

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

В І С Н И К

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

№4 2019

**Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
випуск №4, 2019,**

Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Фізика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, механіко-математичного факультетів, факультету радіофізики, електроніки та комп’ютерних систем і факультету комп’ютерних наук та кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1222 від 07.10.2016), та реферується в Реферативному журналі, Zentralblatt MATH.

Редакційна колегія:

Козаченко Юрій Васильович, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор;**

Розора Ірина Василівна, к.ф.-м.н., доц., **зам. головного редактора;**

Bartlova Milada, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;

Bavula Vladimir, Prof., University of Sheffield, Great Britain;

Beghin Luisa, Prof., Sapienza Università di Roma, Italy;

Futorny Vyacheslav, Prof., Universidade de São Paulo, Brazil;

Giuliano Rita, Prof., Università di Pisa, Italy;

Gorlatch Sergei, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;

Hudak Stefan, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;

Kukhtarev Nickolai, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;

Leonenko Nikolay, Prof., Cardiff University, Great Britain;

Medvids Arturs, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;

Olenko Andriy, Prof., La Trobe University, Australia;

Orsingher Enzo, Prof., Sapienza University of Rome, Italy;

Ostrovsky Eugene, Prof., Bar-Ilan University, Israel;

Pogany Tibor, Prof., University of Rijeka, Croatia;

Rontó Miklós, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;

Silvestrov Dmitrii, Prof., Stockholms universitet, Sweden;

Sottinen Tommi, Prof., University of Vaasa, Finland;

Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;

Trofimchuk Sergey, Prof., Universidad de Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;

Volodin Andrei, Prof., University of Regina, Canada;

Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;

Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;

Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;

Безущак Оксана Омелянівна, к.ф.-м.н., доцент;

Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;

Гарашенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;

Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;

Жук Ярослав Олександрович, д.ф.-м.н., проф.;

Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., проф.;

Курченко Олександр Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;

Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;

Львов Віктор Анатолійович, д.ф.-м.н., проф.;

Макара Володимир Арсенійович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;

Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;

Майборода Ростислав Євгенович, д.ф.-м.н., проф.;

Моклячук Михайло Павлович, д.ф.-м.н., проф.;

Пашко Анатолій Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;

Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;

Петравчук Анатолій Петрович, д.ф.-м.н., проф.;

Погорілий Сергій Дем’янович, д.т.н., проф.;

Савенков Сергій Миколайович, д.ф.-м.н., доц.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.;
Сливка-Тилищак Ганна Іванівна, д.ф.-м.н., проф.;
Хусаїнов Денис Ях'євич, д.ф.-м.н., проф.;

Редакційний відділ:

Затула Дмитро Васильович, **відповідальний секретар**;
Безущак Оксана Омелянівна, bezusch@univ.kiev.ua;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
П'ятецька Олена Василівна, visnyk.phys-math@ukr.net;
Отто Георгій Костянтинович, **технічний редактор**, ottogk@gmail.com.

Адреса редакційної колегії:

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49
fm.visnyk@ukr.net
ISBN 978-966-2142
ISSN 1812-5409

Засновник: Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Свідоцтво про державну реєстрацію: КВ №16299-4771Р від 11.12.2009 року

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2019/4>

Безкоштовно

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Безущак О.О. Про діагональні локальні SL-групи	8
Боднарчук І.М. Асимптотика м'якого розв'язку хвильового рівняння у тривимірному просторі, керованого загальною стохастичною мірою	12
Василик О.І., Гопкало О.М., Козаченко Ю.В., Сахно Л.М. Деякі властивості та оцінки для φ -субгауссових випадкових процесів	18
Драбик Т.О., Іванов О.В., Асимптотична нормальність оцінки найменших квадратів у тригонометричній регресії з сильно залежним шумом	24
Хусанбаєв Я., Шаріпов С., Голомозий В. Оцінка Беррі-Ессеєна для майже критичних гіллястих процесів з імміграцією	42
Харитонов О.О. Теорія дуальності для не увігнутих функцій за умов невизначеності моделі	50

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Баранец В.О., Кізілова Н.М. Про гіперболічність і властивості розв'язків континуальних моделей агрегації та седиментації мікро/наночастинок у концентрованих суспензіях	60
П'ятецька О.В. Згинні коливання в'якопружних пластин в рамках моделі Кірхгофа-Лява	64

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Карупу О.В., Олешко Т.А., Пахненко В.В., Пашко А.О. Застосування інформаційних технологій до математичної освіти ІТ-фахівців в англomовних академічних групах	70
Керімов В. О. Впровадження безпеки до автономного протоколу ієрархічної організації бездротових сенсорних мереж	76
Патрикеева О., Черноморець В., Коваленко М., Основні структурні компоненти STEM-середовища освітнього закладу	80

СУЧАСНА ФІЗИКА

Барабаш О.В., Ковтонюк С.В., Народження S-бозона в реакції кулонівського розсіювання ядра на протоні або електроні	88
--	----

CONTENTS

ALGEBRA, GEOMETRY AND PROBABILITY THEORY

Bezushchak O.O. On diagonal locally SL -groups	8
Bodnarchuk I.M. Asymptotics of the mild solution of a wave equation in three-dimensional space driven by a general stochastic measure	12
Vasylyk O.I., Hopkalo O.M., Kozachenko Yu.V., Sakhno L.M., Some properties and estimates for φ -sub-Gaussian stochastic processes	18
Drabyk T.O., Ivanov O.V., Asymptotic normality of the least squares estimate in trigonometric regression with strongly dependent noise	24
Khusanbaev Ya., Sharipov S., Golomoziy V. Berry-Esseen bound for nearly critical branching processes with immigration	42
Kharytonova O.O. Duality theory under model uncertainty for non-concave utility functions	50

DIFFERENTIAL EQUATIONS, MATHEMATICAL PHYSICS AND MECHANICS

Baranets V.O., Kizilova N. M. On hyperbolicity and solution properties of the continual models of micro/nanoparticle aggregation and sedimentation in concentrated suspensions	60
Pyatetska O.V. Bending vibrations of viscoelastic plates within the Kirchhoff-Love model	64

COMPUTER SCIENCES AND INFORMATICS

Karupu O.W., Oleshko T.A., Pakhnenko V.V., Pashko A.O. Applying information technologies to mathematical education of IT specialists in English-speaking academic groups	70
Kerimov V. O., Introducing Security to Efficient Tree-based Self-organizing Protocol	76
Patrykeieva O., Chernomorets V., Kovalenko M., The main structural components of the STEM-environment of the educational institution	80

MODERN PHYSICS

Barabash O.V., Kovtoniuk V.S. S-boson production in the reaction of Coulomb scattering of a nucleus by a proton or neutron	88
--	----

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ ТА ТЕОРИЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 512.54, 512.552 <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2419/4.1>

Оксана Безущак, доцент

Про діагональні локальні SL -групи

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володи-
мирська, 60,
e-mail: bezusch@univ.kiev.ua

Oksana Bezushchak, associate professor

On diagonal locally SL -groups

Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 01033, Kyiv, 60 Volodymyrska str.,
e-mail: bezusch@univ.kiev.ua

Нехай $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел. Нехай $\mathbb{F}$ — поле. У роботі [1] визначені класи груп $SL_s^p(\mathbb{F})$ та $GL_s^p(\mathbb{F})$ періодичних нескінченних $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ -матриць таких, що відповідають числу Стейніца s . У даній роботі ми вводимо ширший клас діагональних локальних SL -груп та GL -груп і вивчаємо їх зв'язок з локально матричними алгебрами. Зокрема, ми показуємо, що довільна сепарабельно-діагональна локальна SL -група (відповідно GL -група) ізоморфна групі $SL_s^p(\mathbb{F})$ (відповідно $GL_s^p(\mathbb{F})$).

Ключові слова: Локально матрична алгебра, число Стейніца, діагональне занурення, періодична матриця.

Let $\mathbb{N}$ be the set of natural numbers. Let $\mathbb{F}$ be a field. In [1], we introduced a class of groups $SL_s^p(\mathbb{F})$ and $GL_s^p(\mathbb{F})$ of periodic infinite $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ -matrices that correspond to a Steinitz number s . In this paper we introduce a wider class of diagonal locally SL -groups and GL -groups and study their relations with locally matrix algebras. In particular, we show that every separable-diagonal locally SL -group (respectively GL -group) is isomorphic to a group $SL_s^p(\mathbb{F})$ (respectively $GL_s^p(\mathbb{F})$).

Key Words: Locally matrix algebra, Steinitz number, diagonal embedding, periodic matrix.

Статтю представив доктор фізико-математичних наук, професор А.П.Петравчук

1 Introduction

Let $\mathbb{P}$ be the set of all primes. A *Steinitz* or *supernatural* number is an infinite formal product of the form

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{r_p},$$

where $r_p \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$. The product of two Steinitz numbers

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{r_p} \text{ and } \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{k_p}$$

is a Steinitz number

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{r_p + k_p},$$

where we assume, that

$$k_p \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}, \quad t + \infty = \infty + t = \infty + \infty = \infty$$

for all positive integers t . Denote by $\mathbb{SN}$ the set of all Steinitz numbers. Obviously, the set of all positive integers $\mathbb{N}$ is a subset of the set of all Steinitz numbers $\mathbb{SN}$.

The Steinitz number v *divides* u if

there exists $w \in \mathbb{SN}$, such that $u = v \cdot w$.

The divisibility relation $|$ makes $\mathbb{SN}$ into a partially ordered set with the greatest element

$$I = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^\infty$$

and the least element 1. Moreover, the poset $(\mathbb{SN}, |)$ is a complete lattice.

Steinitz numbers were introduced by Ernst Steinitz [6] in 1910 to classify algebraic extensions of finite fields.

Consider the algebra $M_{\mathbb{N}}(\mathbb{F})$ of $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ matrices over the ground field $\mathbb{F}$ having finitely many nonzero elements in each column.

Definition 1. Following [1], we call an $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ matrix *periodic* (more precisely: *n-periodic*) if it is block-diagonal $\text{diag}(a, a, \dots)$, where a is an $n \times n$ matrix.

Let $M_n^p(\mathbb{F})$ be the subalgebra of $M_{\mathbb{N}}(\mathbb{F})$ that consists of all n -periodic matrices. Clearly,

$$M_n^p(\mathbb{F}) \cong M_n(\mathbb{F}).$$

Let s be a Steinitz number. Then

$$M_s^p(\mathbb{F}) = \cup_{n|s} M_n^p(\mathbb{F})$$

is a subalgebra of $M_{\mathbb{N}}(\mathbb{F})$; see [1]. J.Glimm [3] defined Steinitz number of uniformly hyperfinite

algebras in terms of ascending chains of matrix subalgebras. So, by the Theorem of J.Glimm [3], $M_s^p(\mathbb{F})$ is the only (up to isomorphism) unital locally matrix algebra of Steinitz number s .

Let $GL_n^p(\mathbb{F})$ be the group of invertible elements of $M_n^p(\mathbb{F})$ and

$$SL_n^p(\mathbb{F}) = [GL_n^p(\mathbb{F}), GL_n^p(\mathbb{F})].$$

Clearly,

$$GL_n^p(\mathbb{F}) \cong GL_n(\mathbb{F}), \quad SL_n^p(\mathbb{F}) \cong SL_n(\mathbb{F}).$$

Let $n_1, n_2, \dots$ be a sequence of positive integers such that $n_i | n_{i+1}$, $i \geq 1$, and s is the least common multiple of the numbers $(n_i, i \geq 1)$. Then

$$GL_{n_1}^p(\mathbb{F}) \subset GL_{n_2}^p(\mathbb{F}) \subset \dots,$$

$$\cup_{i \geq 1} GL_{n_i}^p(\mathbb{F}) = GL_s^p(\mathbb{F}),$$

$$SL_{n_1}^p(\mathbb{F}) \subset SL_{n_2}^p(\mathbb{F}) \subset \dots,$$

$$\cup_{i \geq 1} SL_{n_i}^p(\mathbb{F}) = SL_s^p(\mathbb{F}).$$

Let m, n be natural numbers such that n divides m .

Definition 2. We call an embedding φ_{SL} of the group $SL_n(\mathbb{F})$ into the group $SL_m(\mathbb{F})$ *diagonal* if there exists an element $g \in SL_m(\mathbb{F})$ such that

$$\varphi_{SL}(a) = g^{-1} \text{diag}(\underbrace{a, a, \dots, a}_{m/n}) g.$$

Similarly, we define diagonal embeddings φ_{GL} and φ_M of the group $GL_n(\mathbb{F})$ into the group $GL_m(\mathbb{F})$ and of the algebra $M_n(\mathbb{F})$ of $n \times n$ matrices over $\mathbb{F}$ into the algebra $M_m(\mathbb{F})$:

$$\varphi_{GL} : GL_n(\mathbb{F}) \rightarrow GL_m(\mathbb{F}),$$

$$\varphi_{GL}(a) = g^{-1} \text{diag}(\underbrace{a, a, \dots, a}_{m/n}) g, \quad g \in GL_m(\mathbb{F});$$

$$\varphi_M : M_n(\mathbb{F}) \rightarrow M_m(\mathbb{F}),$$

$$\varphi_M(a) = g^{-1} \text{diag}(\underbrace{a, a, \dots, a}_{m/n}) g, \quad g \in M_m(\mathbb{F}).$$

2 Diagonal locally SL - and GL -groups

Let I be a partially ordered set such that for any two elements $i, j \in I$ there exists an element $k \in I$ such that $i \leq k, j \leq k$.

Definition 3. We call a group G a *diagonal locally SL -group* if there exists a family of subgroups $H_i \subseteq G$, $i \in I$, such that

1) if $i \leq j$ then $H_i \subseteq H_j$ and let

$$\text{id}_{ij} : H_i \rightarrow H_j$$

denote the embedding homomorphism;

2) $\cup_{i \in I} H_i = G$;

3) for any $i \in I$ there is a fixed isomorphism

$$u_i : H_i \rightarrow SL_{n_i}(\mathbb{F}), \quad n_i \in \mathbb{F};$$

4) for any $i \leq j$

$$\varphi_{ij} = u_j \text{id}_{ij} u_i^{-1} : SL_{n_i}(\mathbb{F}) \rightarrow SL_{n_j}(\mathbb{F})$$

is a diagonal embedding. In particular,

$$n_i \text{ divides } n_j \text{ for } i \leq j.$$

Similarly we define a *diagonal locally GL -group*. It is easy to see that for $i \leq j \leq k$, $i, j, k \in I$, we have

$$\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \varphi_{ij}.$$

Hence, we can talk about a direct limit of groups $SL_{n_i}(\mathbb{F})$, $i \in I$, with respect to the system of homomorphisms

$$\varphi_{ij}, \quad i, j \in I, \quad i \leq j;$$

see [5]. It is straightforward that this direct limit is isomorphic to the group G .

Recall (see [4]) that an associative $\mathbb{F}$ -algebra A is called a *locally matrix algebra* if for each finite subset of A there exists a subalgebra $B \subset A$ containing this subset such that $B \cong M_n(\mathbb{F})$ for some n .

A locally matrix algebra A is said to be *unital* if it contains a unit 1.

Theorem 1. Let A be a unital locally matrix $\mathbb{F}$ -algebra. Then the group A^* of invertible elements of A is a diagonal locally GL -group. The commutator subgroup $[A^*, A^*]$ is a diagonal locally SL -group.

Proof. Let I be the set of all subalgebras $B \subset A$ such that $1 \in B$ and B is isomorphic to a matrix algebra

$$M_{n(B)}(\mathbb{F}), \quad n(B) \in \mathbb{N}.$$

Let

$$u_B : B \rightarrow M_{n(B)}(\mathbb{F})$$

be an isomorphism. The set I is partially ordered by inclusion. If $B, B' \in I$ and $B \subseteq B'$ then by the Theorem of H.M.Wedderburn (see [2]) the embedding

$$u_{B'} \text{id}_{B, B'} u_B^{-1} : M_{n(B)}(\mathbb{F}) \rightarrow M_{n(B')}(\mathbb{F})$$

is diagonal. The restriction of this embedding to groups of invertible elements yields diagonal embeddings

$$\varphi_{GL} : GL_{n(B)}(\mathbb{F}) \rightarrow GL_{n(B')}(\mathbb{F}),$$

$$\varphi_{SL} : SL_{n(B)}(\mathbb{F}) \rightarrow SL_{n(B')}(\mathbb{F}).$$

This completes the proof of the Theorem. $\square$

Theorem 2. For an arbitrary diagonal locally SL -group (respectively GL -group) G there exists a unital locally matrix algebra A such that

$$G \cong [A^*, A^*] \text{ (respectively } G \cong A^* \text{)}.$$

Proof. Suppose that G is diagonal locally SL -group, $\{H_i\}_{i \in I}$ is a locally system of subgroups,

$$u_i : H_i \rightarrow SL_{n_i}(\mathbb{F})$$

are isomorphisms and for each pair $i, j \in I, i \leq j$, the embedding

$$u_j \text{id}_{ij} u_i^{-1}$$

is diagonal.

Any diagonal embedding

$$SL_n(\mathbb{F}) \rightarrow SL_m(\mathbb{F})$$

uniquely extends to a diagonal embedding of matrix algebras $M_n(\mathbb{F}) \rightarrow M_m(\mathbb{F})$. Let

$$\varphi_{ij} : M_{n_i}(\mathbb{F}) \rightarrow M_{n_j}(\mathbb{F})$$

be the diagonal embedding that extends

$$u_j \text{id}_{ij} u_i^{-1}.$$

For $i, j, k \in I, i \leq j \leq k$, the embeddings

$$\varphi_{jk} \varphi_{ij} \quad \text{and} \quad \varphi_{ik}$$

coincide on $SL_{n_i}(\mathbb{F})$, hence

$$\varphi_{jk} \varphi_{ij} = \varphi_{ik}.$$

The system of algebras $M_{n_i}(\mathbb{F}), i \in I$, and homomorphisms

$$\varphi_{ij}, \quad i \leq j,$$

satisfy the conditions for a direct limit (see [5]).

Let's denote this direct limit of matrix algebras as A . Clearly, A is a locally matrix algebra. Since all embeddings φ_{ij} map an identity matrix to an identity matrix it follows that the algebra A is unital.

It is easy to see that the group of invertible elements A^* is the direct limit of groups $GL_{n_i}(\mathbb{F})$ and the commutator subgroup $[A^*, A^*]$ is the direct limit of the groups $SL_{n_i}(\mathbb{F})$, hence

$$[A^*, A^*] \cong G.$$

For a diagonal locally GL -group the arguments are similar. This completes the proof of the Theorem. $\square$

Let G be a diagonal locally SL -group (respectively GL -group), $\{H_i\}_{i \in I}$ is a corresponding local system of subgroups,

$$u_i : H_i \rightarrow SL_{n_i}(\mathbb{F}), \quad i \in I,$$

are isomorphisms (respectively

$$u_i : H_i \rightarrow GL_{n_i}(\mathbb{F})$$

are also isomorphisms).

Definition 4. The least common multiple of all numbers $n_i, i \in I$, is called the *Steinitz number* $\text{st}(G)$ of the group G .

J.Glimm [3] assigned a Steinitz number to an arbitrary unital countable-dimensional locally matrix algebra and showed that two such algebras A, B are isomorphic if and only if their Steinitz numbers $\text{st}(A)$ and $\text{st}(B)$ are equal.

3 On separable diagonal locally SL - and GL -groups

Definition 5. A partially ordered set I is called *separable* if there exists a countable subset $I_0 \subset I$ such that for an arbitrary element $i \in I$ there exists an element $j \in I_0$ and $i \leq j$.

Definition 6. We call a *diagonal locally SL -group* (respectively *GL -group*) *separable* if the corresponding partially ordered set I is separable.

Theorem 3. Let G be a separable diagonal locally SL -group (respectively GL -group) of Steinitz number s . Then

$$G \cong SL_s^p(\mathbb{F})$$

(respectively

$$G \cong GL_s^p(\mathbb{F})).$$

Proof. If the partially ordered set I is separable then the algebra A in the proof of Theorem 2 is countable-dimensional. Moreover, it is easy to see that the Steinitz number of the algebra A is equal to s . By Glimm's Theorem [3]

$$A \cong M_s^p(\mathbb{F}).$$

Hence

$$G \cong [A^*, A^*] \cong SL_s^p(\mathbb{F})$$

if G is a diagonal locally SL -group and

$$G \cong A^* \cong GL_s^p(\mathbb{F})$$

if G is a diagonal locally GL -group. This completes the proof of the Theorem. $\square$

Список використаних джерел

1. Bezushchak O. O. Groups of Periodically Defined Linear Transformations of an Infinite-Dimensional Vector Space / O. O. Bezushchak, V. I. Sushchans'kyi // Ukr. Math. J. – **67**, no. 10 (2016).– P.1457–1468.
2. Drozd Yu. A. Finite Dimensional Algebras / Yu. A. Drozd, V. V. Kirichenko / Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (1994).
3. Glimm J. G. On a certain class of operator algebras / J. G. Glimm // Trans. Amer. Math. Soc. **95**, no. 2 (1960).– P.318–340.
4. Kurosh A. Direct decompositions of simple rings / A. Kurosh // Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S. **11** (53), no. 3 (1942).– P.245–264.
5. Mal'cev A. I. Algebraic Systems / A. I. Mal'cev / B.D. Seckler & A.P. Doohovskoy (trans.) (Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1973).
6. Steinitz E. Algebraische Theorie der Körper / E. Steinitz // J. Reine Angew. Math. **137** (1910).– P.167–309.

References

1. BEZUSHCHAK, O. O., SUSHCHANS'KYI, V. I. (2016) "Groups of Periodically Defined Linear Transformations of an Infinite-Dimensional Vector Space", Ukr. Math. J. **67**, no. 10, pp. 1457–1468.
2. DROZD, Yu. A., KIRICHENKO, V. V. (1994) "Finite Dimensional Algebras", Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York.
3. GLIMM, J. G. (1960) "On a certain class of operator algebras", Trans. Amer. Math. Soc. **95**, no. 2, pp.318–340.
4. KUROSH, A. (1942) "Direct decompositions of simple rings", Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S. **11** (53), no. 3, pp.245–264.
5. MAL'CEV, A. I. (1973) "Algebraic Systems", B.D. Seckler & A.P. Doohovskoy (trans.). (Springer-Verlag, New York–Heidelberg).
6. STEINITZ, E. (1910) "Algebraische Theorie der Körper", J. Reine Angew. Math. **137**, pp.167–309.

Received: 23.07.2019

УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2419/4.2>

I.M. Bodnarchuk, к. ф.-м. н.

**Асимптотика м'якого розв'язку
хвильового рівняння у тривимірному
просторі, керованого загальною
стохастичною мірою**

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13.
e-mail: ibodnarchuk@univ.kiev.ua

I.M. Bodnarchuk, Ph.D.

Asymptotics of the mild solution of a wave equation in three-dimensional space driven by a general stochastic measure

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st.
e-mail: ibodnarchuk@univ.kiev.ua

Анотація. Розглянуто задачу Коші для хвильового рівняння у тривимірному просторі, керованого загальною стохастичною мірою. Доведено, що за певних умов розв'язок прямує до нуля майже напевно, якщо абсолютна величина просторової змінної прямує до нескінченності.

Ключові слова: асимптотична поведінка, стохастична міра, стохастичне хвильове рівняння, м'який розв'язок, простір Бесова.

Abstract. We study the Cauchy problem for a wave equation in three-dimensional space driven by a general stochastic measure. Under some assumptions, we prove that the mild solution tends to zero almost surely as the absolute value of the spatial variable tends to infinity.

Key Words: asymptotic behavior, stochastic measure, stochastic wave equation, mild solution, Besov space.

Communicated by Prof. Moklyachuk M.P.

1 Introduction

We continue investigation of the wave equation driven by a general stochastic measure. Namely, we study the asymptotic behavior of the mild solution in the case of three-dimensional space.

Let $L_0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be the set of all real-valued random variables defined on complete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, X be an arbitrary set and $\mathcal{B}(X)$ be a σ -algebra of Borel subsets of X . Let μ be a stochastic measure on $\mathcal{B}(X)$, i.e. a σ -additive mapping $\mu : \mathcal{B}(X) \rightarrow L_0(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Also, such μ is called a general stochastic measure (see, for example, [1, Section 7]). This underlines the fact that we do not require the fulfillment of any other assumptions except σ -additivity.

Consider the following Cauchy problem

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = a^2 \Delta_x u(t, x) + \\ + f(t, x, u(t, x)) + \sigma(t, x) \dot{\mu}(t), \\ u(0, x) = u_0(x); \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = v_0(x), \end{cases} \quad (1)$$

where $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$, $d = \overline{1, 3}$, $T > 0$, $a > 0$, and μ is a stochastic measure defined on the Borel σ -algebra $\mathcal{B}([0, T])$. The solution of equation (1) is

understood in the following mild sense

$$\begin{aligned} u(t, x) = & \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{S}_d(t, x - y) v_0(y) dy + \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{S}_d(t, x - y) u_0(y) dy \right) + \\ & + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{S}_d(t - s, x - y) f(s, y, u(s, y)) dy + \\ & + \int_0^t d\mu(s) \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{S}_d(t - s, x - y) \sigma(s, y) ds, \quad (2) \end{aligned}$$

where $\mathcal{S}_d$ is the fundamental solution of the wave equation in $\mathbb{R}^d$ (see, for example, [2]).

The integrals of random functions with respect to dy and ds are considered for every fixed $\omega \in \Omega$. Such integrals are studied in [3], for example.

The existence, uniqueness and Hölder regularity of the solution of equation (2) are proved in [4, 5, 6] (for $d = 1, 2, 3$ respectively).

In the article [8] the asymptotic behavior of the mild solution is investigated in two cases: the equation is given on the line and on the plane.

Also, the asymptotics of the mild solutions of heat equations with general stochastic measures is considered in [7, 9, 10]. In the papers [11, 12] the

asymptotic behavior of solutions of wave equations with white noise is studied. The long time behavior of the solutions to stochastic wave equations driven by a Lévy process is investigated in [13].

Our aim here is to prove that the solution of problem (2) tends to zero almost surely as the absolute value of the spatial variable tends to infinity in the case when $d = 3$.

2 Some results needed for the proof

Consider the Besov space $B_{22}^\alpha([b, c])$, $\alpha \in (1/2, 1)$, $b, c \in \mathbb{R}$, that is, the space of functions $g : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}$ such that the norm

$$\|g\|_{B_{22}^\alpha([b, c])} = \|g\|_{L_2([b, c])} + \left(\int_0^{c-b} (w_{2, [b, c]}(g, r))^2 r^{-2\alpha-1} dr \right)^{\frac{1}{2}},$$

is finite where

$$w_{2, [b, c]}(g, r) = \sup_{0 \leq h \leq r} \left(\int_b^{c-h} |g(s+h) - g(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

For an arbitrary $t \in (0, t]$, put

$$\Delta_{kn}^{(t)} = ((k-1)2^{-n}t, k2^{-n}t], \quad n \geq 0, \quad 1 \leq k \leq 2^n.$$

Let a function $g(z, s) : Z \times [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ be such that $\forall z \in Z : g(z, \cdot)$ is continuous on $[0, t]$ for all $z \in Z$. Here the symbol Z denotes an arbitrary set. Put

$$g_n(z, s) = g(z, 0) \mathbb{1}_{\{0\}}(s) + \sum_{1 \leq k \leq 2^n} g(z, (k-1)2^{-n}t) \mathbb{1}_{\Delta_{kn}^{(t)}}(s).$$

Then the random function

$$\eta(z) = \int_{(0, t]} g(z, s) d\mu(s), \quad z \in Z,$$

has a version

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(z) &= \int_{(0, t]} g_0(z, s) d\mu(s) + \\ &+ \sum_{n \geq 1} \left(\int_{(0, t]} g_n(z, s) d\mu(s) - \int_{(0, t]} g_{n-1}(z, s) d\mu(s) \right), \end{aligned} \quad (3)$$

such that

$$|\tilde{\eta}(z)| \leq |g(z, 0)\mu((0, t])| + C \|g(z, \cdot)\|_{B_{22}^\alpha([0, t])} \times \left\{ \sum_{n \geq 1} 2^{-n\epsilon} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} \left| \mu(\Delta_{kn}^{(t)} \cap (0, t]) \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

where $\alpha = \varepsilon/2 + 1/2$ (see [6]). Note that the version (3) is the same for all $z \in Z$, while the constant C depends on α and t and does not depend on z, ω .

3 Main result

According to [14, § 12] the fundamental solution of wave equation (1) ($d = 3$) is given by

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_3(t, x) &= \frac{1}{2\pi a} \delta(a^2 t^2 - |x|^2) \mathbb{1}_{\{t > 0\}} = \\ &= \frac{1}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}} \mathbb{1}_{\{t > 0\}}, \end{aligned}$$

where δ is the Dirac function (correspondingly, $\delta_{S_{at}}$ is the uniform measure on a sphere of radius at that has the full mass $4\pi a^2 t^2$), and where $|\cdot|$ denotes the Euclidean norm.

Thus for any test function φ on $\mathbb{R}^4$ (that is any infinitely differentiable function with a finite support in $\mathbb{R}^4$) we have

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_3, \varphi) &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{|x|=at} \varphi(x, t) dS(x) dt = \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|} \varphi\left(x, \frac{|x|}{a}\right) dx, \end{aligned} \quad (5)$$

where $dS(x)$ is a differential of the area in the sphere $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = at\}$.

Therefore, a mild solution of problem (1) (for $d = 3$) is a measurable random function $u(t, x) = u(t, x, \omega) : [0, T] \times \mathbb{R}^3 \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ that almost surely satisfies the following integral equation

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|y-x|=at} v_0(y) dS(y) + \\ &+ \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \int_{|y-x|=at} u_0(y) dS(y) \right) + \\ &+ \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t ds \int_{|y-x|=a(t-s)} \frac{f(s, y, u(s, y))}{t-s} dS(y) + \\ &+ \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t \frac{1}{t-s} d\mu(s) \int_{|x-y|=a(t-s)} \sigma(s, y) dS(y). \end{aligned} \quad (6)$$

Here $dS(y)$ is a differential of the area in the sphere $\{y \in \mathbb{R}^3 : |y-x| = at\}$ and in the sphere $\{y \in \mathbb{R}^3 : |y-x| = a(t-s)\}$ for the corresponding integrals.

The following conditions are assumed throughout the paper.

A1. The functions $u_0(y) = u_0(y, \omega) : \mathbb{R}^3 \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $v_0(y) = v_0(y, \omega) : \mathbb{R}^3 \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ are measurable and, for all $\omega \in \Omega$,

$$|u_0(y, \omega)| \leq C_{u_0}(\omega), \quad \left| \frac{\partial u_0}{\partial y_i}(y) \right| \leq C_{u_0}(\omega), \\ |v_0(y, \omega)| \leq C_{v_0}(\omega).$$

A2. The functions $v_0(y), u_0(y), \frac{\partial u_0(y)}{\partial y_i}, i = 1, 2, 3$, are Hölder regular, namely

$$|v_0(y') - v_0(y'')| \leq L_{v_0}(\omega) |y' - y''|^{\beta(v_0)}, \\ 0 < \beta(v_0) \leq 1;$$

$$|u_0(y') - u_0(y'')| \leq L_{u_0}(\omega) |y' - y''|^{\beta(u_0)}, \\ 0 < \beta(u_0) \leq 1;$$

$$\left| \frac{\partial u_0}{\partial y_i}(y') - \frac{\partial u_0}{\partial y_i}(y'') \right| \leq L_{u_0}(\omega) |y' - y''|^{\beta(u_0)}.$$

A3. The function $f(s, y, v) : [0, T] \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is measurable and bounded, that is

$$|f(s, y, v)| \leq C_f.$$

A4. The function $f(s, y, v)$ is uniformly Lipschitz with respect to $y \in \mathbb{R}^3, v \in \mathbb{R}$, that is

$$|f(s, y', v') - f(s, y'', v'')| \leq L_f(|y' - y''| + |v' - v''|).$$

A5. The function $\sigma(s, y) : [0, T] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ is measurable and bounded, that is

$$|\sigma(s, y)| \leq C_\sigma.$$

A6. The function $\sigma(s, y)$ is Hölder regular, and namely

$$|\sigma(s', y') - \sigma(s'', y'')| \leq \\ \leq L_\sigma(|s' - s''|^{\beta(\sigma)} + |y' - y''|^{\beta(\sigma)}), \\ 1/2 < \beta(\sigma) \leq 1.$$

A7. $|u_0(y)| \rightarrow 0, \left| \frac{\partial u_0}{\partial y_i}(y) \right| \rightarrow 0, |v_0(y)| \rightarrow 0,$
 $\sup_{s \in [0, T], z \in \mathbb{R}} |f(s, y, z)| \rightarrow 0, \sup_{s \in [0, T]} |\sigma(s, y)| \rightarrow 0,$ as $|y| \rightarrow \infty$.

The symbols C and $C(\omega)$ denote a nonrandom and random constants, respectively, that can be different in different places and whose precise values do not matter for our reasoning.

Theorem 3.1. Suppose Assumptions A1 – A7 hold. Then the solution of equation (6) has a version $u(t, x)$ such that for all $t \in [0, T], \omega \in \Omega$,

$$|u(t, x)| \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Proof. According to Theorem 2.1 of [6], under Assumptions A1 – A6 for all $t \in [0, T], x \in \mathbb{R}^3$, equation (6) has the unique solution $u(t, x)$.

We have

$$|u(t, x)| \leq \left| \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|y-x|=at} v_0(y) dS(y) \right| + \\ + \left| \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \int_{|y-x|=at} u_0(y) dS(y) \right) \right| + \\ + \left| \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t ds \int_{|y-x|=a(t-s)} \frac{f(s, y, u(s, y))}{t-s} dS(y) \right| + \\ + \left| \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t \frac{1}{t-s} d\mu(s) \int_{|x-y|=a(t-s)} \sigma(s, y) dS(y) \right| = \\ = |J_1(t, x)| + |J_2(t, x)| + |J_3(t, x)| + |J_4(t, x)|. \quad (7)$$

Now each of terms is treated separately. First we consider the stochastic integral. Similarly to proof of [6, Lemma 4.1] we use equality (5), pass from the surface integral to the multiple integral and obtain

$$J_4(t, x) = \frac{1}{4\pi} \int_{(0, t]} h(t, x, s) d\mu(s),$$

where

$$h(t, x, s) = (t-s) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sigma(s, x_{t-s}) \sin \theta d\theta,$$

$$x_{t-s} = (x_1 + a(t-s) \cos \varphi \sin \theta, x_2 + \\ + a(t-s) \sin \varphi \sin \theta, x_3 + a(t-s) \cos \theta), \\ x = (x_1, x_2, x_3).$$

Let arbitrary $t \in [0, T], x \in \mathbb{R}^3$, be fixed. Then the random function $J_4(t, x)$ has a version (3) that admits bound (4). This version is denoted by the same symbol J_4 . To use this bound we estimate the norm of the function $h(t, x, s)$ in the Besov space.

By Assumption A7 for all $\varepsilon_0 > 0$ there exists $\delta_0 > 0$ such that for all $|y| > \delta_0$,

$$\sup_{s \in [0, T]} |\sigma(s, y)| < \varepsilon_0, \quad \sup_{s \in [0, T], z \in \mathbb{R}} |f(s, y, z)| < \varepsilon_0, \\ |u_0(y)| < \varepsilon_0, \quad \left| \frac{\partial u_0}{\partial y_i}(y) \right| < \varepsilon_0, \quad |v_0(y)| < \varepsilon_0. \quad (8)$$

Then $\forall s \leq t, \forall |x| > \delta_0 + aT$ there exists a point y_0 , $|y_0 - x| \leq a(t - s)$, such that

$$|h(t, x, s)| = (t - s) \left| \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sigma(s, x_{t-s}) \sin \theta d\theta \right| = \\ = (t - s) |\sigma(s, y_0)| \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta < 4\pi T \varepsilon_0. \quad (9)$$

Here we use the Mean Value Theorem, the Squeeze Theorem and the first inequality of (8).

Hence

$$|h(t, x, s)| < C\varepsilon_0, \\ \|h(t, x, s)\|_{L_2([0,t])} = \left(\int_0^t |h(t, x, s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} < C\varepsilon_0, \\ |h(t, x, s + h) - h(t, x, s)| < 8\pi T \varepsilon_0 = C\varepsilon_0.$$

Therefore, for $s + h \leq t$,

$$w_{2,[b,c]}(g, r) < C\varepsilon_0 \sqrt{t} \leq C\varepsilon_0 \quad (10)$$

On the other hand, by A5 and A6 we have

$$|h(t, x, s + h) - h(t, x, s)| = \left| (t - s) \times \right. \\ \times \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (\sigma(s, x_{t-s-h}) - \sigma(s, x_{t-s})) \sin \theta d\theta - \\ \left. - h \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sigma(s, x_{t-s-h}) \sin \theta d\theta \right| \leq \\ \leq (t - s) 4\pi L_\sigma h^{\beta(\sigma)} + h 4\pi C_\sigma \leq C h^{\beta(\sigma)}.$$

Consequently,

$$w_{2,[b,c]}(g, r) < C r^{\beta(\sigma)}.$$

Raise the latter inequality to the power θ and multiply by inequality (10) raised to the power $1 - \theta$ for an arbitrary $\theta \in (0, 1)$. We obtain

$$w_{2,[b,c]}(g, r) \leq C r^{\theta\beta(\sigma)} \varepsilon_0^{1-\theta}.$$

Thus there exists $\alpha < \theta\beta(\sigma)$ such that

$$\|h(t, x, s)\|_{B_{22}^\alpha([0,t])} < C\varepsilon_0 + \\ + C\varepsilon_0^{1-\theta} \left(\int_0^t r^{2\theta\beta(\sigma)-2\alpha-1} dr \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ \leq C(\varepsilon_0 \vee \varepsilon_0^{1-\theta}),$$

where $a \vee b$ is a maximum of numbers a and b .

Now the bounds obtained above are substituted to (4). Finally, we obtain

$$|J_4(t, x)| < C(\varepsilon_0 \vee \varepsilon_0^{1-\theta}) \times \\ \times \left(|\mu((0, t])| + \left\{ \sum_{n \geq 1} 2^{-n\varepsilon} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} \left| \mu(\Delta_{kn}^{(t)}) \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right) \leq \\ \leq C(\omega)(\varepsilon_0 \vee \varepsilon_0^{1-\theta}), \quad (11)$$

where the sum with the stochastic measure is finite according to [15, Lemma 3.1].

Next, by equality (22) of [6] we get the following representation of J_1

$$J_1(t, x) = \frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi v_0(x_t) \sin \theta d\theta.$$

The same reasoning as that used in obtaining bound (9) proves, $\forall |x| > \delta_0 + aT$,

$$|J_1(t, x)| < T\varepsilon_0. \quad (12)$$

Analogously, since by (23) of [6]

$$J_2(t, x) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi u_0(x_t) \sin \theta d\theta + \\ + \frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial t} u_0(x_t) \sin \theta d\theta,$$

we have, $\forall |x| > \delta_0 + aT$,

$$|J_2(t, x)| < (1 + T)\varepsilon_0. \quad (13)$$

Then we obtain similarly to the preceding bounds by representation (5) and the second inequality of (8) that for all $|x| > \delta_0 + aT$,

$$|J_3(t, x)| = \frac{1}{4\pi a^2} \times \\ \times \left| \int_{|y| \leq at} \frac{f\left(t - \frac{|y|}{a}, y + x, u\left(t - \frac{|y|}{a}, y + x\right)\right)}{|y|} dy \right| < \\ < \frac{\varepsilon_0}{4\pi a^2} \left| \int_{|y| \leq at} \frac{1}{|y|} dy \right| = \frac{t^2 \varepsilon_0}{2} \leq \frac{T^2}{2} \varepsilon_0. \quad (14)$$

Finally, we substitute estimations (11)–(14) to relation (7). For all $\varepsilon > 0$ put $\varepsilon_0 = \varepsilon C^{-1}(\omega)$ if $\varepsilon \geq 1$, and $\varepsilon_0 = (\varepsilon C^{-1}(\omega))^{\frac{1}{1-\theta}}$ if $\varepsilon < 1$. Then there exists a set $\Omega_0 \subset \Omega$, $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$, such that for all $t \in [0, T]$, $\omega \in \Omega_0$,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta_0 + aT \quad \forall |x| > \delta: \quad |u(t, x)| < \varepsilon.$$

□

4 Conclusions

We investigate the equation that describes a wave in some medium with random and non-random sources of perturbations. Namely, the situation when influence of the sources vanishes as the spatial variable tends to infinity is studied. It is shown that in this case the wave also fades with unlimited growth of the absolute value of the spatial

variable.

5 Acknowledgement

The author is grateful to the Alexander von Humboldt Foundation for a support of this scientific research in the framework of Research Group Linkage Potsdam/Kyiv “Singular diffusions: analytic and stochastic approaches”.

Список використаних джерел

1. *Kwapień S.* Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple / S. Kwapień, W. A. Woyczyński – Boston: Birkhäuser, 1992. – 360 p.
2. *Millet A.* On a stochastic wave equation in two space dimensions: regularity of the solution and its density / A. Millet, P.-L. Morien // Stochastic Processes and their Applications. – 2000. – Vol. 86. – P. 141–162.
3. *Radchenko V.N.* On a definition of the integral of a random function / V.N. Radchenko // Theory of Probability and its Applications. – 1997. – Vol. 41, no. 3, P. 597–601.
4. *Bodnarchuk I.M.* Wave equation with a stochastic measure / I.M. Bodnarchuk // Theory of Probability and Mathematical Statistics. – 2017. – 94. – P. 1–16.
5. *Bodnarchuk I.M.* Wave equation in the plane driven by a general stochastic measure / I.M. Bodnarchuk, V.M. Radchenko // Theory of Probability and Mathematical Statistics. – 2019. – 98. – P. 73–90.
6. *Боднарчук І.М.* Хвильове рівняння у тривимірному просторі, кероване загальною стохастичною мірою / І.М. Боднарчук, В.М. Радченко // Теорія ймовір. та матем. статист. – 2019. – 1(100). – С. 43–59.
7. *Боднарчук І.М.* Асимптотична поведінка розв’язку рівняння теплопровідності зі стохастичною мірою / І.М. Боднарчук, В.М. Радченко // Науковий вісник Чернівецького нац. ун-ту. Математика. – 2012. – Т. 2, № 1. – С. 7–11.
8. *Боднарчук І.Н.* Асимптотика мягкого решения волнового уравнения со стохастической мерой / И.Н. Боднарчук // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка. Матэматыка. – 2018. – № 2. – С. 70–78.
9. *Боднарчук І.* Асимптотична поведінка м’якого розв’язку стохастичного рівняння теплопровідності / І. Боднарчук // Вісник Київського університету імені Тараса Шевченка. Математика і механіка. – 2016. – № (2)36. – С. 40–42.
10. *Радченко В.М.* Асимптотична поведінка розв’язку рівняння теплопровідності зі стохастичною мірою при $t \rightarrow \infty$ / В.М. Радченко // Науковий вісник УжНУ. Серія: Математика і інформатика. – 2012. – Вип. 23, № 1. – С. 119–124.
11. *Yang M.* Asymptotic behavior of solutions for random wave equations with nonlinear damping and white noise / M. Yang, J. Duan, P. Kloeden // Nonlinear Analysis: Real World Applications. – 2011. – Vol. 12, No 1. – P. 464–478.
12. *Chen L.* Moment bounds and asymptotics for the stochastic wave equation / L. Chen, R.C. Dalang // Stochastic Processes and their Applications. – 2015. – Vol. 125. – P. 1605–1628.
13. *Jiang Y.* Asymptotics of the Solutions to Stochastic Wave Equations Driven by a Non-Gaussian Lévy Process / Y. Jiang, S. Wang, X.Wang // Acta Mathematica Scientia. – 2019. – Vol. 39, P. 731–746.
14. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – изд. 4-е. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
15. *Radchenko V.* Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure / V. Radchenko // Studia Mathematica. – 2009. – Vol. 194, no. 3. – P. 231–251.

References

1. KWAPIEŃ, S., WOYCZYŃSKI, W.A. (1992) *Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple*. Boston: Birkhäuser, 360 p.
2. MILLET, A., MORIEN, P.-L. (2000) On a stochastic wave equation in two space dimensions: regularity of the solution and its density. *Stochastic Processes and their Applications*. 86, p. 141–162.
3. RADCHENKO, V.N. (1997) On a definition of the integral of a random function, *Theory of Probability and its Applications*. 41, no. 3, p. 597–601.
4. BODNARCHUK, I.M. (2017) Wave equation with a stochastic measure. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*. 94, p. 1–16.
5. BODNARCHUK, I.M., RADCHENKO, V.M. (2019) Wave equation in the plane driven by a general stochastic measure. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*. 98, p. 73–90.
6. BODNARCHUK, I.M., RADCHENKO, V.M. (2019) Wave equation in three-dimensional space driven by a general stochastic measure, *Teoriya Imovirnostei ta Matematychna Statystyka*. 1(100), p. 43–59. (In Ukrainian)
7. BODNARCHUK, I.M., RADCHENKO, V.M. (2012) Asymptotic behavior of a solution of the heat equation with general stochastic measure. *Scientific Herald of Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University. Series: mathematics*. 2, № 1, p. 7–11. (In Ukrainian)
8. BODNARCHUK, I. (2018) Asymptotics of the mild solution for the wave equation with a stochastic measure. *Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics*. № 2, p. 70–78. (In Russian)
9. BODNARCHUK, I. (2016) Asymptotic behavior of a mild solution of the stochastic heat equation. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Maths. Mechanics*. № (2)36, p. 40–42. (In Ukrainian)
10. RADCHENKO, V.M. (2012) Asymptotic behavior of a solution for the heat equation with a stochastic measure as $t \rightarrow \infty$. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*. Iss. 23, № 1, p. 119–124. (In Ukrainian)
11. YANG, M., DUAN, J., KLOEDEN, P. (2011) Asymptotic behavior of solutions for random wave equations with nonlinear damping and white noise. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. Vol. 12, no 1, p. 464–478.
12. CHEN, L., DALANG, R.C. (2015) Moment bounds and asymptotics for the stochastic wave equation. *Stochastic Processes and their Applications*. Vol. 125, p. 1605–1628.
13. JIANG, Y., WANG, S., WANG, X. (2019) Asymptotics of the Solutions to Stochastic Wave Equations Driven by a Non-Gaussian Lévy Process. *Acta Mathematica Scientia*. 39, p. 731–746.
14. VLADIMIROV, V.S. (1981) *Equations of mathematical physics*. Moscow: Nauka, 512 p. (In Russian)
15. RADCHENKO, V. (2009) Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure. *Studia Mathematica*. 194, no. 3, p. 231–251.

Received: 24.07.2019

УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2419/4.3>

О.І. Василик¹, к.ф.-м.н., доцент
О.М. Гопкало², аспірантка
Ю.В. Козаченко³, д.ф.-м.н., професор
Л.М. Сахно⁴, д.ф.-м.н., с.н.с

Деякі властивості та оцінки для φ -субгауссових випадкових процесів

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, e-mail: ovasylyk@univ.kiev.ua

²Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, e-mail: olia_gopkalo@ukr.net

³Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, e-mail: ykoz@ukr.net

⁴Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, e-mail: lms@univ.kiev.ua

O.I. Vasylyk¹, Ph.D., Associate Professor
O.M. Hopkalo², Ph.D. Student
Yu.V. Kozachenko³, Dr., Professor
L.M. Sakhno⁴, Dr., Senior Researcher

Some properties and estimates for φ -sub-Gaussian stochastic processes

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st., e-mail: ovasylyk@univ.kiev.ua

²Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st., e-mail: olia_gopkalo@ukr.net

³Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st., e-mail: ykoz@ukr.net

⁴Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st., e-mail: lms@univ.kiev.ua

У роботі досліджуються властивості випадкових процесів, що належать до просторів φ -субгауссових випадкових величин $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$. Встановлено умови, за яких процеси, що визначені на $\mathbb{R}$, є обмеженими і неперервними з ймовірністю 1, виведено оцінки для розподілу супремуму таких процесів.

Ключові слова: φ -субгауссові процеси, неперервність, обмеженість, розподіл супремуму

In this paper, there are studied properties of stochastic processes belonging to the spaces of φ -sub-Gaussian random variables $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$. For the processes defined on $\mathbb{R}$, we obtain conditions for boundedness and continuity with probability 1, estimates for the distribution of the supremum are also derived.

Key Words: φ -sub-Gaussian processes, continuity, boundedness, distribution of supremum

1 Вступ

У цій роботі досліджуються властивості випадкових процесів, що належать до просторів φ -субгауссових випадкових величин $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$. Такі процеси являють собою підклас процесів із просторів Орліча експоненціального типу. Детальне дослідження випадкових процесів із просторів Орліча представлено у монографії [3]. За допомогою ентропійних методів в [3] встановлено загальні умови обмеженості та неперервності процесів Орліча, заданих на компактних множинах, знайдено оцінки розподілів супремумів таких процесів, а також значну увагу приділено специфікації цих умов для φ -субгауссових процесів.

Простори φ -субгауссових випадкових величин $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ узагальнюють простори гауссових

випадкових величин, тому вони широко застосовуються для моделювання реальних випадкових процесів у теорії черг, фінансовій математиці, фізиці. Детальну інформацію щодо основних понять і властивостей φ -субгауссових випадкових процесів можна знайти у джерелах [2, 3, 4, 6] та ін.

У даній роботі розглядається питання про встановлення умов обмеженості та неперервності φ -субгауссових випадкових процесів $X(t)$, $t \in T$, для випадку, коли параметрична множина T не є компактом, а саме, припускається, що $T = \mathbb{R}$.

Зауважимо, що для процесу $X(t)$, $t \in T$, заданого на компактній T , умови обмеженості і неперервності формуються однаково, з використанням припущення про збіжність так

званих ентропійних інтегралів, які визначаються через ентропійні характеристики множини T відносно певної метрики, що породжується самим процесом X . Для некомпактних множин ситуація є іншою. Дослідження неперервності є більш простою задачею: якщо T є σ -компактною множиною (тобто може бути представлена як зліченне об'єднання компактних підмножин), тоді із неперервності з ймовірністю 1 процесу X на цих компактних підмножинах випливатиме неперервність з ймовірністю 1 на T (див., наприклад, [1], Розділ 1.3). Але такі аргументи вже не можна застосувати для встановлення обмеженості процесу і потрібно вводити певні додаткові умови. Один із можливих підходів до розв'язання цієї задачі представлено у даній статті.

Робота складається зі вступу та 2 розділів. У розділі 2 наведено основні поняття та деякі необхідні результати щодо випадкових величин та процесів із простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$. Розділ 3 містить основні результати роботи – теореми про умови обмеженості і неперервності з ймовірністю 1 φ -субгауссових випадкових процесів $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$, наведено також деякі їх застосування.

2 Необхідні відомості з теорії φ -субгауссових випадкових процесів

У цьому розділі наведено основні поняття та деякі необхідні результати щодо випадкових величин та процесів із простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ [3, 4].

Означення 2.1. Неперервна парна опукла функція $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається N -функцією Орлича, якщо $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) > 0$ при $x \neq 0$, $\frac{\varphi(x)}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$ та $\frac{\varphi(x)}{x} \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$.

Означення 2.2. Нехай $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ – деяка N -функція Орлича. Функція φ^* така, що $\varphi^*(x) := \sup_{y \in \mathbb{R}} (xy - \varphi(y))$, $x \geq 0$, називається перетворенням Юнга – Фенхеля функції φ .

Приклад 2.1. Якщо $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $x \in \mathbb{R}$, $p > 1$, то $\varphi^*(x) = \frac{|x|^q}{q}$, де q таке число, що $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

Якщо $\varphi(x) = \exp\{|x|\} - |x| - 1$, $x \in \mathbb{R}$, то $\varphi^*(x) = (|x| + 1) \ln(|x| + 1) - |x|$.

Умова Q. Для N -функції φ виконується умова Q, якщо

$$\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = C > 0.$$

Можливо, що $C = +\infty$.

У книзі [7] міститься детальна інформація щодо N -функцій Орлича та їх властивостей.

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – це стандартний імовірнісний простір.

Означення 2.3. Нехай φ – N -функція Орлича, для якої виконується умова Q. Випадкова величина ξ належить простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ (простору φ -субгауссових випадкових величин), якщо $\mathbf{E}\xi = 0$, $\mathbf{E} \exp\{\lambda\xi\}$ існує для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ та існує така стала $a > 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\mathbf{E} \exp(\lambda\xi) \leq \exp(\varphi(a\lambda)).$$

Теорема 2.1. [3] Простір $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ є простором Банаха з нормою

$$\tau_\varphi(\xi) = \sup_{\lambda \neq 0} \frac{\varphi^{-1}(\ln \mathbf{E} \exp(\lambda\xi))}{|\lambda|}$$

та для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконуються нерівності

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \exp(\lambda\xi) &\leq \exp(\varphi(\lambda\tau_\varphi(\xi))), \\ (\mathbf{E}\xi^2)^{\frac{1}{2}} &\leq C\tau_\varphi(\xi), \end{aligned} \quad (2.1)$$

де $C > 0$ – деяка стала.

Якщо $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, то простір $\text{Sub}_\varphi(\Omega) = \text{Sub}(\Omega)$ називається простором субгауссових випадкових величин.

Означення 2.4. Нехай (T, ρ) – деякий псевдометричний або метричний простір. Метричною ентропією (відносно псевдометрики/метрики ρ) називається функція

$$H(\varepsilon) := \ln N_{(T, \rho)}(\varepsilon), \quad \varepsilon > 0,$$

де $N_{(T, \rho)}(\varepsilon)$ – це метрична масивність множини T , тобто, кількість елементів у найменшому ε -покритті цієї множини.

Приклад 2.2. Якщо $T = [a, b]$ та ρ – це евклідова відстань, то для довільного значення $\varepsilon > 0$:

$$\ln \left(\max \left\{ \frac{b-a}{2\varepsilon}, 1 \right\} \right) \leq H_{(T, \rho)}(\varepsilon) \leq \ln \left(\frac{b-a}{2\varepsilon} + 1 \right).$$

Означення 2.5. Випадковий процес $X = (X(t), t \in T)$ є φ -субгауссовим (тобто, належить простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$), якщо для всіх $t \in T$ випадкові величини $X(t) \in \text{Sub}_\varphi(\Omega)$.

Якщо $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, то такий процес називається субгауссовим.

Приклад 2.3. Центрований гауссовий випадковий процес є субгауссовим.

3 Основні результати

Нехай $X = \{X(t); t \in T\}$ – випадковий процес з простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ та псевдометрика ρ_X , породжена випадковим процесом X на T , має вигляд

$$\rho_X(t, s) = \tau_\varphi(X(t) - X(s)), t, s \in T.$$

Припустимо, що виконуються такі умови:

A1) $\varepsilon_0 = \sup_{t \in T} \tau_\varphi(X(t)) < \infty$;

A2) (T, ρ_X) – сепарабельний простір та випадковий процес X є сепарабельним на (T, ρ_X) .

Теорема 3.1 ([3], Theorem 4.2, p. 105). Якщо

$$I_\varphi(\varepsilon_0) = \int_0^{\varepsilon_0} \frac{H(\varepsilon)}{\varphi^{(-1)}(H(\varepsilon))} d\varepsilon < \infty, \quad (3.1)$$

де $\varphi^{(-1)}(x), x > 0$ – функція, обернена до $\varphi(x), x > 0$, та $H(\varepsilon)$ – метрична ентропія простору (T, ρ_X) , то для довільного $\theta \in (0, 1)$ і всіх $u > \frac{2I_\varphi(\theta\varepsilon_0)}{\theta(1-\theta)}$ справедлива така оцінка:

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{t \in T} |X(t)| \geq u\right\} \leq 2A(u, \theta), \quad (3.2)$$

де

$$A(u, \theta) = \exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\left[u(1-\theta) - \frac{2}{\varepsilon_0}I_\varphi(\theta\varepsilon_0)\right]\right)\right\},$$

φ^* – це переворотення Юнга-Фенхеля функції φ .

Наслідок 3.1. Нехай $T = [a, b]$. Тоді у твердженні Теорема 3.1 умова (3.1) набуде вигляду

$$\hat{I}_\varphi(\varepsilon_0) = \int_0^{\varepsilon_0} \frac{\ln\left(\frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right)}{\varphi^{(-1)}\left(\ln\left(\frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right)\right)} du < \infty.$$

Доведення. Твердження цього наслідку випливає з Теорема 3.1 та нерівності $N(u) \leq \frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1$, де $N(u)$ – метрична масивність простору $T = [a, b]$, $H(u) = \ln N(u)$. $\square$

Нехай замість умови A2) виконується така умова:

A3) Процес $X(t)$ є сепарабельним на $(\mathbb{R}, \rho_X)$; послідовність $\{B_k = [a_k, b_k]; k \in \mathbb{Z}\}$ утворює розбиття простору $\mathbb{R}$ на підмножини $B_k = [a_k, b_k]; k \in \mathbb{Z}, b_k > a_k, \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} B_k = \mathbb{R}$; $H_k(u)$ – метрична ентропія множини B_k відносно псевдометрики $\rho_X, k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 3.2. Нехай для випадкового процесу $X = \{X(t); t \in \mathbb{R}\}$ з простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ виконуються умови A1) та A3), а також нехай існують монотонно зростаючі неперервні функції $\sigma_k = \{\sigma_k(h), 0 \leq h \leq \max_{t,s \in B_k} \rho_X(t, s)\}$, такі, що $\sigma_k(0) = 0$ та на кожній множині B_k

$$\sup_{\rho_X(t,s) \leq h, t,s \in B_k} \tau_\varphi(X(t) - X(s)) \leq \sigma_k(h). \quad (3.3)$$

Нехай виконується умова:

$$\hat{I}_\varphi(\varepsilon_{0k}) = \int_0^{\varepsilon_{0k}} \frac{\ln\left(\frac{b_k - a_k}{2\sigma_k^{(-1)}(u)} + 1\right)}{\varphi^{(-1)}\left(\ln\left(\frac{b_k - a_k}{2\sigma_k^{(-1)}(u)} + 1\right)\right)} du < \infty. \quad (3.4)$$

Тоді для всіх $\theta \in (0, 1)$ та $u > \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{2\hat{I}_\varphi(\theta\varepsilon_{0k})}{\theta(1-\theta)} = \varepsilon^*$ має місце така оцінка:

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{t \in B_k} |X(t)| \geq u\right\} \leq 2A_k(u, \theta), \quad (3.5)$$

де

$$A_k(u, \theta) = \exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{1}{\varepsilon_{0k}}\left[u(1-\theta) - \frac{2}{\varepsilon_{0k}}\hat{I}_\varphi(\theta\varepsilon_{0k})\right]\right)\right\},$$

φ^* – перетворення Юнга-Фенхеля функції φ .

Якщо для деякого $\hat{\varepsilon} \geq \varepsilon^*$ ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k(\hat{\varepsilon}, \theta)$ збігається, то для всіх $\varepsilon \geq \hat{\varepsilon}$ ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k(\varepsilon, \theta)$ теж збігається і виконується нерівність:

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{t \in \mathbb{R}} |X(t)| \geq \varepsilon\right\} \leq 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k(\varepsilon, \theta)$$

та

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{t \in \mathbb{R}} |X(t)| < \infty\right\} = 1.$$

Доведення. Розглянемо розбиття $\{B_k = [a_k, b_k]; k \in \mathbb{Z}\}, \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} B_k = \mathbb{R}$. Тоді

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\sup_{t \in \mathbb{R}} |X(t)| \geq \varepsilon\right\} &= \mathbb{P}\left\{\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{t \in B_k} |X(t)| \geq \varepsilon\right\} \leq \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}\left\{\sup_{t \in B_k} |X(t)| \geq \varepsilon\right\}. \end{aligned}$$

З теореми 3.1 та наслідку 3.1 випливає, що коли $\varepsilon_{0k} < \infty, \hat{I}_\varphi(\theta\varepsilon_{0k}) < \infty$, та $X(t)$ – сепарабельний процес, то умова (3.5) виконується для всіх $u > \frac{2\hat{I}_\varphi(\theta\varepsilon_{0k})}{\theta(1-\theta)}$. Таким чином, для всіх $\theta \in (0, 1)$ та $u > \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{2\hat{I}_\varphi(\theta\varepsilon_{0k})}{\theta(1-\theta)}$ матимемо

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{t \in \mathbb{R}} |X(t)| \geq \varepsilon\right\} \leq 2A(\varepsilon, \theta),$$

де $A(\varepsilon, \theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k(\varepsilon, \theta)$.

За теоремою 3.1, $I_\varphi(\varepsilon_{0k}) = \int_0^{\varepsilon_{0k}} \frac{H_k(\varepsilon)}{\varphi^{(-1)}(H_k(\varepsilon))} d\varepsilon < \infty$. З означення метричної масивності отримуємо: $N_k(\varepsilon) \leq \frac{b_k - a_k}{2\sigma_k^{(-1)}(\varepsilon)} + 1$, де функція $\sigma_k(h)$ визначена у (3.3).

З [3] відомо, що функція $\frac{H_k(\varepsilon)}{\varphi^{(-1)}(H_k(\varepsilon))}$ є монотонно зростаючою. Тоді

$$I_\varphi(\varepsilon_{0k}) \leq \int_0^{\varepsilon_{0k}} \frac{\ln(\frac{b_k - a_k}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1)}{\varphi^{(-1)}(\ln(\frac{b_k - a_k}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1))} du < \infty.$$

Покажемо, що $A(\varepsilon, \theta) \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow \infty$. Оскільки $A_k(\varepsilon, \theta) \leq A_k(\hat{\varepsilon}, \theta)$ при $\hat{\varepsilon} \leq \varepsilon$, то з того, що $\sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k(\hat{\varepsilon}, \theta) < \infty$, випливає, що $\sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k(\varepsilon, \theta) < \infty$.

Тепер покажемо, що для всіх δ при достатньо великих значеннях ε виконується: $A(\varepsilon, \theta) < \delta$. Нехай $M \in \mathbb{N}$. Тоді

$$A(\varepsilon, \theta) = \sum_{|k|=0}^M A_k(\varepsilon, \theta) + \sum_{|k|=M+1}^{\infty} A_k(\varepsilon, \theta) \leq \sum_{|k|=0}^M A_k(\varepsilon, \theta) + \sum_{|k|=M+1}^{\infty} A_k(\hat{\varepsilon}, \theta).$$

Виберемо таке значення M , що $\sum_{|k|=M+1}^{\infty} A_k(\hat{\varepsilon}, \theta) \leq \frac{\delta}{2}$, та C таке, що при $\varepsilon > C$, $|k| \leq M : A_k(\varepsilon, \theta) < \frac{\delta}{2(M+1)}$. Тоді

$$A(\varepsilon, \theta) \leq \sum_{|k|=0}^M \frac{\delta}{2(M+1)} + \frac{\delta}{2} \leq \delta.$$

Отже, $A(\varepsilon, \theta) \rightarrow 0$, при $\varepsilon \rightarrow \infty$.

Теорема 3.3. Нехай $X = \{X(t); t \in \mathbb{R}\}$ – випадковий процес з простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$. Припустимо, що X – неперервний на довільному відрізку $[a, b]$, $a < b$ з ймовірністю 1, а також X є обмеженим випадковим процесом на $\mathbb{R}$ з ймовірністю 1, тобто $P\{\sup_{t \in \mathbb{R}} |X(t)| < \infty\} = 1$. Тоді $X(t)$ є неперервним процесом на $\mathbb{R}$ з ймовірністю 1.

Зауваження 3.1. За умов теореми 3.2, процес X є неперервним на $\mathbb{R}$ з ймовірністю 1.

Зауваження 3.2. Аналогічно до теореми 3.2, результат про обмеженість і неперервність випадкового процесу $X = \{X(t); t \in \mathbb{R}\}$ з простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ можна встановити, формулюючи умови з використанням іншого ентропійного інтегралу замість (3.4). А саме, можна розглядати інтеграл $I_r(\varepsilon) := \int_0^\varepsilon r(N(v)) dv$, де $r(x)$, $x \geq 1$ – невід’ємна монотонно зростаюча функція така, що $r(e^x)$, $x \geq 0$, є опуклою функцією. При цьому, замість теореми 3.1, застосовується інший результат з [3] (Theorem 4.4, p. 107).

Приклад 3.1. Нехай в умовах теореми 3.2 $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $x \in \mathbb{R}$, $1 < p \leq 2$ і $\sigma_k(h) = c_k h^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$. Тоді маємо (при $q: 1/q + 1/p = 1$)

$$A_k(u, \theta) = \exp \left\{ -\frac{1}{q} \left(\frac{1}{\varepsilon_{0k}} [u(1-\theta) - \frac{2}{\varepsilon_{0k}} \hat{I}_\varphi(\theta \varepsilon_{0k})] \right)^q \right\},$$

$$\text{де } \hat{I}_\varphi(\theta \varepsilon_{0k}) \leq \left(\frac{c_k^\alpha (b_k - a_k)}{2} \right)^{1 - \frac{1}{p}} \frac{(\theta \varepsilon_{0k})^{\frac{1}{\alpha p} - \frac{1}{\alpha} + 1}}{\frac{1}{\alpha p} - \frac{1}{\alpha} + 1}$$

(і припускаємо, що $\frac{1}{\alpha p} - \frac{1}{\alpha} + 1 > 0$).

Отримані результати можна застосувати при дослідженні розв’язків задачі Коші для рівняння теплопровідності

$$\begin{cases} u_t(t; x) = a^2 u_{xx}(t; x), t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0; x) = f(x), x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.6)$$

де функція f неперервна та обмежена на $\mathbb{R}$.

Теорема 3.4 ([8], с. 181). Якщо f – неперервна та обмежена функція на $\mathbb{R}$, то єдиний розв’язок задачі Коші (3.6) у класі неперервних та обмежених функцій задається формулою Пуассона:

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp \left\{ -\frac{(v-x)^2}{4a^2 t} \right\} dv, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}.$$

Теорема 3.5. Нехай $\xi = \{\xi(x); x \in \mathbb{R}\}$ – випадковий процес з простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ такий, що $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\xi(x)| < \infty$, з ймовірністю 1 та $\xi(x)$ є вибірково неперервним з ймовірністю 1.

Тоді з ймовірністю 1 випадковий процес

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(v) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp \left\{ -\frac{(v-x)^2}{4a^2 t} \right\} dv, \quad t > 0, x \in \mathbb{R},$$

є обмеженим та неперервним розв’язком задачі Коші (3.6) з випадковою початковою умовою $u(0; x) = \xi(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Доведення. Твердження цієї теореми випливає з теореми 3.4. $\square$

Наслідок 3.2. Нехай для випадкового процесу $\xi = \{\xi(x); x \in \mathbb{R}\}$ з простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ виконуються умови теореми 3.2. Тоді з ймовірністю 1 випадковий процес

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(v) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp \left\{ -\frac{(v-x)^2}{4a^2 t} \right\} dv, \quad t > 0, x \in \mathbb{R},$$

є обмеженням та неперервним розв'язком задачі Коші (3.6) з випадковою початковою умовою $u(0; x) = \xi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, і має місце оцінка $P\{\sup_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}} |u(t, x)| > \varepsilon\} \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k(\varepsilon)$, де $A_k(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, визначаються для процесу ξ згідно з теоремою 3.2.

Список використаних джерел

1. Adler R.J., Random Fields and Geometry / R.J. Adler, J.E. Taylor. – Springer Monographs in Mathematics, 2007. – 448 p.
2. Василик О.І. φ -Субгауссові випадкові процеси / О.І. Василик, Ю.В. Козаченко, Р.Є. Ямненко. – К: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2008. – 231 с.
3. Buldygin V. V., Metric Characterization of Random Variables and Random Processes / V. V. Buldygin, Yu. V. Kozachenko. – American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. – 257 p.
4. Giuliano Antonini R. Space of φ -sub-Gaussian random variables / R. Giuliano Antonini, Yu. V. Kozachenko, T. Nikitina. // Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. (5), 2003. – 27. – P.92–124.
5. Гопкало О.М. Умови обмеженості гауссового випадкового процесу з ймовірністю 1 на $\mathbb{R}^+$ та їх застосування // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія : Математика і інформатика. – 2018. – Вип. 2. – С. 61–69.
6. Kozachenko Yu. V. Banach spaces of random variables of sub-Gaussian type / Yu. V. Kozachenko, E. I. Ostrovsky // Theory of Probability and Mathematical Statistics, 1985. – No. 32. – P.42–53.
7. Krasnosel'skii M. A. Convex Functions and Orlicz Spaces. / M. A. Krasnosel'skii, Ya. B. Rutickii. – Moscow, 1958 (in Russian). English translation: P.Noordhoff Ltd, Groningen, 1961. – 249p.
8. Перестюк М.О. Теорія рівнянь математичної фізики / М.О. Перестюк, В.В. Маринець В.В. – К.:Либідь, 2014, – 363 с.

Висновки

У роботі встановлено умови, за яких φ -субгауссові випадкові процеси, що визначені на $\mathbb{R}$, є обмеженими і неперервними з ймовірністю 1, виписано оцінки для розподілу супремуму таких процесів.

References

1. ADLER, R.J., TAYLOR, J.E. (2007) *Random Fields and Geometry*, Springer Monographs in Mathematics, 448 p.
2. VASYLYK, O. I., KOZACHENKO, YU. V., YAMNENKO, R. E. (2008) *φ -sub-Gaussian random process*, Kyiv: Vydavnycho-Poligrafichnyi Tsentri “Kyivskyi Universytet”, 231 p. (In Ukrainian)
3. BULDYGIN, V. V., KOZACHENKO, YU. V. (2000) *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes*. American Mathematical Society, Providence, RI, 257 p.
4. GIULIANO ANTONINI, R., KOZACHENKO, YU. V., NIKITINA, T. (2003) Space of φ -sub-Gaussian random variables. *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl.* (5) 27, p.92–124.
5. HOPKALO, O.M. (2018) Conditions for boundedness of a Gaussian stochastic process with probability 1 on $\mathbb{R}^+$ and their application // Bulletin of Uzhgorod University. Series: Mathematics and Informatics. Iss.2, p. 61–69.
6. KOZACHENKO, YU. V., OSTROVSKY, E. I. (1985) Banach spaces of random variables of sub-Gaussian type, *Theory of Probability and Mathematical Statistics*. No. 32, p.42–53.
7. KRASNOSEL'SKII, M. A., RUTICKII, YA. B. (1961) *Convex Functions and Orlicz Spaces*. Moscow, 1958 (in Russian). English translation: P.Noordhoff Ltd, Groningen, 249p.
8. PERESTYUK, M., MARYNETS, V. (2014) *Theory of equations of mathematical physics*. (In Ukrainian). K.: Libid, 363 p.

Received: 20.01.2019

Т.О. Драбик ¹, студ.

О.В. Іванов ², д.ф.-м.н., проф.

**Асимптотична нормальність оцінки
найменших квадратів у
тригонометричній регресії з сильно
залежним шумом**

^{1,2} Національний технічний університет
України "Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського", 03056, Київ-56, просп.
Перемоги, 37

e-mail: ¹ drabyk.tetyana@gmail.com,

² alexntuu@gmail.com

T.O. Drabyk ¹, stud.

O.V. Ivanov ², Dr. Sci., Prof.

**Asymptotic normality of the least squares
estimate in trigonometric regression with
strongly dependent noise**

^{1,2} National Technical University of Ukraine
"Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", 03056,
Kyiv, 37 Peremogy avenue

e-mail: ¹ drabyk.tetyana@gmail.com,

² alexntuu@gmail.com

У роботі вивчаються асимптотичні властивості оцінки найменших квадратів параметрів тригонометричної моделі регресії з сильно залежним шумом. Мета роботи полягає в отриманні вимог до функції регресії та часового ряду, що моделює випадковий шум, за яких оцінка найменших квадратів параметрів функції регресії є асимптотично нормальною.

Ключові слова: тригонометрична модель регресії, функція регресії, випадковий шум, локальне перетворення гауссівського стаціонарного часового ряду, оцінка найменших квадратів, сингулярна спектральна щільність, спектральна міра функції регресії, μ -припустимість, розклади за поліномом Чебишова-Ерміта, ранг Ерміта, асимптотична нормальність.

The least squares estimator asymptotic properties of the parameters of trigonometric regression model with strongly dependent noise are studied. The goal of the work lies in obtaining the requirements to regression function and time series that simulates the random noise under which the least squares estimator of regression model parameters are asymptotically normal. Trigonometric regression model with discrete observation time and open convex parametric set is research object. Asymptotic normality of trigonometric regression model parameters the least squares estimator is research subject. For obtaining the thesis results complicated concepts of time series theory and time series statistics have been used, namely: local transformation of Gaussian stationary time series, stationary time series with singular spectral density, spectral measure of regression function, admissibility of singular spectral density of stationary time series in relation to this measure, expansions by Chebyshev-Hermite polynomials of the transformed Gaussian time series values and it's covariances, central limit theorem for weighted vector sums of the values of such a local transformation and Brouwer fixed point theorem.

Key words: trigonometric regression model, regression function, random noise, local transformation of Gaussian stationary time series, the least squares estimator, singular spectral density, spectral measure of regression function, μ -admissibility, expansions by Chebyshev-Hermite polynomials, Hermite rank, asymptotic normality.

Communicated by Dr. Sci., Prof. Moklyachuk M.P.

Вступ

У роботі розглядається нелінійна модель регресії з дискретним часом спостереження, яка є складною в тому сенсі, що випадковий шум є локальним нелінійним перетворенням гауссівського часового ряду з сингулярною спектральною щільністю (с.щ.).

Серед різноманітних проблем нелінійного регресійного аналізу варто звернути увагу на задачу оцінювання амплітуд та кутових частот,

взагалі кажучи, суми гармонічних коливань, що маскується адитивним випадковим шумом. Таку модель регресії називають тригонометричною, а описану задачу – задачею про виявлення прихованих періодичностей.

Асимптотичну поведінку оцінок найменших квадратів (о.н.к.) параметрів тригонометричної моделі регресії у 50-х роках минулого століття вивчав П. Уїтл [1], а пізніше цю задачу розв'язували А.М. Уолкер [2], Е.Дж. Хеннан [3], А.Я. Дороговцев [4], О.В. Іванов [5] та ін. в

моделях із дискретним та неперервним часом за різними припущеннями відносно випадкового шуму. Паралельно різні узагальнення тригонометричної моделі регресії розглядали А.Я. Дороговцев та П.С. Кнопов [6].

В роботі досліджується асимптотична нормальність о.н.к. параметрів тригонометричної моделі регресії з дискретним часом та шумом, що є нелінійним локальним перетворенням гауссівського стаціонарного часового ряду з сингулярним спектром. Тут ми спираємось на статтю О. В. Іванова, Н.Н. Леоненка, М.Д. Руїз-Медини, Б.М. Жураковського [7]. На відміну від вказаної статті, у якій доведення асимптотичної нормальності о.н.к. параметрів тригонометричної моделі здійснюється із застосуванням діаграмної формули, ми користуємось теоремою про асимптотичну нормальність деякої зваженої векторної суми значень шуму, яку доведено в статті О. В. Іванова, Н.Н. Леоненка, М.Д. Руїз-Медини, І.М. Савич [8].

1 Постановка задачі та допоміжні результати

Припустимо, що випадкові процеси, які розглядаються в подальшому тексті, задано на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Розглянемо модель регресії

$$X_t = g(t, \theta^0) + \varepsilon_t, \quad t = \overline{1, T}, \quad (1.1)$$

де $g : \mathbb{N} \times \Theta_\gamma \rightarrow \mathbb{R}$ – неперервна функція при кожному $t \in \mathbb{N}$ на $\Theta_\gamma = \bigcup_{\|a\| \leq 1} (\Theta + \gamma a)$,

$\gamma > 0$ – деяке число, $\Theta \in \mathbb{R}^q$ – відкрита множина, що містить монотонно неспадну послідовність відкритих опуклих множин $\{\Theta_T, T \geq 1\}$

таких, що $\bigcup_{t=1}^{\infty} \Theta_T = \Theta$. Істинне значення параметра $\theta^0 \in \Theta_T$ для достатньо великих T (будемо писати $T > T_0$).

Відносно шуму ε припустимо, що

A1. $\varepsilon_t = G(\xi_t)$, $t \in \mathbb{Z}$, де $G(x)$, $x \in \mathbb{R}$, – борелева функція, причому $\mathbb{E}\varepsilon_0 = 0$, $\mathbb{E}\varepsilon_0^4 < \infty$.

A2. ξ_t , $t \in \mathbb{Z}$, є гауссівським стаціонарним часовим рядом, $\mathbb{E}\xi_0 = 0$, із коваріаційною функцією

$$B(t) = \sum_{j=0}^r A_j B_{\alpha_j \varkappa_j}(t), \quad r \geq 0, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1.2)$$

$$B_{\alpha_j \varkappa_j}(t) = \frac{\cos \varkappa_j t}{(1 + t^2)^{\alpha_j/2}}, \quad \alpha_j \in (0, 1), \quad (1.3)$$

$$0 \leq \varkappa_0 < \varkappa_1 < \dots < \varkappa_r < \pi, \quad \sum_{j=0}^r A_j = 1, \quad A_j > 0.$$

Нехай $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, – неперервний в середньому квадратичному стаціонарний випадковий процес з нульовим середнім та коваріаційною функцією

$$B(t) = \sum_{j=0}^r A_j B_{\alpha_j \varkappa_j}(t), \quad r \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

де $A_j > 0$, $j = \overline{0, r}$, $\sum_{j=0}^r A_j = 1$,

$$B_{\alpha_j \varkappa_j}(t) = \frac{\cos \varkappa_j t}{(1 + t^2)^{\alpha_j/2}}, \quad \alpha_j \in (0, 1), \quad (1.5)$$

$$0 \leq \varkappa_0 < \varkappa_1 < \dots < \varkappa_r < \pi.$$

С.щ. $\tilde{f}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, процесу $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, має вигляд

$$\tilde{f}(\lambda) = \sum_{j=0}^r A_j \tilde{f}_{\alpha_j \varkappa_j}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (1.6)$$

де для $j = \overline{0, r}$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\alpha_j \varkappa_j}(\lambda) = & \frac{c_1(\alpha_j)}{2} \left(K_{\frac{\alpha_j-1}{2}}(|\lambda + \varkappa_j|) |\lambda + \varkappa_j|^{\frac{\alpha_j-1}{2}} + \right. \\ & \left. + K_{\frac{\alpha_j-1}{2}}(|\lambda - \varkappa_j|) |\lambda - \varkappa_j|^{\frac{\alpha_j-1}{2}} \right), \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$c_1(\alpha) = \frac{2^{(1-\alpha)/2}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{\alpha}{2})}, \quad K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty s^{\nu-1} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(s + \frac{1}{s} \right) z \right\} ds, \quad z \geq 0, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Функція $K_\nu(z)$, $z \geq 0$, називається модифікованою функцією Бесселя 2-го роду порядку ν , або функцією Макдональда [9]. Відмітимо, що $K_{-\nu}(z) = K_\nu(z)$ і при $z \rightarrow 0$

$$K_\nu(z) \sim \Gamma(\nu) 2^{\nu-1} z^{-\nu}, \quad \nu > 0.$$

В околах точок $\lambda = \pm \varkappa_j$, $j = \overline{0, r}$,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\alpha_j \varkappa_j}(\lambda) = & \frac{c_2(\alpha_j)}{2} \left[|\lambda + \varkappa_j|^{\alpha_j-1} (1 - h_j(|\lambda + \varkappa_j|)) + \right. \\ & \left. + |\lambda - \varkappa_j|^{\alpha_j-1} (1 - h_j(|\lambda - \varkappa_j|)) \right], \end{aligned} \quad (1.8)$$

де $c_2(\lambda) = (2\Gamma(\alpha) \cos \frac{\alpha\pi}{2})^{-1}$,

$$h_j(|\lambda|) = \frac{\Gamma(\frac{\alpha_j+1}{2})}{\Gamma(\frac{3-\alpha_j}{2})} \left| \frac{\lambda}{2} \right|^{1-\alpha_j} +$$

$$+ \frac{\Gamma(\frac{\alpha_j+1}{2})}{4\Gamma(\frac{3+\alpha_j}{2})} \left| \frac{\lambda}{2} \right|^2 + o(|\lambda|^2), \quad \lambda \rightarrow 0, \quad j = \overline{0, r}.$$

Отже, с.щ. (1.6) має $2r + 2$ точки сингулярності, якщо $\varkappa_0 \neq 0$, та $2r + 1$ точку сингулярності, якщо $\varkappa_0 = 0$. Процес $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, є процесом з сильною залежністю, якщо $\varkappa_0 = 0$.

Коваріаційна функція $B(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, стаціонарного часового ряду ξ_t , $t \in \mathbb{Z}$, з умови **A2** має спектральне представлення

$$B(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} f(\lambda) d\lambda, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1.9)$$

тобто $B(t)$, $t \in \mathbb{Z}$ – послідовність коефіцієнтів Фур'є с.щ.

$$f(\lambda) = \sum_{j=0}^r A_j f_{\alpha_j \varkappa_j}(\lambda), \quad \lambda \in [-\pi, \pi]. \quad (1.10)$$

Зауважимо, що с.щ. (1.10) та с.щ. (1.6), що відповідає неперервному аналогу (1.4) коваріаційної функції $B(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, пов'язані між собою співвідношенням [10]

$$f(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda + 2\pi k), \quad \lambda \in [-\pi, \pi]. \quad (1.11)$$

Оскільки функція Макдональда має властивість

$$K_{\nu}(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad z \rightarrow +\infty, \quad \nu \geq 0, \quad (1.12)$$

то ряд (1.11) збігається, і функцію $f(\lambda)$ означено коректно. До того ж можна сказати, що функція $f(\lambda)$ має, як і функція $\tilde{f}(\lambda)$, ті ж самі сингулярності в точках $\lambda = \pm \varkappa_j \in (-\pi, \pi)$, $j = \overline{0, r}$.

Припустимо, що функції $g(t, \cdot)$ неперервно диференційовні на Θ_{γ} , $t \geq 1$. Позначимо

$$g_i(t, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta_i} g(t, \theta), \quad i = \overline{1, q}.$$

Розглянемо вектор-градієнт

$\nabla g(t, \theta) = (g_1(t, \theta), \dots, g_q(t, \theta))^*$, функції регресії $g(t, \theta)$, $\theta \in \Theta_{\gamma}$, $t \in \mathbb{N}$.

Нехай $\mathcal{B}$ – σ -алгебра борелевих підмножин інтервалу $[-\pi, \pi]$. Введемо матричну міру $\mu_T(d\lambda, \theta)$, $\theta \in \Theta_{\gamma}$ на $([-\pi, \pi], \mathcal{B})$ з матрицею щільності

$$\begin{aligned} & \left(\mu_T^{kl}(\lambda, \theta) \right)_{k,l=1}^q = \left(g_T^k(\lambda, \theta) \overline{g_T^l(\lambda, \theta)} \times \right. \\ & \left. \times \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g_T^k(\lambda, \theta)|^2 d\lambda \int_{-\pi}^{\pi} |g_T^l(\lambda, \theta)|^2 d\lambda \right)^{-1/2} \right)_{k,l=1}^q, \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$g_T^k(\lambda, \theta) = \sum_{t=1}^T e^{i\lambda t} g_k(t, \theta), \quad \lambda \in [-\pi, \pi], \quad k = \overline{1, q}.$$

Відмітимо, що $d_{kT}^2(\theta) =$

$$= (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |g_T^k(\lambda, \theta)|^2 d\lambda = \sum_{t=1}^T g_k^2(t, \theta), \quad k = \overline{1, q}.$$

B1. Послідовність мір $\mu_T(d\lambda, \theta)$ слабо збігається до додатно визначеної матричної міри $\mu(d\lambda, \theta)$:

$$\mu_T \Rightarrow \mu, \quad T \rightarrow \infty. \quad (1.14)$$

Умова **B1** вказує, що елементи $\mu^{kl}(d\lambda, \theta)$ матриці $\mu(d\lambda, \theta)$ є комплексні заряди обмеженої варіації, а матриці $\mu(B, \theta)$, $B \in \mathcal{B}$, невід'ємно визначені, причому $\mu([- \pi, \pi], \theta)$ – додатно визначена матриця. До того ж, для будь-якої неперервної та обмеженої функції $a(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} a(\lambda) \mu_T(d\lambda, \theta) \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} a(\lambda) \mu(d\lambda, \theta), \quad T \rightarrow \infty. \quad (1.15)$$

Означення 1. Міра $\mu(d\lambda, \theta)$ називається спектральною мірою функції регресії $g(t, \theta)$ [11, 12] (точніше, її вектор-градієнта $\nabla g(t, \theta)$ [13]).

За умов $\lim_{T \rightarrow \infty} d_{iT}^2(\theta) = \infty$,

$\max_{1 \leq i \leq T} |g_i(t, \theta)| = o(d_{iT}(\theta))$ при $T \rightarrow \infty$, $i = \overline{1, q}$, компоненти $\mu^{kl}(d\lambda, \theta)$ міри $\mu(d\lambda, \theta)$ можна визначити із співвідношень [12]

$$\begin{aligned} R^{kl}(h) &= \lim_{T \rightarrow \infty} d_{kT}^{-1}(\theta) d_{lT}^{-1}(\theta) \times \\ & \times \sum_{t=1}^T g_k(t+h, \theta) g_l(t, \theta) = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda h} \mu^{kl}(d\lambda, \theta), \quad k, l = \overline{1, q}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

які виконуються при кожному $h \in \mathbb{Z}$.

Введемо матрицю

$$\begin{aligned} J_T(\theta) &= \left(J_{kl,T}(\theta) \right)_{k,l=1}^N = \\ &= \left(d_{kT}^{-1}(\theta) d_{lT}^{-1}(\theta) \sum_{t=1}^T g_k(t, \theta) g_l(t, \theta) \right)_{k,l=1}^q. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Тоді з (1.13) при $a(\lambda) = 1$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$,

$$J_T(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \mu_T(d\lambda, \theta) \rightarrow$$

$$\longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \mu(d\lambda, \theta) = \mu([- \pi, \pi], \theta) = J(\theta), \quad T \rightarrow \infty, \quad (1.18)$$

причому матриця $J(\theta)$ додатно визначена за означенням спектральної міри μ . Звідси, і матриці $\Lambda_T(\theta) = J_T^{-1}(\theta)$ додатно визначені для $T > T_0$. До того ж, $\lim_{T \rightarrow \infty} \Lambda_T(\theta) = \Lambda(\theta) = J^{-1}(\theta)$ також додатно визначена матриця.

Зауважимо, що коли $a(\lambda)$ втрачає властивості неперервності та обмеженості, співвідношення (1.15) може в деяких випадках також виконуватись. Для цього дамо відповідне означення для с.щ. стаціонарного часового ряду $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

Означення 2. С.щ. f називається μ -припустимою [12], якщо вона інтегрована за мірою μ , тобто всі елементи матриці $\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) \mu(d\lambda, \theta)$ скінченні, та для $a = f$ виконується (1.15).

Далі будемо розглядати властивість μ -припустимості с.щ. $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, яку задано формулою (1.11). Введемо множину індексів $I = \{-r, r\}$ і для визначеності нехай $\chi_0 = 0$. Покладемо $\lambda_{-l} = -\lambda_l$, $\lambda_l = \chi_l$, $l = \overline{1, r}$, $\lambda_0 = \chi_0 = 0$. Спираючись на формули (1.7), (1.8) та (1.11), можна стверджувати існування такого достатньо великого числа $c_0 > 0$, що для всіх $c \geq c_0$ знайдуться околиці $V_l(c)$ точок λ_l , $l \in I$, для яких

$$\{\lambda \in [-\pi, \pi] : f(\lambda) > c\} \subset \bigcup_{l \in I} V_l(c), \quad (1.19)$$

причому $V_l(c)$ у (1.19) не перетинаються та міри Лебега $m(V_l(c)) \downarrow 0$ при $c \rightarrow \infty$, $l \in I$.

B2. Для $T > T_0$

$$d_{kT}^{-1}(\theta^0) \max_{\lambda \in V_l(c_0)} |g_T^k(\lambda, \theta^0)| < h_{lk}(\theta^0) < \infty, \quad l \in I, \quad k = \overline{1, q}. \quad (1.20)$$

Наступне твердження є варіантом загальної теореми роботи [7] для дискретного часу спостережень та с.щ. (1.11).

Теорема 1. Нехай виконуються умови **A2**, **B1**, **B2** та с.щ. f інтегрована за мірою μ . Тоді f є μ -припустимою функцією.

Далі ми побачимо, що теорема 1 потрібна для доведення асимптотичної нормальності о.н.к.

Нехай деяка функція $W \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}, \varphi(x) dx)$, $\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}$ – стандартна гауссівська щільність. Тоді її можна розкласти в цьому гільбертовому просторі в ряд Фур'є за поліномами Чебишова-Ерміта

$$H_n(x) = (-1)^n \left(\sqrt{2\pi} \varphi(x) \right)^{-1} \times \times \frac{d^n}{dx^n} \left(\sqrt{2\pi} \varphi(x) \right), \quad n \geq 0,$$

що утворюють повну ортогональну систему в $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}, \varphi(x) dx)$:

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n(W)}{n!} H_n(x),$$

$$C_n(W) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x) H_n(x) \varphi(x) dx, \quad n \geq 0. \quad (1.21)$$

У сформульованій нижче теоремі 2 будемо вважати, що

$$C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} W(x) \varphi(x) dx = \mathbb{E}W(\varepsilon_0) = 0.$$

Означення 3. Функція $W \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}, \varphi(x) dx)$ має ранг Ерміта m ($\text{Hrank}(W) = m$), якщо або $C_1(W) \neq 0$ та $m = 1$, або для деякого $m \geq 2$

$$C_1(W) = \dots = C_{m-1}(W) = 0, \quad C_m(W) \neq 0. \quad (1.22)$$

У сформульованій нижче ЦГТ використано поняття ермітового рангу функції для деякої векторної суми випадкових величин та с.щ., що відповідають стаціонарним часовим рядам із коваріаційними функціями $B^s(t)$, $s \in \mathbb{N}$, де $B(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, – коваріаційна функція часового ряду ξ_t , $t \in \mathbb{Z}$.

Коваріаційній функції $B^s(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $s \geq 2$, де $B(t)$ – коваріаційна функція (1.4), відповідає s -та згортка

$$\tilde{f}^{*s}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^{s-1}} \tilde{f}(\lambda - \lambda_2 - \dots - \lambda_s) \times \times \prod_{i=2}^s \tilde{f}(\lambda_i) d\lambda_2 \dots d\lambda_s, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (1.23)$$

с.щ. (1.6)-(1.8), стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, який було розглянуто вище. Тоді за формулою (1.11) коваріаційній функції $B^s(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, відповідає с.щ.

$$f^{(s)}(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}^{*s}(\lambda + 2\pi k), \quad \lambda \in [-\pi, \pi], \quad s \geq 2. \quad (1.24)$$

Будемо вважати за означенням, що $\tilde{f}^{*1}(\lambda) = \tilde{f}(\lambda)$ та $f^{(1)}(\lambda) = f(\lambda)$, до того ж, сформулюємо для функції $W \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}, \varphi(x) dx)$ наступну альтернативу.

A3. Або (i) $Hrank(W) = 1$, $\alpha > \frac{1}{2}$,
або (ii) $Hrank(W) = m$, $m\alpha > 1$, де

$$\alpha = \min_{0 \leq l \leq r} \alpha_l, \quad (1.25)$$

α_l – параметри коваріаційної функції (1.3) стаціонарного часового ряду ξ_t , $t \in \mathbb{Z}$.

Нехай для функції W виконується умова (i). При виконанні умови (ii) подальші міркування аналогічні. Звідси коваріаційна функція $B(t)$, $t \in \mathbb{R}$, за формулами (1.4), (1.5) інтегрована з квадратом на $\mathbb{R}$ і згортка

$$\tilde{f}^{*2}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} B^2(t) dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (1.26)$$

є обмеженою та неперервною функцією. До того ж, для будь-якого $s \geq 2$

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{*s}(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} B^s(t) dt \leq \\ &\leq \frac{B^{s-2}(0)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B^2(t) dt < \infty, \end{aligned} \quad (1.27)$$

і всі згортки $\tilde{f}^{*s}$ неперервні та обмежені однією константою, враховуючи наше припущення $B(0) = 1$.

Також зауважимо, що з рівності

$$B^s(t) = \left(\sum_{l=0}^s A_l B_{\alpha_l, \lambda_l}(t) \right)^s, \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \geq 2, \quad (1.28)$$

після підведення правої частини в s -й степінь видно, що с.щ. $\tilde{f}^{*s}(\lambda)$ є лінійною комбінацією функцій Макдональда порядків $\nu > 1$, для яких справедлива асимптотична формула (1.12). Таким чином, ряд (1.24) збігається рівномірно за $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

Сформулюємо теорему про асимптотичну нормальність зваженої векторної суми значень нелінійного перетворення гауссівської стаціонарної випадкової послідовності з сингулярним спектром, яку доведено в роботі [14]. Нам знадобиться додаткова умова

B3. Для $T > T_0$,

$$d_{iT}^{-1}(\theta^0) \max_{t=\overline{1, T}} |g_i(t, \theta^0)| \leq k^i(0) \cdot T^{-1/2}, \quad i = \overline{1, q}. \quad (1.29)$$

Теорема 2. Нехай виконуються умови **A1**, **A2**, **B1-B3** та одна з наступних умов для функції $W \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}, \varphi(x) dx)$:

(i) $Hrank(W) = 1$, $\alpha > \frac{1}{2}$ та с.щ. f часового ряду ε_t , $t \in \mathbb{Z}$, є μ -припустимою;

(ii) $Hrank(W) = m$ та $m\alpha > 1$, де α задана формулою (1.25). Тоді випадковий вектор

$$\zeta_T = d_T^{-1}(\theta^0) \sum_{t=1}^T W(\xi_t) \nabla g(t, \theta^0),$$

$$\nabla g(t, \theta^0) = (g_1(t, \theta^0), \dots, g_q(t, \theta^0))^* \quad (1.30)$$

асимптотично нормальний $N(0, \sigma)$ при $N \rightarrow \infty$, де

$$\sigma = 2\pi \sum_{s=m}^{\infty} \frac{C_s^2(W)}{s!} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(s)}(\lambda) \mu(d\lambda, \theta^0). \quad (1.31)$$

Як було вказано у вступі, нас особливо цікавить тригонометрична функція регресії

$$g(t, \theta^0) = \sum_{k=1}^N (A_k^0 \cos \varphi_k^0 t + B_k^0 \sin \varphi_k^0 t), \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} \theta^0 &= (\theta_1^0, \theta_2^0, \theta_3^0, \dots, \theta_{3N-2}^0, \theta_{3N-1}^0, \theta_{3N}^0) = \\ &= (A_1^0, B_1^0, \varphi_1^0, \dots, A_N^0, B_N^0, \varphi_N^0), \end{aligned}$$

$(C_k^0)^2 = (A_k^0)^2 + (B_k^0)^2 > 0$, $k = \overline{1, N}$. Розмістимо частоти $\varphi^0 = (\varphi_1^0, \dots, \varphi_N^0)$ у порядку зростання. Розглянемо монотонно неспадну сім'ю відкритих множин

$$\Phi_T \subset \Phi(\varphi, \overline{\varphi}), \quad T > T_0 > 0,$$

$$\Phi(\varphi, \overline{\varphi}) = \{\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N) \in \mathbb{R}^N :$$

$$0 \leq \varphi < \varphi_1 < \dots < \varphi_N < \overline{\varphi} < \pi\},$$

стосовно яких припустимо, що вони містять істинне значення параметра φ^0 та задовольняють умовам

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{1 \leq j < k \leq N} T(\varphi_k - \varphi_j) = +\infty, \quad \varphi \in \Phi_T, \quad (1.33)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{\varphi \in \Phi_T} T\varphi_1 = +\infty. \quad (1.34)$$

Умови (1.33) та (1.34) – це умови розрізнення параметрів тригонометричної моделі регресії (1.1) та (1.32).

Позначимо

$$Q_T(\theta) = T^{-1} \sum_{t=1}^T [X(t) - g(t, \theta)]^2.$$

Означення 4. Будемо називати о.н.к. параметра θ^0 у сенсі Уолкера [15] такий випадковий вектор $\hat{\theta}_T = (A_{1T}, B_{1T}, \varphi_{1T}, \dots, A_{NT}, B_{NT}, \varphi_{NT})$, що мінімізує функціонал $Q_T(\theta)$ на параметричній множині $\Theta_T \subset \mathbb{R}^{3N}$, в якій амплітуди $A_k, B_k, k = \overline{1, N}$, можуть набувати будь-які значення, а кутові частоти $\varphi \in \Phi_T^c$, де Φ_T^c – замикання множини Φ_T .

Коли $\varphi > 0$, умова (1.34) виконується. Якщо $\varphi = 0$ та $\Phi_T \subset \Phi(0, \overline{\varphi})$, то для виконання (1.33), (1.34) можемо взяти, наприклад, параметричні множини Φ_T , для яких

$$\inf_{1 \leq j < k \leq N} (\varphi_k - \varphi_j) = T^{-1/2}, \quad \inf_{\varphi \in \Phi_T} \varphi_1 = T^{-1/2}.$$

Неважко перевірити, що тригонометрична функція регресії задовольняє умовам **B2** та **B3**, щодо умови **B1** див. розділ 4.

2 Теорема редукції

В цьому розділі для загальної моделі регресії (1.1) ми доводимо теорему редукції, яка дозволяє замінити вивчення асимптотичного розподілу о.н.к. в нелінійній моделі вивченням асимптотичного розподілу о.н.к. у деякій допоміжній лінійній моделі. Таким чином, вказана теорема редукції, фактично, є теоремою лінеаризації.

Означення 5. О.н.к. невідомого параметра $\theta^0 = (\theta_1^0, \dots, \theta_q^0) \in \Theta_T$, $T > T_0$, отриманої за спостереженнями $X_t, t = \overline{1, T}$, у моделі спостережень (1.1) називається будь-який вектор $\hat{\theta}_T = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_q) \in \Theta_T^c$, де Θ_T^c – замикання множини Θ_T , для якого

$$Q_T(\hat{\theta}_T) = \min_{\theta \in \Theta_T^c} Q_T(\theta). \quad (2.1)$$

Означення 5 узагальнює означення 4 о.н.к. в сенсі Уолкера для тригонометричної функції регресії (1.32). Існування хоча б одного означеного вище випадкового вектора впливає із теореми (3.10), стор. 270, роботи І. Пфанцалля [16], якщо $\min_{\theta \in \Theta_T^c} Q_T(\theta)$ досягається для кожного $\omega \in \Omega$.

Зробимо наступні припущення. Нехай функція регресії $g(t, \cdot) \in \mathbb{C}^2(\Theta_\gamma)$, $t \in \mathbb{N}$, та $\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} d_{iT}^2(\theta) > 0$, $\theta \in \Theta$, $i = \overline{1, q}$. Позначимо

$$d_T^2(\theta) = \text{diag}(d_{iT}^2(\theta))_{i=1}^q,$$

$$g_{il}(t, \theta) = \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_l} g(t, \theta), \quad i, l = \overline{1, q}, \quad (2.2)$$

$$d_{il,T}^2(\theta) = \sum_{t=1}^T g_{il}^2(t, \theta), \quad i, l = \overline{1, q}. \quad (2.3)$$

Введемо нормовану о.н.к.

$$\hat{u}_T = d_T(\theta^0)(\hat{\theta}_T - \theta^0). \quad (2.4)$$

Виконаємо заміну змінних $u = d_T(\theta^0)(\theta - \theta^0)$, $\theta \in \Theta_T^c$, яка відповідає нормуванню (2.4) у функції регресії та її похідних, і запишемо для $u \in U_T(\theta^0) = d_T(\theta^0)(\Theta_T^c - \theta^0)$

$$h(t, u) = g(t, \theta^0 + d_T^{-1}(\theta^0)u),$$

$$H(t; u_1, u_2) = h(t, u_1) - h(t, u_2),$$

$$h_i(t, u) = g_i(t, \theta^0 + d_T^{-1}(\theta^0)u), \quad i = \overline{1, q},$$

$$H_i(t; u_1, u_2) = h_i(t, u_1) - h_i(t, u_2),$$

$$h_{il}(t, u) = g_{il}(t, \theta^0 + d_T^{-1}(\theta^0)u), \quad i, l = \overline{1, q}.$$

Будемо також використовувати позначення

$$V(R) = \{u \in \mathbb{R}^q : \|u\| < R\}.$$

Припустимо, що для $R \geq 0$ і $T > T_0(R)$ виконується наступна умова на зростання похідних 1-го та 2-го порядків функції регресії.

$$\begin{aligned} \text{B4. (i)} \quad & \max_{t=\overline{1, T}, u \in V^c(R) \cap U_T(\theta^0)} \frac{|h_i(t, u)|}{d_{iT}(\theta^0)} \leq \\ & \leq k^i(R) \cdot T^{-1/2}, \quad i = \overline{1, q}; \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad & \max_{t=\overline{1, T}, u \in V^c(R) \cap U_T(\theta^0)} \frac{|h_{il}(t, u)|}{d_{il,T}(\theta^0)} \leq \\ & \leq k^{il}(R) \cdot T^{-1/2}, \quad i, l = \overline{1, q}; \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad & \frac{d_{il,T}(\theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)} \leq \tilde{k}^{il} \cdot T^{-1/2}, \\ & i, l = \overline{1, q}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

В умові **B4** припускається, що константи $k^i, k^{il}, \tilde{k}^{il}$, $i, l = \overline{1, q}$, можуть залежати від істинного значення параметра $\theta^0 \in \Theta$. Зауважимо також, що при $R = 0$ умова **B4(i)** перетворюється на умову **B3** розділу 1.

Введемо вектори

$$\Psi_T(u) = \left(\Psi_T^i(u) \right)_{i=1}^q,$$

$$\begin{aligned} \Psi_T^i(u) &= \sum_{t=1}^T \varepsilon_t \frac{h_i(t, u)}{d_{iT}(\theta^0)} + \sum_{t=1}^T H(t; 0, u) \frac{h_i(t, u)}{d_{iT}(\theta^0)}, \\ & i = \overline{1, q}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

та

$$L_T(u) = \left(L_T^i(u) \right)_{i=1}^q,$$

$$L_T^i(u) = \sum_{t=1}^T \left(\varepsilon_t - \sum_{l=1}^q \frac{g_l(t, \theta^0)}{d_{lT}(\theta^0)} u_l \right) \frac{g_i(t, \theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)},$$

$$i = \overline{1, q}. \quad (2.9)$$

Нормована о.н.к. $\hat{u}_T = d_T(\theta^0)(\hat{\theta}_T - \theta^0)$ задовольняє систему нормальних рівнянь

$$\Psi_T(u) = 0. \quad (2.10)$$

Вектор $L_T(u)$ відповідає допоміжній лінійній регресійній моделі

$$Z(t) = \sum_{i=1}^q g_i(t, \theta^0) \beta_i + \varepsilon_t, \quad t = \overline{1, T}, \quad (2.11)$$

і система нормальних рівнянь

$$L_T(u) = 0 \quad (2.12)$$

задає нормовану о.н.к. $\tilde{u}_T$ параметра $\beta \in \mathbb{R}^q$, якщо ми покладемо

$$\tilde{u}_T = d_T(\theta^0)(\tilde{\beta}_T - \beta), \quad (2.13)$$

де $\tilde{\beta}_T$ – звичайна о.н.к. параметра β моделі (2.11).

Теорема 3. Якщо виконуються умови **A1**, **A2**, а також умова **B4**, то для довільних $R > 0$, $r > 0$

$$\mathbb{P} \left\{ \max_{u \in V^c(R)} \|\Psi_T(u) - L_T(u)\| > r \right\} \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty. \quad (2.14)$$

Доведення. Для довільного $i = \overline{1, q}$

$$\begin{aligned} \Psi_T^i(u) - L_T^i(u) &= \sum_{t=1}^T \varepsilon_t \frac{h_i(t, u)}{d_{iT}(\theta^0)} + \\ &+ \sum_{t=1}^T H(t; 0, u) \frac{h_i(t, u)}{d_{iT}(\theta^0)} - \sum_{t=1}^T \varepsilon_t \frac{g_i(t, \theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)} + \\ &+ \sum_{t=1}^T \frac{g_i(t, \theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)} \sum_{l=1}^q \frac{g_l(t, \theta^0)}{d_{lT}(\theta^0)} u_l = \\ &= \sum_{t=1}^T \varepsilon_t \frac{H_i(t; u, 0)}{d_{iT}(\theta^0)} + \sum_{t=1}^T H(t; 0, u) \frac{H_i(t; u, 0)}{d_{iT}(\theta^0)} + \\ &+ \sum_{t=1}^T \frac{g_i(t, \theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)} \left[H(t; 0, u) + \sum_{l=1}^q \frac{g_l(t, \theta^0)}{d_{lT}(\theta^0)} u_l \right] = \\ &= s_1(u) + s_2(u) + s_3(u). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Для фіксованого $u \in V^c(R)$ маємо

$$\begin{aligned} \mathbb{E} s_1^2(u) &= \mathbb{E} \left(\sum_{t=1}^T \varepsilon_t \frac{H_i(t; u, 0)}{d_{iT}(\theta^0)} \right)^2 = \\ &= \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T \frac{H_i(t; u, 0)}{d_{iT}(\theta^0)} \cdot \frac{H_i(s; u, 0)}{d_{iT}(\theta^0)} \mathbb{E} \varepsilon_t \varepsilon_s \leq \\ &\leq \max_{t=\overline{1, T}} \frac{H_i^2(t; u, 0)}{d_{iT}^2(\theta^0)} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T |\mathbb{E} \varepsilon_t \varepsilon_s|. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Використовуючи формулу скінченних приростів та умову **B4**, отримуємо

$$\begin{aligned} \max_{t=\overline{1, T}} \frac{|H_i(t; u, 0)|}{d_{iT}(\theta^0)} &\leq \\ &\leq \sum_{l=1}^q \max_{u \in V^c(R), t=\overline{1, T}} \frac{|h_{il}(t, u)|}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} |u_l| = \\ &= \sum_{l=1}^q \max_{u \in V^c(R), t=\overline{1, T}} \frac{|h_{il}(t, u)|}{d_{il,T}(\theta^0)} \frac{d_{il,T}(\theta^0)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} |u_l| \leq \\ &\leq R \left(\sum_{l=1}^q k^{il}(R) \tilde{k}^{il} \right) T^{-1}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Тоді

$$\mathbb{E} s_1^2(u) \leq R^2 \left(\sum_{l=1}^q k^{il}(R) \tilde{k}^{il} \right)^2 T^{-2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T |\mathbb{E} \varepsilon_t \varepsilon_s|.$$

Доведемо, що

$$T^{-2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T |\mathbb{E} \varepsilon_t \varepsilon_s| \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty. \quad (2.18)$$

За умов **A1**, **A2**

$$\begin{aligned} |\mathbb{E} \varepsilon_t \varepsilon_s| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k^2(G)}{k!} B^k(t-s) \right| \leq \\ &\leq \mathbb{E} G^2(\xi_0) |B(t-s)|, \end{aligned} \quad (2.19)$$

тобто для доведення (2.18) достатньо довести, що

$$T^{-2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T |B(t-s)| \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty.$$

Нехай виконується умова **A2**, тоді

$$\begin{aligned} T^{-2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T |B(t-s)| &= \\ &= T^{-2} \sum_{t=-(T-1)}^{T-1} (T-|t|) |B(t)| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq T^{-1} \sum_{t=-(T-1)}^{T-1} |B(t)| = \\ &= T^{-1} B(0) + 2T^{-1} \sum_{t=1}^{T-1} |B(t)|. \end{aligned}$$

Якщо $\alpha = \min_{0 \leq j \leq r} \alpha_j \in (0, 1)$, то при $t \geq 1$

$$|B(t)| \leq t^{-\alpha};$$

$$\sum_{t=1}^{T-1} |B(t)| \leq \sum_{t=1}^{T-1} t^{-\alpha} \leq \int_0^T t^{-\alpha} dt = \frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

тобто

$$T^{-1} + 2T^{-1} \sum_{t=1}^{T-1} |B(t)| = O(T^{-\alpha}).$$

Тоді отримуємо, що $s_1(u) \xrightarrow{P} 0$ при $T \rightarrow \infty$ поточково для $u \in V^c(R)$. З іншого боку,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} \left\{ \max_{\|u_1 - u_2\| \leq h} |s_1(u_1) - s_1(u_2)| > r \right\} \leq \\ &\leq r^{-1} \mathbb{E} \max_{\|u_1 - u_2\| \leq h} \left| \sum_{t=1}^T \varepsilon \frac{H_i(t; u_1, u_2)}{d_{iT}(\theta^0)} \right| \leq \\ &\leq r^{-1} \max_{\|u_1 - u_2\| \leq h} \max_{t=1, T} \frac{|H_i(t; u_1, u_2)|}{d_{iT}(\theta^0)} \mathbb{E} |\varepsilon_0| T. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Використовуючи умову **B4**, маємо

$$\begin{aligned} &\max_{\|u_1 - u_2\| \leq h} \max_{t=1, T} \frac{|H_i(t; u_1, u_2)|}{d_{iT}(\theta^0)} \leq \\ &\leq h \left[\sum_{l=1}^q \max_{u \in V^c(R), t=1, T} \frac{|h_{il}(t, u)|}{d_{il,T}(\theta^0)} \frac{d_{il,T}(\theta^0)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} \right] \leq \\ &\leq h \left(\sum_{l=1}^q k^{il}(R) \cdot \tilde{k}^{il} \right) T^{-1}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Із (2.21) випливає нерівність

$$\mathbb{P} \left\{ \max_{\|u_1 - u_2\| \leq h} |s_1(u_1) - s_1(u_2)| > r \right\} \leq k_1 r^{-1} h, \quad (2.22)$$

де

$$k_1 = \left(\sum_{l=1}^q k^{il}(R) \tilde{k}^{il} \right) \mathbb{E} |\varepsilon_0|.$$

Позначимо N_h скінченну h -сітку кулі $V^c(R)$. Тоді

$$\max_{u \in V^c(R)} |s_1(u)| \leq$$

$$\leq \max_{\|u_1 - u_2\| \leq h} |s_1(u_1) - s_1(u_2)| + \max_{u \in N_h} |s_1(u)|. \quad (2.23)$$

З (2.20), (2.21) маємо для будь-якого $r > 0$

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} \left\{ \max_{u \in V^c(R)} |s_1(u)| > r \right\} \leq \\ &\leq 2k_1 r^{-1} h + \mathbb{P} \left\{ \max_{u \in N_h} |s_1(u)| > \frac{r}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Для $\varepsilon > 0$ задамо $h = \frac{\varepsilon r}{4k_1}$. Тоді для $T > T_0$ завдяки поточковій збіжності $s_1(u)$ до нуля за ймовірністю,

$$\mathbb{P} \left\{ \max_{u \in N_{\frac{\varepsilon r}{4k_1}}} |s_1(u)| > \frac{r}{2} \right\} \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

і, таким чином,

$$\mathbb{P} \left\{ \max_{u \in V^c(R)} |s_1(u)| > r \right\} \leq \varepsilon.$$

Отже, $s_1(u)$ збігається рівномірно за $u \in V^c(R)$ до нуля за ймовірністю.

За умови **B4** отримуємо

$$\begin{aligned} &\max_{u \in V^c(R)} \max_{t=1, T} |H(t; 0, u)| = \\ &= \max_{u \in V^c(R)} \max_{t=1, T} \left| \sum_{i=1}^q \frac{h_i(t, u_t^*)}{d_{iT}(\theta^0)} u_i \right| \leq \\ &\leq R \left[\max_{u \in V^c(R), t=1, T} \sum_{i=1}^q \left(\frac{h_i(t, u)}{d_{iT}(\theta^0)} \right)^2 \right]^{1/2} \leq \\ &\leq \|k(R)\| \cdot R \cdot T^{-1/2}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

де $k(R) = (k^1(R), \dots, k^q(R))$. Тоді, за допомогою (2.17) та (2.25), можемо записати

$$\begin{aligned} &\max_{u \in V^c(R)} |s_2(u)| = \\ &= \max_{u \in V^c(R)} \left| \sum_{t=1}^T H(t; 0, u) \frac{H_i(t; u, 0)}{d_{iT}(\theta^0)} \right| \leq \\ &\leq T \max_{u \in V^c(R)} \max_{t=1, T} \left| H(t; 0, u) \frac{H_i(t; u, 0)}{d_{iT}(\theta^0)} \right| \leq \\ &\leq T^{-1/2} \cdot R^2 \cdot \|k(R)\| \cdot \left(\sum_{l=1}^q k^{il}(R) \tilde{k}^{il} \right), \end{aligned}$$

а, отже, $s_2(u)$ рівномірно за $u \in V^c(R)$ при $T \rightarrow \infty$ збігається до 0.

Зауважимо, що $s_3(u)$ можна переписати у вигляді

$$s_3(u) = \sum_{t=1}^T \frac{g_i(t, \theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)} \left[H(t; 0, u) + \sum_{l=1}^q \frac{g_l(t, \theta^0)}{d_{lT}(\theta^0)} u_l \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{g_i(t, \theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)} \sum_{l,j=1}^q \frac{h_{lj}(t, u_t^*)}{d_{lT}(\theta^0) d_{jT}(\theta^0)} u_l u_j = \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{l,j=1}^q \left(\frac{h_{lj}(t, u_t^*)}{d_{lT}(\theta^0) d_{jT}(\theta^0)} \frac{g_i(t, \theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)} \right) u_l u_j, \\
 &u_t^* \in V(R).
 \end{aligned}$$

Тоді за умови **B4**

$$\begin{aligned}
 \max_{u \in V^c(R)} |s_3(u)| &\leq \frac{T}{2} \cdot k^i(R) \times \\
 &\times \max_{u \in V^c(R)} \left(\sum_{l,j=1}^q k^{lj}(R) \tilde{k}^{lj} |u_l| |u_j| \right) T^{-3/2} \leq \\
 &\leq \frac{q k^i(R)}{2} \max_{1 \leq l, j \leq q} [k^{lj}(R) \tilde{k}^{lj}] R^2 T^{-1/2}.
 \end{aligned}$$

Отже, $s_3(u)$ рівномірно за $u \in V^c(R)$ при $T \rightarrow \infty$ збігається до 0. ■

Зауваження 1. Твердження теореми 3 є вірним для о.н.к. $\hat{\theta}_T$ із означення 4, так як тригонометрична фінкції регресії задовольняє умові **B4**.

3 Асимптотична єдиність оцінки найменших квадраів

В даному розділі буде доведено, що з ймовірністю, яка прямує до 1 при $T \rightarrow \infty$, нормована о.н.к. $\hat{u}_T$ з (2.4), де о.н.к. $\hat{\theta}_T$ задано означенням 5, є єдиним розв'язком системи рівнянь (2.10). Цей факт використаємо у розділі 4 при доведенні асимптотичної нормальності о.н.к. $\hat{\theta}_T$.

Запишемо

$$\begin{aligned}
 J_T(\theta) &= \left(J_{il,T}(\theta) \right)_{i,l=1}^q, \\
 J_{il,T}(\theta) &= d_{iT}^{-1}(\theta) d_{lT}^{-1}(\theta) \sum_{t=1}^T g_i(t, \theta) g_l(t, \theta), \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

$\lambda_{\min}(A)(\lambda_{\max}(A))$ – найменше (найбільше) власне число додатно визначеної матриці A .

B5. Для деякого $\lambda_* > 0$ при $T > T_0$

$$\lambda_{\min}(J_T(\theta^0)) \geq \lambda_*. \quad (3.2)$$

Розглянемо нормовану о.н.к.

$$\hat{w}_T = T^{-1/2} d_T(\theta^0) (\hat{\theta}_T - \theta^0), \quad (3.3)$$

якій відповідає заміна змінних

$w = T^{-1/2} d_T(\theta^0) (\theta - \theta^0)$ у функції регресії та її похідних.

Введемо позначення

$$f(t, w) = g(t, \theta^0 + T^{1/2} d_T^{-1}(\theta^0) w),$$

$$f_i(t, w) = g_i(t, \theta^0 + T^{1/2} d_T^{-1}(\theta^0) w),$$

$$f_{il}(t, w) = g_{il}(t, \theta^0 + T^{1/2} d_T^{-1}(\theta^0) w),$$

$$i, l = \overline{1, q}.$$

Також використаємо наступні позначення

$$F(t; w_1, w_2) = f(t, w_1) - f(t, w_2),$$

$$F_i(t; w_1, w_2) = f_i(t, w_1) - f_i(t, w_2),$$

$$F_{il}(t; w_1, w_2) = f_{il}(t, w_1) - f_{il}(t, w_2),$$

$$\Phi_{il,T}(w, 0) = \sum_{t=1}^T F_{il}^2(t; w, 0), \quad i, l = \overline{1, q}.$$

Введемо умову

B6. Для деякого $r_0 > 0$

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad \max_{t=\overline{1, T}, w \in V^c(r_0)} \frac{|f_i(t, w)|}{d_{iT}(\theta^0)} &\leq \\
 &\leq \hat{k}^i(r_0) \cdot T^{-1/2}, \quad i = \overline{1, q}; \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad \max_{t=\overline{1, T}, w \in V^c(r_0)} \frac{|f_{il}(t, w)|}{d_{il,T}(\theta^0)} &\leq \\
 &\leq \hat{k}^{il}(r_0) \cdot T^{-1/2}, \quad i, l = \overline{1, q}; \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(iii)} \quad \max_{w \in V^c(r_0)} \frac{T \Phi_{il,T}(w, 0)}{d_{iT}^2(\theta^0) d_{lT}^2(\theta^0)} \|w\|^{-2} &\leq \\
 &\leq \hat{k}_{il}(r_0), \quad i, l = \overline{1, q}. \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

Звернемо увагу на те, що нерівності (3.4) та (3.5) є модифікаціями нерівностей (2.5) та (2.6) з умови **B4**, відповідно.

Розглянемо функціонал

$$\begin{aligned}
 (2T)^{-1} \sum_{t=1}^T [X(t) - f(t, w)]^2 &= \\
 &= \frac{1}{2} Q_T(\theta^0 + T^{1/2} d_T^{-1}(\theta^0) w) \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

і введемо вектор

$$\mathcal{M}_T(w) = (\mathcal{M}_T^i(w))_{i=1}^q =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{\partial}{\partial w_i} \left(\frac{1}{2} Q_T(\theta^0 + T^{1/2} d_T^{-1}(\theta^0) w) \right) \right)_{i=1}^q = \\
 &= \left(T^{-1/2} \sum_{t=1}^T [X(t) - f(t, w)] \frac{-f_i(t, w)}{d_{iT}(\theta^0)} \right)_{i=1}^q.
 \end{aligned}$$

Тоді нормована о.н.к. $\hat{w}_T$ задовольняє систему рівнянь

$$\mathcal{M}_T(w) = 0. \quad (3.8)$$

Варто зауважити, що якщо нормована о.н.к. $\hat{w}_T$ є єдиним розв'язком системи рівнянь (3.8), тоді $\hat{u}_T$ є єдиним розв'язком системи рівнянь (2.10).

Ми будемо вимагати, що нормована о.н.к. $\hat{w}_T$ є слабо консистентною, тобто виконується умова

С. Для будь-якого $r > 0$ $\mathbb{P} \{ \|\hat{w}_T\| > r \} \rightarrow 0$,
 $T \rightarrow \infty$.

Достатні умови слабкої консистентності для тригонометричної моделі з неперервним часом спостереження містяться в роботі [7].

Теорема 4. Нехай виконуються умови **A1**, **A2** та **B4(iii)**, **B5**, **B6**, **C**. Тоді нормована о.н.к. $\hat{w}_T$ з ймовірністю, що прямує до 1 при $T \rightarrow \infty$, є єдиним розв'язком системи рівнянь (3.8).

Доведення. Розглянемо загальний елемент матриці Гессе функціонала (3.7)

$$\mathcal{H}_T = (\mathcal{H}_T^{il}(w))_{i,l=1}^q:$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_T^{il}(w) &= \frac{\partial^2}{\partial w_i \partial w_l} \left(\frac{1}{2} Q_T(\theta^0 + T^{1/2} d_T^{-1}(\theta^0) w) \right) = \\ &= T^{-1} \sum_{t=1}^T \left([X(t) - f(t, w)] \frac{-f_{il}(t, w)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} T + \right. \\ &\quad \left. + \frac{f_i(t, w) f_l(t, w)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} T \right) = \\ &= \sum_{t=1}^T [F(t; 0, w) + \varepsilon_t] \frac{-f_{il}(t, w)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} + \\ &\quad + \sum_{t=1}^T \frac{f_i(t, w) f_l(t, w)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} = \\ &= \sum_{t=1}^T F(t; w, 0) \frac{f_{il}(t, w)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} - \\ &\quad - \sum_{t=1}^T \varepsilon_t \frac{f_{il}(t, w)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} + \\ &\quad + \sum_{t=1}^T \frac{(f_i(t, w) - f_i(t, 0) + f_i(t, 0)) \times}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} \times \\ &\quad \times \frac{(f_l(t, w) - f_l(t, 0) + f_l(t, 0))}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} = \\ &= q_1(w) + q_2(w) + \\ &\quad + \sum_{t=1}^T \frac{(f_i(t, w) - f_i(t, 0))(f_l(t, w) - f_l(t, 0))}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{t=1}^T \frac{(f_i(t, w) - f_i(t, 0)) f_l(t, 0)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} + \\ &+ \sum_{t=1}^T \frac{(f_l(t, w) - f_l(t, 0)) f_i(t, 0)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} + \\ &+ \sum_{t=1}^T \frac{f_i(t, 0) f_l(t, 0)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} = \\ &= q_1(w) + q_2(w) + q_3(w) + q_4(w) + \\ &\quad + q_5(w) + J_{il,T}(\theta^0), \quad i, l = \overline{1, q}. \quad (3.9) \end{aligned}$$

Використовуючи нерівність (iii доведення наведено у [17], стор.103)

$$\begin{aligned} &|\lambda_{\min}(\mathcal{H}_T(w)) - \lambda_{\min}(J_T(\theta^0))| \leq \\ &\leq q \max_{1 \leq i, l \leq q} |\mathcal{H}_T^{il}(w) - J_{il,T}(\theta^0)|, \quad (3.10) \end{aligned}$$

отримуємо

$$\max_{1 \leq i, l \leq q} |\mathcal{H}_T^{il}(w) - J_{il,T}(\theta^0)| \leq \sum_{m=1}^5 \max_{1 \leq i, l \leq q} |q_m(w)|. \quad (3.11)$$

Застосовуючи умови теореми, одержуємо для $\|w\| \leq r_0$

$$\begin{aligned} |q_1(w)| &= \left| \sum_{t=1}^T F(t; w, 0) \frac{f_{il}(t, w)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} \right| \leq \\ &\leq T \max_{t=\overline{1, T}} \left| F(t; w, 0) \frac{f_{il}(t, w)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} \right| \leq \\ &\leq T \hat{k}^{il}(r_0) \tilde{k}^{il} T^{-1} \max_{t=\overline{1, T}} |F(t; w, 0)| \leq \\ &\leq \hat{k}^{il}(r_0) \tilde{k}^{il} T^{-1} \max_{t=\overline{1, T}} |f(t, w) - f(t, 0)| = \\ &= \hat{k}^{il}(r_0) \tilde{k}^{il} T^{-1} \max_{t=\overline{1, T}} \left| T^{1/2} \sum_{l=1}^q \frac{f_l(t, w_t^*)}{d_{lT}(\theta^0)} w_l \right| \leq \\ &\leq \hat{k}^{il}(r_0) \tilde{k}^{il} T^{1/2} \times \\ &\times \left(\sum_{l=1}^q \max_{t=\overline{1, T}} \left(\frac{f_l(t, w_t^*)}{d_{lT}(\theta^0)} \right)^2 \right)^{1/2} \|w\| \leq \\ &\leq \|\hat{k}(r_0)\| \cdot \hat{k}^{il}(r_0) \cdot \tilde{k}^{il} \cdot \|w\|, \quad (3.12) \end{aligned}$$

$$\hat{k}(r_0) = (\hat{k}_1(r_0), \dots, \hat{k}_q(r_0)), \quad \|w_t^*\| \leq \|w\|, \quad t = \overline{1, T}.$$

Далі розглянемо

$$\begin{aligned} |q_2(w)| &= \left| \sum_{t=1}^T \varepsilon_t \frac{f_{il}(t, w)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} \right| = \\ &= \left| \sum_{t=1}^T \varepsilon_t \frac{F_{il}(t, w, 0)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} + \sum_{t=1}^T \varepsilon_t \frac{f_{il}(t, 0)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} \right| \leq \end{aligned}$$

$$\leq |q_6(w)| + |q_7(w)|. \quad (3.13) \quad \text{Оскільки}$$

Із умови **B6(iii)** отримуємо

$$\begin{aligned} |q_6(w)| &= \left| \sum_{t=1}^T \varepsilon_t \frac{F_{il}(t, w, 0)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} \right| \leq \\ &\leq \left(T^{-1} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2 \right)^{1/2} \left(T \frac{\Phi_{il,T}(w, 0)}{d_{iT}^2(\theta^0) d_{lT}^2(\theta^0)} \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(T^{-1} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2 \right)^{1/2} \hat{k}_{il}^{1/2}(r_0) \|w\|. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Тепер маємо

$$\begin{aligned} \left(T^{-1} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2 \right)^{1/2} &= \\ &= \left(T^{-1} \sum_{t=1}^T (\varepsilon_t^2 - \mathbb{E}\varepsilon_0^2) + \mathbb{E}\varepsilon_0^2 \right)^{1/2} = \\ &= (\xi_T + \mathbb{E}\varepsilon_0^2)^{1/2}, \\ \mathbb{E}\xi_T^2 &= T^{-2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T (\mathbb{E}\varepsilon_t^2 \varepsilon_s^2 - (\mathbb{E}\varepsilon_0^2)^2). \end{aligned}$$

Доведемо, що

$$T^{-2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T \mathbb{E}\varepsilon_t^2 \varepsilon_s^2 \rightarrow (\mathbb{E}\varepsilon_0^2)^2, \quad T \rightarrow \infty. \quad (3.15)$$

За умови **A1** функцію $G^2(x)$ можна розкласти в ряд в гільбертовому просторі $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}, \varphi(x) dx)$ за поліномами Чебишова-Ерміта:

$$\begin{aligned} G^2(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k(G^2)}{k!} H_k(x), \\ C_k(G^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} G^2(x) H_k(x) \phi(x) dx, \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\varepsilon_t^2 \varepsilon_s^2 - (\mathbb{E}\varepsilon_0^2)^2 &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^2(G^2)}{k!} B^k(t-s) - (\mathbb{E}\varepsilon_0^2)^2 = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k^2(G^2)}{k!} B^k(t-s) \leq \\ &\leq |B(t-s)| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k^2(G^2)}{k!}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k^2(G^2)}{k!} &= \mathbb{E}G^4(\xi(0)) - (\mathbb{E}G^2(\xi(0)))^2 = \\ &= \mathbb{D}G^2(\xi(0)) < \infty, \end{aligned} \quad (3.17)$$

то із (3.16), (3.17) та (2.18), маємо при $T \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} T^{-2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T \mathbb{E}\varepsilon_t^2 \varepsilon_s^2 - (\mathbb{E}\varepsilon_0^2)^2 &\leq \\ &\leq \mathbb{D}G^2(\xi(0)) T^{-2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T |B(t-s)| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

як було доведено у розділі 2. Введемо наступне позначення

$$\xi_T = o_p^{(1)}(1) \xrightarrow{P} 0, \quad T \rightarrow \infty. \quad (3.18)$$

Далі, опираючись на умови **B6**, отримуємо

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|q_7(w)|^2 &= \mathbb{E} \left| \sum_{t=1}^T \varepsilon_t \frac{f_{il}(t, 0)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} \right|^2 \leq \\ &\leq \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T |\mathbb{E}\varepsilon_t \varepsilon_s| \left(\max_{t=1, T} \frac{|f_{il}(t, 0)|}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} \right)^2 \leq \\ &\leq (\hat{k}^{il}(r_0) \cdot \tilde{k}^{il})^2 \cdot T^{-2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T |B(t-s)|, \end{aligned} \quad (3.19)$$

звідси,

$$|q_7(w)| = o_p^{(2)}(1) \xrightarrow{P} 0, \quad T \rightarrow \infty. \quad (3.20)$$

Продовжимо далі оцінювати доданки суми (3.9). Отримуємо

$$\begin{aligned} |q_3(w)| &= \left| \sum_{t=1}^T \frac{(f_i(t, w) - f_i(t, 0)) \times}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{(f_l(t, w) - f_l(t, 0))}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} \right| \leq \\ &\leq T^2 \sum_{j=1}^q \sum_{s=1}^q \max_{t=1, T} \frac{|f_{ij}(t, w_{1t}^*)|}{d_{iT}(\theta^0) d_{jT}(\theta^0)} \times \\ &\quad \times \max_{t=1, T} \frac{|f_{ls}(t, w_{2t}^*)|}{d_{lT}(\theta^0) d_{sT}(\theta^0)} \cdot |w_j| \cdot |w_s| \leq \\ &\leq T^2 \sum_{j=1}^q \sum_{s=1}^q \max_{t=1, T} \frac{|f_{ij}(t, w_{1t}^*)|}{d_{ij,T}(\theta^0)} \frac{d_{ij,T}(\theta^0)}{d_{iT}(\theta^0) d_{jT}(\theta^0)} \times \\ &\quad \times \max_{t=1, T} \frac{|f_{ls}(t, w_{2t}^*)|}{d_{ls,T}(\theta^0)} \cdot \frac{d_{ls,T}(\theta^0)}{d_{lT}(\theta^0) d_{sT}(\theta^0)} |w_j| \cdot |w_s| \leq \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^q (\hat{k}^{ij}(r_0) \cdot \tilde{k}^{ij})^2 \right)^{1/2} \times \end{aligned}$$

$$\times \left(\sum_{s=1}^q \left(\hat{k}^{ls}(r_0) \cdot \tilde{k}^{ls} \right)^2 \right)^{1/2} \|w\|^2, \quad (3.21)$$

$$\|w_{1t}^*\|, \|w_{2t}^*\| \leq \|w\|, \quad t = \overline{1, T}.$$

Аналогічно з умов **B4** та **B6** випливає, що

$$\begin{aligned} |q_4(w)| &= \left| \sum_{t=1}^T \frac{(f_i(t, w) - f_i(t, 0)) f_l(t, 0)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} \right| \leq \\ &\leq T^{3/2} \sum_{j=1}^q |w_j| \max_{t=\overline{1, T}} \frac{|f_{ij}(t, w_T^*)|}{d_{ij,T}(\theta^0)} \times \\ &\times \frac{d_{ij,T}(\theta^0)}{d_{iT}(\theta^0) d_{jT}(\theta^0)} \cdot \frac{|f_l(t, 0)|}{d_{lT}(\theta^0)} \leq \\ &\leq \hat{k}^l(r_0) \left(\sum_{j=1}^q \left(\hat{k}^{ij}(r_0) \tilde{k}^{ij} \right)^2 \right)^{1/2} \|w\|. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Таким же чином для $|q_5(w)|$ отримуємо

$$|q_5(w)| \leq \hat{k}^i(r_0) \left(\sum_{j=1}^q \left(\hat{k}^{lj}(r_0) \tilde{k}^{lj} \right)^2 \right)^{1/2} \|w\|. \quad (3.23)$$

Звідси, враховуючи (3.10)-(3.23), бачимо, що

$$\begin{aligned} &|\lambda_{\min}(\mathcal{H}_T(w)) - \lambda_{\min}(J_T(\theta^0))| \leq \\ &\leq q \max_{1 \leq i, l \leq q} \left(\|\hat{k}(r_0)\| \hat{k}^{il} \tilde{k}^{il} \|w\| + \right. \\ &+ \left(o_p^{(1)}(1) + \mathbb{E} \varepsilon_0^2 \right)^{1/2} \left(\hat{k}^{il} \right)^{1/2} \|w\| + o_p^{(2)}(1) + \\ &+ \left(\sum_{j=1}^q \left(\hat{k}^{ij}(r_0) \tilde{k}^{ij} \right)^2 \right)^{1/2} \times \\ &\times \left(\sum_{s=1}^q \left(\hat{k}^{ls}(r_0) \tilde{k}^{ls} \right)^2 \right)^{1/2} \|w\|^2 + \\ &+ \hat{k}^l(r_0) \left(\sum_{j=1}^q \left(\hat{k}^{ij}(r_0) \tilde{k}^{ij} \right)^2 \right)^{1/2} \|w\| + \\ &+ \hat{k}^i(r_0) \left(\sum_{j=1}^q \left(\hat{k}^{lj}(r_0) \tilde{k}^{lj} \right)^2 \right)^{1/2} \|w\| \Big). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Підставляючи в (3.24) нормовану о.н.к. $\hat{w}_T$, та беручи до уваги, що для $T > T_0$ за умови **B5** $J_T(\theta^0)$ – додатно визначена матриця з мінімальним власним числом $\lambda_{\min}(J_T(\theta^0)) \geq \lambda_*$, для деякого $r > 0$ розглянемо подію

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3 =$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \left| o_p^{(1)}(1) \right| \leq r, \left| o_p^{(2)}(1) \right| \leq r, \|\hat{w}_T\| \leq r \right\} \subset \\ &\subset \left\{ \left| \lambda_{\min}(\mathcal{H}_T(\hat{w}_T)) - \lambda_{\min}(J_T(\theta^0)) \right| \leq \frac{\lambda_*}{2} \right\} = \\ &= \left\{ \lambda_{\min}(J_T(\theta^0)) - \frac{\lambda_*}{2} \leq \lambda_{\min}(\mathcal{H}_T(\hat{w}_T)) \leq \right. \\ &\leq \left. \lambda_{\min}(J_T(\theta^0)) + \frac{\lambda_*}{2} \right\} \subset \\ &\subset \left\{ \lambda_{\min}(\mathcal{H}_T(\hat{w}_T)) \geq \lambda_{\min}(J_T(\theta^0)) - \frac{\lambda_*}{2} \right\} \subset \\ &\subset \left\{ \lambda_{\min}(\mathcal{H}_T(\hat{w}_T)) \geq \frac{\lambda_*}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Тепер, отримуємо

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} \{ \overline{\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3} \} \leq \\ &\leq \mathbb{P} \{ \overline{\Gamma_1} \} + \mathbb{P} \{ \overline{\Gamma_2} \} + \mathbb{P} \{ \overline{\Gamma_3} \} = \\ &= \mathbb{P} \left\{ \left| o_p^{(1)}(1) \right| > r \right\} + \\ &+ \mathbb{P} \left\{ \left| o_p^{(2)}(1) \right| > r \right\} + \mathbb{P} \{ \|\hat{w}_T\| > r \}. \end{aligned}$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ для $T > T_0$

$$\mathbb{P} \left\{ \left| o_p^{(1)}(1) \right| > r \right\} \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{та} \quad \mathbb{P} \left\{ \left| o_p^{(2)}(1) \right| > r \right\} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

В такому разі, якщо для $T > T_0$

$\mathbb{P} \{ \|\hat{w}_T\| > r \} \leq \frac{\varepsilon}{3}$ за умови **C**, то

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} \left\{ \left| o_p^{(1)}(1) \right| > r \right\} + \mathbb{P} \left\{ \left| o_p^{(2)}(1) \right| > r \right\} + \\ &+ \mathbb{P} \{ \|\hat{w}_T\| > r \} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

а, значить, для $T > T_0$

$$\mathbb{P} \{ \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3 \} > 1 - \varepsilon. \quad (3.26)$$

Таким чином, нормована о.н.к. $\hat{w}_T$ з ймовірністю, що прямує до 1 при $T \rightarrow \infty$, є єдиним розв'язком системи рівнянь (3.8), тому що матриця $\mathcal{H}_T(\hat{w}_T)$ є додатно визначеною, і функціонал (3.7) має єдиний екстремум (мінімум) в точці $\hat{w}_T$. ■

Зауваження 2. Оскільки

$-\frac{1}{T^{1/2}} \Psi(\hat{u}_T) = M_T(\hat{w}_T) = 0$, де $\hat{w}_T = T^{-1/2} \hat{u}_T$, $\hat{u}_T = d_T(\theta^0)(\hat{\theta}_T - \theta^0)$, то із єдиності оцінки $\hat{w}_T$ в кулі $V(r)$ з великою ймовірністю при $T > T_0$ для деякого $r > 0$ випливає єдиність оцінки $\hat{u}_T$ з такою ж ймовірністю для $T > T_0$ в кулі $V(T^{1/2}r)$.

Відмітимо, що умови доведеної теореми виконано для тригонометричної функції регресії, тобто для неї є вірним висновок теореми 4.

4 Асимптотична нормальність оцінки найменших квадратів параметрів суми гармонічних коливань

В даному розділі доведемо теорему про асимптотичну нормальність о.н.к. $\hat{\theta}_T$, яку задано означенням 5, параметра нелінійної моделі регресії (1.1) і застосуємо її для одержання асимптотичної нормальності о.н.к. $\hat{\theta}_T$ з означення 4 параметрів суми гармонічних коливань (1.32).

Теорема 5. *Нехай виконуються умови A1, A2, A3 для $W = G$, B1, B2, B4-B6, C, та $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, інтегровна за мірою μ у випадку $m = 1$. Тоді розподіл випадкового вектора $\hat{u}_T = d_T(\theta^0)(\hat{\theta}_T - \theta^0)$ при $T \rightarrow \infty$ збігається до гауссівського розподілу $N(0, \Gamma)$, де*

$$\Gamma = 2\pi \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C_n^2(G)}{n!} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \mu(d\lambda, \theta^0) \right)^{-1} \times \\ \times \int_{-\pi}^{\pi} f^{(n)}(\lambda) \mu(d\lambda, \theta^0) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \mu(d\lambda, \theta^0) \right)^{-1}. \quad (4.1)$$

Доведення. Після використання (2.8), (2.9) та позначень розділу 1 отримуємо, що

$$L_T^i(u) = \sum_{t=1}^T \left(G(\xi_t) - \sum_{l=1}^q \frac{g_l(t, \theta^0)}{d_{lT}(\theta^0)} u_l \right) \frac{g_i(t, \theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)} = 0,$$

або

$$\sum_{t=1}^T G(\xi_t) \frac{g_i(t, \theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)} = \\ = \sum_{l=1}^q \sum_{t=1}^T \frac{g_l(t, \theta^0)}{d_{lT}(\theta^0)} \cdot \frac{g_i(t, \theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)} \cdot u_l = \\ = \sum_{l=1}^q J_{il,T}(\theta^0) u_l, \quad i = \overline{1, q}.$$

Таким чином, отримали систему рівнянь відносно u :

$$J_T(\theta^0)u = d_T^{-1}(\theta^0) \sum_{t=1}^T G(\xi_t) \nabla g(t, \theta^0).$$

В наслідок цього, маємо

$$\tilde{u}_T = (\tilde{u}_1 \ \dots \ \tilde{u}_q)^* = \\ = \Lambda_T(\theta^0) \sum_{t=1}^T G(\xi_t) d_T^{-1}(\theta^0) \nabla g(t, \theta^0) = \Lambda_T(\theta^0) \zeta_T, \quad (4.2)$$

де $\Lambda_T(\theta^0) = J_T^{-1}(\theta^0)$.

Далі, взявши до уваги теорему 2, отримуємо, що випадковий вектор $\tilde{u}_T$ є асимптотично нормальним $N(0, \Gamma)$ при $T \rightarrow \infty$, де σ задана формулою (4.1). Зауважимо, що коваріаційна матриця вектора $\tilde{u}_T$, має вигляд

$$\Gamma_T = \Lambda_T(\theta^0) \sigma_T^2 \Lambda_T(\theta^0), \quad (4.3)$$

де σ_T^2 – коваріаційна матриця вектора ζ_T . При $T \rightarrow \infty$

$$\Gamma_T = 2\pi \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C_n^2(G)}{n!} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \mu_T(d\lambda, \theta^0) \right)^{-1} \times \\ \times \int_{-\pi}^{\pi} f^{(n)}(\lambda) \mu_T(d\lambda, \theta^0) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \mu_T(d\lambda, \theta^0) \right)^{-1} \rightarrow \Gamma. \quad (4.4)$$

Далі потрібно довести, що функція розподілу $G_T(y, \theta^0)$ випадкового вектору $\hat{u}_T = d_T(\theta^0)(\hat{\theta}_T - \theta^0)$ збігається при $T \rightarrow \infty$ до гауссівської функції розподілу

$$\Phi_{0,\Gamma}(y) = \Phi_{0,\Gamma}(\Pi(y)), \\ \Pi(y) = (-\infty, y_1) \times \dots \times (-\infty, y_q), \quad y \in \mathbb{R}^q.$$

Для довільного $r > 0$, покажемо, що

$$\Delta_T(r) = \mathbb{P} \{ \|\hat{u}_T - \tilde{u}_T\| > r \} \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty. \quad (4.5)$$

Введемо подію $A_T = \{\tilde{u}_T \in V^c(R-r)\}$, де R таке, що для $T > T_0$, в наслідок асимптотичної нормальності $\tilde{u}_T$, виконується $\mathbb{P}\{A_T\} \leq \frac{\varepsilon}{3}$, де $\varepsilon > 0$ – фіксоване достатньо мале число.

Також задамо подію

$$B_T = \left\{ \max_{u \in V^c(R)} \|\Lambda_T(\theta^0) (\Psi_T(u) - L_T(u))\| \leq r \right\}.$$

З теореми 3 (редукції) випливає, що для $T > T_0$

$$\mathbb{P}\{\overline{B}_T\} = \mathbb{P}\left\{ \max_{u \in V^c(R)} \|\Lambda_T(\theta^0) \times \right. \\ \times (\Psi_T(u) - L_T(u))\| > r \Big\} \leq \\ \leq \mathbb{P}\left\{ \lambda_{\max}(\Lambda_T(\theta^0)) \times \right. \\ \times \max_{u \in V^c(R)} \|\Psi_T(u) - L_T(u)\| > r \Big\} = \\ = \mathbb{P}\left\{ \frac{1}{\lambda_{\min}(J_T(\theta^0))} \times \right. \\ \times \max_{u \in V^c(R)} \|\Psi_T(u) - L_T(u)\| > r \Big\} \leq \\ \leq \mathbb{P}\left\{ \max_{u \in V^c(R)} \|\Psi_T(u) - L_T(u)\| \geq \lambda_* r \right\} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Крім того, розглянемо подію C_T , яка полягає в тому, що о.н.к. $\hat{u}_T$ є єдиним розв'язком системи рівнянь (2.7), до того ж, для $T > T_0$ $\mathbb{P}\{\bar{C}_T\} \leq \frac{\varepsilon}{3}$ за теоремою 4. Таким чином, для $T > T_0$

$$\mathbb{P}\{A_T \cap B_T \cap C_T\} \geq 1 - \varepsilon. \quad (4.6)$$

Далі маємо

$$\begin{aligned} \Lambda_T(\theta^0)L_T(u) &= \\ &= \Lambda_T(\theta^0) \left(\sum_{t=1}^T \varepsilon_t \frac{g_i(t, \theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)} \right)_{i=1}^q - \\ &- \Lambda_T(\theta^0) \left(\sum_{l=1}^q u_l \sum_{t=1}^T \frac{g_l(t, \theta^0)}{d_{lT}(\theta^0)} \frac{g_i(t, \theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)} \right)_{i=1}^q = \\ &= \tilde{u}_T - \Lambda_T(\theta^0) \left(\sum_{l=1}^q u_l \cdot J_{il,T}(\theta^0) \right)_{i=1}^q = \tilde{u}_T - u. \end{aligned}$$

Якщо подія $A_T \cap B_T \cap C_T$ відбулася, то для $u \in V^c(R)$

$$\begin{aligned} \|u + \Lambda_T(\theta^0)\Psi_T(u)\| &= \\ &= \|u + \Lambda_T(\theta^0)(\Psi_T(u) - L_T(u)) + \Lambda_T(\theta^0)L_T(u)\| = \\ &= \|u + \tilde{u} - u + \Lambda_T(\theta^0)(\Psi_T(u) - L_T(u))\| \leq \\ &\leq \|\tilde{u}\| + \|\Lambda_T(\theta^0)(\Psi_T(u) - L_T(u))\| \leq \\ &\leq R - r + r = R, \end{aligned}$$

тобто $G_T(u) = u + \Lambda_T(\theta^0)\Psi_T(u)$ – неперервне відображення $V^c(R)$ в $V^c(R)$.

Для доведення (4.5) застосуємо теорему Брауера про нерухому точку [18], сформульовану в наступній формі.

Теорема (Брауера). *Нехай F неперервне відображення $V^c(R)$ в себе. Тоді існує $x_0 \in V^c(R)$ таке, що $F(x_0) = x_0$.*

Застосуємо дану теорему до $F_T(u)$, тоді отримуємо, що існує точка $u_T^0 \in V^c(R)$ така, що $F_T(u_T^0) = u_T^0$, або, в наслідок того, що $\Lambda_T(\theta^0)$ – невироджена, $\Psi_T(u_T^0) = 0$. Оскільки подія C_T виконується, то єдиним розв'язком системи рівнянь $\Psi_T(u) = 0$ в кулі $V^c(R)$ є нормована о.н.к. $\hat{u}_T$, тобто $\{A_T \cap B_T \cap C_T\} \subset \{\hat{u}_T \in V^c(R)\}$ і $\mathbb{P}\{\hat{u}_T \in V^c(R)\} \geq 1 - \varepsilon$. Зауважимо, що з (4.6) випливає

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &\leq \mathbb{P}\{\{\hat{u}_T \in V^c(R)\} \cap B_T\} = \\ &= \mathbb{P}\left\{\{\hat{u}_T \in V^c(R)\} \cap \left\{\max_{u \in V^c(R)} \|\Lambda_T(\theta^0) \times \right.\right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times (\Psi_T(u) - L_T(u))\| \leq r\} \leq \\ &\leq \mathbb{P}\left\{\|\Lambda_T(\theta^0)(\Psi_T(\hat{u}_T) - L_T(\hat{u}_T))\| \leq r\right\} = \\ &= \mathbb{P}\left\{\|\Lambda_T(\theta^0)L_T(\hat{u}_T)\| \leq r\right\} = \\ &= \mathbb{P}\{\|\tilde{u}_T - \hat{u}_T\| \leq r\}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Тоді з (4.7) випливає (4.5).

Нехай для $A \in \mathfrak{B}^q$ ($\mathfrak{B}^q$ – σ -алгебра борелевих підмножин $\mathbb{R}^q$) та $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &= \left\{x \in \mathbb{R}^q : \inf_{y \in A} \|x - y\| < \varepsilon\right\}, \\ A_{-\varepsilon} &= \mathbb{R}^q \setminus (\mathbb{R}^q \setminus A)_\varepsilon. \end{aligned}$$

Враховуючи (4.5), одержуємо для функції розподілу

$$G_T(y, \theta^0) = \mathbb{P}\{\hat{u}_T \in \Pi(y)\}, \quad y \in \mathbb{R}^q,$$

та для будь-яких $y \in \mathbb{R}^q$ і довільного $\varepsilon > 0$

$$G_T(y, \theta^0) \geq \mathbb{P}\{\tilde{u}_T \in \Pi(y)_{-\varepsilon}\} - \Delta_T(\varepsilon), \quad (4.8)$$

$$G_T(y, \theta^0) \leq \mathbb{P}\{\tilde{u}_T \in \Pi(y)_\varepsilon\} + \Delta_T(\varepsilon). \quad (4.9)$$

Раніше було доведено, що для довільних $y \in \mathbb{R}^q$, $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}\{\tilde{u}_T \in \Pi(y)_{\pm\varepsilon}\} - \Phi_{0,\Gamma}(\Pi(y)_{\pm\varepsilon})| &\rightarrow 0, \\ T &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Нехай $\varphi(y, \theta^0)$ – гауссівська щільність, що відповідає функції розподілу $\Phi_{0,\Gamma}(y)$. Через те, що $\lambda_{\min}(\Gamma) = \underline{\lambda} > 0$, $\lambda_{\max}(\Gamma) = \bar{\lambda} < \infty$, маємо

$$\varphi(y, \theta^0) \leq (2\pi\underline{\lambda})^{-q/2} \exp\left\{\frac{-\|y\|^2}{2\bar{\lambda}}\right\} = \nu(\|y\|).$$

Тепер до $\nu(\|y\|)$ застосуємо наступну теорему [19].

Теорема. *Нехай ν – невід'ємна диференційовна функція на $[0, \infty)$ така, що*

$$(1) \quad b = \int_0^{+\infty} |\nu'(\lambda)| \lambda^{q-1} d\lambda < \infty;$$

$$(2) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \nu(\lambda) = 0.$$

Тоді для довільної опуклої множини $C \in \mathfrak{B}^q$ та для довільних $\varepsilon, \delta > 0$ має місце нерівність

$$\int_{C_\varepsilon \setminus C_{-\delta}} \nu(\|y\|) d\lambda \leq b \left(\frac{2\pi^{q/2}}{\Gamma(q/2)} \right) (\varepsilon + \delta).$$

Після застосування даної теореми до $\nu(\|y\|)$, для будь-якого $\psi \neq 0$ отримуємо

$$\begin{aligned} & |\Phi_{0,\Gamma}(\Pi(y)) - \Phi_{0,\Gamma}(\Pi(y)_\psi)| = \\ & = \int_{\Pi} \varphi(y, \theta^0) dy \leq b \left(\frac{2\pi^{q/2}}{\Gamma(q/2)} \right) |\psi|, \end{aligned} \quad (4.11)$$

де $\Pi = \begin{cases} \Pi(y)_\psi \setminus \Pi^c(y), & \text{якщо } \psi > 0, \\ \Pi(y) \setminus \Pi(y)_\psi, & \text{якщо } \psi < 0. \end{cases}$

Для будь-яких $y \in \mathbb{R}^q$ та для довільного $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & G_T(y, \theta^0) - \Phi_{0,\Gamma}(y) \leq \\ & \leq \Delta_T(\varepsilon) + \mathbb{P} \{ \tilde{u}_T \in \Pi(y)_\varepsilon \} - \Phi_{0,\Gamma}(y) \leq \\ & \leq \Delta_T(\varepsilon) + |\mathbb{P} \{ \tilde{u}_T \in \Pi(y)_\varepsilon \} - \Phi_{0,\Gamma}(y)| \leq \\ & \leq \Delta_T(\varepsilon) + |\mathbb{P} \{ \tilde{u}_T \in \Pi(y)_\varepsilon \} - \Phi_{0,\Gamma}(\Pi(y)_\varepsilon)| + \\ & + |\Phi_{0,\Gamma}(\Pi(y)_\varepsilon) - \Phi_{0,\Gamma}(y)|; \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} & \Phi_{0,\Gamma}(y) - G_T(y, \theta^0) \leq \\ & \leq \Delta_T(\varepsilon) - \mathbb{P} \{ \tilde{u}_T \in \Pi(y)_{-\varepsilon} \} + \Phi_{0,\Gamma}(y) \leq \\ & \leq \Delta_T(\varepsilon) + |\Phi_{0,\Gamma}(y) - \mathbb{P} \{ \tilde{u}_T \in \Pi(y)_{-\varepsilon} \}| \leq \\ & \leq \Delta_T(\varepsilon) + |\Phi_{0,\Gamma}(\Pi(y)_{-\varepsilon}) - \mathbb{P} \{ \tilde{u}_T \in \Pi(y)_{-\varepsilon} \}| + \\ & + |\Phi_{0,\Gamma}(y) - \Phi_{0,\Gamma}(\Pi(y)_{-\varepsilon})|. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Таким чином, зі співвідношень (4.6)-(4.13), отримуємо

$$G_T(y, \theta^0) \rightarrow \Phi_{0,\Gamma}(y), \quad y \in \mathbb{R}^q, \quad T \rightarrow \infty. \quad \blacksquare$$

Нехай $g(t, \theta^0)$ має вигляд (1.32), тоді вона має блочно-діагональну спектральну міру $\mu(d\lambda, \theta^0)$ (див., наприклад, [5]) з блоками

$$\begin{pmatrix} \delta_k & i\rho_k & \bar{\beta}_k \\ -i\rho_k & \delta_k & \bar{\gamma}_k \\ \beta_k & \gamma_k & \delta_k \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

де

$$\begin{aligned} \beta_k &= \frac{\sqrt{3}}{2} (C_k^0)^{-1} (B_k^0 \delta_k + iA_k^0 \rho_k), \\ \gamma_k &= \frac{\sqrt{3}}{2} (C_k^0)^{-1} (-A_k^0 \delta_k + iB_k^0 \rho_k), \end{aligned} \quad (4.15)$$

міра $\delta_k = \delta_k(d\lambda)$ та заряд $\rho_k = \rho_k(d\lambda)$ зосереджені у точках $\pm\varphi_k^0$, причому

$$\delta_k(\{\pm\varphi_k^0\}) = \frac{1}{2}, \quad \rho_k(\{\pm\varphi_k^0\}) = \pm\frac{1}{2}, \quad k = \overline{1, N}.$$

Це означає, що умову **B1** для тригонометричної функції регресії (1.32) виконано.

За тотожністю Планшереля

$$\mu_T(\mathbb{R}, \theta^0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_T(d\lambda, \theta^0) =$$

$$\begin{aligned} & = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mu_T^{jl}(\lambda, \theta^0) d\lambda \right)_{j,l=1}^q = \\ & = \left(\int_{-\infty}^{\infty} g_T^j(\lambda, \theta^0) \overline{g_T^l(\lambda, \theta^0)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g_T^j(\lambda, \theta^0)|^2 d\lambda \times \right. \right. \\ & \times \left. \left. \int_{-\infty}^{\infty} |g_T^l(\lambda, \theta^0)|^2 d\lambda \right)^{-1/2} d\lambda \right)_{j,l=1}^q = \\ & = \left(d_{jT}^{-1}(\theta^0) d_{lT}^{-1}(\theta^0) \sum_{t=1}^T g_j(t, \theta^0) g_l(t, \theta^0) \right)_{j,l=1}^q = \\ & = \left(J_{jl,T}(\theta^0) \right)_{j,l=1}^q. \end{aligned}$$

Таким чином, за умови **B1**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu_T(d\lambda, \theta^0) = \left(J_{jl,T}(\theta^0) \right)_{j,l=1}^q = J_T(\theta^0),$$

і коли $T \rightarrow \infty$, то $J_T(\theta^0) \rightarrow J(\theta^0)$, де $J(\theta^0)$ деяка додатно визначена матриця, для якої $\lambda_{\min}(J(\theta^0)) \geq \tilde{\lambda}_* > 0$, і

$$J(\theta^0) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mu^{jl}(d\lambda, \theta^0) \right)_{j,l=1}^q = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(d\lambda, \theta^0). \quad (4.16)$$

Для тригонометричної функції регресії (1.32) матрицю $J(\theta^0)$ задано виразом (3.30).

Варто зауважити, що для тригонометричної моделі регресії (1.1), (1.32), використовуючи (4.14), (4.15), отримуємо, що матриця σ з теореми 2 розділу 1 є блочно-діагональною з блоками σ_k , $k = \overline{1, N}$, вигляду

$$\begin{aligned} \sigma_k &= 2\pi \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C_n^2(G) f^{(n)}(\varphi_k)}{n!} \times \\ & \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}B_k^0}{2C_k^0} \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{3}A_k^0}{2C_k^0} \\ \frac{\sqrt{3}B_k^0}{2C_k^0} & -\frac{\sqrt{3}A_k^0}{2C_k^0} & 1 \end{bmatrix} > 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Тепер можна сформулювати

Наслідок 3. За умов **A1**, **A2**, **A3** при $W = G$, справедливе твердження теореми 2 з блочно-діагональною матрицею σ з блоками σ_k , $k = \overline{1, N}$, вигляду (4.17).

Враховуючи формули (4.1), (4.14)-(4.17), можна побачити, що для тригонометричної

функції регресії Γ є блочно-діагональною матрицею з блоками

$$\Gamma_k = 2\pi \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C_n^2(G) f^{(n)}(\varphi_k^0)}{n!} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}B_k^0}{2C_k^0} \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{3}A_k^0}{2C_k^0} \\ \frac{\sqrt{3}B_k^0}{2C_k^0} & -\frac{\sqrt{3}A_k^0}{2C_k^0} & 1 \end{bmatrix}^{-1},$$

$$k = \overline{1, N}. \quad (4.18)$$

Також варто зауважити, що як показано у розділі 2, для тригонометричної функції регресії (1.32) вірні наступні співвідношення

$$d_{3k-2,T}(\theta^0) \sim 2^{-1/2} T^{1/2},$$

$$d_{3k-1,T}(\theta^0) \sim 2^{-1/2} T^{1/2},$$

$$d_{3k,T}(\theta^0) \sim 6^{-1/2} C_k^0 T^{3/2}, \quad k = \overline{1, N}. \quad (4.19)$$

Далі перейдемо від нормованої о.н.к. $d_T(\theta^0)(\hat{\theta}_T - \theta^0)$ до нормованої о.н.к.

$$\left(T^{1/2} (A_{1T} - A_1^0), T^{1/2} (B_{1T} - B_1^0), \right.$$

$$T^{3/2} (\varphi_{1T} - \varphi_1^0), \dots,$$

$$T^{1/2} (A_{NT} - A_N^0), T^{1/2} (B_{NT} - B_N^0),$$

$$\left. T^{3/2} (\varphi_{NT} - \varphi_N^0) \right) \quad (4.20)$$

і введемо блочно-діагональну матрицю Z з блоками

$$Z_k = \begin{bmatrix} 2^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 6^{-1/2} C_k^0 \end{bmatrix}, \quad k = \overline{1, N}. \quad (4.21)$$

В такому разі вектор (4.20) асимптотично нормальний $N(0, \tilde{\Gamma})$, де блочно-діагональна матриця $\tilde{\Gamma}$, містить блоки

$$2\pi \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C_n^2(G) f^{(n)}(\varphi_k^0)}{n!} \times$$

$$\times \left[Z_k \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}B_k^0}{2C_k^0} \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{3}A_k^0}{2C_k^0} \\ \frac{\sqrt{3}B_k^0}{2C_k^0} & -\frac{\sqrt{3}A_k^0}{2C_k^0} & 1 \end{bmatrix} Z_k \right]^{-1} =$$

$$= 4\pi \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C_n^2(G) f^{(n)}(\varphi_k^0)}{n!} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{B_k^0}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{A_k^0}{2} \\ \frac{B_k^0}{2} & -\frac{A_k^0}{2} & \frac{C_k^{02}}{3} \end{bmatrix}^{-1}, \quad k = \overline{1, N}. \quad (4.22)$$

Після обернення цих матриць отримуємо наступний результат, враховуючи, що всі умови, які накладались на функцію регресії в теоремі 2 (розділ 1) справедливі для тригонометричної функції регресії також. Зокрема, виконання умови **B2** (μ -припустимості с.щ. $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$) для тригонометричної функції регресії (1.32) доведено в роботі О.В. Іванова, І.М. Савич [20].

Розглянемо множини $\Phi = \{\varphi_1^0, \varphi_2^0, \dots, \varphi_N^0\}$ та $K = \{\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_r\}$. Тоді умова **B2** виконується, якщо

$$\Phi \cap K = \emptyset. \quad (4.23)$$

Теорема 6. Якщо для тригонометричної моделі регресії (1.1), (1.32) виконано умови **A1**, **A2**, **A3** при $W = G$, (4.23), то нормована о.н.к. (4.20) асимптотично нормальна $N(0, \tilde{\Gamma})$, із блочно-діагональною матрицею

$$\tilde{\Gamma} = \text{diag} \left(\tilde{\Gamma}_k, k = \overline{1, N} \right) \quad (4.24)$$

з блоками

$$\tilde{\Gamma}_k = \frac{4\pi}{(C_k^0)^2} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C_n^2(G) f^{(n)}(\varphi_k^0)}{n!} M_k, \quad (4.25)$$

$$M_k = \begin{bmatrix} A_k^{02} + 4B_k^{02} & -3A_k^0 B_k^0 & -6B_k^0 \\ -3A_k^0 B_k^0 & 4A_k^{02} + B_k^{02} & 6A_k^0 \\ -6B_k^0 & 6A_k^0 & 12 \end{bmatrix},$$

$$k = \overline{1, N}.$$

Висновки

У роботі отримано асимптотичну нормальність о.н.к. параметрів тригонометричної моделі регресії з дискретним часом та шумом, що є нелінійним локальним перетворенням гауссівського стаціонарного часового ряду з сингулярним спектром. Одержано достатні умови асимптотичної єдиності за ймовірністю о.н.к. параметрів нелінійної моделі регресії, що охоплює випадок тригонометричної регресії. З використанням теореми Брауера про нерухому точку отримано достатні умови асимптотичної нормальності о.н.к. параметрів загальної нелінійної моделі регресії та розглянуто їх застосування до тригонометричної моделі регресії.

Природним напрямком продовження досліджень є апроксимація з достатньою точністю громіздкої коваріаційної матриці граничного гауссівського розподілу о.н.к., щоб наблизити отримані результати до практичних застосувань. Крім цього, бажано знайти інші приклади

несумовних коваріаційних функцій та сингулярних спектральних щільностей стаціонарних часових рядів для збільшення кількості математичних моделей спостережень, аналогічних вивчених у роботі.

Список використаних джерел

1. *Whittle P.* The simultaneous estimation of a time series harmonic components and covariance structure / P. Whittle // *Trabajos Estadistica.* – 1952. – Vol. 3. – P. 43-47.
2. *Walker A.M.* On the estimation of a harmonic component in a time series with stationary dependent residuals / A.M. Walker // *Adv. Appl. Probab.* – 1973. – Vol. 5. – P. 217-241.
3. *Hannan E.J.* The estimation of frequency / E.J. Hannan // *J. Appl. Probab.* – 1973. – Vol. 10. – P. 510-519.
4. *Дороговцев А.Я.* Теория оценок параметров случайных процессов / А.Я. Дороговцев // К.: Вища школа. – 1982. – 192 с.
5. *Иванов А.В.* Одно решение задачи о выявлении скрытых периодичностей / А.В. Иванов // *Теория Вероят. и Матем. Статист.* – 1979. – №20. – С. 44-59.
6. *Кнопов П.С.* Оптимальные оценки параметров стохастических систем / П.С. Кнопов // К.: Наукова думка. – 1980. – 151 с.
7. *Ivanov A.V.* Estimation of harmonic component in regression with cyclically dependent errors / A.V. Ivanov, N.N. Leonenko, M.D. Ruiz-Medina, B.M. Zhurakovsky // *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics.* – 2015. – V. 49, 1. – P. 156-186.
8. *Ivanov A.V., Leonenko N.N., Ruiz-Medina M.D., Savich I.N.* Limit theorems for weighted nonlinear transformations of Gaussian processes with singular spectra. // *Ann. Probab.* – 2013. – Vol. 41, №2. – P. 1088-1114.
9. *Abramowitz M.* Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables / M. Abramowitz, I.A. Stegun // New York: Dover Publications. – 1972. – 502 p.
10. *Хеннан Э.* Многомерные временные ряды / Э. Хеннан // М. "Мир". – 1976. – 757 с.
11. *Grenander U.* On the estimation of regression coefficients in the case of an autocorrelated disturbance / U. Grenander // *Ann. Math. Statist.* – 1954. – Vol. 25, 2. – P. 252-272.
12. *Ибрагимов И.А.* Гауссовские случайные процессы / И.А. Ибрагимов, Ю.А. Розанов // М.: Наука. – 1970. – 384 с.
13. *Иванов А.В.* Статистический анализ случайных полей / А.Я. Иванов, Н.Н. Леоненко // К.: Вища Школа. – 1986. – 216 с.
14. *Ivanov A.V., Leonenko N.N., Ruiz-Medina M.D., Savich I.N.* Limit theorems for weighted nonlinear transformations of gaussian processes with singular spectra. // *Ann. Probab.* – 2013. – Vol. 41, №2. – P. 1088-1114
15. *Walker A.M.* Some asymptotic results for the periodogram of a stationary time series / A.M. Walker // *I. Aust. Math. Soc.* – 1965. – Vol. 5. – P. 107-128.
16. *Pfanzagl J.* On the Measurability and Consistency of Minimum Contrast Estimates / J. Pfanzagl // *Metrika.* – 1969. – Vol. 14. – P. 249-272.
17. *Wilkinson J.H.* The algebraic eigenvalue problem / J.H. Wilkinson // Oxford: Clarendon Press. – 1965. – 680 p.
18. *Гончаренко Ю.В.* Теорема Брауэра / Ю.В. Гончаренко, С.И. Ляшко // К.: «КИИ». – 2000. – 48 с.
19. *Бхаттачария Р.Н.* Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения / Р.Н. Бхаттачария, Р. Ранга Рао // М.: «Наука». – 1982. – 286 с.
20. *Иванов О.В., Савич І.М.* μ - припустимість спектральної щільності сильно залежного випадкового шуму в нелінійній моделі регресії // *Наукові вісті НТУУ "КПІ* № 1(63), 2009, 143-148.

References

1. WHITTLE P. (1952) The simultaneous estimation of a time series harmonic components and covariance structure. *Trabajos Estadística*. – Vol. 3. – P. 43-47.
2. WALKER A.M. (1973) On the estimation of a harmonic component in a time series with stationary dependent residuals. *Adv. Appl. Probab.* – Vol. 5. – P. 217-241.
3. HANNAN E.J. (1973) The estimation of frequency. *J. Appl. Probab.* – Vol. 10. – P. 510-519.
4. DOROGOVTSSEV A.YA. (1982) Theory of estimation of the parameters of random processes. Kiev, Vyshcha Shkola. – 192 p. (in Russian)
5. IVANOV A.V. (1980) A solution of the problem of detecting hidden periodicities. *Theor. Probab. Math. Statist.*, № 20, P. 51 - 68.
6. KNOPOV P.S. (1980) Optimal estimators of parameters of stochastic systems. Kiev, Naukova Dumka – 151 p. (in Russian)
7. IVANOV A.V., LEONENKO N.N., RUIZ-MEDINA M.D., ZHURAKOVSKY B.M. (2015) Estimation of harmonic component in regression with cyclically dependent errors. *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*. – V. 49, 1. – P. 156-186.
8. IVANOV A.V., LEONENKO N.N., RUIZ-MEDINA M.D., SAVICH I.N. (2013) Limit theorems for weighted nonlinear transformations of Gaussian processes with singular spectra. *Ann. Probab.* — Vol. 41, №2. — P. 1088-1114.
9. ABRAMOWITZ M., STEGUN I.A. (1972) *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover Publications. – 502 p.
10. HANNAN E.J. (1970) *Multiple time series*, Wiley, New-York - London - Sydney - Toronto. - 536 p.
11. GRENANDER U. (1954) On the estimation of regression coefficients in the case of an autocorrelated disturbance. *Ann. Math. Statist.* – Vol. 25, 2. – P. 252-272.
12. IBRAGIMOV I.A., ROZANOV Yu.A. (1980) *Gaussian random processes*, Springer - Verlag, New-York. - 284 p.
13. IVANOV A.V., LEONENKO N.N. (1989) *Statistical analysis of random fields*, Kluwer AP, Dordrecht / Boston / London. - 244 p.
14. IVANOV A.V., LEONENKO N.N., RUIZ-MEDINA M.D., SAVICH I.N. (2013) Limit theorems for weighted nonlinear transformations of gaussian processes with singular spectra. *Ann.Probab.* — Vol. 41, №2. — P. 1088-1114.
15. WALKER A.M. (1965) Some asymptotic results for the periodogram of a stationary time series. I. *Aust. Math. Soc.* – Vol. 5. – P. 107-128.
16. PFANZAGL J. (1969) On the Measurability and Consistency of Minimum Contrast Estimates. *Metrika.* – Vol. 14. – P. 249-272.
17. WILKINSON J.H. (1965) *The algebraic eigenvalue problem*. Oxford: Clarendon Press. – 680 p.
18. GONCHARENKO Yu.V., LYASHKO S.I. (2000) Brouwer theorem, Kiev, Kiy. - 48 p. (in Russian)
19. BHATTACHARYA R.N., RANGA RAO R. (1976) *Normal approximation and asymptotic expansions*, Wiley. - 274 p.
20. IVANOV A.V., SAVYCH I.N. (2009) μ - admissibility of spectral density of strongly dependent random noise in nonlinear regression model. *Naukovi visti NTUU "KPI* 1(63), P. 143-148. (in Ukrainian)

Надійшла до редколегії 10.06.2019

УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2419/4.5>

Я. Хусанбаєв¹, доктор наук, професор
С. Шаріпов², аспірант
В. Голомозий³, кандидат наук, доцент

Оцінка Беррі-Ессеєна для майже критичних гіллястих процесів з імміграцією

¹Інститут Математики імені В.І. Романовського АН РУз, вул. Мирзо-Улугбека 81, 100170 Ташкент, Узбекистан.

²Інститут Математики імені В.І. Романовського АН РУз, вул. Мирзо-Улугбека 81, 100170 Ташкент, Узбекистан.

³Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська 64.

Ya. Khusanbaev¹, Ph.D., Professor
S. Sharipov², Post-graduate
V. Golomoziy³, Ph.D., Associate Professor
Berry–Esseen bound for nearly critical branching processes with immigration

¹V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Academy of Sciences of Uzbekistan, Mirzo Ulughbek str.81, 100170 Tashkent, Uzbekistan.

²V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Academy of Sciences of Uzbekistan, Mirzo Ulughbek str.81, 100170 Tashkent, Uzbekistan.

³Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.

У даній роботі ми розглядаємо майже критичні гіллясті процеси з імміграцією. Було встановлено оцінку швидкості збіжності в центральній граничній теоремі для флуктуацій таких процесів. При виводі оцінки швидкості збіжності до граничного розподілу було використано добре відому нерівність Ессеєна, що дозволяє оцінювати близькість функцій розподілу за близькістю їх характеристичних функцій. Відомо, що теорема Беррі-Ессеєна дає результат, який неможливо в загальному випадку покращити, або, як кажуть - правильну оцінку. Варто відмітити, що в нашій оцінці залежність сталих від розподілу прямих нащадків однієї частинки та потоку імміграції є більш складною ніж в класичній оцінці Беррі-Ессеєна. Отримана оцінка узагальнює та уточнює попередню відому оцінку для флуктуації подібних процесів.

Ключові слова: Гіллясті процеси, імміграція, нерівність Ессеєна.

In this paper, we consider a nearly critical branching process with immigration. We obtain the rate of convergence in central limit theorem for nearly critical branching processes with immigration.

Key Words: Branching process, immigration, Esseen inequality

Communicated by Prof. Kozachenko Yu.V.

1 Introduction

Let for each $n \in \mathbb{N}$ $\{\xi_{k,j}^{(n)}, k, j \in \mathbb{N}\}$ and $\{\varepsilon_k^{(n)}, k \in \mathbb{N}\}$ be the two independent families of independent identically distributed random variables with non-negative integer values. The sequence of branching processes with immigration $\{X_k^{(n)}, k \geq 0\}$, $n \in \mathbb{N}$ is defined by the following recursion relation

$$X_0^{(n)} = 0, \quad X_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{X_{k-1}^{(n)}} \xi_{k,j}^{(n)} + \varepsilon_k^{(n)}, \quad k, n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

For a fixed $n \in \mathbb{N}$ we can interpret $X_k^{(n)}$ as the size of k -th generation of a population and $\xi_{k,j}^{(n)}$ is the number of offsprings of the j -th individual in the

$(k-1)$ -st generation and $\varepsilon_k^{(n)}$ is the number of immigrants contributing to the k -th generation.

Branching processes models are extensively used in various parts of natural sciences, among others in biology, epidemiology, physics, computer sciences. We refer to monographs by Athreya and Ney [1], Rahimov [17], Haccou et al. [6] where one may find a recent developments and various applications of these process.

Assume that for all $n \in \mathbb{N}$

$$m_n = E\xi_{1,1}^{(n)}, \quad \sigma_n^2 = \text{var} \xi_{1,1}^{(n)}, \quad \lambda_n = E\varepsilon_1^{(n)}, \\ b_n^2 = \text{var} \varepsilon_1^{(n)}$$

exist and finite.

Означення 1.1. Branching processes with immigration defined by (1) is called nearly critical with rate $\alpha \in \mathbb{R}$ if $m_n = 1 + \alpha n^{-1} + o(n^{-1})$ as $n \rightarrow \infty$.

This notation was introduced for the first time by Chan and Wei [3] in order to study AR(1) processes.

Introduce the random process

$$X_n(t) = X_{[nt]}^{(n)}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

where $[a]$ denotes the lower integer part of number a . It is clear that $\{X_n(t), n \in \mathbb{N}\}$ is a sequence of random elements with values in the Skorokhod space $D[0, \infty)$, which is the space of non-negative functions on $[0, \infty)$ that are right continuous and have left limits.

There have been a lot of research works devoted to the asymptotic behavior of the process defined by (2). For instance, in case when $m_n = m = 1$ and with finite moments $\sigma_n^2 = \sigma^2 > 0$, $\lambda_n = \lambda$ and $b_n^2 = b^2 > 0$, Wei and Winnicki [23] proved that the random processes $n^{-1}X_n(t)$ weakly converge in Skorokhod space $D[0, \infty)$ to the solution of some stochastic differential equation. Later, the case $m_n = 1 + \alpha n^{-1} + o(n^{-1})$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), $\sigma_n^2 \rightarrow \sigma^2 > 0$ as $n \rightarrow \infty$ was studied by Sriram[22], who proved the weak convergence of random processes $n^{-1}X_n(t)$ in Skorokhod space $D[0, \infty)$ to the solution of stochastic differential equation. Ispány et al. [8] showed that Sriram's [22] result still holds if condition $\sigma_n^2 \rightarrow \sigma^2$ replaced by $\sigma_n^2 \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. They also proved fluctuation limit theorem in case where $\sigma_n^2 \rightarrow 0$, namely, the sequence $n^{-\frac{1}{2}}(X_n(t) - EX_n(t))$ has a limit process $X(t)$. The process $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ turns out to be an Ornstein–Uhlenbeck type process driven by a time changed Wiener process. Further systematic investigations are due to Ispány [7], Györfi et al.[5], Li [14], [15] Rahimov [18],[19], Khusanbaev [10],[11],[12],[13] and see also references therein. From these papers, it follows that the necessary norming factor and the possible limit process strongly depend on the various conditions that are supposed to hold for the offspring and immigration processes.

The problem of estimating the rate of convergence in the central limit theorem (CLT) is one of the traditional problems in probability theory. It attracted the attention of many researchers during the last six decades. However, most of the attention was paid to clarifying the estimate of the Berry–Esseen theorem, which considers the uniform distance between the distribution functions of the normalized sums of independent random variables and the standard

normal law.

However, few scientific papers are devoted to studying of the rate of weak convergence in limit theorems for branching processes. Apparently, such a problem was first studied by Nagaev and Mukhamedkhanova in [16]. They obtained the rate of convergence in the well-known Yaglom's limit theorem on the weak convergence of the critical Galton–Watson branching process to the exponential distribution. We note that the constants in this estimate have a more complicated relationship to the distribution of offsprings as compared to the classical Berry–Esseen estimate. Later, Borovkov [2] established the rate of weak convergence for the Galton–Watson branching processes (without immigration) to the Feller process. We also refer to Rahimov and Sirazhdinov [20] where one can find several types of estimations for fluctuation of (1). Recently, Khusanbaev [9] obtained the rate of convergence in CLT for fluctuation of process (1). Motivated by that paper we continue studying the rate of convergence in one-dimensional functional limit theorem 2.9 of Ispány [7].

More precisely, Ispány [7] proved the following a fluctuation limit theorem for the process defined in (2).

Theorem 1.1. Assume that $b_n^2 > 0$ for all $n \in \mathbb{N}$ such that $nb_n^2 \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$ and

1) $m_n = 1 + \alpha n^{-1} + o(n^{-1})$ as $n \rightarrow \infty$ for some $\alpha \in \mathbb{R}$;

2) $\sigma_n^2 = \sigma^2 n^{-1} + o(n^{-1})$ as $n \rightarrow \infty$ for some $\sigma^2 \geq 0$;

3) $E \left(\left(\xi_{1,1}^{(n)} - m_n \right)^2 I(U_n) \right) = o(n^{-1})$ as $n \rightarrow \infty$ for all $\theta > 0$, where $U_n = \left\{ \left| \xi_{1,1}^{(n)} - m_n \right| > \theta \sqrt{nb_n^2} \right\}$ and $I\{A\}$ denotes an indicator of event A ;

4) $\lambda_n = \lambda b_n^2 + o(b_n^2)$ as $n \rightarrow \infty$ for some $\lambda \geq 0$;

5) $E \left(\left(\varepsilon_{1,1}^{(n)} - \lambda_n \right)^2 I(U'_n) \right) = o(b_n^2)$ as $n \rightarrow \infty$ for all $\theta > 0$, where $U'_n = \left\{ \left| \varepsilon_{1,1}^{(n)} - \lambda_n \right| > \theta \sqrt{nb_n^2} \right\}$.

Then

$$(nb_n^2)^{-\frac{1}{2}} (X_n(t) - EX_n(t)) \Rightarrow \chi(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \text{ as } n \rightarrow \infty$$

where convergence holds in Skorokhod space $D[0, \infty)$, and $\{\chi(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ is an Ornstein–Uhlenbeck type process defined by the following

stochastic differential equation

$$d\chi(t) = \alpha\chi(t)dt + \sqrt{\sigma^2\mu(t) + 1}dW(t), \quad \chi(0) = 0, \quad \mathbb{E}S_k^{(n)} = m_n^k, \quad \mathbb{E}[S_k^{(n)}]^2 = \frac{m_n^{k-1}(m_n^{k-1} - 1)}{m_n - 1}b_n^2 + m_n^{2k},$$

where $W(t)$ is a standard Wiener process and μ is defined by $\mu(t) = \lambda \int_0^t e^{\alpha s} ds$.

Note that the limiting process $\chi(t)$ may be represented as

$$\chi(t) = \int_0^t e^{\alpha(t-s)} dM(s), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

where $\{M(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ is a Wiener process $M(t) = W(T(t)), t \in \mathbb{R}_+$ with $T(t) = \int_0^t \rho(s) ds$ and

$$\rho(t) = \lambda\sigma^2 \int_0^t e^{\alpha s} ds + 1.$$

From the properties of the stochastic integral [4] we can obtain

$$\mathbb{E}\chi(t) = 0, \quad \text{var}(\chi(t)) = \int_0^t e^{2\alpha(t-s)} \rho(s) ds.$$

Consequently,

$$\beta^2 := \text{var}(\chi(1)) = \begin{cases} \frac{\sigma^2\lambda}{2} + 1, & \alpha = 0, \\ \frac{\sigma^2\lambda}{2\alpha^2} (e^\alpha - 1)^2 + \frac{e^{2\alpha} - 1}{2\alpha}, & \alpha \neq 0 \end{cases}$$

Hence, $\chi(1)$ has normal distribution with zero mean and variance β^2 .

The main purpose of this paper is to obtain the rate of convergence of the random variables $(nb_n^2)^{-\frac{1}{2}}(X_n(1) - \mathbb{E}X_n(1))$ to $\chi(1)$. The approach we use in the proofs comes from Khusanbaev [9]. However, we have to pay more attention to the asymptotics of mean and variances of immigration.

The remainder of the paper is organized as follows. Section 2 contains some notations and assumptions. The main result and examples are given in Section 3. Section 4 is devoted to the proof of the main theorem.

2 Some notations and assumptions

Before giving our main result, we need to some notations and conditions.

For each $n \in \mathbb{N}$, let $S_k^{(n)}, k \geq 0$ be the Galton–Watson branching process defined by

$$S_0^{(n)} = 1, \quad S_k^{(n)} = \sum_{i=1}^{S_{k-1}^{(n)}} \xi_{k,i}^{(n)}.$$

Then it is well-known [1]

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_k^{(n)}]^3 &= \frac{m_n^{k-1}(m_n^{2k} - 1)}{m_n^2 - 1} \gamma_n + \\ &+ \frac{3m_n^{k-1}(m_n^k - 1)(m_n^{k-1} - 1)}{(m_n - 1)(m_n^2 - 1)} (b_n^2 + m_n^2 - m_n)^2 + \\ &+ \frac{3m_n^{k-1}(m_n^k - 1)}{m_n - 1} (b_n^2 + m_n^2 - m_n) + m_n^k, \end{aligned}$$

$$\text{where } \gamma_n = \mathbb{E}\xi_{1,1}^{(n)} (\xi_{1,1}^{(n)} - 1) (\xi_{1,1}^{(n)} - 2).$$

Let $f_n(s)$ be a generating function of $\xi_{1,1}$. Then, plainly, $f_n^{(k)}(s)$ is the generating function of $S_k^{(n)}$.

Further, we put

$$h_n(s) = \mathbb{E}s^{\xi_1^{(n)}}, \quad \varphi_n(s) = \mathbb{E}s^{X_n^{(n)}}, \quad |s| \leq 1.$$

Suppose that for all $n \in \mathbb{N}$ the variables

$$\beta_n^2 := \frac{\text{var}(X_n(1))}{n} =$$

$$\begin{cases} \frac{\lambda_n \sigma_n^2 (n-1)}{2} + b_n^2, & m_n = 1, \\ \frac{\lambda_n \sigma_n^2 (m_n^{n-1} - 1)(m_n^n - 1)}{n(m_n - 1)(m_n^2 - 1)} + \frac{b_n^2 (m_n^{2n} - 1)}{n(m_n^2 - 1)}, & m_n \neq 1. \end{cases}$$

$$\chi_n =$$

$$\begin{cases} n\gamma_n + \frac{3}{2}\sigma_n^4 n(n-1) + 3n\sigma_n^2 + 1, & m_n = 1, \\ \frac{\gamma_n}{m_n |m_n^2 - 1|} + \frac{3(\sigma_n^2 + m_n^2 - m_n)^2}{m_n |m_n - 1| |m_n^2 - 1|} + \frac{3|\sigma_n^2 + m_n^2 - m_n|}{m_n |m_n - 1|}, & m_n \neq 1. \end{cases}$$

$$\tau_n = \mathbb{E}\varepsilon_1^{(n)} (\varepsilon_1^{(n)} - 1) (\varepsilon_1^{(n)} - 2)$$

exist and finite.

Set

$$L_n = A_n B_n,$$

where

$$A_n = \max \left\{ (1 + \lambda_n)^3; b_n^2 + \lambda_n^2; \tau_n \right\},$$

$$B_n = A_n \chi_n \max \{1; m_n^n\}.$$

As usual, denote by $\Phi_\beta(x)$ normal distribution function with zero mean and variance β^2 and $\rho(F, G)$ stands for uniform distance (Kolmogorov's metric) between distribution functions $F(x)$ and $G(x)$. The symbol C denotes a positive number which may vary from place to place.

The proof of the main theorem is based on the following inequality (see [21] Chap.II, p.376), which allows us to estimate the proximity of distribution functions by the proximity of their characteristic functions.

Lemma 1 (Esseen's inequality). Let $F(x)$ and $G(x)$ be two distribution functions with characteristic functions $f(t)$ and $g(t)$, respectively. Assume $G(x)$ has derivative $G'(x)$ with $\sup_x |G'(x)| \leq C$. Then, for arbitrary $x \in \mathbb{R}$ and $T > 0$

$$\rho(F, G) \leq \frac{2}{\pi} \int_0^T \left| \frac{f(t) - g(t)}{t} \right| dt + \frac{24}{\pi T} \sup_x |G'(x)|.$$

3 Main result

Now we state our main result.

Theorem 3.1. Let $b_n^2 > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $nb_n^2 \rightarrow \infty$ and $L_n = o(\sqrt{nb_n^2})$ as $n \rightarrow \infty$. Assume that $\min\left(\frac{\beta_n^2}{b_n^2}, \beta^2\right) > 0$ and the following conditions hold:

- 1) $m_n = 1 + \alpha n^{-1} + o(n^{-1})$ as $n \rightarrow \infty$ for some $\alpha \in \mathbb{R}$;
- 2) $\sigma_n^2 = \sigma^2 n^{-1} + o(n^{-1})$ as $n \rightarrow \infty$ for some $\sigma^2 \geq 0$;
- 3) $\lambda_n = \lambda b_n^2 + o(b_n^2)$ as $n \rightarrow \infty$ for some $\lambda \geq 0$;
- 4) $\tau = \limsup_{n \rightarrow \infty} \tau_n \leq \infty$;
- 5) $\gamma_n = \gamma n^{-1} + o(n^{-1})$ as $n \rightarrow \infty$ for some $\gamma > 0$.

Then distribution functions of normalized variables

$$F_n(x) = P\left((nb_n^2)^{-1/2} (X_n(1) - E(X_n(1))) < x\right), \quad -\infty < x < \infty,$$

such that for all $n \geq 2$,

$$\rho(F_n, \Phi_\beta) \leq \frac{CL_n}{\sqrt{nb_n^2}} + \frac{\left|\frac{\beta_n^2}{b_n^2} - \beta^2\right|}{\min\left(\frac{\beta_n^2}{b_n^2}, \beta^2\right)}, \quad (3)$$

where C depends on variables α , σ^2 , λ , b^2 , β^2 , τ , γ .

Remark 1. Theorem 2 is a generalization of the main result of paper [9] for the cases $b_n^2 \rightarrow 0$ and $b_n^2 \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$ (see condition 3). Assumption $nb_n^2 \rightarrow \infty$ and the condition 3) imply that the variable b_n^2 may converge to a finite number (zero or non-zero) or infinity. Khusanbaev [9] obtained the rate of convergence in one-dimensional Theorem 2.2 of Ispány et al. [8].

Remark 2. Note that both terms are important on the right-hand side of (3) since each of first or second terms on the right hand side of (3) may be dominating in different situations.

As an example, we give the following corollary.

Наслідок 1. 1) Let $\xi_{1,1}^{(n)}$ has a Bernoulli distribution with mean $1 - \alpha n^{-1}$, $\alpha \geq 0$ and the random variable $\varepsilon_1^{(n)}$ is distributed as follows:

$$P(\varepsilon_1^{(n)} = 0) = 1 - \frac{1}{n}, \quad P(\varepsilon_1^{(n)} = [\ln n]) = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Then it is easy to see that the conditions 1), 2) and 5) are satisfied. Moreover, we have $\lambda_n = \frac{\ln n}{n}$, $b_n^2 \sim \frac{\ln^2 n}{n}$, $n \rightarrow \infty$ and thus the condition 3) holds. The condition 4) fulfills since $\tau_n \sim \frac{\ln^3 n}{n}$ and $\tau < \infty$. Consequently, all conditions of Theorem 2 hold in the case when immigration variance tends to zero.

2) Let us consider the case when the immigration variance tends to infinity such that $nb_n^2 \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$. Let $\xi_{1,1}^{(n)}$ is distributed as below and take for $n \in \mathbb{N}$

$$P(\varepsilon_1^{(n)} = 0) = 1 - \frac{1}{\ln n}, \quad P(\varepsilon_1^{(n)} = [\ln n]) = \frac{1}{\ln n}.$$

In this case, we have $\lambda_n = 1$, $b_n^2 = \ln n - 1$ and $\tau_n \sim \ln n$ and all conditions of Theorem 2 hold.

4 Proof of the main result

Доведення. We consider only the case $m_n > 1$. The statement of Theorem for the cases $m_n = 1$ and $m_n < 1$ can be proved by analogous considerations. By Esseen inequality

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi_\beta(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^T \left| \frac{g_n(t) - g(t)}{t} \right| dt + \frac{24}{\pi T} \sup_x |\Phi'_\beta(x)|, \quad (4)$$

where

$$g_n(t) = e^{-itEX_n^{(n)}} / \sqrt{nb_n^2} \varphi_n\left(e^{it/\sqrt{nb_n^2}}\right),$$

$$g(t) = e^{-\frac{t^2}{2}\beta^2}, \quad \sup_x |\Phi'_\beta(x)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta}.$$

In relation (4), a positive number $T = T_n$ may be chosen arbitrary.

We set

$$T_n = \frac{\sqrt{nb_n^2}}{24L_n}.$$

Now we have to estimate the integral (4). For this aim, we represent it as the sum of three integrals:

$$J_n^{(1)} + J_n^{(2)} + J_n^{(3)} = \int_0^T \frac{\Delta_n^{(1)}(t)}{t} dt + \int_0^T \frac{\Delta_n^{(2)}(t)}{t} dt + \int_0^T \frac{\Delta_n^{(3)}(t)}{t} dt, \quad (5)$$

where

$$\Delta_n^{(1)}(t) = \left| e^{-itEX_n^{(n)}/\sqrt{nb_n^2}} \varphi_n \left(e^{it/\sqrt{nb_n^2}} \right) - e^{-it \frac{\lambda_n}{\sqrt{nb_n^2}} \frac{m_n^n - 1}{m_n - 1} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(z_{nk} - \frac{z_{nk}^2}{2} \right)} \right|,$$

$$\Delta_n^{(2)}(t) = \left| e^{-it \frac{\lambda_n}{\sqrt{nb_n^2}} \frac{m_n^n - 1}{m_n - 1} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(z_{nk} - \frac{z_{nk}^2}{2} \right)} - e^{-\frac{\beta_n^2}{b_n^2} \frac{t^2}{2}} \right|,$$

$$\Delta_n^{(3)}(t) = \left| e^{-\frac{\beta_n^2}{b_n^2} \frac{t^2}{2}} - e^{-\beta^2 \frac{t^2}{2}} \right|,$$

where $z_{nk} = h_n \left(f_n^{(k)} \left(e^{it/\sqrt{nb_n^2}} \right) \right) - 1$ and we have to bound each $\Delta_n^{(i)}(t)$, $i = 1, 2, 3$ and evaluate integrals $J_n^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, separately.

Consider $\Delta_n^{(1)}(t)$. It is well-known that the generating function of $X_n^{(n)}$ is defined by

$$\varphi_n(s) = \prod_{k=0}^{n-1} h_n \left(f_n^{(k)}(s) \right).$$

Since $E \left(\xi_{1,1}^{(n)} \right)^3 < \infty$, then we may use Taylor expansion with Lagrange form of remainder

$$f_n^{(k)} \left(e^{it/\sqrt{nb_n^2}} \right) = 1 + it \frac{ES_k^{(n)}}{\sqrt{nb_n^2}} - \frac{t^2 E \left(S_k^{(n)} \right)^2}{2 nb_n^2} + \theta_1 \frac{|t|^3 E \left(S_k^{(n)} \right)^3}{nb_n^2 \sqrt{nb_n^2}},$$

$$|\theta_1| \leq 1. \quad (6)$$

Similarly, by the assumption $\tau_n < \infty$ we may decompose the generating function $h_n(s)$ in Taylor series with Lagrange form of remainder

$$h_n(s) = 1 + (s-1) E\varepsilon_1^{(n)} + \frac{(s-1)^2}{2} E\varepsilon_1^{(n)} \left(\varepsilon_1^{(n)} - 1 \right) + \theta_2 (s-1)^3 \tau_n, |\theta_2| \leq 1. \quad (7)$$

Substituting (6) in (7), we obtain

$$h_n \left(f_n^{(k)} \left(e^{it/\sqrt{nb_n^2}} \right) \right) = 1 + \frac{it}{\sqrt{nb_n^2}} \lambda_n ES_k^{(n)} - \frac{t^2}{2nb_n^2} \lambda_n E \left(S_k^{(n)} \right)^2 - \frac{t^2}{2nb_n^2} \lambda_n \left(ES_k^{(n)} \right)^2 (b_n^2 + \lambda_n^2 - \lambda_n) + Q_n^{(k)}(t) =$$

$$= 1 + \frac{itm_n^k}{\sqrt{nb_n^2}} \lambda_n - \frac{t^2 \lambda_n \sigma_n^2 m_n^{k-1} (m_n^k - 1)}{2nb_n^2 (m_n - 1)} - \frac{t^2 m_n^{2k}}{2nb_n^2} (b_n^2 + \lambda_n^2) + Q_n^{(k)}(t),$$

where $Q_n^{(k)}(t)$ admits the representation:

$$Q_n^{(k)}(t) = \theta_1 \frac{|t|^3 E \left(S_k^{(n)} \right)^3}{nb_n^2 \sqrt{nb_n^2}} \lambda_n + \frac{it E \left(S_k^{(n)} \right)}{\sqrt{nb_n^2}} \left[\frac{t^2 E \left(S_k^{(n)} \right)^3}{2nb_n^2} + \frac{|t|^3 E \left(S_k^{(n)} \right)^3}{nb_n^2 \sqrt{nb_n^2}} \right] (b_n^2 + \lambda_n^2 - \lambda_n) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[-\frac{t^2 E \left(S_k^{(n)} \right)^2}{2nb_n^2} + \theta_1 \frac{|t|^3 E \left(S_k^{(n)} \right)^3}{nb_n^2 \sqrt{nb_n^2}} \right]^2 \times (b_n^2 + \lambda_n^2 - \lambda_n) + \theta_2 \times$$

$$\times \left[\frac{it ES_k^{(n)}}{\sqrt{nb_n^2}} - \frac{t^2 E \left(S_k^{(n)} \right)^2}{2nb_n^2} + \theta_1 \frac{|t|^3 E \left(S_k^{(n)} \right)^3}{nb_n^2 \sqrt{nb_n^2}} \right]^3 \tau_n.$$

Then, it is easily seen that for $|t| \leq T_n$, we have the following estimate

$$1 - \left| h_n \left(f_n^{(k)} \left(e^{it/\sqrt{nb_n^2}} \right) \right) \right| \leq |z_{nk}| \leq \frac{|t|}{\sqrt{nb_n^2}} m_n^k (1 + \lambda_n) \leq \frac{1}{24}. \quad (8)$$

Therefore, for $|t| \leq T_n$, it is valid the representation

$$\prod_{k=0}^{n-1} h_n \left(f_n^{(k)} \left(e^{it/\sqrt{nb_n^2}} \right) \right) = e^{\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1+z_{nk})},$$

where $\ln z$ means the main value of the logarithm of a complex number z ($\ln z = \ln |z| + i \arg z$, $-\pi < \arg z < \pi$).

Now by using the following inequalities

$$|e^x - 1| \leq |x| e^{|x|}, \quad \left| \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right| \leq |x|^3, \\ |x| \leq \frac{1}{2}, \quad (9)$$

we obtain

$$\Delta_n^{(1)}(t) \leq \left| e^{-it \frac{\lambda_n}{\sqrt{nb_n^2}} \frac{m_n^{n-1}}{m_n-1}} \right| \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(z_{nk} - \frac{z_{nk}^2}{2} \right) \right| \times \\ \times \sum_{k=0}^{n-1} |z_{nk}|^3 e^{\sum_{k=0}^{n-1} |z_{nk}|^3}.$$

First we will estimate $|z_{nk}|^3$. By (8), for $|t| \leq T_n$, we have

$$|z_{nk}|^3 \leq \frac{|t|^3}{nb_n^2 \sqrt{nb_n^2}} m_n^{3k} (1 + \lambda_n)^3 \leq \frac{t^2}{24nb_n^2} m_n^{2k},$$

and thus

$$\sum_{k=0}^{n-1} |z_{nk}|^3 \leq \frac{t^2}{24nb_n^2} \sum_{k=0}^{n-1} m_n^{2k} = \frac{t^2}{24nb_n^2} \frac{m_n^{2n} - 1}{m_n - 1}. \quad (10)$$

On the other hand,

$$\sum_{k=0}^{n-1} |z_{nk}|^3 \leq \frac{|t|^3}{nb_n^2 \sqrt{nb_n^2}} (1 + \lambda_n)^3 \sum_{k=0}^{n-1} m_n^{3k} \leq \\ \leq \frac{|t|^3}{nb_n^2 \sqrt{nb_n^2}} (1 + \lambda_n)^3 \frac{m_n^{3n} - 1}{m_n - 1}. \quad (11)$$

Further,

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(z_{nk} - \frac{z_{nk}^2}{2} \right) \right| \leq e^{-\frac{t^2}{2nb_n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\lambda_n \sigma_n^2 m_n^k (m_n^k - 1)}{m_n(m_n - 1)} + m_n^{2k} b_n^2 \right)} \times$$

$$\times e^{\sum_{k=0}^{n-1} (\delta_{nk}^{(1)}(t) + \delta_{nk}^{(2)}(t))} \left| e^{-it \frac{\lambda_n}{\sqrt{nb_n^2}} \frac{m_n^{n-1}}{m_n-1}} \right| \quad (12)$$

where

$$\delta_{nk}^{(1)}(t) = \frac{|t|}{\sqrt{nb_n^2}} m_n^k \lambda_n |Q_n^{(k)}(t)| + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{t^2}{2nb_n^2} \lambda_n E(S_k^{(n)})^2 + \frac{t^2}{2nb_n^2} m_n^{2k} (b_n^2 + \lambda_n^2 - \lambda_n) + \right. \\ \left. + |Q_n^{(k)}(t)|^2 \right),$$

$$\delta_{nk}^{(2)}(t) = \theta_1 \frac{|t|^3 E(S_k^{(n)})^3}{nb_n^2 \sqrt{nb_n^2}} \lambda_n + \\ + \frac{itm_n^k}{\sqrt{nb_n^2}} \theta_1 \frac{|t|^3 E(S_k^{(n)})^3}{nb_n^2 \sqrt{nb_n^2}} (b_n^2 + \lambda_n^2 - \lambda_n) + \\ + \frac{1}{2} \left[-\frac{t^2 E(S_k^{(n)})^2}{2nb_n^2} + \theta_1 \frac{|t|^3 E(S_k^{(n)})^3}{nb_n^2 \sqrt{nb_n^2}} \right]^2 \times \\ \times (b_n^2 + \lambda_n^2 - \lambda_n) + \\ + \theta_2 \left[\frac{it E S_k^{(n)}}{\sqrt{nb_n^2}} - \frac{t^2 E(S_k^{(n)})^2}{2nb_n^2} + \theta_1 \frac{|t|^3 E(S_k^{(n)})^3}{nb_n^2 \sqrt{nb_n^2}} \right]^3 \tau_n.$$

We may notice that for $|t| \leq T_n$

$$|Q_n^{(k)}(t)| \leq \frac{1}{5} \frac{t^2}{nb_n^2} m_n^{2k}, \quad |\delta_{nk}^{(1)}(t)| \leq \frac{1}{100} \frac{t^2}{nb_n^2} m_n^{2k},$$

$$|\delta_{nk}^{(2)}(t)| \leq \frac{4}{25} \frac{t^2}{nb_n^2} m_n^{2k}. \quad (13)$$

From (12) and taking estimations (13) into account, we may write

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(z_{nk} - \frac{z_{nk}^2}{2} \right) \right| \leq \\ \leq e^{-\frac{t^2}{2nb_n^2} \frac{\lambda_n \sigma_n^2 (m_n^{n-1} - 1)(m_n^n - 1)}{(m_n^2 - 1)(m_n - 1)} - \frac{t^2}{2n} \frac{m_n^{2n-1}}{m_n^2 - 1}} \times \\ \times e^{\frac{17}{100} \frac{t^2}{nb_n^2} \frac{m_n^{2n-1}}{m_n^2 - 1}}. \quad (14)$$

Recalling relations (10), (11) and (14) we have the bound

$$\Delta_n^{(1)}(t) \leq \frac{|t|^3}{nb_n^2 \sqrt{nb_n^2}} (1 + \lambda_n)^3 \frac{m_n^{3n} - 1}{m_n - 1} \times \\ \times e^{-\frac{t^2}{2nb_n^2} \left[\frac{\lambda_n \sigma_n^2 (m_n^{n-1} - 1)(m_n^n - 1)}{(m_n^2 - 1)(m_n - 1)} + \frac{11}{25} \frac{m_n^{2n-1}}{m_n - 1} \right]} e^{-\frac{t^2}{2n} \frac{m_n^{2n-1}}{m_n^2 - 1}}. \quad (15)$$

Hence, the integral $J_n^{(1)}$ does not exceed

$$\begin{aligned} & C \frac{(1 + \lambda_n)^3}{nb_n^2 \sqrt{nb_n^2}} \frac{m_n^{3n} - 1}{m_n - 1} \times \\ & \times \int_0^\infty t^2 e^{-\frac{t^2}{2nb_n^2} \left[\frac{\lambda_n \sigma_n^2 (m_n^{n-1} - 1)(m_n^n - 1)}{(m_n^2 - 1)(m_n - 1)} + \frac{11}{25} \frac{m_n^{2n} - 1}{m_n - 1} \right]} \times \\ & \times e^{-\frac{t^2}{2n} \frac{m_n^{2n} - 1}{m_n^2 - 1}} dt \\ & \leq C \frac{(1 + \lambda_n)^3}{nb_n^2 \sqrt{nb_n^2}} \frac{m_n^{3n} - 1}{m_n - 1} \times \\ & \times \frac{nb_n^2}{\left[\frac{\lambda_n \sigma_n^2 (m_n^{n-1} - 1)(m_n^n - 1)}{(m_n^2 - 1)(m_n - 1)} + \frac{11}{25} \frac{m_n^{2n} - 1}{m_n - 1} + b_n^2 \frac{m_n^{2n} - 1}{m_n^2 - 1} \right]} \leq \\ & \leq C \frac{L_n}{\sqrt{nb_n^2}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Now we consider the relation $\Delta_n^{(2)}(t)$. From the inequalities (9), it entails

$$\Delta_n^{(2)}(t) \leq e^{-\frac{t^2}{2} \frac{\beta_n^2}{b_n^2}} \chi_n(t) e^{\chi_n(t)}, \quad (17)$$

where

$$\begin{aligned} \chi_n(t) = & \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \left| Q_n^{(k)}(t) \right| + \frac{|t| m_n^k \lambda_n}{\sqrt{nb_n^2}} \times \right. \\ & \times \left(\frac{t^2 \lambda_n}{2nb_n^2} E(S_k^{(n)})^2 + \frac{t^2}{2nb_n^2} (ES_k^{(n)})^2 \times \right. \\ & \times (b_n^2 + \lambda_n^2 - \lambda_n) \Big) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{t^2 E(S_k^{(n)})^2}{2nb_n^2} + \frac{t^2}{2nb_n^2} (ES_k^{(n)})^2 \times \right. \\ & \times (b_n^2 + \lambda_n^2 - \lambda_n) + \left. \left| Q_n^{(k)}(t) \right| \right)^2 \Big\}. \end{aligned}$$

For $|t| \leq T_n$, we have

$$\left| Q_n^{(k)}(t) \right| \leq C \frac{|t|^3}{nb_n^2 \sqrt{nb_n^2}} m_n^{4k} B_n,$$

References

1. Athreya, K.B. and Ney, P.E. (1972) "Branching Processes", *Springer*, New York.
2. Borovkov, K.A. (1985) "On the convergence of branching processes to a diffusion process", *Theory of Probability and its Applications*, Vol. 30, pp. 468-477.
3. Chan, N.H. and Wei, C.Z. (1987) "Asymptotic inference for nearly nonstationary ar(1)

$$\begin{aligned} \chi_n(t) & \leq C \frac{|t|^3}{nb_n^2 \sqrt{nb_n^2}} \frac{m_n^{4n} - 1}{m_n^4 - 1} A_n B_n, \\ \chi_n(t) & \leq \frac{1}{4} \frac{|t|^2}{nb_n^2} \frac{m_n^{4n} - 1}{m_n^4 - 1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Substituting the bound (18) in (17), we get

$$\begin{aligned} \Delta_n^{(2)}(t) & \leq C \frac{|t|^3}{nb_n^2 \sqrt{nb_n^2}} \frac{m_n^{4n} - 1}{m_n^4 - 1} \times \\ & \times L_n e^{-\frac{t^2}{2} \frac{\beta_n^2}{b_n^2}} e^{\frac{1}{4} \frac{t^2}{nb_n^2} \frac{m_n^{2n} - 1}{m_n^2 - 1}} \leq \\ & \leq C \frac{|t|^3}{nb_n^2 \sqrt{nb_n^2}} \frac{m_n^{4n} - 1}{m_n^4 - 1} \times \\ & \times L_n e^{-\frac{t^2}{2nb_n^2} \left(\frac{\lambda_n \sigma_n^2 (m_n^{n-1} - 1)(m_n^n - 1)}{(m_n^2 - 1)(m_n - 1)} + b_n^2 \frac{m_n^{2n} - 1}{m_n^2 - 1} - \frac{1}{2} \frac{m_n^{2n} - 1}{m_n^2 - 1} \right)}. \end{aligned}$$

Consequently, for the integral $J_n^{(2)}$ we may deduce

$$J_n^{(2)} \leq C \frac{L_n}{\sqrt{nb_n^2}}. \quad (19)$$

Finally, it remains to estimate the relation $\Delta_n^{(3)}(t)$. Now, the application of the inequality

$$|e^{-x} - e^{-y}| \leq e^{-\min(x,y)} |x - y|, \quad x, y \geq 0$$

gives us the estimate

$$\Delta_n^{(3)}(t) \leq \frac{t^2}{2} \left| \frac{\beta_n^2}{b_n^2} - \beta^2 \right| e^{-\frac{t^2}{2} \min\left(\frac{\beta_n^2}{b_n^2}, \beta^2\right)}. \quad (20)$$

The estimation of the integral $J_n^{(3)}$ is not difficult. Collecting (16), (19), (20), and (5), we get the desired result. $\square$

processes", *Ann. Statist.*, Vol. 22, pp. 1050-1063.

4. Gikhman, I.I. and Skorokhod, A.V. (1968) "Stochastic Partial Differential Equations and Their Applications", *Naukova Dumka*, Kyiv.
5. Györfi, L., Ispány, M., Kevei, P. and Pap, G. (2014) "Asymptotic behavior of multi-type nearly critical galton-watson processes with immigration", *Theory Probability and its Applications*, Vol. 59, pp. 752-775.

6. Haccou, P., Jagers, P. and Vatutin, V. (2005) "Branching Processes. Variation, Growth, and Extinction of Populations", *Cambridge University Press*, Cambridge.
7. Ispány, M. (2008), "Limit theorems for normalized nearly critical branching processes with immigration", *Publ.Math.Deceben*, Vol. 72, pp. 17–34.
8. Ispány, M., Pap, G. and Van Zuijlen, M.C.A. (2005), "Fluctuation limit theorem of branching processes with immigration and estimation of the mean", *Adv.Appl.Probab.*, Vol. 37, pp. 523–538.
9. Khusanbaev, Y.M. (2014), "On the convergence rate in one limit theorem for branching processes with immigration", *Siberian Mathematical Journal.*, Vol. 55, pp. 178–184.
10. Khusanbaev, Y.M. (2016), "On asymptotics of branching processes with immigration", *Discrete Math.Appl.*, Vol. 28, pp. 113–122.
11. Khusanbaev, Y.M. and Sharipov, S.O. (2017), "Functional limit theorem for critical branching processes with dependent immigration", *Uzbek Mathematical Journal*, Vol 3, pp. 149–158.
12. Khusanbaev, Y.M. and Sharipov, S.O. (2018), "On convergence of branching processes with weakly dependent immigration", *Uzbek Mathematical Journal*, Vol 1, pp. 108–114.
13. Khusanbaev, Y.M. and Sharipov, S.O. (2020), "On the asymptotic behavior of branching processes with stationary immigration", *Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences*, Vol. 3, pp. 59–73.
14. Li, Z.H. (2000), "Ornstein-uhlenbeck type processes and branching processes with immigration", *J. Appl. Probab.*, Vol. 37, pp. 627–634.
15. Li, Z.H. (2006), "Branching processes with immigration and related topics.", *Frontiers of Mathematics in China*, Vol. 1, pp. 73–97.
16. Nagaev, S.V. and Mukhamedkhanova, R. (1966), "Some limit theorems of the theory of branching processes", *Limit Theorems and Statistical Inferences*, pp. 90–122.
17. Rahimov, I. (1995), "Random Sums and Branching Stochastic Processes", *Springer*, New York.
18. Rahimov, I. (2008), "Deterministic approximation of a sequence of nearly critical branching processes", *Stochastic Analysis and Applications*, Vol. 26, pp. 1013–1024.
19. Rahimov, I. (2009), "Approximation of fluctuations in a sequence of nearly critical branching processes", *Stochastic Models*, Vol. 25, pp. 348–373.
20. Rahimov, I. and Sirazhdinov, S.K. (1988), "Approximation of the distribution of a sum in a scheme for the summation of independent random variables", *Dokl. Math.*, Vol. 38, pp. 23–27.
21. Shiryaev, A.N. (2004), "Probability", *MCNMO*, Moscow.
22. Sriram, T.N. (1994), "Invalidity of bootstrap for critical branching processes with immigration", *Ann.Statist.*, Vol. 22, pp. 1013–1023.
23. Wei, C.Z. and Winnicki, J. (1989), "Some asymptotic results for the branching process with immigration", *Stochastic processes and their applications*, Vol. 31, pp. 261–282.

Received: 30.07.2019

УДК 519.21

О.О. Харитонов¹, *магістр*

**Теорія дуальності для не увігнутих
функцій корисності за умов
невизначеності моделі**

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64.
e-mail: ¹olenakharytonova06@gmail.com

O.O. Kharytonova¹, *master*

**Duality theory under model uncertainty
for non-concave utility functions**

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.
e-mail: ¹olenakharytonova06@gmail.com

Основна мета даної роботи полягає у вивченні функціоналу максимізації функції корисності,

$\sup_{X \in \mathcal{X}(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[U(X_T)]$, *за умов повної ринкової моделі, коли інвестор не впевнений в ймовірнісній моделі і протистойть як ризику, так і невизначеності моделі. У попередній літературі ця проблема була вивчена для строго увігнутих функцій корисності, і ми розширили існуючі результати для не увігнутих функцій корисності, розглядаючи їхне увігнення.*

Ключові слова: функціонал максимізації функції корисності, мінімакс проблема, увігнення.

The main goal for this paper is to study the robust utility maximization functional, i.e. $\sup_{X \in \mathcal{X}(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[U(X_T)]$, of the terminal wealth in complete market models, when the investor is uncertain about the underlying probabilistic model and averse against both risk and model uncertainty. In the previous literature, this problem was studied for strictly concave utility functions and we extended existing results for non-concave utility functions by considering their concavization.

Key Words: robust utility maximization functional, minimax problem, concavization.

1 Introduction

One of the most popular and challenging investment problems concerns utility-maximizing investments strategies. There is a lot of aspects which can be considered in this problem such as completeness of the market, properties of utility function, modeling of the payoff, probability measures etc. The main interest is in the very general setup, with an incomplete market, general sets of prior models and non-concave utility functions.

2 Model setup

We will consider the model as in [5] with the additional assumption that the discounted price process is locally bounded.

We assume that investor has utility function $U(x)$, the conditions on $U(x)$ will be stated later.

We consider the discounted price process with d assets which modeled by a stochastic process $S = (S_t)_{0 \leq t \leq T}$. We assume that S is a d -dimensional locally bounded semimartingale on

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ with respect to a filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$. The pair (x, ξ) is a self-financing trading strategy, where $x \in \mathbb{R}$ is the initial wealth and $\xi = (\xi_t)_{0 \leq t \leq T}$ is a d -dimensional predictable and S is an integrable process. The corresponding value process X satisfies

$$X_t = X_0 + \int_0^t \xi_r dS_r, \quad 0 \leq t \leq T.$$

By $\mathcal{X}(x)$, $x > 0$ we denote the set of all such processes X , with $X_0 \leq x$ which are also admissible in the sense that $X_t \geq 0$, for $0 \leq t \leq T$.

Additionally, the authors of [5] impose the assumptions on the set of probability measures $\mathcal{Q}$ on $(\Omega, \mathcal{F})$.

Assumption 1. (i) $\mathcal{Q}$ is convex;

(ii) $\mathbb{P}[A] = 0$ if and only if $Q[A] = 0$ for all $Q \in \mathcal{Q}$;

(iii) The set $\mathcal{Z} := \{dQ/dP | Q \in \mathcal{Q}\}$ is closed in $L^0(\mathbb{P})$.

Also, to the Assumption 1 we add

(iv) The set $\mathcal{Z}_e := \{dQ/dP | Q \in \mathcal{Q}_e\}$ is closed in $L^0(\mathbb{P})$,

where $\mathcal{Q}_e$ denotes the set of measures in $\mathcal{Q}$ that are equivalent to $\mathbb{P}$.

Assumption 2. *There is a unique equivalent local martingale measure, which we denote as Q^e .*

We consider the next value function of the robust utility problem

$$u(x) := \sup_{X \in \mathcal{X}(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[U(X_T)].$$

Also, we denote

$$u_Q(x) := \sup_{X \in \mathcal{X}(x)} E_Q[U(X_T)],$$

the value function of the optimal investment problem.

Consider the "abstract version" of $\mathcal{X}(x)$, as in [6, 7]:

$$C(x) :=$$

$$\{g \in L_+^0(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}) \mid 0 \leq g \leq X_T \text{ for some } X \in \mathcal{X}(x)\}.$$

It is easy to see that

$$\begin{aligned} u(x) &= \sup_{X \in \mathcal{X}(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[U(X_T)] = \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[U(g)]; \\ u_Q(x) &= \sup_{X \in \mathcal{X}(x)} E_Q[U(X_T)] = \sup_{g \in C(x)} E_Q[U(g)]. \end{aligned}$$

Remark 3. *It is known from Delbaen and Schachermayer (see [2] for the case of a locally bounded semimartingale S , [3] for the general case and [4] for more detailed version) that for $g \geq 0$, it holds that*

$$g \in C(x) \iff \sup_{Q \in \mathcal{M}_e} E_Q(g) \leq x \iff \sup_{Q \in \mathcal{M}_a} E_Q(g) \leq x,$$

where $\mathcal{M}_e$ is the set of equivalent local martingale measures and $\mathcal{M}_a$ is the set of absolutely continuous local martingale measures.

In our model setup $\mathcal{M}_e = \{Q^e\}$, and hence

$$g \in C(x) \iff E_{Q^e}(g) \leq x.$$

3 Main result

We want to investigate the minimax identity for the robust non-concave utility functional in a complete market model, i.e.

$$\sup_{X \in \mathcal{X}(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[U(X_T)] = \inf_{Q \in \mathcal{Q}} \sup_{X \in \mathcal{X}(x)} E_Q[U(X_T)].$$

We consider utility function $U : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ with $U(\infty) > 0$, which is non-constant, non-decreasing, upper semi-continuous and satisfies the mild growth condition:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{U(x)}{x} = 0.$$

We set $U(x) = -\infty$ for $x < 0$.

It follows from [8, Proposition 3.1] that $U(x)$ has a non-decreasing and continuous concave envelope $U_c(x)$ that is the smallest concave function such that $U_c(x) \geq U(x)$ for all $x \in \mathbb{R}$.

Denote by

$$\begin{aligned} u^c(x) &:= \sup_{X \in \mathcal{X}(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[U_c(X_T)] = \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[U_c(g)]; \\ u_Q^c(x) &:= \sup_{X \in \mathcal{X}(x)} E_Q[U_c(X_T)] = \sup_{g \in C(x)} E_Q[U_c(g)]. \end{aligned}$$

Also, we need the finiteness of the value functions of the optimal investment problem, which we can write as

For all $x > 0$ exists a measure $Q_0 \in \mathcal{Q}_e$ such that $u_{Q_0}(x) < \infty$.

Assumption 5.

$u_{Q_0}^c(x) < \infty$ for some, and hence for all $x > 0$ and some $Q_0 \in \mathcal{Q}_e$.

Theorem 1. *Additionally to Assumption 1, 2, 3 and 4 we assume that the probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ is atomless. Then the following holds*

$$\begin{aligned} \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g)] &\stackrel{(1*)}{=} \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[U_c(g)] \stackrel{(2*)}{=} \inf_{Q \in \mathcal{Q}} \sup_{g \in C(x)} E_Q[U_c(g)] \\ &\stackrel{\forall (4*)}{=} \inf_{g \in C(x)} \sup_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U(g)] \stackrel{\|(3*)}{=} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} \sup_{g \in C(x)} E_Q[U(g)] \\ &\stackrel{\|(6*)}{=} \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U(g)] \stackrel{(7*)}{\leq} \inf_{Q \in \mathcal{Q}} \sup_{g \in C(x)} E_Q[U(g)] \stackrel{(8*)}{\leq} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} \sup_{g \in C(x)} E_Q[U(g)] \end{aligned}$$

The proof of this theorem will be divided into several parts.

Lemma 1. *Suppose that Assumptions 1 and Assumption 4 hold.*

Then, we have

$$\begin{aligned} &u^c(x) \\ &= \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[U_c(g)] = \inf_{Q \in \mathcal{Q}} \sup_{g \in C(x)} E_Q[U_c(g)] \\ &= \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g)] = \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} \sup_{g \in C(x)} E_Q[U_c(g)] \end{aligned}$$

Proof. *The proof is similar to the proof of [5, Lemma 3.4].*

We do not prove the minimax identity in the general case of non-concave functions but we establish some conditions under which it will hold.

Lemma 2. *If Assumptions 1 and Assumption 3 hold, then for all $g \in C(x)$*

$$\inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[U(g)] = \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U(g)]. \quad (1)$$

Proof. *The idea of the proof is the same as in [5, Lemma 3.4].*

To prove equality (5★), we follow the paper of Christian Reichlin [1]. He considered non-constant, increasing and upper semi-continuous function $U : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, with $U(\infty) > 0$ satisfying a mild growth condition:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{U(x)}{x} = 0.$$

We take the function

$$u(x, U) = \sup\{\mathbb{E}[U(f)] \mid f \in L_+^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \text{ with } E_Q(f) \leq x\},$$

for a (pricing) measure $Q \approx P$.

For convenience, introduce one more notation. Namely, the set

$$C'(x) := \{f \in L_+^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \text{ with } E_Q(f) \leq x\} \quad (2)$$

Note that $u(x, U) = \sup_{f \in C'(x)} \mathbb{E}[U(f)]$.

One of the main results of the Reichlin's paper is [1, Theorem 5.1].

Theorem 2 (Theorem 5.1 by [1]). *Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ be atomless. Then it holds that*

$$u(x, U) = u(x, U_c) \text{ for all } x > 0.$$

The non-concave problem $u(x, U)$ admits a maximizer if and only if the concavized problem $u(x, U_c)$ admits a maximizer. Every maximizer for the non-concave problem $u(x, U)$ also maximizes the concavized problem $u(x, U_c)$.

Remark. *By our assumptions, there exists at least one equivalent martingale measure, which is also equivalent local martingale measure. Noting that Q^e is a unique equivalent local martingale measure it is also unique equivalent martingale measure.*

Noting Remark 3, we can use the Q^e as a pricing measure, in the Reichlin's paper and obtain

$$f \in C(x) \iff f \in C'(x).$$

Then it follows from Theorem 2 that

$$\sup_{g \in C(x)} \mathbb{E}[U(g)] = \sup_{g \in C(x)} \mathbb{E}[U_c(g)], \text{ for all } x > 0.$$

Lemma 3. *Suppose Assumption 2 holds and assume that $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ is atomless.*

Then it holds that

$$\inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} \sup_{g \in C(x)} E_Q[U(g)] = \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} \sup_{g \in C(x)} E_Q[U_c(g)].$$

Proof. *First, note that for his theorem, C.Reichlin used only the probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ and pricing measure $Q^p \approx \mathbb{P}$. Moreover, the condition $E_{Q^p}(f) \leq x$ does not depend on $\mathbb{P}$. If $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ is atomless then $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ is atomless for all $Q \approx \mathbb{P}$. Moreover, the set $L_+^0(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ is the same for all $Q \approx \mathbb{P}$, and it means that everything remains true if we substitute $\mathbb{P}$ with another measure $\tilde{Q} \approx \mathbb{P}$. And equivalent local martingale measure Q^e remains the same and unique. So, we use Q^e as a pricing measure in Reichlin's paper.*

Hence,

$$\sup_{g \in C(x)} E_Q[U(g)] = \sup_{g \in C(x)} E_Q[U_c(g)], \text{ for all } Q \in \mathcal{Q}_e. \quad (3)$$

Consequently,

$$\inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} \sup_{g \in C(x)} E_Q[U(g)] = \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} \sup_{g \in C(x)} E_Q[U_c(g)].$$

Proof of Theorem 1.

- (1★) - (3★) follows from Lemma 1;
- (4★) follows from the fact that $U_c \geq U$;
- (5★) follows from Lemma 3;
- To obtain (6★) we need to take the $\sup_{g \in C(x)}$ of the both sides in the equality (1);
- The inequality (7★) follows from the fact that for all $Q \in \mathcal{Q}$ and all $g \in C(x)$ holds

$$\inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[U_c(g)] \leq \sup_{g \in C(x)} E_Q[U_c(g)].$$

- Since $\mathcal{Q}_e \subseteq \mathcal{Q}$, the inequality (8★) is clear.

□

Lemma 4. Suppose that Assumption 1 holds and that for all $Q \in \mathcal{Q}_e$: $u_Q^c(x) < \infty$ for some $x > 0$.

Additionally, assume that $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u_Q^c(x)}{x} = 0$, for each $Q \in \mathcal{Q}_e$. Then, for any $x > 0$, there exist some $\hat{g} \in C(x)$ and $\hat{Q} \in \mathcal{Q}$ such that

$$u^c(x) = \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[U_c(\hat{g})] = E_{\hat{Q}}[U_c(\hat{g})] = u_{\hat{Q}}^c(x)$$

Proof. The proof follows from the first part of the proof of [5, Theorem 2.6 and Lemma 4.1 (a)]. Note that we have $U : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, hence we do not have to consider $U(g + \varepsilon)$ and proof of [5, Lemma 4.1 (a)] in our case is easier.

The complete proof of the relation $u^c(x) = u_{\hat{Q}}^c(x)$ can be done similarly to the proof of Theorem 3 part (ii) $\Rightarrow$ (i) noting that minimax identity for concavized objective function U_c holds.

Remark 6. Actually, under assumptions of the lemma above for any $x > 0$, there exist some $\hat{g} \in C(x)$ and $\hat{Q}_0 \in \mathcal{Q}_e$ (instead of $\mathcal{Q}$) such that

$$u^c(x) = \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[U_c(\hat{g})] = E_{\hat{Q}_0}[U_c(\hat{g})] = u_{\hat{Q}_0}^c(x)$$

This is true because we add additional assumption on the set $\mathcal{Q}_e$ to Assumption 1 which is that the set $\mathcal{Z}_e$ is closed in the $L^0(\mathbb{P})$.

From now on by $\hat{Q}_0 \in \mathcal{Q}_e$ we will denote such a measure for which the following holds

$$u^c(x) = u_{\hat{Q}_0}^c(x).$$

Now we are going to present conditions under which the minimax identity for a non-concave utility function U holds.

Theorem 3. Suppose that all assumptions of Theorem 1 hold.

Then, the next two equalities are equivalent

$$(i) \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U(g)] = \sup_{g \in C(x)} E_{\hat{Q}}[U(g)], \text{ for } \hat{Q} \in \mathcal{Q}_e.$$

$$(ii) \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U(g)] = \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g)]$$

Proof. Suppose that (i) holds, then from (3) it follows that

$$\begin{aligned} \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U(g)] &= \sup_{g \in C(x)} E_{\hat{Q}}[U(g)] \\ &= \sup_{g \in C(x)} E_{\hat{Q}}[U_c(g)] \geq \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g)]. \end{aligned}$$

Noting that for all $x \geq 0$: $U_c(x) \geq U(x)$, we have (ii).

Assume (ii) holds, then from Theorem 1 we obtain that

$$\begin{aligned} \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U(g)] &= \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} \sup_{g \in C(x)} E_Q[U(g)] \\ &= \inf_{Z \in \mathcal{Z}_e} \sup_{g \in C(x)} \mathbb{E}[ZU(g)]. \end{aligned}$$

From the definition of infimum it follows that exists such a sequence $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{Z}_e$ that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{g \in C(x)} \mathbb{E}[Z_n U(g)] = \inf_{Z \in \mathcal{Z}_e} \sup_{g \in C(x)} \mathbb{E}[ZU(g)].$$

Using [2, Lemma A1.1], we conclude that there exists a sequence $(\hat{Z}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{conv}(Z_n, Z_{n+1}, \dots)$ such that $\hat{Z}_n$ converges a.s. to some $\hat{Z}$.

Moreover, $(\hat{Z}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{Z}_e$, because $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{Z}_e \subset \mathcal{Z}$. It follows that $(\hat{Z}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{Z}$ and also for all integer n : $\hat{Z}_n \approx \mathbb{P}$.

From Assumption 1 (iv) it follows that $\hat{Z} \in \mathcal{Z}_e$.

For each $n \in \mathbb{N}$ there exists a sequence $\alpha_i^n \in \mathbb{R}^+$ such that $\sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i^n = 1$ and $\hat{Z}_n = \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i^n Z_{n+i-1}$.

Hence,

$$\begin{aligned} \sup_{g \in C(x)} \mathbb{E}[\hat{Z}_n U(g)] &= \sup_{g \in C(x)} \mathbb{E} \left[U(g) \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i^n Z_{n+i-1} \right] \\ &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i^n \sup_{g \in C(x)} \mathbb{E}[Z_{n+i-1} U(g)]. \end{aligned}$$

Thus, by applying $\limsup_{n \rightarrow \infty}$, we obtain

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{g \in C(x)} \mathbb{E}[\hat{Z}_n U(g)] \leq \inf_{Z \in \mathcal{Z}_e} \sup_{g \in C(x)} \mathbb{E}[ZU(g)].$$

Noting that

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{g \in C(x)} \mathbb{E}[\hat{Z}_n U(g)] \geq \inf_{Z \in \mathcal{Z}_e} \sup_{g \in C(x)} \mathbb{E}[ZU(g)],$$

we get that

$$\inf_{Z \in \mathcal{Z}_e} \sup_{g \in C(x)} \mathbb{E}[ZU(g)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{g \in C(x)} \mathbb{E}[\hat{Z}_n U(g)] \quad (4)$$

Since $U(g)$ is bounded from below, it follows that there exists $c > 0$ such that $U(g) + c > 0$. From Fatou's lemma it follows that for all $g \in C(x)$ it holds that

$$\mathbb{E} \left[\liminf_{n \rightarrow \infty} \hat{Z}_n U(g) \right] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\hat{Z}_n U(g)].$$

This gives us the relations

$$\begin{aligned} & \sup_{g \in C(x)} \mathbb{E} \left[\liminf_{n \rightarrow \infty} \widehat{Z}_n U(g) \right] \\ & \leq \sup_{g \in C(x)} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\widehat{Z}_n U(g) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Noting that for all $Z_n \in \mathcal{Z}_e$ and all $g \in C(x)$ holds $\mathbb{E} \left[\widehat{Z}_n U(g) \right] \leq \sup_{g \in C(x)} \mathbb{E} \left[\widehat{Z}_n U(g) \right]$, we have

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\widehat{Z}_n U(g) \right] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{g \in C(x)} \mathbb{E} \left[\widehat{Z}_n U(g) \right]$$

Since g is arbitrary, we obtain

$$\begin{aligned} & \sup_{g \in C(x)} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\widehat{Z}_n U(g) \right] \\ & \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{g \in C(x)} \mathbb{E} \left[\widehat{Z}_n U(g) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

Combining (4), (5) and (6) we get

$$\sup_{g \in C(x)} \mathbb{E} [\widehat{Z} U(g)] \leq \inf_{Z \in \mathcal{Z}_e} \sup_{g \in C(x)} \mathbb{E} [Z U(g)]$$

Also, it is true that

$$\inf_{Z \in \mathcal{Z}_e} \sup_{g \in C(x)} \mathbb{E} [Z U(g)] \leq \sup_{g \in C(x)} \mathbb{E} [\widehat{Z} U(g)]$$

This relation concludes the proof.

Recall that it follows from Remark 6 that the measure $\widehat{Q}_0 \in \mathcal{Q}_e$.

Theorem 4. Suppose that all assumptions from Lemma 4 and from Theorem 1 hold. Assume that at least one of the items below holds

(i) There exists such a measure $\widehat{Q} \in \mathcal{Q}_e$ that for all $g \in C(x)$: $\inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g)] = E_{\widehat{Q}}[U_c(g)]$;

(ii) For any sequence $g_n \in C(x)$ such that $\lim_{n \rightarrow \infty} E_{\widehat{Q}_0}[U_c(g_n)] = \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g)]$ it holds that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{\widehat{Q}_0}[U_c(g_n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g_n)]$$

Then, we have

$$\sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U(g)] = \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g)].$$

Hence, all inequalities in Theorem 1 turn to equalities.

Proof. Let's prove the first part, i.e:

$$(i) \implies \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U(g)] = \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g)].$$

Due to the arguments of Lemma 3 it follows from [1, Proposition 5.3] that for all $g \in C(x)$ exists $g^* \in C(x)$ satisfying $\{g^* \in \{U < U_c\}\} = \emptyset$ and

$$E_{\widehat{Q}}[U_c(g)] = E_{\widehat{Q}}[U_c(g^*)] = E_{\widehat{Q}}[U(g^*)]$$

Since $\{g^* \in \{U < U_c\}\} = \emptyset$, we have

$$\inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g^*)] = \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U(g^*)]$$

Hence, (i) gives us the following equalities

$$\begin{aligned} & \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g)] = E_{\widehat{Q}}[U_c(g)] = E_{\widehat{Q}}[U_c(g^*)] \\ & \stackrel{(i)}{=} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g^*)] \\ & = \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U(g^*)] \leq \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U(g)]. \end{aligned}$$

Because $g \in C(x)$ was arbitrary, we obtain

$$\sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g)] \leq \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U(g)].$$

Noting that $U_c \geq U$, we have

$$\sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g)] = \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U(g)].$$

Now, let us prove the second part, i.e

$$(ii) \implies \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U(g)] = \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g)].$$

Recall that it follows from Remark 6 that $\widehat{Q}_0 \in \mathcal{Q}_e$, so we have

$$\begin{aligned} & u^c(x) = \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[U_c(g)] \\ & = \sup_{g \in C(x)} E_{\widehat{Q}_0}[U_c(g)] = u_{\widehat{Q}_0}^c(x). \end{aligned} \quad (7)$$

Note that due to Lemma 1 it holds that

$$\sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[U_c(g)] = \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g)]$$

By the definition of supremum exists such a sequence $g_n \in C(x)$ that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g_n)] = \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g)] \quad (8)$$

Noting that

$$\inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g_n)] \leq E_{\widehat{Q}_0}[U_c(g_n)] \leq \sup_{g \in C(x)} E_{\widehat{Q}_0}[U_c(g)],$$

we have

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g_n)] \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} E_{\hat{Q}_0}[U_c(g_n)] \leq \sup_{g \in C(x)} E_{\hat{Q}_0}[U_c(g)] \end{aligned}$$

From (7) and (8) we obtain

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g_n)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} E_{\hat{Q}_0}[U_c(g_n)] \\ &= \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g)] \end{aligned} \quad (9)$$

Due to the arguments of Lemma 3 it follows from [1, Proposition 5.3] that for all $g_n \in C(x)$ exists $g_n^* \in C(x)$ satisfying $\{g_n^* \in \{U < U_c\}\} = \emptyset$ and

$$E_{\hat{Q}_0}[U_c(g_n)] = E_{\hat{Q}_0}[U_c(g_n^*)] = E_{\hat{Q}_0}[U(g_n^*)]$$

Leads to

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E_{\hat{Q}_0}[U_c(g_n)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} E_{\hat{Q}_0}[U_c(g_n^*)] \\ &\stackrel{(9)}{=} \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g)] \end{aligned}$$

Then, it follows from (ii) that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{\hat{Q}_0}[U_c(g_n^*)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g_n^*)]$$

Noting that $\{g_n^* \in \{U < U_c\}\} = \emptyset$, we have

$$\begin{aligned} \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g_n^*)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U(g_n^*)] \leq \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U(g)] \end{aligned}$$

Since $U_c \geq U$, we obtain

$$\sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g)] = \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U(g)].$$

Before presenting the next theorem let us introduce a notation. By $V(y)$ we denote the conjugate of U as

$$V(y) := \sup_{x \geq 0} \{U(x) - xy\}.$$

Note that ∂V denotes the subdifferential of V ; see more in [9, Chapter II].

Theorem 5. Suppose that all assumptions of Theorem 1 hold. Additionally, assume that $\frac{dQ_e}{dP}$ has a continuous distribution. Suppose also that for some $\lambda (\geq 0)$ the maximizer for $u^c(x)$ satisfies $g^* \in -\partial V(\lambda \cdot \frac{dQ_e}{dP})$.

Then g^* is also a maximizer for $u(x)$. Moreover, we have

$$\sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U(g)] = \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g)].$$

Hence, all inequalities in Theorem 1 turn to equalities.

Proof. Since g^* is maximizer for $u^c(x)$, we have

$$\sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g)] = \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g^*)].$$

If follows from the proof of [1, Lemma 5.7] that $\mathbb{P}(g^* \in \{U < U_c\}) = 0$. Hence,

$$\inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g^*)] = \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U(g^*)].$$

Thus, we obtain

$$\begin{aligned} \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g)] &= \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g^*)] \\ &= \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U(g^*)] \leq \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U(g)] \end{aligned}$$

Since $U_c \geq U$, we have

$$\begin{aligned} \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g)] &= \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U_c(g^*)] \\ &= \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U(g^*)] = \sup_{g \in C(x)} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[U(g)]. \end{aligned}$$

Now, from Lemma 2 it follows that g^* is a maximizer for $u(x)$.

4 Conclusions

In this paper, we have studied the minimax identity for non-concave utility functions with the help of their concavification in the complete market models. We have shown that under some assumptions the minimax identity for non-concave functions holds.

In the future, it will be really helpful to study further the minimax identity for the non-concave utility functions in the complete and incomplete market models. The proof of minimax identity for non-concave utility functions in the complete market models will lead to construction of the unique optimal investment strategy for the problem of maximizing the robust non-concave utility functional in complete market under natural assumptions.

Список використаних джерел

1. Reichlin, Christian Rochus August: "Utility Maximization with a Given Pricing Measure When the Utility Is Not Necessarily Concave"; Mathematics and Financial Economics, Volume 7, Issue 4, pp 531-556, 2013
2. Delbaen, F., Schachermayer, W. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. Math. Ann. 300 (1994), no. 3, 463-520.
3. Delbaen, F., Schachermayer, W. (1998). The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes. Math. Ann. 312, 215-250.
4. Delbaen, F.; Schachermayer, W. (2006). The mathematics of arbitrage. ISBN 978-3-540-21992-7.
5. Schied, Alexander; Wu, Ching-Tang. Duality theory for optimal investments under model uncertainty.
6. Kramkov, D., Schachermayer, W. The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets. Ann. Appl. Probab. 9, no. 3, 904-950 (1999).
7. Kramkov, D., Schachermayer, W. Necessary and sufficient conditions in the problem of optimal investment in incomplete markets. Ann. Appl. Probab., Vol. 13, no. 4 (2003).
8. Aumann, R. and M. Perles, 1965, A variational problem arising in economics, Journal of Mathematical Analysis and Applications 11, 488-503
9. Reichlin, Christian Rochus August: "Non-concave utility maximization: optimal investment, stability and applications Doctoral Thesis, 2012.

References

1. REICHLIN, CHRISTIAN ROCHUS AUGUST: "Utility Maximization with a Given Pricing Measure When the Utility Is Not Necessarily Concave"; Mathematics and Financial Economics, Volume 7, Issue 4, pp 531-556, 2013
2. DELBAEN, F., SCHACHERMAYER, W. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. Math. Ann. 300 (1994), no. 3, 463-520.
3. DELBAEN, F., SCHACHERMAYER, W. (1998). The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes. Math. Ann. 312, 215-250.
4. DELBAEN, F.; SCHACHERMAYER, W. (2006). The mathematics of arbitrage. ISBN 978-3-540-21992-7.
5. SCHIED, ALEXANDER; WU, CHING-TANG. Duality theory for optimal investments under model uncertainty.
6. KRAMKOV, D., SCHACHERMAYER, W. The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets. Ann. Appl. Probab. 9, no. 3, 904-950 (1999).
7. KRAMKOV, D., SCHACHERMAYER, W. Necessary and sufficient conditions in the problem of optimal investment in incomplete markets. Ann. Appl. Probab., Vol. 13, no. 4 (2003).
8. AUMANN, R. AND M. PERLES, 1965, A variational problem arising in economics, Journal of Mathematical Analysis and Applications 11, 488-503
9. REICHLIN, CHRISTIAN ROCHUS AUGUST: "Non-concave utility maximization: optimal investment, stability and applications Doctoral Thesis, 2012.

Received: 20.11.2019

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ,
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА
ТА МЕХАНІКА**

УДК 532.5 <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2419/4.6>

V. O. Baranets, engineer,
N. M. Kizilova, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

Баранець В. О., інженер,
Кізілова Н. М., д. ф.-м. н., проф.

**On hyperbolicity and solution properties of
the continual models of micro/nanoparticle
aggregation and sedimentation in
concentrated suspensions**

**Про гіперболічність і властивості
розв'язків континуальних моделей
агрегації та седиментації
мікро/наночастинок у концентрованих
суспензіях**

¹V.N. Karazin Kharkiv National University,
61022, Kharkov, Svobody sq., 4,
e-mail: cherevko.vita@gmail.com

²V.N. Karazin Kharkiv National University,
61022, Kharkov, Svobody sq., 4,
e-mail: n.kizilova@gmail.com

¹Харківський національний університет
ім. В.Н. Каразіна, Харків, Україна,
e-mail: cherevko.vita@gmail.com

²Харківський національний університет
ім. В.Н. Каразіна, Харків, пл. Свободи, 4,
e-mail: n.kizilova@gmail.com

In continual mechanics sedimentation of aggregating particles in concentrated suspensions are determined by the mass and momentum conservation laws for each component of the suspension. The resulting quasilinear system of differential equations governing the flow could be hyperbolic, strongly strictly or weakly hyperbolic depending on the model accepted. The type and Eigenvalues of the matrix influence the characteristics of the pattern formation during the sedimentation that is essential for the model application in modern medical, microbiological and nanofluidic technologies. In this paper the hyperbolicity of the three-phase model of aggregation and sedimentation of micro/nanoparticles is studied.

Key Words: Aggregation, Sedimentation, Multiphase Continuous Media, Hyperbolic Systems, Eigenvalues, Characteristics.

В механіці суцільних середовищ седиментація частинок, що агрегують, у концентрованих суспензіях визначається законами збереження маси та імпульсу для кожного компонента суспензії. Отримана квазілінійна система диференціальних рівнянь, які керують течією, може бути гіперболічною, суворо або слабо гіперболічною залежно від прийнятої моделі. Тип та власні значення матриці задачі впливають на характеристики формування паттерну частинок під час їх седиментації, що є важливим для застосування моделі в сучасних медичних, мікробіологічних та нанофлюїдних технологіях. В даній роботі вивчається гіперболічність трифазної моделі агрегації та седиментації мікро і наночастинок.

Ключові слова: агрегація, седиментація, багатофазні суцільні середовища, гіперболічні системи, власні значення, характеристики.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я. О.

1. Introduction

Sedimentation of aggregating particles in suspensions is widely studied in connection with direct engineering applications like testing the suspension stability and ageing, formation of the layered materials and coatings composed of solid nanoparticles of different size and shape, biological tests of red blood cells or platelet sedimentation of patients [1-4]. The pattern formation in the sediment, its continuity and mechanical properties depend on the solution of

the governing system of equations [2-5]. In this paper the Eigenvalues (EV), characteristics (Ch) and different types of solutions are studied on the model of three-phase suspension of solid aggregating particles developed in [3].

2. Mathematical background

Let us consider a concentrated suspension composed of solid particles and basic fluid (BF) some part of which could be captured inside the aggregations as a captures fluid (CF). The mass and

momentum conservation laws in the case of 1D sedimentation in a tube in the external non-uniform flow field can be finally formulated as a system of quasilinear differential equations

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_{ij} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} = B_i, \quad i = 1-3, \quad (1)$$

where $\bar{\Phi} = (H, C, V)^T$, H and C are volumetric concentrations of the aggregates and particles in them, V is the mean volume of the aggregates per unite volume, $A_{ij}(t, x, \Phi_j) \in C^1(\mathcal{R}^n, \mathcal{R}^n)$ and $B_i(t, x, \Phi_j) \in C^1(\mathcal{R}^n)$ are matrix and force vector.

As it is known from general theory [1], if the Jacobian $J_A(\bar{\Phi}) = |\partial A_{ij}(\bar{\Phi}) / \partial x_j|_{i,j=1,\dots,n}$ has real EV and diagonalizable, (1) is hyperbolic. When the EV are distinct, (1) is strongly hyperbolic, and when J_A is not diagonalizable, (1) is weakly hyperbolic and singular shocks can occur [1].

Hyperbolic systems can have discontinuous solutions even when the boundary conditions (BC) are smooth. Such discontinuities are called kinematic shocks, which must satisfy jump conditions and an entropy condition (admissibility condition) [1,4,6]. Depending on the hyperbolicity kind of (1), different types of sedimentation (ToS) may be observed [1] (Fig.1 a,b).

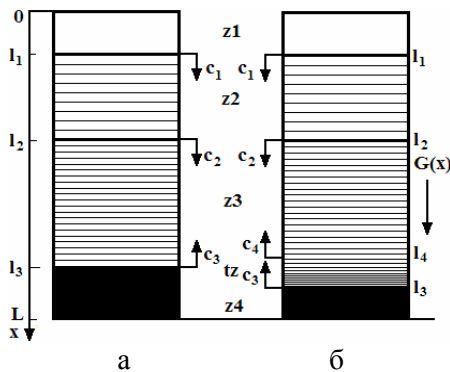


Fig.1. Sketch of ToS I (a) and ToS II, III (b); explanations are in the text.

ToS I corresponds to a sharp interface $l_1(t)$ separating the basic fluid zone ($z1$) from the particle sedimentation zone ($z2$) (Fig.1a), while ToS II and ToS III (Fig.1b) also have a transition zone (tz) between the aggregate sedimentation zone ($z3$) and the sediment zone ($z4$). In tz the concentration increases downwards continuously. ToS II shows a jump between the $z3$ and the tz , whereas in ToS III the jump is absent. The interfaces propagate as kinematic waves and the suspension dynamics is split into two regimes (Fig.1a,b): in one only hydrodynamic interactions

between the particles are dominant ($z2, z3$) and another in which the solid interactions between the particles are dominant ($z3, z4$) [1,2,4,6].

3. Mathematical problem formulation

The resulting system of equations for the 3-phase suspensions has the form [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} + A_{11} \frac{\partial H}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial C}{\partial x} + A_{13} \frac{\partial V}{\partial x} &= \theta - B_1, \\ \frac{\partial C}{\partial t} + A_{21} \frac{\partial H}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial C}{\partial x} + A_{23} \frac{\partial V}{\partial x} &= -B_2, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + A_{33} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{V^2}{C} (\Gamma^+ - \Gamma^-) - B_3, \end{aligned} \quad (3)$$

where θ is the rate of the CF accumulation, $\Gamma^\pm$ are rates of aggregation and disaggregation, A_{ik} , B_j , $\Gamma^\pm$ are known nonlinear functions of H, C, V ; the corresponding complex expressions are presented in [3]; the functions $B_{1-3} \neq 0$ here due to the presence of the non-uniform vertical field $G(x)$ instead of gravitation (for instance, centrifugal, magnetic or other force field). The BC for (3) are

$$t = 0, x \in [0, L]: H = H_0, \quad C = C_0, \quad V = V_0, \quad (4)$$

where C_0 and V_0 are the initial concentration and volume of a single particle; in the case of the perfectly uniform suspension $C_0 = H_0$.

The system (1) determines nonlinear flux function $F(\Phi)$, which needs special consideration in solving the initial value problem (3),(4). Any potential jump between $z1, z2, z3, tz$ and $z4$ must satisfy the Rankine-Hugoniot condition [1]

$$F(\Phi_{j+}) - F(\Phi_{j-}) = c_j(\Phi_{j+}, \Phi_{j-})(\Phi_{j+} - \Phi_{j-}), \quad (5)$$

where c_j is the jump propagation speed.

The Liu entropy condition requires that

$$c_j(\Phi_{j+}, \Phi_{j-}) \leq c_j(\Phi_{j+}, \Phi_j), \quad (6)$$

for all Φ in the Hugoniot locus inside $[\Phi_{j-}, \Phi_{j+}]$.

Here the existence of a complete set of EV for (3) and different ToS determined by (3), (4) for different model parameters taken from [3] for the suspension of human red blood cells are studied. As it was shown in [3], for such sets of parameters the discontinuity between $z1$ and $z2$ always exist while two more EV are solutions of the square equations and one of them could be negative. Theoretical sedimentation curves $l_1(t)$ can easily be checked in experimental measurements using the optical techniques, while the curves $l_2(t)$, $l_3(t)$, $l_4(t)$ are much more difficult for experimental studies.

4. Results and discussion

Solutions of the problem (3), (4) have been found by the method of characteristics [3,7]. The method had been validated by the particle dynamics method [8] and experiments [9]. The characteristic ch1 of the 1-st family separates z1 and z2 and moves with the speed $c_1 > 0$ at any set of material parameters. For the microparticles with high aggregation rate Γ^+ and $\Gamma^- \sim 0$ the length $l_2 - l_1$ of z2 is very short, while in the nanofluids it could be long enough due to high buoyancy of the nanoparticles [1]. At the low concentrations $C_0 < C^*$, C^* is a critical value, the cross-section of the ch1 and ch2 with negative speed $c_3 < 0$ (Fig.2a). The ch1 curves correspond to the experimentally observed sedimentation curves $l_1(t)$ and in Fig.2a $C^* \sim 0.25-0.3$ depending on the suspension parameters.

The nonlinear flux (5) can generate a centered rarefaction wave originating from the bottom (Fig.2b). This wave may be interpreted as a 'supersediment' consisted of the tz built above the sediment during sedimentation [1,5]. At some mode parameters and low external forces the tz layer built from $t=0$ and is formed by a series of thin layers with gradually increased (from $x=l_4(t)$ to $x=l_3(t)$) concentrations from $C=C^{**}$ in z3 to $C=1$ in z4 (Fig.1b). Existence or absence of the discontinuity at $x=l_4$ is determined by an additional condition that can be satisfied by different sets of suspension parameters and $G(x)$.

When the aggregation is high enough and the external force $G(x)$ grows monotonously, the z4 zone is formed quickly and another picture of zone distributions appear (Fig.2c). The rarefaction wave is represented by a fan of piecewise constant values split by the propagating fronts [1]. This solution strategy has been used for sedimentation modeling in bidisperse suspensions in [5]. At some combinations of the model parameters the discontinuity at $x=l_1+l_2+l_3$ (ToS III) is also presented as a fan-type structure proper to the rarefaction wave (Fig.2c). In the highly non-uniform fields $G(x)$ an additional jump at $x=x=l_1+l_2+l_4$ (ToS II) is formed (Fig.2d). Despite our case, in the uniform gravity field this structure is also uniform with the sublayers of gradually decreasing concentrations and, therefore, density.

Contrary to the 2-phase suspensions [1,4,5], in the 3-phase suspensions with the ability of rapid capture of the BF and its temporary absorption inside the sedimented aggregates in z3, release of the CF inside the zt will produce more

complex structures of the fan-type structures (ToS III) with a possibility with complex discontinuities with additional fan-type structures (ToS II) in each sublayer (Fig.3) depending on the relationships between the model parameters. This double structures are formed by the intersections of three family of characteristics of the system (3).

The corresponding bulky expressions for the conditions on the model parameters needed for development of each case (Fig.2a-d, Fig.3) are not presented here for brevity.

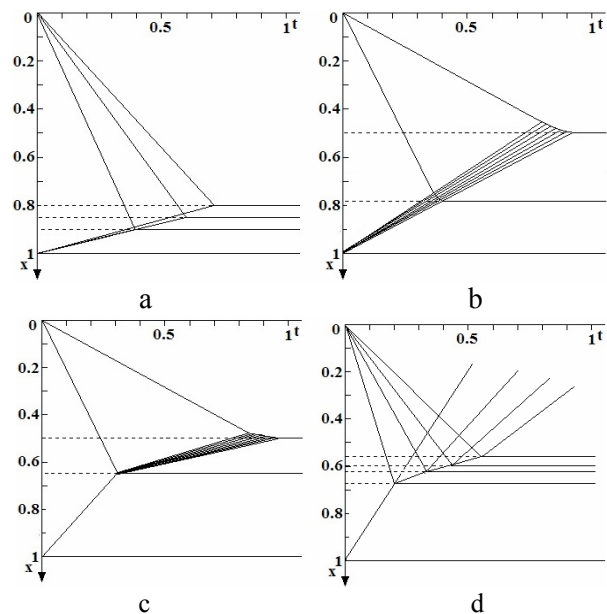


Fig.2. Characteristics of the 1-st and 2-nd families for (a) low $C_0=0.1; 0.15; 0.2$ and (b) high $C_0=0.35; 0.5$ values, in low- (c) and high- (d) intensity fields $G(x)$ at $C_0=0.4$.

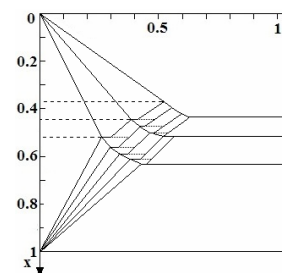


Fig.3. Distribution of 3 families of characteristics for 3-phase suspensions with high BF capture ($\theta = 0.5$).

5. Conclusions

The complete sets of EV for the 3-phase suspension of aggregating particles sedimented in an external non-uniform field are computed for different sets of material parameters. It was shown, besides well-known ToS I,II,III, a more complex sets of characteristics can appear. That may be used in manufacture of complex layered nanomaterials with non-uniform physical properties as well as in medical diagnostics on blood sedimentation tests.

Список використаних джерел

1. *Sedimentation Engineering*. A. Amini (ed.). IntechOpen. 2018. 196p.
2. Wallis G.B. *One-dimensional two-phase flow*. Mc Graw-Hill Inc. 1969. 326p.
3. Kizilova N., Batyuk L., Baranets V. Human Red Blood Cell Properties and Sedimentation Rate: a Biomechanical Study. // *Biomechanics in Medicine and Biology*. Springer Series "Advances in Intelligent Systems and Computing." Vol.831. - 2019. - P. 3-22.
4. Basson D.K., Berres S., Bürger R. On models of polydisperse sedimentation with particle-size-specific hindered-settling factors. // *Applied Mathematical Modelling* 33 (2009) 1815–1835.
5. Tory E.M., Bürger R., Concha F., Bustos M.C. *Sedimentation and Thickening: Phenomenological Foundation and Mathematical Theory*. Springer-Science. 1999.
6. Баранец В.А., Кизилова Н.Н., Дацок О.М. Аппаратно-программный комплекс для исследования процессов оседания в технических и биологических суспензиях агрегирующих микро- и наночастиц. // *Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна, сер. «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. - 2019. - т.42. - С.4-11.
7. Баранец В. А., Кизилова Н. Н. Дискретное моделирование агрегации и оседания микро- и наночастиц в суспензиях. // *Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна, сер. «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. - 2018. - т.40. - С.4-14.
8. Baranets V., Kizilova N. Mathematical modeling of particle aggregation and sedimentation in the inclined tubes. // *Bulletin of Kyiv National University. Ser. "Physical and Mathematical Sciences."* – 2018. – N4. – P.52-57.
9. Ruiz-Baiera R., Torres H. Numerical solution of a multidimensional sedimentation problem using finite volume-element methods. // *Applied Numerical Mathematics*. - 2015. – 95.- P. 280-291.

References

1. *Sedimentation Engineering*. (2018) A. AMINI (ed.). IntechOpen. 196 p.
2. SCHUCK P., ZHAO H. (2017) *Sedimentation velocity analytical ultracentrifugation*. CRC Press. - 271p.
3. FERNANDEZ-NIETO E.D., KONE E.H., DE LUNA T.M., BURGER R. (2013) A multilayer shallow water system for polydisperse sedimentation. *J. Comput. Phys.* Vol. 238. p. 281–314.
4. HOTZE E.M., PHENRAT T., LOWRY G.V. (2010) Nanoparticle Aggregation: Challenges to Understanding Transport and Reactivity in the Environment. *J. Environ. Qual.* Vol.39. p. 1909–1924.
5. Kizilova N., Batyuk L., Baranets V. Human Red Blood Cell Properties and Sedimentation Rate: a Biomechanical Study. // *Biomechanics in Medicine and Biology: Proceedings of the International Conference of the Polish Society of Biomechanics, Zielona Góra, Poland, September 5-7, 2018*. K. Arkusz, R. Będziński, T. Klekiel, S. Piszczatowski, eds. Springer Series "Advances in Intelligent Systems and Computing." Vol.831. - 2019. - P. 3-22.
6. BARANETS V.A., KIZILOVA N.N., DATSOK O.M. (2019) Hardware-software complex for the study of sedimentation processes in technical and biological suspensions of aggregating micro- and nanoparticles. *Visnyk of V.N. Karazin Kharkov National University, Ser. «Mathematical modeling. Information technologies. Automated control systems»*. Vol.42. p. 4-11.
7. BARANETS V.A., KIZILOVA N.N. (2018) Discrete modeling of aggregation and sedimentation of micro- and nanoparticles in suspensions. *Visnyk of V.N. Karazin Kharkov National University, Ser. «Mathematical modeling. Information technologies. Automated control systems»*. Vol.40. p. 4-14.
8. BARANETS V., KIZILOVA N. Mathematical modeling of particle aggregation and sedimentation in the inclined tubes. *Bulletin of Kyiv National University. Ser. "Physical and Mathematical Sciences."* – 2018. – N4. – P.52-57.
9. RUIZ-BAIERA R., TORRES H. (2015) Numerical solution of a multidimensional sedimentation problem using finite volume-element methods. *Applied Numerical Mathematics*. Vol.95. p. 280-291.

Надійшла до редколегії 10.12.2019

УДК 539.3 <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2419/4.7>

П'ятецька О. В., к. ф.-м. н., с. н. с.

O. V. Pyatetska, Ph. D. (Phys.-Math.),
Sr. Sci. Researcher

Згинні коливання в'язкопружних пластин в рамках моделі Кірхгофа-Лява

Bending vibrations of viscoelastic plates within the Kirchhoff-Love model

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Акад.
Глушкова 4-е
e-mail: pyatetskaov@gmail.com

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e
e-mail: pyatetskaov@gmail.com

В рамках гіпотез класичної теорії Кірхгофа-Лява побудовані повні системи розв'язувальних рівнянь для визначення напружено-деформованого стану і температури дисипативного розігріву при усталених поперечних коливаннях пластин із лінійного в'язкопружного матеріалу, властивості якого залежать від частоти зовнішнього навантаження та температури.

Ключові слова: в'язкопружні пластини, дисипативний розігрів, теорія Кірхгофа-Лява

Within the framework of the hypotheses of the classical Kirchhoff-Love theory, complete systems of resolving equations are constructed to determine the stress-strain state and the temperature of dissipative heating under steady transverse vibrations of plates made of a linear viscoelastic material, the properties of which depend on the frequency of external excitation and temperature. The equations were obtained without any preliminary suggestions about the law of temperature variation over the plate thickness. This law is determined in the process of solving the problem. The unrelated problem of vibrational bending of viscoelastic plates for complicated way of fixing a contour and different types of thermal boundary conditions is considered. Mathematical models of problems on the steady-state transverse vibrations of plates made of a linear viscoelastic material, the properties of which depend on temperature for an arbitrary law of its change over the thickness of the object. If the material characteristics depend on temperature, investigation of the influence of temperature of dissipative heating is reduced to solution of complicated non-linear systems of differential equations.

Key Words: viscoelastic plates, dissipative heating, Kirchhoff-Love theory

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Інтенсивний розвиток науки і техніки, створення нових конструкцій будівельних споруд, використання якісно нових матеріалів, що відповідають сучасному рівню науково-технічного прогресу, вимагають досконалих досліджень нестационарної поведінки тонких в'язкопружних пластин, які є компонентами різних інженерних конструкцій, з врахуванням температури. Температурні ефекти особливо важливі для пластин з полімерних матеріалів і композитів на їх основі, які дуже чутливі до зміни температури. При резонансних коливаннях та високих рівнях механічних навантажень виникає необхідність врахування впливу фізичної нелінійності, дисипативних властивостей матеріалів і температури дисипативного розігріву на напружено-деформований стан тонких в'язкопружних пластин. При визначенні напружено-деформованого стану пластин в

якості основної приймаємо гіпотезу Кірхгофа-Лява про недеформівний нормальний елемент. Коливальний процес, викликаний поперечним навантаженням з інтенсивністю $q(x, y, t)$ [1]:

$$q(x, y, t) = \sum_{k=1}^2 q_k(x, y) \cos [\omega t - (k-1)\pi/2] \quad (1)$$

вважається встановленим, тобто всі характеристики напружено-деформованого стану можуть бути представленими у вигляді:

$$Z(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^2 Z^{(k)}(x, y, z) \cos [\omega t - (k-1)\pi/2] \quad (2)$$

Тут x, y – декартові координати на серединній площині пластини, z – координата по нормалі до серединної площини пластини. Зв'язок між

компонентами тензорів напружень та малих деформацій у точці з координатами x, y, z визначається формулами:

$$\sigma_x = \frac{1}{1-\mu^2} \int_{-\infty}^t K(\tilde{T}, \omega, t-\tau) [e_x(x, y, z, t) + \mu e_y(x, y, z, t)] d\tau$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2(1+\mu)} \int_{-\infty}^t K(\tilde{T}, \omega, t-\tau) e_{xy}(x, y, z, t) d\tau, \quad (3)$$

де $\tilde{T} = \tilde{T}(x, y, z)$ – температура, що встановилася,

e_x, e_y, e_{xy} – відносні видовження та зсув для напрямлень x, y у точці (x, y, z) , коефіцієнт Пуасона $\mu = const$. Для визначення максимально можливої температури саморозігріву пластини, яка коливається, при обчисленні потужності джерел тепла, що з'являються внаслідок дисипації енергії, і розподілених по об'єму пластини, приймаємо, що вся робота зовнішніх сил при деформуванні одиничного об'єму. переходить в тепло. Тоді для потужності $\tilde{Q}(x, y, z)$ джерела тепла у точці (x, y, z) одержуємо:

$$\tilde{Q}(x, y, z) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \left(\sigma_x \frac{\partial e_x}{\partial t} + \sigma_y \frac{\partial e_y}{\partial t} + \tau_{xy} \frac{\partial e_{xy}}{\partial t} \right) dt \quad (4)$$

Як впливає із (4), з урахуванням характеру розподілу напружень і деформацій по товщині пластини, функція $\tilde{Q}(x, y, z)$ по змінній z буде змінюватись по квадратичному або більш складному закону, перетворюючись в нуль на серединній поверхні. Тому рівняння теплопровідності для осередненої по часу за один цикл коливань стаціонарної температури $\tilde{T} = \tilde{T}(x, y, z)$ записується як тривимірне для пластини:

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2} + \lambda_q^{-1} \tilde{Q}(x, y, z) = 0, \quad (5)$$

де λ_q – коефіцієнт теплопровідності матеріалу. Надалі при розв'язуванні теплових задач вважаємо, що торці пластини теплоізовані, а теплообмін із навколишнім середовищем здійснюється через лицьові поверхні. З рівнянь руху малого елемента пластини, що коливається, та виразів для складових внутрішніх зусиль і моментів, які впливають із (2) та (3), одержуємо системи рівнянь для складових напружено-деформованого стану. Змінні коефіцієнти цих систем (складові комплексних жорсткостей) інтегрально зале-

жать від невідомої температури $\tilde{T} = \tilde{T}(x, y, z)$. Приєднуючи рівняння теплопровідності (5), одержуємо повну систему розв'язувальних рівнянь. Якщо пластина виготовлена із матеріалу, властивості якого не залежать від температури $\tilde{T}$, то складові E_k ($k = 1, 2$) комплексного модуля пов'язані співвідношенням:

$$E_1(\omega) + i E_2(\omega) = \int_0^\infty K(\omega, s) e^{i\omega s} ds. \quad (6)$$

Складові комплексних жорсткостей на розтяг та згин, що виражаються через E_k ($k = 1, 2$), будуть у цьому випадку постійними, хоча можуть залежати від частоти, а жорсткість взаємного впливу розтягу та згину перетворюється в нуль. При цьому задача із нелінійної інтегро-диференціальної перетворюється в лінійну диференціальну, яка в свою чергу розпадається на дві послідовно розв'язувані задачі. Перша з них полягає у визначенні напружено-деформованого стану та обчисленні потужності джерел тепла, розподілених по об'єму пластини. Друга задача зводиться до крайової задачі для стаціонарного рівняння теплопровідності, розв'язок якої визначає теплове поле пластини. Зазначимо, що у цьому випадку задача залишається достатньо складною, так як порядок системи диференціальних рівнянь для визначення складових напружено-деформованого стану у два рази перевищує порядок відповідної системи із ідеально пружного матеріалу.

Якщо розглянемо незв'язану задачу про вібраційний згин в'язкопружних тонких пластин, то визначення напружено-деформованого стану зводиться до розв'язування крайової задачі для складових згину $w^{(k)}(x, y)$ ($k = 1, 2$). Система рівнянь для цих функцій має вигляд:

$$D_1 \nabla^2 \nabla^2 w^{(1)} - D_2 \nabla^2 \nabla^2 w^{(2)} - \rho h \omega^2 w^{(1)}(x, y) = q_1(x, y) \quad (7)$$

$$D_2 \nabla^2 \nabla^2 w^{(1)} - D_1 \nabla^2 \nabla^2 w^{(2)} - \rho h \omega^2 w^{(2)}(x, y) = q_2(x, y)$$

де ∇^2 – оператор Лапласа.

Для шарнірно закріпленої по контуру прямокутної пластини маємо:

$$q_1(x, y) = q_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad q_2 = 0, \quad q_0 = const.$$

Використання ідеї відомого розв'язку Нав'є задачі стаціонарного згину прямокутної пластини з ідеально пружного матеріалу дозволило одержати точні аналітичні вирази для функцій $w^{(k)}(x, y)$ та

складових внутрішніх зусиль і моментів [2]. Теплова задача розв'язується за припущення, що через площини $\varsigma = \pm 1/2$ відбувається тепло-віддача по закону Ньютона у зовнішнє середо-вище, температура якого $T_1^0 = const$ при $\varsigma = -1/2$ і $T_2^0 = const$ при $\varsigma = 1/2$. Граничні умови для тем-ператури $\tilde{T}$ у цьому випадку мають вигляд:

$$\begin{aligned} l_1 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \varsigma} &= \tilde{T} - T_1^0, \text{ при } \varsigma = -1/2, \\ l_2 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \varsigma} &= -\tilde{T} + T_2^0, \text{ при } \varsigma = 1/2, \end{aligned} \quad (8)$$

де $\varsigma = \gamma/h$, $l_k = \lambda_q/(\alpha_s^{(k)}h)$, $\alpha_s^{(k)}$ – коефіцієнт тепловіддачі в середовище з температурою T_k^0 ($k = 1, 2$), h – товщина пластини. Аналіз одержаних розв'язків показує, що максимумами амплі-тудних значень характеристик напружено-дефор-мованого стану скінченні при будь-якій ω і дося-гаються в центрі пластини. Максимальна темпе-ратура саморозігріву досягається в точці нормалі до серединної площини, що проходить через центр пластини. Положення цієї точки визна-чається умовами теплообміну із зовнішнім сере-довищем (значеннями l_k).

Якщо температура зовнішнього середо-вища поблизу граней $\varsigma = \pm 1/2$ змінна, або умови теплообміну мають розривний характер, то зада-ча визначення теплового поля пластини зводи-ться до розв'язання нескінченної системи ліній-них алгебраїчних рівнянь. Як приклад, можна розглянути пластину, у якої грань $\varsigma = -1/2$ тепло-ізолювана, а на грані $\varsigma = 1/2$ є прямокутна об-ласть розмірами $2\xi_0 \times 2\eta_0$, через яку проходить віддача тепла у зовнішнє середовище, а вся інша частина її – теплоізолювана. У цьому випадку виконуються умови Коха, що дозволяє при роз-в'язуванні системи застосувати метод редукції. Точний розв'язок крайових задач для системи рівнянь (7) вдається одержати і для пластин, у яких дві сторони ($\xi = 0, \xi = 1$) шарнірно закріп-лені, а дві інші закріплені довільно. У цьому ви-падку використовуються ідеї відомого розв'язку Леві для стаціонарного згину ідеально пружної пластини. Якщо

$$q_1(\xi, \eta) = q_0(\eta) \sin m\pi\xi, \quad q_2 = 0, \quad (9)$$

то для $w^{(k)}(\xi, \eta)$ ($k = 1, 2$), що задовільняють рів-нянням (7) та граничним умовам при ($\xi = 0, \xi = 1$), одержуємо наступні вирази:

$$w^{(k)} = W_k(\eta) \sin m\pi\xi \quad (k = 1, 2); \quad (10)$$

$$W_1(\eta) = W_1^{(0)}(\eta) + \sum_{j=1}^2 [a_j X_j(\eta) + a_{j+2} X_j(\eta_1) - b_j Y_j(\eta) - b_{j+2} Y_j(\eta_1)] \quad (11)$$

$$W_2(\eta) = W_2^{(0)}(\eta) + \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} [b_j X_j(\eta) + b_{j+2} X_j(\eta_1) + a_j Y_j(\eta) + a_{j+2} Y_j(\eta_1)].$$

Тут $\{W_1^{(0)}, W_2^{(0)}\} \sin m\pi\xi$ – будь-який частинний розв'язок рівнянь (7), що відповідає наванта-женню із складовими (9);

$$X_k(\eta) + i Y_k(\eta) = \exp((- \alpha_k + i \beta_k) \eta) \quad (k = 1, 2); \quad \alpha_k$$

та β_k – постійні величини, що виражаються через значення $\rho, \mu, E_1, \operatorname{tg} \delta, \omega, h, a, m$; a_j, b_j ($j = \overline{1, 4}$) – довільні константи, які підбираються, щоб ви-конувались умови при $\eta = 0$ і $\eta = c^{-1}$. Похідні від X_k та Y_k виражаються через ці ж функції. Тому складові внутрішніх зусиль і моментів в пластині можна представити лінійними комбінаціями функцій $X_k(\eta), Y_k(\eta), X_k(\eta_1), Y_k(\eta_1)$, де $\eta_1 = c^{-1} - \eta$. Вирази (10), (11) використовуємо при визначенні напружено-деформованого стану пластини, у якої сторони ($\xi = 0, \xi = 1$) шарнірно закріплені, навантаження $q(\xi, \eta, t)$ відсутнє, а сторони ($\eta = 0, \eta = c^{-1}$) знаходяться під впливом розпо-ділених згинних моментів і поперечних сил вібраційного типу [2]. Розглядаючи теплову задачу для пластини, дві протилежні сторони якої шарнірно закріплені, маємо вираз для функції

$$\tilde{Q}(\xi, \eta, \varsigma) = B \varsigma^2 [\Phi_1(\eta) + \Phi_2(\eta) \cos 2m\pi\xi],$$

де $\Phi_k(\eta)$ ($k = 1, 2$) визначаються через квадрати та добуток функцій $W_j(\eta)$; $dW_j/d\eta$; $d^2W_j/d\eta^2$ ($j = 1, 2$). Якщо збе-регти умови теплообміну пластини із зовнішнім середовищем у вигляді (8) і температуру саморозігріву $T(\xi, \eta, \varsigma)$ визначати у вигляді:

$$T(\xi, \eta, \varsigma) = \Theta_1(\eta, \varsigma) + \Theta_2(\eta, \varsigma) \cos 2m\pi\xi,$$

то тривимірною крайовою задачею для функції $T(\xi, \eta, \varsigma)$ розпадається на дві двовимірні крайові задачі:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Theta_k}{\partial \eta^2} + \frac{1}{h_0^2} \frac{\partial^2 \Theta_k}{\partial \varsigma^2} - \lambda_k^2 \Theta_k(\eta, \varsigma) &= B \varsigma^2 \Phi_k(\eta), \\ \lambda_1 &= 0, \quad \lambda_2 = 2m\pi, \\ \frac{\partial \Theta_k}{\partial \eta} &= 0, \quad \text{при } \eta = 0, \quad \eta = c^{-1}; \\ I_1 \frac{\partial \Theta_k}{\partial \varsigma} - \Theta_k &= 0, \quad \text{при } \varsigma = -1/2; \\ I_2 \frac{\partial \Theta_k}{\partial \varsigma} + \Theta_k &= 0, \quad \text{при } \varsigma = 1/2. \end{aligned} \quad (12)$$

Після представлення функцій $\Phi_k(\eta)$ та $\Theta_k(\eta, \varsigma)$ у вигляді рядів

$$\begin{aligned} \Phi_k(\eta) &= \sum_{r=0}^{\infty} g_r^{(k)} \cos rc\pi\eta, \\ \Theta_k(\eta, \varsigma) &= B \sum_{r=0}^{\infty} \varphi_r^{(k)}(\varsigma) \cos rc\pi\eta, \end{aligned} \quad (13)$$

одержані задачі розв'язуються методом розділення змінних. Слід зазначити, що практична реалізація такого розв'язку досить складна, так як навіть для нескладних $W_k(\eta)$ аналітичне обчислення коефіцієнтів $g_r^{(k)}$ є досить громіздким. Крім того, з'являються труднощі при обчисленні довільних сталих, що входять у вирази для функцій $\varphi_r^{(k)}(\varsigma)$. Тому доцільним буде розв'язування даних задач чисельними методами. Складові напружено-деформованого стану пластини, що відповідають навантаженню (9), представимо у вигляді:

Список використаних джерел

1. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. - Житомир: ЖТТУ, 2005. - 428 с.
2. Вильде М.В., Недорезов П.Ф., Сироткина Н.С. Определение температуры саморазогрева при установившихся поперечных колебаниях вязкоупругой пластинки для случая сложного закрепления контура// Механика деформируемых сред: науч. сб.- Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1997. - Вып.13.- С.66-72.

$$\begin{aligned} \{w_k, g_y^{(k)}, M_x^{(k)}, M_y^{(k)}, Q_x^{(k)}, Q_y^{(k)}\} &= \\ = \{W_k(\eta), \Theta_k(\eta), m_x^{(k)}(\eta), m_y^{(k)}(\eta), q_y^{(k)}(\eta), \tilde{q}_y^{(k)}(\eta)\} \sin m\pi\xi \end{aligned}$$

$$\{g_x^{(k)}, H_{xy}^{(k)}, Q_x^{(k)}\} = \{\Theta_x^{(k)}(\eta), h_{xy}^{(k)}(\eta), q_x^{(k)}(\eta)\} \cos m\pi\xi \quad (14)$$

$$\text{Тут } g_x^{(k)} = \frac{1}{a} \frac{\partial w^{(k)}}{\partial \xi}, \quad g_y^{(k)} = \frac{1}{a} \frac{\partial w^{(k)}}{\partial \eta} \quad (k=1,2) -$$

складові кутів повороту нормального елемента до серединної площини пластини. Величини $W_k, \Theta_k, m_y^{(k)}, \tilde{q}_y^{(k)}$ приймаються за основні невідомі. Систему рівнянь для їх визначення одержуємо з рівнянь руху малого елемента пластини та співвідношень, що виражають моменти через похідні від прогину. Після деяких перетворень ця система може бути записана у векторній формі:

$$\frac{d\bar{Y}}{d\eta} = A\bar{Y}(\eta) + \bar{f}(\eta), \quad (15)$$

де $\bar{Y}(\eta)$ – невідомий вектор, $A = \{a_{ij}\}$, $\bar{f} = \{f_i\}$ – відомі квадратна матриця та вектор. Граничні умови для $\bar{Y}(\eta)$:

$$H_1 \bar{Y}(0) = \bar{e}_1, \quad H_2 \bar{Y}(c^{-1}) = \bar{e}_2, \quad (16)$$

H_1, H_2 – відомі матриці, а компоненти векторів $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ визначаються умовами для відповідних основних невідомих функцій $W_k, \Theta_k, m_y^{(k)}, \tilde{q}_y^{(k)}$.

Для чисельного розв'язування задачі (15) - (16) доцільно використовувати метод дискретної ортогоналізації.

References

1. KARNAUKHOV, V. G., MIKHAILENKO, V. V. (2005). *Nelineynaya termomekhanika piezoelektricheskikh neuprugikh tel pri monogarmonicheskom nagruzhении*. Zhitomir: ZHTTU.
2. VILDE, M.V., NEDOREZOV, P.F. & SIROTKINA, N.S. (1997) *Opredeleniye temperaturi samorazogreva pri ustanovivshisya poperechnykh kolebaniyah vyazkoupругoy plastiny dlya sluchaya slozhnogo zakrepleniya kontura*. *Mehanika deformiruyemih sred: nauch. sb. Saratov*. 13. pp. 66-72.

Надійшла до редколегії 20.12.19

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 51-76+372.851: 378.147

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2419/4.8>

Карупу О.В.¹, к.ф.-м.н., доц.,
Олешко Т.А.², к.ф.-м.н., доц.,
Пахненко В.В.³, к.ф.-м.н., доц.,
Пашко А.О.⁴, д.ф.-м.н., проф.

O.W.Karupu¹, PhD., As. Prof.,
T.A.Oleshko², PhD., As. Prof.,
V.V.Pakhnenko³, PhD., As. Prof.,
A.O.Pashko⁴, Dr. Sci., Prof.

Застосування інформаційних технологій до математичної освіти ІТ-фахівців в англомовних академічних групах

Applying information technologies to mathematical education of IT specialists in English-speaking academic groups

^{1,2,3}Національний авіаційний університет,
03058, м. Київ, пр. Любомира Гузара, 1,
e-mail: ¹karupu@ukr.net,
²111ota@ukr.net,
³pobeda586@gmail.com
⁴Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13,
e-mail: aap2011@ukr.net

^{1,2,3}National Aviation University of Kyiv, 03058,
Kyiv, Liubomyra Huzara ave.,
e-mail: ¹karupu@ukr.net,
²111ota@ukr.net,
³pobeda586@gmail.com
⁴Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: aap2011@ukr.net

Знання основних теоретичних основ та володіння навичками застосування математичного аналізу, диференціальних рівнянь, лінійної алгебри, аналітичної геометрії, дискретної математики, чисельних методів, теорії ймовірностей та математичної статистики є важливими для професійної підготовки майбутніх фахівців у галузі інформаційні технології. Оскільки майбутні фахівці в галузі інформаційних технологій потребують глибокої математичної підготовки, навчальні програми ІТ-спеціальностей зазвичай містять різні математичні дисципліни.

Ця стаття присвячена вивченню деяких особливостей використання інформаційних технологій у процесі викладання окремих питань математичних дисциплін англійською мовою студентам ІТ-спеціальностей, які не є носіями цієї мови.

Ключові слова: викладання математики ІТ-спеціалістам, викладання математики англійською мовою, інформаційні технології.

Knowledge of the basic theoretical foundations and possession of the skills of applying Mathematical Analysis, Differential Equations, Linear Algebra, Analytic Geometry, Discrete Mathematics, Numerical Methods, Theory of Probability and Mathematical Statistics are important for the professional training of future specialists in the field of information technologies. Since future specialists in the field of information technology require a deep mathematical training, the curricula of IT specialties usually contain various mathematical disciplines from this list. A specialist of any IT profile must have specific professional features and competencies. These characteristics of future IT professionals should preferably be formed in the process of studying both special and general scientific disciplines. The result of the educational process is formation of both hard and soft skills of students.

This article is devoted to the study of some features of the use of information technology in the process of teaching some questions of mathematical disciplines in English to students of IT profile who are not native speakers of this language.

Key Words: teaching mathematics to IT specialists, teaching mathematics in English, information technologies.

Статтю представила к.ф.-м.н. Розора І.В.

Introduction

We present some results based on our experience in teaching mathematical disciplines in
© О.В. Карупу, Т.А. Олешко,
В.В. Пахненко, А.О. Пашко, 2019

English-speaking academic groups of IT profile.

Knowledge of English is recognized as a basic life skill of the XXI century along with the ability to

use a computer, now it is no longer a separate specialization. English gives people the opportunity to work with a much wider variety of information, to get acquainted with more views than could be done in their native language alone. Implementation of education in English in Ukrainian universities contributes to their internationalization [1]. Therefore, training of foreign students is being introduced in many universities of Ukraine.

As English is one of the official languages of ICAO (International Civil Aviation Organization), the opportunity to receive professional education in English is very important for future professionals in the field of aviation. The program "Higher Education in Foreign Languages" began to work at NAU since 1999. Since a good knowledge of professional English is also important for future specialists in the field of information technology, soon students of IT specialties were also included in this program. Then the program has been extended to many specialties and is successfully operating to this day.

The teacher's work in English-speaking groups has a certain specificity, because for the vast majority of students English is not their native language. Certain features arise when working with groups in which both Ukrainian and foreign students study.

Research on teaching mathematics in English to foreign and Ukrainian students of NAU has been carried out within the framework of the Higher Education Program of NAU in a foreign language by a team of experienced teachers of the Department of Higher and Computational Mathematics since 2006.

Some of questions connected with teaching of mathematical disciplines in English to foreign students were investigated by authors in [2]. Beside this, authors studied teaching of separate mathematical disciplines and selected topics in English (references may be found in [3]).

Mathematical Education as Component of Professional Competence of IT Specialists

Knowledge of the basic theoretical foundations and possession of the skills of applying the theory of mathematics is important for the professional development of future specialists in all technical specialties. Education in the field of information technology should be problem-oriented and provide broad training for comprehensively trained professionals prepared for continuous improvement of their skills. This can be achieved by the fundamentalization of the educational process and the use of STEM technologies. Most students of IT specialties require a fairly deep mathematical

education. But the intensity and depth required differ for students who are research-oriented and those industry-oriented.

On that account, the level of mathematical training of most of first-year students of National Aviation University (NAU) is average. The level of mathematical training of students of the Faculty of Computer Science and Cybernetics of Taras Shevchenko National University of Kyiv (KNU) in general is notably higher.

However, regardless of the level of training of first-year students most students at National Aviation University require a sufficiently deep mathematical background. Therefore, the curricula of these specialties contain various collections of mathematical disciplines. This is especially true for IT professionals.

As an example we consider three different curricula for IT specialists of specialties "Computer Science", "Computer Engineering" and "Software Engineering". These curricula include the following collections of mathematical disciplines: "Higher Mathematics", "Theory of Probability, Probabilistic Processes and Mathematical Statistics", "Discrete Mathematics" and "Numerical Methods"; "Higher Mathematics", "Discrete Mathematics" and "Theory of Probability and Mathematical Statistics"; "Mathematical Analysis", "Linear Algebra and Analytic Geometry", "Discrete Mathematics" and "Theory of Probability and Mathematical Statistics".

The basic course (Course training program) of Mathematical Analysis for IT specialists should include Calculus I (single variable differential and integral calculus) and Calculus II (multivariable differential calculus, differential equations, series (numerical series and power series)). Additionally this course may include complex numbers, multivariable integral calculus, Fourier series and Fourier integral, complex analysis and operational calculus ("Special Sections of Mathematics").

The basic course (Course training program) of Linear Algebra and Analytic Geometry for IT specialists should include elements of linear algebra (determinants, matrices and systems of linear algebraic equations), elements of vector algebra (linear operations with vectors; dot, cross and triple products of vectors), straight line on a plane, plane and a straight line in space (standard equations and the simplest problems), curves and surfaces of the second order (standard equations). Additionally this course may include linear spaces, basis of linear space, vectors coordinates, transformation of coordinates, linear operators, matrix of linear operator, eigenvalues and eigenvectors of linear

operator, reduction of matrix of linear operator to diagonal form.

The basic course (Course training program) of Theory of Probability and Mathematical Statistics for IT specialists should include random events, discrete random variables, continuous random variables, law of large numbers, limit theorems, systems of random variables and elements of mathematical statistics.

The basic course (Course training program) of Numerical Methods for IT Specialists should include approximate calculations, iteration methods, numerical methods of linear algebra, approximation of functions by polynomials, numerical calculation of definite integrals and numerical integration of differential equations.

The core courses (Course training program) of Discrete Mathematics for different IT professionals are different. However, they should always include sets, operations with sets, mappings of sets, relations, combinatorics, graphs, elements of mathematical logics, Boolean functions and algebraic structures.

In addition, there are quite a number of problems related to the teaching of foreign students to differential and integral calculus, since this section is difficult enough to perceive, especially in technical colleges. In many countries, in addition to the known methods of change of variable and integration by parts, a third method is also studied: integration by the formula, which consists in students substituting their parameter values to the formulas given in the textbook and immediately getting the result. Most students have mastered this method best, which is why they have considerable difficulty learning the first two methods. The definite integral is introduced in schools as an increment of antiderivative. This complicates the perception of the definite integral as the limit of the integral sums.

In many textbooks, which are intended for technical universities and popular among students, the material is presented in the following order: derivative, definite integral and its properties, the basic formula of integral calculus, the applications of a definite integral, integration technique. This gives the illusion that the latter question is less important.

The problems associated with the teaching and training of foreign students at National Aviation University and Taras Shevchenko National University of Kyiv are very similar. A deeper study of mathematical disciplines at KNU requires foreign students to be more concentrated, choose more optimal ways of studying, and search for new teaching technologies.

Issues of formation of professional competence of future IT specialists in the teaching of mathematics were considered in [4 – 6].

About Teaching to Mathematical Disciplines in English

As English is one of the official languages of the International Civil Aviation Organization (ICAO), it is very important for future aviation professionals to be able to obtain a professional education in English. Moreover, English is now recognized as a basic life skill for the 21st century, like using a computer, rather than as a specialist accomplishment. It provides people with the ability to explore and navigate wider ranges of information and viewpoints than if they just have their home languages [1]. This is especially true for IT professionals.

Education in English in universities is a trend now. It is implemented for at least part of the disciplines in many universities in Ukraine. Some universities are preparing for the implementation education in English. As example, the preparation of the Department of Higher Mathematics of the DSEA for teaching mathematical disciplines in English is analyzed in [5].

The students' language background received at school is also important for the implementation education in English. Sufficient language competence of students, taking into account the specifics of mathematical terminology, is important for university teachers. It should be noted that the assessment of students' and teachers' communicative competence is a significant difficulty. Methods and results to assess the level of student' skills (future primary school teachers) of a foreign language and their communication skills, using algorithms to process the classification and select the best option from a variety of possible, are analyzed in [6].

Education in English is quite prestigious and popular among both foreign and Ukrainian students of National Aviation University, as it opens up wide prospects for further employment in international airlines, for work in the field of computer technology, for the use of advanced scientific developments, especially within the framework of Ukraine's integration into the world community. Since 1999 for the purpose of training highly qualified competitive specialists who would be fluent both in professional and informal English on separate specialties the teaching in English was introduced in the framework of the program "Higher Education in Foreign Languages". Within this program for twenty years for separate specialties all teaching was conducted in English.

The NAU program "Higher Education in Foreign Languages" provides an opportunity for international students to shorten their studies at the university by completing language training at the preparatory department. That is why the number of the first-year students studying in English is constantly growing.

At present, at Taras Shevchenko National University of Kyiv the implementation of education in English is at the preparatory stage. There are separate specialties in IT technology where training is conducted in English. The introduction of teaching in English is associated with the concept of academic mobility. Students of the Faculty of Computer Science and Cybernetics practice in leading IT firms, for example, Samsung, Google, Microsoft. After graduation, they work in the same companies, or leading Ukrainian IT firms, where English is the working language.

Analysis of the contingent of foreign students studying at NAU shows that they are representatives of different education systems, which often differ from each other. Level of cognitive activity that some foreign students have acquired in their homeland, in many respects does not correspond to the level of knowledge of Ukrainian students. Therefore, when teaching mathematics for such students, it is necessary to pay attention to the peculiarities of teaching mathematics in secondary schools of the respective countries. Teacher has to keep in mind that English is not a native language for the students; take into account that secondary school education was conducted in the native language; foreign students are native speakers of languages that are characterized by either different from our usual direction of writing or hieroglyphics (references may be found in [2–4]).

In many textbooks, intended for technical universities and popular among students, the material is presented in the following order: derivative, definite integral and its properties, the basic formula of integral calculus, the applications of a definite integral, integration technique. This gives the illusion that the latter question is less important. There are issues with solving applied problems. For students of technical specialties particular attention should be paid to the problems with technical content. However, in secondary school the main focus was on the application of the integral to solving economic problems.

Significant problem encountered in teaching the discipline "Linear Algebra and Analytic Geometry" and the corresponding sections of the discipline "Higher Mathematics" are the poor level of school

background in geometry. Particularly difficult for students to study are problems related to curves and second-order surfaces. However, it should be noted that foreign students are better trained in combinatorics, basic theory of probability, and have studied approximate calculations more. As a rule, their perception of more abstract issues is much lower.

Some terms in Ukrainian and English literature are denoted differently: for example, mathematical expectation and variance. This fact must also be taken into account. Also, many differences in the notation of trigonometric functions exist.

On experience of applying information technologies in English-speaking academic groups

In the process of teaching English-speaking students, especially in IT-specialties, the problem of using computer-oriented technologies in the educational process is especially relevant. Implementation of information technology in the study of all disciplines opens wide prospects for deepening the theoretical knowledge base, strengthening the applied orientation of learning, the disclosure of creative potential of students. This is especially true for IT students according to their inclinations, requests and abilities. The active role of information technology in education is due to the fact that compared to traditional manuals, computer-based learning tools provide new opportunities, as well as allow the implementation of modern pedagogical learning technologies at a higher level, stimulate the development of didactics and teaching methods.

There are a fairly large number of problems associated with the teaching and mastering by students of analytical geometry, geometric applications of differential and integral calculus and the theory of differential equations, since these sections are quite difficult to understand, especially in technical universities. In this case, additional tasks arise of analytically solving various equations and systems of equations, calculating derivatives and integrals, operations with matrices, etc. As a rule, solving these auxiliary problems is very difficult for many students. In organizing the learning process in solving such problems, information technology has provided significant assistance. This is due to the fact that the computer allows you to make quick calculations, organize mathematical experiments, build mathematical models, etc.

An important role in the educational process is played by clarity, thanks to which the researched material is better assimilated. Therefore, we consider

it appropriate to use multimedia tools. On slides, for example, it is expedient to show English terms with translation, to show features of designation of various mathematical characteristics in English and Ukrainian literature. Also it can be very useful for all students to receive at least part of lectures in a multimedia classroom with usage of various technical tools to visualize the geometric objects considered.

Problem of using computer-oriented technologies in the educational process is especially relevant in the process of teaching students of English-speaking groups, especially in IT specialties.

It should also be noted that students studying in all IT specialties of knowledge better perceive the supporting materials in the form of flowcharts of appropriate algorithms, and students studying in technical specialties, better perceive the supporting materials in the form of tables.

In our opinion, helping students to master techniques for solving various problems using computer algebra systems (for example: Mathematica, MATLAB or MathCAD) is very important. System Mathematica provides great computational capabilities, allows you to solve many problems of linear algebra (including the reduction of quadratic forms to canonical form), mathematical analysis (differentiation, integration, series expansion, Fourier transforms, integral transforms, differential operators), problems of probability theory and mathematical statistics, discrete mathematics, graph theory. However, MATLAB and MathCAD are more popular among students.

An interesting feature of many students of English-speaking groups is a higher psychological readiness than other students for using the symbolic core of computer algebra systems (CAS). Perhaps this philosophical peculiarity of these students is connected both with the peculiarities of their preparation in high school, and with their multilingualism. In general, it is natural to assume that for graduates of technical universities the most successful for the full solution of various applied mathematical problems is the skill of combining analytical methods, using the symbolic core of computer algebra systems and numerical methods.

It should also be noted that foreign students are more willing to use computer algebra systems than Ukrainian students and have a certain level of skills in applying these systems. Therefore, in order to at least partially compensate for the shortcomings of the general mathematical training of these students, we recommend them to actively use computer algebra systems [2, 6 – 8].

Significant difficulties for foreign (as well as many Ukrainian) students, even with good mathematical training, arise when studying Fourier series, Fourier integral and Fourier-transform. It is especially difficult for students to solve problems on the construction of frequency response, because they do not distinguish well between different cases of development of functions in the series and Fourier integral.

Note that for future professionals it is very important to be able to apply both analytical and numerical methods and to distinguish situations of their use. Methodical recommendations for the application of Fourier-transform and z-transform is considered in [7, 8]. Recommendations for the application of the symbolic core of the computer system MATHCAD in solving problems on the expansion of functions in the Fourier series, on the representation of functions by the Fourier integral and the implementation of direct and inverse Fourier transform is given in [8].

Conclusion

The implementation of information technology in the study of all subjects opens wide prospects for deepening the theoretical knowledge base, strengthening the applied orientation of learning, opening of creative potential of students. Especially this implementation is desirable for education of students studying in IT specialties.

It is important to pay enough attention to bringing to students the peculiarities of the use of terminology in the process of constructing mathematical models and in solving applied text problems and providing methods for the application of CAS.

The experience of NAU and KNU in the implementation of training in English confirms the need for the implementation of such projects. The industry orientation of training at NAU and the scientific orientation at KNU are based on the same curricula, differing only in their content. An important point is the assessment of the English competence of graduates of both universities. The following studies will be devoted to these questions.

The availability of a full learning cycle in English at the university, together with the harmonization of the content of credits in the curricula, will facilitate the university's future entry into the European Higher Education Area within the scope of the Bologna Process. Education in English is prestigious and desirable for other Ukrainian universities; it is especially useful for attracting foreign students and promotes academic mobility.

Список використаних джерел

1. Болайто Р. Інтернаціоналізація українських університетів у розрізі англійської мови: Проект «Англійська мова для університетів» / Р. Болайто, Р. Вест. – К.: Сталь, 2017. – 154 с.
2. Карупу О. В. Деякі особливості викладання математичних дисциплін іноземним студентам / О. В. Карупу, Т. А. Олешко, В. В. Пахненко // Східно-Європейський журнал передових технологій. – 2012. – №2/2 (56). – С. 11–14.
3. Карупу О. В. Про особливості викладання математичних дисциплін студентам технічних спеціальностей в мультинаціональних академічних групах / О. В. Карупу, Т. А. Олешко, В. В. Пахненко // Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology. – 2019. – Vol. VII (77), Issue 188. – Р. 21–24.
4. Олешко Т. А. Про викладання окремих питань теорії ймовірностей англійським студентам НН ІКІТ НАУ / Т. А. Олешко // Сучасна освіта та інтеграційні процеси: Зб. наук. праць міжн. наук.-метод. конф., 22–23 листопада 2017. – Краматорськ, 2017 – С. 150–152.
5. Власенко К. Про підготовку до викладання математичних дисциплін англійською мовою кафедрою вищої математики ДДМА [Електронний ресурс] / К. Власенко // Проблеми математичної освіти: виклики сучасності: Матеріали міжн. наук.-мет. інтернет-конф., 17 – 18 травня 2018, Вінниця. – Вінниця: ВНТУ, 2018. – С. 4–6. – Режим доступу: <https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/pmocv/pmocv/paper/viewFile/5472/466>
6. Pashko A. Intellectual Methods of Estimation of Intending Primary School Teachers' Foreign Language Communicative Competence / A. Pashko, I. Pinchuk // 2019 IEEE International Conference on Advanced Trends in Information Theory (ATIT), 18–20 December 2019, Kyiv. – 2019. – Р. 439–444.
7. Баришовець П. П. Про деякі аспекти викладання окремих розділів дискретної математики в технічному ВНЗ / П. П. Баришовець, А. С. Горюнов, О. В. Карупу // Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки. – 2015. – № 26(359). – С. 44–49.
8. Борошенко Н. Д. Спеціальні глави математики: інтегральні і дискретні перетворення та їх застосування з використанням комп'ютерних технологій / Н. Д. Борошенко, А.

С. Горюнов, О. В. Карупу, Н. М. Шибицька. – Київ: НАУ-друк, 2013. – 240 с.

References

1. BOLITHO, R and WEST, R. (2017) The internationalisation of Ukrainian universities: the English language dimension. Kyiv: Stal.
2. KARUPU, O., OLESHKO, T. and PAKHNENKO V. (2012) About teaching of mathematical disciplines to foreign students. In *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2/2 (56). p. 11–14.
3. KARUPU, O., OLESHKO, T. and PAKHNENKO V. (2019) On peculiarities of teaching mathematical disciplines to students of technical specialties in multinational academic groups. In *Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology*. VII (77) (188). p. 21–24.
4. OLESHKO, T. (2017) On teaching certain issues of probability theory to English-speaking students of ER ICIT NAU. In *Suchadna osvita ta integratsiini protsesy: International. scientific-methodical conference*, 22–23 November 2017. Kramatorsk: DDMA. pp. 150–152.
5. VLASENKO, K. (2018) On preparation for teaching mathematical disciplines in English at the Department of Higher Mathematics of DSMA. [Online] In *Problemy matematychnoi osvity: vyklyky suchasnosti: international scientific-methodical internet conference*. – Available from: <https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/pmocv/pmocv/paper/viewFile/5472/46612>
6. PASHKO, A. and PINCHUK, I. (2019) Intellectual Methods of Estimation of Intending Primary School Teachers' Foreign Language Communicative Competence. In *2019 IEEE International Conference on Advanced Trends in Information Theory (ATIT)*, 18–20 December 2019. Kyiv: IEEE. pp. 439–444.
7. BARYSHOVETS, P., GORIUNOV, A. and KARUPU O. (2015) On some aspects of teaching to selected topics of Discrete Mathematics in technical university. In *Cherkasy University Bulletin: Pedagogical Sciences*. 26 (359). p. 44–49.
8. BORODENKO, N., GORIUNOV, A., KARUPU, O. and SHYBYTSKA, N. (2013) Special chapters of mathematics: integral and discrete transformation and application using computer technology. Kyiv: NAU-druk.

Надійшла до редколегії 30.03.19

УДК 504.7.

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2419/4.9>

Керімов В. О., аспірант¹

Kerimov V. O., PhD stud.¹

Впровадження безпеки до автономного протоколу ієрархічної організації бездротових сенсорних мереж

Introducing Security to Efficient Tree-based Self-organizing Protocol

¹Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій та систем, 02000, м. Київ, проспект Академіка Глушкова, 40, e-mail: ¹mostlybrainless@gmail.com

¹International Research and Training Center for Information Technologies and Systems under NAS and MES of Ukraine, 02000, Kyiv, Glushkova av., 40, e-mail: ¹mostlybrainless@gmail.com

Нині бездротові сенсорні мережі широко застосовуються для виконання різноманітних задач. Задля побудови такої мережі значного масштабу, кожен з сенсорів, що її складають, має був дешевим. А значить, в умовах обмежених ресурсів сенсорів, бажаною була б побудова надійного та ефективного протоколу їх взаємодії, що забезпечував би рівномірне використання ресурсів окремими сенсорами та максимізував тривалість життя мережі. Для досягнення цієї мети протоколи із вбудованими схемами реорганізації мережі в залежності від залишку енергії в конкретних вузлах, були запропоновані. Не врахованими в таких протоколах залишаються міркування безпеки, що також є важливими при експлуатації мережі. Ця стаття пропонує модифікацію до протокола, що допоможуть виявляти та брати до уваги підозрілу поведінку певних сенсорів.

Ключові слова: бездротова сенсора мережа, безпека, протокол, дерево.

Wireless sensor networks are widely used in many modern settings. In order to build substantial networks each sensor must be cheap. So it follows that, since resources of individual sensor are limited, there is a need to create protocols that would use them sparingly and evenly in order to maximize lifetime of the network. To reach this goal some useful self-organizing tree-based protocols were created that use different properties of the network nodes, such as number of children, number of hops from the ultimate sink, distance and remaining energy, to optimally select and reselect parent node in a network. However, there is also a challenge of providing security of the network. In this paper we propose a way of integrating a simple security method akin to iterative filtering into the protocol and discuss corresponding trade-off between attack prevention and increase of energy consumption.

Key Words: wireless sensor network, security, protocol, tree.

Статтю представив д.ф.-м.н. Анісімова А.В.

Вступ

Сьогодні бездротові сенсорні мережі використовуються в найрізноманітніших контекстах і сферах, в тому числі таких як масове виробництво та спостереження за довкіллям. Для успішного виконання кожного з цих завдань необхідне улагодження збору та пересилання

даних. Необхідність у великій кількості сенсорів зумовлює використання недорогих моделей з обмеженими обчислювальними можливостями. За таких важливо налагодити взаємодію між сенсорами у такий спосіб, щоб забезпечити найдовше життя мережі.

Проблема з застосуванням ієрархічних структур задля організації агрегації даних з вузлів мережі в тому, що витрата енергії в різних вузлах буде нерівномірною. Наприклад, вузли, що агрегують інформацію з більшої кількості дочірніх вузлів витратитимуть енергію швидше за інші, через що тривалість життя мережі може не знизитись. Щоб уникнути цієї проблеми, протоколи, що реагують на такі події як падіння рівня енергії у вузлі нижче заданого рівня або «смерть» вузла, та реорганізують частини дерева, було створено.

Окрім подовження життя мережі, важливою задачею є протидія різноманітним атакам недоброзичливців, у тому числі й тим, що мають на меті спотворити справжні заміри сенсорів [2].

Метою цієї статті є включення до самоорганізуючогося ієрархічного мережевого протоколу складової, що забезпечуватиме безпеку від подібних атак, а саме – яка помічатиме та від'єднуватиме з мережі сенсори, підозрювані у підробці даних.

Протоколи з самоорганізацією

Багато з запропонованих в останні роки протоколів для бездротових мереж роблять кроки в напрямку децентралізації рішення задачі, на якому фокусується і ця робота. Децентралізований підхід до задачі подається в [3], що описує протокол LPEDAP, що базує свій підхід до побудови топології на децентралізованому алгоритмі зі знаходження мінімального кістякового (каркасного) дерева під назвою «локальне мінімальне кістякове дерево» (LSTM) [4]. Протокол передбачає як початкову побудову дерева, так і подальше підтримання його зв'язності.

Конструювання топології починається з трансляції вузлами мережі пакетів HELLO, що також містять їх координати та залишки заряду батареї, завдяки чому сенсори знаходять своїх найближчих сусідів у топології. Після цього починається наступний етап власне побудови маршрутів передачі даних, одночасно з яким відбувається побудова дерева згідно з LSTM. Розбудова дерева ведеться від базової станції. Вона транслює дані про себе у пакеті ROUTE-DISCOVERY на радіус достатній, для того, щоб сигнал зловили всі з кола найближчих сусідів, що роблять його своїм батьківським вузлом або чекають на подальші трансляції протягом зазначеного часу, виходячи з того, чи

входить ребро між відправником та приймачем сигналу до мінімального кістякового дерева. Далі всі вузли, що знайшли собі батьківський вузол, транслюють найближчим сусідам у своїй околиці аналогічний пакет, доки мережа не постане деревом з коренем у базовій станції.

Коригування створеного алгоритмом дерева відбувається за умов

- а) додача до мережі нового сенсора або
- б) вичерпання заряду сенсора, або, формальніше, зменшення заряду сенсора нижче певної межі.

Ми базуємо наше рішення на протоколі, що описано в [5]. Цей протокол (названий Efficient Tree-based Self-organizing Protocol, або ETSP) уможливорює автоматичну організацію вузлів мережі у ієрархічну структуру дерева, для визначення маршруту даних до базової станції та пізнішого оновлення цієї структури для подовження життя мережі у схожий з [3] спосіб.

Цей протокол теж складається з двох процедур: одна створює дерево після вибору кореня, а інша оновлює його, коли з'являється необхідність збалансувати витрати енергії всіх сенсорів для подовження життя мережі. Відмінність алгоритмів у тому, що в [6] у виборі з-поміж потенційних батьківських вузлів сенсори обирають за формулою, що, на відміну від алгоритму LSTM, що залежить тільки від відстаней між сенсорами та їх залишкової енергії, враховує також кількість поточних дітей у вершин дерева та довжина до базової станції у ребрах. В статті розглядається декілька формул, що по різному комбінують ці параметри.

Так само змінною, на нашу думку, може бути і список подій, що спричинятимуть оновлення дерева в протоколі. Ми можемо скористатися цим для від'єднання від мережі сенсорів, що, після деякого моніторингу, будуть визначені підозрілими.

Безпека сенсорних вузлів

[6] змальовує метод, що можна використовувати для оцінки надійності сенсорних вузлів, – ітеративне фільтрування, що діє схоже з принципом відсіювання крайніх. За методом, береться блок з послідовних замірів сенсорів і за допомогою ітеративного алгоритму отримує з нього два вектора: перший – вектор ваг сенсорів, які можна співвіднести з їхньою надійністю, а другий, його називають репутаційним, – сума зважених замірів. В статті

[7] вказано на недолік цього метода: він в своєму базовому варіанті ініціалізує ваги усіх векторів

вузла мають від'єднуються від нього та початнуть пошук нового батьківського сенсора,

Таблиця 1

Змінені параметри протоколу

Параметр	Значення
Комунікаційний радіус	10 м
Початкова енергія вузлів	27 Дж

однаково, чим нападник може скористатися, якщо йому вдасться отримати контроль над двома сенсорами, для атаки змови, за якої один з ворожих сенсоров зміщує середнє значення замірів усіх векторів, а інший відправляє значення, що точно дорівнює зміщеному середньому значенню і таким чином залишається непоміченною алгоритмом. Стаття пропонує вирішити цю проблему оцінюючи середнє значення та дисперсію кожного сенсора і врахувати їх для ініціалізації більш змістовних початкових ваг.

Запропоноване рішення

В цій статті ми пропонуємо додати алгоритм ітеративного фільтрування до протоколу самоорганізації бездротової сенсорної мережі, щоб захистити її від прихованих атак. Хоча алгоритм, приведений в [7], призначався для вузлів, розділених на кластери, його легко адаптувати і для мережі, структурованої за принципом дерева. У дереві ж-бо вузли мережі агрегують інші, що віддалені від кореня на одне ребро, подібно до кластера.

Імплементувати детектування та захист від атак пропонується наступним чином додавши до протокола ще один алгоритм. Кожен з вузлів мережі, що збирає дані (тобто усі, крім листів дерева) має проганяти алгоритм ітеративного фільтрування на своїх «дітях».

Вибрано алгоритм ітеративного фільтрування, а не його покращений варіант з [6], тому що він потребує менше обчислень.

Новий алгоритм протоколу буде застосовуватися, коли вага, встановлена для одного з дітей вузла виявиться меншою за альфа α відсотків від суми всіх вагів. В цьому випадку сенсор, що моніторить своїх дітей, транслюватиме повідомлення, що складатиметься з префікса "PT_UNTRUSTWORTHY_SINK" та IP-адреси підозрілого вузла. Інші вузли ретранслюють повідомлення після отримання його першого разу, щоб збільшити шанси на отримання повідомлення дітьми задетектованого вузла. Коли це відбувається, "діти" враженого

процес чого вже описано раніше в протоколі.

Експеримент

Для проведення експерименту сенсорну мережу було симульовано за допомогою мережевого симулятора ns-3. Топологію та базові заміри було взято з даних, наданих лабораторією Intel[3]. Надана мережа складається з 54 сенсорів, розташованих на відстані 40 на 30 метрів. В експерименті було задіяно протокол ETSP з параметрами, тотожними тим, що вказані в оригінальній статті [6], за винятком тих, що вказані в таблиці 1.

Щоб перевірити точність виявлення атак, було синтезовано комплекти даних з замірами мережі, де заміри одного з сенсорів були статистично викривлені, по комплекту на кожний сенсор. Тривалість життя мережі вимірювалася з розрахунку, що мережа «помирає», коли вичерпується заряд з понад 40 відсотків її вузлів.

За результатами моделювань, тривалість життя мережі, яка керується оригінальним протоколом, була 209,7 с, в той час як середній час для мережі, що керується зміненим протоколом, був 133,2 с.

В дереві, початково побудованому в мережі, з двадцяти двох вузлів, що не є листами дерева, чотирнадцять мають від одного до двох дітей, що унеможливорює виявлення фальшованих замірів за допомогою статистичного методу. Через це швидкість виявлення атаки значно варіювалася від вузла до вузла, а для одинадцяти вузлів так і не відбулася. З іншого боку, не відбулося жодного помилкового спрацювання.

Висновки

Запропонована модифікація до алгоритму ієрархічної самоорганізації бездротової мережі сенсорів, суттєво скорочує тривалість життя мережі (в середньому на 36,5%). В експерименті вдалося досягнути доволі високого значення F1 – 0,887. Проте децентралізованість та автономність протоколу початкова структура дерева, що формується для агрегації даних у мережі, сильно

залежить від геометрії початкового розташування сенсорів, що накладає обмеження на застосовуваність ітеративного фільтрування для детекції сенсорів, підозрілих на посилення недостовірних даних.

Подальша робота може бути спрямована на знаходження початкового дерева, за яких новий

протокол буде оптимально сприятливим для виявлення атак, або на модифікації алгоритму, що призведуть до зниження його енергетичних витрат.

Список використаних джерел

1. *Malik A. S.* Energy consumption balancing (ECB) issues and mechanisms in wireless sensor networks (WSNs): A comprehensive overview / F. Ishmanov, A. S. Malik, S. W. Kim – Eur. Trans. Telecommun. – 2011. – pp. 151–167.
2. *Przydatek B.* SIA: secure information aggregation in sensor networks / B. Przydatek, D. Song, A. Perrig – Proceedings of ACM SenSys, Los Angeles, California, USA. – 2003. – pp. 255–265.
3. *Ramya K. M.* LPEDAP: Localized power-efficient data aggregation tree protocol for wireless sensor networks / K. M. Ramya, P. Shanthi – IJARCST, 2, no.1. – 2014. – pp. 229–234.
4. *Li N.* Design and analysis of an MST-based topology control algorithm / N. Li, J. C. Hou, L. Sha – IEEE Transactions on Wireless Communications. – 4, no.3. – 2005. – pp. 1195–1206.
5. *Qui T.* An efficient tree-based self-organizing protocol for internet of things / T. Qui, X. Liu, L. Feng та ін. – IEEE Access. – no.4. – 2016. – pp. 3535 – 3546.
6. *Kerchove C. De* Iterative filtering in reputation systems / C. De Kerchove, P. Van Dooren – SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 31, no.4. – 2010. – pp. 1812–1834.
7. *Rezvani M.* Secure data aggregation technique for wireless sensor networks in the presence of collusion attacks / M. Rezvani, A. Ignjatovic, E. Bertino та ін. – IEEE. – 12, no.1. – 2015. – pp. 98–110.
- (WSNs): A comprehensive overview. Eur. Trans. Telecommun. pp. 151–167.
2. PRZYDATEK B. (2003) SIA: secure information aggregation in sensor networks. Proceedings of ACM SenSys, Los Angeles, California, USA. pp. 255–265.
3. RAMYA K. M., SHANTHI P. (2014) LPEDAP: Localized power-efficient data aggregation tree protocol for wireless sensor networks. International Journal of Advanced Research in Computer Science and Technology, 2, no.1, pp. 229–234.
4. LI N., HOU J. C., SHA L. (2005) Design and analysis of an MST-based topology control algorithm / N. Li, J. C. Hou, L. Sha – IEEE Transactions on Wireless Communications, 4, no.3, pp. 1195–1206.
5. QUI T., LIU X., FENG L. (2016) An efficient tree-based self-organizing protocol for internet of things. IEEE Access. no.4, pp. 3535–3546.
6. KERCHOVE C. DE, DOOREN P. VAN (2010) Iterative filtering in reputation systems. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 31, no.4, pp. 1812–1834.
7. REZVANI M., IGNATOVIC A., BERTINO E. ET AL. (2015) Secure data aggregation technique for wireless sensor networks in the presence of collusion attacks. IEEE Transactions on Dependable and Secure Computing, 12, no.1, pp. 98–110.

Надійшла до редколегії 21.03.19

Reference

1. MALIK A. S. (2011) Energy consumption balancing (ECB) issues and mechanisms in wireless sensor networks

УДК: 316.614-056.37

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2419/4.10>

Патрикеева О.¹, начальник відділу STEM-освіти,
Черноморець В.², завідувач сектору досліджень
освітніх процесів відділу STEM-освіти,
Коваленко М.³, методист вищої категорії
відділу STEM-освіти

Основні структурні компоненти STEM-середовища освітнього закладу

^{1,2,3} ДНУ «Інститут модернізації змісту освіти»
м. Київ, вул. Митрополита В. Липківського, 36,
кімн.206, відділ STEM-освіти,

e-mail: 1,2,3stemosvita@gmail.com

Patrykeieva O.¹, head of STEM-education
department,
Chernomorets V.², head of the sector of research of
educational processes of STEM-education
department,
Kovalenko M.³, methodist of the highest category of
STEM-education department

The main structural components of the STEM-environment of the educational institution

^{1,2,3} SSI „Institute of education content
modernization”
Kyiv, street Metropolitan Vasyl Lipkovsky 36,
room 206, department of STEM-education.

e-mail: 1,2,3stemosvita@gmail.com

У статті йдеться про створення освітнього STEM-середовища навчального закладу. Обґрунтовано визначення поняття такого освітнього феномена, як STEM-середовище закладу освіти, виокремлено найважливіші структурні компоненти STEM-середовища навчального закладу, основні завдання його функціонування. Пропонується трактувати поняття освітнього STEM-середовища закладу освіти як сукупність інтелектуальних та матеріальних умов впровадження науково-дослідної роботи, технологій, інжинірингу, інтегрованих знань, які забезпечують саморозвиток вільної і активної особистості, реалізацію творчого потенціалу дитини. Окреслено ідею про те, що саме особистість дитини є найважливішим елементом STEM-освітнього середовища як складної й відкритої системи, що постійно саморозвивається.

Ключові слова: STEM-освіта, STEM-освітній простір, STEM-освітнє середовище, STEM-середовище освітнього закладу.

The article deals with the creation of an educational STEM-environment of an educational institution. The definition of the concept of such an educational phenomenon as the STEM-environment of the institution is substantiated. The most important structural components of the STEM-environment of the educational institution and the main tasks of its functioning are identified. The interpretation of the concept of an educational STEM-environment of an educational institution is proposed as the combination of intellectual and material conditions for the implementation of researches, technologies, engineering, integrated knowledge that ensure self-development of a free and active person, realization of the child's creative potential. The idea that the child's personality is the most important element of the STEM-educational environment which is the complex and open system that is constantly self-developing is outlined.

Key words: STEM-education, STEM-educational space, STEM-educational institution

У контекстів глобальних викликів сьогодення освітньої галузі. Впровадження та розвиток актуалізується питання пошуку освітніх STEM-освіти здійснюється за такими напрямками: інновацій, що забезпечить подальший розвиток

- нормативно-правовим (розроблення та осучаснення нормативно-правових документів);
- організаційно-управлінським (створення структур та підрозділів, що опікуються проблемами STEM-освіти);
- методичним (розроблення методичних рекомендацій, проведення конференцій, тренінгів, вебінарів та семінарів, організація роботи WEB-STEM-школи, індивідуальна консультативна робота, популяризація STEM-освіти у ЗМІ тощо);
- інформаційним (адвокація проблем та перспектив розвитку STEM-освіти в усіх можливих формах);
- практичним (упровадження STEM-освіти безпосередньо в практику навчального процесу та в позашкільну навчально-виховну діяльність);
- науково-теоретичним (розроблення методологічної бази STEM-освіти, поняттєвого апарату, анотованого каталогу статей з означеної проблематики тощо);
- моніторинг розроблення змісту та результатів упровадження STEM-освіти.

Актуальним є обґрунтування поняття STEM-освітнє середовище закладу освіти, та визначення його основних структурних компонентів.

Вивчення та аналіз праць зарубіжних і вітчизняних науковців Т. Андрущенко, С. Буліга, С. Бревус, В. Величко, С. Гальченко, Н. Гончарова, С. Горбенко, Л. Глоба, К. Гуляєв, В. Камишин, Е. Клімова, О. Комова, О. Лісовий, Л. Ніколенко, Р. Норчевський, О. Патрикєєва, М. Попова, В. Приходнюк, М. Рибалко, І. Савченко, Н. Салюк та інших дає змогу визначити сучасні підходи до розроблення поняттєвого апарату та адаптації вже наявних термінів до реальної практики впровадження STEM-освіти.

Метою статті є обґрунтування визначення поняття «STEM-середовище закладу освіти», виокремлення найважливіших структурних компонентів освітнього STEM-середовища закладу освіти, а також основних завдань його функціонування.

Світ входить у нову епоху, коли надшвидкими темпами радикально змінюються галузі промислового та економічного розвитку. Постає абсолютно новий тип промислового виробництва, основа якого – високотехнологічні бази даних та їх аналіз, повна автоматизація виробництва, технології додаткової реальності, Інтернет ресурсів тощо.

Засновник і багаторічний президент Давоського економічного форуму Клаус Шваб назвав її епохою Індустрії 4.0. або епохою четвертої промислової революції, часом, коли зникають кордони між фізичними, цифровими та біологічними сферами.

«Йдеться про хвилю відкриттів, зумовлених розвитком можливостей встановлення зв'язків: роботи, дрони, розумні міста, штучний інтелект, дослідження головного мозку», – зазначає К.М. Шваб. Прогнозується, що об'єднані в єдину мережу кіберсистеми зможуть у режимі реального часу зв'язуватися між собою, самоналаштовуватися та навчатися новим моделям поведінки [6].

За прогнозами вчених, протягом 30 наступних років з'являться роботи, розумніші за людей. Їх буде величезна кількість – від мікро-роботів до роботів-велетнів. Роботи будуть здатними літати, плавати, їздити. Зможуть самі вибудовувати виробництво, уникаючи помилок, взаємодіяти з виробленими товарами, адаптуватися до вимог та потреб споживачів. До прикладу, виріб під час виготовлення зможе самостійно визначити, яке обладнання зможе його виробити, і це буде зроблено в автономному режимі, без участі людини. Сучасні професії просто зникнуть. Це стосується більшості професій юридичного напрямку, сфери охорони здоров'я, фармакології, торгівлі, сільського господарства тощо.

Постає закономірне запитання – що буде робити людина? Яку освіту та професійні навички вона має отримати, щоб зайняти провідне місце у світі, заповненому роботами. Вчені прогнозують, що 60% дітей, які сьогодні йдуть в початкову школу, будуть працювати за такими професіями, яких нині не існує. Водночас вже відомо професії майбутнього, що задіяні вже сьогодні: спеціаліст з агромоделювання, оператор дрону, інженер-механізатор, геолог з 3D-моделювання, GPS-менеджер, енергоаудитор, інженер сонячних електростанцій, менеджер інвестиційних проєктів тощо. Це означає, що дітям доведеться адаптуватися до швидко змінюваних потреб суспільства. У такій ситуації створюються унікальні можливості для країн. Можливості для навчання та розвитку в абсолютно несподіваних нішах, за умов підтримки держави та бізнесу. Або, навпаки, країна ризикує втратити все, якщо молодь не матиме можливості набути новітніх навичок.

Щороку під час Всесвітнього економічного форуму в Давосі оприлюднюють доповідь з Глобального індексу людського капіталу (Human

Capital Index). Загалом індексом охоплено 130 країн. Людський капітал – це люди, які володіють знаннями і навичками, що дають змогу створювати цінність у глобальній економічній системі. Кожну країну оцінювали за шкалою від 0 (найгірший) до 100 (найкращий) балів за чотирма тематичними у п'яти різних вікових групах. Індекс відображає розвиток людського капіталу країни – як поточний стан, так і очікуваний. Отримавши 71,27 балів із 100 можливих, Україна займає 24 місце. Наша держава має високі показники охоплення населення середньою освітою, рівня грамотності населення, освіченості кадрів та перспективи розвитку кадрового потенціалу. Але відстаємо відчутно: щодо рівня якості підготовки кадрів, рівня зайнятості у високотехнологічних виробництвах, кількості тих, хто здобуває професійно-технічну освіту. Парадоксально: за наявності значної кількості фахівців із вищою освітою, в Україні фіксують високий рівень безробіття [7].

STEM-освіта покликана усунути наявні недоліки і перекося та забезпечити реалізацію державної політики щодо забезпечення розвитку науково-технічного напрямку освіти, сприяти збільшенню кількості професіоналів, зайнятих у високотехнологічних, інноваційних галузях, підвищити якість їх підготовки, навчити й виховати молодих людей, які:

- вміють знаходити нестандартні, ефективні рішення наукових, виробничих, соціальних, побутових та інших проблем, спираючись на базові теоретичні знання, та здобуття під час навчання практичні навички особистісної дослідницької діяльності;

- відчують непереможну необхідність у постійному, систематичному поповненні та оновленні набутих знань, не припиняють самовдосконалення, самоосвіту й самонавчання протягом усього життя;

- шукають, творчо переосмислюють й застосовують у практичній діяльності необхідну інформацію із різноманітних джерел;

- займають активну громадянську позицію, чітко усвідомлюють пріоритетні інтереси Батьківщини та готові у будь-який момент постати на їх захист [1].

Створення освітнього STEM-середовища у закладі освіти будь-якого типу та форми власності є одним з основних завдань сучасного етапу впровадження STEM.

Науковці поняття «освітнє середовище» трактують як сукупність об'єктивних зовнішніх умов, факторів, соціальних об'єктів, необхідних

для успішного функціонування освіти, як систему впливів і умов формування особистості, можливостей для її розвитку, наявних у соціальному і просторово-предметному оточенні.

Освітнє STEM-середовище є структурним елементом освітнього середовища у цілому, так само воно – невід'ємна складова соціального світу (соціуму).

Пропонуємо трактувати поняття **освітнього STEM-середовища закладу освіти як сукупність інтелектуальних та матеріальних умов впровадження науково-дослідної роботи, технологій, інжинірингу, інтегрованих знань, які забезпечують саморозвиток вільної і активної особистості, реалізацію творчого потенціалу дитини.**

Основними структурними компонентами освітнього STEM-середовища закладу, на нашу думку, є: алгоритм упровадження STEM у навчальному закладі (розробляють окремо для кожного закладу з огляду на реальні умови функціонування); STEM у позаурочній роботі (шкільні STEM-центри, STEM-лабораторії, гуртки за STEM-напрямами), методичне забезпечення (використання спеціальних програм та науково-методичних розробок для впровадження STEM), кадри (наявність підготовлених фахівців, тренерів, тьюторів та умови для їх подальшого навчання й самоосвіти) тощо (див. рис 1.).



Рис. 1. Структурні компоненти STEM-середовища закладу освіти

Необхідно враховувати, що поняття «середовище» і «простір» не є тотожними.

Простір (латинське: spatium) – протяжність, вмістилище, в якому розташовано предмети і відбуваються події. Простір характеризує співіснування об'єктів, їх протяжність і структурність, взаємне розташування.

Науковці освітній простір трактують як педагогічний феномен, що передбачає тісний контакт особи з навколишнім освітнім

середовищем. У результаті такої взаємодії відбувається осмислення і пізнання всіх елементів – носіїв культури. Отже, простір можна вважати структурованою системою педагогічних чинників і умов їх засвоєння окремою особистістю під час розвитку і становлення.

Деякі вчені стверджують, що освітній простір є системою соціальних зв'язків у сфері освіти, заснованою на взаємодії суспільства і соціальних інститутів освітньої спрямованості [4].

У будь-якому разі, очевидно, що поняття «середовища» є ширшим і охоплює в себе абсолютно всі об'єкти та суб'єкти освіти, у тому числі й простір.

Розробникам планування STEM-простору закладу освіти варто враховувати такі вимоги та чинники:

технічні, архітектурні: наявність вільних приміщень, можливість використання коридорів, лабораторій, майстерень, пришкольної території, наявність наборів з робототехніки, LEGO наборів (або їх аналогів), наборів для конструювання, засобів 3D моделювання, комп'ютерної техніки, Інтернету, мережі Wi-Fi тощо;

програмні: питання комплексної безпеки (інтелектуальної, духовної, морально-етичної, психологічної, педагогічної, етнічної, фізичної, трудової, управлінської), інтегрованість, взаємодія;

академічні: методичне забезпечення, відповідність змісту діяльності Державним стандартам, навчальним програмам тощо;

соціально-етичні: культурологічний та нормативно-правовий аспекти;

кадрові: психологічна готовність, інженерна підготовка, наявність фахівців тощо.

Враховуючи ці вимоги, в освітньому STEM-середовищі закладу освіти виділяємо такі складові: **фізичну та психолого-інтелектуальну.**

Фізична складова охоплює матеріальну базу навчального закладу, на основі якої є можливість створення єдиного STEM-простору. Йдеться не лише про технічні та методичні засоби, а й відповідно оснащені робочі місця користувачів, локальну мережу, мережу Інтернет, програмне забезпечення навчального процесу тощо.

Психолого-інтелектуальна складова передбачає готовність та спроможність учасників освітнього STEM-простору до співпраці, творчого пошуку та використання технологій у всіх ланках навчального процесу.

Зрозуміло, що формулюючи структуру єдиного STEM освітнього простору навчального закладу та базу даних, необхідно зважати на те, що

реальна робота з їх використання залежить від матеріально-технічної бази та реальних можливостей самого навчального закладу [5].

Оцінюючи наявні матеріальні можливості та прогнозуючи майбутні, варто врахувати, що матеріально-технічна база навчального закладу – широке поняття. Воно охоплює не тільки «євроремонт, сучасні меблі в класах, оргтехніку». «Матеріальні речі – це засіб, а не мета. Вони доповнюють, а не створюють досвід. Тому важливо, щоб за довгим переліком необхідних речей не губилось первинне – що це дає учням?» [3]. STEM-освітнє середовище має живити навчальний досвід учня. Усе – від естетики матеріальних компонентів до емоційного фону – покликано створити такі умови, за яких учні зростатимуть як особистості.

Поняття освітнього простору об'єднує дві основні ідеї – ідею простору і ідею освіти. Освітній простір відображає освітню протяжність, структурне співіснування і взаємодію освітніх систем, їх компонентів, освітніх подій. Як форма трансляції соціального досвіду від покоління до покоління, освітній простір істотно відрізняється від природного процесу передачі досвіду людства, що має місце без спеціально організованих процесів навчання і виховання [2].

Нині проблему обґрунтування структурних компонентів STEM-середовища цілісно не досліджено. Але важливим є те, що науковці, вивчаючи окремі компоненти такого середовища, визначають особистість дитини як найважливіший його елемент, складну й відкриту систему, що постійно саморозвивається. Кінцева мета функціонування освітнього STEM-середовища – сформувати творчу особистість, спроможну відкривати новітні властивості світу та природи.

Література:

1. Патрикеева О./ Навчальні програми – ефективний засіб формування STEM-грамотності / О. Патрикеева., В. Черноморець, М. Коваленко // Освіта. Технікуми, коледжі, 2017. – № 2 (42).
2. Патрикеева О./ Сучасні засоби формування STEM-грамотності / О. Патрикеева., В. Черноморець // Наукові записки Малої академії наук України: зб. наук. праць. Вип.10. – К.: Інститут обдарованої дитини НАПН України, 2017.
3. Новий простір у школах. 5 прикладів, як вчителі самі вирішують це питання [Електрон. ресурс]. – Режим доступу: <http://nus.org.ua/articles/novyj-prostir-u-shkolah-5-prykladiv-yak-vchyteli-sami-vyrishuyut-tse-pytannya/>
4. Освітній простір [Електрон. ресурс]. – Режим доступу: <http://education-ua.org/osvitniy-prostir.php>
5. Чумак А. Інформаційно-освітнє середовище вищого навчального закладу / А. Чумак [Електрон. ресурс]. – Режим доступу: <http://informatika.udpu.org.ua/>
6. The Fourth Industrial Revolution, by Klaus Schwab [Електрон. ресурс]. – Режим доступу: <https://www.weforum.org/about/the-fourth-industrial-revolution-by-klaus-schwab>
7. The Global Human Capital Report 2017 [Електрон. ресурс]. – Режим доступу: <https://www.weforum.org/reports/the-global-human-capital-report-2017>

References:

1. PATRYKEIEVA O., CHERNOMORETS V., KOVALENKO M. (2017) Training programs – an effective means of forming STEM literacy, Education. Technical schools, colleges, № 2 (42).
2. PATRYKEIEVA O., CHERNOMORETS V. (2017) Modern means of STEM literacy formation, Scientific Notes of Junior Academy of Sciences of Ukraine, collection of scientific papers, 10. Kyiv, Institute of Gifted Child of NAES of Ukraine.
3. New space in schools. 5 examples of how teachers solve this problem themselves. Retrieved from: <http://nus.org.ua/articles/novyj-prostir-u-shkolah-5-prykladiv-yak-vchyteli-sami-vyrishuyut-tse-pytannya/>
4. Educational space. Retrieved from: <http://education-ua.org/osvitniy-prostir.php>
5. CHUMAK A. Information and educational environment of higher education institution. Retrieved from: <http://informatika.udpu.org.ua/>
6. SCHWAB K. The Fourth Industrial Revolution. Retrieved from: <https://www.weforum.org/about/the-fourth-industrial-revolution-by-klaus-schwab>
7. The Global Human Capital Report (2017). Retrieved from: <https://www.weforum.org/reports/the-global-human-capital-report-2017>

Надійшла до редколегії 21.07.2019

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 539.12; 530.145

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2419/4.11>

Барабаш О. В.¹, к.ф.-м.н, доц.
Ковтонюк В.С.², студ.

O. V. Barabash¹, PhD.
V. S. Kovtoniuk², stud.

Народження S-бозона в реакції кулонівського розсіювання ядра на протоні або електроні

S-boson production in the reaction of Coulomb scattering of a nucleus by a proton or electron

^{1,2}Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул. Володимирська 64/13, e-mail: ¹obar@univ.kiev, ²vadymkovtoniuk@gmail.com

^{1,2}Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13, e-mail: ¹obar@univ.kiev, ²vadymkovtoniuk@gmail.com

Розглянуто процес народження скалярного BSM (Beyond the Standard Model) бозона (S-бозона) в експерименті SHiP (Search for Hidden Particles) на LHC в результаті глибоко-непружного зіткнення зарядженої частинки (електрона або протона) з важким ядром через реакцію фотонного злиття. Показано, що у випадку розсіювання протона на ядрі переріз реакції може бути порівняним з перерізом народження S-бозона при розпаді D_s мезону лише у випадку безмасового бозона ($m_S = 0$). При розсіянні електрона на ядрі переріз $\sigma(eZ \rightarrow S)$ відноситься до $\sigma(D \rightarrow S)$ як $1:10^5$.

Ключові слова: SHiP, переріз народження, скалярний BSM бозон, реакція фотонного злиття.

The production cross-section of the beyond the standard model (BSM) scalar boson (S boson) have been considered in the article. Scalar boson produced via photon fusion reaction in the deep inelastic scattering of a charged particle (proton or electron) on heavy nucleus of the target. This process is one of the possible mechanisms of BSM boson production at the SHiP (Search for Hidden Particles) experiment at the CERN LHC and may be dominating among others processes due to large nuclear charge. Previously [1], the amplitude and the production cross-section of this reaction were found. The found cross-section was analyzed for the case of proton scattering on the lead nucleus and compared with the production cross-section in the decay of D_s meson. In this paper we make estimate of the process more accurate and consider also electron-nucleus scattering. It was found that the photon fusion reaction $pZ \rightarrow S$ may be effective only in the case of massless S boson.

Key Words: SHiP, production cross-section, BSM scalar boson, photon fusion reaction.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Єжов С. М.

Вступ

Ця робота є продовженням роботи [1]. В попередній роботі було знайдено амплітуду народження S-бозону при кулонівському розсіянні протона на важкому ядрі мішені (ядрі свинцю). Повний переріз реакції отримується інтегруванням квадрата модуля амплітуди по деякій області Ω , що визначається кінематикою реакції

$$\sigma = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint \frac{|M_{fi}|^2}{32E_{tot}|p_i|} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 da d\cos\beta = \sigma_0 \frac{m^2}{M|p_i|} \iint \frac{d\varepsilon dE}{\left(\frac{m}{M}\varepsilon_i - E\right)^2} \quad (1)$$

де $\sigma_0 = 3.2 \cdot 10^{-13} \theta^2$ mbarn. Для оцінки величини σ вираз (1) був проінтегрований по прямокутнику

$$[\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max}] \times [E_{\min}, E_{\max}]$$

який гарантовно включає в себе область інтегрування Ω . Такий підхід дозволяє оцінити σ зверху. Для перерізу було отримано оцінку

$$\sigma(pZ \rightarrow S) \leq 3.5 \cdot 10^{-12} \theta^2 \frac{(1-x)^2}{x} \text{ mbarn} \quad (2)$$

де $x = \frac{m_S}{\varepsilon_i}$. Порівняння перерізу (2) з перерізом народження S-бозона в реакції розпаду D_s мезону

$$\sigma(D \rightarrow S) = 9.56 \cdot 10^{-8} \theta^2 \text{ mbarn} \quad (3)$$

показує, що переріз (2) може конкурувати з перерізом (3) лише у випадку, коли маса S-бозона менша за 0.1 кеВ. Проте, цю оцінку можна суттєво покращити.

Уточнений переріз

В імпульсному просторі область інтегрування в (1) представляє собою перетин трьох еліпсоподібних кривих (які у випадку $m_S = 0$ переходять в точні еліпси). За формою область нагадує сильно витягнутий трикутник (див. Рис. 1). Напівосі цих еліпсів дорівнюють $\sqrt{mM} \sim 10^4$ MeV та $M \sim 10^5$ MeV, в той час, як сама область має розміри порядку $p_i \sim 100$ MeV.

Таким чином, на масштабах ~ 100 MeV дуги еліпсів можна апроксимувати прямими.

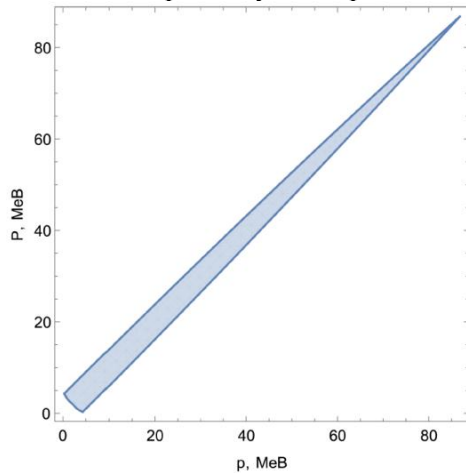


Рис. 1. Область інтегрування для $m_S = 1$ кеВ.

Максимальний вклад в інтеграл вносить область поблизу гострого кута трикутника, де підінтегральний вираз має максимальне значення. Заміняючи складну точну область трикутником (що утворюється дотичними до кривих у гострому куті області та обрізаний знизу при $p_i = 0$) та інтегруючи в (1) отримуємо

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2 = & \frac{128e^4 Z^2 \chi^2}{(\Delta p)^4 (\Delta P)^4} [(\Delta p \Delta P)^2 ((p_i p_i)(p_f p_f) + (p_i p_f)(p_f p_i)) + 2(\Delta p p_i)(\Delta p p_f)(p_i \Delta P)(p_f \Delta P) - \\ & - (\Delta p \Delta P)((\Delta p p_f)(p_i p_i)(p_f \Delta P) + (\Delta p p_i)(p_i p_f)(p_f \Delta P) + (\Delta p p_f)(p_f p_i)(p_i \Delta P) + (\Delta p p_i)(p_f p_f)(p_i \Delta P)) \\ & - (p_i p_f)((\Delta p \Delta P)^2 M^2 + (\Delta P)^2 (\Delta p p_i)(\Delta p p_f))] \end{aligned} \quad (5)$$

Всі доданки в квадратних дужках одного порядку малості $\sim \varepsilon^4 M^2 \vec{P}^2$, так що для (5) маємо оцінку

$$|\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2 \sim 64e^4 Z^2 \chi^2 \frac{M}{E_\pi} \quad (6)$$

де $\vec{P}$ – імпульс кінцевого протона, E_π – його енергія в ЛС. Суттєва відмінність від попереднього випадку (розсіяння протона) в тому, що тепер в знаменнику стоїть енергія ядра в першому степені (а не в другому).

Область інтегрування також зазнає суттєвих змін. У випадку, коли $m_S \ll 100$ MeV це трикутник зі сторонами

$$P = \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_i^2}{2M}; \quad 2p = \varepsilon_i \pm P. \quad (7)$$

Список використаних джерел

1. Барабаш О. В., Обрахунок перерізу народження BSM бозона в реакції фотонного злиття, Вісник КНУ імені Тараса Шевченка, серія фіз.-мат. науки. – 2019. – № 2. – С. 95-98.

$$\sigma = 2\sigma_0 \left(\ln \frac{2\varepsilon_i}{m_S} - 1 \right) \quad (4)$$

Ця оцінка є оцінкою зверху, оскільки, враховуючи опуклість кривих еліпсів, точна область розташована всередині трикутника, по якому ми інтегрували.

Порівняння (4) з (3) показує, що переріз $\sigma(pZ \rightarrow S)$ стає порядку перерізу $\sigma(D \rightarrow S) = 9.6 \cdot 10^{-8} \theta^2 \text{ mbarn}$ лише при $m_S \leq 8 \cdot 10^{-2 \cdot 10^5} \text{ MeV}$, тобто якщо скалярна частинка безмасова.

Переріз реакції $eZ \rightarrow S$

Вище ми розглядали розсіяння протона на ядрі. Проте, принциповий інтерес представляє реакція за участю електрона. Суттєва відмінність полягає в тому, що при енергії $\varepsilon_i \approx 100$ MeV протон є нерелятивістським, тоді як електрон – ультра-релятивістський. Це принципово змінює аналіз величин амплітуди і фазової області.

В ультрарелятивістському наближенні всі доданки в амплітуді, що пропорційні m , можуть бути опущені, а також доданки, що пропорційні A (див. [1], формула (5)). В результаті, для квадрата амплітуди отримуємо вираз

Прийнявши вираз (6) за типове значення амплітуди та проінтегрувавши його по області (7) отримуємо

$$\sigma = 2\sigma_0 \quad (8)$$

що на п'ять порядків менше за $\sigma(D \rightarrow S)$.

Висновки

Переріз народження S-бозона в реакції фотонного злиття при розсіянні протона на важкому ядрі може бути порівняним з перерізом народження S-бозона при розпаді D_s мезону лише у випадку $m_S = 0$. При розсіянні електрона на ядрі переріз $\sigma(eZ \rightarrow S)$ відноситься до $\sigma(D \rightarrow S)$ як $1:10^5$. Таким чином, у випадку масивного S-бозона реакція з розпадом D_s мезона залишається найбільш перспективною.

References

1. BARABASH O. V. (2019) Calculation the production cross-section of the BSM boson via photon fusion reaction, Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series Physics & Mathematics. – № 2, p. 95 – 98.

Надійшла до редколегії 14.07.19

Підписано до друку _____. Формат _____. Друк. офс.
Папір офс. № _____. Друк. арк. _____. Тираж _____. Зам. _____.
Друкарня _____.