

Тоді зображення (2) можна записати у вигляді $s_{k,m} = \langle A_1^k A_2^m x_{0,0}, y_{0,0} \rangle$, $k, m \in \mathbb{N}_+$ і ряд (3) буде збіжним в околі початку координат до аналітичної функції, що має зображення $f(z, \omega) = \langle \mathfrak{R}(A_1) \mathfrak{R}(A_2) x_{0,0}, y_{0,0} \rangle$,

де резольвента функція $\mathfrak{R}(A)$ визначається рівністю $\mathfrak{R}(A) = (I - zA)^{-1}$.

Означення. Для $|q| < 1$ базисним гіпергеометричним рядом називається ряд вигляду

$${}_r\phi_s \left[\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_r \\ b_1, b_2, \dots, b_s \end{matrix} ; q; z \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1; q)_n (a_2; q)_n \dots (a_r; q)_n}{(b_1; q)_n (b_2; q)_n \dots (b_s; q)_n} \left[(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \right]^{1+s-r} z^n,$$

(див. [3, с.23]) де q – символ Похгаммера $(a; q)_n$ визначається формулою

$$(a; q)_n = \begin{cases} (1-a)(1-aq) \dots (1-aq^{n-1}), & n \geq 1 \\ 1, & n = 0, \\ \prod_{m=0}^{\infty} (1-aq^m) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a; q)_n, & n = \infty. \end{cases}$$

Представниками базисних гіпергеометричних рядів є так звані q -аналоги експоненти

$$e_q(z) = {}_1$$

$$= \phi_0(0; -; q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(q; q)_n} = \frac{1}{(z; q)_{\infty}}, \quad |z| < 1,$$

та

$$E_q(z) = {}_0\phi_0(-; -; q; -z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n-1)/2}}{(q; q)_n} z^n = (-z; q)_{\infty}, \quad |z| < 1.$$

В [5,6] запропоновано підходи до побудови та дослідження апроксимант Паде функції $e_q(z)$ та її узагальнень з використанням узагальнених моментних зображень. Зокрема, в [6] для цієї мети використано узагальнені моментні зображення вигляду

$$s_k = \langle A^k x_0, y_0 \rangle, \quad k = \overline{0, \infty},$$

з оператором A та білінійною формою $\langle \cdot, \cdot \rangle$, що виражаються через q -інтеграл Джексона (див [3, с.39])

$$(A\varphi)(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d_q \tau = t(1-q) \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(tq^k) q^k \quad (6)$$

Цей же підхід був використаний і до побудови та вивчення апроксимант Паде функції $E_q(z)$ та її узагальнень (див. [7]). А саме, при $0 \leq \alpha < 1$ визначався лінійний простір

$$X_{\alpha} = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \mid \exists M > 0,$$

$$|f(x)x^{\alpha}| < M \forall x \in [0, 1]\} \quad \text{з нормою}$$

$$\|f\|_{\alpha} = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)x^{\alpha}|. \quad \text{Тоді } X_{\alpha} \text{ при кожному}$$

$$0 \leq \alpha < 1 \text{ буде банаховим простором.}$$

Неважко переконатися, що лінійний оператор A вигляду (6) є обмеженим в просторі X_{α} , а білінійна форма

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 \varphi(\tau) \psi(\tau) d_q \tau \quad (7)$$

є роздільно неперервною на добутку просторів $X_{\alpha} \times X_{\alpha}$.

Спряженим до оператора A відносно білінійної форми (7) буде оператор

$$(A^* \psi)(t) = \int_{qt}^1 \varphi(\tau) d_q \tau = \int_0^1 \varphi(\tau) d_q \tau - \int_0^{qt} \psi(\tau) d_q \tau \quad (\text{ди}$$

в. [6]).

Також в просторі X_{α} в [7] розглядався оператор

$$(B\varphi)(t) = (A\varphi)(qt) = \int_0^{qt} \varphi(\tau) d_q \tau =$$

$$= qt(1-q) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(tq^{n+1}) q^n.$$

Легко бачити, що

$$(B\varphi)(t) = t(1-q) \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(tq^n) q^n =$$

$$= (A\varphi)(t) - (1-q)t\varphi(t).$$

А тому

$$(B^* \psi)(t) = (A^* \psi)(qt) - (1-q)t\psi(t) =$$

$$= \int_{qt}^1 \psi(\tau) d_q \tau - (1-q)t\psi(t) = \int_t^1 \psi(\tau) d_q \tau.$$

Основний результат.

В роботі [7] побудовані послідовності

$$x_k(t) = (B^k x_0)(t) = \frac{(1-q)^k}{(q, q)_k} \cdot q^{\frac{k(k+1)}{2}} \cdot t^k, \quad k = \overline{1, \infty},$$

де $x_0(t) \equiv 1$ і

$$y_j(t) = \frac{(1-q)^j \cdot (t, q)_j}{(q, q)_j}, \quad j = \overline{1, \infty}, y_0(t) \equiv 1, \quad (8)$$

а також

$$s_k = \langle B^k x_0, y_0 \rangle = \frac{(1-q)^{k+1} \cdot q^{\frac{k(k+1)}{2}}}{(q, q)_{k+1}}, k = \overline{0, \infty}, \quad (9)$$

Покладемо

$$x_{k,m}(t) := x_k(t) + x_m(t), \quad y_{j,n}(t) := y_j(t) + y_n(t),$$

де $\{x_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ і $\{y_j(t)\}_{j=0}^{\infty}$ визначені формулами (8). Тоді

$$\begin{aligned} s_{k+j, m+n} &:= \langle x_{k,m}; y_{j,n} \rangle = \langle x_k + x_m; y_j + y_n \rangle = \\ &= \langle x_k; y_j \rangle + \langle x_k; y_n \rangle + \langle x_m; y_j \rangle + \langle x_m; y_n \rangle = \\ &= s_{k+j} + s_{k+n} + s_{m+j} + s_{m+n}. \end{aligned}$$

Отже, маємо $s_{k,m} = 2 \cdot (s_k + s_m)$, де s_k визначено за формулою (9).

Таким чином, для числової послідовності (10) має місце узагальнене моментне зображення на добутку просторів $X_\alpha \times X_\alpha$ за білінійною формою (7).

Двовимірній числовій послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$, яка визначена формулою (10), можна поставити у відповідність формальний степеневий ряд двох змінних

$$\begin{aligned} f(z, \omega) &= \sum_{k,m=0}^{\infty} s_{k,m} z^k \omega^m = \\ &= 2 \sum_{k,m=0}^{\infty} (s_k + s_m) z^k \omega^m = 2 \sum_{k,m=0}^{\infty} s_k z^k \omega^m + \end{aligned} \quad (11)$$

$$+ 2 \sum_{k,m=0}^{\infty} s_m \omega^m z^k =$$

$$\begin{aligned} &= 2 \sum_{m=0}^{\infty} \omega^m \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-q)^{k+1} \cdot q^{\frac{k(k+1)}{2}}}{(q, q)_{k+1}} z^k \right) + \\ &+ 2 \sum_{m=0}^{\infty} z^k \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-q)^{m+1} \cdot q^{\frac{m(m+1)}{2}}}{(q, q)_{m+1}} \omega^m \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{1-\omega} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-q)^k \cdot q^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(q, q)_k} z^{k-1} + \\ &+ 2 \frac{2}{1-z} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1-q)^m \cdot q^{\frac{m(m-1)}{2}}}{(q, q)_m} \omega^{m-1} = \\ &= \frac{2}{1-\omega} \frac{E_q(-z(1-q)) - 1}{z} + \frac{2}{1-z} \frac{E_q(-\omega(1-q)) - 1}{\omega} \end{aligned}$$

Припустимо, що в просторі X_α існують комутуючі між собою обмежені оператори $A_1, A_2 : X_\alpha \rightarrow X_\alpha$:

$$A_1 x_{k,m} = x_{k+1,m}, (k, m) \in \square_+$$

$$A_2 x_{k,m} = x_{k,m+1}, (k, m) \in \square_+$$

Так як $x_{k,m} = x_k + x_m = x_m + x_k = x_{m,k}$, то $A_1 = A_2 : X_\alpha \rightarrow X_\alpha$.

Позначимо $A_1 = A_2 := \tilde{A}$.

Тоді

$$\begin{aligned} s_{k,m} &= \langle A_1^k A_2^m x_{0,0}; y_{0,0} \rangle = \langle \tilde{A}^{k+m} x_{0,0}; y_{0,0} \rangle = \\ &= 4 \langle \tilde{A}^{k+m} x_0; y_0 \rangle \end{aligned}$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned} s_{k,m} &= 2(s_k + s_m) = 2(\langle B^k x_0; y_0 \rangle + \langle B^m x_0; y_0 \rangle) = \\ &= 2\langle (B^k + B^m) x_0; y_0 \rangle. \end{aligned}$$

Тоді маємо, що

$$\tilde{A}^{k+m} x_0 = \frac{1}{2} (B^k + B^m) \cdot x_0 \quad (12)$$

Як було зазначено в [8], функція зображена рядом (11) матиме вигляд

$$f(z, \omega) = \frac{\omega \tilde{f}(\omega) - z \tilde{f}(z)}{\omega - z} \quad (13)$$

Далі розглянемо послідовність

$$\begin{aligned}\tilde{s}_i &= \langle \tilde{A}^i x_{0,0}; y_{0,0} \rangle = 4 \langle \tilde{A}^i x_0; y_0 \rangle = \\ &= 2 \langle (B^k + B^m)^i x_0; y_0 \rangle, \quad \text{де } k + m = i, i \in \mathbb{N}_+\end{aligned}$$

Для послідовності $\{\tilde{s}_i\}_{i \in \mathbb{N}_+}$ виконується умова :

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists \tilde{Y}_N = \sum_{j=0}^N \tilde{c}_j^{(N)} \tilde{y}_j = \sum_{j=0}^N \tilde{c}_j^{(N)} \tilde{A}^j y_{0,0}, \tilde{c}_N^{(N)} \neq 0$$

і такий, що

$$\langle \tilde{x}_i; \tilde{Y}_N \rangle = \langle \tilde{A}^i x_{0,0}; Y_N \rangle = 0 \quad k = \overline{0, N-1} \quad (14)$$

або

$$\langle \tilde{x}_i; \tilde{Y}_N \rangle = 2 \langle (B^k + B^m) x_0; Y_N \rangle = 0$$

Умова (14) виконується за рахунок того факту, що для q-поліномів Лежандра $L_N(t; q)$, що задовольняють умови ортогональності:

$$\int_0^1 L_N(t; q) \cdot L_M(t; q) d_q t = 0$$

при $N \neq M$, відомо формули:

$$L_N(t; q) = \sum_{k=0}^N \frac{(q^{-N}; q)_k \cdot (q^{N+1}; q)_k}{((q; q)_k)^2} (qt)^k$$

(див., напр. [1]).

В роботі [8] отримано наступний результат, який є узагальненням теореми 1 [4].

Теорема 2. Для аналітичної функції двох змінних f , що має зображення (13) за виконанням умови (14), раціональні функції

$$[N/D]_f(z, \omega) = \frac{P_N(z, \omega)}{Q_D(z, \omega)}$$

такі, що

$$Q_D(z, \omega) = \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^N c_{N-j, N-n}^{(N, N)} z^j \omega^n$$

$$P_N(z, \omega) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} z^k \omega^m \sum_{j=0}^k \sum_{n=0}^m c_{N-j, N-n}^{(N, N)} s_{k-j, m-n} +$$

$$+ z^N \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1-m} z^k \omega^m \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^m c_{j, N-n}^{(N, N)} s_{k+j, m-n} +$$

$$+ \omega^N \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1-k} z^k \omega^m \sum_{j=0}^k \sum_{n=0}^N c_{N-j, n}^{(N, N)} s_{k-j, m+n}.$$

а коефіцієнти $c_{k,m}^{N,N}, k, m = \overline{0, N}$ задовольняють рівності

$$\sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^N c_{k,m}^{(N, N)} y_{k,m} = \sum_{j=0}^{2N} \tilde{c}_j^{(2N)} \tilde{y}_j = \tilde{Y}_N$$

матимуть розклади в степеневі ряди, коефіцієнти яких збігатимуться з коефіцієнтами ряду (3) для функції f для всіх

$$(j, n) \in E = \{(j, n) \in \mathbb{N}_+^2, j + n \leq 4N - 1\}$$

Таким чином, функція (13) задовольняє умовам теореми 2 і ми можемо побудувати апроксимант Паде функції (11).

Висновки.

Побудована двовимірна функціональна послідовність, яка має узагальнене моментне зображення і визначені раціональні апроксиманти, що будуть узагальненнями одновимірних апроксимант Паде.

Список використаних джерел

1. Дзядик В. К., Про узагальнення проблеми моментів, Доп.АН УРСР 6 (1981), 8–12.
2. Голуб А. П., Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде, Київ: Ін-т математики НАН України, (2002), 222.
3. Бейкер Дж. and Грейвс-Моррис П.Р., Апроксимации Паде (1986), 502.
4. Голуб А. П. and Чернецька Л. О., Двовимірні узагальнені моментні зображення та раціональні апроксимації функцій двох змінних, Укр.мат.журн. 65,8 (2013), 1035–1058.
5. Голуб А. П., Обобщенные моментные представления базисных гипергеометрических рядов, Укр.мат.журн. 41№6 (1981), 803-808.
6. Голуб А. П., Об одной разновидности обобщенных моментных представлений, Укр.мат.журн. 41 №11 (1989), 1455-1460.
7. Голуб А. П., Апроксиманти Паде q-аналогів експоненти та їх узагальнень, Теорія наближення функцій та суміжні питання. Збірник праць Інституту математики НАН України Т.12 №4 (2015), 144–153.
8. Голуб А. П. and Тетерук І. С., Узагальнені моментні зображення та апроксиманти типу Паде деяких базисних гіпергеометричних рядів двох змінних, Збірник праць Інституту математики НАН України т.16 №2 (2019), 1–8.

References

1. Dzyadik V. K., Pro uzagalnennya problemi momentiv, Dop.AN URSS 6 (1981), 8–12.
2. Golub A. P., Uzagalneni momentni zobrazhennya ta aproksimaciyi Pade, Kiyiv: In-t matematiki NAN Ukraini, (2002), 222.
3. Bejker Dzh. and Grejvs-Morris P.R., Aproksimacii Pade (1986), 502.
4. Golub A. P. and Chernecka L. O., Dvovimirni uzagalneni momentni zobrazhennya ta racionalni aproksimaciyi funkcij dvoh zminnih, Ukr.mat.zhurn. 65,8 (2013), 1035–1058.
5. Golub A. P., Obobshennye momentnye predstavleniya bazisnyh gipergeometricheskikh ryadov, Ukr.mat.zhurn. 41№6 (1981), 803-808.
6. Golub A. P., Ob odnoj raznovidnosti obobshennykh momentnykh predstavlenij, Ukr.mat.zhurn. 41 №11 (1989), 1455-1460.
7. Golub A. P., Aproksimanti Pade q-analogiv eksponenti ta yih uzagalnen, Teoriya nablizhennya funkcij ta sumizhni pitannya. Zbirnik prac Institutu matematiki NAN Ukraini T.12 №4 (2015), 144–153.
8. Golub A. P. and Teteruk I. S., Uzagalneni momentni zobrazhennya ta aproksimanti tipu Pade deyakih bazisnih gipergeometrichnih ryadiv dvoh zminnih, Zbirnik prac Institutu matematiki NAN Ukraini t.16 №2 (2019), 1–8.

Надійшла до редколегії 02.03.2020

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/1-2.14>

I.B. Розора¹, к.ф.-м.н., доцент
О.С. Переяслов², студ.

Розробка програмного забезпечення для моделювання випадкових процесів із заданою точністю та надійністю

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13.

e-mail: ¹ irozora@bigmir.net
e-mail: ² paslstchs@gmail.com

I.V. Rozora¹, Ph.D., Associate Professor
O.S.Pereiaslov², stud.

The development of software for simulation of random processes with a given accuracy and reliability

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st.,

e-mail: ¹ irozora@bigmir.net
e-mail: ² paslstchs@gmail.com

У даній роботі розглядаються стаціонарні гауссові випадкові процеси, вивчається питання точності та надійності побудованих моделей. Це означає, що спочатку ми будуємо модель, а потім перевіряємо її, використовуючи деякі тести на адекватність з відомою точністю та надійністю. А також знайдені оцінки методом моментів для параметрів моделі. Всі отримані теоретичні результати покладено в основу розробки програмного забезпечення для побудови відповідних моделей.

Ключові слова: моделювання, точність, надійність, оцінювання

Today, the theory of random processes and time series prediction is widely used in various fields of science, not only in natural fields. That is why one of the urgent problems is to build a mathematical model of a random process and study its properties. Numerical modeling tasks become especially important due to the powerful capabilities of computer technology, which allows you to create software modeling tools and predict the behavior of a random process. There are different methods of modeling random processes and fields. In some works related to the modeling of random processes, the issues of accuracy and reliability have not been studied. In [1, 2, 3] for various stochastic processes and fields this problem was investigated. In this paper the question of accuracy and reliability of the constructed model is considered. This means that we first build the model and then test it using some adequacy tests with known accuracy and reliability. We also find the estimators of the model parameters using methods of moments. All theoretical results are applied to develop software for model construction of stochastic processes.

Key Words: simulation, accuracy, reliability, estimation.

Communicated by Prof. Kozachenko Yu.V.

1 Вступ

Сьогодні теорія випадкових процесів та прогнозування часових рядів широко використовується в різних галузях науки, а не тільки в природничих областях. Ось чому однією з актуальних проблем є побудова математичної моделі випадкового процесу та вивчення її властивостей. Задачі чисельного моделювання стають особливо важливими завдяки потужним можливостям комп'ютерних технологій, що дозволяють створювати інструменти моделювання програмного забезпечення та прогнозувати поведінку випадкового процесу. Існують різні методи моделювання випадкових процесів та

полів. В деяких роботах, що стосуються моделювання випадкових процесів, питання точності та надійності не вивчено. В [1, 2, 3] для різних стохастичних процесів і полів ця проблема була досліджена.

Робота присвячена теоретичному обґрунтуванню та створенню програмного забезпечення для моделей гауссових випадкових процесів з дискретним спектром. Ці процеси розглядаються як вхідні процеси для стаціонарної лінійної системи з дійснозначною інтегрованою з квадратом імпульсної перехідною функцією. Більш детальну інформацію про лінійну систему, що описується за допомогою імпульсної

функції, та про оцінки імпульсної функції можна знайти в [4]. Реакцію системи на вхідний сигнал будемо також називати вхідним процесом. У роботі використовуються методи і властивості квадратично-гауссових процесів, метод моментів для знаходження оцінки параметрів процесу.

Метою роботи є побудова моделі $X_N(t)$, яка буде наближати вхідний процес $X(t)$ із заданою точністю та надійністю в банаховому просторі $L_2([0, T])$ з врахуванням реакції системи, знаходження оцінок моделі за вхідними даними та створення програмної реалізації для побудови моделей таких процесів. Для цього розглядаємо теорему, що дає необхідні умови для побудови моделі.

2 Теоретичні викладки

Нехай (Ω, F, P) є деяким імовірнісним простором.

Означення 2.1. Стаціонарний стохастичний процес називається процесом з дискретним спектром, якщо його кореляційна функція може бути задана як

$$B(h) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^2 \cos \lambda_k h,$$

де $b_k^2 > 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k^2 < \infty$, та λ_k - зростаюча послідовність така, що $0 \leq \lambda_k \leq \lambda_{k+1} \rightarrow \infty$, коли $k \rightarrow \infty$.

З визначення вище випливає, що (див., наприклад, [1, 2]) стохастичний процес з дискретним спектром може бути записаний таким чином

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (\xi_k \cos \lambda_k t + \eta_k \sin \lambda_k t), \quad (1)$$

де ξ_k, η_k є незалежними випадковими величинами з нульовим математичним сподіванням, $E\xi_k = E\eta_k = E\xi_k \eta_l = 0$ та $E\xi_k \xi_l = E\eta_k \eta_l = \delta_k^l$, $k \geq 0, l \geq 0$.

Зауважимо, що ряд в (1) збігається в середньому квадратичному [1, 2]. Якщо випадкові величини ξ_k, η_k є гауссовими, тоді випадковий процес $X(t)$ з (1) буде також гауссовим. У роботі розглядається гауссовий випадковий процес з дискретним спектром.

Розглянемо стаціонарну лінійну систему з дійснозначною інтегрованою з квадратом імпульсної перехідною функцією $H(\tau)$, яка визначається в області $\tau \in [0, T]$. Це означає, що реакція системи на вхідний сигнал $X(t)$, який спостерігається на $[-T, T]$, має такий вигляд

$$Y(t) = \int_0^T H(\tau) X(t - \tau) d\tau, \quad t \in [0, T] \quad (2)$$

та $H(\tau) \in L_2([0, T])$.

Припустимо, що функція імпульсної відповіді є відома. Ми також припускаємо, що вхідний сигнал в системі (2) є стаціонарним випадковим процесом з дискретним спектром. З (1) та (2) випливає, що відповідь системи $Y(t)$ може бути представлена як

$$Y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\xi_k \cdot c_k(t) + \eta_k \cdot s_k(t)), \quad (3)$$

де функції $c_k(t), s_k(t)$ дорівнюють

$$\begin{aligned} c_k(t) &= b_k \int_0^T H(\tau) \cos(\lambda_k(t - \tau)) d\tau, \\ s_k(t) &= b_k \int_0^T H(\tau) \sin(\lambda_k(t - \tau)) d\tau, \quad t \in [0, T] \end{aligned}$$

У даній роботі досліджується побудова моделі процесу $X(t)$ та умови для наближення вхідного сигналу $X(t)$ побудованою моделлю з врахуванням реакції системи (вихідного процесу) $Y(t)$ з заданою точністю та надійністю в банаховому просторі $L_2([0, T])$. Для досягнення цієї мети використовується теорія квадратично-гауссових випадкових величин і стохастичних процесів.

Моделлю стохастичного процесу $X(t)$ будемо називати зрізаний ряд з (1).

Означення 2.2. Випадковий процес $X_N(t)$ називається моделлю процесу $X(t)$, якщо

$$X_N(t) = \sum_{k=0}^N b_k (\xi_k \cos \lambda_k t + \eta_k \sin \lambda_k t).$$

Якщо модель $X_N(t)$ розглядається як вхідний сигнал лінійної системи, то вихідний процес має такий вигляд

$$Y_N(t) = \sum_{k=0}^N (\xi_k \cdot c_k(t) + \eta_k \cdot s_k(t)),$$

де функції $c_k(t)$, $s_k(t)$ з (4).

Через $\xi_N(t)$ позначимо суму квадратів різниць $X(t) - X_N(t)$ та $Y(t) - Y_N(t)$

$$\xi_N(t) = (X(t) - X_N(t))^2 + (Y(t) - Y_N(t))^2 \quad (5)$$

Означення 2.3. Будемо говорити, що модель $X_N(t)$ апроксимує стохастичний процес $X(t)$ з урахуванням відповіді системи з заданою надійністю $1 - \nu$, $\nu \in (0, 1)$, і точність $\delta > 0$ у просторі $L_2([0, T])$, якщо

$$P \left\{ \int_T |\xi_N(t) - E\xi_N(t)|^2 d\mu(t) > \delta \right\} < \nu.$$

Розглянемо такі умови:

- **Умова А:** Існує стала $c > 0$, яка обмежує функцію імпульсної відповіді $H(\tau)$ на області $[0, T]$

$$|H(\tau)| \leq c.$$

- **Умова В:** Наступний інтеграл є збіжним

$$I_H = \int_0^T H^2(\tau) d\tau < \infty.$$

- **Умова С:**

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} b_k^2 \lambda_k^{2\alpha} < \infty, \quad \alpha \in (0, 1].$$

Припустимо, що умови **А**, **В**, **С** виконуються. Тоді

$$E\xi_N(t) \leq (1 + T \cdot I_H) \sum_{k=N+1}^{\infty} b_k^2;$$

$$D\xi_N(t) \leq (8 + 2T^2 \cdot I_H^2) \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} b_k^2 \right)^2$$

$$+ (64c^2 + 2 \cdot I_H^2) \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{b_k^2}{\lambda_k} \right)^2$$

$$+ 4T \cdot I_H^2 \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} b_k^2 \right) \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{b_k^2}{\lambda_k} \right) := (\delta_0(N))^2;$$

Теорема 2.1. [6] Припустимо, що умови **А**, **В**, **С** виконуються. Модель $X_N(t)$ апроксимує гауссовий стохастичний процес з дискретним спектром $X(t)$, беручи до уваги реакцію системи, із заданою надійністю $1 - \nu$, $\nu \in (0, 1)$, та точністю $\delta > 0$ в просторі $L_2([0, T])$, якщо для N справедливі нерівності

$$\delta \geq \left(\frac{2}{\sqrt{2}} + 4 \right) C_2(N), \quad (6)$$

$$2 \sqrt{1 + \frac{\delta^{1/2} \sqrt{2}}{C_2(N)^{1/2}}} \exp \left\{ - \frac{\delta^{1/2}}{\sqrt{2} C_2(N)^{1/2}} \right\} < \nu, \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} C_2(N) &= \int_T (D_N(t)) dt \\ &= \left[(8 + 2T^2 \cdot I_H^2) \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} b_k^2 \right)^2 \right. \\ &\quad + (64c^2 + 2 \cdot I_H^2) \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{b_k^2}{\lambda_k} \right)^2 \\ &\quad \left. + 4T \cdot I_H^2 \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} b_k^2 \right) \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{b_k^2}{\lambda_k} \right) \right]^{1/2}; \end{aligned} \quad (8)$$

3 Знаходження оцінок параметрів моделі

Для побудови моделі процесу за вибірковими значеннями потрібно запропонувати метод оцінювання характеристик процесу b_k і λ_k .

Надалі припускаємо, що ці значення мають показниковий вигляд:

$$b_k = b^k, \quad \lambda_k = \lambda^k,$$

де $b \in (0, 1)$, $\lambda > 1$, — невідомі параметри, що потрібно оцінити.

Для знаходження оцінки b використаємо метод моментів. Обчислимо другий теоретичний момент:

$$\begin{aligned} Ex^2(t) &= E \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} b^i b^j (\xi_i \sin \lambda^i t + \eta_i \sin \lambda^i t) \\ &\quad \times (\xi_j \sin \lambda^j t + \eta_j \sin \lambda^j t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} b^i b^j \\ &\quad \times E[\xi_i \xi_j \sin \lambda^i t \sin \lambda^j t + E \xi_i \eta_j \sin \lambda^i t \cos \lambda^j t \\ &\quad + \eta_i \xi_j \cos \lambda^i t \sin \lambda^j t + E \eta_i \eta_j \cos \lambda^i t \cos \lambda^j t] \end{aligned}$$

Оскільки

$$E \xi_i \xi_j = E \eta_i \eta_j = \delta_{ij}, \quad E \xi_i \eta_j = 0, \quad \forall i, j \geq 0,$$

де δ_{ij} — символ Кронекера, то

$$\begin{aligned} Ex^2(t) &= \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} b^{2i} [E\xi_i^2 \sin^2 \lambda^i t + E\eta_i^2 \cos^2 \lambda^i t] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} b^{2i} = \frac{1}{1-b^2}. \end{aligned}$$

Якщо задана вибірка розмірністю n для вхідного процесу $(x_1, \dots, x_n)$, то оцінку b можна знайти, якщо прирівняти вибірковий та теоретичний момент:

$$\frac{1}{1-\hat{b}^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Тому

$$\hat{b} = \sqrt{1 - \frac{n}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}$$

Щоб оцінити параметр λ , прирівнюємо теоретичний та вибірковий вигляд кореляційної функції в точці $t = 1$:

$$B(1) = \sum_{k=0}^N b^{2k} \cos(\lambda^k)$$

$$\begin{aligned} \hat{B}(1) &= Cov(X(t+1), X(t)) = \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} (X_{k+1} - \bar{X}_1)(X_k - \bar{X}_2), \end{aligned}$$

$$\text{де } \bar{X}_1 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n x_i \text{ та } \bar{X}_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} x_i.$$

Оскільки $\cos$ та $\sin$ мають період 2π , то стає можливим перебір можливих варіантів оцінки λ . Беручи до уваги те, що $\lambda \geq 1$, інтервал для перебору має вигляд $(1, 2\pi]$. Для прискорення пошуку відповідного значення перебір починається з кроком $h = 0.1$ і далі поступово зменшується. Таким чином ми кількісно оцінили параметр моделі λ .

4 Програмна реалізація

Для створення моделі процесу та пошуку N для різної точності та надійності з умов теореми 2.1 використаємо вільне програмне середовище Microsoft Visual Studio та мову C#. Для роботи програми треба ввести вхідні дані, а саме: точність, надійність та вибірку даних.

Для тестування програми використовувалась вибірка курсу гривні до долару. Дані були взяті з відкритої платформи даних Quandl. В представленому прикладі розглядаємо курс гривні за останні 20 місяців. На основі вхідних даних були знайдені оцінки $\lambda = 1.57$, $b = 0.819$ та верхня межа сумування N . Результат моделі можна побачити на рисунку 1.

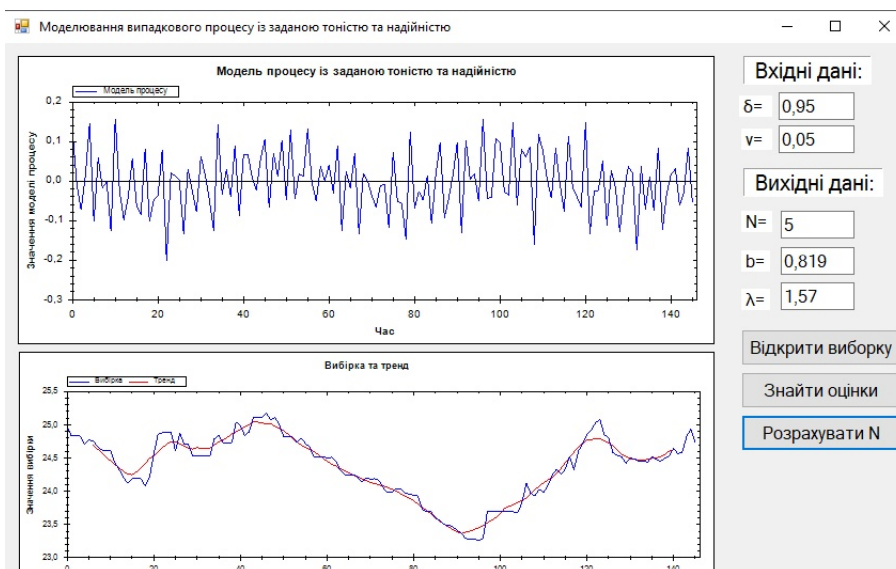


Рис.1 Інтерфейс програмного забезпечення для моделювання випадкових процесів

5 Висновки

В роботі вивчалися гауссові випадкові процеси з дискретним спектром. Для них запропонована модель, що наближає процес із наперед заданими точністю та надійністю в просторі $L_p([0, T])$.

Список використаних джерел

1. Козаченко Ю. Моделирование случайных процессов та полів / Ю.Козаченко, А.Пашко, І.Розора. – Київ, Задруга. – 2007.
2. Козаченко Ю. Моделирование случайных процессов із заданою точністю та надійністю / Ю.Козаченко, О.Погоріляк, І.Розора, А.Тегза. – Лондон, ISTE Press - Elsevier. – 2016.
3. Козаченко Ю. Моделирование гауссовых случайных процессов / Ю.Козаченко, І.Розора // Random Oper. and Stochastic Equ. – 2003. – 11, №.3. – С.275–296.
4. Козаченко Ю. Про корелограмні оцінки імпульсних перехідних функцій / Ю.Козаченко, І.Розора // Теор. ймовір. та матем. статист. – 2015. – № 93. – С. 75–86.
5. Розора І. Про моделювання вхідних випадкових процесів на лінійну систему із заданою точністю та надійністю / І.Розора, М.Лижечко // Monte Carlo Methods Appl. – 2018. – 24, №. 2. – С.129–137.
6. Розора І. Про точність та надійність моделювання в просторі $L_p([0, T])$ вхідного гауссового процесу, що подається на лінійну систему, з урахуванням виходу / І.Розора // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2018. – №. 2. – С.75–80.

Методом моментів знайдені оцінки параметрів моделі. А також розроблено програмне забезпечення для знаходження моделі, оцінок параметрів моделі. Одним із результатів програми є побудована траєкторія моделі випадкового процесу.

References

1. KOZACHENKO YU., PASHKO A., ROZORA I. (2007) *Simulation of Stochastic Processes and fields*, Zadruga, Kyi. (in Ukrainian)
2. KOZACHENKO Yu., POGORILYAK O., ROZORA I. AND TEGZA A. (2016) *Simulation of Stochastic Processes with Given Accuracy and Reliability*, ISTE Press - Elsevier.
3. KOZACHENKO, YU., ROZORA, I. (2003) Simulation of Gaussian stochastic processes, *Random Oper. and Stochastic Equ.*, **11**, №.3, 275–296.
4. KOZACHENKO YU., ROZORA I. (2015) On cross-correlogram estimators of impulse response functions *Theor. Probability and Math. Statist.*, **93**, 75–86.
5. ROZORA I., LYZHECHKO M. (2018) On the modeling of linear system input stochastic processes with given accuracy and reliability, *Monte Carlo Methods Appl.*, **24**, №. 2, 129–137.
6. ROZORA I. (2018) On simulation accuracy and reliability in the space $L_p([0, T])$ for the input Gaussian process served by the linear system taking into account the output, *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*, №. 2, 75–80.

Received: 20.12.2019

УДК 004.03:681.5

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/1-2.15>

Пашко А.О., д.ф.-м.н., проф
Тесленко О.В., аспірант

A. O. Pashko, D,
O. V. Teslenko, PhD stud.

Огляд основних підходів до визначення активності водія з камер встановлених в автомобілі

A survey of driver activity recognition from cameras installed in a car

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, факультет комп'ютерних наук
і кібернетики., 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13,
e-mail: aap2011@ukr.net
e-mail: oteslenkoua@gmail.com,

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: aap2011@ukr.net
e-mail: oteslenkoua@gmail.com,

У статті розглянуто підходи до розв'язання задачі визначення активності водія з камер встановлених у автомобілі. В статті представлений огляд основних проблем, які виникають у водія при водінні, досліджуються методи вирішення виявлених проблем. Основна частина статті зосереджена на вирішенні проблеми визначення стану водія в інтелектуальних систем допомоги водіям. Досліджуються основні парадигми вирішення цієї задачі - класифікація зображень, класифікація відеопотоку, визначення основних точок тіла водія.

Ключові слова: стан водія, система допомоги водію, камера, нейронна мережа.

The article discusses approaches to solving the problem of determining the activity of the driver from the cameras installed in the car, given the active development of intelligent driver assistance systems in recent years. The article provides an overview of the main problems that arise for the driver while driving. Main advances in autonomous driving are presented and the classification of types of autonomous vehicles is provided. Next, the methods of solving the identified problems are described. The main part of the article focuses on solving the problem of determining the state of the driver during driving. Reasons for usage of computer vision and machine learning approaches for solving this task are described. The basic paradigms of the solution of this problem - classification of images, classification of a video stream, detection of the basic points of a body of the driver on the image from the camera installed inside a car are investigated. Main ideas of every method are described. The approaches are evaluated with identification of main advantages and drawbacks of the presented methods.

Key words: driver activity, driver assistance system, camera, neural network.

Статтю представила канд.ф.-м.н., доцент Розора І.В.

Вступ

В даний час автовиробники виділяють п'ять рівнів автоматизації автономних автомобілів[1]. На нульовому рівні водій особисто виконує усі операційні завдання, такі як управління кермом, гальмування, прискорення

тощо. На п'ятому рівні автоматизації не має потреби в гальмах, кермі, так як автономна система особисто контролює всі найважливіші завдання, веде моніторинг навколишнього середовища тощо. Наразі, майже всі автовиробники використовують в своїх автомобілях перший-третій рівні

автоматомності, тобто водій відповідає за більшість важливих для безпеки функцій. Тож однією з головних задач забезпечення безпечного середовища для автономних автомобілів, та водіїв, які їх використовують є визначення стану водія та його зосередженості. Для визначення стану водія можуть використовуватися камери, встановленні в автомобілі самого водія, автомобілях інших водіїв, які рухаються назустріч даному авто, або ж камери зовнішнього спостереження за дорожнім трафіком.

Комп'ютерний зір є однією з ключових областей сучасної науки, яка бурхливо розвивається, особливо за кордоном. Як наукова дисципліна, комп'ютерний зір належить до теорії та технології створення штучних систем, які отримують інформацію у вигляді зображень. Розвиток машинного навчання та комп'ютерного зору призвів до їх використання в такій галузі як автомобілебудування. І зараз світ вже бачить перші автомобілі які можуть працювати частково автономно, з мінімальним залученням водія.

Однією з основних задач для сучасних автономних автомобілів рівня 1-3 під час руху є безпека водія, тому автоматична система управління автомобіля (інтелектуальна система допомоги водіям) повинна "бути впевнена", що водій даного автомобіля, та водії які проїжджають повз автомобіль, зосереджені на дорозі. Також за водіями слідкує зовнішня система спостереження, яка може давати сигнали водіям, які заснули, розмовляють по мобільному тощо.

Розробка інтелектуальних систем допомоги водіям (IDAS), які постійно контролюють не лише навколишнє середовище та стан транспортного засобу, а й поведінку водіїв, привертає все більше уваги у всьому світі. Вважається, що IDAS є особливо актуальним для водіїв, котрі подорожують на великі відстані, оскільки вони часто їздять в самоті. Використання інтелектуальних систем допомоги водіям, які надають важливу інформацію з поза транспортним засобом, наприклад, індикатори смуги руху та дорожні знаки, підвищують готовність водія до небезпечних ситуацій. Однак автоматичне виявлення та попередження рівня втоми та відволікання водія вважається однаково

важливим щодо запобігання ДТП. Окрім причин підвищення безпеки дорожнього руху, існують також комерційні причини встановлення систем моніторингу стану водіїв. [3]

Для визначення стану водія та ступеню його зосередженості використовується декілька підходів на основі нейронних мереж. Докладніше дані підходи будуть представлені далі.

Метод класифікації зображень

Сьогодні більшість найсучасніших рішень для розпізнавання активності водіїв використовують підхід глибокого навчання нейронних мереж[3]. Основним вдосконаленням порівняно з класичними способами є використання автоматичних характеристичних ознак отриманих з нейронних мереж, а не ручне їх створення, як в традиційних практиках комп'ютерного зору.

Один з широко популярних методів - це використання конволюційних нейронних мереж для класифікації активності водіїв[2]. Конволюційні нейронні мережі (CNN або ConvNet) - це особливий вид багатосарових нейронних мереж, розроблений для розпізнавання візуальних шаблонів безпосередньо з піксельних зображень з мінімальною попередньою обробкою.

Для цього підходу модель очікує зображення з водіями як вхідні дані, а як вихідний, буде один із заздалегідь визначених класів активності водія (Нормальне водіння, текстові повідомлення, розмова тощо). Загальна архітектура CNN для цього методу зображена нижче на рисунку 1.

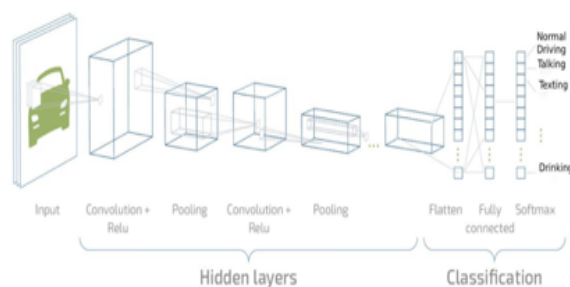


Рис.1 Архітектура нейронної мережі для класифікації стану водія

Основна перевага цього підходу полягає в тому, що вже є розроблені архітектури нейронних мереж для завдань класифікації зображень, які можуть бути використані для цього підходу і дають високу точність. Найбільш підходящими архітектурами є VGG-16, Xception, ResNet[5].

У навчанні CNN часто використовується відомий алгоритм зворотного поширення похибки в архітектурі мережі. Тренінг складається з двох етапів: (i) передача навчальних даних через мережу до остаточного вихідного рівня та, нарешті, обчислення помилки чи значення функції втрати (ii) назад розповсюджується шари помилок та оновлюються ваги у відповідних шарах на основі зворотних поширюваних помилок.

Відповідна оцінка втрат для виходу з кінцевого шару - це крос-ентропійна втрата. У вихідному шарі функція крос-ентропійної втрати задається:

$$L = - \sum_{j=1}^K [t^j \log(p^j) + (1-t^j) \log(1-p^j)] \quad (1)$$

де t^j і p^j - j -й вхід і вихід відповідно, K - кількість вихідних нейронів (клас) і t^j - цільова мітка, кодована для одного класу j -го класу. Виконуючи зворотне поширення помилки, першим кроком є обчислення градієнта втрат за частинною похідною наступним чином:

$$\begin{aligned} \delta^j &= \frac{\partial L^j}{\partial p^j} \cdot \frac{\partial p^j}{\partial x^j} = \left(-\frac{t^j}{p^j} + \frac{1-t^j}{1-p^j} \right) \cdot p^j (1-p^j) \\ &= \frac{p^j - t^j}{p^j(1-p^j)} \cdot p^j(1-p^j) \\ &= p^j - t^j \end{aligned} \quad (2)$$

де δ^j - градієнт втрат у вихідному шарі, який буде поширюватися на верхній повний шар з'єднання як помилка. У l -му шарі повного з'єднання помилка δ^j $l+1$ повертається назад з верхнього $(l+1)$ -го шару.

Метод класифікації відео

Більш просунутий підхід - класифікація активності водія на основі відео[4]. Спочатку з кожного відео вибирається N кадрів. Далі до кожного обраного кадру застосовується CNN, яка заздалегідь натренована на великому датасеті

зображень. Потім витягнуті характеристичні ознаки об'єднуються і застосовуються як вхід для класифікації, що досягається додатковим рівнем нейронної мережі для прогнозування ймовірностей класу стану водія. Весь алгоритм проілюстрований на рисунку 2[5].

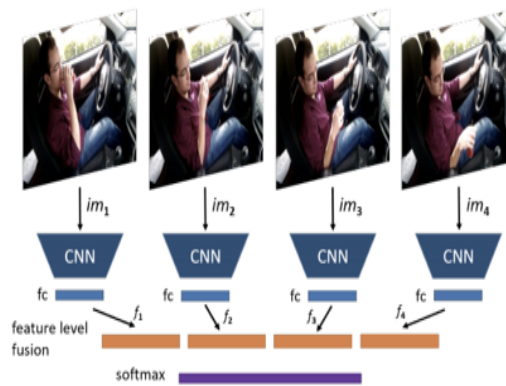


Рис.2 Архітектура нейронної мережі для класифікації стану водія по відео

Крім того, замість кількох звичайних CNN можна використовувати одну 3D-конволюційну нейронну мережу. 3D-конволюційна нейронна мережа очікує, що N кадрів є вхідними даними в нейронну мережу[5]. У приведеній роботі вирішується проблема маневрового прогнозування транспортних засобів за допомогою відеоданих, яка має на меті виявити активність водія на майбутнє на основі даного зразка відео. З цією метою використовується 101-шарова глибока нейронна архітектура, яка використовує 3D-згортки в поєднанні з залишковими зв'язками. Концептуально модель прогнозування активності водія складається з трьох компонентів: 1) оптична мережа вилучення оптичного потоку, 2) нейронна конволюційна мережа на основі тривимірних згортків із залишковими зв'язками для класифікації активності водія та 3) Довга короткострокова пам'ять(LSTM) для обробки відеоданих різної довжини

З часової точки зору, кожен рівень 3D нейронної мережі витягує темпоральну інформацію з вхідних кадрів або характеристичних ознак. Приклад тривимірної нейронної мережі показаний на рисунку 3[5].

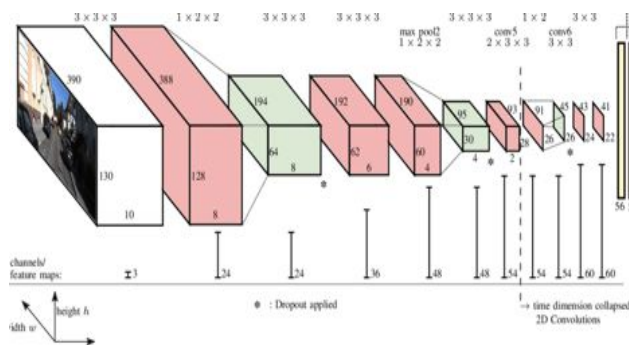


Рис.3 Архітектура 3D нейронної мережі

LSTM можуть запам'ятовувати довгі часові інтервали, не втрачаючи здатності до вивчення коротких часових залежностей. Математична формулювання мережі LSTM виглядає наступним чином:

$$\begin{aligned} i_t &= \sigma(W_{ii} \cdot x_t + b_{ii} + W_{hi} \cdot h_{t-1} + b_{hi}) \\ f_t &= \sigma(W_{if} \cdot x_t + b_{if} + W_{hf} \cdot h_{t-1} + b_{hf}) \\ g_t &= \tanh(W_{ig} \cdot x_t + b_{ig} + W_{hg} \cdot h_{t-1} + b_{hg}) \\ o_t &= \sigma(W_{io} \cdot x_t + b_{io} + W_{ho} \cdot h_{t-1} + b_{ho}) \\ c_t &= f_t c_{t-1} + i_t g_t \\ h_t &= o_t \tanh(c_t) \end{aligned}$$

де i_t , f_t і o_t - ворота вводу, забуття і виведення для часу кроку t відповідно. Прихований стан h_{t-1} використовується разом із цим вхідним зразком x_t для отримання етапу g_t . Ворота вводу регулюють додавання інформації про вхідного кандидата до попереднього стану c_{t-1} , тоді як ворота забуття f_t контролюють втрату інформації про стан нейрону. h_t є виходом мережі на етапі t . W , σ відносяться до вагових матриць, зміщення та сигмоїдної функції відповідно.

Метод оцінки положення тіла та голови

Повний алгоритм для моніторингу стану водія на основі лише RGB-зображень може бути розроблений на основі оцінки положення тіла та голови. Рішення складається з середньо зваженого ансамблю згорткових нейронних мереж. Початкова CNN відповідає за виявлення ключових точок тіла водія. Для визначення верхнього скелета тіла з 13 основних точок використовуються нейронні мережі для детектування таких ключових точок. Одна із архітектури, показана на рис. 4[7], ітеративно

передбачає поля спорідненості, що кодують асоціацію "частина-частина", та достовірні карти виявлення. Наступна ітеративна архітектура прогнозування уточнює прогнози для послідовних етапів, $t \in \{1, \dots, T\}$, з проміжним наглядом на кожному етапі[7].

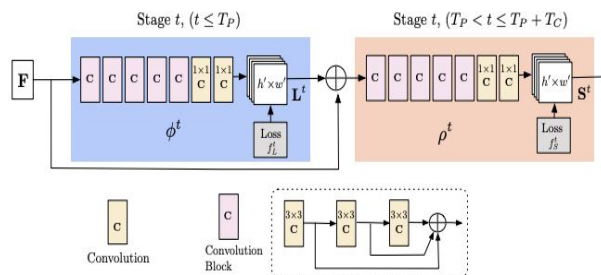


Рис.4 Архітектура нейронної мережі для визначення верхнього скелета тіла з 13 основних точок

У представленій архітектурі моделі рецептивне поле під час обчислення було зменшено порівняно з [7], замінивши кожне згорткове ядро 7×7 на 3 послідовні 3×3 ядра. Тоді як кількість операцій за першому слої - $2 \times 7 \times 2 - 1 = 97$, для останнього - лише 51. Додатково, вихід кожного з 3 згорткових ядер з'єднуються за принципом, подібним до підходу DenseNet. Кількість нелінійних шарів збільшується втричі, і мережа може зберігати як нижчі(прямі лінії, кути, кольори), так і вищі(положення рук, ніг, голови відносно один одного) характеристичні ознаки.

Зображення аналізується CNN (ініціалізовані перші 10 шарів VGG-19 [10] та предтренеровані), створюючи набір характеристичних карт F , які вводяться на першому етапі. На цій стадії, мережа виробляє набір полів спорідненості для кожної частини тіла.

Клас активності водія в основному розпізнається на основі оцінки напрямку голови, тому наступним кроком у цьому методі є оцінка положення та орієнтації голови. Оцінка позиції голови формулюється як багаторівнева регресійна задача до трьох кутів обертання Ейлера[9]. Для цього завдання також може бути використана CNN. Виходи нейромережі - це три кути: yaw, pitch, roll, які визначають орієнтацію голови. Архітектура представлена авторами моделі складається з двох основних частин:

магістральної мережі та трьох повністю з'єднаних шарів (по одному для кожного кута Ейлера) з використанням активації softmax. Три повністю з'єднані шари поділяють ту саму магістральну мережу. Важливо зазначити, що вихід кожного кута Ейлера з шару, що повністю з'єднується, не є одиничним значенням. Натомість це вектор, який є гіперпараметром мережі, який повинний бути підібраний. У роботі [9] автори демонструють ефективність двох різних магістральних мереж: ResNet50 та AlexNet. Вони показали, що використання ResNet50 як магістральної мережі дає кращий результат порівняно з AlexNet. Далі автори пропонують використовувати три окремих функцій втрат, по одній на кожен кут. Кожна втрата - це комбінація двох компонентів: класифікації пози та регресії позиції. Будь-яка магістральна мережа може використовуватися та доповнюватися трьома повністю сполученими шарами, які передбачають кути. Ці три повністю пов'язані шари поділяють попередні згорткові шари мережі. Ідея цього підходу полягає в тому, що, виконуючи класифікацію, використовується дуже стійкий шар softmax і крос-ентропія, таким чином мережа вчиться чітко прогнозувати позу голови. Маючи три крос-ентропійні втрати, по одній на кожен кут Ейлера, отримують три сигнали, які передаються в мережу, що покращує навчання. Потім в мережу додаються втрати

регресії, а саме середньоквадратичну втрату помилок, щоб покращити кінцеві прогнози. В кінці отримують три кінцеві витрати, по одній на кожен кут, і кожна є лінійною комбінацією як відповідної класифікації, так і регресійних втрат.

Висновки

Було представлено підходи до відтворення характеристик стану водія в автомобілі з рівнями автоматизації 1-3 за допомогою нейронних мереж. На даний момент є декілька підходів до вирішення цієї задачі. Один з підходів це використання відеопотоку з камер встановлених в автомобілі, або зовні для тренування нейронної мережі для покадрової класифікації зображень. Також крім окремих кадрів можуть бути класифіковані короткі відеофрагменти. Для цього підходу використовуються нейронні мережі на основі 3D згорток. Останній метод полягає в визначенні ключових точок на тілі водія, визначення ключових точок голови водія, та кути повороту голови. Наступним етапом ці ключові точки використовуються для класифікації стану водія за допомогою нейронної мережі.

Список використаних джерел

1. Yan C. Vision based driver behaviour analysis [Електронний ресурс] / Chao Yan // University of Liverpool. – 2016. – Режим доступу до ресурсу: https://cgi.csc.liv.ac.uk/~frans/CurrentResearch/Thesis/yan_March2016.pdf.
2. Tamas V. Real-Time Distracted Drivers Detection Using Deep Learning [Електронний ресурс] / V. Tamas, V. Maties // IET Intelligent Transport Systems (IET INTELL TRANSP SY). – 2019. – Режим доступу до ресурсу: https://www.researchgate.net/publication/326740203_Real-time_Detection_of_Distracted_Driving_based_on_Deep_Learning.

References

1. Yan C. Vision based driver behaviour analysis [Electronic resource] / Chao Yan // University of Liverpool. – 2016. – Available from https://cgi.csc.liv.ac.uk/~frans/CurrentResearch/Thesis/yan_March2016.pdf.
2. Tamas V. Real-Time Distracted Drivers Detection Using Deep Learning [Electronic resource] / V. Tamas, V. Maties // IET Intelligent Transport Systems (IET INTELL TRANSP SY). – 2019. – Available from: https://www.researchgate.net/publication/326740203_Real-time_Detection_of_Distracted_Driving_based_on_Deep_Learning.

3. Gebert P. End-to-end Prediction of Driver Intention using 3D Convolutional Neural Networks [Електронний ресурс] / P. Gebert, A. Roitberg, M. Haurilet // Conference: 2019 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV). – 2019. – Режим доступу до ресурсу: https://www.researchgate.net/publication/335497206_End-to-end_Prediction_of_Driver_Intention_using_3D_Convolutional_Neural_Networks.

4. Eraqi H. Driver Distraction Identification with an Ensemble of Convolutional Neural Networks [Електронний ресурс] / Hesham Eraqi // Journal of Advanced Transportation. – 2019. – Режим доступу до ресурсу: <https://arxiv.org/abs/1901.09097>.

5. ation using Part Affinity Fields [Електронний ресурс] / Z. Cao, T. Simon // 2017 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). – 2017. – Режим доступу до ресурсу: <https://arxiv.org/abs/1611.08050>.

6. Alioua N. Driver head pose estimation using efficient descriptor fusion [Електронний ресурс] / N. Alioua, A. Amine, A. Rogozan // EURASIP Journal on Image and Video Processing. – 2016. – Режим доступу до ресурсу: <https://jivp-urasipjournals.springeropen.com/articles/10.1186/s13640-016-0103-z>.

7. OpenPose: Realtime Multi-Person 2D Pose Estimation using Part Affinity Fields [Електронний ресурс] / Z.Cao, G. Hidalgo Martinez, T. Simon, S. Wei // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 2019. – Режим доступу до ресурсу: <https://arxiv.org/abs/1812.08008>.

8. Simonyan K. Very Deep Convolutional Networks for Large-Scale Image Recognition [Електронний ресурс] / K. Simonyan, A. Zisserman // ICLR 2015. – 2014. – Режим доступу до ресурсу: <https://arxiv.org/abs/1409.1556>.

9. Ruiz N. Fine-Grained Head Pose Estimation Without Keypoints [Електронний ресурс] / N. Ruiz, E. Chong, J. M. Rehg // The IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). – 2017. – Режим доступу до ресурсу: <https://arxiv.org/abs/1710.00925>.

3. Eraqi H. Driver Distraction Identification with an Ensemble of Convolutional Neural Networks [Electronic resource] / Hesham Eraqi // Journal of Advanced Transportation. – 2019. – Available from: <https://arxiv.org/abs/1901.09097>.

4. Eraqi H. Driver Distraction Identification with an Ensemble of Convolutional Neural Networks [Electronic resource] / Hesham Eraqi // Journal of Advanced Transportation. – 2019. – Available from: <https://arxiv.org/abs/1901.09097>.

5. Cao Z. Realtime Multi-Person 2D Pose Estimation using Part Affinity Fields [Electronic resource] / Z. Cao, T. Simon // 2017 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). – 2017. – Available from: <https://arxiv.org/abs/1611.08050>.

6. Alioua N. Driver head pose estimation using efficient descriptor fusion [Electronic resource] / N. Alioua, A. Amine, A. Rogozan // EURASIP Journal on Image and Video Processing. – 2016. – Available from: <https://jivp-urasipjournals.springeropen.com/articles/10.1186/s13640-016-0103-z>.

7. OpenPose: Realtime Multi-Person 2D Pose Estimation using Part Affinity Fields [Electronic resource] / Z.Cao, G. Hidalgo Martinez, T. Simon, S. Wei // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 2019. – Available from: <https://arxiv.org/abs/1812.08008>.

8. Simonyan K. Very Deep Convolutional Networks for Large-Scale Image Recognition [Electronic resource] / K. Simonyan, A. Zisserman // ICLR 2015. – 2014. – Available from: <https://arxiv.org/abs/1409.1556>.

9. Ruiz N. Fine-Grained Head Pose Estimation Without Keypoints [Electronic resource] / N. Ruiz, E. Chong, J. M. Rehg // The IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). – 2017. – Available from: <https://arxiv.org/abs/1710.00925>.

Надійшла до редколегії: 20.01.2020

РАДІОФІЗИКА

УДК 519.9

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/1-2.16>

Ніконова В.В., к. ф.-м. н.
Обуховський В.В., д. ф.-м. н., проф.

V.V. Nikonova, Ph.D.
V.V. Obukhovsky, Prof.

Знаходження та аналіз парціальних коефіцієнтів взаємодифузії для бінарних розчинів з хлороформом на основі комплексно-асоціативної моделі

Finding and analysis of the partial mutual diffusion coefficients for binary solutions with chloroform using the complex-associative model

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
01601, м. Київ, вул. Володимирська, 64/13,
e-mail: vikap@bigmir.net

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
010601, Kyiv, Volodymyrska str., 64/13,
e-mail: vikap@bigmir.net

У статті в рамках комплексно-асоціативної моделі рідинних систем розглядається нелінійна дифузія для ряду бінарних розчинів: ацетон-хлороформ, тетрахлоретан-хлороформ, діетилефір-хлороформ та бензол-хлороформ. Реальні бінарні розчини замінено ідеальними трикомпонентними, що складаються з усереднених двох асоціатів речовини і розчинника та ефективного усередненого комплексу, що є результатом квазіхімічних реакцій молекулярних розчинів. Коефіцієнт взаємної дифузії, що немонотонно змінюється з концентрацією розчинника, представляється як матриця парціальних коефіцієнтів взаємодифузії, що є сталими величинами і являють собою матеріальні параметри розглянутих розчинів. Розроблено методу аналітичного обрахунку числових значень таких величин при розгляді найпростішого типу одного усередненого комплексу. Показано, що парціальні коефіцієнти є сталими величинами та проведено аналіз їх значень для розглянутих розчинів в залежності від будови молекул речовини, ентальпії та температури. На основі запропонованого підходу відхилення розрахункового «фіківського» коефіцієнту взаємодифузії через матрицю парціальних коефіцієнтів при порівнянні з експериментальними даними складає менше 2,5%.

Ключові слова: комплексно-асоціативна модель, нелінійна дифузія, бінарний розчин, парціальні коефіцієнти взаємодифузії.

In the article within the complex-associative model of liquid systems the nonlinear diffusion for a number of binary solutions, such as acetone-chloroform, tetrachlorethane-chloroform, diethyl ether-chloroform and benzene-chloroform, is considered: Real binary solutions are replaced by ideal three-component ones, which consist of averaged two associates of substance and solvent and an effective averaged complex, which is the result of quasi-chemical reactions of molecular solutions. The coefficient of mutual diffusion, which nonmonotonically depends on the concentration of the solvent, is represented as a matrix of partial coefficients of mutual diffusion, which are constant values and represent the material parameters of the considered solutions. The method of analytical calculation of numerical values of such quantities when considering the simplest type of one averaged complex is developed. It is shown that the partial coefficients are constant values and the analysis of their values for the considered solutions depending on the structure of the molecules of the substance, enthalpy and temperature is carried out. Based on the proposed approach, the deviation of the calculated «Fick's» coefficient of mutual diffusion through the matrix of partial coefficients in comparison with experimental data is less than 2.5%.

Key Words: complex-associative model, nonlinear diffusion, binary solution, partial coefficients mutual diffusion coefficient.

Статтю представив д. ф.-м. н., доц. Фелінський Г.С.

На сьогодні актуальними є задачі зростання вимог до контролю якості продуктів харчової промисловості, виробництва ліків, пального та різноманітних технічних рідин. Більшість біологічних та промислових процесів зазвичай проходять в рідкому стані, тому все більше уваги

приділяється дослідженню дифузійних процесів та змін складу розчинів.

В даній роботі проведено теоретичне дослідження явища дифузії, спричиненого градієнтом концентрацій, для бінарних молекулярних розчинів, що містять хлороформ, використовуючи базові рівняння моделі нелінійної дифузії [1] за умови протікання квазіхімічних реакцій у таких середовищах.

На відміну від порівняно стійких продуктів звичайних хімічних реакцій, в яких змінюється хімічний склад речовини, результатом квазіхімічних реакцій є нестабільні сполуки, проте саме такі процеси комплексоутворення суттєво впливають на дифузію, теорія якої жорстко пов'язана з моделлю рідинного середовища [2-4].

Утворення або розпад комплексів, до складу яких входять молекули різних сортів речовин, та асоціатів, до складу яких входять молекули лише одного сорту речовини, власне і є нелінійним процесом. З ними пов'язані основні особливості концентраційної залежності швидкості дифузійного переносу компонент досліджуваної системи.

Особливості структурного складу та кількісні характеристики квазіхімічних реакцій можна розраховувати аналізуючи особливості дифузії та термодинамічних характеристик: в рамках комплексно-асоціативної моделі рідини розроблено таку методику [5-7] та отримано якісні характеристики квазіхімічних реакцій – констант рівноваги.

В представленому дослідженні реальний бінарний розчин (речовина X та розчинник Y) з частинками, що постійно змінюють партнерів, замінюється ідеальною трикомпонентною системою, що містить асоціати розчиненої речовини $[X^n]$ і розчинника $[Y^m]$ та усереднений міжмолекулярний комплекс $[X^kY^l]$, які вже не вступають в квазіхімічні реакції.

Коефіцієнт взаємодифузії суттєво залежить від концентрації і змінюється зі співвідношенням концентрацій його інгредієнтів $D_{ef}(C_1, C_2, \dots)$. Але знаходження таких параметрів, що були б константами для кожного молекулярного розчину є важливим. Даний підхід можна реалізується введенням d_{ij} – парціальних коефіцієнтів нелінійної взаємодифузії, які можна вважати матеріальними параметрами системи, і вони абсолютно не залежать від концентрацій. А немонотонний коефіцієнт взаємної дифузії, представляється як матриця таких парціальних коефіцієнтів взаємодифузії.

Отже, базовими рівняннями моделі є рівняння неперервності (1), потік нелінійної дифузії (2), закон збереження відносного об'єму (3) та :

$$\frac{\partial M_i}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_i = S_i, \quad (1)$$

$$\vec{j}_i = \sum_j d_{ij} [M_i \nabla M_j - M_j \nabla M_i], \quad (2)$$

$$\sum_i M_i = 1. \quad (3)$$

Індекси i, j нумерують складові компоненти молекулярного розчину, M_i – об'ємна частка компоненти i ; $\vec{j}_i$ – потік об'єму відповідної речовини, S_i – функції джерел/стоків, що залежать від процесів народження/зникнення молекул сорту i , d_{ij} – парціальні коефіцієнти нелінійної взаємодифузії.

Ефективний коефіцієнт взаємодифузії представляється у вигляді закону Фіка (4) та виражається через парціальні коефіцієнти d_{ij} :

$$\vec{j}_1^{total} = -D_{eff} (M_1^{total}) \nabla M_1^{total}. \quad (4)$$

Відносний об'єм розчинника M_1^{total} включає в себе як речовину в чистому вигляді, так і з урахуванням її парціальної частки в комплексі.

Вищезазначені рівняння не суперечать закону Фіка і зводяться до нього за відсутності процесів комплексоутворення.

В роботі [8] показано, що для застосування третьої компоненти розчину у вигляді найпростішого типу комплексу 1-1, що складається лише з двох молекул різного сорту, можливе за виконання двох умов: ентальпія змішування має максимум/мінімум свого значення при значенні мольних долей розчинника 0,5 і величини коефіцієнта дифузії на краях концентрації мають різні значення для нульової і максимальної концентрації розчинника.

Для такого типу комплексу рівняння для коефіцієнту взаємодифузії, вираженого через концентрації розчиненої речовини значно спрощується і це дає можливість аналітично розрахувати парціальні коефіцієнти взаємодифузії з експериментальних даних з концентраційної залежності коефіцієнта взаємодифузії без використання числових методів, застосовуючи рівняння (5)-(9):

$$D_{eff} (M_1^{total} = 0) = \frac{d_{12} + (\gamma \cdot \eta) d_{23}}{1 + (\gamma \cdot \eta)}, \quad (5)$$

$$D_{eff} (M_1^{total} = 1) = \frac{d_{12} + (\gamma \cdot (1 - \eta)) d_{13}}{1 + (\gamma \cdot (1 - \eta))}, \quad (6)$$

$$\frac{dD_{eff}}{dM_1^{total}}(M_1^{total}=0)=+2(\gamma\eta)(1+\gamma)\frac{(d_{12}-d_{23})}{(1+(\gamma\cdot\eta))^3}, \quad (7)$$

$$\frac{dD_{eff}}{dM_1^{total}}(M_1^{total}=1)=-2(\gamma(1-\eta))(1+\gamma)\frac{(d_{12}-d_{13})}{(1+(\gamma\cdot(1-\eta)))^3}. \quad (8)$$

Тут введені такі позначення: γ – константа термодинамічної рівноваги (її можна визначити фізичними або хімічними методами безпосередньо з експерименту [5-6]) η – відносний молекулярний об'єм розчинника у комплексі, у найпростішому типі комплексу визначається як молекулярний об'єм розчинника, поділений на молекулярний об'єм комплексу.

Уточнення параметрів та аналітичне знаходження величини обсягу комплексів рідинної системи можна зробити проаналізувавши екстремальні значення коефіцієнта дифузії. Якщо в області $0 \leq M_1^{total} \leq 1$ екстремум тільки один, із (4) – (8) можна знайти положення екстремуму (9), максимальну або мінімальну концентрацію комплексів $[X_1Y_1]$ (10) та зв'язок між концентрацією в точці екстремуму і коефіцієнтами взаємодифузії (11):

$$M_1^{extr} \cong \frac{1}{\gamma+2}, \quad (9)$$

$$M_3(M_1^{extr}) \cong \frac{(\sqrt{1+\gamma}-1)^2}{\gamma}, \quad (10)$$

$$(M_1^{total})^{extr} = \frac{\eta_1(d_{12}-d_{23})}{q_{11}} = \frac{\eta_1(d_{12}-d_{23})}{d_{12}-d_{13}+\eta_1(d_{13}-d_{23})}. \quad (11)$$

Використовуючи експериментальні дані [9–11], та застосовуючи рівняння (5) – (8) обраховано параметри d_{12} , d_{13} , d_{23} , γ на основі спрощень для моделі комплексу типу 1-1 для ряду бінарних молекулярних розчинів, однією компонентою яких є хлороформ: ацетон-хлороформ, тетрахлоретан-хлороформ, бензол-хлороформ та діетиленфтор-хлороформ. Результати наведені в Табл. 1:

№	Рід. розчин	d_{12}	d_{13}	d_{23}	γ
1	Ацетон-хлороформ	3,71	3,43	0,47	1,36
2	Тетрахлор метан-хлороформ	1,14	2,24	3,65	1,17
3	Діетиленфтор - хлороформ	4,41	4,70	0,01	1,89
4	Бензол-	2,39	3,81	2,09	1,24

хлороформ				
-----------	--	--	--	--

В рамках теоретичного моделювання оптимальні значення вищезазначених параметрів знаходилися виходячи з мінімальності середньоквадратичного відхилення від експериментальних точок. Це також знімає питання неоднозначності вибору параметрів.

З аналізу значень парціальних коефіцієнтів взаємодифузії видно, що параметри системи не мають певної закономірності, бо система мало чутлива до незначної зміни параметрів, проте для досліджуваних розчинів видно, що зі зростанням температури зміщення рідин зростає парціальний коефіцієнт d_{23} .

Також відповідний аналіз показав, що зі збільшенням температури модуль теплоти зменшується, що в рамках представлених уявлень можна пояснити меншим часом життя комплексів за більшої температури.

З експериментальних даних концентраційної залежності коефіцієнтів взаємодифузії для розчину ацетон-хлороформ за різних температур (25°C, 40°C, 55°C) [9] отримано значення матеріальних параметрів Табл. 2:

T	25°C	40°C	55°C
d_{12}	3,71	4,42	5,12
d_{13}	3,43	4,30	5,00
d_{23}	0,47	0,70	1,20
γ	1,36	1,23	1,12

Як видно з Табл. 2, зі збільшенням температури парціальні коефіцієнти взаємодифузії зростають, що свідчить про зростання швидкості дифузії з температурою. Константа реакції γ зменшується, що пов'язане з меншим часом життя комплексів за більшої температури в межах запропонованої моделі.

Актуальною задачею викладеного підходу для подальших досліджень лишається встановити основні закономірності та узагальнити підхід на випадок врахування двох і більше ефективних комплексів у ряду молекулярних розчинів за умови протікання квазіхімічних реакцій.

Отже, в даній роботі в рамках комплексно-асоціативної моделі представлено розроблену методику для аналітичного визначення числових значень парціальних коефіцієнтів взаємодифузії – матеріальних параметрів системи з введенням найпростішого типу комплексу за відомими експериментальними даними з концентраційної залежності коефіцієнту взаємодифузії. Показано, що такий підхід дає досить високу точність (максимальне відхилення не перевищує 2,5%). Показано, що парціальні коефіцієнти є константами, що доводить їх можливість

вважатися матеріальними параметрами досліджуваної системи. Проаналізовано такі величини для ряду бінарних розчинів з

хлороформом у залежності від різних параметрів: типу речовини, будови молекул речовини, температури, значення ентальпії тощо.

Список використаних джерел

References

1. Karpov G.M., Spatial transfer of matter as a method of holographic recording in photoformers / G.M. Karpov, V.V. Obukhovsky, T.N. Smirnova, V.V. Lemeshko // *Opt. Commun.* – 2000. – Vol. 174. – P. 391-404.
2. Pertler M. Fickian diffusion in binary mixtures that form two liquid phases / M. Pertler, E. Blass, G.W. Stevens // *AIChE J.* – 1996. – Vol. 42. – P. 910-920.
3. Moggridge G.D., Prediction of the mutual diffusivity in binary liquid mixtures containing one dimerising species, from the tracer diffusion coefficients / G.D. Moggridge // *Chem. Eng. Sci.* – 2012. – Vol. 76. – P. 199-205
4. Durov V.A. Models of liquid mixtures: Structure, dynamics, and properties / V.A. Durov // *Pure Appl. Chem.* – 2004. – Vol. 76. – P. 1-10.
5. Obukhovsky V.V. Nonlinear diffusion in the liquid solution of diethyl ether with chloroform / V.V. Obukhovsky, A.M. Kutsyk, V.V. Nikonova, O.O. Ilchenko // *Phys. Rev. E.* – 2017. – Vol. 95. – P. 022133-022143.
6. Куцук А. Взаємна дифузія у розчині «ацетон-циклогексан» / А. Куцук, В. Обуховський // *Журн. Фіз. Дослідж.* – 2015. – Т. 19. – С. 3603 (1-9).
7. Обуховський В.В. Взаємодифузія у водному розчині етилового спирту / В.В. Обуховський, В.В. Ніконова. *УФЖ.* – 2010. – Т. 55. – С. 891-896.
8. Обуховський В. В. Нелінійна дифузія в бінарних розчинах з утворенням комплексів типу 1-1 / В.В. Обухавський, В.В. Ніконова, О.О. Ільченко // *Вісник КУ. РЕ.* – 2011. – Вип. 16. С. 41-42.
9. Medvedev O.O. Modeling diffusion coefficients in inary mixtures of polar and non-polar compounds / O.O. Medvedev, A.A. Shapiro // *Fluid Phase Equilibria.* – 2005. – Vol. 236. – P. 111-124.
10. Kelly C.M. Tracer and mutual diffusivities in the system Chloroform-Carbon tetrachloride at 25C / C.M. Kelly, G.B. Wirth, D.K. Anderson // *J. Phys. Chem.* – 1971. – Vol. 75. – P. 3293-3296.
11. Rowley R.L. Mutual diffusivity, thermal conductivity, and heat of transport in binary liquid mixtures of alkanes in chloroform / R.L. Rowley, Sung Chul Yi, D.V. Gubler, J.M. Stoker // *J. Chem. Eng. Data.* – 1988. – Vol. 33. – P. 362-366.
1. KARPOV G.M., OBUKHOVSKY V.V., SMIRNOVA T.N., LEMESHKO V.V. (2000) “Spatial transfer of matter as a method of holographic recording in photoformers” *Optics Commun.* Vol. 174., p.p. 391-404.
2. PERTLER M., BLASS E., STEENS G.W. (1996) “Fickian diffusion in binary mixtures that form two liquid phases” *AIChE J.* Vol. 42., p.p. 910-920.
3. MOGGRIDGE G.D. (2012) “Prediction of the mutual diffusivity in binary liquid mixtures containing one dimerising species, from the tracer diffusion coefficients” *Chem. Eng. Sci.* Vol. 76., p.p. 199-205.
4. DUROV V.A. (2004) “Models of liquid mixtures: Structure, dynamics, and properties” *Pure Appl. Chem.* Vol. 76., p.p. 1-10.
5. OBUKHOVSKY V.V., KUTSUK A.M., NIKONOVA V.V., ILCHENKO O.O. (2017) “Nonlinear diffusion in the liquid solution of diethyl ether with chloroform” *Phys. Rev. E.* Vol. 95., p.p. 022133-022143.
6. KUTSUK A., OBUKHOVSKY V. (2015) “Mutual diffusion in acetone-cyclohexane solution.” *J. Phys. Research.* Vol.19., p.p. 3603(1-9).
7. OBUKHOVSKY V.V., NIKONOVA V.V. (2010) Interdiffusion in water solutions of ethyl alcohol. *Ukr. J. Phys.* Vol. 55., p.p. 891-896.
8. OBUKHOVSKY V.V., NIKONOVA V.V., ILCHENKO O.O. (2011) “Nonlinear diffusion in binary solution with formation complex of 1-1” *Bull. Of Univ. of Kyiv (Radiophys. and El.).* Vol. 16., p.p. 41-42.
9. MEDVEDEV O.O., SHAPIRO A.A. (2005) “Modeling diffusion coefficients in inary mixtures of polar and non-polar compounds” *Fluid Phase Equilibria* Vol. 236., p.p. 111-124.
10. KELLY C.M., WIRTH G.B., ANDERSON D.K. (1971) “Tracer and mutual diffusivities in the system Chloroform-Carbon tetrachloride at 25C” *J. Phys. Chem.* Vol. 75., p.p. 3293-3296.
11. ROWLEY R.L., SUNG CHUL YI, GUBLER D.V., STOKER J.M. (1988) “Mutual diffusivity, thermal conductivity, and heat of transport in binary liquid mixtures of alkanes in chloroform” *J. Chem. Eng. Data.* Vol. 33., p.p. 362-366.

Надійшла до редколегії 07.10.2019

Підписано до друку _____. Формат _____. Друк. офс.
Папір офс. № _____. Друк. арк. _____. Тираж _____. Зам. _____.
Друкарня _____.