КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

В І С Н И К

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

№3 2019

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
випуск №3, 2019,
Серія фізико-математичні науки
З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Физика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, механіко-математичного факультетів, факультету радіофізики, електроніки та комп’ютерних систем і факультету комп’ютерних наук та кібернетики.
Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1222 від 07.10.2016), та реферується в Реферативному журналі, Zentralblatt MATH.

Редакційна колегія:

Козаченко Юрій Васильович, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор;**

Розора Ірина Василівна, к.ф.-м.н., доц., **зам. головного редактора;**

Bartlova Milada, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;
Bavula Vladimir, Prof., University of Sheffield, Great Britain;
Beghin Luisa, Prof., Sapienza Università di Roma, Italy;
Futorny Vyacheslav, Prof., Universidade de São Paulo, Brazil;
Giuliano Rita, Prof., Università di Pisa, Italy;
Gorlatch Sergei, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;
Hudak Stefan, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;
Kukhtarev Nickolai, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;
Leonenko Nikolay, Prof., Cardiff University, Great Britain;
Medvids Arturs, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;
Olenko Andriy, Prof., La Trobe University, Australia;
Orsingher Enzo, Prof., Sapienza University of Rome, Italy;
Ostrovsky Eugene, Prof., Bar- Ilan University, Israel;
Pogany Tibor, Prof., University of Rijeka, Croatia;
Rontó Miklós, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;
Silvestrov Dmitrii, Prof., Stockholms universitet, Sweden;
Sottinen Tommi, Prof., University of Vaasa, Finland;
Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;
Trofimchuk Sergey, Prof., Universidadde Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;
Volodin Andrei, Prof., University of Regina, Canada;
Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;
Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Безущак Оксана Омелянівна, к.ф.-м.н., доцент;
Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;
Гаращенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;
Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;
Жук Ярослав Олександрович, д.ф.-м.н., проф.;
Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., проф.;
Курченко Олександр Олексійович, д.ф.-м.н., проф;
Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;
Львов Віктор Анатолійович, д.ф.-м.н., проф.;
Макара Володимир Арсенійович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;
Майборода Ростислав Євгенович, д.ф.-м.н., проф.;
Моклячук Михайло Павлович, д.ф.-м.н., проф.;
Пашко Анатолій Олексійоіич, д.ф.-м.н., проф.;
Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Петравчук Анатолій Петрович, д.ф.-м.н., проф.;
Погорілий Сергій Дем’янович, д.т.н., проф.;

Савенков Сергій Миколайович, д.ф.-м.н., доц.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.;
Сливка-Тилищак Ганна Іванівна, д.ф.-м.н., проф.;
Хусаінов Денис Яхьєвич, д.ф.-м.н., проф.;

Редакційний відділ:

Затула Дмитро Васильович, **відповідальний секретар**;
Безущак Оксана Омелянівна, bezusch@univ.kiev.ua;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
П'ятецька Олена Василівна, visnyk.phys-math@ukr.net;
Отто Георгій Костянтинович, **технічний редактор**, ottogk@gmail.com.

Адреса редакційної колегії:

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49
fm.visnyk@ukr.net
ISBN 978-966-2142
ISSN 1812-5409

Засновник: Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Свідоцтво про державну реєстрацію:КВ №16299-4771Р від 11.12.2009 року

DOI: https://doi.org/10.17721/1812-5409.2019/3

Безкоштовно

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Мірошниченко О.В. Аналіз залишків у моделі регресивної суміші 8

Пашко А.О., Синявська О.О. Бактерівські оцінки параметра Хюрста дробового броунівського руху 18

Пашко А.О., Яневич Т.О. Методи моделювання процесу Орнштейна - Уленбека 24

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Батюк Л. В., Кізілова Н. М. Магнітогідродинамічні течії мікро/нано рідин по тонких капілярах 32

Гусак В.О. Закони збереження в задачах динамічного руйнування 38

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Лижечко М. С., Розора І. В., Моделювання технічних резервів страхової компанії 46

Усар І.Я., Макушенко І.А., Протопоп Ю.О. Швидкість збіжності стаціонарного розподілу системи з повторними викликами і чергою 52

Завадський І.О. Пошук рядка в тексті з урахуванням обмежень на обсяг кеш-пам'яті 56

СУЧАСНА ФІЗИКА

Отто Г.К. Інтерферометрія зворотнього зв'язку в лазерному резонаторі. Параметрична модель 62

CONTENTS

ALGEBRA, GEOMETRY AND PROBABILITY THEORY

Miroshnychenko V.O., Residual analysis in regression mixture model 8

Pashko A.O., Synyavska O.O., PhD. Baxter estimates of the Hurst parameter of fractional Brownian motion 18

Pashko A.O., Ianevych T.O Methods for modeling the Ornstein-Uhlenbeck process 24

DIFFERENTIAL EQUATIONS, MATHEMATICAL PHYSICS AND MECHANICS

Batyuk L.V., Kizilova N. M. Maghetohydrodynamic flows of micro/nano fluids through thin capillaries 32

Husak V.O. Conservation laws in dynamic fracture tasks 38

COMPUTER SCIENCES AND INFORMATICS

Lyzhechko M.S., Rozora I.V. Modelling of technical reserves of an insurance company 46

Usar I.Ya., Makushenko I.A., Protopop Yu.O. The convergence rate of stationary distribution of retrial queueing system with queue 52

Zavadskyi I.O. Pattern matching by the terms of cache memory limitations 56

MODERN PHYSICS

Otto G.K. Interferometry feedback in the laser resonator. Parametric model 62

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 519.21 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2019/3.1

В.О. Мірошниченко[1], *асп.*

Аналіз залишків у моделі регресійної суміші

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64.
vitaliy.miroshnychenko@gmail.com

V.O. Miroshnychenko[1], *PhD stud.*

Residual analysis in regression mixture model

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.
vitaliy.miroshnychenko@gmail.com

Розглянуто оцінку коефіцієнтів нелінійної регресії за спостереженнями з суміші зі скінченою кількістю компонент. Концентрації компонент у суміші є різними для різних спостережень. Для побудови оцінок регресії використовується узагальнений метод найменших квадратів Побудовані оцінки використані для оцінки функцій розподілу і дисперсій залишків різних компонент. Оцінки перевірені симуляційним моделюванням і використані для аналізу соціологічних даних. Побудовані діаграми типу квантиль проти квантиля для візуального порівняння розподілу залишків.

Ключові слова: асимптотична поведінка, метод оцінюючих рівнянь, модель суміші, нелінійна регресія, мінімаксні ваги, оцінка дисперсії.

We consider data in which each observed subject belongs to one of different subpopulations (components). The true number of component which a subject belongs to is unknown, but the researcher knows the probabilities that a subject belongs to a given component (concentration of the component in the mixture). The concentrations are different for different observations. So the distribution of the observed data is a mixture of components' distributions with varying concentrations. A set of variables is observed for each subject. Dependence between these variables is described by a nonlinear regression model. The coefficients of this model are different for different components. An estimator is proposed for these regression coefficients estimation based on the least squares and generalized estimating equations. Consistency of this estimator is demonstrated under general assumptions. A mixture of logistic regression models with continuous response is considered as an example. It is shown that the general consistency conditions are satisfied for this model under very mild assumptions. Performance of the estimator is assessed by simulations and applied for sociological data analysis. Q-Q diagrams are built for visual comparison of residuals' distributions.

Key Words: asymptotic behavior, generalized estimation equations, mixture model, non-linear regression, minimax weights, variance estimator.

Communicated by Prof. Sugakova O.V.

1 Вступ

Моделі регресійних сумішей широко використовуються для опису прикладних статистичних даних. Як правило, на основі цих моделей будують оцінки невідомих параметрів [3], [6] і довірчі множини для них [9],[13]. Важливим елементом статистичного дослідження є також діагностика моделі, тобто перевірка її відповідності реальним даним. Для регресійних моделей однорідних спостережень така діагностика зазвичай спирається на аналіз залишків, що визначаються як відхилення спостережуваних значень відгуку від результатів прогнозування на основі моделі [4]. У випадку регресійної суміші дослідник працює не з одним прогнозом, а з набором кількох прогнозованих значень, що відповідають різним компонентам суміші. Тому модифікація стандартних технік аналізу залишків на випадок регресійних сумішей являє собою нетривіальну задачу.

У даній роботі для нелінійних моделей регресійних сумішей розглядаються дві задачі аналізу залишків: оцінювання дисперсій похибок і візуальна перевірка припущень про розподіл похибок за допомогою модифікованої діаграми квантиль-квантиль (QQ-діаграма). Для розв'язання цих задач використовуються загальні методи статистики сумішей [1], [2] [7].

© В.О. Мірошниченко, 2019

Опис моделі нелінійної регресійної суміші наведено у розділі 1. У розділі 2 описані мінімаксні коефіцієнти, які використовуються у розділі 3 для отримання оцінок коефіцієнтів регресії. Використання параметрів регресії для аналізу залишків описано у розділі 4. У розділі 5 доведена консистентність оцінок дисперсій похибок регресії для різних компонентів суміші. Поведінки оцінок для вибірок фіксованого обсягу досліджено на модельованих даних і застосовано для аналізу соціологічних даних у розділі 6 і розділі 7.

2 Модель суміші

Розглянемо модель суміші зі змінними концентраціями. Кожен досліджуваний об'єкт O належить одному із M класів (компонентів суміші). Номер компонента, якому належить об'єкт, позначимо $\kappa(O) \in 1, ..., M$. Ця характеристика не спостерігається. Вектор спостережуваних змінних об'єкта O позначимо $\xi(O)$. Будемо вважати, що розподіл спостережуваних змінних для кожного компонента описується моделлю нелінійної структурної регресії.

Таким чином

$$\xi(O) = (Y(O), X^1(O), ..., X^d(O))^T,$$

де $Y(O)$ – відгук, $X(O) = (X^1(O), ..., X^d(O))$ – регресори у моделі.

$$Y(O) = g(X(O), b^{(\kappa(O))}) + \varepsilon(O)$$

де g – деяка відома функція $g : \chi^d \times \Theta \to R$, $b^{(\kappa)} = (b_1^{(\kappa)}, ..., b_d^{(\kappa)})^T \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^d$, $\kappa = 1, ..., M$ – невідомі коефіцієнти регресії для κ-ї компоненти суміші, $\varepsilon(O)$ – випадкова похибка. Припускаємо, що $\varepsilon(O)$:

$$\mathbb{E}[\varepsilon(O)|\kappa(O) = m] = 0, m = 1, ..., M,$$

та

$$\sigma_m^2 = \mathrm{Var}[\varepsilon(O)|\kappa(O) = m] < \infty.$$

(σ_m^2 невідомі).

$F_{\varepsilon,m}(A) = \mathrm{P}(\varepsilon(O) \in A|\kappa(O) = m)$ для довільної вимірної $A \subseteq R$ – розподіл випадкової похибки.

Вектори регресорів

$$X(O) = (X^1(O), ..., X^d(O))$$

вважаємо випадковими з розподілом, що залежить від $\kappa(O)$. Додатково ми припускаємо, що регресори $X(O)$ та $\varepsilon(O)$ – незалежні при фіксованому $\kappa(O) = m$, $m = 1, ..., M$. Позначимо невідому функцію розподілу спостережуваних змінних $X(O)$

$$F_{X,m}(A) = \mathrm{P}(X(O) \in A|\kappa(O) = m)$$

для довільної вимірної $A \subseteq \mathbb{R}^d$.

Вибірка Ξ_n, що спостерігається, складається зі значень $\xi_i = (Y_i, X_i^T)^T = \xi(O_i), j = i, ..., n$, де $O_1, ..., O_n$ - незалежні об'єкти, які можуть належати до різних компонентів з ймовірностями

$$p_i^m = \mathrm{P}(\kappa(O_i) = m), m = \overline{1, M}; i = \overline{1, n}.$$

(ці ймовірності змішування відомі для кожного об'єкту)

3 Мінімаксні емпіричні навантаження

Нехай далі k – фіксований номер компонента, для якого оцінюються параметри $b^{(k)}$. Для оцінки функцій розподілу і $F_{X,k}$ можна використати навантажену емпіричну функцію розподілу, як це зроблено у [8]:

$$\hat{F}_{X,n}^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^n a_{i:n}^{(k)} I[X_i < x]$$

Мінімаксні ваги $a_{i:n}^{(k)}$, які визначені [10] і які мають вигляд

$$a_{i:n}^{(k)} = \frac{1}{\det \Gamma_n} \sum_{m=1}^{M} (-1)^{m+k} \gamma_{km:n} p_i^m,$$

де i – номер об'єкту у вибірці, а $\gamma_{km:n}$ – km-й мінор матриці Грамма $\Gamma_n = (\langle p^k, p^m \rangle)_{k,m=1}^M$, де $p_k = (p_i^k)_{i=1}^n$.

4 Оцінки параметрів, що отримані за допомогою оціночних рівнянь

Для оцінювання невідомих параметрів регресії природно використати навантажений метод найменших квадратів. Для цього складається функціонал МНК

$$G_n^k(\gamma) = \sum_{i=1}^n a_{i:n}^{(k)} (Y_i - g(X_i, \gamma))^2$$

Оцінки параметрів регресії є розв'язком оціночного рівняння, яке отримується шляхом диференціювання наведеного функціоналу

$G_n^k(b^{(k)})$:

$$\nabla G_n^k(\gamma) = \sum_{j=1}^{n} \nabla(a_{j:n}^{(k)}(Y_j - g(X_j,\gamma))^2) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(-2)a_{j:n}^{(k)} s(\xi_i,\gamma) = 0, \qquad (1)$$

де

$$s(z,\gamma) = (y - g(x,\gamma))\nabla g(x,\gamma),\ z = (x,y)$$

Вектор оцінок буде стаціонарною точкою функціоналу але не завжди буде точкою мінімуму. У деяких випадках розв'язком рівняння (1) буде множина точок. У такому випадку як оцінку можна обрати будь-який елемент цієї множини, але ми вимагаємо, щоб оцінка була вимірною функцією від даних.

Позначимо $J_n^k(\gamma) =^{def} \nabla G_n^k(\gamma)$.

Означення: $\hat{b}_n^{(k)}$ – розв'язок оціночного рівняння (1), тобто така вимірна функція від даних Ξ_n, що $J_n^k(\hat{b}_n^{(k)}) = 0$ м.н., називається оцінкою методу найменших квадратів.

Введемо наступне позначення:

$$\Gamma_\infty = \lim_{n\to\infty} n^{-1}\Gamma_n = \lim_{n\to\infty} n^{-1}(\sum_{j=1}^{n} p_j^i p_j^k)_{i,k=1}^{M}$$

Далі $X_\cdot^{(m)}, Y_\cdot^{(m)}, \varepsilon_\cdot^{(m)}$ – випадкові величини із розподілами:

$$X_\cdot^{(m)} \sim F_{X,m},\ \varepsilon_\cdot^{(m)} \sim F_{\varepsilon,m} \text{ – незалежні,}$$

та

$$Y_\cdot^{(m)} = g(X_\cdot^{(m)}, b^{(m)}) + \varepsilon_\cdot^{(m)}.$$

5 Застосування до діаграми квантиль проти квантиля і оцінки дисперсії залишків

У розділі 3 були побудовані оцінки $\hat{b}_n^{(k)}, k = 1,...,M$. Їх можна використати для оцінки функції розподілу похибок різних компонент. Для цього розглянемо залишки, що відповідають k-тому компоненту: $u_i = Y_i - g(X_i, \hat{b}_n^{(k)})$. Оскільки у суміші присутні об'єкти, що належать різним компонентам, для оцінювання функції розподілу похибок, що відповідає k-тій компоненті, використаємо навантажену ф.р. залишків з мінімаксними коефіцієнтами: $a_{i:n}^{(k)}$:

$$\hat{F}_{\varepsilon,k}(u) = \sum_{i=1}^{n} a_{i:n}^{(k)} I[u_i < u] \qquad (2)$$

Оцінка (2) може бути використана для побудови діаграми типу квантиль проти квантиля і для оцінки моментів залишків, в тому числі і дисперсії.

Для візуальної перевірки гіпотез про розподіл похибок за однорідними даними використовують діаграми квантиль проти квантиля (QQ діаграма).

Щоб побудувати аналогічну діаграму для залишків у моделі суміші, розглянемо оцінки квантилів на основі навантажених ф.р., запропоновані у [6].

$$Q^{\hat{F}_{\varepsilon,k}}(\alpha) = \frac{1}{2}(Q_+^{(k)}(\alpha) + Q_-^{(k)}(\alpha)),$$

тут

$$Q_+^{(k)}(\alpha) = \sup(x \in \mathbb{R} : \hat{F}_{\varepsilon,k}(x) \leqslant \alpha),$$
$$Q_-^{(k)}(\alpha) = \inf(x \in \mathbb{R} : \hat{F}_{\varepsilon,k}(x) \geqslant \alpha).$$

Якщо потрібно перевірити, що ф.р. залишків належить сім'ї розподілів $F_{\varepsilon,k}$, задаємо набір рівнів $\alpha_1,...,\alpha_N \in [0,1]$. На діаграмі відображаються точки з координатами $Q^{\hat{F}_{\varepsilon,k}}(\alpha_i)$ по горизонталі, і $Q^{F_{\varepsilon,k}}(\alpha_i)$ по вертикалі, $i \in 1,...,N$. Тут $Q^{F_{\varepsilon,k}}(\alpha)$ - квантиль розподілу $F_{\varepsilon,k}$ із рівнем α. Додатково на діаграмі проводиться пряма зі зміщенням 0 і коефіцієнтом нахилу 1.

На основі (2) можна також побудувати оцінку для дисперсії похибки регресії k-того компонента суміші.

$$\hat{\sigma}_k^2(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} a_{i:n}^{(k)}[Y_i - g(X_i,\gamma)]^2.$$

Тоді статистика $\hat{\sigma}_k^2(\hat{b}_n^{(k)})$ - оцінка дисперсії залишків k-го компонента.

6 Консистентність оцінки дисперсії залишків

Для доведення консистентності $\hat{\sigma}_k^2(\hat{b}_n^{(k)})$ буде використане наступне твердження з [9]:

Твердження 1

Припустимо що $\det\Gamma_\infty > 0$. Тоді

1 . $\sup_{j=1,\bar{n},k=1,\bar{M}} |a_{j:n}^{(k)}| = O(n^{-1})$

2 . $\sup_{i,j=1,\bar{n},k=1,\bar{M},i\neq j} |a_{j:n}^{(k)} - a_{j:i-}^{(k)}| = O(n^{-2})$

Твердження 1 з [12] дає приклади умов консистентності оцінок $\hat{b}_n^{(k)}$. Наступна теорема доводить консистенту збіжність оцінок $\hat{\sigma}_k^2(\hat{b}_n^{(k)})$ до параметрів σ_k^2.

Теорема

Нехай $\hat{b}_n^{(k)} \to^P b^{(k)}$, і $\forall\gamma \in \Theta\ \exists\mathbb{E}[\varepsilon_\cdot^{(k)}]^4 < \infty$ та $\exists\mathbb{E}g(X_\cdot^{(k)},\gamma)^4 < \infty$. Тоді $\forall\alpha > 0$ має місце місце відношення:

$$\hat{\sigma}_k^2(\hat{b}_n^{(k)}) - \sigma_k^2 -$$

$$\mathbb{E}_k[g(X_\cdot^{(k)},\gamma) - g(X_\cdot^{(k)},b^{(k)})]^2|_{\gamma=\hat{b}_n^{(k)}} = o_P(n^{-1/2+\alpha}) \tag{3}$$

Якщо додатково припустити рівноступеневу неперервність $g(x,\gamma)$ у деякому околі точки $\gamma = b_k$ і неперервність по x, то:

$$\hat{\sigma}_k^2(\hat{b}_n^{(k)}) - \sigma_k^2 = o_P(1) \tag{4}$$

Доведення. Для доведення буде використано наступне твердження з [11].

Твердження 2

Нехай ξ_n - послідовність випадкових величин, для якої існує перший момент $\mathbb{E}\xi_n$ і додатна дисперсія $\mathbb{D}\,\xi_n$. Тоді:

$$\xi_n - \mathbb{E}\xi_n = O_P([\mathbb{D}\,\xi_n]^{1/2}).$$

Щоб довести рівність (3) знайдемо математичне сподівання $\mathbb{E}\hat{\sigma}_k^2(\gamma)$, оцінимо дисперсію $\mathbb{D}\,\hat{\sigma}_k^2(\gamma)$, і застосуємо Твердження 2.

Запишемо перший момент оцінки дисперсії похибок в іншому вигляді:

$$\mathbb{E}\hat{\sigma}_k^2(\gamma) = \sum_{i=1}^n a_{i:n}^{(k)}\mathbb{E}[Y_i - g(X_i,\gamma)]^2 =$$

$$\sum_{i=1}^n a_{i:n}^{(k)}\sum_{t=1}^M p_i^t\mathbb{E}_t[Y_\cdot^{(t)} - g(X_\cdot^{(k)},\gamma)]^2 =$$

$$\sum_{t=1}^M \mathbb{E}_t[Y_\cdot^{(t)} - g(X_\cdot^{(k)},\gamma)]^2\sum_{i=1}^n a_{i:n}^{(k)}p_i^t =$$

$$\mathbb{E}_k[Y_\cdot^{(k)} - g(X_\cdot^{(k)},\gamma)]^2 \tag{5}$$

Остання рівність випливає з із властивості незміщеності коефіцієнтів $a_{i:n}^{(k)}$:

$\sum_{i=1}^n a_{i:n}^{(k)}p_i^t = I[k=t]$,

що детальніше описана у [10]. З виразу (5) можна виокремити параметр дисперсії залишків σ_k^2, якщо згадати про центрованість похибки $\varepsilon_\cdot^{(k)}$ і, що $Y_\cdot^{(k)} = g(X_\cdot^{(k)},b^{(k)}) + \varepsilon_\cdot^{(k)}$. Тоді:

$$\mathbb{E}\hat{\sigma}_k^2(\gamma) = \mathbb{E}_k[Y_\cdot^{(k)} - g(X_\cdot^{(k)},\gamma)]^2 =$$

$$\sigma_k^2 + \mathbb{E}_k[g(X_\cdot^{(k)},b^{(k)}) - g(X_\cdot^{(k)},\gamma)]^2$$

Далі оцінимо дисперсію статистики $\hat{\sigma}_k^2(\gamma)$. Якщо винести суму і навантаження зі знаку дисперсії, то

$\mathbb{D}\,\hat{\sigma}_k^2(\gamma) = \sum_i^n |a_{i:n}^{(k)}|^2\,\mathbb{D}[Y_i - g(X_i,\gamma)]^2$.

За припущенням теореми усі дисперсії існують і скінченні. Зауважимо, що використання Твердження 1 для мінімаксних коефіцієнтів дає відношення $\sum_i^n |a_{i:n}^{(k)}|^2 = O(n^{-1})$. Це означатиме, що $\mathbb{D}\,\hat{\sigma}_k^2(\gamma) = O(n^{-1}) = o(n^{2\alpha-1}), \forall\alpha > 0$.

У результаті застосування Твердження 2, маємо $\forall\gamma\in\Theta, \forall\alpha > 0$:

$$\hat{\sigma_k}^2(\gamma) - \sigma_k^2 - \mathbb{E}_k[g(X_\cdot^{(k)},\gamma) - g(X_\cdot^{(k)},b^{(k)})]^2 = o_P(n^{\alpha-1/2})),$$

і це доводить відношення (3) при підставленні $\gamma = \hat{b}_n^{(k)}$.

Доведемо відношення (4). Для цього покажемо, що $R(\gamma) = \mathbb{E}_k[g(X_\cdot^{(k)},\gamma) - g(X_\cdot^{(k)},b^{(k)})]^2$ неперервна у $b^{(k)}$. З рівноступеневої неперервності $g(x,\gamma)$ у точці $\gamma = b_k$:

Для довільного $\lambda > 0$, існує $\delta > 0$, для всіх $x \in \mathbb{R}^d$ і для всіх γ із околу $b^{(k)}$ таких, що $|\gamma - b^{(k)}| < \delta$, випливає:

$$|g(x,\gamma) - g(x,b^{(k)})| < \lambda \tag{6}$$

Отже, з (6) отримуємо

$$|R(\gamma)| = |\mathbb{E}_k[g(X_\cdot^{(k)},\gamma) - g(X_\cdot^{(k)},b^{(k)})]^2| =$$

$$|\int_{R^d}[g(x,\gamma) - g(x,b^{(k)})]^2 dF_k(x)| < \varepsilon^2\int_{R^d} dF_k(x) = \varepsilon^2$$

Тобто $R(\gamma)$ є неперервною у точці $b^{(k)}$. За припущенням консистентності оцінок $\hat{b}_n^{(k)} \to^P b^{(k)}$, $R(\hat{b}_n^{(k)}) \to^P R(b^{(k)}) = 0$. Тому з (3) випливає (4). □

7 Моделювання

Було проведено серію із $H = 1000$ експериментів для різних розмірів вибірки. Цими експериментами перевірялася консистентність оцінки $\hat{\sigma}_k^2(\hat{b}_n^{(k)})$ у рівності (4) та її уточнення у рівності (3). Для цього було пораховано середнє абсолютне зміщення справжніх параметрів від їх оцінок у (4) і окремо з уточненням (3). Додатково рахувалася і дисперсія отриманих оцінок для рівності (4).

Номера компонент генерованих об'єктів $\kappa_i = \kappa(O_i), i = 1, ..., n$ обиралися відповідно до векторів розподілу $(p_i^1, ..., p_i^M)_{i=1}^n$. Тут p_i^k - ймовірності, що згенеровані наступною процедурою:

$$p_i^k = \frac{u_i^k}{\sum_{t=1}^M u_i^t}; u_i^t \sim U[0,1]$$

Для моделювання регресії використовувалась логістична модель.

$$g(X, \gamma) = \frac{1}{1+e^{-\gamma_0 - \gamma_1 X_1}}$$

. Характеристики, які спостерігаються для m-го компонента суміші $\xi_i^{(m)} = (Y_i^{(m)}, X_i^{(m)})$ генерувалися наступним чином:

$$Y_i^m = g(X_i^m, b^{(m)}) + \varepsilon_i^{(m)}$$

$$X_i^{(m)} \simeq N(\mu^{(m)}, \Sigma^{(m)}).$$

$$\varepsilon_i^{(m)} \simeq N(0, \sigma_k^2)$$

Параметри розподілів та регресії наведені у Таблиці 1.

	компонент	
	1	2
$\mu^{(m)}$	0.0	1.0
$\Sigma^{(m)}$	2.0	2.0
$b_0^{(m)}$	0.5	0.5
$b_1^{(m)}$	2	-1/3
σ_k^2	0.05	0.05

Таблиця 1

Результати моделювання для рівності (3) при $\alpha = 0.25$ і рівності (3) наведено у таблиці 2.

Дисперсії оцінок $\hat{\sigma}_k^2(\hat{b}_n^{(k)})$ наведені у таблиці 3.

	рівність (3), $\alpha = 0.25$		рівність (4)	
n\Компонент	1	2	1	2
100	0.039	0.050	0.01615	0.0099
500	0.0268	0.0191	0.0058	0.0044
1000	0.0145	0.0152	0.0027	0.0028
5000	0.0090	0.0101	0.00099	0.00122
7500	0.0077	0.0097	0.00092	0.00091
10000	0.0073	0.0089	0.00068	0.00076

Таблиця 2. Зміщення

n\Компонент	1	2
100	0.0048	0.00021
500	1.88e-3	4.31e-5
1000	3.005e-5	2.17e-5
5000	3.61e-6	5.03e-6
7500	2.89e-6	3.02e-6
10000	1.68e-6	2.15e-6

Таблиця 3. Дисперсії оцінок

8 Застосування до соціологічних даних

Для демонстрації діаграми квантиль проти квантиля і оцінки дисперсії залишків було обрано соціологічні дані. У нашому прикладі це - результати зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) за 2016 рік (див [13]), яке складають абітурієнти у виші. Спостережувані характеристики: результати іспитів із математики (регресор) та української мови і літератури (відгук). Абітурієнтів, які подолали мінімальний поріг усього 94 тисячі особи. Ми розглянули випадок, коли функція залежності - логістична:

$$g(X,\gamma) = \frac{1}{1+e^{-\gamma_0-\gamma_1 X_1}}$$

Оскільки результати іспитів - це числа в інтервалі від 100 до 200, то вони були переведені в інтервал від 0 до 1 відніманням і діленням на 100.

Додатково для кожного абітурієнта спостерігається область, у якій він складав іспит. Це знання необхідне для побудови концентрацій компонент. Кожна з компонент у суміші - це українські політичні течії 2014 року, що об'єднані у 3 групи:

1 Коаліція (проукраїнські): БПП, Народний Фронт, Батьківщина, Радикальна партія, Самопоміч.

2 Опозиція (контрукраїнські): Опозиційний блок, маленькі партії, проти всіх.

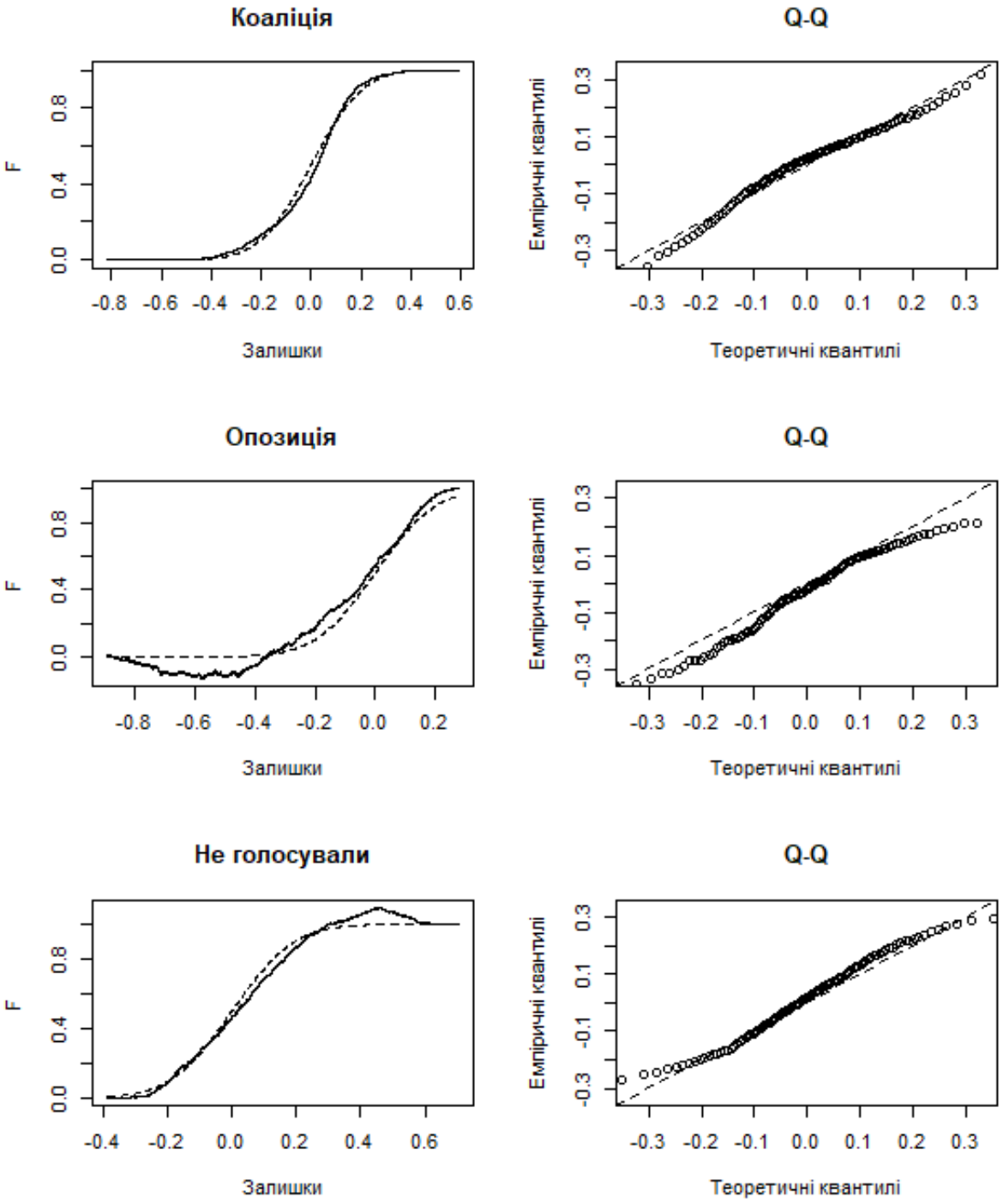
3 Не зацікавлені у політиці, - громадяни, що не проголосували.

Частку отриманих голосів під час парламентських виборів 2014 року по різних областях вважатимемо концентраціями компонент. Далі кожному абітурієнту поставили у відповідність концентрації течій по назві області в якій вони складали іспити.

Наведеної інформації достатньо, щоб побудувати мінімаксні навантаження, і оцінити параметри регресі. Оцінки параметрів регресії і оцінка дисперсії залишків наведені у Таблиці 3. За цими параметрами та мінімаксними навантаженнями були оцінені функції розподілу залишків і побудовані діаграми квантиль проти квантиля у припущенні що апріорний розподіл залишків має гаусів розподіл.

Графіки першої колонки - порівняння оцінки функції розподілу компонент (суцільна лінія) і нормального розподілу (пунктиром) із відповідною дисперсією σ_k^2. У другій колонці зображені діаграми квантиль проти квантиля для оцінок розподілів і нормального розподілу.

Як видно з діаграми, квантилі гаусової функції розподілу з оціненою дисперсією схожі на квантилі оцінених розподілів. Це каже нам про те, що при припущеній логістичній залежності, залишки можеть бути розподілені нормально. Для впевненості слід розробити статистичний тест перевірки гіпотез про рівність розподілів.



9 Висновки

У результаті були побудовані оцінки розподілу залишків у регресійній суміші. Це наближення було використано для побудови діаграм типу квантиль проти квантиля і оцінки дисперсії залишків. Для оцінки дисперсії залишків доведено теорему про консистентність і результати перевірені імітаційним моделюванням. Його результати показують що якість оцінок для вибірок понад 5 000 спостережень не дуже сильно відрізняються від результатів на 5 000. Знайдені оцінки застосовані для аналізу даних ЗНО та виборів 2014 року. Побудовані діаграми квантиль проти квантиля показують, розподіли залишків для логістичної функції досить близькі до нормальних розподілів. Точний результат можуть дати статистичні тести.

Список використаних джерел

1. D.M. Titterington, A.F. Smith, , U.E. Makov. Analysis of Finite Mixture Distributions / D.M. Titterington, A.F. Smith, , U.E. Makov // Wiley, New York (1985)
2. G.J. Mclachlan, D. Peel, Finite mixture models / G.J. Mclachlan, D. Peel // Wiley-Interscience (2000)
3. Grun Bettina and Leisch Friedrich: Fitting finite mixtures of linear regression models with varying & fixed effects in R. / Grun Bettina, Leisch Friedrich // In Alfredo Rizzi and Maurizio Vichi, editors, Compstat 2006 - Proceedings in Computational Statistics, pages 853-860. Physica Verlag, Heidelberg, Germany, 2006.
4. G.A.F Seber, A.J. Lee, Linear Regression Analysys / G.A.F Seber, A.J. Lee //. Wiley (2003)
5. R.E. Maiboroda, Statistical analysis of mixtures // R.E. Maiboroda / Kyiv University Publishers, Kyiv (in Ukrainian) (2003)
6. R.E. Maiboroda, D. Liubashenko, Linear regression by observations from mixture with varying concentrations // R.E. Maiboroda, D. Liubashenko / Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv, Ukraine
7. R.E. Maiboroda, O.V. Sugakova, Esitmation and classification by observations from a mixture // R.E. Maiboroda, O.V. Sugakova / Kyiv University Publishers, Kyiv, 2008. (In Ukrainian)
8. Р.Є. Майборода, О.В. Сугакова, "Тести для гіпотез про квантилі розподілів компонентів суміші"// Р.Є. Майборода, О.В. Сугакова / Теор. ймов. та мат. статист., Vol.101, Iss. pp. 157 - 168, - 2019
9. R.E. Maiboroda, O.V. Sugakova, Jackknife covariance matrix estimation for observations from mixture // R.E. Maiboroda, O.V. Sugakova / Modern Stochastics: Theory and Applications, 2019
10. R.E. Maiboroda, O.V. Sugakova, Statistics of mixtures with varying concentrations with application to DNA microarray data analysis// R.E. Maiboroda, O.V. Sugakova / Journal of nonparametric statistics. 24 , No 1 201–205 (2012)
11. Y.M. Bishop, S.E. Fienberg, P.W. Holland, Discrete Multivariate Analysis Theory and Practice // Y.M. Bishop, S.E. Fienberg, P.W. Holland / Springer, 2007
12. V.O. Miroshnychenko, Generalized least squares estimates for mixture of nonlinear regressions // V.O. Miroshnychenko / Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv; Series: Physics Mathematics, 2019, 5
13. R.E. Maiboroda V.O. Miroshnichenko "Confidence ellipsoids for regression coefficients by observations from a mixture"// R.E. Maiboroda V.O. Miroshnichenko / Modern Stochastics: Theory and Applications, Vol.5, Iss.2 pp. 225 - 245, - 2018

References

1. D. M. TITTETINGTON, A. F. SMITH, U. E. MAKOV (1985) Analysis of Finite Mixture Distributions. Wiley, New York
2. G.J. MCLACHLAN, D.Peel (2000) Finite mixture models. Wiley-Interscience
3. B. GRUNAND F.LEISCH (2006) Fitting finite mixtures of linear regression models with varying & fixed effects in R. In Alfredo Rizzi and Maurizio Vichi, editors, Compstat 2006 - Proceedings in Computational Statistics, pages 853-860. Physica Verlag, Heidelberg, Germany, 2006
4. G.A.F. SEBER, A.J.LEE (2003) Linear Regression Analysys. Wiley
5. R.E MAIBORODA (2003) Statistical analysis of mixtures. Kyiv University Publishers, Kyiv (in Ukrainian)
6. R.E MAIBORODA, D. LIUBASHENKO (2015) Linear regression by observations from mixture with varying concentrations, Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv, Ukraine
7. R.E. MAIBORODA, O.V. SUGAKOVA (2008) Esitmation and classification by

observations from a mixture, Kyiv University Publishers, Kyiv, 2008. (In Ukrainian)

8. R.E. MAIBORODA, O.V. SUGAKOVA (2019) "Тести для гіпотез про квантилі розподілів компонентів суміші". Теор. ймов. та мат. статист., Vol.101, Iss. pp. 157 - 168, - 2019

9. R.E. MAIBORODA, O.V. SUGAKOVA (2019) Jackknife covariance matrix estimation for observations from mixture, Modern Stochastics: Theory and Applications, 2019

10. R.E. MAIBORODA, O.V. SUGAKOVA (2012) Statistics of mixtures with varying concentrations with application to DNA microarray data analysis. Journal of nonparametric statistics. 24 , No 1 201–205 (2012)

11. Y.M. BISHOP, S.E. FIENBERG, P.W. HOLLAND (2007) Discrete Multivariate Analysis Theory and Practice, Springer,

12. V.O. MIROSHNYCHENKO (2019). Generalized least squares estimates for mixture of nonlinear regressions, Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv; Series: Physics Mathematics, 2019, 5

13. R.E. MAIBORODA, V.O. MIROSHNYCHENKO (2018) "Confidence ellipsoids for regression coefficients by observations from a mixture". Modern Stochastics: Theory and Applications, Vol.5, Iss.2 pp. 225 - 245, - 2018

Received: 18.06.2019

УДК 519.21. https://doi.org/10.17721/1812-5409.2019/3.2

Пашко А.О.[1], д.ф.-м.н., проф.
Синявська О.О.[2], к.ф.-м.н., доцент

Бактерівські оцінки параметра Хюрста дробового броунівського руху

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул. Володимирська 64/13,
e-mail:aap2011@@ukr.net,
[2]Ужгородський національний університет, 88000, м. Ужгород, пл. Народна, 3,
e-mail: olja_synjavska@ukr.net

A. O. Pashko[1], Dr. Sci., Prof.,
O. O. Synyavska[2], PhD., Asist. Prof.,

Baxter estimates of the Hurst parameter of fractional Brownian motion

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: aap2011@@ukr.net,
[2]Uzhgorod National University,
88000Uzhorod, Narodna Square, 3
e-mail: olja_synjavska@ukr.net

В роботі отримані консистентні оцінки параметра Хюрста дробового броунівського руху та побудовані довірчі інтервали отриманих оцінок.

В багатьох прикладних задачах, що пов'язані з обробкою даних, необхідно оцінювати параметр Хюрста. Серед таких задач - задача обробки і аналізу сигналів, коли сигнал можна розглядати як накладення корисного сигналу і фонового шуму. Фоновий шум є, як правило, комбінацією стохастичної і фрактальної складових. Числовими показниками зазначених властивостей є, відповідно, показник Хюрста, індекс стійкості, коефіцієнти взаємозв'язку інкрементів, які узагальнюють автокореляційну функцію. Очевидно, що оцінка індексу Хюрста є пріоритетним завданням при аналізі самоподібних процесів.

В даний час існує безліч методів оцінки параметра Хюрста, але всі вони орієнтовані на окремі випадки процесів, коли властивість самоподібності поєднується або з тривалою залежністю (дробовий броунівський рух), або з важкими хвостами.

При оцінці параметра Хюрста найбільш часто використовуються RS-аналіз, дисперсно-часовий аналіз і аналіз відхилень. Загальною властивістю цих методів є те, що всі вони засновані на використанні статистичних властивостей вибірок другого порядку (дисперсії, середньоквадратичного відхилення, коефіцієнтів кореляції).

Ключові слова: індекс Хюрста, дробовий броунівський рух,консистентна оцінка.

In the paper consistent estimates of the Hurst parameter of fractional Brownian motion are obtained and confidence intervals of the obtained estimates are constructed.

In many applications related to data processing, it is necessary to estimate the Hurst parameter. Among such tasks is the task of signal processing and analysis, when the signal can be considered as the imposition of a useful signal and background noise. Background noise is usually a combination of stochastic and fractal components.

Numerical indicators of these properties are, respectively, the Hurst index, the stability index, the coefficients of the relationship of increments, which generalize the autocorrelation function. Obviously, the estimation of the Hurst index is a priority in the analysis of self-similar processes.

Currently, there are many methods for estimating the Hurst parameter, but they are all focused on individual cases of processes where the property of self-similarity is combined with either long-term dependence (fractional Brownian motion), or with heavy tails.

RS-analysis, disperse-time analysis and deviation analysis are most often used in estimating the Hurst parameter. A common feature of these methods is that they are all based on the use of statistical properties of second-order samples (variance, standard deviation, correlation coefficients).

Key Words: Hurst index, fractional Brownian motion, consistent estimate.

Стаття представлена Розорою І.В., канд. фіз.-мат. наук, доцент.

© Пашко А.О., Синявська О.О., 2019

Вступ

У граничних теоремах для випадкових процесів можна виділити окремо теореми бакстерівського типу. Бакстерівськими сумами називають послідовності сум нелінійних функцій від приростів випадкових процесів. За певних умов послідовності бакстерівських сум збігаються у тому чи іншому сенсі до невипадкової сталої. Теореми, в яких встановлюється така збіжність, називаються теоремами Леві-Бакстера або теоремами бакстерівського типу.

Робота присвячена застосуванню методу бакстерівських сум для оцінювання параметра Хюрста дробового броунівського руху.

Статистичному оцінюванню у моделях з дробовим броунівським рухом присвячена багато робіт. В роботі [1] наведено огляд літератури і аналіз задач з використанням бакстерівського підходу.

В роботі отримані консистентні оцінки параметра Хюрста.

Оцінки параметра Хюрста використовуються в багатьох прикладних задачах [2, 3].

Консистентні оцінки параметра Хюрста.

Нехай $B=\{B_t,\ t\ge 0\}$ – дробовий броунівський рух з параметром Хюрста α – гауссовий випадковий процес з нульовим середнім значенням та кореляційною функцією

$$r(s,t)=\frac{1}{2}\left(|s|^{2\alpha}+|t|^{2\alpha}-|s-t|^{2\alpha}\right),\ s,t\ge 0.$$

Припустимо, що параметр Хюрста α – невідомий, такий що $\alpha\in(0,\alpha^*]$, де $\alpha^*\in(0,1)$ – фіксоване. Також, припустимо, що випадковий процес $B=\{B_t,\ t\ge 0\}$ спостерігається в точках $\left\{\frac{k}{a_n}, 0\le k\le a_n\right\}$, де $a_n\in \mathrm{N}$, $n\ge 1$; $a_n\to\infty$, $n\to\infty$.

Припустимо, що для довільного $\beta>0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{-\beta}$ – збіжний.

Нехай для натурального числа p, $\Delta B_{k,n}^{(p)}$ – приріст p-го порядку дробового броунівського руху B, $k=0,...,a_n-1$. Так, зокрема,

$$\Delta B_{k,n}^{(1)}=B_{\frac{k+1}{a_n}}-B_{\frac{k}{a_n}},$$

$$\Delta B_{k,n}^{(2)}=B_{\frac{k+2}{a_n}}-2B_{\frac{k+1}{a_n}}+B_{\frac{k}{a_n}},$$

$$\Delta B_{k,n}^{(3)}=B_{\frac{k+3}{a_n}}-3B_{\frac{k+2}{a_n}}+3B_{\frac{k+1}{a_n}}-B_{\frac{k}{a_n}},$$

.....,

$$\Delta B_{k,n}^{(p)}=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i C_p^i B_{\frac{k}{n}+\frac{p-i}{n}}.$$

Розглянемо послідовності бакстерівських сум для дробового броунівського руху B_H:

$$\widehat{S}_n^{(p)}=a_n^{2\alpha-1}\sum_{k=0}^{a_n-1}\left(\Delta B_{k,n}^{(p)}\right)^2, \qquad (1)$$

$$S_n^{(p)}=a_n^{2\alpha-1}\widehat{S}_n^{(p)},$$

$n\ge 1$.

Покладемо

$$V_p(k,\alpha)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^{p}(-1)^{i+j+1}C_p^i C_p^j\left|k+(i-j)\right|^{2\alpha}, \qquad (2)$$

$k\ge 0,\ p\ge 1$.

Зокрема,

$$V_1(0,\alpha)=1;\quad V_2(0,\alpha)=4-4^{\alpha}; \qquad (3)$$

$$V_3(0,\alpha)=15+3^{2\alpha}-6\cdot 2^{2\alpha}. \qquad (4)$$

Безпосередній підрахунок дозволяє отримати наступні формули для математичного сподівання та дисперсії випадкової величини $\widehat{S}_n^{p}$, $p\ge 1$ [1]:

$$E\widehat{S}_n^{(p)}=V_p(0,\alpha); \qquad (5)$$

$$\mathrm{Var}\,\widehat{S}_n^{(p)}=\frac{1}{n}\left(2V_p^2(0,\alpha)+4\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)V_p^2(k,\alpha)\right). \qquad (6)$$

Теорема 1. Статистика

$$\hat{\alpha}_n^{(1)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\ln S_n^{(1)}}{\ln a_n}\right),\ n\ge 1 \qquad (7)$$

є сильно консистентною оцінкою параметра Хюрста α.

Доведення. Нехай $p=1$, тоді із рівностей (1) та (2) отримаємо, що

$$ES_n^{(1)}=E\sum_{k=0}^{a_n-1}\left(B_{\frac{k+1}{a_n}}-B_{\frac{k}{a_n}}\right)^2= \qquad (8)$$

$$=\sum_{k=0}^{a_n-1}E\left(B_{\frac{k+1}{a_n}}^2-2B_{\frac{k+1}{a_n}}B_{\frac{k}{a_n}}+B_{\frac{k}{a_n}}^2\right)=$$

$$= \sum_{k=0}^{a_n-1}\left(\left|\frac{k+1}{a_n}\right|^{2\alpha} - \left(\left|\frac{k+1}{a_n}\right|^{2\alpha} + \left|\frac{k}{a_n}\right|^{2\alpha} - \left|\frac{1}{a_n}\right|^{2\alpha}\right) + \right.$$

$$\left. + \left|\frac{k}{a_n}\right|^{2\alpha}\right) = a_n^{1-2\alpha}.$$

З останньої рівності випливає, що $E\widehat{S}_n^{(1)} = a_n^{2\alpha-1} ES_n^{(1)} = 1$. Тобто, дійсно, $E\widehat{S}_n^{(1)} = V_1(0,H) = 1$.

Для знаходження оцінки дисперсії $\mathrm{D}\,\widehat{S}_n^{(1)}$ використаємо наступну лему.

Лема 1. [1] Нехай $B = \{B_t,\ t \ge 0\}$ – дробовий броунівський рух з параметром Хюрста $\alpha \in (0, \alpha^*]$. Тоді при $\alpha^* \in (0,1)$ справедлива наступна нерівність:

$$\sup_{\alpha \in (0,\alpha^*]} \mathrm{D}\,\widehat{S}_n^{(1)} \le \frac{D_1}{a_n},$$

де

$$D_1 = \begin{cases} 2\left(3 + 2\zeta\left(4 - 4\alpha^*\right)\right), \alpha^* \in \left(0, \frac{3}{4}\right), \\ 2\left(3 + 2\left(1 + \ln a_n\right)\right), \alpha^* = \frac{3}{4}, \\ 2\left(3 + 2\frac{a_n^{4\alpha^*-3}}{4\alpha^* - 3}\right), \alpha^* \in \left(\frac{3}{4}, 1\right), \end{cases} \qquad (9)$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},\ s > 1.$$

З припущення про збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-\gamma}$ для будь-якого $\gamma > 0$ випливає, що для довільних $\alpha < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{D}\,\widehat{S}_n^{(1)} < +\infty$, а тому із [4] випливає збіжність $\widehat{S}_n^{(1)} - E\widehat{S}_n^{(1)} \to 0, n \to \infty$ з ймовірністю одиниця. Звідси отримаємо:

$$\widehat{S}_n^{(1)} = a_n^{2\alpha-1} S_n^{(1)} \to 1,\ n \to \infty,$$

$$(2\alpha - 1) + \frac{\ln S_n^{(1)}}{\ln a_n} \to 0, n \to \infty,$$

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\ln S_n^{(1)}}{\ln a_n}\right) \to \alpha$$

з ймовірністю одиниця при $n \to \infty$.

Отже, статистика (7) є сильно консистентною оцінкою параметра α. □

Аналогічно, можна показати, що статистики $\widehat{\alpha}_n^{(p)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\ln S_n^{(p)}}{\ln a_n}\right)$, $p \ge 2$ є сильно консистентними оцінками параметра Хюрста α.

Лема 2. Нехай $B = \{B_t,\ t \ge 0\}$ – дробовий броунівський рух з параметром Хюрста α. Тоді виконується нерівність:

$$\sup_{\alpha \in (0,1)} D\widehat{S}_n^{(p)} \le \frac{D_p}{a_n},$$

де

$$D_p = 2\left(K_p + \frac{1}{2}L_p + \frac{1}{2}M_p^2\zeta(4p-4)\right),$$

$$V_p(m,\alpha) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^{p}(-1)^{i+j+1}C_p^i C_p^j \left|m + (i-j)\right|^{2\alpha},\ k \ge 0,$$

$$K_p = \sup_{\alpha \in (0,1)} V_p^2(0,\alpha),$$

$$L_p = \sup_{\alpha \in (0,1)} V_p^2(1,\alpha),$$

$$M_p = \sup_{\alpha \in (0,1)} \left|2\alpha(2\alpha-1)(2\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(2\alpha-(2p-1))\right|,$$

$p \ge 2$,

$\zeta(\cdot)$ – дзета-функція Рімана. (9)

Доведення. Знайдемо дисперсію випадкової величини $\widehat{S}_n^{(p)}$, *p = 2; 3,*

$$\mathrm{D}\,S_n^{(p)} = E\left(\sum_{k=0}^{a_n-1}\left(\Delta B_{k,n}^{(p)}\right)^2\right)^2 - \left(E\sum_{k=0}^{a_n-1}\left(\Delta B_{k,n}^{(p)}\right)^2\right)^2 =$$

$$= 2\sum_{k=0}^{a_n-1}\left(E\left(\Delta B_{k,n}^{(p)}\right)^2\right)^2 + 4\sum_{\substack{k,l=0 \\ k>l}}^{a_n-1}\left(E\Delta B_{k,n}^{(p)}\Delta B_{l,n}^{(p)}\right)^2. \qquad (10)$$

Тоді, обчислюючи математичне сподівання добутку приростів *p*–го порядку дробового броунівського руху з нульовим середнім значенням та кореляційною функцією $r(s,t)$:

$$E\Delta B_{k,n}^{(p)}\Delta B_{l,n}^{(p)} = \frac{1}{2}a_n^{-2\alpha} \times$$

$$\times \sum_{i,j=0}^{p}(-1)^{i+j+1}C_p^i C_p^j \left|(k-l) + (i-j)\right|^{2\alpha}, \qquad (11)$$

$$0 \le k, l \le a_n - 1,$$

де $C_p^i = \frac{p!}{i!(p-i)!}$, $p \ge 2$. (12)

Позначимо

$$V_p(k-l,\alpha)=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^{p}(-1)^{i+j+1}C_p^iC_p^j\left|k-l+(i-j)\right|^{2\alpha}, \quad (13)$$
$$k,l\geq 0.$$

При $k = l$ маємо $E\left(\Delta B_{k,n}^{(p)}\right)^2=a_n^{-2\alpha}V_p(0,\alpha)$.

Покладемо $k-l=m, 1\leq m\leq a_n-1$. Тоді із формул (10)–(13) випливає:

$$\mathrm{D}\,S_n^{(p)}=$$
$$=2\left(a_n\left(a_n^{-2\alpha}V_p(0,\alpha)\right)^2+2\frac{a_n^{-4\alpha}}{4}\sum_{\substack{k,l=0\\k>l}}^{a_n-1}V_p^2(k-l,\alpha)\right)=$$
$$=2\left(a_n^{1-4\alpha}V_p^2(0,\alpha)+\frac{a_n^{-4\alpha}}{2}\sum_{m=1}^{a_n-1}(a_n-m)V_p^2(m,\alpha)\right)\leq$$
$$\leq 2a_n^{1-4\alpha}\times$$
$$\times\left(V_p^2(0,\alpha)+\frac{1}{2}V_p^2(1,\alpha)+\frac{1}{2}\sum_{m=2}^{a_n-1}V_p^2(m,\alpha)\right). \quad (14)$$

Зауважимо, що при $p = 2$ та $p = 3$ із співвідношень (3)–(4) отримаємо, що:

$$V_2(m,\alpha)=6m^{2\alpha}-4\left|m+1\right|^{2\alpha}+\left|m+2\right|^{2\alpha}-$$
$$-4\left|m-1\right|^{2\alpha}+\left|m-2\right|^{2\alpha},$$
$$V_3(m,\alpha)=20m^{2\alpha}-15\left|m+1\right|^{2\alpha}+6\left|m+2\right|^{2\alpha}-$$
$$-\left|m+3\right|^{2\alpha}-15\left|m-1\right|^{2\alpha}+$$
$$+6\left|m-2\right|^{2\alpha}-\left|m-3\right|^{2\alpha},$$
$$m\geq 1.$$

Оскільки, функція $V_p(m,\alpha)$ є приростом $2p$–го порядку функції $f(x)=x^{2\alpha}, x\geq 1$, $\alpha\in(0,1)$ на відрізку $[m-p,m+p]$, то з формули для приросту n-го порядку функції $f(x)$ [5] одержимо, що

$$\Delta^{(n)}f(x)=f^{(n)}(\theta_m)\cdot\Delta x^n=2\alpha(2\alpha-1)\theta_l^{2\alpha-2},$$

де $\theta_m\in(m-p,m+p)$,

$f(x)$ така, що має n-1 неперервних похідних $f'(x), f''(x),..., f^{(n-1)}(x)$ на відрізку $[m-p,m+p]$ і скінченну n–ту похідну $f^{(n)}(x)$ на інтервалі $(m-p,m+p)$,

$\Delta^{(n)}f(x)$ – приріст n–го порядку $f(x)$, $\theta_m\in(m-p,m+p)$;

одержимо для $n = 2p$; $p = 2$; 3, що:

$$V_p(m,\alpha)=f^{(2p)}(\theta_m)\cdot 1^{2p}=$$
$$=2\alpha(2\alpha-1)(2\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(2\alpha-(2p-1))\theta_m^{2\alpha-2p}.$$

Для $m-1<\theta_m, m\geq 2$ маємо:

$$V_p^2(m,\alpha)\leq\frac{M_p^2}{(m-1)^{2(2p-2\alpha)}},$$

де

$$M_p=\sup_{\alpha\in(0,1)}\left|2\alpha(2\alpha-1)(2\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(2\alpha-(2p-1))\right|,$$
$$p\geq 2. \quad (15)$$

При $\alpha\in(0,1)$ маємо:

$$\sum_{m=2}^{a_n-1}\frac{1}{(m-1)^{2(2p-2\alpha)}}=\zeta(4p-4\alpha)\leq\zeta(4p-4),$$

де $\zeta(\cdot)$ – дзета - функція Рімана.

З останньої нерівності та нерівності (14) випливає, що:

$$DS_n^{(p)}\leq$$
$$\leq 2a_n^{1-4\alpha}\left(K_p+\frac{1}{2}L_p+\frac{1}{2}M_p^2\sum_{m=2}^{a_n-1}\frac{1}{(m-1)^{2(2p-2\alpha)}}\right)\leq$$
$$\leq 2a_n^{1-4\alpha}\left(K_p+\frac{1}{2}L_p+\frac{1}{2}M_p^2\zeta(4p-4)\right), \quad (16)$$

де

$$K_p=\sup_{\alpha\in(0,1)}V_p^2(0,\alpha),\ L_p=\sup_{\alpha\in(0,1)}V_p^2(1,\alpha).$$

Покладемо

$$D_p=2\left(K_p+\frac{1}{2}L_p+\frac{1}{2}M_p^2\zeta(4p-4)\right),$$
$$p\geq 2. \quad (18)$$

Тоді з нерівності (16) та формул (17)–(18) отримаємо $\sup_{\alpha\in(0,1)}DS_n^{(p)}\leq a_n^{1-4\alpha}D_p$,

а для випадкової величини $S_n^{(p)}=a_n^{2\alpha-1}\widehat{S}_n^{(p)}$, $p\geq 2$ маємо $\sup_{\alpha\in(0,1)}D\widehat{S}_n^{(p)}\leq\frac{D_p}{a_n}$, де D_p, $p\geq 2$ визначено в (18). Лему доведено. □

З леми 2 та рівності (13) для $p=2$ та $p=3$ отримаємо:

$$V_2(0,\alpha)=4-4^{\alpha};\ V_3(0,\alpha)=15+3^{2\alpha}-6\cdot 2^{2\alpha}.$$

та

$$V_2(1,\alpha)=7-4\cdot 2^{2\alpha}+3^{2\alpha};$$
$$V_3(1,\alpha)=26-16\cdot 2^{2\alpha}+6\cdot 3^{2\alpha}-4^{2\alpha}.$$

Теорема 2. Нехай $B=\{B_t,\ t\geq 0\}$ – дробовий броунівський рух з параметром Хюрста α. Тоді $\widehat{S}_n^{(p)}\to V_p(0,\alpha), p\geq 1$ з ймовірністю одиниця при $n\to\infty$.

Доведення. Оскільки математичне сподівання випадкової величини $\widehat{S}_n^{(p)}, p\geq 1$:

$E\widehat{S}_n^{(p)} = V_p(0,\alpha)$, то з лем 1, 2 та збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-\beta}, \beta > 0,$ випливає, що для довільного $\alpha \in (0,1)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} D\widehat{S}_n^{(p)}$ збігається. Тому $\widehat{S}_n^{(p)} - E\widehat{S}_n^{(p)} \to 0$ з ймовірністю одиниця при $n \to \infty$ [Ламперти, с. 24]. Враховуючи рівність $E\widehat{S}_n^{(p)} = V_p(0,\alpha)$, отримаємо твердження теореми. □

Довірчі інтервали

Теорема 3. Інтервал $\left(\widehat{\alpha}_n^{(p)} - l_\varepsilon(n), \widehat{\alpha}_n^{(p)} + r_\varepsilon(n)\right) \cap (0,1)$, де

$$\widehat{\alpha}_n^{(p)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\ln S_n^{(p)}}{\ln a_n}\right),$$

$$l_\varepsilon(n) \geq -\frac{1}{2}\frac{\ln\left(1 - \sqrt{\frac{2D_p}{a_n\varepsilon}}\right)}{\ln a_n}$$

за умови, що $\sqrt{\frac{2D_p}{\varepsilon}} < 1$,

$$r_\varepsilon(n) \geq \frac{1}{2}\frac{\ln\left(\sqrt{\frac{2D_p}{a_n\varepsilon}} + 1\right)}{\ln a_n},$$

$S_n^{(p)}$ визначено рівністю (1), D_p визначено при $p=1$ співвідношенням (9), а при $p \geq 2$ – співвідношенням (18), є довірчим інтервалом для параметра Хюрста α з рівнем довіри $1-\varepsilon \in (0,1)$.

Доведення. Нехай $(1-\varepsilon) \in (0,1)$ – заданий коефіцієнт довіри. Знайдемо відповідні додатні числа $r_\varepsilon(n)$ та $l_\varepsilon(n)$, такі, що

$$P\left\{\alpha > \widehat{\alpha}_n^{(p)} + r_\varepsilon(n)\right\} \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ та}$$

$$P\left\{\alpha < \widehat{\alpha}_n^{(p)} - l_\varepsilon(n)\right\} \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

де $\widehat{\alpha}_n^{(p)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\ln S_n^{(p)}}{\ln a_n}\right)$,

$S_n^{(p)}$ визначено рівністю (1).

Тоді матимемо нерівність

$$P\left\{\widehat{\alpha}_n^{(p)} - l_\varepsilon(n) < \alpha < \widehat{\alpha}_n^{(p)} + r_\varepsilon(n)\right\} \geq 1-\varepsilon, \quad (19)$$

яка означає, що інтервал $\left(\widehat{\alpha}_n^{(p)} - l_\varepsilon(n), \widehat{\alpha}_n^{(p)} + r_\varepsilon(n)\right) \cap (0,1)$ є інтервалом надійності для параметра Хюрста α з коефіцієнтом довіри $1-\varepsilon$. Тоді з вигляду статистики $\widehat{\alpha}_n^{(p)}$ та рівності (1), маємо:

$$P\left\{\widehat{\alpha}_n^{(p)} + r_\varepsilon(n) < \alpha\right\} =$$
$$= P\left\{S_n^{(p)} - ES_n^{(p)} > a_n^{1-2\alpha} \cdot \left(a_n^{2r_\varepsilon(n)} - 1\right)\right\} \leq$$
$$\leq P\left\{\left|S_n^{(p)} - ES_n^{(p)}\right| > a_n^{1-2\alpha} \cdot \left(a_n^{2r_\varepsilon(n)} - 1\right)\right\} =$$
$$= P\left\{\left|\widehat{S}_n^{(p)} - E\widehat{S}_n^{(p)}\right| > a_n^{2r_\varepsilon(n)} - 1\right\} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Зауважимо, що для будь-якого $n \geq 1$ вираз $a_n^{2r_\varepsilon(n)} - 1 > 0$ при $r_\varepsilon(n) > 0$. Тоді з нерівності Чебишова та оцінки для дисперсії $D\widehat{S}_n^{(p)}, p \geq 1$ випливає, що

$$P\left\{\left|\widehat{S}_n^{(p)} - E\widehat{S}_n^{(p)}\right| > a_n^{2r_\varepsilon(n)} - 1\right\} \leq$$
$$\leq \frac{D\widehat{S}_n^{(p)}}{\left(a_n^{2r_\varepsilon(n)} - 1\right)^2} \leq \frac{D_p / a_n}{\left(a_n^{2r_\varepsilon(n)} - 1\right)^2}.$$

Далі, для α визначимо $r_\varepsilon(n)$ так, щоб

$$P\left\{\widehat{\alpha}_n^{(p)} + r_\varepsilon(n) < \alpha\right\} \leq \frac{D_p / a_n}{\left(a_n^{2r_\varepsilon(n)} - 1\right)^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Розв'яжемо останню нерівність відносно $r_\varepsilon(n)$.

Тоді $r_\varepsilon(n) \geq \frac{1}{2}\frac{\ln\left(\sqrt{\frac{2D_p}{a_n\varepsilon}} + 1\right)}{\ln a_n}$.

Тепер розглянемо нерівність $P\left\{\alpha < \widehat{\alpha}_n^{(p)} - l_\varepsilon(n)\right\} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Аналогічно до попередніх міркувань, отримаємо:

$$P\left\{\alpha < \widehat{\alpha}_n^{(p)} - l_\varepsilon(n)\right\} =$$
$$= P\left\{S_n^{(p)} - ES_n^{(p)} < a_n^{1-2\alpha} \cdot \left(a_n^{-2l_\varepsilon(n)} - 1\right)\right\} =$$
$$= P\left\{\widehat{S}_n^{(p)} - E\widehat{S}_n^{(p)} < a_n^{-2l_\varepsilon(n)} - 1\right\} \leq$$
$$\leq P\left\{\left|\widehat{S}_n^{(p)} - E\widehat{S}_n^{(p)}\right| > 1 - a_n^{-2l_\varepsilon(n)}\right\} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Зауважимо, що для будь-якого $n \geq 1$ вираз $1 - a_n^{-2l_\varepsilon(n)} > 0$ при $l_\varepsilon(n) > 0$. З нерівності Чебишова та оцінки для дисперсії $D\widehat{S}_n^{(p)}, p \geq 1$ одержимо

$$P\left\{\left|\widehat{S}_n^{(p)} - E\widehat{S}_n^{(p)}\right| > 1 - a_n^{-2l_\varepsilon(n)}\right\} \leq$$
$$\leq \frac{D\widehat{S}_n^{(p)}}{\left(1 - a_n^{-2l_\varepsilon(n)}\right)^2} \leq \frac{D_p / a_n}{\left(1 - a_n^{-2l_\varepsilon(n)}\right)^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Розв'яжемо останню нерівність відносно $l_\varepsilon(n)$ за умови, що $1-\sqrt{\frac{2D_p}{\varepsilon a_n}}>0$.

Тоді $l_\varepsilon(n)\geq -\frac{1}{2}\frac{\ln\left(1-\sqrt{\frac{2D_p}{a_n\varepsilon}}\right)}{\ln a_n}$.

Нерівність $1-\sqrt{\frac{2D_p}{a_n\varepsilon}}>0$ виконується для достатньо великих n, оскільки $D_p/a_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Теорему доведено. □

Висновки

Отримані результати можна використовувати в багатьох прикладних задачах, що пов'язані з обробкою даних. Особливе місце займає задача обробки і аналізу сигналів, коли сигнал розглядається як комбінація корисного сигналу і шуму. А шум є комбінацією стохастичної і фрактальної складових. Числовими показниками зазначених властивостей є, відповідно, показник Хюрста, індекс стійкості, коефіцієнти взаємозв'язку складових, які узагальнюють автокореляційну функцію.

При оцінці параметра Хюрста найбільш часто використовуються RS-аналіз, дисперсно-часовий аналіз і аналіз відхилень. Ці методи не дозволяють отримати якісні оцінки – незміщені, консистентні, тощо.

В роботі отримані консистентні оцінки параметра Хюрста дробового броунівського руху та побудовані довірчі інтервали.

Список використаних джерел

1. *Козаченко Ю.В.* Теореми Леві-Бакстера для випадкових полів та їх застосування / Ю.В. Козаченко, О.О. Курченко, О.О. Синявська О.О - Ужгород:Шарк, 2018.

2. *Kirichenko L.* Analysis of the properties of ordinary Levy motion based on the estimation of stability index / L. Kirichenko, V. Shergin // Int. J. "Information Content and Processing", Vol. 1, Number 2 – 2014, pp.170-181.

3. Shergin V.L. Estimation of the stability factor of alpha-stable laws using fractional moments method / V.L. Shergin // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, Vol. 6 – 2013, pp.25-30.

4. Ламперти Дж. Случайные процессы / Дж. Ламперти. - К.: Вища школа, 1983. -227 с.

5. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа / Г. М. Фихтенгольц. – Москва: Наука, 1968.

References

1. KOZACHENKO, Y.V., KURCHENKO, O.O., SYNYAVSKA, O.O. (2018) *Levy-Baxter theorems for random fields and their application.* Uzgorod: Shark.

2. KIRICHENKO, L. (2014) Analysis of the properties of ordinary Levy motion based on the estimation of stability index. *Information Content and Processing*, Vol. 1, Number, pp.170-181.

3. SHERGIN, V.L. (2013) Estimation of the stability factor of alpha-stable laws using fractional moments method. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, Vol. 6, pp.25-30.

4. FIHTENGOLZ, G.M. (1968) *Fundamentals of Mathematical Analysis.* M.: Nauka.

5. LAMPERTY, D. (1983) *Random processes.* K.: Vyshcha shkola.

Надійшла до редколегії 23.10.2018

УДК 519.21 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2019/3.3

А.О. Пашко[1], *д.ф.-м.н., професор*
Т.О. Яневич[2], *к.ф.-м.н., доцент*

Методи моделювання процесу Орнштейна-Уленбека

[1,2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64.
e-mails: [1]aap2011@ukr.net, [2]yata452@univ.kiev.ua

A.O.Pashko[1], *Dr.Sci., Professor*
T.O.Ianevych[2], *Ph.D., Associate Professor*

Methods for modeling the Ornstein-Uhlenbeck process

[1,2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv. 64 Volodymyrska st.,
e-mails: [1]aap2011@ukr.net, [2]yata452@univ.kiev.ua

У роботі вивчаються два методи моделювання випадкового процесу Орнштейна-Уленбека. Цей процес має безліч застосувань - у фізиці, фінансовій математиці, біології, тому вкрай важливою є можливість моделювати цей процес для вирішення різних теоретичних та практичних задач. Особливістю цього процесу є те, що він має багато цікавих властивостей - він є гауссовим процесом, є стаціонарним процесом, є марківським процесом, є розв'язком стохастичного рівняння Ланжевена тощо. Кожна із цих властивостей дозволяє застосовувати до цього процесу різні методи моделювання. Ми розглянули лише два методи, хоча їх є набагато більше. Один метод використовує те, що цей процес є гауссовим. Інший – базується на розкладі Фур'є. Для обох цих методів було отримано конкретні умови, коли ці моделі відповідають заданим рівням точності та надійності.

Ключові слова: процес Орнштейна-Уленбека, моделювання із заданою точністю та надійністю, центрований гауссовий процес, розклад Фур'є.

Two methods of modeling for the Ornstein-Uhlenbeck process are studied in the work. This process has many applications in physics, financial mathematics, biology. Therefore, it is extremely important to have instruments for modeling this process to solve various theoretical and practical tasks. The peculiarity of this process is that it has many interesting properties: it is Gaussian process, is a stationary process, is a Markov process, it is a solution of the Langevin stochastic equation, etc. Each of these properties allows you to apply different methods to this process modeling. We have considered only two methods, although there are many more. One method uses the fact that this process is Gaussian. Another is based on the Fourier expansion. For both of these methods there were specific conditions are obtained when these models satisfy the given levels of accuracy and reliability.

Key Words: Ornstein–Uhlenbeck process, modeling with given accuracy and reliability, centered gaussian process, Fourier series.

1 Вступ

Процес Орнштейна-Уленбека має дуже довгу та цікаву історію. Він виник як альтернатива Вінерівському процесу при побудові моделі руху зваженої частинки, що рухається в рідині. В 30-х роках двадцятого століття данські фізики-теоретики Леонард Орнштейн та Джордж Уленбек [7] запропонували модель, що враховує, на відміну від процесу Вінера, ньютонівську взаємодію частинок. Ця модель описувала поведінку частинок за допомогою рівняння Ланжевена. Невироджений розв'язок цього стохастичного рівняння і назвали процесом Орнштейна-Уленбека. Він має безліч застосувань в фізиці, фінансовій математиці, еволюційній біології тощо. Тому моделювання такого процесу має дуже важливе значення для практичний застосування у різних прикладних задачах.

Процес Орнштейна-Уленбека є стаціонарним, гауссівським та марківським. Найбільшого розповсюдження набув процес Орнштейна-Уленбека, що має нульове математичне сподівання, тобто є центрованим. Різні методи моделювання саме такого процесу ми будемо досліджувати в цій статті.

Наведемо математично строге означення цього процесу.

© А.О. Пашко, Т.О. Яневич, 2019

Означення 1.1. Процес Орнштейна-Уленбека $X(t)$ – це стаціонарний центрований гауссівський процес з кореляційною функцією

$$B(\tau) = \mathsf{E}X(t+\tau)X(t) = \sigma \exp(-\alpha|\tau|),\ \sigma, \alpha > 0.$$

При моделюванні процесу Орнштейна-Уленбека можна використовувати:

- зображення процесу Орнштейна-Уленбека як гауссівського стаціонарного процесу;
- зображення Фур'є для процесу Орнштейна-Уленбека;
- зображення процесу Орнштейна-Уленбека як процесу з дискретним спектром;
- зображення процесу Орнштейна-Уленбека як розв'язку стохастичного рівняння.

В даній статті ми докладно розглянемо перші два підходи. Два інших залишимо на майбутнє. Також варто зауважити, що наведений список методів молеювання процесу Орнштейна-Уленбека далеко не повний - ми навели лише основні. Зокрема, для перших двох підходів можна визначити певні умови, коли для моделі можна знайти умови, при яких вона буде мати задані точність та надійність. Докладніше про методи моделювання різних процесів із потрібною точністю та надійністю можна ознайомитись в книзі [5].

Означення 1.2. Нехай випадковий процес $X(t), t \in \mathrm{T}$ та його модель $X_n(t, \Lambda)$ належать деякому функціональному банаховому простору $A(\mathrm{T})$ з нормою $\|\|$. Нехай задано два числа $\delta > 0$ та $0 < \varepsilon < 1$. Модель $X_n(t, \Lambda)$ наближає процес $X(t)$ з надійністю $1-\varepsilon$ та точністю $\delta > 0$ у нормі простору $A(\mathrm{T})$, якщо має місце нерівність

$$P\{\|X(t) - X_n(t, \Lambda)\| > \delta\} \leqslant \varepsilon.$$

2 Моделювання гауссівських стаціонарних випадкових процесів

Нехай $(\mathrm{T}, \mathcal{B}, \mu)$ - деякий вимірний простір з $\mu(\mathrm{T}) = 1$.

Нехай $X(t), t \in R^+$ – гауссовий стаціонарний випадковий процес, $\mathsf{E}X(t) = 0$, $B(\tau) = \mathrm{E}X(t+\tau)X(t) = \int_0^\infty \cos(u\tau)\,\mathrm{dF}(u)$ – кореляційна функція процесу, $F(u)$ – спектральна функція. Випадковий процес $X(t), t \in R^1$ має зображення

$$X(t) = \int_0^\infty \cos(tu)\,d\zeta_1(u) + \int_0^\infty \sin(tu)\,d\zeta_2(u),$$

де $\zeta_1(u), \zeta_2(u)$ – центровані некорельовані випадкові процеси з некорельованими приростами такі, що для довільних $0 \leqslant u_1 < u_2$ має місце рівність $\mathsf{E}(\zeta_1(u_2) - \zeta_1(u_1))^2 = \mathsf{E}(\zeta_2(u_2) - \zeta_2(u_1))^2 = F(u_2) - F(u_1)$.

Для моделювання випадкового процесу для деякого $\Lambda > 0$ використаємо зображення:

$$\begin{aligned} X(t) &= \int_0^\infty \cos(tu)\,d\zeta_1(u) + \\ &+ \int_0^\infty \sin(tu)\,d\zeta_2(u) = \\ &= \int_0^\Lambda \cos(tu)\,d\zeta_1(u) + \\ &+ \int_0^\Lambda \sin(tu)\,d\zeta_2(u) + \\ &+ \int_\Lambda^\infty \cos(tu)\,d\zeta_1(u) + \\ &+ \int_\Lambda^\infty \sin(tu)\,d\zeta_2(u). \end{aligned}$$

Означення 2.1. Нехай $\Lambda > 0$, $D(\Lambda, n)$: $0 = u_0 < u_1 < \ldots < u_n = \Lambda$ – розбиття інтервалу $[0, \Lambda]$. Випадковий процес $X_n(\Lambda, t) = \sum_{i=0}^{n-1} \cos(u_i t)(\zeta_1(u_{i+1}) - \zeta_1(u_i)) + \sin(u_i t)(\zeta_2(u_{i+1}) - \zeta_2(u_i))$ називається апроксимаційною моделлю процесу $X(t)$ (А - модель).

Отже, А – модель процесу $X(t)$ можна отримати змоделювавши суму $X_n(\Lambda, t) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\cos(u_i t)\,\eta_i^1 + \sin(u_i t)\,\eta_i^2\right)$, де $\left\{\eta_i^1, \eta_i^2\right\}$ – незалежні строго субгауссові випадкові величини з $\mathsf{E}\eta_i^1 = \mathsf{E}\eta_i^2 = 0$ та $\mathsf{E}\left(\eta_i^1\right)^2 = \mathsf{E}\left(\eta_i^2\right)^2 = F(u_{i+1}) - F(u_i)$.

Розглядаються строго субгауссові випадкові величини тому, що вони отримуються при моделюванні гауссових випадкових величин. Це викликано точністю представлення чисел в обчислювальних системах та наближених алгоритмах моделювання гауссових випадкових величин. Докладніше про теорію строго субгауссових випадкових величин можна ознайомитись в книзі [1].

В роботі [2] отримано оцінки точності і надійності в рівномірній метриці. В роботах [3] - [4] отримано оцінки точності і надійності в просторах Орліча. Простори $L_2(T)$ - частинний випадок просторів Орліча.

Для оцінки параметрів моделей із заданими точністю та надійністю скористаємось результатами таких теорем:

Теорема 2.1. *[2] Модель $X_n(t,\Lambda)$ наближає процес $X(t)$ з надійністю $1-\varepsilon$ і точністю δ в нормі простору $L_2(\mathrm{T})$, якщо для чисел Λ та n виконуються нерівності:* $B2_{n,\Lambda} < \delta^2$ *та* $\exp\left\{\frac{1}{2}\right\}\frac{\delta}{\sqrt{B2_{n,\Lambda}}}\exp\left\{-\frac{\delta^2}{2B2_{n,\Lambda}}\right\} \leqslant \varepsilon$, *де* $B2_{n,\Lambda} = \int_{\mathrm{T}} E\left(X(t) - X_n(t,\Lambda)\right)^2 d\mu(t)$.

Теорема 2.2. *[3, 4] Модель $X_n(t,\Lambda)$ наближає процес $X(t)$ з надійністю $1-\varepsilon$ і точністю δ в нормі простору $L_2([0,T])$, якщо для чисел Λ та n виконуються нерівності:* $B3_{n,\Lambda} < \delta^2$ *та* $\exp\left\{\frac{1}{2}\right\}\frac{\delta}{B3_{n,\Lambda}}\exp\left\{-\frac{\delta^2}{2B3_{n,\Lambda}}\right\} \leqslant \varepsilon$, *де* $B3_{n,\Lambda} = 2T\sum\limits_{i=0}^{n}\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}}\left(1-\frac{\sin(T(\lambda-\lambda_i))}{T(\lambda-\lambda_i)}\right)f(\lambda)\,d\lambda + T\left(\int_{\Lambda}^{\infty} f(\lambda)\,d\lambda\right)$.

Нехай для розбиття D_Λ виконується умова $T(\lambda_{i+1}-\lambda_i) \leqslant 1$, тоді мають місце такі наслідки:

Наслідок 2.1. *Модель $X_n(t,\Lambda)$ наближає процес $X(t)$ з надійністю $1-\varepsilon$ і точністю δ в нормі простору $L_2([0,T])$, якщо для чисел Λ та n виконуються нерівності:* $G1_{n,\Lambda} < \delta^2$ *та* $\exp\left\{\frac{1}{2}\right\}\frac{\delta}{\sqrt{G1_{n,\Lambda}}}\exp\left\{-\frac{\delta^2}{2G1_{n,\Lambda}}\right\} \leqslant \varepsilon$, *де* $G1_{n,\Lambda} = \frac{T}{3}\sum_{i=0}^{n}\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}}(\lambda-\lambda_i)^2 f(\lambda)\,d\lambda + T\left(\int_{\Lambda}^{\infty} f(\lambda)\,d\lambda\right)$.

Якщо розбиття вибрати рівномірним, тобто, $\lambda_{i+1}-\lambda_i = \frac{\Lambda}{n}$ і $\frac{T\Lambda}{n} \leqslant 1$ тоді матимемо інший наслідок.

Наслідок 2.2. *Модель $X_n(t,\Lambda)$ наближає процес $X(t)$ з надійністю $1-\varepsilon$ і точністю δ в нормі простору $L_2([0,T])$, якщо для чисел Λ та n виконуються нерівності:* $G2_{n,\Lambda} < \delta^2$ *та* $\exp\left\{\frac{1}{2}\right\}\frac{\delta}{G2_{n,\Lambda}}\exp\left\{-\frac{\delta^2}{2G2_{n,\Lambda}}\right\} \leqslant \varepsilon$, *де* $G2_{n,\Lambda} = \frac{T^3\Lambda^2}{3n^2}\int_0^{\Lambda} f(\lambda)\,d\lambda + T\left(\int_{\Lambda}^{\infty} f(\lambda)\,d\lambda\right)$.

Для процесу Орнштейна-Уленбека

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2\alpha}{\pi\left(\alpha^2+\lambda^2\right)},$$

$$F(u) = \int_0^u f(\lambda)\,d\lambda = \frac{\sigma^2}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\frac{u}{\alpha}\right).$$

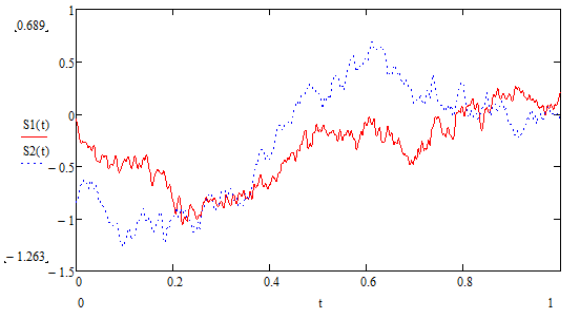
Тоді

Наслідок 2.3. *Модель $X_n(t,\Lambda)$ наближає процес Орнштейна-Уленбека $X(t)$ з надійністю $1-\varepsilon$ і точністю δ в нормі простору $L_2([0,T])$, якщо для чисел Λ та n виконуються нерівності:* $G2_{n,\Lambda} < \delta^2$ *та* $\exp\left\{\frac{1}{2}\right\}\frac{\delta}{\sqrt{G2_{n,\Lambda}}}\exp\left\{-\frac{\delta^2}{2G2_{n,\Lambda}}\right\} \leqslant \varepsilon$, *де* $G2_{n,\Lambda} = \frac{T^3\Lambda^2}{3n^2}F(\Lambda) + T\left(F(\infty)-F(\Lambda)\right) = \frac{T\sigma^2}{2} + T\frac{\sigma^2}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\frac{\Lambda}{\alpha}\right)\left[\frac{T^2\Lambda^2}{3n^2}-1\right]$.

Таблиця 2.1 Оцінки різних чисел Λ та n для моделі процесу Орнштейна-Уленбека для заданих надійності $1-\varepsilon$ та точності δ коли $T=1$ та $\alpha=\sigma=1$.

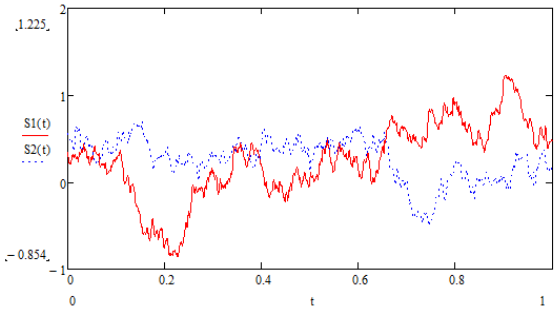
№	Λ	n	δ	ε
1	1000	13000	0.1	0.1
2	2000	65000	0.05	0.1
3	50000	8000000	0.01	0.1
4	1000	15000	0.1	0.05
5	2900	95000	0.05	0.05
6	55000	10000000	0.01	0.05
7	2000	33000	0.1	0.01
8	11000	350000	0.05	0.01
9	300000	47000000	0.01	0.01

Рис 2.1. Реалізації процесу Орнштейна-Уленбека як гауссового процесу



$\delta = 0.1$, $\varepsilon = 0.1$, $T = 1$, $\alpha = \sigma = 1$

Рис 2.2. Реалізації процесу Орнштейна-Уленбека як гауссового процесу



$\delta = 0.05$, $\varepsilon = 0.1$, $T = 1$, $\alpha = \sigma = 1$

3 Моделювання процесу Орнштейна-Уленбека із використанням розкладу Фур'є

Нехай на інтервалі $\mathrm{T} = [0, T]$ кореляційну функцію процесу $X(t)$ можна розкласти у ряд Фур'є

$$B(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^2 \cos\left(\frac{k\pi\tau}{T}\right),$$

де коефіцієнти $b_k^2 = \frac{\gamma_k}{T}\int_0^T B(\tau)\cos\left(\frac{k\pi\tau}{T}\right)d\tau$ та $\gamma_k = \begin{cases} 2, & k \geqslant 1 \\ 1, & k = 0 \end{cases}$ – є невід'ємними.

Розглянемо випадковий процес

$$Y(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\xi_k \cos\left(\frac{\pi \mathrm{kt}}{T}\right) + \eta_k \sin\left(\frac{\pi \mathrm{kt}}{T}\right)\right), \tag{1}$$

де $\{\xi_k, \eta_k\}, k = 0, 1, \ldots$ – незалежні випадкові величини такі, що $\mathsf{E}\xi_k = \mathsf{E}\eta_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots$, $\mathsf{E}\xi_k^2 = \mathsf{E}\eta_k^2 = b_k^2$.

Процес $Y(t)$ — стаціонарний випадковий процес. Якщо цей процес розглянути на відрізку $[0, T]$, то його кореляційна функція збігається на інтервалі $[0, T]$ з кореляційною функцією $B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^2 \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right)$. Отже, процес $Y(t)$ можна розглядати як модель процесу $X(t)$ на $\mathrm{T} = [0, T]$. Більш докладно із теорією розкладів Фур'є для випадкових процесів можна ознайомитись в книзі [6].

Теорема 3.1. *[6] Якщо кореляційна функція $B(\tau)$ опукла на відрізку $[0, T]$, то коефіцієнти Фур'е цієї функції b_k^2 невід'ємні.*

Для кореляційної функції процесу Орнштейна-Уленбека $B(\tau) = \sigma\exp(-\alpha\tau)$, $\tau \in [0, T]$, маємо:

$$\int B(\tau)\cos\left(\frac{k\pi\tau}{T}\right)d\tau = \\ = \sigma\frac{\exp(-\alpha\tau)}{\alpha^2 + d_k^2}\left[d_k \sin(d_k\tau) - \alpha\cos(d_k\tau)\right],$$

де $d_k = \frac{\pi k}{T}$. Тоді

$$b_k^2 = \frac{\gamma_k}{T}\int_0^T B(\tau)\cos\left(\frac{k\pi\tau}{T}\right)d\tau = \\ = \frac{\gamma_k}{T}\frac{\alpha\sigma}{\alpha^2 + d_k^2}\left(1 + (-1)^{k+1}\exp(-\alpha T)\right), \tag{2}$$

а отже, випадковий процес $X(t)$ на проміжку $[0, T]$ можна представити у вигляді (1).

Означення 3.1. Випадковий процес $X_M(t) = \sum_{k=0}^{M}\left(\xi_k\cos\left(\frac{\pi\mathrm{kt}}{T}\right) + \eta_k\sin\left(\frac{\pi\mathrm{kt}}{T}\right)\right)$, де випадкові величини $\{\xi_k, \eta_k\}, k = 0, 1, \ldots$ визначені в (1) та (2), будемо називати моделлю Фур'є процесу Орнштейна-Уленбека $X(t)$ з кореляційною функцією $B(\tau) = \sigma\exp(-\alpha\tau)$, $\tau \in [0, T]$.

Теорема 3.2. *Модель Фур'є процесу $X_M(t)$ наближає процес $X(t)$ з точністю $\delta > 0$ та надійністю $0 < 1 - \varepsilon < 1$ в просторі $L_2(\mathrm{T})$, якщо M задовольняє нерівності:* $\delta > A_{M+1}$, $\exp\left\{\frac{1}{2}\right\}\frac{\delta}{A_{M+1}}\exp\left(-\frac{\delta^2}{2A_{M+1}^2}\right) \leqslant \varepsilon$, *де* $A_{M+1}^2 = T\sum_{k=M+1}^{\infty} b_k^2$.

Наслідок 3.1. *Для процесу Орнштейна-Уленбека $X(t)$ величина*

$$A_{M+1}^2 = T\sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{T}\frac{\alpha\sigma}{\alpha^2 + d_k^2}\left(1 + (-1)^{k+1}e^{-\alpha T}\right) = \\ = 2\alpha\sigma\sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{1 + (-1)^{k+1}e^{-\alpha T}}{\alpha^2 + \left(\frac{\pi k}{T}\right)^2} = \\ = 2\alpha\sigma T^2\sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{1 + (-1)^{k+1}e^{-\alpha T}}{T^2\alpha^2 + \pi^2 k^2}.$$

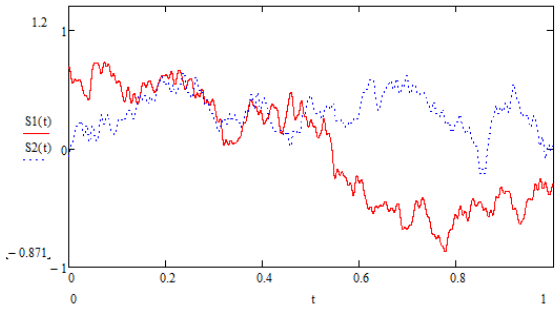
Оскільки точно порахувати цю величину аналітично не можливо, тому оцінимо її зверху

$$A_{M+1}^2 \leqslant 2\alpha\sigma T^2\frac{1 + e^{-\alpha T}}{\pi^2}\sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \\ = 2\alpha\sigma T^2\frac{1 + e^{-\alpha T}}{\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{M}\frac{1}{k^2}\right).$$

Таблиця 3.2 Оцінки різних значень чисел M для моделі Фур'є процесу Орнштейна-Уленбека для заданих надійності $1-\varepsilon$ та точності δ коли $T=1$ та $\alpha=\sigma=1$.

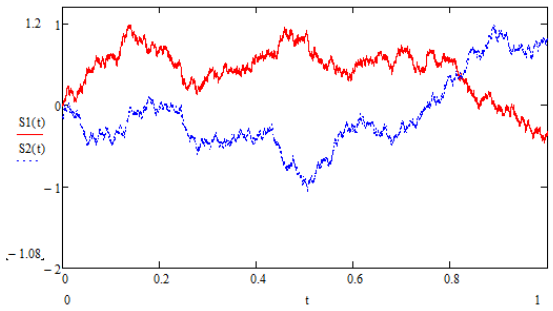
№	M	δ	ε
1	230	0.1	0.1
2	900	0.05	0.1
3	21500	0.01	0.1
4	270	0.1	0.05
5	1050	0.05	0.05
6	26000	0.01	0.05
7	370	0.1	0.01
8	1500	0.05	0.01
9	36000	0.01	0.01

Рис 3.1. Реалізації процесу Орнштейна-Уленбека методом розкладу в ряд Фур'є



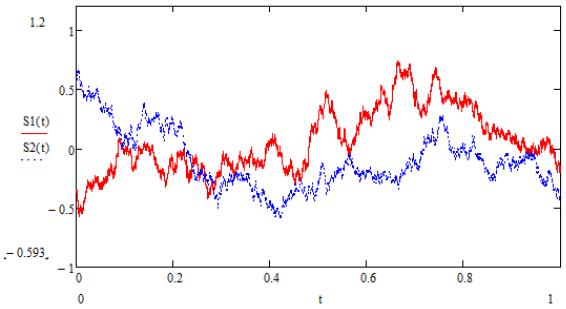
$\delta=0.1$, $\varepsilon=0.1$, $T=1$, $\alpha=\sigma=1$

Рис 3.2. Реалізації процесу Орнштейна-Уленбека методом розкладу в ряд Фур'є



$\delta=0.05$, $\varepsilon=0.1$, $T=1$, $\alpha=\sigma=1$

Рис 3.3. Реалізації процесу Орнштейна-Уленбека методом розкладу в ряд Фур'є



$\delta=0.01$, $\varepsilon=0.1$, $T=1$, $\alpha=\sigma=1$

4 Висновки

В статті було розглянуто два методи моделювання центрованого процеса Орнштейна-Уленбека. Перший метод базується на загальний принципах моделювання гауссових процесів, оскільки процес Орнштейна-Уленбека є гауссовим процесом. Оцінки точності і надійності знайдено в загальному випадку, вони майже не залежать від виду кореляційної функції.

Другий метод використовує розклади кореляційної функції процесу в ряд Фур'є. І оцінки точності і надійності знайдено для конкретної кореляційної функції. Тому така велика різниця в кількості доданків у моделях.

Для обох методів були наведені основні теоретичні результати, що дозволяють моделювати процес із заданими точністю та надійністю. Були зроблені відповідні підрахунки та визначені умови на певні параметри, що дозволяють будувати реалізації із необхідними точністю і надійністю.

Другий метод моделювання більш простий в застосуваннні. Але обидва вони потребують попередніх знань та навичок моделювання гауссових випадкових величин. Зокрема, треба мати на увазі, що при їх моделюванні отримуються строго субгаусові випадкові величини.

В майбутньому планується дослідити інші методи моделювання процесу Орнштейна-Уленбека, їх точність і надійність. Набувають популярності методи моделювання гауссових випадкових процесів з відомими кореляційними функціями, що також будуть об'єктами наших подальших досліджень.

Список використаних джерел

1. В.В.Булдыгин, Ю.В.Козаченко, *Метрические характеристики случайных величин и процессов,* - Киев, "ТВіМС", 1998. - 290 с.

2. *Козаченко Ю.В., Пашко А.А.* Об распределении супремума гауссовских стационарных процессов.// Украинский математический журнал. N3. – Т.41, – 1989.

3. *Козаченко Ю.В., Пашко А.О.* Точність моделювання випадкових процесів в нормах просторів Орлича.I.// Теорія ймовірностей та мат. статистика. Вип. 58, – 1998. С.45-60.

4. *Козаченко Ю.В., Пашко А.О.* Точність моделювання випадкових процесів в нормах просторів Орлича.II.// Теорія ймовірностей та мат. статистика. Вип. 59, – 1998. С. 75-90.

5. Козаченко Ю.В., Пашко А.О., Розора І.В. *Моделювання випадкових процесів та полів* . – Київ. ВПЦ Задруга, 2007. – 230 с.

6. Харди Г.Х., Рогозинский В.В *Ряды Фурье.* – М.:1966. - 157 с.

7. *G. E. Uhlenbeck and L. S. Ornstein* On the Theory of the Brownian Motion. // Phys. Rev. 36. – 1930.

References

1. BULDYGIN V.V.; KOZACHENKO YU.V. *Metric characterization of random variables and random processes. (Transl. from the Russian).* Translations of Mathematical Monographs. 188. Providence, RI: AMS, American Mathematical Society. xii, 257 p. - 2000.

2. KOZACHENKO YU.V., PASHKO A.O. On the distribution of supremum for Gaussian stationary processes. Ukrainian Mathematical Journal. No 3. Issue.41, 1989. (In Russian)

3. KOZACHENKO YU.V.; PASHKO A.O. "Accuracy of simulation of stochastic processes in norms of Orlicz spaces. I.". Theory Probab. Math. Stat. 58, pp. 51 - 66, - 1999.

4. KOZACHENKO YU.V.; PASHKO A.O. "Accuracy of simulation of stochastic processes in norms of Orlicz spaces. II.". Theory Probab. Math. Stat. 59, pp. 77 - 92, - 1999

5. KOZACHENKO YU.V., PASHKO A.O., ROZORA I.V. Modelling stochastic processes and fields. Kyiv. Zadruga, 2007.- 230 P.

6. HARDY G. H., ROGOSINSKIW. W. Fourier Series. Cambridge University Press. London 1956. – 157 P.

7. G. E. UHLENBECK AND L. S. ORNSTEIN *On the Theory of the Brownian Motion* Phys. Rev. 36. – 1930.

Received: 11.01.2019

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

UDC 532.5 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2019/3.4

L. V. Batyuk[1], PhD, docent,
N. M. Kizilova[2], DSc, prof.

Maghetohydrodynamic flows of micro/nano fluids through thin capillaries

[1] V.N. Karazin Kharkov National University, 61022, Kharkov, Svobody sq., 4,
[2] V.N. Karazin Kharkov National University, 61022, Kharkov, Svobody sq., 4,
e-mail: n.kizilova@gmail.com
liliyabatyuk24@gmail.com

Батюк Л. В. [1], к. ф.-м. н., доцент,
Кізілова Н. М. [2], д. ф.-м. н., проф.

Магнітогідродинамічні течії мікро/нано рідин по тонких капілярах

[1] Харківський національний медичний університет, 61022, м. Харків, пл. Свободи, 2,
[2] Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна, 61022, м. Харків, пл. Свободи, 4,
e-mail: n.kizilova@gmail.com
liliyabatyuk24@gmail.com

Steady magnetohydrodynamic (MHD) flows of suspensions of conducting micro/nanoparticles through a thin tube of a circular cross-section in a transverse constant magnetic field driven by a constant pressure drops at the ends of the tube is studied. The governing MHD system of equations for a viscous incompressible micro/nanofluid in the non-induction approximation is solved with the second order velocity slip boundary condition at the wall of the tube. The material parameters of the fluid are considered as non-linear functions of the particle concentration according to the mixture models of suspensions and electric conductivity theory. The velocity field, pressure, electric current and magnetic field have been computed as series expansions. The influence of two non-dimensional slip coefficients of the flow rate and wall shear stress is studied. Optimal concentrations of the micro/nanoparticles in the suspensions have been computed from the minimum entropy production condition for different slip conditions, material parameters, magnetic fields and flow regimes (Reynolds and Hartmann numbers).

Key Words: Microfluids, Nanofluids, Magnetohydrodynamics, Steady flows.

Досліджуються стаціонарні магнітогідродинамічні (МГД) течії суспензій електропровідних мікро/наночастинок крізь тонку трубку кругового перерізу в поперечному постійному магнітному полі за рахунок постійного перепаду тиску на кінцях трубки. Система рівнянь МГД-течії в'язкої нестисливої мікро/нанорідини в безіндукційному наближенні розв'язується за наявності для швидкості граничних умов прослизання другого порядку на стінці трубки. Матеріальні параметри рідини розглядаються як нелінійні функції концентрації частинок відповідно до моделей сумішей та теорії електропровідності. Вираження для поля швидкості, тиску, електричного струму та магнітного поля отримані у вигляді розкладень у ряди. Вивчено вплив двох безрозмірних коефіцієнтів прослизання на швидкість течії та напруження зсуву на стінці. Оптимальні концентрації мікро / наночастинок у суспензіях обчислені з умови мінімуму виробництва ентропії в каналі для різних умов прослизання, параметрів матеріалу, магнітних полів та режимів течії (числа Рейнольдса та Гартмана).

Ключові слова: Мікрорідини, Нанорідини, Магнітна гідродинаміка, Стаціонарні течії.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О

1. Introduction. Significant success in material sciences and electronics, medicine and biology, chemical and power engineering is tightly connected with novel micro- and nanotechnology that had been developed during the last decades. Precise 'molecular' assembling of nanocomposites, coatings, molecular motors, and other nanoscale analogies of macroscopic materials and machines allow elaboration of microgears, molecular motors, and microelectromechanical systems (MEMS) for detailed manipulations with nanoparticles, fibers, biological cells and extracellular materials [1].

© N. M. Kizilova, L.V. Batyuk, 2019

Suspensions of micro or nanoparticles (microfluids and nanofluids) possess unique physical, chemical and biological properties due to high surface-to-volume ratio for the small particles. Mictofluidic and nanofluidic systems are widely used in modern technologies, biology and medicine for mixing or separation of fluids, water purification and desalinization, heating of small volumes of materials, cooling of the MEMS, drug delivery to the target tissues, medical diagnostics with lab-on-a-chip and other promising technologies [2].

The micro- and nanofluids used in such systems have complex mechanical, thermal, electromagnetic and optic properties which depend on the concentration, shape, size and material parameters of the micro/nanoparticles. Therefore, even low-intensity external electric or magnetic fields may significantly influence the flows of micro/nanofluids through the tubes or ducts [3]. Weak electric and magnetic fields generated by the heart and muscle contractions, brain and cell activity could influence the drug delivery to tumors inside the organisms [4]. Electromagnetic properties of the blood cells used for early diagnosis of cancer [5] may also influence the measurement results and, therefore, the accuracy of the diagnostic test.

In the moving suspensions the Fahraeus-Lindquist effect produces a low viscosity boundary layer free of the particles (apparent slip layer, ASL) that accelerates the flow [5]. In the suspensions of microparticles $(1<\mathrm{d}<100\,\mu\mathrm{m})$ or nanoparticles $(1<\mathrm{d}<100\,\nu\mathrm{m})$ the Knudsen layer produced by the complete or partial diffusion scatter of the particles at the wall roughness appears and influences the flow velocity and wall shear stress [6]. Its thickness is compatible to the mean free path λ of the particles that is much smaller than the thickness of the ASL [7]. As it was shown in numerous experiments with the flows in micro and nanotubes, the measured volumetric rates and wall shear stress differ in 5-60% from the corresponding values computed on the classical Navier-Stokes equations for convenient incompressible fluids [2,6,7]. The main reasons of the differences are velocity slip and temperature jump boundary conditions (BC) at the solid walls and complex dependencies of the material parameters on the particle concentration φ and other properties. The heat conduction, electric and other physical parameters of the micro/nanosuspensions are increasing functions of φ, while the fluid viscosity and energy loss for viscous dissipation also increases with φ. Therefore, the solution of the optimization problem for the values φ when the physical properties are high enough and the viscous dissipation is reasonably low is of a great importance for micro/nanofluid dynamics applications.

In this paper the influence of the BC and suspension parameters on the MHD flow and the field strength is studied. The optimization problem for the particle concentration at different material parameters and flow conditions is solved based on the minimum entropy production approach.

2. Problem formulation. Steady flow ($\partial/\partial\mathrm{t}=0$, $\vec{\mathrm{v}}=\mathrm{V}\vec{\mathrm{e}}_{\mathrm{x}}$, $\vec{\mathrm{B}}=\mathrm{B}\vec{\mathrm{e}}_{\mathrm{x}}+\mathrm{B}_0\vec{\mathrm{e}}_{\mathrm{z}}$, cylindrical coordinates) of a uniform suspension of the micro or nanoparticles of diameters $\mathrm{d_p}$ with concentration φ in an incompressible Newtonian fluid through a thin tube of a circular cross-section with radius R and wall thickness $\mathrm{h}<\mathrm{R}$ in a transverse external magnetic field $\vec{\mathrm{B}}_0=\mathrm{B}_0\vec{\mathrm{e}}_{\mathrm{z}}$, $\mathrm{B}_0=$ const and the pressure drop $\Delta\mathrm{P}=\mathrm{P}^{+}-\mathrm{P}^{-}=$ const (Fig.1) is considered.

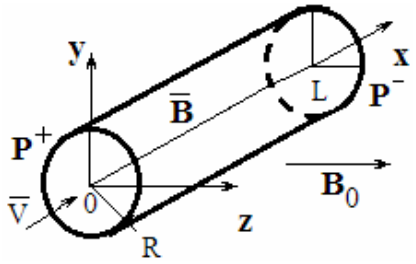


Рис.1. Scheme of the flow geometry.

The flow is governed by the following system of equations in the non-induction approximation [8]

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{x}}=0,\qquad \mu_{\mathrm{eff}}\Delta\mathrm{V}+\frac{1}{4\pi}\vec{\mathrm{B}}_0\cdot\nabla\mathrm{B}=\Delta\mathrm{P}/\mathrm{L}\,, \tag{1}$$

$$\nu_{\mathrm{m}}\Delta\mathrm{B}+\vec{\mathrm{B}}_0\cdot\nabla\mathrm{V}=0\,, \tag{2}$$

where $\nu_{\mathrm{m}}=\mathrm{c}^2/(4\pi\sigma_{\mathrm{eff}})$ is the magnetic viscosity, $\vec{\mathrm{B}}$ is the field inside the tube.

The BC for (1)-(2) are the 2-nd order velocity slip condition at the wall and the flow symmetry at the axis [6,7]

$$\mathrm{r}=0:\ \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{r}}=0\,, \tag{3}$$

$$\mathrm{r}=\mathrm{R}:\ \mathrm{V}=\alpha_1\mathrm{Kn}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{r}}+\alpha_2\mathrm{Kn}^2\frac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial \mathrm{r}^2} \tag{4}$$

where $\mathrm{Kn}=\lambda/\mathrm{R}$ is the Knudsen number, $\alpha_{1,2}$ are constants (according to [6], $\alpha_1\in[1;1.15]$, $\alpha_2\in[-0.5;1.31]$), $\alpha_2=0$ for the microfluids.

The second BC at the wall for (1)-(2) is [8]

$$\mathrm{r}=\mathrm{R}:\ \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial \mathrm{r}}=0 \text{ for ideal conducting wall,} \tag{5}$$

$$\mathrm{r}=\mathrm{R}:\ \mathrm{B}=\frac{2\pi\mathrm{j}}{\mathrm{c}} \text{ for ideal insulating wall,} \tag{6}$$

where $\vec{\mathrm{j}}=\sigma_{\mathrm{eff}}\vec{\mathrm{V}}\times\vec{\mathrm{B}}/\mathrm{c}$ is the electric current, σ_{w} is the wall conductivity.

Solution of (1)-(3), (5), (6) for the velocity non-slip BC has been obtained in the approximations of

large and small Hartmann numbers, walls with zero and small conductivity, thin wall with arbitrary conductivity and the wall with finite thickness and conductivity [8,9].

As it is well-known from the general MHD theory, with two new parameters introduced as

$$V_{1,2} = \left(V \pm \frac{cB/4\pi \mp zc\Delta P/B_0 L}{\sqrt{\sigma_{eff}\mu_{eff}}} \right) \exp(\pm mz), \qquad (7)$$

where $m = \sqrt{\frac{\sigma_{eff}}{\mu_{eff}}} \frac{B_0}{2c}$, the system (1)-(2) gives second-order equations

$$\Delta V_{1,2} - m^2 V_{1,2} = 0 \qquad (8)$$

with boundary conditions (3) and

$$V_1 + V_2 = C_1 Kn \frac{\partial (V_1 + V_2)}{\partial r} + C_2 Kn^2 \frac{\partial^2 (V_1 + V_2)}{\partial r^2} \qquad (9)$$

and $$\frac{\partial (V_1 - V_2)}{\partial r} + \frac{\sigma_{eff}}{\sigma_w h}(V_1 - V_2) = 0 \qquad (10)$$

or $$V_1 - V_2 = 2\pi j / c, \qquad (11)$$

instead of the conditions (4)-(6) accordingly.

The effective density ρ_{eff}, electric conductivity σ_{eff} and dynamic viscosity μ_{eff} of the suspension can be introduced by one of the formulae accepted for mixtures and corrected for the micro/nanofluids in the experiments [2,3,6,7]

$$\rho_{eff} = \rho_p \varphi + \rho_f (1-\varphi), \qquad (12)$$

$$\sigma_{eff} = \sigma_f \left(1 + \frac{3\varphi(\sigma_p - \sigma_f)}{\sigma_p + 2\sigma_f + \varphi(\sigma_f - \sigma_p)} \right), \qquad (13)$$

$$\mu_{eff} = \mu_f (1-\varphi)^{-2.5}, \qquad (14)$$

where the subscripts $(.)_p$ and $(.)_f$ stand for the particles and basic fluid accordingly.

3. Problem solution. In the non-dimensional variables $\bar{r} = r/R$, $\bar{x} = x/R$, $\bar{B} = B/(V_0\sqrt{\sigma_f \mu_f})$, $\bar{V} = V/V_0$, where V_0 is the characteristic velocity the solution $V_{1,2}(r,\vartheta)$ of (8)-(10) can be found by using the technique of separation of variables in the general form

$$\bar{V}_{1,2} = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(H\bar{r}) \left(C_n^{1,2} \cos(n\vartheta) + D_n^{1,2} \sin(n\vartheta) \right), \qquad (15)$$

where $H = B_0 R\sqrt{\sigma_f/\mu_f}$ is the Hartmann number, $I_n(y)$ are modified Bessel functions of order n.

The magnetic field in the wall has the form [9]

$$\bar{B}_w = A_0 + B_0 \ln(\bar{r}) + \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \bar{r}^n + B_n \bar{r}^{-n}) \cos(n\vartheta), \qquad (16)$$

and the field continuity equations

$$\bar{r} = 1: \ \bar{B} = \bar{B}_w, \ \frac{1}{\sigma_{eff}} \frac{\partial \bar{B}}{\partial \bar{r}} = \frac{1}{\sigma_w} \frac{\partial \bar{B}_w}{\partial \bar{r}} \qquad (17)$$

where σ_w is the wall conductivity are satisfied.

Unknown constants $C_n^{1,2}$, $D_n^{1,2}$, A_n, A_0, B_0 have been found from the algebraic system of equations. The complex expressions for them are not presented due to brevity.

Numerical computations have been carried out for the material parameters taken for blood as a microfluid [4,5] and some technical diluted nanofluids of rigid nanoparticles [7]. The most interesting results are presented in Fig.2-5. Entropy generation due to viscous dissipation in the flow has been computed as a function of the concentration φ in the form:

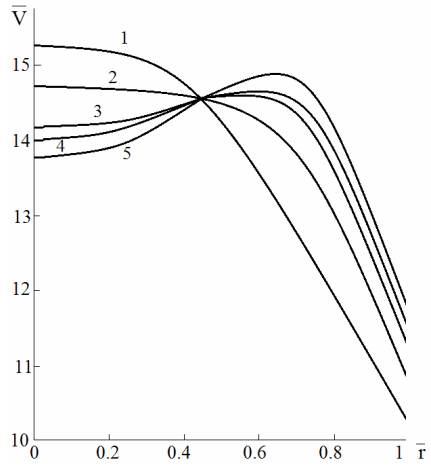
$$\dot{S} = \int_0^1 d\bar{x} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\bar{r} \left(\left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{r}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta} \right)^2 \right). \qquad (18)$$

Optimal values for the particle concentration have been found from the following conditions

$$\frac{d\dot{S}}{d\varphi} = 0, \quad \frac{d^2\dot{S}}{d\varphi^2} > 0. \qquad (19)$$

Numerical solutions of the corresponding transcendental equation (19) have been found for different sets of material parameters, external magnetic field (H number) and flow regime (Reynolds number $Re = \rho_f V_0 R/\mu_f$).

4. Results and discussion. At the first stage of the study, the obtained results have been compared to similar ones computed in [9] with non-slip BC. The same material parameters and values Re, H have been used. The velocity profiles at different angular coordinates θ are presented in Fig.2a,b. In the velocity slip BC noticeable flow acceleration near the wall due to the Knudsen layer is observed.



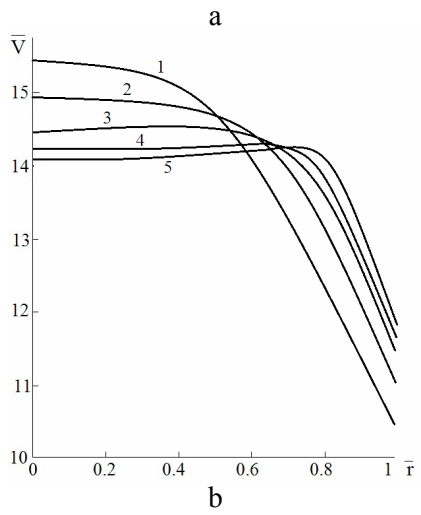


Fig.2. Velocity profiles $\bar{V}(\bar{r})$ at $\theta = 90^\circ$ (a) and $\theta = 45^\circ$ (b) at Re=100, H=500, h/R=0.5, $\varphi = 5\%$; the curves 1-5 correspond to σ_w / σ_f =0.1,1,10,100,1000.

The flow is no axisymmetrical due to the magnetic field distribution; at low wall conductivity the profiles are close to the parabolic at any θ while at low relative conductivity of the wall the profiles are flattened (curves 2 in Fig.2a,b) that is proper to MHD flows in comparison with Poiseuille-type flows [8]. At high wall conductivity the M-shaped velocity profiles (curves 3-1 in Fig.2a,b) are developed. Similar results have been obtained in the rectangle ducts [8] and the circular tubes without slip [9]. The flow velocity at the wall always increases with $\alpha_{1,2}$ while the velocity at the axis is negligibly increased with α_1, became more flattened at higher α_2 and the maximal axial velocity at $0.5 < \bar{r} < 0.8$ is smaller when $\alpha_2 < 0$ due to negative curvature of the flow profile in the Knudsen layer. At $\alpha_{1,2}$=0 all the profiles pass through a common point [9] (intersection points in Fig.2a,b) while when $\alpha_1 \neq 0$ the intersection points could differ at some angles θ (Fig.2b).

The dependence of the non-dimensional pressure gradient $\bar{P} = \dfrac{\Delta P (R+h)^2}{\mu_f L R^2 V_0}$ on the relative wall thickness $\bar{h} = h / R$ is presented in Fig.3. It is shown, the thick electrically conducting wall significantly influence the pressure drop needed for the steady flow of the micro/nanofluid with the same flow rate or the flow with the same wall shear stress that is the main factor of the entropy production (18). This conclusion corresponds to the computational results presented in [9] for the no-slip BC.

Such characteristic dependence $\bar{P}(\bar{h})$ gave already been founded for the MHD-flows between the parallel conducting and insulating thin plates, in the rectangular ducts with conducting and insulating walls, and in the circular ducts with thin and thick walls with arbitrary electrical conduction.

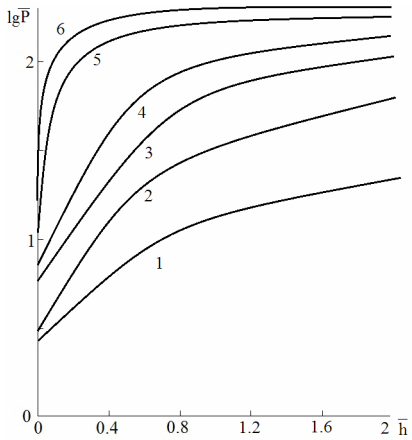


Fig. 3. Dependencies of the nondimensional pressure gradient of the wall thickness; the curves 1-6 correspond to σ_w / σ_f =100, 10,5,1,0.5,0.1; other parameters are the same as in Fig.2.

The aim of this study is computation of the optimal concentration of the micro/nanoparticles in the suspension. As we can see from the Fig. 2-3, high concentration of the micro/nanoparticles increases the density, electric conductivity and other useful properties of the suspension for the heat/mass transfer abilities. As it is shown in Fig.2a,b, in this case the suspension in the presence of the external magnetic field will benefit in the flow acceleration in the core of the flow, but due to the lower flow gradients the rotational Magnus forces exerted onto the micro/nanoparticles will produce thinner wall layer free of particle [5].

5. Conclusions. Numerical computations on the detailed MHD flow model of the electrically conducting suspension of micro/nanoparticles through a circular tube with a wall of finite thickness and electric conductivity with the second order velocity slip BC proper to the micro- and nanofluids in comparison to the velocity non-slip BC accepted for convenient fluids, revealed significant differences in the velocity profiles, pressure gradients governing the fluid flow, the magnetic field distributions inside the fluid flow and the thick conducting/insulating wall. The most interesting results for the macrofluids with no-slip boundary conditions at the walls have been obtained before, but the same conditions for the micro/nanofluidics are still of a great interest in relation of numerous applied applications for the micro/nanosuspensions used for the purification and desalinization of natural waters, different biological fluids, environmental waters polluted by different microparticles and nanoparticles like bacteria, wastewaters, wicro/nano wastes, etc.

References

1. *Nanoscale Multifunctional Materials: Science and Applications*, S.M. MUKHOPADHYAY (Ed.), Wiley, (2012).
2. MUSA S.M. (2015) *Nanoscale Flow: Advances, Modeling, and Applications,* CRC Press.
3. SHEIKHOLESLAMI M., GANJI D.F. (2016) *External magnetic field effects on hydrothermal treatment of nanofluid,* Elsevier.
4. KIZILOVA N. (2019) Electromagnetic Properties of Blood and Its Interaction with Electromagnetic Fields. In: Advances in Medicine and Biology. Vol.137. Ed. by L.V. Berhardt. NOVA Sci. Publ. p.1-74.
5. BATYUK L., KIZILOVA N. (2017) Modeling of laminar flow of the erythrocyte suspensions as Bingham fluids. *Visnyk KNU, Ser. Physics and Mathematics Sciences*. N4. p.23-28.
6. KANDLIKAR S. GARIMELLA S., LI D., COLIN S., KING M. (2005) Heat Transfer and Fluid Flow in Minichannels and Microchannels. Elsevier.
7. CHEREVKO V., KIZILOVA N. (2017) Complex flows of immiscible microfluids and nanofluids with velocity slip bounary conditions. *Nanophysics, Nanomaterials, Interface Studies, and Applications, Springer Proceedings in Physics*, vol. 183, O. Fesenko, L. Yatsenko (eds.). p. 207–230.
8. VATAZHYN A.B., LJUBIMOV G.A., REGIRER S.A. (1970) *Magnetohydrodynamic flows in the channels*. Moscow: Nauka. (in Russian)
9. Samad A. (1981) The flow of conducting fluids through circular pipes having finite conductivity and finite thickness under uniform transverse magnetic fields. *International Journal of Engineering Sciences*. Vol.19. p. 1221-1232.

Список використаних джерел

1. Nanoscale Multifunctional Materials: Science and Applications, S.M. Mukhopadhyay (Ed.), Wiley, 2012.
2. Musa S.M. Nanoscale Flow: Advances, Modeling, and Applications, CRC Press, 2015.
3. Sheikholeslami M., Ganji D.F. External magnetic field effects on hydrothermal treatment of nanofluid, Elsevier, 2016.
4. Kizilova N. Electromagnetic Properties of Blood and Its Interaction with Electromagnetic Fields. In: Advances in Medicine and Biology. Vol.137. Ed. by L.V. Berhardt. NOVA Sci. Publ. 2019, - P.1-74.
5. Батюк Л. В., Кізілова Н. М. Моделювання ламінарних течій суспензій еритроцитів крові як бінгамівських мікрорідин. // Вісник КНУ імені Т.Г.Шевченко. Серія «Фізико-математичні науки». – 2017. – №4. – С.23-28.
6. Kandlikar S. Garimella S., Li D., Colin S., King M. Heat Transfer and Fluid Flow in Minichannels and Microchannels. Elsevier, 2005.
7. Cherevko V., Kizilova N. Complex flows of immiscible microfluids and nanofluids with velocity slip bounary conditions. // Nanophysics, Nanomaterials, Interface Studies, and Applications, Springer Proceedings in Physics, vol. 183, O. Fesenko, L. Yatsenko (eds.). – 2017. – P. 207–230.
8. Ватажин А.Б., Любімов Г.О., Регірер С.О. Магнітогідродинамічні течії в каналах. Москва:Наука. – 1970. (рос. мовою).
9. Samad A. The flow of conducting fluids through circular pipes having finite conductivity and finite thickness under uniform transverse magnetic fields. // International Journal of Engineering Sciences. - 1981. - Vol.19. - P. 1221-1232.

Надійшла до редколегії 05.11.2019

УДК 539.375 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2019/3.5

Гусак В. О., студент.

Закони збереження в задачах динамічного руйнування

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Акад. Глушкова, 4-е,
e-mail: gusakw7@gmail.com

V.O. Husak, student.

Conservation laws in dynamic fracture tasks

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e,
e-mail: gusakw7@gmail.com

Розглянуто дві моделі руйнування стрижня під дією пружної хвилі: з дисипацією енергії при руйнуванні та без дисипації енергії. Досліджено збереження інтегралів повної механічної енергії та кількостей руху фрагментів стрижня. Для моделі руйнування без дисипації енергії повна механічна енергія зберігається. Для моделі руйнування, що передбачає дисипацію енергії, повна механічна енергія зменшується, хоча рух центру інерції зберігається. А отже, динамічне руйнування відбувається за рахунок зменшення енергії хвильового процесу в стрижні. Застосування моделей проілюстровано на прикладі дослідження квазістатичного руйнування шляхом поширення крихкої тріщини. Отримано залежність енергії руйнування від розміру тріщини та повну енергію руйнування.

Ключові слова: динамічне руйнування, поширення хвиль, енергія руйнування.

Two fracture model under elastic wave action are considered: with energy dissipation while fracturing and without energy dissipation. The conservation of integrals of the complete mechanical energy and the quantities of motion of the fragments of the rod is investigated. For the model of fracture without energy dissipation, the complete mechanical energy is stored. For a fracture model involving energy dissipation, the complete mechanical energy decreases, although the motion of the inertia center remains. Therefore, dynamic fracture occurs due to the dissipation of the energy of the wave process in the rod. The application of the models is illustrated by an example of a study of quasistatic fracture by the propagation of a brittle crack. The dependence of the fracture energy on the crack size as well as the complete fracture energy were obtained.

Key Words: dynamic fracture, wave propagation, energy of fracture.

1. Вступ

Руйнування - це процес розділення тіла на дві або більше частин, при прикладенні напружень розтягу, стиску або зсуву. Будь-який процес руйнування відбувається в два етапи: спочатку зароджується тріщина, а потім вона поширюється [1,2].

Найчастіше руйнування конструкцій є крихким або квазіпластичним [3]. У випадку крихкого руйнування, тріщина поширюється швидко з граничною швидкістю c_R без помітних пластичних деформацій. Тріщину в цьому випадку характеризують як нестійку, а розвиток тріщини після того, як вона виникла, відбувається довільним чином без збільшення прикладених напружень [4,5].

Під дією навантаження в тілі накопичується потенціальна енергія пружної деформації, а при зростанні тріщини частина потенціальної енергії вивільняється. Гріффітс показав, що зростання тріщини можливо лише в тому випадку, якщо при її зростанні виділяється більше енергії, чим потрібно для утворення нових поверхонь при зростанні тріщини [6,7].

2. Задача

Розглядається задача про поширення в стрижні скінченної довжини пружних хвиль збурених обмеженим імпульсом напружень, прикладеного до торця (Рис. 1).

© В.О. Гусак , 2019

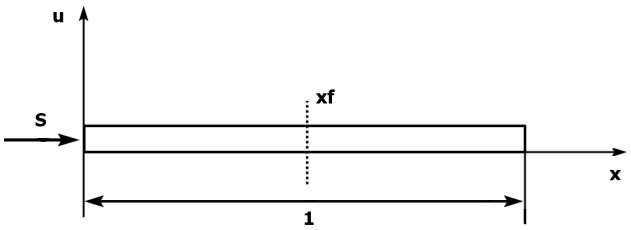


Рис. 1. Модель навантаження стрижня

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,\quad x\in(0,1),\quad t>0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=-S(t),\quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t)=0,$$
$$u(x,0)=\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0, \tag{2}$$

$$S(t)=\begin{cases} S(t), 0<t<\tau_s \\ 0, t>\tau_s \end{cases},\quad S(t)\in[0,1].$$

Швидкість руху центру інерції та енергію (кінетичну та потенціальну) стрижня можна порахувати як безпосередньо з розв'язку, так і через інтегральні перетворення виразу (1).

$$v_c=\int_0^1(\partial u/\partial t)(x,t)dx=-\int_0^t(\partial u/\partial x)(0,t)dt= \tag{3}$$
$$=\int_0^t S(t)dt$$

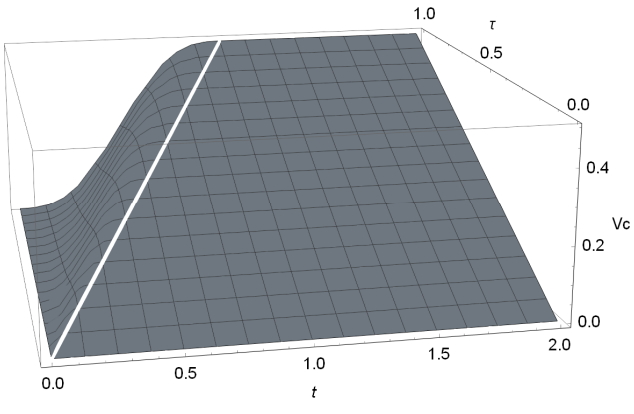


Рис. 2. Швидкість руху центру інерції

Повні кінетична та потенціальна енергії:

$$T=1/2\int_0^1\left(\partial u/\partial t(x,t)\right)^2 dx \tag{4}$$

$$\Pi=1/2\int_0^1\left(\partial u/\partial x(x,t)\right)^2 dx \tag{5}$$

Кінетична енергія руху разом з центром інерції та відносного руху відносно центру інерції:

$$T_c=1/2v_c^{\,2} \tag{6}$$

$$T_r=T-1/2v_c^{\,2} \tag{7}$$

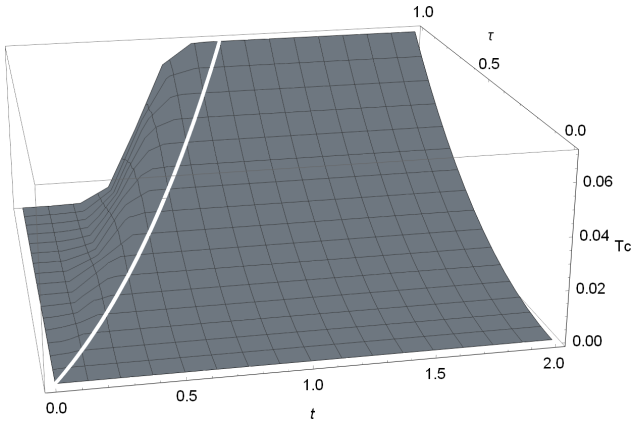


Рис. 3. Кінетична енергія

$$E=T+\Pi=\int_0^{\min(t,\tau_b)} S^2(\kappa)d\kappa \tag{8}$$

Зберігається також і внутрішня енергія стрижня після закінчення збурення $t>\tau_s$.

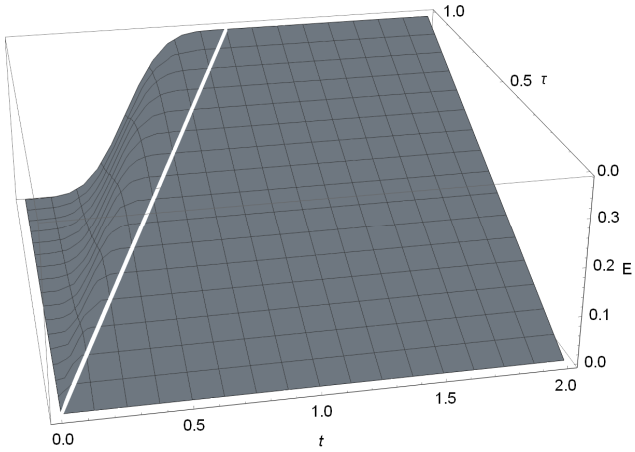
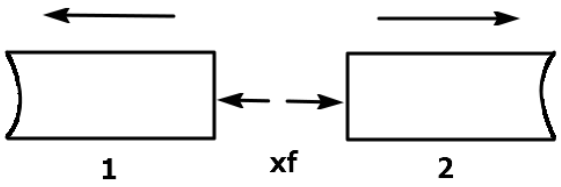


Рис. 4. Повна механічна енергія

Отже, для хвильових процесів в твердому тілі справедливі теореми про рух центру інерції матеріальної системи та про зміну повної механічної енергії матеріальної системи [8]. Дифракція пружної хвилі призводить до зменшення потенціальної енергії та збільшення на таку ж частку кінетичної енергії. Повна механічна енергія не змінюється в процесі дифракції. Кінетична енергія твердотільного руху разом з центром інерції не змінюється в процесі дифракції. Для коротких імпульсів навантаження, частка енергії твердотільного руху пропорційна проміжку навантаження.

3. Фрагментування стрижня без дисипації енергії



Вважаємо, що в перерізі x_f в момент часу t_f (умова $0<(t_f-1)-(1-x_f)<\tau_s$, забезпечує умову можливого руйнування в зоні розтягу) стрижень руйнується на 2 фрагменти.

За модель руйнування приймемо умову розділення стрижня та прикладання до торців, що утворилися, напружень, протилежних до хвильових напружень в суцільному стрижні, що забезпечує умову звільнення від напружень для суперпозиції розв'язків. Подібна модель руйнування не передбачає, вочевидь, дисипації енергії. Дійсно, нехай маємо складений стрижень (з фрагментами $0<x<x_f$ та $x_f<x<1$). При навантаженні хвилею стиску фрагменти не розділяються. Після відбиття та формування хвилі розтягу, фрагменти розділяються без відсутності контакту по перерізу складання для наступних після руйнування моментів часу.
Збережені величини знаходяться за методом попереднього розділу.

Швидкості центрів інерцій фрагментів:

$$v_c^I=\frac{1}{x_f}\int_0^{t_f+x_f-2}S(t)dt \tag{9}$$

$$v_c^{II}=\frac{1}{1-x_f}\int_{t_f+x_f-2}^{\tau_s}S(t)dt \tag{10}$$

а отже, швидкість спільного центру інерції фрагментів зберігається:

$$x_f v_c^I+(1-x_f)v_c^{II}=\int_0^{\tau_s}S(t)dt \tag{11}$$

що збігається з виразом (3) для $t>t_f>\tau_S$.

Можна показати, що кінетичні, потенціальні (а отже і повні) механічні енергії фрагментів не залежать від часу. Для 1-го фрагменту:

$$\begin{cases}\Pi^I=\frac{1}{2}\int_0^{t_f+x_f-2}S^2(\kappa)d\kappa\\ T^I=\frac{1}{2}\int_0^{t_f+x_f-2}S^2(\kappa)d\kappa\\ E^I=\int_0^{t_f+x_f-2}S^2(\kappa)d\kappa\end{cases}$$

$$T^I=\Pi^I=\frac{1}{2}E^I=\int_0^{t_f+x_f-2}S^2(t)dt \tag{12}$$

Для 2-го фрагменту:

$$\begin{cases}\Pi^{II}=\frac{1}{2}\int_{t_f+x_f-2}^{\tau}S^2(t)d\kappa\\ T^{II}=\frac{1}{2}\int_{t_f+x_f-2}^{\tau}S^2(t)d\kappa\\ E^{II}=\int_{t_f+x_f-2}^{\tau}S^2(t)d\kappa\end{cases}$$

$$T^{II}=\Pi^{II}=\frac{1}{2}E^{II}=\int_{t_f+x_f-2}^{\tau_s}S^2(t)dt \tag{13}$$

А отже, повна спільна механічна енергія фрагментів зберігається:

$$E=\int_0^{t}S^2(t)dt \tag{14}$$

Для такої моделі руйнування, справедливі теореми про збереження руху центру інерції та збереження повної механічної енергії для системи матеріальних точок [8].

Повна механічна енергія двох фрагментів та швидкість спільного центру інерції зберігаються:

$$E=\int_0^{\tau_b}S^2(\kappa)d\kappa,\ v_c=\int_0^{\tau_b}S(\kappa)d\kappa \tag{15}$$

$$T_c/E=\frac{1}{2}\frac{\left(\int_0^{\tau_b}S^2(\kappa)d\kappa\right)^2}{\int_0^{\tau_b}S^2(\kappa)d\kappa}<\frac{1}{2}$$

Фрагменти роз'єднуються без удару (швидкості руху центрів інерції неперервні). Фрагмент I гальмується, фрагмент II розганяється. Повторний контакт неможливий.

4. Руйнування стрижня, що враховує дисипацію енергії

Розглянута модель руйнування не може бути застосована для випадку, коли руйнування пов'язане з розвиненням тріщин або утворенням

зони пластичної деформації. Для останнього випадку, запропонуємо модель руйнування, що зводиться до послаблення перерізу руйнування за заданим часовим законом. Нехай

$$E = E_0(1 - f(t - t_f)\delta(x - x_f)),\ \ f(\tau): f(0) = 0,$$
$$f(\tau_f) - 1, f'(\tau) = 0, \tau \in [0, \tau_f] \tag{16}$$

Шукаємо повний розв'язок для моделі у вигляді розв'язку (1) для $t \in [0, \tau_f)$ та розв'язку задачі:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(t - t_f)\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta(x - x_f)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{17}$$
$$x \in (0,1),\ t_f < t$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0,\ x \in (0,1),\ t_f < t$$
$$u(x,t_f) = u_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,t_f) = v_0(x),\ 0 < x < 1$$

де $u_0(x), v_0(x)$ - переміщення та швидкості розв'язку (2) в момент часу t_f. Для зручності, в подальшому при розв'язанні (8) під t будемо розуміти $t - t_f$.

Використавши другу формулу Гріна для хвильового оператора з фундаментальним розв'язком:

$$u^*(x,t;\tau,\xi) = -1/2\, H(t - \tau - |x - \xi|)$$
$$u(\xi,\tau) = -\frac{1}{2}\int_{\max(\xi-(\tau_f-\tau),0)}^{\min(\xi+(\tau_f-\tau),1)} \frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau_f)dx -$$
$$\frac{1}{2}\{u(\xi - (\tau_f - \tau), \tau_f)H(\xi - (\tau_f - \tau)) + \tag{18}$$
$$u(\xi + (\tau_f - \tau), \tau_f)H(\xi - (\tau_f - \tau))\} -$$
$$-\frac{1}{2}sign(x_f - \xi)f(\tau + |x - \xi|) \times \frac{\partial u}{\partial x}(x_f, \tau + |x_f - \xi|)$$
$$H(\tau_f - \tau - |x_f - \xi|)$$

Розв'язок має утримувати неперервну частину $u_0(x,t)$, що пов'язана з проходженням хвилі перерізу $x = x_f$ так і розривну $u_1(x,t)$, що визначається дифракцією хвилі в перерізі руйнування.

Отже, $u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t)$, де

$$u_0(\xi,\tau) = -\frac{1}{2}\int_{\max(\xi-(\tau_f-\tau),0)}^{\min(\xi+(\tau_f-\tau),1)} \frac{\partial u_0}{\partial t}(x,\tau_f)dx -$$
$$-\frac{1}{2}\{u_0(\xi - (\tau_f - \tau), \tau_f)H(\xi - (\tau_f - \tau)) + \tag{19}$$
$$+u(\xi + (\tau_f - \tau), \tau_f)H(\xi - (\tau_f - \tau))\}$$

$$\begin{cases} u_0(\xi,0) = u_0(\xi) \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial x}(\xi,0) = v_0(\xi) \end{cases},\ 0 < \xi < 1 \tag{20}$$

- неперервна частина розв'язку, а

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x}(x_f + \xi, \tau) = \dfrac{\partial u_1}{\partial x}(x_f - \xi, \tau) \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial t}(x_f + \xi, \tau) = -\dfrac{\partial u_1}{\partial x}(x_f - \xi, \tau) \end{cases} \tag{21}$$

- розривна частина розв'язку.

Умова автомодельності для $u_1(x,t)$:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}(x_f, \tau) - \frac{\partial u_1}{\partial t}(x_f + 0, \tau) =$$
$$= \frac{\partial u_1}{\partial x}(x_f + (\tau_f - \tau), \tau_f) - \frac{\partial u_1}{\partial t}(x_f + (\tau_f - \tau), \tau_f) \tag{22}$$

(18) з врахуванням (19), (20) та (21) має вигляд:

$$\begin{cases} \left[\dfrac{\partial u_1}{\partial t}\right](x_f, \tau) = \dfrac{d}{d\tau}\left(f(\tau)\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial x} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right)(x_f, \tau)\right) \\ \left[\dfrac{\partial u_0}{\partial t}(x_f, \tau)\right] = 0, \end{cases} \tag{23}$$

що і визначає модель руйнування, побудовану на нашій гіпотезі.

Інтегрування щодо стрибка переміщень дозволяє отримати:

$$[u] = [u_1](x_f, \tau) = f(\tau)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x}\right)(x_f, \tau) \tag{24}$$

Оскільки цей вираз отримано з інтегрального представлення розв'язку, він подає зв'язок між стрибком переміщень та напруженнями в перерізі руйнування. Для введеної моделі руйнування, як і раніше можна визначити збережені величини:

$$\int_0^T f(t - t_f)dt \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\delta(x - x_f)\frac{\partial u}{\partial t}\right)dx =$$
$$= \int_0^T f(t - t_f)dt \times \left(\int_0^1 \delta'(x - x_f)\frac{\partial u}{\partial t}dx + \right.$$
$$\left. + \int_0^1 \delta(x - x_f)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx\right) = \tag{25}$$
$$= \int_0^T f(t - t_f)\{-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_f, t) + + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_f, t)\}dt = 0$$

А отже, руйнування не призводить до зміни швидкості центру інерції стрижня: $\Delta v_c = 0$.

$$\Delta E(t) = -\frac{1}{2}\int_{t_f}^{t} f'(t - t_f)/f(t - t_f) \times$$
$$\times \frac{\partial u(x_f, t)}{\partial x}[u_1](x_f, t)dt \tag{26}$$

Енергія руйнування ($\Delta E(t)$ для $t > t_f + \tau_f$ - не залежить від часу) визначається рівнем напружень розтягу $E\dfrac{\partial u(x_f,t)}{\partial x}$ та фіктивним стрибком переміщень $[u_1](x_f,t)$ в перерізі руйнування і залежить від динаміки руйнування $f(t)$. У випадку, коли $[u](x_f,t)$ можна знехтувати, $\Delta E(t_f+\tau_f)=0$ та руйнування відбувається без дисипації енергії.

5. Квазістатичне крихке руйнування

В якості прикладу реалізації другої динамічної моделі руйнування розглянемо руйнування стрижня через виникнення та розвинення в перерізі руйнування внутрішньої центральної дискової тріщини. Для спрощення, вважатимемо, що руйнування відбувається квазістатично.

Для квазістатичної рівноважної тріщини радіусу r в перерізі з напруженнями розтягу σ_0, що розташована центральним чином в стрижні з радіусом R наближений за методом плоских перерізів та усереднений по перерізу обезрозмірений стрибок переміщень може бути знайдено за [9]:

$$\overline{[u_z]} = \frac{16}{3}\frac{(1-\nu^2)}{\pi}\left(\frac{R}{l}\right)C\left(\frac{r}{R}\right)\sigma_0,$$
$$C\left(\frac{r}{R}\right)=\left(\frac{r}{R}\right)^3\frac{1}{2}\left[1+\frac{\arcsin(r/R)}{(r/R)\sqrt{1-(r/R)^2}}\right] \quad (27)$$

де ν - коефіцієнт Пуасона, l - довжина стрижня.

Поклавши в цьому випадку $f(t)=\left(r(t)/R\right)^2$ та застосувавши (26), отримаємо:

$$\Delta E(\hat r) = -\frac{8}{3}\frac{(1-\nu^2)}{\pi}\left(\frac{R}{L}\right)\sigma_0{}^2\times$$
$$\times\left(\hat r+\hat r^3/3-\sqrt{1-\hat r^2}\arcsin(\hat r)\right) \quad (28)$$

Повна енергія, що дисипується при фрагментуванні стрижня:

$$\Delta E(1) = -\frac{32}{9}\frac{(1-\nu^2)}{\pi}\left(\frac{R}{L}\right)\sigma_0{}^2 \quad (29)$$

Як випливає з (28), для малих тріщин, $\Delta E(\hat r)\underset{\hat r\to 0}{\approx} -A\hat r^3$, а для розвинених $\Delta E(\hat r)\underset{\hat r\to 1}{\approx} -B_1 - A^1(1-\hat r)^{1/2}$.

Окрім того, $(-\Delta E(\hat r))'>0$, $(-\Delta E(\hat r))''>0$. Ця властивість дає змогу пояснити результати експериментів в яких поширення пружних хвиль призводить до часткового руйнування (пошкодження): дископодібні тріщини ініціюються але не досягають поверхні стрижня, оскільки відносний приріст енергії руйнування стрімко зростає при наближенні крихкої тріщини до границі. Модель пошкодження $\sigma = E_0(1-f(t-t_f)\delta(x-x_f))\dfrac{\partial u}{\partial x}$ дозволяє врахувати скінченну енергію руйнування.

При руйнуванні, швидкість спільного центру інерції фрагментів (а отже, повна кінетична енергія руху як твердих тіл) зберігається. При руйнуванні, швидкості руху фрагментів змінюються стрибком. Руйнування відбувається за рахунок повної енергії стрижня. При подальшому русі фрагментів після руйнування повна механічна енергія фрагментів зберігається. При квазістатичному руйнуванні шляхом поширення крихкої тріщини, енергія руйнування не залежить від періоду руйнування та від швидкості поширення тріщини. В цьому випадку при поширенні тріщини, енергія руйнування залежить від лінійного розміру тріщини за лінійним законом для малих значень та за кубічним законом при великих значеннях.

6. Висновки

Процес поширення та відбиття пружних хвиль в стрижні, що навантажений фінітним імпульсом напружень підкоряється теоремам про рух центру інерції та про зміну повної механічної енергії системи [8]. Після закінчення процесу навантаження, рух центру інерції та повна механічна енергія зберігаються. Відношення кінетичної енергії руху разом з центром інерції до повної механічної енергії завжди менше 1/2.

В моделі руйнування, що зводиться до прикладання протидіючих навантажень до торців фрагментів, що розділяються також виконуються теореми про рух центру інерції та про зміну повної механічної енергії системи [8]. Кінетичні та потенціальні енергії фрагментів не залежать від часу, повна спільна механічна енергія не змінюється в результаті розділення, незмінним залишається рух спільного центру інерції.

Запропонована друга модель одновимірного динамічного руйнування, що базується на фінітному в часі послабленні жорсткості перерізу руйнування. Руйнування за цією моделлю супроводжується дисипацією енергії, а отже

допускає використання енергетичного критерію руйнування. Застосування такого критерію, вочевидь, дозволяє повне визначення руйнування стрижня: переріз руйнування, момент руйнування, фрагментування чи пошкодження. В той же час, модель має кінематичну інтерпретацію через фіктивний стрибок переміщень в перерізі руйнування. Показано, що за цією моделлю, повна механічна енергія зменшується, хоча рух центру інерції зберігається. А отже, динамічне руйнування відбувається за рахунок зменшення внутрішньої (потенціальної енергії деформацій та кінетичної енергії відносного руху відносно центру інерції) енергії хвильового процесу в стрижні.

Запропонована модель, що враховує дисипацію енергії при руйнуванні проілюстрована на прикладі руйнування, що визначається квазістатичним поширенням внутрішньої крихкої тріщини, що розташована в перерізі руйнування. Отримано залежність енергії руйнування від відносного радіусу тріщини, асимптотичну поведінку енергії для малих та розвинутих тріщин, а також, підраховану повну енергію руйнування.

Список використаних джерел

1. *Партон В.З.* Механика разрушения: От теории к практике. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990 - 240 с.
2. *Davies R.M.* Stress waves in solids - Cambridge University Press, 1960 - 97 p.
3. *Пестриков В.М., Морозов Е.М.* Механика разрушения твердых тел - СПб: Профессия, 2002 – 320с.
4. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения - М., 1974 – 640 с.
5. *Freund L.D.* The mechanics of dynamic shear crack propagation - Journal of Geophysical Research 84, 1979 - pp. 2199-209.
6. *Achenbach J.D.* Extension of a crack by a shear wave - Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik 21, 1970 - pp. 887-900.
7. *Freund L.D.* Energy flux into the tip of an extending crack in an elastic solid - Journal of Elasticity 2, 1972 - pp. 341-9.
8. *Кильчевский Н.А.* Курс теоретической механики Том II - Москва: Наука, 1977 - 544с.
9. *Слепян Л.И.* Механика трещин: [изд. 2-е, перераб. и доп.] / Л. И. Слепян. - Ленинград: Судостроение, 1990 – 296 с.
10. *Сиратори М., Миёси Т., Мацусита Х.б* Вычислительная механика разрушения: Пер. с японск. - М.: Мир, 1986 – 334 с.
11. *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология: Теория и методы: В 2-х т. - М.: Мир, 1983 - 520 с.

References

1. PARTON V.Z. (1990) *Mehanika razrusheniya: Ot teorii k praktike, M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 240 p.*
2. DAVIES R.M. (1960*) Stress waves in solids. Cambridge University Press, 97 p.*
3. PESTRIKOV V.M., MOROZOV E.M. (2002) *Mehanika razrusheniya tverdyih tel. SPb: Professiya, 320 p.*
4. CHEREPANOV H.P. (1974) *Mehanika hrupkogo razrusheniya. M, 640 p.*
5. FREUND L.D. (1979) *The mechanics of dynamic shear crack propagation, Journal of Geophysical Research 84, pp. 2199-209.*
6. ACHENBACH J.D. (1970) *Extension of a crack by a shear wave, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik 21, pp. 887-900.*
7. FREUND L.D. (1972) *Energy flux into the tip of an extending crack in an elastic solid, Journal of Elasticity 2, pp. 341-9.*
8. KILCHEVSKIY N.A. (1977) *Kourse Teoreticheskoy Mehaniki. Moskva: Nauka, 544 p.*
9. SLEPIAN L.I. (1990) *Mehanika Treschin. 2nd Ed. Leningrad: Sudostroenie, 296 p.*
10. SIRATORI M., MIYOSI T., MATSUSITA H.B (1986) *Vyichislitelnaya mehanika razrusheniya. M.: Mir, 334 p.*
11. AKI K., RICHARDS P. (1983) *Quantitative Seismology: 2nd Edition, 520 p.*

Надійшла до редколегії 16.01.2020

КОМП’ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 519.21 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2019/3.6

Лижечко М. С.[1], студ.,
Розора І. В.[2], к.ф.-м.н., доц.

Моделювання технічних резервів страхової компанії

[1,2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул. Володимирська 64/13,
e-mail: [1]marialy@ukr.net,
[2]irozora@bigmir.net

M. S. Lyzhechko[1], stud.,
I. V. Rozora[2], PhD., Assoc. Prof.

Modelling of technical reserves of an insurance company

[1,2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: [1]marialy@ukr.net,
[2]irozora@bigmir.net

У цій статті розглядається перевага використання стохастичного моделювання для розрахунку технічних резервів порівняно з детерміністичним підходом.

Ключові слова: розрахунок резервів, метод Мака, бутстреп, метод Борнхуеттера-Фергюсона, метод ланцюгових сходинок.

In the modern rapidly evolving society, the science and the business are facing new needs and challenges constantly. The insurance industry and its mathematical foundation, the actuarial science, are not exceptions. Currently, the greatest challenge that the insurance system has to cope with is the issue of the new international financial standard that affects the calculation of reserves among other things. So far, insurers have mainly used common classical deterministic methods. However, the new standard emphasizes the necessity of the realistic prognosis that is best achieved with stochastic modelling tools since deterministic models do not represent the uncertainty and the random nature of future possible losses. This article considers the advantage of using stochastic modelling for reserve calculation in comparison to the deterministic approach.

The article consists of five sections.

In the first section, we briefly present the technique that lies in the basis of technical reserves calculation.

The second section is devoted to such deterministic methods of reserve calculation as the Bornhuetter-Ferguson method and the chain-ladder method.

In the third section, we consider modifications of two stochastic models – the Mack method and the bootstrapping technique.

The fourth section considers the adjustment of reserves for the time value of money and inflation.

In the fifth section, the results of modelling in the programming language R are presented.

Key Words: reserve calculation, Mack method, bootstrapping, Bornhuetter-Ferguson method, chain-ladder method.

Статтю представила к.ф.-м.н. Пашко А.О.

Introduction

In general, the insurance industry is divided into two sectors: life and non-life. Technical reserves are amounts set side by non-life insurers to ensure the fulfillment of their obligations in respect to policyholders and shareholders.

According to the Ukrainian law that does not contradict the current International Financial Reporting Standard 4 (IFRS 4) for insurance contracts, non-life insurers are obliged to form three types of reserves:

- the Unearned Premium Reserve (UPR) for the insurance risks that have not expired at the reporting date,
- the Outstanding Claims Reserve (OCR) for known but not yet settled claims and
- the Reserve for Incurred but not Reported Claims (IBNR).

However, on January 1 of 2023 the new standard (IFRS 17) comes in force. It creates challenge while estimating the IBNR since it requires very realistic prognosis whereas so far insurers have calculated the IBNR using mainly deterministic methods that do not take into account the random nature of loss processes.

© М.С. Лижечко, І.В. Розора, 2019

Moreover, they have not adjusted reserves for the time value of money and inflation impact.

The aim of this work was to compare two deterministic methods – the Bornhuetter-Ferguson and the chain-ladder methods with modifications of two stochastic models – the Mack and the bootstrapping methods. We have calculated deterministic results and built loss distributions using stochastic methods. Afterwards, we have estimated approximate quantiles of these distributions to which the deterministic results correspond in order to find out if any additional sums have to be reserved to achieve a certain confidence level, i.e., a certain probability level of a company not becoming insolvent and being able to fulfill its liabilities.

Cumulative run-off triangle

Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space on which all random variables are defined. Assume all variables are square integrable. All equalities and inequalities involving random variables hold almost surely with respect to the probability measure P.

We consider a portfolio of contracts that are subject to similar risks and managed together. Assume that each claim of the portfolio is settled either in an accident period or in the following n periods that are called development periods. Periods are usually taken on a quarterly, monthly, half-year or annual basis.

Definition 1. Consider a family of random variables $\{C_{i,k}\}_{i,k\in\{0,1,\dots,n\}}$. Let $C_{i,k}$ denote the loss of an accident period i that is settled with a delay of at most k periods, in other words, not later than in a development period k and in a calendar period $i+k$. $C_{i,k}$ is called a cumulative loss of an accident period i and a development period k.

To predict future losses based on the losses that have already been reported, we use the technique known as the cumulative run-off triangle.

The enumeration of the development periods represents delays of claims settlement with respect to the accident periods.

Table 1

Run-off triangle of cumulative losses

Accident period	Development period								
	0	1	…	k	…	$n-i$	…	$n-1$	n
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	…	$C_{0,k}$	…	$C_{0,n-i}$	…	$C_{0,n-1}$	$C_{0,n}$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	…	$C_{1,k}$	…	$C_{1,n-i}$	…	$C_{1,n-1}$	$C_{1,n}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
k	$C_{k,0}$	$C_{k,1}$	…	$C_{k,k}$	…	$C_{k,n-i}$	…	$C_{k,n-1}$	$C_{k,n}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
$n-i$	$C_{n-i,0}$	$C_{n-i,1}$	…	$C_{n-i,k}$	…	$C_{n-i,n-i}$	…	$C_{n-i,n-1}$	$C_{n-i,n}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
$n-1$	$C_{n-1,0}$	$C_{n-1,1}$	…	$C_{n-1,k}$	…	$C_{n-1,n-i}$	…	$C_{n-1,n-1}$	$C_{n-1,n}$
n	$C_{n,0}$	$C_{n,1}$	…	$C_{n,k}$	…	$C_{n,n-i}$	…	$C_{n,n-1}$	$C_{n,n}$

Definition 2. A cumulative loss $C_{i,k}$ is said to be observable if $i+k \le n$, non-observable or future if $i+k > n$, current if $i+k=n$ and ultimate if $k=n$.

Our main goal is to predict all non-observable losses and calculate a total reserve:

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i = \sum_{i=1}^{n} (C_{i,n} - C_{i,n-i}).$$

A total reserve is a sum of all accident period reserves. An accident period reserve is a difference between corresponding ultimate and current claims.

Deterministic methods

One of the most commonly used deterministic methods is the *Bornhuetter-Ferguson* method. It is based on the assumption that there exist parameters $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ and $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ with $\gamma_n = 1$ such that the identity

$$E[C_{i,k}] = \gamma_k \alpha_i$$

holds for all $i, k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Then we have

$$E[C_{i,n}] = \alpha_i$$

and hence

$$E[C_{i,k}] = \gamma_k E[C_{i,n}].$$

Additionally, we assume that prior estimators $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_n$ of the expected ultimate cumulative losses $E[C_{i,n}]$ and prior estimators $\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_n$ of the development pattern are given with $\hat{\gamma}_n = 1$.

The Bornhuetter-Ferguson method offers the following formulas for estimators of ultimate losses, future losses and accident year reserves:

$$\hat{C}_{i,n}^{BF} = C_{i,n-i} + (1 - \hat{\gamma}_{n-i}^{CL})\pi_i \hat{k}_i,$$

$$\hat{C}_{i,k}^{BF} = C_{i,n-i} + \left(\hat{\gamma}_k^{CL} - \hat{\gamma}_{n-i}^{CL}\right)\pi_i\hat{k}_i, i+k>n,$$
$$\hat{R}_i^{BF} = \left(1-\hat{\gamma}_{n-i}^{CL}\right)\pi_i\hat{k}_i$$

where

$$\hat{\gamma}_k^{CL} = \prod_{l=k+1}^{n}\frac{1}{\hat{\varphi}_k^{CL}},$$
$$\hat{\varphi}_k^{CL} = \frac{\sum_{j=0}^{n-k}C_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k}C_{j,k-1}}, \quad (1)$$

π_i are the earned premiums (shares of sums of insurance premiums corresponding to insurance risks that have expired at the date of the liability calculation) and $\hat{k}_i$ are estimators of loss ratios $k_i = E\left[\frac{C_{i,n}}{\pi_i}\right]$ that can be obtained, for instance, from market statistics. The product $\pi_i\hat{k}_i$ is taken as the prior estimator $\hat{\alpha}_i$ ($i \in \{0,1,\dots,n\}$).

Another famous method is the *chain-ladder* method. It is based on the assumption that there exist parameters $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ such that the identity

$$E\left[C_{i,k}\right] = \varphi_k E\left[C_{i,k-1}\right]$$

holds for all $i \in \{0,1,\dots,n\}$ and $k \in \{1,\dots,n\}$.

Under this method, estimators of ultimate losses, future losses and accident period reserves are calculated as follows:

$$\hat{C}_{i,n}^{CL} = C_{i,n-i}\prod_{l=n-i+1}^{n}\hat{\varphi}_l^{CL},$$
$$\hat{C}_{i,k}^{CL} = C_{i,n-i}\prod_{l=n-i+1}^{k}\hat{\varphi}_l^{CL}, i+k>n \quad (2)$$
$$\hat{R}_i^{CL} = C_{i,n-i}\cdot\left(\prod_{l=n-i+1}^{n}\hat{\varphi}_l^{CL} - 1\right)$$

where $\hat{\varphi}_l^{CL}$ are from (1).

Stochastic methods

The modification of the *Mack* method we have used in this work is a stochastic model underlying pure chain-ladder. The aim is not only to predict non-observable losses $C_{i,k}$, $i+k>n$ and reserves for accident periods R_i but also to calculate the standard error of the chain-ladder reserve estimate.

The model has three explicit assumptions.

Assumption 1. The expected value of cumulative losses at the development period k is equal to cumulative losses at the development period $k-1$ multiplied by the development factor

$$E\left(C_{i,k}\middle|C_{i,0}, C_{i,1}, \dots, C_{i,k-1}\right) = C_{i,k-1}\varphi_k$$

where $i \in \{0,1,\dots,n\}$ and $k \in \{1,\dots,n\}$.

Assumption 2. The cumulative losses are independent between accident periods for all development periods, in other words, $\{C_{i,0}, C_{i,1}, \dots, C_{i,n}\}$ and $\{C_{j,0}, C_{j,1}, \dots, C_{j,n}\}$ with $i \neq j$ are independent.

Assumption 3. The variance of the cumulative losses at the development period k is proportional to the cumulative losses at the development period $k-1$, in other words,

$$Var\left(C_{i,k}\middle|C_{i,0}, C_{i,1}, \dots, C_{i,k-1}\right) = C_{i,k-1}\sigma_k^2$$

where $i \in \{0,1,\dots,n\}$ and $k \in \{1,\dots,n\}$.

Theorem 1. Under the assumptions 1, 2 and 3 the mean squared error $mse\left(\hat{R}_i\right)$ can be estimated by:

$$\widehat{mse\left(\hat{R}_i\right)} = \hat{C}_{i,n}^2\sum_{k=n-i+1}^{n}\frac{\hat{\sigma}_k^2}{(\hat{\varphi}_k^{CL})^2}\left(\frac{1}{\hat{C}_{i,k-1}} + \frac{1}{\sum_{j=0}^{n-k}C_{j,k-1}}\right)$$

where $\hat{\varphi}_l^{CL}$ are from (1), $\hat{C}_{i,k}$ are from (2) and $\hat{\sigma}_k^2$ are estimators of the variance calculated as follows:

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{n-k}\sum_{i=0}^{n-k}C_{i,k-1}\left(\frac{C_{i,k}}{C_{i,k-1}} - \hat{\varphi}_k^{CL}\right)^2. \quad (3)$$

Definition 3. The square root of an estimator of the mean squared error is defined to be the standard error of $\hat{R}_i$ and is denoted by $s.e.\left(\hat{R}_i\right)$.

Corollary 1. The mean squared error of the total reserve estimate $\hat{R}$ can be estimated by:

$$\left(s.e.\left(\hat{R}\right)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left\{\left(s.e.\left(\hat{R}_i\right)\right)^2 + \hat{C}_{i,n}\left(\sum_{j=i+1}^{n}\hat{C}_{j,n}\right)\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\sum_{k=n-i+1}^{n}\frac{2\frac{\hat{\sigma}_k^2}{(\hat{\varphi}_k^{CL})^2}}{\sum_{t=0}^{n-k}C_{t,k}}\right\}$$

where $\hat{\varphi}_l^{CL}$ are from (1), $\hat{C}_{i,k}$ are from (2) and $\hat{\sigma}_k^2$ are from (3).

The chain-ladder reserve estimate and its standard error are then used as parameters to build the loss distribution. The question is what distribution to choose. The most famous ones are normal and lognormal.

Generally, *bootstrapping* is a resampling method of independent sampling with replacement from an existing sample data with same sample size n, and performing estimation of the sampling distribution based on these resampled data.

The bootstrapping technique that is going to be considered in this work involves the following steps:

1. We calculate the age-to-age factors from a run-off triangle of cumulative losses using the data observed so far:

$$\varphi_{i,k} = \frac{C_{i,k}}{C_{i,k-1}}, i+k \leq n.$$

These factors represent the ratio of loss amounts from one valuation date to another, and they are intended to capture growth patterns of losses over time.

2. The previous step results in an upper triangle of age-to-age factors. Then a lower triangle is built using a technique known as "resampling with

replacement". When an age-to-age factor is sampled, it is not removed from the upper triangle and can hence be sampled again. Age-to-age factors in each column of the lower triangle are sampled from the known age-to-age factors in the same column of the upper triangle. The possibility to choose any age-to-age factor in a column is uniform.

3. The age-to-age factors in the lower triangle are then applied to the corresponding values of the run-off triangle of cumulative losses to project the future claims. Then the reserve estimates $\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i}$ are found.

The results of this step are saved as the results produced by one simulation.

4. Further simulations are produced by repeating steps 2 and 3.

In the end, we can build the distribution of future losses.

These are considered to be the results of one simulation. The procedure is then repeated arbitrary number of times.

Time value of money and inflation

The time value of money is the concept that money a person has currently is worth more than the identical sum in the future due to its potential earning capacity. Discounting is the process of determining the present value of payments that are to be received in the future. According to the new standard, insurers are obliged to adjust the estimates of reserves to reflect the time value of money if the claim settlement exceeds 12 months. Besides, the impact of inflation that measures the rate at which the purchasing power of currency is falling has to be taken into account.

Suppose we have projected the values $\hat{C}_{i,k}$ with $i + k > n$ using one of the modelling methods mentioned above and we have estimated the inflation rate r^{infl} as well as the discrete values of discount rates for future years $\{r_j^{disc}\}_{j\in\{1,\dots,m\}}$ where m is a number of future years in the run-off triangle. Then in order to adjust the cumulative losses for the time value of money and inflation impact we can apply the following formula:

$$\hat{C}_{i,k}^{Adj} = \hat{C}_{i,k} \cdot \left(\frac{1 + r^{infl}}{1 + r_j^{disc}}\right)^{\frac{y}{Y}}$$

where $i + k > n$, $j \in \{1, \dots, m\}$, $\hat{C}_{i,k}$ is one of the cumulative losses in the future year j, Y is a number of days in the year (usually 365) and y is the difference in days between the valuation date and the future date. The future date can be taken, for instance, as the middle of the last month of the future period.

Modelling results

For the modelling purposes, the programming language for statistical computing and graphics R has been used.

As the input run-off triangles of the cumulative losses, we have taken a built-in dataset of R – GenIns that is a run-off triangle of accumulated general insurance claims data. We assume this triangle is formed on the quarterly basis.

We have also set the desired probability of a liability fulfilment as 80%. As the inflation rate we have considered the European Union annual inflation rate in 2019 according to the World Bank (1.631%), as the discount rates – the risk-free rates with volatility adjustment for Euro calculated by European Insurance and Occupational Pensions Authority as of 31/03/2020 (year 1 – 0.055%, year 2 – 0.045%, year 3 – 0.065%).

(All sums of money hereinafter are in conventional units.) For the Bornhuetter-Ferguson method, we have used the following values of earned premiums: 2017Q3 – 3,802,596; 2017Q4 – 6,993,203; 2018Q1 – 7,105,451; 2018Q2 – 6,907,309; 2018Q3 – 5,470,946; 2018Q4 – 5,247,609; 2019Q1 – 5,375,851; 2019Q2 – 9,143,934; 2019Q3 – 6,389,883; 2019Q4 – 5,980,535; and the following values of loss ratios: 2017Q3 – 1.016; 2017Q4 – 0.767; 2018Q1 – 0.747; 2018Q2 – 0.757; 2018Q3 – 0.878; 2018Q4 – 0.964; 2019Q1 – 1.043; 2019Q2 – 0.732; 2019Q3 – 0.873; 2019Q4 – 0.821.

We have chosen the lognormal probability distribution for the Mack method and performed 10,000 simulations under the bootstrapping technique. All calculations have been done as of 31/12/2019.

As the result of modelling, we have obtained that the desired reserve (i.e., the 80th quantile of the distribution) under the bootstrapping technique is equal to 19,531,742 (without adjustment for the time value of money and the inflation) and 19,741,101 (with adjustment for the time value of money and the inflation). According to the Mack method, these values are equal to 20,671,824 and 20,892,024 respectively.

The analysis of the deterministic approach has shown that both the Bornhuetter-Ferguson method and the chain-ladder method have produced results that are not enough to achieve an 80% confidence level. Therefore, we have calculated additional sums that have to be reserved to ensure that an insurance company will be able to fulfill its obligations with the probability 80%. The calculation results are provided in the tables below.

Table 2

Chain-ladder results

Reserve	18,680,856	
Reserve*	18,889,151	
	BS	Mack
Order of quantile	0.656	0.526
Order of quantile*	0.657	0.526
Additional amount	850,886	1,990,968
Additional amount*	851,950	2,002,873

BS – bootstrapping

*the time value of money and inflation impact

Table 3

Bornhuetter-Ferguson results

Reserve	18,460,879	
Reserve*	18,666,725	
	BS	Mack
Order of quantile	0.609	0.490
Order of quantile*	0.611	0.489
Additional amount	1,070,863	2,210,945
Additional amount*	1,074,376	2,225,299

BS – bootstrapping

*the time value of money and inflation impact

To illustrate these results, we have also built plots of the cumulative distribution function using stochastic methods and shown the location of deterministic results on these plots.

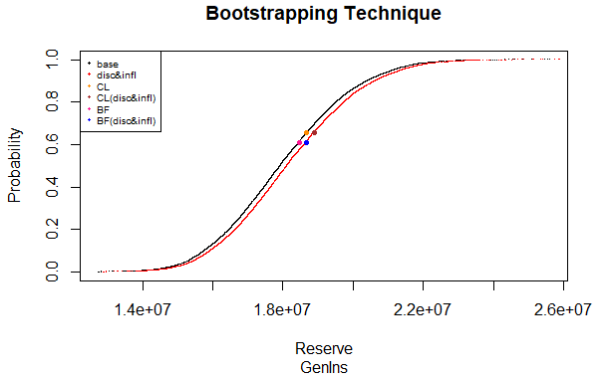
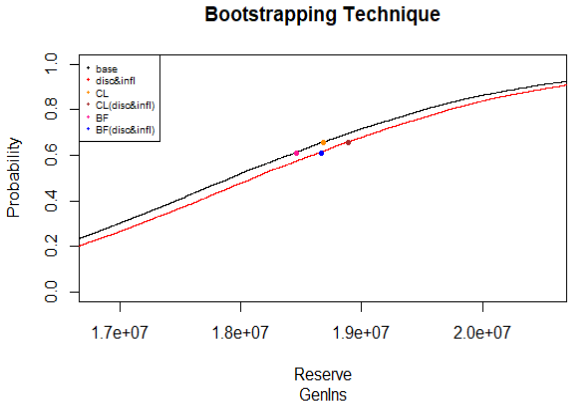


Fig. 1.



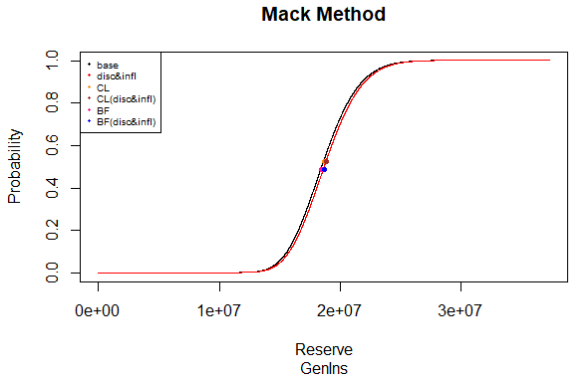


Fig. 2. Close-up

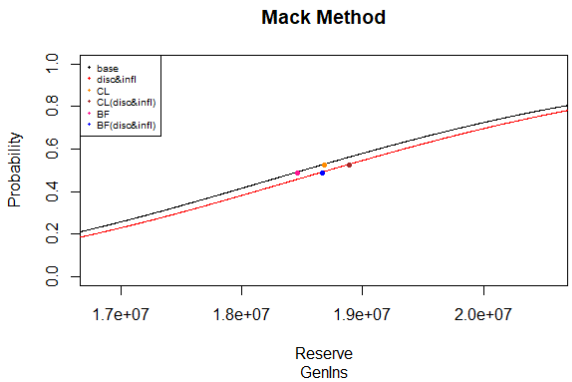
Fig. 3.

Fig. 4. Close-up

Conclusions

The insurance industry and the actuarial science are currently facing quite a lot of fascinating challenges. One of them is new requirements for loss reserves calculations.

In this work, we have considered two common classical deterministic methods for loss reserving – the Bornhuetter-Ferguson method and the chain-ladder method as well as two modifications of famous stochastic models – the Mack method and the bootstrapping technique. In order to achieve the



realistic prognosis of future losses, we have set the desired confidence level, in other words, the probability of a liability fulfilment. We have also juxtaposed deterministic and stochastic results and calculated the additional amounts that have to be reserved in order to reach the confidence level if this additional reserving has been needed. Furthermore, the time value of money and the inflation impact have been taken into account in all cases.

In order to perform these calculations and build plots that illustrate the obtained results, we have used R – the programming language and environment for statistical computing and graphics (IDE: RStudio).

Список використаних джерел

1. IFRS 17 Insurance Contracts: https://www.ifrs.org/issued-standards/list-of-standards/ifrs-17-insurance-contracts/

2. *Klaus D. Schmidt.* Methods and Models of Loss reserving Based on Run-Off Triangles: A Unifying Survey // Casualty Actuarial Society Forum, Fall 2006: https://pdfs.semanticscholar.org/685f/fe447207da2da251a2be5b604cd6731774fc.pdf

3. *Thomas Mack.* Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates // Astin Bulletin, Vol. 23, No. 2, 1993, pp. 213-225.

4. Scott. P. Weinstein. Practical Applications of the Mack and Bootstrapping Methods when Estimating Reserve Ranges // 2007 Casualty Loss Reserve Seminar, September 10, 2007: https://www.slideserve.com/guinevere/scott-p-weinstein-fcas-maaa-ash-ruparelia-2007-casualty-loss-reserve-seminar-september-10-2007

5. *Newton L. Bowers Jr., Hans U. Gerber, James C. Hickman, Donald A. Jones, Cecil J. Nesbitt.* Actuarial Mathematics. The Society of Actuaries, 1997.

6. *Christopher L. Pulp*. Structured Finance and Insurance. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2006.

7. Richard E. Sherman. Estimating the Variability of Loss Reserves: https://www.casact.org/pubs/forum/98fforum/sherman.pdf

8. Inflation, consumer prices (annual %) – European Union: https://data.worldbank.org/indicator/FP.CPI.TOTL.ZG?locations=EU

9. Risk-free interest rate term structures: https://www.eiopa.europa.eu/tools-and-data/risk-free-interest-rate-term-structures-0_en#ExtraordinaryRFRweeklycalculations

References

1. IFRS 17 Insurance Contracts: https://www.ifrs.org/issued-standards/list-of-standards/ifrs-17-insurance-contracts/

2. KLAUS D. SCHMIDT. (2006) Methods and Models of Loss reserving Based on Run-Off Triangles: A Unifying Survey. Casualty Actuarial Society Forum, Fall 2006: https://pdfs.semanticscholar.org/685f/fe447207da2da251a2be5b604cd6731774fc.pdf

3. THOMAS MACK. (1993) Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates. Astin Bulletin, Vol. 23, No. 2, pp. 213-225.

4. SCOTT. P. WEINSTEIN. (2007) Practical Applications of the Mack and Bootstrapping Methods when Estimating Reserve Ranges. 2007 Casualty Loss Reserve Seminar, September 10, 2007: https://www.slideserve.com/guinevere/scott-p-weinstein-fcas-maaa-ash-ruparelia-2007-casualty-loss-reserve-seminar-september-10-2007

5. NEWTON L. BOWERS JR., HANS U. GERBER, JAMES C. HICKMAN, DONALD A. JONES, CECIL J. NESBITT. (1997) Actuarial Mathematics. The Society of Actuaries.

6. CHRISTOPHER L. PULP. (2006) Structured Finance and Insurance. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.

7. RICHARD E. SHERMAN. Estimating the Variability of Loss Reserves: https://www.casact.org/pubs/forum/98fforum/sherman.pdf

8. Inflation, consumer prices (annual %) – European Union: https://data.worldbank.org/indicator/FP.CPI.TOTL.ZG?locations=EU

9. Risk-free interest rate term structures: https://www.eiopa.europa.eu/tools-and-data/risk-free-interest-rate-term-structures-0_en#ExtraordinaryRFRweeklycalculations

Received: 15.02.2019

УДК 519.21 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2019/3.7

Усар І.Я., к. ф.-м. н.
Макушенко І.А., к. ф.-м. н.
Протопоп Ю.О.

Швидкість збіжності стаціонарного розподілу системи з повторними викликами і чергою

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: usar69@ukr.net

I.Ya. Usar, Ph.D.
I.A. Makushenko, Ph.D.
Iu.O. Protopop

The convergense rate of stationary distribution of retrial queueing system with queue

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: usar69@ukr.net

У статті розглядається марковська модель системи з повторними викликами з одним обслуговуючим приладом, одним місцем в черзі та нескінченною орбітою зі змінною інтенсивністю вхідного потоку, керована пороговою стратегією. Для такої моделі знайдено умови існування та формули для ергодичного розподілу кількості вимог у випадку скінченної та нескінченної черги повторних вимог. Отримано швидкість збіжності стаціонарного розподілу скінченної системи з повторними викликами до стаціонарного розподілу нескінченної системи з одним обслуговуючим приладом та одним місцем в черзі.

Ключові слова: стохастична система, повторні виклики, порогова стратегія, стаціонарний режим, швидкість збіжності.

This paper describes a steady state behavior of the retrial system in the case of one server, one place in the queue and an infinity orbit. We research Markov`s models of retrial systems and variable rate of input flow controlled by threshold strategy. We defined stationary regime existence conditions and investigated probability characteristics of process for two-dimension Markov process with continuous time which we took as a main model of the specified system. In stationary regime for probability characteristics of the service process were found explicit formulas. Research methods which we used are based on the initial process approximation by the process with bounded state space. Results of the research allow us to evaluate convergence rates of stationary distribution of finite systems with repeated calls to stationary distribution of infinite systems. Method of probability flow equating is used for obtain explicit expressions for stationary system probabilities through the closed path which are defined in a special way. We considered model for one service devices and one place in the queue, which are controlled by threshold strategies.

Key Words: queue, repeated calls, threshold strategies, stationary regime, convergense rate.

Статтю представив д. т. н., проф. Заславський В.А.

Теорія систем з повторними викликами є одним із важливих розділів теорії масового обслуговування. Такі системи розглянуті в монографіях [1], [2]. Математичні моделі систем з повторними викликами мають широке застосування в практиці (див. [3], [4]).

У даній роботі розглядаються системи обслуговування з повторними викликами типу $[M/M/1/1+1]$ та $[M/M/1/1+1]^{(N)}$. Стандартну систему такого типу можна описати таким чином. Система складається з одного обслуговуючого приладу. Вхідний потік пуассонівський з інтенсивністю λ_j, яка залежить від j - кількості джерел повторних викликів. Вимога, яка надійшла в систему і знайшла прилад вільним, негайно надходить на обслуговування, а обслуживишись, залишає систему. Час обслуговування вимоги має показниковий розподіл з параметром μ. Якщо ж прилад зайнятий, то ця вимога стає повторною і надходить на так звану орбіту. Кожна вимога, яка знаходиться на орбіті намагається потрапити на обслуговування через випадковий час,

© І.Я. Усар, І.А. Макушенко, Ю.О. Протопоп, 2019

розподілений за показниковим законом з параметром ν, і якщо в момент звернення обслуговуючий прилад вільний, то ця вимога надходить на обслуговування. В іншому випадку вона повертається на орбіту і процес повторюється. Таким чином, на відміну від традиційних систем (див. [1],[2]) маємо ситуацію, коли інтенсивність вхідного потоку залежить від кількості вимог в системі.

Процес керування роботою системи визначається на основі порогової стратегії, яка реалізує наступний алгоритм управління процесом обслуговування: вважаємо $\lambda_j = \lambda_1$, якщо $j = 0,1,...,H$, і $\lambda_j = \lambda_2$, якщо $j = H+1,...$. H представляє собою поріг, при переході через який стрибком змінюється інтенсивність вхідного потоку. Змінний характер інтенсивності вхідного потоку в моделях такого типу дозволяє розв'язувати для них оптимізаційні задачі.

Процес обслуговування будемо моделювати двовимірним процесом Маркова $Q(t) = \left(Q_1(t), Q_2(t)\right)$ з неперервним часом у фазовому просторі $S = \{0,1,2\} \times \{0,1,...\}$, де $Q_1(t)$ – кількість зайнятих приладів у момент часу t, $Q_2(t)$ – кількість джерел повторних викликів.

З'ясуємо умови існування стаціонарного режиму для процесу $Q(t), t \geq 0$.

Лема 1. Нехай $\lambda = \overline{\lim_{j\to\infty}} \lambda_j < \infty$. Тоді при $\lambda/\mu < 1$ ланцюг $Q(t)$ ергодичний і його граничний розподіл співпадає з єдиним стаціонарним.

Доведення леми базується на застосуванні теореми Твіді ([1], стор.97).

Для побудови розрахункових алгоритмів і явних формул розглядається скінченна модель $[M/M/1/1+1]^{(N)}$, для якої стаціонарний розподіл $\pi_{ij}^{(N)} = \lim_{t\to\infty} P\left(Q_1(t) = i, Q_2(t) = j\right)$ завжди існує.

При виконанні умови леми 1 і $N \to \infty$ стаціонарні ймовірності $\pi_{ij}^{(N)}$ наближають відповідні стаціонарні ймовірності π_{ij} для системи $[M/M/1/1+1]$.

Відмітимо (див. [1]), що завжди виконується нерівність $\pi_{ij} \leq \pi_{ij}^{(N)}$.

В роботі оцінюється швидкість збіжності стаціонарного розподілу $\pi_{ij}^{(N)}$ системи $[M/M/1/1+1]^{(N)}$ до відповідного розподілу π_{ij} системи $[M/M/1/1+1]$ з повторними викликами.

Позначимо

$$A_i(j) = \begin{cases} \prod_{k=i}^{j-1} \dfrac{(1+\rho_k)\mu + \lambda_{k+1} + (k+1)\nu}{\rho_k[(\lambda_k + k\nu)^2 + k\nu\mu]}, & i < j, \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

де $\rho_k = \dfrac{\lambda_k}{\mu}$ - завантаження системи первинними викликами, коли орбіта $Q_2(t) = k$.

Теорема 1. Якщо $\lambda_j > 0,\ j = 0,1,...,N$, то для будь-якого N стаціонарні ймовірності для системи $[M/M/1/1+1]^{(N)}$ мають вигляд

$$\pi_{0j}^{(N)} = \pi_{0N}^{(N)} \frac{N!\nu^{N-j} A_j(N)}{j!},$$

$$\pi_{1j}^{(N)} = \pi_{0N}^{(N)} \frac{N!\nu^{N-j}(\lambda_j + j\nu)A_j(N)}{j!\mu},$$

$$\pi_{2j}^{(N)} = \pi_{0N}^{(N)} \frac{N!\nu^{N-j}(\mu + \lambda_{j+1} + (j+1)\nu)A_{j+1}(N)}{\lambda_j j!\mu},$$

$$j = 0,...,N-1,$$

$$\pi_{1N}^{(N)} = \frac{\pi_{0N}^{(N)}\left(N\nu + \lambda_N\right)}{\mu},$$

$$\pi_{2N}^{(N)} = \pi_{0N}^{(N)} \frac{(\lambda_N + N\nu)^2 + N\nu\mu}{\mu^2},$$

де

$$\pi_{0N}^{(N)} = \left\{1 + \frac{1}{\mu}(\lambda_N + N\nu) + N!\sum_{j=0}^{N-1} \frac{\nu^{N-j}(\mu + \lambda_j + j\nu)A_j(N)}{j!\mu} + \right.$$

$$\left. + N!\sum_{j=0}^{N-1} \frac{\nu^{N-j}(\mu + \lambda_{j+1} + (j+1)\nu)A_{j+1}(N)}{\lambda_j j!\mu} + \frac{1}{\mu^2}\left((\lambda_N + N\nu)^2 + N\nu\mu\right)\right\}^{-1}.$$

Розглянемо тепер систему $[M/M/1/1+1]$. Для того, щоб знайти представлення для стаціонарного розподілу при виконанні умов леми 1, необхідно в формулах теореми 1 перейти до границі при $N \to \infty$.

Введемо позначення

$$R_j \equiv \lim_{N\to\infty} \pi_{0N}^{(N)} N!\nu^N A_j(N).$$

Неважко показати, що

$$R_j = \left\{\sum_{i=0}^{j} \frac{(\mu + \lambda_i + i\nu)A_i(j)}{i!\nu^i\mu} + \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{\mu + \lambda_i + i\nu}{i!\nu^i\mu A_j(i)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{(\mu + \lambda_{i+1} + (i+1)\nu)A_{i+1}(j)}{\lambda_i i!\nu^i\mu} + \sum_{i=j}^{\infty} \frac{\mu + \lambda_{i+1} + (i+1)\nu}{\lambda_i i!\nu^i\mu A_j(i+1)}\right\}^{-1}.$$

Використовуючи представлення для $\pi_{0N}^{(N)}$ з теореми 1, маємо

$$\lim_{N\to\infty}\pi_{0N}^{(N)}N!\nu^N A_j(N)=\left\{\lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{(\mu+\lambda_i+i\nu)A_i(N)}{i!\nu^i\mu A_j(N)}+\right.$$

$$\left.+\lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{(\mu+\lambda_{i+1}+(i+1)\nu)A_{i+1}(N)}{\lambda_i i!\nu^i\mu A_j(N)}\right\}^{-1}.$$

Коли $i,j<N$

$$\frac{A_i(N)}{A_j(N)}=\begin{cases}A_i(j) & \text{якщо } i<j,\\ A_i(i)=1 & \text{якщо } i=j,\\ A_j^{-1}(i) & \text{якщо } i>j.\end{cases}$$

Тоді

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{(\mu+\lambda_i+i\nu)A_i(N)}{i!\nu^i\mu A_j(N)}=$$

$$=\sum_{i=0}^{j}\frac{(\mu+\lambda_i+i\nu)A_i(j)}{i!\nu^i\mu}+\sum_{i=j+1}^{\infty}\frac{\mu+\lambda_i+i\nu}{i!\nu^i\mu A_j(i)},$$

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{(\mu+\lambda_{i+1}+(i+1)\nu)A_{i+1}(N)}{\lambda_i i!\nu^i\mu A_j(N)}=$$

$$=\sum_{i=0}^{j-1}\frac{(\mu+\lambda_{i+1}+(i+1)\nu)A_{i+1}(j)}{\lambda_i i!\nu^i\mu}+\sum_{i=j}^{\infty}\frac{\mu+\lambda_{i+1}+(i+1)\nu}{\lambda_i i!\nu^i\mu A_j(i+1)}.$$

Маємо

Теорема 2. Якщо для $[M/M/1/1+1]$ - системи виконується умова леми 1, то для неї існують стаціонарні ймовірності

$$\pi_{0j}=\frac{R_j}{j!\nu^j},\qquad \pi_{1j}=\frac{(\lambda_j+j\nu)R_j}{j!\nu^j\mu},$$

$$\pi_{2j}=\frac{(\mu+\lambda_{j+1}+(j+1)\nu)R_j}{\lambda_j j!\nu^j\mu}\frac{\rho_j[(\lambda_j+j\nu)^2+j\nu\mu]}{(1+\rho_j)\mu+\lambda_{j+1}+(j+1)\nu},$$

де

$$R_j=\left\{\sum_{i=0}^{j}\frac{(\mu+\lambda_i+i\nu)A_i(j)}{i!\nu^i\mu}+\sum_{i=j+1}^{\infty}\frac{\mu+\lambda_i+i\nu}{i!\nu^i\mu A_j(i)}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=0}^{j-1}\frac{(\mu+\lambda_{i+1}+(i+1)\nu)A_{i+1}(j)}{\lambda_i i!\nu^i\mu}+\sum_{i=j}^{\infty}\frac{\mu+\lambda_{i+1}+(i+1)\nu}{\lambda_i i!\nu^i\mu A_j(i+1)}\right\}^{-1}.$$

Тепер розглянемо швидкість збіжності стаціонарного розподілу системи $[M/M/1/1+1]^{(N)}$ до відповідного розподілу системи $[M/M/1/1+1]$ при умові, що він існує.

Тоді маємо

$$\left|\pi_{0j}-\pi_{0j}^{(N)}\right|=\frac{1}{j!\nu^j}\left|R_j-\pi_{0N}^{(N)}N!\nu^N A_j(N)\right|,$$

$$\left|\pi_{1j}-\pi_{1j}^{(N)}\right|=\frac{\lambda_j+j\nu}{j!\nu^j\mu}\left|R_j-\pi_{0N}^{(N)}N!\nu^N A_j(N)\right|,$$

$$\left|\pi_{2j}-\pi_{2j}^{(N)}\right|=\frac{\mu+\lambda_{j+1}+(j+1)\nu}{\lambda_j j!\nu^j\mu}\left|R_j-\pi_{0N}^{(N)}N!\nu^N A_{j+1}(N)\right|.$$

З цих рівностей видно, що нам потрібно оцінити швидкість збіжності $\pi_{0N}^{(N)}N!\nu^N A_j(N)$ до R_j. Позначимо

$$B_j=\sum_{i=0}^{j}\frac{(\mu+\lambda_i+i\nu)A_i(j)}{i!\nu^i\mu}+\sum_{i=0}^{j-1}\frac{(\mu+\lambda_{i+1}+(i+1)\nu)A_{i+1}(j)}{\lambda_i i!\nu^i\mu},$$

$$\Theta_j=B_j+\sum_{i=j+1}^{\infty}\frac{\mu+\lambda_i+i\nu}{i!\nu^i\mu A_j(i)}+\sum_{i=j}^{\infty}\frac{\mu+\lambda_{i+1}+(i+1)\nu}{\lambda_i i!\nu^i\mu A_j(i+1)}.$$

Скористаємось наступною лемою

Лема 2. Нехай $\overline{\lim_{N\to\infty}}\lambda_N/\mu<1$. Тоді

$$\lim_{N\to\infty}\left|R_j-\pi_{0N}^{(N)}N!\nu^N A_j(N)\right|(N-2)!\nu^N A_j(N)=\frac{\nu^2}{2\Theta_j^2}.$$

Введемо деякі позначення. Нехай N_0 вибрано так, що $\sup_{j>N_0}\lambda=q_0<1$, а $1<\gamma_0<1/q_0$. Покладемо

$$I(\nu)=\inf\left\{i>0:\frac{[(\mu^2+(2\mu+1)i\nu)+(i\nu)^2](\mu+(i+1)\nu)}{\nu^4 i^4}\le\gamma_0\right\},$$

$$D_j(N)=B_j+\sum_{i=j+1}^{N}\frac{\mu+\lambda_i+i\nu}{i!\nu^i\mu A_j(i)}\left(1+\frac{i\nu}{\lambda_{i-1}}\right).$$

Теорема 3. Нехай в системі з повторними викликами типу $[M/M/1/1+1]$ виконуються умови леми 1. Тоді для будь-якого j

$$\lim_{N\to\infty}(N-2)!\nu^N A_j(N)\left|\pi_{0j}-\pi_{0j}^{(N)}\right|=\frac{1}{j!\nu^{j-2}\mu^2\Theta_j^2},$$

$$\lim_{N\to\infty}(N-2)!\nu^N A_j(N)\left|\pi_{1j}-\pi_{1j}^{(N)}\right|=\frac{\lambda_j+j\nu}{j!\nu^{j-2}\mu^2\Theta_j^2},$$

$$\lim_{N\to\infty}(N-2)!\nu^N A_{j+1}(N)\left|\pi_{2j}-\pi_{2j}^{(N)}\right|=\frac{\mu+\lambda_{j+1}+(j+1)\nu}{\lambda_j j!\nu^{j-2}\mu^2\Theta_j^2}$$

і для кожного фіксованого j та всіх $N\ge\max\{N_0,I(\nu),j\}+1$ справедливі оцінки

$$(N-2)!\nu^N A_j(N)\left|\pi_{0j}-\pi_{0j}^{(N)}\right|\le$$

$$\le\frac{R_j}{j!\nu^j D_j(N_0)}\frac{(\mu+N\nu)^2+N\nu}{N^2\mu^2}\left[1+\frac{2\mu+\nu(N+1)}{\nu N}\frac{1}{1-\gamma_0 q_0}\right],$$

$$(N-2)!\nu^N A_j(N)\left|\pi_{1j}-\pi_{1j}^{(N)}\right|\le$$

$$\le\frac{R_j(\lambda_j+j\nu)}{j!\nu^j\mu D_j(N_0)}\frac{(\mu+N\nu)^2+N\nu}{N^2\mu^2}\times$$

$$\times\left[1+\frac{2\mu+\nu(N+1)}{\nu N}\frac{1}{1-\gamma_0 q_0}\right],$$

$$(N-2)!\nu^N A_j(N)\left|\pi_{2j}-\pi_{2j}^{(N)}\right|\le$$

$$\le\frac{(\mu+\lambda_{j+1}+(j+1)\nu)}{\lambda_j j!\nu^j\mu}\cdot\frac{\rho_j[(\lambda_j+j\nu)^2+j\nu\mu]}{(1+\rho_j)\mu+\lambda_{j+1}+(j+1)\nu}\times$$

$$\times\frac{R_j}{D_j(N_0)}\frac{(\mu+N\nu)^2+N\nu}{N^2\mu^2}\left[1+\frac{2\mu+\nu(N+1)}{\nu N}\frac{1}{1-\gamma_0 q_0}\right].$$

Розглянемо приклад системи $[M/M/1/1+1]^{(20)}$. Нехай $\lambda_j=1{,}1,\ \mu=1,\ \nu=0{,}1$.

Програма, написана на основі отриманих формул, дає наступні значення стаціонарного розподілу

$\pi_{0j}(20)=$

0.00734806, 0.0177823, 0.0264239, 0.0310369, 0.031622, 0.0292629, 0.0252561, 0.0206734, 0.0162316, 0.0123223, 0.00909825,0.00656287, 0.00464089, 0.00322603, 0.00220929, 0.00149327, 0.000997633, 0.000659625, 0.000432092, 0.000280672, 0.00018093.

$\pi_{1j}(20)=$

0.00808286, 0.0213388, 0.034351, 0.0434516, 0.047433, 0.0468206, 0.0429354, 0.0372121, 0.0308401, 0.0246446, 0.0191063, 0.0144383, 0.010674, 0.00774247, 0.00552322, 0.00388249, 0.00269361, 0.00184695, 0.00125307, 0.000842016, 0.00056087.

$\pi_{2j}(20)=$

0.00355646, 0.01105, 0.020315, 0.0287473, 0.0345834, 0.0371954, 0.0368362, 0.0342339, 0.0302457, 0.0256405, 0.0210012, 0.0167072, 0.0129628, 0.00984138, 0.00733058, 0.00536908, 0.0038738, 0.00275753, 0.00193919, 0.00134874, 0.00105029.

У статті отримано нові результати для класу систем з повторними викликами і чергою, з керованою інтенсивністю вхідного потоку, які розвивають теорію стохастичних систем з повторними викликами. Розглянуто модель з одним обслуговуючим приладом і одним місцем в черзі та знайдено оцінку швидкості збіжності стаціонарного розподілу скінченної системи з повторними викликами до стаціонарного розподілу нескінченної системи, що може бути використано при побудові алгоритмів розрахунку стаціонарного розподілу.

Список використаних джерел

1. *Falin G.I.* Retrial Queues / G.I. Falin, J.G.C. Templeton. – London Chapman & Hall, 1997. – 331 p.
2. *Artalejo J.R.* Retrial Queueing Systems. A Computational Approach / J.R. Artalejo, A. Gomes-Corral. – Springer-Verlag, 2008. – 318 p.
3. *Artalejo J.R.* Steady state solution of a single server queue with linear repeated request / J.R. Artalejo, A. Gomes-Corral // J. Applaid Probability. – 1997. – Vol.34. – P. 223-233.
4. *Anisimov V.V.* Analysis of Markov multiserver retrial queues with negative arrivals / V.V. Anisimov, J.R. Artalejo // Queuing Systems. – 2001. – Vol.39. – P. 157-182.

References

1. FALIN, G.I., TEMPLETON, J.G.C. (1997) *Retrial Queues*. London Chapman & Hall.
2. ARTALEJO, J.R., GOMES-CORRAL, A. (2008) *Retrial Queueing Systems. A Computational Approach*. Springer-Verlag.
3. ARTALEJO, J.R., GOMES-CORRAL, A (1997) *Steady state solution of a single server queue with linear repeated request.* J. Applaid Probability. Vol.34, pp. 223-233.
4. ANISIMOV, V.V., ARTALEJO, J.R., (2001) *Analysis of Markov multiserver retrial queues with negative arrivals.* Queuing Systems. Vol.39, pp. 157-182.

Надійшла до редколегії 07.07.2019

УДК 519.72 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2019/3.8

І.О. Завадський, к. ф.-м. н., доцент

Пошук рядка в тексті з урахуванням обмежень на обсяг кеш-пам'яті

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: zava@ukr.net

Igor O. Zavadskyi, Associate Professor, Ph. D.

Pattern matching by the terms of cache memory limitations

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d

Удосконалено кілька відомих підходів до розв'язання задачі пошуку рядка в тексті, таких як двобайтне читання та цикл пропуску. У застосуванні до задачі пошуку рядка в тексті на 256-символьному алфавіті ці вдосконалення дали змогу побудувати родину пошукових алгоритмів, які перевершують за швидкодією всі відомі аналоги для всіх досліджуваних довжин рядка.

Ключові слова: пошук рядка в тексті, алгоритм Боєра-Мура-Хорспула, вікно пошуку.

A few known techniques of exact pattern matching, such as 2-byte read, skip loop, and sliding search windows, are improved and applied to pattern matching algorithms, performing over 256-ary alphabets. Instead of 2-byte read, we offer "1.5-byte read", i.e. reading more than 8 but less than 16 bits of two sequential bytes of a text at each iteration of a search loop. This allows us to fit the search table into L1 cache memory, which significantly improves the algorithm performance. Also, we introduce the so-called double skip loop instead of single one, resolve problems caused by endianness of a machine, and adopt the sliding windows technique to our algorithms. The experimental results averaged over 500 runs of algorithms on 40 different computers show that our algorithms outperform all other tested methods for all tested pattern lengths.

Key words: pattern matching, Boyer-Moore-Horspool, fast search, text search, sliding windows.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

1. Вступ

У даній роботі досліджується одна з найважливіших задач кібернетики: пошук усіх точних входжень заданого рядка у великий текст. Надалі використовуються такі позначення:

T – вхідний текст;

P – шуканий рядок (патерн);

n – довжина вхідного тексту;

m – довжина патерна;

Σ – алфавіт вхідного тексту і патерна;

$|\Sigma|$ – розмір алфавіту Σ

Як правило, ефективність алгоритмів пошуку оцінюють на площині $(|\Sigma|,m)$. Ми розглядаємо на цій площині смугу $|\Sigma|=256$. Це важливий частинний випадок, оскільки у 256-символьному тексті кожен символ займає 1 байт і всі біти цього байту значущі, а отже, бінарні дані (потік бітів) можна розглядати як текст на 256-символьному алфавіті. Тому всі алгоритми пошуку бітового рядка в бінарних даних базуються на певних алгоритмах пошуку рядка в текстах на 256-символьному алфавіті.

Згідно з [1] та нашими власними експериментами, найвищу швидкодію у згаданому випадку демонструють такі алгоритми, як Fast Search (FS, [2]), що базується на порівнянні символів тексту, та родина алгоритмів BNDM, що використовують ідею бітового паралелізму. «Першопредком» усіх вищеназваних алгоритмів є алгоритм Боєра-Мура-Хорспула (BMH, [3]).

Як показано у [4], швидкодію BNDM-алгоритмів можна суттєво покращити завдяки *двобайтному читанню*, тобто формуванню індексу таблиці зсувів на основі не одного, а двох послідовних байтів тексту. Однак цей підхід призводить до суттєвого збільшення обсягу пошукових таблиць. Як свідчать експерименти, час виконання алгоритму стрімко зростає, щойно пошукові таблиці, які він використовує, разом із іншими допоміжними даними, перестають вміщуватися в кеш-пам'ять L1, типовий обсяг якої становить від 16 до 64 Кб. Для 256-символьного алфавіту обсяг пошукової таблиці із двобайтними індексами становить

© І.О. Завадський, 2019

якраз 64 Кб, що в більшості випадків призводитиме до згаданого сповільнення.

Інша відома методика прискорення різноманітних алгоритмів пошуку рядка в тексті полягає у використанні так званого *циклу пропуску* [5], що дає змогу уникати перевірки можливого збігу патерна з вікном пошуку на кожній ітерації пошукового циклу.

У цій роботі ми вдосконалюємо техніки як двобайтного читання, так і циклу пропуску, і разом з ще однією відомою методикою — *вікон пошуку, що ковзають,* застосовуємо їх до алгоритму BMH як до базового рішення. У результаті ми конструюємо родину алгоритмів пошуку рядка у 256-символьному тексті, які, за даними експериментів, перевершують за швидкодією всі інші відомі рішення.

2. Опрацювання нецілого числа байтів

В алгоритмі BMH довжина максимального зсуву вікна пошуку за евристикою «поганого символу» дорівнює m, а його ймовірність для випадкових тексту та патерну становить $(255/256)^m$. Це достатньо багато, якщо патерн короткий, однак якщо, наприклад, m=512, то ця величина становить лише приблизно 0,135. Ситуацію можна виправити якщо, наприклад, виконувати зсув за евристикою двох суміжних символів. Тоді для m=512 ця ймовірність стає більшою за 0,99. Ефективна реалізація цього підходу обговорюється в [4]: вираз $Z[T[i]]$ перетворюється на Z[word(T[i], T[i+1])], де функція word перетворює 2 послідовних байти пам'яті на двобайтне слово в регістрі процесора. У мові програмування C цю функцію можна реалізувати за допомогою механізмів перетворення типів даних, наприклад як *(unsigned short*)(T+i). Фактично, часова складність обчислення значень $Z[T[i]]$ та Z[word(T[i], T[i+1])] є однаковою, проте витрати пам'яті зростають із 256 байтів, потрібних для 1-байтного зчитування, до 64 Кб, потрібних для зберігання таблиці зсувів із 2-байтними індексами.

Однак для розумних довжин патерна, в межах 1000 символів, витрати пам'яті можуть бути суттєво знижені, й при цьому вплив на довжину зсуву буде незначним. Для цього в індексі таблиці зсувів достатньо використовувати не всі біти двобайтного слова. Наприклад, можна застосувати маску: Z[word(T[i]; T[i+1])&mask]. Якщо, скажімо, m=512 і маска *mask* містить 14 одиничних бітів, то ймовірність максимального зсуву для випадкових тексту та патерну становитиме $((2^{14}-1)/\ 2^{14})^{511}\approx 0{,}97$, що всього лише на 0,022 менше, ніж для двобайтного зчитування. Водночас таблиця зсувів міститиме 2^{14} елементів, а не 2^{16}, тобто буде меншою вчетверо. Звичайно, в пошуковому циклі необхідно буде виконувати додаткову операцію *&mask*, однак витрати на неї цілком компенсуються тим, що пошукова таблиця вміщуватиметься в кеш-пам'ять L1.

3. Подвійний цикл пропуску

Іншим недоліком алгоритму BMH є потреба перевіряти збіг патерна з вікном пошуку кожної ітерації пошукового циклу. Проте цієї операції можна уникнути, застосувавши так званий «цикл пропуску», що був вперше введений у [5], а згодом реалізований у низці алгоритмів. Особливо ефективним цей прийом стає, коли зсув виконується за евристикою більш ніж одного символу і ймовірність максимального зсуву є високою. Тоді точне значення довжини зсуву можна в таблиці зсувів не зберігати. Достатньо знати лише, чи є зсув певної фіксованої довжини, наприклад m чи m–1 безпечним, тобто таким, що не може призвести до пропуску патерна. Якщо це так, то ми виконуємо цей зсув фіксованої довжини, інакше перевіряємо збіг і обчислюємо значення подальшого зсуву за деяким іншим алгоритмом.

Враховуючи, що розглянутий у попередньому підрозділі зсув «за 1,5 байтами» з високою ймовірністю є максимальним, ми розвинемо ідею циклу пропуску, зробивши його подвійним. Базове припущення полягає в тому, що значення Z[word(T[i–1], T[i])] може сигналізувати про максимальний зсув з тією ж ймовірністю, що і значення Z[word(T[i], T[i+1])]. Це означає, що навіть якщо умова продовження циклу пропуску не виконується, ми можемо відступити 1 крок назад і, дуже ймовірно, продовжити цикл пропуску з цієї позиції. Такий подвійний цикл пропуску буде особливо ефективним для довгих патернів, коли ймовірність завершення циклу пропуску вище, а вплив кроку на 1 символ назад — нижче.

4. Довші зсуви

Припустимо, що T[i] та T[i+1] — два останніх символи вікна пошуку. Якщо значення Z[word(T[i]; T[i+1])&mask] свідчить про можливість максимального зсуву, це означає що пара символів T[i] та T[i+1] не може належати патерну. Проте символ T[i+1] може збігатися з

P[0] і тому вікно пошуку можна безпечно перемістити на *m*–1 символ вправо, але не на *m*. Якщо патерн короткий, то це зменшення довжини максимального безпечного зсуву може суттєво знижувати продуктивність алгоритму.

Цю ситуацію можна виправити, якщо всім елементам таблиці зсувів Z вигляду Z[word(c, P[0])&mask], $c \in \Sigma$, присвоїти значення, що сигналізує про немаксимальний зсув. Тобто якщо останній байт вікна пошуку міститиме символ *P*[0], то зсув вважатиметься немаксимальним, а величина максимального зсуву тоді може дорівнювати *m*. Здавалось би, це підвищить ймовірність немаксимального зсуву у випадковому тексті не більш ніж на 1/256, що небагато. Однак потрібно брати до уваги порядок зчитування байтів машинного слова із пам'яті в регістр процесора (endianness). Як уже зазначалося, функція word(T[i], T[i+1]) може бути реалізована у вигляді операції перетворення типів *(unsigned short*)(T+i). Однак результат цієї операції залежить від того, як байти машинного слова завантажуються з пам'яті у процесор: зліва направо (наприклад, у комп'ютерах Apple) чи справа наліво (наприклад, в IBM-сумісних комп'ютерах, x86). Зчитування справа наліво є небажаним, якщо індекс таблиці зсувів компонується з повного останнього байту вікна пошуку та неповного передостаннього, оскільки результуюче значення буде зсунуто до лівої межі двобайтного слова (рис. 1а), і обсяг пошукової таблиці стане таким самим, як і в разі використання таблиці зсувів із двобайтним індексом. Проте ситуація, зображена на рис. 1б — неповний останній байт вікна пошуку і повний передостанній — також є небажаною, оскільки, щоб зсув став немаксимальним, достатньо, щоб лише частина останнього байту вікна пошуку збігалася з частиною байту P[0], а отже, ймовірність немаксимального зсуву зростатиме не на 1/256, а на $1/2^{k-8}$, де *k* — кількість одиничних бітів у масці.

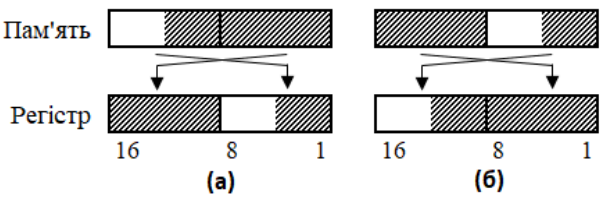


Рис. 1. Завантаження двобайтного слова з пам'яті до регістра процесора на комп'ютері зі зчитуванням байтів справа наліво: (а) повний молодший байт, неповний старший; (б) неповний молодший байт, повний старший.

Тим не менше, ситуація, зображена на рис. 1б, стає прийнятною, якщо пошук відбувається справа наліво: тоді збільшення максимального зсуву з *m*–1 до *m* байтів призводить до зниження його ймовірності не більше ніж на 1/256, а індекс таблиці зсувів формується з молодших бітів двобайтного слова. Ми називатимемо алгоритм пошуку справа наліво *реверсним* і позначатимемо його як *RZk*, де *k* — кількість одиничних бітів у масці.

Псевдокод алгоритму *RZk* наведено на рис. 2. На стадії передобчислень, крім основної пошукової таблиці *Z*, ініціалізується також допоміжна таблиця RQS, що реалізує зсув за алгоритмом [6], але в реверсному варіанті. Подвійний цикл пропуску реалізовано в рядках 11–16. Також припускається, що текст зліва доповнено «стоп-патерном».

```
1  mask ← 2^k–1;                    // Передобчислення
2  foreach i ∈ [0; 2^k) do Z[i] ← 1;
3  for i ← 0 to m–2 do
4    Z[word(P[i]; P[i + 1])] ← 0;
5  for i ← 0 to 2^k–8 do
6    Z[(i << b) | P[m – 1]] ← 0;
7  foreach c ∈ Σ do RQS[c] ← m+1;
8  for i ← m–1 downto 0 do RQS[P[i]] ← i+1;
9  pos ← n;                         // Пошук
10 repeat
11   repeat
12     pos ← pos–m;
13     while Z[word(T[pos]; T[pos+1]) & mask]≠0 do
14       pos ← pos–m;
15     pos ← pos+1;
16   until Z[word(T[pos]; T[pos + 1]) & mask]≠0;
17   pos ← pos–1;
18   перевірити збіг у позиції pos;
19   pos ← pos – RQS[T[pos – 1]] + m;
20 until pos ≥ m;
```

Рис. 2. Реверсний пошуковий алгоритм *RZk*

5. Порівняння швидкодії алгоритмів

Наведений на рис. 2 алгоритм було реалізовано мовою C++ як в «реверсній», так і в «прямій» версії, а також застосовано до нього відому методику *вікон, що ковзають* (sliding windows). Кількість таких вікон у табл. 2 вказано після літери w. Реверсні алгоритми з максимальним зсувом вікна пошуку на *m* байтів позначено літерами RZ, а «прямі» алгоритми з максимальним зсувом вікна пошуку на *m*–1 байтів — літерою Z. Для порівняння були взяті найкращі з відомих алгоритмів у базовій версії,

із вікнами, що ковзають, а також, де це доречно, із застосуванням двобайтного читання. Час виконання найшвидших алгоритмів для кожної довжини патерна зафарбовано сірим.

Пошук виконувався у файлі обсягом 10 Мб, що являв собою архів англомовних текстів, створений одним із сучасних архіваторів. Результати усереднено за 500 пробігами кожного алгоритму на 40 різних комп'ютерах і нормовано таким чином, щоб значущість усіх комп'ютерів була однаковою.

Алгоритм / *m*	2	8	32	128	512
Z8-w2	40.63	19.64	14.58	12.52	12.35
RZ13	67.50	21.21	11.80	8.82	4.51
RZ14	67.92	21.16	11.85	8.92	4.40
RZ13-w2	49.34	15.90	10.36	8.33	3.50
RZ14-w2	49.59	15.97	10.47	8.41	3.41
RZ13-w3	49.45	15.67	9.59	7.93	3.86
RZ14-w3	49.78	15.91	9.74	8.02	3.70
RZ13-w5	50.89	16.04	9.50	8.09	4.32
RZ14-w5	51.38	16.31	9.70	8.19	4.06
Z13-w3	94.31	15.95	9.44	7.90	3.83
Z14-w3	99.79	16.21	9.60	8.03	3.71
RZ16-w2	49.87	17.94	10.86	8.29	4.43
FSBNDM	69.76	20.29	11.61	12.04	12.26
FSBNDM-2byte	90.33	30.55	16.47	17.02	17.13
GSBNDMq2	-	20.84	11.45	11.70	11.82
GSBNDMq2-2byte	-	29.15	15.67	16.06	16.19
SBNDMq2	130.04	21.44	11.50	11.69	11.82
SBNDMq2-2byte	199.07	37.28	16.89	17.32	17.43
SBNDM/BMH	152.10	43.68	19.86	20.38	20.51
LBNDM	118.87	38.63	18.93	13.83	7.33
FSw4	77.47	21.91	9.96	9.23	8.80
FSw6	62.46	18.23	9.65	8.97	7.56
FSw8	57.15	19.11	9.62	8.88	7.07

Табл. 2. Результати експериментів з вимірювання швидкодії алгоритмів (мс)

6. Висновки

Як свідчать результати експериментів, для всіх досліджуваних довжин патерна різні алгоритми із запропонованої родини мають вищу швидкодію, ніж усі відомі аналоги.

З огляду на широту експериментальної бази, ці результати можна вважати достатньо надійними.

Список використаних джерел

1. Faro S. The Exact Online String Matching Problem: a Review of the Most Recent Results. / S. Faro, T. Lecroq // ACM Computing Surveys (CSUR) Surveys Homepage archive. – 2013. – v. 45 (2), February 2013, Article No. 13.

2. Cantone D. Fast-search algorithms: New efficient variants of the Boyer-Moore pattern-matching algorithm. / Cantone D., Faro S. // J. Automata, Languages and Combinatorics. – 2005. – v. 10(5/6), P. 589–608.

3. Horspool R. N. Practical fast searching in strings. / R. N. Horspool // Softw. Pract. Exp. – 1980. – v. 10 (6). – P. 501–506.

4. Peltola H. String matching with lookahead. / H. Peltola, J. Tarhio // Discrete Applied Mathematics. – 2014. – v. 163. – P. 352–360.

5. Hume A. Fast string searching. / A. Hume, D. Sunday // Softw. Pract. Exp. – 1991. – v. 21(11). – P. 1221–1248.

6. Sunday D. M. A very fast substring search algorithm. / D. M. Sunday // Commun. ACM. – 1990. – v. 33 (8). – P. 132–142.

References

1. FARO S., LECROQ T. (2013) The Exact Online String Matching Problem: a Review of the Most Recent Results, *ACM Computing Surveys (CSUR) Surveys Homepage archive*, 45(2), Art. 13.

2. CANTONE D., FARO S. (2005) Fast-search algorithms: New efficient variants of the Boyer-Moore pattern-matching algorithm. *J. Automata, Languages and Combinatorics*, 10(5/6), pp. 589–608.

3. HORSPOOL R. N. (1980) Practical fast search in strings, *Softw. Pract. Exp.* 10(6), pp. 501–506.

4. PELTOLA H., TARHIO J. (2014) String matching with lookahead, *Discrete Applied Mathematics*, 163, pp. 352–360.

5. HUME A., SUNDAY D. (1991) Fast string searching, *Softw. Pract. Exp.* 21(11), pp. 1221–1248.

6. SUNDAY D. M. (1990) A very fast substring search algorithm, *Commun. ACM* 33(8), pp. 132–142.

Надійшла до редколегії 01.10.2019

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 534 +531.7+53.082.5+539.3 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2019/3.9

Отто Г.К., асп.[1]

Інтерферометрія зворотного зв'язку в лазерному резонаторі. Параметрична модель.

[1]ІПММС, Київ, Україна,
e-mail: ottogk@gmail.com

G. K. Otto[1], PhD stud.

Interferometry feedback in the laser resonator. Parametric model.

[1]IPMMS, Kyiv, Ukraine,
e-mail: ottogk@gmail.com

Стаття присвячена альтернативному погляду на пояснення механізму дії приладів, побудованих на інтерферометрії зворотного зв'язку (LFI- модель), який викликаний протиріччями між теорією існуючих моделей та практичними результатами. Пропонується відмінна від моделі Ленга - Кобаясі (LK- модель), параметрична модель LFI (P- модель). На базі теорії, яка ґрунтується на параметричних властивостях LFI- моделі, кількісно обґрунтовується рівень переваги технології LFI над традиційними технологіями. В статті наведений приклад розрахунку потужності корисного сигналу. Розраховано, що на відстані 500 метрів, сигнал згідно P- модель на 34 дБ вищий ніж сигнал, розрахований традиційними моделями. Так, із традиційних моделей випливає зворотно квадратична залежність відношення сигнал/шум (S/N ratio, надалі – SNR) від відстані до мішені - l_t, тобто $SNR{\sim}l_t^{-2}$. На практиці, SNR значно вищий. У рамках P - моделі, теоретично доводиться та експериментально підтверджується інша залежність SNR від l_t, а саме:$SNR{\sim}(l_t * lnl_t^2)^{-1/2}$. Традиційні моделі не розглядають наявність корисного сигналу в струмі накачки, тоді як, фактично, його потужність в більш ніж 10 разів перевищує потужність випромінювання в резонаторі. P - модель усуває протиріччя між теоретичними моделями та практичними результатами.

Ключові слова: інтерферометрія, параметрична LFI-модель, струм накачки.

The article is devoted to an alternative view on the explanation of the mechanism of action of devices based on laser feedback interferometry (LFI-model), which is caused by contradictions between the theory of existing models and practical results. A view other than the Lang-Kobayashi model (LK model) and the parametric LFI model (P model) are proposed. Due to the theory, which is based on the parametric properties of the LFI-model, the level of advantage of LFI technology over traditional technologies is quantitatively substantiated. The article gives an example of calculating the useful signal power. It is calculated that at a distance of 500 meters, the signal according to the P-model is 34 dB higher than the signal calculated by traditional models. Thus, from the traditional models follows the inverse square dependence of the signal-to-noise ratio (S / N ratio, hereinafter - SNR) on the distance to the target l_t, viz.: $SNR{\sim}l_t^{-2}$. In practice, the SNR is much higher. Within the P-model, another dependence of SNR on l_t, is theoretically proved and experimentally confirmed, viz.: $SNR{\sim}(l_t * lnl_t^2)^{-1/2}$. Traditional models do not consider the presence of a useful signal in the pump current, while, in fact, its power is more than 10 times greater than the radiation power in the resonator. The P-model eliminates contradictions between theoretical models and practical results.

Key Words: interferometry, LFI model, pump current..

Статтю представив к.ф-м.н. Розора І.В.

Вступ

Неавтономні моделі лазерів вивчаються вже більше 50-ти років. Інтерес до них був викликаний головним чином прагненням вивчити вплив випромінювання, повернутого зовнішніми поверхнями всередину резонатору, бо воно погіршувало якість лазерного променя.

З часом звернули увагу на корисні властивості цього ефекту. Так виникла технологія self-mixing, яка використовувала інтерферометрію зворотного зв'язку Laser Feedback Interferometry (LFI). Роботи по LFI носять як теоретичний так і (головним чином) прикладний характер і присвячені вимірам параметрів руху: відстані, швидкості, параметрам

© Отто Г.К., 2020

вібрацій. Всі вони засновуються на LK- або 3-дзеркальній моделі [1], [2].

Дана робота з'явилась в наслідок експериментів, пов'язаних із дистанційними вимірами віддалених вібрацій.

Для експериментів були використані лазерні діоди #LD-1060-0200-AR-2 виробництва TopticaPhotonics з анти-рефлекторним покриттям (AR-coating) передньої поверхні кристала. Довжина активного елемента становить ≈ 300 μ. Зовнішній резонатор довжиною ~ 320 мм з дифракційним виводом випромінювання. Діаметр пучка в резонаторі 30 мм, діаметр головного дзеркала 0.3 мм. Коефіцієнт відбиття становить ~0.99 по інтенсивності.

Під час експериментів були виявлені факти, які не пояснювались відомими моделями: Ленга-Кобаясі (LK – модель) [1] та її різновидом – 3-дзеркальною моделлю [2], хоча до цього часу всі дослідження, які ґрунтуються на LFI користуються цими моделями.

Ось ці факти:

- Виявлено набагато слабкіше зменшення відношення сигнал/шум (S/N) при збільшенні відстані (l_t) до мішені ніж зворотно квадратичне: $S/N \propto l_t^{-2}$, як це випливає із розрахунків, виконаних згідно з прийнятими на сьогодні, вище зазначеними моделями.
- Під час експериментів спостерігалось значно більше (>10 разів) відношення сигнал/шум (S/N) при виділенні корисного сигналу із струму накачки лазера, ніж із випромінювання резонатору, яке зазвичай використовується.
- Вище згадані моделі не передвіщають навіть наявність корисного сигналу в струмі накачки, не кажучи вже про його потужність.

З ціллю усунення зазначених недоліків загальноприйнятих моделей та пояснення експериментально виявлених фактів була запропонована інша, параметрична (Parametric) [7] модель LFI (в подальшому P- модель).

Аналізу причин значного збільшення чутливості, тобто першому з наведених та не з'ясованих фактів, присвячена ця робота[1].

Теоретична частина

Наведемо теоретичне обґрунтування та експериментальне підтвердження P-моделі.

Схема загальноприйнятих LK- та 3-дзеркальної моделі [3] виглядає наступним чином:

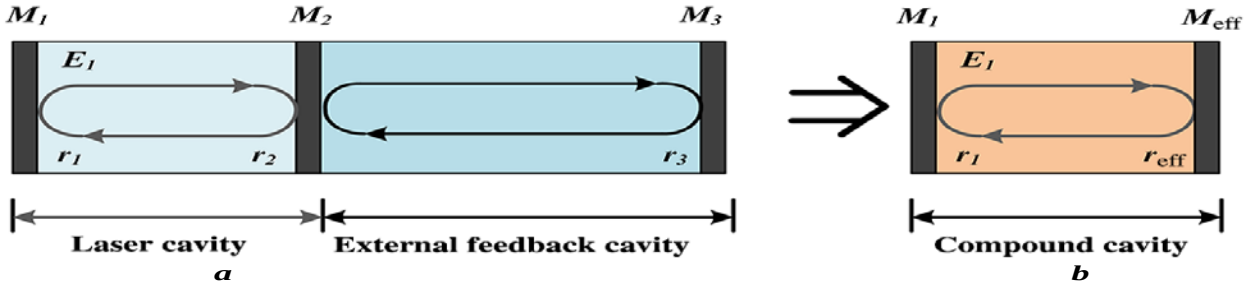


Рис. 1. Схема LK- та 3-дзеркальної моделі
The schematic diagram of three-mirror model in the laser feedback system (a). The standard three-mirror model (b). The simplified model of the compound cavity. M1, M2, mirrors of the resonant cavity; M3, the equivalent reflective mirror of the target; Meff, the compound reflective mirror of M2 and M3

[1]З'ясуванню причин наявності та кількісного визначення корисного сигналу в струмі накачки буде присвячена наступна робота.

На Рис. 2 наведено схему Р- моделі:

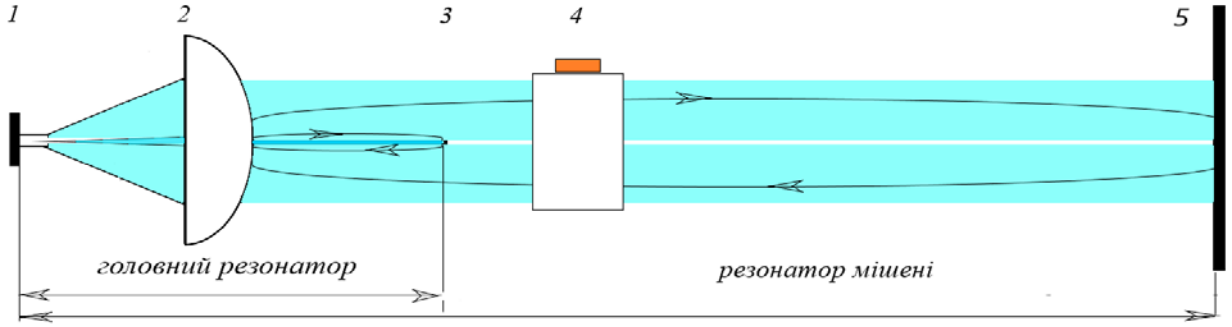


Рис. 2. Схема Р- моделі системи LFI

1-лазерний діод із глухим заднім дзеркалом та просвітленою передньою гранню, 2-коліматорний об'єктив, 3-дзеркало головного резонатору, 4-акустооптичний модулятор, 5-поверхня мішені. 1↔3 - дзеркала головного резонатору, 1↔5 – дзеркала резонатору мішені.

В якості відправної будемо використовувати систему балансних рівнянь, яка описує роботу класичного одномодового лазеру без LFI, [4]:

$$\frac{d}{dt}E^*(t) = i\omega(N)\cdot E^*(t) + \frac{1}{2}\left(G(N) - \frac{1}{\tau_p}\right)\cdot E^*(t) \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}N(t) = J - \frac{N(t)}{\tau_s} - G(N)\cdot E^2(t)$$

$$E^*(t) = E(t)\cdot \exp\left(i\omega t\right)$$

де:

$i\omega(N)$- різниця між резонансною частотою резонатора та частотою генерації;

$E(t)$- амплітуда електричного поля;$N(t)$- концентрація електронів в резонаторі;$G(N)$- підсилення;τ_p- тривалість життя фотонів у резонаторі;τ_s- тривалість життя електронів;J- змінна, пропорційна току інжекції.

Зазначимо, що складений резонаторна рис. 2 буде мати усереднений на своїй довжині коефіцієнт заломлення:

$$\mu = \frac{\mu_1\cdot l_1 + \mu_2\cdot l_2}{l_1 + l_2} \approx \mu_1\cdot\frac{l_1}{l_2} + \mu_2,$$

де: μ_1, l_1- коефіцієнт заломлення та довжина активного тіла, μ_2, l_2 - коефіцієнт заломлення та довжина повітряної частини резонатора. Зважаючи на те, що $\frac{l_1}{l_2} \approx 10^{-3}$ приймемо $\mu \approx \mu_2 = const$, так як це випливає із [4], стор. 29, формула (2.61). При цьому $i\omega(N)\cdot E^*(t) \approx 0$, тож цією змінною можна знехтувати. Таким чином рівняння (1) при наявності повітряної частини зовнішнього резонатору значно (в 1000 разів) довшому ніж активне середовище, можна дещо спростити [2]:

$$\frac{d}{dt}E^*(t) = \frac{1}{2}\left(G(N) - \frac{1}{\tau_p}\right)\cdot E^*(t) \qquad (2)$$

Порівнюючи моделі на рис.1 та рис.2, бачимо, що відмінність *P*- моделі від *LK*- та *З*- дзеркальної в тому, що у *P*- моделі обидва резонатори - головного дзеркала та мішені працюють паралельно, тобто містять активне середовище та мають спільне «глухе» дзеркало.

У *P*- моделі тривалість життя фотонів у складеному резонаторі буде залежати від тривалості життя та співвідношення кількості фотонів в парціальних резонаторах: $\tau_p = f(r_m, \tau_m; r_t, \tau_t)$, де τ_m, r_m- тривалість життя фотонів та коефіцієнт відбиття по інтенсивності в головному резонаторі, τ_t, r_t- тривалість життя фотонів та коефіцієнт відбиття по інтенсивності в резонаторі мішені. В загальному випадку τ_m, τ_t та r_t, r_m можуть бути функціями часу.

Загальноприйняті моделі передбачають, що відбите зовнішньою поверхнею випромінювання інтерферує із випромінюванням в середині резонатору, але при цьому ніякі параметри лазеру не змінюються. Тобто моделі не є параметричні.

У *P*- моделі віддалена відбиваюча поверхня є частиною складеного резонатору. Його змінні коефіцієнт відбиття та довжина модулюють тривалість життя фотонів складеного резонатору, що є модуляцією втрат або добротності, які є енергоємними параметрами лазеру. Тому ***P***-

[2]Вивід рівняння (2) наведений в додатку 1.

модель є параметрична. Саме з цього випливають її властивості, про які піде мова далі.

P- модель ґрунтується на передумові, що на протязі спільної ділянки резонаторів мішені та головного дзеркала, зустрічатимуться фотони, відбиті мішенню та головним дзеркалом. Ймовірність того, що обраний навмання фотон (Ph) належить до множини Г, відбитих головним дзеркалом чи М – мішенню, при тому, що $\Gamma \bigcap M = \emptyset$, зазначимо відповідно p_1 та p_2. Події: «Ph⊂ Г» та «Ph⊂ М» складають повну систему, тобто: $p_1 + p_2 = 1$, де $\{p_1, p_2\}$- щільність поділу ймовірностей випадкової змінної «приналежність фотону», яка приймає одне з двох можливих значень, наведених вище.

Середнє значення випадкової величини τ_p, розподіленою у відповідності із щільністю розподілення: $P\{\{\tau_i = \tau_m\} = p_1, \{\tau_i = \tau_t\} = p_2\}$, буде визначатися:

$$\overline{\tau_p} = \sum_i p_i \cdot \tau_i = p_1 \cdot \tau_m + p_2 \cdot \tau_t \tag{3}$$

Загальна кількість фотонів в резонаторі при сталому рівні накачки та з коефіцієнтом відбиття глухого дзеркала близького до одиниці, пропорційна сумарному коефіцієнту відбиття дзеркал мішені та головного:

$$r_m + (1 - r_m^2) \cdot r_t \tag{4}$$

Ймовірність p_1 є відношення коефіцієнта відбиття головного дзеркала r_m та сумарного коефіцієнту відбиття (4). Ймовірність p_2 є відношення коефіцієнта відбиття мішені r_t та сумарного коефіцієнту (4). Тож тривалість життя фотонів складеного резонатору у відповідності із (3)

$$\overline{\tau_p} = \frac{r_t}{r_m + (1 - r_m^2) \cdot r_t} \cdot \tau_t + \frac{r_m}{r_m + (1 - r_m^2) \cdot r_t} \cdot \tau_m \tag{5}$$

Враховуючи, що $r_m \gg r_t$, вираз (5) перепишемо у дещо іншому вигляді:

$$\overline{\tau_p}^{-1} = \left(\tau_m + \frac{r_t}{r_m} \cdot \tau_t\right)^{-1} = {\tau_m}^{-1} \cdot \left(1 + \frac{r_t}{r_m} \cdot \frac{\tau_t}{\tau_m}\right)^{-1}$$

Зазначимо:

$$\left|\frac{r_t}{r_m} \cdot \frac{\tau_t}{\tau_m}\right| = x, \qquad x \ll 1$$

Скористаємось розкладенням:

$$(\mathrm{x} + 1)^{-1} = 1 - \mathrm{x} + \mathrm{x}^2 - \cdots \text{при} |\mathrm{x}| < 1.$$

Відкинувши старші члени розкладення, отримаємо:

$$\overline{\tau_p}^{-1} = \frac{1}{\tau_m} - \frac{r_t}{r_m} \cdot \frac{\tau_t}{\tau_m^2} \tag{6}$$

Зазначимо, що згідно із [4], стр. 137, з урахуванням фази відбиття:

$$r_t = |r_t| \cdot e^{-i \cdot \varphi} \tag{7}$$

де: $\varphi = \varphi(t)$ - фаза відбиття поверхні мішені, яка при відключеному АОМ, поз. 4 на Рис. 2, буде визначатись довжиною хвилі випромінювання та відстанню до мішені. В присутності накачки $\varphi(t) = \sin 2\omega t$.

Підставимо (6) та (7) у рівняння (2):

$$\frac{d}{dt} E^*(t) = \frac{1}{2} \cdot G(N)^{\frac{1}{2}} \cdot E^*(t) - \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{1}{\tau_m}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot E^*(t) + \left(\frac{r_t}{r_m} \cdot \frac{\tau_t}{\tau_m^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot E^*(t) \cdot e^{i\varphi}\right) \tag{8}$$

Доданки у скобках є членами рівняння, що інтерферують. Після врахування інтерференції рівняння (8) виглядатиме так:

$$\frac{d}{dt} E^*(t) = \frac{1}{2} \cdot G(N) \cdot E^*(t) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\tau_m} \cdot \left(1 + \frac{r_t}{r_m} \cdot \frac{\tau_t}{\tau_m} + 2 \cdot \left(\frac{r_t}{r_m} \cdot \frac{\tau_t}{\tau_m}\right)^{1/2} \cdot e^{i\varphi}\right) \cdot E^*(t) \tag{9}$$

Помноживши (9) на $2 \cdot E^*(t)$, згідно Д1.2 отримаємо:

$$\frac{dS}{dt} = G(N) \cdot S - \frac{1}{\tau_m} \cdot \left(\left(1 + \frac{r_t}{r_m} \cdot \frac{\tau_t}{\tau_m}\right) + 2 \cdot \left(\frac{r_t}{r_m} \cdot \frac{\tau_t}{\tau_m}\right)^{1/2} \cdot e^{i\varphi}\right) \cdot S, \tag{10}$$

Де: $S = S(t)$ - кількість фотонів, яке помножене на $h\nu$ (ν - частота, h - постійна Планка) представляє енергією випромінювання; r_t, r_m - коефіцієнти відбиття по інтенсивності мішені та головного резонатору, відповідно.

Чи не найважливішим параметром будь якого приладу, який базується на аналізі відбитого випромінювання (локатор, лідар, віброметр) є характер залежності потужності прийнятого сигналу від відстані до об'єкту. У формулі (10) 3-й додаток обумовлює інтенсивність відбитого мішенню корисного сигналу, який складається із постійного множника та частини, залежної від відстані до об'єкту – $I(l_t) \sim (r_t \cdot \tau_t)^{1/2}$:

$$r_t = r_{t0} \cdot \left(\frac{l_{t0}}{l_t}\right)^2 \qquad (11)$$

Де: r_0 - коефіцієнт відбиття мішені на мінімально можливій відстані l_0 від приладу (альбедо мішені), l_t - відстань до мішені. Вираз (11) за умовою, що має місце Ламбертове відбиття, є однією з основних залежностей радіолокації – квадратичне зменшення інтенсивності відбитого сигналу при віддаленні від об'єкту [8].

$$\tau_t = 2 \cdot l_t / c \cdot \ln r_t^{-1} \qquad (12)$$

Див. Додаток 2.

Таким чином:

$$I(l_t) \propto 2 \cdot \sqrt{r_{t0} \cdot \left(\frac{l_{t0}}{l_t}\right)^2 \cdot \frac{2 \cdot l_t}{c \cdot \ln r_t^{-1}}} = 2 \cdot l_{t0} \left(\frac{r_{t0}}{c}\right)^{1/2} \cdot 1.41 \cdot (l_t \cdot \ln r_t^{-1})^{-1/2} =$$

$$2.82 \cdot l_{t0} \left(\frac{r_{t0}}{c}\right)^{1/2} \cdot \left(l_t \cdot \ln\left(r_{t0} \cdot \left(\frac{l_{t0}}{l_t}\right)^2\right)^{-1}\right)^{-1/2} \qquad (13)$$

Де: $I(l_t)$ – інтенсивність змінної складової інтерференційного члена, який відображає інтенсивність корисного сигналу, повернутого мішенню.

Для більшої наочності введемо такі коефіцієнти:

$$k_1 = 2.82 \cdot l_{t0} \cdot \left((r_m \cdot \tau_m)^{-1} \cdot \frac{r_{t0}}{c}\right)^{1/2},$$

$$k_2 = r_{t0} \cdot l_{t0}^2$$

З урахуванням (10), k_1, k_2 та (13), $I(l_t)$ виглядатиме наступним чином:

$$(l_t) = k_1 \cdot (l_t \cdot \ln(k_2 \cdot l_t^{-2}))^{-1/2} \qquad (14)$$

Числові приклади

Із (10) та (14) випливає, що інтенсивність корисного сигналу не залежить від інтенсивності зондувального випромінювання, а залежить лише від співвідношення тривалості життя фотонів та коефіцієнтів відбиття головного дзеркала та мішені.

$r_m := 4 * 10^{-2}$ – Коефіцієнт відбиття головного дзеркала

$c := 3 * 10^8$ – Швидкість світла

$r_{t0} := 1 * 10^{-2}$ – Коефіцієнт відбиття мішені на відстані lt0

$l_{t0} := 2.0$ – значення відстаніl_{t0}

$l_t := 10,10.1..50$ – відстань до мішені

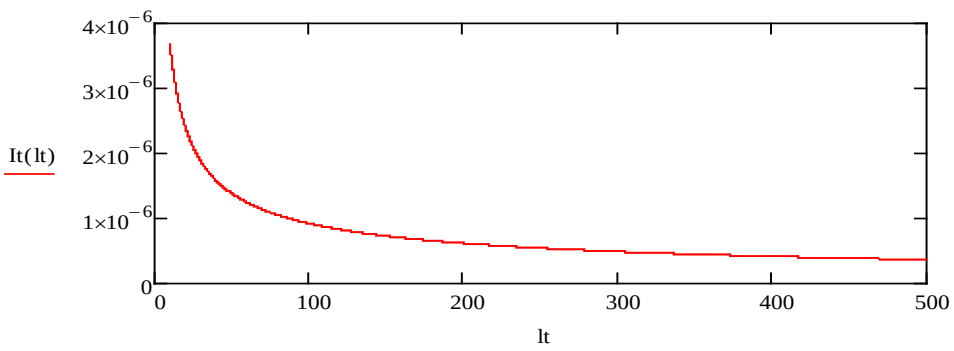


Рис. 3. Залежність інтенсивності змінної складової частини випромінювання, що циркулює в резонаторі, від відстані до мішені.

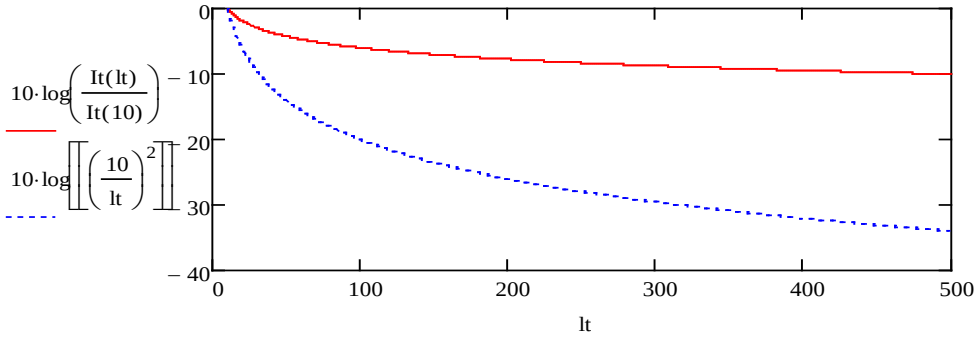


Рис. 4. Зменшення інтенсивності змінної складової (в дБ) при збільшенні відстані до мішені. Червона лінія - P- модель, синя – класична.

Із Рис. 4 випливає, що в порівнянні із класичною, *P*- модель має значну перевагу при роботі на далеких відстанях. Так, на відстані 500 метрів перевага становить близько 34 дб.

Користуючись залежністю, наведеною на Рис.1, знаючи рівень струму порогу генерації та відстань до мішені, можна легко визначити потужність корисного сигналу - P_S у струмі накачки:

Приклад:

$I_{\text{пор}} = 50\ ma, U_D = 2\ V, I_T(200) = 0.8 \cdot 10^{-6}$,

тоді: $P_S = \frac{1}{2} \cdot I_{\text{пор}} \cdot U_D \cdot I_t(l_t) = 100 \cdot 0.8 \cdot 10^{-6} = 40\ \mu W$.

Тобто змінна складова потужності накачки лазеру буде дорівнювати $40\ \mu W$.

Із питання обґрунтування (інтуїтивно зрозумілого) коефіцієнту $\frac{1}{2}$ при підрахунку P_S, див. зноску на стр. 2.

Висновки

Виграш у інтенсивності повернутого корисного сигналу при збільшенні відстані x до мішені у схемі LFI, в порівнянні із класичними схемами пояснюється тим, що послаблення компенсується збільшенням часу життя фотонів τ_p. Послаблення в схемі LFI пропорційно$(x \ln x^2)^{1/2}$, а не x^2, як у класичних схемах.

В схемі LFI має місце модуляція добротності резонатору – енергоємного елементу лазеру. Як відомо із [7], модуляція енергоємних параметрів будь якої резонансної системи є параметричний вплив, який при сприятливих умовах приводить до розвитку параметричного резонансу.

У *P*- моделі параметричний резонанс грає виключно важливу позитивну роль. Дякуючи параметричному резонансу корисний сигнал може бути підсилений у Qразів, де Q - добротність резонансної системи. Практично важливим вбачається аналіз умов виникнення, розвитку та ступінь впливу параметрів моделі на досягнення максимальної добротності резонансу.

Окремим науково-технічним завданням вбачається підтримка резонатора в режимі ***стабільного*** параметричного резонансу.

Додаток 1. Вивід рівняння балансу фотонів для електричного поля.

Будемо виходити разом з [8] із спрощеного рівняння для кількості фотонів -S, без члена, відповідального за спонтанне випромінювання:

$$dS/dt = S(G(t) - 1/\tau_{ph}) \qquad (Д1.1)$$

Де:

dS/dt - швидкість виходу фотонів із резонатору;

$S \cdot G(t)$ – швидкість надходження фотонів в резонатор;

S/τ_{ph} - швидкість втрат фотонів на зворотний зв'язок.

Інтуїтивно рівняння Д1.1 віддзеркалює те, що інтенсивність корисного випромінювання дорівнює різниці між швидкістю надходження фотонів у резонатор (накачки резонатору) та швидкості витрат на підтримання рівня порогу генерації.

$$S(t) = |E(t)|^2;\ E(t) = \sqrt{S(t)} \cdot e^{j\omega t};$$

$$S(t) = E(t) \cdot e^{j\omega t} \cdot E(t) \cdot e^{-j\omega t}$$

Будемо вважати, що частота генерації ω дорівнює власній частоті резонатора Ω. В іншому випадку поле мало би більш складний вигляд.

$$\frac{dS(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(E(t)\cdot e^{j\omega t}\right)\cdot E(t)\cdot e^{-j\omega t} + \frac{d}{dt}\left(E(t)\cdot e^{-j\omega t}\right)\cdot E(t)\cdot e^{j\omega t}$$
$$= \left(\frac{dE(t)}{dt}\cdot e^{j\omega t} + j\omega\cdot e^{j\omega t}\cdot E(t)\right)\cdot E(t)\cdot e^{-j\omega t} + \left(\frac{dE(t)}{dt}\cdot e^{-j\omega t} - j\omega\cdot e^{-j\omega t}\cdot E(t)\right)$$
$$* E(t)\cdot e^{j\omega t}$$
$$= \left(\frac{dE(t)}{dt}\cdot e^{j\omega t} + j\omega\cdot e^{j\omega t}\cdot E(t)\right)\cdot E(t)\cdot e^{-j\omega t} + \left(\frac{dE(t)}{dt}\cdot e^{j\omega t} - j\omega\cdot e^{j\omega t}\cdot E(t)\right)$$
$$\cdot E(t)\cdot e^{-j\omega t} = (G(t) - 1/\tau_{ph})\cdot E(t)\cdot e^{j\omega t}\cdot E(t)\cdot e^{-j\omega t}$$

Скоротимо на $E(t)\cdot e^{-j\omega t}$ та приведемо подібні члени:

$$\frac{dE(t)}{dt}\cdot e^{j\omega t} = \frac{1}{2}((G(t))^{1/2} - \left(1/\tau_{ph}\right)^{1/2})\cdot E(t)\cdot e^{j\omega t} \qquad (Д1.2)$$

(Д1.2) є рівняння балансу фотонів для електричного поля.

Додаток 2. Вивід співвідношення для часу життя фотонів - τ_p.

Будемо вважати, що коефіцієнт відбиття глухого дзеркала дорівнює 1.

Кількість фотонів в момент часу t_i, тобто післяодногоциклувідбиття:

$$S(t_i) = R\cdot S(t_{i-1}) \qquad (Д2.1)$$

Кількість фотонів в момент часу t_m, після mциклівідбиття:

$$S(t_m) = R^m\cdot S(t_0) \qquad (Д2.2)$$

$$t_m = \frac{2\cdot L}{c}\cdot m \qquad (Д2.3)$$

Де:

$S(t_0)-$ кількість фотонів в резонаторі в початковий момент часу;

m – кількість циклів відбиття в резонаторі;

$R-$ коефіцієнт відбиття по інтенсивності, $R<1$;

L – довжина резонатору;

c - швидкість світла в резонаторі.

Вирази (Д2.1), (Д2.2) задають процес, якому підкорюються багато інших процесів: природних, соціальних, фінансових, медичних і т. д. Принцип формулюється:

«Швидкість зростання пропорційна величині, що зростає», тобто:

$$\frac{dS(t)}{dt} \propto S(t)$$

З цього випливає диференційне рівняння, яке після розділення змінних інтегрується:

$$\int \frac{dS(t)}{S(t)} = \int k\cdot dt \qquad (Д2.4)$$

Після інтегрування отримаємо:

$$\ln S(t_m) = k\cdot t_m + C \qquad (Д2.5)$$

Визначимо C, враховуючи начальні умови:

при $m=0$;

$S(t_m) = S(t_0)$ та $t_m = 0$.

З Д2.5 випливає:

$$C = \ln S(t_0) \qquad (Д2.6)$$

Підставляючи Д2.3 та Д2.6 в Д2.5, отримаємо:

$$k = \frac{c\cdot\ln R}{2\cdot L} \qquad (Д2.7)$$

Враховуючи те, що k повинен мати розмірність $1/$сек та бути від'ємним, як це випливає з Д2.1:

$$-k = \frac{1}{\tau_p} \qquad (Д2.8)$$

Ми отримали співвідношення для часу життя фотонів - τ_p :

$$\tau_p = -\frac{2\cdot L}{\mathrm{c}\cdot\ln R} = \frac{2\cdot L}{c\cdot\ln R^{-1}}$$

Примітно, що τ_p не залежить ні від Sнівідm, тобто визначається виключно конструктивними параметрами резонатору.

Зазначимо, що випадковий характер довжини прольоту окремого фотону - L, коефіцієнту відбиття - R та швидкості світла - c, обумовлюють випадковий характер - τ_p та, як слідство, розширення спектру частот генерації:

$$\Delta\nu = (2\cdot\pi\cdot\tau_p)^{-1}.$$

Список використаних джерел

1. *R.Lang and K. Kobayashi* ‘External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties”, IEEE J. QuantumElectronics. 16(3), 1980. – 347-355 с.

2. *P.J. de Groot, G.M. Gallatin, and S.H. Macomber*.“Ranging and velocity generationin a backscatter- modulation laser diode,” Appl. Opt. 27, 1988. – vol. 31. 4475-4480 с.

3. *Jiyang Li, Haisha Niu and Yanxiong Niu* ‘Laser feedback interferometry and applications: a review, OpticalEngineering 56(5), 050901 (May 2017)

4. *K. Petermann.* Laser diode modulation and noise, Published by Kluwer Academic Publishers, 1988

5. Jaynes E.T. The maximum entropy production principle. Ann. Rev. Phys. Chem.,1980

6. Martyushev L., Seleznev V. Maximum entropy production principle in physics, chemistry and biology // Phys. Reports. 2006. vol. 426(1). – 1-45 с.

7. Н.Д. Папалекси Академия наук СССР. Собрание трудов. Под ред. Проф. С.М. Рытова.,. Изд-во АН СССР 1948.– 350-428 с

8. Справочник по радиолокации. Редактор М. Сколник т.4 Радиолокационные станции и системы. Перевод с английского под ред. М.М. Вейсбейна. М. Сов. Радио 1978

References

1. *R. Lang and K. Kobayashi.*‘External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties”, IEEE J. Quantum Electronics. 16(3), 1980. – 347-355 p.

2. *P.J. de Groot, G.M. Gallatin, and S.H. Macomber*.“Ranging and velocity generation in a backscatter- modulation laser diode,” Appl. Opt. 27, 1988. – vol. 31. 4475-4480 p.

3. *Jiyang Li, Haisha Niuand Yanxiong Niu* ‘Laser feedback interferometry and applications: a review, Optical Engineering 56(5), 050901 (May 2017)

4. *K. Petermann.* Laser diode modulation and noise, Published by Kluwer Academic Publishers, 1988

5. Jaynes E.T. The maximum entropy production principle. Ann. Rev. Phys. Chem.,1980

6. Martyushev L., Seleznev V. Maximum entropy production principle in physics, chemistry and biology // Phys. Reports. 2006. vol. 426(1). – 1-45 p.

7. N.D. Papaleksi Academy of Sciences of the USSR. Collection of works. Ed. Prof. CM. Rytova.,. Publishing House of the USSR Academy of Sciences 1948 .-- 350-428 p

8. Handbook of radar. Editor M. Skolnikvol. 4 Radar stations and systems. Translation from English, ed. M.M. Weisbane. M. Sov..Radio 1978

Надійшла до редколегії 10.07.20

Підписано до друку . Формат _____. Друк. офс.
Папір офс. №__. Друк. арк. ____. Тираж _____. Зам. ____.
Друкарня _____.