

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

В І С Н И К

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

№2 2019

**Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
випуск №2, 2019,**

Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Фізика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, механіко-математичного факультетів, факультету радіофізики, електроніки та комп’ютерних систем і факультету комп’ютерних наук та кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1222 від 07.10.2016), та реферується в Реферативному журналі, Zentralblatt MATH.

Редакційна колегія:

Козаченко Юрій Васильович, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор;**

Розора Ірина Василівна, к.ф.-м.н., доц., **зам. головного редактора;**

Bartlova Milada, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;

Bavula Vladimir, Prof., University of Sheffield, Great Britain;

Beghin Luisa, Prof., Sapienza Università di Roma, Italy;

Futoryny Vyacheslav, Prof., Universidade de São Paulo, Brazil;

Giuliano Rita, Prof., Università di Pisa, Italy;

Gorlatch Sergei, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;

Hudak Stefan, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;

Kukhtarev Nickolai, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;

Leonenko Nikolay, Prof., Cardiff University, Great Britain;

Medvids Arturs, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;

Olenko Andriy, Prof., La Trobe University, Australia;

Orsingher Enzo, Prof., Sapienza University of Rome, Italy;

Ostrovsky Eugene, Prof., Bar-Ilan University, Israel;

Pogany Tibor, Prof., University of Rijeka, Croatia;

Rontó Miklós, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;

Silvestrov Dmitrii, Prof., Stockholms universitet, Sweden;

Sottinen Tommi, Prof., University of Vaasa, Finland;

Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;

Trofimchuk Sergey, Prof., Universidad de Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;

Volodin Andrei, Prof., University of Regina, Canada;

Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;

Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;

Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;

Безущак Оксана Омелянівна, к.ф.-м.н., доцент;

Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;

Гарашенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;

Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;

Жук Ярослав Олександрович, д.ф.-м.н., проф.;

Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., проф.;

Курченко Олександр Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;

Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;

Львов Віктор Анатолійович, д.ф.-м.н., проф.;

Макара Володимир Арсенійович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;

Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;

Майборода Ростислав Євгенович, д.ф.-м.н., проф.;

Моклячук Михайло Павлович, д.ф.-м.н., проф.;

Пашко Анатолій Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;

Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;

Петравчук Анатолій Петрович, д.ф.-м.н., проф.;

Погорілий Сергій Дем’янович, д.т.н., проф.;

Савенков Сергій Миколайович, д.ф.-м.н., доц.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.;
Сливка-Тилищак Ганна Іванівна, д.ф.-м.н., проф.;
Хусаїнов Денис Яхєвич, д.ф.-м.н., проф.;

Редакційний відділ:

Затула Дмитро Васильович, **відповідальний секретар**;
Безущак Оксана Омелянівна, bezusch@univ.kiev.ua;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
П'ятецька Олена Василівна, visnyk.phys-math@ukr.net;
Отто Георгій Костянтинович, **технічний редактор**, ottogk@gmail.com.

Адреса редакційної колегії:

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49
fm.visnyk@ukr.net
ISBN 978-966-2142
ISSN 1812-5409

Засновник: Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Свідцтво про державну реєстрацію: KB №16299-4771P від 11.12.2009 року

Безкоштовно

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ ТА ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Василик О.І. Оцінювання розподілу супремуму строго ϕ -субгауссового процесу квазідробового ефекту	8
Іванов О.В., Каптур Н.В., Савич І.М. Про асимптотичний розподіл оцінки Коенкера-Бассетта параметра лінійної моделі регресії з сильно залежним шумом	18
Савчук М.М., Бурлака М.К. Кодування і класифікація перестановок за спеціальним перетворенням з оцінками потужності класів	36

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Васильєв І.Ю., Ткаченко Я.В. Порівняльна ефективність дросельованих і релейних ракетних двигунів для навколосеземних перельотів з малою тягою	46
Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Чисельний аналіз вільних коливань незамкнених циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом	52
Печук Є.Д., Краснопольська Т.С., Рудницька М. О. Серцево-респіраторна система як система з обмеженим збудженням	60

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Аскеров І.М. Наближений метод розв'язання однієї періодичної оптимальної регульованої крайової задачі	66
Альхававша М. Архітектура платформи відкритих даних для e-Government	70
Аль-Хіلالі З.С.Х. Складання розкладу як складова системи управління школою	77
Лосєва Є. А. Огляд представлення слів у обробці природної мови	82
Соловйова О.М., Кізілова Н. М. Модель руху крові по артеріальному руслу з урахуванням біоактивності стінки судин	88

СУЧАСНА ФІЗИКА

Барабаш О. В. Обрахунок перерізу народження BSM бозона в реакції фотонного злиття	94
Таланюк В.В., Шадрін А.О., Юрженко М.В., Основні характеристики та промислове застосування термопластичних еластомерів на основі стирольних кополімерів (огляд)	98
Шафраньош М. І., Кіш Д.Б. Процеси утворення позитивних іонів при взаємодії електронів з молекулами тиміну	104

CONTENTS

ALGEBRA, GEOMETRY AND PROBABILITY THEORY

Vasylyk O.I. Estimation of distribution of suprema of a strictly φ -sub-Gaussian quasi shot noise process	8
Ivanov O.V., Kaptur N.V., Savych I.M. On asymptotic distribution of Koenker-Bassett estimator of the parameter of linear regression model with strongly dependent noise	18
Savchuk M.M., Burlaka M.K. Encoding and classification of permutations by special conversion with estimates of class power	36

DIFFERENTIAL EQUATIONS, MATHEMATICAL PHYSICS AND MECHANICS

Vasiliev I.Yu., Tkachenko Ya.V. Comparative effectiveness of throttled and relay rocket engines for low-gravity near-Earth flights	46
Grigorenko A.Ya., Borysenko M.Yu., Boychuk O.V. Numerical analysis of free vibrations of open cylindrical shells with elliptical cross section	52
Pechuk E.D. , Krasnopol'skaya T.S., Rudnytska M.O. Cardiorespiratory system as system with limited excitation	60

COMPUTER SCIENCES AND INFORMATICS

Askerov I.M. Approximate method of solving one periodic optimal regulated boundary value problem	66
Alhawawsha M. Architecture of the Platform for the E-Government Open Data	70
Al-Hilali Z.S.H. Scheduling as a part of School Management System	77
Losieva Y.A. Representation of Words in Natural Language Processing: A Survey	82
Solovjova O. M. , Kizilova N. M. Model of blood flow along the arterial bed, taking into account the bioactivity of the vessel wall	88

MODERN PHYSICS

Barabash O. V. Calculation the production cross-section of the BSM boson via photon fusion reaction	94
Talanyuk V.V., Shadrin A.O., Yurzhenko M.V. Basic Characteristics and Industrial Application of Styrene Copolymer-Based Thermoplastic Elastomers (Overview)	98
Shafranyosh M. I., Kish D.B. Processes of formation of positive ions at the electron – thymine molecule interactions	104

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 519.21

О.І. Василик¹, к.ф.-м.н., доцент

**Оцінювання розподілу супремуму
строго φ -субгауссового процесу
квазідробового ефекту**

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, e-mail: ¹ovasylyk@univ.kiev.ua

O.I. Vasylyk¹, Ph.D., Associate Professor

Estimation of distribution of suprema of a strictly φ -sub-Gaussian quasi shot noise process

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st., e-mail: ¹ovasylyk@univ.kiev.ua

У роботі досліджуються властивості строго φ -субгауссового процесу квазідробового ефекту $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, u) d\xi(u)$, $t \in \mathbb{R}$, породженого випадковим процесом ξ та функцією відгуку g . Виведено нові оцінки для розподілів супремумів таких процесів. Наведено приклад застосування отриманих результатів.

Ключові слова: дробовий шум, процеси дробового ефекту, розподіл супремуму процесу, φ -субгауссові процеси.

In this paper, there are studied properties of a strictly φ -sub-Gaussian quasi shot noise process $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, u) d\xi(u)$, $t \in \mathbb{R}$, generated by the process ξ and the response function g . New estimates for distributions of suprema of such processes are derived. An example of application of the obtained results is given.

Key Words: shot noise processes, distribution of suprema of a process, φ -sub-Gaussian processes. Communicated by Prof. Kozachenko Yu.V.

1 Вступ

У цій роботі продовжується дослідження властивостей сепарабельних строго φ -субгауссових процесів квазідробового ефекту, розпочате у роботах [1, 25].

Простори φ -субгауссових випадкових величин $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ узагальнюють простори гауссових випадкових величин, тому вони широко застосовуються для моделювання реальних випадкових процесів у теорії черг, фінансовій математиці, фізиці. Розвиток теорії φ -субгауссових випадкових процесів можна прослідкувати за роботами [2, 6, 11, 13, 14, 15, 16, 17].

Процеси дробового ефекту (або дробового шуму) є математичними моделями різних явищ і досліджуються від початку ХХ століття. Перші роботи щодо дробового шуму опубліковані Кембеллом [7] та Шотткі [24], але фундаментальні результати з'явилися через багато років у роботах [19, 20, 21]. Зараз процеси дробового ефекту застосовуються не тільки у фізиці, а й у страхуванні, фінансовій математиці, теорії телекомунікаційних мереж [12, 22, 23].

У класичній моделі дробового ефекту припускається, що в деяку систему надходять імпульси згідно зі стандартним пуассонівським

процесом, величини реакції (відгуку) на імпульс є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, незалежними від пуассонівського процесу надходження імпульсів, а після моменту імпульсу реакція «затухає» згідно з експоненціальним законом розподілу. Але із часом з'явилася дуже багато варіацій цієї моделі. У роботах [3, 6] розглянуто дійснозначний однорідний центрований випадковий процес із незалежними приростами $\xi = (\xi(t), t \in \mathbb{R})$, визначений на стандартному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, та дійснозначна функція $g = (g(t, u), t, u \in \mathbb{R})$, яка задовольняє умову $\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t, u) du < \infty$, $t \in \mathbb{R}$. Тоді процес $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, u) d\xi(u)$, $t \in \mathbb{R}$, називається *процесом дробового ефекту, породженим процесом ξ та функцією відгуку g* . У роботах [8, 9] та монографіях [3, 6] досліджувалися властивості передгауссових процесів дробового ефекту.

У цій роботі розглядається випадок, коли $\xi = (\xi(t), t \in \mathbb{R})$ є таким дійснозначним центрованим процесом із некорельованими приростами, що $E(\xi(t) - \xi(s))^2 = t - s$, $t > s \in \mathbb{R}$. Якщо ξ є строго φ -субгауссовим процесом, то породжений ним процес $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, u) d\xi(u)$ називатимемо строго φ -субгауссовим процесом

квазідробового ефекту. У статті [25] отримано оцінки розподілів супремумів та умови вибіркової неперервності таких процесів, визначених на компактi. У роботі [1] виведено деякі оцінки розподілів супремумів сепарабельних строго φ -субгауссових процесів квазідробового ефекту, визначених на всій дійсній осі. Ті випадки, які не розглядалися раніше, досліджуються у даній статті.

Робота складається зі вступу та трьох розділів. У розділі 2 наведено основні поняття та деякі необхідні результати щодо випадкових величин та процесів із простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$, які далі застосовуються для дослідження властивостей процесів квазідробового ефекту. У розділі 3 наведено означення строго φ -субгауссового процесу квазідробового ефекту та обґрунтовано існування таких процесів. Основні результати представлено у розділі 4, зокрема, отримано оцінки для розподілів супремумів строго φ -субгауссових процесів квазідробового ефекту та проілюстровано процедуру перевірки виконання відповідних умов на прикладі субгауссового процесу квазідробового ефекту.

2 Необхідні відомості та результати з теорії φ -субгауссових випадкових процесів

У цьому розділі наведено основні поняття та деякі необхідні результати щодо випадкових величин та процесів із простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ [6, 11].

Означення 2.1. Неперервна парна опукла функція $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається *N-функцією Орліча*, якщо $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) > 0$ при $x \neq 0$, $\frac{\varphi(x)}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$ та $\frac{\varphi(x)}{x} \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$.

Означення 2.2. Нехай $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ — деяка N-функція Орліча. Функція φ^* така, що $\varphi^*(x) := \sup_{y \in \mathbb{R}} (xy - \varphi(y))$, $x \geq 0$, називається перетворенням Юнга – Фенхеля функції φ .

Приклад 2.1. Якщо $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $x \in \mathbb{R}$, $p > 1$, то $\varphi^*(x) = \frac{|x|^q}{q}$, де q таке число, що $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

Якщо $\varphi(x) = \exp\{|x|\} - |x| - 1$, $x \in \mathbb{R}$, то $\varphi^*(x) = (|x| + 1) \ln(|x| + 1) - |x|$.

Умова Q. Для N-функції φ виконується умова Q, якщо

$$\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = C > 0.$$

Можливо, що $C = +\infty$.

У книзі [18] міститься детальна інформація щодо N-функцій Орліча та їх властивостей.

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — це стандартний імовірнісний простір.

Означення 2.3. Нехай φ — N-функція Орліча, для якої виконується умова Q. Випадкова величина ξ належить простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ (простору φ -субгауссових випадкових величин), якщо $\mathbf{E}\xi = 0$, $\mathbf{E} \exp\{\lambda\xi\}$ існує для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ та існує така стала $a > 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\mathbf{E} \exp(\lambda\xi) \leq \exp(\varphi(a\lambda)).$$

Теорема 2.1. [6] Простір $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ є простором Банаха з нормою

$$\tau_\varphi(\xi) = \sup_{\lambda \neq 0} \frac{\varphi^{-1}(\ln \mathbf{E} \exp(\lambda\xi))}{|\lambda|}$$

та для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконуються нерівності

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \exp(\lambda\xi) &\leq \exp(\varphi(\lambda\tau_\varphi(\xi))), \\ (\mathbf{E}\xi^2)^{\frac{1}{2}} &\leq C\tau_\varphi(\xi), \end{aligned} \quad (2.1)$$

де $C > 0$ — деяка стала.

Якщо $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, то простір $\text{Sub}_\varphi(\Omega) = \text{Sub}(\Omega)$ називається простором субгауссових випадкових величин.

Означення 2.4. Нехай (T, ρ) — деякий псевдометричний або метричний простір. Метричною ентропією (відносно псевдометрики/метрики ρ) називається функція

$$H(\varepsilon) := \ln N_{(T, \rho)}(\varepsilon), \quad \varepsilon > 0,$$

де $N_{(T, \rho)}(\varepsilon)$ — це метрична масивність множини T , тобто, кількість елементів у найменшому ε -покритті цієї множини.

Приклад 2.2. Якщо $T = [a, b]$ та ρ — це евклідова відстань, то для довільного значення $\varepsilon > 0$:

$$\ln \left(\max \left\{ \frac{b-a}{2\varepsilon}, 1 \right\} \right) \leq H_{(T, \rho)}(\varepsilon) \leq \ln \left(\frac{b-a}{2\varepsilon} + 1 \right).$$

Означення 2.5. Випадковий процес $X = (X(t), t \in T)$ є φ -субгауссовим (тобто, належить простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$), якщо для всіх $t \in T$ випадкові величини $X(t) \in \text{Sub}_\varphi(\Omega)$.

Якщо $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, то такий процес називається субгауссовим.

Приклад 2.3. Центрований гауссовий випадковий процес є субгауссовим.

Означення 2.6. Сім'я Δ випадкових величин із простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ називається строго φ -субгауссовою (позначається як $\Delta \in \text{SSub}_\varphi(\Omega)$), якщо існує стала $C_\Delta > 0$ така, що для будь-якої зліченної множини I , $\xi_i \in \Delta$, $i \in I$, та для довільних $\lambda_i \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\tau_\varphi \left(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i \right) \leq C_\Delta \left(\mathbb{E} \left(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.2)$$

Стала C_Δ називається визначальною сталою сім'ї Δ .

Теорема 2.2. [2] *Нехай Δ — строго φ -субгауссова сім'я випадкових величин. Тоді лінійне замикання сім'ї Δ у просторі $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ також є строго φ -субгауссовою сім'єю випадкових величин із тією ж визначальною сталою.*

Означення 2.7. Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ називається строго φ -субгауссовим (тобто, $X \in \text{SSub}_\varphi(\Omega)$), якщо сім'я випадкових величин $\{X(t), t \in T\}$ є строго φ -субгауссовою. Визначальна стала цієї сім'ї називається визначальною сталою процесу X та позначається C_X .

Основні результати цієї роботи ґрунтуються на властивостях φ -субгауссових випадкових процесів, отриманих у роботі [16].

Нехай (T, ρ) — сепарабельний псевдометричний простір, який можна розбити на зліченну кількість компактних множин, котрі позначимо через B_l , $l = \overline{1, \infty}$, тобто $T = \bigcup_{l=1}^{\infty} B_l$.

Означення 2.8. Нехай $q = \{q(t), t \in T\}$ — така неперервна функція, що $q(t) > 0$ для всіх $t \in T$. Простір $C(T, q)$ — це простір неперервних функцій f на T таких, що $\sup_{t \in T} q(t)|f(t)| < \infty$. Простір $C_0(\mathbb{R}, q)$ — це простір неперервних функцій f таких, що $\sup_{t \in T} q(t)|f(t)| < \infty$ та $q(t)f(t) \rightarrow 0$ при $|t| \rightarrow \infty$.

Розглянемо сепарабельний φ -субгауссовий випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$. Припустимо, що існують такі неперервні монотонно зростаючі функції $\sigma_l = \{\sigma_l(h), h > 0\}$, що

$\sigma_l(h) \rightarrow 0$, коли $h \rightarrow 0$, та для цих функцій виконуються такі нерівності

$$\sup_{\substack{\rho(t,s) \leq h, \\ t,s \in B_l}} \tau_\varphi(X(t) - X(s)) \leq \sigma_l(h), \quad l = \overline{1, \infty}. \quad (2.3)$$

Введемо такі позначення:

- $\delta_l = \sup_{t \in B_l} q(t)$,
- w_l — деяка точка з множини B_l ,
- $z_l = \tau_\varphi(X(w_l))$,
- $\varkappa_l = \sigma_l \left(\sup_{t \in B_l} \rho(t, w_l) \right)$, $l = \overline{1, \infty}$.

Наступна теорема впливає з леми 3.2 з роботи [16] (с. 113).

Теорема 2.3. *Нехай для всіх $l = \overline{1, \infty}$ виконуються умови:*

$$\int_0^{p\varkappa_l} \theta_{\varphi, \nu}(H_{B_l}(\sigma_l^{(-1)}(u))) du < \infty, \quad (2.4)$$

та

$$\sum_{l=1}^{\infty} \delta_l \int_0^{p\varkappa_l} \theta_{\varphi, \nu}(H_{B_l}(\sigma_l^{(-1)}(u))) du < \infty, \quad (2.5)$$

де $\theta_{\varphi, \nu}(x) = \frac{\nu(\exp\{x\})}{\varphi^{(-1)}(x)}$, $\nu = \{\nu(u), u \geq 1\}$ — невід'ємна неспадна функція така, що $\nu(\exp\{t\})$ — опукла. Тоді, якщо

$$d = \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l z_l < \infty$$

та $\beta = \sup_l \frac{\varkappa_l}{z_l} < \infty$, то для всіх $\lambda > 0$, $p \in (0, 1)$ маємо нерівність

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \exp \left\{ \lambda \sup_{t \in T} |q(t)X(t)| \right\} \leq \\ & 2 \exp \left\{ \varphi \left(\frac{\lambda d}{1-p} \right) (1-p) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\delta_l z_l}{d} \varphi \left(\frac{\lambda d \varkappa_l}{z_l (1-p)p} \right) p \right\} \\ & \times \left(\nu^{(-1)} \left(\lambda \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l \int_0^{p\varkappa_l} \theta_{\varphi, \nu}(H_{B_l}(\sigma_l^{(-1)}(u))) du \right) \right)^2 \\ & =: \Gamma_1(\lambda, p). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Якщо ж

$$a = \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l \varkappa_l < \infty$$

та $\gamma = \sup_l \frac{z_l}{z_l} < \infty$, то для всіх $\lambda > 0$,
 $p \in (0, 1)$, справедлива нерівність

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \exp \left\{ \lambda \sup_{t \in T} |q(t)X(t)| \right\} \leq \\ & 2 \exp \left\{ \frac{1-p}{a} \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l z_l \varphi \left(\frac{\lambda a z_l}{(1-p)z_l} \right) + \varphi \left(\frac{\lambda a}{(1-p)p} \right) p \right\} \\ & \times \left(\nu^{(-1)} \left(\lambda \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l \int_0^{p z_l} \theta_{\varphi, \nu}(H_{B_l}(\sigma_l^{(-1)}(u))) du \right) \right)^2 \\ & =: \Gamma_2(\lambda, p). \end{aligned} \quad (2.7)$$

У обох випадках для всіх $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ отримуємо відповідну оцінку

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left\{ \sup_{t \in T} |q(t)X(t)| \geq \varepsilon \right\} \leq \\ & \inf_{0 < p < 1} \inf_{\lambda > 0} \Gamma_k(\lambda, p) \exp\{-\lambda \varepsilon\}, \quad k = \overline{1, 2}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

3 Строго φ -субгауссові процеси квазі-дробового ефекту

Нехай $\xi = (\xi(t), t \in \mathbb{R})$ — дійснозначний центрований випадковий процес з некорельованими приростами, визначений на стандартному ймовірнісному просторі, та

$$\mathbb{E}(\xi(t) - \xi(s))^2 = t - s, \quad t > s \in \mathbb{R}.$$

Нехай $g = (g(t, u), t, u \in \mathbb{R})$ — дійснозначна функція, яка задовольняє умову:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t, u) du < \infty, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Означення 3.1. Будемо називати процес

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, u) d\xi(u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

процесом дробового ефекту, породженим процесом ξ та функцією відгуку g , де інтеграл у (3.2) визначений у середньому квадратичному.

Коваріаційна функція процесу X має вигляд

$$\mathbb{E}X(t)X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, u)g(s, u) du, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

У Лемі 3.1 з роботи [25] доведено, що строго φ -субгауссові процеси вигляду (3.2) існують, а також виведено оцінки для норми такого процесу та норми його приростів.

Лема 3.1. Нехай $\xi = (\xi(t), t \in \mathbb{R})$ — строго φ -субгауссовий випадковий процес із некорельованими приростами та $\mathbb{E}(\xi(t) - \xi(s))^2 = t - s$, $t > s \in \mathbb{R}$. Тоді процес $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, u) d\xi(u)$, $t \in \mathbb{R}$, теж є строго φ -субгауссовим процесом та для довільних $t, s \in \mathbb{R}$

$$\tau_{\varphi}(X(t)) \leq c_{\xi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t, u) du \right)^{1/2}, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} & \tau_{\varphi}(X(t) - X(s)) \leq \\ & c_{\xi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (g(t, u) - g(s, u))^2 du \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

де c_{ξ} — визначальна стала процесу ξ .

Приклад 3.1. Вінерівський процес $W(t)$, $t \geq 0$, має незалежні прирости, $\mathbb{E}(W(t) - W(s))^2 = t - s$, $t > s \geq 0$, та для $t \in [0, 1]$ його можна зобразити у вигляді випадкового ряду

$$W(t) = t\eta_0 + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\pi t}{k\pi} \eta_k, \quad (3.5)$$

де η_k , $k \geq 0$, — незалежні стандартні гауссові випадкові величини (див., наприклад, [10, 5]).

Оскільки $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\pi)^2} < \infty$, то ряд у зображенні (3.5) збіжний у середньому квадратичному. Якщо замість η_k , $k \geq 0$, у цей розклад підставити незалежні строго φ -субгауссові випадкові величини $\{\xi_k, k \geq 0\}$ такі, що $\mathbb{E}\xi_k^2 = 1 \forall k \geq 0$, то випадковий процес

$$\xi(t) = t\xi_0 + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\pi t}{k\pi} \xi_k, \quad t \in [0, 1],$$

буде строго φ -субгауссовим випадковим процесом із тією ж визначальною сталою, що й для сім'ї $\{\xi_k, k \geq 0\}$ (див. [2]: приклад 2.4 с. 37). При цьому $\mathbb{E}(\xi(t) - \xi(s))^2 = t - s$, $t > s \in [0, 1]$.

Означення 3.2. Будемо називати процес $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, u) d\xi(u)$ строго φ -субгауссовим процесом квазідробового ефекту, якщо ξ є строго φ -субгауссовим випадковим процесом.

4 Оцінювання розподілу супремуму строго φ -субгауссового процесу квазідробового ефекту

Нехай $T \equiv \mathbb{R}$ та $\rho(t, s) = |t - s|$, $t, s \in \mathbb{R}$.

Розіб'ємо $\mathbb{R}$ на зліченну кількість неперетинних множин: $\mathbb{R} = \bigcup_{l=1}^{\infty} B_l$, де $B_l = [b_l, b_{l+1})$, $b_l < b_{l+1}$, $l = \overline{1, \infty}$.

Теорема 4.1. *Нехай для сепарабельного строго φ -субгауссового процесу квазідробового ефекту $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, u) d\xi(u)$, $t \in \mathbb{R}$, існують такі функції $r_l = (r_l(h), h \geq 0)$, $l = \overline{1, \infty}$, та $k = (k(u), u \in \mathbb{R})$, що для функції відгуку g виконуються нерівності:*

$$|g(t, u) - g(s, u)| \leq r_l(|t - s|)k(u), \quad (4.1)$$

де $t, s \in B_l$, $l = \overline{1, \infty}$, $u \in \mathbb{R}$, функції r_l є такими невід'ємними неперервними монотонно зростаючими функціями, що $r_l(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, а функція k є невід'ємною неперервною і задовольняє умову $\int_{\mathbb{R}} k^2(u) du < \infty$.

Нехай існують такі точки $w_l \in [b_l, b_{l+1})$, $l = \overline{1, \infty}$, і неперервна функція $q = \{q(t), t \in \mathbb{R}\}$, $0 < q(t) < 1 \forall t \in \mathbb{R}$, що виконуються такі умови:

$$\int_0^{p\lambda_l} \theta_{\varphi, \nu} \left(\ln \left(\frac{b_{l+1} - b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)} + 1 \right) \right) du < \infty, \quad (4.2)$$

та

$$\sum_{l=1}^{\infty} \delta_l \int_0^{p\lambda_l} \theta_{\varphi, \nu} \left(\ln \left(\frac{b_{l+1} - b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)} + 1 \right) \right) du < \infty, \quad (4.3)$$

де $\theta_{\varphi, \nu}(x) = \frac{\nu(\exp\{x\})}{\varphi^{(-1)}(x)}$, $\nu = \{\nu(u), u \geq 1\}$ – невід'ємна неспадна функція така, що $\nu(\exp\{t\}) -$

опукла, $c = \left(c_{\xi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} k^2(u) du \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{-1}$. Тоді:

i) якщо

$$d = \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l z_l < \infty \quad \text{та} \quad \beta = \sup_l \frac{\lambda_l}{z_l} < \infty,$$

то для всіх $\lambda > 0$, $p \in (0, 1)$ маємо нерівність

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \exp \left\{ \lambda \sup_{t \in \mathbb{R}} q(t) |X(t)| \right\} \leq \\ & 2 \exp \left\{ \varphi \left(\frac{\lambda d}{1-p} \right) (1-p) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\delta_l z_l}{d} \varphi \left(\frac{\lambda d \lambda_l}{z_l (1-p)p} \right) p \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\nu^{(-1)} \left(\lambda \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l \int_0^{p\lambda_l} \theta_{\varphi, \nu} \left(\ln \left(\frac{b_{l+1} - b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)} + 1 \right) \right) du \right) \right)^2 \\ & =: \hat{\Gamma}_1(\lambda, p); \end{aligned} \quad (4.4)$$

ii) якщо ж

$$a = \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l \lambda_l < \infty \quad \text{та} \quad \gamma = \sup_l \frac{z_l}{\lambda_l} < \infty,$$

то для всіх $\lambda > 0$, $p \in (0, 1)$, справедлива нерівність

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \exp \left\{ \lambda \sup_{t \in \mathbb{R}} q(t) |X(t)| \right\} \leq \\ & 2 \exp \left\{ \frac{1-p}{a} \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l \lambda_l \varphi \left(\frac{\lambda a z_l}{(1-p)\lambda_l} \right) + \varphi \left(\frac{\lambda a}{(1-p)p} \right) p \right\} \\ & \times \left(\nu^{(-1)} \left(\lambda \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l \int_0^{p\lambda_l} \theta_{\varphi, \nu} \left(\ln \left(\frac{b_{l+1} - b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)} + 1 \right) \right) du \right) \right)^2 \\ & =: \hat{\Gamma}_2(\lambda, p). \end{aligned} \quad (4.5)$$

У обох випадках для всіх $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ отримуюмо відповідну оцінку розподілу супремуму строго φ -субгауссового процесу квазідробового ефекту X :

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in \mathbb{R}} q(t) |X(t)| \geq \varepsilon \right\} \leq \\ & \inf_{0 < p < 1} \inf_{\lambda > 0} \hat{\Gamma}_k(\lambda, p) \exp\{-\lambda \varepsilon\}, \quad k = \overline{1, 2}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Доведення. Якщо виконується умова (4.1), то з того, що X є строго φ -субгауссовим процесом, випливає, що для довільного значення $h \geq 0$

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{|t-s| \leq h, \\ t, s \in B_l}} \tau_{\varphi}(X(t) - X(s)) \leq \\ & \leq \sup_{\substack{|t-s| \leq h, \\ t, s \in B_l}} c_{\xi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (g(t, u) - g(s, u))^2 du \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq \sup_{\substack{|t-s| \leq h, \\ t, s \in B_l}} c_{\xi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (r_l(|t-s|)k(u))^2 du \right)^{\frac{1}{2}} = \\ & = \sup_{\substack{|t-s| \leq h, \\ t, s \in B_l}} c_{\xi} r_l(|t-s|) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} k^2(u) du \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq c_{\xi} r_l(h) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} k^2(u) du \right)^{\frac{1}{2}} =: \sigma_l(h). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Позначимо $c := \left(c_\xi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} k^2(u) du \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{-1}$. Тоді
 $\sigma_l(h) = c^{-1} r_l(h)$, $h \geq 0$, та $\sigma_l^{(-1)}(u) = r_l^{(-1)}(cu)$,
 $u \geq 0$. Відповідно, коли $B_l = [b_l, b_{l+1})$, $b_l < b_{l+1}$,
 $l = \overline{1, \infty}$, функцію $H_{B_l}(\sigma_l^{(-1)}(u))$, $u \geq 0$, можна
оцінити так:

$$H_{B_l}(\sigma_l^{(-1)}(u)) \leq \ln \left(\frac{b_{l+1} - b_l}{2\sigma_l^{(-1)}(u)} + 1 \right) = \\ = \ln \left(\frac{b_{l+1} - b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)} + 1 \right), \quad l = 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

Оскільки функція $\theta_{\varphi, \nu}(x)$ — неспадна, то зі збіжності інтеграла $\int_0^{p\lambda_l} \theta_{\varphi, \nu} \left(\ln \left(\frac{b_{l+1} - b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)} + 1 \right) \right) du$ випливає збіжність інтеграла в умові (2.4) теореми 2.3. Зі збіжності ряду в умові (4.3) випливає виконання умови (2.5). Отже, якщо сепарабельний φ -субгауссовий процес квазідробового ефекту X задовольняє умови (4.1)–(4.3), то для нього виконуються всі умови теореми 2.3 і, відповідно, справедливі оцінки (2.6) та (2.7).

З нерівності (4.8) та властивостей функції $\theta_{\varphi, \nu}(x)$ для всіх $\lambda > 0$, $p \in (0, 1)$ отримуємо у випадку i) таку оцінку:

$$\mathbb{E} \exp \left\{ \lambda \sup_{t \in \mathbb{R}} q(t) |X(t)| \right\} \leq \Gamma_1(\lambda, p) \leq \\ 2 \exp \left\{ \varphi \left(\frac{\lambda d}{1-p} \right) (1-p) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\delta_l z_l}{d} \varphi \left(\frac{\lambda d z_l}{z_l(1-p)p} \right) p \right\} \\ \times \left(\nu^{(-1)} \left(\lambda \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l \int_0^{p\lambda_l} \theta_{\varphi, \nu} \left(\ln \left(\frac{b_{l+1} - b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)} + 1 \right) \right) du \right) \right) \\ = \hat{\Gamma}_1(\lambda, p),$$

а у випадку ii) будемо мати

$$\mathbb{E} \exp \left\{ \lambda \sup_{t \in \mathbb{R}} q(t) |X(t)| \right\} \leq \Gamma_2(\lambda, p) \leq \\ 2 \exp \left\{ \frac{1-p}{a} \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l \lambda_l \varphi \left(\frac{\lambda a z_l}{(1-p) \lambda_l} \right) + \varphi \left(\frac{\lambda a}{(1-p)p} \right) p \right\} \\ \times \left(\nu^{(-1)} \left(\lambda \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l \int_0^{p\lambda_l} \theta_{\varphi, \nu} \left(\ln \left(\frac{b_{l+1} - b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)} + 1 \right) \right) du \right) \right) \\ = \hat{\Gamma}_2(\lambda, p).$$

З наведеного вище та нерівності Чебишева випливають оцінки (4.6). $\square$

Наслідок 4.1. Якщо строго φ -субгауссовий процес квазідробового ефекту $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, u) d\xi(u)$, $t \in \mathbb{R}$, є неперервним та задовольняє умови теореми 4.1, то з імовірністю 1 він належить зв'язаному простору неперервних функцій $C(\mathbb{R}, q)$, де $q = \{q(t), t \in \mathbb{R}\}$ — така неперервна додатна «вагова» функція, що $q(t) < 1$, $t \in \mathbb{R}$.

Приклад 4.1. Проілюструємо процедуру перевірки виконання умов Теореми 4.1.

Нехай $\xi = (\xi(t), t \in \mathbb{R}) \in \text{SSub}_\varphi(\Omega)$ — строго φ -субгауссовий сепарабельний випадковий процес із некорельованими приростами, $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. Це означає, що ξ є строго субгауссовим процесом. При цьому $\mathbb{E} \xi^2(t) = \tau^2(\xi(t))$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, де $\tau(\cdot) = \tau_\varphi(\cdot)$ — це норма у просторі субгауссових випадкових величин $\text{Sub}(\Omega)$ [6]. Тоді $c_\xi = 1$, $\varphi^{(-1)}(v) = \sqrt{2v}$, $v \geq 0$, та $\zeta_\varphi(v) = \frac{v}{\varphi^{(-1)}(v)} = \frac{v}{\sqrt{2v}} = \sqrt{\frac{v}{2}}$.

Нехай дійснозначна функція $g = (g(t, u), t, u \in \mathbb{R})$ має вигляд

$$g(t, u) = \frac{\sin(tu)}{|u|^\delta + 1}, \quad t, u \in \mathbb{R}, \quad \delta > 1. \quad (4.9)$$

Вона задовольняє умову

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t, u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(tu)}{(|u|^\delta + 1)^2} du < \infty, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Отже, процес $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, u) d\xi(u)$, $t \in \mathbb{R}$, є коректно визначеним сепарабельним строго субгауссовим процесом квазідробового ефекту, породженим процесом ξ та функцією відгуку g , причому $\tau^2(X(t)) = \mathbb{E} X^2(t)$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Приріст функції g можна оцінити так:

$$|g(t, u) - g(s, u)| = \frac{|\sin(tu) - \sin(su)|}{|u|^\delta + 1} = \\ \frac{\left| 2 \sin \frac{u(t-s)}{2} \cos \frac{u(t-s)}{2} \right|}{|u|^\delta + 1} \leq 2 \left| \frac{u(t-s)}{2} \right|^\alpha \frac{1}{|u|^\delta + 1} = \\ \frac{2^{1-\alpha} |u|^\alpha |t-s|^\alpha}{|u|^\delta + 1} = |t-s|^\alpha \frac{2^{1-\alpha} |u|^\alpha}{|u|^\delta + 1} = r(t-s) k(u),$$

де $r(t-s) = |t-s|^\alpha$, $k(u) = \frac{2^{1-\alpha} |u|^\alpha}{|u|^\delta + 1}$, $t, s, u \in \mathbb{R}$, $\delta > 1$, $\alpha = \min(1, \delta - 1) \in (0, 1]$.

Функція $r(h) = |h|^\alpha$, $h \in \mathbb{R}$, є невід'ємною неперервно монотонно зростаючою та $r(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Функція $k(u) = \frac{2^{1-\alpha} |u|^\alpha}{|u|^\delta + 1}$, $u \in \mathbb{R}$, невід'ємна неперервна і

$$\int_{\mathbb{R}} k^2(u) du = \int_{\mathbb{R}} \frac{2^{2-2\alpha} |u|^{2\alpha}}{(|u|^\delta + 1)^2} du < \infty.$$

Отже, функція g задовольняє умову (4.1).

Розглянемо процес X на інтервалі $[0, +\infty)$.

Виберемо розбиття $\mathbb{R}^+ = \bigcup_{l=0}^{\infty} [b_l, b_{l+1})$ так, щоб послідовність $\{b_l, l = 0, 1, 2, \dots\}$ була монотонно зростаючою, $b_0 = 0$ та $\sup_{l \geq 0} \frac{b_l}{b_{l+1}} = b < 1$. Нагадаємо, що w_l – деяка точка з $[b_l, b_{l+1})$. Нехай $w_l = b_l, l = 0, 1, 2, \dots$. Тоді $\varkappa_l = \sigma_l \left(\sup_{t \in B_l} \rho(t, w_l) \right) = \sigma_l \left(\sup_{t \in [b_l, b_{l+1})} |t - b_l| \right) = c^{-1}(b_{l+1} - b_l)^\alpha$, оскільки $\sigma_l(h) = c^{-1}r_l(h) = c^{-1}h^\alpha, h \geq 0$.

Далі, $r_l^{(-1)}(cu) = (cu)^{1/\alpha}$,

$$\begin{aligned} \nu \left(\exp \left(\ln \left(\frac{b_{l+1} - b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)} + 1 \right) \right) \right) &= \\ &= \nu \left(\frac{b_{l+1} - b_l}{2(cu)^{1/\alpha}} + 1 \right), \\ \varphi^{(-1)} \left(\ln \left(\frac{b_{l+1} - b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)} + 1 \right) \right) &= \\ &= \sqrt{2 \left(\ln \left(\frac{b_{l+1} - b_l}{2(cu)^{1/\alpha}} + 1 \right) \right)}, \\ \theta_{\varphi, \nu} \left(\ln \left(\frac{b_{l+1} - b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)} + 1 \right) \right) &= \\ &= \frac{\nu \left(\ln \left(\frac{b_{l+1} - b_l}{2(cu)^{1/\alpha}} + 1 \right) \right)}{\sqrt{2 \left(\ln \left(\frac{b_{l+1} - b_l}{2(cu)^{1/\alpha}} + 1 \right) \right)}}. \end{aligned}$$

Нехай $\nu(x) = \ln x, x \geq 1$. Тоді

$$\begin{aligned} \theta_{\varphi, \nu} \left(\ln \left(\frac{b_{l+1} - b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)} + 1 \right) \right) &= \\ &= \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{b_{l+1} - b_l}{2(cu)^{1/\alpha}} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Інтеграл в умові (4.2) буде збіжним, якщо $\alpha = \min(1, \delta - 1) > \frac{1}{2}$, тобто, треба обирати $\delta > \frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned} \int_0^{p\varkappa_l} \theta_{\varphi, \nu} \left(\ln \left(\frac{b_{l+1} - b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)} + 1 \right) \right) du &\leq \\ &\leq \int_0^{p\varkappa_l} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{b_{l+1} - b_l}{2(cu)^{1/\alpha}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} du = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(b_{l+1} - b_l)^{\frac{1}{2}}}{2c^{1/2\alpha}} \int_0^{p\varkappa_l} \frac{1}{u^{1/2\alpha}} du = \\ &= \frac{(b_{l+1} - b_l)^{\frac{1}{2}}}{2c^{1/2\alpha}} \frac{(p\varkappa_l)^{1 - \frac{1}{2\alpha}}}{1 - \frac{1}{2\alpha}} = \\ &= \frac{(b_{l+1} - b_l)^{\frac{1}{2}}}{2c^{1/2\alpha}} \frac{(pc^{-1}(b_{l+1} - b_l)^\alpha)^{1 - \frac{1}{2\alpha}}}{1 - \frac{1}{2\alpha}} = \\ &= \frac{(b_{l+1} - b_l)^\alpha p^{1 - \frac{1}{2\alpha}}}{2c(1 - \frac{1}{2\alpha})} < \infty, \quad \alpha \in \left(\frac{1}{2}; 1\right]. \end{aligned}$$

Оцінимо ряд в умові (4.3):

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l \int_0^{p\varkappa_l} \theta_{\varphi, \nu} \left(\ln \left(\frac{b_{l+1} - b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)} + 1 \right) \right) du &\leq \\ &\leq \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l \frac{(b_{l+1} - b_l)^\alpha p^{1 - \frac{1}{2\alpha}}}{2c(1 - \frac{1}{2\alpha})} = \\ &= \frac{p^{1 - \frac{1}{2\alpha}}}{2c(1 - \frac{1}{2\alpha})} \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l (b_{l+1} - b_l)^\alpha. \end{aligned}$$

Тепер оберемо послідовність $\{b_l, l = 0, 1, 2, \dots\}$ так: $b_0 = 0, b_l = e^l, l = 1, 2, \dots$. У випадку такого розбиття існує щонайменше одна неперервна функція $q = \{q(t), t \in [0, +\infty)\}$: $q(t) \in (0, 1) \forall t \in [0, +\infty)$, яка дає нам можливість забезпечити виконання умови (4.3):

$$q(t) = \begin{cases} \frac{1}{e^{\alpha+\mu}}, t \in [0, e), \\ \frac{1}{t^{\alpha+\mu}}, t \in [e, +\infty), \end{cases} \quad \mu > 0.$$

Для цієї функції $\delta_0 = e^{-(\alpha+\mu)}, \delta_l = e^{-(\alpha+\mu)l}, l = 1, 2, \dots$ та

$$\begin{aligned} &\frac{p^{1 - \frac{1}{2\alpha}}}{2c(1 - \frac{1}{2\alpha})} \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l (b_{l+1} - b_l)^\alpha = \\ &= \frac{p^{1 - \frac{1}{2\alpha}}}{2c(1 - \frac{1}{2\alpha})} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-(\alpha+\mu)l} (e^{l+1} - e^l)^\alpha = \\ &= \frac{p^{1 - \frac{1}{2\alpha}} (e - 1)^\alpha}{2c(1 - \frac{1}{2\alpha})} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\mu l} = \\ &= \frac{p^{1 - \frac{1}{2\alpha}} (e - 1)^\alpha}{2c(1 - \frac{1}{2\alpha})(e^\mu - 1)} < \infty, \end{aligned}$$

отже, умова (4.3) теж виконується.

Сепарабельний строго субгауссовий процес квазідробового ефекту $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, u) d\xi(u)$ з функцією відгуку вигляду (4.9) задовольняє умови пункту ii) Теорему 4.1. Покажемо це: $z_l = \tau(X(w_l)) = (EX^2(b_l))^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(e^l u)}{(|u|^{\delta+1})^2} du \right)^{\frac{1}{2}},$

$$\varkappa_l = c^{-1}(b_{l+1} - b_l)^\alpha = c^{-1}e^{\alpha l}(e - 1)^\alpha, \quad l = 1, 2, \dots,$$

де $c = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} k^2(u) du \right)^{-\frac{1}{2}}$, оскільки $c_\xi = 1$. Звідси

$$\begin{aligned} a &= \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l \varkappa_l = \sum_{l=1}^{\infty} e^{-(\alpha+\mu)l} c^{-1} e^{\alpha l} (e - 1)^\alpha = \\ &= c^{-1} (e - 1)^\alpha \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\mu l} = \frac{(e - 1)^\alpha}{c(e^\mu - 1)} < \infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \sup_l \frac{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(e^l u)}{(|u|^\delta + 1)^2} du \right)^{\frac{1}{2}}}{e^{\alpha l} (e - 1)^\alpha \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2^{2-2\alpha} |u|^{2\alpha}}{(|u|^\delta + 1)^2} du \right)^{\frac{1}{2}}} \leq \\ &\leq \sup_l \frac{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|e^l u|^{2\alpha}}{(|u|^\delta + 1)^2} du \right)^{\frac{1}{2}}}{e^{\alpha l} (e - 1)^\alpha \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2^{2-2\alpha} |u|^{2\alpha}}{(|u|^\delta + 1)^2} du \right)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \sup_l \frac{e^{\alpha l}}{2^{1-\alpha} e^{\alpha l} (e - 1)^\alpha} = \frac{1}{2^{1-\alpha} (e - 1)^\alpha} < \infty. \end{aligned}$$

Список використаних джерел

1. Васи́лик О.І. Властивості строго φ -субгауссових процесів квазі-дробового ефекту, Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2019. – Вип. 101. – С. 49–62.
2. Васи́лик О.І. φ -Субгауссові випадкові процеси / О.І. Васи́лик, Ю.В. Козаченко, Р.Є. Ямненко. – К: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2008. – 231 с.
3. Дарі́йчук І.В. Випадкові процеси з просторів Орліча / І.В. Дарі́йчук, Ю.В. Козаченко, М.М. Перестюк. – Чернівці: “Золоті литаври”, 2011. – 212 с.
4. Козаченко Ю.В. Вибіркова неперервність та оцінювання розподілів приростів сепарабельних випадкових процесів з класу $V(\varphi, \psi)$, визначених на компакт / Ю.В. Козаченко, О.І. Васи́лик // Вісник Київського університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2004. – №2. – С.45 – 50.
5. Козаченко Ю.В. Точність і надійність моделювання випадкових процесів та полів в рівномірній метриці / Ю.В. Козаченко,

Отже, для процесу квазідробового ефекту X виконуються умови (4.1)–(4.3) та умови пункту ii) Теорема 4.1, тому для нього справедлива оцінка (4.6) при $k = 2$ та з імовірністю 1 він належить зваженому простору неперервних функцій $C(\mathbb{R}^+, q)$ з ваговою функцією $q(t) = \begin{cases} \frac{1}{e^{\alpha+\mu}}, t \in [0, e), \\ \frac{1}{t^{\alpha+\mu}}, t \in [e, +\infty), \end{cases} \quad \mu > 0.$

Висновки

У роботі деякі результати, отримані для випадкових процесів із простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$, застосовано для дослідження властивостей процесів квазідробового ефекту. Виведено нові оцінки для розподілів супремумів строго φ -субгауссових процесів квазідробового ефекту. Сформульовано умови належності таких процесів зваженим просторам неперервних функцій. Проілюстровано процедуру перевірки виконання умов відповідної теореми на прикладі субгауссового процесу квазідробового ефекту.

А.О. Пашко. – Київ: ТОВ “СІК ГРУП Україна”, 2016. – 216 с.

6. Buldygin V. V., Metric Characterization of Random Variables and Random Processes / V. V. Buldygin, Yu. V. Kozachenko. – American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. – 257 p.
7. Campbell N. The study of discontinuous phenomena / Proc. Cambr. Phil. Soc., 1909. – 15. – P. 117–136; Discontinuities in light emission / Proc. Cambr. Phil. Soc., 1909. – 15. – P. 310–328.
8. Dariyuchuk I. V. Some properties of pre-Gaussian shot noise processes / I. V. Dariyuchuk, Yu. V. Kozachenko // Stochastic Analysis and Random Dynamics. International Conference. Abstracts, Lviv, Ukraine, 2009. – С. 57–59.
9. Dariyuchuk I. V. The distribution of the supremum of Θ -pre-Gaussian shot noise processes / I. V. Dariyuchuk, Yu. V. Kozachenko // Theory of Probability and Mathematical Statistics, 2010. – No. 80. – P.85–100.

10. Gikhman I. I. Introduction to the Theory of Random Processes / I. I. Gikhman, A. V. Skorokhod. – M.: Nauka, 1977. – 570p.
11. Giuliano Antonini R. Space of φ -sub-Gaussian random variables / R. Giuliano Antonini, Yu. V. Kozachenko, T. Nikitina. // Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. (5), 2003. – 27. – P.92–124.
12. Koops D. T. Networks of $\cdot/G/\infty$ Queues with Shot-Noise-Driven Arrival Intensities / D. T. Koops, O. J. Boxma, and M. R. H. Mandjes // Queueing Systems, August 2016, DOI: 10.1007/s11134-017-9520-7.
13. Kozachenko Yu. V. Banach spaces of random variables of sub-Gaussian type / Yu. V. Kozachenko, E. I. Ostrovsky // Theory of Probability and Mathematical Statistics, 1985. – No. 32. – P.42–53.
14. Kozachenko Yu. V. On Uniform Convergence of Wavelet Expansions of φ -sub-Gaussian Random Process / Yu. V. Kozachenko, M. M. Perestyuk, O. I. Vasylyk // Random Operators and Stochastic Equations, 2006. – 14, no.3. – P.209–232.
15. Kozachenko Yu. V. On the distribution of suprema of $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ random processes / Yu. V. Kozachenko, O. I. Vasilik // Theory of Stochastic Processes, 1998. – 4(20), issue 1–2. – P.147–160.
16. Kozachenko Yu. V. Stochastic processes of the classes $V(\varphi, \psi)$ / Yu. V. Kozachenko, O. I. Vasilik // Theory of Probability and Mathematical Statistics, 2001. – 63. – P.109–121.
17. Kozachenko Yu. Upper estimate of overrunning by $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ random process the level specified by continuous function / Yu. Kozachenko, R. Yamnenko, O. Vasylyk // Random Oper. Stoch. Equ., 2005. – 13, no. 2. – P.111–128.
18. Krasnosel'skii M. A. Convex Functions and Orlicz Spaces. / M. A. Krasnosel'skii, Ya. B. Rutickii. – Moscow, 1958 (in Russian). English translation: P.Noordhoff Ltd, Groningen, 1961. – 249p.
19. Rice S. O. Mathematical analysis of random noise // The Bell System Technical Journal, 1944. – 23. – P.282–332.
20. Rice S. O. Mathematical analysis of random noise // The Bell System Technical Journal, 1945. – 24. – P.46–156.
21. Rice J. On generalized shot noise // Advances in Applied Probability, 1977. – 9. – P.553–565.
22. Schmidt T. Catastrophe insurance modeled by shot-noise processes // Risks, ISSN 2227-9091, MDPI, Basel, 2014. – 2, Iss. 1. – P.3–24. – <http://dx.doi.org/10.3390/risks2010003>.
23. Schmidt T. Shot-noise processes in finance // arXiv:1612.06616v1, 2016.
24. Schottky W. Uber spontane Stromschwankungen in verschiedenen Elektrizitätsleitern // Annalen der Physik, 1918. – 362(23). – P.541–567.
25. Vasylyk O. I. Strictly φ -sub-Gaussian quasi shot noise processes // Statistics, Optimization and Information Computing, 2017. – 5. P.109–120.

References

1. VASYLYK, O.I. (2019) Properties of strictly φ -sub-Gaussian quasi shot noise processes, *Teoriya Imovirnostei ta Matematychna Statystyka*, 2(101), p. 49–62.
2. VASYLYK, O. I., KOZACHENKO, YU. V., YAMNENKO, R. E. (2008) *φ -sub-Gaussian random process*, Kyiv: Vydavnycho-Poligrafichnyi Tsentr “Kyivskyi Universytet”, 231 p. (In Ukrainian)
3. DARIYCHUK, I. V., KOZACHENKO, YU. V., and PERESTYUK, M.M. (2011) *Stochastic processes from Orlicz spaces*. Chernivtsi: “Zoloti lytavry”, 212 p. (In Ukrainian)
4. KOZACHENKO, YU. V., VASYLYK, O. I. (2004) Sample pathes continuity and estimates of distributions of the increments of separable stochastic processes from the class $V(\varphi, \psi)$, defined on a compact set, *Bulletin of the University of Kiev, Series: Physics and Mathematics*. Iss. 2, p.45–50. (In Ukrainian)

5. KOZACHENKO, YU., PASHKO, A. (2016) *Accuracy and Reliability of Simulation of Random Processes and Fields in Uniform Metrics*. Kyiv: TOV "SIK GRUP Ukraina ", 216 p. (In Ukrainian)
6. BULDYGIN, V. V., KOZACHENKO, YU. V. (2000) *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes*. American Mathematical Society, Providence, RI, 257 p.
7. CAMPBELL, N. (1909) The study of discontinuous phenomena. *Proc. Cambr. Phil. Soc.* 15, 1p.17–136; Discontinuities in light emission. *Proc. Cambr. Phil. Soc.* 15, p.310–328.
8. DARIYCHUK, I. V., KOZACHENKO, YU. V. (2009) Some properties of pre-Gaussian shot noise processes. *Stochastic Analysis and Random Dynamics. International Conference. Abstracts*. Lviv, Ukraine, p.57–59.
9. DARIYCHUK, I. V., KOZACHENKO, YU. V. (2010) The distribution of the supremum of Θ -pre-Gaussian shot noise processes. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*. No.80, p.85–100.
10. GIKHMAN, I. I., SKOROKHOD, A. V. (1977) *Introduction to the Theory of Random Processes*. M.: Nauka, 570p.
11. GIULIANO ANTONINI, R., KOZACHENKO, YU. V., NIKITINA, T. (2003) Space of φ -sub-Gaussian random variables. *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl.* (5) 27, p.92–124.
12. KOOPS, D. T., BOXMA, O. J. AND MANDJES, M. R. H. (2016) Networks of $\cdot/G/\infty$ Queues with Shot-Noise-Driven Arrival Intensities. *Queueing Systems*. August 2016, DOI: 10.1007/s11134-017-9520-7.
13. KOZACHENKO, YU. V., OSTROVSKY, E. I. (1985) Banach spaces of random variables of sub-Gaussian type, *Theory of Probability and Mathematical Statistics*. No. 32, p.42–53.
14. KOZACHENKO, YU. V., PERESTYUK, M. M., VASYLYK, O. I. (2006) On Uniform Convergence of Wavelet Expansions of φ -sub-Gaussian Random Process. *Random Operators and Stochastic Equations*. 14, no.3, p.209–232.
15. KOZACHENKO, YU. V., VASILIK, O. I. (1998) On the distribution of suprema of $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ random processes. *Theory of Stochastic Processes*. 4(20), issue 1–2, p.147–160.
16. KOZACHENKO, YU. V., VASILIK, O. I. (2001) Stochastic processes of the classes $V(\varphi, \psi)$. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*. 63, p. 109–121.
17. KOZACHENKO, YU., YAMNENKO, R., VASYLYK, O. (2005) Upper estimate of overrunning by $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ random process the level specified by continuous function. *Random Oper. Stoch. Equ.* 13, no. 2, p.111–128.
18. KRASNOSEL'SKII, M. A., RUTICKII, YA. B. (1961) *Convex Functions and Orlicz Spaces*. Moscow, 1958 (in Russian). English translation: P.Noordhoff Ltd, Groningen, 249p., 1961.
19. RICE, S. O. (1944) Mathematical analysis of random noise. *The Bell System Technical Journal*. 23, p.282–332.
20. RICE, S. O. (1945) Mathematical analysis of random noise. *The Bell System Technical Journal*. 24, p.46–156.
21. RICE, J. (1977) On generalized shot noise. *Advances in Applied Probability*. 9, p.553–565.
22. SCHMIDT, T. (2014) Catastrophe insurance modeled by shot-noise processes, *Risks*. ISSN 2227-9091, MDPI, Basel, 2, Iss. 1, p.3–24. <http://dx.doi.org/10.3390/risks2010003>.
23. SCHMIDT, T. (2016) Shot-noise processes in finance. arXiv:1612.06616v1.
24. SCHOTTKY, W. (1918) Uber spontane Stromschwankungen in verschiedenen Elektrizitätsleitern. *Annalen der Physik*. 362(23), p.541–567.
25. VASYLYK, O. I. (2017) Strictly φ -sub-Gaussian quasi shot noise processes. *Statistics, Optimization and Information Computing*. 5, p.109–120.

Received: 02.03.2019

УДК 519.21

О.В. Иванов ¹, д.ф.-м.н., проф.
Н.В. Каптур ², студ.
І.М. Савич ³, к.ф.-м.н.

**Про асимптотичний розподіл оцінки
Коенкера-Бассетта параметра лінійної
моделі регресії з сильно залежним
шумом**

^{1,2,3} Національний технічний університет
України "Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського", 03056, Київ-56,
просп. Перемоги, 37
e-mail: ¹alexntuu@gmail.com,
²vasylivna.nv@gmail.com
³sim_ka@i.ua

O.V. Ivanov ¹, Dr. Sci., Prof.
N.V. Kaptur ², stud.
I.M. Savych ³, Ph.D.

**On asymptotic distribution of
Koenker-Bassett estimator of the
parameter of linear regression model with
strongly dependent noise**

^{1,2,3} National Technical University of Ukraine
"Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", 03056,
Kyiv, 37 Peremogy prospect
e-mail: ¹alexntuu@gmail.com,
²vasylivna.nv@gmail.com
³sim_ka@i.ua

У роботі вивчається асимптотична поведінка оцінок Коенкера - Бассетта параметрів лінійної моделі регресії з дискретним часом спостереження та випадковим шумом, який є нелінійним локальним перетворенням гауссівського стаціонарного часового ряду з сингулярним спектром. Мета роботи полягає в отриманні вимог до функції регресії та часового ряду, що моделює випадковий шум, за яких оцінки Коенкера - Бассетта параметрів функції регресії є асимптотично нормальними.

Ключові слова: лінійна модель регресії, функція регресії, локальне перетворення гауссівського стаціонарного часового ряду, оцінка Коенкера - Бассетта, асимптотична нормальність.

Asymptotic properties of Koenker - Bassett estimators of linear regression model parameters with discrete observation time and random noise being nonlinear local transformation of Gaussian stationary time series with singular spectrum are studied. The goal of the work lies in obtaining the requirements to regression function and time series that simulates the random noise, under which the Koenker - Bassett estimators of regression model parameters are asymptotically normal. Linear regression model with discrete observation time and bounded open convex parametric set is the object of the studying. Asymptotic normality of unknown parameters Koenker - Bassett estimators are obtained. For getting these results complicated concepts of time series theory and time series statistics have been used, namely: local transformation of Gaussian stationary time series, stationary time series with singular spectral density, spectral measure of regression function, admissibility of singular spectral density of stationary time series in relation to this measure, expansions by Chebyshev - Hermite polynomials of the transformed Gaussian time series values and it's covariances, central limit theorem for weighted sums of the values of such a local transformation.

Key Words: linear regression model, regression function, local transformation of Gaussian stationary time series, Koenker - Bassett estimators, asymptotic normality.

Communicated by Prof. Kozachenko Yu.V.

1 Вступ

Регресійний аналіз – це важлива частина математичної та прикладної статистики.

У роботі розглядається лінійна модель регресії з дискретним часом спостереження, яка є складною в тому розумінні, що випадковий шум є локальним нелінійним перетворенням стаціонарного гауссівського часового ряду

з сингулярною спектральною щільністю (зокрема, ця щільність може відповідати сильно залежному часовому ряду). Вивчення часових рядів з несумовними коваріаційними функціями породжує складні ймовірнісні та статистичні задачі. Однак, дослідження останніх десятиріч

підтвердили, що статистичні дані наукових галузей, показують сильну залежність: див. моно-

графію Дж. Берана та ін. [1], яка містить огляд та бібліографію з тематики сильної залежності.

В теорії статистичного оцінювання вагоме місце займає оцінка квантильної регресії, або оцінка Коенкера-Бассетта (ОКБ) [2], яка означається з використанням непарної функції втрат та є оцінкою невідомого параметра квантиля спостережень. Теорія таких оцінок розвивалась у великій кількості робіт: див., наприклад, монографію Р. Коенкера [3] та дисертацію І.М. Савич [4].

У роботі досліджується модель квантильної регресії фіксованого рівня $\beta \in (0, 1)$. Спостереження у такій моделі можна записати у вигляді суми квантильної функції регресії та "похибок" спостережень, про функцію розподілу яких $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, відомо, що $F(0) = \beta$ (див., наприклад, статтю П.Ф. Тарасенка, А.В. Журавльова [5]). У роботі зроблено припущення про рівність нулю середнього значення похибок спостережень. Таке припущення, взагалі кажучи, спрощує ідею квантильної регресії, але ми отримуємо можливість вивчати стандартні моделі регресії з несиметричними похибками спостережень і отримувати робастні ОКБ параметрів регресії, використовуючи функцію втрат Коенкера-Бассетта (див., наприклад, І.В. Орловський [6]). Зауважимо також, що ОКБ узагальнює оцінку найменших модулів у тому розумінні, що оцінка найменших модулів є оцінкою невідомого параметра медіани різнорозподілених спостережень.

2 Опис моделі. Основні припущення і позначення

Розглянемо модель регресії

$$X_j = g(j, \theta) + \varepsilon_j, \quad j \in \overline{1, N}, \quad (1)$$

де $g(j, \theta) = \sum_{i=1}^q \theta_i g_i(j)$, $j \geq 1$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q) \subset \Theta \subset \mathbb{R}^q$, Θ – відкрита опукла обмежена множина. Відносно похибок спостережень ε_j припустимо наступне.

A1. ε_j , $j \in \mathbb{Z}$, локальне перетворення гаусівського стаціонарного часового ряду ξ_j , $j \in \mathbb{Z}$, а саме: $\varepsilon_j = G(\xi_j)$, $G(x)$, $x \in \mathbb{R}$, – борелева функція така, що $E\varepsilon_0 = 0$, $E\varepsilon_0^2 < \infty$.

A2. Часовий ряд ξ_j , $j \in \mathbb{Z}$, визначено на ймовірносному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $E\xi_0 = 0$, а

його коваріаційну функцію задано виразом

$$B(j) = E\xi_j \xi_0 = \sum_{l=0}^r A_l B_{\alpha_l, \chi_l}(j), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad r \geq 0, \quad (2)$$

причому $A_l > 0$, $\sum_{l=0}^r A_l = 1$,

$$B_{\alpha_l, \chi_l}(j) = \frac{\cos(\chi_l j)}{(1 + j^2)^{\alpha_l/2}},$$

$\alpha_l \in (0, 1)$, $l = \overline{0, r}$, $0 \leq \chi_0 < \chi_1 < \dots < \chi_r < \pi$.

Позначимо $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, функцію розподілу випадкової величини ε_0 .

A3. $F(0) = \beta$, $\beta \in (0, 1)$.

Введемо функцію втрат

$$\rho_\beta(x) = \begin{cases} \beta x, & x \geq 0, \\ (\beta - 1)x, & x < 0. \end{cases} \quad (3)$$

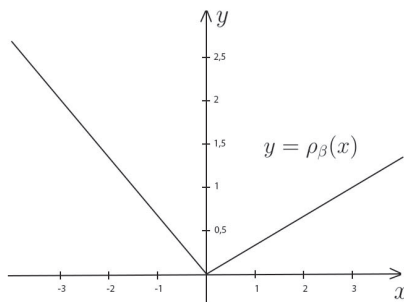


Рис. 1. Графік функції $y = \rho_{1/3}(x)$.

Означення 1. Квантильною оцінкою, або ОКБ, параметра $\theta \in \Theta$, отриманою за спостереженнями (1) називається будь-який випадковий вектор $\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_N(X_j, j = \overline{1, N}) \in \Theta^c$ такий, що

$$Q_N(\hat{\theta}_N) = \min_{\tau \in \Theta^c} Q_N(\tau), \quad Q_N(\tau) = \sum_{j=1}^N \rho_\beta(X_j - g(j, \tau)),$$

Θ^c – замикання множини Θ .

За введених умов оцінка $\hat{\theta}_N$ існує [7].

Позначимо

$$d_N^2 = \text{diag} \left(d_{iN}^2 \right)_{i=1}^q, \quad d_{iN}^2 = \sum_{j=1}^N g_i^2(j), \quad (4)$$

та припустимо, що є вірними наступні нерівності.

$$\mathbf{B1(i)} \quad 0 < \underline{c_i} \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} N^{-1/2} d_{iN} \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} N^{-1/2} d_{iN} \leq \bar{c_i} < \infty, \quad i = \overline{1, q}.$$

Зробимо заміну змінних у функції регресії $u = N^{-1/2}d_N(\tau - \theta)$ та покладемо $h(j, u) = g(j, \theta + N^{1/2}d_N^{-1}u)$. Тоді множина Θ трансформується в множину $\bar{U}_N(\theta) = N^{-1/2}d_N(\Theta - \theta)$, а оцінка $\hat{\theta}_N$ – в оцінку $\bar{u}_N = N^{-1/2}d_N(\Theta - \theta)$.

Запишемо

$$Q_N^*(u) = Q_N(\theta + N^{1/2}d_N^{-1}u), \quad u \in \bar{U}_N^c(\theta);$$

$$V(r) = \{u \in \mathbb{R}^q : \|u\| < r\}, \quad r > 0;$$

$$\varepsilon_j = \varepsilon_j^+ + \varepsilon_j^-,$$

$$\varepsilon_j^+ = \varepsilon_j \chi\{\varepsilon_j \geq 0\}, \quad \varepsilon_j^- = \varepsilon_j \chi\{\varepsilon_j < 0\};$$

$$I(N) = \left(I_{ik}(N)\right)_{i,k=1}^q,$$

$$I_{ik}(N) = N^{-1} \sum_{j=1}^N g_i(j)g_k(j).$$

Позначимо $\lambda_{\min}(I(N))$ – найменше власне число матриці $I(N)$. **B1(ii)**. Для достатньо великих $N(N > N_0)$

$$\lambda_{\min}(I(N)) \geq \underline{\lambda} > 0. \quad (5)$$

Отримаємо з умов **B1(i)** та **B1(ii)** корисні для нас нерівності. Для будь-якого достатньо малого $\varepsilon > 0$ та $N > N_0$ справджується $N^{-1/2}d_{iN} \geq \underline{c}_i - \varepsilon$, звідки

$$\begin{aligned} N^{1/2}d_{iN}^{-1} &\leq \frac{1}{\underline{c}_i - \varepsilon} \leq \max_{i \leq i \leq q} \left(\frac{1}{\underline{c}_i - \varepsilon} \right) \\ &= \frac{1}{\min \underline{c}_i - \varepsilon}, \quad i = \overline{1, q}. \end{aligned} \quad (6)$$

З іншого боку, $N^{-1/2}d_{iN} \leq \overline{c}_i + \varepsilon$, звідки

$$\begin{aligned} N^{1/2}d_{iN}^{-1} &\geq \frac{1}{\overline{c}_i + \varepsilon} \leq \min_{1 \leq i \leq q} \left(\frac{1}{\overline{c}_i + \varepsilon} \right) \\ &= \frac{1}{\max \overline{c}_i + \varepsilon}, \quad i = \overline{1, q}. \end{aligned} \quad (7)$$

Оцінимо величину

$$\begin{aligned} &N^{-1}\Phi_{2N}(u_1, u_2) = \\ &N^{-1} \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^q g_i(j) N^{1/2}d_{iN}^{-1}(u_1^i - u_2^i) \right)^2 = \\ &N^{-1} \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i,k=1}^q g_i(j)g_k(j) \times \right. \\ &\left. N^{1/2}d_{iN}^{-1}(u_1^i - u_2^i) N^{1/2}d_{kN}^{-1}(u_1^k - u_2^k) \right) = \\ &\sum_{i,k=1}^q \left(N^{-1} \sum_{j=1}^N g_i(j)g_k(j) \times \right. \\ &\left. N^{1/2}d_{iN}^{-1}(u_1^i - u_2^i) N^{1/2}d_{kN}^{-1}(u_1^k - u_2^k) \right) \leq \\ &\sum_{i,k=1}^q N^{-1/2}d_{iN} N^{-1/2}d_{kN} \times \\ &N^{1/2}d_{iN}^{-1} N^{1/2}d_{kN}^{-1} |u_1^i - u_2^i| |u_1^k - u_2^k| = \\ &\left(\sum_{i=1}^q |u_1^i - u_2^i| \right)^2 \leq q \|u_1 - u_2\|^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Припустимо, що для довільного $r > 0$ існує $\Delta(r) > 0$ таке, що для $N > N_0$

$$\inf_{u \in \bar{U}_N^c(\theta) \setminus V^c(r)} N^{-1}EQ_N^*(u) \geq E\varepsilon_0^+ + \Delta(r), \quad (9)$$

У роботі [4] доведено, що якщо виконуються умови **A1** – **A3**, **B1(i)** (в певній модифікації для неперервного нелінійного випадку) та умова розрізнення параметрів (9), то для довільного $r > 0$

$$P\left\{\|\bar{u}_N\| \geq r\right\} = O(N^{-\alpha}) \text{ при } N \rightarrow \infty. \quad (10)$$

де $\alpha = \min_{0 \leq l \leq r} \alpha_l$, а α_l – константи з умови **A2**. Співвідношення (10) є деякою підсиленою властивістю слабкої консистентності оцінки Коенкера-Бассетта.

Далі розглянемо поняття припустимості спектральної щільності стаціонарного часового ряду з сингулярним спектром, що грає важливу роль в доведенні асимптотичної нормальності оцінки ОКБ.

3 μ - припустимість спектральної щільності стаціонарного часового ряду з сингулярним спектром

Для зручності сприйняття розглянемо $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, – неперервний в середньому квадратичному

стаціонарний випадковий процес з нульовим середнім та коваріаційною функцією, яка є неперервним аналогом коваріаційної функції стаціонарного часового ряду ξ_j , $j \in \mathbb{Z}$, умови **A2**, тобто

$$B(t) = E\xi(t)\xi(0) = \sum_{l=0}^r A_l B_{\alpha_l, \chi_l}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad r \geq 0, \quad (11)$$

де $A_l > 0$, $l = \overline{0, r}$, $\sum_{l=0}^r A_l = 1$,

$$B_{\alpha_l, \chi_l}(t) = \frac{\cos(\chi_l t)}{(1+t^2)^{\alpha_l/2}}, \quad \alpha_l \in (0, 1), \quad l = \overline{0, r},$$

$$0 \leq \chi_0 < \chi_1 < \dots < \chi_r < \pi. \quad (12)$$

Модель коваріаційної функції (11), (12) було вперше розглянуто в роботі [8], тому що спектральну щільність, відповідну даній коваріаційній функції, можна записати в явному вигляді, причому її сингулярності, як ми побачимо, можуть знаходитись не тільки в нулі, як у випадку сильно залежного процесу. Коваріаційна функція (11), (12) використовувалась також у пізніших роботах [4, 9, 10] та ін.

Спектральна щільність $\tilde{f}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, процесу $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, має вигляд

$$\tilde{f}(\lambda) = \sum_{l=0}^r A_l \tilde{f}_{\alpha_l, \chi_l}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (13)$$

де для $l = \overline{0, r}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\tilde{f}_{\alpha_l, \chi_l}(\lambda) = \frac{c_1(\alpha_l)}{2} \left(K_{\frac{\alpha_l-1}{2}}(|\lambda + \chi_l|) |\lambda + \chi_l|^{\frac{\alpha_l-1}{2}} + K_{\frac{\alpha_l-1}{2}}(|\lambda - \chi_l|) |\lambda - \chi_l|^{\frac{\alpha_l-1}{2}} \right), \quad (14)$$

$$c_1(\alpha) = \frac{2^{(1-\alpha)/2}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{\alpha}{2})},$$

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty s^{\nu-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right)z\right\} ds,$$

$z \geq 0$, $\nu \in \mathbb{R}$. Функція $K_\nu(z)$, $z \geq 0$, називається модифікованою функцією Бесселя 2-го роду порядку ν , або функцією Макдональда. Зауважимо, що

$$K_{-\nu}(z) = K_\nu(z)$$

і для $z \rightarrow 0$

$$K_\nu(z) \sim \Gamma(\nu) 2^{\nu-1} z^{-\nu}, \quad \nu > 0.$$

В околах точок $\lambda = \pm \chi_l$, $l = \overline{0, r}$,

$$\tilde{f}_{\alpha_l, \chi_l}(\lambda) = \frac{c_2(\alpha_l)}{2} \left[|\lambda + \chi_l|^{\alpha_l-1} (1 - h_l(|\lambda + \chi_l|)) + |\lambda - \chi_l|^{\alpha_l-1} (1 - h_l(|\lambda - \chi_l|)) \right], \quad (15)$$

причому $c_2(\lambda) = (2\Gamma(\alpha) \cos \frac{\alpha\pi}{2})^{-1}$,

$$h_l(|\lambda|) = \frac{\Gamma(\frac{\alpha_l+1}{2})}{\Gamma(\frac{3-\alpha_l}{2})} \left| \frac{\lambda}{2} \right|^{1-\alpha_l} + \frac{\Gamma(\frac{\alpha_l+1}{2})}{4\Gamma(\frac{3+\alpha_l}{2})} \left| \frac{\lambda}{2} \right|^2 + o(|\lambda|^2),$$

$\lambda \rightarrow 0$, $l = \overline{0, r}$,

див. Donoghue [11], с.293, та Anh et al. [8]. Таким чином, спектральна щільність (13) має $2r+2$ точки сингулярності, якщо $\chi_0 \neq 0$, та $2r+1$ точку сингулярності, якщо $\chi_0 = 0$. Процес $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, є процесом з сильною залежністю, якщо $\chi_0 = 0$.

Коваріаційна функція $B(j)$, $j \in \mathbb{Z}$, стаціонарного часового ряду ξ_j , $j \in \mathbb{Z}$, умови **A2** має спектральне представлення

$$B(j) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda j} f(\lambda) d\lambda, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (16)$$

тобто $B(j)$, $j \in \mathbb{Z}$, – послідовність коефіцієнтів Фур'є спектральної щільності

$$f(\lambda) = \sum_{l=0}^r A_l \tilde{f}_{\alpha_l, \chi_l}(\lambda), \quad \lambda \in [-\pi, \pi]. \quad (17)$$

Зауважимо, що спектральна щільність (17) та спектральна щільність (13), що відповідає неперервному аналогу (11) коваріаційної функції $B(j)$, $j \in \mathbb{Z}$, пов'язані між собою співвідношенням [12]

$$f(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda + 2\pi k), \quad \lambda \in [-\pi, \pi]. \quad (18)$$

Оскільки функція Макдональда має властивість ([13], 8.451, 6)

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} (1 + O(\frac{1}{z})), \quad z \rightarrow +\infty, \quad \nu \geq 0, \quad (19)$$

то ряд (18) збігається, і функція $f(\lambda)$ означена коректно. Більше того ми можемо сказати, що функція $f(\lambda)$ має, як і функція $\tilde{f}(\lambda)$, ті ж самі сингулярності в точках $\lambda = \pm \chi_l \in (-\pi, \pi)$, $l = \overline{0, r}$.

Розглянемо функцію регресії лінійної моделі (1):

$$g(j, \theta) = \sum_{i=1}^q \theta_i g_i(j), \quad j = \overline{1, N}.$$

Нехай $\mathcal{B} - \sigma$ – алгебра борелевих підмножин інтервалу $[-\pi, \pi]$. Введемо матричну міру $\mu_N(d\lambda)$ на $([-\pi, \pi], \mathcal{B})$ з матрицею щільності

$$\begin{aligned} (\mu_N^{kl}(\lambda))_{k,l=1}^q &= (g_N^k(\lambda) \overline{g_N^l(\lambda)}) \times \\ &\left(\int_{-\pi}^{\pi} |g_N^k(\lambda)|^2 d\lambda \int_{-\pi}^{\pi} |g_N^l(\lambda)|^2 d\lambda \right)^{-1/2} \Big)_{k,l=1}^q, \end{aligned} \quad (20)$$

$$g_N^k(\lambda) = \sum_{j=1}^N e^{i\lambda j} g_k(j), \quad \lambda \in [-\pi, \pi], \quad k = \overline{1, q}.$$

Зауважимо, що $d_{kN}^2 = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |g_N^k(\lambda)|^2 d\lambda$.

B2. Послідовність мір $\mu_N(d\lambda)$ слабо збігається до додатно визначеної матричної міри $\mu(d\lambda)$:

$$\mu_N \Rightarrow \mu, \quad N \rightarrow \infty. \quad (21)$$

Умова **B2** означає, що елементи $\mu^{kl}(d\lambda)$ матриці $\mu(d\lambda)$ є комплексні заряди обмеженої варіації, матриці $\mu(B)$, $B \in \mathcal{B}$, невід’ємно визначені, причому $\mu([- \pi, \pi])$ – додатно визначена матриця. Крім цього, для будь-якої неперервної та обмеженої функції $a(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} a(\lambda) \mu_N(d\lambda) \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} a(\lambda) \mu(d\lambda), \quad N \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Означення 2. [13, 14] Міра $\mu(d\lambda)$ називається спектральною мірою функції регресії $g(j, \theta)$.

За умов $\lim_{N \rightarrow \infty} d_N^2 = \infty$, $\max_{1 \leq j \leq N} |g_i(j)| = o(d_N)$ при $N \rightarrow \infty$, $i = \overline{1, q}$, компоненти $\mu^{kl}(d\lambda)$ міри $\mu(d\lambda)$ можна визначити із співвідношень [14]

$$\begin{aligned} R^{kl}(h) &= \lim_{N \rightarrow \infty} d_{kN}^{-1} d_{lN}^{-1} \sum_{j=1}^N g_k(j+h) g_l(j) = \\ &\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda h} \mu^{kl}(d\lambda), \quad k, l = \overline{1, q}, \end{aligned} \quad (23)$$

які виконано при кожному $h \in \mathbb{Z}$.

Спектральна міра функції регресії грає важливу роль в отриманні властивості асимптотичної нормальності ОКБ.

Позначимо

$$\begin{aligned} J_N &= \left(J_{kl,N} \right)_{k,l=1}^N = \\ &\left(d_{kN}^{-1} d_{lN}^{-1} \sum_{j=1}^N g_k(j) g_l(j) \right)_{k,l=1}^q. \end{aligned} \quad (24)$$

Тоді з (20) при $a(\lambda) = 1$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$,

$$J_N = \int_{-\pi}^{\pi} \mu_N(d\lambda) \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \mu(d\lambda) = \mu([- \pi, \pi]) = J, \quad N \rightarrow \infty, \quad (25)$$

причому матриця J додатно визначена за означенням спектральної міри μ . Таким чином, і матриці $\Lambda_N = J_N^{-1}$ додатно визначені для $N > N_0$. Крім цього, $\lim_{N \rightarrow \infty} \Lambda_N = \Lambda = J^{-1}$ також додатно визначена матриця.

З іншого боку, коли $a(\lambda)$ втрачає властивості неперервності та обмеженості, співвідношення (22) може в деяких випадках також виконуватись. Дамо відповідне означення для спектральної щільності стаціонарного часового ряду $a(\lambda) = f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

Означення 3. [14] Спектральна щільність f називається μ – припустимою, якщо вона інтегровна за мірою μ , тобто всі елементи матриці $\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) \mu(d\lambda)$ скінченні, та для $a = f$ виконується (22).

Далі нас буде цікавити властивість μ – припустимості спектральної щільності $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, яку задано формулою (18). Нехай для визначеності $\chi_0 = 0$, і ми розглядаємо множину індексів $I = \{-r, r\}$. Покладемо $\lambda_{-l} = -\lambda_l$, $\lambda_l = \chi_l$, $l = \overline{1, r}$, $\lambda_0 = \chi_0 = 0$. Спираючись на формули (14), (15) та (18), можна стверджувати існування такого достатньо великого числа $c_0 > 0$, що для всіх $c \geq 0$ знайдуться околі $V_l(c)$ точок λ_l , $l \in I$, для яких

$$\{\lambda \in [-\pi, \pi] : f(\lambda) > c\} \subset \bigcup_{l \in I} V_l(c), \quad (26)$$

причому $V_l(c)$ у (26) не перетинаються та міри Лебега $m(V_l(c)) \rightarrow 0$ при $c \rightarrow \infty$, $l \in I$.

В3. Для $N > N_0$

$$d_{kN}^{-1} \max_{\lambda \in V_l(c_0)} |g_N^k(\lambda)| \leq h_{lk} < \infty, \quad l \in I, \quad k = \overline{1, q}. \quad (27)$$

Наступне твердження є варіантом загальної теореми роботи [9] для дискретного часу спостережень та спектральної щільності (18) і доводиться аналогічно.

Теорема 1. Нехай виконуються умови **A2, B2, B3** та спектральна щільність f інтегровна за мірою μ . Тоді $f \in \mu$ – припустимою функцією.

У подальшому тексті роботи ми побачимо, що теорема 1 потрібна для доведення асимптотичної нормальності ОКБ.

Нехай деяка функція $\Psi \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}, \varphi(x)dx)$. Тоді її можна розкласти в цьому гільбертовому просторі в ряд Фур'є

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n(\Psi)}{n!} H_n(x), \\ C_n(\Psi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) H_n(x) \varphi(x) dx, \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (28)$$

У формуванні центральної граничної теореми (див. нижче) будемо вважати, що $C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) \varphi(x) dx = E\Psi(\varepsilon_0) = 0$.

Означення 4. Функція $\Psi \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}, \varphi(x)dx)$ має ранг Ерміта m ($Hrank(\Psi) = m$), якщо або $C_m(\Psi) \neq 0$ та $m = 1$, або для деякого $m \geq 2$

$$C_1(\Psi) = \dots = C_{m-1}(\Psi) = 0, \quad C_m(\Psi) \neq 0. \quad (29)$$

У сформульованій нижче центральній граничній теоремі для деякої випадкової векторної суми використано поняття ермітового рангу функції та присутні спектральні щільності, що відповідають стаціонарним часовим рядам із коваріаційними функціями $B^r(j)$, $r \in \mathbb{N}$, де $B(j)$, $j \in \mathbb{Z}$, – коваріаційна функція часового ряду ξ_j , $j \in \mathbb{Z}$, з умови **A2**.

Добре відомо, що коваріаційній функції $B^r(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $r \geq 2$, де $B(t)$ – коваріаційна функція (11), відповідає r -та згортка

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{*r}(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}^{r-1}} \tilde{f}(\lambda - \lambda_2 - \dots - \lambda_r) \times \\ &\quad \prod_{i=2}^r \tilde{f}(\lambda_i) d\lambda_2 \dots d\lambda_r, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (30)$$

спектральної щільності (13)-(15), розглянутого вище стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Тоді за формулою Е. Хеннана (18) коваріаційній функції $B^r(j)$, $j \in \mathbb{Z}$, відповідає спектральна щільність

$$f^{(r)}(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}^{*r}(\lambda + 2\pi k), \quad \lambda \in [-\pi, \pi], \quad r \geq 2. \quad (31)$$

Будемо вважати за означенням, що $\tilde{f}^{*1}(\lambda) = \tilde{f}(\lambda)$ та $f^{(1)}(\lambda) = f(\lambda)$, крім цього, сформулюємо для функції $\Psi \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}, \varphi(x)dx)$ наступну альтернативу.

Або (i) $Hrank(\Psi) = 1$, $\alpha > \frac{1}{2}$,
або (ii) $Hrank(\Psi) = m$, $\alpha m > 1$, де

$$\alpha = \min_{0 \leq l \leq r} \alpha_l, \quad (32)$$

α_l – параметри коваріаційної функції (2) стаціонарного часового ряду ξ_j , $j \in \mathbb{Z}$.

Припустимо, що для функції Ψ виконано умову (i). У разі виконання умови (ii) подальші міркування аналогічні. Тоді коваріаційна функція $B(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, за формулами (11), (12) інтегровна з квадратом на $\mathbb{R}$ і згортка

$$\tilde{f}^{*2}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} B^2(t) dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (33)$$

є обмеженою та неперервною функцією. Більш того, для будь-якого $r \geq 2$

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{*r}(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} B^r(t) dt \leq \\ &\quad \frac{B^{r-2}(0)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B^2(t) dt < \infty, \end{aligned} \quad (34)$$

і всі згортки $\tilde{f}^{*r}$ неперервні та обмежені однією константою, якщо ми згадаємо, що за нашим припущенням $B(0) = 1$.

Зауважимо також, що з рівності

$$B^r(t) = \left(\sum_{l=0}^r A_l B_{\alpha_l, \chi_l}(t) \right)^r, \quad r \geq 2, \quad (35)$$

після підведення правої частини в r -й степінь видно, що спектральна щільність $\tilde{f}^{*r}(\lambda)$ є лінійною комбінацією функцій Макдональда порядків $\nu > 1$. Але для таких функцій також справедлива асимптотична формула (19), і ряди (31) збігаються рівномірно за $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

Для формулювання центральної граничної теореми, введемо ще одну умову, яка регулює зростання функцій $g_i(j)$, $j \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1, q}$, при зростанні об'єму вибірки N .

В4.

$$d_{iN}^{-1} \max_{1 \leq j \leq N} |g_i(j)| \leq k^i N^{-1/2}, \quad i = \overline{1, q}. \quad (36)$$

Сформулюємо теорему про асимптотичну нормальність зваженої векторної суми значень нелінійного перетворення гаусівської стаціонарної випадкової послідовності з сингулярним спектром, яку доведено в роботі [9].

Теорема 2. Нехай виконано умови **A1, A2, B2, B3** та одну з наступних умов для функції $\Psi \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}, \varphi(x)dx)$:

(i) $Hrank(\Psi) = 1$ та спектральна щільність f часового ряду ξ_j , $j \in \mathbb{Z}$, $\epsilon \mu$ – припустимою;

(ii) $Hrank(\Psi) = m$ та $m\alpha > 1$, де α задана формулою (32). Тоді випадковий вектор

$$\begin{aligned} \zeta_N &= d_N^{-1} \sum_{j=1}^N \Psi(\xi_j) \nabla g(j), \\ \nabla g(j) &= (g_1(j), \dots, g_q(j))^T \end{aligned} \quad (37)$$

асимптотично нормальний $N(0, \sigma)$ при $N \rightarrow \infty$, де

$$\sigma = 2\pi \sum_{r=m}^{\infty} \frac{C_r^2(\Psi)}{r!} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(\lambda) \mu(d\lambda). \quad (38)$$

Приклад 1. Розглянемо в моделі спостережень (1) функцію регресії

$$g(j, \theta) = \sum_{i=1}^n (A_i \sin \varphi_i j + B_i \cos \varphi_i j), \quad j \geq 1, \quad (39)$$

де φ_i , $i = \overline{1, n}$, – відомі частоти гармонічних коливань, причому $0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_n < \pi$. Вектор невідомих параметрів θ – це вектор невідомих амплітуд суми гармонічних коливань (39), а саме: $\theta = (A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_n, B_n)$. Таким чином, в цьому прикладі $q = 2n$, і ми маємо справу з вектором - градієнтом функції регресії

$$\nabla g(j) = (\sin \varphi_1 j, \cos \varphi_1 j, \sin \varphi_2 j, \cos \varphi_2 j, \dots, \sin \varphi_n j, \cos \varphi_n j), \quad (40)$$

$j \geq 1$. Знайдемо спектральну міру μ умови **B2**, що відповідає функції регресії (39), або, іншими словами, вектор-функції (40). Використовуючи співвідношення (23), можна стверджувати, що міра μ є блочно діагональною (див., наприклад, [11]) з блоками

$$\begin{bmatrix} \delta_k & i\rho_k \\ -i\rho_k & \delta_k \end{bmatrix}, \quad k = \overline{1, n}, \quad (41)$$

де міра $\delta_k = \delta_k(d\lambda)$ та заряд $\rho_k = \rho_k(d\lambda)$ зосереджені в точках $\pm\varphi$, причому $\delta_k\{\pm\varphi\} = \frac{1}{2}$, $\rho\{\pm\varphi\} = \pm\frac{1}{2}$, $k = \overline{1, n}$. З (41) випливає, що

$$\mu([- \pi, \pi]) = \int_{-\pi}^{\pi} \mu(d\lambda) = \mathbb{I}_{2n}. \quad (42)$$

Крім цього, за формулами (24), (25) та того факту, що з огляду на (40), $I_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathbb{I}_{2n}$, де $\mathbb{I}_{2n}$ – одинична матриця $2n$ -го порядку,

$$\begin{aligned} J_N &= \left(N^{\frac{1}{2}} d_{kN}^{-1} N^{\frac{1}{2}} d_{lN}^{-1} I_{kl}(N) \right)_{k,l=1}^N = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \mu_N(d\lambda) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \mu(d\lambda) = J = \mathbb{I}_{2n}. \end{aligned} \quad (43)$$

Для виконання умови **B3** (див. формулу (27)), як показано, наприклад, у роботі [9] достатньо, щоб множини точок $S_f = \{\chi_l, l = \overline{0, r}\}$ та $S_g = \{\varphi_k, k = \overline{1, n}\}$ не перетинались:

$$S_f \cap S_g = \emptyset. \quad (44)$$

Якщо це так, то ми можемо застосувати теорему 1 і стверджувати, що спектральна щільність $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, часового ряду ξ_j , $j \in \mathbb{Z}$, $\epsilon \mu$ – припустимою.

Зауважимо також, що для функції регресії (39) виконання нерівностей (36) умови **B4** є очевидним.

Якщо, крім умов **B2–B4** на функцію регресії (39), виконано решта умов теореми 2, то є вірною теорема 2. Запишемо для нашого прикладу коваріаційну матрицю (38) граничного нормального розподілу теореми 2. Враховуючи парність функції $f^{(r)}(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, та (41), знаходимо, що σ є блочно діагональною матрицею з блоками

$$\sigma_k = 2\pi \sum_{r=m}^{\infty} \frac{C_r^2(\Psi)}{r!} f^{(r)}(\varphi_k) \mathbb{I}_2, \quad k = \overline{1, n}, \quad (45)$$

$\mathbb{I}_2$ – одинична матриця 2-го порядку, причому блоки, як ми бачимо, самі є діагональними матрицями 2-го порядку.

4 Асимптотична нормальність оцінки Коенкера–Бассетта

Доведемо теорему редукції, яка дозволяє звести розв'язання задачі про асимптотичну нормальність оцінки Коенкера–Бассетта до застосування центральної граничної теореми 2 попереднього пункту з функцією Ψ , яка певним чином пов'язана з функцією G з умови **A1**.

Після цього ми отримуємо результат про асимптотичну нормальність оцінки Коенкера–Бассетта як достатньо простий наслідок теореми 2 та теореми редукції.

Введемо потрібну нам умову.

A4. Випадкова величина ε_0 має щільність $p(x) = F'(x)$, для якої є вірними нерівності

$$|p(x) - p(0)| \leq H|x|, \quad x \in \mathbb{R}, \quad p(0) > 0, \quad (46)$$

де $H < \infty$ деяка константа.

Нехай l – довільний напрям у $\mathbb{R}^q$ та $\tau \in \Theta^c$. Знайдемо однобічну похідну за напрямом l функціонала оцінки Коенкера–Бассетта

$$Q_N(\tau) = \sum_{j=1}^N \rho_j \left(x_j - g(j, \tau) \right).$$

Користуючись співвідношенням

$$\frac{\partial}{\partial l} Q_N(\tau) = \lim_{\lambda \rightarrow 0+} \frac{Q_N(\tau + \lambda l) - Q_N(\tau)}{\lambda},$$

можна отримати дещо спрощену відповідь (див. позначення (37)):

$$\frac{\partial}{\partial l} Q_N(\tau) = \sum_{j=1}^N \left\langle \nabla g(j), l \right\rangle \left(\chi\{X_j < g(j, \tau)\} - \beta \right) \quad (47)$$

м.н.,

де $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^q x_i y_i$ – скалярний добуток двох векторів із $\mathbb{R}^q$.

Зауважимо, що в точці мінімуму $\hat{\theta}_N$ функціонала $Q_N(\tau)$ для будь-якого напрямку в l виконується нерівність

$$\frac{\partial}{\partial l} Q_N(\hat{\theta}_N) \geq 0, \quad (48)$$

що впливає з означення оцінки Коенкера–Бассетта як точки мінімуму функціоналу $Q_N(\tau)$. Нерівність (48) буде використана у доведенні асимптотичної нормальності нашої оцінки.

Нехай $l^1, \dots, l^q$ додатні напрямки координатних вісей в $\mathbb{R}^q$. Введемо випадкові вектори $Q_N^\pm(\tau) = \left(Q_{iN}^\pm(\tau) \right)_{i=1}^q$,

$$Q_{iN}^\pm(\tau) = d_{iN}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial (\pm l^i)} \right) Q_N(\tau) = \pm d_{iN}^{-1} \sum_{j=1}^N g_i(j) \left(\chi\{X_j < g(j, \tau)\} - \beta \right). \quad (49)$$

Варто зауважити, що $Q_N^+(\tau) = -Q_N^-(\tau)$ м.н. для кожного τ , але, взагалі кажучи, $Q_N^+(\hat{\theta}_N) \neq -Q_N^-(\hat{\theta}_N)$. Зауважимо також, що вектори

$$Q_N^\pm(\theta) = \pm d_N^{-1} \sum_{j=1}^N \nabla g(j) \left(\chi\{\varepsilon_j < 0\} - \beta \right),$$

насправді, не залежать від θ , але ми будемо користуватись введеними позначеннями. Розглянемо також математичні сподівання введених векторів $EQ_N^\pm(\tau)$ з координатами

$$EQ_{iN}^\pm(\tau) = \pm d_{iN}^{-1} \sum_{j=1}^N g_i(j) \left[F(g(j, \tau)) - g(j, \theta) - \beta \right], \quad (50)$$

$i = \overline{1, q}$,

причому $EQ_N^\pm(\theta) = 0$ за умовою **A3**.

Теорема 3. Нехай виконано умови **A1–A4**, **B2–B4** та оцінка $\hat{\theta}_N$ є консистентною в сенсі (10). Нехай також функція

$$\Psi(x) = \beta - \chi\{G(x) < 0\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

задовольняє умові (i) теореми 2. Тоді асимптотичний при $N \rightarrow \infty$ розподіл вектора $d_N(\hat{\theta}_N - \theta)$ збігається з асимптотичним розподілом вектора $-p^{-1}(0) \Lambda_N Q_N^+(\theta)$, якщо останній існує.

Доведення теореми 3 спирається на доведення декількох лем. В доведенні першої з них застосовано складний спосіб поділу параметричної множини на фрагменти, який винайдено П. Хьюбером [15, 16].

Позначимо

$$Q_N^{*\pm}(u) = Q_N^\pm(\theta + N^{1/2} d_N^{-1} u),$$

$$Z_N^\pm(\theta, u) = \frac{\|Q_N^{*\pm}(u) - Q_N^{*\pm}(0) - EQ_N^{*\pm}(u)\|}{1 + \|EQ_N^{*\pm}(u)\|}. \quad (51)$$

Лема 1. За умов теореми 3 для будь-яких $\varepsilon > 0$ та достатньо малих $r > 0$

$$P\left\{\sup_{u \in V^c(r) \cap \tilde{U}_N^c(\theta)} Z_N^\pm(\theta, u) > \varepsilon\right\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \quad (52)$$

◀ Будемо доводити лему для Z_N^+ . Для спрощення доведення (51) візьмемо $r = 1$, а у якості множини під позначкою супремуму в (52) розглянемо куб

$$C_0 = \{u \in \mathbb{R}^q : \|u\|_0 = \max_{1 \leq i \leq q} |u_i| \leq 1\},$$

який містить замкнену кулю $V^c(1)$.

Покриємо куб C_0 кубами $C_{(1)}, \dots, C_{(n_0)}$, де $n_0 = O(\ln N)$, наступним чином. Зафіксуємо число $p \in (0, 1)$ і розглянемо концентричну сім'ю множин

$$C^{(l)} = \{u : \|u\|_0 \in [(1-p)^{l+1}, (1-p)^l]\}, l = \overline{0, l_0 - 1},$$

$$C^{(l_0)} = \{u : \|u\|_0 \leq (1-p)^{l_0}\}.$$

Покриємо кожну множину $C^{(l)}$ однаковими кубами зі стороною $a_l = (1-p)^l - (1-p)^{l+1} = p(1-p)^l$ та пронумеруємо ці куби. Вони і утворюють потрібне покриття

$$C_{(1)}, \dots, C_{(n_0-1)}, C_{(n_0)} := C^{(l_0)}.$$

Визначимо $l_0 = l_0(N)$ з умови

$$(1-p)^{\tilde{l}_0} = N^{-\gamma}, l_0 = [\tilde{l}_0], \gamma \in (\frac{1}{2}, 1) \text{— деяке число.}$$

Зазначимо, що $\|\cdot\|_0$ — відстань від $C_{(s)}$ до 0 є $r(s) = (1-p)N^{-\gamma l/\tilde{l}_0}$, та діаметр $C_{(s)}$ дорівнює $a(s) = pN^{-\gamma l/\tilde{l}_0} = a_l$ для деякого $l = l(s)$, $s = \overline{1, n_0 - 1}$, тобто коли куб $C_{(s)}$ є елементом покриття множини $C^{(l)}$. Більше того, кількість кубів $C_{(s)}$ покриття кожної множини $C^{(l)}$ можна зробити незалежною від l і N . Тоді з того, що $l_0 = O(\ln N)$, випливає, що $n_0 = O(\ln N)$ також. Таким чином

$$P\left\{\sup_{u \in C_0} Z_N^+(\theta, u) > \varepsilon\right\} \leq \sum_{s=1}^{n_0} P\left\{\sup_{u \in C_{(s)}} Z_N^+(\theta, u) > \varepsilon\right\}. \quad (53)$$

Оцінимо кожний доданок правої частини нерівності (53) окремо. Розглянемо відображення

$u \rightarrow EQ_N^{*+}(u)$. Кожний елемент матриці похідних $D_N(u)$ цього відображення має вигляд (див. (50))

$$D_N^{il}(u) = \frac{\partial}{\partial u_l} EQ_N^{*+}(u) = N^{1/2} d_{iN}^{-1} d_{lN}^{-1} \sum_{j=1}^N g_i(j) g_l(j) p(h(j, u) - h(j, 0)). \quad (54)$$

Зауважимо, що

$$N^{-1} \Phi_{2N}(u, 0) = N^{-1} \sum_{j=1}^N (h(j, u) - h(j, 0))^2 = N^{-1} \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^q g_i(j) N^{1/2} d_{iN}^{-1} u_i \right)^2 \leq q \|u\|^2. \quad (55)$$

Тоді за умов **A4**, **B3** з використанням (55) отримуємо

$$\begin{aligned} & |N^{-1/2} D_N^{il}(u) - p(0) J_{il,N}| = \\ & d_{iN}^{-1} d_{lN}^{-1} \times \\ & \left| \sum_{j=1}^N g_i(j) g_l(j) (p(h(j, u) - h(j, 0)) - p(0)) \right| \leq \\ & H N^{1/2} d_{iN}^{-1} d_{lN}^{-1} \times \\ & \left(\sum_{j=1}^N g_i^2(j) g_l^2(j) \right)^{1/2} (N^{-1} \Phi_{2N}(u, 0))^{1/2} \leq \\ & H N^{1/2} d_{iN}^{-1} \max_{1 \leq j \leq N} |g_i(j)| q^{1/2} \|u\| \leq q^{1/2} (k^i)^{1/2} H \|u\|. \end{aligned} \quad (56)$$

За формулою Тейлора

$$N^{-1/2} EQ_N^{*+}(u) = \sum_{l=1}^q N^{-1/2} D_N^{il}(u^{(i)}) u_l, \quad (57)$$

$$\|u^{(i)}\| \leq \|u\|, i = \overline{1, q}.$$

Розглянемо матрицю

$$H_N = \left(N^{-1/2} D_N^{il}(u^{(i)}) \right)_{i,l=1}^q. \quad (58)$$

Тоді, як ми довели в (56)

$$H_N = p(0) J_N + M_N, \quad (59)$$

де M_N — матриця з елементами $M_N^{il} \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0, i, l = \overline{1, q}$, причому остання збіжність рівномірна за N . Маємо далі

$$H_N^T H_N = p^2(0) J_N^2 + p(0) (M_N^T J_N + J_N M_N^T) + M_N^T M_N.$$

За властивістю власних чисел суми симетричних матриць ([17], с.101-103) маємо

$$\begin{aligned} & |\lambda_{\min}(H_N^T H_N) - p^2(0)\lambda_{\min}(J_N^2)| \leq \\ & q \left(p(0) \max_{1 \leq i, l \leq q} |(M_N^T J_N + J_N M_N^T)_{il}| + \right. \\ & \left. \max_{1 \leq i, l \leq q} |(M_N^T M_N)_{il}| \right) = O(\|u\|), \end{aligned}$$

Тобто за умови **B2** матриця $H_N^T H_N$ додатно визначена рівномірно за $N > N_0$ для достатньо малих u (не обмежуючи загальності, будемо вважати, що для $u \in C_0$), і для деякого $k_0 > 0$

$$\|N^{-1/2}Q_N^{*+}(u)\| = \sqrt{\langle H_N^T H_N u, u \rangle} \geq k_0 \|u\|_0. \quad (60)$$

Нехай $s \neq n_0$ та $v \in C_{(s)}$ - довільна точка. Тоді з (51) та (60) випливає, що

$$\begin{aligned} & \sup_{u \in C_{(s)}} Z_N^+(\theta, u) \leq \\ & \left(\sup_{u \in C_{(s)}} M_{1N}^{(s)}(u, v) + \sup_{u \in C_{(s)}} M_{2N}^{(s)}(u, v) + L_N^{(s)}(\theta, v) \right) \times \\ & (1 + k_0 N^{1/2} r(s))^{-1}, \end{aligned} \quad (61)$$

де

$$\begin{aligned} & M_{1N}^{(s)}(u, v) = \left\| d_N^{-1} \sum_{j=1}^N \nabla g(j) \times \right. \\ & \left. \left(\chi\{X_j < h(j, u)\} \chi\{X_j < h(j, v)\} \right) \right\|, \\ & M_{2N}^{(s)}(u, v) = \left\| d_N^{-1} \sum_{j=1}^N \nabla g(j) \times \right. \\ & \left. \left(F(h(j, u) - h(j, 0)) - F(h(j, v) - h(j, 0)) \right) \right\|, \\ & L_N^{(s)}(v) = \left\| d_N^{-1} \sum_{j=1}^N \nabla g(j) \times \right. \\ & \left. \left[\left(\chi\{X_j < h(j, v)\} - \beta \right) - \left(\chi\{\varepsilon_j < 0\} - \beta \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. \left(F(h(j, v) - h(j, 0)) - \beta \right) \right] \right\|. \end{aligned} \quad (62)$$

Відповідно до умови **A4** та нерівності (8)

$$N^{-1} \Phi_{2N}(u, v) \leq q \|u - v\|^2, \quad (63)$$

$$\begin{aligned} & N^{-1/2} M_{2N}^{(s)}(u, v) \leq \\ & N^{-1/2} \left(\sum_{i=1}^q d_{iN}^{-2} \left(\sum_{j=1}^N |g_i(j)| \times \right. \right. \\ & \left. \left. \left| F(h(j, u) - h(j, 0)) - F(h(j, v) - h(j, 0)) \right| \right)^2 \right)^{1/2} \leq \\ & \leq p_0 \sqrt{q} N^{-1/2} \Phi_{2N}(u, v) \leq p_0 q a(s). \end{aligned} \quad (64)$$

Для оцінювання $M_{1N}^{(s)}(u, v)$ скористаємося нерівністю

$$\begin{aligned} & \left| \chi\{X_j < h(j, u)\} - \chi\{X_j < h(j, v)\} \right| = \\ & = \left| \chi_u(j) - \chi_v(j) \right| \leq \\ & \chi\left\{ \inf_{u \in C_{(s)}} (h(j, u) - h(j, 0)) \leq \varepsilon_j \leq \right. \\ & \left. \leq \sup_{u \in C_{(s)}} (h(j, u) - h(j, 0)) \right\} := \chi_s(j). \end{aligned} \quad (65)$$

Тоді за умови **B4**

$$\begin{aligned} & N^{-1/2} M_{1N}^{(s)}(u, v) \leq \\ & N^{-1/2} \left(\sum_{i=1}^q d_{iN}^{-2} \left(\sum_{j=1}^N g_i(j) \left(\chi_u(j) - \chi_v(j) \right)^2 \right)^{1/2} \leq \\ & \leq N^{-1/2} \left(\sum_{i=1}^q d_{iN}^{-2} \left(\sum_{j=1}^N |g_i(j)| \chi_s(j) \right)^2 \right)^{1/2} \leq \\ & N^{-1/2} \left(\sum_{i=1}^q \left(\max_{1 \leq j \leq N} |g_i(j)| d_{iN}^{-1} \right)^2 \right)^{1/2} \sum_{j=1}^N \chi_s(j) \leq \\ & \leq \|k\| N^{-1} \sum_{j=1}^N \chi_s(j), \|k\| = \left(\sum_{i=1}^q (k^i)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (66)$$

Маємо далі

$$\begin{aligned} & N^{-1} \sum_{j=1}^N E \chi_s(j) \leq \\ & p_0 N^{-1} \sum_{j=1}^N \sup_{u_1, u_2 \in C_s} |h(j, u_1) - h(j, u_2)| \leq p_0 \|k\| a(s). \end{aligned} \quad (67)$$

Збираючи отримані оцінки, знаходимо

$$\begin{aligned} P_1 &= P\left\{\left(\sup_{u \in C(s)} M_{1N}^{(s)}(u, v) + \sup_{u \in C(s)} M_{2N}^{(s)}(u, v)\right)\right. \\ &\quad \left.(1 + k_0 N^{1/2} r(s))^{-1} > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \leq \\ &\leq P\left\{\frac{\|k\|}{k_0} \left(N^{-1} \sum_{j=1}^N \chi_s(j) - N^{-1} \sum_{j=1}^N E\chi_s(j)\right) \geq \right. \\ &\quad \left. \geq \frac{\varepsilon}{2} r(s) - \left(\frac{p_0 q}{k_0} + \frac{p_0 \|k\|^2}{k_0} a(s)\right)\right\}. \end{aligned} \quad (68)$$

Величина

$$\begin{aligned} &\frac{\varepsilon}{2} r(s) - \left(\frac{p_0 q}{k_0} + \frac{p_0 \|k\|^2}{k_0}\right) a(s) = \\ &\left(\frac{\varepsilon}{2} (1-p) - \left(\frac{p_0 q}{k_0} + \frac{p_0 \|k\|^2}{k_0}\right) p\right) N^{-\gamma l / \tilde{l}_0} > 0, \end{aligned}$$

якщо обрати число p достатньо малим, і ми можемо оцінити ймовірність (68), скориставшись нерівністю Чебишова:

$$\begin{aligned} P_1 &\leq \frac{\|k\|^2 / k_0^2}{\left(\frac{\varepsilon}{2} (1-p) - \left(\frac{p_0 q}{k_0} + \frac{p_0 \|k\|^2}{k_0}\right) p\right)^2} \times \\ &N^{-2+2\gamma l / \tilde{l}_0} \sum_{j, j'=1}^N \text{cov}(\chi_s(j), \chi_s(j')) \end{aligned} \quad (69)$$

Аналогічно [4] отримуємо

$$\begin{aligned} &N^{-2} \sum_{j, j'=1}^N \text{cov}(\chi_s(j), \chi_s(j')) \leq \\ &N^{-2} \sum_{j, j'=1}^N E\chi_s(j) |B(j-j')| = \\ &N^{-1} \sum_{j=1}^N E\chi_s(j) \left(N^{-1} \sum_{j'=1}^N |B(j-j')|\right) \leq \\ &\leq \left(N^{-1} \sum_{j=1}^N E\chi_s(j)\right) \left(N^{-1} \sum_{j'=-N}^N |B(j')|\right) \leq \\ &\leq 2 \left(N^{-1} \sum_{j=1}^N E\chi_s(j)\right) \left(N^{-1} \sum_{j'=0}^N |B(j')|\right). \end{aligned}$$

Для першої суми останнього добутку використовуємо оцінку (67), а для другої суми маємо

$$\begin{aligned} &N^{-1} \sum_{j=0}^N |B(j)| \leq N^{-1} + N^{-1} \sum_{j=1}^N j^{-\alpha} = \\ &O(N^{-\alpha}) \text{ при } N \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (70)$$

де α означено в (32). Разом із (69) це дає оцінку

$$P_1 = O(N^{\gamma \tilde{l}_0^{-1} - \alpha}), \quad (71)$$

причому права частина (71) збігається до нуля зі степеневим швидкістю при $\alpha > \gamma$.

Позначимо

$$\begin{aligned} L_i(j) &= g_i(j) \left(\chi\{X_j < h(j, v)\} - \chi\{\varepsilon_j < 0\} \right) = \\ g_i(j) &\left(\chi\{\varepsilon_j < h(j, v) - h(j, 0)\} - \chi\{\varepsilon_j < 0\} \right), \end{aligned} \quad (72)$$

$i = \overline{1, q}$. Тоді в формулі (62)

$$\begin{aligned} L_N^{(s)}(v) &= \left(\sum_{i=1}^q d_{iN}^{-2} \left(\sum_{j=1}^N (L_i(j) - EL_i(j)) \right) \right)^2^{1/2}, \\ P_2 &= P\left\{L_N^{(s)}(v) \left(1 + k_0 N^{1/2} r(s)\right)^{-1} > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \leq \\ &\leq \frac{4}{k_0^2 \varepsilon^2 r^2(s) N} E \sum_{i=1}^q d_{iN}^{-2} \left(\sum_{j=1}^N (L_i(j) - EL_i(j)) \right)^2. \end{aligned} \quad (73)$$

Оцінимо $E \sum_{j=1}^N d_{iN}^{-2} \left(\sum_{j=1}^N (L_i(j) - EL_i(j)) \right)^2, i = \overline{1, q}$. Нехай $C(s)$ належить покриттю множини $C^{(l)}$. Позначимо $M := \bigcup_{k=l}^{l_0} C^k$. Тоді аналогічно (65)

$$\begin{aligned} &|\chi\{\varepsilon_j < h(j, v) - h(j, 0)\} - \chi\{\varepsilon_j < 0\}| \leq \\ &\chi\left\{\inf_{v \in M} (h(j, v) - h(j, 0)) \leq \varepsilon_j \leq \sup_{v \in M} (h(j, v) - h(j, 0))\right\} := \\ &\chi_M(j), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &EL_i^2(j) \leq g_i^2(j) E\chi_M(j) = \\ &g_i^2(j) \left[F\left(\sup_{v \in M} (h(j, v) - h(j, 0))\right) - \right. \\ &\left. F\left(\inf_{v \in M} (h(j, v) - h(j, 0))\right) \right] \leq \\ &p_0 g_i^2(j) \left(\sup_{v \in M} h(j, v) - \inf_{v \in M} h(j, v) \right) \leq \\ &p_0 g_i^2(j) \sup_{v_1, v_2 \in M} |h(j, v_1) - h(j, v_2)|. \end{aligned} \quad (74)$$

Розглянемо розвинення у просторі $L_2(\Omega)$

$$L_i(j) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m(j, v)}{m!} H_m(\xi_j),$$

$$c_m(j, v) =$$

$$\begin{aligned} &g_i(j) \int_{\mathbb{R}} (\chi\{G(x) < h(j, v) - h(j, 0)\} - \chi\{G(x) < 0\}) \times \\ &H_m(x) \varphi(x) dx, m \geq 0, EL_i(j) = c_0(j, v). \end{aligned}$$

Оскільки

$$E\left(\sum_{j=1}^N \left(L_i(j) - EL_i(j)\right)^2\right) = \sum_{j,j'=1}^N \text{cov}\left(L_i(j), L_i(j')\right),$$

$$\text{cov}\left(L_i(j), L_i(j')\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m(j, v) c_m(j', v)}{m!} \times$$

$$B^m(j - j'),$$

З огляду на (73) отримуємо

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m^2(j, v)}{m!} = DL_i(j) \leq EL_i^2(j) \leq$$

$$\leq p_0 g_i^2(j) \sup_{v_1, v_2 \in M} |h(j, v_1) - h(j, v_2)|,$$

$$\sum_{j,j'=1}^N \text{cov}\left(L_i(j), L_i(j')\right) \leq$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j,j'=1}^N \frac{c_m^2(j, v)}{m!} |B(j - j')|^m \leq$$

$$\leq \sum_{j,j'=1}^N \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m^2(j, v)}{m!}\right) |B(j - j')| \leq$$

$$\leq p_0 \sum_{j,j'=1}^N g_i^2(j) \sup_{v_1, v_2 \in M} |h(j, v_1) - h(j, v_2)| \times$$

$$|B(j - j')| \leq$$

$$\leq 2p_0 N \sum_{j=1}^N g_i^2(j) \sup_{v_1, v_2 \in M} |h(j, v_1) - h(j, v_2)| \times$$

$$\left(N^{-1} \sum_{j'=0}^N |B(j')|\right).$$

З іншого боку, за умови **B4**

$$E \sum_{j=1}^N g_i^2(j) \sup_{v_1, v_2 \in M} |h(j, v_1) - h(j, v_2)| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^N g_i^2(j) \sum_{i=1}^q |g_i(j)| N^{1/2} d_{iN}^{-1} \sup_{v_1, v_2 \in M} \|v_1 - v_2\|_0 \leq$$

$$\leq 2(a(s) + r(s)) \left(\sum_{i=1}^q k^i\right) d_{iN}^2,$$

тобто для деякої константи $k_1 < \infty$

$$E\left(\sum_{j=1}^N \left(L_i(j) - EL_i(j)\right)^2\right) \leq k_1(a(s) + r(s)) N^{1-\alpha}. \quad (75)$$

Таким чином, з (73) та (75) випливає, що ймовірність

$$P_2 \leq \frac{4k_1}{k_0^2 \varepsilon^2} \frac{a(s) + r(s)}{r^2(s)} N^{-\alpha} =$$

$$\frac{4k_1}{k_0^2 \varepsilon^2 (1-p)^2} N^{\gamma \tilde{l}_0^{-1} - \alpha}. \quad (76)$$

прямує до нуля при $N \rightarrow \infty$ зі степеневим швидкістю, якщо $\alpha > \gamma$.

Отже, нерівності (61), (71) та (76) показують, що для $s = \frac{1}{1, n_0 - 1}$ (нагадуємо, що $n_0 = O(\ln N)$) та для деякого $l = l(s) < l_0$ при $N \rightarrow \infty$

$$P\left\{\sup_{u \in C(s)} z_N^+(\theta, u) > \varepsilon\right\} = O\left(N^{\gamma \tilde{l}_0^{-1} - \alpha}\right). \quad (77)$$

Залишилось розглянути випадок, коли $s = n_0$. З (51) випливає, що

$$P\left\{\sup_{u \in C(n_0)} z_N^+(\theta, u) > \varepsilon\right\} \leq$$

$$\leq P\left\{\sup_{\|u\|_0 < N^{-\gamma t_0 / \tilde{l}_0}} \left\|Q_N^{*+}(u) - Q_N^{*+}(0) - EQ_N^{*+}(u)\right\| > \varepsilon\right\}. \quad (78)$$

Запишемо вираз під знаком норми в формулі (51) як $\nu(u) - E\nu(u)$, де

$$\nu(u) = d_N^{-1} \sum_{j=1}^N \nabla g(j) \left(\chi\{X_j < h(j, u)\} - \chi\{\varepsilon_j < 0\}\right),$$

$$E\nu(u) = d_N^{-1} \sum_{j=1}^N \nabla g(j) \left(F(h(j, u) - h(j, 0)) - \beta\right).$$

Послідовно отримуємо (див. формулу (55))

$$\|E\nu(u)\| =$$

$$\left(\sum_{i=1}^q d_{iN}^{-2} \left(\sum_{j=1}^N g_i(j) \left(F(h(j, u) - h(j, 0)) - \beta\right)^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq p_0 \left(\sum_{i=1}^q d_{iN}^{-2} \left(\sum_{j=1}^N |g_i(j)| |h(j, u) - h(j, 0)|\right)^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq p_0 q^{1/2} N^{1/2} \left(N^{-1} \Phi_{2N}(u, 0)\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq p_0 q N^{1/2} \|u\| \leq k_2 N^{1/2 - \gamma t_0 \tilde{l}_0^{-1}}. \quad (79)$$

Якщо $\gamma > 1/2$, то для достатньо великих N показник степеня в (79) від'ємний. Це означає, що залишилось оцінити ймовірність ($\varepsilon' < \varepsilon$)

$$P_3 = P\left\{\sup_{\|u\|_0 < N^{-\gamma t_0 / \tilde{l}_0}} \|\nu(u)\| > \varepsilon'\right\}.$$

Запишемо

$$\|\nu(u)\| = \left(\sum_{i=1}^q d_{iN}^{-2} \left(\sum_{j=1}^N g_i(j) \times \right. \right. \\ \left. \left. \left(\chi\{\varepsilon_j < h(j, u) - h(j, 0)\} - \chi\{\varepsilon_j < 0\} \right) \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (80)$$

Як і раніше, знаходимо

$$\left| \chi\{\varepsilon_j < h(j, u) - h(j, 0)\} - \chi\{\varepsilon_j < 0\} \right| \leq \\ \leq \chi \left\{ \inf_{\|u\|_0 < N^{-\gamma l_0/\bar{l}_0}} (h(j, u) - h(j, 0)) \leq \varepsilon_j \leq \right. \\ \left. \sup_{\|u\|_0 < N^{-\gamma l_0/\bar{l}_0}} (h(j, u) - h(j, 0)) \right\} := \chi_{n_0}(j).$$

Продовжуючи (80), отримуємо

$$\|\nu(u)\| = \left(\sum_{i=1}^q d_{iN}^{-2} \left(\sum_{j=1}^N |g_i(j)| \chi_{n_0}(j) \right)^2 \right)^{1/2} \leq \\ \leq N^{-1/2} \left(\sum_{i=1}^q \left(N^{1/2} d_{iN}^{-1} \max_{1 \leq j \leq N} |g_i(j)| \right)^2 \right)^{1/2} \\ \sum_{j=1}^N \chi_{n_0}(j) \leq \|k\| N^{-1/2} \sum_{j=1}^N \chi_{n_0}(j).$$

Це означає, що

$$P_3 = P \left\{ \|k\| N^{-1/2} \sum_{j=1}^N \chi_{n_0}(j) > \varepsilon' \right\}. \quad (81)$$

Аналогічно до оцінки (67) знаходимо

$$N^{-1/2} \sum_{j=1}^N E \chi_{n_0}(j) \leq \\ p_0 \|k\| N^{1/2} a(n_0) = k_3 N^{1/2 - \gamma l_0/\bar{l}_0}. \quad (82)$$

Тоді ми можемо записати для $\varepsilon'' < \varepsilon'$

$$P_3 = \\ P \left\{ \|k\| N^{-1/2} \sum_{j=1}^N \left(\chi_{n_0}(j) - E \chi_{n_0}(j) \right) > \varepsilon'' \right\} \leq \\ \leq (\varepsilon'')^{-2} \|k\| N^{-1} \sum_{j,j'=1}^N cov \left(\chi_{n_0}(j), \chi_{n_0}(j') \right).$$

Оскільки існує розвинення в просторі $L_2(\Omega)$

$$\chi_{n_0}(j) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\tilde{c}_m(j)}{m!} H_m(\xi_j),$$

$$\tilde{c}_m(j) = \int_{\mathbb{R}} \chi \left\{ \inf_{\|u\|_0 < N^{-\gamma l_0/\bar{l}_0}} (h(j, u) - h(j, 0)) \leq \right. \\ G(x) \leq \sup_{\|u\|_0 < N^{-\gamma l_0/\bar{l}_0}} (h(j, u) - h(j, 0)) \left. \right\} \times \\ H_m(x) \varphi(x) dx, \quad m \geq 0, \\ E \chi_{n_0}(j) = \tilde{c}_0(j),$$

то

$$cov \left(\chi_{n_0}(j), \chi_{n_0}(j') \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{c}_m(j) \tilde{c}_m(j')}{m!} B^m(j-j'), \\ N^{-1} \sum_{j,j'=1}^N cov \left(\chi_{n_0}(j), \chi_{n_0}(j') \right) \leq \\ \leq N^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j,j'=1}^N \frac{\tilde{c}_m^2(j)}{m!} |B(j-j')|^m \leq \\ \leq N^{-1} \sum_{j,j'=1}^N \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{c}_m^2(j)}{m!} |B(j-j')| \right), \\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{c}_m^2(j)}{m!} = D \chi_{n_0}(j) \leq E \chi_{n_0}(j). \quad (83)$$

З огляду на (83) ми можемо записати

$$N^{-1} \sum_{j,j'=1}^N cov \left(\chi_{n_0}(j), \chi_{n_0}(j') \right) \leq \\ N^{-1} \sum_{j,j'=1}^N E \chi_{n_0}(j) |B(j-j')| \leq \\ \leq N^{-1} \sum_{j=1}^N E \chi_{n_0}(j) \sum_{j'=-N}^N |B(j')| = \\ = 2 \left(\sum_{j=1}^N E \chi_{n_0}(j) \right) \left(N^{-1} \sum_{j'=0}^N |B(j')| \right).$$

До першої суми застосуємо оцінку (82), а до другої – оцінку (70). Тоді остаточно

$$P_3 \leq k N^{1-\gamma l_0/\bar{l}_0-\alpha}. \quad (84)$$

Ця величина збігається до нуля при $N \rightarrow \infty$ зі степеневою швидкістю, завдяки нерівності $\alpha + \gamma > 1$. ■

Лема 2. За умов теореми 3 для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$P \left\{ \left\| Q_N^{\pm}(\theta) + E Q_N^{\pm}(\hat{\theta}_N) \right\| > \varepsilon \right\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad (85)$$

де

$$E Q_N^{\pm}(\hat{\theta}_N) = E Q_N^{\pm}(\tau) \Big|_{\tau=\hat{\theta}_N}. \quad (86)$$

◀ Для нормованої оцінки Коенкера – Баскетта (див. пункт 2) $\bar{u}_N = N^{-1/2}d_N(\hat{\theta}_N - \theta)$ та достатньо малих $r > 0$

$$P\left\{z_N^\pm(\theta, \bar{u}_N) > \varepsilon\right\} = P\left\{\frac{\|Q_N^{*\pm}(\bar{u}_N) - Q_N^{*\pm}(0) - EQ_N^{*\pm}(\bar{u}_N)\|}{1 + \|EQ_N^{*\pm}(\bar{u}_N)\|} > \varepsilon\right\} = P_1 + P_2,$$

де

$$P_1 = P\left\{z_N^\pm(\theta, \bar{u}_N) > \varepsilon, \|\bar{u}_N\| \leq r\right\} \leq P\left\{\sup_{u \in V^c(r) \cap \tilde{U}_N^\varepsilon(\theta)} z_N^\pm(\theta, u) > \varepsilon\right\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

за лемою 1. З іншого боку,

$$P_2 = P\left\{z_N^\pm(\theta, \bar{u}_N) > \varepsilon, \|\bar{u}_N\| > r\right\} \leq P\left\{\|\bar{u}_N\| > r\right\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

за умови теореми 3. Оскільки $Q_N^{*\pm}(\bar{u}_N) = Q_N^\pm(\hat{\theta}_N)$, то ми довели, що

$$P\left\{\frac{\|Q_N^\pm(\hat{\theta}_N) - Q_N^\pm(\theta) - EQ_N^\pm(\hat{\theta}_N)\|}{1 + \|EQ_N^\pm(\hat{\theta}_N)\|} > \varepsilon\right\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \quad (87)$$

З (87) та нерівностей $Q_{iN}^\pm(\hat{\theta}_N) \geq 0$ (див. (48)), так само, як в [4], отримуємо для довільного $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\left\|Q_N^\pm(\theta) + EQ_N^\pm(\hat{\theta}_N)\right\| > \left(1 + \left\|EQ_N^\pm(\hat{\theta}_N)\right\|\right)\varepsilon\right\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \quad (88)$$

Далі аналогічно [4] доводиться обмежеість за ймовірністю послідовності випадкових величин $\|EQ_N^\pm(\hat{\theta}_N)\|$ у тому розумінні, що для довільного малого $\varepsilon > 0$ та довільного великого $M > 0$

$$P\left\{\left\|EQ_N^\pm(\hat{\theta}_N)\right\| > M\right\} \leq \frac{C(\varepsilon)}{M^2} + o_N(\varepsilon), \quad (89)$$

де константу $C(\varepsilon) < \infty$ можна записати в явном вигляді, а $o_N(\varepsilon) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$. Тоді з урахуванням

(88) та (89) маємо для довільного $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\left\|Q_N^+(\theta) + EQ_N^+(\hat{\theta}_N)\right\| > \varepsilon\right\} \leq P\left\{\left\|Q_N^+(\theta) + EQ_N^+(\hat{\theta}_N)\right\| > \frac{1 + \|EQ_N^+(\hat{\theta}_N)\|}{1 + M}\varepsilon, \left\|EQ_N^+(\hat{\theta}_N)\right\| \leq M\right\} + P\left\{\left\|EQ_N^+(\hat{\theta}_N)\right\| > M\right\} \leq P\left\{\left\|Q_N^+(\theta) + EQ_N^+(\hat{\theta}_N)\right\| > \left(1 + \left\|EQ_N^+(\hat{\theta}_N)\right\|\right)\frac{\varepsilon}{1 + M}\right\} + \frac{C(\varepsilon)}{M^2} + o_N(\varepsilon). \quad (90)$$

У мажоранті (90) 1-й та 3-й доданки прямують до нуля при $N \rightarrow \infty$, а 2-й доданок можна зробити як завгодно малим вибором числа M . ■

Лема 3. За умов теореми 3 для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\left\|EQ_N^+(\hat{\theta}_N) - p(0)J_N d_N(\hat{\theta}_N - \theta)\right\| > \varepsilon\right\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \quad (91)$$

◀ Якщо величина $\bar{u}_N = N^{-1/2}d_N(\hat{\theta}_N - \theta)$ є малою та консистентною в сенсі (10), то нерівності (60) та обмеженості за ймовірністю випадкового вектора $EQ_N^+(\hat{\theta}_N)$ (див. попередню лему) впливає, що вектор $N^{1/2}\bar{u}_N = d_N(\hat{\theta}_N - \theta)$ також обмежений за ймовірністю в тому сенсі, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існують числа $M_0 = M_0(\varepsilon)$, $N_0 = N_0(\varepsilon)$ такі, що для довільних $M > M_0$, $N > N_0$

$$P\{N^{1/2}\|\bar{u}_N\| > M\} < \varepsilon. \quad (92)$$

Використовуючи позначення (54), (58), співвідношення (57), (86) отримуємо

$$N^{-1/2}EQ_N^+(\hat{\theta}_N) = N^{-1/2}EQ_N^{*+}(\bar{u}_N) = H_N\bar{u}_N,$$

$$EQ_N^+(\hat{\theta}_N) - p(0)J_N d_N(\hat{\theta}_N - \theta) = (H_N - p(0)J_N)N^{1/2}\bar{u}_N,$$

де матриця $H_N = \left(N^{-1/2}D_N^d(u^{(i)})\right)_{i,l=1}^q$, $\|u^{(i)}\| \leq \|\bar{u}_N\|$, $i = \overline{1, q}$, означена, як і раніше, тільки детерміновані аргументи замінені на випадкові.

Співвідношення (56), (57), показують, що

$$\left\|EQ_N^+(\hat{\theta}_N) - p(0)J_N d_N(\hat{\theta}_N - \theta)\right\| \leq k_4 \left\|\bar{u}_N\right\| \cdot \left\|d_N(\hat{\theta}_N - \theta)\right\|. \quad (93)$$

Збіжність (91) впливає тепер із консистентності оцінки Коенкера – Баскетта, обмеженості

за ймовірністю вектора $d_N(\hat{\theta}_N - \theta)$ та (93) (див. [4]). ■

Тепер ми можемо довести теорему редукції 3.

◀ Запишемо для довільного $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} P\left\{\left\|p^{-1}(0)\Lambda_N Q_N^+(\theta) + d_N(\hat{\theta}_N - \theta)\right\| > \varepsilon\right\} &\leq \\ P\left\{\left\|p^{-1}(0)\Lambda_N\left(Q_N^+(\theta) + EQ_N^+(\hat{\theta}_N)\right)\right\| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} + \\ P\left\{\left\|p^{-1}(0)\Lambda_N EQ_N^+(\hat{\theta}_N) - d_N(\hat{\theta}_N - \theta)\right\| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} &= \\ = P_1 + P_2. \end{aligned}$$

З умов теореми та (85) випливає, що $P_1 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$. Так само, з умов теореми та (91) отримуємо, що $P_2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$.

Результат теореми 3 є наслідком відомого факту, доведення якого для випадкових величин міститься, наприклад, в [17], стор. 117-118. Цей факт є вірним для випадкових векторів також, і ми його наводимо нижче.

Нехай $\{(\xi_N, \eta_N), N \geq 1\}$ - послідовність пар випадкових векторів, для яких виконано наступні припущення:

$$1) \|\xi_N - \eta_N\| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0;$$

$$2) \eta_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \eta.$$

Тоді $\eta_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \eta$. Застосування цього твердження доводить теорему 3. ■

Теорема 4. Нехай виконано умови теореми 3. Тоді нормована оцінка Коєнкера – Бассетта $d_N(\hat{\theta}_N - \theta)$ при $N \rightarrow \infty$ асимптотично нормальна $N(0, K)$ з коваріаційною матрицею

$$\begin{aligned} K &= \frac{2\pi}{p^2(0)} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \mu(d\lambda) \right)^{-1} \\ &\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{C_j^2(\Psi)}{j!} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(j)}(\lambda) \mu(d\lambda) \right) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \mu(d\lambda) \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (94)$$

◀ Оскільки ми знаходимося в умовах теореми 3, то розподіл $d_N(\hat{\theta}_N - \theta)$ при $N \rightarrow \infty$ співпадає з асимптотичним розподілом вектора

$$\gamma_N = p^{-1}(0)\Lambda_N d_N^{-1} \sum_{j=1}^N \Psi(\xi_j) \nabla g(j), \quad (95)$$

$$\Psi(x) = \beta - \chi\{G(x) < 0\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Оскільки $E\gamma_N = 0$, а коваріаційна матриця вектора γ_N

$$E\gamma_N \gamma_N^T = p^{-2}(0)\Lambda_N (E\zeta_N \zeta_N^T) \Lambda_N,$$

де ζ_N - вектор, означений рівністю (37), то за теоремою 1

$$E\zeta_N \zeta_N^T \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 2\pi \sum_{j=1}^N \frac{C_j^2(\Psi)}{j!} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(\lambda) \mu(d\lambda). \quad (96)$$

Із тексту 2-го розділу також випливає, що

$$\Lambda_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \mu(d\lambda) \right)^{-1}. \quad (97)$$

Ще одне посилання на теорему 1 повністю доводить теорему. ■

Приклад 2. Оскільки в прикладі 1 було показано, що функція регресії (39) задовольняє умови **B2** – **B4** (умову **B3** за припущенням (44), то ми можемо записати граничну коваріаційну матрицю K , задану формулою (94), граничного нормального розподілу нормованої ОКБ $d_N(\hat{\theta}_N - \theta)$. З (42) випливає, що $\int_{-\pi}^{\pi} \mu(d\lambda) = \mathbb{I}_{2n}$.

Тоді, враховуючи (45), ми можемо стверджувати, що матриця K є блочно - діагональною матрицею з блоками

$$K_i = \frac{2\pi}{p^2(0)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C_j^2(\Psi)}{j!} f^{(j)}(\varphi_i) \mathbb{I}_2, \quad i = \overline{1, n}. \quad (98)$$

В нашому прикладі $N^{1/2} d_N^{-1} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \sqrt{2} \mathbb{I}_{2n}$. Крім цього, $N^{1/2}(\hat{\theta}_N - \theta) = (N^{1/2} d_N^{-1}) d_N(\hat{\theta}_N - \theta)$. Це означає, що граничний нормальний розподіл вектора $N^{1/2}(\hat{\theta}_N - \theta)$ має коваріаційну матрицю $\tilde{K}$ з блоками $\tilde{K}_i = 2K_i$, $i = \overline{1, n}$.

Приклад 3. Нехай $\Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, - функція розподілу стандартної випадкової величини $N(0, 1)$, якою i є будь-яке значення часового ряду ξ_j , $j \in \mathbb{Z}$, зокрема, ε_0 . Тоді за левою Смірнова $\Phi(\varepsilon_0)$ є випадковим числом, тобто рівномірно розподіленою на відрітку $[0, 1]$ випадковою величиною. Позначимо $F_{\chi_r^2}$ функцію розподілу хі-квадрат випадкової величини з r ступенями волі. Тоді часовий ряд $\tilde{\varepsilon}_j = F_{\chi_r^2}^{-1}(\Phi(\xi_j))$, $j \in \mathbb{Z}$, має маргінальні χ_r^2 - розподіли. Центруємо $\tilde{\varepsilon}_j$:

$$\varepsilon_j = \tilde{\varepsilon}_j - E\tilde{\varepsilon}_j = F_{\chi_r^2}^{-1}(\Phi(\xi_j)) - r, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (99)$$

тобто

$$G(x) = F_{\chi_r^2}^{-1}(\Phi(x)) - r, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (100)$$

Отримуємо $F(x) = P\{\varepsilon_0 < x\} = P\{\chi_r^2 < x + r\}$,
та

$$\begin{aligned} F(0) &= F_{\chi_r^2}(r) = \frac{1}{\Gamma(\frac{r}{2})2^{r/2}} \int_0^r x^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{F(\frac{r}{2})} \int_0^{r/2} x^{\frac{r}{2}-1} e^{-x} dx = \frac{\gamma(\frac{r}{2}, \frac{r}{2})}{\Gamma(\frac{r}{2})} = \beta, \end{aligned} \quad (101)$$

де $\gamma(\alpha, x) = \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ – неповна гамма-функція.

Якщо r – парне число, то за формулою 8.352 [18]

$$\beta = 1 - e^{-\frac{r}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{r}{2}-1} \frac{r^k}{2^k k!}, \quad r = 2l, \quad l \geq 1. \quad (102)$$

Число β в (102) є ірраціональним, зокрема, воно не дорівнює $\frac{1}{2}$.

Щільність випадкової величини ε_0

$$p(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{r}{2})2^{r/2}} (x+r)^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x+r}{2}}, \quad x \geq -r, \quad (103)$$

неперервно диференційовна при $r \geq 4$, а її похідна обмежена, і тому умову **A4** виконано при $r \geq 4$ з

$$p(0) = \frac{r^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{r}{2}}}{\Gamma(\frac{r}{2})2^{r/2}}. \quad (104)$$

В цьому прикладі

$$\chi\{G(x) < 0\} = \chi\{F_{\chi_r^2}^{-1}(\Phi(x)) < r\} =$$

$$\chi\{\Phi(x) < F_{\chi_r^2}(r)\} = \chi\{\Phi(x) < \beta\},$$

$$\Psi(x) = \beta - \chi\{G(x) < 0\} = \beta - \chi\{\Phi(x) < \beta\},$$

та 1-й коефіцієнт Фур'є розкладу функції $\Psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, за поліномами Чебишова–Ерміта

$$C_1(\Psi) = \int_{-\infty}^{\infty} (\beta - \chi\{\Phi(x) < \beta\}) H_1(x) \varphi(x) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(\beta)} x \varphi(x) dx \neq 0.$$

Таким чином, $Hrank(\Psi) = 1$. З іншого боку,

$$\begin{aligned} C_0(\Psi) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\beta - \chi\{\Phi(x) < \beta\}) \varphi(x) dx = \\ &= \beta - \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(\beta)} \varphi(x) dx = \beta - \Phi(\Phi^{-1}(\beta)) = 0. \end{aligned}$$

Сенс прикладу 3 полягає в тому, що ми отримуємо можливість оцінювати параметри регресії у випадку несиметричних похибок спостережень, використовуючи оцінки Коенкера–Бассетта.

5 Висновки

У роботі доведено асимптотичну нормальність ОКБ в лінійній моделі регресії з нелінійно перетвореним гауссівським стаціонарним часовим рядом з сингулярним спектром в якості випадкового шуму.

Отримані результати дозволяють використовувати ОКБ в моделях регресії з несиметричними похибками спостережень.

Природним напрямом продовження досліджень є апроксимація з достатньою точністю громіздкої коваріаційної матриці граничного гауссівського розподілу ОКБ, щоб наблизити отримані результати до практичних застосувань. Крім цього, бажано знайти інші приклади несумовних коваріаційних функцій та сингулярних спектральних щільностей стаціонарних часових рядів для збільшення кількості математичних моделей спостережень, аналогічних вивчених у роботі.

Список використаних джерел

1. Beran J. Long-memory Processes. Probabilistic Properties and Statistical Methods / J. Beran, Y. Fenf, S. Ghosh, R. Kulik. // Springer-Verlag Berlin Heidelberg. – 2013. – 884 p.
2. Bassett G. Regression quantile / G. Bassett, R. Koenker // *Econometrica*. – 1978. – Vol. 46. – P. 33-50.
3. Koenker R. Quantile Regression / R. Koenker // Cambridge University Press. – 2005. – 349 p.
4. Савич І. М. Асимптотичні властивості оцінок Кoenкера-Бассетта параметра нелінійної регресії з сильно залежним випадковим шумом / І. М. Савич // Дис. канд. фіз.-мат. наук. Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”, КНУ ім. Тараса Шевченка. – Київ. – 2017. – 144 с.
5. Тарасенко П. Ф. Оценивание параметров нелинейной модели квантильной регрессии знаковым методом / П. Ф. Тарасенко, А. В. Журавлёв // Томский гос. ун-т, ОПИТНЦ. – 2005. – с. 258-266. – Режим доступу: <http://elib.bsu.by/bitstream/123456789/54927/1/39.pdf>
6. Орловський І. В. Асимптотичні властивості М-оцінок параметрів нелінійних моделей регресії / І. В. Орловський // Дис. канд. фіз.-мат. наук. Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”. – Київ. – 2006. – 156 с.
7. Pfanzagl J. On the measurability and consistency of minimum contrast estimates / J. Pfanzagl // *Metrika*, 14. – 1969. – P. 249-272.
8. Anh V. V. Continuous-time stochastic processes with cyclical long-range dependence / V. V. Anh, V. P. Knopova, N. N. Leonenko // *Australian and NZ J. of Statistics*. – 2004. – 46. – P. 275-296.
9. Ivanov A.V. Limit theorems for weighted non-linear transformations of gaussian processes with singular spectra / A.V. Ivanov, N.N. Leonenko, M.D. Ruiz-Medina, I.N. Savich // *Ann. Probab.* – 2013. – Vol. 41, № 2. – P. 1088-1114.
10. Жураковський Б. М. Виявлення прихованих періодичностей в моделях регресії з локально перетвореним гаусівським стаціонарним шумом / Б. М. Жураковський // Дис. канд. фіз.-мат. наук. Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”. – Київ. – 2016. – 146 с.
11. Donoghue W. J. Distribution and Fourier Transforms / W. J. Donoghue // Academic Press, New York. – 1969. – 327 p.
12. Хеннан Э. Многомерные временные ряды / Э. Хеннан // М.: Мир. – 1974. – 576 с.
13. Grenander U. On the estimation of regression coefficients in the case of an autocorrelated disturbance / U. Grenander // *Ann. Math. Statist.* – 1954. – Vol. 25, 2. – P. 252-272.
14. Ибрагимов И.А. Гауссовские случайные процессы / И.А. Ибрагимов, Ю.А. Розанов // М.: Наука. – 1970. – 384 с.
15. Хьюбер П. Робастность в статистике / П. Хьюбер // М.: Мир. – Москва. – 1984. – 304 с.
16. Huber P.J. The behaviour of maximum likelihood estimates under nonstandard conditions / P.J. Huber // *Proc. 5-th Berkeley Symp. Math. Statistics and Probability*. Berkeley: Univ. Clif. Press. – 1967. – Vol. 1. – P. 221-233.
17. Рао С. Р. Линейные статистические методы и их применения / С. Р. Рао // М.: Наука. – 1968. – 548 с.
18. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик // М.: ГИФМЛ. – Издание 4-е. – 1963. – 1100 с.

References

1. BERAN, J. (2013) Long-memory Processes. Probabilistic Properties and Statistical Methods. *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*. – 884 p.
2. BASSETT, G. (1978) Regression quantile. *Econometrica*. – Vol. 46. – P. 33-50.

3. KOENKER, R (2005) Quantile Regression. *Cambridge University Press.* – 349 p.
4. SAVYCH, I.N. (2017) Asymptotic properties of Koenker-Bassett estimator of parameters of nonlinear regression with strongly dependent random noise. *Diss. of Cand. Phys.-Math. Sciences, Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv.* – 144 p.
5. TARASENKO, P. F., ZHURAVLEV, A.V. (2005) Estimation of the parameters of the nonlinear quantile regression model by the sign method. *Tomsk state University, OPITNTS.*–P. 258-266. – Access mode: <http://elib.bsu.by/bitstream/123456789/54927/1/39.pdf>
6. ORLOVSKY, I.V. (2006) *Diss. of Cand. Phys.-Math. Sciences, Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv.*– 156 p.
7. PFANZAGL, J. (1969) On the measurability and consistency of minimum contrast estimates *Metrika.* – 14. – P. 249-272.
8. ANH, V.V., KNOPOVA, V.P., LEONENKO, N.N. (2004) Continuous-time stochastic processes with cyclical long-range dependence. *Australian and NZ J. of Statistics.* – 46. – P. 275–296.
9. IVANOV, A.V., LEONENKO, N.N., RUIZ-MEDINA, M.D., SAVICH, I.N. (2013) Limit theorems for weighted non-linear transformations of gaussian processes with singular spectra. *Ann. Probab.* – Vol.41, № 2. –P. 1088-1114.
10. ZHURAKOVSKY, B.M. (2016) The appearance of hidden periodicities in regression model with local transformation of gaussian stationary noise *Diss. of Cand. Phys.-Math. Sciences, Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv.* – 146 p.
11. DONOGHUE, W.J. (1969) Distribution and Fourier Transforms. *Academic Press, New York.* – 327 p.
12. HENNAN, E. (1974) Multidimensional time series. *M.: Mir.* – 576 p.
13. GRENANDER, U. (1954) On the estimation of regression coefficients in the case of an autocorrelated disturbance. *Ann. Math. Statist.* – Vol. 25, 2. –P. 252-272.
14. IBRAGIMOV, I.A., ROZANOV, U.A. (1970) Gaussian random processes *M.: Nauka.* – 384 p.
15. HUBER, P. J. (1984) Robustness in statistics. *M.: Mir* – 304 c.
16. HUBER, P. J. (1967) The behaviour of maximum likelihood estimates under nonstandard conditions. *Proc. 5-th Berkeley Symp. Math. Statistics and Probability. Berkeley: Unif. Calif. Press.* – Vol.1. –P. 221-233.
17. RAO, S.R. (1968) Linear statistical methods and their applications. *M.: Nauka.* – 548 p.
18. GRADSHTEIN, I.S., RYZHYK, I.M. (1963) Tables of integrals, sums, series and products. *M. : GIFML.* – 1100 p.

Received: 19.02.2019

УДК 004.056.55: 519.248

Савчук М.М.¹, д.ф.-м.н., доц.
Бурлака М.К.², студ.

Кодування і класифікація перестановок за спеціальним перетворенням з оцінками потужності класів

^{1, 2} Національний технічний університет
України «Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського», 03056, м.Київ,
Проспект Перемоги, будинок 37,
e-mail: mikhail.savchuk@gmail.com ,
maria.k.burlaka@gmail.com

M.M. Savchuk¹, Dr. Sci., docent
M.K. Burlaka², stud.

Encoding and classification of permutations by special conversion with estimates of class power

^{1, 2} National Technical University of Ukraine "Igor
Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", 03056, Kyiv,
Peremoga avenue, building 37,
e-mail: mikhail.savchuk@gmail.com ,
maria.k.burlaka@gmail.com

Вводиться спеціальне S -перетворення на множині перестановок та визначаються характеристики перестановки за цим перетворенням. Запропонована класифікація та кодування перестановок за класами еквівалентності та їх характеристиками відносно S -перетворення. Отримано точні значення числа перестановок в класах для деяких розмірів перестановки та оцінки потужності класів з різними характеристиками методом статистичного моделювання. Отримано інтервальні оцінки для потужності класів з різними характеристиками для перестановок порядку $n = 11, 26, 30, 31, 32, 33, 45, 55$. Запропоновано статистичний критерій згоди, який використовує характеристики перестановок за S -перетворенням, для перевірки генераторів випадкових перестановок та підстановок. Обговорюється застосування результатів в криптографії.

Ключові слова: перестановки, підстановки, класифікація, статистичне моделювання.

Scientific articles investigating properties and estimates of the number of so-called complete permutations are surveyed and analyzed. The paper introduces a special S -transform on the set of permutations and determines the permutation properties according to this transform. Classification and coding of permutations by equivalence classes according to their properties with respect to S -transformation is proposed. This classification and permutation properties, in particular, generalize known results for complete permutations regarding determining certain cryptographic properties of substitutions that affect the cryptographic transformations security. The exact values of the number of permutations in equivalence classes for certain permutation sizes are calculated and the estimates of the cardinality of classes with various properties are constructed by statistical modeling. The complete list of permutation classes with the exact values of their sizes for permutations of order $n = 11$ is presented. The interval estimates for the size of classes with various characteristics for permutations of order $n = 11, 26, 30, 31, 32, 33, 45, 55$ are obtained. Monte Carlo estimates and bounds of confidence intervals used the approximation of the binomial distribution by the normal and Poisson distributions, as well as the Python programming language package Scipy. Statistical tables have been calculated that can be used for further conclusions and estimates. The classification of permutations by their properties with respect to the introduced transform can be used in constructing high-quality cryptographic transformations and transformations with special features. The classes of complete permutations with their properties are selected as the best for rotary cryptosystems applications. The obtained results can be used, in particular, to search for permutations with certain characteristics and properties, to find the probability that the characteristic of the generated permutation belongs to a collection of given characteristics, to estimate the complexity of finding permutations with certain properties. A statistical criterion of consent, which uses the characteristics of permutations by S -transformation to test the generators of random permutations and substitutions is proposed.

Key Words: permutations, substitutions, classification, statistical modeling.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

У статті досліджуються спеціальні властивості перестановок та підстановок, які важливі для побудови стійких криптографічних перетворень в системах захисту інформації. Вводиться спеціальне перетворення на множині перестановок та визначаються характеристики перестановки за цим перетворенням. Запропонована класифікація перестановок за їх характеристиками. Отримано точні значення перебором числа перестановок в таких класах для деяких розмірів перестановки та оцінки потужності класів з різними характеристиками методом статистичного моделювання. Введена характеристика перестановки дасть можливість, зокрема, оцінити якість підстановок в ключах електромеханічних роторних шифрувальних машин. Експериментально отримано статистичні оцінки потужностей класів для перестановок різного розміру, з різними характеристиками, проведено порівняння точності оцінок при використанні різних апроксимацій для ймовірнісних розподілів при застосуванні метода Монте-Карло. Наведено алгоритми для побудови класів перестановок за характеристиками методом повного перебору перестановок та методом статистичного моделювання. Виділено перестановки деяких довжин: 11, 26, 30, 31, 32, 33, 45 та 55, для яких побудовано довірчі інтервали для потужностей класів з різними характеристиками. Розраховано статистичні таблиці, які можна використовувати для подальших висновків і оцінок. Запропоновано статистичний критерій згоди для перевірки якості генераторів випадкових перестановок та підстановок, який використовує характеристики перестановок за введеним перетворенням та класифікацію перестановок за їх характеристиками.

1 Повні перестановки та оцінки їх кількості

Означення 1. Перестановка

$\pi = (i_0, i_1, \dots, i_{n-1})$ елементів множини $G = \{0, 1, \dots, n-1\}$ називається повною перестановкою порядку n , якщо числа $j_k = (i_k + k) \bmod n$, $k = 0, n-1$, попарно різні і утворюють перестановку $\pi_0 = (j_0, j_1, \dots, j_{n-1})$ елементів множини G [1].

Кожна повна перестановка π визначає бієкцію $\varphi: G \rightarrow G$, $\varphi(k) = j_k$, $k = 0, n-1$, як і кожна бієкція повну перестановку. Дослідники повних перестановок [1-4] називають повні

перестановки також повними відображеннями, повними підстановками або «хорошими» перестановками.

Відомо, що якщо n парне, то кількість повних перестановок дорівнює нулю (наприклад, див. [1]). Для n непарних кількості повних перестановок швидко зростає з ростом n . Задача знайти число повних перестановок відома ще з часів панування серед засобів криптографічного захисту електромеханічних роторних шифрувальних машин в XX столітті. Кожен ротор (диск) такої машини реалізовував частину ключа - бієктивну підстановку на алфавіті, яка виконувалася з'єднанням електричних контактів (які відповідають літерам алфавіту) з одного боку диску з такими ж контактами з другого боку диску д्रोгами. Якщо підстанова не була повною у сенсі означення 1, то серед цих з'єднань існували паралельні дроти. Повні перестановки тому називали також перестановками без паралельних перепайок. Якщо існували паралельні перепайки, то це давало можливість підвищити ефективність криптоаналізу. Тобто повні перестановки були кращими з точки зору стійкості і задача визначення числа повних перестановок і алгоритмів їх побудови була практично важливою. Криптографічні властивості перестановок і підстановок важливі і сьогодні, оскільки ці перетворення є основними в сучасних алгоритмах шифрування.

Далі будемо розглядати повні перестановки для непарного порядку n . У роботі [1] отримано верхню границю числа перестановок без паралельних перепайок: ймовірність того, що випадкова перестановка виявиться повною перестановкою $P(n)$ не перевищує e^{-cn} при достатньо великих непарних n , де $c \geq 0,08854$. Таке значення було отримано ймовірнісно-комбінаторними методами. З теорії стохастичних процесів отримано більш слабку оцінку $c \geq 0,06766$. Автори відзначили, що можливо буде вірна асимптотична границя $P(n) \leq e^{-(1-\varepsilon)n}$, для будь-якого $\varepsilon > 0$.

У статті [2] оцінку величини c було покращено: доведено, що $c \geq \frac{1}{2} \ln 2 \approx 0,35$. Це означає, що загальна кількість перестановок без паралельних перепайок не перевищує $n! 2^{-m+O(1/\sqrt{\ln m})}$, де $m = (n+1)/2$ - ціле число.

У [3] вводиться таке поняття, як « k -good permutation» (k -хороша перестановка): перестановка є k -хорошою, якщо на перших k

позиціях числа $j_l = (i_l + l) \bmod n$, $l = \overline{0, k}$, усі різні.

Очевидно, що перестановка не може бути повною, якщо усі її часткові представлення не хороші для усіх k . В [3] приводяться такі результати. Для $n = 25$ кількість 10-хороших перестановок починаючи з нуля була знайдена перебором. Виходячи з цього знайдено, що ймовірність того, що загальна перестановка довжини 25 є повною перестановкою оцінюється щонайменше числом $1.86785 \cdot 10^{-9}$ [3]. Позначивши $\pi(n) = e^{-c_n} n$, автори отримують деяку оцінку для c_n при $n = 25$. Відповідне значення для $n = 25$ оцінюється як $c_{25} \leq 0.8039$. Приводиться і більш точне значення, базоване на середній кількості повних перестановок на деяких проміжках, $c_{25} = 0.789$. У статті приводиться також таблиця точних значень $P(n)$ та c_n від 1 до 19. Також були приведені оцінки $P(n)$ та c_n для $n = 25, 35, 45, 55$ ([3, табл. 3]). У [3] приведений аналіз повних перестановок (без паралельних перепайок) для застосування у криптографії, зокрема у роторних шифрувальних машинах.

У [4] для оцінки кількості перестановок без паралельних перепайок пропонується використовувати метод пришвидшеного моделювання. Не зважаючи на те, що метод є досить простим для реалізації, він дозволяє при відносно невеликих витратах часу побудувати незміщені оцінки і відповідні довірчі інтервали для $P(n)$ при досить великих n (у статті [4] приводяться оцінки для $P(n)$ до $n = 155$ включно). Більш того, даний алгоритм дозволяє у практичних підрахунках підтвердити співвідношення $P(n) \sim ae^{-cn}$ і вказати більш точні границі для c , а саме у [4] приводяться така оцінка: $0.9825 \leq c \leq 0.9883$. Загалом, для $n \geq 75$ для $P(n)$ були знайдені та указані наступні межі: $413.099 \exp\{-0.9883 n\} \leq P(n) \leq 267.384 \exp\{-0.9825 n\}$, а наведені чисельні дані для деяких n свідчать про високу степінь точності нижніх та верхніх оцінок і можливість з їх допомогою прогнозувати значення $P(n)$.

2 Характеристики перестановок за спеціальним перетворенням, розбиття перестановок на класи еквівалентності

Визначимо поняття S -перетворення і характеристики перестановки відносно S -перетворення, яка узагальнює поняття повної перестановки. Можливості та рівень застосовності перестановки, зокрема для

роторних шифрів, залежить від характеристики даної перестановки.

Розглянемо довільну перестановку $\pi = (i_0, i_1, \dots, i_{n-1})$ порядку n елементів множини $G = \{0, 1, \dots, n-1\}$ та вектор (кортеж) чисел

$$\theta(\pi) = (j_0, j_1, \dots, j_{n-1}), \quad (1)$$

де числа $j_k = (i_k + k) \bmod n$, $k = \overline{0, n-1}$, належать множині G .

Числа в векторі (1) не обов'язково усі різні. Кожен кортеж чисел $\theta(\pi)$ однозначно визначає деяке відображення $\varphi: G \rightarrow G$, $\varphi(k) = j_k$, $k = \overline{0, n-1}$, не обов'язково бієктивне.

Кортеж $\theta(\pi)$ визначає мультимножину $G(\theta) = \{j_0, j_1, \dots, j_{n-1}\}$. Очевидно, одна мультимножина може відповідати різним кортежам. Запишемо цю мультимножину у вигляді

$$G(\theta) = \{0^{k_0}, 1^{k_1}, 2^{k_2}, \dots, (n-1)^{k_{n-1}}\}, \quad (2)$$

де k_0 - кількість нулів серед $\{j_0, j_1, \dots, j_{n-1}\}$, k_1 - кількість одиниць, ..., k_{n-1} - кількість чисел з $G(\theta)$, які рівні $n-1$; при цьому $\sum_{i=0}^{n-1} k_i = n$. Якщо $k_i = 0$, то число i в $G(\pi)$ не зустрічається. За термінологією В.Н. Сачкова [5] кортеж $[k_0, k_1, k_2, \dots, k_{n-1}]$ - показники первинної специфікації мультимножини (2) $G(\theta)$. Розглянемо тепер $\{k_i, i = \overline{0, n-1}\}$ як мультимножину

$$\{0^{\alpha_0}, 1^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, \dots, (n-1)^{\alpha_{n-1}}, n^{\alpha_n}\}$$

та кортеж показників її первинної специфікації

$$[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n], \quad (3)$$

де $\sum_{i=0}^n i\alpha_i = n$; за термінологією В.Н. Сачкова $[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ - показники вторинної специфікації мультимножини $G(\theta)$, яка відповідає довільній перестановці

$\pi = (i_0, i_1, \dots, i_{n-1})$. Позначимо S_n множину усіх перестановок порядку n .

Означення 2. Перетворення довільної перестановки $\pi = (i_0, i_1, \dots, i_{n-1})$ відповідно правилам (1-3) будемо називати

S -перетворенням, яке задає відображення $\chi(\pi): S_n \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n\}^{n+1}$.

Означення 3. Характеристикою або кодом перестановки $\pi = (i_0, i_1, \dots, i_{n-1})$ відносно S -перетворення будемо називати значення $\chi(\pi)$, тобто вектор (кортеж) довжини $n+1$

$$\chi(\pi) = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad (4)$$

Таким чином, для побудови характеристики (коду) $\chi(\pi)$ довільної перестановки $\pi = (i, i_1, \dots, i_{n-1})$ порядку n елементів множини $G = \{0, 1, \dots, n-1\}$ відносно

S -перетворення знаходимо кортеж чисел $\theta(\pi) = (j, j_1, \dots, j_{n-1})$, де числа $j_k = (i_k + k) \bmod n$, $j_k \in G$, $k = 0, n-1$, мультимножину

$$G(\theta) = \{0^{k_0}, 1^{k_1}, 2^{k_2}, \dots, (n-1)^{k_{n-1}}\},$$

її первинну специфікацію (2) і показники вторинної специфікації (3).

Наприклад, для перестановки порядку $n = 7$ $\pi = (3, 1, 4, 2, 5, 0, 6)$ знаходимо:

$$\begin{aligned}\theta(\pi) &= (3, 2, 6, 5, 2, 5, 5), \\ G(\theta) &= \{0, 1, 2^2, 3^1, 4, 5^3, 6^1\}, \\ \chi(\pi) &= (3, 2, 1, 1, 0, 0, 0).\end{aligned}$$

Характеристика повної перестановки порядку n має вигляд $\chi(\pi) = (0, n, 0, 0, \dots, 0)$, тобто кожне число з множини $G = \{0, 1, \dots, n-1\}$ в векторі $\theta(\pi)$ зустрічається по одному разу. Характеристика перестановки π порядку n , у якої вектор $\theta(\pi) = (j, j, \dots, j)$ з однаковими координатами має характеристику $\chi(\pi) = (n-1, 0, \dots, 0, 1)$. Наприклад, для перестановки $\pi = (6, 5, 4, 3, 2, 1, 0)$ та усіх 7-ми її циклічних зсувів $\chi(\pi) = (6, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$.

Якщо характеристики кількох перестановок співпадають, то можна очікувати, що ці перестановки з точки зору криптоаналізу роторних шифраторів мають близькі властивості, а отже криптоаналіз систем, побудованих на них, має складність одного порядку. Очевидно, що чим більше значення другої позиції характеристики перестановки, тобто чим більше різних чисел у векторі $\theta(\pi)$, тим краще ця перестановка для використання у якості підключа шифрування у роторних системах.

Будь-яка характеристика $\chi(\pi)$ виділяє підмножину $S(n, \chi(\pi)) \subset S_n$ перестановок з однаковою характеристикою – клас еквівалентності, а π представник цього класу. Очевидно, для різних характеристик класи еквівалентності не перетинаються і тоді вся множина S_n розбивається на класи еквівалентності відповідно до їх характеристик. Повні перестановки будуть одним з класів еквівалентності.

Позначимо:

$S_n(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ - число перестановок π порядку n з характеристикою

$\chi(\pi) = (\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, скорочено $S_n(\chi(\pi))$,

$S_n^p = S_n(0, n, 0, 0, \dots, 0)$ - число повних перестановок порядку n ,

$P(n)$ - ймовірність випадкового вибору повної перестановки порядку n ,

$P_n(\chi(\pi)) = P_n(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ймовірність випадкового вибору перестановки порядку n з характеристикою

$$\chi(\pi) = (\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Під випадковим вибором розуміється рівноймовірний вибір перестановки (з ймовірністю $1/n!$) з множини S_n .

Потужності класів еквівалентності з характеристикою $\chi(\pi) = (\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ задовольняють співвідношенням

$$\begin{aligned}S_n(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &= n! P_n(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \\ S_n^p &= n! P(n)\end{aligned}\quad (5)$$

3 Класи повних та вироджених перестановок

Характеристика повної перестановки порядку n має вигляд $\chi(\pi) = (0, n, 0, 0, \dots, 0)$. Відомі оцінки класу повних перестановок наведено у розділі 1. Для непарного n від 1 до 15 повним перебором точне число повних перестановок розраховано ще в 70-х роках минулого століття в Інституті кібернетики (Київ) на БЭСМ-6 (див. таблицю 1).

Таблиця 1

Число повних перестановок та ймовірність випадкового вибору повної перестановки

n	$n!$	S_n^p	$P(n)$
3	6	$1 \times 3 = 3$	0,5
5	120	$3 \times 5 = 15$	0,125
7	540	$19 \times 7 = 133$	0,0263889
9	362 880	$224 \times 9 = 2016$	0,00555555
11	39 916 800	$3441 \times 11 = 37 851$	0,000948247
13	6 227 020 800	$79259 \times 13 = 1 030 367$	0,0001654670
15	1 307 674 368 000	$2424195 \times 15 = 36 362 925$	0,0000278073

З кожної перестановки порядку n з класу повних перестановок можна отримати n повних перестановок (включно з першою) циклічними зсувами. Повні перестановки, що відрізняються циклічними зсувами, утворюють підкласи еквівалентності відносно зсуву по n елементів в

кожному підкласі, що відмічено в третьому стовбці таблиці 1. Число підкласів рівно S_n^p/n .

Для $n = 17$ і 19 точні значення S_n^p обчислені в 90-х роках перебором англійськими дослідниками, швидкий розвиток обчислювальної техніки дав можливість знайти точні значення S_n^p для $n = 21, 23$ і 25 . Але безпосереднє обчислення для більших n вже недоступно сучасній обчислювальній техніці, бо на декілька порядків складніше. Для багатьох значень $n > 19$ теоретично отримано границі зверху, наближені оцінки для числа повних перестановок та оцінки методом статистичного моделювання і прискореного статистичного моделювання [1-4]. Деякі результати робіт [1-4] наведено в розділі 1.

Означення 4. Перестановку π порядку n будемо називати виродженою, якщо її характеристика $\chi(\pi) = (n-1, 0, \dots, 0, 1)$.

У виродженої перестановки

$$\theta(\pi) = (j, j, \dots, j), \text{ тобто усі лишки суми}$$

$$j_k = (i_k + k) \bmod n = j \text{ однакові.}$$

Використання такої перестановки в системах шифрування значно спрощує криптоаналіз роторного шифру.

Очевидно, число перестановок із виродженою характеристикою дорівнює n і їх частка серед усіх можливих перестановок множини дуже мала, наприклад,

$$S_{11}((10, 0, \dots, 0, 1)) = 11,$$

$$P_{11}((10, 0, \dots, 0, 1)) = 0,000000275573192$$

Згідно з таблицями 1 та 2 повних перестановок (без паралельних перепайок) $S_{11}(0, 11, 0, 0, \dots, 0) = 37851$, що становить $0,000948247354497$ від усіх можливих перестановок. На відміну від повних перестановок, які є найбільш вдалим для застосування у роторних шифраторах, перестановки з виродженим кодом $\chi = (0, 11, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ є криптографічно неякісними (останній клас в таблиці 2).

4 Оцінки потужності класів перестановок з різними характеристиками

Для $n = 11$ множина S_{11} усіх перестановок порядку 11 розбивається на 50 класів еквівалентності за S -перетворенням згідно з своїми характеристиками. Точне значення потужності кожного класу знайдено повним перебором. Список потужностей класів та їх характеристик (кодів) в порядку спадання потужності наведено в таблиці 2.

Таблиця 2

Класи еквівалентності для $n = 11$

Клас №	Характеристика класу $\chi(\pi) = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$	Потужність $S_n(\chi(\pi))$ - точне значення
1	(4, 4, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	8252200
2	(3, 5, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	4783130
3	(4, 3, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	3746765
4	(3, 6, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	3522310
5	(5, 2, 3, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	3274260
6	(2, 7, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	2518615
7	(5, 3, 1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	2390960
8	(4, 5, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	2024330
9	(5, 3, 2, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	2017070
10	(4, 5, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	1202135
11	(6, 2, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	869990
12	(5, 4, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	744150
13	(6, 1, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	722370
14	(5, 4, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)	559020
15	(2, 8, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	464035
16	(5, 1, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	445280
17	(6, 1, 3, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	395670
18	(6, 2, 2, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)	335775
19	(3, 7, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	307340
20	(4, 6, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)	192390
21	(6, 2, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	182710
22	(6, 0, 4, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	166375
23	(6, 3, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)	152460
24	(6, 3, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)	119790
25	(6, 3, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	82280
26	(7, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)	65340
27	(5, 5, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)	59048
28	(7, 0, 2, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	58080
29	(7, 1, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	41140
30	(7, 1, 1, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	38720
31	(0, 11, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	37851
32	(7, 1, 2, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)	22990
33	(7, 0, 1, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	19360
34	(7, 2, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)	19360
35	(7, 2, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)	18150
36	(6, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)	18150
37	(7, 0, 3, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)	13310
38	(7, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)	10890
39	(8, 0, 0, 2, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)	4235
40	(8, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)	3630
41	(8, 0, 0, 1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	3025
42	(8, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)	2420
43	(8, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)	2420
44	(7, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)	2420
45	(8, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)	1210
46	(8, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)	1210
47	(8, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)	1210
48	(8, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)	605
49	(8, 1, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0)	605
50	(10, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)	11

В роботі реалізовано програмно алгоритми статистичного моделювання з випадковим генеруванням перестановки для отримання інтервальних оцінок потужностей класів з різними характеристиками з заданою довірчою ймовірністю. Під випадковим вибором перестановки розуміється рівномірний вибір перестановки (з ймовірністю $1/n!$) з множини S_n . Проведено низку машинних експериментів для побудови верхніх і нижніх границь ймовірностей $P_n(\chi(\pi))$ з заданою довірчою

ймовірністю. Верхні та нижні границі потужності певних класів перестановок знаходяться за формулами (5). Для перевірки і налагодження програм використано точні дані з таблиць 1 і 2 та відомі оцінки статистичного моделювання числа S_n^p та ймовірностей $P(n)$ для повних перестановок. Наведемо опис одного з таких алгоритмів.

Алгоритм 1. Алгоритм оцінки потужності класів еквівалентності методом статистичного моделювання.

1. Встановлюємо кількість експериментів N - велике число.
2. Будуємо множину $G = \{0, 1, \dots, n-1\}$.
3. Будуємо випадкову перестановку $\pi = (i_0, i_1, \dots, i_{n-1})$ множини $G = \{0, 1, \dots, n-1\}$, використовуючи якісний датчик випадкових чисел і $n-1$ випадкову інверсію [6].

4. Для кожної перестановки $\pi = (i_0, i_1, \dots, i_{n-1})$ отримуємо послідовність $\theta(\pi) = (j_0, j_1, \dots, j_{n-1})$ таку, що $j_k = (i_k + k) \bmod n$, $k = 0, n-1$, та належать множині G .

5. За послідовністю $\theta(\pi) = (j_0, j_1, \dots, j_{n-1})$ знаходимо характеристику $\chi(\pi) = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

6. Якщо характеристика $\chi(\pi) = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ не зустрічалася на попередніх ітераціях, встановлюємо лічильник $C(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 1$. Якщо така характеристика зустрічалася раніше, то збільшуємо лічильник $C(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ (що вже існує) на 1.

7. Зменшуємо N на 1.

8. Повторюємо кроки 3) - 7) доти, поки $N \neq 0$. Коли $N = 0$, алгоритм закінчує роботу.

По закінченні роботи алгоритму 1 обчислюємо ймовірності $P_n(\chi(\pi))$ для кожного класу за формулою

$$\frac{1}{N} C(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Точкову оцінку для потужності класу з кодом $\chi(\pi)$ отримаємо за формулою (5). Якщо після закінчення алгоритму не з'явилося ні однієї перестановки з деякою характеристикою $\chi(\pi)$, вважаємо, що число $S_n(\chi(\pi)) = 0$.

Для знаходження довірчих інтервалів для $P_n(\chi(\pi))$ - параметра в біноміальній моделі з числом випробувань N використовувалася

також апроксимація біноміального розподілу нормальним розподілом, розподілом Пуассона та відповідні формули з робіт [7, 8], а також пакет Scipy мови програмування Python.

Наведемо вибірково для прикладу довірчі інтервали для потужності декількох великих класів для перестановок довжин $n = 26$ та $n = 33$ (таблиці 3 та 4 відповідно). Зауважимо, що потужності $|S_{26}| = 26! = 4.0329 \cdot 10^{26}$, а $|S_{33}| = 33! = 8.6833 \cdot 10^{36}$. Дані статистичного моделювання в таблицях 3 та 4 отримано за генеруванням $N=10^7$ випадкових перестановок та рівнем значущості $\alpha = 0,95$.

Таблиця 3

Характеристики перестановок порядку 26 та довірчі інтервали для потужності відповідних класів з рівнем значущості $\alpha = 0,95$.

Характеристика ($\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{27}$)	Довірчі інтервали
(9,10,5,2,0,...,0)	$[2.723086 \cdot 10^{25}, 7.3363 \cdot 10^{25}]$
(7,14,3,2,0,0,...,0)	$[6.06225 \cdot 10^{24}, 6.11344 \cdot 10^{24}]$
(3,20,3,0,0,0,...,0)	$[1.40603 \cdot 10^{21}, 1.01765 \cdot 10^{22}]$
(17,1,5,1,0,1,0,1,0,...,0)	$[2.06861 \cdot 10^{18}, 1.91316 \cdot 10^{20}]$

Таблиця 4

Характеристики перестановок порядку 33 та довірчі інтервали для потужності відповідних класів з рівнем значущості $\alpha = 0,95$.

Характеристика ($\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{34}$)	Довірчі інтервали
(11,13,7,2,0,...,0)	$[3.96965 \cdot 10^{35}, 3.98856 \cdot 10^{35}]$
(10,17,3,2,1,0,...,0)	$[4.56102 \cdot 10^{34}, 4.62664 \cdot 10^{35}]$
(9,19,2,2,1,0,...,0)	$[7.470017 \cdot 10^{33}, 7.73807 \cdot 10^{33}]$
(9,21,0,2,0,0,1,0,...,0)	$[1.71074 \cdot 10^{30}, 9.12880 \cdot 10^{30}]$

При генеруванні в методі Монте-Карло 10^7 випадкових перестановок всього різних класів з ненульовою точковою оцінкою потужності для перестановок довжини $n=26$ отримано 688, для $n=30$ - 976, для $n=31$ - 1065, для $n=32$ - 1153, для $n=33$ - 1229, для $n=45$ - 2508, для $n=55$ - 3906. Роторні криптографічні системи та їх аналіз детально описано в монографії [9].

5 Статистичний критерій перевірки генератора випадкових перестановок та підстановок

Розбиття множини S_n перестановок на класи еквівалентності за S -перетворенням та дані про потужності класів з різними характеристиками дає можливість запропонувати статистичний критерій згоди для перевірки генераторів випадкових перестановок та підстановок.

Опишемо коротко критерій хі-квадрат. Нехай H_0 - гіпотеза, яка полягає в тому, що перестановка π генерується з рівномірним розподілом, n - кількість експериментів (розмір вибірки), $v = (v_1, \dots, v_N)$ - вектор частот влучення вибірових точок у відповідні інтервали групування перестановок $E_1, \dots, E_N$,

$v_1 + \dots + v_N = n$, кожен з яких є класом еквівалентності або об'єднанням декількох класів,

$$p^0 = (p_1^0, \dots, p_N^0), \quad p_j^0 = P(\pi \in E_j | H_0), j = 1, \dots, N.$$

У цьому випадку розподіл вектора частот v при умові гіпотези H_0 буде поліноміальним з параметрами n і p^0 . Обраховується статистика хі-квадрат, що характеризує відхилення вибірових даних (тобто частот v_j) від очікуваних середніх значень $np_j^0, j = 1, \dots, N$:

$$X_n^2 = X_n^2(v) = \sum_{j=1}^N (v_j - np_j^0)^2 / (np_j^0), \quad (6)$$

Для великих обсягів вибірок n статистика X_n^2 має при умові гіпотези H_0 граничний розподіл, що не залежить від чисел $p_j^0, j = 1, 2, \dots, N$. Має місце слабка збіжність розподілу статистики X_n^2

$$L(X_n^2 | H_0) \rightarrow \chi^2(N-1), \quad n \rightarrow \infty$$

де $\chi^2(N-1)$ — хі-квадрат розподіл зі $N-1$ степенем свободи, який затабульовано, а при великих N апроксимується за допомогою нормального розподілу.

Наприклад, для застосування цього критерію виокремимо $N-1$ найбільш ймовірних (з більшими $P_m(\chi(\pi))$) характеристик $\chi(\pi)$, класи еквівалентності за цими характеристиками позначимо $E_1, E_2, \dots, E_{N-1}$ в порядку спадання ймовірностей, які позначимо $p_j^0, j = 1, 2, \dots, N-1$, і вважаємо їх інтервалами групування, а в інтервалом групування E_N

вважаємо об'єднання усіх інших класів еквівалентності з меншими ймовірностями $P_m(\chi(\pi))$, сумарну ймовірність яких позначимо p_N^0 .

Задаємося рівнем значущості, наприклад, $\alpha = 0,95$. Знаходимо критичну область у вигляді $\mathfrak{T}_{1\alpha} = \{t \geq t_\alpha\}$, де t_α квантиль розподілу хі-квадрат або його нормальної апроксимації рівня α [7, 8].

Після проведення експерименту з n незалежно генерованими перестановками і підрахунку їх характеристик за S -перетворенням отримуємо вектор частот $(v_1, v_2, \dots, v_N)$, v_j - число перестановок, які потрапили після випадкового незалежного вибору n перестановок в інтервал групування $E_j, j = 1, 2, \dots, N$. Далі будемо статистику хі-квадрат за формулою (6). Якщо значення статистики належить критичній області, то гіпотеза H_0 відхиляється. Якщо не належить, то гіпотеза не суперечить результатам експерименту.

Запропонований статистичний критерій згоди може краще відсіювати специфічні альтернативні гіпотези у деяких генераторах випадкових підстановок та перестановок.

Висновки

Вводиться спеціальне S -перетворення на множині перестановок та визначаються характеристики перестановки за цим перетворенням. Запропонована класифікація перестановок по класам еквівалентності за їх характеристиками відносно S -перетворення. Отримано точні значення перебором числа перестановок в таких класах для деяких розмірів перестановки та оцінки потужності класів з різними характеристиками методом статистичного моделювання. Наведено результати для знаходження оцінок потужності виділених класів перестановок різного порядку.

Наведено повний список класів перестановок з точним значенням їх потужності для перестановок порядку $n = 11$. Отримано інтервальні оцінки для потужності класів з різними характеристиками для перестановок порядку $n = 11, 26, 30, 31, 32, 33, 45, 55$, приклади яких наведені в статті. Окремо виділено повні перестановки з їх характеристиками, як найкращі для застосування у роторних криптосистемах. Характеристики та властивості кожного класу впливають на

стійкість роторних шифрів та шифрів, які використовують як базові елементи перестановки та підстановки. Властивості перестановок та їх кількість важливі для побудови таких криптосистем та проведення криптоаналізу.

Отримані статистичні значення (частина яких наведена в таблицях розділу) можна використовувати для знаходження ймовірності того, що згенерована перестановка має певну характеристику, або її характеристика належить

групі заданих характеристик та оцінювати складність пошуку перестановок з певними властивостями. Запропоновано також статистичний критерій згоди, який використовує характеристики перестановок за S -перетворенням, для перевірки генераторів випадкових перестановок та підстановок, який може краще відсіювати специфічні альтернативні гіпотези у деяких генераторах випадкових підстановок та перестановок.

Список використаних джерел

1. Коваленко І.М., Купер К. Верхня границя для числа повних відображень / І.М.Коваленко, К. Купер // Теорія ймовірностей і математична статистика. – 1995. – Т. 53. – С. 69-75.
2. Коваленко І.Н. Об одной верхней оценке числа полных отображений / И.Н.Коваленко // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – № 1. – С. 81-85.
3. Cooper C., Gilchrist R., Kovalenko I.N., Novacovic D. Deriving the number of good permutations with applications to cryptography / C.Cooper, R. Gilchrist, I.N. Kovalenko, D. Novacovic // Кибернетика и системный анализ. – 1999. – № 5. – Р. 10-16.
4. Кузнецов Н.Ю. Применение ускоренного моделирования к нахождению количества “хороших” перестановок / Н.Ю. Кузнецов // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 6. – С. 80-89.
5. Сачков В.Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. – 2-е изд., испр. и доп. / В.Н. Сачков. – М.: МЦНМО, 2004. – 424 с.
6. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы / Э. Рейнгольд, Ю. Нивергельт, Н. Део. – М.: Мир, 1980. – 478 с.
7. Шор Я. Б. Таблицы для анализа и контроля надежности / Я. Б. Шор, Ф. И. Кузьмин. – М.: Советское радио, 1968. – 288 с.
8. Кобзарь А. И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. / А. И. Кобзарь. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с.
9. Konheim A. G. Computer security and cryptography / Alan G. Konheim. – New Jersey: John Wiley and Sons, Inc., 2007. – 521 с.

References

1. KOVALENKO, I.N. & COOPER, C. (1995) The upper bound for the number of complete mappings. *Probability theory and mathematical statistics*. Vol. 53. p. 69-75.
2. KOVALENKO, I.N. (1996) On one upper bound for the number of complete mappings. *Kibernetika i sistemnyj analiz*. Vol. 1. p. 81-85.
3. COOPER, C. & GILCHRIST, R. & KOVALENKO, I.N. & NOVACOVIC, D. (1996) Deriving the number of good permutations with applications to cryptography. *Kibernetika i sistemnyj analiz*. Vol. 5. p. 10-16.
4. KUZNETSOV, N.YU. (2007) Applying accelerated modeling to finding the number of “good” permutations. *Kibernetika i sistemnyj analiz*. Vol. 6. p. 80-89.
5. SACHKOV, V.N. (2004) Introduction to combination methods of a discrete motherboard. – 2nd ed., Rev. and add. M., MCCNMO. 424 p.
6. REINGOLD, E. & NIEVERGELT, JU. & DEO, N. (1977) Combinatorial algorithms. Theory and practice. *Prent-Hall, Inc., Inglewood Cliffs, New Jersey* 07632.
7. SHOR, YA. B. & KUZMIN, F.I. (1968) Tables for analysis and control of reliability. M., *Soviet Radio*. 288 p.
8. KOBZAR, A. I. (2006) Applied mathematical statistics. For engineers and scientists. M., *FIZMATLIT*. 816 p.
9. KONHEIM, A. G. (2007) Computer security and cryptography. *New Jersey: John Wiley and Sons, Inc.* 521 p.

Надійшла до редколегії 25.06.2019.

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ,
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА
ТА МЕХАНІКА**

УДК 629.7.076.6

Васильєв І.Ю.¹, к.ф.-м.н., ст.наук.співр.,
Ткаченко Я.В.², к.ф.-м.н., ст.наук.співр.

Порівняльна ефективність дросельованих і релейних ракетних двигунів для навколоземних перельотів з малою тягою

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Акад.
Глушкова, 4-е,

e-mail: igor_v@univ.kiev.ua

²Інститут механіки ім.С.П.Тимошенка НАНУ,
252680, м.Київ, вул. Нестерова, 3

e-mail: yaroslavvt@ukr.net

I.Yu. Vasiliev¹, PhD, Sr. Sci. Researcher
Ya.V. Tkachenko², PhD, Sr. Sci. Researcher

Comparative effectiveness of throttled and relay rocket engines for low-gravity near- Earth flights

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e,

e-mail: igor_v@univ.kiev.ua

²SP Timoshenko Institute of Mechanics, Nesterov str,
3, 252680 Kyiv

e-mail: yaroslavvt@ukr.net

В рамках розв'язання задачі Майєра оптимального управління про перельот з витягнутої еліптичної орбіти на геостационарну з максимальним корисним навантаженням при заданій початковій масі космічного апарату малої тяги та фіксованої тривалості виконання динамічного маневру проведено порівняльний аналіз ефективності дросельованого і релейного режимів тяги. Чисельні результати підтвердили адекватність побудованої мат.моделі релейного ракетного двигуна постійної потужності і дозволили виявити ряд якісних особливостей керуючих функцій уздовж оптимальних перехідних траєкторій.

Ключові слова: оптимальне управління космічним апаратом, двигун малої тяги, міжорбітальні перельоти.

Within the framework of solving the Mayer problem of optimal control of a flight from an elongated elliptical orbit to a geostationary one with a maximum payload at a given initial mass of the low-thrust spacecraft and a fixed duration of the dynamic maneuver, a comparative analysis was made of the efficiency of throttled and relay thrust modes. Based on the data of the numerical solution of the corresponding two-point boundary value problem, the expected gain was confirmed of the throttling mode over the relay mode in the case of practically interesting low-thrust near-Earth maneuvers. Also the numerical results confirmed the adequacy of the constructed fixed-power relay rocket engine mathematical model and made it possible to reveal a number of qualitative features of the control functions along the optimal transition trajectories.

Keywords: optimal control of a spacevehicle, low thrust rocket engine, orbit-to-orbit transfers.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Стрімкий розвиток ракетно-космічної техніки вже в 70-х роках минулого століття поставив перед вченими і конструкторами проблему створення регульованих в широкому діапазоні по модулю тяги рідинних ракетних двигунів (РРД) космічних апаратів (КА). У літературі такі двигуни зазвичай називаються дросельованими ЖРД (ДЖРД) [1]. Як зазначається в [1], використання ДЖРД істотно розширює експлуатаційні можливості двигунів цього класу, знижує масу рухової установки і необхідний запас палива для вирішення таких

актуальних завдань космічного польоту, як стикування і причалювання космічних апаратів, їх маневрування на орбіті і посадка на безатмосферних планети, орієнтація і стабілізація в космічному просторі, а також при вході в атмосферу планет. Вказується, що деякі нові завдання космічних польотів, зокрема, орієнтація і стабілізація космічних апаратів з аеродинамічними поверхнями при вході в верхні шари атмосфери, взагалі не можуть бути вирішені без плавної зміни тяги двигуна, так як імпульсне включення призводить до неприпустимих відхилень в їх орієнтації і вимагає більш потужної теплової захисту, а отже

істотного обважнення. Таким чином, область застосування ДЖРД досить широка, при цьому значення середньої тяги і діапазон її зміни визначаються конкретним завданням.

Незважаючи на те, що публікації, присвячені ДЖРД, носять до теперішнього часу фрагментарний характер і відображають рішення лише деяких приватних питань, проведені вже на початковому етапі дослідження [1] показали, що плавна зміна тяги маршових двигунів носіїв, які здійснюють вихід космічних апаратів на навколоремні орбіти, дозволяє істотно, на 7-12%, збільшити корисне навантаження і знизити витрату компонентів палива шляхом оптимізації прискорення носія під час набору їм висоти. Актуальність в науковому та практичному плані створення ракетного двигуна, здатного працювати на режимах глибокого дроселювання підкреслюється також і в ряді сучасних публікацій. Зокрема, вказується на необхідність наявності ДЖРД на борту таких космічних апаратів як проєктований космічний сміттєзбирач, особливістю якого є багаторазовість включення ракетної рухової установки і регульована по величині в широкому діапазоні тяга.

У статті [2] представлений аналіз ефективності використання режиму дроселювання тяги на прикладі виконання класичного навколоремного маневру КА малої тяги, а саме, перельоту зі стартовою низької навколоремної орбіти на геостационарну орбіту з максимальним корисним навантаженням. При цьому дросельований двигун порівнювався з так званим ідеальним двигуном постійної потужності [3], концепція якого апріорі передбачає отримання верхньої оцінки зазначеної ефективності. Отримані в [2] результати дозволили зробити висновок про адекватність побудованої математичної моделі дросельованого двигуна і виявити ряд якісних особливостей оптимальних управлінь уздовж перехідних траєкторій КА.

У продовження дослідження, проведеного в статті [2], в даній роботі режим дроселювання тяги, тобто можливість плавної зміни її величини від нульового до максимального значення, порівнюється з релейним режимом, що передбачає уздовж перехідної траєкторії чергування кінцевого числа ділянок нульовий і максимальної тяги і забезпечує таким чином отримання нижньої оцінки ефективності режиму дроселювання.

2. Постановка задачі. Аналіз оптимального управління.

Розглядаючи КА як матеріальну точку змінної маси, запишемо систему диференціальних рівнянь, що описують рух центру мас апарату в поле дії центральної ньютонівської сили, у вигляді [4]

$$\begin{aligned}\frac{dx_j}{dt} &= \exp(\chi) F_{jk} w_{ek}, \quad j = \overline{1,5}, \quad k = \overline{1,3} \\ \frac{dF}{dt} &= F_{60} + \exp(\chi) F_{6k} w_{ek} \\ \frac{dm}{dt} &= -q\end{aligned}\quad (1)$$

Тут $\vec{x} = (\chi, h, k, p, q)$ - вектор рівноденних змінних, що описують параметри оскулюючих орбіт апарату, F - величина ексцентричної аномалії, m - поточна маса апарату, w - величина реактивного прискорення, $e_k, k = \overline{1,3}$ направляючі косинуси вектора тяги двигуна щодо радіального, трансверсального і нормального до площини оскулюючого еліпса спрямування відповідно, q - секундна масова витрата робочого тіла ракетного двигуна. Функціональні залежності $F_{jk}(\vec{x}, F)$, $F_{60}(\vec{x}, F)$ вважаються заданими аналогічно тому, як це зроблено в роботі [4]. Систему (1) обізрозмірено у традиційний в механіці космічного польоту з малою тягою спосіб [3].

Релейний режим управління ракетним двигуном означає, що поточна величина тяги $P(t)$ приймає або нульове, або фіксоване максимальне значення P_0 . Таким чином, ввівши скалярну керуючу функцію $\sigma(t)$ зі значеннями з множини $\{0,1\}$, можемо записати вирази для тяги релейного двигуна, реактивного прискорення $w(t)$ і витрати робочого тіла двигуна $q(t)$ у вигляді

$$\begin{aligned}P(t) &= P_0 \sigma(t), \quad w(t) = p_0 \sigma(t) / m, \\ q(t) &= q_0 \sigma(t), \quad P_0 = p_0 P_*, \quad q_0 = P_0 / V_0\end{aligned}\quad (2)$$

Тут P_* - максимальна величина тяги, V_0 - швидкість виділення реактивного струменя двигуна, що є фіксованою величиною згідно з припущенням про сталість потужності ракетного двигуна N_0 .

Співвідношення (2) перетворюють систему (1) до виду

$$\begin{cases} \frac{dx_j}{dt} = \exp(\chi) F_{jk} e_k p_0 \sigma / m, j = \overline{1,5}, k = \overline{1,3} \\ \frac{dF}{dt} = F_{60} + \exp(\chi) F_{6k} e_k p_0 \sigma / m, \\ \frac{dm}{dt} = -q_0 \sigma. \end{cases} \quad (3)$$

Будемо припускати, що поточна маса апарату $m(t)$ складається з маси корисного навантаження m_π , маси ракетного двигуна малої тяги m_χ , поточного запасу робочого тіла двигуна m_μ

$$m(t) = m_\mu(t) + m_\chi + m_\pi \quad (4),$$

і величина m_χ лінійно залежить від фіксованої при постановці величини максимальної потужності реактивного рушія n_0

$$m_\chi = \alpha n_0, N_0 = n_0 N_*, N_* = P_* V_* / 2 \quad (5)$$

Оптимізаційна задача типу Майєра про виконання заданого динамічного маневру КА, оснащеного релейним ракетним двигуном, формулюється так: необхідно визначити орт реактивної тяги апарату $\vec{e}(t)$ і керуючу функцію $\sigma(t)$, що забезпечують переліт між заданими еліптичними орбітами в центральному ньютонівському гравітаційному полі з максимальним значенням кінцевої маси апарату m_f при фіксованих величинах початкової маси m_0 , максимальної тяги і потужності ракетного двигуна p_0, n_0 , питомої ваги двигуна α і заданим часом виконання динамічного маневру T . Положення КА на початковій і кінцевій орбітах не фіксуються за припущенням.

$$\begin{aligned} t_0 &= 0, x_j = x_{j0}, m(t_0) = m_0 = \text{fix}, \\ t_f &= T = \text{fix}, x_j = x_{jf}, m_f \rightarrow \max \\ p_0 &= \text{fix}, n_0 = \text{fix}, q_0 = p_0^2 / 2n_0 = \text{fix} \end{aligned} \quad (6)$$

Відзначимо, що вибір величини кінцевої маси КА в якості критерію якості в нашому випадку еквівалентний більш звичній вимоги забезпечення максимуму маси корисного навантаження m_π .

Дотримуючись процедури принципу максимуму запишемо функцію Понтрягіна задачі (3-6)

$$H = \exp(\chi) \frac{p_0 \sigma}{m} \lambda_{vk} e_k + \lambda_F F_{60} - \lambda_m q_0 \sigma \quad (7)$$

Тут $\lambda_{vk} = \lambda_j F_{jk} + \lambda_F F_{6k}$, $j = \overline{1,5}, k = \overline{1,3}$, $\lambda_j, \lambda_F, \lambda_m$ - приєднані функції системи (3).

Максимальне значення гамільтоніана (7) забезпечується виконанням наступних співвідношень для компонент орта реактивної тяги e_k

$$e_k^{opt} = \lambda_{vk} / \lambda_v, \lambda_v = \sqrt{\lambda_{v1}^2 + \lambda_{v2}^2 + \lambda_{v3}^2} \quad (8)$$

Неважко бачити, що релейне управління $\sigma(t)$ лінійно входить в вираз для гамільтоніана, перетвореного з урахуванням (8)

$$H = \sigma H_\sigma + \lambda_F F_{60}, H_\sigma = \exp(\chi) \frac{p_0}{m} \lambda_v - \lambda_m q_0, \quad (9)$$

тому вздовж регулярних траєкторій оптимальні значення $\sigma(t)$ необхідно підпорядковані наступним законом

$$\sigma_{opt}(t) = \begin{cases} 1, & H_\sigma > 0, \\ 0, & H_\sigma \leq 0 \end{cases} \quad (10)$$

Тут ми обмежуємося вивченням лише регулярних управлінь, залишаючи таким чином питання про можливість особливих управлінь за межами даного дослідження.

Співвідношення (8-10) дозволяють записати рівняння оптимального руху у вигляді

$$\begin{cases} \frac{dx_j}{dt} = \exp(\chi) \frac{p_0}{m} \sigma_{opt} \frac{1}{\lambda_v} \lambda_{ij} f_{ji}, \\ \frac{dF}{dt} = F_{60} + \exp(\chi) \frac{p_0}{m} \sigma_{opt} \frac{1}{\lambda_v} \lambda_{ij} f_{6i}, \\ \frac{dm}{dt} = -q_0 \sigma_{opt}, i = \overline{1,6}, j = \overline{1,5}, k = \overline{1,3} \end{cases} \quad (11)$$

Система диференціальних рівнянь, що описує динаміку зміни оптимальних преданих функцій задачі в нашому випадку записується аналогічно тому, як це зроблено в статті [2].

Крім того приєднані функції задачі підпорядковані також трьох перших інтегралів, наведених в роботі [5].

До необхідних умов оптимальності задачі (3-6) додаються також умови трансверсальності пов'язаних функцій λ_F, λ_m [6]

$$\lambda_F(0) = \lambda_F(T) = 0, \lambda_m(T) = 1 \quad (12)$$

3. Чисельні результати і обговорення

Порівняння ефективності релейних і дросельованих ракетних двигунів малої тяги проводилося на прикладі виконання практично цікавого навколосезного міжорбітального переходу КА з опорної еліптичної орбіти на геостационарну. При цьому стартова витягнута орбіта мала наступні параметри: радіус апогею - 60000 км, перигею - 30000 км, ексцентриситет - $1/3$, нахил орбіти - 15° , при нульових значеннях аргументу перигея і довготи висхідного вузла. Радіус геостационарної орбіти передбачався рівним 42160 км. Як і в [2] параметри ракетної рухової установки малої тяги приймалися рівними: максимальна тяга $P_0 = 0.16H$, швидкість виділення реактивного струменя $V_i = 14,71$ км/сек, потужність двигуна $N_0 = P_0 V_i / 2 = 1,1768$ кВт. Початкова маса апарату M_0 приймалася рівною 750 кг, питома вага двигуна - 10 кг/кВт, при цьому маса рухової установки $m_x = M_x / M_0$ в разі дросельованої і релейного тяги є постійною величиною рівній 0,0157.

Для зазначеного динамічного маневру була чисельно вирішена задача про виконання перельоту КА з двигуном постійної тяги за мінімальний час. Час швидкодії $T_f^{\min}$ при цьому виявився рівним 67,4145 діб., кінцева маса апарату m_f (в частках початкової маси) - 0.9155.

З метою порівняння ефективності режимів дросельованої і релейної тяги при виконанні навколосезних орбітальних маневрів використовувався набір фіксованих часів виконання заданого динамічного маневру, що перевищують $T_f^{\min}$, а саме, $T_f = \{67.42, 68, 70, 100, 150, 200, 300, 500\}$ діб. В ході чисельного рішення крайової задачі (6, 11, 12) були визначені величини оптимальних значень маси корисного навантаження і кінцевої маси апарату, оснащеного релейним ракетним двигуном постійної потужності. Відповідні дані для перельотів з дросельованим двигуном постійної потужності запозичені в [2]. Результати порівняльного аналізу ефективності двох розглянутих типів рухових систем наведені на рис. 1-2.

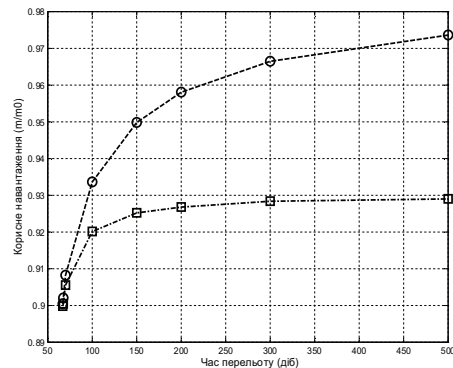


Рис. 1. Порівняння мас корисного навантаження для режиму дроселювання тяги (пунктір) і релейного режиму (штрих -пунктір)

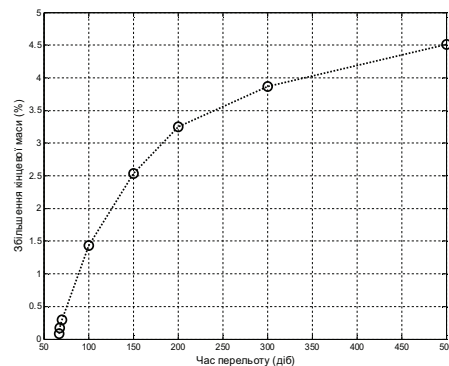


Рис.2 Відносний виграш у величині кінцевої маси при дроселюванні тяги

Наведені на рис. (1-2) залежності підтверджують цілком передбачувану ефективність плавного дроселювання тяги порівняно з релейним режимом для всього розглянутого діапазону заданих тривалостей навколосезного перельоту. Крім того, видно що зазначений виграш як у величині корисного навантаження маневру так і кінцевої маси КА монотонно зростає зі збільшенням часу виконання заданого перельоту T_f .

В рамках даного дослідження був також проведений порівняльний аналіз оптимальних управлінь дросельованого і релейного ракетних двигунів, отриманих в ході чисельного рішення двохточечної крайової задачі, до якої початкова оптимізаційна задача була зведена з використанням принципу максимуму Понтрягіна. Малюнки 3-5 ілюструють деякі якісні

особливості динаміки зміни рівня тяги уздовж оптимальної траєкторії переходу з витягнутої еліптичної орбіти на геостационар.

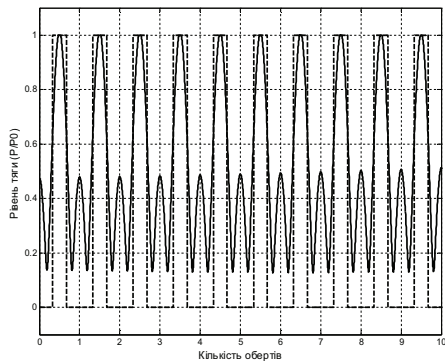


Рис.3. Рівень тяги для двох режимів управління.
 $T_f = 100$ діб. Перші 10 оборотів.

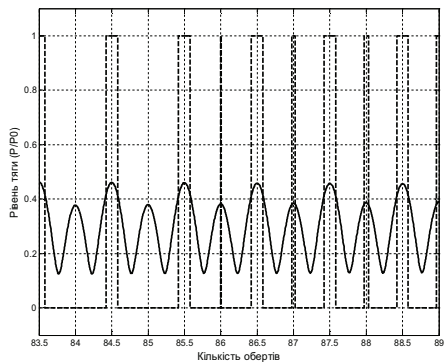


Рис.4. Рівень тяги для двох режимів управління.
 $T_f = 200$ діб. Обороти з 84 по 89.

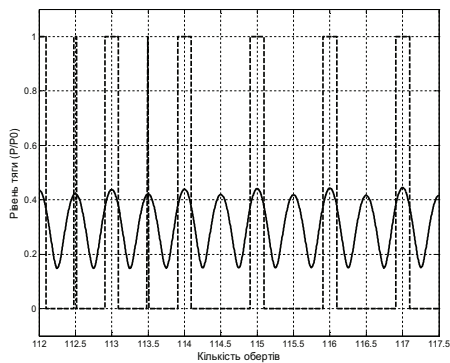


Рис.5. Рівень тяги для двох режимів управління.
 $T_f = 200$ діб. Обороти 112-117.

На рис.3 наведено порівняння рівня дросельованої (суцільна лінія) і релейної (пунктир) тяги на перших 10 оборотах уздовж оптимальної перехідної траєкторії при повній тривалості маневру, яка дорівнює 100 діб. На початку траєкторії очевидно простежується переважання перигейних ділянок тяги над апогейними для обох режимів, причому якщо в разі дросельовання мають місце як перигейний так і апогейний ділянки, то при релейному режимі апогейні ділянки відсутні повністю. У міру руху уздовж оптимальної траєкторії переважання апогейних ділянок над перигейними для дросельованого двигуна зменшується, а в разі релейного двигуна в середині траєкторії апогейні ділянки додатку тяги вперше з'являються (див. Рис.4). На останніх оборотах на відміну від початкових спостерігається вже деяке переважання апогейних ділянок тяги, при цьому для релейного двигуна перигейні ділянки відсутні (див. Рис.5). Крім того, наведені залежності вказують на зниження максимальних величин дросельованої тяги при збільшенні тривалості виконання навколоземного маневру КА (порів. Рис.3 і Рис.4,5), що в свою чергу пояснює зазначене вище зростання ефективності дросельовання тяги порівняно з релейним режимом.

4. Висновки

З метою отримання нижніх оцінок ефективності режиму дросельовання тяги КА, призначеного для виконання навколоземних міжорбітальних перельотів була побудована математична модель релейного ракетного двигуна постійної потужності. Тестування побудованої мат.моделі проводилося в рамках рішення оптимізаційної задачі про переліт з витягнутої еліптичної орбіти на геостационарну з максимальним корисним навантаженням при заданій початковій масі апарату та фіксованого тривалості виконання динамічного маневру. Порівняльний аналіз, заснований на даних чисельного рішення відповідної двухточечної крайової задачі, підтвердив очікуваний виграв режиму дросельовання над релейним режимом в збільшенні корисного навантаження КА при виконанні практично цікавих навколоземних маневрів з малою тягою. Крім того, отримані чисельні дані дозволили підтвердити адекватність побудованої мат. моделі релейного ракетного двигуна і провести порівняльний аналіз керуючих функцій розглянутих типів

двигунів уздовж оптимальних траєкторій міжорбітальних перельотів.

Відзначимо, що успішність в отриманні чисельних рішень як для релейного, так і дросельованого ракетних двигунів малої тяги обумовлена перш за все використанням

аналітичних рішень зазначеної крайової задачі в усередненої постановці, теорія яких розробляється авторами в ряді попередніх публікацій [2, 4, 7].

Список використаних джерел

1. Михайлов В.В. Дросселируемые жидкостные ракетные двигатели / В.В. Михайлов, В.Г. Базаров.— Москва: Машиностроение, 1985. — 170 с.
2. Кифоренко Б.Н. Эффективность использования дросселируемых ракетных двигателей малой тяги при выполнении околоземных орбитальных перелетов / Б.Н. Кифоренко, И.Ю. Васильев, Я.В. Ткаченко // Проблемы управления и информатики. — 2018. — №4. — С. 128-136.
3. Гроздовский Г.Л. Механика космического полета. Проблемы оптимизации / Г.Л. Гроздовский, Ю.Н. Иванов, В.В. Токарев.— Москва: Наука, 1975. —700 с.
4. Кифоренко Б.Н. Усреднение уравнений движения в задаче оптимизации по быстродействию межорбитального перехода с постоянной по величине тягой в сильном центральном гравитационном поле / Б.Н. Кифоренко, З.В. Пасечник, И.Ю. Васильев, // Проблемы управления и информатики. — 2001. — №6. — С. 62-76.
5. Кифоренко Б.Н. Использование равноденственных орбитальных элементов как переменных в задаче быстродействия при межорбитальном переходе с постоянной по величине тягой в сильном гравитационном поле / Б.Н. Кифоренко, З.В. Пасечник, И.Ю. Васильев, // Проблемы управления и информатики. — 2003. — №4. — С. 102-114.
6. Летов А.М. Динамика полета и управление / А.М. Летов.— Москва: Наука, 1969. —360 с.
7. Кифоренко Б.Н. Аналитические решения усредненных уравнений оптимального межорбитального перехода с постоянной по величине тягой в сильном гравитационном поле / Б.Н. Кифоренко, З.В. Пасечник, И.Ю. Васильев, // Проблемы управления и информатики. — 2002. — №2. — С. 126-139.

References

1. MIKHAYLOV, V., BAZAROV, V. (1985) *Drosseliruyemye zhidkostnye dvigateli*. Moskva: Mashinostroyeniye.
2. KIFORENKO, B., VASILIEV, I. and TKACHENKO, Ya. (2018) *Effektivnost ispolzovanya drosseliruemyyh raketnyh dvigateley maloy tyagi pri vypolnenii okolozemnykh orbitalnykh pereletov. Problemy upravleniya i informatiki*. 4. p.128-136.
3. GRODZOVSKIY, G., IVANOV, Yu. and TOKAREV, V. (1975) *Mehanika kosmicheskogo polyota. Problemy optimizacii*. Moskva: Nauka.
4. KIFORENKO, B., PASECHNIK, Z. and VASILIEV, I. (2001) *Usrednenie uravneniy dvizheniya v zadache optimizacii po bystrodeystviyu mezhorbitalnogo perehoda s postoyannoy po velichine tyagoy v silnom centralnom gravitacionnom pole. Problemy upravleniya i informatiki*. 6. p.62-76.
5. KIFORENKO, B., PASECHNIK, Z. and VASILIEV, I. (2003) *Ispolzovanie ravnodenstvennykh orbitalnykh elementov kak peremennuy v zadache bystrodeystviya pri mezhorbitalnom perehode s postoyannoy po velichine tyagoy v silnom gravitacionnom pole. Problemy upravleniya i informatiki*. 4. p.102-114.
6. LETOV, A. (1969) *Dinamika polyota i upravlenie*. Moskva: Nauka.
7. KIFORENKO, B., PASECHNIK, Z. and VASILIEV, I. (2002) *Analiticheskiye resheniya usrednennykh uravneniy optimalnogo mezhorbitalnogo perehoda s postoyannoy po velichine tyagoy v silnom gravitacionnom pole. Problemy upravleniya i informatiki*. 2. p.126-139.

Надійшла до редколегії 25.10.2019

УДК 539.3

Григоренко О.Я.¹, д.ф.-м.н., проф.,
Борисенко М.Ю.¹, к.ф.-м.н.,
Бойчук О.В.², к.ф.-м.н.

Чисельний аналіз вільних коливань не- замкнених циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом

¹ Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН
України, 83000, м. Київ, вул. Нестерова, 3,
e-mail: ayagrigorenko1991@gmail.com,
mechanics530@gmail.com.

² Миколаївський національний аграрний уні-
верситет, 54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Га-
нгадзе, 9, e-mail: boychuklena@outlook.com.

A.Ya. Grigorenko¹, Dr Sci., Prof.,
M.Yu. Borysenko¹, Ph.D.,
O.V. Boychuk², Ph.D.

Numerical analysis of free vibrations of open cylindrical shells with elliptical cross section

¹ Institute of Mechanics after S.P. Tymoshenko NAS
of Ukraine, 83000, Kyiv, Nesterov st., 3,
e-mail: ayagrigorenko1991@gmail.com,
mechanics530@gmail.com.

² Nikolaev National Agrarian University, 54030,
Nikolaev, Georgy Gongadze st., 9,
e-mail: boychuklena@outlook.com.

Чисельно визначаються динамічні характеристики незамкнутої циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу змінної товщини з різними варіаціями відкритості оболонки – уздовж малої півосі і уздовж великої півосі, а також з двома варіантами жорсткого закріплення на торцях. Розрахунок частот і форм вільних коливань проводиться методом скінченних елементів, реалізованого за допомогою ліцензованого програмного комплексу FEMAP з розв'язувачем NASTRAN. Проводиться порівняльний аналіз залежностей власних частот від кута відкритості відносно великої та малої півосей. Наводяться форми коливань для перших десяти частот при різних закріпленнях оболонок при однакових кутах відкритості.

Ключові слова: незамкнута циліндрична оболонка, еліптичний поперечний переріз, кут відкритості, власна частота, форма коливань, метод скінченних елементів.

The natural frequencies and the corresponding vibration modes of open cylindrical shells with an elliptical cross-section and variable thickness are analyzed. Various opening angle of the shell along both the minor and major axes are allowed and various boundary conditions are considered. The numerical solutions are obtained using the finite element package FEMAP with the NASTRAN solver. A number of low-frequency vibrations are investigated in terms of their dependence on the opening angle along major and minor axes of the shell. The vibration forms for the first ten frequencies with different boundary conditions at the same opening angles are shown.

Keywords: open cylindrical shells, elliptical cross-section, opening angle, frequency, vibration forms, finite element method.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Широкого застосування в будівництві різних інженерних конструкцій набули циліндричні оболонки некругового поперечного перерізу постійної та змінної товщини, які можуть мати як замкнутий, так і незамкнутий контур з різною варіацією граничних умов. При проектуванні таких споруд необхідно мати інформацію про їхні динамічні характеристики, зокрема про частоти і форми вільних коливань, так як в реальних умовах експлуатації необхідно уникати резонансних

режимів.

Теоретичне дослідження даного класу задач пов'язане зі значними труднощами, які обумовлені складністю системи вихідних диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами. Розв'язок задачі на визначення власних частот в рамках теорії тонких оболонок можливий для об'єктів простої геометричної форми [5, 7].

У випадках складної геометричної форми, наприклад, замкнутої оболонки еліптичного по-

перечного перерізу з різним характером зміни товщини, доцільно застосовувати метод скінченних елементів (МСЕ) [1, 3, 8].

Для розв'язування задач на визначення динамічних характеристик оболонок, також використовують експериментальні методи, наприклад, безконтактний метод стробоскопічної інтерферометрії [6, 8], який можна застосовувати не тільки для двовимірної, а й тривимірної задачі динаміки [9].

У світовій літературі вивченню динаміки незамкнених оболонок приділено не так багато уваги як вивченню замкнутих оболонок, так в [10] розроблена точна процедура розв'язку для визначення частот і форм вільних коливань відкритих некругових циліндричних оболонок змінної товщини і кривини. В [4] проведено аналіз вільних коливань відкритих кругових циліндричних оболонок, в яких закріплені дві прямі кромки або дві вигнуті кромки, а інші дві кромки підтримуються довільними класичними граничними умовами. В [2] в рамках двох скінченно-елементних реалізацій досліджені власні коливання тонкостінних відкритих оболонок кругового поперечного перерізу з різними граничними умовами і з різними кутами відкритості.

Дане повідомлення присвячено чисельному визначенню динамічних характеристик незамкненою циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу змінної товщини з варіаціями відкритості оболонки – уздовж малої півосі і уздовж великої півосі, а також з двома варіантами жорсткого закріплення на торцях. Розрахунок частот і форм вільних коливань проводився МСЕ, реалізованим за допомогою ліцензійного програмного комплексу FEMAP.

Вихідні співвідношення для визначення власних частот МСЕ

Рівняння руху механічної системи з скінченною кількістю ступенів вільності описується системою рівнянь Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = F_j, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (1)$$

Дане рівняння руху для оболонки при її скінченно-елементній апроксимації з урахуванням того, що $L = T - U$, та відсутності зовнішніх сил ($F_j = 0$) приймає вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (2)$$

Використаємо дискретну форму функціоналів кінетичної енергії та енергії деформації відповідно

$$T = \frac{1}{2} \dot{\vec{\Phi}}_i^T \mathbf{M}_i \dot{\vec{\Phi}}_i,$$

$$U = \frac{1}{2} \dot{\vec{\Phi}}_i^T \mathbf{K}_i \dot{\vec{\Phi}}_i,$$

де $\mathbf{K}_i$ та $\mathbf{M}_i$ – матриця жорсткості та матриця мас i -того скінченного елемента відповідно, $\vec{\Phi}_i$ – вектор вузлових переміщень i -того елемента. З рівняння Лагранжа (2) отримаємо наступні рівняння руху оболонки при відсутності демпфування:

$$\mathbf{K} \vec{\Phi}_j + \mathbf{M} \ddot{\vec{\Phi}}_j = 0, \quad (3)$$

де $\mathbf{K}$ та $\mathbf{M}$ – матриця жорсткості та матриця мас механічної системи відповідно, $\vec{\Phi}_j$ – вектор переміщень вузлів системи, що відповідає j -тому ступеню вільності, що відтворює j -ту форму коливань.

При вільних коливаннях оболонок всі вузлові точки здійснюють гармонічні коливання як функції часу:

$$\vec{\Phi}_j(t) = \vec{\Phi}_j \sin \omega_j t. \quad (4)$$

Після підстановки функцій (4) в рівняння руху оболонки (3) визначення власних частот і форм коливань зводиться до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{K} \vec{\Phi}_j - \omega_j^2 \mathbf{M} \vec{\Phi}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (5)$$

де ω_j – пульсація або частота гармонічних коливань.

Тестова задача

Для перевірки достовірності обраної методики дослідження динамічних характеристик незамкненої циліндричної оболонки розв'яжемо тестову задачу [2] і порівняємо отримані результати з результатами отримані автором.

За допомогою FEMAP була побудована геометрія двох незамкнутих оболонок у вигляді циліндричних поверхонь кругового поперечного перерізу радіусом серединної поверхні $R = 77,25 \text{ мм}$, відношенням висоти до радіусу $L/R = 2,99$, товщиною $d = 1,5 \text{ мм}$, кутами відкритості $\varphi = 30^\circ$ і $\varphi = 60^\circ$. Задавався матеріал з

фізико-механічними характеристиками: модуль Юнга $E = 205 \text{ ГПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,30$, густина $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$. Оболонки закріплювалися по двом торцям з різними варіаціями закріплення: F – вільний край $u \neq v \neq w \neq \varphi_x \neq \varphi_y \neq \varphi_z \neq 0$; C – жорстке закріплення $u = v = w = \varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$.

Результати тестової задачі, а саме перші п'ять частот власних коливань для двох варіантів відкритості оболонки з двома типами закріплення, отримані за допомогою FEMAP, а також іншим автором, представлені в таблиці 1 і 2, де ε – відхилення між розрахунками.

Таблиця 1
Результати тестової задачі з кутом відкритості φ і граничними умовами C-F

№	$f, \text{Гц}$					
	$\varphi=30^\circ$			$\varphi=60^\circ$		
	[2]	FEMAP	$\varepsilon, \%$	[2]	FEMAP	$\varepsilon, \%$
1	256,77	259,61	1,1	252,23	244,26	3,2
2	261,90	264,78	1,1	267,34	260,01	2,7
3	591,20	599,14	1,3	588,18	569,26	3,2
4	665,87	676,80	1,6	683,98	675,06	1,3
5	724,48	727,44	0,4	726,83	698,18	3,9

Аналізуючи отримані результати тестової задачі можна спостерігати невелике відхилення між двома скінченно-елементними реалізаціями, запропонованими нами і автором [2], яке не перевищує 5%.

Таблиця 2
Результати тестової задачі з кутом відкритості φ і граничними умовами C-C

№	$f, \text{Гц}$					
	$\varphi=30^\circ$			$\varphi=60^\circ$		
	[2]	FEMAP	$\varepsilon, \%$	[2]	FEMAP	$\varepsilon, \%$
1	651,02	652,35	0,2	651,39	626,31	3,9
2	651,42	652,78	0,2	652,9	627,19	3,9
3	1217,19	1215,5	0,1	1218,61	1163,12	4,6
4	1217,26	1215,54	0,1	1219,46	1163,54	4,6
5	1525,1	1536,75	0,8	1515,2	1477,19	2,5

Побудова розрахункової моделі

За допомогою програми FEMAP була побудована геометрія оболонки у вигляді циліндричної поверхні еліптичного поперечного перерізу змінної товщини з розмірами: висота $h = 120 \text{ мм}$, півосі серединної поверхні: $a = 50,810 \text{ мм}$ і $b = 36,295 \text{ мм}$, товщина оболонки уздовж великої півосі $d_a = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, уздовж малої півосі $d_b = 2,73 \text{ мм}$. Потім оболонка розрізалась секто-

ром заданого кута відкритості φ (рис. 1). Як матеріал задавалась сталь з характеристиками: модуль Юнга $E = 212 \text{ ГПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,30$, густина $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$. Оболонка досліджувалась при жорстко закріпленому одному і двох торцях.

Параметри моделювання було встановлено відповідно до характеристик і розмірів замкнутої некругової циліндричної оболонки, яка досліджувалась на частоти і форми вільних коливань МСЕ [1] і методом стробоскопічної інтерферометрії [8].

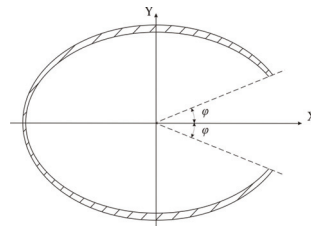
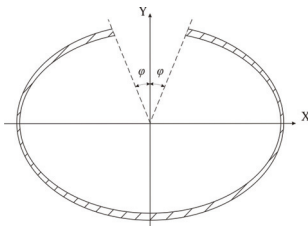
Оболонка в поперечному перерізі має форму еліпса змінної товщини, тому необхідно розглянути різні способи її відкритості відносно великої (рис. 1, а) і малої півосей (рис. 1, б), так як в залежності від цього будуть змінюватися її властивості міцності, а відповідно і частоти вільних коливань. В даному дослідженні визначимо залежність частоти вільних коливань від величини відкритості оболонки, яка буде визначатися кутом відкритості в межах від 0° до 90° з кроком 10° .

Оскільки оболонки змінної товщини, то розбивку краще проводити solid-елементами.

Результати чисельних розрахунків

Перші десять частот вільних коливань, розрахованих для некругової циліндричної оболонки змінної товщини відкритої відносно великої півосі з жорстко закріпленням одним торцем, в залежності від кута відкритості наведені в таблиці 3. Для порівняння наведені також частоти для замкнутої некругової циліндричної оболонки змінної товщини при відповідних граничних умовах. В таблиці 4 наведені перші десять частот вільних коливань некругової циліндричної оболонки змінної товщини відкритої відносно великої півосі, закріпленої по двом торцям, в залежності від кута відкритості.

В таблиці 5 наведені перші десять власних частот некругової циліндричної оболонки змінної товщини відкритої відносно малої півосі, закріпленої по двом торцям, в залежності від кута відкритості. Перші десять форм вільних коливань незамкнутою циліндричної оболонки змінної товщини з відповідним значенням кута відкритості уздовж великої півосі для жорстко закріпленого одного торця і двох торців зображені на рис. 8-15.



а) кут відкритості φ відносно великої півосі; б) кут відкритості φ відносно малої півосі
Рис. 1. Креслення поперечного перетину циліндричної оболонки

Таблиця 3

Частоти вільних коливань ($f_{\text{чис}}$, Гц) оболонки змінної товщини відкритої відносно великої півосі з граничними умовами C-F

№	Замк.	Кут відкритості відносно великої півосі φ , град									
		0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
1	1565,07	1000,14	900,02	805,32	741,30	704,45	669,47	626,50	593,58	571,19	560,38
2	1757,83	1012,84	925,84	850,37	782,56	721,86	688,59	686,68	691,59	695,49	688,66
3	1991,80	1540,67	1498,58	1480,46	1509,68	1581,97	1691,69	1690,51	1631,23	1593,80	1592,12
4	2022,06	1572,23	1648,68	1762,46	1828,59	1814,79	1757,62	1831,57	1988,27	2113,85	2145,67
5	3142,73	1999,45	2315,00	2296,23	2339,38	2352,71	2313,33	2271,71	2235,60	2209,31	2196,47
6	3677,46	2327,80	2326,32	2477,37	2415,96	2365,33	2334,15	2321,87	2332,07	2395,08	2499,34
7	3702,04	2560,10	2583,46	2504,83	2460,60	2576,96	2841,68	3178,74	3243,18	3082,09	3025,10
8	4129,99	2578,18	2601,86	2722,98	3117,62	3556,72	3593,57	3420,25	3580,25	4053,15	4388,09
9	4441,27	2744,24	3199,26	3722,21	3951,67	2807,25	4110,09	4429,67	4381,54	4362,65	4484,60
10	4457,50	3430,33	4068,94	482,55	4300,98	4300,72	4351,96	4442,44	4511,06	4528,38	4549,72

Таблиця 4

Частоти вільних коливань ($f_{\text{чис}}$, Гц) оболонки змінної товщини відкритої відносно великої півосі з граничними умовами C-C

№	Замк.	Кут відкритості відносно великої півосі φ , град									
		0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
1	3981,74	2350,97	2312,15	2195,14	2102,47	2038,40	1997,09	1962,35	1927,47	1898,59	1876,80
2	3999,00	2351,46	2315,89	2196,13	2109,49	2049,57	2002,48	1972,12	1956,11	1940,96	1917,47
3	4388,83	3945,95	3909,33	3948,31	3929,64	3923,64	3995,68	4044,68	4003,36	4005,38	4082,49
4	4400,06	3967,45	4072,10	4010,09	4070,31	4144,57	4106,69	4137,59	4241,59	4233,17	4199,66
5	5185,93	3967,53	4146,64	4153,15	4176,60	4210,16	4232,66	4242,06	4248,42	4234,84	4219,08
6	5531,64	4009,46	4146,91	4153,27	4177,82	4210,97	4235,39	4248,93	4334,35	4543,63	4657,96
7	6325,98	4314,69	4353,30	4582,16	4617,27	4694,51	5008,39	5470,17	5549,04	5528,19	5715,35
8	6439,24	4516,27	4713,85	4710,47	5023,99	5504,96	5691,29	5630,20	6049,38	6759,26	7228,14
9	6972,08	5184,39	5173,61	5608,26	6069,81	6051,71	6420,19	7129,35	7241,75	7254,11	7233,60
10	7136,60	5367,81	5834,18	6124,84	6342,06	6922,39	7088,96	7191,64	7242,41	7261,74	7456,36

Таблиця 5

Частоти вільних коливань ($f_{\text{чис}}$, Гц) оболонки змінної товщини відкритої відносно малої півосі з граничними умовами C-F

№	Замк.	Кут відкритості відносно великої півосі φ , град									
		0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
1	1565,07	618,34	613,59	612,54	617,77	631,18	651,75	715,07	851,10	947,93	912,85
2	1757,83	628,23	625,71	624,15	624,56	635,74	674,10	746,37	882,49	1102,89	1061,21
3	1991,80	1627,67	1607,30	1596,29	1602,91	1590,48	1518,85	1493,62	1633,96	1478,45	1656,14
4	2022,06	1721,10	1777,57	1749,79	1672,96	1650,43	1760,73	1923,86	1693,02	1999,08	1924,17
5	3142,73	1922,33	1870,74	1906,12	1973,32	2000,12	1989,02	1979,20	2047,87	2181,47	2560,72
6	3677,46	2130,71	2122,19	2098,58	2066,02	2035,56	2011,37	1983,91	2050,45	2284,45	2594,38
7	3702,04	2214,24	2184,93	2166,59	2184,57	2319,50	2347,74	2174,66	2466,78	2359,07	3250,24
8	4129,99	2351,32	2448,10	2564,95	2613,43	2531,58	2584,05	2818,50	2543,81	3450,71	4246,75
9	4441,27	3234,33	3232,65	3152,40	3164,82	3373,92	3263,65	3117,55	3670,74	3812,22	4248,35
10	4457,50	3340,47	3443,33	3684,33	3680,04	3502,44	3769,32	3777,97	3671,16	3821,88	4500,35

Таблиця 6

Частоти вільних коливань ($f_{\text{чис}}$, Гц) оболонки змінної товщини відкритої відносно малої півосі з граничними умовами С-С

№	Замк.	Кут відкритості відносно великої півосі φ , град									
		0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
1	3981,74	1896,83	1864,31	1830,57	1791,42	1757,10	1731,99	1732,10	1822,43	2083,99	2340,01
2	3999,00	1897,44	1864,74	1830,71	1792,60	1759,51	1734,00	1735,92	1832,37	2119,19	2360,52
3	4388,83	4000,80	4017,45	4058,38	3944,79	3807,97	3647,46	3484,58	3388,29	3541,66	3955,35
4	4400,06	4171,47	4142,65	4058,40	3945,02	3808,37	3647,61	3485,60	3388,96	3548,63	3984,60
5	5185,93	4209,32	4142,73	4061,02	4059,14	4029,89	4037,78	4041,30	3958,44	3955,35	4124,53
6	5531,64	4209,41	4142,94	4101,70	4122,76	4201,19	4183,73	4129,58	4262,68	4268,08	4175,48
7	6325,98	4267,39	4377,64	4553,82	4671,97	4622,36	4723,24	4893,60	4767,34	5126,58	5613,17
8	6439,24	4598,37	4675,80	4707,67	4775,56	5057,11	5144,86	5090,73	5320,16	5263,36	5637,96
9	6972,08	5513,20	5568,27	5717,18	5723,77	5609,81	5771,37	5704,12	5343,54	5337,52	5783,19
10	7136,60	5820,00	5882,90	5829,53	6007,34	6423,45	6107,92	5706,15	5930,26	5712,67	5812,21

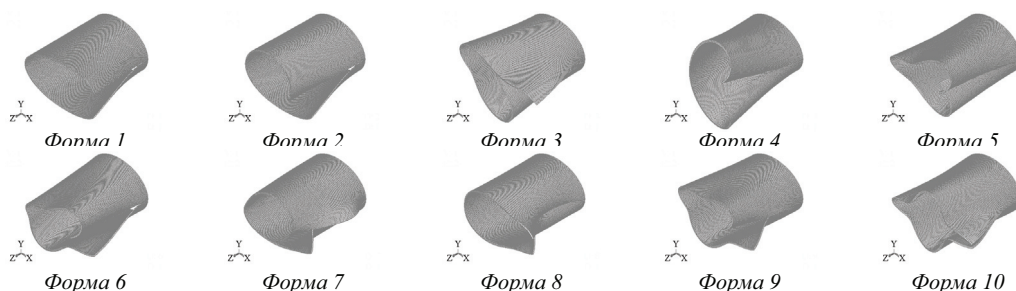


Рис. 8. Форми вільних коливань оболонки зі значенням кута відкритості $\varphi = 0^\circ$ уздовж великої півосі з граничними умовами С-F

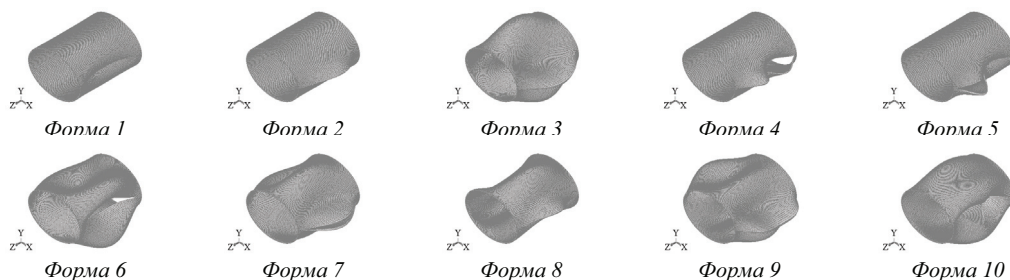


Рис. 9. Форми вільних коливань оболонки зі значенням кута відкритості $\varphi = 0^\circ$ уздовж великої півосі з граничними умовами С-С

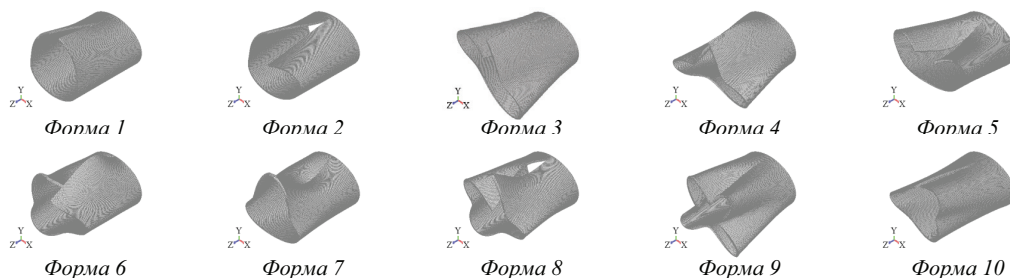


Рис. 10. Форми вільних коливань оболонки зі значенням кута відкритості $\varphi = 0^\circ$ уздовж малої півосі з граничними умовами С-F

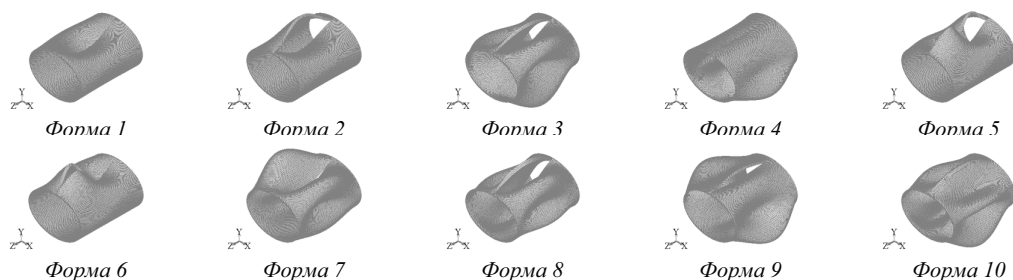


Рис. 11. Форми вільних коливань оболонки зі значенням кута відкритості $\varphi = 0^\circ$ уздовж малої півосі з граничними умовами С-С

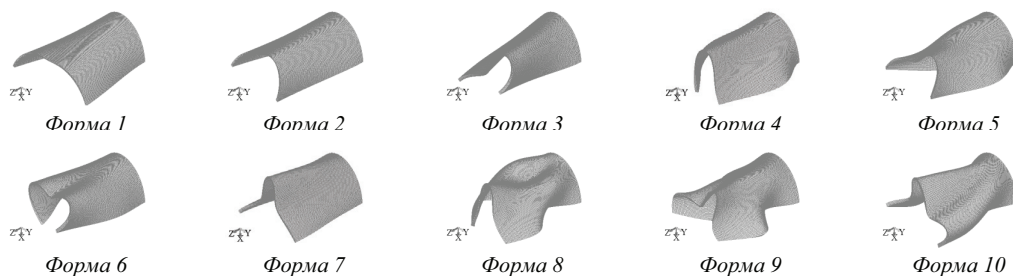


Рис. 12. Форми вільних коливань оболонки зі значенням кута відкритості $\varphi = 90^\circ$ уздовж великої півосі з граничними умовами С-F

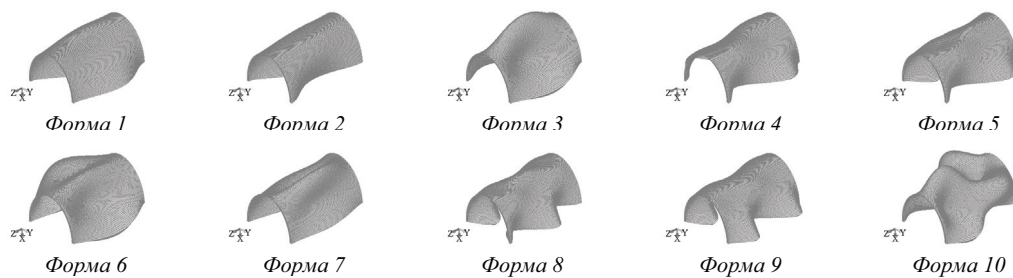


Рис. 13. Форми вільних коливань оболонки зі значенням кута відкритості $\varphi = 90^\circ$ уздовж великої півосі з граничними умовами С-С

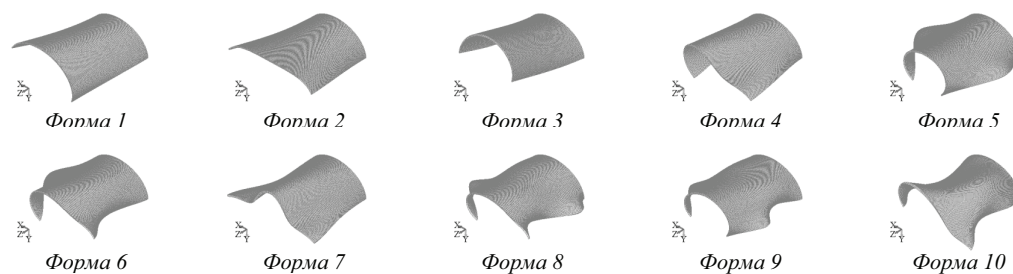


Рис. 14. Форми вільних коливань оболонки зі значенням кута відкритості $\varphi = 90^\circ$ уздовж малої півосі з граничними умовами С-F

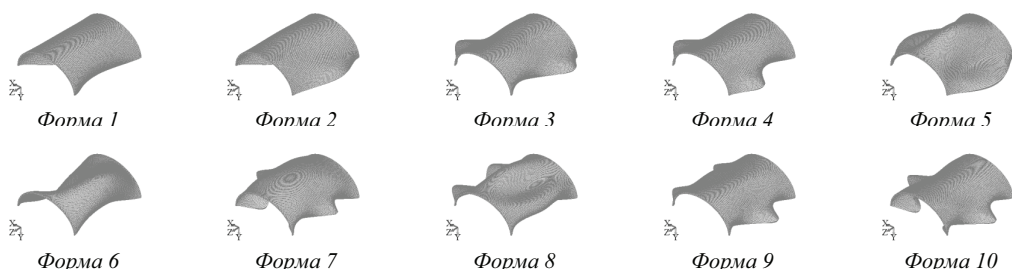


Рис. 15. Форми вільних коливань оболонки зі значенням кута відкритості $\varphi = 90^\circ$ уздовж малої півосі з граничними умовами С-С

Висновки

Проведено розрахунок частот вільних коливань незамкнутої циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу змінної товщини при різних кутах відкритості відносно великої і малої півосей з жорстко закріпленим одним і двома торцями методом скінченних елементів, реалізованим за допомогою програмного комплексу FEMAP.

Отримані чисельно частоти і форми вільних коливань розглянутої оболонки дають можливість зробити ряд висновків:

- перші дві власні частоти замкнутої некругової циліндричної оболонки змінної товщини жорстко закріпленої по одному торцю більші в 1,6-1,7 разу в порівнянні з відповідними частотами ідентичною оболонки з розрізом уздовж твірної по великій півосі та в 2,5-2,8 разу з розрізом уздовж твірної по малій півосі;

- в разі закріплення двох торців перші дві власні частоти замкнутої некругової циліндричної оболонки більше в 1,7 разу відповідних частот некругової циліндричної оболонки з розрізом

уздовж твірної по великій півосі та в 2,1 разу з розрізом уздовж твірної по малій півосі;

- максимальне значення першої резонансної частоти спостерігається при куті відкритості 0° відносно великої півосі для обох розглянутих умов закріплення;

- максимальне значення першої резонансної частоти спостерігається для оболонки з жорстко закріпленим одним торцем при куті відкритості 80° відносно малої півосі та 90° для закріпленої по двом торцям;

- для оболонок відкритих відносно великої півосі спостерігається значна відмінність між третьою і другою частотою для обох способів закріплення, яка знаходиться в межах від 1,5 до 2,5 разу, при цьому різниця зростає із збільшенням кута відкритості;

- для оболонок відкритих відносно малої півосі спостерігається протилежна тенденція, тобто із зростанням кута розкриття різниця між третьою і другою частотою для обох способів закріплення спадає в межах від 1,5 до 2,5 разу.

Список використаних джерел

1. Будак В. Д. Вільні коливання еліптичної оболонки змінної товщини / В. Д. Будак, О. Я. Григоренко, М. Ю. Борисенко, О. В. Бойчук // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, серія: «Математика. Механіка». – 2014. – 32, №2. – С. 32-37.
2. Лекомцев С. В. Конечно-элементные алгоритмы расчёта собственных колебаний трёхмерных оболочек / С. В. Лекомцев // Вычислительная механика сплошных сред. – 2012. – 5, № 2. – С. 233-243.
3. Budak V. D. Determination of eigenfrequencies of an elliptic shell with constant thickness by the finite-element method / V. D. Budak, A. Ya. Grigorenko, M. Yu. Borisenko, E. V. Boychuk // J. of Mathematical Sci. – 2016. – 212, No 2. – P. 182-192.
4. Xiong-liang Yao Exact free vibration analysis of open circular cylindrical shells by the method of reverberation-ray matrix / Yao Xiong-liang, Tang Dong, Pang Fu-zhen, Li Shuo // Journal of Zhejiang University-SCIENCE A. – 2016, – 17, No4. P. 295-316.
5. Greenspon J. F. Vibration of thick cylindrical shells / J. F. Greenspon // J. Acoust. Soc. Amer. – 1959. – 31, No 12. – P. 1682-1683.
6. Budak V. D. Holographic Interferometry Study of the Free Vibrations of Cylindrical Shells of Constant and Variable Thickness / V. D. Budak, A. Ya. Grigorenko, V. V. Khorishko, M. Yu. Borisenko // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, No 1. – P. 68-74.
7. Leissa A. W. Vibration of Shells / A. W. Leissa // NASA SP-288: US Government Printing Office, Washington DC, 1973. – 438 p.
8. Budak V. D. Natural Frequencies and Modes of Noncircular Cylindrical Shells with Variable Thickness / V. D. Budak, A. Ya. Grigorenko, M. Yu. Borisenko, E. V. Boichuk // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, No 2. – P. 167-172.
9. Grigorenko A. Ya. Numerical Determination of Natural Frequencies and Modes of the Vibrations of a Thick-Walled Cylindrical Shell / A. Ya. Grigorenko, M. Yu. Borisenko, E. V. Boichuk, A. P. Prigoda // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54, No 1. – P. 75-84.
10. Suzuki K. Exact solutions for the free vibrations of open cylindrical shells with circumferentially varying curvature and thickness / K. Suzuki, A. W. Leissa // Journal of sound and vibration. – 1986. – 107, No 1. P. 1-15.

References

1. BUDAK V. D., GRIGORENKO A. Y., BORISENKO M. Y., BOYCHUK O. V. (2014) Natural vibrations of elliptical shells of variable thickness. *Bulletin of Taras Shevchenko national university of Kyiv. Mathematics and Mechanics*. 32. (2). p. 32–37.
2. LEKOMTSEV S. V. (2012) Finit-element algorithms fop calculation of natural vibrations of three-dimensional shells. *Computational continuum mechanics*. 5. (2). p. 233–243.
3. BUDAK V. D., GRIGORENKO A. Y., BORISENKO M. Y., BOYCHUK E. V. (2016) Determination of eigenfrequencies of an elliptic shell with constant thickness by the finite-element method. *J. of Mathematical Sci*. 212. (2). p. 182–192.
4. XIONG-LIANG YAO, DONG TANG, FUZHEN PANG, SHUO LI (2016) Exact free vibration analysis of open circular cylindrical shells by the method of reverberation-ray matrix. *Journal of Zhejiang University-SCIENCE A*. 17. (4). p. 295–316.
5. GREENSPON J. F. (1959) Vibration of thick cylindrical shells. *J. Acoust. Soc. Amer*. 31. (12). p. 1682–1683.
6. BUDAK V. D., GRIGORENKO A. Y., KHORISHKO V. V., BORISENKO M. Y. (2014) Holographic Interferometry Study of the Free Vibrations of Cylindrical Shells of Constant and Variable Thickness. *Int. Appl. Mech*. 50. (1). p. 68–74.
7. LEISSA A. W. (1973) *Vibration of Shells*. NASA SP-288: US Government Printing Office, Washington DC.
8. BUDAK V. D., GRIGORENKO A. Y., BORISENKO M. Y., BOICHUK E. V. (2017) Natural Frequencies and Modes of Noncircular Cylindrical Shells with Variable Thickness. *Int. Appl. Mech*. 53. (2). p. 167–172.
9. GRIGORENKO A. Y., BORISENKO M. Y., BOICHUK E. V., PRIGODA A. P. (2018) Numerical Determination of Natural Frequencies and Modes of the Vibrations of a Thick-Walled Cylindrical Shell. *Int. Appl. Mech*. 54. (1). p. 75–84.
10. SUZUKI K. & LEISSA A. W. (1986) Exact solutions for the free vibrations of open cylindrical shells with circumferentially varying curvature and thickness. *Journal of sound and vibration*. 107. (1). p. 1–15.

Надійшла до редколегії 20.12.2019

УДК 539.376

Печук Є. Д., к.ф.-м.н., с.н.с.
Краснопольська Т. С., д.ф.-м.н., с.н.с.
Рудницька М. О., пров.інж.

Серцево-респіраторна система як система з обмеженим збудженням

Інститут гідромеханіки НАНУ,
03680, м. Київ, вул. Капіс 8/4
e-mail: t.krasnopolskaya@tue.nl

E. D. Pechuk, Dr.
T. S. Krasnopolskaya, Dr. Sc. (Phys.- Math.)
M. O. Rudnytska.

Cardiorespiratory system as system with limited excitation

Institute of hydromechanics NASU,
03680, Kyiv, Kapnis str. 8/4
e-mail: t.krasnopolskaya@tue.nl

На основі моделі ДеБура взаємодії серцево-судинної та респіраторної систем та рівнянь дисипативного відображення Заславського (яке описує динаміку респіраторної системи як генератора центрального типу) побудовано узагальнену модель, що враховує як прямий, так і зворотний зв'язок підсистем: респіраторної та кардіо. При цьому серцево-судинна система являє собою коливальну систему з обмеженим збудженням з боку респіраторної. Методами теорії динамічних систем виявлено хаотичні режими, породжені взаємодією підсистем, та інтервали їх існування. Встановлено, що іррегулярність поведінки фазових траєкторій узагальненої моделі залежить від інтенсивності дії серцевого ритму на дихання, що є характерним для динаміки кардіореспіраторної системи здорової людини. Показано як зміна (зменшення) пульсу може впливати на сукупну динаміку моделі.

Ключові слова: серцево-судинна система, респіраторна система, зворотний зв'язок, хаос.

A new modified cardiorespiratory model based on the famous DeBoer beat-to-beat model and Zaslavsky map (which describes dynamics of the respiratory system as a generator of central type) was studied in details. In this case the respiratory tract was firstly modeled by a self-oscillating system under the impulsive influence of heartbeat and cardiovascular system was represented as an oscillating system with a limited excitation. The steady-state regimes of the model are investigated by methods of the dynamical system theory. Firstly, the chaotic regimes were found out. The dynamics of heartbeat and respiratory systems are in good correspondence with experimental information of healthy man. The found out irregularities of phase trajectories of the modified model depend on intensity of influence of heart rhythm on breathing, what is well known characteristic for the dynamics of the cardiovascular system of healthy man.

Key Words: cardiovascular system, respiratory system, limited excitation, chaos.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

У людини в стані спокою сила удару пульсу та інтервали між серцевими скороченнями здаються приблизно постійними. Тому робота серця на перший погляд виглядає строго періодичною. Більш ретельний аналіз свідчить про те, що у здорових людей серцевий ритм схильний до значних змін, навіть в стані спокою. На початку 80-х років, коли дослідники лише

почали застосовувати теорію динамічних систем в фізіології, передбачалося, що хаос найочевидніше свідчитиме про наявність патологій та хвороб. Згідно дослідженням у здорових людей частота пульсу складає в середньому близько 60 удар/хв і може коливатися в межах 20 удар/хв впродовж кожних декількох ударів. Протягом дня частота серцевих скорочень може змінюватись від 40 до 180 удар/хв. І навпаки, за 13 годин до зупинки серця

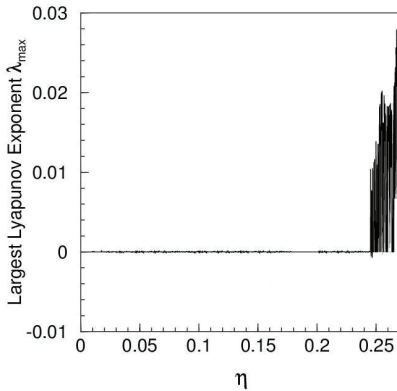


Рис. 1. Старший показник Ляпунова системи (1)-(2)

серцевий ритм майже періодичний, регулярний та стабільний. Як показав Арі Л. Голдбергер [1], за 8 дів до раптової серцевої смерті серцевий ритм характеризується вираженою періодичністю. У здорової людини серцевий ритм є хаотичним.

2. Модель взаємодії серцево-судинної і респіраторної систем.

Модель взаємодії серцево-судинної і респіраторної систем, досліджувана в роботах [2] і [3], є системою дискретних відображень, що описують еволюцію характеристик стану кардіоінтервалу від удару до удару. Модель містить такі фізіологічні характеристики стану як систолічний тиск S , діастолічний тиск D , кардіоінтервал I (RR -інтервал), час артеріального загасання T . Вплив респіраторної системи на серцево-судинну обмежується лише механічною складовою і моделюється введенням відповідної адитивної добавки. Згідно із загальноприйнятими фізіологічними нормами, в усталеному режимі $S_0 = 120$ мм рт. ст., $D_0 = 80$ мм рт. ст., $I_0 = 800$ мс, $T_0 = 1500$ мс. Після обезразмірювання по характерних величинах S_0 і T_0 , отримують наступну систему дискретних відображень [3]:

$$\begin{cases} D'_i = c_1 S'_{i-1} \exp(-I'_{i-1} / T'_{i-1}) \\ S'_i = D'_i + \gamma \frac{T_0}{S_0} I'_{i-1} + \frac{A}{S_0} \sin(2\pi f T_0 t_i) + \frac{c_2}{S_0} \\ I'_i = G_v \frac{S_0}{T_0} \hat{S}'_{i-\tau_v} + G_\beta \frac{S_0}{T_0} F(\hat{S}', \tau_\beta) + \frac{c_3}{T_0} \\ T'_i = 1 + G_\alpha S_0 / T_0 - G_\alpha S_0 / T_0 F(\hat{S}', \tau_\alpha) \\ \hat{S}'_i = 1 + 18 / S_0 \arctan(S_0 (S'_i - 1) / 18) \end{cases}, (1)$$

де $i \geq 1$, $D' = D / S_0$, $S' = S / S_0$, $\hat{S}' = \hat{S} / S_0$,

$$I' = I / T_0, \quad T' = T / T_0, \quad c_1 = \frac{D_0}{S_0} \exp\left(\frac{I_0}{T_0}\right),$$

$$c_2 = S_0 - D_0 - \gamma I_0, \quad c_3 = I_0 - S_0 (G_v + G_\beta),$$

$$G_\alpha = 18 \text{ мс/мм рт.ст.}, \quad G_\beta = G_v = 9 \text{ мс/мм рт.ст.},$$

$\gamma = 0.016$ мм рт.ст./мс, $A = 3$ мм рт.ст. - амплітуда зміни тиску систоли, обумовлена рухом грудної клітки під час дихання, $f = 0.25$ Гц - частота

дихання, $t_i = \sum_{k=0}^{i-1} I_k$ - момент часу серцевого скорочення,

$$F = \frac{1}{9} (\hat{S}_{i-\tau-2} + 2\hat{S}_{i-\tau-1} + 3\hat{S}_{i-\tau} + 2\hat{S}_{i-\tau+1} + \hat{S}_{i-\tau+2}),$$

$\tau_\alpha = \tau_\beta = 4$, $\tau_v = 0$, якщо пульс менше за 75 удар/хв і $\tau_v = 1$, якщо пульс більше ніж 75 удар/хв.

Генерація рухових ритмів, за теорією Гласа здійснюється генераторами центрального типу (the generator of central type). Дихання пов'язане з рухом грудної клітини і його динаміка може бути змодельована як динаміка центрального генератора. Математично процес дихання може бути описаний автоколивальною системою, що має в усталеному режимі коливаний стійкий граничний цикл [4, 5]. Математичною моделлю такої системи може бути, за нашою думкою, система відображень Заславського, що описує динаміку системи, в якій реалізуються періодичні автоколивання і яка знаходиться під періодичним імпульсним збуренням постійної інтенсивності. Динаміка цієї системи записується у вигляді:

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= (r_n + \eta \sin \varphi_n) \exp\{-\kappa T\}, \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + \omega T + \nu (r_n + \eta \sin \varphi_n) \frac{1 - \exp\{-\kappa T\}}{\kappa}, \end{aligned}$$

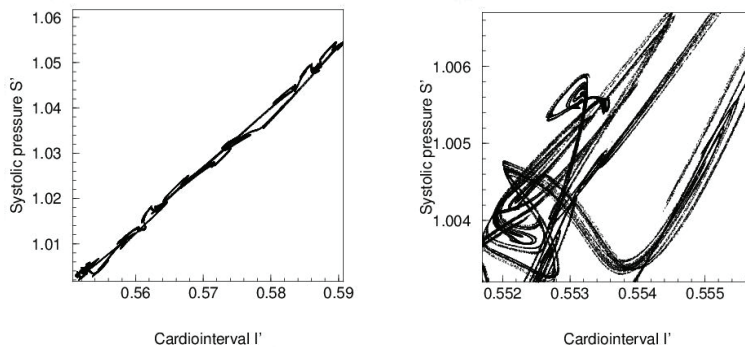


Рис. 2. Хаотичний режим моделі (1)-(2) при $\eta = 0.25$

де r - відхилення амплітуди від граничного циклу, $\kappa > 0$ - коефіцієнт загасання збурення амплітуди, що визначає швидкість повернення збуреної системи до граничного циклу, φ - фаза коливань, ω - частота коливань на граничному циклі, добавка до якої враховується в лінійному наближенні по r , V - постійний параметр, що відповідає за ступінь зміни добавки до фази в залежності від величини відхилення r .

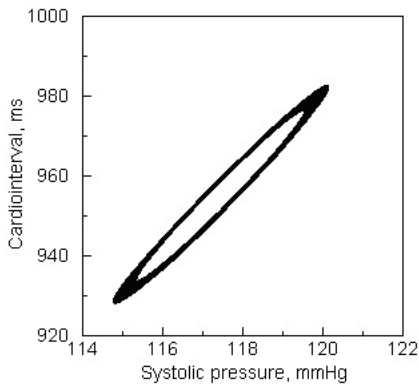


Рис. 3. Квазіперіодичний режим моделі (1)-(2) при пульсі в 60 ударів на хвилину, при $\eta = 0.01$

В роботі запропонована узагальнена модель взаємодії серцево-судинної та респіраторної систем, в рамках якої респіраторна система моделюється автоколивальною системою, що знаходиться під механічним імпульсним збуренням серцевих скорочень, тобто серцево-судинна система розглядається як система з обмеженим збудженням згідно сучасній теорії коливань. При цьому, для моделювання впливу серцевих скорочень на дихальні осциляції використовуються рівняння дисипативного відображення Заславського, що узагальнені на випадок неперіодичних ударів серця різної інтенсивності

$$r_{n+1} = (r_n - \eta(S_n - S_0) \sin \varphi_n) \exp\{-\kappa I_n\}, (2)$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + 2\pi f I_n + v(r_n - \eta(S_n - S_0) \sin \varphi_n) \frac{1 - \exp\{-\kappa I_n\}}{\kappa},$$

тут $\eta > 0$ - безрозмірний параметр, що характеризує інтенсивність дії серцевих скорочень на респіраторну активність. Таким чином, досліджується динаміка математичної моделі серцевих ритмів ДеБюра (1), з прямою респіраторною дією вигляду $(A + r_i) \sin \varphi_i$, та зворотними зв'язками (2).

3. Усталені режими моделі.

Перейдемо до дослідження усталених режимів системи (1)-(2). В силу нелінійності даної системи, її розв'язок можна отримати чисельно. Для чисельного моделювання вибираємо наступні початкові значення змінних: $I'[0] = 0.53$, $S'[-j] = 1.08$, $j = 0, \dots, 6$. На рис. 1. показана залежність старшого показника Ляпунова системи, на проміжку $0 \leq \eta \leq 0.27$. При нульовому значенні біфуркаційного параметра модель позбавлена зворотного впливу і характеризується регулярним усталеним режимом. При збільшенні значення параметра, спостерігається стрибок показника в додатну область. Таким чином, врахування лінійного зворотного зв'язку, для моделі (1), веде до хаотизації усталеного режиму сукупної системи при $\eta \approx 0.245$. Хаотичний атрактор, що характеризує поведінку системи при $\eta = 0.25$ зображено на Рис. 2.

Якщо тепер зменшити значення пульсу до 60 ударів на хвилину, то поведінка системи, при різних значеннях $\eta > 0$, з проміжку фізично обґрунтованих значень параметрів моделі, жорсткий перехід до хаосу зникає, натомість система характеризується низкою квазі-

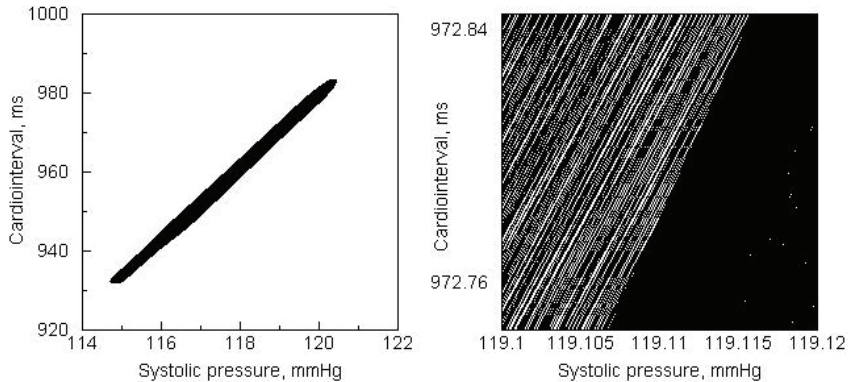


Рис. 4. Збільшені фрагменти атракторів моделі (1)-(2) при різних значеннях біфуркаційного параметру $\eta > 0$, для випадку пульсу в 60 ударів на хвилину

періодичних атракторів (Рис. 3.). При $\eta = 0.17$ в моделі реалізується хаотичний режим. Збільшений фрагмент структури атракторів для цього усталеного режиму в фазовому просторі наведено на Рис. 4.

4. Висновки

Побудована модель кардіосистеми людини враховує як прямий так і зворотний механічний взаємозв'язок підсистем: респіраторної та кардіо. Встановлено, що іррегулярність поведінки фазових траєкторій

залежить від інтенсивності дії серцевого ритму на дихання, що є характерним для динаміки кардіореспіраторної системи здорової людини. Також виявлено чутливість моделі до частоти пульсу (кардіоінтервалу), а саме спрощення структури атрактору сукупної системи при зменшенні пульсу з 75 до 60 ударів на хвилину, що відповідає загальноприйнятим уявленням про норми діяльності організму людини.

Список використаних джерел

1. Goldberger Ary L. Clinical Electrocardiography: A Simplified Approach, 7th ed. / Ary L. Goldberger. – Philadelphia: Mosby Elsevier, 2006. – 420 p.
2. DeBoer R.W. Hemodynamic fluctuations and baroreflex sensitivity in humans: A beat-to-beat model / R.W. DeBoer, J. M. Karemaker, J. Strakee // Amer. J. Physiol. – 1987. – **253**, – P. H680–H689.
3. Гринченко В.Т. Модель взаимодействия сердечно-сосудистой и респираторной систем / В.Т. Гринченко, А.Г. Рудницкий // Акустический вестник. – 2006. – **9**, N 3. – С. 16–26.
4. Ganiev R.F. The scientific heritage of V.O.Kononenko: the Sommerfeld–Kononenko effect / R.F. Ganiev, T.S. Krasnopol'skaya // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2018. – vol.47, № 5, – P.385 – 394.
5. Кузнецов С.П. Динамический хаос / С.П. Кузнецов. – М.: Физматлит, 2001. – 295 с.

References

1. DEBOER, R.W., KAREMAKER, J. M. and STRAKEE, J. (1987). Hemodynamic fluctuations and baroreflex sensitivity in humans: A beat-to-beat model. *Amer. J. Physiol.*, 253, p.H680–H689.
2. GOLDBERGER, ARY L. (2006) *Clinical Electro-cardiography: A Simplified Approach*, 7th ed. Philadelphia: Mosby Elsevier.
3. GRINCHENKO, V.T. and RUDNITSKY, A.G. (2006) Model' vzaimodeistvia serdechno-sosudistoi i respiratornoi sistem. *Akusticheskii vestnik*, 9(3), p.16–26.
4. GANIEV, R.F. and KRASNOPOLSKAYA, T.S. (2018) The scientific heritage of V.O.Kononenko: the Sommerfeld–Kononenko effect, *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 47(5), p.385 – 394.
5. KUZNETSOV, S.P. (2001) *Dinamicheskii khaos*. Moskva: Phismatlit.

Надійшла до редколегії 09.11.19

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 517.928

I.M. Аскеров, проф., д.м.н.

**Наближений метод розв'язання одної
періодичної оптимальної регульованої
крайової задачі**

Ланкаранський державний університет,
пр-т Генерала Ази Асланова, 50, Ланкаран,
Азербайджанська Республіка, Az 4200
e-mail: idrakasgerov@gmail.com

I.M. Askerov, Dr.Sci.(Math.), accosiate professor

**Approximate method of solving one periodic
optimal regulated boundary value problem**

Lankaran State University,
General Hazi Aslanov Ave., 50, Lankaran,
Azerbaijan Republic, Az 4200
e-mail: idrakasgerov@gmail.com

В представленій роботі розглянуто розв'язання одної періодичної оптимальної регульованої крайової задачі асимптотичним методом. Для розв'язання задачі з розширеним функціональним записом були знайдені крайові умови та рівняння Ейлера-Лагранжа. Підхід до розв'язання задачі в залежності від малого параметра шляхом відшукування системи нелінійних диференціальних рівнянь і розв'язку рівнянь Ейлера-Лагранжа, розв'язок загальної задачі при першому підході зводиться до розв'язку двох нелінійних алгебраїчних рівнянь.

Ключові слова: оптимальне регулювання, асимптотичний метод, періодичний стан.

In the present work we considered the solution of one periodic optimal regulated boundary value problem by the asymptotic method. For the solution of the problem with extended functional writing, boundary conditions and Euler-Lagrange equations were found. The approach to the solution of the problem depending on a small parameter by seeking a system of nonlinear differential equations and solving Euler-Lagrange equations, the solution of the general problem in the first approach comes down to solving two nonlinear algebraic equations.

Key words: optimal regulation, asymptotic method, periodic condition.

Статтю представив д.ф.-м.н. Хусаїнов Д.Я.

I. INTRODUCTION

Many scientists have studied the asymptotic method of studying some regulated problem and a system of nonlinear differential equations. As examples, the article [1] shows the methods of asymptotic solution of nonlinear differential equations that describe some dances. But in [2], the solution of the system depending on a small parameter was studied after making certain changes to the system that describes the telegraph problem of hyperbolic equations with special derivatives, then differential equations with special derivatives depending on the small parameter were introduced into the system. Also in [6], the article have been investigated the issues of the optimal control of some nonlinear

mechanical systems by the asymptotic method. The considered method is of great importance in solving applied problems [7].

In the problem under consideration when the equation of an object is represented by nonlinear differential equations depending on the small parametr, asymptotic solution of the optimal control problem is given. The problem was solved until the end and in the first approximation was found the solution, dependening on the small parametr.

II. A PROBLEM STATEMENT

Suppose that the equation of motion of an object is given in the following form with a system of nonlinear differential equations:

$$\begin{aligned} \dot{y}(x, \varepsilon) &= f^1(y(x), \varepsilon), \quad 0 \leq x \leq l-0, \\ \dot{y}(x, \varepsilon) &= f^2(y(x), \varepsilon), \quad l+0 \leq x \leq 2l, \\ y(0, \varepsilon) &= u(\varepsilon). \end{aligned} \quad (1)$$

(1) the system of equations communicate with each other at a point/ as follows:

$$y(l+0, \varepsilon) = \gamma^T y(l-0, \varepsilon) + \gamma_1^T (y(l-0, \varepsilon)) \bar{y} \quad (2)$$

Suppose, in the (1) system, the functions

$$f^1(y(x), \varepsilon), \frac{\partial f^1}{\partial y} \quad \text{in part } 0 \leq x \leq l-0 \quad \text{and,}$$

functions $f^2(y(x), \varepsilon), \frac{\partial f^2}{\partial y}$ in part $l+0 \leq x \leq 2l$ do not intersect. In this work, the following condition is added as an additional:

$$y(l+0, \varepsilon) = y(2l, \varepsilon). \quad (3)$$

Here y - n dimensional vector, but u is n dimensional unknown vector (this u parametr may be accepted as a manager), $\bar{y}$ -scalar, γ - $n \times n$ dimensional vector and T -symbol is a transponder.

For the problem under consideration, the question of optimal regulation will be in the following form. The problem consists of the fact that of the possible regulated ones to find such a regulated one $u(\varepsilon)$ that became a solution, which meets (2) and (3) the conditions (1) of the system and at the same time is the minimum number for the next functional.

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} y^T(l+0, \varepsilon) R y(l+0, \varepsilon) + u^T(\varepsilon) \beta u(\varepsilon) + \\ &+ \int_0^{2l} y^T(x, \varepsilon) Q(x) y(x, \varepsilon) dx. \end{aligned} \quad (4)$$

But here, R - $n \times n$ -dimensional symmetric matrix, and β -given number, but $Q(x)$ is a continuous symmetric matrix $n \times n$ -dimensional elements, considering to x .

III. SOLUTION OF THE PROBLEM

To solve the problem (1) - (4), let's write the corresponding extended functional:

$$\begin{aligned} \bar{J} &= J + \lambda^T(l+0)(\gamma^T y(l-0, \varepsilon) + \\ &+ \gamma_1^T (y(l-0, \varepsilon)) \bar{y} - y(l+0, \varepsilon)) + \\ &+ \frac{\beta}{4l} \int_0^{2l} \lambda(x) (f(y(x), \varepsilon) - \dot{y}(x)) dx + \\ &+ \delta (y(0, \varepsilon) - u(\varepsilon)). \end{aligned} \quad (5)$$

Here from the extended functionality (5)

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(x, \varepsilon) &= - \left[\frac{\partial f(y(x), \varepsilon)}{\partial y(x, \varepsilon)} \right]^T \cdot \lambda(x, \varepsilon) - \\ &- \frac{8l}{\beta} y(x, \varepsilon) Q(x) \end{aligned} \quad (6)$$

we obtain the Euler-Lagrange equations and the following boundary conditions $\lambda(x, \varepsilon)$ corresponding to the attached multipliers:

$$\begin{aligned} \alpha y(l+0, \varepsilon) + \left(\frac{\beta}{4l} - 1 \right) \lambda(l+0, \varepsilon) - \frac{\beta}{4l} \lambda(2l, \varepsilon) &= 0, \\ \gamma \lambda(l+0, \varepsilon) - \frac{\beta}{4l} \lambda(l-0, \varepsilon) + \\ &+ \frac{\partial \gamma_1(y(l-0, \varepsilon))}{\partial y(l-0, \varepsilon)} \lambda(l+0, \varepsilon) \bar{y} = 0, \\ u(\varepsilon) + \frac{\beta}{4l} \lambda(0, \varepsilon) + \delta &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Here δ -constant number. In (1) system of equations functions f^1 and f^2 let's have in general way with $f(y(x), \varepsilon)$. If we look at the issue at intervals $0 \leq x \leq l-0$ and while we look at $f^1(y(x), \varepsilon)$, $l+0 \leq x \leq 2l$ this interval,

then we accept $f^2(y(x), \varepsilon)$. Now suppose that function $f(y(x), \varepsilon)$ has the following separation according to the small parametr.

$$f(y(x), \varepsilon) = f_0(y(x)) + \varepsilon f_1(y(x)) + \varepsilon^2 f_2(y(x)) + \dots$$

Here,

$$f_0(y(x)) = f(y(x, \varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0},$$

$$f_1(y(x)) = \frac{\partial f(y(x), \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0},$$

$$f_2(y(x)) = \frac{\partial^2 f(y(x), \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0} \dots$$

Therefore, we write the differences in the small parameter ε on the right-hand side of (1) the system and presenting them in (6) the equation, we look for solutions (1) and (6) to the equations in sequential order, as a result of solving the obtained system of equations from part $0 \leq x \leq l-0$ and $l+0 \leq x \leq 2l$, we obtain the following conditions:

$$0 < x < l-0$$

$$\begin{bmatrix} y^{(0)}(l-0) \\ \lambda^{(0)}(l-0) \end{bmatrix} = L_1(y^{(0)}(0), \lambda^{(0)}(0)), \quad (8)$$

$$l+0 < x < 2l$$

$$\begin{bmatrix} y^{(0)}(2l) \\ \lambda^{(0)}(2l) \end{bmatrix} = L_2(y^{(0)}(l+0), \lambda^{(0)}(l+0)), \quad (9)$$

and

$$0 < x < l-0$$

$$\begin{bmatrix} y^{(1)}(l-0) \\ \lambda^{(1)}(l-0) \end{bmatrix} = H_1(y^{(1)}(0), \lambda^{(1)}(0)), \quad (10)$$

$$l+0 < x < 2l$$

$$\begin{bmatrix} y^{(1)}(2l) \\ \lambda^{(1)}(2l) \end{bmatrix} = L_2(y^{(1)}(l+0), \lambda^{(1)}(l+0)), \dots (11)$$

Considering all the above, under conditions (2), (3) and (7) as a result of condition (2) we obtain

$$y^{(0)}(l+0) = \gamma^T y^{(0)}(l-0) + \quad (12)$$

$$+ \gamma_1^T (y^{(0)}(l-0)) \bar{y}$$

$$y^{(1)}(l+0) = \gamma^T y^{(1)}(l-0) +$$

$$(13)$$

$$+ \frac{\partial \gamma^T (y^{(1)}(l-0), \varepsilon) \bar{y}}{\partial \varepsilon} \gamma_1^T (y^{(1)}(l-0, \varepsilon)) \bar{y} \Big|_{\varepsilon=0} \dots$$

Conditions from conditions (3),

$$y^{(0)}(l+0) = y^{(0)}(2l), \quad (14)$$

$$y^{(0)}(l+0) = y^{(0)}(2l) \dots (15)$$

Conditions, finally, from (7) conditions

$$\alpha y^{(0)}(l+0) + \left(\frac{\beta}{4l} - 1 \right) \lambda^{(0)}(l+0) - \frac{\beta}{4l} \lambda^{(0)}(2l) = 0,$$

$$\gamma \lambda^{(0)}(l+0) - \frac{\beta}{4l} \lambda^{(0)}(l-0) +$$

$$+ \frac{\partial \gamma_1 (y^{(0)}(l-0))}{\partial y^{(0)}(l-0)} \lambda^{(0)}(l+0) \bar{y} = 0 \quad (16)$$

$$u^{(0)} + \frac{\beta}{4l} \lambda^{(0)}(0) + \delta_0 = 0,$$

and

$$\alpha y^{(1)}(l+0) + \left(\frac{\beta}{4l} - 1 \right) \lambda^{(1)}(l+0) - \frac{\beta}{4l} \lambda^{(1)}(2l) = 0$$

$$\lambda^{(1)}(l+0) - \frac{\beta}{4l} \lambda^{(1)}(l-0) = 0 \quad (17)$$

$$u^{(1)} + \frac{\beta}{4l} \lambda^{(1)}(0) + \delta_1 = 0 \dots$$

we get these conditions.

V. CONCLUSIONS

At the end, solving the obtained two nonlinear algebraic equations from (8), (9), (12), (14), (16) and (10), (11), (13), (15), (17) conditions, as a result of the first system,

$y^{(0)}(0) = u^{(0)}$, of the second system
 $y^{(1)}(0) = u^{(1)}$ finding (1) - (4) problems in the first approach

$$u(\varepsilon) \approx u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)} + \dots \quad (18)$$

using the expression we get an approximate solution.

On the other hand, in the end, in order not to get a system of nonlinear algebraic equations, this can be achieved by linearizing equations (1), (2) and (8) - (11)

Список використаних джерел

1. Mishchenko E. F. Differential equations with a small parameter and relaxation oscillations / E. F. Mishchenko, N.Kh. Rozov. – M.: Nauka, 1975. – 247 p.
2. Vasilieva A.B. Asymptotic methods in the theory of singular perturbations: Scientific-theoretical. Allowance. / A.B. Vasilieva, V.F. Butuzov. – M.: Higher school, 1990. – 208 p.
3. Aliev F.A. Asymptotic Method of Solution for a Problem of Construction of Optimal Gas-Lift Process Modes / F.A. Aliev, M.M. Mutallimov, I.M. Askerov, I.S. Raguimov // Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering. – Volume 2010. – Article ID 191053, 10 pages doi:10.1155/2010/191053.
4. Askerov I.M. An asymptotic method to the construction of the optimal regulator in gaslift wells / I.M. Askerov, N.A. Ismailov // The 4th Congress of the Turkic World Mathematical Society (TWMS), Baku, 2011. – P. 367.
5. Mutallimov M.M. An Asymptotical Method to Construction a Digital Optimal Regime for the Gas-Lift Process / M.M. Mutallimov, I.M. Askerov, N.A. Ismailov, M.F. Rajabov // Appl. Comput. Math. – 2010. – V.9, №1. – P.77-84.
6. Moiseev N.N. Asymptotic methods of nonlinear mechanics / N.N. Moiseev. – M.: Nauka, 1969. – 400 p.
7. Aliev F.A. Asymptotic method for solving the problem of constructing optimal regimes of a gas-lift process / F.A. Aliev, M.M. Mutallimov, I.M. Askerov // Reports of the National Academy of Sciences of Azerbaijan. – 2010. – № 1. – P. 26-33.

References

1. MISHCHENKO, E. F., ROZOV, N.Kh. (1975) *Differential equations with a small parameter and relaxation oscillations*, M., Nauka, 247 p.
2. VASILIEVA, A.B., BUTUZOV, V.F. (1990) *Asymptotic methods in the theory of singular perturbations: Scientific-theoretical. Allowance*, M., Higher school, 208 p.
3. ALIEV, F.A., MUTALLIMOV, M.M., ASKEROV, I.M., RAGUIMOV, I.S. (2010) “Asymptotic Method of Solution for a Problem of Construction of Optimal Gas-Lift Process Modes”, *Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 191053, 10 pages, doi:10.1155/2010/191053.
4. ASKEROV, I.M., ISMAILOV, N.A. (2011) “An asymptotic method to the construction of the optimal regulator in gaslift wells”, *The 4th Congress of the Turkic World Mathematical Society (TWMS)*, Baku, p. 367.
5. MUTALLIMOV, M.M., ASKEROV, I.M., ISMAILOV, N.A., RAJABOV, M.F. (2010) “An Asymptotical Method to Construction a Digital Optimal Regime for the Gas-Lift Process”, *Appl. Comput. Math.*, v.9, №1, p.77-84.
6. MOISEEV, N.N. (1969) *Asymptotic methods of nonlinear mechanics*, M., Nauka, 400 p.
7. ALIEV, F.A., MUTALLIMOV, M.M., ASKEROV, I.M. (2010) “Asymptotic method for solving the problem of constructing optimal regimes of a gas-lift process”, *Reports of the National Academy of Sciences of Azerbaijan*, №1, 2010, p. 26-33.

Надійшла до редколегії 19.05.2019

УДК 004.6, 004.4

М. Альхаваша, стажист

Архітектура платформи відкритих даних для e-Government

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, Україна, 01601, м.Київ,
вул. Володимирська, 64/13
e-mail: mohammadalhawawsha@yahoo.com

M. Alhawawsha, intern

Architecture of the Platform for the E-Government Open Data

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
64/13, Volodymyrska Street, Kyiv, Ukraine, 01601
e-mail: mohammadalhawawsha@yahoo.com

Електронний уряд - це сукупність поширених технологій та автоматизованих процесів. Відкриті дані відіграють вирішальну роль в успішній реалізації цієї концепції. Архітектура платформи відкритих даних (ODP) тут описана як основа для впровадження систем відкритого доступу до даних, включаючи конкретні вимоги. Пропонована архітектура та її компоненти були детально обговорені в цій роботі щодо її доступності, продуктивності та надійності. Підсистема відкритих даних на основі представленої тут архітектури була розроблена для уряду Йорданії та успішно впроваджена та протестована. Таким чином, ця архітектура показала свою життєздатність.

Основна увага в роботі - детальний аналіз запропонованої архітектури ODP та її характеристик. ODP є важливою системою для зрілого електронного уряду. Ми пропонуємо тут архітектуру для неї з перевіреними на використання характеристиками. Цей факт додає значення стабільності системи електронного урядування та значним характеристикам та покращує загальну якість системи.

Ключові слова: електронний уряд, відкриті дані, цифрова трансформація, оцифровка, архітектура системи, висока доступність, висока продуктивність, відкрита платформа даних.

E-Government is a set of pervasive technologies and automated processes now. The open data plays a crucial role in the successful implementation of this concept. The Open Data Platform (ODP) architecture is described here as the framework for the open data access systems implementation, including specific requirements. The proposed architecture and its components were discussed in this paper in detail for its availability, productivity, and reliability. The open data subsystem based on the architecture presented here was developed for the Jordan Government and was successfully implemented and tested. Thus, this architecture showed its viability.

The focus of the paper is the detailed analysis of the proposed ODP architecture and its characteristics. The ODP is a significant system for the mature e-Government. We propose here the architecture for it with usage-proven characteristics. This fact adds the value to the e-Government framework stability, and significant characteristics and improves the overall quality of the system

Key Words: e-government, open data, digital transformation, digitalization, system architecture, high availability, high performance, open data platform.

Статтю представила к.ф.-м.н., доц. Розора І.В.

Вступ

Цифрова трансформація суспільства, штатів, міст та громадян - це загальний процес на сьогодні. Це зачіпає майже всі сфери нашого життя. Оцифрування відбувається навіть у сфері

електронного здоров'я та електронного уряду, дані стають відкритими та широкодоступними. Усі ці зміни потребують зрілої інфраструктури, яка може впоратися з такими проблемами, як надійність, доступність, продуктивність, доступність та безпека.

Актуальність, підходи, архітектура, рішення та виклики електронного уряду та SMART-уряду були описані та обговорені в [1-12]. Потребу у відкритому електронному уряді розглянуто в [1-5]. Існує також багато публікацій, в яких висвітлюються різні аспекти електронного уряду, включаючи історії успіху та виклики під час розробки та впровадження [6-11].

Багато нетривіальних завдань, які повинні бути вирішені під час якісної реалізації концепції електронного уряду, повинні бути ретельно змальовані та вивчені заздалегідь – наприклад, питання безпеки при роботі з особистими даними та наявність самих даних належної якості. Однак одне з перших і важливих завдань – це концепція відкритих даних [12] та її відповідна реалізація. Це означає, що портал даних (або подібна система) повинен бути:

- достатньо надійний (включаючи відмовостійкість),
- висока доступність в різних умовах,
- продуктивність в сенсі відповідності вимогам до рівня обслуговування (SLA),
- зручність (зрозумілість для кінцевих споживачів, включаючи відповідні вимоги щодо доступності), та
- запобігання несанкціонованому доступу до чутливої частини даних (внутрішніх сервісів), а також до внутрішньої частини системи взагалі, від неуповноважених сутностей (включаючи користувачів).

Тут ми не згадуємо про безпеку та конфіденційність, оскільки тема "Відкриті дані", що означає, власне, відкритість для кінцевого користувача.

Дані повинні бути представлені у чіткій структурі. Ми маємо на увазі самі дані, а також правильні формати та форми подання, та систему каталогів, аби кінцевий користувач знаходив потрібні дані з меншими зусиллями. Проте, ці питання виходять за межі цього дослідження.

Отже, тут ми зосереджуємось на розробці Open Data Framework (ODF) та Open Data System (ODS), зокрема на їх архітектурі, блок-схемі та їх властивостях. Ми обговорюємо очікування, вимоги до такої платформи та її поведінку за різних умов.

Мета дослідження – розробити архітектуру Open Data Platform (ODP), яка відповідає вимогам, описаним вище. Методика є аналітично-порівняльною – вона спирається на сучасні

технології та кращі практики, адаптуючи їх для отримання найкращого результату.

Врахуємо вимоги до системи та, спираючись на поточну тенденцію до архітектури мікросервісів, запропоновано архітектуру платформи відкритих даних, обговорено її властивості та надано аналіз її переваг та недоліків.

Архітектура платформи відкритих даних для електронного урядування

На рис. 1 подано пропоновану структурну схему компонентів ODP: архітектура, робочі процеси, потоки даних та зв'язки.

ODP має бути веб-орієнтованою системою, оскільки користувачі матимуть доступ до відкритих даних через Інтернет. Отже, має бути Front-End частина із серверами доступу до даних та підготовкою та генерацією звітів. Цей блок включає службу кешування для прискорення обробки повторюваних запитів доступу до даних. Також використання кешу може покращити доступність, покращивши загальну продуктивність Back-End-сервісу, зводячи до мінімуму кількість запитів до цієї частини. Також він надає дані, якщо резервна система з якихось причин недоступна. Тут Back-End є сервери зберігання даних (Storage Engine) та доступу до даних (Querying Engine).

Front-End сервери можуть бути комбінацією SQL Server та/або OLAP (On-Line Analytical Processing – на відміну від On-Line Transactional Processing сервера, OLTP) для оптимізації продуктивності, особливо для запитів тривалої обробки з агрегатами над великими масивами даних. Ця частина всієї інфраструктури є основним сховищем вітрин даних (Data Marts), також відомим як склад даних (Data Warehouse) – єдине джерело достовірної інформації для всіх користувачів системи (ODS).

З іншого боку, ODP має багато різних джерел вхідних даних, тому потрібна колекція трансформаторів даних, які перетворюють дані з формату введення у внутрішнє представлення. Цей компонент ми називаємо «Збір вихідних даних» з різних форматів вхідних даних, що перетворюються і надалі спільно зберігаються у сховищі даних.

Як і в більшості систем обробки даних, нам потрібен Склад даних з такими компонентами:

- очищення даних, що означає пошук відхилень та помилок у даних, невідповідностей та колізій, ведення словників різних позначень одних і тих же сутностей та інших подібних завдань,
- попередня обробка даних, яка агрегує дані, перевіряючи їх цілісність та здійснюючи можливі перехресні перевірки,
- систематизація, приведення даних до належної форми, та
- зберігання отриманих очищених та систематизованих даних на складі даних SQL Server.

Усі ці компоненти (очищення, попередня обробка, ректифікація) мають важливе значення для підготовки якісних даних для подальшого використання громадою.

Зовнішні постачальники послуг – це, власне, видима зовні частина всієї Платформи, включаючи впровадження порталу відкритих даних. До таких послуг належать:

- інтерфейси прикладного програмування (API) для користувачів або “роботів” (інші програми, що запитують відкриті дані),
- адаптери даних, які являють собою джерела даних для зовнішнього програмного забезпечення, рядки підключення та інші засоби доступу до даних,
- послуги доступу до даних, які складаються з вітрин даних (у першу чергу – завантажувані файли, а також механізм запитів та інші засоби доступу), знімки даних (в першу чергу для версійності) та інші засоби.

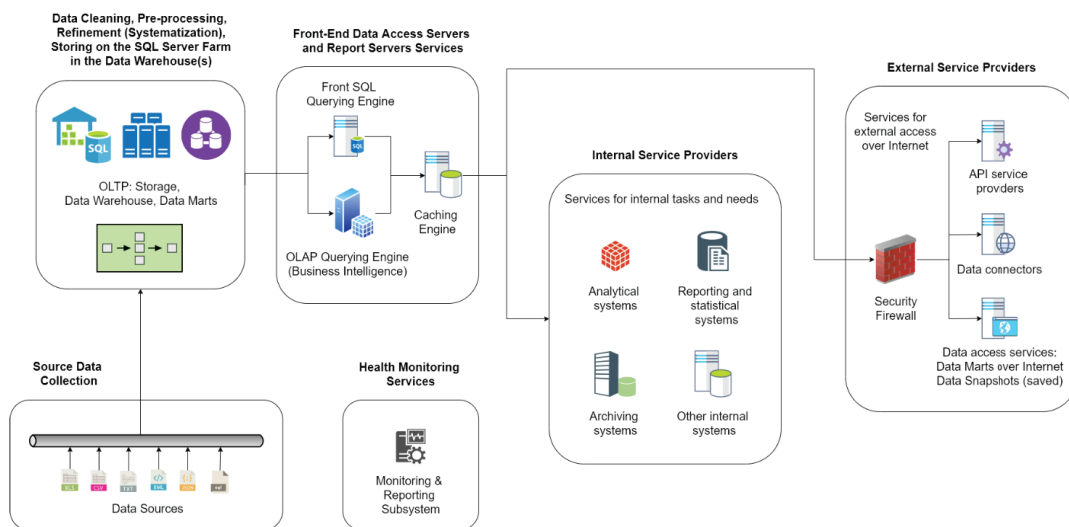


Рис. 1. Структурна схема платформи відкритих даних (ODP).

API рекомендується будувати за допомогою сервісно-орієнтованої архітектури, заснованої на протоколі SOAP, використовуючи мову опису веб-служб WSDL для їх визначення та виявлення. Ця архітектура забезпечує високу доступність та масштабованість для цієї підсистеми та її користувачів.

Внутрішні постачальники послуг надають доступ до даних інших служб для внутрішнього використання. Це містить:

- підсистеми архівації (для історичних версій),
- аналітичні та звітні підсистеми – для інших державних установ, агентств та "внутрішніх" отримувачів даних, яким вони необхідні,

• інші системи, які забезпечують доступ до необхідних даних та відповідно до угод про сервіс.

Аналітична та звітна підсистема спрямована на пришвидшення доступу до складних вибірок даних, що вимагає агрегації багатьох первинних даних та, можливо, різних форматів подання даних.

Крім того, останньою, але не менш важливою складовою ODP є служби моніторингу стану, які включають ряд інфраструктурних рішень, спрямованих на:

- контроль функціональності усіх компонентів,
- попередження ситуації, коли спрацьовує певний тригер щодо критичної події,
- сигналізація про надмірне використання деяких ресурсів на ранніх етапах,
- запобігання проблемам шляхом інформування адміністраторів про критичні зміни ситуації (надмірне завантаження, рівень продуктивності підсистем, доступність),
- візуалізація стану всього комплексу,
- передбачення вузьких місць в продуктивності та інших крайових ситуаціях,
- автоматизація завдань технічного обслуговування (архівування, коригування параметрів віртуалізації обладнання, автоматизація масштабування, перезавантаження тощо)

Всі кроки реєструються, щоб відстежувати всі зміни, доступність та потенційно складні ситуації.

Як ми знаємо з великих проектів та компаній, таких як Google і Facebook, Grammarly та інших веб-орієнтованих продуктів, однією з найбільших команд є команда інфраструктури (розробка, підтримка та моніторинг).

Властивості платформ відкритих даних

Основні властивості впливають із запропонованої архітектури. Надамо короткий аналіз обговорених питань.

Пропонована архітектура ODP має такі позитивні характеристики:

- багаторівнева структура та мікросервісна архітектура окремих блоків підтримують високий рівень незалежності та масштабування,
- механізми кешування та запитів допомагають оптимізувати та збалансувати завантаженість системи,
- розділення внутрішніх та зовнішніх споживачів сервісів,

• підсистема моніторингу, яка допомагає виявити помилки та швидко вирішити критичні ситуації.

Розглянемо докладніше наступні аспекти.

Доступність. Дані залишатимуться доступними (деякий час згідно конфігурації) через кеш, навіть якщо двигун запитів та/або сховище даних стануть недоступними. Крім того, використання OLAP-запитів і механізмів багатовимірного зберігання допомагає поліпшити доступність даних за рахунок кращої швидкості обробки запитів.

Продуктивність. Високий рівень продуктивності (іншими словами, SLA – вимоги щодо рівня обслуговування) повинен бути забезпечений першочергово апаратно (або віртуальною, «хмарною» конфігурацією). Також наступні архітектурні рішення підтримують потрібний рівень продуктивності:

- механізм кешування та багатошарова структура вирішує ситуації з високим навантаженням,
- мікросервіси забезпечують масштабованість,
- поєднання двигунів запитів SQL та OLAP забезпечує гнучкість у створенні більш ефективного потоку даних всередині ODP,
- моніторинг допомагає рано виявити критичні відхилення у швидкодії.

Надійність. Надійність у нашому випадку базується на:

- архітектурі мікросервісів (таким чином досягається високий рівень незалежності компонентів ODP),
- моніторингу за допомогою реактивної підсистеми, яка запобігає системним катастрофам,
- кешах, які покращують доступність у деяких випадках,
- багаторівневій архітектурі, яка допомагає уникнути складних взаємозв'язків і, таким чином, швидко локалізувати потенційні проблеми (у першу чергу, щодо продуктивності),
- розділенні внутрішніх та зовнішніх клієнтів послуг,
- брандмауері, який допомагає фільтрувати трафік та уникати несанкціонованого доступу до системи за багатьма параметрами, наприклад, частотою та різноманітністю запитів.

Проте, безумовно, надійність даних в цілому залежить від якості вхідних даних.

Безпека. Безпека, як згадувалося раніше, не акцентована у цій роботі через відкритий характер ODP та даних всередині, проте коротко охарактеризуємо основні критерії:

- конфіденційність, яку слід враховувати лише на етапі попередньої обробки, оскільки будь-які особисті дані повинні бути виключені,
- цілісність повинна підтримуватись додатковими обмеженнями, застосовуваними до того, щоб обслуговуючий персонал не мав доступу до робочого процесу та потоку даних,
- доступність обговорювалась вище,
- підвітність стосується журналів та історичних знімків, описаних вище,
- достовірність можна гарантувати лише у випадку фізично обмеженого доступу до інфраструктури ODP.

Підсумок та аналіз

Пропонований ODP та його архітектура відрізняються від відомих раніше (наприклад, [6-11]). Описана Платформа слідує принципам архітектури мікросервісів для підвищення доступності та масштабованості, а також використовує ряд технологій (підсистеми OLAP, звітності та моніторингу) для підвищення продуктивності та надійності. Ця архітектура є новою для реалізації концепції відкритих даних для електронного урядування і публікується вперше.

Ми обговорили характеристики ODP запропонованої структури (архітектури). Ця дискусія не залежить від основних технологій впровадження та конкретних рішень – вона стосується концепції та властивостей системи.

Позитивний досвід розробки ODP, яку впроваджено, дає нам право зробити висновок про ефективність цієї архітектури.

Недоліком цієї архітектури є те, що вона складна та потенційно не дешева, поєднує широкий спектр технологій і прийомів (кешування, звітування, OLAP тощо) – але контролером над складністю виступає підсистема моніторингу. Окремі підсистеми можуть масштабуватися незалежно і бути стійкими до відмов (слід просто збільшити кількість ресурсів для них як для мікросервісів) – проте в цьому випадку впровадження та підтримка системи (в

першу чергу апаратні та "хмарні" ресурси) стануть ще дорожчими.

Експериментальна реалізація системи відкритих даних для уряду Йорданії підтверджує доцільність рішення та ефективність запропонованої архітектури. Дещо подібні архітектури можна побачити і в інфраструктурних проектах Facebook та Google, тому це підтримує запропонований метод і підходить до представленої архітектури.

Висновки

У роботі ми докладно дослідили запропоновану архітектуру платформи відкритих даних ODP як основу для відкритого доступу до даних для реалізації концепції електронного уряду. Проаналізовано її властивості, переваги та недоліки, показано, як можна досягти високих показників та як максимально використати інфраструктуру. Однак слід зазначити, що, звичайно, надійність даних (цінність ODP) в цілому залежить від якості вхідних даних.

Пропонована архітектура платформи відкритих даних має такі характеристики: доступність, продуктивність та надійність (відносна, стосовно вхідних даних) – та відповідає нефункціональним вимогам, описаним на початку дослідження.

Системи відкритих даних для уряду Йорданії була впроваджена з використанням запропонованої архітектури. Ця реалізація показала, що ODP є достатньо надійною, забезпечує високу доступність та продуктивність під час навантажувальних випробувань. Таким чином, можна зробити висновок, що запропонована архітектура для ODP є досить зрілою і її рекомендується використовувати в інших подібних системах та реалізаціях.

Запропонована архітектура є новою у описаній конфігурації. У цьому полягає новизна даної роботи. В результаті розробки системи за наведеною архітектурою вдалося розв'язати актуальну задачу для доступу до відкритих даних на прикладі державного проекту.

Список використаних джерел

1. *Alhawawsha M.* A comparison of the E-Government System Architecture in Jordan with the E-Government System of the United States / M. Alhawawsha // “Технологічний аудит та резерви виробництва”. – 2017. – No 2/2 (34). – С.18-24. DOI:10.15587/2312-8372.2017.100190
2. *Alhawawsha M.* Developing of the e-Government System based on Java for Online Voting, Scientific Journal / M. Alhawawsha // “Технологічний аудит та резерви виробництва”. – 2017. – No 3/2 (35). – С.9-13. DOI:10.15587/2312-8372.2017.104033
3. *Alhawawsha M.* E-Government Versus SMART Government: Jordan Versus The United States / M. Alhawawsha, A. Glybovets // Eureka journal. – 2017. – No 3. – С.3-11. DOI:10.21303/2504-5571.2017.00338
4. *Alhawawsha M.* E-Government Developed System Prototype about USA and Jordan / M. Alhawawsha, A. Glybovets // Геометричне моделювання та інформаційні технології. – 2017 (04). – N 1 (3). – С.42-26.
5. *Alhawawsha M.* Identification of the Issues in the E-Governance in Jordan and USA / M. Alhawawsha // Information Systems and Technologies. – 2017. – No 1/1(6). – С.37-40.
6. *Saleh Z.I.* A Framework for an E-government Based on Service-Oriented Architecture for Jordan / Z.I. Saleh, R.A. Obeidat, Y. Khamayseh // Information Journal of information engineering and electronic business. – 2013 (09). – Vol.5, No.3. – С.1-10. DOI:10.5815/ijieeb.2013.03.01
7. *Osho L.O.* Effective Networking Model for Efficient Implementation of E-Governance: A Case Study of Nigeria / L.O. Osho, M.B. Abdullahi, O. Osho, J.K. Alhassan // Information Journal of information engineering and electronic business. – 2015 (01). – Vol.7, No.1. – С.18-28. DOI:10.5815/ijieeb.2015.01.03

References

1. ALHAWAWSHA M. (2017): *A comparison of the E-Government System Architecture in Jordan with the E-Government System of the United States*, Scientific Journal “Technology Audit and Production Reserves”, No 2/2 (34), pp.18-24; DOI: 10.15587/2312-8372.2017.100190
2. ALHAWAWSHA M. (2017): *Developing of the e-Government System based on Java for Online Voting*, Scientific Journal “Technology Audit and Production Reserves”, No 3/2 (35), pp.9-13; DOI: 10.15587/2312-8372.2017.104033
3. ALHAWAWSHA M., GLYBOVETS A. (2017): *E-Government Versus SMART Government: Jordan Versus The United States*, Eureka journal, No3, pp.3-11; DOI:10.21303/2504-5571.2017.00338
4. ALHAWAWSHA M., GLYBOVETS A. (2017): *E-Government Developed System Prototype about USA and Jordan*, Geometry Modelling and Information Technologies, N1(3), 04/2017, pp.42-26
5. ALHAWAWSHA M.(2017): *Identification of the Issues in the E-Governance in Jordan and USA*, Information Systems and Technologies, No 1/1(6), pp.37-40
6. ZAKARIA I. SALEH, RAND A. OBEIDAT, YASER KHAMAYSEH (2013): *A Framework for an E-government Based on Service-Oriented Architecture for Jordan*, IJIEEB, MECS Press, Vol.5, No.3, Sep. 2013, pp.1-10; DOI: 10.5815/ijieeb.2013.03.01
7. LAURETTA O. OSHO, MUHAMMAD B. ABDULLAHI, OLUWAFEMI OSHO, JOHN K. ALHASSAN (2015): *Effective Networking Model for Efficient Implementation of E-Governance: A Case Study of Nigeria*, IJIEEB, MECS Press, Vol.7, No.1, pp.18-28; DOI: 10.5815/ijieeb.2015.01.03

8. *Balakumaran P.J.* Evolving An E-Governance System for Local Self-Government Institutions for Transparency and Accountability / P.J. Balakumaran, V. Ramamoorthy // *Information Journal of information engineering and electronic business.* – 2013 (12). – Vol.5, No.6. – C.40-46. DOI:10.5815/ijieeb.2013.06.05
9. *Olawale O.J.* Comparative Analysis of Personnel Distributions in the Local Government Service in Ekiti-State, Nigeria, for Service Delivery / O.J. Olawale, A.A. Justus // *International Journal of Mathematical Sciences and Computing.* – 2019 (04). – Vol.5, No.2. – C.44-53. DOI:10.5815/ijmsc.2019.02.04
10. *Mohammad H.* E-Government in Jordan / H. Mohammad, T. Almarabeh, A.A. Ali // *European Journal of Scientific Research.* – 2009. – Vol.35, No.2. – C.188-197.
11. *Majdalawi Y.Kh.* E-Government Strategy and Plans in Jordan / Y.Kh. Majdalawi, T. Almarabeh, H. Mohammad, W. Quteshate // *Journal of Software Engineering and Applications.* – 2015. - #8. – C.211-223. DOI:10.4236/jsea.2015.84022
12. *AlSukhayri A.M.* Leveraging the Saudi Linked Open Government Data: A Framework and Potential Benefits / A.M. AlSukhayri, M.A. Aslam, S. Arafat, N.R. Aljohani // *International Journal of Modern Education and Computer Science.* – 2019 (07). – Vol.11, No.7. – C.14-22. DOI:10.5815/ijmecs.2019.07.02
8. BALAKUMARAN P.J, VIGNESH RAMMAMORTHY. H (2013): *Evolving An E-Governance System for Local Self-Government Institutions for Transparency and Accountability*, IJIEEB, MECS Press, Vol.5, No.6, Dec. 2013, pp.40-46; DOI: 10.5815/ijieeb.2013.06.05
9. OLANIYAN JOSEPH OLAWALE, ADEMUYIWA A. JUSTUS (2019): *Comparative Analysis of Personnel Distributions in the Local Government Service in Ekiti-State, Nigeria, for Service Delivery*, IJMSC, MECS Press, Vol.5, No.2, pp.44-53; DOI: 10.5815/ijmsc.2019.02.04
10. HIBA MOHAMMAD, TAMARA ALMARABEH, AMER ABU ALI (2009): *E-Government in Jordan*, European Journal of Scientific Research, Vol.35, No.2, pp.188-197
11. YOUSEF KH. MAJDALAWI, TAMARA ALMARABEH, HIBA MOHAMMED, WALA QUTESHTE (2015): *E-Government Strategy and Plans in Jordan*, Journal of Software Engineering and Applications, 8, pp.211-223; DOI: 10.4236/jsea.2015.84022
12. AFNAN M. ALSUKHAYRI, MUHAMMED AHTISHAM ASLAM, SACHI ARAFAT, NAIF RADI ALJOHANI (2019): *Leveraging the Saudi Linked Open Government Data: A Framework and Potential Benefits*, IJMECS, MECS Press, Vol.11, No.7, pp.14-22; DOI: 10.5815/ijmecs.2019.07.02

Надійшла до редколегії 15.11.2018

УДК 004.4, 004.6

З.С.Х. Аль-Хіلالі¹, стажистка

Z.S.H. Al-Hilali¹, intern

Складання розкладу як складова системи управління школою

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, Україна, 01601, м.Київ,
вул. Володимирська, 64/13
e-mail: sufyanvpsh@gmail.com

Scheduling as a part of School Management System

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
64/13, Volodymyrska Street, Kyiv, Ukraine, 01601
e-mail: sufyanvpsh@gmail.com

Системи управління навчанням сьогодні дуже популярні. Вони мають багато функцій для підтримки навчального процесу, домашніх завдань, спілкування та відстеження прогресу у навчанні. Однак, їм не вистачає функціональних можливостей для управління персоналом, таких як планування (складання розкладу) та звітність. В даній статті ми пропонуємо рішення, яке розв'язує цю проблему та забезпечує планування занять у школі чи університеті, враховуючи вимоги, обмеження та побажання. До проблеми планування було застосовано інноваційний підхід. Запропоноване рішення засноване на відомих раніше техніках управління змінними працівниками. Перші позитивні відгуки з іракських шкіл, де було запроваджено дане рішення, дають підстави для наступного розвитку та вдосконалення системи.

У центрі уваги статті - модуль планування та складання розкладу розробленої системи, контекст задачі (сфера застосування) та аргументація того, чому це важливо.

Learning Management Systems are very popular nowadays. They have many functions to support the learning process, classes home assignments, communications, and progress tracking. However, it lacks the functionality for the management staff like scheduling (planning) and reporting. Here we propose the software solution, which solves this issue and provides the scheduling for the classes in a school or university, considering requirements, limitations, and wishes. An innovative approach was applied to the scheduling problem. This solution is based on the workforce management techniques known previously. The first positive feedbacks from Iraq schools, where we implemented this solution, support us for the next development and improvements of the system.

The focus of the paper is the scheduling module of the system developed, the context of the task (the scope), and arguing why it is important. The method from the area of workforce management systems was taken, adopted, and applied to the new task of school scheduling construction. This is the novelty of the presented work.

Статтю представила к.ф.-м.н., доц. Розора І.В.

Вступ

Планування є важливим і складним завданням у багатьох сферах. Створення графіків роботи для управління робочим часом працівників в організаціях є одним з ключових факторів стабільності для Контактних центрів та інших компаній, що мають організацію роботи на основі змін. [1-5].

Щодо шкіл та університетів, то графік занять є одним із важливих документів, який скерує навчальний процес. На вході маємо:

- «вимоги»: навантаження кожного викладача (або вчителя) – скільки годин, які заняття він / вона буде проводити на тиждень,

- «побажання»: у які дні та час працівники віддають перевагу для проведення занять (або які дні взагалі неможливі для них через інший вид зайнятості),

- "локації": аудиторії різного типу для кожного виду занять,

- "обмеження": які заняття можуть бути послідовними, які мають іти першими, наступними та останніми, ліміт лекцій на день, тощо.

Також у випадку розкладу школи чи університету слід розглянути додаткову важливу вимогу взаємозамінності (або, свого роду гнучкість у розумінні управління змінами розкладу). Ми маємо на увазі, що зміни (інший викладач або заняття, або для переносу заняття на інший день тижня чи інший час) повинні здійснюватись за запитом без додаткових накладних витрат для менеджера планування.

Отже, завдання полягає в тому, щоб скласти графік, який відповідає всім наведеним вимогам.

У той же час цю функціональність можна зрідка помітити в системах, спрямованих на підтримку процесу навчання / навчання [6-9]. Це завдання не є пріоритетним для LMS, яка є першочергово – Learning – системою управління вмістом – (L)CMS і призначена насамперед для управління змістом та структурою курсів. Ще одна причина такого уникнення – відносна складність завдання. Ця задача є досить складною без очевидних переваг для розробника.

Підходи до планування

Існує ряд підходів для побудови розкладу. Багато чого залежить від специфіки конкретної задачі. Так, планування процесорного часу відрізняється від WorkForce Management (WFM), тобто планування позмінного робочого графіку працівників. Зазвичай Марківські процеси, алгоритми "грубої сили" (повного перебору), оптимізовані алгоритми пошуку, генетичні алгоритми застосовуються для створення графіку [3-5]. Тут також можуть бути застосовані методи машинного навчання [3,4] та методи градієнтного спуску. Ми спробуємо покращити гнучкість графіка, впровадивши інноваційний метод у процес генерації.

Алгоритми повного перебору набули популярності через їх простоту, але вони вимагають багато обчислювального часу. При великих варіаціях входних даних (більше 100 співробітників, багато різних видів діяльності – занять у нашому випадку – і т.і.) процес може стати незастосовним в режимі реального часу.

Через цей факт з'являється багато оптимізацій та евристик, які допомагають знизити необхідну обчислювальну потужність та розглядати лише найкращі випадки завдяки набору заданих наперед евристик. Більш цього, було застосовано оптимізацію градієнтного спуску, аби ще більше спростити алгоритм повного перебору.

Мета полягає в тому, щоб скласти графік, який максимально відповідає вимогам та обмеженням, та в той же час буде досить гнучким для наступного управління змінами.

Звичайно, така гнучкість передбачає наявність додаткових ресурсів. Ми маємо на увазі, що ми повинні мати:

- додаткових вчителів, які можуть вести певний урок (скажімо, математика для учнів 5-го класу) для підтримки іншого вчителя, який повинен був провести заняття в цьому класі, але не зміг прийти з якоїсь причини,
- додаткові аудиторії, щоб спростити переміщення класу під час занять,

Зручний візуальний інструмент для підтримки такого роду змін та візуалізації наслідків змін також є необхідним.

Розроблене рішення для планування

Ми розпочали свою розробку на фундаменті системи WFM, яка, як виявилось, підходить за ідеями, закладеними у фундамент, хоча це не було очевидно наперед. Планування програми WFM вирішує завдання щодо присвоєння працівників (операторів контактних центрів) до змін, де графік змін формується з попереднього етапу планування ресурсів та прогнозування кількості персоналу на кожний конкретний часовий період тижня [3-5]. (Періоди часу зазвичай – це години, пів-години або чверть години.)

Отже, класичний вигляд складеного розкладу представлено на Рис. 1, де подано детальний ("розгорнутий") вигляд одного дня та огляд тижня в цілому.

Тижневий розклад для школи представлений на Рис. 2. Це подання досить відрізняється від Рис. 1, але якщо подивитись на ці розклади з точки зору викладача (вчителя), ми отримаємо майже таку ж картину. Більше того, як ми зауважували раніше, вимоги та підходи до складання розкладу дуже схожі.

(a)

(a)

(6)

(6)

Рис. 1. Користувачський інтерфейс рішень для управління робочим часом змін працівників.

Отже, ми розробили нове програмне забезпечення на принципах планування робочої сили. Для розробки MVP (мінімально життєздатного продукту) ми використовували оптимізований алгоритм повного перебору для складання розкладу, залишаючи глибоку оптимізацію пошуку для подальших розробок. Цей планувальник є частиною LMS (Системи управління навчанням), яка зараз розробляється та впроваджується в пробному режимі у двох школах Іраку. Наразі автори збирають відгуки для вдосконалення системи та переходять до розробки нових запланованих функцій.

Основними модулями розробленої системи є:

- планувальник,
- перегляд розкладу для різних ролей: викладач, щотижневий розклад занять, навантаження по аудиторії,
- підсистема управління змінами,
- API для інтеграції із зовнішньою LMS,
- API для обміну даними.

(B)

$$(\Gamma)$$

Рис 2. Приклади шкільного розкладу.

Перші відгуки від користувачів є позитивними, тому ми продовжуємо надалі розвивати розроблену систему.

Плани включають реалізацію більш складних підходів, аби оптимальніше скласти розклад (стосовно ресурсів, необхідних для виконання цього завдання). Ми хотіли б зробити це програмне забезпечення більш зручним та адаптивним для різних типів обмежень щодо розкладу. Також систему потрібно більше інтегрувати в навчальний процес, що передбачає розробку API для інтеграції з існуючими зовнішніми LMS та відкритий API для зовнішніх розробників, які будуть зацікавлені у розробці додаткових функціональних можливостей – модулів системи.

Висновки

У цій роботі ми описали проблему планування роботи викладачів (складання розкладу) у системі управління навчальним процесом (LMS) та запропонували наше програмне вирішення. Аргументовано також, що управління змінами також є важливою частиною системи.

Так, сьогодні дуже популярні системи управління навчанням (LMS), також відомі як системи електронного навчання (наприклад, Moodle та інші). Вони охоплюють багато функцій, що стосуються організації навчального процесу:

- відстеження успішності учнів протягом усього навчання (по всіх дисциплінах),
- систематизація комунікації з викладачами,
- підтримка наповнення навчальними матеріалами та завданнями,
- домашні завдання для учнів, їх автоматизована перевірка та рейтингові таблиці,
- інші функції.

Список використаних джерел

1. Панченко Т.В. Прогнозування навантаження та планування розкладу роботи операторів Контактного Центру / Т.В. Панченко, К.О. Черніченко, А.М. Капканець // Проблеми програмування. – Київ. – 2016. – №2-3. – С. 227-236.

Тим не менш, функція планування та складання розкладу занять у більшості випадків виходить за рамки цих систем, оскільки вони стосуються більше он-лайн (позакласного) навчання, а не класичного.

Ми розробили рішення планування (на основі алгоритму оптимізованого перебору на даний момент), яке допомагає керівництву створювати розклад відповідно до вхідних вимог, обмежень та побажань. Таким чином, до завдання планування шкільного або університетського розкладу застосовано новий підхід, який раніше застосовувався для планування розкладів роботи контактних центрів у системах WFM.

Зараз ця система використовується у двох іракських школах, і ми збираємо відгуки для наступного розвитку, оптимізації та інших удосконалень. Ця система базується на веб-технологіях і забезпечує авторизований доступ для користувачів лише відповідно до наданої ролі. Систему розроблено з використанням сучасних технологій Microsoft.Net та клієнта – браузера з JavaScript.

Попередні відгуки є досить позитивними і показують нам, що ця додаткова функціональність затребувана користувачами, що є дороговказом розвитку системи та підкреслює, що ми вирішуємо важливу задачу.

Основним академічним внеском цієї роботи є застосування методів планування WFM для вирішення задачі складання шкільного або університетського розкладу. Запропонований підхід є інноваційним для цього завдання, оскільки в літературі немає інших згадок про застосування таких методів.

References

1. CHERNICHENKO, K., KAPKANETS, A., PANCHENKO, T. (2016): *Contact center load forecasting and operator schedule planning*, "Problems of Programming", No. 2-3, pp. 227-236

2. Панченко Т.В. Прогнозування продажів методами інтелектуального аналізу даних / Т.В. Панченко, Т.І. Литвиненко, В.Д. Редько // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – Київ. – 2015. – №4. – С. 148-155.
3. Панченко І.В. Альтернатива до формули Erlang C / І.В. Панченко // Корпоративні системи. – Київ: КомІздат. – 2003. – №2. – С. 57-59.
4. Панченко І.В. Комп'ютерне моделювання задачі масового обслуговування / І.В. Панченко // Матеріали Міжнародної конференції: Інформаційні дослідження, додатки та навчання. – Варна: ФОІ-КОМЕРС. – 2003. – С. 55-61.
5. Панченко І.В. Оптимізація роботи Call-центра за допомогою автоматизованої комп'ютерної системи Scheduling ISS v.1 / І.В. Панченко, Т.В. Панченко // Тези міжнар. конференції "Теоретичні та прикладні аспекти розробки програмних систем". – 2004. – С. 272-274.
6. Аль-Хіلالі З.С.Х. Програмоване, дистанційне, мобільне... Яке навчання далі? / З.С.Х. Аль-Хіلالі // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – Київ. – 2015. – №4. – С. 75-81.
7. Аль-Хіلالі З.С.Х. Структура електронної навчаючої системи з курсу дискретної математики / З.С.Х. Аль-Хіلالі, В.П. Шевченко // Тези міжнар. конф. "Теоретичні та прикладні аспекти розробки програмних систем (TAAPSD'2016)". – Київ. – 2016. – С. 252-256.
8. Aggrwal A. An Efficient Approach for Resource Allocations using Hybrid Scheduling and Optimization in Distributed System / A. Aggrwal, R. Verma, A. Singh // "International Journal of Education and Management Engineering (IJEME)". – 2018. – Vol.8, No.3. – pp. 33-42
9. Nagar R. Time Effective Workflow Scheduling using Genetic Algorithm in Cloud Computing / R. Nagar, D.K. Gupta, R.M. Singh // "International Journal of Information Technology and Computer Science (IJITCS)". – 2018. – Vol.10, No.1. – pp. 68-75
2. LITVYNENKO, T.I., PANCHENKO, T.V., REDKO, V.D. (2015): *Sales Forecasting using Data Mining Methods*, "Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv; Series Physics & Mathematics", No. 4, pp.148-155
3. PANCHENKO, I. (2003): An Alternative to the Erlang C Formula, "Corporate Systems", (Kyiv), No.2, pp. 57-59.
4. PANCHENKO, I. (2003): *Computer Modelling of the Mass Service Task*, In Proc. Int. Conference "Informational research, applications and the study", Varna, FOI-COMERC, pp. 55-61
5. PANCHENKO, I., PANCHENKO, T. (2004) Optimization of Call-Center Using Automated Computer System Scheduling ISS v.1 [in Ukrainian]. In Proceedings of the International Conference "Theoretical and Applied Aspects of Program Systems Development". Kyiv. pp. 272-274
6. AL-HILALI, Z.S.H. (2015): *Programmed, distant, mobile learning... what's next?* "Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv; Series Physics & Mathematics", No. 4, pp. 75-81
7. AL-HILALI, Z.S.H., SHEVCHENKO, V.P. (2016): *The structure of e-Learning system for the discrete mathematics*. In Proc.: "Theoretical and Applied Aspects in Program System Development (TAAPSD'2016)", Kyiv, pp. 252-256
8. AGGRWAL, A., VERMA, R., SINGH, A. (2018): *An Efficient Approach for Resource Allocations using Hybrid Scheduling and Optimization in Distributed System*, "International Journal of Education and Management Engineering (IJEME)", Vol.8, No.3, pp. 33-42
9. NAGAR, R., GUPTA, D.K., SINGH, R.M. (2018): *Time Effective Workflow Scheduling using Genetic Algorithm in Cloud Computing*, "International Journal of Information Technology and Computer Science (IJITCS)", Vol.10, No.1, pp. 68-75

Надійшла до редколегії 30.10.2018

УДК 004.04, 004.8

Лосєва Є. А.¹, студ.

Огляд представлення слів у обробці природної мови

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, Україна, 01601, м.Київ,
вул. Володимирська, 64/13
e-mail: bettyloreley@gmail.com

Y.A. Losieva¹, stud.

Representation of Words in Natural Language Processing: A Survey

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
64/13, Volodymyrska Street, Kyiv, Ukraine, 01601
e-mail: bettyloreley@gmail.com

В роботі розглянуто декілька сучасних типів векторного представлення слів в природній обробці мови. Описано три основні типи векторного представлення слова, а саме: статичне векторне представлення слова, застосування глибоких нейронних мереж для представлення слів та динамічне представлення слова, що базується на контексті. Це дуже актуальна і дуже затребувана область досліджень в природній обробці мови, обчислювальній лінгвістиці та штучного інтелекту загалом. Запропоновано розглянути декілька різних моделей для векторного представлення слова (або будовування слова), від найпростішої (як подання тексту, що описує виникнення слів у документі та розуміння взаємозв'язку між парою слів), до базатошарової нейронної мережі та глибоких двонаправлених трансформаторів для розуміння мови. Опис моделей подано хронологічно відносно появи. Описано вдосконалення щодо попередніх моделей, як переваги, так і недоліки представлених моделей і в яких випадках або завданнях краще використовувати ту чи іншу модель.

Ключові слова: штучний інтелект, природна обробка мови, комп'ютерна лінгвістика, векторне представлення слів.

The article is devoted to research to the state-of-art vector representation of words in natural language processing. Three main types of vector representation of a word are described, namely: static word embeddings, use of deep neural networks for word representation and dynamic word embeddings based on the context of the text. This is a very actual and much-demanded area in natural language processing, computational linguistics and artificial intelligence at all. Proposed to consider several different models for vector representation of the word (or word embeddings), from the simplest (as a representation of text that describes the occurrence of words within a document or learning the relationship between a pair of words) to the multilayered neural networks and deep bidirectional transformers for language understanding, are described chronologically in relation to the appearance of models. Improvements regarding previous models are described, both the advantages and disadvantages of the presented models and in which cases or tasks it is better to use one or another model.

Key Words: artificial intelligence, natural language processing, computational linguistics, word embeddings.

Статтю представила к.ф.-м.н., доц. Розора І. В.

Introduction

Representation of a word is one of the fundamental tasks of natural language processing. On how much efficiently we present a vector representation of a word depends how effectively the neural model we constructed will work.

There are many different approaches, both in complexity and effectiveness for the vector representation of a word. Perhaps one of the simplest

and most well-known approaches is one-hot encoding and bag-of-words model. But unfortunately how simple they are, how much they are not effective to use for neural models.

Now very often used approaches distributed word or sentence representation. Some of them we will consider in this article. We will not describe the neural representations of words, because these were already compared by Milajevs [1].

The purpose of this article is to provide a more complete picture of the vector representation of a word from the simplest models to state-of-art.

Static Word Embeddings

Some systems and methods of natural language processing (NLP) consider words as atomic units — there is no concept of similarity between words because they are presented as they are presented in the form of a dictionary with indices. There are several good reasons for this choice — simplicity, reliability, and the observation that simple models trained on huge amounts of data outperform complex systems trained on fewer data.

However, simple methods have their limits in many tasks.

The vector of the word «Queen» almost coincides with the vector obtained as a result of the following calculation of the vectors of the word: $vector («King») - vector («Man») + vector («Woman»)$. Those. the word «King» refers to the word «Queen» in the same way that the word «Man» refers to the word «Woman» (Figure 1).

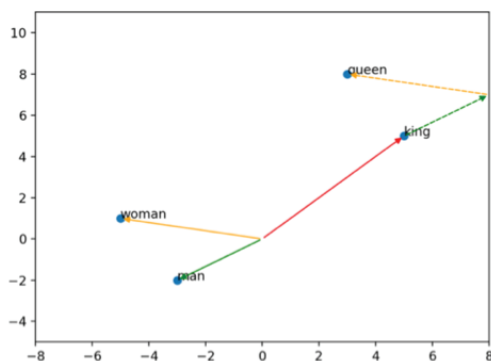


Figure 1. Word vector calculation

Bag-of-words model. A bag-of-words, or BoW for short, is a representation of text that describes the occurrence of words within a document. It involves two things:

- A vocabulary of known words.
- A measure of the presence of the known words

Bag of words models encode every word in the vocabulary as one-hot-encoded vector i.e. for the vocabulary of size $|V|$, each word is represented by a $|V|$ dimensional sparse vector with 1 at the index corresponding to the word and 0 at every other index.

As vocabulary may potentially run into millions, a bag of word models faces scalability challenges.

Bag of word models does not respect the semantics of the word. For example, the words «Car» and «Automobile» are often used in the same context. However, the vectors corresponding to these words are orthogonal in the bag of words model. The problem becomes more serious while modelling sentences. For example, «Buy used cars» and «Purchase old automobiles» are represented by orthogonal vectors in the bag-of-words model.

While modelling phrases using bag-of-words the order of words in the phrase is not respected. For example, «This is good» and «Is this good?» have exactly the same vector representation.

Continuous bag of words (CBOW). Continuous bag of words model was described by Mikolov [2]. The architecture of this model is meant for learning the relationship between a pair of words. The architecture of this model attempts to predict the current target word (centre word) based on the words in the original context (surrounding words) (Figure 2).

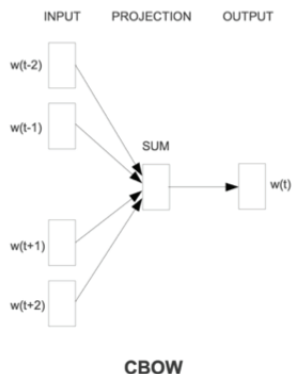


Figure 2. The CBOW architecture predicts the current word based on the context

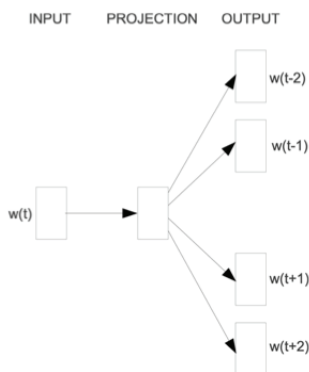
The approach is to treat {«The», «cat», «over», «the», «puddle»} as a context and from these words, be able to predict or generate the centre word «jumped».

But this model has its drawbacks:

- Continuous bag of words takes the average value of the context of the word (when calculating latent activation). For example, «Applet» can be either a fruit or a company, but CBOW takes an average from both contexts and places it between the cluster for fruits and companies.

- Continuous bag of words training from scratch can last forever if it is not properly optimised.

Skip-gram Model. The architecture of Skip-gram model is somewhat similar to continuous bag of words. It just flips CBOW architecture upside down. The purpose of a Skip-gram is to predict the context of a given word (Figure 3). It is an effective method for studying high-quality vector representations of words from a large amount of unstructured text data [3].



Skip-gram

Figure 3. The Skip-gram predicts surrounding words given the current word

Each current word is used as input for a logarithmic classifier with a continuous projection layer and predicts words in a certain range (before and after the current word). Increasing the range improves the quality of the resulting word vectors, but also increases the complexity of the calculations. More distant words are usually less associated with the current word than those that are close to it, so they give less weight to distant words, selecting fewer examples of these words from case studies.

This model has several significant advantages:

- Skip-gram model can capture two semantics for a single word. i.e it will have two vector representations of Apple. One for the company and other for the fruit.
- Skip-gram with negative sub-sampling outperforms every other method generally.

Word2Vec. The combination of the two previously described models, namely the continuous bag of words and Skip-gram, is a model developed by Google under the name Word2Vec.

The Word2Vec is a two-layer neural network with an input layer, one linear hidden layer called a projection layer, and a softmax output layer. Its input is a text corpus and its output is a set of vectors: feature vectors for words in that corpus. The input and output layers are dictionary sizes. The size of the projection layer directly depends on the dimension of the created word vectors.

The purpose and usefulness of Word2vec is to group the vectors of similar words together in vectorspace. That is, it detects similarities mathematically. Word2vec creates vectors that are distributed numerical representations of word features, features such as the context of individual words.

Word2vec is similar to an autoencoder, encoding each word in a vector, but rather than training against the input words through reconstruction, as a restricted Boltzmann machine does, word2vec trains words against other words that neighbour them in the input corpus.

FastText. The core of FastText relies on the Continuous Bag of Words (CBOW) model for word representation and a hierarchical classifier to speed up training. FastText replaces the objective of predicting a word with predicting a category [4]. These single-layer models train incredibly fast and can scale very well. Also, FastText replaces the softmax over labels with a hierarchical softmax. Here each node represents a label. This reduces computation as we don't need to compute all labels probabilities. The limited number of parameters reduces training time.

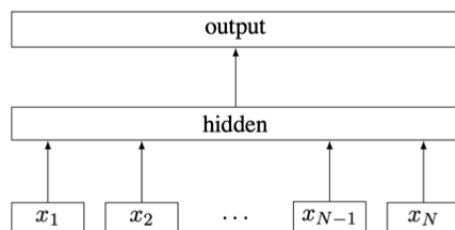


Figure 4. Model architecture of FastText for a sentence with N ngram features $x_1, \dots, x_N$.

In contrast to word embedding technologies that are taking words as an atomic unit, FastText takes the morphology of words into account, i. e. each word consists of multiple characters and the combination of characters. In Word2Vec, for example, each word has its own distinct vector. FastText, however, represents a word by its id within a vocabulary and its n-grams of characters (Figure 4). Using n-grams of size 3

would result in a representation of the word «apple» as follows, «<ap>, «app», «ppl», «ple», «le>» [5].

This approach outperformed both Word2Vec variants Skip-gram and CBOW in all word similarity datasets except for the English one. The languages with a lot of grammatical cases, like German or Russian, benefit from this method.

GloVe: Global Vectors for Word Representation. Many methods for generating word embeddings vectors are based on statistics on the contextual words surrounding them and are trained on them separately. The way it predicts surrounding words is by maximizing the probability of a context word occurring given a centre word by performing a dynamic logistic regression.

The creators of GloVe [6] illustrate that the ratio of the co-occurrence probabilities of two words (rather than their co-occurrence probabilities themselves) is what contains information and so look to encode this information as vector differences (Figure 5).

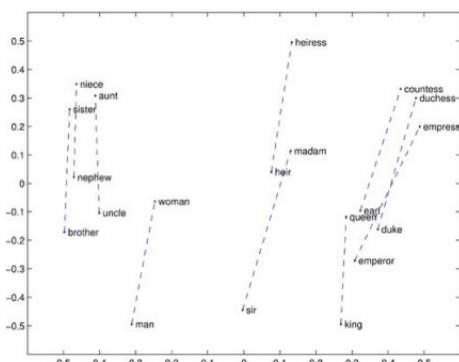


Figure 5. Linear substructures of the word in vector space

The similarity metrics used for nearest neighbour evaluations produce a single scalar that quantifies the relatedness of two words. This simplicity can be problematic since two given words almost always exhibit more intricate relationships than can be captured by a single number. For example, a man may be regarded as similar to a woman in that both words describe human beings; on the other hand, the two words are often considered opposites since they highlight a primary axis along which humans differ from one another.

In order to capture in a quantitative way the nuance necessary to distinguish man from woman, it is necessary for a model to associate more than a single number to the word pair. A natural and simple

candidate for an enlarged set of discriminative numbers is the vector difference between the two-word vectors. The GloVe is designed in order that such vector differences capture as much as possible the meaning specified by the juxtaposition of two words. The model utilizes the main benefit of count data — the ability to capture global statistics — while simultaneously capturing the meaningful linear substructures prevalent in recent log-bilinear prediction-based methods like Word2Vec. In the case of GloVe, the counts matrix is preprocessed by normalizing the counts and log-smoothing them. Compared to Word2Vec, GloVe allows for parallel implementation, which means that it's easier to train over more data. This method surpasses the results of other methods, such as CBOW, Skip-Gram in tasks such as word analogies, word similarity and recognition of named entities.

But like all existing models, this method is not perfect and has its drawbacks:

- This model uses a lot of memory: the fastest way to construct a term-cooccurrence matrix is to keep it in RAM as a hash map and perform cooccurrence increments in a global manner
- Sometimes quite sensitive to the initial learning rate

Deep Neural Networks for Word Representations

Deep Neural Networks (DNNs) are powerful models that have achieved excellent performance on difficult learning tasks. DNNs work well whenever large labelled training sets are available. DNNs are powerful because they can perform arbitrary parallel computation for a modest number of steps. So, while neural networks are related to conventional statistical models, they learn an intricate computation.

Despite their flexibility and power, DNNs can only be applied to problems whose inputs and targets can be sensibly encoded with vectors of fixed dimensionality. It is a significant limitation since many important problems are best expressed with sequences whose lengths are not known a-priori.

Sequence-to-Sequence (seq2seq). Sequence-to-Sequence is a general end-to-end approach to sequence learning that makes minimal assumptions on the sequence structure. This method uses a multilayered Long Short-Term Memory (LSTM) to map the input sequence to a vector of fixed dimensionality, and then another deep LSTM to decode the target sequence from the vector [7].

The model consists of 3 parts: encoder, intermediate (encoder) vector and decoder (Figure 6).

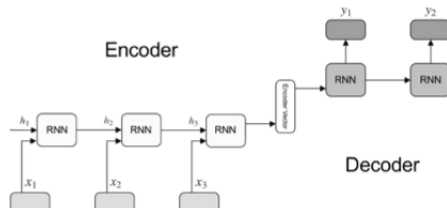


Figure 6. Encoder-Decoder Sequence-to-Sequence model

The encoder is a stack of several recurrent units (LSTM or GRU cells for better performance) where each accepts a single element of the input sequence, collects information for that element and propagates it forward.

Encoder vector is the final hidden state produced from the encoder part of the model. This vector aims to encapsulate the information for all input elements in order to help the decoder make accurate predictions. It acts as the initial hidden state of the decoder part of the model.

The decoder is a stack of several recurrent units where each predicts an output at a time step. Each recurrent unit accepts a hidden state from the previous unit and produces an output as well as its own hidden state. The previous hidden state is used to compute the next one.

The power of this model lies in the fact that it can map sequences of different lengths to each other. The inputs and outputs are not correlated and their lengths can differ.

A sequence to sequence model lies behind numerous systems. For instance, seq2seq model used in tasks like machine translation [8] (Figure 7), speech recognition [9], video captioning [10], etc.

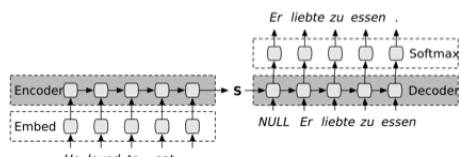


Figure 7. Sequence-to-Sequence model for machine translation

Contextualized (Dynamic) Word Embeddings

There are two existing strategies for applying pre-trained language representations to downstream tasks: feature-based and fine-tuning. The feature-

based approach, such as ELMo [11], uses task-specific architectures that include the pre-trained representations as additional features. The fine-tuning approach, such as the Generative Pre-trained Transformer introduces minimal task-specific parameters, and is trained on the downstream tasks by simply fine-tuning all pre-trained parameters.

BERT: Pre-training of Deep Bidirectional Transformers for Language Understanding.

Unlike previous language representation models, BERT is designed to pre-train deep bidirectional representations from the unlabeled text by jointly conditioning on both left and right context in all layers. As a result, the pre-trained BERT model can be fine-tuned with just one additional output layer to create state-of-the-art models for a wide range of tasks, such as question answering and language inference, without substantial task-specific architecture modifications [12].

There are two steps in this framework: pre-training and fine-tuning. During pre-training, the model is trained on unlabeled data over different pre-training tasks. The training is done by masking a few words (~15% of the words) in a sentence and tasking the model to predict the masked words. For fine-tuning, the BERT model is first initialized with the pre-trained parameters, and all of the parameters are fine-tuned using labelled data from the downstream tasks.

BERT's model architecture is a multi-layer bidirectional Transformer encoder.

To make BERT handle a variety of downstream tasks, input representation is able to unambiguously represent both a single sentence and a pair of sentences (e.g., (Question, Answer)) in one token sequence. A "sequence" refers to the input token sequence to BERT, which may be a single sentence or two sentences packed together. For a given token, its input representation is constructed by summing the corresponding token, segment, and position embeddings (Figure 8).



Figure 8. BERT input representation

Deep bidirectional architectures, allowing the same pre-trained model to successfully tackle a broad set of NLP.

Conclusions

This article represents three types of word embedding: static word embeddings, deep neural networks for word representations and contextualized (dynamic) word embeddings.

Static Word Embeddings fail to capture polysemy. They generate the same embedding for the same word in different contexts. Static Word Embeddings could only leverage off the vector outputs from unsupervised models for downstream tasks — not the unsupervised models themselves. They were mostly shallow models to begin with and were often discarded after training (e.g. word2vec, Glove).

The state-of-art results at the moment showed by contextualized (dynamic) word embeddings. Contextualized words embeddings aim at capturing word semantics in different contexts to address the issue of polysemous and the context-dependent nature of words. The output of Contextualized (Dynamic) Word Embedding training is the trained model and vectors — not just vectors.

Traditional word vectors are shallow representations (a single layer of weights, known as embeddings). They only incorporate previous knowledge in the first layer of the model. The rest of the network still needs to be trained from scratch for a new target task. They fail to capture higher-level information that might be even more useful. Word embeddings are useful in only capturing semantic meanings of words but we also need to understand higher-level concepts like anaphora, long-term dependencies, agreement, negation, and many more.

Список використаних джерел

1. D.Milajevs Evaluating Neural Word Representations in Tensor-Based Compositional Settings / D.Milajevs, D. Kartsaklis, M. Sadrzadeh, M. Purver. // Proceedings of the 2014 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing (EMNLP). – 2014. – C. p. 708–719.
2. T.Mikolov Efficient Estimation of Word Representations in Vector Space / T.Mikolov, K. Chen, G. Corrado, J. Dean. – 2013.
3. T.Mikolov Distributed Representations of Words and Phrases and their Compositionality / [T. Mikolov, I. Sutskever, K. Chen та ін.]. – 2013.
4. A.Joulin Bag of Tricks for Efficient Text Classification / A.Joulin, E. Grave, P. Bojanowski, T. Mikolov. – 2016.
5. P.Bojanowski Enriching Word Vectors with Subword Information / P.Bojanowski, E. Grave, A. Joulin, T. Mikolov. – 2017.
6. J.Pennington GloVe: Global Vectors for Word Representation / J. Pennington, R. Socher, C. Manning. // Association for Computational Linguistics. – 2014. – C. 1532–1543.

7. I.Sutskever Sequence to Sequence Learning with Neural Networks / I. Sutskever, O. Vinyals, Q. Le. – 2014.
8. O.Vinyals Order Matters: Sequence to sequence for sets / O. Vinyals, S. Bengio, M. Kudlur. // ICLR 2016. – 2016.
9. R.Prabhavalkar A Comparison of Sequence-to-Sequence Models for Speech Recognition / [R. Prabhavalkar, K. Rao, T. Sainath та ін.]. // ISCA. – 2017. – C. 939–943..
10. S.Venugopalan Sequence to Sequence – Video to Text / [S. Venugopalan, M. Rohrbach, J. Donahue та ін.]. // Computer Vision Foundation. – 2015. – C. 4534–4542.
11. M.Peters Deep contextualized word representations / [M. Peters, M. Neumann, M. Iyyer та ін.]. – 2018.
12. J.Devlin BERT: Pre-training of Deep Bidirectional Transformers for Language Understanding / J.Devlin, M. Chang, K. Lee, K. Toutanova. – 2019.

References

1. MILAJEVS D., KARTSAKLIS D., SADRZADEH M., PURVER M. (2014) *Evaluating Neural Word Representations in Tensor-Based Compositional Settings*, Proceedings of the 2014 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing (EMNLP), pp. 708–719.
2. MIKOLOV T., CHEN K., CORRADO G., DEAN J. (2013) *Efficient Estimation of Word Representations in Vector Space*.
3. MIKOLOV T., SUTSKEVER I., CHEN K. (2013) *Distributed Representations of Words and Phrases and their Compositionality*.
4. JOULIN A., GRAVE E., BOJANOWSKI P., MIKOLOV T. (2016) *Bag of Tricks for Efficient Text Classification*.
5. BOJANOWSKI P., GRAVE E., JOULIN A., MIKOLOV T. (2017) *Enriching Word Vectors with Subword Information*.
6. PENNINGTON J., SOCHER R., MANNING C. (2014) *GloVe: Global Vectors for Word Representation*, Association for Computational Linguistics, pp. 1532–1543.
7. SUTSKEVER I., VINYALS O., LE Q. (2014) *Sequence to Sequence Learning with Neural Networks*.
8. VINIALS O., BENGIO S., KUDLUR M. (2016) *Order Matters: Sequence to sequence for sets*, ICLR 2016.
9. PRABHAVALKAR R., et al. (2017) *A Comparison of Sequence-to-Sequence Models for Speech Recognition*, ISCA, pp. 939–943.
10. VENUGOPALAN S. et al. (2015) *Sequence to Sequence – Video to Text*, Computer Vision Foundation, pp. 4534–4542.
11. PETERS M. et al. (2018) *Deep contextualized word representations*.
12. DEVLIN J., CHANG M., LEE K., TOUTANOVA K. (2019) *BERT: Pre-training of Deep Bidirectional Transformers for Language Understanding*.

Надійшла до редколегії 20.12.2018

УДК 532.595+612.13

Соловійова О.М.¹, викладач,
Кізілова Н.М.², д. ф.-м. н., проф.

**Модель руху крові по артеріальному
руслу з урахуванням біоактивності
стінки судин.**

¹Харківський національний політехнічний
університет (ХПІ), Харків, Україна,
e-mail: helenfilippova@yahoo.co.uk
²Харківський національний університет
ім. В.Н. Каразіна,
61022, м. Харків, пл. Свободи, 4,
e-mail: kizilova@univer.kharkov.ua

O. M. Solovjova¹, lecturer,
N. M. Kizilova², Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

**Model of blood flow along the arterial bed,
taking into account the bioactivity of the
vessel wall.**

¹Kharkiv National Polytechnical University
(«KhPI»), 61002, Kharkov, Kirpichova st., 2,
e-mail: helenfilippova@yahoo.co.uk
²V.N. Karazin Kharkov National University,
61022, Kharkov, Svobody sq., 4,
e-mail: kizilova@univer.kharkov.ua

В роботі запропонована модифікація двовимірної моделі руху в'язкою нестисливою рідини уздовж деформованої товстостінної трубки із нестисливого в'язкопружного біоактивного матеріалу у зв'язку з моделюванням руху крові по артеріальному руслу. Рух в'язкої нестисливої рідини описується системою рівнянь, що складається з рівнянь Нав'є-Стокса і рівняння нерозривності. Поведінка матеріалу стінки трубки описується 5-елементною реологічною моделлю з одним активним елементом. Розв'язок зв'язаної задачі розширюється при заданні граничних умов на поверхні поділу двох середовищ, причому зовнішня поверхня трубки вважається закріпленою. На кінці трубки задається нульвимірна модель Франка з урахуванням саморегуляції, що моделює мікроциркуляторне русло. Отримані дисперсійне співвідношення для швидкості розповсюдження хвиль $c(\omega)$ для випадку активних властивостей трубки, амплітуди швидкостей рідини, переміщень стінки та тисків рідини і трубки. Проведено чисельне моделювання для параметрів моделі, які відповідають здоровій та патологічній стінці артерій.

Ключові слова: модель артеріального русла, пульсові хвилі, дисперсія хвиль, активний матеріал.

The modification of a two-dimensional model of incompressible viscous fluid motion along a deformed thick-walled tube from viscoelastic bioactive material is proposed in connection to the modeling of blood flow along the arterial bed is proposed. The motion of a viscous incompressible fluid is described by a system of equations including the Navier-Stokes equations and the continuity equation. The behavior of the tube wall material is described by a 5-element rheological model with one active element. The solution of the problem is solved setting boundary conditions on the interface of the two media, the outer surface of the tube is considered as non-moving. At the end of the tube, a zero-dimensional Frank model with regulation is considered, as a model of the microcirculatory bed. The dispersion equation for the propagation of wave velocity is obtained for the case of active properties of tube, the amplitudes of fluid velocities, wall displacements, and fluid and tube pressures. Numerical computations have been carried out for the model parameters corresponded to the normal and pathological arterial wall.

Key Words: the model of arterial bed, pulse waves, wave dispersion, active material.

Роботу представив доц. Розора І.В.

1. Вступ

Для постановки правильного діагнозу крім зображення геометрії артеріального русла (АР) необхідне обчислення ряду діагностичних індексів, що дають кількісну оцінку ступеню порушень гемодинаміки [1]. До таких індексів

відносяться, наприклад, параметри кривих тиску і швидкості кровотоку, коефіцієнт відбиття, швидкість розповсюдження пульсових хвиль c [2], напруження зсуву на стінці судини $\tau_w(t)$ [3], осциляції діаметру судини $d(t)$ [3], фракційний резерв кровотоку (FFR) [4] та інші. Дані

діагностичні індекси отримують інвазивними способами, наприклад, за допомогою ангиографії. Однак інвазивне вимірювання має істотні недоліки: травматичність процедури і висока вартість. Тому вигідніше використовувати чисельні методи і математичні моделі для розрахунку даних діагностичних індексів [5].

У літературі розрахунки діагностичних індексів проводять за допомогою тривимірних (3D) або одновимірних (1D) моделей руху крові по АР за даними геометрії артеріальної системи, отриманої за допомогою комп'ютерної або магнітно-резонансної томографії. Ці моделі ресурсоемності, не враховують в'язкопружні та активні властивості стінок судин.

Тому актуальною є задача побудова моделі, що враховує ці недоліки. В роботі удосконалена двовимірна (2D) модель руху крові по АР. Дана модель дозволяє істотно скоротити час розрахунків, при цьому є можливість врахувати складну реологію стінки судин.

2. Огляд результатів. Рух в'язкої нестисливої рідини описується, як відомо, системою рівнянь, що складається з рівнянь Нав'є-Стокса і рівняння нерозривності [6,7]:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v}, \quad \text{div} \vec{v} = 0 \quad (1)$$

де $\vec{v} = (v_r, 0, v_x)$ - вектор швидкості руху рідини, ρ, μ, p - щільність, динамічна в'язкість, гідростатичний тиск рідини.

Залежно від функціонального типу судини використовують математичні моделі відповідної розмірності, а саме 3D моделі зазвичай використовують при моделюванні великих судин [8], 1D або 2D - для середніх і малих артерій [9,10], 0D - для моделювання кровотоку по мікроциркуляторному руслу.

Важливою характеристикою руху крові по АР є його пульсуюча природа [11]. Тому при моделюванні руху крові потрібно застосовувати відповідні фізичні закони. У разі двовимірного руху (2D модель) в'язкої нестисливої ньютонівської рідини по циліндричній трубці нелінійна система рівнянь Нав'є-Стокса (1) записується в циліндричних координатах та може бути лінеаризована. Перевага 2D моделі в тому, що вона враховує дисперсію за рахунок в'язкості рідини і в'язкопружності стінки трубки.

3. Постановка та розв'язок задачі

При моделюванні руху крові по АР розглядається задача гідродинаміки руху в'язкої нестисливої ньютонівської рідини по

деформованій товстостінній циліндричній трубці з в'язкопружного біоактивного матеріалу, на кінці якої задана система трубок, що представляє собою термінальне русло (рис.1). Обчислення швидкостей рідини, переміщень стінки трубки, тисків у рідині і стінці трубки вимагає рішення системи рівнянь гідродинаміки, які представляють собою рівняння нерозривності і імпульсів для рідини (1) і стінки трубки:

$$\text{div} \vec{u} = 0, \quad \rho_s \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \text{div} \Sigma. \quad (2)$$

Де $\vec{u} = (u_r, 0, u_x)$ - вектор переміщень стінки трубки, ρ_s , $\Sigma = -p_w \delta + \sigma$ - щільність і тензор напружень матеріалу стінки трубки відповідно.

Стінка судин проявляє одночасно і в'язкі, і пружні властивості (в'язкопружні), що математично моделюється у вигляді залежності $\sigma = \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$. Реологічні властивості матеріалів найчастіше описуються багатоелементними моделями. Біологічні матеріали, до яких відноситься стінка судин, характеризуються також біоактивними властивостями. Для урахування активної поведінки стінки трубки запропоновано використовувати 5-елементну дискретну реологічну модель біоактивного матеріалу, процедура отримання якої і адекватність застосування описані в роботі [12]. Реологічне співвідношення для біоактивного в'язкопружного матеріалу має вигляд:

$$\begin{aligned} \mu k_2 \ddot{\sigma} + ((k_2 + \mu)E_3 + (E_2 + k_1)\mu)\dot{\sigma} + \\ E_3(k_1 + E_2)\sigma = E_1 E_3(E_2 + k_1)\varepsilon + (E_1 E_3(k_2 + \mu) + \\ + (E_2 + k_1)(E_1 + E_3)\mu)\dot{\varepsilon} + \mu(E_1 + E_3)k_2 \ddot{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (3)$$

де E_1, E_2, E_3 - пружні елементи, μ - в'язкий елемент, $f = k_1 \varepsilon_2 + k_2 \dot{\varepsilon}_2$ - біоактивний елемент, який створює миттєве напруження, ε_2 - деформація, $k_{1,2}$ - постійні, які відіграють роль керуючих параметрів.

Підставивши (3) в (2) отримаємо рівняння для стінки трубки в переміщеннях з урахуванням активної і в'язкопружної поведінки:

$$\begin{aligned} \rho_w \left(J_1 \frac{\partial^4 u_r}{\partial t^4} + J_2 \frac{\partial^3 u_r}{\partial t^3} + J_3 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \right) + J_1 \frac{\partial^3 p_w}{\partial r \partial t^2} + \\ J_2 \frac{\partial^2 p_w}{\partial r \partial t} + J_3 \frac{\partial p_w}{\partial r} = L_3 \Delta u_r + L_2 \frac{\partial}{\partial t} \Delta u_r + L_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta u_r, \end{aligned}$$

$$\rho_w \left(J_1 \frac{\partial^4 u_x}{\partial t^4} + J_2 \frac{\partial^3 u_x}{\partial t^3} + J_3 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \right) + J_1 \frac{\partial^3 p_w}{\partial x \partial t^2} + J_2 \frac{\partial^2 p_w}{\partial x \partial t} + J_3 \frac{\partial p_w}{\partial x} = L_3 \Delta u_x + L_2 \frac{\partial}{\partial t} \Delta u_x + L_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta u_x \quad (4)$$

де $J_1 = \mu k_2$, $J_2 = (k_2 + \mu)E_3 + (E_2 + k_1)\mu$,

$J_3 = E_3(k_1 + E_2)$, $L_1 = \mu(E_1 + E_3)k_2$,

$L_2 = E_1 E_3(k_2 + \mu) + (E_2 + k_1)(E_1 + E_3)\mu$,

$L_3 = E_1 E_3(E_2 + k_1)$, $\Delta u_x = \frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}$,

$$\Delta u_r = \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Задача (1), (2), (4) зв'язані за допомогою граничних умов на поверхні поділу:

а) умова осової симетрії профілю швидкості для рідини:

$$v_r = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial r} = 0; \quad (5)$$

б) неперервність швидкостей і напружень на границі поділу рідина-стінка:

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}; \quad P_n = \Sigma_n, \quad P_\tau = \Sigma_\tau; \quad (6)$$

г) умова закріплення зовнішньої поверхні трубки:

$$u_{r,x} = 0; \quad (7)$$

д) на вході в трубку задано тиск, наприклад у вигляді розкладання Фур'є:

$$x = 0: \quad p = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \exp(i\omega n t); \quad (8)$$

е) на вихідному кінці трубки задається умова неперервності тиску і витрати:

$$x = L: \quad \langle p \rangle = Q \cdot Z_t, \quad (9)$$

де $\langle p \rangle = \frac{2}{R_1^2} \int_0^{R_1} r p(t, r, x) dr$ - середній по перерізу

тиск, $Q(t, x) = 2\pi \int_0^{R_1} r v_x(t, r, x) dr$ - об'ємна витрата,

Z_t - опір системи трубок, який визначається, як відношення витрати на вході в систему трубок і амплітуд тиску, та обчислюється через коефіцієнт відбиття хвилі $\Gamma = p_b/p_f$, p_b , p_f - амплітуди відбитої та падаючої хвилі. Для розрахунку Γ мікроциркуляторного русла (рис.1) була використана 0D модель Франка з урахуванням саморегуляції запропонована в роботі [13].

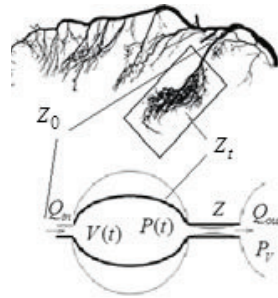


Рис. 1. Термінальний елемент АР та його модель як єдиної пружної камери, Z_0 , Z_t - опір основної трубки, та мікроциркуляторного русла.

Розв'язок задачі (1), (2), (4), (5) - (9) було знайдено за допомогою метода розкладання в ряд Фур'є. Невідомі константи шукалися у вигляді нормальної моди:

$$\varphi(t, r, x) = \varphi^*(r) \exp(i(\omega n t - \gamma_n x)), \quad \text{де}$$

$\varphi = \{u_r, u_x, v_r, v_x, p, p_w\}$, n - номер гармоніки, $\gamma_n = \omega_n/c_n$, c_n - комплексна швидкість розповсюдження хвиль, ω_n - кругова частота.

В результаті рішення задачі отримані розкладання для шуканих величин $u_r, u_x, v_r, v_x, p, p_w$ через функції Бесселя. З урахуванням граничних умов (5) - (9) отримано дисперсійне співвідношення для швидкості розповсюдження хвиль $c(\omega)$ для випадку активних властивостей трубки:

$$\det |A_{ik}| = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \quad (10)$$

де $A_{11} = i\gamma_n J_0(i\gamma_n a)$, $A_{12} = i\alpha_n J_0(i\alpha_n a)$,

$$A_{13} = \frac{\gamma_n}{\rho_w \omega n} J_0(i\gamma_n a), \quad A_{14} = \frac{\gamma_n}{\rho_w \omega n} Y_0(i\gamma_n a),$$

$$A_{15} = i\omega n J_0(k_n a), \quad A_{16} = i\omega n Y_0(k_n a);$$

$$A_{21} = i\gamma_n J_1(i\gamma_n a), \quad A_{22} = i\gamma_n J_1(i\alpha_n a),$$

$$A_{23} = \frac{\gamma_n}{\rho_w \omega n} J_1(i\gamma_n a), \quad A_{24} = \frac{\gamma_n}{\rho_w \omega n} Y_1(i\gamma_n a),$$

$$A_{25} = \frac{-\gamma_n \omega n}{k_n} J_1(k_n a), \quad A_{26} = \frac{-\gamma_n \omega n}{k_n} Y_1(k_n a);$$

$$A_{31} = (i\rho \omega n + 2\gamma_n^2 \mu) J_0(i\gamma_n a) + \frac{2i\gamma_n \mu}{a} J_1(i\gamma_n a),$$

$$A_{32} = 2a\mu \alpha_n J_0(i\alpha_n a) + \frac{i\gamma_n}{a} J_1(i\alpha_n a),$$

$$A_{33} = (1 - 2G\gamma_n^2) J_0(i\gamma_n a) - \frac{2iG\gamma_n J_1(i\gamma_n a)}{a\rho_w \omega^2 n^2},$$

$$\begin{aligned}
 A_{34} &= (1 - 2G\gamma_n^2)Y_0(i\gamma_n a) - \frac{2iG\gamma_n Y_1(i\gamma_n a)}{a\rho_w \omega^2 n^2}, \\
 A_{35} &= -2iGJ_0(k_n a) - \frac{\gamma_n J_1(k_n a)}{ak_n}, \\
 A_{36} &= -2iGY_0(k_n a) - \frac{\gamma_n Y_1(k_n a)}{ak_n}; \\
 A_{41} &= -2\mu\gamma_n^2 J_1(i\gamma_n a), \\
 A_{42} &= -\mu(\gamma_n^2 + \alpha_n^2)J_1(i\gamma_n a), \\
 A_{43} &= \frac{2G\gamma_n^2}{\rho_w \omega^2 n^2} J_1(i\gamma_n a), A_{44} = \frac{2G\gamma_n^2}{\rho_w \omega^2 n^2} Y_1(i\gamma_n a), \\
 A_{45} &= -\frac{G(\gamma_n^2 - k_n^2)}{k_n} J_1(k_n a), \\
 A_{46} &= -\frac{G(\gamma_n^2 - k_n^2)}{k_n} Y_1(k_n a); \quad A_{51} = 0, \quad A_{52} = 0, \\
 A_{53} &= -\frac{i\gamma_n}{\rho_w \omega^2 n^2} J_0(i\gamma_n b), \\
 A_{54} &= -\frac{i\gamma_n}{\rho_w \omega^2 n^2} Y_0(i\gamma_n b), \\
 A_{55} &= J_0(k_n b), \quad A_{56} = Y_0(k_n b); \quad A_{61} = 0, \quad A_{62} = 0, \\
 A_{63} &= -\frac{i\gamma_n}{\rho_w \omega^2 n^2} J_1(i\gamma_n b), \\
 A_{64} &= -\frac{i\gamma_n}{\rho_w \omega^2 n^2} Y_1(i\gamma_n b), \\
 A_{65} &= \frac{i\gamma_n}{k_n} J_1(k_n b), \quad A_{66} = \frac{i\gamma_n}{k_n} Y_1(k_n b),
 \end{aligned}$$

де J_0, J_1 - функції Бесселя першого роду, Y_0, Y_1 - функції Бесселя другого роду, $\alpha_n^2 = i\omega n \rho / \mu + \gamma_n^2$, $k_n^2 = \rho_s \omega^2 n^2 / G - \gamma_n^2$, $G = (L_3 + L_2 i\omega n - \omega^2 n^2 L_1) / (J_3 + J_2 i\omega n - \omega^2 n^2 J_1)$

4. Результати розрахунків

Проведені чисельні розрахунки залежностей $c(\omega)$ з (10) та розрахунки хвиль тиску та витрати.

Список використаних джерел

1. Reinhardt S. W. Noninvasive cardiac testing vs clinical evaluation alone in acute chest pain: a secondary analysis of the ROMICAT-II Randomized Clinical Trial. // *JAMA internal medicine*. - 2018. V.178.-2.-P.212-219.

При розрахунках використовувались параметри, що відповідають крові в нормі [12]: $\rho = 1050 \text{ кг/м}^3$, $\mu = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$. Для матеріалу стінки трубки були використані параметри, що були ідентифіковані в роботі [14] та відповідають 5-елементній реологічній моделі активного матеріалу.

Результати розрахунків залежності $c(\omega)$ для параметрів здорової людини наведені на рис. 2. Також приведені експериментальні криві дисперсії, що були виміряні на здорових волонтерах. Розраховані на моделі дисперсійні криві відповідають експериментальним даним.

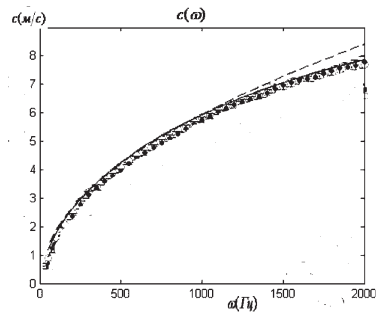


Рис. 2. Експериментальна крива дисперсії (заповнені маркери) порівняно з розрахованою кривою на моделі (пунктирна лінія)

5. Висновки

Таким чином, удосконалена 2D модель руху крові по артеріальній системі, яка враховує біоактивні реакції стінки судини, а також граничні умови з урахуванням саморегуляції мікроциркуляторного русла. Модифікація моделі дозволила зменшити ресурсомність та підвищити точність розрахунків параметрів кривих тиску та витрати. Отримані дисперсійні криві відповідають експериментальним даним. Удосконалена модель буде використана для розрахунків параметрів діагностичних індексів для системного АР, що налічують $> 10^5$ артеріальних сегментів.

References

1. REINHARDT, S. W. (2018) Noninvasive cardiac testing vs clinical evaluation alone in acute chest pain: a secondary analysis of the ROMICAT-II Randomized Clinical Trial. *JAMA internal medicine*. Vol.178.-2.-p.212-219.

2. Kim H.L./ Kim H.L., Kim H.-S. Pulse Wave Velocity in Atherosclerosis.// *Frontiers in cardiovascular medicine*. - 2019. V. 6.N. 41.
3. Zhang B. Study of correlation between wall shear stress and elasticity in atherosclerotic carotid arteries.// *Biomedical engineering online*. -2018. V. 17. N. 1
4. Taylor C.A. Computational fluid dynamics applied to cardiac computed tomography for noninvasive quantification of fractional flow reserve; Scientific Basis. //J. Am. Coll. Cardiol. – 2013. V.61, P. 22-33.
5. Ferencik. The Association of High Risk Plaque Features and Non-Invasive Fractional Flow Reserve Derived from Coronary Computed Tomography Angiography in Patients with Acute Chest Pain: Results from the ROMICAT II Trial //J. Am. Coll. Cardiol. – 2017. V.69.N.11.
6. Parker K. H. A brief history of arterial wave mechanics. // *Medical & biological engineering & computing*. – 2009. V. 47.-N.2 P.111-8.
7. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1950. – 678 с.
8. Marwa S./ Marwa S., Hafedh Belmabrouk, Abdullah Bajahzar. Numerical Study of the Blood Flow in a Deformable Human Aorta. //Appl. Sci.- 2019, V.9, 1216.
9. Duanmu Z. / Duanmu Z., Chen W., Gao H, Yang X, Luo X and Hill N.A. A One-Dimensional Hemodynamic Model of the Coronary Arterial Tree. // *Front. Physiol.* - 2019.-V. 10.853.
10. Malatos S. / Malatos S., Raptis A, Xenos M Advances in Low-Dimensional Mathematical Modeling of the Human Cardiovascular System. // *J Hypertens Manag.* -2016. 2:017.
11. Milnor W.R. Hemodynamics / W. R. Milnor. – Baltimore: Williams &Wilkins, 1989. – 278 p.
12. Solovyova H. N./ Solovyova H. N., Kizilova N. N. Mathematical modeling of bioactive arterial wall // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, серія «Математика, прикладна математика і механіка». – 2018. – Т. 88. – С. 44-57.
13. Соловйова О.М./Соловйова О.М.,Кізілова Н.М. Дослідження руху в'язкої рідини у в'язкопружній камері з біоактивного матеріалу. Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки. - 2015. - Спецвипуск. – С.277-282.
2. KIM, H.-L., K.,KIM S.-H. (2019). Pulse Wave Velocity in Atherosclerosis. *Frontiers in cardiovascular medicine*. Vol. 6. 41.
3. ZHANG, B. (2018) Study of correlation between wall shear stress and elasticity in atherosclerotic carotid arteries. *Biomedical engineering online*. Vol. 17. 1.
4. TAYLOR, C.A. (2013) Computational fluid dynamics applied to cardiac computed tomography for noninvasive quantification of fractional flow reserve; Scientific Basis. *J Am Coll Cardiol*. Vol. 61. P.22-33.
5. FETRENCIK. (2017). The Association of High Risk Plaque Features and Non-Invasive Fractional Flow Reserve Derived from Coronary Computed Tomography Angiography in Patients with Acute Chest Pain: Results from the ROMICAT II Trial. *J. Am. Coll. Cardiol.* – 2017. Vol.69.11.
6. PARKER, K.H. (2009). A brief history of arterial wave mechanics. *Medical & biological engineering & computing*. Vol. 47, 2 P.111-8.
7. LOJTCYANSKIJ, L.G. Mechanics of fluid and gas.– М. ; L. : Statetechpubl. 1950. – 678 p.
- 8.MARWA,S.,BELMABROUK,H. BAJAHZAR, A. (2019) Numerical Study of the Blood Flow in a Deformable Human Aorta. *Appl. Sci.*V.9, 1216.
9. DUANMU, Z, CHEN, W, GAO, H, YANG X, LUO, X and HILL, N.A. (2019) A One-Dimensional Hemodynamic Model of the Coronary Arterial Tree. *Front. Physiol*. Vol. 10:853.
10. MALATOS, S, RAPTIS, A, XENOS, M. (2016) Advances in Low-Dimensional Mathematical Modeling of the Human Cardiovascular System. *J Hypertens Manag.* Vol 2:017.
11. MILNOR, W. (1989) *Hemodynamics*. Baltimore: Williams &Wilkins.
12. SOLOVYOVA, O., KIZILOVA, N. (2018) Mathematical modeling of bioactive arterial wall. *Bulleten of Kharkiv National University of V.N. Karazina, Ser."Mathematics, applied mathematics and mechanics"*. Vol. 88. P. 44-57.
13. SOLOVYOVA, O., KIZILOVA, N. (2015) Investigation of the Viscous Fluid Movement in a Bioactive Material Viscoelastic Chamber. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physical and Mathematical Sciences.* - 2015. - Special issue. - P.277-282.

Надійшла до редколегії ..12.01.2019 р.

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 539.12; 530.145

Барабаш О. В.¹, к.ф.-м.н., доц.

O. V. Barabash¹, PhD.

Обрахунок перерізу народження BSM бозона в реакції фотонного злиття

Calculation the production cross-section of the BSM boson via photon fusion reaction

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул. Володимирська 64/13, e-mail: obar@univ.kiev

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13, e-mail: obar@univ.kiev

Розглянуто процес народження скалярного BSM (Beyond the Standard Model) бозона (S -бозона) в експерименті SHiP (Search for Hidden Particles) на LHC в результаті глибоко-непружного зіткнення зарядженої частинки (електрона або протона) з важким ядром через реакцію фотонного злиття. Обраховано амплітуду та переріз цієї реакції без використання наближення еквівалентних фотонів. Отриманий переріз було проаналізовано для випадку розсіяння протона на ядрі свинцю та порівняно з перерізом народження S -бозона при розпаді D_s мезону. Було знайдено, що реакція фотонного злиття є ефективною лише при масі S -бозона меншій за 0.1 кеВ.

Ключові слова: SHiP, переріз народження, скалярний BSM бозон, реакція фотонного злиття.

The production cross-section of the beyond the standard model (BSM) scalar boson (S -boson) have been considered in the article. Scalar boson produced via photon fusion reaction in the deep inelastic scattering of a charged particle (proton or electron) on heavy nucleus of the target. This process is one of the possible mechanisms of BSM boson production at the SHiP (Search for Hidden Particles) experiment at the CERN LHC and may be dominating among others processes due to large nuclear charge. In a low-energy case for which virtual photon wavelength similar or bigger nuclear size one can consider nucleus as an elementary particle with the charge Z . Corresponding amplitude is proportional to Z and the cross-section proportional to Z^2 . Due to this the α_{EM}^2 suppression of the production cross-section is approximately compensated by the charge number factor Z^2 . The mass of boson cannot exceed 4 MeV for the incident proton (or less than 80 MeV for electron). We calculated amplitude and the production cross-section of this reaction directly without using equivalent photon approximation. Interaction between photon and neutral boson is described by triangular diagrams with the loop containing all charged leptons, quarks and W -bosons. For this interaction we used effective lagrangian. The found cross-section was analyzed for the case of proton scattering on the lead nucleus and compared with the production cross-section in the decay of D_s mesons. It was found that the photon fusion reaction becomes effective only with a S -boson mass less than 0.1 keV.

Key Words: SHiP, production cross-section, BSM scalar boson, photon fusion reaction.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Єжов С. М.

Вступ

Розширення стандартної моделі (СМ) можливо в трьох основних напрямках: так звані скалярний, векторний та нейтринний портали [1]. Скалярний сектор моделі включає в себе хігсоподібний бозон (S -бозон). В даній роботі розглядається один із можливих каналів народження S -бозону при кулонівському розсіянні зарядженої частинки (протона або електрона) на важкому ядрі мішені (для конкретності будемо казати про ядро свинцю).

Якщо імпульс частинки, що налітає малий (в ЛС $E < 100$ МеВ), то віртуальний фотон буде мати довжину хвилі $\lambda > 10^{-14}$ м, що перевищує розміри ядра. При цьому ядро можна розглядати

як одну частинку з зарядом Ze . Амплітуда такого процесу буде пропорційна Z , а переріз Z^2 . Оскільки $Z \approx 100$, то множник Z^2 компенсує малий фактор $(\alpha_{EM})^2$, що з'являється внаслідок взаємодії фотона з зарядженими частинками. В результаті, ця реакція може бути привабливою як перспективний кандидат для пошуку S -бозона на LHC. Зазначимо, що маса S -бозона повинна бути достатньо малою ($m_s \leq 80$ МеВ, якщо частинка, що налітає, електрон, та $m_s \leq 4$ МеВ для протона).

Ефективний лагранжіан

Переріз народження S -бозона будемо обраховувати безпосередньо, без використання наближення еквівалентних фотонів, яке

використовувалось в [2]. Діаграма реакції представлена на Рис. 1. Скрізь по тексту великі літери ($P_{i,f}$, Q , $\Phi_{i,f}$, M та ін.) відповідають ядру, маленькі ($p_{i,f}$, e , $u_{i,f}$, m) – протону.

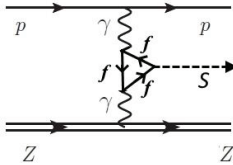


Рис. 1. Діаграма реакції $p + Z \rightarrow p + Z + S$.

Оскільки S -бозон електро-нейтральний, то він безпосередньо не взаємодіє з фотоном. Найпростіший механізм народження S -бозону фотоном – це реакція фотонного злиття (photon fusion), яка описується трикутною діаграмою (Рис.2), де в петлі можуть бути будь-які зарядженні фундаментальні частинки (зарядженні лептони, кварки, $W^\pm$ -бозони).

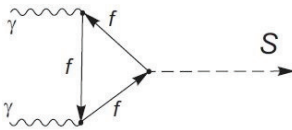


Рис.2. Трикутна діаграма «photon fusion».

Трикутна діаграма вивчалась в роботах [3,4]. Ефективний лагранжіан взаємодії має вигляд

$$\mathcal{L}_{eff} = \theta \chi S F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1)$$

де θ – мала константа (так званий кут змішування), яка характеризує інтенсивність взаємодії S -бозона з частинками стандартної моделі і є невідомим параметром теорії,

$$\chi = \frac{\alpha F(m_S)}{8\pi V_h}$$

$\alpha = 1/137$ – постійна тонкої структури, $V_h = 246$ GeV – енергія хігсівського конденсату, $F(m_S)$ – безрозмірна величина, значення якої залежить від маси S -бозона m_S . Залежність $F(m_S)$

$$S_{fi} = -ie^2 Z \chi \int d^4x d^4y d^4z \langle p_f | \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) | p_i \rangle \langle P_f | \bar{\Phi}(y) \gamma^\nu \Phi(y) | P_i \rangle \cdot \\ \langle k | S(z) | 0 \rangle \langle 0 | T A_\mu(x) A_\mu(y) F_{\alpha\beta}(z) F^{\alpha\beta}(z) | 0 \rangle \quad (2)$$

Останній множник обраховуємо за теоремою Віка

$$\langle 0 | T A_\mu(x) A_\mu(y) F_{\alpha\beta}(z) F^{\alpha\beta}(z) | 0 \rangle = 2 \langle 0 | T A_\mu(x) F_{\alpha\beta}(z) | 0 \rangle \langle 0 | T A_\nu(y) F^{\alpha\beta}(z) | 0 \rangle$$

Обрахунок згортки $\langle 0 | T A_\mu(x) F_{\alpha\beta}(z) | 0 \rangle$ дає

$$\langle 0 | T A_\mu(x) F_{\alpha\beta}(z) | 0 \rangle = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\alpha} k_\beta - g_{\mu\beta} k_\alpha}{k^2 + i0} e^{-ik(x-z)}$$

Після підстановки цього виразу в (2) та інтегрування по x , y , z , отримуємо

представлена на Рис.3, [5]. Для легких бозонів ($m_S < 80$ MeV) $F \approx 10$. В результаті, для константи χ отримуємо значення $\chi = 1.18 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-1}$

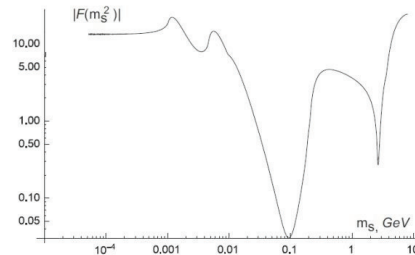


Рис.3. Залежність параметра F від маси S -бозона.

В наближенні (1) діаграма процесу (Рис. 1) зводиться до діаграми, зображеної на Рис. 4.

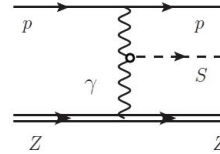


Рис.4. Ефективна діаграма народження S -бозона.

Кружок на діаграмі позначає ефективну взаємодію, що дається лагранжіаном (1).

Обрахунок амплітуди

Амплітуда народження S -бозону дається матричним елементом

$$S_{fi} = \langle P_f p_f k | T e^{i \int \mathcal{L}_{int} d^4x} | P_i p_i \rangle$$

де

$$\mathcal{L}_{int} = -e A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - Z e A_\mu \bar{\Phi} \gamma^\mu \Phi - \chi \theta S F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

В найнижчому порядку теорії збурень (якому відповідає діаграма на Рис. 4), маємо

$$S_{fi} = -i(2\pi)^4 4e^2 Z\chi \frac{\delta(P_f + p_f + k - P_i - p_i) (\bar{u}_f \gamma^\mu u_i) (\bar{U}_f \gamma^\nu U_i)}{\Pi \sqrt{2V\varepsilon_i} \Pi \sqrt{2V\varepsilon_f} (\Delta p)^2 (\Delta P)^2} G_{\mu\nu}$$

де $G_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(\Delta p \Delta P) - \Delta p_\nu \Delta P_\mu$, $\Delta p = p_f - p_i$, $\Delta P = P_f - P_i$. Відповідно, для інваріантної амплітуди $\mathcal{M}_{fi}$ знаходимо вираз

$$\mathcal{M}_{fi} = -4e^2 Z\chi \frac{(\bar{u}_f \gamma^\mu u_i) (\bar{U}_f \gamma^\nu U_i)}{(\Delta p)^2 (\Delta P)^2} G_{\mu\nu}$$

Переріз розсіяння в СЦМ дається формулою

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{32E_{tot}|p_i|} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 d\alpha d\beta d\gamma \quad (3)$$

де $\varepsilon_{1,2}$ – енергії будь-яких двох кінцевих частинок в СЦМ, α, β, γ – кути Ейлера, що задають орієнтацію трикутника імпульсів кінцевих частинок, E_{tot} та $|p_i|$ – повна енергія в СЦМ та початковий імпульс протона.

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2 = & \frac{128e^4 Z^2 \chi^2}{(\Delta p)^4 (\Delta P)^4} [(\Delta p \Delta P)^2 ((p_i p_i)(p_f p_f) + (p_i p_f)(p_f p_i)) + 2(\Delta p p_i)(\Delta p p_f)(p_i \Delta P)(p_f \Delta P) - \\ & - (\Delta p \Delta P)((\Delta p p_f)(p_i p_i)(p_f \Delta P) + (\Delta p p_i)(p_i p_f)(p_f \Delta P) + (\Delta p p_f)(p_f p_i)(p_i \Delta P) + (\Delta p p_i)(p_f p_f)(p_i \Delta P)) \\ & - a((\Delta p \Delta P)^2 M^2 + (\Delta P)^2 (\Delta p p_i)(\Delta p p_f)) - A((\Delta p \Delta P)^2 m^2 + (\Delta p)^2 (\Delta p p_i)(\Delta p p_f)) + aA((\Delta p \Delta P) + \\ & + \frac{1}{2}(\Delta p)^2 (\Delta P)^2)] \end{aligned} \quad (5)$$

Аналіз отриманого результату

Проаналізуємо отриманий результат для випадку, коли в якості частинки, що налігає, береться протон. В цьому випадку протон має бути нерелятивістським (в ЛС $v_p < 0.02 c$). Зробимо оцінку виразу (5). Найбільш просто обрахунки проводити в ЛС. З усіх доданків в квадратних дужках в (5) лідоючими є перші два, що пропорційні $(\Delta p \Delta P)^2$. Ці доданки дають

$$2m^6 M^2 (\Delta \vec{v})^4 \quad (6)$$

де $\Delta \vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i$ – зміна швидкості протона в ЛС. Усі інші доданки мають порядок $m^6 M^2 (\Delta \vec{v})^6$, $m^6 M^2 (\Delta \vec{v})^8$, $m^6 M^2 (\Delta \vec{v})^8$, $m^8 (\Delta \vec{v})^6$ та $m^8 (\Delta \vec{v})^8$ і принаймні на три порядки менші за (6). В результаті, для амплітуди (5) будемо мати

$$|\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2 = \frac{64e^4 Z^2 \chi^2 m^2}{E_\pi^2}$$

де E_π – енергія ядра після реакції в ЛС.

Формула (3) приймає вигляд

$$d\sigma = \sigma_0 \frac{m^2}{2M|p_i|} \frac{d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 d\cos\beta}{E_\pi^2} \quad (7)$$

де ми виконали інтегрування по кутах α, γ та ввели позначення

$$\sigma_0 = \frac{e^4 Z^2 \chi^2}{2\pi^3} = 3.2 \cdot 10^{-13} \theta^2 \text{ mbarn}$$

Оскільки всі частинки, що приймають участь в реакції не поляризовані, а поляризація кінцевих частинок не фіксується, то вираз для амплітуди переходу треба усереднити по поляризаціях. Це зводиться до заміни $|\mathcal{M}_{fi}|^2 \rightarrow \overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2}$, де

$$\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} = \frac{64e^4 Z^2 \chi^2}{(\Delta p)^4 (\Delta P)^4} (p_i^\mu p_f^\alpha + p_f^\mu p_i^\alpha - a g^{\mu\nu}) \cdot (p_i^\nu p_f^\beta + p_f^\nu p_i^\beta - A g^{\nu\beta}) G_{\mu\nu} G_{\alpha\beta} \quad (4)$$

та введені позначення

$$a = (p_i p_f) - m^2, A = (P_i P_f) - M^2,$$

m та M – маси протона та ядра відповідно. Для подальшого застосування наведемо явний вигляд виразу (4) після обрахунку усіх згорток

Чисельне значення σ_0 пораховано для ядра свинцю ($Z = 82$).

Формула (7) записана в СЦМ. В якості змінних інтегрування $\varepsilon_{1,2}$ виберемо кінцеві кінетичні енергії протона (ε) та ядра (E). Для проведення інтегрування потрібно вираз для E_π (в ЛС) переписати через змінні в СЦМ (ε та E). Зв'язок між ними

$$E_\pi = E + \sqrt{4 \frac{m}{M} E \varepsilon_i \cos\beta} + \frac{m}{M} \varepsilon_i, \quad (8)$$

де E – енергія ядра після зіткнення в СЦМ, ε_i – повна кінетична енергія зіткнення в СЦМ (яка, фактично, співпадає з енергією початкового протона в ЛС), β – кут між напрямками швидкості початкового протона та кінцевого ядра. Після підстановки виразу (8) в (7) та інтегрування по $\cos\beta$ для повного перерізу отримуємо значення

$$\sigma = \sigma_0 \frac{m^2}{M|p_i|} \iint \frac{d\varepsilon dE}{\left(\frac{m}{M} \varepsilon_i - E\right)^2}$$

Область інтегрування в змінних (ε, E) має дуже складний вигляд. Тому для оцінки перерізу σ зверху будемо інтегрувати по прямокутнику

$$\begin{aligned} & [\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max}] \times [E_{\min}, E_{\max}] \\ & = [0, \varepsilon_i - m_s] \times [0, (\varepsilon_i - m_s) \frac{m}{M}] \end{aligned}$$

Виконавши інтегрування, отримуємо

$$\sigma(pZ \rightarrow S) \leq \sigma_0 \sqrt{\frac{m}{2\varepsilon_i}} \frac{(1-x)^2}{x} =$$

$$= 3.5 \cdot 10^{-12} \theta^2 \frac{(1-x)^2}{x} \text{ mbarn} \quad (9)$$

де $x = \frac{m_S}{\varepsilon_i}$.

Порівняння з перерізами інших реакцій

Якщо маса S -бозона менша за 2 GeV, то найбільш перспективним вважається процес народження S -бозона при розпаді D_s мезону. Діаграма цього процесу представлена на Рис. 4.

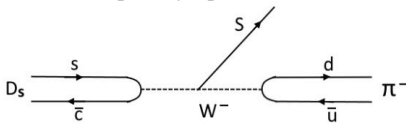


Рис.4. Народження S -бозона при розпаді D_s мезону.

Амплітуда цієї реакції дорівнює

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{G_F \sqrt{2}}{2V_h} \theta f_D f_\pi^* M_D^2 V_{cs} V_{ud}^* \left(1 - \left(\frac{m_S}{M_D} \right)^2 \right) \quad (10)$$

де $f_D = 133$ MeV та $f_\pi = 252$ MeV – константи розпаду D_s та π мезонів; $V_{cs} = 0.995$ та $V_{ud} = 0.974$ – коефіцієнти матриці Кабіббо-Кобаяші-Маскава; $M_D = 1969$ MeV – маса D_s мезону.

Ширина розпаду дається формулою

$$\Gamma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{16\pi M_D} \quad (11)$$

Список використаних джерел

1. Alekhin S. et al., A facility to Search for Hidden Particles at the CERN SPS: the SHiP physics case, Rept. Prog. Phys. 79 (2016) 124201 [1504.04855].
2. Budnev V.M., Ginzburg I.F., Meledin G.V., Serbo V.G., The two photon particle production mechanism. Physical problems. Applications. Equivalent photon approximation. Phys. Rept. 15 (1975) 181 [INSPIRE].
3. Bezrukov F., Gorbunov D., Light inflaton Hunter's Guide, JHEP 05 (2010) 010 [0912.0390].
4. Spira M., Higgs Boson Production and Decay at Hadron Colliders, Prog. Part. Nucl. Phys. 95 (2017) 98 [1612.07651].
5. Boiarska I. et al., Phenomenology of GeV scale scalar portal. JHEP 11 (2019) 162.

Підставляючи (10) в (11) отримуємо для шуканої ширини розпаду значення

$$\Gamma_{D \rightarrow S} = 1.797 \cdot 10^{-19} \theta^2 \text{ GeV}$$

Враховуючи, що час життя D_s мезону $\tau(D) = 5 \cdot 10^{-13}$ с знаходимо парціальну ширину розпаду

$$\mathcal{R} = \frac{\Gamma_{D \rightarrow S}}{\Gamma_{tot}} = 1.38 \cdot 10^{-7} \theta^2$$

Щоб знайти повний переріз народження S -бозона треба помножити знайдену величину $\mathcal{R}$ на повний переріз народження D_s мезона на енергіях LHC, який становить 0.7 mbarn. Таким чином

$$\sigma(D \rightarrow S) = 9.56 \cdot 10^{-8} \theta^2 \text{ mbarn} \quad (12)$$

Порівняння (12) з (9) показує, що процес народження S -бозона в реакції фотонного злиття може конкурувати з реакцією $pp \rightarrow S$ лише для дуже легкого S -бозона, маса якого менша за 0.1 кеВ. Якщо ж $m_S \approx 1$ MeV, то

$$\frac{\sigma(pZ \rightarrow S)}{\sigma(D \rightarrow S)} \leq 0.8 \cdot 10^{-4}.$$

Висновки

Переріз народження S -бозона в реакції фотонного злиття при розсіянні протона на важкому ядрі (свинець) стає порівняним з перерізом народження при розпаді D_s мезону лише при масах S -бозона менших за 0.1 кеВ.

References

1. ALEKHIN, S. et al. (2016) *A facility to Search for Hidden Particles at the CERN SPS: the SHiP physics case*, Rept. Prog. Phys. 79 124201 [1504.04855].
2. BUDNEV, V., et al. (1975) *The two photon particle production mechanism. Physical problems. Applications. Equivalent photon approximation*. Phys. Rept. 15, 181 [INSPIRE].
3. BEZRUKOV, F., GORBUNOV D. (2010) *Light inflaton Hunter's Guide*, JHEP 05 010 [0912.0390].
4. SPIRA, M. (2017) *Higgs Boson Production and Decay at Hadron Colliders*, Prog. Part. Nucl. Phys. 95, 98 [1612.07651].
5. BOIARSKA, I. et al. (2019) *Phenomenology of GeV scale scalar portal*. JHEP 11, 162.

Надійшла до редколегії 01.02.2019

УДК 621.384.3:615.462-036

Таланюк В.В.¹, аспірант
Шадрін А.О., канд. техн. наук
Юрженко М.В., канд. фіз.-мат. наук

Основні характеристики та промислове застосування термопластичних еластомерів на основі стирольних кополімерів (огляд)

Термопластичні еластomers (ТПЕ) мають пружні властивості, які подібні до гуми, однак здатні до плавлення та усі властивості термопластів. Також широко застосовуються блок-кополімери, у яких наявні в структурі їх макромолекул ланки різних полімерів. Так стирол-етилен-бутилен-стирол (СЕБС) належить до другого покоління, вироби з яких мають високі фізико-механічні властивості, а біосумісність дозволяє використовувати його у медичній галузі. В роботі наведені основні характеристики та аналіз переваг ТПЕ на прикладі СЕБС у порівнянні з традиційними матеріалами.

Ключові слова: термопластичні еластomers, СЕБС, структура, властивості, застосування.

¹ Інститут електрозварювання ім. Є.О. Патона
НАН України

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Макарець М. В.

Огляд літератури

Термопластичні еластomers (ТПЕ, в англійському варіанті TPE) – це матеріали, що мають пружні властивості, подібні до гуми, однак здатні до плавлення та мають усі характерні властивості термопластів. ТПЕ можуть являти собою суміші

V.V. Talanyuk², PhD Student
A.O. Shadrin, Cand. Techn. Scien.
M.V. Yurzhenko, Doct. Techn. Scien.

Basic Characteristics and Industrial Application of Styrene Copolymer-Based Thermoplastic Elastomers (Overview)

Thermoplastic elastomers (TPEs) have elastic properties that are similar to rubber but capable of melting and all thermoplastic properties. Block copolymers are also widely used, in which there are links of different polymers in the structure of their macromolecules. So styrene-ethylene-butylene-styrene (SEBS) belongs to the second generation, the products of which have high physical and mechanical properties, and biocompatibility allows it to be used in the medical field. The main characteristics and analysis of advantages of TPE on the example of SBSS in comparison with traditional materials are presented in the paper.

Key Words: thermoplastic elastomers, SEBS, structure, properties, application.

² E.O. Paton Electric Welding Institute of the
National Academy of Sciences of Ukraine

термопластичного матеріалу та еластомеру, але частіше їх синтезують як блок-кополімери, макромолекулярні ланцюги яких складаються з по чергово з'єднаних блоків мономерів різних полімерів (рис.1). Чергування жорстких та еластичних блоків в макромолекулі дозволяє поєднувати властивості еластомерів та термопластів [1, 2].



Рисунок 1 – Схема макромолекулярного ланцюга типового термопластичного блок-кополімеру.

За хімічним складом розрізняють декілька видів ТПЕ (аббревіатури в англійському варіанті): термопластичний еластомер поліамідовий (TPA), термопластичний еластомер поліетеровий (TPC або TEEE), термопластичний еластомер поліуретановий (TPU) та термопластичний еластомер стиреновий (TPS). Останній вид є найбільш розповсюдженим та складає до 50% від світового об'єму виробництва ТПЕ [3]. Основою полімерного ланцюга TPS є жорсткі блоки полістиролу, що можуть займати до 60%

його молекулярної маси. В залежності від характеру розташування стирольних та інших мономерних груп в макромолекулі формуються стирольні кополімери з різними фізичними властивостями.

Бутадієн-стирольний каучук (БСК) є кополімером нерегулярної будови зі статистичним розподілом мономерних ланок. Бутадієновий блок зазвичай містить декілька мономерних ланок (рис.2), а ланки стиролу розташовуються ізольовано або попарно.

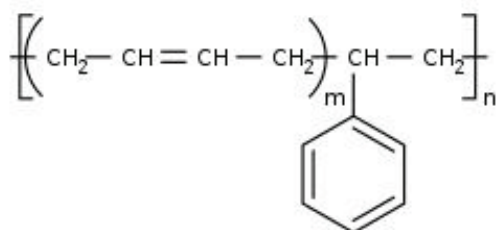


Рисунок 2 – Хімічна будова бутадієн-стирольного каучуку.

БСК є типовим еластомером та широко використовується для виробництва гуми за допомогою класичного процесу вулканізації із формуванням сітчастої макромолекулярної структури завдяки хімічним реакціям у присутності атомів сірки у вулканізуючому агенті.

Стирол-бутадієновий блок-кополімер (СБС) складається з тих самих мономерних

ланок, що і БСК, але завдяки блочній будові є термопластичним еластомером. Макромолекулярний ланцюг СБС має триблочну хімічну будову із бутадієновим блоком довжиною l ланок всередині та полістирольними блоками довжиною m та n ланок з боків (рис. 3) [4].

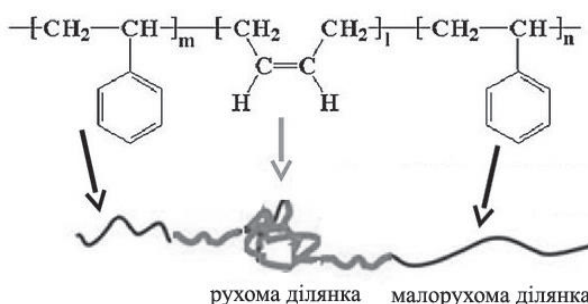


Рисунок 3 – Хімічна будова макромолекули СБС.

Відповідно, бутадієновий блок, що складається з гнучких мономерних ланок, формує рухому (еластичну) ділянку макромолекулярного ланцюга, а стирольні блоки утворюють лінійні малорухомі (жорсткі) ділянки. Якщо схематично зобразити надмолекулярну будову термопластичного

еластомеру на прикладі СБС, то отримаємо ізотропну аморфну структуру, в якій жорсткі домени розташовані серед переплетіння гнучких макромолекулярних ланцюгів (рис.4). Таким чином, формується регулярна структура СБС, в якій жорсткі домени виконують ту саму функцію, що і вулканізуюча сітка для

синтетичних або натуральних каучуків. Однак, ця доменна структура, на відміну від зшивки сіркою, не утворює міцних хімічних зв'язків між макромолекулами. Саме тому ТПЕ демонструють здатність до високоеластичної

деформації за робочих температур, але при цьому переробляються як звичайні термопласти і не потребують процесу необоротної зшивки вулканізацією.

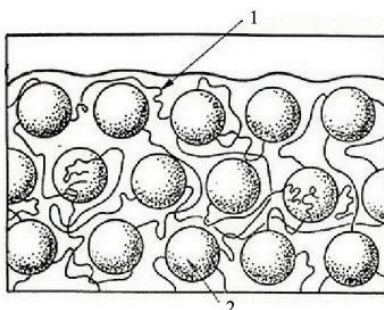


Рисунок 4 – Схема надмолекулярної структури стирол-бутадієнового блок-кополімеру: 1 – еластичні блоки; 2 – жорсткі блоки.

Компанія Kraton Polymers – провідний світовий виробник та постачальник стирольних блок-кополімерів проводила спеціальні дослідження надмолекулярної структури цих матеріалів, що виробляються під маркою Kraton D та Kraton G [4]. Методом трансмісійної електронної мікроскопії (ТЕМ) фотографували надтонку плівку з полімеру, виготовлену випаровуванням із розчину та

забарвлену тетроксидом осмію (рис. 5). Як і було передбачено теоретично, мікроструктура СБС складається із доменів полістиролу (білі круглі ділянки), регулярно розташованих у матриці полібутадієну темного кольору. З масштабу фото видно, що відстань між полістирольними блоками складає приблизно 0,02 мкм.

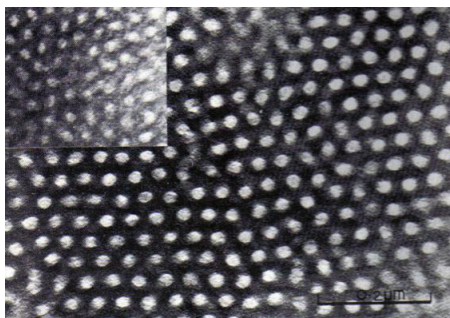


Рисунок 5 – ТЕМ фотографія надмолекулярної структури стирол-бутадієнового блок-кополімеру Kraton D та Kraton G.

Разом із СБС також широко застосовуються блок-кополімери з включенням до структури макромолекул інших мономерних ланок. Як приклад, це стирол-етилен-пропілен-стирол (СЕПС) та стирол-етилен-бутилен-стирол (СЕБС, або в англійському варіанті SEBS) [5].

Полімери СЕБС відносяться до стирольних блок-кополімерів другого покоління, виробі з

яких мають дуже тривалий термін експлуатації. Ця характеристика дає можливість використовувати такі полімери для виготовлення високоміцних з'єднань у виробках різноцільового призначення [5].

Полімерний матеріал СЕБС є одними з найміцніших у своєму класі, вони придатні до поєднання з різними домішками, наприклад, з мінеральними маслами та поліолефінами. Такі

полімери є незамінними у багатьох галузях промисловості, оскільки вони здатні, в залежності від хімічної будови, надавати виробам підвищену жорсткість або еластичність [5].

Схема хімічної будови блок-кополімеру СЕБС наведена на рис.6. Структурна ланка макромолекулярного ланцюга складається з

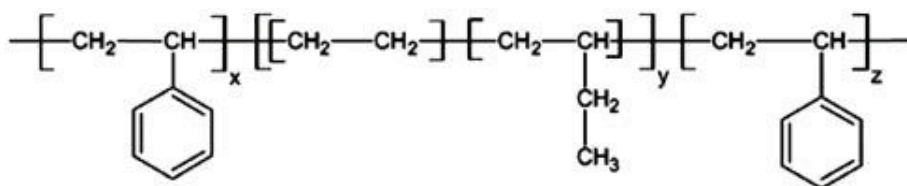


Рисунок 6 – Хімічна будова блок-кополімеру СЕБС

СЕБС – це конструкційний термопластичний полімерний матеріал, який за властивостями подібний до синтетичних каучуків, еластичний або жорсткий в залежності від хімічної будови, достатньо термостійкий, стійкий до впливу різноманітного середовища, в тому числі озону, ультрафіолетового випромінювання та інших атмосферних явищ. Він не має вираженого смаку та запаху, може контактувати із різноманітними харчовими продуктами та біологічними тканинами. Вважається, що СЕБС відносно важко піддається переробці при розплавленні, тому його іноді змішують з СБС та іншими полімерами, які підвищують здатність до переробки до формування виробів з нього. В залежності від умов полімеризації, СЕБС, подібно до поліетилену, може мати розгалужену або лінійну структуру, що впливає на густину матеріалу, фізико-хімічні і експлуатаційні властивості:

Густина для розгалужених марок 0,9 – 1,0 г/см³, для лінійних марок 0,9 – 1,0 г/см³.

Міцність при розтягу 9,0 – 12,1 МПа.

Відносне подовження при розриві 700 – 1100%.

Твердість за Шором А 90 – 95.

Температура плавлення 175 – 200°C.

Діапазон робочих температур від –50 / –40°C. до +90 / +140°C.

Температура переробки в межах 205 – 245 °C.

Максимальна температура робочого інструмента – 260°C.

чотирьох блоків та умовно її можна вважати триблочною, за аналогією із СБС. Всередині ланки розташовується сумісний блок із мономерів етилену та бутілену кількістю у ділянок, а збоків знаходяться полістирольні блоки довжиною x та z . Загальний вміст стиrolу у складі полімеру становить 30-35%.

Питомий поверхневий електричний опір – 10^{14} Ом.

Водопоглинання за 24 години – не більше 0,07%.

ТПЕ СЕБС часто використовують у комбінації з іншими полімерами для підвищення їх ефективності, наприклад, у будівництві. Зокрема, вони можуть використовуватись в якості модифікаторів для підвищення величини ударної в'язкості інженерних термопластів, а також як флексібілізатори (тонери) для поліпропілену [6]. Часто оливи і різноманітні наповнювачі додаються для зменшення вартості готових виробів або для подальшої модифікації їх властивостей.

СЕБС часто використовується для підвищення міцності з'єднань у виробництві в затискачах і рукоятках, як модифікатори для підвищення величини ударостійкості термопластів та гелів, що застосовуються в медицині чи телекомунікаційних технологіях, пластифікатори для отримання прозорого поліпропілену [7].

Сучасні технології синтезу полімерів дозволяють досить точно контролювати та формувати макромолекулярну структуру блок-кополімерів, досягаючи необхідних властивостей кінцевого продукту. Контрольований розподіл стиrolних блоків з серединним етилен-бутиленовим блоком дозволяє отримувати високі термопластичні характеристики без критичної шкоди для еластомерних властивостей. Нові марки ТПЕ на основі СЕБС можуть мати підвищену жорсткість або еластичність та здатність до

переробки. Вони дають більш ізотропну усадку (повздовжній напрямок проти поперечного) та кращу адгезію до класичних конструкційних термопластів. Стійкі до зовнішніх фізичних та хімічних впливів полімери на основі СЕБС можуть бути гарною альтернативою полівінілхлориду (ПВХ), термопластичному поліуретану та силіконовим еластомерам [8, 9].

Унікальне поєднання теплофізичних, хімічних, діелектричних властивостей, здатність до повторної переробки зумовили широке використання СЕБС як конструкційного матеріалу та компонента різних компаундів у багатьох галузях промисловості:

- автомобілебудування – еластичні деталі салону, килимки, брызговики, пыльники, покриття для педалей, ущільнювачі;

- побутова та оргтехніка – гнучкі та теплостійкі деталі, сидіння для велосипедів, еластичні деталі мобільних телефонів, корпуси пультів дистанційного керування, елементи комп'ютерних клавіатур та мишок, гнучкі деталі авторучок, корпуси дитячих іграшок, зубних щіток, елементи аксесуарів для купання – підводних костюмів, ласт, масок;

- виробництво інструментів – рукоятки для ручних та електроінструментів, рукоятки ножів, елементи будівельних інструментів – пензлів, кельм тощо;

- виробництво взуття – підошви та інші еластичні деталі побутового, спортивного та спеціального взуття;

- електротехніка – гнучкі роз'єми, ізоляція дротів тощо;

- сантехніка – ущільнення, гофровані гнучкі шланги і т.і.;

- медична промисловість – гнучкі та жорсткі ємності, медичні трубки, інфузійні та трансфузійні системи, елементи лабораторного обладнання. Саме в першу чергу у медичній галузі СЕБС активно застосовується як заміник традиційних полімерних матеріалів, які багато років використовуються та мають багато недоліків.

До матеріалів, що застосовуються у медичній галузі зазвичай висуваються

підвищені вимоги за такими показниками, як еластичність, міцність, стійкість до хімічних середовищ, сумісність із кров'ю та біологічними тканинами. Традиційні матеріали, що використовуються у медицині – латекс, ПВХ, силікон мають суттєві недоліки та потребують заміни. Наприклад, основними пластифікаторами, які застосовують у виробництві ПВХ є складні етери, що отримують із фталевого ангідриду (фталати). Пластифікований ПВХ містить у своєму складі 20-40 %, а в деяких виробках і більше, фталатів. Використовують декілька видів фталатів, що позначаються, як DBP, DIDP, DINP, DOP та DENP. На долю останнього – ди-2-етилгексилфталату припадає більше 50% усього світового споживання пластифікаторів, оскільки він є найдешевшим. У 1970-х роках з'явилися перші відомості про шкідливу дію DENP на здоров'я людини. Багато наступних клінічних досліджень довели його та інших фталатів токсичну дію на печінку, нирки, нервову та репродуктивну системи людини. Після тривалих дискусій у США та країнах Європейського союзу використання медичних виробів з ПВХ, що містить DENP було заборонено. Альтернативою стало використання біосумісних термопластичних еластомерів, зокрема СЕБС. В останні роки провідні світові виробники полімерної сировини такі, як Forplast, Kraton, AlphaGary, Kraiburg та інші почали виробництво різних марок СЕБС, спеціально адаптованих до потреб медичної та фармацевтичної галузей. В залежності від особливостей застосування ці полімери можуть суттєво відрізнятися своїми фізико-механічними властивостями. Зазвичай ця сировина проходить спеціальні випробування та отримує відповідні дозволи наглядових органів у санітарній та харчовій галузях. Вироби із СЕБС також повинні без втрати основних властивостей проходити стерилізацію звичайними методами, наприклад обробкою оксидом етилену, перегрітою парою або гамма-променями тощо. Також, окремі вимоги висуваються до стандартних домішок у полімерну сировину – олів, наповнювачів, поліолефінових складових [12].

використанням звичайних полімерів, доцільно замінити їх на біосумісні. Адже їх властивості, як було зазначено раніше, не мають значних відмінностей. Відповідно до наведених в

Висновки

Отже, враховуючи значну кількість екологічних проблем, що супроводжуються

роботі основних характеристик та проведених аналізів переваг ТПЕ на прикладі СЕБС у порівнянні з традиційними для окремих галузей промисловості полімерними матеріалами отримуємо, що біосумісні

матеріали мають менше негативного впливу на людину і природу в цілому. Тому виробництво різноманітних виробів з цих матеріалів має більше переваг.

Список використаних джерел

1. Plastic & Thermoplastic Elastomer Materials. Minnesota Rubber and QMR Plastics. https://mnrubber.com/Design_Guide/3-6.html
2. Что такое ТПЕ? 2017 С. 112-117. http://www.altinelpvc.com/altinelpvc/media/pdf/c_ontat_teknik_bilgiler_ru.pdf
3. Kraton (SEBS and SEBS OE) 2016 p. http://kraton.com/products/KRATON_G.php
4. Литье пластмасс под давлением / Под ред. Т. Освальда, Л.Ш. Тунга, П.Дж. Грэмманна. Пер. с англ. под ред. Э.Л. Калинчева. - СПб: Профессия, 2006. 712 с.
5. Мэнсон Дж., Сперлинг Л. Полимерные смеси и композиты. - М.: Химия, 1979. С.119-136.
6. Costa F.R., Dutta N.K., Choudhury N.R., Bhowmick A.K. Thermoplastic elastomers // Current topics in elastomers research / Ed. by A.K. Bhowmick. CRC Press (Taylor & Francis Group), 2008. P. 101-164.
7. Fang L., Wei M., Shang Y., Jimenez L., Kazmer D., Barry C., Mead J. Surface morphology alignment of block copolymers induced by injection molding // Polymer. 2016. V. 50. P. 5837-5845.
8. Holden G. Elastomers, thermoplastic // Encyclopedia of polymer science and technology. 12 volumes. / 3rd edition. Ed. by. H.F. Mark. V. 6. John Wiley & Sons. 2014. P. 63-88.
9. Masuko N. New Styrenic Block Copolymers and Applications <http://www.petrochemconclave.com/presentation/2016/Mr.N.Masuko.pdf>.
10. Manamide A., Moriguchi N., Gruendcen V., Kuvahara S. New bondable styrenic block copolymer elastomers / TPE magazine, 2013,
11. Kelch R. A New Family of HF-Weldable Polyolefin Films <https://www.mddionline.com/new-family-hf-weldable-polyolefin-films>.
12. Amanat N. Welding methods for joining thermoplastic polymers for the hermetic enclosure of medical devices [Text]/ N. Amanat, N.L. James, D.R. McKenzie// Medical Engineering and physics, 2010. - Vol 32, p.p. 600 – 699.

Reference

1. Plastic & Thermoplastic Elastomer Materials. Minnesota Rubber and QMR Plastics. https://mnrubber.com/Design_Guide/3-6.html
2. What is TPE? (2017) С. 112-117. http://www.altinelpvc.com/altinelpvc/media/pdf/c_ontat_teknik_bilgiler_ru.pdf
3. Kraton (SEBS and SEBS OE) (2016). http://kraton.com/products/KRATON_G.php
4. Injection Molding Handbook T. Osswald, L.S. Turng, P. Gramann. Hanser ISBN-10: 3-446-40781-2. 2010.
5. MANSON J.A., SPERLING L.H. Polymer blends and composites. Plenum Press, New York 1976. P.119-136.
6. COSTA F.R., DUTTA N.K., CHOUDHURY N.R., BHOWMICK A.K. (2008) Thermoplastic elastomers *Current topics in elastomers research* Ed. by A.K. Bhowmick. CRC Press (Taylor & Francis Group), P. 101-164.
7. FANG L., WEI M., SHANG Y., JIMENEZ L., KAZMER D., BARRY C., MEAD J. (2016) Surface morphology alignment of block copolymers induced by injection molding *Polymer*. V. 50. P. 5837-5845.
8. HOLDEN G. (2014) Elastomers, thermoplastic. *Encyclopedia of polymer science and technology*. 12 volumes. 3rd edition. Ed. by. H.F. Mark. V. 6. John Wiley & Sons. P. 63-88.
9. MASUKO N. (2016) New Styrenic Block Copolymers and Applications <http://www.petrochemconclave.com/presentation/2016/Mr.N.Masuko.pdf>.
10. MANAMIDE A., MORIGUCHI N., GRUENDCEN V., KUVAHARA S. (2013) New bondable styrenic block copolymer elastomers / *TPE magazine*.
11. KELCH R. A New Family of HF-Weldable Polyolefin Films <https://www.mddionline.com/new-family-hf-weldable-polyolefin-films>.
12. AMANAT N., JAMES N.L., MCKENZIE D.R. (2010) Welding methods for joining thermoplastic polymers for the hermetic enclosure of medical devices. *Medical Engineering and physics*. Vol 32, p.p. 600 – 699.

Надійшла до редколегії 15.01.2019

УДК 547.854, 537.53

Шафраньош М. І., к.ф.-м.н., доц.
Кіш Д.Б., студ.

Процеси утворення позитивних іонів при взаємодії електронів з молекулами тиміну

Ужгородський національний університет,
88000, м. Ужгород, пл. Народна, 3
e-mail: kishdaniella@gmail.com
miroshafr@gmail.com

M. I. Shafranyosh, PhD
Kish D.B., stud.

Processes of formation of positive ions at the electron – thymine molecule interactions

Uzhhorod National University, 88000, Uzhhorod,
Narodna Square, 3
e-mail: kishdaniella@gmail.com
miroshafr@gmail.com

За допомогою квантово-механічного методу AMI, що входить у пакет програм HyperChem 8.0.7., досліджено процеси утворення позитивних іонів які утворюються при взаємодіях молекул тиміну з повільними електронами. Запропонована модель фрагментації молекул тиміну під дією електронів. Виявлено шість найбільш ймовірних розривів зв'язків в циклічній структурі молекулярного іона тиміну. Отримані результати добре узгоджуються з даними експериментальних досліджень.

Ключові слова: тимін, позитивний іон, електрон, схема фрагментації.

The work is aimed to solve the key problems of modern biophysics related to the study of fundamental mechanisms of interaction of ionizing radiation on living cells and stability of biological systems to its influence. The obtained data and their generalizations create a basis for understanding the interaction mechanisms and stability of biological systems to its influence. Investigation is aimed on the obtaining the new priority data about the characteristics of the life important biological molecules, establishing the mechanisms and features of dissociative capture, excitation and ionization under the slow electrons; the study of the influence of intermolecular interactions on these processes and solution of some applications concerning the definition of physical stability of biomolecules in different states of aggregation. The AMI method that was used in research is a semi-empirical method for the quantum calculation of molecular electronic structure in computational chemistry. It is based on the neglect of differential diatomic overlap integral approximation and investigates the processes of formation of positive ions, which are formed during the interaction of thymine molecules with slow electrons. Fragmentation model of thymine molecules under electron impact is proposed. Six most likely bond breaks in the cyclic structure of thymine molecular ion are identified. The obtained results are in good agreement with experimental data.

Key Words: thymine, positive ion, electron, fragmentation.

Статтю представив д.ф.-м.н. Козаченко Ю.В.

Вступ

Фізичний вплив вторинних електронів, які виникають у значній кількості в результаті дії первинного високоенергетичного випромінювання на речовину [1], ініціює процеси дисоціативного захоплення, збудження та іонізації молекул азотистих основ нуклеїнових кислот (аденін, тимін, гуанін, урацил та цитозин), які, у свою чергу, запускають ланцюг

деструктивних змін у генетичних макромолекулах ДНК і РНК. Природний енергетичний стан цих молекул основ забезпечує стабільність зв'язків у комплементарних парах макромолекул, синтез білків і регуляторні процеси на молекулярному і клітинному рівнях, а також функціонування нуклеїнових кислот як генетичних носіїв. Зміни (мутації), які виникають внаслідок опромінення молекули ДНК, а також їх наслідки, є процесом

непередбачуваним і результати такої взаємодії проявляються лише через деякий час (наступні покоління).

Раніше [2-4] було досліджено процеси утворення негативних і позитивних іонів молекул піримідинових азотистих основ нуклеїнових кислот: цитозину, тиміну та урацилу електронним ударом. У даній роботі приведені результати моделювання процесів утворення позитивних молекулярних іонів тиміну за допомогою квантово-хімічних програм.

Моделювання процесу утворення позитивних іонів тиміну

На початковому етапі даної роботи було вивчено та ідентифіковано мас-спектр молекул тиміну.

Видно, що найбільш інтенсивна лінія з $[m/z = 126]$ належить молекулярному іону тиміну, інші заряджені фрагменти характеризуються менш інтенсивними лініями.

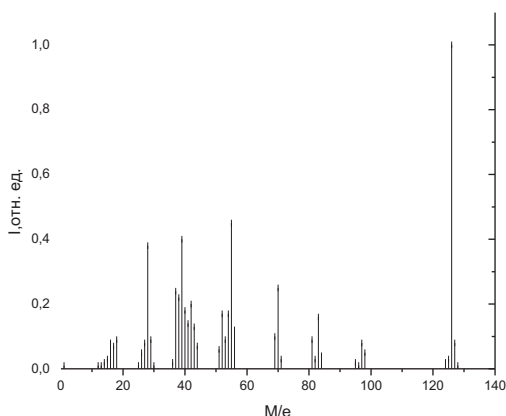


Рис.1. Масс-спектр тиміну при енергії 95 eV.

Моделювання процесів утворення позитивно заряджених фрагментів, які представлені в мас-спектрі тиміну було представлено за допомогою квантово-механічного методу AM1. Цей метод входить в пакет програм HyperChem 8.0.7. Пакет містить високотехнологічні сервісні програми, які забезпечують можливість квантово-хімічного розрахунку параметрів хімічних частинок речовини методами неемпіричної і напівемпіричної квантової хімії. Метод AM1 є поліпшенням методу MNDO [5] – одного із найбільш точних методів. Використовується для органічних молекул, що містять елементи з головних підгруп 1-ої і 2-ої груп періодичної

системи. Цей метод дозволяє одержувати більш якісні результати у порівнянні з методом MNDO, а також коректні результати для великих органічних молекул при розрахунках електронних характеристик системи і ентальпій утворення. Метод AM1 – метод самоузгодженого поля для молекул, які містять як азот, так і кисень. Розраховує електронну структуру, оптимізує геометрію, розраховує повну енергію і теплоти утворення. Метод самоузгодженого поля – багатоконфігураційний підхід, спрямований на подолання відомих труднощів у розрахунках молекул з високою симетрією. Нижче будуть приведені результати наших теоретичних розрахунків розподілу густин електричних зарядів і визначені довжини зв'язків у молекулі та позитивному молекулярному іоні тиміну (див. Рис.2; Рис.3). Розрахунки були виконані використовуючи метод AM1 в режимі оптимізації всіх структурних параметрів з нормою градієнта $< 0,01$.

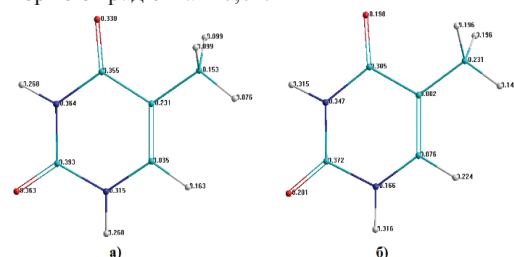


Рис. 2. Розподіл зарядів в нейтральній молекулі та позитивному молекулярному іоні тиміну (а – нейтральна молекула, б – позитивний молекулярний іон).

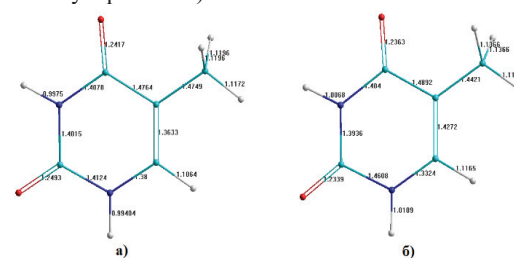


Рис. 3. Розподіл довжин зв'язків в нейтральній молекулі та позитивному молекулярному іоні тиміну. Довжини зв'язків показані в ангстремах (А) (а – нейтральна молекула, б – позитивний молекулярний іон).

Розглянемо найбільш ймовірні варіанти фрагментації. Очевидно, що ймовірність утворення того чи іншого позитивно зарядженого фрагменту тиміну буде пропорційній відношній

інтенсивності ліній в мас-спектрі тиміну. При цьому будемо вважати, що сумарна інтенсивність всіх ліній мас-спектру становить одиницю.

Для фрагментації молекулярного іону необхідним є одночасний розрив принаймні двох зв'язків в кільцевій структурі молекулярного іона тиміну (див. Рис.3). Основна ідея моделі утворення зарядженого фрагменту полягає у

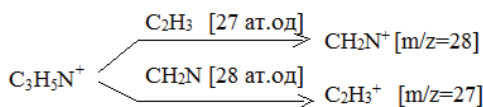
тому, що розрив зв'язків найбільш ймовірно відбувається у тих місцях, де сума довжин зв'язків є найбільшою (сила взаємодії найменша). В таблиці 1 приведений перелік сумарних довжин двох зв'язків в молекулярному іоні тиміну.

Таблиця 1

Фрагментація та розриви зв'язків у молекулі тиміну при взаємодії з електроном.

Номер розриву	Зв'язок	Сума зв'язків	Позитивно заряджений фрагмент	Нейтральний фрагмент
1	N1 – C2 C4 – C5	2.9499	$C_3H_5N^+$	C_2HNO_2
2	N3 – C4 C4 – C5	2.8931	CO^+	$C_4H_6N_2O$
3	C5 – C6 N1 – C2	2.8878	CH_2N^+	$C_4H_4NO_2$
4	C5 – C6 N3 – C4	2.831	$C_3H_3O^+$	$C_2H_3N_2O$
5	N1 – C2 N3 – C4	2.8644	$CHNO^+$	C_4H_5NO
6	C4 – C5 C5 – C6	2.9165	$C_2H_3^+$	$C_3H_3N_2O_2$

Як видно із табл.1 найбільша сумарна довжина зв'язків спостерігається по лінії розриву – 1. У цьому випадку молекулярний іон втрачає нейтральний фрагмент C_2HNO_2 утворюючи заряджений фрагмент $C_3H_5N^+$ [$m/z = 55$]. Цьому фрагменту відповідає друга по інтенсивності лінія у мас-спектрі тиміну (див.Рис.1). В подальшому $C_3H_5N^+$ маючи надлишок внутрішньої енергії розпадається, втрачаючи при цьому нейтральні фрагменти C_2H_3 та CH_2N по схемі:



Лінія з [$m/z=28$] є четвертою за інтенсивністю у мас-спектрі тиміну.

При розриві зв'язків N3 – C4; C4 – C5 молекулярний іон втрачає нейтральний фрагмент $C_4H_6N_2O$ і продукує заряджений фрагмент CO^+ [$m/z=28$], якому відповідає інтенсивна лінія в мас-спектрі.

Розрив зв'язків C5 – C6; N3 – C4 супроводжується втратою нейтрального фрагмента $C_2H_3N_2O$ у молекулярному іоні із

утворенням зарядженого фрагменту $C_3H_3O^+$. Інтенсивна лінія з [$m/z=55$] відповідає сумі чотирьох заряджених фрагментів: $C_2H_3N_2^+$; $C_3H_3O^+$; $C_3H_5N^+$ та C_2HNO^+ . Утворення якого із

цих фрагментів є найбільш ймовірним? Відповідь на це запитання дає аналіз довжин зв'язків у молекулярному іоні. А саме – розрив зв'язків C4 – C5; C5 – C6 приводять до утворення фрагмента $C_3H_3O^+$. Отже, найбільш ймовірним є утворення саме цього фрагменту.

Розрив N1 – C2; N3 – C4 приводить до втрати молекулярним іоном нейтрального фрагменту і утворення зарядженого фрагменту $CHNO^+$ [$m/z=43$]. Відповідна лінія спостерігається у мас-спектрі.

Сума довжин зв'язків C4 – C5; C5 – C6 є другою за величиною в табл.1. При цьому молекулярний іон втрачає нейтральний фрагмент $C_3H_3N_2O_2$ і продукує заряджений фрагмент $C_2H_3^+$

[$m/z=27$]. Дивним є той факт, що відповідна цьому фрагменту лінія в мас-спектрі є незначної інтенсивності. Логічне пояснення такої невідповідності (велика сума зв'язків – слабка лінія) полягає в наступному: розриви №1 та №6 (див.табл.1) в молекулярному іоні є конкурентними. Тому найбільш імовірним буде розрив №1, так як сума довжин відповідних зв'язків є найбільшою.

Висновки

Виконані розрахунки довжин зв'язків та густин зарядів в нейтральній молекулі та молекулярному іоні тиміну методом AM1, який,

входить в пакет програм HyperChem 8.0.7. Запропонована модель фрагментації молекул тиміну під дією електронів. Виявлено шість найбільш ймовірних розривів зв'язків в циклічній структурі молекулярного іона тиміну. Отримані результати добре узгоджуються з даними експериментальних досліджень. Показано, що модельний опис фрагментації біомолекули дає можливість розділити утворення двох позитивно заряджених фрагментів, які мають однакове відношення m/z .

Список використаних джерел

1. Monte Carlo simulation of fast electron and proton tracks in liquid water / [V. Cobut, Y. Frongillo, J. Patau та ін.]. // I. physical and physicochemical aspects. Radiat. Phys. Chem. – 1998. – №51. – С. 229–243.
2. Процессы образования положительных и отрицательных ионов молекул тимина, инициируемые медленными электронами / И. И.Шафраньош, М. И. Суховия, М. И. Шафраньош, Л. Л. Шимон. // ЖТФ. – 2008. – Т. 78. – №12 – С. 7–11.
3. Резонансне утворення негативних іонів молекул урацилу / М. І.Шафраньош, М. І. Суховія, Л. Л. Шимон, І. І. Шафраньош. // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія фізика. – 2008. – №23. – С. 85–90.
4. Абсолютное сечение образования отрицательных ионов молекул цитозина электронным ударом / М. И.Шафраньош, М. И. Суховия, Л. Л. Шимон, Л. Л. Шафраньош. // Письма в ЖТФ. – 2005. – Т. 78. – №24. – С. 74–77.
5. AM1: A general purpose quantum mechanical molecular model / M. S.Dewar, E. G. Zorbish, E. E. Headly, J. J. Stewart. // J. Am. Chem. Soc.. – 1985. – Т. 107. – №13. – С. 3902–3909.

References

1. COBUT, V. et al (1998) Monte Carlo simulation of fast electron and proton tracks in liquid water. *I. physical and physicochemical aspects. Radiat. Phys. Chem.* 51. p.229–243.
2. SHAFRANYOSH, I.I., SUKHOVIYA, M.I., SHAFRANYOSH, M.I. & SHIMON, L.L. (2008) Formation of positive and negative ions of thymine molecules under the action of slow electrons. *Technical Physics.* 53(12),p.1536-1540.
3. SHAFRANYOSH, M.I., SUKHOVIYA, M.I., SHIMON, L.L. & SHAFRANYOSH, I.I. (2008) Negative ions resonant formations of uracil molecules. *Scientific Herald of Uzhhorod University.Series Physics.* 23.p.85-90.
4. SHAFRANYOSH, M.I., SUKHOVIYA, M.I., SHIMON, L.L. & SHAFRANYOSH, I.I. (2005) Absolute cross sections for the electron-impact formation of cytosine anions. *Technical physics letters.* 31(12).p.1071-1073.
5. DEWAR, M. S., ZOEBISH, E. G., HEADLY, E. E. & STEWART, J. J. (1985) AM1: A general purpose quantum mechanical molecular model. *J. Am. Chem. Soc.* 107(13),p.3902-3909.

Надійшла до редколегії 18.01.19

Підписано до друку 17.04.2019. Формат 70х100¹/₁₆.
Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman.
Ум.друк. арк. 9,76. Обл.-вид. арк. 11,55.
Тираж 300 прим. Зам. № 18.

ДП «Інформаційно-аналітичне агентство»
вул. Еспланадна 4–6, м. Київ, 01601, Україна
тел/факс 287-03-79, 289-77-62
E-mail: info@iaastat.kiev.ua