

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

№1 2019

**Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
випуск №1, 2019,**

Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Фізика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, механіко-математичного факультетів, факультету радіофізики, електроніки та комп’ютерних систем і факультету комп’ютерних наук та кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1222 від 07.10.2016), та реферується в Реферативному журналі, Zentralblatt MATH.

Редакційна колегія:

Козаченко Юрій Васильович, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор**;
Розора Ірина Василівна, к.ф.-м.н., доц.,

Bartlova Milada, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;
Bavula Vladimir, Prof., University of Sheffield, Great Britain;
Beghin Luisa, Prof., Sapienza Università di Roma, Italy;
Futorny Vyacheslav, Prof., Universidade de São Paulo, Brazil;
Giuliano Rita, Prof., Università di Pisa, Italy;
Gorlatch Sergei, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;
Hudak Stefan, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;
Kukhtarev Nikolai, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;
Leonenko Nikolay, Prof., Cardiff University, Great Britain;
Medvids Arturs, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;
Olenko Andriy, Prof., La Trobe University, Australia;
Orsingher Enzo, Prof., Sapienza University of Rome, Italy;
Ostrovsky Eugene, Prof., Bar-Ilan University, Israel;
Pogany Tibor, Prof., University of Rijeka, Croatia;
Rontó Miklós, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;
Silvestrov Dmitrii, Prof., Stockholms universitet, Sweden;
Sottinen Tommi, Prof., University of Vaasa, Finland;
Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;
Trofimchuk Sergey, Prof., Universidad de Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;
Volodin Andrei, Prof., University of Regina, Canada;
Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;
Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Безущак Оксана Омелянівна, к.ф.-м.н., доцент;
Буй Дмитро Борисович, д.ф.-м.н., проф.;
Булавін Леонід Анатолійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;
Гаращенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;
Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;
Жук Ярослав Олександрович, д.ф.-м.н., проф.;
Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., проф.;
Кириченко Володимир Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Курченко Олександр Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;
Львов Віктор Анатолійович, д.ф.-м.н., проф.;
Макара Володимир Арсенійович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;
Майборода Ростислав Євгенович, д.ф.-м.н., проф.;
Моклячук Михайло Павлович, д.ф.-м.н., проф.;
Пашко Анатолій Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Петравчук Анатолій Петрович, д.ф.-м.н., проф.;
Погорілий Сергій Дем’янович, д.т.н., проф.;

Савенков Сергій Миколайович, д.ф.-м.н., доц.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.;
Сливка-Тилишак Ганна Іванівна, д.ф.-м.н., проф.;
Хусаїнов Денис Ях'євич, д.ф.-м.н., проф.;

Редакційний відділ:

Затула Дмитро Васильович, **відповідальний секретар**;
Безущак Оксана Омелянівна, bezusch@univ.kiev.ua;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodty@univ.kiev.ua;
П'ятецька Олена Василівна, visnyk.phys-math@ukr.net;
Отто Георгій Костянтинович, **технічний редактор**, ottogk@gmail.com.

Адреса редакційної колегії:

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49
fm.visnyk@ukr.net
ISBN 978-966-2142
ISSN 1812-5409

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

КВ №16299-4771Р від 11.12.2009 року

Безкоштовно

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Борисенко О.Д., Борисенко Д.О. Стохастична перманентність розв'язку стохастичного неавтономного логістичного рівняння зі стрибками	10
--	----

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Абрамов О.А., Ємельянов В.В., Куценко О.Г., Отто Г.К., Отто К.В., Яровой Л.К. Лазерний доплерівський віброметр з можливістю сканування віддалених об'єктів	16
Адлуцький В.Я., Годес А.Ю., Лобода В.В. Скінченноеlementний аналіз пружно-пластичного стану тріщини на межі розділу площини з круговим включенням	20
Васільєв К.В., Сулим Г.Т. Метод вирізування у задачі поздовжнього зсуву анізотропного півпростору з тріщиною	24
Ващіліна О.В., Лебедева І.В., Білобрицька О.І. Моделювання та чисельне дослідження явища самозбурення коливань кружляння бурильного долота	28
Bogdanova O.S. Influence of the material anisotropy on the limit state of orthotropic plate with periodic system of collinear cracks under biaxial loading	34
Грінченко В.Т., Вовк І.В., Маципура В.Т. Особливості методу часткових областей	38
Голуб В. П. Щодо розв'язку задач повзучості тонкостінних трубчастих елементів із ізотропних нелінійно-в'язкопружних матеріалів	42
Жук Я.О. Теплова нестійкість нанокомпозитних елементів конструкцій при циклічному навантаженні	46
Жук О.П., Жук Я.О. Дія радіаційної сили в звуковій хвилі на сферичну краплю в околі вільної поверхні рідини	50
Журавльова З. Ю., Вайсфельд Н. Д., Мойсеєнок О. П., Реут В. В. Дослідження напруженого стану півсмуги для випадку усталених коливань	54
Зражевський Г.М., Зражевська В.Ф. Використання формалізму узагальнених функцій при моделюванні дефектів точковими особливостями	58
Зражевський Г.М., Зражевська В.Ф. Постановка та дослідження задачі про оптимальне збудження коливань пластини	62
Калиняк Б.М. Про деякі способи досягнення відсутності термонапружень у неоднорідному за товщиною безмежному шарі при стаціонарному тепловому навантаженні	66
Kavian E., Dibiajan S. H. Investigating the effect of Non-uniform voids on the final strength of engineered porous materials	70
Kharytonov O., Savchenko S., Miranda N. Optimization of sprint interplanetary trajectories with nuclear bimodal thermal propulsion	74
Киричок І.Ф., Жук Я. О., Чернюшок О.А., Тарасов А. П. Постановка задачі термомеханіки для гнучкої циліндричної оболонки з п'єзоактивними шарами при врахуванні зсувів	78
Кобзар Ю.М. Втомна довговічність гладких циліндричних стрижнів при одновісному симетричному розтягу-стиску	82
Константинов О.В. Керування резервуаром, частково заповненим рідиною, на основі принципу найменшого примусу Гауса (задача гальмування)	86
Кривий О.Ф., Морозов Ю.О. Кругове теплоактивне міжфазне включення в кусково-однорідному трансверсально-ізотропному просторі	90
Кундрат М.М., Кундрат А.М., Заблотська Ю.В. Відшарування гнучкого нерозтягливого підсилення вільного краю півбезмежної пластини	96
Куценко О.Г., Харитонов О.М., Харитонova Л.В. Аналітична модель деформування фланця з приєднаною обичайкою під дією внутрішнього тиску	98
Кушнір Р.М., Токовий Ю.В., Бойко Д.С. Метод безпосереднього інтегрування у тривимірних задачах теорії пружності та термопружності для неоднорідних трансверсально ізотропних тіл: ключові рівняння в напруженнях	102
Лавренюк М.В. Методи розрахунку прогину ортотропної неоднорідної пластини на пружній основі	106
Лимарченко О.С., Слюсарчук Ю.А. Аналіз впливу маси резервуару на поведінку системи сферичний резервуар-рідина з вільною поверхнею	110
Лубков М.В. Застосування скінчено-елементно-різницевого методу для моделювання фільтраційних процесів	114

Маковійчук М.В., Шацький І.П. Згин зосередженою силою тонкої пластини, розташованої на пружній основі та послабленої контактною тріщиною	118
Маслов Б.П. Застосування квазілінійної моделі в'язкопружності для прогнозування повзучості неоднорідного геологічного середовища	122
Мегрегганіан Н., Фаллах А.С., Люка Л.А. Великі пружно-пластичні деформації квадратних мембран під дією локалізованих імпульсних навантажень	126
Можаровський В.В., Москалёва М.В. Реалізація розрахунку згинних деформацій зубів зубчастих коліс з композитів	134
Онишкевич В.М., Сулим Г.Т. Урахування зношування при плоскому контакті прямокутного штамп з пружною півплощиною	138
Опанасович В.К., Слободян М.С., Білаш О.В. Чистий згин полоси (балки) з довільно орієнтованою наскрізною тріщиною	142
Остос О.Х., Жук Я.О. Термомеханічна задача про коливання в'язкопружного гумоподібного стержня при динамічному навантаженні	146
Павлюк Я.В. До задачі розрахунку релаксації напружень у тонкостінних трубчастих елементах із лінійно-в'язкопружних матеріалів	150
Плацинська А.В. Щодо моделювання розповсюдження тріщини втоми в тонкій ізотропній пластині в умовах двовісного асиметричного розтягу-стиску	154
Попов В.Г., Литвин О.В. Напружений стан у пружному тілі з триланковим жорстким включенням при гармонічних коливаннях поздовжнього зсуву	158
Процюк Б.В. Визначення квазістатичного термопружного стану плоскошаруватих термочутливих тіл	162
Райновський І.А. Усталені резонансні коливання рідини у вертикальному циліндричному баці при орбітальних збуреннях	166
Ревенко В.П. Розрахунок методом скінченних тіл плоского напруженого стану прямокутних пластин із прямокутним отвором	170
Рево С.Л., Мельниченко М.М., Авраменко Т.Г., Іваненко К.О., Андрущенко В.О. Мікротвердість компактованого термічно розширеного графіту	174
Резнік В.С. Про один метод визначення параметрів ядер спадковості нелінійно в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану	178
Реут В.В., Молоканов Ю.В. Плоский напружений стан для смуги, що ослаблена тріщиною	182
Романов О.В., Фернаті П.В. До питання врахування впливу третього інваріанту девіатора напружень на процес довготривалого деформування нелінійно-в'язкопружних матеріалів	186
Розумнюк В. І. Про загальні розв'язки рівнянь Ейлера і Нав'є-Стокса	190
Samoilenko V.Hr., Samoilenko Yu.I., Vovk V.S. Asymptotic analysis to the singularly perturbed Korteweg-de Vries equation	194
Савельєва К.В., Дашко О.Г., Симчук Я.В. Плоскі хвилі в нанокompозитних матеріалах	198
Сенченков И.К., Червинко О.П. Нестационарные процессы в подкрепленном тонкостенной оболочкой вязкоупругом цилиндре при импульсном нагружении	202
Середницька Х.І., Мартиняк Р.М. Термопружна поведінка біматеріалу з міжфазною щільною, заповненою нестисливою рідиною	206
Timokha A.N., Lahodzinskyi O.E. Steady-state sloshing in an orbitally-forced square-base tank	210
Timokha A.N., Tkachenko E.M. Resonant steady-state sloshing in upright tanks performing a three-dimensional periodic motion	214
Троценко Я.П. Чисельне моделювання потоку в'язкої нестисливої рідини крізь циліндричні порожнини	218
Турчин І.М., Василько Г.В., Іваськевич О.Я. Нестационарна змішана задача теплопровідності для півбезмежного порожнистого циліндра	222

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Волошин О.Ф., Святогор Л.О., Могрун В.В. Смысловый анализ текстов, представленных природною мовою	228
---	-----

РАДІОФІЗИКА

Мартиш Є.В. Зменшення негативного впливу змін космічної погоди на стан людини	236
---	-----

СУЧАСНА ФІЗИКА

Ящук В.М., Лебедева І.В., Навозенко О.М. Прояви міграції триплетних електронних збуджень у π – електрон – містких полімерах	242
---	-----

CONTENTS

ALGEBRA, GEOMETRY AND PROBABILITY THEORY

Borysenko O.D., Borysenko D.O. Stochastic permanence of solution to stochastic non-autonomous logistic equation with jumps	10
--	----

DIFFERENTIAL EQUATIONS, MATHEMATICAL PHYSICS AND MECHANICS

Abramov O.A., Emelyanov V.V., Kutsenko O.G., Otto G. K., Otto K.V., Yarovoi L.K. Laser doppler vibrometer with remote object scanning capability	16
Adlucky V.J., Hodes A. Yu., Loboda V. V. Finite element analysis of elastic-plastic state of crack at the interface between infinite plane and circular inclusion	20
Vasil'ev K. V., Sulym G. T. Cutting-out method in the problem of longitudinal shear of anisotropic half-space with a crack	24
Vashchilina O. V., Lebedyeva I. V., Bilobrytska O. I. Modeling and numerical research of the self-excitation phenomenon of the drill bit whirlings vibrations	28
Bogdanova O.S. Influence of the material anisotropy on the limit state of orthotropic plate with periodic system of collinear cracks under biaxial loading	34
Grinchenko V.T., Vovk I.V., Matsypura V. T. Features of the method of partial domains	38
Golub V.P. Towards the solution of creep problems of thin-shelled tubular elements in isotropic nonlinear viscoelastic materials	42
Zhuk Y.A. Thermal instability of nanocomposite structural elements under cyclic loading	46
Zhuk O.P., Zhuk Y.A. Acoustic radiation force effect on a spherical drop placed in the vicinity of an ideal liquid free surface	50
Zhuravlova Z.Yu., Vaysfeld N.D., Moyseenok O.P., Reut V.V. Investigation of the semistrip's stress state in the case of steady-state oscillations	54
Zrazhevsky G.M., Zrazhevskaya V.F. Usage of generalized functions formalism in modeling of defects by point singularity	58
Zrazhevsky G.M., Zrazhevskaya V.F. Formulation and study of the problem of optimal excitation of plate oscillations	62
Kalynyak B.M. On some ways to achieve the absence of thermal stresses in an inhomogeneous through thickness infinite layer under stationary thermal loading	66
Kavian E., Dibajian S. H. Investigating the effect of Non-uniform voids on the final strength of engineered porous materials	70
Kharytonov O., Savchenko S., Miranda N. Optimization of sprint interplanetary trajectories with nuclear bimodal thermal propulsion	74
Kirichok I.F., Zhuk Y.A., Chenyshok O.A., Tarasov A.P. Formulation of the problem of thermomechanics for a flexible cylindrical shell with piezoelectric layers with taking into account to displacements	78
Kobzar Ju.M. Fatigue durability of smooth cylindrical rods under uniaxial symmetric stretch – compression	82
Konstantinov O.V. Control of a reservoir partially filled with liquid based on Gauss's principle of least constraint (deceleration task)	86
Kryvyi O. F., Morozov Yu. O. Circular thermoactive interphase inclusion in a piecewise homogeneous transversal-isotropic space	90
Kundrat M.M., Kundrat A.M., Zablotska Yu.V. Exfoliation the flexible continuous reinforcements of the free edge of a semiinfinite plate	94
Kutsenko O.G., Kharytonov O.M., Kharytonova L. V. Analytical model of deformation of flange with concatenated shell under internal pressure	98
Kushnir R.M., Tokovyy Y.V., Boiko D.S. Direct integration method in three-dimensional elasticity and thermoelasticity problems for inhomogeneous transversely isotropic solids: governing equations in terms of stresses	102
Lavrenyuk M.V. Methods of calculating the deflection of an orthotropic inhomogeneous plate on an elastic basis	106
Limarchenko O.S., Sliusarchuk Y.A. Analysis of reservoir's mass influence on the system free – surfaced liquid and spherical reservoir	110
Lubkov M.V. Application of the finite element-differences method for modeling of filtration processes	114
Makoviichuk M.V., Shatskyi I. P. Bending by concentrated force of thin plate located on elastic foundation and weakened by contact crack	118

Maslov B.P. Application of a quasi-linear visco-elastic model for the creep of a non-heterogeneous geological media prediction	122
Mehreganian N., Fallah A.S., Louca L.A. Large elastic-plastic deformation of square membranes subjected to localised pulse pressure loads	126
Mozharovsky V.V., Moskaleva M.V. Realization of calculation of bended deformations of teeth of gear wheels from composites	134
Onyshkevych V.M., Sulym G.T. Consideration of wear in plane contact of rectangular punch and elastic half-plane	138
Opanasovych V.K., Slobodyan M.S., Bilash O.V. Pure bending of strip (beam) with the arbitrarily oriented cross-cutting crack	142
Ostos O.J., Zhuk Y.A. Thermomechanical problem on vibration of a viscoelastic rubberlike rod under dynamic loading	146
Pavlyuk Y.V. Creep of isotropic homogeneous and nonaging of linear-viscoelastic materials under the complex stress state	150
Plashchynska A.V. To the modelling of the fatigue cracks propagation in a thin isotropic plates under biaxial asymmetric tension-compression	154
Popov V.G., Lytvyn O.V. The stress state in an elastic body with a rigid inclusion of the shape of three segments broken line under the action of the harmonic oscillation of the longitudinal shift	158
Protsiuk B.V. Determination of quasi-static thermoelastic state of layered thermosensitive plates	162
Raynovskyy I.A. Steady-state resonant sloshing in upright cylindrical tank due to elliptical forcing	166
Revenko V.P. Method of finite bodies for determination of the plane stressed state of rectangular plates with a rectangular hole	170
Revo S.L., Melnichenko M.M., Avramenko T.G., Ivanenko K.O., Andruschenko V.O. Microhardness of compacted thermally expanded graphite	174
Reznik V.S. On some method of the heredity kernel parameters determination of nonlinear viscoelastic materials under the complex stress state	178
Reut V.V., Molokanov Yu. V. Plane stress state of a strip weakened by a crack	182
Romanov A. V., Fernati P. V. To the problem of influence of the third invariant of stress deviator on the process of longterm deformation of nonlinear viscoelastic materials	186
Rozumniuk V.I. About general solutions of Euler's and Navier- Stokes equations	190
Samoilenko V.Hr., Samoilenko Yu.I., Vovk V.S. Asymptotic analysis to the singularly perturbed Korteweg-de Vries equation	194
Savelieva K.V., Dashko O.G., Simchuk Y.V. Plane waves in nano-composite materials	198
Senchenkov I.K., Chervinko O.P. Unsteady processes in stiffened by thin shell viscoelastic cylinder under pulse loading	202
Serednytska Kh. I., Martynyak R. M. Thermoelastic behavior of a bimaterial with interface crack filled with an incompressible fluid	206
Timokha A.N., Lahodzinskyi O.E. Steady-state sloshing in an orbitally-forced square-base tank	210
Timokha A.N., Tkachenko E.M. Resonant steady-state sloshing in upright tanks performing a three-dimensional periodic motion	214
Trotsenko Ya.P. Numerical simulation of the flow of viscous incompressible fluid through cylindrical cavities	218
Turchyn I.M., Vasylo G.V., Ivaskevych O.Ya. The mixed unsteady heat conduction problem for a half-infinite hollow cylinder	222

COMPUTER SCIENCES AND INFORMATICS

Voloshyn O.F., Sviatogor L.O., Morgun V.V. Semantic Analysis of Texts Presented in Natural Language	228
---	-----

RADIOPHYSICS

Martysh E.V. Reducing the negative impact of changes in space weather on human condition	236
--	-----

MODERN PHYSICS

Yashchuk V.M., Lebedyeva I.V., Navozenko O.M. Manifestations of triplet electronic excitations migration in π -electron containing polymers	242
---	-----

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ ТА ТЕОРИЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 519.21

О.Д. Борисенко¹, к.ф.-м.н., доцент
Д.О. Борисенко¹, аспірант

**Стохастична перманентність розв'язку
стохастичного неавтономного
логістичного рівняння зі стрибками**

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64.
e-mail: ¹odb@univ.kiev.ua

O.D. Borysenko¹, Ph.D., Associate Professor
D.O. Borysenko¹, Ph.D. student

**Stochastic permanence of solution to
stochastic non-autonomous logistic
equation with jumps**

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.,
e-mail: ¹odb@univ.kiev.ua

У роботі одержано достатні умови стохастичної перманентності розв'язку стохастичного неавтономного логістичного рівняння, яке містить члени з центрованою і нецентрованою пуассонівськими мірами. Коефіцієнти рівняння не задовольняють умову лінійного обмеження.

Ключові слова: стохастична перманентність, неавтономне логістичне диференціальне рівняння, стохастичне диференціальне рівняння, центрована і нецентрована пуассонівські міри.

It is investigated the non-autonomous logistic differential equation with disturbance of coefficients by white noise, centered and non-centered Poisson noises. The coefficients of equation are locally Lipschitz continuous but do not satisfy the linear growth condition. This equation describes the dynamics of population in the Verhulst model which takes into account the logistic effect: an increase of the population size produces a fertility decrease and a mortality increase; since resources are limited, if the population size exceeds some threshold level, the habitat cannot support the growth. The property of stochastic permanence is desirable since it means the long time survival in a population dynamics. The sufficient conditions for the stochastic permanence of population in the considered model is obtained.

Key Words: stochastic permanence, non-autonomous logistic differential equation, stochastic differential equation, centered and non-centered Poisson measures.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Козаченко Ю.В.

1 Вступ

Побудова логістичної моделі та її властивості представлені у роботі [1]. Класичне неавтономне логістичне диференціальне рівняння має вигляд $dN(t) = N(t)(a(t) - b(t)N(t))dt$, $N(0) = N_0 > 0$ і моделює розмір N популяції, члени якої конкурують один з одним за обмежену кількість їжі та обмежений життєвий простір. Тут $a(t)$ – це інтенсивність росту популяції і $a(t)/b(t)$ – це ємність середовища у момент часу t . У роботі [2] вивчалось, зокрема, стохастичне неавтономне логістичне диференціальне рівняння вигляду

$$dN(t) = N(t) [(a(t) - b(t)N(t))dt + \alpha(t)N(t)dw(t)], \quad N(0) = N_0, \quad (1)$$

де $w(t)$ – це стандартний одновимірний Вінерів процес. Оскільки модель (1) описує динаміку популяції, то важливим питанням є визначення умов, при яких популяція вимирає, і умов, при яких виживає. В [2] одержано поріг виживання,

вимирання популяції у моделі (1). У роботі [3] розглядалось стохастичне неавтономне логістичне диференціальне рівняння вигляду

$$dN(t) = N(t) \left[(a(t) - b(t)N(t))dt + \alpha(t)dw(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma_1(t, z)\tilde{\nu}_1(dt, dz) + \int_{\mathbb{R}} \gamma_2(t, z)\nu_2(dt, dz) \right], \quad N(0) = N_0, \quad (2)$$

де $w(t)$ – це стандартний одновимірний Вінерів процес, $\tilde{\nu}_1(t, A) = \nu_1(t, A) - t\Pi_1(A)$, $\nu_1(t, A)$ і $\nu_2(t, A)$ – незалежні міри Пуассона, які є незалежними від $w(t)$ і $N_0 > 0$, $E[\nu_i(t, A)] = t\Pi_i(A)$, $i = 1, 2$, $\Pi_i(A)$, $i = 1, 2$ – це скінченні міри на Борелевих множинах A у $\mathbb{R}$. В [3] одержано явний вигляд глобального розв'язку рівняння (2) і достатні умови його стохастичної перманентності. У роботі [4] для рівняння (2) одержано достатні умови вимирання популяції майже напевно, неживання популяції у середньому майже напевно, слабкого та сильного

виживання популяції у середньому майже напевно.

Ми будемо вивчати властивість стохастичної перманентності розв'язку стохастичного диференціального рівняння вигляду

$$\begin{aligned} dN(t) = & N(t)[(a(t) - b(t)N(t))dt + \\ & + \alpha(t)N(t)dw(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma_1(t, z)N(t)\tilde{\nu}_1(dt, dz) + \\ & + \int_{\mathbb{R}} \gamma_2(t, z)N(t)\nu_2(dt, dz)], N(0) = N_0, \end{aligned} \quad (3)$$

де $N_0 > 0$ є не випадковим початковим значенням.

Означення 1.1. Розв'язок $N(t)$ рівняння (3) є стохастично перманентним, якщо для $\forall \varepsilon > 0$ існують додатні константи $H = H(\varepsilon)$, $h = h(\varepsilon)$ такі, що $\liminf_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\{N(t) \leq H\} \geq 1 - \varepsilon$, $\liminf_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\{N(t) \geq h\} \geq 1 - \varepsilon$.

Властивість перманентності є важливою, бо означає довготермінове виживання у популяційній динаміці. Як відомо авторам, питання стохастичної перманентності у моделі популяційної динаміки, яка описується стохастичним диференціальним рівнянням вигляду (3), ще не досліджувались. Тому таке дослідження є актуальним.

Будемо використовувати такі позначення $f_* = \liminf_{t \rightarrow \infty} f(t)$, $f^* = \limsup_{t \rightarrow \infty} f(t)$. Для неперервної обмеженої функції $f(t)$, $t \in [0, +\infty)$ позначимо $f_{\sup} = \sup_{t \in [0, +\infty)} f(t)$, $f_{\inf} = \inf_{t \in [0, +\infty)} f(t)$.

У цій статті ми використали ідеї роботи [2].

2 Основний результат

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – це ймовірнісний простір і $w(t)$, $t \geq 0$ – стандартний одновимірний вінерів процес на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $N_0 > 0$ – не випадкова початкова умова, $\nu_1(t, A)$ і $\nu_2(t, A)$ – незалежні міри Пуассона, визначені на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, які не залежать від $w(t)$, $\tilde{\nu}_1(t, A) = \nu_1(t, A) - t\Pi_1(A)$, $E[\nu_i(t, A)] = t\Pi_i(A)$, $i = 1, 2$, $\Pi_i(A)$, $i = 1, 2$ – це скінченні міри на борелевих множинах A в $\mathbb{R}$. На ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ задано потік σ -алгебр $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, який задовольняє звичні умови, де $\mathcal{F}_t = \sigma\{w(s), \nu_i(s, A), i = 1, 2, s \leq t\}$.

Коефіцієнти рівняння (3) не задовольняють умові лінійної обмеженості, але задовольняють локальну умову Ліпшиця, тому (див. [5], Теорема 6, ст.246) існує локальний розв'язок рівняння (3). У роботі [6] доведено наступну теорему.

Теорема 2.1. Нехай $b_{\inf} > 0$, $a(t), b(t), \alpha(t)$ – це обмежені, неперервні функції, визначені на $[0, +\infty)$. Будемо припускати, що $\Pi_i(\mathbb{R}) < \infty$, $i = 1, 2$, $\gamma_i(t, z)$, $i = 1, 2$ – це обмежені, неперервні по t функції, $i \inf \gamma_1(t, z) > 0$, $\gamma_2(t, z) \geq 0$. Тоді для довільного не випадкового початкового значення $N(0) = N_0 > 0$ існує єдиний розв'язок $N(t)$ рівняння (3), який є глобальним і $\mathbf{P}\{N(t) \geq 0\} = 1$.

Основним результатом даної роботи є

Теорема 2.2. Нехай виконуються умови Теорему 2.1 і $a_* > 0$, тоді розв'язок $N(t)$ рівняння (3) є стохастично перманентним.

Доведення. Покажемо спочатку, що для $\forall \varepsilon > 0$ існує константа $H = H(\varepsilon) > 0$ така, що $\liminf_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\{N(t) \leq H\} \geq 1 - \varepsilon$. Виберемо достатньо велике $n_0 > 0$ так, щоб $N_0 \in [1/n_0, n_0]$. Для $\forall n \geq n_0$ визначимо момент зупинки $\tau_n = \inf\{t \geq 0 : N(t) \notin (1/n_0, n_0)\}$. Зрозуміло, що $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n = +\infty$ майже напевно (м.н.). Застосуємо формулу Іто до процесу $e^{tN^q(t)}$, $0 < q < 1$

$$\begin{aligned} e^{t \wedge \tau_n} N^q(t \wedge \tau_n) = & N_0^q + \int_0^{t \wedge \tau_n} q e^s N^q(s) \left\{ 1/q + a(s) - b(s)N(s) - \right. \\ & - \frac{(1-q)}{2} \alpha^2(s) N^2(s) + \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}} [(1 + \gamma_1(s, z)N(s))^q - \\ & - 1 - \gamma_1(s, z)N(s)] \Pi_1(dz) + \\ & + \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}} [(1 + \gamma_2(s, z)N(s))^q - 1] \Pi_2(dz) \Big\} ds + \\ & + \int_0^{t \wedge \tau_n} q e^s N^{q+1}(s) \alpha(s) dw(s) + \\ & + \int_0^{t \wedge \tau_n} \int_{\mathbb{R}} e^s N^q(s) [(1 + \gamma_1(s, z)N(s))^q - 1] \tilde{\nu}_1(ds, dz) + \\ & + \int_0^{t \wedge \tau_n} \int_{\mathbb{R}} e^s N^q(s) [(1 + \gamma_2(s, z)N(s))^q - 1] \nu_2(ds, dz), \end{aligned} \quad (4)$$

де $\tilde{\nu}_i(ds, dz) = \nu_i(ds, dz) - \Pi_i(dz)ds$, $i = 1, 2$.

Оскільки $(1 + x)^q \leq 1 + x$, $x \geq 0$ при $0 < q < 1$ і $N(s) \geq 0$ м.н., тому маємо

$$\begin{aligned} q N^q(s) \Big\{ 1/q + a(s) - b(s)N(s) - \\ - \frac{(1-q)}{2} \alpha^2(s) N^2(s) + \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}} [(1 + \gamma_1(s, z)N(s))^q - \\ - 1 - \gamma_1(s, z)N(s)] \Pi_1(dz) + \\ + \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}} [(1 + \gamma_2(s, z)N(s))^q - 1] \Pi_2(dz) \Big\} \leq \\ \leq N^q(s) \left(1 + q \left(a_{\sup} - b_{\inf} N(s) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1-q}{2} \alpha^2(s) N^2(s) \right) + \right. \\ \left. + \Pi_2(\mathbb{R})[(1 + N(s) \sup_{s, z} \gamma_2(s, z))^q - 1] \right) \leq K \end{aligned}$$

для деякої константи $K > 0$. Тому із (4) одержимо

$$\begin{aligned} e^{t \wedge \tau_n} N^q(t \wedge \tau_n) &\leq N_0^q + K(e^t - 1) + \\ &+ \int_0^{t \wedge \tau_n} q e^s N^{q+1}(s) \alpha(s) dw(s) + \\ &+ \int_0^{t \wedge \tau_n} \int_{\mathbb{R}} e^s N^q(s) [(1 + \gamma_1(s, z) N(s))^q - 1] \tilde{\nu}_1(ds, dz) + \\ &+ \int_0^{t \wedge \tau_n} \int_{\mathbb{R}} e^s N^q(s) [(1 + \gamma_2(s, z) N(s))^q - 1] \tilde{\nu}_2(ds, dz). \end{aligned}$$

Взявши математичне сподівання і використавши властивості стохастичних інтегралів, одержимо $\mathbb{E}[e^{t \wedge \tau_n} N^q(t \wedge \tau_n)] \leq N_0^q + K(e^t - 1)$, і при $n \rightarrow \infty$ маємо

$$\mathbb{E}[N^q(t)] \leq e^{-t} N_0^q + K, \quad (5)$$

а тому $\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[N^q(t)] \leq K$. Для довільного $\varepsilon > 0$ покладемо $H = (K/\varepsilon)^{1/q}$ і за нерівністю Чебишева маємо $\mathbf{P}\{N(t) > H\} = \mathbf{P}\{N^q(t) > H^q\} \leq \mathbb{E}[N^q(t)]/H^q$, а значить $\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{N(t) > H\} \leq \frac{\varepsilon}{K} \limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[N^q(t)] \leq \varepsilon$. Тому $\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{N(t) \leq H\} \geq 1 - \varepsilon$.

Тепер доведемо, що для $\forall \varepsilon > 0$ існує $h = h(\varepsilon) > 0$ таке, що $\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{N(t) \geq h\} \geq 1 - \varepsilon$. Позначимо $V_1(x) = x^{-2}, x \geq 0$ і $V_2(x) = (1 + V_1(x))^\theta, \theta \in (1/4, 1/2)$. За формулою Іто маємо

$$\begin{aligned} V_2(N(t)) &\leq V_2(N(t_0)) + \int_{t_0}^t \theta(1 + V_1(N(s)))^{\theta-2} \times \\ &\times \left\{ -2a(s)V_1^2(N(s)) + 2V_1^{1.5}(N(s)) \left(b(s) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \int_{\mathbb{R}} \gamma_1(s, z) \Pi_1(dz) \right) + V_1(N(s))[(2\theta + 1)\alpha^2(s) - \right. \\ &\left. - 2a(s)] + 2V_1^{0.5}(N(s)) \left(b(s) + \int_{\mathbb{R}} \gamma_1(s, z) \Pi_1(dz) \right) + \right. \\ &\left. + 3\alpha^2(s) \right\} ds - 2 \int_{t_0}^t \theta(1 + V_1(N(s)))^{\theta-1} \frac{\alpha(s)}{N(s)} dw(s) + \\ &+ \sum_{i=1}^2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}} \left[\left(1 + \frac{V_1(N(s))}{(1 + N(s)\gamma_i(s, z))^2} \right)^\theta - \right. \\ &\left. - (1 + V_1(N(s)))^\theta \right] \tilde{\nu}_i(ds, dz). \end{aligned} \quad (6)$$

Із означення a_* випливає, що для $\forall \varepsilon > 0$ існує таке $t_0 > 0$, що $\forall t \geq t_0$ маємо $\inf_{s \geq t} a(s) > a_* - \varepsilon$. Виберемо $\forall \varepsilon > 0$ так, щоб $a_* - \varepsilon > 0$. Тоді із (6) одержимо для $\forall t \geq t_0$:

$$\begin{aligned} V_2(N(t)) &\leq V_2(N(t_0)) + \int_{t_0}^t \theta(1 + V_1(N(s)))^{\theta-2} \times \\ &\times \left\{ -2(a_* - \varepsilon)V_1^2(N(s)) + 2c_{\sup} V_1^{1.5}(N(s)) + \right. \\ &\left. + [(2\theta + 1)(\alpha^2)_{\sup} - 2(a_* - \varepsilon)]V_1(N(s)) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left. + 2c_{\sup} V_1^{0.5}(N(s)) + 3(\alpha^2)_{\sup} \right\} ds - \quad (7) \\ &- 2 \int_{t_0}^t \theta(1 + V_1(N(s)))^{\theta-1} \alpha(s) N^{-1}(s) dw(s) + \\ &+ \sum_{i=1}^2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}} \left[\left(1 + \frac{V_1(N(s))}{(1 + N(s)\gamma_i(s, z))^2} \right)^\theta - \right. \\ &\left. - (1 + V_1(N(s)))^\theta \right] \tilde{\nu}_i(ds, dz), \end{aligned}$$

де $c_{\sup} = \sup_t (b(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma_1(t, z) \Pi_1(dz))$. Виберемо $\eta > 0$ так, щоб $0 < \eta/\theta < 2(a_* - \varepsilon)$. Нехай $V_3(x) = e^{\eta t} V_2(x)$. Тоді за формулою Іто $dV_3(N(t)) = \eta e^{\eta t} V_2(N(t)) dt + e^{\eta t} dV_2(N(t))$ і, використавши (7), одержимо

$$\begin{aligned} V_3(N(t)) &\leq V_3(N(t_0)) + \int_{t_0}^t \theta e^{\eta s} (1 + V_1(N(s)))^{\theta-2} \times \\ &\times \left\{ -2(a_* - \varepsilon - \frac{0.5\eta}{\theta})V_1^2(N(s)) + 2c_{\sup} V_1^{1.5}(N(s)) + \right. \\ &\left. + [(2\theta + 1)(\alpha^2)_{\sup} - 2(a_* - \varepsilon - \frac{\eta}{\theta})]V_1(N(s)) + \right. \\ &\left. + 2c_{\sup} V_1^{0.5}(N(s)) + 3(\alpha^2)_{\sup} + \eta/\theta \right\} ds - \\ &- 2 \int_{t_0}^t e^{\eta s} \theta(1 + V_1(N(s)))^{\theta-1} \alpha(s)/N(s) dw(s) + \\ &+ \sum_{i=1}^2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}} e^{\eta s} \left[\left(1 + \frac{V_1(N(s))}{(1 + N(s)\gamma_i(s, z))^2} \right)^\theta - \right. \\ &\left. - (1 + V_1(N(s)))^\theta \right] \tilde{\nu}_i(ds, dz) = \\ &= V_3(N(t_0)) + \int_{t_0}^t e^{\eta s} F(N(s)) ds + \sum_{i=1}^3 J_{st}^i, \end{aligned}$$

де $F(x), x \geq 0$ – функція обмежена зверху деякою константою $K > 0$, а $J_{st}^i, i = \overline{1, 3}$ – відповідні стохастичні інтеграли у попередній формулi. Таким чином

$$V_3(N(t)) \leq V_3(N(t_0)) + \frac{K}{\eta} (e^{\eta t} - e^{\eta t_0}) + \sum_{i=1}^3 J_{st}^i. \quad (8)$$

Покажемо, що $\mathbb{E}[J_{st}^i] = 0, i = \overline{1, 3}$. Маємо

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^t e^{2\eta s} (1 + V_1(N(s)))^{2(\theta-1)} \frac{\alpha^2(s)}{N^2(s)} ds \right] &= \\ = \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^t e^{2\eta s} (N^2(s) + 1)^{2(\theta-1)} \frac{\alpha^2(s)}{N^{4\theta-2}(s)} ds \right] &\leq \quad (9) \\ \leq (\alpha^2)_{\sup} \int_{t_0}^t e^{2\eta s} \mathbb{E}[N^{2-4\theta}(s)] ds < \infty. \end{aligned}$$

Тут ми використали умову $0 < \theta < 1$ і оцінку (5). Далі, оскільки функція $f(x) = (1 + x)^\theta, x \geq 0, 0 < \theta < 1$ опукла вгору і диференційовна, то має місце оцінка $f(x + z) - f(x) \leq f'(x)z$. Використавши цю оцінку, умову $1/4 < \theta < 1/2$

і (5), одержимо для $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}} e^{2\eta s} \left[\left(1 + \frac{V_1(N(s))}{(1+N(s)\gamma_i(s,z))^2} \right)^\theta - \right. \right. \\ & \left. \left. - (1 + V_1(N(s)))^\theta \right] \Pi_i(dz) ds \right] \leq \\ & \leq \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}} e^{2\eta s} \frac{\theta^2 V_1^2(N(s))}{(1+V_1(N(s)))^{2(1-\theta)}} \times \right. \\ & \times \frac{((1+N(s)\gamma_i(s,z))^2 - 1)^2}{(1+N(s)\gamma_i(s,z))^4} \Pi_i(dz) ds \left. \right] \leq \\ & \leq K_1 \int_{t_0}^t e^{2\eta s} \mathbb{E}[N^{2-4\theta}(s)] ds < \infty, \end{aligned} \quad (10)$$

де $K_1 = 4\theta^2(\sup_{s,z} \gamma_i(s,z))^2 \Pi_i(\mathbb{R})$. Із (9),(10)

Список використаних джерел

1. Iannelli M. An Introduction to Mathematical Population Dynamics. / M. Iannelli, A. Pugliese. Springer, 2014. – 351 p.
2. Liu M. Persistence and extinction in stochastic non-autonomous logistic systems. / Meng Liu, Ke Wanga // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2011. – 375. – P.443–457.
3. Borysenko O.D. Non-autonomous stochastic logistic differential equation with non-centered Poisson measure. / O.D. Borysenko, D.O. Borysenko // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series: Physics & Mathematics. – 2017. – 4. – P. 9–14.
4. Борисенко О.Д. Вживання і вимірювання у стохастичній неавтономній логістичній моделі популяційної динаміки. / О.Д. Борисенко, Д.О. Борисенко // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2018. – 2(99). – С.63–70.
5. Гихман И.И. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. / И.И. Гихман, А.В. Скороход. Наукова Думка, Киев, 1982. – 611 с.
6. Борисенко О.Д. Асимптотична поведінка розв'язку неавтономного стохастичного логістичного диференціального рівняння. / О.Д. Борисенко, Д.О. Борисенко // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2019. – 2(101). – С.55 – 64.

і властивостей стохастичних інтегралів маємо $\mathbb{E}[J_{st}^i] = 0, i = \overline{1,3}$. Візьмемо математичне сподівання від обох частин (8) і одержимо $\mathbb{E}[(1+V_1(N(t)))^\theta] \leq e^{\eta(t_0-t)} \mathbb{E}[(1+V_1(N(t_0)))^\theta] + (K/\eta)(1 - e^{\eta(t_0-t)})$. Тому $\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[V_1^\theta(N(t))] \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(1+V_1(N(t)))^\theta] \leq K/\eta$, а отже $\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[N^{-2\theta}(t)] \leq K/\eta = C$. Покладемо $h = (\varepsilon/C)^{1/2\theta}$ для $\forall \varepsilon > 0$, тоді за нерівністю Чебишева одержимо $\mathbf{P}\{N(t) < h\} = \mathbf{P}\{N^{-2\theta}(t) > h^{-2\theta}\} \leq h^{2\theta} \mathbb{E}[N^{-2\theta}(t)] = \varepsilon \mathbb{E}[N^{-2\theta}(t)]/C$ і $\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{N(t) < h\} \leq \varepsilon$, а значить $\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{N(t) \geq h\} \geq 1 - \varepsilon$. $\square$

References

1. IANNELLI, M. and PUGLIESE, A. (2014), *An Introduction to Mathematical Population Dynamics*, Springer, 351 p.
2. LIU, MENG and WANG, KE (2011) "Persistence and extinction in stochastic non-autonomous logistic systems", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **375**, 443–457.
3. BORYSENKO, O.D. and BORYSENKO, D.O. (2017), "Non-autonomous stochastic logistic differential equation with non-centered Poisson measure", *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series: Physics & Mathematics*, (2017), no.4, 9–14
4. BORYSENKO, O.D. and BORYSENKO, D.O. (2018) "Persistence and extinction in stochastic nonautonomous logistic model of population dynamics", *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, no.2(99), 63–70.
5. GIKHMAN, I.I. and SKOROKHOD, A.V. (1982), *Stochastic Differential Equations and their Applications*, Naukova Dumka, Kiev, 611p. (in Russian)
6. BORYSENKO, O.D. and BORYSENKO, D.O. (2019), "Asymptotic behavior of solution to the non-autonomous stochastic logistic differential equation", *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, n.2(101), 55 –64.

Надійшла до редколегії 28.08.2019

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ,
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА
ТА МЕХАНІКА**

УДК 534+531.7+53.082.5+539.3

Абрамов О.А.¹ провідний інженер,
Ємельянов В. В.² провідний інженер;
Куценко О. Г.¹, к. ф.-м. н., доц.,
Отто Г. К.¹ провідний інженер,
Отто К.В.² начальник відділу,
Яровой Л. К.¹ к. т. н., с.н.с.

Лазерний доплерівський віброметр з можливістю сканування віддалених об'єктів

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03127, м.Київ, пр-т.
Глушкова 4е,

e-mail: yarovoi@univ.kiev.ua;

² ПРАТ Альтрон, Харків, Україна
e-mail: otto0kv@gmail.com

O.A. Abramov¹,
V.V. Emelyanov²,
O. G. Kutsenko¹, Ph.D (Phys.-Math.),
G. K. Otto¹,
K. V. Otto²,
L. K. Yarovoi¹, Ph.D (Techn. Science)

Laser doppler vibrometer with remote object scanning capability

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03127, Kyiv, Hlushkova Avenue, 4e,
e-mail: yarovoi@univ.kiev.ua;

² JS ALTRON, Kharkiv, Ukraine
e-mail: otto0kv@gmail.com

Створено лазерний доплерівський віброметр (ЛДВ) з можливістю вимірювання вібрацій віддалених об'єктів на відстані до 250 м. З метою автоматичного вимірювання вібрації в масиві точок віброметр забезпечено системою сканування. Керуюча програма здійснює переміщення зондувального променя відповідно до протоколу дослідження, обробку інформації, запис у пам'ять та виведення на екран ПК. Створеним ЛДВ досліджено розподіл амплітуд коливань та розподіл поперечних напружень в консольно закріпленій трубі на відстані 22 метра. Результати вимірювань на різних частотах добре збігаються з розрахунками, виконаними за допомогою скінченно-елементного пакету CalculiX. Експериментально продемонстровано зміну форми коливань за наявності дефектів в трубі або навантаженнях її точковими приєднаними масами.

A laser Doppler vibrometer was created with the ability to measure the vibrations of distant objects up to 250 meters away. The vibrometer is provided with a scanning system for automatic vibration measurement in an array of points. The control program moves the probe beam according to the research protocol, processes and store information. To demonstrate the capabilities of the system, we studied of the amplitude distribution of vibrations and the distribution of longitudinal stresses in a cantilevered tube located at a distance of 22 meters. The measurements at different frequencies are in good agreement with the numerical calculations performed by finite element code CalculiX.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Лазерні доплерівські віброметри (ЛДВ) – сучасні засоби безконтактного вимірювання вібрації, що користуються великим попитом, як в промисловості, так і в наукових дослідження [1]. За фізичним принципом переважна кількість ЛДВ (назвемо їх "класичними") використовують двопроменеву інтерференцію. В цих приладах один з двох променів спрямовується на досліджуванний об'єкт та відбивається на фотодетектор. Натомість, інший промінь проходить через частотозсувну комірку Бреґга та також потрапляє на детектор.

Частотомодульований сигнал, що детектується фотодіодом, несе інформацію про миттєву швидкість рухомого об'єкту [1]. Подальша демодуляція сигналу дозволяє виділити ці данні [2].

Серед «класичних» віброметрів значною увагою користуються скануючі віброметри, як такі, що надають суттєві переваги в швидкому дослідженні вібрацій у великій кількості точок на поверхні об'єкту. Таким чином, скануючий віброметр може досліджувати в автоматичному режимі розподіл амплітуд коливань складних поверхонь довільних об'єктів при вирішенні

задач акустики, неруйнівного контролю, експериментальної механіки [1, 3].

Загалом, "класичні" лазерні доплерівські віброметри мають привабливі характеристики за чутливістю до малих амплітуд, діапазону миттєвих швидкостей, частотного діапазону т.і. Їх панування в області лазерної віброметрії певною мірою обмежує чутливість до енергії відбитого (розсіяного) випромінювання. Ця характеристика визначається чутливістю детектора, потужністю лазера, відстанню до об'єкта та відбиваючими властивостями поверхні об'єкта. Оскільки чутливість фотодетекторів має природні обмеження, а потужність лазера обмежується вимогами техніки безпеки, для дослідження на значних відстанях реально переважно у всіх вимірюваннях класичними ЛДВ використовують спеціальні відбиваючі наліпки. Звичайно, використання таких наліпок не завжди можливе.

Цього недоліку позбавлені інші типи лазерних віброметрів, які побудовані на принципі внутрішньорезонаторного підсилення випромінювання, яке повертається від досліджуваного об'єкта (інші назви: "selfmixing vibrometry", "автофотозмішування", "laser feedback inteferometry" [4 - 6]).

Принцип дії таких приладів полягає в тому, що розсіяне віддаленим об'єктом лазерне

випромінювання повертається в активну зону лазера, де підсилюється та взаємодіє з тою частиною випромінювання, котра залишилась в лазерному середовищі. Ці прилади в порівнянні зі звичайними – класичними ЛДВ – дозволяють отримати надзвичайну чутливість, вони можуть працювати на відстані декількох сотень метрів, причому не вимагають, зазвичай, спеціальних оптичних відбиваючих наліпок на поверхні досліджуваного об'єкту.

Поєднання системи сканування з можливостями внутрішньо-резонаторного гетеродинного прийому підіймають на новий рівень дистанційне неруйнівне дослідження коливань віддалених об'єктів.

Принцип дії та блок-схема віброметра

Українська корпорація «Альтрон» у співпраці з механіко-математичним факультетом Київського національного університету імені Тараса Шевченка розробила надсучасний лазерний віброметр на принципі внутрішньо-резонаторного прийому лазерного випромінювання, який може вимірювати вібрацію в наноамплітудному діапазоні на відстані більше 250 метрів.

Спрощена блок-схема віброметра зображена на рис. 1.

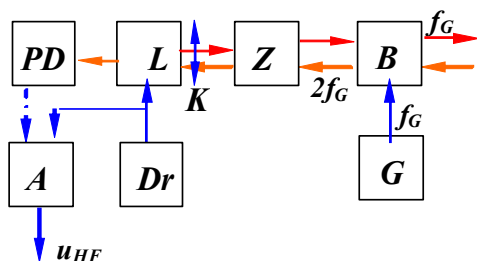


Рис. 1 Блок-схема ЛДВ з внутрішньорезонаторним підсиленням прийнятого сигналу

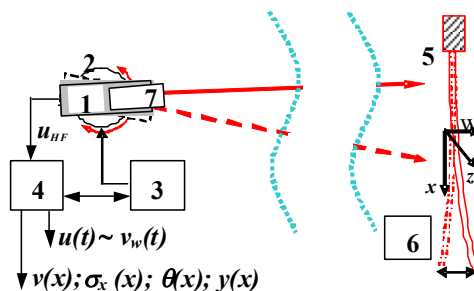


Рис. 2 Схема експериментальної установки дистанційного дослідження коливань

Основний елемент віброметра – лазерний діод L. Для звуження лінії генерації використовується зовнішній резонатор Z. Спеціальна конструкція дозволила збільшити ефективну довжину лазерного резонатора до 560 мм. На відміну від попереднього варіанту віброметра [6], замість вихідного телескопу використано коліматор K.

Комірка Брегга B зсуває частоту випромінювання лазера на частоту $f_G = 27$ МГц гетеродина G. Розсіяне досліджуваним об'єктом випромінювання, рухаючись в зворотному напрямку до лазера, проходить ще раз через комірку Брегга, де його

частота знов зміщується на частоту f_G . Повертаючись в активне середовище лазера L, розсіяне випромінювання підсилюється та інтерферує з тим, що там циркулює. Інтерференція спричиняє амплітудну та фазову модуляції, яка на несучій частоті $2f_G$ має доплерівську компоненту, пропорційну миттєвій швидкості $v(t)$.

Модуляція оптичної енергії спричиняє модуляцію струму живлення драйвера Dr. Подібним чином також модулюється вихідний струм вбудованого фотодетектора PD. В обох випадках електричний сигнал підсилюється

резонансним підсилювачем 4. Обидва шляхи отримання електричного сигналу пропорційного доплерівському зсуву еквівалентні з точки зору подальшої обробки. Демодуляція частотної доплерівської компоненти сигналу та подальша обробка виконується програмними засобами на комп'ютері 4 (див. рис.2).

З метою розширення споживчих можливостей розробленого приладу шляхом забезпечення сканування та збору даних вібрації з декількох точок в автоматичному режимі, авторами була розроблена експериментальна установка ЛДВ (Рис. 2), де 1 – ЛДВ, 2 – керований штатив, 3 – драйвер штатива, 4 – ПК, на якому емульовано доплерівський процесор, а також встановлена програма керування штативом та обробки сигналу. Поперечні коливання експериментального об'єкту, а саме алюмінієвої трубки 5 довжиною 67 мм, зовнішнім діаметром 12 мм та внутрішнім діаметром 9 мм, збуджувалися електромагнітним реле 6. Прив'язка точок спостереження та контроль за скануванням відбувались за допомогою інфрачервоної камери 7 з телескопічним об'єктивом.

Програма керування забезпечує програмоване позиціонування та вимірювання миттєвої швидкості (вздовж координати "x") коливань в наперед заданих точках на поверхні досліджуваного об'єкту та побудову просторової форми коливань. Програма також виконує аналіз отриманих значень швидкості з метою

усереднення та коригування. Сканування може відбуватися в межах ± 10 градусів за обома координатами.

Для конкретної тестової задачі – дослідження форм коливання трубки – програма також розраховує розподіл повздовжніх напружень σ_x , за методикою викладеною в роботі [7]. Вираз для визначення максимальних повздовжніх напружень має вигляд:

$$\sigma_{повзд} = \mp E \cdot \frac{D}{2 \cdot \Omega} \cdot \frac{d^2 v_0(x)}{dx^2} \quad (1)$$

де E – модуль Юнга, Ω – колова частота коливань, D – діаметр стрижня, v_0 – амплітуда миттєвої швидкості в точці вимірювання, x – повздовжня координата.

Експериментальні дослідження на значній відстані прогину трубки, що вібрує

Експериментально встановлена відстань вимірювання вібрацій амплітудою до 1 нм складає 250 м. Але для того, щоб забезпечити точність наведення променя не гірше ніж ± 1 мм, експериментальні дослідження виконувались на відстані 22 м.

Було досліджено розподіли амплітуд коливань трубки довжиною $L=67$ см для різних частот, а також за умови навантаження трубки приєднаною масою 22,5 г ($L_2=35.5$ см), або наявності дефекту (переріз на глибину 20% від діаметра, $L_3=35.5$).

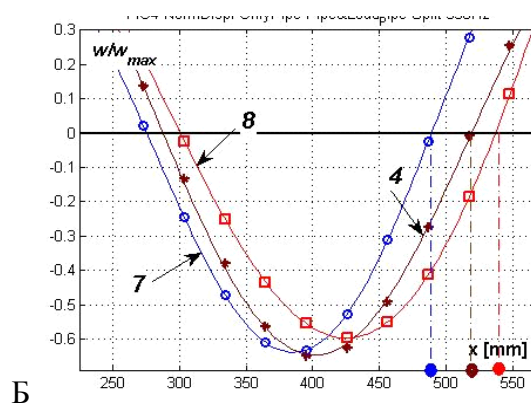
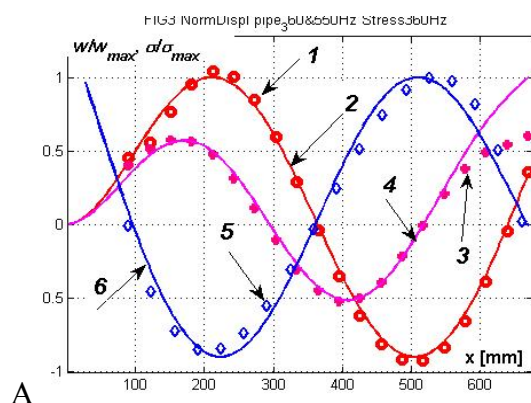


Рис.3 Коливання трубки: 1, 2 – частота коливань 360 Гц ; 3, 4, 7, 8 – частота коливань 550 Гц
А) суцільна трубка; Б) 4, 7, 8 - суцільна трубка, трубка з дефектом, трубка з приєднаною масою.

Позначками 1 і 3 (коло і кружечок) на рис.3А наведені результати вимірювань максимальних амплітуд прогину вздовж трубки на частотах коливань 360 Гц та 550 Гц. Позначками 5 (ромб) представлені результати обробки експерименту за формулою (1), що показують реальний розподіл повздовжніх напружень. Також на цьому малюнку суцільними лініями наведені розподіли прогинів та

напружень, одержані шляхом тривимірного скінченно-елементного моделювання за допомогою пакету CalculiX, для аналогічних значень параметрів, що і в експерименті. Вказана тривимірна модель складається з 3584 8-вузових (лінійних) скінченних елементів. Як можна бачити, результати розрахунків та експерименту на частоті 360 Гц співпадають. Що стосується експерименту

на частоті 550 Гц, неузгодженість прогину в найближчих до вільного кінця трубки точках пояснюється, на наш погляд, впливом системи з'єднання збуджуючого вібратора 6 та кінця трубки 5, яка обмежувала амплітуду коливань останнього.

Експериментальні залежності на рис. 3Б демонструють вплив неоднорідностей на форму коливань об'єкту, котрий проявляється у зміщенні максимумів та вузлів вздовж трубки.

Висновки

Створено ЛДВ на принципі внутрішньо резонаторного підсилення відбитого лазерного випромінювання (лазерний віброметр зі зворотним оптичним зв'язком), чутливість до амплітуди коливань якого краще ніж 1 нм, а зареєстрована дальність вимірювань складає 250 м. Причому для роботи

прилад не вимагає накладення спеціальних світловідбиваючих наліпок або фарб.

Програмою передбачено автоматичне сканування поверхні досліджуваного об'єкту в межах ± 100 точок за обома координатами відповідно до заданої мапи та запис даних миттєвої швидкості в пам'ять з метою подальшої обробки.

Як приклад, реалізовано дистанційне вимірювання розподілу поперечних відхилень та напружень вздовж віброуючих циліндрів (труб) з метою діагностики механічних дислокацій. Результати експерименту порівняно з теоретичними розрахунками прогинів та напружень.

Список використаних джерел

1. Rothberg S.J. & others An international review of laser Doppler vibrometry: Making light work of vibration measurement / S.J. Rothberg & others // *Opt. Lasers Engin.* – 2017. – 99. – P. 11–22.
2. Siegmund G. Sources of measurement error in laser Doppler vibrometers and proposal for unified specifications / G. Siegmund // *Proc. SPIE.* – 2008. – 7098 – P. 70980Y-1-70980Y-13.
3. Weisbecker H. Surface Strain Measurements Using a 3D Scanning Laser Vibrometer / H. Weisbecker, Ben Cazzolato & other // *Experimental Mechanics.* – 2012. – 52. – P. 805–815.
4. Bosch, T... An Overview of Self-Mixing Sensing Applications / Bosch, T. // *Conference on Optoelectronic and Microelectronic Materials and Devices, Proceedings, COMMAD.* – 2005. – P. 385 – 392.
5. Donati, Laser diode feedback interferometer for measurement of displacements without ambiguity / Donati, G. Giuliani, S. Merlo // *Quantum Electronics, IEEE Journal.* – 1995. – 31. – P. 113–119.
6. Otto K.V. Laser Doppler self-mixing vibrometer with heterodyne detection / K.V. Otto, L.K. Yarovoi and other // *Metrology and Metrology Assurance: XXII National Scientific Symp. with intern. participation, 10-14 September, 2012, Sozopol, Bulgaria: proceedings.* – Sofia. – 2012. – P. 67 – 72.
7. Куценко О.Г. Дослідження впливу неоднорідності на згинні коливання балки методом лазерної віброметрії / О.Г. Куценко, Л.К. Яровой // *Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки.* – 2003. – 3. – С. 95–100.

References

1. ROTHBERG, S.J., others (2017) An international review of laser Doppler vibrometry: Making light work of vibration measurement. *Opt. Lasers Engin.* (99).p. 11–22.
2. SIEGMUND, G. (2008) Sources of measurement error in laser Doppler vibrometers and proposal for unified specifications, in *Proc. SPIE*, vol. 7098, p. 70980Y-1-70980Y-13.
3. WEISBECKER, H. & CAZZOLATO BEN, other (2012) Surface Strain Measurements Using a 3D Scanning Laser Vibrometer *Experimental Mechanics.* (52). p. 805-815.
4. BOSCH T. (2005) An Overview of Self-Mixing Sensing Applications. *Conf. on Optoelectronic and Microelectronic Materials and Devices, Proceed., COMMAD.* p.385 - 392.
5. DONATI & GIULIANI, G. & MERLO S. (1995) Laser diode feedback interferometer for measurement of displacements without ambiguity. *Quantum Electronics, IEEE Journal.* (31). p .113-119.
6. OTTO, K.V. & YAROVOI, L.K. & other (2012) Laser Doppler self-mixing vibrometer with heterodyne detection. In *Proc. of XXII National Scientific Symp. with intern. participation Metrology and Metrology Assurance.* Sozopol, 10-14 September, 2012. Sofia. p. 67 – 72.
7. KUTSENKO, O.G. (2013) Investigation of non-homogeneity influence on beam bending vibrations by laser Doppler vibrometer. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics.* (3). p. 95–100.

Надійшла до редколегії 09.10.2019

УДК 539.3

Адлуцький В. Я.¹, к.ф.-м.н., с.н.с.,
Годес А. Ю.², к.ф.-м.н.,
Лобода В. В.³, д.ф.-м.н., проф.

**Скінченноеlementний аналіз
пружно-пластичного стану тріщини
на межі розділу площини з круговим
включенням**

¹ Дніпровський національний університет імені
О. Гончара, 49050, м. Дніпро, пр. Гагаріна, 72,
e-mail: adluckiivy_kkt@dnubp.ua

² Дніпровський національний університет імені
О. Гончара, 49050, м. Дніпро, пр. Гагаріна, 72,
e-mail: alinej@rambler.ru

³ Дніпровський національний університет імені
О. Гончара, 49050, м. Дніпро, пр. Гагаріна, 72,
e-mail: lobvv@ua.fm

V. J. Adlucky¹, Ph. D.,
A. Yu. Hodes², Ph. D.,
V. V. Loboda³, Dr. Sci., Prof.

**Finite element analysis of elastic-plastic state
of crack at the interface between infinite plane
and circular inclusion**

¹ Oles Honchar National University of Dnipro, 49050,
Dnipro, Gagarina av., 72,
e-mail: adluckiivy_kkt@dnubp.ua

² Дніпровський національний університет імені О.
Гончара, 49050, м. Дніпро, пр. Гагаріна, 72,
e-mail: alinej@rambler.ru

³ Oles Honchar National University of Dnipro, 49050,
Dnipro, Gagarina av., 72,
e-mail: lobvv@ua.fm

Із застосуванням скінченноеlementного підходу розглядається задача визначення пружно-пластичного напружено-деформованого стану матриці з включенням з іншого матеріалу при наявності дугової тріщини на межі розділу. Допускається виникнення контактних макрозон між берегами тріщини. Прийнята модель анізотропного зміцнення матеріалів з двофазною апроксимацією кривих "напруження-деформація". Нескінченна площина моделюється квадратною областю з довжиною сторони на порядок більшою, ніж діаметр включення, контактна взаємодія берегів тріщини відтворюється за допомогою гар-елементів. Для отримання інформації про швидкість вивільнення енергії деформації обчислюються значення інваріантного J -інтеграла Черепанова-Райса вздовж замкнутих контурів, достатньо віддалених від вершин тріщини. Проведено порівняння отриманих результатів з аналітичними розв'язками лінійної теорії пружності. Спостерігається незначне збільшення розбіжностей між цими результатами в процесі переходу від пружного до пружно-пластичного стану внаслідок зростання рівня навантаження.

Ключові слова: дугова тріщина, пружно-пластичний стан, метод скінченних елементів, контактна задача.

The problem on determining of elastic-plastic stress-strain state of infinite plane with a circular inclusion made from another material and an arc crack at the interface under action of arbitrary mechanical loadings applied at infinity is considered using the FEM approach. The problem is resolved within the framework of contact model for which the possibility of appearance of contact macrozones between crack faces is assumed. The isotropic hardening of materials with bilinear approximation of stress-strain curves is considered. The infinite plane is modeled by square domain whose size is of an order of magnitude greater than inclusion diameter. Contact interaction of crack faces is simulated using gap elements. To obtain the energy release rate the J -integrals are calculated along several closed contours around the crack tips. The comparison of obtained results with available analytical solutions for linear elasticity shows that insignificant differences take place during transformation from pure elastic to elastic-plastic stress-strain state.

Key Words: arc crack, elastic-plastic state, finite element method, contact problem.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Дослідження залежностей параметрів руйнування біматеріалів з міжфазними дуговими

тріщинами від діючих механічних навантажень є важливим з точки зору підвищення надійності та працездатності систем і пристроїв за наявності міжфазних дефектів. У роботах [1–3] розроблено

чисельно-аналітичні підходи й наведено результати досліджень як для безконтактної, так і контактної моделей дугової тріщини у композиті в умовах пружного деформування. Така постановка є виправданою у випадку крихкого руйнування, однак за наявності матеріалів з вираженими пластичними властивостями виникає питання про те, наскільки суттєвою є залежність параметрів руйнування від пружно-пластичного характеру деформування.

Постановка задачі

Розглядається ізотропна площина (матриця), яка містить кругове включення радіусу R , що скріплено з площиною уздовж всієї межі за винятком дуги $r = R$, $|\theta| < \beta$, де r – полярний радіус, θ – полярний кут, β – кут піврозхилу тріщини. Береги тріщини є гладкими. Вважається, що в результаті деформування вони можуть взаємодіяти з утворенням контактних макрозон. На нескінченності задані головні напруження N_1 , N_2 та кут α_N між напрямом дії напруження N_1 і віссю абсцис (рис. 1). Вважається, що матеріали матриці та включення мають відмінні механічні властивості й за певних рівнів навантаження здатні деформуватися пружно-пластично. Пружні властивості обох матеріалів описуються модулем Юнга E_i й коефіцієнтом Пуассона ν_i , де $i=1$ відповідає матеріалу включення, $i=2$ – матеріалу матриці. Для кожного з матеріалів прийнято критерій текучості Мізеса [4] з ізотропним зміцненням і застосовано дволанкову апроксимацію діаграми $\sigma - \varepsilon$ напруження-деформація при одновісному розтягуванні:

$$\sigma = \begin{cases} E_i \varepsilon, & 0 \leq \varepsilon \leq \frac{\sigma_i^T}{E_i} \\ \sigma_i^T + E_i^t (\varepsilon - \frac{\sigma_i^T}{E_i}), & \varepsilon > \frac{\sigma_i^T}{E_i} \end{cases} \quad (1)$$

де σ_i^T – межа текучості; E_i^t – тангенціальний модуль.

Скінченноелементна модель деформування тіла з тріщиною

Чисельні розв'язання зазначеної задачі здійснювались в середовищі пакета COSMOS/M 2.6, що реалізує процедури MCE для широкого кола задач механіки суцільного середовища.

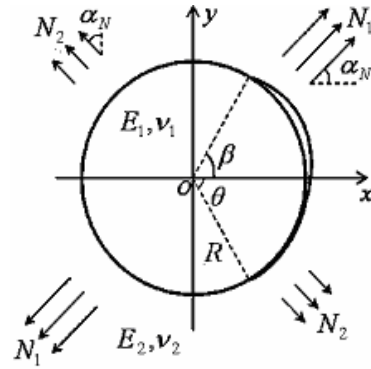


Рис. 1 Схема навантаження біматеріалу з тріщиною

Нескінченна площина моделювалась квадратною областю з довжиною сторони $2L$ при $L/R = 20$, що, як показали чисельні експерименти, забезпечує достатню збіжність з наявними аналітичними результатами для нескінченної області. В процесі дискретизації використовувались чотирикутні 8-вузлові скінченні елементи PLANE2D з поліноміальною апроксимацією переміщень другого порядку. Неоднорідні сітки скінченних елементів згущувались в околі границі між включенням і матрицею й розріджувались з наближенням до зовнішньої границі матриці. У середньому використовувалось близько 10000 скінченних елементів, що забезпечувало практичну незмінність результатів, отриманих при ще більш щільних сітках.

Для моделювання контактної взаємодії берегів тріщини застосовувались контактні елементи GAP, які не перешкоджають розкриттю тріщини й водночас запобігають взаємопроникненню берегів. Такі елементи реалізують односторонні зв'язки за допомогою ітераційного застосування методів штрафних функцій і множників Лагранжа [5].

Напруження на зовнішній границі матриці задавались відповідно до умов навантаження на нескінченності:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= N_1 \sin^2 \alpha_N + N_2 \cos^2 \alpha_N, \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2} (N_1 - N_2) \sin 2\alpha_N, \quad x = \pm L, |y| \leq L; \\ \sigma_y &= N_1 \cos^2 \alpha_N + N_2 \sin^2 \alpha_N, \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2} (N_1 - N_2) \sin 2\alpha_N, \quad y = \pm L, |x| \leq L. \end{aligned} \quad (2)$$

Для стабілізації системи від переміщень як жорсткого цілого в кожному куті зовнішньої границі матриці додавався стержневий елемент, жорсткість якого була на декілька порядків меншою, ніж жорсткість матеріалу матриці.

Другий кінець кожного стержня жорстко закріплювався. Така фіксація матриці не вносила помітних змін у напружений стан.

Для отримання інформації про швидкість вивільнення енергії деформації обчислювались значення інваріантного J-інтеграла Черепанова-Райса [6] вздовж замкнутих контурів навколо вершин тріщини. Оскільки концепція інваріантності J-інтеграла виходить з припущення про прямолінійність тріщини в межах контуру інтегрування, початкова й кінцева точки кожного контуру обирались достатньо близько від вершини тріщини, в той час як сам контур проводився за межами можливих пластичних зон, що виникають перед фронтом тріщини.

Розглядалося пропорційне навантаження системи, при якому напруження N_1 і N_2 водночас змінювались лінійно в залежності від значення параметра навантаження. Покроковий процес навантаження дозволяв відслідковувати поступовий перехід від чисто пружного деформованого стану до пружно-пластичного.

Чисельні результати

Певні відмінності результатів пружно-пластичного деформування від чисто пружного були найбільш помітними у випадку безконтактного деформування, коли тріщина розкривається по всій довжині. В табл. 1 наведені дані, що ілюструють залежність відносних значень J-інтеграла від рівня навантаження для різних кутів піврозхилу тріщини β для наступних значень параметрів матеріалу (середньовуглецева сталь) і навантаження:

$$E_1 = E_2 = 0,21 \text{ ГПа}, \quad \nu_1 = \nu_2 = 0,28, \quad E'_1 = E'_2 = 0,1 E_1, \quad \sigma_1^T = \sigma_2^T = 250 \text{ МПа}, \quad N_2 = 0, \quad \alpha_N = 0^\circ.$$

Перший рядок табл. 1 містить дані, обчислені з використанням аналітичних результатів [2] для коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) для дугової тріщини в однорідному матеріалі:

$$\frac{J}{J_0} = \frac{343 + 168 \cos \beta - 20 \cos 2\beta + 24 \cos 3\beta - 3 \cos 4\beta}{128(\cos \beta - 3)^2},$$

де $J_0 = (1 - \nu_1^2) E_1^{-1} \pi N_1^2 R \sin \beta$ – значення J-інтеграла для прямолінійної тріщини, довжина якої дорівнює довжині хорди, що з'єднує вершини дугової тріщини.

Залежність J/J_0 від рівня навантаження для різних кутів піврозхилу тріщини β

Таблиця 1

$\frac{N_1}{\sigma_1^T}$	β (град.)		
	15	45	90
пружний стан	0,95	0,67	0,31
0,1	0,96	0,68	0,32
0,2	0,98	0,68	0,34
0,3	1,00	0,69	0,37
0,4	1,01	0,70	0,41
0,5	1,02	0,73	0,44
0,6	1,03	0,76	0,46

З наведених даних випливає, що при урахуванні пружно-пластичної поведінки матеріалу значення J-інтеграла дещо зростають, особливо для більш довгих тріщин. З іншого боку, вказане підвищення не є істотним до моменту вичерпання тріщиностійкості внаслідок досягнення J-інтегралом критичного значення J_C . Так, наприклад, при $J_C = 10^4 \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-2}$, $R = 0,1 \text{ м}$, $\beta = 45^\circ$ і врахуванні пластичної поведінки матеріалу межа тріщиностійкості досягається при навантаженні $N_1 = 0,5 \sigma_1^T$, що лише на 3% нижче, ніж для чисто пружного розв'язку.

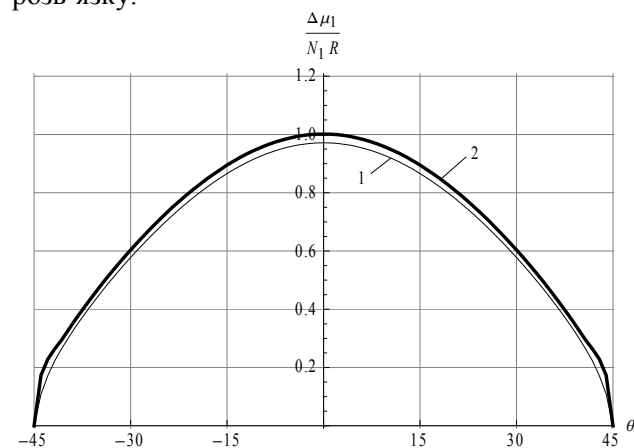


Рис. 2 Розкриття тріщини Δ для $R = 0,1 \text{ м}$, $\beta = 45^\circ$ на межі тріщиностійкості: 1 – пружна модель; 2 – пружно-пластична модель

На рис. 2 наведені порівняльні графіки розкриття тріщини Δ для пружного розв'язку й при урахуванні пластичного деформування для тріщини $R = 0,1 \text{ м}$, $\beta = 45^\circ$, $\mu_1 = \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)}$ при досягненні межі тріщиностійкості. Очевидно, що відмінності головним чином обумовлені пластичними деформаціями в околах вершин тріщини. Водночас, загальний характер

розкриття тріщини залишається майже незмінним.

Нижче представлені результати, отримані у випадку наявності зони контакту між берегами тріщини. Матеріал матриці залишався таким же, як і в попередньому прикладі, $N_2 = 0$, $\alpha_N = 70^\circ$, $\beta = 90^\circ$. Розглядалися три варіанти матеріалу включення: $E_1 = kE_2$, $\nu_1 = \nu_2$, $E_1^t = kE_2^t$, $\sigma_1^T = k\sigma_2^T$ при $k = 0,5; 1; 2$.

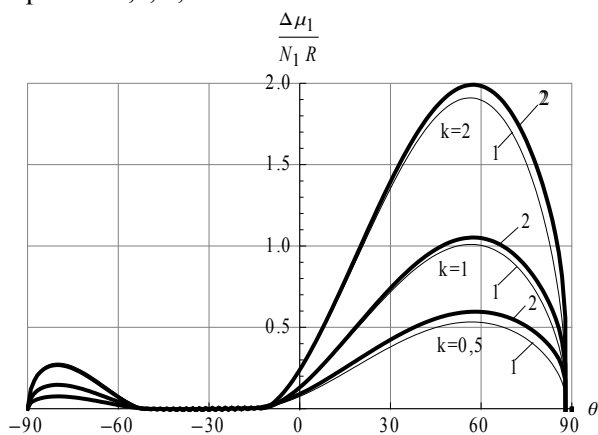


Рис. 3 Розкриття тріщини для $\alpha_N = 70^\circ$, $\beta = 90^\circ$ на межі тріщиностійкості: 1 – пружна модель; 2 – пружно-пластична модель

На рис. 3 наведені графіки розкриття тріщини

Δ для пружного розв'язку і при урахуванні пластичного деформування для тріщини $R = 0,1 \text{ м}$, $\beta = 90^\circ$ на межі тріщиностійкості при вказаних вище значеннях k . Як і в попередніх випадках, дані для пружної й пружно-пластичної моделей деформування є доволі близькими, а основні відмінності обумовлені пластичним деформуванням в околі вершини тріщини, більш віддаленої від зони контакту.

Висновки

З наведених результатів випливає, що врахування пластичних властивостей матеріалів в задачі про визначення напружено-деформованого стану дугової тріщини на межі включення й матриці призводить до певного підвищення значень параметрів руйнування, таких як розкриття тріщини і J-інтеграл, в порівнянні з результатами пружного розв'язку. Проте, в докритичному стані зазначені відмінності не являються суттєвими, а отже, використання моделі пружного деформування для даної задачі є виправданим.

Список використаних джерел

1. Toya, M.A. A crack along the interface of a circular inclusion embedded in an infinite solid / M.A. Toya // J. Mech. and Phys. Solids. – 1974. – 22(5). – P.325-348.
2. Cottrell, B. Slightly curved or kinked cracks / B. Cottrell, J.R. Rice // Int. J. of Fracture. – 1980. – P. 155-169.
3. Годес, А.Ю. Контактная задача для межфазной дуговой трещины / А.Ю. Годес, В.В. Лобода // Вісник Дніпропетровського університету: Серія Механіка. – 2015. – Т. 19 (2). – С. 3-17.
4. Качанов, Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. – М.: Наука. – 1969. – 420 с.
5. Zienkiewicz, O.C. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics / O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. – 6th ed. – Elsevier. – 2005. – 631 p.
6. Керштейн, И.М. Основы экспериментальной механики разрушения / И.М. Керштейн, В.Д. Ключников, Е.В. Ломакин, С.А. Шестериков. – М.: Изд. Московского ун-та. – 1989. – 140 с.

References

1. TOYA, M.A. (1974) A crack along the interface of a circular inclusion embedded in an infinite solid. *J. Mech. and Phys. Solids*. 22(5). p. 325-348.
2. COTTRELL, B., RICE, J.R. (1980) Slightly curved or kinked cracks. *Int. J. of Fracture*. p. 155-169.
3. HODES, A.YU., LOBODA, V.V. (2015) A contact problem for an arc interfacial crack. *Bulletin of Dnepropetrovsk University: Mechanics*. 19 (2). p. 3-17.
4. KACHANOV, L.M. *Foundations of theory of plasticity* (1969). M.: Nauka.
5. ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L. (2005) *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Elsevier.
6. KERSTAIN, I.M., KLYUSHNIKOV, V.D., LOMAKIN, E.V., SHESTERIKOV, S.A. (1989) *Foundations of experimental fracture mechanics*. M.: Publishing house of Moscow University.

Надійшла до редколегії 19.06.19

УДК 539.3

Васільєв К. В.¹, к.ф.-м.н.,
Сулим Г. Т.², д.ф.-м.н., проф.

K. V. Vasil'ev¹, PhD,
G. T. Sulym², Dr. Sci.

**Метод вирізування у задачі
поздовжнього зсуву анізотропного
півпростору з тріщиною**

**Cutting-out method in the problem of
longitudinal shear of anisotropic half-space
with a crack**

¹ Інститут прикладних проблем механіки і
математики ім. Я.С.Підстригача НАН України,
79000, м. Львів, вул. Наукова 3-б,
e-mail: kirill.all@gmail.com

² Львівський національний університет імені
Івана Франка, 79000, м. Львів, вул.
Університетська, 1,
e-mail: gtsulym@gmail.com

¹ Pidstryhach Institute for Applied Problems of
Mechanics and Mathematics, 79000, L'viv, Naukova
str., 3-b,

e-mail: kirill.all@gmail.com

² Ivan Franko National University of L'viv, 79000,
L'viv, Universytetska str., 1,
e-mail: gtsulym@gmail.com

Розроблений раніше метод прямого вирізування у застосуванні до ізотропних матеріалів, зокрема тіл із тонкими неоднорідностями у вигляді тріщин та тонких деформівних включень поширено на випадок врахування можливої анізотропії матеріалу. Основа методу полягає у моделюванні вихідної задачі визначення напруженого стану обмеженого тіла з тонкими включеннями за допомогою технічно простішої для розв'язування задачі пружної рівноваги нескінченного простору з децю збільшеною кількістю тонких неоднорідностей, які у свою чергу формують межі досліджуваного тіла. Навантаженими тріщинами моделюємо крайові умови першого роду, а впровадженими в матрицю з певним натягом абсолютно жорсткими включеннями – крайові умови другого роду. З використанням методу функцій стрибків та умов взаємодії матриці з включенням задача зводиться до системи сингулярних інтегральних рівнянь, розв'язування якої здійснено з використанням методу колокацій. Апробація розробленого підходу здійснена на задачі пружної рівноваги анізотропного (ортотропного у напрямку зсуву) півпростору зі симетрично навантаженим дуже податним включенням (тріщиною) за жорстко зацмленою межею півпростору. Вивчено вплив орієнтації неоднорідності та матеріалу півпростору на узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень.

Ключові слова: антиплоска деформація, анізотропія, тріщини, тонкі пружні включення, метод вирізування.

The previously developed direct cutting-out method in application to isotropic materials, in particular to bodies with thin inhomogeneities in the form of cracks and thin deformable inclusions is extended to the case of taking into account the possible anisotropy of the material. The basis of the method is to modulate the original problem of determining the stress state of a limited body with thin inclusions by means of a technically simpler to solve problem of elastic equilibrium of an infinite space with a slightly increased number of thin inhomogeneities, which in turn form the boundaries of the investigated body. By loaded cracks we model the boundary conditions of the first kind, and by absolutely rigid inclusions embedded into a matrix with a certain tension – the boundary conditions of the second kind. Using the method of the jump functions and the interaction conditions of a matrix with inclusion, the problem is reduced to a system of singular integral equations, the solution of which is carried out using the method of collocations. Approbation of the developed approach is carried out on the problem of elastic equilibrium of anisotropic (orthotropic in direction of shear) half-space with a symmetrically loaded very flexible inclusion (a crack) at jammed half-space boundary. The influence of inhomogeneity orientation and the half-space material on the generalized stress intensity factors were studied.

Key Words: antiplane shear, anisotropy, cracks, thin elastic inclusions, cutting-out method.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

У багатьох матеріалах містяться дефекти у вигляді тріщин, а також тонких пружних чи абсолютно жорстких включень. Причому тріщину можна за потреби вважати тонким включенням із нульовим модулем пружності. Анізотропія у свою чергу є важливою характеристикою традиційних, сучасних а також більшості смарт-матеріалів і її також необхідно враховувати врахування під час прогнозування придатності елементів конструкцій до експлуатації.

Урахування впливу тонких пружних неоднорідностей при дослідженні напружено-деформованого стану обмежених тіл (реальних конструктивних елементів) істотно ускладнює розв'язування відповідних задач. Огляд методів і підходів до вирішення цього питання здійснено зокрема в [1]. У [2] було запропоновано аналітико-числовий метод прямого вирізування для моделювання і розв'язування задач стосовно обмежених ізотропних тіл з тонкими неоднорідностями. Його ідея полягає у моделюванні обмеженого тіла з тонкими неоднорідностями за допомогою тіла простішої геометричної форми, скажімо нескінченного простору з тою ж системою тонких дефектів, доповненою необхідною кількістю додаткових, які моделюють межі досліджуваного тіла та крайові умови на них: умови першого роду - навантаженими тріщинами, другого роду - впровадженими у тіло з певним натягом абсолютно жорсткими включеннями. У такий спосіб дещо зростає лише порядок системи сингулярних інтегральних рівнянь, зате спрощується процедура їхньої побудови та розв'язування. З використанням такого підходу успішно досліджено задачі пружної рівноваги ізотропних шаруватих структур, півпростору, шару, двошарової структури [2], клина [3] з тріщинами та включеннями за дії однорідного навантаження, а також зосереджених чинників.

Тут метод прямого вирізування застосовано до задачі поздовжнього зсуву півпростору з тонкою неоднорідністю-тріщиною.

1. Формулювання задачі

Досліджується антиплоска деформація анізотропного півпростору з модулями пружності a_{km} ($k, m = 4, 5$), що містить довільно орієнтоване загалом пружне включення L_j ($j = 1$) з модулями пружності $a_{km}^{0,j}$ ($k, m = 4, 5$). Збільшення кількості включень не змінює схеми розв'язування задачі. Межа півпростору може бути або вільна від навантаження, або жорстко защемлена. Відомі координати центра включення

– $z_{0j} = x_{0j} + iy_{0j}$; кут повороту стосовно осі абсцис – φ_j ; довжина – $2a_j$; товщина – $2h_j$. Півпростір може бути навантажений на нескінченності однорідними напруженнями, а на верхньому та нижньому берегах неоднорідності можуть діяти симетричні відносно її осі зусилля τ^1 (рис. 1).

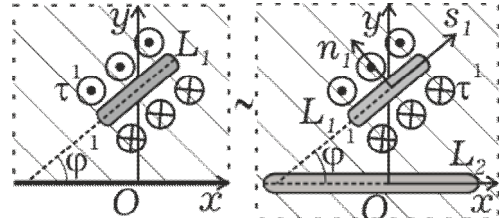


Рис. 1. Моделювання півпростору з включенням за допомогою методу прямого вирізування

З використанням методу прямого вирізування така задача зводиться до дослідження так само навантаженого нескінченного простору з двома довільно орієнтованими неоднорідностями L_1 , L_2 (рис. 1). Метод розв'язування такої задачі відомий [1, 4].

2. Методика побудови розв'язку

Використовуючи метод функцій стрибків тонкі включення вилучаємо з розгляду, а їхній вплив на матрицю замінюємо невідомими функціями стрибків напружень f_5^j та похідних від переміщень f_6^j на серединній лінії $L'_j \equiv [-a_j, a_j]$ ($j = 1; 2$) неоднорідності у її локальній системі координат $s^j O^j n^j$:

$$\sigma_{nz}^{j-} - \sigma_{nz}^{j+} = f_5^j(s^j), \quad \frac{\partial}{\partial s}(w^{j-} - w^{j+}) = f_6^j(s^j);$$

$$s^j \in L'_j \quad (j = 1; 2).$$

Індекси (+) і (–) стосуються верхнього та нижнього берегів включення відповідно.

Напружений стан анізотропного простору з якоюсь однією неоднорідністю L_j у її локальній системі координат стосовно невідомих функцій стрибків подано у [1, 4]:

$$\sigma_{nz}^j + i\sigma_{sz}^j = \frac{1}{4}(g_p^j t_5^j(z^j) - g_m^j t_5^j(\bar{z}^j)) +$$

$$+ \frac{i}{4a_{55}^j \alpha^j}(g_p^j t_6^j(z^j) + g_m^j t_6^j(\bar{z}^j)), \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial s^j} = \frac{a_{55}^j \alpha^j}{4} (t_5(z^j) + t_5(\bar{z}^j)) + \frac{i}{4} (t_6(z^j) - t_6(\bar{z}^j));$$

$$t_r(z^j) = \frac{1}{\pi} \int_{L_j} \frac{f_r^j(t) dt}{t - z^j} \quad (r = 5, 6), \quad g_p^j = \beta^j + i(1 + \alpha^j),$$

$$g_m^j = \beta^j + i(1 - \alpha^j), \quad \alpha^j = \frac{\sqrt{a_{44}^j a_{55}^j - (a_{45}^j)^2}}{a_{55}^j},$$

$$\beta^j = \frac{a_{45}^j}{a_{55}^j}, \quad z^j = s^j + (\beta^j + i\alpha^j)n^j.$$

Пружні сталі a_{km}^j для повернутої системи координат $s^j O^j n^j$ визначаємо згідно [1].

Використавши принцип суперпозиції розв'язків, вирази (1) та формули перетворення для тензора напружень при зміні системи координат, напружений стан анізотропного простору з двома довільно орієнтованими неоднорідностями подамо у вигляді

$$\sigma_{yz} + i\sigma_{xz} = \sigma_{yz}^0 + i\sigma_{xz}^0 + \sum_{j=1}^2 (\sigma_{nz}^j + i\sigma_{sz}^j) e^{-i\varphi_j}, \quad (2)$$

$$s^j + in^j = (x + iy - z_{0j}) e^{-i\varphi_j}.$$

Тут $\sigma_{yz}^0 + i\sigma_{xz}^0$ – обумовлене впливом зовнішнього навантаження поле напружень у розглядуваній точці простору без дефектів.

Скористаємося умовами взаємодії матриці з включеннями [1, 4], які, враховуючи задані напруження на берегах неоднорідностей, запишемо у вигляді

$$\sigma_{nz}^{j+} + \sigma_{nz}^{j-} + \frac{1}{h_j a_{44}^0 - a_j} \int_{-a_j}^s a_{45}^{0,j} f_5^j(t) + f_6^j(t) dt =$$

$$= -2 / (a_{44}^{0,j}) (a_{45}^{0,j} N_1^{-a,j} + N_2^{-a,j}) - 2\tau^j,$$

$$\partial w^{j+} / \partial s + \partial w^{j-} / \partial s - 1 / (h_j a_{44}^0) \int_{-a_j}^s |r^{0,j}|^2 f_5^j(t) -$$

$$- a_{45}^{0,j} f_6^j(t) dt = \frac{2}{a_{44}^0} (|r^{0,j}|^2 N_1^{-a,j} - a_{45}^{0,j} N_2^{-a,j}). \quad (3)$$

Тут $\sigma_{nz}^{j\pm}$, $\partial w^{j\pm} / \partial s$ – напруження і похідні від переміщень на верхньому (+) і нижньому (–) берегах j -ї неоднорідності; $N_{1,2}^{-a,j}$ – апіорні сталі [1] (зокрема при $\sigma_{yz}^0 = \sigma_{xz}^0 = 0$, $N_{1,2}^{-a,j} = 0$); $(r^{0,j})^2 = a_{44}^{0,j} a_{55}^{0,j} - (a_{45}^{0,j})^2$.

Перейдемо у (2) до системи координат l -го включення та знайдемо граничні значення $\sigma_{nz}^{l\pm}$,

$\partial w^{l\pm} / \partial s$ на її берегах згідно формули Сохоцького-Племелі [1]. Їхня підстановка у (3) дає систему чотирьох сингулярних інтегральних рівнянь стосовно чотирьох невідомих функцій стрибків. У разі тріщин стрибки напружень дорівнюватимуть нулю або будуть відомими. У разі абсолютно жорсткого включення це стосується стрибків похідних переміщень. Додаткові умови рівноваги та однозначності переміщень при обході навколо кожного з дефектів

$$\int_{-a_l}^{a_l} f_5^l(t) dt = 0, \quad \int_{-a_l}^{a_l} f_6^l(t) dt = 0 \quad (l = 1; 2)$$

дають змогу розв'язати результуючу систему, зокрема методом колокацій.

Важливими параметрами напруженого стану тіла з дефектами є узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень (УКІН) [1], які обчислюємо за формулами

$$K_{31}^{lA,B} = \pm p_6^{l\pm} \sqrt{\pi/2} / (a_{55}^l \alpha^l), \quad K_{32}^{lA,B} = \pm p_5^{l\pm} \sqrt{\pi/2}$$

$$p_r^{l\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm a_l} [\sqrt{a_l \mp t} f_r^l(\pm a_l)] \quad (r = 5, 6; l = 1, 2).$$

Тут (A) і (B) відповідно ліва і права вершини неоднорідностей.

3. Числові результати

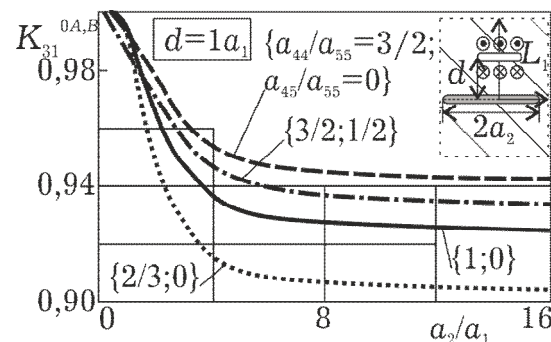


Рис. 2. Вплив довжини моделюючого абсолютно жорсткого включення L_2 на УКІН тріщини L_1 .

На рис. 2 подано графіки залежності ненульових нормованих УКІН $K_{31}^{0A,B} = K_{31}^{1A,B} / \tau^1 \sqrt{\pi a_1}$ тріщини L_1 (дуже податного ізотропного включення з пружними сталіми $a_{44}^{0,1} / a_{55}^{0,1} = 1$; $a_{45}^{0,1} / a_{55}^{0,1} = 0$; $a_{44}^{0,1} / a_{55}^{0,1} = 10^5$) від відносної довжини a_2 / a_1 моделюючого жорстко защемлену межу півпростору дуже жорсткого ізотропного включення L_2 з пружними сталіми $a_{44}^{0,2} / a_{55}^{0,2} = 1$;

$a_{45}^{0,2}/a_{55}^{0,2} = 0$; $a_{44}^{0,2}/a_{55}^{0,2} = 10^{-5}$ для різних мір ортотропії матеріалу змодельованого півпростору. При $a_2 = 16a_1$ похибка обчислення УКІН для розглянутих мір ортотропії матеріалу не перевищувала 1%.

На рис. 3 подано графіки залежності нормованих УКІН від кута орієнтації тріщини L_1 . Тип ліній та матеріалів на рис. 3 відповідають лініям і матеріалам з рис. 2. Суцільна лінія відповідає ізотропному матеріалу.

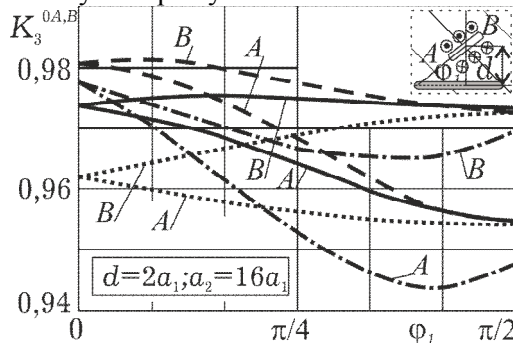


Рис. 3. Вплив орієнтації ϕ_1 дуже податного ізотропного включення-тріщини L_1 на його УКІН.

Для вертикальної орієнтації тріщини при співпадінні головних осей ортотропії з осями тріщини спостерігаємо незалежність УКІН від міри ортотропії матеріалу півпростору.

4. Висновки

На прикладі задачі дослідження пружної рівноваги півпростору зі симетрично навантаженим дуже податним включенням та жорстко защемленою межею півпростору показано ефективність методу вирізування у разі його застосування також і до анізотропних структур. Отримані значення УКІН збіглися з відомими [2] для ізотропного випадку.

Це свідчить, що метод вирізування цілком успішно можна використовувати у разі анізотропії матеріалів, однак треба враховувати, що величина міри анізотропії матеріалу має істотний вплив на необхідну для досягнення належної точності обчислень довжину моделюючих включень.

Робота виконана за рахунок коштів бюджетної програми "Підтримка розвитку пріоритетних напрямків наукових досліджень" КПКВК 6541230

Список використаних джерел

1. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г.Т. Сулим – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
2. Васильєв К. Прямий метод вирізування для моделювання напружено-деформованого стану ізотропних шаруватих середовищ з тонкими неоднорідностями за антиплоского деформування / К. Васильєв, Г. Сулим // Машинознавство. – 2006. – № 11–12. – С. 10–17.
3. Vasil'ev K. V. Application of the method of direct cutting-out to the solution of the problem of longitudinal shear of a wedge with thin heterogeneities of arbitrary orientation / K.V. Vasil'ev, H.T. Sulym // J. Math. Sci. – 2012. – **180**, No. 2. – P. 122–134.
4. Sulym G. Antiplane problem for anisotropic layered media with thin elastic inclusions under concentrated forces and screw dislocations / G.Sulym, S. Shevchuk // J. Theor. and Appl. Mech. – 1999. – **37**, №1. – P. 47–63.

References

1. SULYM, G. (2007) *Osnovy matematychnoyi teorii termoprzhnoyi rivnovahy deformivnykh tverdikh til z tonkymy vkluychennyamy* L'viv: Doslidno-vydavnychyy tsentr NTSh.
2. VASIL'EV, K. & SULYM, G. (2006) Pryamy metod vyrizuvannya dlya modelyuvannya napruzheno-deformovanoho stanu izotropnykh sharuvatykh seredovyshch z tonkymy neodnorodnostyamy za antyploskoho deformuvannya. *Mashynoznavstvo*. 11–12. p. 10-17.
3. VASIL'EV, K. & SULYM, G. (2012) Application of the method of direct cutting-out to the solution of the problem of longitudinal shear of a wedge with thin heterogeneities of arbitrary orientation. *J. Math. Sci.* 180 (2). p 122-134.
4. SULYM, G. & SHEVCHUK, S. (1999) Antiplane problem for anisotropic layered media with thin elastic inclusions under concentrated forces and screw dislocations. *J. Theor. and Appl. Mech.* 37 (1). p. 47-63.

Надійшла до редколегії 13.06.19

УДК 539.3

Ващіліна О. В.¹, к. ф.-м. н., доц.,
Лебедева І. В.¹, к. ф.-м. н., доц.,
Білобрицька О. І.², к. т. н., доц.

Моделювання та чисельне дослідження явища самозбурення коливань круж- ляння бурильного долота

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01033, м. Київ, вул.
Володимирська, 60, e-mail: vashchilina@ukr.net
² Національний транспортний університет,
01010, м. Київ, вул. Омеляновича-Павленка 1,
e-mail: olenkab@ukr.net

O. V. Vashchilina¹, Ph.D. (Phys.-Math.), As.Prof.,
I. V. Lebedyeva¹, Ph.D. (Phys.-Math.), As.Prof.,
O. I. Bilobrytska², Ph.D. (Tech.), As.Prof.

Modeling and numerical research of the self-excitation phenomenon of the drill bit whirlings vibrations

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
60 Volodymyrska Street, City of Kyiv, Ukraine,
01033,
e-mail: vashchilina@ukr.net
² National Transport University, 01010, Kyiv, Omel-
janovicha-Pavlenka str. 1, e-mail: olenkab@ukr.net

У даній статті на основі неголономних кінематичних моделей механічної взаємодії контактуючих тіл з недосконаlostями досліджується початкова стадія явища самозбурення коливань кружляння долота бурильної колони, що обертається, на шорсткій поверхні дна бурової свердловини. Вважається, що долото є абсолютно твердим сферичним тілом, нижня поверхня свердловини має сферичну форму. Вважається, що співвісність системи порушується через незначну початкову кривизну бурильної колони, недосконаlostі геометрії долота й бурової свердловини або дисбалансу маси системи. Побудовано лінеаризовані рівняння руху долота, на основі аналізу розв'язку яких досліджено частоти виникаючих періодичних рухів і проаналізовано їхні форми за різних геометричних параметрів сферичного долота. Показано, що у залежності від властивостей системи рух долота може переходити у стан стаціонарного обертання щодо нерухомого центра швидкостей або ж набувати форми коливань прямого й зворотного кружляння.

Ключові слова: глибоке буріння, долото, неголономна динаміка, пряме та зворотне кружляння.

In the paper an initial stage of a rotating drill string bit whirl motion proceeding on a well bottom surface is studied on the basis of nonholonomic kinematic models of mechanic interaction between the contacting uneven bodies. It is assumed that the drill bit is an absolutely rigid spherical body, the well bottom surface is spherical too. It is supposed that the system coaxiality is disturbed through small initial curvature of the drill string, defects of the bit and bore-well geometry or the debalance of the system mass. Linearized equations of the drill bit movement are derived, the frequencies of periodic motions are calculated, and their types are constructed for different geometric parameters of the spherical bits. It is shown that, depending on the system properties, the drill bit motion can transit to the state of stationary spinning relative to an immovable center of velocities or acquire the regimes of forward and backward whirlings.

Key Words: Deep drilling, drill bits, nonholonomic dynamics, forward and backward whirling.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

У бурильній практиці вже давно відомий деструктивний вплив коливань кружляння на бурильні колони і долота. Відомо, що зворотне кружляння відбувається у 40% усіх випадків буріння глибоких нафтових і газових свердловин. У більшості випадків попередні дослідження цього динамічного процесу були засновані на припущенні, що за таких коливань долото

притискається до стінки свердловини і котиться по її поверхні [3, 4, 5]. Однак у роботах [3, 5] прийнято, що ці явища відбуваються, коли долото переходить від режиму буріння до контакту кочення з дном свердловини, а потім миттєвий центр її обертання починає переміщуватися навколо осі колони на нижній поверхні дна свердловини. У залежності від напрямку обертального руху розрізняють прямі та

зворотні кружляння. При цьому в оберненому напрямі кружляння швидкість обертання може досягти частоти у діапазоні від 5 до 30 разів більшої від швидкості обертання самої колони. Такі швидкості роблять ефект коливання кружляння особливо руйнівним. За таких швидкостей ефект коливання кружляння є руйнівним.

Додаткові впливи на ці процеси можуть бути надані дією осьових сил у колоні [3]. Цю силу можна розкласти на вертикальну складову (WOB) та близьку до нуля поперечну компоненту, що називається невідбалансованою силою. Вона зазвичай вимірюється у відсотках від WOB. Численні випробування долотового інструменту показали, що незбалансованість комерційного долота лежить у межах від 2% до 10% [3]. Отже, можна зробити висновок, що долото притискається до дна свердловини під дією сили WOB, і лише 10% від її величини прагнуть притиснути її до стінки свердловини. Тому більш природно пов'язати ці коливання з коченням долота по нижній поверхні свердловини, а не по її стінці, як традиційно вважається при теоретичних дослідженнях.

Згідно з практичними дослідженнями, основним фактором, що впливає на коливання кружляння є геометрія долота. У даній статті розглядаються кружляння сферичного долота на сферичній поверхні шорсткого дна глибокої бурової свердловини.

2. Постановка задачі

Щоб побудувати математичну модель кружляння долота, врахуємо що процес коливань супроводжується пружним згином секції (бурової колони) БК, суміжної з її низом. Припустимо, що подумки можна відокремити нижні ділянки AB і BC , розташовані між двома нижніми центраторами A і B , і граничною точкою C на нижньому кінці долота (рис. 1). При побудові моделі врахуємо, що рух долота може бути як динамічним, так і кінематичним.

Для вибору моделі порівняємо частоти вільних коливань відокремленої частини БК та кутової швидкості долота. Наприклад, перша частота вільних коливань сталеві триопорної балки ABC з довжинами $e = 2\text{ м}$, $l = 9\text{ м}$ (рис. 1) та діаметрами осьового перерізу $d_1 = 0.18\text{ м}$, $d_2 = 0.16\text{ м}$ дорівнює $f_1 = 106.7\text{ с}^{-1}$, в той час як кутова швидкість бурової колони може досягати величин $\omega \approx 10 - 20\text{ с}^{-1}$. Крім того, долото являє собою порожнине тіло з малим моментом інерції. Таким чином, коливання

кружляння, що розглядаються, являють собою квазістатичні (кінематичні) процеси деформування БК, силою інерції можна знехтувати і рухи кружляння можна вважати кінематичними. Таким чином, при дослідженні руху будуть враховуватися лише пружна та контактна сили і проаналізована лише кінематична стимуляція руху системи.

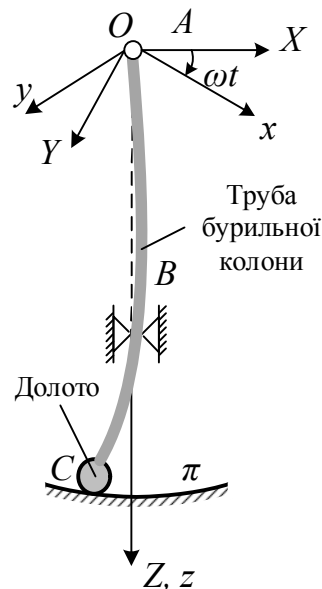


Рис. 1 – Розрахункова схема нижніх секцій бурової колони

Розглянемо модель кочення сферичного долота по сферичній поверхні дна. Приймемо, що БК пружно відхиляється від вертикалі і її сферичне долото, яке обертається з кутовою швидкістю ω навколо своєї осі, починає котитися по шорсткій сферичній поверхні π дна свердловини (рис. 2).

Потім, у залежності від положення точки контакту G по відношенню до точки D , яка лежить на осі обертання, центр C долота може рухатись, як це часто відбувається, у напрямі, протилежному напрямку обертання долота (зворотне кружляння – рис 2, а) або в протилежному напрямі (пряме кружляння – рис. 2, б) по відношенню до осі Oz обертання системи. Введемо нерухому систему координат $OXYZ$ та систему відліку $Oxyz$, зафіксовану у балці БК, що обертається (рис. 1). Їх вертикальні осі OZ та Oz збігаються. Як прийнято у неголономній механіці [1, 6], зручно вивчати цей рух по відношенню до миттєвого центру швидкостей G , оскільки в цьому випадку невідома сила реакції R виключається з рівнянь і лише пружні сили осьового тиску T та зсуву Q , а також

згинальний момент M будуть брати участь у силовій рівновазі. Нехай радіуси долота та твірної нижньої поверхні π будуть a та b , відповідно. Тоді кочення долота може бути вивчене з використанням двох основних математичних моделей, які відрізняються припущеннями про гладкість контактуючих тіл поверхні [2].

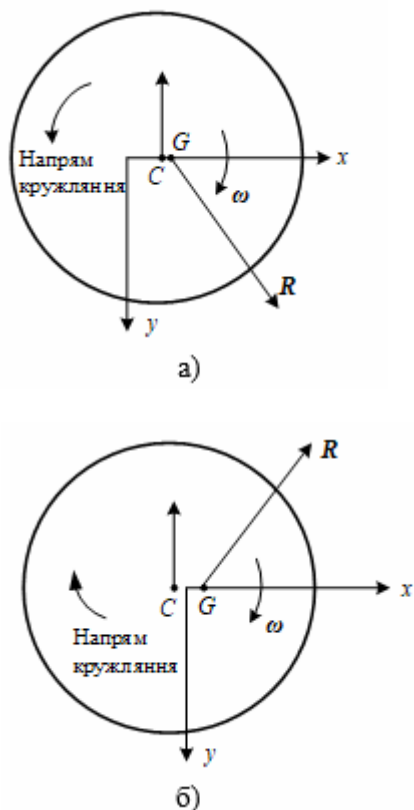


Рис. 2 – Схема неголономного кружляння сферичного долота:
а) зворотнє кружляння; б) пряме кружляння

Потім, у залежності від положення точки контакту G по відношенню до точки, яка лежить на осі обертання, центр C долота може рухатись, як це часто відбувається, у напрямі, протилежному напрямку обертання долота (зворотнє кружляння – рис 2, а) або в протилежному напрямі (пряме кружляння – рис. 2, б) по відношенню до осі Oz обертання системи. Введемо нерухому систему координат $OXYZ$ та систему відліку $Oxyz$, зафіксовану у балці БК, що обертається (рис. 1). Їх вертикальні осі OZ та Oz збігаються. Як прийнято у неголономній механіці [1, 6], зручно вивчати цей рух по відношенню до миттєвого центру швидкостей G , оскільки в цьому випадку невідома сила реакції R виключається з рівнянь і лише пружні сили осьового тиску T та зсуву Q , а також

згинальний момент M будуть брати участь у силовій рівновазі. Нехай радіуси долота та твірної нижньої поверхні π будуть a та b , відповідно. Тоді кочення долота може бути вивчене з використанням двох основних математичних моделей, які відрізняються припущеннями про гладкість контактуючих тіл поверхні [2].

Якщо припустити, що поверхня абсолютно шорстка, то ефект ковзання стає неможливим. У цьому випадку $v=0$ і реалізується чисте кочення з вертінням. Така модель належить до неголономного типу [1, 6].

Як показано в монографії [3], можливість ефекту ковзання долота по дну свердловини сильно зменшується за рахунок наявності на його поверхні алмазних шипів. Цей ефект посилюється за рахунок збільшення тиску долота на дно свердловини та пониження жорсткості БК. У цих випадках застосування неголономної моделі руху цілком виправдане.

У роботі [3] побудовані нелінійні кінематичні рівняння кочення:

$$\begin{aligned} \dot{u} - \omega v - a \sqrt{1 - \frac{u^2 + v^2}{(b-a)^2}} (-\dot{u}' - \omega v') - \frac{a\omega v}{b-a} &= 0, \\ \dot{v} + \omega u - a \sqrt{1 - \frac{u^2 + v^2}{(b-a)^2}} (-\dot{v}' + \omega u') + \frac{a\omega u}{b-a} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

що впливають з умов кочення без ковзання сферичного долота. Тут u, v є малими поперечними пружними зміщеннями центра C долота, орієнтовані паралельно осям Ox та Oy , відповідно; точкою та штрихом над літерами позначені операції диференціювання по часу t та змінній z , відповідно.

Ці рівняння визначають швидкості $\dot{u}, \dot{v}$ руху центра C вздовж осей обертання Ox, Oy , $\dot{u}', \dot{v}'$ позначають кутові швидкості відносно відповідних осей.

У роботі авторів статті [5] показано, що для випадку малих коливань, які розглядаються, після лінеаризації та виключення змінних u, u', v , та v' , співвідношення (1) зводяться до виду:

$$\begin{aligned} u(t) &= C_1 \sin \Omega_1 t + C_2 \cos \Omega_1 t, \\ v(t) &= -C_2 \sin \Omega_1 t + C_1 \cos \Omega_1 t, \end{aligned} \quad (2)$$

де $\omega p = \Omega_1$ - частота коливань в рухомій системі координат, p – параметр частоти, що виражається через радіуси a та b у вигляді:

$$p = (1 + a/(b-a) - aq)/(1 + aq). \quad (3)$$

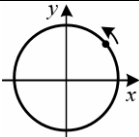
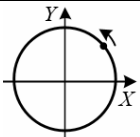
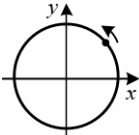
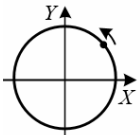
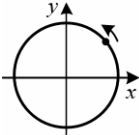
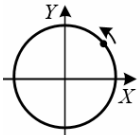
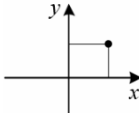
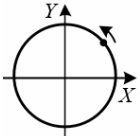
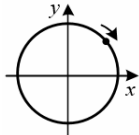
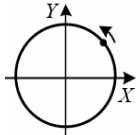
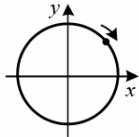
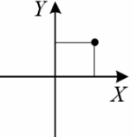
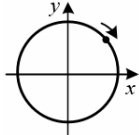
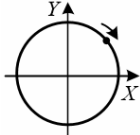
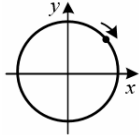
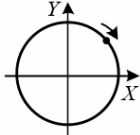
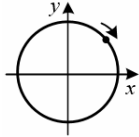
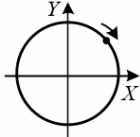
Рівняння (2) описують траєкторії руху точки C у системі координат $Oxyz$, яка обертається з

кутовою швидкістю ω . Рух долота в нерухомій системі відліку з кутовою швидкістю $\Omega_2 = \omega(p-1)$ визначається рівностями:

$$\begin{aligned} X(t) &= C_1 \sin \Omega_2 t + C_2 \cos \Omega_2 t, \\ Y(t) &= -C_2 \sin \Omega_2 t + C_1 \cos \Omega_2 t. \end{aligned} \quad (4)$$

Рівності (2) та (4) дозволяють проаналізувати можливі тенденції динамічної поведінки сферичного долота при різних формах самозбудження коливань кружляння в залежності від значень визначальних параметрів (див. таблицю 1). Припустимо, що частота може набувати різних значень відповідно до формули (3). Результати аналізу зміни типів кружляння долота із зміною параметра p наведені у таблиці 1.

Таблиця 1 – Форми коливань кружляння в залежності від значень частоти p

Номер позиції	Значення параметра p	Тип періодичного руху у системі відліку $Oxyz$, що обертається	Тип руху у фіксованій системі $Oxyz$
1	$p < -1$	$\Omega_1 > \omega$ Пряме обертання 	$\Omega_2 > 2\omega$ Пряме обертання 
2	$p = -1$	$\Omega_1 = \omega$ Пряме обертання 	$\Omega_2 = 2\omega$ Пряме обертання 
3	$-1 < p < 0$	$0 < \Omega_1 < \omega$ Пряме обертання 	$\omega < \Omega_2 < 2\omega$ Пряме обертання 
4	$p = 0$	$\Omega_1 = 0$ Нерухомий стан 	$\Omega_2 = \omega$ Пряме кружляння 
5	$0 < p < 1$	$\Omega_1 < \omega$ Зворотне обертання 	$0 < \Omega_2 < \omega$ Пряме кружляння 
6	$p = 1$	$\Omega_1 = \omega$ Зворотне обертання 	$\Omega_2 = 0$ Нерухомий стан 
7	$1 < p < 2$	$\omega < \Omega_1 < 2\omega$ Зворотне обертання 	$0 < \Omega_2 < \omega$ Зворотне кружляння 
8	$p = 2$	$\Omega_1 = 2\omega$ Зворотне обертання 	$\Omega_2 = \omega$ Зворотне кружляння 
9	$p > 2$	$\Omega_1 > 2\omega$ Зворотне обертання 	$\Omega_2 > \omega$ Зворотне кружляння 

Так, якщо $p < -1$ (позиція 1 у таблиці), то, як свідчать рівняння (2) та (4), центр С долота рухається по круговій траєкторії з кутовою швидкістю $\Omega_1 > \omega$ у системі відліку $Oxyz$, що обертається, і виконує пряме кружляння з кутовою швидкістю $\Omega_2 > 2\omega$, випереджаючи обертання БК у нерухомій системі координат $OXYZ$. Значення $p = -1$ відповідає величинам $\Omega_1 = \omega$, $\Omega_2 = 2\omega$ (позиція 2 у таблиці). Особливий режим генерується при $p = 0$ (позиція 4). У цій ситуації долото нерухоме в системі відліку, що обертається ($\Omega_1 = 0$), але виконує пряме кружляння з частотою $\Omega_2 = \omega$ у нерухомому просторі. Протилежна ситуація відбувається при $p = 1$ (позиція 6), коли долото обертається в оберненому напрямі з частотою $\Omega_1 = \omega$, хоча при цьому нерухоме в точці $X = C_2$, $Y = C_1$ нерухомого простору.

Підкреслимо, що цей стан є також несприятливим, тому що в ньому долото виконує чисте вертіння без кочення та ковзання і процес буріння починає змінювати свій напрям.

Наступне збільшення параметра p тягне за собою перехід від прямого кружляння долота до його зворотного кружляння з наступним істотним збільшенням частоти Ω_2 (позиції 7-9). Відзначимо ще раз, що цей несприятливий ефект відповідає польовим спостереженням, описаним у роботі [3], і складається із суттєвого збільшення частоти кружляння, яка може в 30 разів перевищувати кутову швидкість БК, у той час як за допомогою загальноприйнятої моделі бокового дотику долота зі стінкою свердловини виявити цей ефект неможливо.

Встановлені залежності між значеннями параметра p та типами кружляння сферичного долота дозволяють моделювати режими його руху на початковому етапі збурення. Наступний інтерес в цьому напрямі викликаний питанням про те, як змінюється значення p із зміною параметрів системи. Серед найбільш суттєвих значень, які впливають на збурення коливань кружляння, є жорсткість на згинання труби БК, радіуси долота a і нижньої поверхні b , прольоти l та e , сила T , та співвідношення між параметрами податливості w_M , w_Q , $w_M^{(1)}$ та $w_Q^{(1)}$.

Прийmemo, що типові значення цих величин для сталевих колон складають
 $EI = 4,07 \cdot 10^6$ Па $\cdot$ м⁴, $l = 9$ м, $e = 2$ м,
 $a = 0,1$ м, $b = 0,3$ м, $w_M = 1,968 \cdot 10^{-6}$ м,

$$w_Q = 3,618 \cdot 10^{-6} \text{ м}, w_M^{(1)} = 1,23 \cdot 10^{-6}, \\ w_Q^{(1)} = 1,97 \cdot 10^{-6}, T = -1 \cdot 10^4 \text{ Н}.$$

У цьому випадку $p = 1,376$ кружляння протікає відповідно до пункту 7 табл. 1. Цікаво проаналізувати, що відбувається, коли змінюється радіус a долота. Рис 3 свідчить про те, що параметр p зменшується зі спаданням a . Потім, якщо радіус поверхні дна достатньо малий, значення параметра p наближається до 1 (як цього можна очікувати) і центр долота досягає нерухомого стану (позиція 6 у таблиці). Особливої уваги заслуговує випадок, коли радіус b нижньої поверхні свердловини зменшується. Якщо b наближається до a , тоді q зростає і параметр p набуває великого від'ємного значення. Тоді долото і БК переходять у режим прямого кружляння в обох системах координат і обертаються в одному напрямі. Цей режим також відповідає польовим спостереженням.

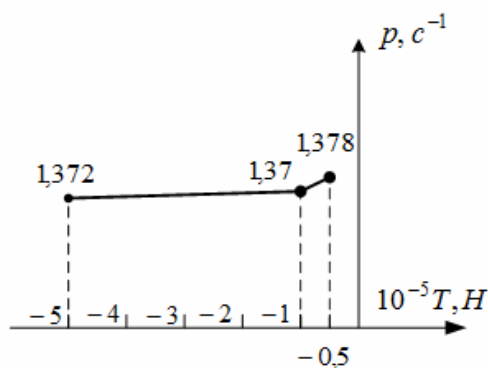


Рис. 3 – Залежність частоти p від радіуса a бурового долота

Щоб прослідкувати вплив сили T на частоту кружляння, на рис. 4 наведені значення p для різних T . Можна зробити висновок, що величина p слабо залежить від T , хоча вона збільшується зі спаданням T .

Ця властивість обумовлена малим плечем

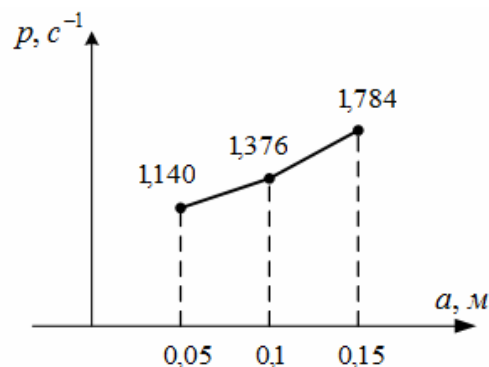


Рис. 4 – Залежність частоти p від осьового зусилля T

вектора T по відношенню до точки контакту G , що є типовим для сферичного долота. Тому його вплив на збурний момент несуттєвий.

Для практики важливо також зрозуміти вплив згинальної жорсткості EI на самозбурення рухів кружляння. Щоб проаналізувати це питання, розглянемо рівняння (5) та (6), які визначають коефіцієнти системи (2). Їх аналіз свідчить про те, що параметри h , $h^{(1)}$ та g , $g^{(1)}$ не залежать від EI , що повністю відповідає кінематичним режимам кружляння, які імітує неголономна модель. При цьому, однак, значення EI входить у коефіцієнти рівнянь (2) разом з осовим зусиллям T , тому, як зазначалося вище, частота p незначно залежить від її величини. Внаслідок цього можна уявити собі, що при неголономному коженні режими кружляння мало чутливі до зміни EI . Дійсно, частоти p , обчислені для значень $EI = 4,07 \cdot 10^7$, $4,07 \cdot 10^6$ та $4,07 \cdot 10^5$ Па $\cdot$ м⁴, рівні $p = 1,379$, $1,376$ і $1,372$, відповідно, тобто при кінематичному збуренні величини p практично

не залежать від розмірів поперечного перерізу труби.

3. Висновки.

Уданій роботі розглянуто модель вільних коливань та стійкості бурильної колони, яка обертається на дні горизонтальної свердловини, з урахуванням сил контактного тертя. Побудовано характеристичні рівняння, знайдено критичні стани і частоти власних коливань, проаналізовано форми втрати стійкості і форми коливань.

Побудовано лінеаризовані моделі малих коливань кружляння долота по поверхні дна свердловини, викликані фрикційною взаємодією долота, що обертається, з поверхнею породи на дні свердловини. З їх допомогою змодельовано ефекти як зворотного, так і прямого кружлянь.

Виконане чисельне моделювання підтвердило можливість встановлення небезпечних руйнівних режимів руху, коли частота кружляння істотно перевищує швидкість обертання бурильної колони.

Список використаних джерел

1. Борисов А. В. Избранные задачи неголономной механики / А.В. Борисов, И.С. Мамаев, А.А. Килин. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 290 с.
2. Васильева А. Б. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях / А. Б. Васильева, А.Б. Бутузов. – М.: МГУ, 1978.
3. Гуляев В.И. Моделирование нештатных ситуаций при бурении глубоких скважин / В.И. Гуляев, С.Н. Глазунов, О.В. Глушакова и др. – Киев : Изд. «Юстон», 2017. – 544 с.
4. Chen S. L. Field investigation of the effects of stick-slip, lateral, and whirl vibrations on roller-cone bit performance / S. L. Chen, K. Blackwood, E. Lamine // SPE Drilling & Completion. – 2002. – V.17. – P.15 – 20.
5. Глазунов С. М. Частотний аналіз періодичних режимів перекошування бурильного долота на шорсткому дні глибокої свердловини / С.М. Глазунов, О.В. Вашіліна, І.В. Лебедєва // Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки, 2016, №1, С. 41 – 44.
6. Неймарк Ю.И. Динамика неголономных систем / Ю.И. Неймарк, Н.А.Фуфаев. – Москва: Наука, Физматлит, 1967. – 520 с.

References

1. BORISOV, A. V., MAMAJEV, I. S. & KILIN A.A. (2005) *Izbrannyye zadachi negolo-nomnoy mekhaniki*. Moskva-Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy.
2. VASILYEVA, A.V. & BUTUZOV, A.V. (1978) *Singulyarno vozmushchennyye uravneniya v kriticheskikh sluchayakh*. Moskva: MGU.
3. GULYAYEV, V. I., GLAZUNOV, S. N., GLUSHAKOVA, O. V. et al (2017) *Modelirovaniye neshtatnykh situatsiy pri burenii glubokikh skvazhin*. Kiev: Yuston publishing.
4. CHEN, S.L., BLACKWOOD, K. & LAMINE, E. (2002) *Field investigation of the effects of stick-slip, lateral, and whirl vibrations on roller-cone bit performance*. SPE: Drilling & Completion.
5. GLAZUNOV, S. M., VASHCHILINA, O. V. & LEBEDYEVA, I. V. (2016) *Frequency analysis of periodic regimes of drill bit rollings on uneven bottom of a deep bore-hole*. Visnyk Kyivsk'oho natsional'noho universytetu imeni Tarasa Shevchenka, Seriya: fizyko-matematychni nauky. 1, pp. 41 – 44.
6. NEIMARK, Yu. I. & FUFAYEV, N. A. (1972) *Dynamics of nonholonomic systems*. Providence, RI: American mathematical society.

Надійшла до редколегії 11.11.19

УДК 519.375

Богданова О.С.¹, к.ф.-м.н., ст.наук.співр.

Bogdanova O.S.¹, Ph.D. (Phys.-Math.), Sr. Sci.
Researcher

**Про вплив анізотропії матеріалу на
граничний стан ортотропної пластини з
періодичною системою колінеарних
тріщин під дією двовісного
навантаження**

**Influence of the material anisotropy on the
limit state of orthotropic plate with periodic
system of collinear cracks under biaxial
loading**

¹ Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН
України, 03057, Київ, вул. Нестерова, 3,
e-mail: o.bogdanova@i.ua

¹ The S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the
National Academy of Sciences of Ukraine, 03057,
Kyiv, Nesterovstr, 3,
e-mail: o.bogdanova@i.ua

На основі модифікованої моделі Леонова-Панасюка-Дагдейла проведено дослідження впливу анізотропії механічних властивостей матеріалу, зокрема, різниці меж міцності при розтягу та стиску, на граничний стан ортотропної пластини, послабленої періодичною системою колінеарних тріщин, в умовах дії зовнішнього двовісного навантаження. На прикладі матеріалу, що задовольняє умові міцності Гоффмана, досліджено механізм руйнування пластини з періодичною системою колінеарних тріщин. Показано вплив ступеня анізотропії матеріалу на процес руйнування та граничний стан пластини.

Ключові слова: періодична система тріщин, двовісність навантаження, ортотропія.

In the presented paper, the limiting state of the orthotropic plates weakened by the periodic system of collinear cracks under biaxial external loading is studied on the basis of the modified crack model of the Leonov-Panasyuk-Dagdale. The material of plate satisfies the strength condition of the general form. On the basis of the solution of a similar problem for an orthotropic plate with one crack, we obtain the relations for determining the basic parameters of a crack model, such as the size of the process zones, the stresses in these zones, and the opening at the top of the cracks. The criterion of critical crack opening is selected as a fracture criterion. On the example of a material satisfying Hoffman strength criterion (generalization of the Mises-Hill criterion, which takes into account the dependence of the difference between the tensile and compressive strength of unidirectional composite materials), the fracture mechanism of a plate weakened by the periodic system of collinear cracks was investigated. The influence of the degree of material anisotropy and biaxiality of external loading on the fracture process and the limiting state of the plate are shown.

Key Words: periodic system of cracks, biaxial loading, orthotropy.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

In the present paper, on the basis of the general solution obtained in [1,2] and Hoffman strength criterion [3], the influence of the anisotropy of the material (the differences between moduli of elasticity along axes of orthotropy and between the ultimate tensile strength and ultimate compressive strength) on the limit state of a thin orthotropic plate weakened by a periodic system of collinear cracks under conditions of biaxial external loading is investigated.

Consider a thin orthotropic plate with periodic system of collinear cracks of length $2l$ located along

the axis of orthotropy which coincides with the Ox -axis. The centers of the cracks are located at the points $x_n = 2nD$ ($x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, y = 0$). The plate is stretched by a homogeneous load applied at infinity $\sigma_y = p > 0$, $\sigma_x = q$, $\tau_{xy} = 0$ by $z \rightarrow \infty$ ($z = x + iy$).

We replace the process zones formed under the action of the loading near the crack tips by additional cuts of length d on the continuations of the cracks whose lips are subjected to the action of

stresses σ_x^0, σ_y^0 . Assume that the limiting state of the material in the process zones is described by a strength criterion

$$F(\sigma_1, \sigma_2, C_i) = 0, \quad (1)$$

where σ_1, σ_2 are the principal stresses and C_i are constants of the material.

In view of the symmetry of the problem, the directions x and y are principal. Therefore, the stresses σ_x^0, σ_y^0 satisfy the condition of strength (1) in the process zone. These stresses are found from the solution of the system of two equations [1,2]:

$$\sigma_x^0 = \beta(\sigma_y^0 - p) + q, \quad F(\sigma_x^0, \sigma_y^0, C_i) = 0, \quad (2)$$

$\beta = \sqrt{E_1/E_2}$; E_1, E_2 - are the elasticity moduli of the material in directions 1 and 2.

For the numerical analysis and conclusions the Hoffman criterion of strength is used. It is a generalization of the Mises–Hill criterion, which takes into account the dependence of the difference between the tensile and compressive strength of unidirectional composite materials. For the plane stressed state, this criterion has the form [3]

$$\frac{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1^c \sigma_1^t} + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_2^c \sigma_2^t} + \frac{\sigma_1^c - \sigma_1^t}{\sigma_1^c \sigma_1^t} \sigma_1 + \frac{\sigma_2^c - \sigma_2^t}{\sigma_2^c \sigma_2^t} \sigma_2 + \frac{\tau_{12}^2}{\tau_0^2} = 1,$$

where σ_1^t, σ_2^t are ultimate strengths in tension along the axes Ox and Oy , σ_1^c, σ_2^c are ultimate strengths in compression along the axes Ox and Oy , and τ_0 is the ultimate strength in shear along the principal directions.

The crack opening displacement $\delta(x, l, L)$ at a point x from the segments $|x - x_n| \leq L, y = 0$ is given by the formula [1,2]:

$$\delta(x) = \frac{2T_0 \sigma_y^0 l}{\pi} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \int_{\omega}^{\sec \rho} \ln \left(\frac{1 + \xi \cos^2 \rho + \sin \rho \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \rho}}{1 - \xi \cos^2 \rho + \sin \rho \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \rho}} \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \right) \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2 \sin^2 \alpha}}, \quad (3)$$

where

$$T_0 = \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2}} \sqrt{2 \left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} - \nu_{12} \right) + \frac{E_1}{G_{12}}}, \quad \rho = \frac{\pi p}{2\sigma_y^0},$$

$$\alpha = \sin \frac{\pi l}{2D}, \quad \omega = \sin \frac{\pi x}{2D} / \sin \alpha.$$

It is clear that the integral in relation (3) is computed in the finite form as $D \rightarrow \infty$, which corresponds to the case of a single crack [1].

The size of process zone is determined by the ratio [1,2]

$$\sigma_y^0(p_*, q_*) \frac{\sin \alpha}{\alpha} \int_1^{\sec \rho_*} \ln \left(\frac{1 + \xi \cos^2 \rho_* + \sin \rho_* \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \rho_*}}{1 - \xi \cos^2 \rho_* + \sin \rho_* \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \rho_*}} \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \right) \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2 \sin^2 \alpha}} = 2\sigma_y^0(p_*^{(i)}, 0) \ln \sec \frac{\pi p_*^{(i)}}{2\sigma_y^0(p_*^{(i)}, 0)}, \quad (5)$$

where $\rho_* = \frac{\pi p_*}{2\sigma_y^0(p_*, q_*)}$, $p_*^{(i)}$ is the limit load in uniaxial loading of the plate with a single crack. The change in $p_*^{(i)}$ from zero to the ultimate strength of the material in the direction y corresponds to the change in the length of the crack from infinity to zero, i.e., includes the whole range of change in the length of the crack.

Since the stresses σ_y^0 , which depend on the constants that characterize the mechanical properties

$$\sin \frac{\pi l}{2D} / \sin \frac{\pi L}{2D} = \cos \frac{\pi p}{2\sigma_y^0}. \quad (4)$$

We choose the critical crack opening displacement criterion as a fracture criterion, then the start of the crack occurs at the moment the crack tip opening displacement attains a certain limit value δ_c , i.e. $\delta(l) = \delta_c$.

Then, basing on (3), the field of ultimate loads p_* can be defined by

of the material, enter into the determining relations (6), it is clear that the limit state of the plate depends also on these constants.

However, it should be noted that the limit state of the plane weakened by a system of cracks is not always determined by the fracture criteria of type (6). If the external load is such that the condition $d = D - l$ is satisfied, then the emergence of prefracture zones of two neighboring cracks occurs, which can also be thought to be the condition of limit state. In view of (4), this condition takes the form

$$\frac{D}{l} = \frac{\pi}{2 \arcsin(\cos \rho^{(d)})}, \quad \rho^{(d)} = \frac{\pi p_*^{(d)}}{2 \sigma_y^0(p_*^{(d)})}. \quad (6)$$

The relation (6) determines the load $p_*^{(d)}$ at which the areas of process zones of neighboring cracks occur.

Fig.1 shows limit fracture curves obtained on the basis of (5) (solid curves), curves of coalescence of process zones obtained on the basis of (6) (dashed curves) for $\beta = 0.1, 0.5, 0.9$ and $p_*^{(0)}/\sigma_2^t = 0.5$, and a limit strength curve for a defect-free material (dash-dot curve) for $\sigma_1^t/\sigma_2^t = 0.8$, $\sigma_2^c/\sigma_2^t = 0.4$, $\sigma_2^c/\sigma_2^t = 0.5$; $D/l = 5$.

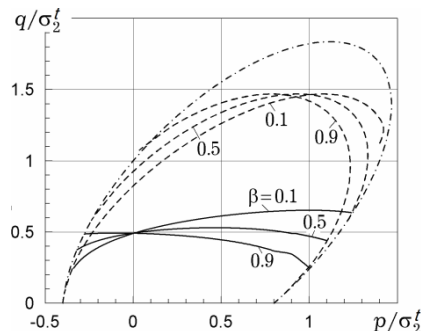


Fig.1. The critical load and coalescence of process zones for different E_1/E_2

Fig.3 shows limit fracture curves obtained on the basis of (5) (solid curves), curves of coalescence of process zones obtained on the basis of (6) (dashed curves), and the corresponding limit strength curves (dash-dot curve) for $\sigma_1^c/\sigma_1^t = 0.5, 1.0, 2.0$, and $\beta = 0.5$, $p_*^{(0)}/\sigma_2^t = 0.5$, $\sigma_1^t/\sigma_2^t = 1.0$.

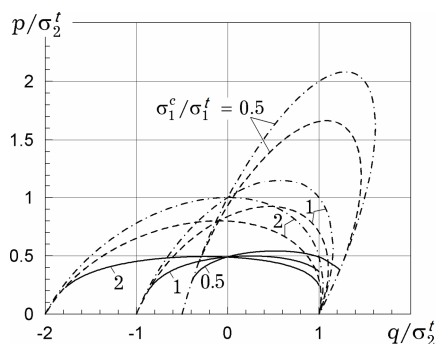


Fig.3. Dependence of critical load on the ratio of tensile and compressive strengths for different σ_1^c/σ_1^t

Fig.5 shows dependences of the dimensionless limit load p_*/σ_2^t of the ultimate strength in compression along the axis of orthotropy Oy to the

Fig. 2 shows dependences of the limit load p_*/σ_2^t on the ratio of the moduli of elasticity E_1/E_2 for $q/\sigma_2^t = -0.2, 0.5$ for material with the same ultimate strengths. As can be seen from the obtained results, an increase in the degree of anisotropy of the material leads to a decrease in the limit load p acting perpendicularly to the line of the cracks in the region of tensile loads q acting along the line of the cracks and to an increase in the limit load p in the region of compressive loads q . All calculations were performed for $D/l = 5$.

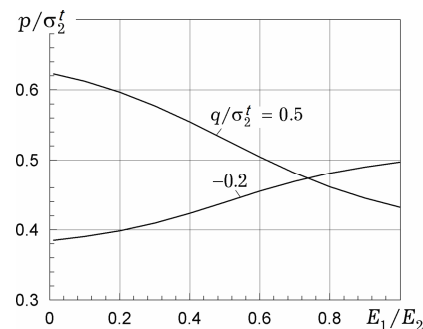


Fig.2. Dependence of critical load on the ratio of the moduli of elasticity E_1/E_2

Fig.4 shows limit fracture curves obtained on the basis of (5) (solid curves), curves of coalescence of process zones obtained on the basis of (6) (dashed curves), and the corresponding limit strength curves (dash-dot curve) for $\sigma_2^c/\sigma_2^t = 0.5, 1.0, 2.0$, and $\beta = 0.5$, $p_*^{(0)}/\sigma_2^t = 0.5$, $\sigma_1^t/\sigma_2^t = 1.0$.

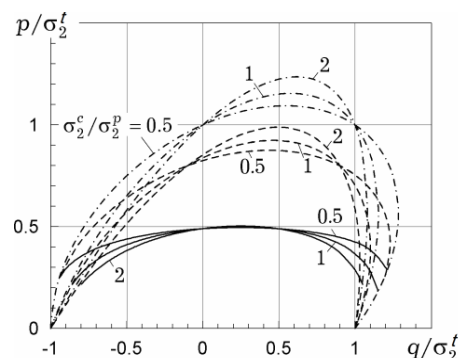


Fig.4. Dependence of critical load on the ratio of tensile and compressive strengths for different σ_2^c/σ_2^t

ultimate strength in tension along the same axis for different values of the load acting along the line of the crack $q/\sigma_2^t = -0.8, -0.5, -0.1, 0.5, 0.8$ and

$\sigma_1^t / \sigma_2^t = 1.0$. Fig. 6 shows the dependences of the dimensionless limit load p_*/σ_2^t on the ratio of the ultimate strength in compression along the axis of orthotropy Ox to the ultimate strength in tension

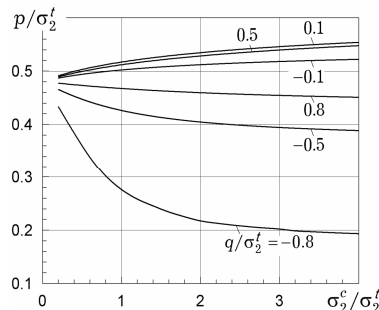


Fig.5. Dependence of critical load on the ratio of tensile and compressive strengths σ_2^c / σ_2^t

The proposed modification of the Leonov-Panasyuk-Dagdale crack model to the case of orthotropic materials allows to effectively solve problems of the destruction of orthotropic bodies with cracks, the material of which satisfies the condition of the strength of the general form.

along the axis of orthotropy Oy σ_1^c / σ_2^t for different values of the load acting along the line of the crack $q / \sigma_2^t = -0.8, -0.5, -0.1, 0.5, 0.8$ and $\sigma_1^t / \sigma_2^t = 1.0$.

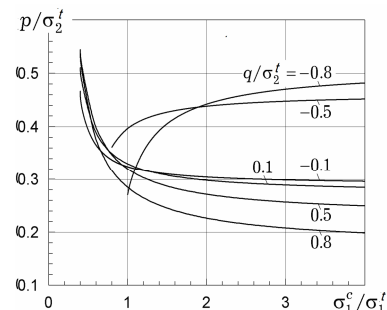


Fig.6. Dependence of critical load on the ratio of tensile and compressive strengths σ_1^c / σ_1^t

As it follows from the presented results, the difference between the ultimate tensile strength and ultimate compressive strength along each direction influences substantially the limit state of the orthotropic plate weakened by a periodic system of collinear cracks.

Список використаних джерел

1. Bogdanova O. S. Limiting state of an elastoplastic orthotropic plate with a periodic system of collinear cracks / O. S. Bogdanova // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – 43, No. 5. – P. 539–546.
2. Kaminsky A.A. On modeling cracks in orthotropic plates under biaxial loading: synthesis and summary / A. A. Kaminsky, O. S. Bogdanova, V. N. Bastun // *Fatigue and Fract. of Engineering Mat. and Structures.* – 2011. – 34, № 5. – P.345–355.
3. Викарио А. Критерии прочности и анализ разрушения конструкций из композиционных материалов // А. Викарио, Р. Толанд / В кн.: Анализ и проектирование конструкций – М.: Машиностроение. – 1978. – С.62-107.

References

1. BOGDANOVA, O. S. (2007) Limiting state of an elastoplastic orthotropic plate with a periodic system of collinear cracks *Int. Appl. Mech.* 43(5).p. 539–546.
2. KAMINSKY, A.A., BOGDANOVA, O.S. and BASTUN, V.N. (2011) On modeling cracks in orthotropic plates under biaxial loading: synthesis and summary. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures.* 34 (5). p.345–355.
3. VIKARIO, A. and TOLAND, R., (1978) *Kriterii prochnosti i analiz razrusheniya konstruktsiy iz kompozitsionnyh materialov* / V kn. Analiz i proektirovanie konstruktsiy – Moskva, Mashinostroyeniye. p. 62-107.

Надійшла до редколегії 01.06.19

УДК 534

Грінченко В. Т.¹, д. ф.-м. н., проф.,
Вовк І. В.¹, д. ф.-м. н., проф., пров. н. с.,
Маципура В. Т.², д. ф.-м. н., проф.

V. T. Grinchenko¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
I. V. Vovk¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
V. T. Matsypura², Dr. Sci. (Phys.-Math.).

Особливості методу часткових областей

Features of the method of partial domains

¹ Інститут гідромеханіки НАН України, 03057,
м. Київ, вул. Желябова, 8/4,

¹ Institute of Hydromechanics NAS of Ukraine,
03057, Kyiv, Zhelyabova str., 8/4,

² Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр.-т. Акад.
Глушкова 4-е,
e-mail: mnivtt@gmail.com

² Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e,
e-mail: mnivtt@gmail.com

Метод часткових областей ефективно застосовується при дослідженні задач про випромінювання і розсіювання хвиль різної природи. Основні результати цього методу відносяться до випадків, коли суміжні області не перетинаються (тобто мають тільки одну загальну межу). Якщо суміжні частинні області перетинаються (можуть мати дві загальні межі) традиційні способи застосування методу часткових областей можуть виявитися не ефективними. В статті описано вдосконалений спосіб застосування методу часткових областей до випадків, коли суміжні області перетинаються. Показано, що на кожній з меж області перетинання можна задати одну з умов: рівність функцій з обох сторін межі, або рівність нормальних похідних функцій. Особливість застосування такого підходу полягає у тому, що значення хвильового числа задачі не повинно співпадати з власним хвильовим числом області перетинання часткових областей. Але при проведенні чисельних розрахунках, указане обмеження не являє собою перешкоду до застосування даного підходу.

Ключові слова: часткові області, хвильовід.

Partial domains method is used effectively to study the problems of the radiation and dissipation of the waves of different nature. The main results of this method are relevant to the cases when adjacent domains do not intersect (it means that they have only one common border). If the adjacent partial domains intersect (it means that they can have two common borders) the traditional way of using partial domains method can be ineffective. An improved way of using partial domains method in the cases when adjacent domains intersect is described in the article. The article shows that one of the following conditions can be set on each of the borders of intersection region: functions equality on both sides of the border or equality of the normal derivative functions. The peculiarity of this approach is that the wave number in the problem should not be the same as the wave number of the partial domains intersection. However, the indicated restriction is not an obstacle to the application of this approach.

Key Words: partial domains, waveguide.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Як відомо [1], метод часткових областей широко і ефективно застосовується при вивченні проблем, пов'язаних з випромінюванням і розсіюванням хвиль різної природи. Але основні результати, досягнуті за допомогою цього методу, відносяться до тих випадків, коли

суміжні області не перетинаються (тобто мають тільки одну загальну межу). У випадках, коли суміжні частинні області перетинаються (можуть мати дві загальні межі) традиційні способи застосування методу часткових областей можуть виявитися не ефективними [2].

В статті [3] описано підхід, котрий дозволяє застосувати метод часткових областей у

випадках, коли суміжні часткові області перетинаються (мають непусте перетинання, котре виділене двома межами). Суть підходу полягає у тому, щоб замість двох умов на одній межі (рівність функцій і нормальних похідних), вимагати виконання по одній умові на кожній з меж області перетинання. Ця умова має вигляд лінійної комбінації умов щодо функцій і їх нормальних похідних з наявністю коефіцієнта у вигляді комплексної сталої.

Дана робота являє собою подальший розвиток застосування методу часткових областей до випадків, коли суміжні області перетинаються.

2. Загальні відомості

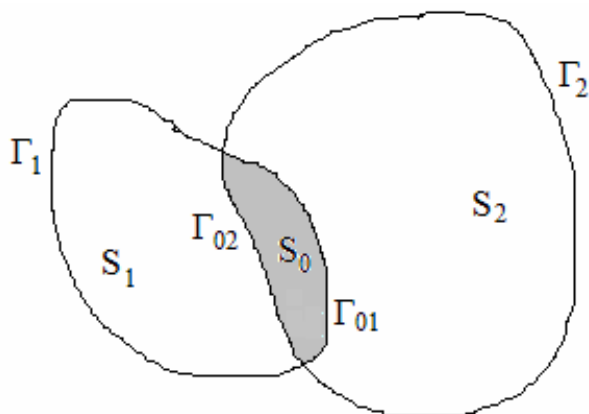


Рис. 1. Геометрія області існування хвильового поля

На рис. 1 зображена область існування гармонічного звукового поля. Вона складається з двох областей S_1 і S_2 . Межа області S_1 є Γ_1 , а Γ_2 – межа області S_2 . Нехай u_1 є розв'язок рівняння Гельмгольца $\Delta u_1 + k^2 u_1 = 0$ для області S_1 , а u_2 – розв'язок рівняння Гельмгольца $\Delta u_2 + k^2 u_2 = 0$ для області S_2 . Тут $k = \omega / c$ – хвильове число, ω – кругова частота, c – швидкість звуку. Область S_0 є загальною для u_1 і u_2 . Межа області S_0 складається з двох меж $\Gamma_0 = \Gamma_{01} \cup \Gamma_{02}$, де Γ_{01} і Γ_{02} – частини меж Γ_1 і Γ_2 .

Умови спряження на межах області S_0 визначимо у вигляді:

$$u_1 = u_2 \text{ на межі } \Gamma_{01}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial n} \text{ на межі } \Gamma_{02}. \quad (2)$$

Введемо функцію $u = u_1 - u_2$ і розглянемо в області S_0 граничну задачу для функції u :

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (3)$$

$$u = 0 \text{ на межі } \Gamma_{01}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на межі } \Gamma_{02}. \quad (4)$$

Якщо гранична задача (3), (4) має тривіальний розв'язок $u \equiv 0$, то це означає, що розв'язки u_1 і u_2 в області S_0 співпадають, тобто $u_1 = u_2$. Така ситуація має місце при умові, що значення k не є власним хвильовим числом граничної задачі (3), (4). Але указане обмеження не являє собою перешкоду до застосуванню даного підходу, оскільки при чисельних розрахунках, в наслідок округлення, практично неможливо попасти на ті значення k , які є власними хвильовими числами граничної задачі (3), (4). Проілюструємо застосування описаного підходу на прикладі простого плоско паралельного хвильоводу.

3. Плоскопаралельний хвильовід

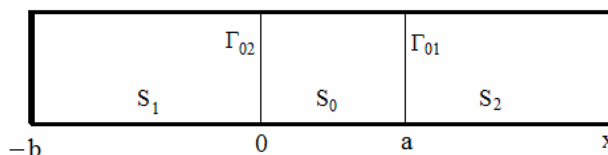


Рис. 2. Геометрія хвильоводу

Розглянемо просту задачу, котра дозволяє отримати аналітичний розв'язок у явному вигляді. Маємо напівнескінченний плоскопаралельний хвильовід (рис. 2) з жорсткими межами, наповнений ідеальним середовищем з густиною ρ і швидкістю звука c . В перерізі $x = -b$ знаходиться плоский поршень, що коливається за гармонічним законом зі швидкістю $v \exp(-i\omega t)$. Як наслідок, у хвильоводі утворюється біжуча плоска гармонічна хвиля тиску $p = p_0 \exp(kx)$. Розписуючи граничну умову на поверхні поршня

$$\frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=-b} = v, \quad (5)$$

отримуємо вираз для поля тиску у хвилеводі (часовий множник $\exp(-i\omega t)$ не пишемо)

$$p = \frac{\omega \rho v}{k} \exp(ika) \exp(ikx). \quad (6)$$

Тепер уявімо собі, що область існування поля розділена на дві області: обмежена область S_1 визначається нерівністю $-b \leq x \leq a$ і напівнескінченна область S_2 визначається нерівністю $x \geq 0$. Область S_0 , котра утворена в результаті перетину областей S_1 і S_2 , визначається нерівністю $0 \leq x \leq a$.

Поле в області S_1 можна представити у вигляді двох плоских хвиль, котрі біжать одна назустріч одній:

$$p_1 = A \exp(ikx) + B \exp(-ikx).$$

Враховуючи граничну умову (5), матимемо

$$p_1 = A [\exp(ikx) + \exp(-i2kb) \exp(-ikx)] - \frac{\omega \rho v}{k} \exp(-ikb) \exp(-ikx). \quad (7)$$

Поле в області S_2 являє собою біжучу плоску хвилю

$$p_2 = C \exp(ikx). \quad (8)$$

На межах області S_0 задамо такі умови спряження полів:

$$p_1 = p_2 \text{ при } x = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{\partial p_2}{\partial x} \text{ при } x = a. \quad (10)$$

Підставляючи вирази (7), (8) в умови (9), (10), отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів A і C :

$$A [1 + \exp(-i2kb)] - C = \frac{\omega \rho v}{k} \exp(-ikb), \quad (11)$$

$$A [1 - \exp(-i2kb) \exp(-i2ka)] - C = -\frac{\omega \rho v}{k} \exp(-ikb) \exp(-i2ka), \quad (12)$$

Визначник системи рівнянь (11), (12) має вигляд

$$\Delta = -\exp(-i2kb) [1 + \exp(-i2ka)]. \quad (13)$$

Як бачимо, при виконанні умови

$$\exp(-i2ka) = -1 \quad (14)$$

визначник системи $\Delta = 0$. Отже при значеннях хвильового числа k , для котрих має місце рівність (14), система рівнянь (11), (12) не має однозначного розв'язку.

Тепер розглянемо окремо для області S_0 таку граничну задачу:

$$\Delta u(x, y) + k^2 u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in S_0, \quad (15)$$

$$u = 0 \text{ при } x = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ при } x = a. \quad (16)$$

Функцію $u(x, y)$, що визначає поле тиску в області S_0 , запишемо у вигляді $u = A_1 \exp(ikx) + A_2 \exp(-ikx)$. Розписуючи умови (16) отримаємо систему рівнянь відносно коефіцієнтів A_1 і A_2 . Неважко переконатися, що визначник цієї системи рівнянь дорівнює нулю якщо виконується умова (14).

Таким чином, хвильові числа, для котрих, за умов (9), (10), задача про коливання поршня у плоскому хвилеводі не має однозначного розв'язку співпадають з власними хвильовими числами області перетину S_0 . Коли зазначені хвильові числа не співпадають, то система рівнянь (11), (12) має однозначний розв'язок для коефіцієнтів A і C . Якщо ці вирази для коефіцієнтів A і C підставити у формули (7), (8) для полів в часткових областях S_1 і S_2 , то, після нескладних перетворень, вирази для полів p_1 і p_2 приймуть вигляд формули (6), а саме

$$p = \frac{\omega \rho v}{k} \exp(ika) \exp(ikx).$$

5. Проходження хвилі крізь область спряження плоского і клиноподібного хвилеводів

На рис. 3 показано хвилевід, котрий утворено сполученням плоского хвилеводу з клиноподібним хвилеводом з кутом розкриття $\theta_0 > 90^\circ$. Стрілка показує напрям поширення нульової моди плоско паралельного хвилеводу. Для побудови розв'язку задачі вводимо декартову (x, y) і полярну (r, θ) системи координат з загальним центром у точці O . Вся область

існування звукового поля поділяється на три області: Область S_1 – плоский хвильовід $x \leq x_0$, $|y| \leq h$, область S_2 являє собою круг радіусу r_0 , область S_3 – клиноподібний хвильовід $r \geq r_0$, $|\theta| \leq \theta_0$.

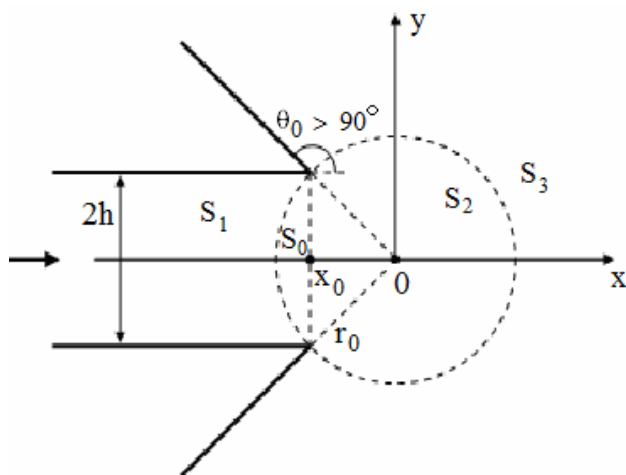


Рис. 3. Геометрія хвильоводу

Як бачимо, виникає область перетину S_0 часткових областей S_1 і S_2 . Умови спряження полів на межах часткових областей запишемо у вигляді, котрий відповідає описаному підходу застосування методу часткових областей при наявності області перетину часткових областей:

$$\begin{aligned} 1) \quad & p_1 = p_2, \quad x = x_0, \quad |y| \leq h, \\ 2) \quad & p_2 = p_3, \quad r = r_0, \quad |\theta| \leq \theta_0, \\ 3) \quad & \begin{cases} \frac{\partial p_2}{\partial r} = \frac{\partial p_3}{\partial r}, & r = r_0, \quad |\theta| \leq \theta_0, \\ \frac{\partial p_2}{\partial r} = \frac{\partial p_1}{\partial r}, & r = r_0, \quad \theta_0 \leq |\theta| \leq \pi. \end{cases} \end{aligned}$$

Формат статті не дозволяє представити побудову розв'язку поставленої задачі і провести аналіз чисельних результатів.

5. Висновки

Проведені дослідження підтверджують ефективність застосування описаної модифікації методу часткових областей у випадках, коли часткові області перетинаються. Суть підходу полягає у тому, щоб замість двох умов на одній межі (рівність функцій і нормальних похідних), вимагати виконання по одній умові на кожній з меж області перетинання, тобто на одній межі вимагаємо виконання рівності функцій, а на другій – рівності нормальних похідних.

Особливість застосування такого підходу полягає у тому, що значення хвильового числа задачі не повинно співпадати з власним хвильовим числом області перетинання часткових областей. Але указане обмеження не являє собою перешкоду до застосування даного підходу, оскільки ширина зони, де неможливо отримати надійні кількісні дані, може бути, при належному виборі кількості мод хвильоводу, достатньо малою.

Список використаних джерел

1. Гринченко В. Т. Волновые задачи акустики / В. Т. Гринченко, И. В. Вовк, В. Т. Мацыпура. – Киев: ИНТЕРСЕРВИС, 2013. – 572 с.
2. Вычислительные методы в электродинамике / Под ред. Р. Миттра. – Москва: Мир, 1977. – 485 с.
3. Вовк И. В. Об особенностях применения метода частичных областей в волновых задачах / И. В. Вовк, А. М. Гомилко, Н. С. Городецкая // Акустический журнал. – 1995. – Т. 41, № 3. – С. 399–404.

References

1. GRINCHENKO, V.T., VOVK, I.V. and MATSYUPURA, V.T. (2013) *Volnovyie zadachi akustiki*. Kiev: INTERSERVIS.
2. MITTRA, P. (ed.) (1977) *Vychislitelnyie metody v elektrodinamike*. Moscow: Mir.
3. VOVK, I. V., GOMILKO, A. M. and GORODETSKAYA, N. S. (1995) Ob osobennostyakh primeneniya metoda chastichnyih oblastey v volnovyih zadachah. *J. Acoust.* 41 (3). p. 399–404.

Надійшла до редколегії 20.05.19

УДК 539.376

Голуб В. П., д.т.н, проф.

V. P. Golub, D. Sci. prof.

**Щодо розв'язку задач повзучості
тонкостінних трубчастих елементів із
ізотропних нелінійно-в'язкопружних
матеріалів**

**Towards the solution of creep problems of
thin-shelled tubular elements in isotropic
nonlinear viscoelastic materials**

Національна академія наук України, Інститут
механіки ім. С.П.Тимошенка, 303057, м. Київ,
вул. Несторова, 3
e-mail: creep@inmech.kiev.ua

National Academy of Ukraine, S.P.Timoshenko
Institute of Mechanics, 03057, Kyiv, Nesterov str., 3
e-mail: creep@inmech.kiev.ua

Запропоновано підхід щодо розрахунку деформацій повзучості тонкостінних трубчастих елементів із ізотропних нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов комбінованого навантаження одновісним розтягом та скрученням. У якості визначальних рівнянь повзучості обрано систему рівнянь, що побудована згідно із гіпотезою пропорційності девіаторів, нелінійність в'язкопружних властивостей в якій задається відносно інтенсивності деформацій повзучості та деформацій об'ємної повзучості моделями типу моделі Работнова. Ядра інтенсивності деформацій повзучості та об'ємної повзучості задаються співвідношеннями, що встановлюють залежність між цими ядрами та ядрами одновимірної повзучості із системи базових експериментів. У якості базових експериментів розглянуто одновісний розтяг із виміром повздовжніх та поперечних деформацій, а також одновісний розтяг та чисте кручення із виміром повздовжніх та зсувних деформацій. Функції нелінійності в'язкопружних властивостей задаються згладжуючими кубічними сплайнами. Розв'язано та експериментально апробовано задачі розрахунку деформацій повздовжньої, поперечної та зсувної повзучості тонкостінних трубчастих зразків із «поліетилену високої щільності ПЕВП».

Ключові слова: нелінійна в'язкопружність, двовісний напружений стан, процес повзучості.

A new approach to the creep strains analysis of thin-shelled tubular elements in isotropic nonlinear viscoelastic materials under combined loading with uniaxial tension and torsion has been proposed. The system of equations that is constructed according to the deviators proportionality hypothesis has been chosen as the creep constitutive equations the nonlinearity of viscoelastic properties in which is given with respect to the creep strain intensity and volumetric strain by the Rabotnov type models. The kernels of creep strain intensity and volumetric strain are given by the relations that establish the relationships between these kernels and one-dimensional creep kernels determined from a system of base experiments. One-dimensional tension with the measurement of longitudinal and transverse strains as well as one-dimensional tension and pure torsion with the measurement of longitudinal and shearing strains have been considered as base experiments. The functions of nonlinearity of viscoelastic properties are given by smoothing cubic splines. The problems of the analysis of longitudinal, transverse and shearing strains of thin-shelled tubular specimens made of "high density polyethylene PEHD" have been solved and experimentally approved.

Key Words: nonlinear viscoelasticity, biaxial stress state, creep process.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Широке застосування полімерів та композитів на їх основі у відповідальних елементах сучасних інженерних конструкцій стимулювало розвиток та активне використання лінійної та нелінійних теорій в'язкопружності при визначенні напружено-деформованого стану таких конструкцій та їх довговічності.

Однією із основних задач, що розв'язується у разі використання теорій в'язкопружності, розглядаються задача ідентифікації ядер спадковості за умов складного напруженого стану та задача визначення параметрів ядер спадковості. В лінійній теорії в'язкопружності задача ідентифікації ядер спадковості та визначення параметрів ядер за умов складного

напруженого стану розв'язується на підставі співвідношень, що встановлюють залежність між ядрами спадковості за умов складного та одновісного напруженого станів [1-3]. В цій роботі такий підхід до розв'язання задачі ідентифікації ядер спадковості за умов складного напруженого стану узагальнено на один із варіантів нелінійної теорії в'язкопружності.

1. Постановка задачі

Розглядається процес повзучості тонкостінних трубчастих елементів із ізотропних нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов двовісного напруженого стану і простих режимів навантаження.

Вважається, що за умови простих режимів навантаження справедливими є гіпотеза пропорційності девіаторів та гіпотеза єдиної діаграми деформування, так що залежність між компонентами тензорів деформацій $\varepsilon_{ij}(t)$, тензорів напружень $\sigma_{ij}(t)$ та часом t задається системою визначальних рівнянь

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v(t) = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i(\sigma_i(t); t)}{\sigma_i(t)} (\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij} \sigma_0(t)); \\ \varphi_i(\varepsilon_i(t)) = \sigma_i(t) + \lambda_i \int_0^t K_i(t-\tau) \sigma_i(\tau) d\tau; \quad (i, j=1,3) \\ \varphi_v(\varepsilon_v(t)) = \sigma_0(t) + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) \sigma_0(\tau) d\tau, \end{cases} \quad (1.1)$$

Тут $\varepsilon_v(t)$, $\varepsilon_i(t)$ – об'ємна деформація та інтенсивність деформацій повзучості; $\sigma_0(t)$ та $\sigma_i(t)$ – середнє напруження та інтенсивність напружень; $K_v(t)$ та $K_i(t)$ – ядра об'ємної повзучості та інтенсивності деформацій повзучості; $\varphi_v(\cdot)$ та $\varphi_i(\cdot)$ – функції, що задають нелінійність скалярних властивостей; δ_{ij} – дельта-функція Кронекера.

Ядра повзучості в (1.1) задаються дробово-експоненціальними функціями, так що

$$K(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta)^n (t-\tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha)]}, \quad (1.2)$$

де α , β – параметри ядер ($-1 < \alpha < 0$; $\beta > 0$); $\Gamma[\cdot]$ – гамма-функція Ейлера.

2. Ідентифікація ядер повзучості

Задача ідентифікації ядер повзучості $K_i(t-\tau)$ та $K_v(t-\tau)$ в (1.1) розв'язується шляхом встановлення залежностей між ядрами повзучості за умов складного та одновісного напруженого стану, що розглядається як базовий. Розглянуто дві групи одновимірних базових експериментів, що містять випробування зразків матеріалу на повзучість за умов одновісного розтягу, а також за умов одновісного розтягу та чистого скручення.

2.1. Базовий експеримент: одновісний розтяг. Експеримент містить випробування суцільних циліндричних зразків матеріалу на повзучість під дією одновісного розтягуючого напруження σ_{11} із вимірюванням повздовжніх $\varepsilon_{11}(t)$ та поперечних $\varepsilon_{22}(t)$ деформацій.

Залежність між деформаціями, напруженням та часом задається рівняннями

$$\begin{aligned} \varphi_{11}(\varepsilon_{11}(t)) &= \sigma_{11}(t) + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(t-\tau) \sigma_{11}(\tau) d\tau; \\ \varphi_{22}(\varepsilon_{22}(t)) &= - \left[\sigma_{11}(t) + \lambda_{22} \int_0^t K_{22}(t-\tau) \sigma_{11}(\tau) d\tau \right], \end{aligned} \quad (2.1)$$

де $K_{11}(t-\tau)$, $K_{22}(t-\tau)$ – ядра повздовжньої та поперечної повзучості; $\varphi_{11}(\cdot)$, $\varphi_{22}(\cdot)$ – функції, що задають нелінійність в'язкопружних властивостей у повздовжньому та поперечному напрямках.

Із сумісного розв'язку рівнянь (1.1) та (2.1) для ядер інтенсивності деформацій повзучості $K_i(t)$ та об'ємної повзучості $K_v(t)$ отримуємо співвідношення

$$\begin{aligned} \lambda_i K_i(t) &= \frac{\psi_{11}(\sigma_{11}) \lambda_{11} K_{11}(t) + \psi_{22}(\sigma_{11}) \lambda_{22} K_{22}(t)}{\psi_{11}(\sigma_{11}) + \psi_{22}(\sigma_{11})}, \\ \lambda_v K_v(t) &= \frac{\psi_{11}(\sigma_{11}) \lambda_{11} K_{11}(t) - 2\psi_{22}(\sigma_{11}) \lambda_{22} K_{22}(t)}{\psi_{11}(\sigma_{11}) - 2\psi_{22}(\sigma_{11})}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

що встановлюють залежність між ядрами повзучості за умов складного та одновісного напруженого станів.

2.2. Базовий експеримент: одновісний розтяг та чисте скручення. Експеримент містить випробування на повзучість суцільних циліндричних зразків за умов одновісного розтягу напруженнями σ_{11} із вимірюванням повздовжніх деформацій $\varepsilon_{11}(t)$ та тонкостінних трубчастих

зразків за умов чистого скручення напруженнями τ_{21} із вимірюванням зсувних деформацій $\varepsilon_{21}(t)$.

Залежність між деформаціями, напруженнями та часом задається рівняннями

$$\begin{aligned}\varphi_{11}(\varepsilon_{11}(t)) &= \sigma_{11}(t) + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(t-\tau) \sigma_{11}(\tau) d\tau; \\ \varphi_{21}(\varepsilon_{21}(t)) &= \tau_{21}(t) + \lambda_{21} \int_0^t K_{21}(t-\tau) \tau_{21}(\tau) d\tau,\end{aligned}\quad (2.3)$$

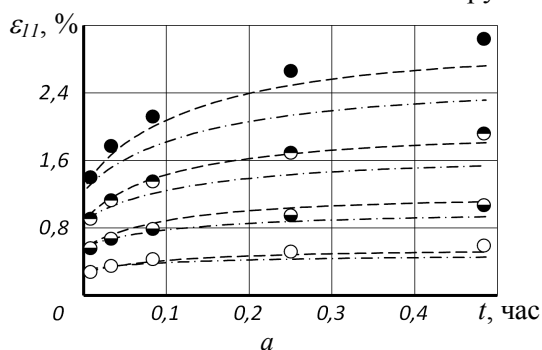
де $K_{11}(t-\tau)$, $K_{21}(t-\tau)$ – ядра повздовжньої та зсувної повзучості; $\varphi_{11}(\cdot)$, $\varphi_{21}(\cdot)$ – функції, що задають нелінійність повздовжніх та зсувних в'язкопружних властивостей.

Із сумісного розв'язку рівнянь (1.1) та (2.3) для ядер інтенсивності деформацій повзучості $K_i(t)$ та об'ємної повзучості $K_v(t)$ отримуємо співвідношення

$$\begin{aligned}\lambda_i K_i(t) &= \lambda_{21} K_{21}(t); \\ \lambda_v K_v(t) &= \frac{\lambda_{11} K_{11}(t) \psi_{11}(\sigma_{11}) - \frac{2}{\sqrt{3}} \lambda_{21} K_{21}(t) \psi_{21}\left(\frac{\sigma_{11}}{\sqrt{3}}\right)}{\psi_{11}(\sigma_{11}) - \frac{2}{\sqrt{3}} \psi_{21}\left(\frac{\sigma_{11}}{\sqrt{3}}\right)},\end{aligned}\quad (2.4)$$

що встановлюють залежність між ядрами повзучості за умов складного та одновимірного напруженого станів.

2.3. Функції нелінійності в'язкопружних властивостей. Нелінійність в'язкопружних



властивостей у рівняннях (2.1) і (2.3) та у співвідношеннях (2.2) і (2.4) задається функціями $\psi(\cdot)$ у формі згладжуючих кубічних сплайнів, так що

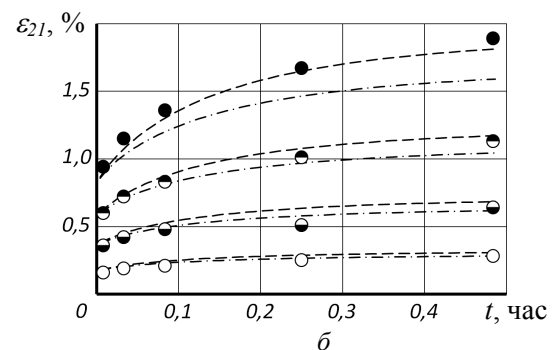
$$\psi(\cdot) = a_{0,j} + a_{1,j}\varepsilon + a_{2,j}\varepsilon^2 + a_{3,j}\varepsilon^3, \quad (2.5)$$

де $a_{0,j}; \dots$ – коефіцієнти сплайнів; j – кількість інтервалів розбиття діаграми миттєвого деформування, нелінійність якої визначає нелінійність в'язкопружних властивостей матеріалу.

3. Повзучість тонкостінних трубчастих елементів

Розв'язується задача розрахунку деформацій повздовжньої, поперечної, зсувної та об'ємної повзучості тонкостінних трубчастих елементів із „поліетилену високої щільності ПЭВП” за умов одновісного та двовісного навантаження.

На фіг. 1, якості приклад, наведені результати розрахунків деформацій повздовжньої та зсувної повзучості тонкостінних трубчастих елементів із „поліетилену ПЭВП” за умов комбінованого навантаження одновісним розтягом та скрученням порівняно із експериментальними даними. Штриховими лініями нанесено розрахунки, що виповнені із використанням параметрів ядер повзучості, що знайдені згідно із співвідношенням (2.2), штрихпунктирними лініями – згідно із співвідношенням (2.4). Експериментальні дані запозичені із [4].



Фіг. 1 Розрахункові (лінії) та експериментальні (кола) значення деформацій повздовжньої (а) та зсувної (б) повзучості тонкостінних трубчастих елементів із „поліетилену ПЭВП” за умов комбінованого навантаження одновісним розтягом із скрученням: $\sigma_{11} = 1,77$; $\tau_{21} = 0,83$ (○); 3,54; 1,66 (◐); 5,31; 2,49 (◑); 7,08; 3,32 (●) МПа

Висновки

Підхід до розв'язку задач повзучості, що ґрунтується на моделі в'язкопружності у формі пропорційності девиаторів та на методі визначення параметрів ядер повзучості на основі співвідношень між ядрами повзучості за умов складного та

одновимірного напружених станів, дозволяє отримувати розв'язки задач розрахунку деформацій повзучості тонкостінних трубчастих елементів під дією нормальних та дотичних напружень, що узгоджуються із експериментальними даними.

Список використаних джерел

1. Колтунов А.А. Метод определения объемных и сдвиговых характеристик упруго-вязких наследственных сред по экспериментам на одноосное растяжение (сжатие) / А.А.Колтунов // Механіка полимеров. – 1969. – №4. – С. 754-758.
2. Голуб В.П. Идентификация ядер наследственности изотропных линейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии. 1. Суперпозиция сдвиговой и объемной ползучести / В.П.Голуб, Б.П.Маслов, П.В.Фернати // Прикл. механика. – 2016. – Том 52, № 2. – С. 78-90.
3. Голуб В.П. Идентификация ядер наследственности изотропных линейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии. 2. Случай пропорциональности девиаторов / В.П.Голуб, Б.П.Маслов, П.В.Фернати // Прикл. механика. – 2016. – Том 52, № 6. – С. 111-125.
4. Крегерс А.Ф. Комплексное исследование полиэтилена высокой плотности в условиях нелинейной ползучести и релаксации напряжений / А.Ф.Крегерс, М.Р.Килевич // Механика композитных материалов. – 1985. – №2. – С. 195-201.

References

1. KOLTUNOV, A. (1969) Metod opredelenija objemnyh i sdvigovyh harakteristik uprugovjazkih nasledstvennyh sred po experimentam na jednoosnoe rastjazhenie (szhatie). *Mehanika polimerov*. 4. pp. 754-758.
2. GOLUB, V.P., MASLOV, B.P., FERNATI, P.V. (2016) Identifikacija jader nasledstvennosti izotropnyh linejno-vjazkouprugih materialov pri slozhnom naprjazhenom sostojanii. 1. Superpozicija sdvigovoj i objemnoj polzuchesti. *Prikl. Mehanika*. 52 (2). pp. 78-90.
3. GOLUB, V.P., MASLOV, B.P., FERNATI, P.V. (2016) Identifikacija jader nasledstvennosti izotropnyh linejno-vjazkouprugih materialov pri slozhnom naprjazhenom sostojanii. 2. Sluchaj proporcional'nosti deviatorov. *Prikl. Mehanika*. 52 (6). pp. 111-125.
4. KREGERS, A.F., KILEVICH, M.R. (1985) Kompleksnoe issledovanie polietilena vysokoj plotnosti v uslovijah nelinejnoy polzuchesti i relaksacii naprjazhenij. *Mechanika kompozitnyh materialov*. 2. pp. 195-201.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми „Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень” (КПКВК 6541230).

Надійшла до редколегії 19.06.2019

УДК 539.3

Жук Я.О.¹, д. ф.-м. н., проф.

Y.A.Zhuk¹, Dr. Sci., Prof.

Теплова нестійкість нанокомпозитних елементів конструкцій при циклічному навантаженні

Thermal instability of nanocomposite structural elements under cyclic loading

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, м. Київ, вул. Володимирська, 64
e-mail: y.zhuk@i.ua

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, 01033, Volodymyrska Street, 64
e-mail: y.zhuk@i.ua

Досліджується руйнування нанокомпозитного елемента конструкції внаслідок дисипативного розігріву при гармонічному навантаженні. Розроблено метод прогнозування втрати роботоздатності нанокомпозитних елементів конструкцій внаслідок теплової нестійкості, який ґрунтується на моделі моногармонічної апроксимації реакції матеріалу на циклічне навантаження, амплітудних співвідношеннях між основними поперевими змінними та концепції температурно-і амплітудно залежних комплексних модулів. Вивчається циклічна витривалість та втрата стійкості по тепловому сценарію полімерного нанокомпозитного стержня під одночасною дією статичного і циклічного навантаження.

Ключові слова: нанокомпозит, тепла нестійкість, дисипативний розігрів

The failure of nanocomposite structural elements due to the self-heating under harmonic loading is investigated. The technique of the nanocomposite structural element life prediction is elaborated with accounting for the influence of dissipative heating and volume fraction of nanofibers on mechanical stability of polymeric nanocomposite rod subjected to both static and monoharmonic loading that are based on the concept of temperature and amplitude dependent complex moduli. In this regard, special modified homogenization procedure based on the Mori-Tanaka method is designed with taking into account the effects of interface on response of nanocomposite material to derive the complex moduli for the nanocomposite with either random or unidirectional orientation of nanofibers. Complex moduli approach is used to formulate the approximate (single frequency approximation) problem statement. The problem is solved numerically. Influence of carbon nanotube fiber volume fraction on the high cycle fatigue behavior for the nanocomposite rod with both randomly and unidirectionally oriented nanofibers is estimated. It is found that volume fraction of nanofibers affects significantly the temperature level and, thus, fatigue life of nanocomposite element. The approach presented in this paper can be useful to understanding of the cyclic behavior of viscoelastic structures and investigations of the fatigue with taking into account the vibro-heating effect due to the mechanical energy dissipation.

Key Words: nanocomposite, thermal instability, dissipative heating

Статтю представив акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Перестюк М.О.

1. Introduction

Полімерні нанокомпозити знайшли своє застосування у багатьох високотехнологічних сферах, таких як авто- та авіабудування, машинобудування, будівництво тощо. Завдяки низькій теплопровідності, високим дисипативним характеристикам та значній залежності механічних властивостей пластмас від температури ефекти термомеханічної зв'язаності можуть бути значними особливо у випадках циклічного (зокрема моногармонічного) навантаження. При циклічному

навантаженні полімерні матеріали демонструють в'язкопружну поведінку, що призводить до дисипативних процесів в елементах конструкцій. Дисипація механічної енергії в тепло призводить до саморозігріву та підвищення температури, оскільки низькі значення коефіцієнта теплопровідності унеможливають ефективний відвід тепла від зони його локалізації у композитному елементі. Температура дисипативного розігріву може досягати достатньо високих рівнів, які, як наслідок, можуть викликати критичні теплові стани, зок-

рема, призводити до явища теплової нестійкості елемента конструкції.

У даній роботі розвивається підхід до дослідження впливу вібророзігріву на теплову стійкість полімерного нанокompозитного елемента, що ґрунтується на концепції комплексних модулів і в рамках якого враховуються залежності модулів накопичення і втрат від температури і амплітуди деформації [1]. Представлене дослідження присвячене впливу дисипативного розігріву на теплову стійкість полімерного нанокompозитного стержня з випадково або однонаправлено орієнтованими нановолокнами, що складаються з вуглецевих нанотрубок (CNT), за різних значень об'ємного вмісту волокон. Отримані в рамках розвинутого підходу результати дозволять визначити критичні значення параметрів навантаження, дослідити еволюцію температури вібророзігріву нанокompозитного елемента, та визначити залежність між рівнем навантаження та кількістю циклів до теплового руйнування конструкції.

2. Моделювання реакції нанокompозита при моногармонічному навантаженні

Модель для описання непружної поведінки двох композитних матеріалів на полімерній основі, армованих CNT волокнами, при довільному навантаженні розвинуто в [2]. Ці нанокompозити демонструють макроскопічні властивості трансверсально ізотропного матеріалу при однонаправленому армуванні CNT волокнами та властивості ізотропного матеріалу при випадковій орієнтації волокон. Для розвитку такої моделі досліджено реакцію складових і розроблено процедуру гомогенізації для отримання макроскопічних властивостей нанокompозитів [3]. Для полімерної матриці використано феноменологічну модель, що описує всі особливості реакції матеріалу в часі на довільних історіях навантаження (далі в тексті – повна модель), після чого за допомогою процедури еквівалентної лінеаризації отримано комплексні модулі полімерної матриці за умов кінематичного гармонічного навантаження. У даному дослідженні CNT волокна вважаються пружними трансверсально ізотропними з п'ятьма незалежними пружними константами. Ґрунтуючись на концепції перерозподілу навантаження між включенням та матрицею, а також використовуючи комплексний коефіцієнт Пуассона для матеріалу матриці, в статті [4] запропоновано моделювати присутність поверхні контакту фаз за допомогою стрибка переміщення. Зрештою, розробляється схема гомогенізації,

яка застосовується до отриманих комплексних модулів матриці, волокон та поверхні контакту з метою визначення загальних макроскопічних комплексних модулів композиту як однорідного матеріалу.

3. Постановка задачі та методика її розв'язання

Розглядається проблема вібророзігріву нанокompозитного стержня з круговим поперечним перерізом. Довжина стержня та радіус поперечного перерізу позначені L і R , відповідно. Нанокompозитний стержень піддається як статичному стискальному, так і гармонічному навантаженню з малою амплітудою, $P(t) = P_0 + P_1 \cos \omega t$, які прикладаються на вільному кінці. Другий кінець стержня є жорстко закріпленим. Передбачається, що частота збудження, ω , є достатньо малою, щоб гарантувати відсутність будь-яких параметричних, суб- або супергармонічних резонансів. Для навантажувальних сил та амплітуд має місце нерівність $P_1 \ll P_0 < P_{cr}$, де P_{cr} – Ейлерове критичне навантаження. За таких припущень обґрунтованим є застосування квазістатичної теорії в'язкопружності.

Співвідношення між напруженнями і деформаціями у в'язкопластичному стержні має добре відомий вигляд:

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \sigma_0 + \sigma_1 \cos \omega t, \\ \varepsilon(t) &= \sigma_0 J^\infty + \sigma_1 \operatorname{Re}[\tilde{J} e^{i\omega t}],\end{aligned}\quad (1)$$

де J^∞ – рівноважна податливість, а $\tilde{J} = J' - iJ''$ – комплексна податливість; σ_0 and σ_1 – величина сталого стискання та амплітуда гармонічного навантаження, відповідно. Усереднена за період коливань швидкість дисипації енергії, $\langle D' \rangle$, (див. (2)) використовується в якості джерела тепла в перехідному процесі в рівнянні (2), до якого зводиться одновимірне рівняння теплопровідності, що описує еволюцію температури у в'язкопластичному стержні, за прийнятого припущення однорідності розподілу температури по довжині (в даній задачі всі поперечні перерізи стержня за таких умов мають однакову температуру)

$$\begin{aligned}\frac{d\theta^*}{dt} &= -\frac{\alpha_l S}{c_v V} \theta^* + \frac{\alpha_l S}{c_v V} \frac{\langle D' \rangle}{c_v \theta_0}, \\ \langle D' \rangle &= \frac{\omega}{2\pi} \int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}} \sigma(\xi) \dot{\varepsilon}(\xi) d\xi = \frac{\omega}{2} J'' \sigma_1^2,\end{aligned}\quad (2)$$

де $\theta^* = \theta / \theta_0$ – нормалізована температура. Коефіцієнт α_l – питома теплоємність при сталому об'ємі та коефіцієнт тепловіддачі з

поверхні стержня, відповідно; S , V і θ_0 – площа бічної поверхні, об'єм стержня і температура навколишнього середовища, відповідно. Рівняння (2) доповнюється відповідною початковою умовою. Для розрахунку модуля втрат для коефіцієнта податливості, J'' , при заданому значенні інтенсивності деформації використовується наближений вираз $J'' = J_0'' \theta^{*\beta}$, де J_0'' – початкове значення відповідного модуля втрат при гармонічному навантаженні, β – константа матеріалу. Рівняння (2) можна переписати у вигляді

$$\frac{d\theta^*}{d\tau} = -\theta^* + 1 + \mu\theta^*, \quad (3)$$

$$\mu = \frac{\omega}{2c_V\theta_0} J_0'' \sigma_1^2, \quad \lambda = \frac{\alpha_t S}{c_V V},$$

де μ та λ є параметром навантаження і часовою константою відповідно.

Дослідимо вплив вібророзігріву на втомну поведінку в'язкопружного стержня. Для знаходження критичної сили, P_{cr} , може бути використаний Ейлерів підхід. Беручи до уваги однорідність поля температури і умову $P_1 \ll P_0$, диференціальне рівняння осі стержня та вираз для Ейлерового критичного навантаження можна записати у вигляді:

$$\frac{d^4 w}{dz^4} + \xi_0^2 \frac{d^2 w}{dz^2} = 0, \quad \xi_0 = \left(\frac{P_0 J''}{I} \right)^{1/2}, \quad (4)$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 I}{J'' (KL)} = \frac{\chi}{J''},$$

де K і L – ефективний коефіцієнт довжини стержня та його довжина, відповідно; w і χ – прогин і стала, яка залежить від форми стержня та умов його закріплення.

Методика визначення комплексних модулів нанокompозиту на основі полімерної матриці, яка включає в себе моделювання повної поведінки складових, процедури гомогенізації на основі моделі Морі–Танака, модифікованої для врахування впливу міжфазного контакту, та еквівалентної лінеаризації з використанням циклічної діаграми детально описані в [5].

4. Числові результати

Теплова втомна поведінка досліджувалась для полімерного нанокompозитного матеріалу із різним об'ємним вмістом та орієнтацією CNT волокон. Довжина та радіус поперечного перерізу стержня вибирались рівними 0,5 і 0,03 м, відповідно. Вважається, що тепловий

початковий стан для рівняння теплопровідності задається у формі $\theta(0) = \theta_0 = 25^\circ\text{C}$. Фізичні параметри епоксидної матриці (PR-520) та CNT волокон вибрані наступними [5]: $c_V^f = 0,629 \cdot 10^6$ Дж/м³·°К, $c_V^m = 1,513 \cdot 10^6$ Дж/м³·°К, $\lambda^f = 2000$ Дж/м·°К, $\lambda^m = 0,47$ Дж/м·°К, $\alpha_0^m = 45 \cdot 10^{-6}$ 1/°К, $\alpha_0^f = 3,10^{-6}$ 1/°К, $\rho^f = 1680$ кг/м³, $\rho^m = 1214$ кг/м³ та $a_t = 20$ Вт/м²·°К.

Нанокompозитний стержень піддається як статичному стисканню, так і низькоамплітудному гармонічному навантаженню, що прикладається до вільного кінця. Частота гармонічного збудження вважається рівною 1 Гц, що набагато менше перших поздовжніх та згинальних резонансів.

На Рис. 1 показано вплив об'ємної частки CNT волокон на втомні $\sigma_1 \sim N$ криві для ненаповнених полімерних та нанокompозитних стержнів, що зміцнені довільно орієнтованими CNT волокнами при температурі 25°С.

Вздовж вертикальної осі відкладена амплітуда прикладеного циклічного навантаження, а вздовж горизонтальної осі – кількість циклів до руйнування. Результати показують, що втомна $\sigma_1 \sim N$ крива для нанокompозитних стержнів лежить значно вище, ніж у випадку чистого полімерного стержня. Отже, для нанокompозитних

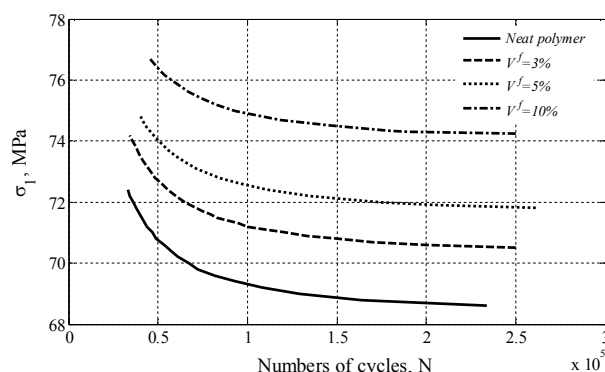


Рис. 1. Криві теплового втомного руйнування полімерного нанокompозитного стержня, зміцненого довільно орієнтованими волокнами.

стержнів, що деформуються з частотою 1 Гц, теплове втомне руйнування спостерігається при вищих рівнях навантаження, ніж для чистого ненаповненого полімерного стержня.

На Рис. 2 аналогічні результати представлені для полімерних нанокompозитних стержнів, зміцнених однаправленими CNT волокнами.

Тут $\sigma_1 \sim N$ крива зсувається вгору зі збільшенням об'ємної частки CNT волокон. Кожна крива стає майже горизонтальною при високій кількості циклів. Це означає, що коли амплітуда напруження має значення нижче граничної величини, яка відповідає межі втоми, то число циклів до руйнування стане нескінченно великим, і в такому випадку втоми руйнування не відбувається.

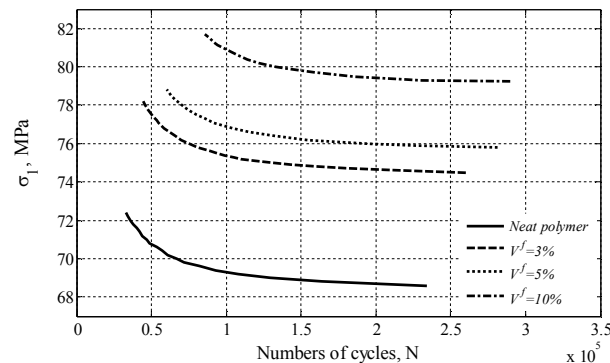


Рис. 2. Криві теплового втоми руйнування полімерного нанокompозитного стержня, зміцненого однонаправленими волокнами.

5. Висновки

В даній роботі досліджується руйнування нанокompозитного елемента конструкції внаслідок дисипативного розігріву при гармонічному навантаженні. Розроблено метод прогнозування втрати роботоzдатності нанокompозитних елементів конструкцій внаслідок теплової нестійкості. Вивчено циклічну витривалість за тепловим критерієм для полімерного нанокompозитного стержня під одночасною дією статичного і циклічного навантаження. Встановлено, що для армованих нанокompозитних стержнів теплове втоми руйнування спостерігається при вищих рівнях навантаження, ніж для чистого ненаповненого полімерного стержня. Збільшення об'ємної частки CNT волокон дозволяє збільшити ресурс роботи стержня. Спостерігається плавний перехід від зони малоциклової до зони багатоциклової втоми для всіх досліджених значень об'ємного вмісту наповнювача.

Список використаних джерел

1. Karnaukhov, V.G. Thermomechanics of coupled field in passive and pizoactive inelastic bodies under monoharmonic deformation / Journal of Thermal Stresses –2005. – № 28. –P. 783–815.
2. Hashemi, M. A procedure for complex moduli determination for polycarbonate plastic under harmonic loading / M. Hashemi, Y. A. Zhuk // Bulletin of KNU. Physical and Math. Sci. – 2015. – № 4. P. 67–73.
3. Hashemi, M. Influence of frequency and amplitude of harmonic loading on complex moduli for polymer materials / M. Hashemi and Y. A. Zhuk // Bulletin of KNU. – 2016. –№ 35. P. 53–57.
4. Qu, J. The effect of slightly weakened interfaces on the overall elastic properties of composite materials / Mechanics of Materials. – 1993. – Vol. 14, № 4. – H. 269–281.
5. Hashemi, M. Prediction of Thermal Instability–Initiated Performance Losses by Nanocomposite Structure Elements Under Cyclic Loading / M. Hashemi, Y. Zhuk// Strength of Materials. – 2017. – Vol. 49, No 5. – P. 635–651.

References

1. KARNAUKHOV, V.G. (2005) Thermomechanics of coupled field in passive and pizoactive inelastic bodies under monoharmonic deformation. *Journal of Thermal Stresses*. Vol.28. p. 783–815.
2. HASHEMI, M., & ZHUK Y. A. (2015) A procedure for complex moduli determination for polycarbonate plastic under harmonic loading. *Bulletin of KNU. Physical and Math. Sci.* № 4. p. 67–73.
3. HASHEMI, M., & ZHUK Y. A. (2016) Influence of frequency and amplitude of harmonic loading on complex moduli for polymer materials. *Bulletin of KNU*. № 35. p. 53–57.
4. QU, J. (1993) The effect of slightly weakened interfaces on the overall elastic properties of composite materials. *Mechanics of Materials*. –Vol. 14, № 4. – p. 269–281.
5. HASHEMI, M., & ZHUK Y. A. (2017). Prediction of thermal instability–initiated performance losses by nanocomposite structure elements under cyclic loading. *Strength of Materials*. – Vol. 49, No 5. – p. 635–651.

Надійшла до редколегії 14.06.19

УДК 532.59: 534.29

Жук О.П.¹, д.ф.-м.н., пров.н.с.
Жук Я.О.², д.ф.-м.н., проф.

Дія радіаційної сили в звуковому полі на сферичну краплю в околі вільної поверхні ідеальної рідини

¹Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, 03057, м. Київ, вул. Петра Нестерова, 3
e-mail: zhuk@inmech.kiev.ua

²Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е,
e-mail: y.zhuk@i.ua

O.P. Zhuk¹, Dr.Sci., Leading Researcher.
Y.A. Zhuk², Dr.Sci., Prof.

Acoustic radiation force effect on a spherical drop placed in the vicinity of an ideal liquid free surface

¹Timoshenko Institute of Mechanics, NAS of Ukraine, 3, Petr Nesterov str., Kyiv 03057
e-mail: zhuk@inmech.kiev.ua

²Taras Shevchenko National University of Kyiv, 4e, Glushkov ave., Kyiv 03680
e-mail: y.zhuk@i.ua

Розроблено метод для дослідження дії радіаційної сили в акустичному полі на сферичну краплю рідини, розташовану в ідеальній рідині в околі вільної поверхні. Одержано формули для обчислення величини і напрямку її дії.

Ключові слова: ідеальна рідина, плоска акустична хвиля, сферична крапля рідини, гідродинамічна сила, радіаційна сила.

Acoustic radiation force effect on a liquid spherical drop placed in the vicinity of an ideal liquid free surface is studied. The problem of determination of the radiation forces acting on an obstacle in ideal liquid is formulated with respect to the Lagrange coordinate system. Thus, the radiation pressure is defined as time-averaged value of the acoustic pressure over the obstacle surface. This approach is adequate if, at determining of the acoustic pressure in a fluid, the deviation of the pressure from the harmonic law in time domain is taken into account in the obstacle vicinity. An action of the acoustic radiation force on a spherical drop of ideal liquid placed in turn in a liquid by its free plane surface is studied here for the case of the incident plane sound wave propagating perpendicularly to the liquid boundary. As a result, the liquid sphere is appeared to be located in the standing sound wave of pressure which has its displacement node at the free surface. Problem solution is obtained as a three step procedure. Initially, solution of the problem of an incident wave scattering at the drop is derived. With making use of the results obtained, the second step encompasses determining of hydrodynamic forces acting on the liquid spherical drop with their subsequent averaging over the suitable time interval at the third step. It is found there frequencies of the incident wave exist that provide zero radiation force acting on the drop which is immobile in this case. These equilibrium positions of the spherical drop could be stable or unstable with respect to the incident wave frequency variation.

Key Words: ideal liquid, plane acoustic wave, liquid spherical particle, hydrodynamic force, radiation force.

Статтю представив акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Перестюк М.О.

1. Вступ

Дослідження сталих у часі сил в акустичному полі є важливим з огляду на ряд теоретичних і практичних задач [1]. Вивченню різних питань, пов'язаних із дією радіаційних сил на тверді й рідкі частинки, присвячено роботи [2–5]. У випадку перешкоди у вигляді рідкої сфери збудовані падаючою хвилею коливальні процеси в ній можуть істотно впливати на характер розсіювання хвилі [2].

Задачу обчислення радіаційної сили, яка діє в звуковому полі на перешкоду, розбивають на декілька етапів. На першому з них визначається хвиля, що розсіюється або відбивається перешкодою. Для цього необхідно скористатись розв'язком лінійної задачі дифракції про розсіювання акустичної хвилі на перешкоді. На другому етапі на основі результатів розв'язання цієї задачі визначається результуюча сила впливу рідини на перешкоду. На третьому етапі осередненням в

часі останньої відфільтровується її стала за часом складова, яку й називають радіаційною силою.

В даній статті розглядається гнучка сферична частинка (крапля рідини, що відрізняється від зовнішньої), розташована біля межі зовнішньої рідини, яка є вільною поверхнею, що контактує з повітрям, перпендикулярно до якої поширюється плоска звукова хвиля.

2. Постановка задачі дифракції та її розв'язування

Розглядається ідеальна стислива рідина, в якій на відстані ℓ від її вільної поверхні розташована сферична крапля іншої рідини радіусу R (рис.1). Зовнішня рідина характеризується густиною ρ_0 і швидкістю звуку в ній a_0 . Густина рідини краплі ρ_1 і швидкість звуку в ній a_1 . В напрямі, перпендикулярному до поверхні рідини ($z = 0$) поширюється плоска звукова хвиля, потенціал Φ_i якої в системі координат $Oxyz$ (рис.1) має такий вигляд

$$\Phi_i = A \exp[i(kz - \omega t)], \quad (1)$$

де A – амплітуда; $k = \omega/a_0$ – хвильове число; ω – кутова частота.

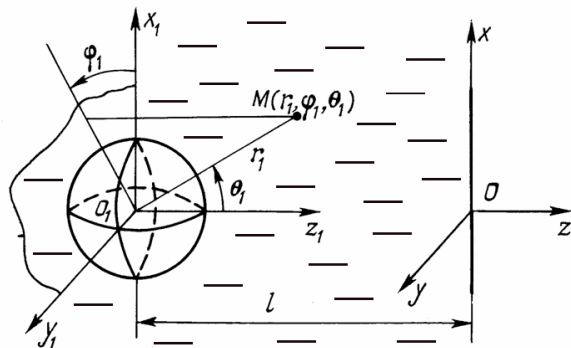


Рис. 1. Сферична крапля рідини в околі вільної поверхні зовнішньої рідини.

Радіаційна сила, яка діє на сферичну краплю рідини, визначається звуковим полем, утвореним інтерференцією первинної хвилі Φ_i , хвилі, відбитої від вільної поверхні $z = 0$, хвилі, розсіяної на сферичній краплі, а також частиною останньої хвилі, відбитої від вільної поверхні $z = 0$ рідини. Потенціали трьох останніх із вказаних хвиль позначимо відповідно Φ_s , $\Phi_d^{(1)}$, і $\Phi_s^{(1)}$. Для їх визначення необхідно, як вказано вище, розв'язати багатозв'язну лінійну задачу дифракції хвилі з потенціалом Φ_i на сферичній краплі і на вільній поверхні рідини. В такому випадку потенціали швидкостей Φ повинні задовольняти рівнянню

$$\Delta \Phi - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

В рамках постановки задачі дифракції вільну поверхню рідини $z = 0$ вважаємо ідеальною [2–4], тому відбита від неї хвиля (1) буде мати потенціал

$$\Phi_s = -A \exp[-i(kz + \omega t)]. \quad (3)$$

Отже можемо потенціал $\Phi_0 = \Phi_i + \Phi_s$ розглядати як потенціал первинної (падаючої) хвилі.

Введемо зв'язану із краплею рідини сферичну систему координат $O_1 r_1 \varphi_1 \theta_1$. Потенціал $\Phi_d^{(1)}$ розсіяної на сфері (відбитої від неї) хвилі представимо узагальненим рядом Фур'є по сферичних хвильових функціях

$$\Phi_d^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} h_n^{(1)}(kr_1) P_n(\cos \theta_1) \exp(-i\omega t). \quad (4)$$

де $h_n^{(1)}(kr_1)$ – сферична функція Ганкеля першого роду, $P_n(\cos \theta_1)$ – поліноми Лежандра.

У випадку лінійної постановки задачі дифракції тиск p і швидкість $\vec{v}$ рідини визначаються через потенціали Φ поля швидкості формулами

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \vec{v} = \text{grad } \Phi. \quad (5)$$

При формулюванні граничних умов на поверхні сферичної краплі не враховуємо поверхневий натяг і вважаємо, що амплітуда коливань поверхні краплі є малою величиною і тому можемо прийняти $R = \text{const}$.

Вважаємо сферичну краплю нерухомою. Тоді граничні умови на її поверхні S_1 мають такий вигляд:

$$v|_{S_1} = \bar{v}|_{S_1}, \quad p|_{S_1} = \bar{p}|_{S_1}, \quad (6)$$

а на вільній поверхні зовнішньої рідини тиск дорівнює нулю

$$p|_{z=0} = 0. \quad (7)$$

Риска над символом позначає величини, які характеризують стан рідини краплі.

Для визначення потенціалу $\Phi_s^{(1)}$ відбитої від вільної поверхні $z = 0$ частини розсіяної на сфері хвилі $\Phi_d^{(1)}$ скористаємось методом уявних зображень [5]. Для цього задачу про акустичне поле у півпросторі з краплею рідини N_1 , обмеженому абсолютно м'якою поверхнею, замінимо задачею про акустичне поле в необмеженому просторі

рі, в якому симетрично відносно вільної поверхні розміщена уявна сферична крапля N_2 . Розсіяна на ній акустична хвиля з потенціалом $\Phi_d^{(2)}$ повинна створювати в точках абсолютно м'якої поверхні тиск, рівний за величиною і протилежний по знаку тиску, викликаному хвилею з потенціалом $\Phi_d^{(1)}$. Таким чином, відбита від вільної поверхні частина хвилі $\Phi_d^{(1)}$ (тобто хвиля-луна, яка визначається потенціалом $\Phi_s^{(1)}$) – це акустичне поле, яке створюється у актуальному півпросторі розсіяною на уявній сферичній краплі N_2 хвилею Φ_0 .

Зв'яжемо з уявною краплею сферичну систему координат $O_2 r_2 \varphi_2 \theta_2$, а потенціал $\Phi_s^{(1)}$ запишемо в такому вигляді:

$$\Phi_s^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(2)} h_n^{(1)}(kr_2) P_n(\cos \theta_2) \exp(-i\omega t), \quad (7)$$

який задовольняє умови випромінювання на нескінченності.

Із граничної умови на вільній поверхні ($p = 0$, при $z = 0$) встановлюється зв'язок між коефіцієнтами $A_n^{(1)}$ і $A_n^{(2)}$

$$A_n^{(2)} = (-1)^{n+1} A_n^{(1)}. \quad (8)$$

Для визначення коефіцієнтів $A_n^{(1)}$ використовуються граничні умови (6) на поверхні S_l сферичної краплі. При цьому швидкість у зовнішній рідині зумовлюється потенціалами звукового поля

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_d^{(1)} + \Phi_s^{(1)}. \quad (9)$$

Хвильове поле в рідині краплі опишемо потенціалом

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n^{(1)} j_n(\bar{k}r_1) P_n(\cos \theta_1) \exp(-i\omega t). \quad (10)$$

Зауважимо, що потенціали Φ_0 і $\Phi_s^{(1)}$ необхідно записати в сферичній системі координат, зв'язаній з краплею N_l . В результаті отримаємо

$$\Phi(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} [(2n+1) A_n b_n j_n(kr_1) + A_n^{(1)} h_n^{(1)}(kr_1) + S_n^{(2)} j_n(kr_1)] P_n(\cos \theta_1) e^{-i\omega t}, \quad (11)$$

де $j_n(kr_1)$ – сферичні функції Бесселя,

$$b_n = -2i \sin(k\ell - n\pi/2),$$

$$S_n^{(2)} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+1} A_p^{(1)} Q_{0n0p}^{(1,2)}(2k\ell, \pi),$$

$$Q_{0n0p}^{(1,2)}(2k\ell, \pi) = 2i^{p-n} \sum_{\sigma=|p-n|}^{p+n} (-1)^{\sigma} b_{\sigma}^{(n0p0)} h_{\sigma}^{(1)}(2k\ell),$$

$$b_{\sigma}^{(p0n0)} = \sqrt{\frac{(2n+1)(2n+3)}{2(2\sigma+1)}} (pn00|\sigma0)^2,$$

$$(pn00|\sigma0) = (-1)^{\sigma+\frac{3}{2}} \frac{\left(\frac{s}{2}\right)!}{\left(\frac{s}{2}-n\right)! \left(\frac{s}{2}-p\right)! \left(\frac{s}{2}-\sigma\right)!} \times \\ \times [(2\sigma+s)!(s-2n)!(s-2p)!(s-2\sigma)!]^{\frac{1}{2}},$$

якщо s парне і $(pn00|\sigma0) = 0$, якщо s непарне.

Задовольнивши граничні умови на поверхні S_l сферичної краплі (6), одержуємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів, яка має такий вигляд:

$$\frac{h_n^{(1)}(\alpha)}{j_n(\alpha)} A_n^{(1)} + S_n^{(2)} - \eta \frac{j_n(\xi\alpha)}{j_n(\alpha)} \bar{A}_n^{(1)} = -A(2n+1)b_n,$$

$$\frac{h_n^{(1)}(\alpha)}{j_n'(\alpha)} A_n^{(1)} + S_n^{(2)} - \xi \frac{j_n'(\xi\alpha)}{j_n'(\alpha)} \bar{A}_n^{(1)} = -A(2n+1)b_n,$$

Вона розв'язується методом редукції. В рівняннях введено позначення:

$$\alpha = kR, \xi = a_0/a_1, \eta = \rho_1/\rho_0, \xi\alpha = \bar{k}R.$$

Визначенням потенціалів (10) і (11) закінчується розв'язання задачі дифракції.

3. Обчислення радіаційної сили, що діє на тверду сферичну частинку

Радіаційну силу обчислимо, осереднюючи в часі гідродинамічну силу, яка діє в звуковому полі з боку рідини на сферичну краплю. Внаслідок осової симетрії хвильового поля з потенціалом (11) відносно осі Oz гідродинамічна сила, з якою звукове поле діє на сферичну краплю, напрямлена вздовж цієї осі та за величиною дорівнює

$$F_z = -2\pi R^2 \int_0^{\pi} p \sin \theta_1 \cos \theta_1 d\theta_1. \quad (12)$$

Для визначення радіаційної сили застосуємо підхід [2,3], який передбачає обчислення тиску p

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho (\text{grad} \Phi)^2 + \frac{1}{2} \frac{\rho}{a_0^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \quad (13)$$

з точністю до доданків другого порядку по числу Маха, використовуючи дійсну частину потенціалу (11)

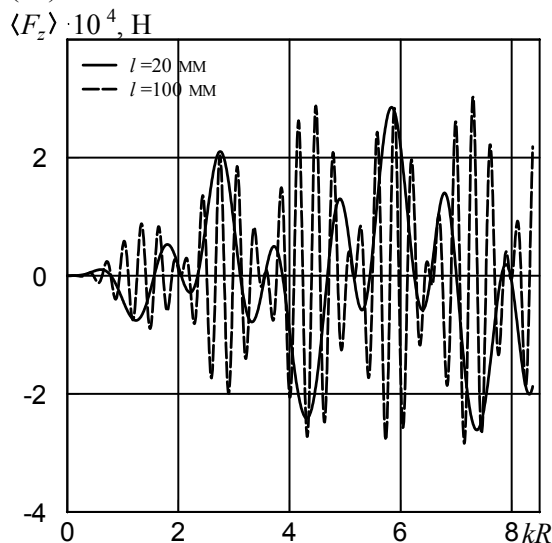


Рис. 2

$$\operatorname{Re} \Phi(r_1, \theta_1, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[K_n(kr_1) \sin \omega t + L_n(kr_1) \cos \omega t \right] P_n(\cos \theta_1). \quad (14)$$

$$K_n(kr_1) = B_n y_n(kr_1) + \left[C_n - 2(2n+1)A \times \right. \\ \left. \times \sin \left(kl - n \frac{\pi}{2} \right) + G_n \right] j_n(kr_1),$$

Список використаних джерел

1. King L. V. On the acoustic radiation pressure on spheres / L. V. King // *Proc. Roy. Soc., Ser. A.* – 1934. – Vol. 147, No. 861. – P. 246–265.
2. Guz A.N. Effect of Acoustic Radiation in a Viscous Liquid on a Spherical Drop of Ideal Liquid / A.N. Guz and A.P. Zhuk // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, No 6. – P.605–614.
3. Жук О.П. Дія радіаційної сили в звуковому полі на тверду сферичну частинку в околі вільної поверхні рідини / О. П. Жук, Я. О. Жук // *Вісник Київського нац. ун-ту імені Т. Шевченка. Сер.: фіз.-мат. науки.* – 2017. – Вип. 3. – С.55–58.
4. Zhuk A.P. Acoustic radiation force on a spherical particle in a fluid-filled cavity / A.P. Zhuk, V.D. Kubenko, Y.A. Zhuk // *Journal of the Acoustical Society of America (JASA).* – 2012. – Vol. 132, No. 4. – P. 2189–2197.
5. Исакович М.А. Общая акустика / М.А. Исакович. – М.: Наука, 1973. – 496 с.

$$L_n(kr_1) = (B_n + D_n) j_n(kr_1) - C_n y_n(kr_1),$$

$$A_n^{(1)} = B_n + iC_n, S_n^{(2)} = D_n + iG_n$$

Беручи до уваги, що крапля є нерухомою та використовуючи в (12) співвідношення (13) і (14), після осереднення (12) в часі одержимо формулу для обчислення радіаційної сили, яка діє в акустичному полі з потенціалом (11) на сферичну краплю в околі вільної поверхні рідини

$$\langle F_z \rangle = 2\pi\rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} \{ [M_n(\alpha)M_{n+1}(\alpha) + \\ + N_n(\alpha)N_{n+1}(\alpha)] \alpha^2 + [K_n(\alpha)K_{n+1}(\alpha) + \\ + L_n(\alpha)L_{n+1}(\alpha)] [n(n+2) - \alpha^2] \}, \quad (15)$$

$$M_n(kr_1) = \frac{1}{r_1} \frac{dK_n}{dr_1}, \quad N_n(kr_1) = \frac{1}{r_1} \frac{dL_n}{dr_1}$$

На рис. 2 подано типовий результат розрахунку залежності радіаційної сили від частоти первинної хвилі. Відзначимо, що радіаційна сила, яка діє на краплю в околі вільної поверхні рідини, на відміну від випадку твердої сфери в необмеженому середовищі, може мати напрямок, що співпадає з напрямком поширення хвилі, так і протилежний напрямок.

References

1. KING L.V. (1934) On the acoustic radiation pressure on spheres. *Proc. Roy. Soc., Ser. A.* 147(861). p. 246–265.
2. GUZ A.N. & ZHUK A.P. (2014) Effect of Acoustic Radiation in a Viscous Liquid on a Spherical Drop of Ideal Liquid. *International Applied Mechanics.* 50(6). p. 605–614.
3. ZHUK A.P. & ZHUK Y.A. (2017) Acoustic radiation force effect on a rigid spherical particle placed in the vicinity of a liquid free surface. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Ser. Physics & Mathematics.* No. 3. p. 55–58.
4. ZHUK A.P., KUBENKO V.D., ZHUK Y.A. (2012) Acoustic radiation force on a spherical particle in a fluid-filled cavity. *Journal of the Acoustical Society of America.* 132(4). p. 2189–2197.
5. ISAKOVICH M. A. (1973) *Obshchaya akustika.* Moskva: Nauka.

Надійшла до редколегії 14.06.19

УДК 539.3

Вайсфельд Н. Д., д.ф.-м.н., професор,
Журавльова З. Ю., к.ф.-м.н.,
Мойсеєнок О. П., к.ф.-м.н., доцент,
Реут В. В., к.ф.-м.н., доцент

**Дослідження напруженого стану
півсмуги для випадку усталених
коливань**

Одеський національний університет імені І.І.
Мечникова, 65082, м. Одеса, вул. Дворянська, 2,
e-mail: z.zhuravlova@onu.edu.ua

N. D. Vaysfeld, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof,
Z. Yu. Zhuravlova, PhD (Phys.-Math.),
O. P. Moyseenok, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
V. V. Reut, Dr. Sci. (Phys.-Math.)

**Investigation of the semi-strip's stress state in
the case of steady-state oscillations**

Odessa I. I. Mechnikov National University, 65082,
Odessa, Dvoryanskaya str., 2,
e-mail: z.zhuravlova@onu.edu.ua

Розглядається пружна півсмуга, що знаходиться під впливом нестационарного навантаження у випадку усталених коливань. Задача шляхом застосування півнескінчених $\sin$ -, $\cos$ -перетворень Фур'є зводиться до одновимірної крайової задачі, яку у просторі трансформант сформульовано у векторному поданні. Отримана задача є неоднорідною, тому запропоновано використання матриці-функції Гріна, яку побудовано у білінійному зображенні. Задоволення крайовій умові по торцю півсмуги зводить розв'язання до розв'язання сингулярного інтегрального рівняння. Розв'язок останнього пропонується шукати наближено, у формі ряду за ортогональними поліномами. Досліджено напружено-деформівний стан півсмуги в залежності від частоти діючого навантаження та від розмірів ділянки навантаження.

Ключові слова: півсмуга, усталені коливання, перетворення Фур'є, матриця Гріна, сингулярне інтегральне рівняння.

The elastic semi-strip under the dynamic load concentrated at the centre of the semi-strip's short edge is considered. The lateral sides of the semi-strip are fixed. The case of steady-state oscillations is considered. The initial problem is reduced to the one-dimensional problem with the help of the semi-infinite $\sin$ -, $\cos$ -Fourier's transform. The one-dimensional problem is formulated in the vector form. Its solution is constructed as a superposition of the general solution for the homogeneous equation and the partial solution for the inhomogeneous equation. The general solution for the homogeneous vector equation is found with the help of the matrix differential calculations. The partial solution is expressed through Green's matrix-function, which is constructed as the bilinear expansion. The inverse Fourier's transform is applied to the derived expressions for the displacements. The solving of the initial problem is reduced to the solving of the singular integral equation. Its solution is searched as the series of the orthogonal Chebyshev polynomials of the second kind. The orthogonalization method is used for the solving of the singular integral equation. The stress-deformable state of the semi-strip is investigated regarding both the frequency of the applied load, and the load segment's length.

Key Words: semi-strip, steady-state oscillations, Fourier's transform, Green's matrix-function, singular integral equation.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Дослідженню динамічних задач теорії пружності було присвячено чимало робіт. Рівняння руху для системи керування були виведені у [1]. Класичні задачі теорії розсіювання акустичних хвиль на неоднорідностях вперше розв'язано у [2]. У [3] було розглянуто напру-

жено-деформівний стан середовища, що містить тріщини та жорсткі включення, у динамічних постановках. Метод однорідних розв'язків запропоновано у [4] та апробовано на прикладі мішаної задачі теорії пружності у півсмуги. На сьогодні набуває актуальність дослідження

нестационарних динамічних задач для функціонально-градуїзованих п'єзоелектричних середовищ, що містять тріщину [5].

Пружна півсмуга є класичним об'єктом для апробації нових математичних методів розв'язання мішаних задач теорії пружності. Її хвильове поле за умови впливу нестационарного навантаження, прикладеного до її границь, досліджується як за допомогою перетворення Лапласа [6], так і за допомогою застосування асимптотичних методів [7]. Задачі для півсмуги, ускладненої наявністю двох циліндричних отворів, було розв'язано у [8].

Не зважаючи на те, що чимало робіт було присвячено дослідженню хвильового поля нестационарної півсмуги, питання побудови аналітичних розв'язків цієї задачі залишається актуальним. Саме цьому і присвячено дану роботу.

Розглядається пружна півсмуга, що описується у декартовій системі координат співвідношеннями $0 < x < a, 0 < y < \infty$. Розглядається випадок усталених коливань $u_x(x, y) = u(x, y)e^{i\omega t}$, $u_y(x, y) = v(x, y)e^{i\omega t}$.

На бічних гранях $x = 0, x = a, 0 < y < \infty$ виконуються умови зчеплення $u(0, y) = 0, v(0, y) = 0$, $u(a, y) = 0, v(a, y) = 0$. По ділянці $0 < a_0 < x < a_1 < a$ задано усталене навантаження

$$\sigma_y|_{y=0} = p(x), \tau_{xy}|_{y=0} = 0, \quad (1)$$

а по ділянкам $0 < x < a_0, a_1 < x < a$ задано умови гладкого контакту $v|_{y=0} = 0, \tau_{xy}|_{y=0} = 0$.

Потрібно визначити поле переміщень та напружень у півсмузі, що задовольняє крайові умови та рівняння руху:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2}{\kappa+1} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + q^2 \frac{\kappa-1}{\kappa+1} u = 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{2}{\kappa-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + q^2 v = 0, \end{cases}$$

де ρ - густина, G - модуль пружності, $\kappa = 3 - 4\mu$ - стала Мусхелішвілі, μ - коефіцієнт Пуассона, $q^2 = \rho / G \cdot \omega^2$.

До вихідної задачі застосовано півнескінченні $\sin$, $\cos$ перетворення Фур'є за змінною y за

$$\begin{bmatrix} u_\beta(x) \\ v_\beta(x) \end{bmatrix} = \int_0^\infty \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta y \\ \sin \beta y \end{bmatrix} dy$$

Крайову задачу у просторі трансформант сформульовано у вигляді векторної крайової задачі. Для цього введено наступні вектори і матриці

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\kappa+1} \\ -\frac{1}{\kappa-1} & 0 \end{pmatrix}, P_\beta = \begin{pmatrix} (\beta^2 - q^2) \frac{\kappa-1}{\kappa+1} & 0 \\ 0 & \beta^2 \frac{\kappa+1}{\kappa-1} - q^2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{f}(x) = \begin{pmatrix} \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \chi'(x) \\ -\beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \chi(x) \end{pmatrix}, \vec{y}_\beta(x) = \begin{pmatrix} u_\beta(x) \\ v_\beta(x) \end{pmatrix}. \text{ Тут}$$

також введено невідому функцію $\chi(x) = v|_{y=0}$.

У результаті одновимірна крайова задача записується у векторному поданні

$$\begin{cases} L_2 \vec{y}_\beta(x) = \vec{f}(x), \\ \vec{y}_\beta(0) = 0, \vec{y}_\beta(a) = 0 \end{cases}$$

де L_2 - диференційний оператор другого порядку $L_2 \vec{y}_\beta(x) = \vec{I} \vec{y}_\beta''(x) + 2\beta Q \vec{y}_\beta'(x) - P_\beta \vec{y}_\beta(x)$, I - одинична матриця.

Розв'язок векторної крайової задачі розшукується у вигляді суперпозиції загального розв'язку векторного однорідного рівняння $\vec{y}_\beta^0(x)$ і його часткового векторного розв'язку $\vec{y}_\beta^1(x)$: $\vec{y}_\beta(x) = \vec{y}_\beta^0(x) + \vec{y}_\beta^1(x)$.

Для знаходження розв'язку векторного однорідного рівняння побудовано розв'язок матричного однорідного рівняння [9] $L_2 Y_\beta(x) = 0, 0 < x < a$, тут $Y_\beta(x)$ - матриця порядку 2×2 . Дану матрицю $Y_\beta(x)$ обрано у

формі $Y_\beta(x) = e^{\xi x} I$ і підставлено до однорідного матричного рівняння. В результаті отримано рівність $L_2 e^{\xi x} I = M(\xi) e^{\xi x}$, де матриця $M(\xi)$ визначається як $M(\xi) = I \xi^2 + 2\beta Q \xi - P_\beta$.

Розв'язок матричного рівняння знайдено за формулою [9] $Y(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{\xi x} M^{-1}(\xi) d\xi$, де

замкнений контур C охоплює всі особливі точки підінтегральної функції. Після обчислення контурного інтегралу за допомогою теореми про лишки отримано систему матричних фундаментальних розв'язків

$$Y_{1,2}^+(x) = e^{\pm x\sqrt{\beta^2 - q^2}} \begin{pmatrix} \pm \frac{\beta^2(\kappa+1)}{2q^2\sqrt{\beta^2 - q^2}(\kappa-1)} & \frac{\beta}{2q^2} \\ -\frac{\beta(\kappa+1)}{2q^2(\kappa-1)} & \mp \frac{\sqrt{\beta^2 - q^2}}{2q^2} \end{pmatrix},$$

$$Y_{3,4}^+(x) = e^{\pm x\sqrt{\beta^2 - q^2}\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} \begin{pmatrix} \mp \frac{\beta^2(\kappa+1) - q^2(\kappa-1)}{2q^2\sqrt{\beta^2 - q^2}\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} & -\frac{\beta}{2q^2} \\ \frac{\beta(\kappa+1)}{2q^2(\kappa-1)} & \pm \frac{\beta^2}{2q^2\sqrt{\beta^2 - q^2}\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} \end{pmatrix}$$

чим завершено побудову загального розв'язку векторного однорідного рівняння.

Для отримання часткового розв'язку векторної крайової задачі побудовано матрицю-функцію Гріна для допоміжної крайової задачі [10]

$$\begin{cases} L_2 \bar{y}_\beta(x) = \bar{f}(x) \\ V_i[\bar{y}_\beta(x)] = 0, i = 0, 1 \end{cases}$$

де V_0, V_1 - крайові функціонали.

Ядро інтегрального перетворення обрано у зображенні

$$H(x, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \sin \alpha_n x & 0 \\ 0 & \cos \alpha_n x \end{pmatrix}, \alpha_n = \frac{n\pi}{a}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Матрицю-функцію Гріна побудовано у формі білінійного розвинення

$$G(x, \xi) = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} H(x, \alpha_n) \Omega_\beta^{-1}(\alpha_n) H(\xi, \alpha_n). \text{ Тут}$$

$$\Omega_\beta(\alpha_n) = -I\alpha_n^2 - 2\beta\alpha_n\tilde{Q} - P_\beta,$$

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1/(\kappa+1) \\ 1/(\kappa-1) & 0 \end{pmatrix}, \text{ штрих означає, що}$$

нульовий член помножується на $1/2$.

Розв'язок векторної крайової задачі у просторі трансформант Фур'є має вигляд

$$\begin{aligned} \bar{y}_\beta(x) = & (Y_1(x) + Y_3(x)) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \\ & + (Y_2(x) + Y_4(x)) \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} + \int_0^a G(x, \xi) \bar{f}(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2)$$

Коефіцієнти $c_i, i = \overline{1, 4}$ знайдено з крайових умов на бічних гранях півсмуги.

До виразу (2) застосовується обернене перетворення Фур'є.

Розв'язання задачі зводиться до розв'язання сингулярного інтегрального рівняння відносно невідомої функції $\chi(x)$. Після заміни змінної сингулярне інтегральне рівняння подано у формі

$$\int_{-1}^1 \tilde{\chi}(\xi, \omega) \tilde{f}(\xi, x, \omega) d\xi = \tilde{r}(x, \omega), -1 < x < 1, \quad (3)$$

де $\tilde{\chi}(\xi, \omega) = \chi([(a_1 - a_0)\xi + (a_0 + a_1)] / 2, \omega)$, $\tilde{r}(x, \omega), \tilde{f}(\xi, x, \omega)$ - відомі регулярні функції.

Невідома функція розшукується у вигляді розвинення

$$\tilde{\chi}(\xi, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n(\omega) \sqrt{1 - \xi^2} U_n(\xi), \quad \xi \in [-1; 1] \quad (4)$$

Підстановка формули (4) до рівняння (3) зводить його розв'язання до розв'язання нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n(\omega) D_{m,n}(\omega) = f_m(\omega), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

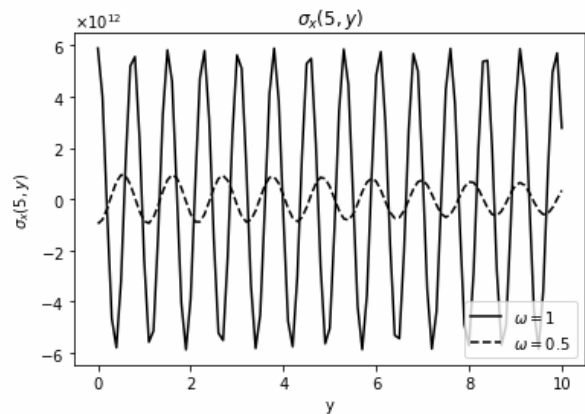


Рис. 2 Напруження $\sigma_x(a/2, y)$ при зміні ω

що розв'язується методом редукції.

Підстановка знайдених сталих у формули (4) та (2) завершує побудову розв'язку вихідної задачі.

Числові розрахунки проведено для пружної півсмуги з параметрами $G = 61.2781955$ ГПа, $\mu = 0.33$, $\rho = 8850$ кг/м³, $p(x, t) = e^{i\omega t}$ ГПа, $a = 10$ м, $a_0 = a - a_1 = a/10$.

Аналіз числових результатів (Рис. 2) показав, що зі зростанням частоти спостерігається зростання амплітуди нормальних напружень. В той же час період є навпаки меншим. Встановлено, що при значенні частоти більшої ніж 3 потрібно застосувати асимптотичні розвинення переміщень та напружень.

Висновки

У роботі досліджено напружено-деформівний стан півсмуги під впливом усталених коливань, встановлено характеристики напружень та

переміщень в залежності від частоти навантаження та розмірів ділянки.

Список використаних джерел

1. Тартаковский Г.П. Динамика систем автоматической регулировки усиления / Г.П. Тартаковский. - М.-Л.: Госэнергоиздат, 1957. - 192 с.
2. Селезов И.Т. Рассеяние волн локальными неоднородностями в сплошных средах / И.Т. Селезов, Ю.Г. Кривonos, В.В. Яковлев. - Киев: Наукова думка, 1985. - 136 с.
3. Mykhaskiv V.V. Interaction between rigid-disc inclusion and penny-shaped crack under elastic time-harmonic wave incidence / V.V. Mykhaskiv, O.M. Khay // *Int. J. Solids Struct.* - 2009. - №46(3-4). P. 602-616.
4. Gomilko A.M. Method of homogeneous solutions and superposition in the mixed problem for an elastic half-strip / A.M. Gomilko, V.T. Grinchenko, V.V. Meleshko // *Soviet Appl. Mech.* - 1990. - №26(2). - P. 193-202.
5. Wünsche M. Time-harmonic analysis of cracks in functionally graded piezoelectric materials / M. Wünsche, J. Sladek, V. Sladek, Ch. Zhang // *PAMM*. - 2017. - №17(1). - P. 283-284.
6. Kubenko V. Nonstationary load on the surface of an elastic half-strip / V. Kubenko, I. Yanchevskii // *International Applied Mechanics*. - 2015. - №51(3). - P. 303.
7. Ковалёв В.А. Анализ точного и приближённого решения для погранслоя в окрестности условного фронта поверхностной волны Рэлея в упругой полуполосе / В.А. Ковалёв, О.В. Таранов // *Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия*. - 2007. - № 6(56). - С. 43-50.
8. Itou S. Transient dynamic stresses around two equal circular cavities in an infinite elastic strip / S. Itou // *Archive of Applied Mechanics*. - 1994. - №64(3). - P. 192-205.
9. Vaysfel'd N.D. On one new approach to the solving of an elasticity mixed plane problem for the semi-strip / Vaysfel'd, N.D. and Zhuravlova, Z.Yu. // *Acta Mechanica*. - 2015. - №226(12). - P. 4159-4172.
10. Попов Г. Я. Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач / Г. Я. Попов, С. А. Абдыманов, В. В. Ефимов - Алматы: Рацах, 1999. - 133 с.

References

1. TARTAKOVSKY, G. P. (1957) *Dynamics of automatic gain control systems* (in Russian). Moskow-Leningrad: Gosenergoizdat.
2. SELEZOV, I. T., KRIVONOS, Yu. G. and YAKOVLEV, V. V. (1985) *Wave scattering by local heterogeneity in continuous mediums* (in Russian). Kyiv: Naukova dumka.
3. MYKHASKIV, V. V. and KHAY, O. M. (2009) Interaction between rigid-disc inclusion and penny-shaped crack under elastic time-harmonic wave incidence. *Int. J. Solids Struct.* 46 (3-4). p. 602-616.
4. GOMILKO, A. M., GRINCHENKO, V. T. & MELESHKO, V. V. (1990) Method of homogeneous solutions and superposition in the mixed problem for an elastic half-strip. *Soviet Appl. Mech.* 26 (2). p. 193-202.
5. WÜNSCHE, M., SLADEK, J., SLADEK, V. & ZHANG, CH. (2017) Time-harmonic analysis of cracks in functionally graded piezoelectric materials. *PAMM*. 17 (1). p. 283-284.
6. KUBENKO, V. & YANCHEVSKII, I. (2015) Nonstationary load on the surface of an elastic half-strip. *International Applied Mechanics*. 51 (3), p. 303.
7. KOVALEV, V.A. & TARANOV, O.V. (2007) Analysis of exact and approximate solutions for the boundary layer near the conditional front of the Rayleigh surface wave in an elastic semi-strip (in Russian). *Vestnik SamGu*. 6 (56). p. 43-50.
8. ITOU, S. (1994) Transient dynamic stresses around two equal circular cavities in an infinite elastic strip. *Archive of Applied Mechanics*. 64 (3). p. 192-205.
9. VAYSFEL'D, N.D. & ZHURAVLOVA, Z.YU. (2015) On one new approach to the solving of an elasticity mixed plane problem for the semi-strip. *Acta Mechanica*. 226 (12). p. 4159-4172.
10. POPOV, G. YA., ABDIMANOV S. A. & EFIMOV V. V. (1999) *Funkcii i matrici Grina odnomernih kraevih zadach*. Almatu: Racah.

Надійшла до редколегії 22.04.19

УДК 539.375

Зражевський Г.М.¹, к.ф.-м.н., доцент,
Зражевська В.Ф.², к.ф.-м.н., доцент.

G.M. Zrazhevsky¹, PhD,
V.F. Zrazhevskaya², PhD.

Використання формалізму узагальнених функцій при моделюванні дефектів точковими особливостями

Usage of generalized functions formalism in modeling of defects by point singularity

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: zgrig@univ.kiev.ua

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: zgrig@univ.kiev.ua

² Національний технічний університет
України «Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського», 03056, м. Київ, пр-т.
Перемоги, 37,
e-mail: vera.zrazhevskaya@gmail.com

² National Technical University of Ukraine "Igor
Sikorsky Kiev Polytechnic Institute", 03056, Kyiv,
Peremogi av., 37,
e-mail: vera.zrazhevskaya@gmail.com

У роботі пропонується новий підхід до побудови моделей точкових дефектів, що базується на розв'язанні граничних задач з негладкими коефіцієнтами. Неоднорідність включається у визначальне рівняння граничної задачі. Такий підхід дозволяє формалізувати дефекти на етапі використання рівнянь стану, а отже автоматично узгоджує дефект з гіпотезами пониження розмірності та не порушує енергетичної замкненості. Розв'язок розшукується у вигляді слабо збіжних рядів по узагальненим функціям. Запропонований підхід спрощує механічну інтерпретацію параметрів дефектів та продемонстрований на кількох прикладах. В першому прикладі будується функція Гріна для гармонічних коливань пружної балки, що містить точковий дефект. Модель дефекту є граничним станом пружного включення з ослабленням чи зі зміцненням. В другому прикладі розглянуто включення еліптичної форми в задачі про гармонічні коливання пружної пластини. Побудовано перше наближення еквівалентної об'ємної сили та вказано шлях до побудови наступних наближень. В третьому прикладі побудована модель крихкої тріщини з відомим стрибком переміщень для статичної двовимірної задачі теорії пружності.

Ключові слова: узагальнені функції, моделювання неоднорідностей, суцільне середовище.

The paper proposes a new approach to the construction of point defect models, based on the solution of boundary value problems with non smooth coefficients. Heterogeneity is included in the determining equation of the boundary problem. This approach allows us to formalize defects at the stage of use of state equations, and thus automatically reconciles the defect with the hypotheses of diminution of dimension and does not break the energy closed. The solution is sought in the form of weakly convergent series of generalized functions. The proposed approach simplifies the mechanical interpretation of defect parameters and is demonstrated in several examples. In the first example, the Green function for harmonic oscillations of an elastic beam with a point defect is constructed. The defect model is a limiting state of elastic inclusion with weakening or strengthening. The second example considers the inclusion of an elliptical shape in the problem of harmonic oscillations of the elastic plate. The first approximation of the equivalent volumetric force is constructed and the path to the following approximations is indicated. In the third example, a model of a brittle crack with a known displacement jump is constructed for a static two-dimensional problem of elasticity theory.

Keywords: generalized functions, inhomogeneity modeling, continuous environment.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

В механіці суцільного середовища та механіці деформованого тіла, зокрема, існує багато

моделей, що описують локалізовані неоднорідні включення [1,2,3,4]. Вони визначаються фізичними властивостями, відмінними від характеристик основного матеріалу та можуть

мати різну топологію, наприклад, жорстке включення повної розмірності, тріщиноподібні дефекти, включення зі стохастичними характеристиками, що можуть бути змодельовані ансамблем точкових дефектів з невизначеними характеристиками тощо (Рис. 1).

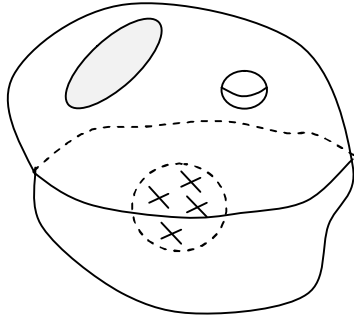


Рис. 1. Типи неоднорідностей

При формулюванні математичних задач для тіл з такими неоднорідностями використовуються різноманітні підходи: метод часткових областей [2], граничних інтегральних рівнянь [3,4], варіаційні методи [1]. В багатьох випадках при розв'язанні модельних задач неоднорідності включаються в праві частини визначальних рівнянь у вигляді еквівалентних розподілених та точкових сингулярностей.

У роботі пропонується новий підхід до побудови моделей точкових дефектів, що базується на розв'язанні граничних задач з негладкими коефіцієнтами. Запропонований підхід на відміну від методів, що потребують виконання принципу суперпозиції, може бути застосований до нелінійних задач, в яких використовується лінійне рівняння рівноваги.

Нехай рівняння рівноваги субфізичного елемента має вигляд:

$$\mathbf{L}\bar{\mathbf{D}}\bar{\boldsymbol{\varphi}} + \bar{\mathbf{X}} = 0, \quad (1)$$

де $\mathbf{L}$ – лінійний диференціальний оператор, $\mathbf{D}$ – оператор, що визначається моделлю та рівняннями стану, $\bar{\mathbf{X}}$ – узагальнене навантаження, а оператор $\mathbf{D}$ містить негладкі коефіцієнти. Як можна показати, (1) може бути зведено в загальному вигляді до рівняння виду

$$\mathbf{L}\bar{\boldsymbol{\sigma}} = -\bar{\mathbf{X}} + \mathbf{L}(\mathbf{E}\bar{\boldsymbol{\sigma}}), \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{S}\bar{\boldsymbol{\varphi}}, \quad (2)$$

в якому права частина містить узагальнені функції.

Розв'язки таких рівнянь можуть бути знайдені методами теорії узагальнених функцій [5,6].

Продемонструємо застосування запропонованого підходу до задач механіки деформованого твердого тіла.

Точкова неоднорідність в одновимірній моделі Кіргхофа

Розглянемо задачу побудови функції Гріна для гармонійних коливань пружної балки з неоднорідністю, що характеризується зміною модуля Юнга $|\Delta E| < 1$, має розмір $2l \ll 1$, та центральну координату χ . Рівняння граничної задачі (1) має вигляд:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(E(x) I \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - \omega^2 \rho w = \delta(x - \xi), \quad (3)$$

де $E(x) = E_0(1 - \Delta E f(x))$,

$f(x) = H(x - (\chi - \ell)) - H(x - (\chi + \ell))$,

$H(x)$ – функція Хевісайда.

Після розкладу $f(x)$ в аналітичний у просторі узагальнених функцій ряд по ℓ , (3) набуває вигляду (4):

$$\begin{aligned} (1 - \Delta E f(x)) w_x^{(4)}(x, \xi) - \pi^4 k^4 w(x, \xi) = \\ F \delta(x - \xi) + \\ 2\Delta E w_x''(x, \xi) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^{(2k+1)}(x - \chi)}{(2k+1)!} \ell^{2k+1} + \\ + 4\Delta E w_x^{(3)}(x, \xi) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^{(2k+2)}(x - \chi)}{(2k+1)!} \ell^{2k+1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Шляхом введення малого параметру

$$\varepsilon_i = \frac{2\ell^{2i-1}\Delta E}{(2i-1)!}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad \text{розв'язок} \quad (4)$$

$w = w_0 + \varepsilon_1 w_1 + \varepsilon_2 w_2 + \dots$ можна відшукати з системи розділених рівнянь:

$$\begin{cases} w_{0x}^{(4)} - \pi^4 k^4 w_0 = F \delta(x - \xi), \\ w_{ix}^{(4)} - \pi^4 k^4 w_i = w_{0x}^{(4)} \delta^{(2i-2)}(x - \chi) + \\ + 2w_{0x}^{(3)} \delta^{(2i-1)}(x - \chi) + w_{0x}^{(2)} \delta^{(2i)}(x - \chi) \end{cases} \quad (5)$$

Легко отримати [5], що в (5)

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left(\delta^{(2i-2)}(x - \chi) w_{0x}^{(2)} \right) = \\ = \sum_{s=0}^{2i-2} C_{2i-2}^s \frac{d^{2i-s}}{dx^{2i-s}} w_0(x, \xi) \Big|_{x=\chi} \delta^{(2+s)}(x - \chi). \end{aligned}$$

Неоднорідність в пластині моделі Кіргхофа

Розглядається задача гармонійних коливань пружної пластинки з неоднорідністю, що характеризується зміною циліндричної жорсткості $|\Delta D| < 1$ та визначається функцією

$$\text{області [5]: } \theta(P) = \begin{cases} 1, & P > 0 \\ 0, & P < 0 \end{cases}, \quad P(x, y) \geq 0,$$

$\bar{\nabla} P|_{P=0} \neq 0$. Рівняння граничної задачі (1) має вигляд:

$$\mathbf{L}(-D\mathbf{L}_1 w) + k^2 w + q = 0, \quad (6)$$

$$\text{де } \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_1: \bar{\mathbf{M}} = -D\mathbf{L}_1 w,$$

$$D = D_0 \left(1 - \frac{\Delta D}{D_0} \theta(P) \right).$$

Застосувавши описаний підхід, отримаємо рівняння з сингулярністю в правій частині виду:

$$\mathbf{L}(\theta(P)\bar{\mathbf{v}}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\theta v_x) + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\theta v_{xy}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\theta v_y)$$

$$\bar{\mathbf{v}} = -D\bar{\mathbf{M}}.$$

Вважаючи, що область неоднорідності є центральним еліпсом з головними півосями a, b , легко отримати, згідно з [5], що:

$$\left\langle \frac{\partial \theta(P)}{\partial x}, \varphi \right\rangle = \left\langle \delta(P) \frac{\partial P}{\partial x}, \varphi \right\rangle = \int_{P=0} \frac{2x}{a^2} \varphi(x, y) \omega,$$

$$\text{де } dP\omega = dx dy, \quad \omega = -\frac{b^2}{2y} dx.$$

Якщо вважати $a, b \ll 1$, легко отримати:

$$\delta(P) \frac{\partial P}{\partial x} = \pi ab \frac{\partial \delta(x, y)}{\partial x} + \bar{O}(a^2, b^2). \quad (7)$$

Доведено

Твердження. (7) інваріантне по відношенню до афінного перетворення:

$$\begin{cases} x' = (x - x^*)\alpha_x + (y - y^*)\alpha_y \\ y' = -(x - x^*)\alpha_y + (y - y^*)\alpha_x \end{cases}, \quad \alpha_x^2 + \alpha_y^2 = 1.$$

Використавши (7), можна показати, що

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\theta v_x) + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\theta v_{xy}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\theta v_y) =$$

$$= \pi ab \left\{ v_x(0) \frac{\partial^2 \delta(x)}{\partial x^2} \delta(y) + 2v_{xy}(0) \frac{\partial^2 \delta(x)}{\partial x \partial y} + v_y(0) \frac{\partial^2 \delta(y)}{\partial y^2} \delta(x) \right\} + \bar{O}(a^2, b^2). \quad (8)$$

(8) визначає точкову об'ємну сингулярність [3], еквівалентну еліптичній неоднорідності.

Плоска задача статичної теорії пружності. Моделювання тріщини через завдання стрибка переміщень.

Рівняння рівноваги для плоскої задачі теорії пружності має вигляд [2,4]:

$$\mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L} \bar{\boldsymbol{\varphi}} + \bar{\mathbf{X}} = 0 \quad (9)$$

де

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$\bar{\boldsymbol{\varphi}}^T = (u, v)$ – вектор переміщень.

Нехай тріщина розташовується на розімкненій

кривій $P(x, y) = 0$, $|\bar{\nabla} P|_{P=0}| = 1$, $\hat{\nu} = \bar{\nabla} P = (\alpha_x, \alpha_y)^T$

– нормальний напрям до тріщини,

$\hat{\tau} = (-\alpha_y, \alpha_x)^T$ – дотичний напрям. Вважаємо,

що на $P(x, y) = 0$ задано стрибок переміщень:

$[\bar{\mathbf{u}}] = \hat{n}[u_n] + \hat{\tau}[u_\tau] \neq 0$. Легко бачити, що в цьому

випадку компоненти тензора напружень можна

подати у вигляді суми регулярної та сингулярної

частин, де вектор сингулярних напружень має

носієм $P = 0$ та його вирази в локальних

координатах $(\hat{\tau}, \hat{n})$, $\bar{\mathbf{t}}^S = t_n^S \hat{n} + t_\tau^S \hat{\tau}$,

$\bar{\mathbf{q}}^S = q_n^S \hat{n} + q_\tau^S \hat{\tau}$ мають вигляд:

$$\begin{cases} t_n^S = \frac{E}{1-\nu^2} [u_n] \delta(P) \\ t_\tau^S = \frac{1-\nu}{2} \frac{E}{1-\nu^2} [u_\tau] \delta(P) \\ q_n^S = \frac{E}{1-\nu^2} [u_\tau] \delta(P) \\ q_\tau^S = \frac{E\nu}{1-\nu^2} [u_n] \delta(P) \end{cases}$$

Якщо прийняти до уваги очевидні співвідношення:

$$\frac{\partial \delta(P)}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial \delta(P)}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial [u_n]}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial [u_\tau]}{\partial n} = 0$$

легко показати, що еквівалентні стрибку переміщень, об'ємні навантаження можуть бути представлені як:

$$\begin{cases} P_n^S = \left([u_n] \delta'(P) + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} [u_\tau] \delta(P) \right) \frac{E}{1-\nu^2} \\ P_\tau^S = \left(\frac{(1-\nu)}{2} [u_\tau] \delta'(P) + \nu \frac{\partial}{\partial \tau} [u_n] \delta(P) \right) \frac{E}{1-\nu^2} \end{cases},$$

$$\text{де } \left\langle \frac{\partial}{\partial \tau} [u_n] \delta(P), \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial \tau} (\delta(P) [u_\tau]), \varphi \right\rangle.$$

А отже, сингулярна частина напружень, що визначається стрибком переміщень в області тріщини еквівалентна розподіленям на поверхні тріщини диполям з інтенсивностями, пропорційними стрибкам переміщень, що збігається з класичними результатами [2,4].

Плоска задача статичної теорії пружності. Моделювання тріщини як граничного стану неоднорідності.

Розглянемо рівняння (9), прийнявши, що в (10):

Список використаних джерел

1. Колчин Г.Б. Расчет элементов конструкций из упругих неоднородных материалов / Г.Б. Колчин – Кишинев: Карта молдовеняскэ, 1971. – 172 с.
2. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий – М: Мир, 1975. – 872 с.
3. Aki K. Quantitative Seismology / K. Aki, P. Richards – University Science Books, ISBN 0-935702-96-2, 2002. – 704 p.
4. Crouch S.L. Boundary element methods in solid mechanics / S.L. Crouch, A.M. Starfield – London: George Allen & Unwin, 1983. – 322 p.
5. Gelfand I.M. Generalized Functions, Vol. 1 / I.M. Gelfand, G.E. Shilov – AMS Chelsea Publishing, 1964. - 377 p.
6. Vladimirow V.S. Equations of mathematical physics / V.S. Vladimirow M: Mir; Rev. from the 1981 Russian edition, 1984. – 464 p.

$$E = E_0 \left(1 - \frac{\Delta E}{E_0} \theta(P_\varepsilon) \right), \quad \text{де } P_\varepsilon(x, y) > 0 \quad -$$

однозв'язна, опукла та скінченна, $\bar{\nabla} P_\varepsilon|_{P_\varepsilon=0} \neq 0$,

$$\exists \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_\varepsilon = P_0, \quad \text{так, що } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(P_\varepsilon) \vec{t}_{n\varepsilon} = \delta(P_0) [\vec{t}_n].$$

Тобто, при спрямуванні ε до 0, опукла область $P_\varepsilon(x, y) > 0$ прямує неперервним чином до кривої $P_0(x, y) = 0$.

Шляхом аналітичних побудов можна показати, що: $\mathbf{L}^T \theta(P_\varepsilon) \vec{\sigma} = \delta(P_\varepsilon) \vec{t}_{n\varepsilon}$, де як і в попередньому розділі $\vec{t}_{n\varepsilon}$ - вектор напружень на площадці з нормаллю $\bar{\nabla} P_\varepsilon|_{P_\varepsilon=0}$. Можна показати,

що результат граничного переходу правої частини (9), перебудованого як вказано в (2), не буде відрізнятися від отриманого в попередньому прикладі результату, а отже, тріщина, що розташована на кривій $P_0(x, y) = 0$ може бути проінтерпретована як граничний стан неоднорідності в області $P_\varepsilon(x, y) > 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\text{та } \frac{\Delta E}{E_0} \rightarrow 1.$$

References

1. KOLCHIN, G.B. (1971) *Raschet elementov konstrukzij iz uprugih neodnorodnih materialov*. Kishinev: Kartya moldoveniaske.
2. NOVATSKIJ, V. (1975) *Teorija uprugosti*. M: Mir.
3. AKI, K. and RICHARDS, P. (2002) *Quantitative Seismology*. University Science Books.
4. CROUCH, S.L. and STARFIELD, A.M. (1983) *Boundary element methods in solid mechanics*. London: George Allen & Unwin.
5. GELFAND, I.M. and SHILOV, G.E. (1964) *Generalized Functions. Vol. 1*. AMS Chelsea Publishing.
6. VLADIMIROV, V.S. (1984) *Equations of mathematical physics*. M: Mir.

Надійшла до редколегії 15.09.2019

УДК 539.375

Зражевський Г.М.¹, к.ф.-м.н., доцент,
Зражевська В.Ф.², к.ф.-м.н., доцент.

G.M. Zrazhevsky¹, PhD,
V.F. Zrazhevskaya², PhD.

Постановка та дослідження задачі про оптимальне збудження коливань пластини

Formulation and study of the problem of optimal excitation of plate oscillations

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: zgrig@univ.kiev.ua

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: zgrig@univ.kiev.ua

² Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря
Сікорського», 03056, м. Київ, пр-т. Перемоги, 37,
e-mail: vera.zrazhevskaya@gmail.com

² National Technical University of Ukraine "Igor
Sikorsky Kiev Polytechnic Institute", 03056, Kyiv,
Peremogi av., 37,
e-mail: vera.zrazhevskaya@gmail.com

Розглянута модельна задача про гармонійні коливання шарнірно закріпленої пластини, що знаходиться під впливом деякого числа точкових зосереджених сил. Вважається, що модель пластини задовольняє умовам Кірхгофа. Основним предметом розгляду є задача про визначення оптимальних характеристик збудження - кількості сил, координат їхнього прикладання, амплітуд та фаз. Критерій оптимальності вибудовується як середньо квадратичне відхилення комплексних прогинів від заданої функції профілю. При заданих характеристиках збудження, задача визначення коливань розв'язується у вигляді суперпозиції функцій Гріна з сингулярностями в точках прикладання сил. Функція Гріна побудована у вигляді ряду Фур'є по коловій координаті. Шляхом використання рівності Парсеваля в просторі L_2 , цільова функцію оптимізаційної задачі представлена у вигляді комбінації лінійної та ермітової форм відносно комплексних амплітуд сил, матриці яких нелінійним (та не опуклим чином) залежать від координат точок сингулярності. Проведено повне дослідження цільової функції. Визначено достатні умови для редукції розмірності простору управління шляхом аналітичного визначення амплітуд сил. Отримані вирази для підрахунку градієнтів цільової функції по кутовим та радіальним координатам.

Ключові слова: гармонійні коливання платівки, оптимальне збудження.

A model problem of harmonic oscillations of a hinged plate, that is is under the influence of a certain number of point concentrated forces, is considered. The plate model is considered to satisfy Kirchhoff's conditions. The main task of the consideration is to determine the optimal characteristics of excitation - the number of forces, coordinates of their application, amplitudes and phases. The optimality criterion is constructed as the standard deviation of the complex deflections from a given profile function. With the given excitation characteristics, the problem of determining the vibrations is solved in the form of a superposition of the Green functions with singularities at the points of application of forces. The Green function is constructed as a Fourier series by a circular coordinate. By using Parseval equality in L_2 , the objective function of the optimization problem is represented as a combination of linear and Hermitian forms with respect to complex amplitudes of forces whose matrices are nonlinear (and not convex) dependent on the coordinates of singular points. A complete study of the objective function is performed. Sufficient conditions are determined for reducing the dimension of the control space by analytical determination of the amplitudes of forces. Expressions were obtained to calculate the gradients of the objective function by angular and radial coordinates. A partial case of grouping of excitation forces on concentric circles is considered, that leads to the degeneration of the problem.

Key words: harmonic plate oscillations, optimal excitation.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Задача про визначення оптимальних характеристик збудження коливань круглої, шарнірно закріпленої пластини, що задовольняє умовам моделі Кіргхофа [1,2,4], має вигляд [3]:

$$I(R) \downarrow \min_{q(r,\varphi)}, \quad (1)$$

де цільова функція

$$I(R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 r dr \int_{-\pi}^{\pi} |R(r, \varphi)|^2 d\varphi + \gamma S_f \quad (2)$$

визначається нев'язкою наближення комплексною амплітудою коливань $w(r, \varphi)$ ($w(r, \varphi, t) = w(r, \varphi)e^{i\omega t}$) заданого профілю поверхні $W(r, \varphi)$ [5]:

$$R(r, \varphi) = w(r, \varphi) - W(r, \varphi).$$

Отже, w має бути розв'язком граничної задачі:

$$\begin{cases} \Delta^2 w - k^4 w = q, & 0 < r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ w(1, \varphi) = 0 \\ \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right\}_{r=1} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

де $k^4 = \rho h \omega^2 / D$, D - циліндрична жорсткість, ν - коефіцієнт Пуассона, $q = q(r, \varphi; u_1, \dots, u_n)$ - зовнішнє навантаження, $\{u_k\}_{k=1}^n$ - параметри керування навантаженням.

Амплітуда та фаза заданого профілю поверхні в загальному випадку можуть залежати від просторових координат:

$$W(r, \varphi)e^{i\omega t} = A(r, \varphi)e^{i\omega(t+\Phi(r, \varphi))}. \quad (4)$$

В силу осесиметричності області, розв'язок (3) розшукувався в вигляді розкладів в ряд Фур'є по кутовій координаті:

$$w(r, \varphi) = \sum_{n=-M}^M w_n(r) e^{in\varphi}, \quad (5)$$

та, аналогічно,

$$W(r, \varphi) = \sum_{n=-N}^N W_n(r) e^{in\varphi}, \quad (6)$$

$$R = \sum_{n=-M}^M R_n(r) e^{in\varphi}, \quad (7)$$

де, в силу (4), $W_n(r) \neq W_{-n}(r)$, $w_n(r) \neq w_{-n}(r)$, $M \geq N$ - порядок наближення.

В даній роботі розглянуто збудження коливань сукупністю $I+1$ точкових сил, прикладених в точках $r=0$, $(r_{\xi_k}, \varphi_{\xi_k})$ з комплексними амплітудами F_0, F_k , $k = \overline{1, I}$:

$$\begin{aligned} q(r, \varphi; \{F_k, r_{\xi_k}, \varphi_{\xi_k}\}_{k=1}^I) = \\ = \sum_{k=1}^I F_k \delta(r - r_{\xi_k}, \varphi - \varphi_{\xi_k}) + F_0 \delta(r). \end{aligned} \quad (8)$$

Таким чином, параметрами керування в (2) є $(F_k = u_k + iv_k, r_{\xi_k}, \varphi_{\xi_k})$, $F_0 = u_0 + v_0$, $k = \overline{1, I}$.

Згідно з (5), розв'язок (3) можна подати у вигляді [6]:

$$\begin{aligned} w(r, \varphi; \{F_k, r_{\xi_k}, \varphi_{\xi_k}\}_{k=1}^I) = \\ = \sum_{k=1}^I F_k w^*(r, r_{\xi_k}, \varphi - \varphi_{\xi_k}) + F_0 w_{00}^*(r), \end{aligned}$$

де $w^*(r, \varphi; r_{\xi}, \varphi_{\xi})$, $w_{00}^*(r)$ - функції Гріна задачі (3) з правими частинами в рівняннях $\frac{1}{2\pi r} \delta(r - r_{\xi}) \delta(\varphi - \varphi_{\xi})$ та $\frac{1}{2\pi r} \delta(r)$ відповідно. Коефіцієнти Фур'є функції

$w^*(r, r_{\xi}, \varphi) = \sum_{n=-M}^{+M} w_n^*(r, r_{\xi}) e^{in\varphi}$ можна знайти як суперпозицію фундаментального та однорідного розв'язків звичайного диференціального рівняння 4-го порядку, що зводиться до рівнянь Бесселя [6]: $w_n^*(r, r_{\xi}) = w_n^{1*}(r, r_{\xi}) + w_n^{2*}(r, r_{\xi})$.

В результаті побудови функцій Гріна можна довести, що виконується

Твердження 1.

$$w_n^*(r, r_{\xi}) = \begin{cases} g_n(r, r_{\xi}), & r < r_{\xi} \\ g_n(r_{\xi}, r), & r > r_{\xi} \end{cases}, \text{ де}$$

$$g_n(r, r_{\xi}) = \frac{1}{D_n} (A_n(r_{\xi}) J_n(kr) + C_n(r_{\xi}) I_n(kr)).$$

Приймаючи до уваги (5)-(7) та використавши рівність Парсеваля для простору $L^2[0, 2\pi]$, задача (1) може бути зведена до знаходження мінімумів функції:

$$I(R) = 2\pi \sum_{n=-M}^{+M} \int_0^1 \left| R_n(r, \varphi; \{F_k, r_{\xi_k}, \varphi_{\xi_k}\}_{k=1}^I) \right|^2 r dr$$

по змінним $F_0, \{F_k, r_{\xi_k}, \varphi_{\xi_k}\}_{k=1}^I$, а, отже, до дослідження Ермітової форми [7]:

$$I(R) = \vec{F}^T K \vec{F} - 2 \operatorname{Re}(\vec{b} \vec{F}^T) + C, \quad (9)$$

де $K = \sum_n K_n$ - матриця лінійної форми та $\vec{b} = \sum_n \vec{b}_n$ - вектор лінійної форми є функціями від $(r_{\xi_k}, \varphi_{\xi_k})$, $C = \sum_n C_n$ - константа, що визначається через (4).

Легко показати, що виконується

Твердження 2.

$$K = K^*, K = \bar{K}, K > 0.$$

Як наслідок, (6) є опуклою по відношенню до $F_k = u_k + i v_k$, $k = \overline{0, I}$ та необхідною умовою досягнення мінімуму $I(R)$ по F_k є лінійне алгебраїчне рівняння [5]. Отже, виконується:

Твердження 3.

$$\frac{\partial I(R)}{\partial \vec{F}} = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = \vec{F}^{opt} = K^{-1} \vec{b}, \quad (10)$$

де прийнято позначення $\frac{\partial}{\partial \vec{F}_s} = \left(\frac{\partial}{\partial u_s} + i \frac{\partial}{\partial v_s} \right)$.

Можна також показати, що справедливе

Твердження 4. Якщо позначити $(\cdot)' = (\cdot)_{r_{\xi_k}}$, $(\cdot)' = (\cdot)_{\varphi_{\xi_k}}$, то

$$\begin{aligned} \left(\vec{F}^{optT} K \vec{F}^{opt} \right)' - 2 \operatorname{Re}(\vec{b} \vec{F}^{opt})' &= \\ = \vec{F}^{optT} K' \vec{F}^{opt} - 2 \operatorname{Re}(\vec{b}' \vec{F}^{opt}). \end{aligned} \quad (11)$$

Твердження 3 та 4 дозволяють зменшити кількість невідомих задачі шляхом визначення оптимальних значень $\vec{F}$ з (7), оскільки з (8) випливає, що мінімізація $I\left(R\left(\{F_k, r_{\xi_k}, \varphi_{\xi_k}\}_{k=1}^I, F_0\right)\right)$

та $I\left(R\left(\{F_k^{opt}, r_{\xi_k}, \varphi_{\xi_k}\}_{k=1}^I, F_0^{opt}\right)\right)$ - еквівалентні.

Редукування простору керувань суттєво спрощує розв'язання задачі, але воно можливе лише тоді, коли K не вироджена. В той же час легко показати, що при виконанні умови $\exists l \neq m: r_{\xi_l} = r_{\xi_m}, \varphi_{\xi_l} \neq \varphi_{\xi_m}$ матриця форми

вироджується, хоча розв'язок $K \vec{F}^{opt} = \vec{b}$ існує, оскільки $\operatorname{rank} K = \operatorname{rank}(K | \vec{b}) < I + 1$.

Вирішення цієї проблеми можливе шляхом розгляду груп сил, розташованих на концентричних колах:

$$\begin{cases} r_{\xi_{kj}} = R_k, j = \overline{1, I_k} \\ \varphi_{\xi_{kj}} = \Phi_k + (j-1)\Delta\Phi_k = \Phi_{kj}, k = \overline{1, K} \end{cases} \quad (12)$$

$$I = \sum_{k=1}^K I_k, \Delta\Phi_k = 2\pi / I_k.$$

Легко бачити, що в цьому випадку K має блокову структуру, що полегшує її аналіз. Таке припущення також призводить до зменшення кількості невідомих задачі.

В результаті досліджень доведене

Твердження 5.

$$\operatorname{rank} K = \operatorname{rank}(K | \vec{b}) = \sum_{i=1}^K \min(2M+1, I_k) + 1, \quad (13)$$

а отже $K \vec{F} = \vec{b}$ має розв'язок тоді і лише тоді, коли:

$$\sum_{k=1}^K \min(2M+1, I_k) \leq \sum_{k=1}^K I_k. \quad (14)$$

Доведене твердження вказує спосіб можливості обернення K шляхом збільшення M при фіксованому N . Дійсно, N визначається з вимоги точності наближення профілю поверхні відрізком ряду Фур'є. Отже, з рівності Парсеваля слідує, що мінімум (9) може бути досягнуто при $M = N$. Оскільки $\vec{b}$ в (10) залежить лише від $W(r, \varphi)$, то збільшення $M > N$ не призведе до погіршення апроксимації, але дозволить уникнути виродження K .

Для перевірки отриманих результатів та підтвердження ефективності запропонованого підходу розглянуто чисельний приклад, в якому

$$\begin{aligned} W(r, \varphi) &= (-I_0(k_{00}) / J_0(k_{00}) J_0(k_{00}r) + \\ &+ I_0(k_{00}r)) + \\ &+ (-I_1(k_{11}) / J_1(k_{11}) J_1(k_{11}r) + I_1(k_{11}r)) e^{i\varphi}, \end{aligned} \quad (15)$$

де перший член є першою осесиметричною, а другий - першою не осесиметричною формами коливань шарнірно закріпленої пластини ($k_{00} = 2.23245$, $k_{11} = 3.7336$), $N = 1$. Такий профіль поверхні визначає суперпозицію стоячої та біжучої в коловому напрямку хвиль. Дійсна та уявна частини (15) представлено на Рис. 1,2. Розрахунки проводились для низьких $k = 0.2324$, середніх $k = 3.2324$ та високих $k = 5.2324$ частот. Розглянуто три конфігурації групування чотирьох сил.

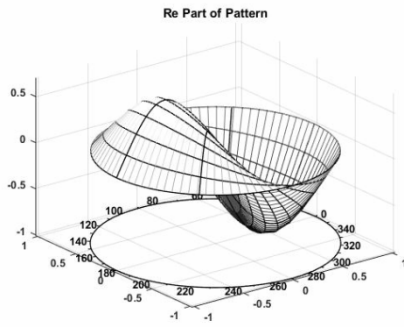


Рис.1 Дійсна частина форми поверхні

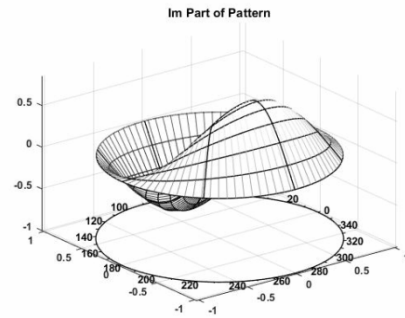


Рис.2 Уявна частина форми поверхні

В першій конфігурації прийнято, що всі сили незалежні (8 невідомих: $R_i, \Phi_i, i = \overline{1,4}$), в другому - дві незалежні групи двох діаметрально розташованих сил (4 невідомих: $R_k, \Phi_k, k = \overline{1,2}$), в третьому - одна група сил з кутовими відстанями $\pi/2$ (2 невідомих: R_1, Φ_1). Для коректності порівняння в усіх випадках прийнято $M = 4$. В результаті розрахунків, оптимальні розташування сил, їхні комплексні амплітуди та значення цільової функції співпали з відносною

точністю в межах 10^{-2} для всіх частот. В той же час, для кожної наступної конфігурації, час розрахунків суттєво зменшувався. Оптимальне значення цільової функції збільшується зі збільшенням частоти коливань від $4 \cdot 10^{-4}$ до $3 \cdot 10^{-2}$, що є природнім та може бути компенсоване шляхом збільшення кількості сил.

Мінімізація цільової функції виконувалась з використанням пакету PSG Matlab Interface.

Список використаних джерел

1. Бажанов В.Л. Пластины и оболочки из стеклопластиков / В.Л. Бажанов, И.И. Гольденблат и др. – М: Высшая школа, 1970. – 408 с.
2. Donnell L.H. Beams, Plates, and Shell / L.H. Donnell, – New York: McCraw-Hill Book Company 1976. – 453 p.
3. Зражевський Г.М. Оптимізаційний підхід до розрахунку гармонічних коливань круглої пластини / Г.М. Зражевський, В.Ф. Зражевська // Вісник КНУ ім. Т. Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки - 2017, №3. – С. 63-66.
4. Timoshenko S. Theory of Plates and Shells / S. Timoshenko. – New York: McCraw-Hill Book Company, 1989. – 600 p.
5. Lawson C.L. Solving Least Square Problems / C.L. Lawson., R.J. Hanson. – New Jersey: Prentice-Hall, 1974. – 524 p.
6. Courant R. Methods of Mathematical Physics, Volume II / R. Courant., D. Hilbert, – New York: Wiley-Interscience, 1962. – 830 p.
7. Strang G. Linear Algebra and its Applications / G. Strang. – Cambridge: Wellesley- Cambridge Press, 2016. – 574 p.

References

1. BAZHANOV, V.L and GOLDENBLAT, I.I. i drugie. (1970) *Plastini i obolochki iz stekloplasticov*. Moskva: Visshaya shkola.
2. DONNELL, L.H. (1976) *Beams, Plates, and Shell*. New York: McCraw-Hill Book Company.
3. ZRAZHEVSKY, G.M. and ZRAZHEVSKA V.F. (2017) Optimizatsiyniy pidhid do rozrahunku garmonichnih kolivan krugloiy plastini. *Bull. of T. Shevchenko National University of Kyiv Ser.: Phys. & Math.* N 3 pp. 63-66.
4. TIMOSHENKO, S. (1989) *Theory of Plates and Shells*. New York: McCraw-Hill Book Company.
5. LAWSON, C.L. and HANSON, R.J. (1974) *Solving Least Square Problems*. New Jersey: Prentice-Hall.
6. COURANT, R. and HILBERT, D. (1962) *Methods of Mathematical Physics, Volume II*. New York: Wiley-Interscience.
7. STRANG G. (2016) *Linear Algebra and its Applications*. Cambridge: Wellesley- Cambridge Press.

Надійшла до редколегії 15.09.2019

УДК 539.3:539.219:67.03

Калиняк Б.М., к.ф.-м.н., с.н.с.

**Про деякі способи досягнення
відсутності термонапружень у
неоднорідному за товщиною безмежному
шарі при стаціонарному тепловому
навантаженні**

Інститут прикладних проблем механіки і
математики ім. Я.С. Підстригача НАН
України, 79060, м. Львів, вул. Наукова 3Б,
e-mail: b-kalynyak@litech.net

B. M. Kalynyak, PhD

**On some ways to achieve the absence of
thermal stresses in an inhomogeneous through
thickness infinite layer under stationary
thermal loading**

Pidstryhach Institute for Applied Problems of
Mechanics and Mathematics of the National Academy
of Sciences of Ukraine, 79060, L'viv, Naukova str.,
3B,
e-mail: b-kalynyak@litech.net

Запропоновано метод визначення характеристик функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ) для забезпечення нульових термонапружень у нескінченному шарі при заданих сталих теплових навантаженнях. Вважаємо, що на поверхнях шару задані класичні умови теплообміну, температурне поле стаціонарне, характеристики ФГМ описуються моделлю простої суміші, характеристики термонапруженого стану і матеріалу залежать тільки від поперечної змінної. Отримано точні аналітичні вирази для розподілу концентрації одного з матеріалів по товщині шару при відсутності масових сил та теплових джерел, яка забезпечує нульові поздовжні напруження.

Ключові слова: функціонально-градієнтні матеріали, термомеханічні характеристики, шар, модель простої суміші, відсутність напружень, стаціонарне температурне поле, композити.

A method for determining the characteristics of functional gradient materials (FGM) for providing zero thermal stresses in an infinite layer with given constant thermal loads is proposed. We assume that the classical convective conditions of heat transfer are given on the surfaces of the layer, the temperature field is stationary, the characteristics of the FGM are described by the model of a simple mixture, the characteristics of the thermo-stressed state and the material depend only on the transverse variable. Precise analytical expressions were obtained for the distribution of the concentration of one of the materials on the thickness of the layer in the absence of mass forces and heat sources, which provides zero longitudinal stresses.

Key words: functional-gradient materials, thermomechanical characteristics, layer, model of a simple mixture, absence of stresses, stationary temperature field, composites.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Сучасні технології дозволяють виготовляти матеріали з заданими розподілами їх характеристик для продовження терміну експлуатації виробів при теплових та силових навантаженнях. Це, зокрема, композити та функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ)[1–3].

Актуальною задачею стає підбір таких характеристик ФГМ, який би забезпечував відсутність переміщень чи напружень при заданих теплових і, можливо, силових навантаженнях.

У цій праці отримано зв'язок між стаціонарним температурним полем та характеристиками ФГМ у нескінченному неоднорідному по товщині шарі при заданих теплових навантаженнях на його поверхнях, який забезпечує нульові поздовжні та поперечні напруження.

Постановка задачі та її розв'язання

Розглянемо нескінченний неоднорідний по товщині h вздовж осі Oz шар, на який діють

силові та стаціонарні теплові навантаження, викликані внутрішніми тепловими джерелами $Q(z)$ та конвективним теплообміном з середовищами з температурою T_1 на нижньому шарі з координатою $z=0$ і T_2 – на верхньому шарі з координатою $z=h$ відповідно. Вважатимемо, що у перерізі відсутні згинні моменти, а деформації $e_{xx} = e_{yy} = e = \text{const}$ вздовж осей Ox та Oy – сталі. Характеристики матеріалу: модуль пружності E , коефіцієнт лінійного теплового розширення α , коефіцієнт теплопровідності λ , коефіцієнт Пуассона ν , і стаціонарне температурне поле T вважаємо функціями координати z . Потрібно встановити умови відсутності термонапружень у такому шарі і використати їх для визначення характеристик матеріалів. Подібна задача для порожнистого циліндра розглянута в роботі [4].

Вираз для поздовжніх напружень та деформацій у неоднорідному шарі, коли наявні силові та температурні навантаження в неоднорідному шарі можна записати при відсутності силових навантажень [5]:

$$\sigma = -\frac{E}{1-\nu} \Phi(T(z)) + e \frac{E}{1-\nu}, \quad (1)$$

$$e = \frac{-\int_0^h \frac{E(\xi)}{1-\nu(\xi)} \Phi(T(\xi)) d\xi}{\int_0^h \frac{E(\xi)}{1-\nu(\xi)} d\xi}, \quad (2)$$

де $\Phi(T(z))$ – може описувати вклад довільного зовнішнього поля, зокрема температурного. У цьому випадку $\Phi(T(z)) = \alpha(T(z) - T_0)$, де T_0 – відлікова температура, при якій відсутні напруження. Напруження у поперечному напрямі будуть відсутніми, якщо нема поперечних силових навантажень. Відповідне однорідне інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду для визначення умов відсутності термонапружень отримаємо з виразів (1), (2), якщо напруження і всі силові навантаження дорівнюють нулеві

$$\Phi(T(z)) - \frac{\int_0^h \frac{E(\xi)}{1-\nu(\xi)} \Phi(T(\xi)) d\xi}{\int_0^h \frac{E(\xi)}{1-\nu(\xi)} d\xi} = 0. \quad (3)$$

Його розв'язком як рівняння з виродженим ядром, що має власні значення є:

$$\Phi(T(z)) = D, \quad (4)$$

де D – довільна стала. З виразу (4) отримано вираз для температурного поля,

$$t(z) = \frac{D}{\alpha(z)}, \quad t(z) = T(z) - T_0, \quad (5)$$

яке повинно бути розв'язком відповідної стаціонарної задачі теплопровідності (взято випадок умов конвективного теплообміну):

$$\frac{d}{dx}(\lambda(z) \frac{dt}{dz}) = -Q(z), \quad (6)$$

$$\lambda(0) \frac{dt(0)}{dx} + \beta_1 t_1 = 0, \quad \lambda(h) \frac{dt(h)}{dx} + \beta_2 t_2 = 0, \quad (7)$$

де $t_1 = T(0) - T_1$, де $t_2 = T(h) - T_2$, T_1 , T_2 – температури оточуючих середовищ, $Q(z)$ – інтенсивність теплових джерел. Отже з виразів (5) – (7) слідує, що розв'язок (5), який має одну довільну сталу повинен задовольняти диференціальне рівняння (6) і дві умови (7).

Умови на межах (7) накладають зв'язки між температурами середовищ, коефіцієнтами теплообміну з середовищем, значеннями коефіцієнта лінійного теплового розширення на межах, а диференціальне рівняння (7) – між інтенсивностями теплових джерел, коефіцієнтом лінійного теплового розширення та коефіцієнтом теплопровідності. Ці зв'язки, отримані після підставлення виразу (5) у рівняння (6) та умови (7) мають вигляд

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\alpha(h) \left[\beta_1 - \lambda(0) \frac{1}{\alpha(0)} \frac{d\alpha(0)}{dx} \right] \beta_2}{\alpha(0) \left[\beta_2 - \lambda(h) \frac{1}{\alpha(h)} \frac{d\alpha(h)}{dx} \right] \beta_1}, \quad (8)$$

$$\lambda(z) = \frac{\alpha^2(z) \left(\int_0^z Q(\xi) d\xi + C \right)}{D \frac{d\alpha(z)}{dz}}, \quad (9)$$

$$\alpha(z) = \frac{D}{-\int_0^z \ln\left(\frac{\lambda(z)}{\lambda(\xi)}\right) Q(\xi) d\xi + \int_0^z \frac{C_1}{\lambda(\xi)} d\xi + C_2},$$

де C , C_1 , C_2 – довільні сталі.

Рівняння (6) можна трактувати як вираз інтенсивності теплових джерел через коефіцієнт лінійного теплового розширення та коефіцієнт теплопровідності. Тому найпростішим теоретичним способом отримання відсутності напружень є створення об'ємних теплових джерел, отриманих з рівняння (6) після підставлення в

нього характеристик матеріалів з врахуванням обмежень на умови теплообміну (8). Однак технологічно легше реалізувати випадок, коли теплові джерела відсутні. Це значить, як слідує з рівняння (6), що крім умов теплообміну потрібно узгодити також механічні та теплові характеристики матеріалів.

Характеристики матеріалів, які призводять до відсутності термонапружень

Тому розглянемо випадок, який цікавий для практики і його порівняно можливо реалізувати: це випадок відсутності об'ємних теплових джерел $Q(z) = 0$ у двокомпонентних матеріалах, характеристики яких описуються моделлю простої суміші [6]

$$P(z) = P_2 + P_1 (1 - V(z)), \quad (10)$$

де $V(z)$ ($V(z) \in [0,1]$) – концентрація другого матеріалу в першому, P_1 , P_2 – термомеханічні характеристики відповідно 1-го та 2-го матеріалів відповідно. Виявляється, що у цьому випадку нелінійне диференціальне рівняння (9) відносно концентрації $V(z)$ має точний розв'язок, який виражається через функції Лямберта [7]

$$V(z) = -\frac{\alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_1 + \alpha_2 W_L(Z(z))(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\lambda_1 - \lambda_2)W_L(Z(z))}, \quad (11)$$

де

$$Z(z) = \frac{(\alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_1) \exp\left(-\frac{BD(\alpha_1 - \alpha_2)^2(z + C_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (12)$$

З формули (11) можна визначити сталі B та C_1 , якщо відомі концентрації у двох точках, наприклад $V_1 = V(0)$, та $V_2 = V(h)$, які відповідають значенням $\alpha(0)$ та $\alpha(h)$ відповідно при вибраних характеристиках складових суміші. Отримаємо два трансцендентні рівняння:

$$V_i = \frac{\alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_1 - \alpha_2 (\lambda_1 - \lambda_2) W_L(z_i)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\alpha_1 - \alpha_2) W_L(z_i)},$$

$$z_1 = Z(0), \quad z_2 = Z(h), \quad i = 1, 2, \quad V_1 = 0, \quad V_2 = 1. \quad (13)$$

Ці рівняння мають точні розв'язки відносно z_1 і z_2

$$z_i = D_i \exp(D_i), \quad i = 1, 2, \quad (14)$$

$$\text{де } D_1 = -\frac{\alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_1}{\alpha_2 (\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad D_2 = -\frac{\alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_1}{\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_2)}.$$

З виразу (12) при значеннях $z = z_1$ і $z = z_2$ та (14) отримана система двох алгебричних рівнянь для визначення сталих BD та C_1 , розв'язком якої є

$$C_1 = \frac{\alpha_1 h [\alpha_2 (\lambda_1 - \lambda_2) \ln \alpha_2 - (\alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_1)]}{\alpha_1 \alpha_2 (\lambda_1 - \lambda_2) \ln \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + (\alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_1)(\alpha_1 - \alpha_2)},$$

$$BD = \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\lambda_1 - \lambda_2) \ln \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + (\alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_1)(\alpha_1 - \alpha_2)}{h \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2)^2}. \quad (16)$$

Якщо розв'язків рівняння (11) при значеннях V_1 та V_2 лівої частини не існує, то це значить, що вибрали не ті матеріали або при заданих умовах теплообміну не можна забезпечити відсутності напружень у шарі. Сталу D визначено з однієї з умов (7) після визначення концентрації $V(z)$, підставленням сталих (16) у вираз (11) і врахуванням того що [7] $W'(z) = W(z) / [z(1 + W(z))]$, коли $z \neq 0$ і $W'(0) = 1$ у границі.

Результати обчислень

ФГМ з характеристиками складових (алюміній і циркон [8]) $\alpha_1 = 23 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $\alpha_2 = 10 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $\lambda_1 = 204 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$, $\lambda_2 = 2,09 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ для забезпечення у шарі товщиною 0,1 м нульових напружень підбирався для температури середовища $t_1 = 200 \text{ К}$, відлікової температури $T_0 = 300 \text{ К}$, коефіцієнтів теплообміну $\beta_1 = 40000 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$ і $\beta_2 = 20 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$. В результаті обчислень отримана температура другого оточуючого середовища $t_2 = 1783,1 \text{ К}$.

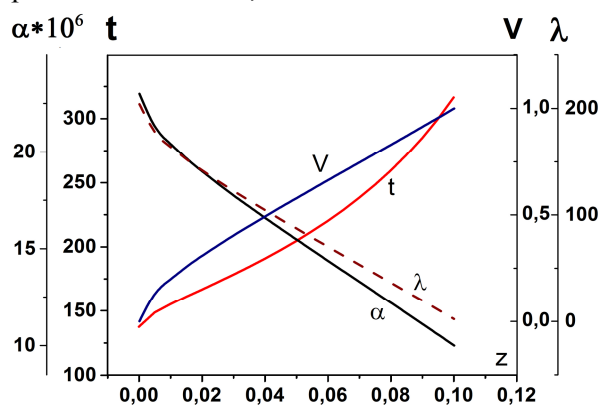


Рис.1. Залежності від поперечної координати температури, концентрації та характеристик ФГМ, які забезпечують нульові радіальні напруження

При цих значеннях характеристик складових і температур на поверхні $D = 0,003164494463$.

Висновки

У праці :

- отримано точний аналітичний вираз для температурного поля через характеристики матеріалу при відсутності силових навантажень, який є умовою відсутності термонапружень у шарі та повинен бути розв'язком стаціонарної задачі теплопровідності;
- отримано умови узгодження параметрів конвективного теплообміну і характеристик матеріалів, необхідних для відсутності термонапружень.

Список використаних джерел

1. Abrinia K. New analysis for the FGM thick cylinders under combined pressure and temperature loading / [K. Abrinia, H. Naee, F. Sadeghi, F. Djevanroodi] // American Journal of Applied Sciences. – 2008. – Vol. 5, № 7. – P. 852–859.
2. Bohidar S. K. Functionally graded materials: a critical review / S. K. Bohidar, R. Sharma, P. R. Mishra // International Journal of Research. – 2014. – Vol. 1, № 7. – P. 289–301.
3. Functionally Graded Materials in the 21st Century: a Workshop on Trends and Forecasts [ed. by Kiyoshi Ichikawa]. – 2001. – Vol. XVI. – 242 p.
4. Kalynyak B. M. Guaranteeing the Absence of Radial Stresses in a Long Hollow Cylinder by the Inhomogeneity of Material /B. M. Kalynyak// Materials Science.– 2016. – Vol. 52, № 2.– P. 261–268.
5. Кушнір Р.М., Попович В.С. Термопружність термочутливих тіл : Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл : в 4-х т. / під заг. ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра. – Львів : СПОЛОМ, 2009. – Т. 3. – 409 с.
6. Shen H.-S. Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells / H.-S. Shen. – CRC Press, 2009. – 280 p.
7. Uysal M. U. Investigation of Thermal and Mechanical Loading on Functional Graded Material Plates. *World Academy of Scienc. Engineering and Technology. International Journal of Aerospace and Mechanical Engineering*. 2013. Vol:7, No:11. pp. 2283–2289.
8. On the Lambert W function / [Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. G. et al.] // Adv. Comp. Math. – 1996. – Vol 5. – P. 329–359

• у випадку ФГМ, характеристики якого описуються моделлю простої суміші, отримано точні аналітичні вирази для концентрації складових, яка забезпечує нульові напруження;

- адекватність підходу підтверджена обчисленням значень концентрацій складових у реально існуючому ФГМ, які повинні забезпечити відсутність нескінченному неоднорідному шарі;
- при довільних заданих характеристиках матеріалу відсутність напружень можна забезпечити тепловими джерелами, інтенсивність яких визначається з рівняння теплопровідності (6).

References

1. ABRINIA, K. et al. (2008) New analysis for the FGM thick cylinders under combined pressure and temperature loading. *Am. J. Appl. Sci.* 5 (7). p. 852–859.
2. BOHIDAR, S. K., SHARMA, R. & MISHRA, P. R. (2014) Functionally graded materials: a critical review. *Int. J. Res.* 1 (7). p. 289–301.
3. (ed. ICHIKAWA, KIYOSHI) (2001) *Functionally Graded Materials in the 21st Century: a Workshop on Trends and Forecasts*. XVI.
4. KALYNYAK, B. M. (2016) Guaranteeing the Absence of Radial Stresses in a Long Hollow Cylinder by the Inhomogeneity of Material. *Materials Science*. 52(2).p.261–268.
5. KUSHNIR R.M., POPOVYCH V.S. (2009) *Termoprzhnist termochutlyvykh til V.3 in Modeluvannya ta optymizaciya v termomechanizi elektroprovodnykh til: v 4-ch tomach / pid zah red. Ya. Y. Buraka, R.M. Kushnira. Spolom, L'viv*.
6. SHEN, H.-S. (2009) *Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells*. CRC Press.
7. CORLESS, R et al. (1996) On the Lambert W function. *Adv. Comp. Math.* 5. p. 329–359.
8. UYSAL M. U. (2013) Investigation of Thermal and Mechanical Loading on Functional Graded Material Plates. *World Academy of Scienc. Engineering and Technology. International Journal of Aerospace and Mechanical Engineering*. 7(11). p. 2283–2289.

Надійшла до редколегії 19.06.2019

УДК 539.3

Кавіан Е.¹, студент,
Дібаджіан С. Х.¹, к. т. н., доцент.

Дослідження впливу неоднорідних пустот на кінцеву міцність інженерних пористих матеріалів

¹ Інженерний факультет Ісламського Університету
Азад, Наджафабад Ісфахан, Іран, Ісфахан,
Наджафабад, бульвар Данешга
e-mail: Elham_kvn@ymail.com,
Dibajian@yahoo.com

E. Kavian¹, M.S. Student,
S. H. Dibajian¹, Dr. Sci., Assistant professor.

Investigating the effect of Non-uniform voids on the final strength of engineered porous materials

¹ Faculty of Engineering, Islamic Azad University of
Najafabad Isfahan, Iran, Isfahan, Najadabad,
Daneshgah blvd
e-mail: Elham_kvn@ymail.com,
Dibajian@yahoo.com

Одним із способів ідентифікації пористих матеріалів є використання багатомірного аналізу, і відносини, доступні в даний час для багатомірного аналізу, обмежені середніми значеннями напруги і деформації. Ці співвідношення мають велику похибку при розрахунку міцності матеріалів на розрив. Слід зазначити, що в багатомірних методах кількості нормальних середніх значень зазвичай використовуються для розрахунку макрофізических властивостей, в той час як такі величини, як руйнування і втома, не можуть бути пояснені такими величинами. Оскільки величина напруги в різних частинах пористих матеріалів не однакова, в цьому дослідженні використовуються статистика і ймовірність, щоб краще зрозуміти напругу. Для цього спочатку досліджується гістограма напруг пористих матеріалів. За отриманою гістограмою для неї була розрахована функція щільності ймовірності. Нарешті, досліджується вплив однорідності розташування та розміру порожнини на функцію щільності ймовірності пористих матеріалів.

Ключові слова: пористий матеріал, неоднорідні порожнечі, багатомірного аналіз

One way to identify porous materials is to use multi-scale analysis, and the relationships currently available for multi-scale analysis are limited to mean stress and strain values. These relationships have a great error in calculating the fracture strength of materials. It should be noted that in multi-scale methods, quantities of normal mean values are usually used to calculate macro properties, while concepts such as fracture and fatigue cannot be explained by such quantities. Since the amount of stress in different portions of porous materials is not the same, this study uses statistics and probability to better understand the stress. For this purpose, the stress histogram of the porous materials is firstly investigated. According to the obtained histogram, the probability density function was calculated for it. Finally, the effect of location uniformity and cavity size on the probability density function of porous materials is investigated.

Key Words: porous material, Non-uniform voids, multi-scale analysis

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Introduction

Porous materials, as they are called, are solids that have cavities in their structure. They have a fuzzy structure that is a solid phase and a liquid or gas phase that is abundant in nature. These materials are lightweight, flexible and resistant to hair cracking, which is why Nowadays, with the development of technology, porous structure materials have been manufactured for use in various industries. It is widely used in beams, plates and shells. Materials such as aluminum, steel, plastic,

copper, etc are composed of only one phase and are isotropic, so their mechanical properties include: Young's modulus (E), shear modulus (G) and Poisson's coefficient (ν) are independent of orientation and are identical in all respects but the porous materials are composites composed of two phases so they are anisotropic and their properties vary in different directions and their properties must be analyzed in different directions. There are some common theoretical methods for calculating the equivalent mechanical properties of porous material, one of the methods of homogenization is the Mori-

Tanaka micromechanical method.

In 1987, Chensong Dong investigated the effects of cavities inside fiber-reinforced composites on the mechanical properties of the composite, with the aim of presenting an applied method for predicting the effects of existing cavities on the mechanical properties of the composite. In this study, representative volume element (RVE) of fiber/epoxy composites with different volumes of cavities were considered and the strength modulus was calculated by using finite element method (FEM). The results show that the cavities significantly affect the effective properties of the matrix including the transverse properties. Also, for cavities with greater volume than the critical volume, the transverse strength decreases and the strength decreases with increasing volume percent of reinforcement are reduced. In other words, holes have less influence on longitudinal properties. [1]

Also in 2011, S. Gong, Z. Li, and Y.Y. Zhao developed the Mori Tanaka model for elastic moduli of finite-size porous materials; the developed Mori Tanaka model takes into account the effect of pore size, number of pits, and sample size. This model shows that the elastic modulus of the porous materials decreases with increasing porosity, increasing number of holes and also with increasing hole size. [2]

As we know, stress causes fatigue, fracture, etc. Also, the strength of porous material is also determined by stress and in many studies the mean stress value has been used to investigate failure and in this research the aim finding the parameter is better than the average stress for the failure study. Also, the Mori Tanaka micromechanical method is chosen to calculate the equivalent mechanical properties to the porous material and on the other hand the equivalent mechanical properties to the selected porous material are calculated by writing a script in ABAQUS and the results will be compared. Since the stress in the porous materials is not constant and has many variations, we will use statistics and probability to better understand the stress. First, the stress histogram will be obtained by considering the size and location of the holes in different modes for the porous material. Then, according to the obtained histograms for each case, the probability density function will be found for the obtained results. Finally, the effect of the uneven location and size of the holes on the stress probability density function of the porous materials will also be investigated.

2. Statistical Analysis of Stress in Porous Materials:

The purpose of this study is to mechanically analyze the porous material with the help of statistics and probability. Also, considering the non-uniformity of the pores as a random size of the pores and random location of the pores, the effect of probable stress distribution on the final strength of the porous material is also will be reviewed.

An aluminum cube of specified dimensions containing a number of spherical holes with random radii will be considered, with holes randomly scattered in the cube, The cube is modeled as a three-dimensional representative volume element (RVE) in Abacus and undergoes a specified static loading, As mentioned, the aim is to investigate the location and size of pores on the possible stress distribution of porous materials. Therefore, three modes will generally be considered such that once the rate of change of the pore radius (size change) is zero, the location of the hole changes with the specified rate of change, once the rate of change of the pore location is zero and there are only radius variations of the holes, finally the rate of change of location and radius are both equal to zero.

In the first case the rate of change of location (rate p) will be zero and only for the rate of change of radius (rate r) that are: 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25 and 0.3 the stress for each of the elements, Young's modulus (E), the density (ρ), which shows the porosity are calculated from the following equation by writing the script in ABAQUS[3]:

$$S_i = S_t * v_i / V_t \quad (1)$$

The Young's modulus value will be calculated from the following equation:

$$E = S_t / 0.02 \quad (2)$$

S_t is the total stress of the sample and 0.02 is the strain value.

The porosity of the porous material is calculated from the following equation:

$$r_o = \left(1 - \frac{V_{t_1}}{V_t}\right) * 100 \quad (3)$$

V_t represents the total volume of the sample and V_{t_1} represents the volume of the bulk material.

Also the stress values for each element are extracted as a separate file.

For example, for rate $r=0.1$ representative volume element (RVE) would be as follows:

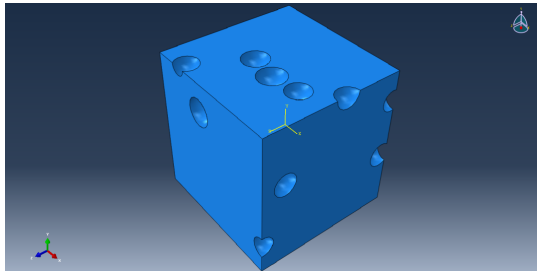


Fig. 1. Representative volume element (RVE) for rate $r=0.1$

And the the Young's modulus (E), density (ρ) calculated from Equations 2 and 3 for rate $r=0.1$ are equal to the following:

$$E=64135882146$$

$$\rho_0=4.5026923$$

After extracting the stress values, it is observed that the stress is not a constant value for each element and has different values, so for the analysis of the stress results obtained from equation (1) for rate $r=0.1$ the histogram will be plotted as follows:

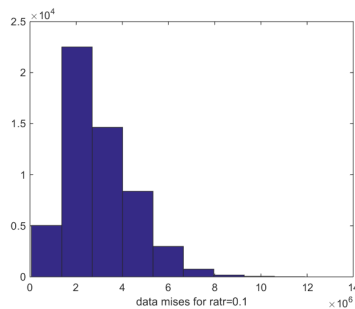


Fig. 2. Stress histogram for rate $r=0.1$

In the latter case, the radius changes will be considered zero, and only for the rate of location changes that are: 0.025, 0.05, 0.075 and 0.1, stress for the elements, the Young's modulus (E), density (ρ) are also derived from Eq. (1), Eq. (2) and Eq. (3).

For this case also when rate $p = 0.1$ the representative volume element (RVE) will be as follows:

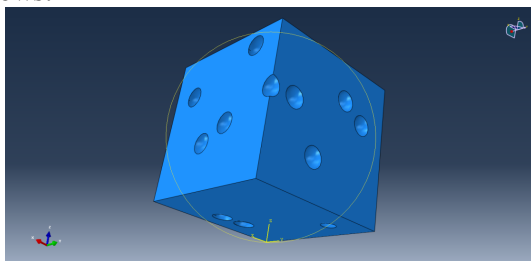


Fig. 3. Stress histogram for rate $p=0.1$

And the the Young's modulus (E), density (ρ) for rate $p=0.1$ are equal to the following:

$$E=66745521411$$

$$\rho_0=2.42786808$$

Since the stress value for rate $p=0.1$ is also not a constant value, the stress histogram will be plotted as follows:

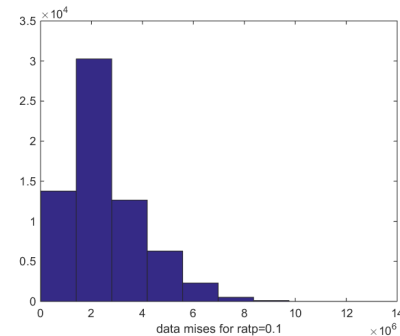


Fig. 4. Stress histogram for rate $p=0.1$

Also in the third case, the rate of change of location and radius both will be equal to zero in fact the distribution of the holes is uniform and the stress for the elements, the Young's modulus (E) and density (ρ) will be calculated from Eq. (1), Eq. (2) and Eq. (3).

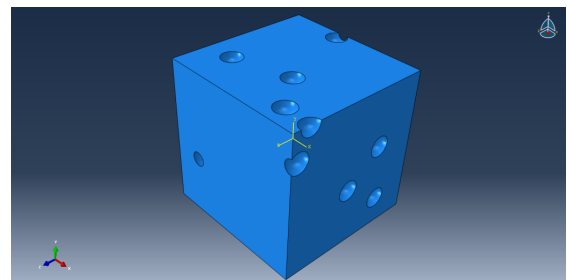


Fig. 5. representative volume element (RVE) for rate $p=0$ and rate $r=0$

For the uniform distribution of radius and location, the Young's modulus (E) and the density (ρ) are equal to the following values: $E=66721371286$ and $\rho = 2.46542693$.

For a uniform distribution of radius and location (rate $r=0$ and rate $p=0$), the stress histogram will be as follows:

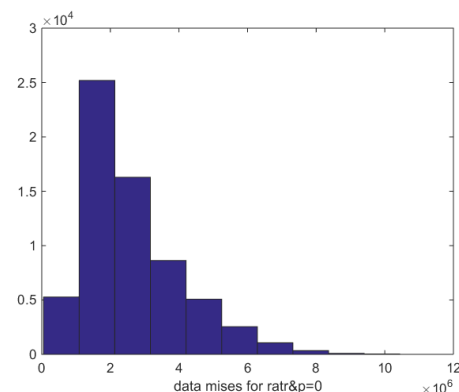


Fig. 6. Stress histogram for rate $p=0$ and rate $r=0$.

5. Conclusion

The obtained histograms show that the Gaussian distribution is not a good distribution and the Weibull distribution is a good distribution for analyzing the results, as we know the parameters of the Weibull distribution are b , Θ and x_0 , where $x_0=0$, so only the values of Θ (Size parameter) and b (shape parameter) will be numerically obtained for each of the three modes considered.

Weibull distribution parameters for the even distribution of holes are also calculated as follows:

rate p result		
Rate p	Teta	b
0.025	3.00E+06	1.96957
0.05	2.97E+06	1.96665
0.075	2.96E+06	1.98249
0.1	3.02E+06	1.98347

Tab. 1. Weibull distribution parameters for rate p

$$\Theta = 3.02E + 06,$$

$$b = 1.98347.$$

The results show that when rate $r=0$, the parameters of the Weibull distribution, b and Θ for the different cavity shift rates are as follows, as can be seen, there are not many changes for the parameters b and Θ .

Список використаних джерел

1. Dong, Ch. (2016) Effects of Process-Induced Voids on the Properties of Fibre Reinforced Composites / Dong, Chensong. – Journal of Materials Science and Technology -Shenyang-32(7).
2. Gong, S. An extended Mori-Tanaka Model for the elastic moduli of porous materials of finite size / S., Gong, Z. Li and Y.Y. Zhao // Acta Materialia. – 2015. – Vol. 59. – P. 6820-6830.
3. Ever J Barbero. Finite Element Analysis of Composite Materials Using Abaqus. -2013.

References

1. DONG, Ch. (2016) Effects of Process-Induced Voids on the Properties of Fibre Reinforced Composites. *Journal of Materials Science and Technology*. 32 (7).
2. GONG, S., Z. Li., & Y.Y. ZHAO. (2015) An extended Mori-Tanaka Model for the elastic moduli of porous materials of finite size. *Acta Materialia*. 59. p. 6820-6830.
3. Ever J Barbero. (2013) *Finite Element Analysis of Composite Materials Using Abaqus*.

Надійшла до редколегії 28.08.19

УДК 519.9

Харитонов О. М.¹, к.ф.-м.н., доц.,
Савченко С. Р.², студент,
Міранда Н.³, студент.

Оптимізація швидких міжпланетних траєкторій з використанням ядерного дворежимного двигуна

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: kharytonov@univ.kiev.ua

² Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: serg.savchenko1999@gmail.com

³ Центральна школа Ліону, 69130, м. Ліон,
авеню Гай де Колонь 36.
e-mail: nicolas.miranda@ecl17.ec-lyon.fr

O. M. Kharytonov, associate professor, PhD ¹
S. R. Savchenko, three-years student ²
N.Miranda, four-years student ³

Optimization of sprint interplanetary trajectories with nuclear bimodal thermal propulsion

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: kharytonov@univ.kiev.ua

² Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: serg.savchenko1999@gmail.com

³ Ecole Central Lyon, France, 36 Avenue Guy de
Collongue, 69130, Ecully
e-mail: nicolas.miranda@ecl17.ec-lyon.fr

Міжпланетні місії вимагають швидких і економічних трансферів. З цією метою поєднання короткотривалих перельотів з використанням великої та малої тяги може забезпечити хороший компроміс. Збереження певної кількості палива при початковому імпульсі з великою тягою і його використання для корекції траєкторії дозволяє зекономити паливо і збільшити корисне навантаження. Досліджено оптимальний шлях, для отримання переваг від двигунів як великої, так і малої тяги з метою збільшення корисного навантаження. З використанням простої моделі ідеального двигуна обмеженої потужності і методу транспортуючої траєкторії знайдено аналітичний вираз для знаходження остаточного корисного навантаження. Розв'язання задачі оптимізації дозволило відшукати оптимальний розподіл палива між маневрами з використанням двигунів великої та малої тяги. Оскільки маса системи з малою тягою залежить від електричної потужності, ми використали її, щоб визначити оптимальну електричну потужність для перельоту за заданий час. У результаті було встановлено інтервал часу перельоту, для якого комбінація двигунів великої та низької тяги стає оптимальною.

Ключові слова: швидкий переліт, дворежимний ядерний двигун, метод транспортуючої траєкторії

Interplanetary missions require fast and fuel-efficient transfers. Combining small times transfers of high-thrust and efficiency of low-thrust propulsion can provide a good compromise. Saving an amount of fuel from the initial high-thrust burn and using it to correct the trajectory could lead to an economy of fuel. We investigated the optimal way to take advantages of both high and low-thrust propulsion benefits in order to maximize the payload mass of the mission. Using a simple model of ideal engine of limited power and the transporting trajectory method, we determined the analytical expression of final payload mass. The solution of the optimization problem gave us the optimal repartition of fuel between high and low-thrust maneuvers for a given thrust of thermal propulsion and electrical power of low-thrust propulsion system. As the mass of the low-thrust propulsion system depends on the electrical power, we took it into account to determine the optimal electrical power for a sprint trajectory in a given time. As a result, we could obtain the interval of transfer time for which the combination of high and low thrust becomes optimal.

Key Words: sprint trajectory, bimodal nuclear propulsion, transporting trajectory method

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

©O. M. Kharytonov, S. R. Savchenko,
N.Miranda, 2019

The problem of sprint interplanetary trajectories of the space vehicle with nuclear bi-modal propulsion is investigated. The optimization problem is formulated as follows: to distribute the total Δv budget between high- and low-thrust arcs to provide the maximum of payload. The high-thrust maneuver is modeled using impulse approximation and the low-thrust arc is modeled using the conception of ideal engine of limited power [1]. The engine parameters from [2] are used.

The aim of maneuver is fly over the Mars in a given time T . Using the Tsiolkowski formula and an ideal model of low-thrust propulsion, we could find an analytical expression (1) of the final payload mass M_π for this bimodal transfer:

$$M_\pi = \frac{M_0 e^{-\frac{\sqrt{v_{\infty}^2 + 2\frac{\mu_e}{R_0}} - \sqrt{\frac{\mu_e}{R_0}}}{V}}}{1 + \frac{M_0}{2N} e^{-\frac{\sqrt{v_{\infty}^2 + 2\frac{\mu_e}{R_0}} - \sqrt{\frac{\mu_e}{R_0}}}{V}} J} - M_x - M_t \quad (1)$$

where M_π is the initial mass of the spacecraft, M_x is the propulsion system mass, M_t is the tank mass, N is the electrical power of the low-thrust propulsion system, V is the exhaust speed of high-thrust propulsion, μ_e is the standard gravitational parameter of the Earth, R_0 is the height of initial circular orbit of the spacecraft around the Earth, $V_\square^e$ is the speed vector of the spacecraft on a hyperbolic trajectory at an infinite distance from the Earth, J is the following functional :

$$J = \int_0^T a^2 dt \quad (2)$$

where a is the jet acceleration due to the low-thrust propulsion.

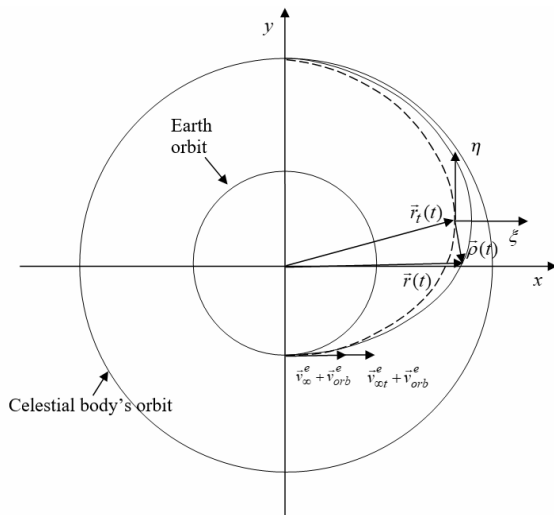


Fig 1. Bimodal trajectory (full line) and transporting trajectory (dotted line)

In accordance with (1) maximizing M_π requires to minimize J . To find the analytical expression for functional (2), we used the transporting trajectory method [3]. We used Keplerian arc corresponding to the fully high-thrust maneuver for a given time T as a transporting trajectory (Fig. 1).

In the chosen transporting coordinates system, the

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= v_\xi; \dot{\eta} = v_\eta; \dot{v}_\eta = a \cos(\theta); \\ \dot{v}_\xi &= a \sin(\theta); \dot{J} = a^2; J \rightarrow \min; \\ \xi(0) &= 0; \xi(T) = 0; \eta(0) = 0; \eta(T) = 0; \\ v_\eta(0) &= V_{\infty,x}^e - V_{\infty,t,x}^e = \Delta V_{\infty,x}^e \\ v_\xi(0) &= V_{\infty,y}^e - V_{\infty,t,y}^e = \Delta V_{\infty,y}^e \\ v_\eta(T) &= v_\xi(T) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

θ is the angle between the nozzle axis and the x axis. The vector $V_{\square,t}^e$ is the speed vector, on Earth position, on the unique Keplerian arc that links the Earth and Mars in a given time T , which is the transporting trajectory. The vector $V_\square^e$ is the speed vector, on Earth position, on the bimodal trajectory. To set this speed vector means allocating a certain amount of fuel to the high-thrust burn, and the remaining fuel for low-thrust. The maximum of fuel allocated to high-thrust corresponds to the Keplerian trajectory where no fuel is used for low-thrust. It implies

$|V_\square^e| \leq |V_{\square,t}^e|$. The solution of variational problem

$$J = \frac{4}{T} ((V_{\infty,x}^e - V_{\infty,t,x}^e)^2 + (V_{\infty,y}^e - V_{\infty,t,y}^e)^2) \quad (4)$$

(3) provides an analytical expression for J :

Taking into account that M_π depends on $V_\square^e{}^2 = V_{\square,x}^e{}^2 + V_{\square,y}^e{}^2$, the selection of $(V_{\square,x}^e, V_{\square,y}^e)$ must satisfy the condition of J constrained minimum:

$$\begin{cases} J = \frac{4}{T} ((V_{\infty,x}^e - V_{\infty,t,x}^e)^2 + (V_{\infty,y}^e - V_{\infty,t,y}^e)^2) \\ V_{\infty,x}^e{}^2 + V_{\infty,y}^e{}^2 = V_\infty^e{}^2 \end{cases} \quad (5)$$

Its resolution gives another relation (6) between the two speed components:

$$\frac{V_{\infty,y}^e}{V_{\infty,t,y}^e} = \frac{V_{\infty,x}^e}{V_{\infty,t,x}^e} \quad (6)$$

This formula shows that the vectors are colinear.

3. Results

In (1), the propulsion system mass M_x is an empirical function of the electrical power, shown in (7), empirical constants A , B , C and D are exposed in [1]:

$$M_x(N) = 0.7 \left(\frac{A}{BN + C} + D \right) N \quad (7)$$

Both M_x and the low-thrust efficiency increase when N increases. For bimodal propulsion to be efficient, this additional mass has to be overcome by the fuel mass saved with the increasing of thrust. A too small electrical power would imply a dead weight, and a too big one would imply a too heavy propulsion system: for a given travel time T , this benefit is present in an interval of values of N and reach a maximum, as shown in the Fig 2.

For several values of time of transfer and electrical power, we calculate the optimal distribution of fuel between high and low-thrust by minimizing the expression (1). It allows us to draw the maximum payload mass according to the electrical power for several values of T . The plot is illustrated in the Fig.2 :

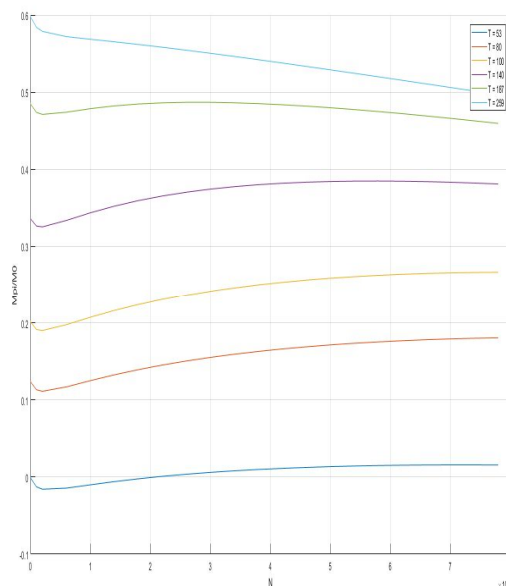


Fig 2. Maximum payload mass according to the electrical power of the low-thrust propulsion system, for $T = 259, 187, 140, 100, 80, 53$ days (top to bottom)

Bimodal propulsion is beneficial when the maximum of the previous curves is not for $N = 0$, otherwise the classical approach is better. It happens for time under 187 days. It means that payload mass can be increased for travel time under 187 days by using bimodal propulsion. To compare the efficiency between the bimodal and high-thrust only approaches, we plot the surfaces showing the maximal payload masses according to $V_{x,y}^e$ and $V_{x,y}^e$. The flat surface corresponds to the payload mass for the high-thrust only approach.

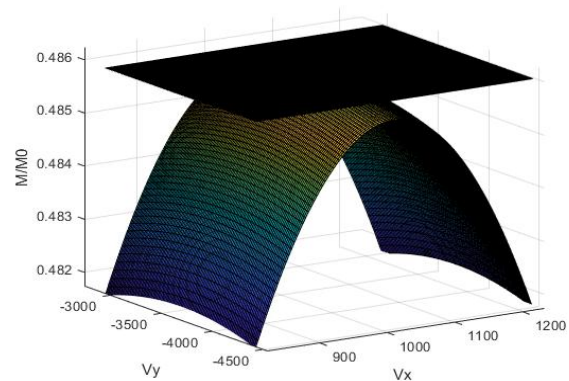


Fig 3. Maximum payload mass for 187 days

Fig 3 show the maximum payload mass and the speed vector components of the high-thrust initial burn which allows us to reach this maximum. This surface is calculated with the electrical power that maximize the payload mass on the 187 days curve on Fig 2, respectively 2,2MW.

Fig shows this surface for a travel time of 100 days. In this case, the optimal electrical power is 7,8MW :

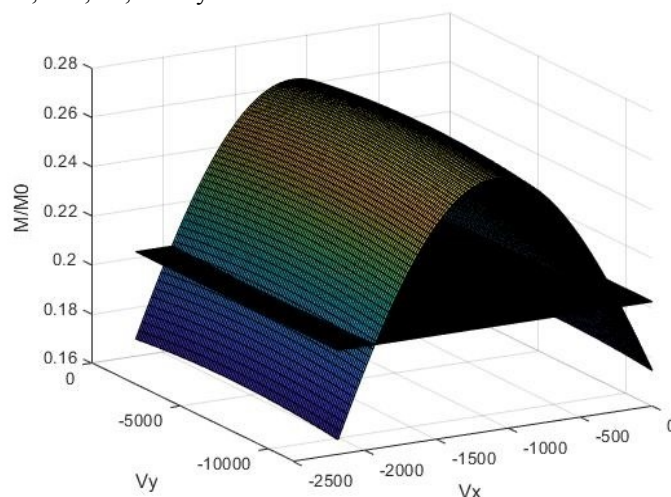


Fig 4. Maximum payload mass for 100 days

The relative gain between the high-thrust only approach (the flat surface) and the bimodal approach in this case is 32%.

Conclusion

In conclusion, we proposed a simple algorithm to determine the benefit of bimodal propulsion for interplanetary missions. Using an analytical expression of payload mass makes it possible to obtain the optimal fuel repartition between high and

low-thrust maneuvers. The next step could be to pursue this study for a two-burn case, with a circularization around Mars.

Список використаних джерел

1. Харитонов О.М. Дослідження ефективності комбінації дуг високої та низької тяги для міжпланетних перельотів / О. М. Харитонов // Вісник Київського національного університету. (ISSN 1728-3817). – 2011. – 26. – С. 27-31.
2. Borowski S. K. Nasa Technical Report TM-1998-208834 “*Vehicle and Mission Design Options for Humans Exploration of Mars/Phobos Using “Bimodal” NTR and LANTR Propulsion*”/ S. K. Borowski, L. A. Dudzinski – 1998. – Available from : [tps://ntrs.nasa.gov/](https://ntrs.nasa.gov/)
3. Beletsky V. Essays in the Motion of Celestial Bodies / V. Beletsky. – 2001.– Available from: <http://www.springer.com/>

References

1. KHARYTONOV, A. (2011) The investigation of the efficiency of the combination of high-and-low thrust arcs for interplanetary transfers. *Vysnyk of Taras Shevchenko University of Kyiv* (ISSN 1728-3817).
2. BOROWSKI, S. & DUDZINSKI, L. (1998) NASA Technical Report TM-1998-208834: *Vehicle and Mission Design Options for Humans Exploration of Mars/Phobos Using “Bimodal” NTR and LANTR Propulsion*. Available from : [tps://ntrs.nasa.gov/](https://ntrs.nasa.gov/)
3. BELETSKY, V. (2001) Essays in the Motion of Celestial Bodies. Available from: <http://www.springer.com/>

Надійшла до редколегії 01.07.19

УДК 519.9

Киричок І.Ф.¹, д.ф.-м.н., пров. наук. співр.
Жук Я.О.², д.ф.-м.н., проф.
Чернюшок О.А.³, к.т.н., доц.
Тарасов А.П.², аспірант

Постановка задачі термомеханіки для гнучкої циліндричної оболонки з п'єзоактивними шарами при врахуванні зсувів

¹ Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН
України, 03057, м. Київ, вул. П. Нестерова, 3

² Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4е,
e-mail: angrybeaver315@gmail.com, y.zhuk@i.ua

³ Національний університет харчових техно-
логій, вул.Володимирська, 68, 01601, Київ
Україна; e-mail: chernyshokolga@ukr.net.

I.F. Kirichok¹, Dr.Sci.
Y.A. Zhuk², Dr.Sci., Prof.
O.A. Chenyshok³, Phd., ass. Prof.
A.P. Tarasov², PhD. Student

Formulation of the problem of thermomechanics for a flexible cylindrical shell with piezoactive layers with taking into account to displacements

¹ S.P.Timoshenko Institute of Mechanics National
Academy of Sciences of Ukraine, 3, P. Nesterov str.,
Kyiv 03057

² Taras Shevchenko National University of Kyiv, 4e,
Glushkov ave., Kyiv 03680 e-mail:
angrybeaver315@gmail.com, y.zhuk@i.ua

³ National University of Food Technology 68
Volodymyrska St., 01601, Kyiv
e-mail: chernyshokolga@ukr.net.

Сформульовано постановку задачі про осесиметричні коливання і дисипативний розігрів гнучкої тришарової циліндричної кругової оболонки, середній шар якої є електрично пасивним, а зовнішні шари виготовлені з п'єзоелектричного матеріалу. При цьому для описання стаціонарних коливань оболонки використовується концепція комплексних модулів. Розглянуто випадки як ізотропного, так і трансверсально ізотропного в'язкопружного матеріалу середнього шару. Виведено фізичні, геометричні рівняння та рівняння руху. Отримано розв'язувальну систему рівнянь відносно комплексних амплітуд і розроблено методику числового розв'язування задачі.

Ключові слова: циліндрична оболонка, резонансні коливання, дисипативний розігрів, п'єзоелектричні сенсори.

The formulation of problem on the forced resonant vibration and dissipative heating of layered element of structure containing both piezoelectric and electrically passive layers is considered. The improved problem statement taking account of both shear strain and rotatory inertia as well as geometrical nonlinearity is developed. Particular statement of the problem of axisymmetric vibration and dissipative heating of three layer cylindrical shell is formulated. It is assumed that the core layer of the shell is composed of the electrically passive material while the outer layers are manufactured from the piezoceramics. Theory of coupled thermo-electro-viscoelasticity is used to derive the problem statement in the case of monoharmonic loading. Within this theory, the concept of complex-value modulae is applied to formulate the relations between main field characteristics. It is also supposed that the piezo-active material characteristics do not depend on the temperature. Then the coupled problem is reduced to the problem of mechanics on the forced nonlinear vibrations and dissipative heating of the layered plate. Complete set of complex analogs of motion equations, geometric equations and constitutive relations was used to derive the resolving system of equations. Numerical method to attack this nonlinear system of ordinary differential equations supplemented with necessary boundary conditions is developed

Key words: cylindrical shell, resonated vibration, dissipative heating, piezoelectric sensors

Статтю представив акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Перестюк М.О.

1. Вступ

Для зниження рівня амплітуд коливань тонкостінних елементів конструкцій (балок, пластин і оболонок) широко використовують розподілені

актуатори і сенсори, які, як правило, виготовляють з п'єзоактивних матеріалів. Для активного гасіння вимушених коливань широко використовується спосіб нанесення на зовнішні поверхні

© І.Ф. Киричок, Я.О. Жук, О.А. Чернюшок,
А.П. Тарасов 2019

тонкостінного елемента п'єзоелектричних шарів, до електродів яких подається різниця електричних потенціалів відповідної амплітуди і фази, для нейтралізації дії механічного збудження. Через те, що у багатьох випадках тонкостінні елементи з п'єзоелектричними включеннями знаходяться під дією інтенсивних циклічних навантажень (які зумовлюють високий рівень механічних напружень, прогинів та дисипативного розігріву), необхідно враховувати ефекти фізичної і геометричної нелінійностей, а також їх вплив на термомеханічний стан конструкції. Побудова електромеханічних моделей динамічної поведінки тонкостінних шаруватих елементів із в'язкопружних пасивних і п'єзоактивних матеріалів, що враховують фізичну і геометричну нелінійність містяться у працях [1,3,4].

У цій статті в рамках уточненої теорії оболонок С.П.Тимошенка проводиться постановка задачі про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів шарнірно закріпленої циліндричної оболонки з п'єзоелектричним сенсором.

2. Постановка задачі. Основні рівняння

Розглянемо тришарову циліндричну оболонку довжиною l , віднесено до ортогональної системи координат α, θ, z координатою $z = 0$ на середині внутрішнього шару радіуса R і товщини h_0 . Внутрішній шар виготовлено із пасивного трансверсально-ізотропного матеріалу, а зовнішні товщиною h_1 - із поляризованої по товщині в протилежних напрямках п'єзокераміки. Матеріали шарів вважаємо в'язкопружними, властивості яких залежать від температури. Поляризація верхнього ($z \geq h_0/2$) і нижнього ($z \leq h_0/2$) п'єзошарів характеризуються значеннями п'єзомодулів $+d_{31}$ і $-d_{31}$ відповідно. Поверхні, що контактують з пасивним шаром, покриті суцільними нескінченно тонкими електродами, на яких задано електричний потенціал $\varphi(\pm h_0/2) = 0$. Поверхні $z = \pm(h_0/2 + h_1)$ електродовані на ділянці $s^\pm = 2\pi R \Delta_\alpha$ ($\Delta_\alpha = \alpha_1 + \alpha_0$) та неелектродовані поза $s^\pm$, де виконуються такі електростатичні граничні умови:

$$\begin{aligned} \iint_{s^\pm} D_z^\pm dz &= 0 (\alpha_0 < \alpha \leq \alpha_1; \\ D_z^\pm &= 0 (0 \leq \alpha < \alpha_0, \alpha_1 < \alpha \leq l) \end{aligned} \quad (1)$$

де $D_z^\pm$ нормальна складова електричної індукції в п'єзоелектричних шарах. Оболонка навантажена осесиметричним поверхневим тиском

$q_z = q_z(\alpha) \cos \omega t$, що змінюється за часом t з амплітудою q'_z і круговою частотою ω , яка близька до резонансної. В результаті гармонічного деформування на розімкнутих електродах сенсора $s^\pm$ виникають електричні потенціали $\pm V_s$, амплітудні значення яких розраховуються або визначаються експериментально. Приймаємо, що торці оболонки вільні в тангенціальному і шарнірно закріплені в поперечному напрямках, а на її граничних поверхнях виконуються умови конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем температури T_c .

При математичному моделюванні поставленої задачі приймаємо, що по всьому пакету шарів виконуються гіпотези С.П. Тимошенка для механічних величин. Відносно електричних змінних допускаємо, що складовими D_α, D_θ вектора електричної індукції в п'єзошарах можна знехтувати, а складові вектора електричної напруженості E_α, E_θ знаходяться із визначальних рівнянь $D_\alpha = 0, D_\theta = 0$. При цьому, із рівнянь електростатики випливає, що нормальна складова $D_z = \text{const}$ в п'єзошарах не залежать від товщинної координати [1]. В'язкопружні властивості матеріалів описуються концепцією комплексних модулів [1,3], складові яких залежать від температури. Температуру дисипативного розігріву оболонки вважаємо постійною по товщині пакету шарів.

З використанням методології [1,4] та прийнятих припущень задача про вимушені коливання і вібророзігрів оболонки, що розглядається, відносно шуканих комплексних величин зводиться до розв'язку:

рівнянь гармонічних коливань (множник $e^{i\omega t}$ опускаємо)

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} + \rho_\bullet \omega^2 u &= 0, \\ \frac{\partial Q_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{N_\theta}{R} + \rho_\bullet \omega^2 + q_z &= 0, \\ \frac{\partial M_\alpha}{\partial \alpha} - Q_\alpha + \rho_\bullet \omega^2 \psi_\alpha &= 0; \end{aligned} \quad (2)$$

визначальних співвідношень для зусиль і моментів

$$\begin{aligned} N_\alpha &= C_{11} \varepsilon_\alpha + C_{12} \varepsilon_\theta, \\ N_\theta &= C_{12} \varepsilon_\alpha + C_{11} \varepsilon_\theta, \\ Q_\alpha &= k_s C_{44} \varepsilon_{\alpha z}, \\ M_\alpha &= D_{11} \kappa_\alpha + M_E, \\ M_\theta &= D_{12} \kappa_\alpha + M_E; \end{aligned} \quad (3)$$

залежностей між амплітудними значеннями де-
формацій і переміщень

$$\begin{aligned}\varepsilon_\alpha &= \frac{du}{d\alpha}, \varepsilon_\theta = \frac{w}{R}, \kappa_\alpha = \frac{d\psi_\alpha}{d\alpha}, \\ \vartheta_\alpha &= -\frac{dw}{d\alpha}, \varepsilon_{\alpha z} = \psi_\alpha - \vartheta_\alpha;\end{aligned}\quad (4)$$

виразів для електричної індукції в п'зошарах

$$\begin{aligned}{}^\pm D_z &= -b_{33} \frac{V_a}{h_1} \pm b_{31} (\varepsilon \mp \bar{h}_{13} \kappa_\alpha) \\ (z &\leq -h_0/2, z \geq h_0/2)\end{aligned}\quad (5)$$

усередненого за період коливань і по товщині
оболонки рівняння теплопровідності

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} - \frac{2\alpha_s}{\lambda H} (T - T_c) + \frac{\omega}{2\lambda H} \langle W \rangle \quad (6)$$

З дисипативною функцією

$$\begin{aligned}\langle W \rangle &= N_\alpha'' \varepsilon_\alpha' - N_\alpha' \varepsilon_\alpha'' + N_\theta'' \varepsilon_\theta' - N_\theta' \varepsilon_\theta'' + \\ &+ M_\alpha'' \kappa_\alpha' - M_\alpha' \kappa_\alpha'' + Q_\alpha'' \varepsilon_{\alpha z}' - Q_\alpha' \varepsilon_{\alpha z}''.\end{aligned}\quad (7)$$

Механічні граничні умови такі:

$$N_\alpha = 0; w = 0; M_\alpha = 0 (\alpha = 0, l) \quad (8)$$

Граничні і початкові умови для рівнянь теплоп-
ровідності мають вигляд

$$\begin{aligned}\lambda \frac{\partial T}{\partial \alpha} &= \pm \alpha_{0,l} (T - T_c), (\alpha = 0, l), \\ T &= T_0, (t = 0).\end{aligned}\quad (9)$$

Обумовлена гармонічним деформуванням
оболонки амплітуда електричних потенціалів на
розімкнутих електродах сенсора на основі
розв'язку задачі (2) - (9) і першої граничної умо-
ви (1) обчислюється за формулою

$$\frac{V_s}{h_1} = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} b_{31} (\varepsilon + \ddot{h}_{13} \kappa_\alpha) d\alpha / \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} b_{33} d\alpha \quad (10)$$

У співвідношеннях (2) -(10) введені наступні по-
значення:

$$\begin{aligned}C_{1n} &= c_{1n} h_0 + (c_{1n}^E + \gamma_{33}) h_1; \\ C_{44} &= G_{\alpha z} h_0 + 2c_{44}^E h_1; \\ D_{1n} &= (c_{1n} h_0^3 + 2(c_{1n}^E + \gamma_{33}) \bar{h}_{13}) / 12; \\ c_{11} &= E / (1 - \nu^2); c_{12} = \nu c_{11}; \\ c_{11}^E &= 1 / [s_{11}^E (1 - \nu_E^2)]; c_{12}^E = \nu_E c_{11}^E;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nu_E &= -s_{12}^E / s_{11}^E; c_{44}^E = 1 / (s_{44}^E - d_{15}^2 / \varepsilon_{11}^T); \\ b_{31} &= d_{31} / [s_{11}^E (1 - \nu_E)]; b_{33} = \varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2); \\ k_p^2 &= 2d_{31}^2 / [\varepsilon_{33}^T s_{11}^E (1 - \nu_E)]; \gamma_{33} = b_{31}^2 / b_{33};\end{aligned}\quad (11)$$

$$\begin{aligned}\rho_\bullet &= 2\rho_1 h_1 + \rho_0 h_0; \\ \rho_{\bullet\bullet} &= (2\rho_1 \bar{h}_{13} + \rho_\bullet h_0^3) / 12; \\ \bar{h}_{13} &= 4h_1^3 + 6h_1 h_0^2 + 3h_1 h_0^3; \bar{h}_1 = (h_0 + h_1) / 2; \\ H &= 2h_1 + h_0; \varepsilon = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\theta; \\ s_{kk}^E &= s_{kk}' (1 - i\delta_{kk}^s), d_{ik} = d_{ik}' (1 - i\delta_{ik}^d), \\ \varepsilon_{kk}^T &= \varepsilon_{kk}' (1 - i\delta_{kk}^e) - \text{залежні від температури ком-} \\ &\text{плексні податливості, п'єзомодулі і діелектричні} \\ &\text{проникливості п'єзокераміки; } E = E' + iE'', \\ G_{\alpha z} &= G_{\alpha z}' + iG_{\alpha z}'', \nu = \text{const} - \text{модулі Юнга і попе-} \\ &\text{речного зсуву та коефіцієнт Пуасона пасивного} \\ &\text{матеріалу; } k_s - \text{коефіцієнт поперечного зсуву,} \\ w &= w' + iw'', u = u' + iu'', \psi_\alpha = \psi_\alpha' + i\psi_\alpha'' - \text{амплі-} \\ &\text{туди прогинів, поздовжніх переміщень і кута} \\ &\text{повороту нормального елемента; } N_\alpha, N_\theta, Q_\alpha \text{ і} \\ M_\alpha, M_\theta &- \text{амплітуди зусиль і згинаючих момен-} \\ &\text{тів; } \rho_0, \rho_1 - \text{питомі густини пасивного і} \\ &\text{п'єзоактивного матеріалів; } \lambda, a - \text{усереднені ко-} \\ &\text{ефіцієнти тепло- і температуропровідності; } \\ \alpha_s &= (\alpha_+ + \alpha_-) / 2; \alpha_\pm, \alpha_{0,l} - \text{коефіцієнти теплоо-} \\ &\text{бміну на відповідних поверхнях і торцях оболо-} \\ &\text{нки; } T_0 - \text{початкова температура оболонки.}\end{aligned}$$

Використовуючи концепцію комплексних
модулів для наведених вище рівнянь і шуканих
величин, розв'язок будемо у вигляді

$$\begin{aligned}w &= w^0 + w^1 \cos \omega t - w'' \sin \omega t, \\ \psi_\alpha &= \psi_\alpha^0 + \psi_\alpha^1 \cos \omega t - \psi_\alpha'' \sin \omega t, \\ u &= u^0 + u^1 \cos \omega t - u'' \sin \omega t + \\ &+ u^2 \cos 2\omega t - u'' \sin 2\omega t, \\ N_\alpha &= N_\alpha^0 + N_\alpha^1 \cos \omega t - N_\alpha'' \sin \omega t + \\ &+ N_\alpha^2 \cos 2\omega t - N_\alpha'' \sin 2\omega t, \\ M_\alpha &= M_\alpha^0 + M_\alpha^1 \cos \omega t - M_\alpha'' \sin \omega t, \\ Q_\alpha^* &= Q_\alpha^{*0} + Q_\alpha^{*1} \cos \omega t - Q_\alpha^{*''} \sin \omega t.\end{aligned}\quad (12)$$

Підставляючи (12) в розв'язувальну систему
рівнянь, використовуючи комплексні податливо-
сті отримаємо систему диференціальних рівнянь
нормальної форми

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} &= -\rho_\bullet \omega^2 w; \\ \frac{\partial M_\alpha}{\partial \alpha} &= Q_x - \rho_\bullet \omega^2 \psi_\alpha; \\ \frac{\partial Q_\alpha}{\partial \alpha} &= \frac{v_c}{R} N_\alpha + \frac{\tilde{C}_{11}}{R^2} w - q_z - \rho_\bullet \omega^2 w; \\ \frac{du}{d\alpha} &= J_c N_\alpha - \frac{v_c}{R} w; \\ \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \alpha} &= J_D M_\alpha; \\ \frac{\partial w}{\partial \alpha} &= -\psi_\alpha + J_{SD} Q_\alpha;\end{aligned}\quad (13)$$

де $J_c = 1/C_{11}$, $J_D = 1/D_{11}$, $v_c = C_{12}/C_{11}$,
 $\tilde{C}_{11} = C(1 - \nu^2)$, $J_{SD} = 1/(k_s C_{44})$.

Систему рівнянь (13) з граничними умовами (8) розділяємо на дійсну і уявну частини і на кожному кроці за часом інтегруємо її з використанням типової програми розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь.

На першому кроці розв'язується лінійна задача при ізотермічних властивостях матеріалів. Потім обчислюємо дисипативну функцію (7) і розв'язуємо задачу теплопровідності (6), (9) методом кінцевих різниць з використанням явної схеми. Далі з урахуванням розподілу температури обчислюємо жорсткісні характеристики (11) і процес повторюємо на наступному кроці за часом. При реалізації такої методології використовуються безрозмірні просторова $x = \alpha/l$ і часова $\tau = at/l^2$ координати та параметри $\gamma_s = \alpha_{\pm,0,l}l/\lambda$ при $v_E = \text{const}$.

3. Висновки

Наведено постановку задачі про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів шарнірно опертої в'язкопружної циліндричної оболонки з п'єзоелектричними сенсорами при осесиметричному моногармонічному навантаженні та врахуванні деформації поперечного зсуву. Виведено фізичні, геометричні рівняння та рівняння руху. Отримано розв'язувальну систему рівнянь.

Список використаних джерел

1. Карнаухов В. Г. Связные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек / В. Г. Карнаухов, И. Ф. Киричок – Киев: Наук. думка, 1986. – 222с.
2. Карнаухов В. Г. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении / В. Г. Карнаухов, В. В. Михайленко – Житомир: ЖГТУ, 2005 – 248с.
3. Киричок І. Ф. Радіальні коливання і вібророзігрів замкнутої сферичної оболонки з фізично нелінійного в'язкопружного матеріалу та їх демпфування п'єзоелектричним сенсором і актуатором / І. Ф. Киричок, Я. О. Жук, Т. В. Карнаухова // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Серія: Фізико – математичні науки. – 2016. – 1. – С.59-64.
4. Kirichok I. F. Control of axisymmetric resonant vibrations and self-heating of shells of revolution with piezoelectric sensors and actuators / I. F. Kirichok // Int. Appl. Mech. – 2011. – 46, 8. – pp 890 – 901.

References

1. KARNAUHOV V., KIRICHOK I. (1986) *Svyazannye zadachy teoryy vyazkouprugih plastin i obolochek*. Kiev: Nauk. dumka.
2. KARNAUHOV V., MYHAJLENKO V. (2005) *Nelyneynaya termomekhanika piezoelektrycheskyh neuprugyh tel pry monogarmonycheskom nagruzenii*. Zhytomyr: ZhGTU.
3. KIRICHOK, I. & ZHUK, Y. & KARNAUHOVA T. (2016) Radialni kolyvannya i vibrorozigriv zamknutoyi sferychnoyi obolonky z fizychno nelinejnogo v'язkopruzhnogo materialu ta yih dempfuvannya p'yezoelektrychnymy sensorom i aktuatom. *Visnyk Kyivs'kogo nacional'nogo universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Seriya: Fyzyko-matematychni nauky*. 1. p.59–64.
4. KIRICHOK I. F. (2011) Control of axisymmetric resonant vibrations and self-heating of shells of revolution with piezoelectric sensors and actuators. *Int. Appl. Mech.* – 46(8). pp. 890–901.

Надійшла до редколегії 01.06.19

УДК 539.376

Кобзар Ю.М.¹, к.ф.-м.н., с.н.с.

**Втомна довговічність гладких
циліндричних стрижнів при
одновісному симетричному розтягу-
стиску**

¹ Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН
України, 03057, м. Київ, вул. Нестерова 3,
e-mail: creep@inmech.kiev.ua

Ju.M.Kobzar¹, к.ф.-м.н., с.н.с.

**Fatigue durability of smooth cylindrical
rods under uniaxial symmetric stretch –
compression**

¹ S.P. Timoshenko Institute of Mechanics NAS
Ukraine, 03057, Kyiv, 3 Nesterov Str.,
e-mail: creep@inmech.kiev.ua

Запропонована модель втоми, в основу якої покладено зменшення несучої маси речовини на пів циклові стиску та збільшення її щільності на пів циклові розтягу. Середнє напруження та об'ємна деформація зв'язані лінійною залежністю Гука. В залежності від початкових фізико-механічних властивостей стрижня, контролюються його структурні зміни, які кількісно відображають зміни маси, щільності, напружень, модуля пружності, обчислення яких відбувається на кожному циклі. В залежності від прийнятої бази випробовувань стрижня умовою його крихкого руйнування на якомусь циклі прийнято момент досягнення нерівності отриманої з балансу потенційних енергій пружної та викликаної дією зовнішньої сили. Критерієм досягнення межі втоми є не виконання нерівності за межею прийнятої бази випробовувань. Алгоритм моделі реалізовано в програмному середовищі комп'ютерної алгебри. Отримані розрахункові значення кривої відрізняються від кривої втоми даного жаростійкого сплаву в допустимих межах. Відмінності які присутні при малих значеннях початкових напружень можна пояснити зменшенням швидкості навантаження, а значить збільшенням впливу пластичної складової.

Ключові слова: симетричний розтяг-стиск, модель втоми, межа втоми, енергетичний критерій руйнування при втомі

The paper proposes a model of fatigue, that is based on the reduction of the carrier mass of the substance at half-cycle compression and its density increase by half-cycle stretching. High tension and volume deformation are linearly related by Hooke's law. Mass and density changes and stress changes depending on the elastic properties of the rod, its initial mass, density and volume are received analytically for each cycle. The model usage limit is a cycle in which amplitude values stress reaches the elastic limit. The proposed model algorithm is implemented in software environment with which the destruction is determined fatigue limit and fatigue. The resulting design value curve is different from the curve of fatigue of gray iron that was investigated. This is due to the fact that scattering of the applied energy on internal friction and heating is not included in the model.

Key words: symmetric tension-compression, fatigue model, fatigue limit, fatigue failure energy criterion.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Моделі багатоциклової втоми, що прогнозують число циклів до руйнування у випадку симетричного навантаження, невідомі. Більш вивчені дії асиметричних навантажень. В умовах асиметричних навантажень число циклів до руйнування і межу втоми знайдено в залежності від даних симетричного циклу та межі міцності [1]. Встановлено методи визначення еквіва-

лентних напружень, які дозволили обчислювати втомну довговічність. Подібні підходи розвинуто на випадок дії двовісного комбінованого навантаження з статичною та циклічною компонентами [2].

В даній роботі, запропонована модель багато циклової втоми стрижня під дією м'якого симетричного навантаження в вигляді розтягу-

стиску, коли початкові амплітудні напруження менше межі пропорційності. В рамках моделі досліджується крихке руйнування матеріалів, в припущенні, що змінюється несучий об'єм зразка і не враховуються малі зміни форми. Визначаються на кожному пів циклі структурні зміни, які спричиняють зміни маси, щільності, напруження, модуля пружності. Прийнято, що втомне руйнування стержня відбулося на такому пів циклі, на якому справджується нерівність, яка характеризує процес. Нерівність отримана з умови балансу пружної енергії стержня та потенційної енергії яка виникає під дією зовнішнього навантаження. В разі досягнення межі втоми, умовна база випробувань перевищується без руйнування, розрахунки припиняються. Така модель запропонована раніше, але умова балансу енергій в ній не враховувалась [3].

Нехай на ізотропний стрижень з коефіцієнтом Пуасона μ , межею міцності σ_s і початковими – модулем пружності E_1 , масою m_1 , щільністю ρ_1 , довжиною l_1 , площею перетину F_1 , діє симетричне періодичне розтягуюче-стискуjące навантаження P_i , з амплітудним значенням $P_a = const$. Напруження $\sigma_1 = P_a / F_1$ менше межі σ_{mi} пропорційності. Кількість циклів умовної бази випробувань - $N_0 = 10 \cdot 10^6$. Циклічні напруження

$$\sigma_j(i) = \sigma_{aj}(i) \sin \omega t, \quad (1)$$

де $\sigma_{aj}(i) = P_a / F_{aj}(i)$; $F_{aj}(i)$ - амплітудне значення поперечного перетину стрижня, що виникають в стрижні з початковим об'ємом $V_1 = m_1 / \rho_1$ викликають на кожному i -тому циклі стиск в першому $j=1$ та розтяг в другому $j=2$ пів циклах.

Пружна енергія, що накопичується в стрижні з амплітудною пружною енергією одиниці об'єму $W_1 = \sigma_{xal}^2 / (2E_1)$ при розтязі-стискові буде

$$U = W_1 V_1 = \frac{\sigma_{xal}^2}{2E_1} \frac{m_1}{\rho_1}. \quad (2)$$

Повна енергія дорівнює частині зовнішньої гармонічно прикладеної сили з частотою ω на найбільше зміщення і в такі моменти рівна найбільшому значенню потенційної енергії

$$U = \frac{P_{xal}^2}{2m_1\omega^2}. \quad (3)$$

Ці енергії в моменти найбільших зміщень рівні між собою

$$U = \frac{P_{xal}^2}{2m_1\omega^2} = \frac{\sigma_{xal}^2}{2E_1} \frac{m_1}{\rho_1}. \quad (4)$$

З балансу енергій (4), знаходимо частину P_{xal} зовнішньої гармонічно прикладеної сили P_a яка надає пружну енергію стрижню

$$P_{xal} = \frac{\sigma_{xal} m_1 \omega}{\sqrt{E_1 \rho_1}} = \frac{P_a}{k}. \quad (5)$$

Так як $P_a > P_{xal}$, то справедливі нерівності

$$\frac{P_a^2}{m_1\omega^2} > \frac{P_{xal}^2}{m_j(i)\omega^2} = \frac{\sigma_{xaj}(i)^2}{E_j(i)} \frac{m_j(i)}{\rho_j(i)}. \quad (6)$$

на i -тому циклі j -того пів циклу і цей цикл N є межею втоми при початковій напрузі σ_1 та навантаженню P_a .

Критерієм крихкого руйнування прийнято виконання нерівності

$$\frac{P_a^2}{m_1\omega^2} - \frac{\sigma_{xaj}(i)^2}{E_j(i)} \frac{m_j(i)}{\rho_j(i)} < 0, \quad (7)$$

на i -тому циклі j -того пів циклу і цей цикл $i = N_a = N_0$ є межею довготривалої міцності при початковій напрузі σ_1 або навантаженню P_a .

Критерієм досягнення межі втоми є не виконання нерівності (7) для, тобто за межею прийнятої бази випробувань N_0 . Об'ємна деформація $\varepsilon_{vj}(i)$ та поздовжня лінійна деформація $\varepsilon_{xj}(i)$ повзучості зв'язані співвідношенням

$$\varepsilon_{vj}(i) = (1 - 2\mu)\varepsilon_{xj}(i). \quad (8)$$

Розглянемо рекурентний процес накопичення втоми на довільному i -тому циклі. В першому пів циклі $j=1$ при стискові для щільності покладено

$$\rho_2(i-1) = \rho_1(i), \quad (9)$$

для маси виконується

$$m_1(i-1) = m_2(i-1). \quad (10)$$

Стан стрижня на цьому і попередньому пів циклах зв'язують рівності

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\rho_2(i-1)V_2(i-1)}{m_2(i-1)} = \frac{\rho_1(i)V_1(i)}{m_1(i)} = \\ &= \frac{\rho_1(i)(V_2(i-1) - \Delta V_1(i))}{m_1(i)}. \end{aligned} \quad (11)$$

З допомогою рівнянь (11) залежність між напруженнями $\sigma_{xal}(i)$ та $\sigma_{xal}(i-1)$ буде

$$\sigma_{xa1}(i) = \left(\frac{m_2(i-1)}{m_1(i)} \left(1 + \frac{1}{1-2\mu} \right) - \frac{1}{1-2\mu} \right) \sigma_{xa2}(i-1) \quad (12)$$

де $m_1(i)$ - невідома маса. Після серії перетворень, з допомогою рівнянь (11), залежності середнього напруження $\sigma_{cep1}(i)$ від лінійного напруження $\sigma_{xa2}(i-1)$, модуля пружності $E_2(i-1)$, об'ємного модуля $K_2(i-1)$ та мас цього та попереднього циклу, будуть

$$\sigma_{cep1}(i) = \frac{1}{3} \left(\left(1 - \frac{4\mu G_2(i-1)}{E_2(i-1)} \right) * \left(\frac{m_2(i-1)}{m_1(i)} \left(1 + \frac{1}{1-2\mu} \right) - \frac{1}{1-2\mu} \right) \sigma_{xa2}(i-1) + 2\lambda_2(i-1) \left(1 - \frac{m_1(i)}{m_2(i-1)} \right) \right) \quad (13)$$

та

$$\sigma_{cep1}(i) = K_2(i-1) \left(1 - \frac{m_1(i)}{m_2(i-1)} \right). \quad (14)$$

Виключив з рівнянь (13) та (14) середнє напруження отримуємо рівняння

$$E_2(i-1) \left(\frac{m_1(i)}{m_2(i-1)} \right)^2 - (E_2(i-1) + \sigma_{xa2}(i-1)) * \frac{m_1(i)}{m_2(i-1)} + 2(1-\mu)\sigma_{xa2}(i-1) = 0, \quad (15)$$

з якого знаходиться відношення мас $m_1(i)/m_1(i-1)$, яке дозволяє з (12) визначити амплітудне напруження $\sigma_{xa1}(i)$. З балансу енергії

$$U = \frac{P_{xa1}^2}{m_1(i)\omega^2} = \frac{(\sigma_{xa1}(i))^2}{E_1(i)} \frac{m_1(i)}{\rho_j(i)}. \quad (16)$$

враховуючи (10) визначається новий модуль пружності $E_1(i)$. Знайдені на цьому пів циклі маса $m_1(i)$, напруження $\sigma_{xa1}(i)$, модуль пружності $E_1(i)$ є початковими даними для наступного циклу. Перевіряється виконання нерівності (7), в разі виконання, руйнування відбулося і обчислення припиняються.

В другому пів циклі $j=1$ при розтягові прийнято, що маса не змінюється

$$m_1(i) = m_2(i), \quad (17)$$

а для щільності виконується рівність

$$\rho_1(i) = \rho_2(i-1). \quad (18)$$

Стан стрижня на цьому та попередньому пів циклах зв'язують рівності

$$1 = \frac{\rho_1(i)V_1(i)}{m_1(i)} = \frac{\rho_2(i)V_2(i)}{m_2(i)} = \frac{\rho_2(i)(V_1(i) - \Delta V_2(i))}{m_1(i)}. \quad (19)$$

З допомогою рівнянь (19) залежність між напруженнями $\sigma_{xa1}(i)$ та $\sigma_{xa2}(i-1)$ буде

$$\sigma_{xa2}(i) = \left(\frac{\rho_2(i)}{\rho_2(i-1)} \left(1 + \frac{1}{1-2\mu} \right) - \frac{1}{1-2\mu} \right) \sigma_{xa1}(i), \quad (20)$$

де $\rho_2(i)$ - невідома щільність. Після серії перетворень, з допомогою рівнянь (19), залежності середнього напруження $\sigma_{cep2}(i)$ від лінійного напруження $\sigma_{xa1}(i)$, модуля пружності $E_1(i)$, об'ємного модуля $K_1(i)$ та щільності цього та попереднього циклу, будуть

$$\sigma_{cep2}(i) = \frac{1}{3} \left(\left(1 - \frac{4\mu G_1(i)}{E_1(i)} \right) * \left(\frac{\rho_2(i)}{\rho_2(i-1)} \left(1 + \frac{1}{1-2\mu} \right) - \frac{1}{1-2\mu} \right) \sigma_{xa1}(i) + 2\lambda_1(i) \left(1 - \frac{\rho_2(i-1)}{\rho_2(i)} \right) \right) \quad (21)$$

та

$$\sigma_{cep2}(i) = K_1(i) \left(1 - \frac{\rho_2(i-1)}{\rho_2(i)} \right). \quad (22)$$

Виключив з рівнянь (21) та (22) середнє напруження отримуємо рівняння

$$2(1-\mu)\sigma_{xa1}(i) \left(\frac{\rho_2(i)}{\rho_2(i-1)} \right)^2 - (E_1(i) + \sigma_{xa1}(i)) \frac{\rho_2(i)}{\rho_2(i-1)} + E_1(i) = 0. \quad (23)$$

З нього знаходиться відношення щільностей $\rho_2(i)/\rho_2(i-1)$, яке дозволяє з (20) визначити амплітудне напруження $\sigma_{xa2}(i)$. Знайдені на цьому пів циклі маса $m_1(i)$, напруження $\sigma_{xa1}(i)$ є початковими даними для наступного циклу. Перевіряється виконання нерівності (7) в разі виконання, руйнування стрижня відбулося і обчислення припиняються.

Апробація моделі відбулася на прикладі розрахунку кривої втоми стрижня при різних

рівнях прикладених циклічних навантажень з частотою 30 гц. Стрижень має форму циліндричного прутка діаметром 7,5 мм, виготовлений з жаростійкого нікелевого сплаву ЭИ 867 [2]. Фізико-механічні характеристики матеріалу стрижня наступні:

$\sigma_B = 1200 \text{ МПа}$, $\mu = 0,294$, $E_1 = 2,28 \cdot 10^{11} \text{ МПа}$,
 $m_1 = 0,151367625 \text{ кг}$, $\rho_1 = 8570 \text{ кг/м}$, $l_1 = 0,04 \text{ м}$,
 $F_1 = 0,00004415625 \text{ м}^2$. Розрахункові (лінія) та експериментальні (кружечки) криві Велера приведені на рис. 1.

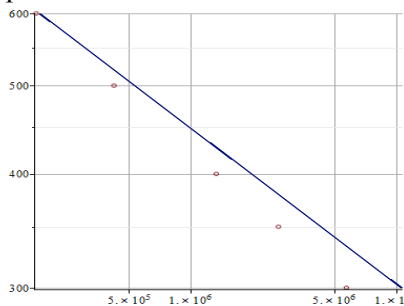


Рис. 1. Криві Велера.

Список використаних джерел

1. Хейвуд Р.Б. Проектирование с учетом усталости / Р.Б. Хейвуд. Под ред. И.Ф.Образцова. – Москва: Машиностроение, 1969. – 504 с.
2. Голуб В.П., Погребняк А.Д. Высоко-температурное разрушение материалов при циклическом нагружении / В.П. Голуб, А.Д. Погребняк.- Киев: Наукова думка, 1994. – 228 с.
3. Кобзарь Ю.М., К оценке усталостной долговечности гладких цилиндрических стержней при одноосном симметричном растяжении сжатии /Ю.М Кобзарь //Авиационно-космическая техника и технология.-2015.-№9(126).- С.6-14.
4. Когаев В.П. Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени / В.П. Когаев. – Москва: Машиностроение, 1977 (Б-ка расчетчика).-232с.

Вперше запропонована модель прогнозу руйнування від втоми, при симетричному циклічному навантаженні стрижня без його лабораторного випробування. Різниця між результатами розрахунків та експериментальними даними цілком прийнятні для практики [4]. Особливостями моделі є по циклове спостереження за структурними змінами в матеріалі стержня, шляхом обчислення змін модуля пружності, маси в першому пів циклі при незмінній щільності, щільності в наступному пів циклі при незмінній масі та напружень.

References

1. HEYVUD R.B. (1969) *Proektirovanie s uchetom ustalosti*. Moskva: Mashinostroenie.
2. GOLUB V.P. & POGREBNIYAK A.D. (1994) *Vysoko-temperaturnoe razrushenie materialov pri tsiklicheskom nagrugenii*. Kiev: Naukova dumka.
3. KOBZAR Yr.M. (2015) К оценке усталостной долговечности гладких цилиндрических стержней при одноосном симметричном растяжении-сжатии. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika*. 9(126). p. 6-14.
4. KOGAEV V.P. (1977) *Rascheti na prochnost pri napryazheniyax, peremennykh vo vremeni*. Moskva: Mashinostroenie.

Надійшла до редколегії 30.09.2019

УДК 539.595

Константинов О.В.¹, к.ф.-м.н.

**Керування резервуаром, частково
заповненим рідиною, на основі
принципу найменшого примусу Гауса
(задача гальмування)**

¹ Інститут математики НАН України, 01601,
м. Київ, вул. Терещенківська, 3
e-mail: akonst.im@ukr.net

O.V. Konstantinov¹, Ph.D. (Physics & Mathematics)

**Control of a reservoir partially filled with
liquid based on Gauss's principle of least
constraint (deceleration task)**

¹ Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 01601,
Kyiv, Tereshchenkivska str., 3
e-mail: akonst.im@ukr.net

Розглянуто задачу побудови керування для забезпечення руху за заданим законом механічної системи "резервуар – рідина з вільною поверхнею". Для побудови керування використовувався принцип найменшого примусу Гауса, який дозволяє мінімізувати керуюче навантаження та реалізувати задані закони програмного руху. Обчислення керування проводилося на основі спрощеної лінійної моделі з двома ступенями вільності. Показано, що для гальмування резервуару при наявності високо інтенсивних навантажень необхідно введення нелінійних програмних законів руху.

Ключові слова: принцип Гауса, програмне керування.

The task of constructing control for the motion of a given reservoir - a liquid with a free surface mechanical system is provided in the presence of constant perturbations - the oscillations of the free surface of the liquid. To construct the control, the principle of the least coaxing of Gauss was used, which allows to minimize the control load and implement the given laws of the software movement. The control calculation was carried out on the basis of a simplified linear model with two degrees of freedom, which allowed the control function to be obtained in analytical form for various software laws (including nonlinear) movement of the reservoir and free surface of the liquid. The tank partially filled with a liquid, which initially moves evenly at a given speed, must be completely stopped at a given time. The control, constructed for the implementation of linear software laws of motion, can be used only to provide "comfortable" movements of the reservoir, that is, in the absence of large disturbances of the free surface of the liquid. In order to ensure the movement of the reservoir in the presence of highly intense loads, it is necessary to introduce nonlinear software motion laws for obtaining and using a nonlinear control law.

Key Words: Gauss's principle, program movement.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Однією із важливих задач при практичному використанні конструкцій, які містять в своєму складі резервуари, частково заповнені рідиною, є забезпечення руху таких конструкцій за заданою програмою при найменших силових (енергетичних) витратах. Така задача може бути розв'язана, зокрема, на основі диференціального варіаційного принципу Гауса – принципу найменшого примусу [1]. В даній роботі побудова керування з використанням принципу найменшого примусу Гауса проводилося на основі спрощеної моделі з двома ступенями вільності. Це дозволило

отримати функцію керування в аналітичному вигляді для різних програмних законів (в тому числі, і нелінійних) руху резервуару та вільною поверхні рідини. А от дослідження динаміки системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» під дією обчисленого керування проводилося на основі нелінійної багатомодової (до 12 форм коливань) дискретної моделі, яка побудована на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського [2]. Дослідження проводилося на основі методу модальної декомпозиції з урахуванням коливань на власних частотах всіх форм.

Дискретна модель механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею»

Розглянемо циліндричний резервуар, частково заповнений рідиною. Резервуар вважаємо абсолютно твердим тілом, яке може рухатись поступально під дією активних зовнішніх сил. Рідину вважаємо ідеальною, нестисливою, однорідною, а її початковий рух безвихровим. Відповідно до методики роботи О.С. Лимарченко [2], математична модель механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» будується на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського. Для його ефективного застосування поставлено задачу ввести у розгляд мінімальну кількість незалежних змінних, що описують рух резервуару з рідиною, тобто фактично будуються розклади шуканих змінних, які задовольняють наперед усі кінематичні граничні умови. Оскільки безвихровий рух ідеальної однорідної нестисливої рідини відповідно до теореми Лагранжа повністю визначається рухом її границь, то збурення вільної поверхні рідини ξ та радіус-вектор $\vec{\varepsilon}(t)$ повністю характеризують рух самої рідини, і тому потенціал швидкостей φ потрібно вважати залежною змінною.

У роботі [2] розроблено метод виключення кінематичних граничних умов на вільній поверхні рідини, який дозволяє отримати дискретну модель механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» мінімальної розмірності. На основі розробленого методу у роботі [2] побудована математична модель, яка дозволяє дослідити поступальні рухи механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» при різних видах кінематичного збурення та динамічного (силового та моментного) збудження. Ця модель представляє собою систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно незалежних параметрів a_i – коефіцієнтів розкладу в ряд збурення вільної поверхні рідини ξ за формами коливань вільної поверхні ψ_i та ε_i – компонент вектора переміщень центру незбуреної вільної поверхні рідини відносно деякої нерухомої системи відліку:

$$\sum_i \ddot{a}_i \left\{ \beta_{ri}^q + \sum_j a_j \gamma_{rij}^q + \sum_{i,j} a_i a_j \delta_{rijk}^q \right\} + \quad (1)$$

$$+ \ddot{\vec{\varepsilon}} \cdot \left\{ \vec{B}_r^1 + \sum_i a_i \vec{B}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{B}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \vec{B}_{rijk}^4 \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j (\gamma_{ijr}^q - 2\gamma_{rij}^q) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k (\delta_{ijk}^q - 2\delta_{rijk}^q) -$$

$$= -\frac{1}{2} g \alpha_r^s - g N_r a_r + \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \left\{ \vec{B}_r^1 + \sum_i a_i (\vec{B}_{ri}^2 - \vec{B}_{ri}^2) + \right.$$

$$+ \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j 2(\vec{B}_{ijr}^3 - \vec{B}_{rij}^3) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k 3(\vec{B}_{ijk}^4 - \vec{B}_{rijk}^4) \left. \right\},$$

$$\rho \left\{ \sum_i \ddot{a}_i \left[\vec{B}_i^1 + \sum_j a_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right] \right\} + (M_F + M_T) \ddot{\vec{\varepsilon}} = \quad (2)$$

$$= \vec{F} - (M_F + M_T) g \vec{k} - \rho \left\{ \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k 2\vec{B}_{ijk}^3 \right\},$$

де ρ – щільність рідини; M_T та M_F – маса резервуару та рідини відповідно; $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ – вектор переміщення резервуару у поступальному русі; $\vec{F}$ – головний вектор зовнішніх сил, які діють на резервуар.

Система (1) – (2) містить $N + 3$ рівнянь (N – кількість форм коливань рідини, що розглядаються) та описує динаміку сумісного руху резервуару та рідини при різних видах кінематичного збурення та динамічного (силового) збудження. Рівняння (1) описують динаміку амплітуд форм коливань вільної поверхні рідини, а рівняння (2) – динаміку резервуару, однак ці рівняння взаємозв'язані та містять сили взаємодії між компонентами механічної системи.

Побудова керування на основі принципу найменшого примусу Гауса

Для побудови керування на основі принципу найменшого примусу Гауса будемо використувати систему рівнянь руху (1) – (2), в якій буде враховано коливання вільної поверхні рідини $\xi(t)$ по першій антисиметричній формі a_1 з можливістю горизонтального переміщення резервуару по горизонтальній координаті ε_y . Введемо позначення для фазових змінних $x_1 = a_1$, $\dot{x}_1 = \dot{a}_1$, $x_3 = \varepsilon_y$, $\dot{x}_4 = \dot{\varepsilon}_y$ та керування $u = F_y$ і запишемо систему (1) – (2) в нормальній формі Коші в узагальненому вигляді

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = f_1(x_1, x_2) + b_1(x_1, x_2)u, \quad (3)$$

$$\dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = f_2(x_1, x_2) + b_2(x_1, x_2)u, \quad (4)$$

де вигляд функцій f_1, f_2, b_1, b_2 залежить від вибору обраної для керування моделі (лінійна або нелінійна до величин відповідного порядку малості).

Відповідно до принципу найменшого примусу Гауса побудуємо керування $u(t)$, яке б забезпечувало програмний рух резервуару з рідиною у напрямку Oy за заданим законом $\dot{\varepsilon}_y = f(t)$, $\varepsilon_y = \int f(t)dt$ за умови мінімізації функціоналу якості $J = \int u^2(t)dt$. Іншими словами, необхідно побудувати таке керування, яке б забезпечило рух системи відповідно до заданої програми із найменшими силовими (енергетичними) витратами.

Припустимо, що необхідно забезпечити реалізацію програмного руху резервуару, якщо переміщення та швидкість резервуару повинна змінюватись за законом $\psi_2(x_3, x_4, t) = 0$, а амплітуда вільної поверхні рідини обмежена законом руху $\psi_1(x_1, x_2, t) = 0$. Отримаємо відповідні похідні за часом від програм руху, щоб можна було їх зв'язати з рівняннями руху резервуару

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \dot{x}_2 = \\ &= \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} (f_1 + b_1 u) \equiv R_1(\psi_1, x, t), \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} \dot{x}_3 + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} \dot{x}_4 = \\ &= \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} x_4 + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} (f_2 + b_2 u) \equiv R_2(\psi_2, x, t). \end{aligned}$$

Отримаємо задачу безумовної мінімізації при наявності двох множників Лагранжа λ_1 та λ_2 для функціоналу якості

$$\begin{aligned} L^* &= u^2 + \lambda_1 \left(\frac{d\psi_1}{dt} - R_1(\psi_1, x, t) \right) + \\ &+ \lambda_2 \left(\frac{d\psi_2}{dt} - R_2(\psi_2, x, t) \right). \end{aligned}$$

Після виконання процедури мінімізації отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 2u + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} b_1 + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} b_2 = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} b_1 u &= R_1(\psi_1, x, t) - \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} f_1, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} b_2 u &= R_2(\psi_2, x, t) - \frac{\partial \psi_2}{\partial t} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} x_4 - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} f_2, \end{aligned}$$

яку за допомогою позначень

$$p_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} b_1, \quad p_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} b_2,$$

$$c_1 = R_1(\psi_1, x, t) - \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} f_1,$$

$$c_2 = R_2(\psi_2, x, t) - \frac{\partial \psi_2}{\partial t} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} x_4 - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4} f_2,$$

можна записати у матричній формі

$$\begin{bmatrix} 2 & p_1 & p_2 \\ p_1 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Програмне керування як розв'язок цієї системи має вигляд

$$u = \frac{p_1 c_1 + p_2 c_2}{p_1^2 + p_2^2}.$$

Оберемо для побудови керування лінійну модель та конкретизуємо вигляд системи рівнянь (3) – (4). Лінеаризована система рівнянь (1) – (2) для першої антисиметричній формі a_1 та горизонтального переміщення резервуару ε_y має вигляд у нормальній формі Коші

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \lambda_1 x_1 + \beta_1 u, \quad (5)$$

$$\dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = \lambda_2 x_1 + \beta_2 u, \quad (6)$$

з відповідними позначеннями для коефіцієнтів $\lambda_1, \lambda_2, \beta_1, \beta_2$.

Якщо швидкість резервуару змінюється за заданим законом $\psi_2(x_4, t) \equiv x_4 - V(t) = 0$, а рідина вважається «затверділою», тобто $\psi_4(x_4, t) \equiv x_1 = 0$, тоді програмне керування має вигляд

$$u = \frac{\beta_2}{\beta_1^2 + \beta_2^2} \dot{V}(t) - \frac{\beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2}{\beta_1^2 + \beta_2^2} x_1. \quad (7)$$

Якщо амплітуда коливань вільної поверхні рідини обмежена $|x_1| \leq A$, тобто існує залежність $\psi_1(x_1, x_2) \equiv x_1 + A \tanh(\mu x_1) = 0$, а швидкість резервуару змінюється за заданим законом $\psi_2(x_4, t) \equiv x_4 - V(t) = 0$, тоді програмне керування має вигляд

$$u = \frac{\beta_2 \dot{V}(t) \cosh^4(\mu x_2)}{A^2 \mu^2 \beta_1^2 + \beta_2^2 \cosh^4(\mu x_2)} - \frac{A^2 \mu^2 \beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2 \cosh^4(\mu x_2)}{A^2 \mu^2 \beta_1^2 + \beta_2^2 \cosh^4(\mu x_2)} x_1 - \frac{A \mu \beta_1 \cosh^2(\mu x_2)}{A^2 \mu^2 \beta_1^2 + \beta_2^2 \cosh^4(\mu x_2)} x_2. \quad (8)$$

Розглянемо круговий циліндричний резервуар з вертикальною поздовжньою віссю Oz , який здійснює поступальні рухи в площині xOy . Резервуар радіусу $R = 1$ м частково заповнений водою до глибини $H = R$, співвідношення мас резервуару M_T та рідини M_F дорівнює $M_T = 0,1 M_F$. Розглянемо випадок, коли необхідно за допомогою керування $u = F_y$ забезпечити гальмування резервуару з рідиною до повної зупинки у двох випадках: за 10 сек, якщо спочатку система рухається рівномірно за швидкістю 5 м/с («комфортний» рух) та за 1 сек, якщо система спочатку рухається зі швидкістю 2 м/с (рух з високо інтенсивними навантаженнями).

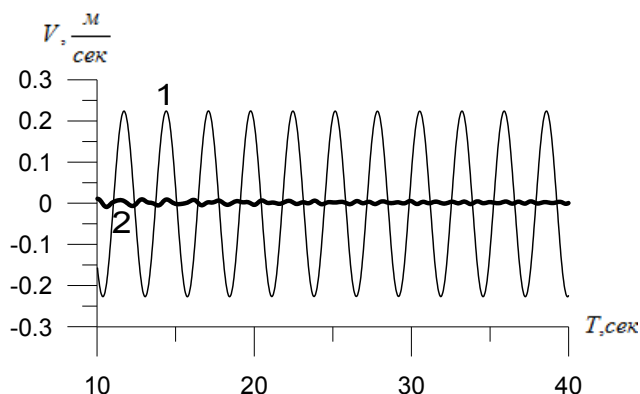


Рис. 1 Зміна швидкості резервуару в режимі «комфортного» руху

На Рис. 1, 2 показані результати моделювання, коли керування рухом забезпечується на основі заданих програм руху (7, графік 1) та (8, графік 2) відповідно. Для моделі (8) в законі програмного

руху вільної поверхні рідини $\psi_1(x_1, x_2) \equiv x_1 + A \tanh(\mu x_1) = 0$ обрані значення параметрів $A = 0,1 R$, $\mu = 2$. Як можна бачити з графіків, тільки нелінійне керування на основі моделі (8) дозволяє забезпечити шуканий програмний рух системи з мінімальними похибками як у випадку «комфортного» руху, так і у випадку високо інтенсивних навантажень на систему.

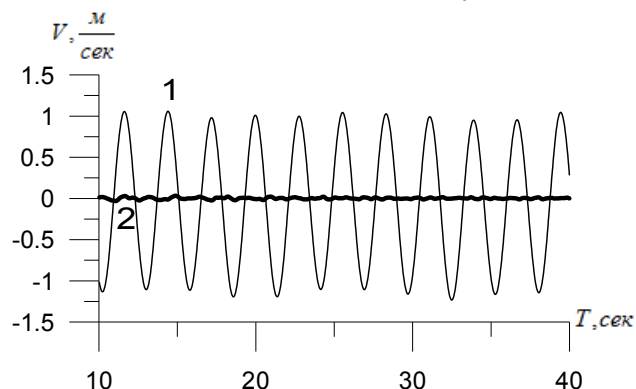


Рис. 2 Зміна швидкості резервуару в режимі високо інтенсивних навантажень

Висновки

Розглянуто задачу побудови керування на основі принципу найменшого примусу Гауса для забезпечення руху резервуару з рідиною за заданим законом. Обчислення керування проводилося на основі спрощеної лінійної моделі з двома ступенями вільності. Керування, побудоване на основі лінійної моделі, може бути використано тільки для забезпечення «комфортних» рухів резервуару, тобто при відсутності великих збурень вільної поверхні рідини. Для забезпечення руху резервуару при наявності високо інтенсивних навантажень необхідно введення нелінійних програмних законів руху для отримання і використання нелінійного закону керування.

Список використаних джерел

1. Галиуллин А.С. Построение систем программного движения. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
2. Лимарченко О.С., Ясинский В.В. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. – Киев: НТТУ «КПИ», 1997. – 338 с.

References

1. HALIULLIN, A. (1987) *Postroenie system programnogo dvigienija*. Moskva: Nauka.
2. LIMARCHENKO, O., YASINSKII, V. (1997) *Nelinejnaya dinamika konstrukcij s gidkostij*. Kiev: NTU KPI.

Надійшла до редколегії 27.06.19

УДК 539.3

Кривий О.Ф.¹, д. ф.-м. н., проф.
Морозов Ю.О.², к. ф.-м. н., доц.

**Кругове теплоактивне міжфазне
включення в кусково-однорідному
трансверсально-ізотропному просторі**

¹ Національний університет «Одеська морська
академія», 65029, м. Одеса, вул. Дідріхсона, 8
e-mail: krivoy-odessa@ukr.net

² Одеський національний політехнічний
університет, 65044, м. Одеса, пр-т. Шевченка, 1,
e-mail: morozovyu@gmail.com

O. F. Kryvyi¹, Dr. Sci., Prof.
Yu. O. Morozov², Ph. D., Assoc. Prof.

**Circular thermoactive interphase inclusion in
a piecewise homogeneous transversal-isotropic
space**

¹ National University - Odesa Maritime Academy,
65029, Odessa, Didrikhson str., 8
e-mail: krivoy-odessa@ukr.net,

² Odesa National Polytechnic University, 65044,
Odessa, Boulevard of Shevchenko, 1
e-mail: morozovyu@gmail.com

Побудовано точний розв'язок задачі стаціонарної термопружності для міжфазного кругового абсолютно жорсткого включення, що знаходиться в умовах повного зчеплення або гладкого контакту з трансверсально-ізотропними півпросторами. За допомогою побудованого розривного розв'язку, методом сингулярних інтегральних співвідношень (CIC) задача зведена до систем двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь (CIP). Побудовано точний розв'язок зазначених CIP. В результаті отримано залежності стрибків напружень та переміщень від температури, рівнодіючої навантаження, головних моментів і термомеханічних характеристик трансверсально-ізотропних матеріалів. Показано, що напруження в околі включення при гладкому контакті мають кореневу особливість, а при повному зчепленні – кореневу особливість, яка підсилена осциляцією.

Ключові слова: теплопровідність, кусково-однорідний трансверсально-ізотропний простір, міжфазний дефект, двовимірні сингулярні інтегральні рівняння.

An exact solution of the stationary thermoelasticity problem about interfacial circular absolutely rigid inclusion, which is under conditions of complete adhesion and under conditions of smooth contact with transversely homogeneous spaces, is constructed. The task with the help of the constructed discontinuous solution, by the method of singular integral relations, is reduced to a system of singular integral equations (SIE). An exact solution has been built for the specified systems of two-dimensional singular integral equations. As a result, dependences jumps of stresses and displacement on temperature, equivalent load, main moments and thermomechanical characteristics of transversally isotropic materials. The influence of the type of contact interaction on the behavior of the solutions is established. In particular, it has been shown that the stresses in the neighborhood of the inclusion with a smooth contact have a root singularity, and with complete coupling, the root singularity, which is amplified by oscillation. The behavior of the generalized intensity coefficient (GCIN) was studied for the combination of various transversely isotropic materials at different power and temperature loads.

Key Words: thermal conductivity, inhomogeneous orthotropic space, interphase defect, two-dimensional singular integral equations.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

В роботах [1-5] задачі про невісесиметричні міжфазні дефекти типу тріщини або абсолютно жорстких включень, при різних видах контактної взаємодії (повне зчеплення, гладкий контакт, змішані умови) з різними трансверсально-ізотропними півпросторами, методом CIC [6] зведені до систем двовимірних CIP. Запропоновано метод побудови точних розв'язків

зазначених систем CIP для кругових дефектів, що дозволило визначити особливості полів напружень та переміщень в околі тріщини та включень при довільному навантаженні.

У даній роботі розглянуто невісесиметричні задачі стаціонарної термопружності для складеного трансверсально-ізотропного простору, що містить теплоактивне кругове включення, яке

знаходиться в умовах повного зчеплення або в умовах гладкого контакту з середовищем.

2. Постановка задачі та її розв'язання

1. Нехай у площині $z = 0$ з'єднання двох різних трансверсально-ізотропних півпросторів розташовано абсолютно жорстке включення, що займає кругову область $\Omega: \{\sqrt{x^2 + y^2} \leq a\}$. На включенні задано тепловий потік q_0 , та прикладене довільне навантаження, дія якого зводиться до рівнодійної сили $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$ і головного моменту $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$. Позначимо стрибки і суми термопружних характеристик простору при переході через площину $z = 0$ так

$$\chi_k^\pm = \left\langle \zeta_k \right\rangle^\pm = \zeta_k^+ \pm \zeta_k^-, k = \overline{1, 8}; \{\zeta_k^\pm\}^8 = \{\nu_k\}^8 \Big|_{z=\pm 0},$$

$$\mathbf{v} = \{\nu_k(x, y, z)\}_{k=\overline{1, 8}} = \{\sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, u, v, w, T, q_z\}.$$

Розташування граней включення після деформації описують функції: $\zeta_6^\pm = \zeta_6^0 + \vartheta_0^\pm$, $\zeta_k^\pm = \zeta_k^0$, $k = 4, 5$, $\zeta_4^0 = \delta_1 - \varphi_z y$, $\zeta_5^0 = \delta_2 + \varphi_z x$, $\zeta_6^0 = \delta_3 + \varphi_y x + \varphi_x y$, $\vartheta_0^\pm$ задають форму включень при $z = \pm 0$, δ_k , φ_z , φ_y , φ_x - поступальні та кутові переміщення включень, для визначення яких використовують умови силової і моментної рівноваги.

Грані включення знаходяться в умовах повного зчеплення з півпросторами (Задача А), відомими в цьому випадку будуть стрибки та суми переміщень $\chi_4^\pm = (1 \pm 1)\zeta_4^0$, $\chi_5^\pm = (1 \pm 1)\zeta_5^0$, $\chi_6^\pm = \vartheta^\pm + (1 \pm 1)\zeta_6^0$, $\vartheta^\pm = \vartheta_0^\pm \pm \vartheta_0^-(x, y) \in \Omega$. (1)

Розглянуто також випадок, коли включення знаходиться в умовах гладкого контакту (задача В), у цьому випадку стрибки та суми дотичних напружень дорівнюють нулю, а суми нормальних зміщень визначаються за формулою (1)

Враховуючи умови з'єднання півпросторів поза включенням: $\chi_k^- = 0, k = \overline{1, 7}$, $\lambda_3^+ \partial_2 \zeta_7(x, y, +0) = \lambda_3^- \partial_2 \zeta_7(x, y, -0)$, та результати робіт [2-5], поставлені задачі можна звести відносно невідомих χ_1^- , χ_7^- , $\tau = \chi_3^- + i\chi_2^-$, $u = \chi_4^- + i\chi_5^-$, до наступних систем двовимірних СІР.

Задача А:

$$q_{31} \bar{K}_0[\chi_1^-] - \frac{q_{32}}{2} K[\tau] - \frac{q_{32}^+}{2} D K[\vartheta \tau] = \Phi_1,$$

$$q_{31} K_0[\chi_1^-] - \frac{q_{32}}{2} K[\bar{\tau}] - \frac{q_{32}^+}{2} \bar{D} K[\bar{\vartheta} \bar{\tau}] = \Phi_2,$$

$$q_{41} K[\chi_1^-] + \frac{q_{42}}{2} (K_0[\tau] + \bar{K}_0[\bar{\tau}]) = \Phi,$$

$$q_{65} D \bar{D} K[\chi_7^-] = -\chi_8^+. \quad (2)$$

Задача В:

$$q_{21} D K[\chi_1^-] + \frac{q_{23}^-}{2} \bar{D}^2 K[u^-] + \frac{q_{23}^+}{2} D \bar{D} K[\bar{u}^-] = \Phi_4,$$

$$q_{21} \bar{D} K[\chi_1^-] + \frac{q_{23}^-}{2} D \bar{D} K[\bar{u}^-] + \frac{q_{23}^+}{2} \bar{D}^2 K[u^-] = \Phi_5,$$

$$q_{41} K[\chi_1^-] + \frac{q_{43}}{2} [\bar{D} K[u^-] + D K[\bar{u}^-]] = \Phi_6,$$

$$q_{65} D \bar{D} K[\chi_7^-] = -\chi_8^+(x, y). \quad (3)$$

Тут введені позначення

$$\Phi_1 = u^+ + q_{34} D K[\chi_6^-] - q_{35} \bar{K}_0[\chi_7^-]$$

$$\Phi_3 = \chi_6^+ - q_{44} \chi_6^- - q_{45} K[\chi_7^-], \Phi_2 = \bar{\Phi}_1$$

$$\Phi_4 = -q_{24} D \chi_6^- - q_{25} D K[\chi_7^-], \Phi_5 = \bar{\Phi}_4$$

$$\Phi_6 = \chi_6^+ - q_{44} \chi_6^- - q_{45} K[\chi_7^-], D = \partial_1 + i\partial_2,$$

$$K[\chi_j^-] = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{\chi_j^-(\xi, \zeta)}{r_0} d\xi d\zeta,$$

$$K_0[\chi_j^-] = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{\chi_j^-(\xi, \zeta)}{g} d\xi d\zeta,$$

$$g = (x - \xi) + i(y - \zeta), r_0^2 = g\bar{g}.$$

Перейдемо до термопружних характеристик простору у циліндричних координатах (ρ, φ, z) , та позначимо скачки і суми при переході через площу $z = 0$ так: $\{\tilde{\nu}_k^\pm(\rho, \varphi)\}^8 = \{\langle \sigma_z \rangle^\pm, \langle \tau_{z\varphi} \rangle^\pm, \langle \tau_{z\rho} \rangle^\pm, \langle u_\rho \rangle^\pm, \langle u_\varphi \rangle^\pm, \langle w \rangle^\pm, \langle T \rangle^\pm, \langle q \rangle^\pm\}$. Введемо комбінації напружень $\tilde{\tau}^\pm = \tilde{\nu}_3^\pm + i\tilde{\nu}_2^\pm$ та переміщень $\tilde{u}^\pm = \tilde{\nu}_4^\pm + i\tilde{\nu}_5^\pm$ і перейдемо до нових невідомих функцій: $v_1^- = \chi_1^-(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$, $v_2^\pm = e^{-i\varphi} \tau^\pm(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$, $v_5^- = \chi_7^-(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$, $v_3 = e^{-i\varphi} u^-(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$. Останні розшукуємо у вигляді

$$v_j^\pm(\rho, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n^{j,\pm}(\rho) e^{in\varphi}, j = 2, 3, 5, (4)$$

$$V_n^{j,-}(\rho) = \Phi_n[v_j^-] \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_j^-(\rho, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi,$$

$$V_n^{j,-}(\rho) = \bar{V}_n^{j,-}(\rho), \bar{V}_n^{j,-}(\rho) = \Phi_n[\bar{v}_j^-].$$

Перехід в системах (3), (4) до полярної системи координат, та подальше застосування скінченного перетворення Фур'є, дозволяє, використавши підхід робіт [1-5], системи (2), (3)

звести до систем інтегральних рівнянь з ядрами Вебера-Сонина.

Одержані розв'язки цих систем у явному вигляді. Задача А:

$$\langle \sigma_z \rangle^- = \frac{(-1)}{\pi \rho^2} \partial_\rho \int_\rho^a \frac{t \eta_{10}^-(t) dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} - \operatorname{Re} \left[\frac{e^{i\varphi}}{\pi} \partial_\rho \int_\rho^a \frac{\eta_{11}^-(t) dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \right],$$

$$\langle \tau_{z\rho} \rangle^- + i \langle \tau_{z\varphi} \rangle^- = -\frac{1}{\pi \rho^2} \partial_\rho \int_\rho^a \frac{\eta_{20}^-(t) + \eta_{30}^-(t)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} dt -$$

$$-\partial_\rho \operatorname{Re} \frac{e^{i\varphi}}{\rho^2} \int_\rho^a \frac{(\eta_{21}^-(t) + \eta_{31}^-(t)) t}{\pi \sqrt{t^2 - \rho^2}} dt.$$

Задача В:

$$\langle \sigma_z \rangle^- = \frac{m_0 + m_1(\varphi)\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} + \frac{s_{11}}{\rho} (L[F_0^-])'_\rho - \tilde{s}_{11} v_5^- ,$$

$$\langle u_\rho \rangle^- = \frac{2s_{21}}{\pi \rho} \{ L[F_n^-(\rho)] - f_* \sqrt{a^2 - \rho^2} \} +$$

$$+ \sqrt{a^2 - \rho^2} \{ q_0 \operatorname{Re}(be^{i\varphi}) [m_2(5a^2(a^2 - \rho^2) - 3\rho^2) -$$

$$- m_3 a^2] - m_4 \operatorname{Re}(\varphi_{xy} e^{-i\varphi}) \} ,$$

3. Числові результати та їх аналіз

Числовий аналіз проведено при $P_3 = 1$ для комбінації матеріалів Cadmium (матеріал m_1), Magnesium (матеріал m_2), Al_2O_3 (матеріал m_3), Zn (матеріал m_4), для включення, що знаходиться в умовах гладкого контакту. На рис. 1-2 представлено залежність (УКІН) від полярного кута φ , при різних значеннях теплового потоку q_0 і результуючих моментів M_1, M_2 . Величини моментів на рис. 1 і 2 відрізняються на порядок, тобто $M_1 = M_2 = 20 \cdot P_3$ для першого рисунку і $M_1 = M_2 = 200 \cdot P_3$ для другого. На рисунках 3, 4 подано залежність УКІН від φ при різних значеннях ρ і $M_1 = M_2 = P_3 / 2$. З рисунків видно, що значення теплового потоку і моментів на включенні істотно впливають на значення УКІН. Значення УКІН також залежать від полярного кута, що показує вплив на УКІН анізотропії термопружних властивостей матеріалів. На розподіл напружень біля включення істотно впливають величини термопружних постійних півпросторів, зокрема, значення коефіцієнта $\zeta_z = c_{33}^+ / c_{33}^-$, який характеризує відмінність пружних властивостей півпросторів у напрямку осі Z. Так, для комбінації матеріалів m1-m2, значення $\zeta_z = 0.7483$, для комбінації m3-m4,

значення $\zeta_z = 8.2981$, таким чином, пружні властивості півпросторів у напрямку осі Z для

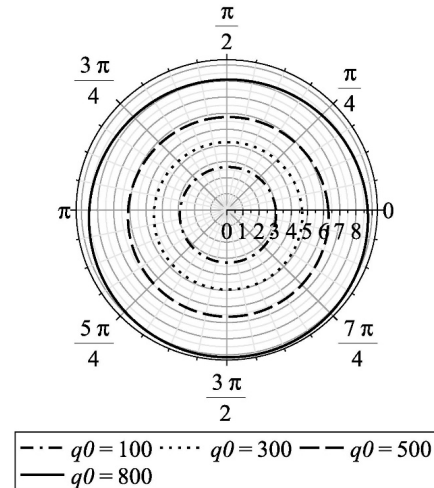


Рис. 1. m1-m2, $\rho=1$

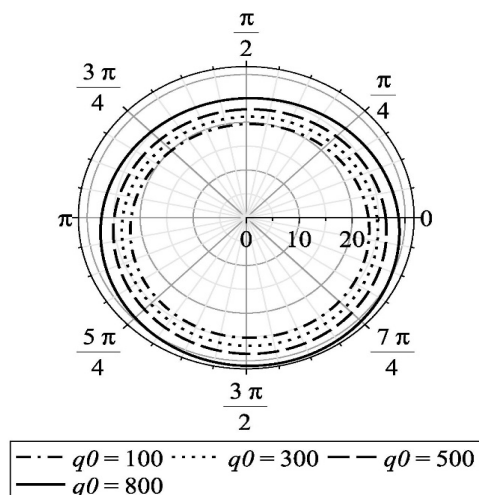


Рис. 2. m3-m4, $\rho=1$

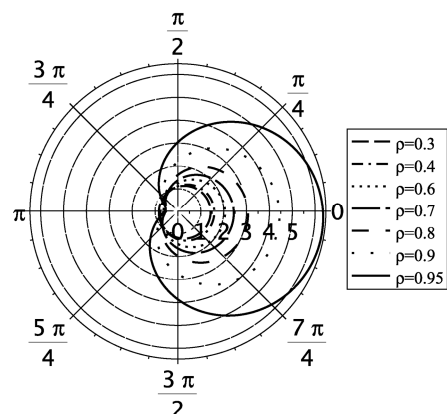


Рис. 3. $m_1-m_2, q_0=70$

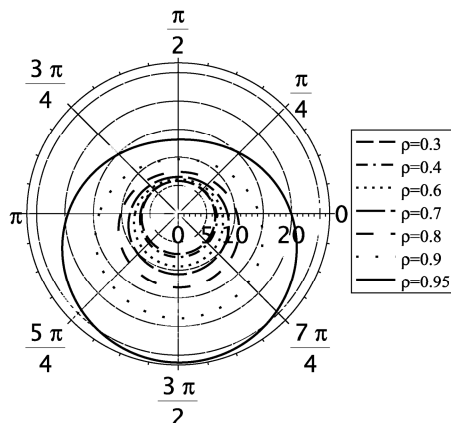


Рис. 4. $m_3-m_4, q_0=70$

другої комбінації m_3-m_4 відрізняються набагато більше, ніж для першої m_1-m_2 . Це зумовлює

Список використаних джерел

1. Ефимов В.В. Задачи о концентрации напряжений возле кругового дефекта в составной упругой среде / В.В. Ефимов, А.Ф. Кривой, Г.Я. Попов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 2. – С. 42–58.
2. Кривий О.Ф. Міжфазні кругові включення в кусково-однорідному трансверсально – ізотропному просторі / О.Ф. Кривий // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2010. – Вип. 8. – С. 173–183.
3. Kryvyi O.F. Singular integral relations and equations for a piecewise homogeneous transversally isotropic space with interphase defects / O. F. Kryvyi // Journal of Mathematical Sciences. – 2011. – **176**, 4. – Pp. 515- 531.
4. Kryvyi O.F (2012) Interface circular inclusion under mixed conditions of interaction with a piecewise homogeneous transversally isotropic space / O. F. Kryvyi // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – **184**, 1. – Pp. 101-119.
5. Kryvyi O.F Delaminated Interface Inclusion in a Piecewise Homogeneous Transversely Isotropic Space / O. F. Kryvyi // Materials Science. – 2014. – **50**, 2. – Pp. 245-253.
6. Kryvyi O. The Discontinuous Solution for the Piece-homogeneous Transversal Isotropic Medium / O. Kryvyi // Operator Theory: Advances and Applications. – 2009. – 191. – P. 387 – 398.

якісні і кількісні зміни розподілів нормальних напружень в околі включення, що підтверджується, наприклад, порівнянням графіків на рисунках 3 та 4.

3. Висновки

Наявність температурного навантаження на включенні зумовлює появу додаткового доданку в розв'язках задач. При цьому характер поведінки і асимптотика розв'язку залишається незмінною. Точний розв'язок дозволив дослідити особливості поля нормальних напружень в околі включення, зокрема, наявність температурного навантаження істотно змінює характер поведінки УКІН. Запропонована методика дозволяє отримати розв'язки задач для інших типів контактної взаємодії включення із середовищем при різних навантаженнях.

References

1. EFIMOV, V.V., KRIVOI, A.F., POPOV, G. (2010) Problems on the stress concentration near a circular imperfection in a composite elastic medium. *Mechanics of solids*. 33 (2). p.35-49, Springer ISSN: 0025-6544
2. KRYVYI, O.F. (2010) Mizhfazns krugovs vkluchennya v kuskovo-odnorodnomu transversalno-izotropnomu prostori. *Prikl. problei mek. i mat.* 8. p. 173–183.
3. KRYVYY, O.F. (2011) Singular integral relations and equations for a piecewise homogeneous transversally isotropic space with interphase defects. *Journal of Mathematical Sciences*. 176 (4). p. 515- 531.
4. KRYVYY, O.F (2012) Interface circular inclusion under mixed conditions of interaction with a piecewise homogeneous transversally isotropic space. *Journal of Mathematical Sciences*. 184(1). p. 101-119.
5. KRYVYI, O.F (2014) Delaminated Interface Inclusion in a Piecewise Homogeneous Transversely Isotropic Space. *Materials Science*. 50 (2). p. 245-253.
6. KRYVYY, O. (2009) The Discontinuous Solution for the Piece-homogeneous Transversal Isotropic Medium. *Operator Theory: Advances and Applications*. 191. p. 387 – 398.

Надійшла до редколегії 29.06.19

УДК 539.4:624.012

Кундрат М. М.¹, д.т.н., проф.,
Кундрат А. М.¹, к.ф.-м.н., доц.,
Заблотська Ю. В.¹

Відшарування гнучкого нерозтяжливого підсилення вільного краю півбезмежної пластини

¹Національний університет водного господарства та природокористування, 33028, м. Рівне, вул. Соборна, 11
e-mail: kundrat@i.ua

M. M. Kundrat¹, Dr. Sci. (Tech.), Prof.,
A. M. Kundrat¹, PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.,
Yu. V. Zablotska¹.

Exfoliation the flexible continuous reinforcements of the free edge of a semiinfinite plate

¹National University of Water Management and Natural Resources Use, 33028, Rivne, Soborna str., 11,
e-mail: kundrat@i.ua

За умов плоскої задачі термопружності досліджено відшарування розташованого на краю півбезмежної пластини нерозтяжливого гнучкого нагрітого до заданої температури підсилення за ідеального теплового контакту та дії розтягуючого навантаження на пластину. Відшаруванню підсилення в околах його кінців передують розвиток локалізованих зон передруйнування (ослабленого контакту), яким можуть відповідати області накопичення пошкоджень, пластичного деформування, часткового розриву зв'язку та інші. Аналітичний розв'язок задачі приведено до задачі Коші для диференційного рівняння першого порядку, виконано його числовий аналіз. Досліджено взаємовплив силового та температурного навантажень на відшарування підсилення.

Ключові слова: підсилення, відшарування, плоска задача, зона передруйнування.

Exfoliation the not extensible flexible stiffener heated up to the set temperature is investigated in conditions of a plane problem thermoelasticity. The flexible stiffener is placed at edge of the semi-infinite plates in conditions ideal thermal contact and action the stretching loading on the plate. Development of localized zones of prefracture (the weakened contact) is precede to separation the stiffener in vicinities of her ends. They can correspond to regions of damages, plastic deformation, partial break of connection and another precedes. On area outside of zones of prefracture the perfect mechanical contact is remaining. The analytical decision of a problem is shown to problem Koshy for differential equation of the first order and realized its numerical analysis. Physically correct limited stresses and deformations are received in all points of a composition. Tangents stresses also satisfy to relationship of pair law. Basic part of loading from reinforcements to plate is transfer in neighbourhood of reinforcement ends. Interference of power and temperature loadings on flexible stiffener separation is investigated.

Key Words: reinforcement, exfoliation, plane problem, zone of prefracture.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Задача розрахунку підсилюючих елементів як одного із поширених засобів ремонту та відновлення працездатності інженерних конструкцій залишається на часі. Підкріплюючі елементи одночасно є й потужними концентраторами напружень і спричиняють нелінійні та пластичні деформації чи розвиток зон розпушення, що в значній мірі ускладнює прогноз граничної рівноваги системи в цілому. Розрахункова модель для аналізу напружено-

деформованого стану пружного тіла з підсиленням розвинута в працях [1–3] та застосована нижче для аналізу процесу відшарування підсилення при температурному і силовому навантаженні за малої ділянки розпушення. Урахування явищ розпушення матеріалів та нелінійного їх деформування, що передують безпосередньо руйнуванню, дає можливість більш точно прогнозувати і раціонально використати несучу здатність елементів конструкцій.

Постановка задачі

В умовах плоскої задачі теорії термопружності розглядаємо півбезмежну пластину, що розтягується на нескінченності зусиллями інтенсивності $\sigma_{xx}^{\infty} = q$ паралельно до її краю (рис. 1). Пластина підкріплена гнучким нагрітим до температури T_1 підсиленням завдовжки $2a$. Тепловий контакт між підсиленням та пластиною ідеальний, а температура вільного краю пластини дорівнює T_0 . Вважатимемо, що підсилення абсолютно гнучке, тобто перебуває в одновісному напруженому стані і під ним діють лише тангенціальні контактні напруження. Осі декартової системи координат xOy збігаються з осями геометричної симетрії композиції.

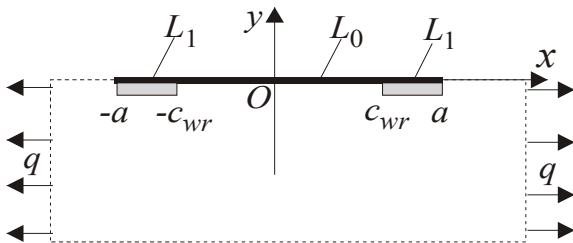


Рис. 1. Схема задачі

Аналіз плоского напруженого стану такої композиції показує, що максимальні дотичні напруження $\tau_{\max}$ мають місце в околах кінців підсилення уздовж його межі з пластиною. Вважаємо, що саме тут відбувається відшарування (втрата зв'язку) підсилення від пластини, просуваючись від країв до центральної частини уздовж межі. При цьому відшаруванню підсилення передують розвиток зон передруйнування (ослабленого контакту), яким можуть відповідати області накопичення пошкоджень, пластичного деформування (проковзування), часткового розриву зв'язку між пластиною й підсиленням та інше. Довжину підсилення без відшарованих на кінцях частин позначаємо через $2a_{wr}$ і називаємо його робочою довжиною (рис. 2). На ділянках $a_{wr} < |x| \leq a$, де пройшло відшарування підсилення, зв'язок з пластиною відсутній.

Приймаємо, що енергія відшарування підсилення на одиницю довжини є величиною сталою та відомою і знайдемо аналітичні залежності зміни робочої довжини підсилення a_{wr} від силового та температурного навантажень, міцнісних та пружних характеристик композиції.

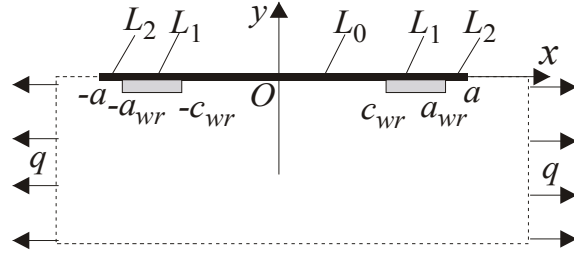


Рис. 2. Відшарування підсилення

Крайові умови задачі

Відповідну крайову задачу термопружності сформулюємо наступним чином. Ділянка $c_{wr} < |x| < a_{wr}$ (рис. 2) відповідає зоні передруйнування, на берегах якої діють дотичні напруження

$$\sigma_{xy} = \tau_s^* \text{sign}(x) \quad (x \in L_1), \quad (1)$$

де: τ_s^* – адгезійна зсувна міцність контактної межі пластина-підсилення, а при пластичному деформуванні – її зсувний поріг пластичності; σ_{ij} – компоненти тензора напружень; $\text{sign}(x) = \{1 \text{ для } x > 0; -1 \text{ для } x < 0; 0 \text{ для } x = 0\}$.

На ділянці $|x| < c_{wr}$ зберігається ідеальний контакт підсилення з пластиною і тому поздовжні деформації на ній рівні

$$\partial u(x)/\partial x = T_1 \alpha_p \quad (x \in L_0), \quad (2)$$

де α_p – температурний коефіцієнт лінійного видовження матеріалу підсилення.

Температура підсилення та вільного краю

$$T(x) = \begin{cases} T_1 & (|x| < a_{wr}, y = 0), \\ T_0 & (|x| > a_{wr}, y = 0). \end{cases} \quad (3)$$

Напруження на нескінченності

$$\sigma_{xx}^{\infty} = q. \quad (4)$$

Оскільки підсилення вважається абсолютно гнучким, то нормальні контактні зусилля під ним відсутні. А оскільки вільний край пластини теж не навантажений, то по всьому краю ($y = 0$) пластини $\sigma_{yy} = 0$.

Розв'язання крайової задачі

Для розв'язання задачі використаємо відомі [4, 5] подання для напружень і деформацій

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 4 \text{Re} \Phi(z), \\ \sigma_{yy} - i \sigma_{xy} &= \Phi(z) - \overline{\Phi(\bar{z})} + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)}, \\ 2G(u' + iv') &= \kappa \Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})} - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)} + \beta \Psi_0(z), \end{aligned} \quad (5)$$

де: $\beta = 4G\alpha_0$, $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ для плоского напруженого стану; $\beta = 4G(1 + \nu)\alpha_0$, $\kappa = 3 - 4\nu$ в умовах плоскої деформації; α_0 , G , ν – температурний коефіцієнт лінійного розширення, модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини. Зауважимо, що при плоскому напруженому стані вільні поверхні півплощини вважаються теплоізованими.

Невідома функція $\Psi_0(z)$ визначається співвідношеннями [4, 5]:

$$\Psi_0(z) = \frac{1}{2}T_0 + \frac{T_1 - T_0}{2\pi i} \ln \frac{z + a_{wr}}{z - a_{wr}}, \quad (6)$$

Функцію напружень $\Phi(z)$ знайдемо після підставлення формул (5) у крайові умови (1)–(2). З урахуванням результату (6) та умови на нескінченності (4) загальним розв’язком крайової задачі теорії пружності буде функція

$$\Phi(z) = 0,5f_0^T(z) + (\tau_s^*/2\pi) \ln[\zeta^-(z)/\zeta^+(z)], \quad (7)$$

де: $f_0^T(x) = 2[G\alpha_p T_1 - \beta \operatorname{Re} \Psi_0^+(x)]$,

$$\zeta^\pm(z) = a_{wr} \sqrt{z^2 - c_{wr}^2} \pm z \sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2}.$$

Формули (5)–(7) цілком описують поля напружень та деформацій у пластині з підсиленням і дають можливість дослідити умови його відшарування.

Відшарування підсилення

Нехай γ_τ^* – енергія, необхідна для відшарування підсилення на одиницю довжини – стала характеристика композиції. Для зменшення робочої довжини підсилення на деяку малу величину Δa_{wr} необхідно виконати роботу

$$\gamma_\tau^* \Delta a_{wr} = \int_{a_{wr}-\Delta a_{wr}}^{a_{wr}-d-\Delta a_{wr}} \sigma_{xy}(x) [u(x, a_{wr} - \Delta a_{wr}) - u(x, a_{wr})] dx,$$

де $d = a_{wr} - c_{wr}$.

Знехтуємо доданками порядку $(\Delta a_{wr})^2$ і подамо функцію $u(x, a_{wr} - \Delta a_{wr})$ в ряд Тейлора за степенями Δa_{wr} та спрямуємо Δa_{wr} до нуля, вважаючи, що параметр a_{wr} залежить від навантаження. Тоді після перетворень отримаємо, що

$$\gamma_\tau^* = \tau_s^* \left[\frac{d}{da_{wr} a_{wr} - d} \int_{a_{wr}}^{a_{wr}} u(x, a_{wr}) dx - u(a_{wr}, a_{wr}) \right],$$

$$\begin{aligned} \text{де: } u(x, a_{wr}) &= T_1 \alpha_p x + \frac{(\kappa + 1) \tau_s^*}{4\pi G} \{ a_{wr} \ln[\eta^-(x)/\eta^+(x)] - \\ &\quad - x \ln[\zeta^-(x)/\zeta^+(x)] \}, \\ \eta^\pm(x) &= \sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2} \pm \sqrt{x^2 - c_{wr}^2}. \end{aligned}$$

Переміщення точок пластини біля вершини робочої частини підсилення

$$\begin{aligned} u(a_{wr}, a_{wr}) &= \lim_{x \rightarrow a_{wr}} u(x, a_{wr}) = \\ &= T_1 \alpha_p a_{wr} + \frac{2\kappa \tau_s^* a_{wr}}{\pi G(\kappa + 1)} \ln \frac{a_{wr}}{c_{wr}}, \end{aligned}$$

а залежність між довжиною зони передруйнуванням та навантаженням

$$\sqrt{a^2 - c^2} - a \cdot th(H) = 0,$$

$$\text{де } H = \frac{\pi}{2\tau_s^*} \left[\frac{q}{2} - \frac{T_1}{\kappa + 1} (4G\alpha_p - \beta) \right].$$

Зауважимо, що за умови $4G\alpha_p = \beta$ (чи при плоскому напруженому стані $\alpha_p = \alpha_0$) температура нагріву підсилення не впливає на розмір зони передруйнування. Але переміщення точок матеріалу пластини під підсиленням залежні від T_1 .

З урахуванням поданих виразів дисипація енергії відшарування підсилення

$$\begin{aligned} \gamma_\tau^* &= a_{wr} \tau_s^* \{ T_1 \alpha_p [th^2(H) - 1] + \\ &\quad + \frac{2(\kappa + 1) \tau_s^*}{4\pi G} [\ln ch(H) - H \cdot th(H)] + \\ &\quad + a_{wr} \left[T_1 \alpha_p \frac{th(H)}{ch^2(H)} + \frac{(\kappa + 1) \tau_s^*}{4\pi G} \left(th(H) - \frac{H}{ch^2(H)} \right) \right] \frac{dH}{da_{wr}} \}. \end{aligned}$$

Введемо безрозмірну робочу довжину підсилення

$$\lambda = (\kappa + 1) \tau_s^* a_{wr} / (2\pi G \gamma_\tau^*)$$

і зафіксуємо її значення ($\lambda = \lambda_0$) при відомому (для простоти можна нульовому) значенні параметра навантаження $H = H_0$. Отримуємо задачу Коші для диференційного рівняння першого порядку, яка описує зміну робочої довжини підсилення у залежності від навантаження:

$$\frac{d\lambda}{dH} = 0,5 \frac{\lambda^2 [th(H) + (2S \cdot th(H) - H)/ch^2(H)]}{1 + \lambda [H \cdot th(H) - \ln ch(H) + S/ch^2(H)]}, \quad (8)$$

$$\lambda(H_0) = \lambda_0,$$

де: $S = 2\pi T_1 \alpha_p G / [(\kappa + 1)\tau_s^*]$.

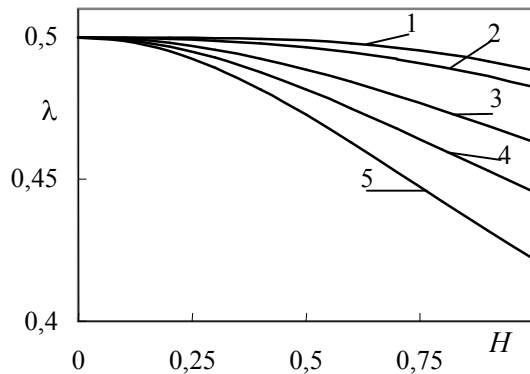


Рис.3. Робоча довжина підсилення

На рис. 3 подано залежність знерозміреної робочої довжини підсилення λ від навантаження за фіксованої початкової довжини $\lambda_0 = 0,5$ та

різних значень S , отримані з числового розв'язку задачі Коші (8) методом Рунге-Кутта: для лінії 1 параметр $S = 0$; 2 – $S = 0,1$; 3 – $S = 0,5$; 4 – $S = 1,0$; 5 – $S = 2,0$; пружні та міцнісні параметри композиції враховані через змінні λ та H . Зростання параметра S збільшує довжину відшарованої ділянки підсилення за інших однакових умов.

За одночасної дії температурного та силового навантажень залежно від фізико-механічних характеристик композиції можливий як їх взаємно підсилювальний так і послаблювальний вплив на відшарування підсилення. Чим менша робоча довжина підсилення, тим більше навантаження необхідне для його відшарування.

Список використаних джерел

1. Кундрат М. М. Гранична рівновага та локальне руйнування пластини з накладкою / М. М. Кундрат // Вісник Рівненського держ. техн. ун-ту. Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво. – 1999. – С. 200-204.
2. Кундрат А. М. Руйнування в з'єднанні двох накладок / А. М. Кундрат // Вісник Рівненського держ. техн. ун-ту. Збірник наук. праць. – 2001. – Вип. 3 (10). – С. 205-210.
3. Сулим Г. Т. Термопружна рівновага пів безмежної пластини з жорсткою гнучкою накладкою / Г. Т. Сулим., М. М. Кундрат // Тези доп. П'ятого українсько-польського наукового симпозіуму “Актуальні задачі механіки неоднорідних структур”, 18–23 вересня 2003 р., – Львів-Луцьк. – 2003. – С. 54–55.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – Москва: Наука, 1966. – 707 с.
5. Прусов И. А. Некоторые задачи термоупругости / И. А. Прусов – Минск: Изд-во БГУ, 1972. – 200 с.

References

1. KUNDRAT, M. M. (1999) Limit equilibrium and local fracture the lining plate with reinforcement. *Bulletin Rivne State Technical University. Water conservation and hydraulic construction*. p.p. 200–204.
2. KUNDRAT, A. M. (2001) The fracture in connecting two reinforcements. In *Journal of Rivne state Sc. Univ. Collection of Science. works*. (3). p.p. 205-210.
3. SULYM G. T., KUNDRAT M. M. (2003) Termopruzhnna rivnovaha piv bezmezhnoyi plastyny z zhorstkoyu hnuchkoyu nakladkoyu. In *Tezy dop. P'yatoho ukrayins'ko-polskoho naukovooho sympozyumu "Aktual'ni zadachi mekhaniky neodnorodnykh struktur"*, 18–23 veresnya 2003 r., – L'viv-Luts'k, p.p. 54–55.
4. MUSKHELISHVILI N. I. (1966) *Nekotorye osnovnyye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti*. Moskva: Nauka.
5. PRUSOV I. A. (1972) *Nekotorye zadachi termouprugosti*. Minsk: Belorusskiy universitet.

Надійшла до редколегії 29.05.19

УДК 539.3

Куценко О. Г.¹, к. ф.-м. н., доц.,
Харитонов О. М.¹, к. ф.-м. н., доц.,
Харитонova Л. В.², к. ф.-м. н., доц.

**Аналітична модель деформування фланця з
приєднаною обичайкою під дією
внутрішнього тиску**

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4е,
e-mail: alex_kutz@univ.kiev.ua

² Національний транспортний університет,
01010, м. Київ, вул. М. Омеляновича-
Павленка, 1

O. G. Kutsenko¹, Ph.D (Phys.-Math.),
O. M. Kharytonov¹, Ph.D (Phys.-Math.),
L. V. Kharytonova², Ph.D (Phys.-Math.)

**Analytical model of deformation of flange with
concatenated shell under internal pressure**

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova av., 4e,
e-mail: alex_kutz@univ.kiev.ua

² National Transport University, 01010, Kyiv,
M. Omelianovycha-Pavlenka str., 12

Розглянута задача про спільну деформацію фланця з приєднаною до нього циліндричною обичайкою під дією внутрішнього тиску. За допомогою метода уявних перерізів систему було умовно розділено на дві складові. Деформація фланця визначалася на основі теорії осесиметричного кручення кілець. Деформація обичайки визначалася на основі теорії згину циліндричної оболонки. Невідомі зусилля в перерізі приєднання визначалися з умови неперервності кута нахилу радіальних волокон та радіального зміщення. За допомогою метода скінченних елементів було перевірено адекватність запропонованої моделі.

Ключові слова: аналітична модель, фланець, обичайка, внутрішній тиск, теорія кручення кілець.

The rings torsion theory that is based on the assumption about flat rigid cross-section was suggested by the authors in the previous papers. The analytical expressions of torsional stiffness have been derived for different kind of loads: pure moment, shear force and surface pressure. In the present paper the analytical model of flange with attached cylindrical shell deforming under internal pressure is suggested. The mechanical system is split into two parts (flange and shell) with the help of imaginary section method. An unknown shear force and bending moments are applied to both parts according to this method. Therefore flange is loaded under internal pressure, shear force and bending moments. As mentioned above, for all these loads the angle of flange cross-section rotation can be presented in analytical form based on the rings torsion theory. Full rotation angle is presented as a sum of these angles. The radial displacement of imaginary section was determined on the basis of the assumption about flat rigid cross-section. On another hand, the rotation angle and radial displacement of imaginary section are determined on the base of the cylindrical shell bending theory too. Two linear equations in the unknown shear force and bending moment were derived by equating corresponding expressions. In such a way the analytical model of flange with attached shell deforming was built. The comparison calculations by finite element methods confirmed the adequacy of proposed model.

Key Words: Analytical model, flange, shell, internal pressure, rings torsion theory.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я. О.

Вступ

У попередніх роботах авторів [1, 2] наведено основи теорії осесиметричного кручення тонких кілець, тобто кілець, радіус осі яких значно більший за розміри його поперечного перерізу. В

основу теорії покладено гіпотезу плоских абсолютно жорстких поперечних перерізів. Відповідно до цієї гіпотези вважається, що при осесиметричному крученні поперечні перерізи кільця повертаються на деякий кут у власній

площині розташування не деформуючись, тобто відстані між точками перерізів не змінюються, а самі точки не виходять з площини. Схожа гіпотеза має місце при крученні прямолинійних валів круглого поперечного перерізу. Проте на відміну від прямолинійних стержнів, де основними діючими напруженнями є дотичні напруження, у випадку кільця основними напруженнями виявилися колові напруження σ_φ . Причому в силу осьової симетрії деплація не виникає незалежно від конфігурації поперечного перерізу.

В [1] викладено основи теорії та наведені співвідношення для випадку чистого кручення, тобто кручення під дією лише осьового моменту. В [2] співвідношення поширені на випадок кручення під дією зосередженої сили та тиску, розподіленого по частині поверхні. Оскільки деформація окремо взятого кільця не представляє значного практичного інтересу, в [2] наведена також ідея дослідження спільної деформації кільця з обичайкою, яка реалізована в даній роботі.

Постановка задачі

Розглядається задача про осесиметричну деформацію фланця та приєднаної до нього циліндричної обичайки (1) під дією внутрішнього тиску p_0 . До складу фланця входить перехідний конус (2), тарілка (3) та підп'ятник (4). На рисунку 1 зображено поздовжній переріз такої системи. Слід відразу зауважити, що даний переріз є поздовжнім для всієї системи, проте є поперечним для фланця як кільця, бо є ортогональним до його вісі — кола. Крім поперечного перерізу фланця в роботі розглядається переріз приварки обичайки до фланця, який є поперечним перерізом всієї системи, бо площина його розташування перпендикулярна вісі симетрії.

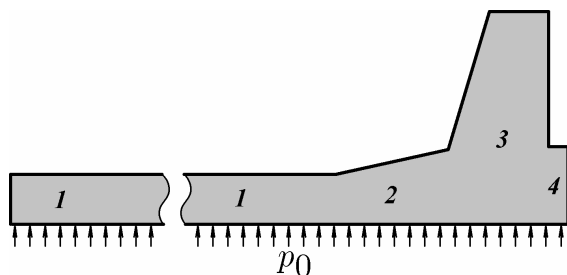


Рис.°1 Поздовжній переріз системи

Циліндрична система координат $r \varphi z$ вибирається таким чином, що вісь z є віссю

симетрії кільця. Оскільки в осесиметричному випадку від кутової координати φ нічого не залежить, подальший розгляд будемо проводити в площині поздовжнього перерізу системи (поперечного перерізу фланця) $r z$. Будемо вважати, що на рисунку 1 вісь z напрямлена вліво, а вісь r — вгору.

Потрібно побудувати аналітичну модель деформування системи фланець-обичайка, здатну відтворити напружено-деформівний стан системи, викликаний прикладанням внутрішнього тиску p_0 .

Побудова моделі

При побудові аналітичної моделі методом уявного перерізу система була розділена на дві складові: фланець та обичайку. Для статичної еквівалентності вихідній системі в перерізі приєднання обичайки до фланця до обох складових системи прикладені перерізувача сила інтенсивності Q_0 та згинаючий момент інтенсивності M_0 (див. рис. 2). Зусилля Q_0 та M_0 є зусиллями, розподіленими по колу — лінії перетину серединної поверхні обичайки з перерізом приварки. Будемо вважати, що в силу умов закріплення на іншому кінці обичайки поздовжня сила в перерізі приварки відсутня. Інші зусилля в перерізі приварки будуть відсутні в силу осьової симетрії.

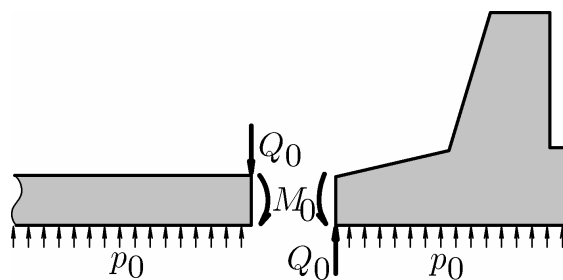


Рис.°2 Внутрішні зусилля в перерізі приєднання обичайки до фланця

Для визначення Q_0 та M_0 відносно кінематичних характеристик в перерізі приєднання можуть бути записані умови сумісності деформацій. В даному випадку такими умовами є умови неперервності радіальних зміщень u_r та кута нахилу твірної серединної поверхні відносно осі ϑ , так звані, умови зшивки. Позначимо відповідні характеристики в перерізі приєднання через u_{r_0} та ϑ_0 (див. рис. 3).

Значення кінематичних характеристик в перерізі приєднання з боку циліндричної

обичайки визначимо на основі теорії згину циліндричних оболонок [3]. У відповідності до неї маємо

$$u_{r0} = \frac{p_0 - 2\beta^2 M_0 - 2\beta Q_0}{4\beta^4 D}, \quad \vartheta_0 = -\frac{2\beta M_0 + Q_0}{2\beta^2 D}, \quad (1)$$

де $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — циліндрична жорсткість

обичайки, $\beta^4 = \frac{Eh}{(2r_0 + h)^2 D}$, r_0 — внутрішній

радіус обичайки, h — товщина обичайки, E — модуль пружності матеріалу обичайки, ν — коефіцієнт Пуассона матеріалу обичайки. Зауважимо, що у порівнянні з [3] нами вибрано протилежні напрямки відліку додатних значень для Q_0 , M_0 та u_{r0} в той час, як напрямки для ϑ_0 — співпадають.

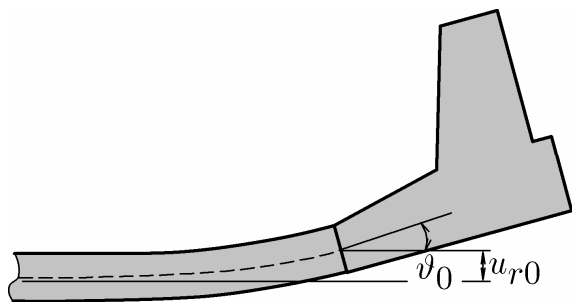


Рис. 3 Радіальне зміщення u_{r0} та кут нахилу ϑ_0 перерізу приєднання обичайки до фланця

Зі сторони фланця відповідні кінематичні характеристики знаходяться на основі теорії кручення тонких кілець і складаються з трьох складових: повороту на кут ϑ_{01} , викликаного моментом M_0 , повороту на кут ϑ_{02} , викликаного силою Q_0 , та повороту на кут ϑ_{03} , викликаного тиском p_0 . Відповідні кути задаються співвідношеннями

$$\vartheta_{01} = \frac{M_0}{E} \frac{r_R}{\hat{J}_r}, \quad \vartheta_{02} = -\frac{Q_0}{E} \frac{r_Q}{\Delta z_2 \hat{A}},$$

$$\vartheta_{03} = -\frac{p_0}{E} \frac{z_{p2} - z_{p1}}{\Delta z_3 \hat{A}} r_p, \quad (2)$$

де $\hat{A} = \int_A \frac{dA}{r}$, $\hat{S}_r = \int_A \frac{z}{r} dA$, $\hat{J}_r = \int_A \frac{z^2}{r} dA$, r_R —

радіальна координата всіх трьох центрів обертання, що співпадає з радіальною координатою точки фланця, в якій фіксується осьове зміщення, $r_Q = r_0 + h/2$ — радіальна

координата точки прикладання сили Q_0 , $r_p = r_0$ — радіальна координата відрізка, вздовж якого прикладений внутрішній тиск p_0 , z_{p1} , z_{p2} — осьові координати початку і кінця відрізка, вздовж якого прикладений внутрішній тиск p_0 ,

$\Delta z_2 = \frac{\hat{J}_r - z_c^2 \hat{A}}{\hat{A}(z_Q - z_c)}$ — різниця між осьовими

координатами центра обертання на кут ϑ_{02} та “осесиметричного” центра площ,

$\Delta z_3 = 2 \frac{\hat{J}_r - z_c^2 \hat{A}}{\hat{A}(z_{p1} + z_{p2} - 2z_c)}$ — різниця між

осьовими координатами центра обертання на кут ϑ_{03} та “осесиметричного” центра площ,

$z_c = \hat{S}_r / \hat{A}$ — осьова координата “осесиметричного” центра площ. Зауважимо, що $\Delta z_1 = 0$, тобто центр обертання на кут ϑ_{01} лежить на одній радіальній вісі з “осесиметричним” центром площ.

Таким чином, умови зшивки можемо подати у вигляді

$$\vartheta_0 = \sum_{i=1}^3 \vartheta_{0i}, \quad u_{r0} = \sum_{i=1}^3 u_{r0i} = \sum_{i=1}^3 \vartheta_{0i} (z_c + \Delta z_i - z_0), \quad (3)$$

де z_0 — осьова координата перерізу приєднання обичайки до фланця. Друге співвідношення в (3) є наслідком теорії кручення тонких кілець, відповідно до якої вважається, що поперечний переріз фланця обертається як абсолютно твердий.

Умови (3) представляють собою лінійну алгебраїчну систему відносно невідомих значень Q_0 та M_0 . Після її розв’язання кут повороту поперечного перерізу фланця ϑ_0 можна знайти з другого співвідношення (1). Так само на основі наведеного в [3] виразу для згинаючого моменту як функції осьової координати оболонки можна визначити значення та переріз розташування максимальних напружень σ_z .

Чисельна апробація

Для перевірки адекватності моделі були проведені порівняльні розрахунки на основі запропонованої аналітичної моделі та за допомогою скінченно-елементного пакету CalculiX [4]. Розрахунки проводилися для фланця Д2130, основні розміри якого в мм показані на рисунку 4. Довжина обичайки вибиралася рівною 1 м, що дозволяє нехтувати взаємним впливом

граничних умов на її торцях і при аналітичному описі вважати обичайку напівнескінченною. Матеріали фланця та обичайки вважалися однаковими з наступними значеннями фізичних сталей: $E = 200$ ГПа, $\nu = 0,3$. Внутрішній тиск задавався рівним 1 МПа.

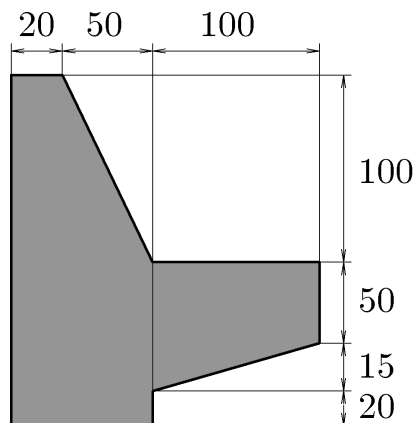


Рис. 5 Основні розміри фланця Д2130

В таблиці 1 наведені значення ключових характеристик НДС у порівнянні. Бачимо, що значення всіх характеристик окрім моменту M_0 знаходяться в межах практичної точності. Значна похибка M_0 пояснюється самим малим значенням M_0 у порівнянні з відношенням Q_0/β . Останнє говорить про визначальний вплив на згин обичайки перерізуючої сили

Q_0 . Саме цим пояснюється той факт, що максимальні напруження $\max(\sigma_z)$ знаходяться не в перерізі приєднання обичайки до фланця, а на деякій відстані d від нього.

Таблиця 1. Результати порівняльного розрахунку

	Аналітика	CalculiX	Похибка, %
$\vartheta_0, 10^{-4}$ рад	-7,748	-7,379	4,99
$M_0, \text{Н}$	440,3	364,6	20,75
$Q_0, \text{кН/м}$	12,29	12,72	3,31
$\max(\sigma_z), \text{МПа}$	95,67	103,9	7,91
$d, \text{мм}$	56,12	60,17	6,73

Висновки

На основі теорії кручення тонких кілець та теорії згину циліндричної оболонки в роботі побудована аналітична модель деформування фланця з приєднаною обичайкою під дією внутрішнього тиску. Порівняльні розрахунки засвідчили адекватність та практичну цінність розробленої моделі.

Список використаних джерел

1. Куценко О.Г. Осесиметричне кручення тонких кілець довільного профілю / О. Г. Куценко, Г. В. Куценко, О. М. Харитонов, І. Ю. Васильєв // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки – 2016. – №3. – С. 49–54.
2. Куценко О.Г. Осесиметричне кручення тонких кілець під дією різних силових факторів / О. Г. Куценко, О. М. Харитонов, А. Г. Куценко, П. В. Дикий // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки – 2017. – №3. – С. 107–110.
3. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – Москва: Физматгиз, 1966. – 635 с.
4. Dhondt G. The Finite Element Method for Three-Dimensional Thermomechanical Applications / G. Dhondt. – Hoboken: Wiley, 2004. – 362 p.

References

1. KUTSENKO, O.G. et al (2016) Osesymetrichne kruchennia tonkykh kilets dovilnoho profilu. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*. (3). p. 49–54.
2. KUTSENKO, O.G. et al (2017) Osesymetrichne kruchennia tonkykh kilets pid diieiu riznykh sylovykh faktoriv. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*. (3). p. 107–110.
3. TIMOSHENKO, S.P. (1966) *Plastinki i obolochki*. Moskva: Fizmatgiz.
4. DHONDT, G. (2004) *The Finite Element Method for Three-Dimensional Thermo-mechanical Applications*. Hoboken: Wiley.

Надійшла до редколегії 2.05.19

УДК 539.3

Кушнір Р.М., акад. НАНУ, д.ф.-м.н., проф.,
Токовий Ю.В., д.ф.-м.н., с.н.с.,
Бойко Д.С., аспірант

**Метод безпосереднього інтегрування у
тривимірних задачах теорії пружності та
термопружності для неоднорідних
трансверсально ізотропних тіл: ключові
рівняння в напруженнях**

Інститут прикладних проблем механіки і мате-
матики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
79060, м. Львів, вул. Наукова, 3б
e-mail: tokovyy@iapmm.lviv.ua

R.M. Kushnir, Acad. NASU, Dr. of Sci., Prof.,
Y.V. Tokovyy, Dr. of Sci., Senior Scientist,
D.S. Boiko, PhD student

**Direct integration method
in three-dimensional elasticity and
thermoelasticity problems for inhomogeneous
transversely isotropic solids: governing
equations in terms of stresses**

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mecha-
nics and Mathematics, NAS of Ukraine,
79060, Lviv, 3-B Naukova Str.
e-mail: tokovyy@iapmm.lviv.ua

З метою розвитку методу безпосереднього інтегрування стосовно розв'язування тривимірних задач теорії пружності та термопружності для неоднорідних анізотропних тіл отримано систему ключових рівнянь такого класу задач для трансверсально ізотропного неоднорідного твердого тіла, пружні та теплофізичні властивості якого є диференційованими функціями змінної, що відповідає перпендикулярно до площини ізотропії напрямку. Отримана система рівнянь зводиться до інтегральних рівнянь другого роду для окремих компонент тензора напружень, які можна розв'язати за допомогою відомих числових, аналітично-числових та аналітичних методик розв'язування інтегральних рівнянь.

Ключові слова: трансверсально ізотропні неоднорідні тіла, метод безпосереднього інтегрування, тривимірна задача, ключові рівняння.

An efficient technique for thermoelastic analysis of inhomogeneous anisotropic solids is suggested within the framework of three-dimensional formulation. By making use of the direct integration method, a system of governing equations is derived in order to solve three-dimensional problems of elasticity and thermoelasticity for transversely isotropic inhomogeneous solids with elastic and thermo-physical properties represented by differentiable functions of the variable in the direction that is transversal to the plane of isotropy. By implementing the relevant separation of variables, the obtained equations can be uncoupled and reduced to second-kind integral equations for individual stress-tensor components and the total stress, which represents the trace of the stress tensor. The latter equations can be attempted by any of the numerical, analytical-numerical, or analytical means available for the solution of the second-kind integral equations. In order to construct the solutions in an explicit form, an advanced solution technique can be developed on the basis of the resolvent-kernel method implying the series representation by the recurring kernels, computed iteratively by the original kernel of an integral equation.

Key Words: transversally isotropic inhomogeneous solids, direct integration method, three-dimensional problem, governing equations.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Розвиток ефективних методів дослідження термомеханічної поведінки елементів конструкцій, виготовлених з неоднорідних композитних матеріалів, передбачає використання моделей анізотропного макро-неоднорідного тіла [2]. По-

будова аналітичних розв'язків задач теорії пружності та термопружності для неоднорідних твердих тіл з довільними профілями просторового розподілу властивостей матеріалу є складною проблемою через необхідність розв'язання ключових

чових рівнянь у частинних похідних зі змінними коефіцієнтами [5]. У випадку анізотропних неоднорідних матеріалів ця проблема є ще складнішою, оскільки коефіцієнти ключових рівнянь визначаються через змінні пружні та теплофізичні модулі, які є не однаковими у різних просторових напрямках [3, 4]. З огляду на це важливим етапом розв'язування задач такого класу, зокрема, у тривимірній постановці, є отримання систем ключових рівнянь у зручній для побудови їх розв'язків формі.

У статті, з метою розвитку методу безпосереднього інтегрування [1, 6], отримано систему ключових рівнянь у напруженнях для тривимірної задачі теорії пружності та термопружності для трансверсально ізотропних тіл [3], властивості яких змінюються у поперечному до площини ізотропії напрямку. За допомогою відокремлення змінних та методики [7] отримані ключові рівняння зводяться до окремих інтегральних рівнянь для сумарних напружень (першого інваріанта тензора напружень) та кожної з компонент напружень, що з використанням відповідної методики розв'язання інтегральних рівнянь забезпечує розв'язок вихідної задачі.

Розглянемо задачу про пружну рівновагу неоднорідного трансверсально ізотропного тіла V , віднесеного до безрозмірної декартової системи координат (x, y, z) так, що площина ізотропії є паралельною до площини xOy . За відсутності масових сил задача описується рівняннями рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_{lx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{ly}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{lz}}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

де $l = \{x, y, z\}$, та суцільності

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad \overline{xyz}, \quad (2)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} \right), \quad \overline{xyz},$$

де $\overline{xyz}$ означає отримання ще двох рівнянь кожної групи шляхом циклічної перестановки індексів та змінних, за якими ведеться диференціювання. Компоненти тензорів напружень $\sigma_{jl} = \sigma_{lj}$ і деформації $\varepsilon_{jl} = \varepsilon_{lj}$, $j, l = \{x, y, z\}$, пов'язані фізичними співвідношеннями [3]

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) - \frac{\nu'}{E'} \sigma_{zz} + \alpha T, \quad x \neq y,$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E'} \sigma_{zz} - \frac{\nu'}{E'}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \alpha' T, \quad (3)$$

$$G' \varepsilon_{jz} = \sigma_{jz}, \quad j = \{x, y\}, \quad G \varepsilon_{xy} = \sigma_{xy}.$$

Тут E , E' і $G = E / (2 + 2\nu)$, G' – модулі пружності і зсуву у площині ізотропії та у перпендикулярному до неї напрямку; ν та ν' – коефіцієнти Пуассона, що описують відповідно звуження (розширення) у перпендикулярному до площини ізотропії напрямку за розтягу (стиску) у паралельному до неї напрямку та звуження (розширення) у площині ізотропії за розтягу (стиску) у перпендикулярному до неї напрямку відповідно; α та α' – коефіцієнти лінійного температурного розширення паралельно та перпендикулярно до площини ізотропії; $T = T(x, y, z)$ – розподіл стаціонарного температурного поля, який є заданим або знайденим із відповідної задачі теплопровідності [8]; $x \neq y$ означає отримання ще одного рівняння шляхом взаємної заміни x на y . Вважаємо, що характеристики матеріалу тіла V є диференційованими функціями координати z .

На межі тіла ∂V задано умови в термінах напружень $\sigma \cdot n = f(x, y, z)$, де n – вектор зовнішньої нормалі до поверхні ∂V , а f – заданий на цій поверхні вектор напружень.

Для виведення системи ключових рівнянь для компонент тензора напружень спершу визначимо дотичні напруження з рівнянь рівноваги (1):

$$2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2}, \quad \overline{xyz}. \quad (4)$$

З використанням фізичних співвідношень (3) для нормальних напружень та рівнянь (4) з першого рівняння (2) отримаємо

$$\frac{\Delta \sigma_{zz}}{2G(z)} + \beta_1(z) \Delta_{xy} \sigma_{zz} = \Delta_{xy} \left(\frac{\sigma}{E(z)} + \alpha(z) T \right), \quad (5)$$

де

$$\Delta_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Delta = \Delta_{xy} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\beta_1(z) = \frac{\nu'(z)E(z) - \nu(z)E'(z)}{E(z)E'(z)},$$

а сумарні напруження мають вигляд

$$\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}. \quad (6)$$

У такий же спосіб на основі інших двох рівнянь, які визначимо з першого рівняння (2) шляхом циклічної перестановки індексів, отримаємо ще два ключові рівняння

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{\sigma_{yy}}{2G(z)} \right) + \beta_2(z) \Delta_{xy} \sigma_{yy} = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{G'(z)} \right) \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \\ + \Delta (\beta_1(z) \sigma_{zz}) - \beta_2(z) \Delta \sigma_{zz} - \beta_3(z) \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial y^2} + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\beta_5(z) \sigma - \alpha(z) T) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\beta_4(z) \sigma - (\alpha(z) + \alpha'(z)) T) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\nu(z) \sigma}{E(z)} - \alpha(z) T \right), \quad x \neq y. \end{aligned} \quad (7)$$

Тут

$$\begin{aligned} \beta_2(z) &= \frac{G(z) - G'(z)}{2G(z)G'(z)}, \\ \beta_3(z) &= \frac{2(1 + \nu'(z))G'(z) - E'(z)}{2E'(z)G'(z)}, \\ \beta_4(z) &= \frac{\nu'(z)E(z) - E'(z)}{E(z)E'(z)}, \\ \beta_5(z) &= \frac{E(z) - 2G'(z)}{2E(z)G'(z)}. \end{aligned}$$

Перепишемо рівняння (5) у вигляді

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{\sigma_{zz}}{2G(z)} \right) + \beta_1(z) \Delta_{xy} \sigma_{zz} = \\ = \Delta_{xy} \left(\frac{\sigma}{E(z)} + \alpha(z) T \right) + \frac{\sigma_{zz}}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{G(z)} \right) + \\ + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{G(z)} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Додавши рівняння (7) та (8) з урахуванням формули (6), отримаємо ключове рівняння

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{1 - \nu(z)}{E(z)} \sigma + (\alpha(z) + \alpha'(z)) T \right) - \\ - \beta_1(z) \Delta_{xy} \sigma = \frac{\sigma_{zz}}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{G'(z)} \right) + \\ + \beta_6(z) \Delta_{xy} \sigma_{zz} - \beta_2(z) \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial z^2} ((2\beta_1(z) - \beta_2(z)) \sigma_{zz} - (\alpha(z) - \alpha'(z)) T). \quad (9)$$

Тут

$$\beta_6(z) = \frac{E'(z) - E(z)}{E(z)E'(z)}.$$

Таким чином вихідні рівняння задач теорії пружності та термопружності (1) – (3) зведено до системи ключових рівнянь (5), (7), (9) та співвідношень (4). У випадку однорідного трансверсально ізотропного матеріалу вказані рівняння зводяться до отриманих у роботі [8].

Слід зауважити, що рівняння (5) та (9) містять як невідомі лише сумарні та нормальні напруження σ та σ_{zz} . Тому з використанням підходу [7] їх можна звести до двох інтегральних рівнянь, які записано окремо для кожної з вказаних функцій. Після їх знаходження з урахуванням відповідних крайових умов, записаних на основі вихідних умов в напруженнях за допомогою рівнянь (1) та співвідношення (6), напруження σ_{xx} та σ_{yy} слід визначити з рівнянь (7) з використанням (4). Після цього дотичні напруження знайдемо з рівнянь (4).

Наприклад, у випадку відсутності температурного поля із застосуванням подвійного інтегрального перетворення Фур'є за змінними у площині ізотропії рівняння (5) та (9) запишемо у вигляді

$$\bar{\Delta} \bar{\sigma}_{zz} = 2s^2 G(z) \beta_1(z) \bar{\sigma}_{zz} - \frac{s^2 \bar{\sigma}}{1 + \nu(z)}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} \left(\frac{1 - \nu(z)}{E(z)} \bar{\sigma} \right) = \beta_7(z) \bar{\sigma}_{zz} + \\ + \beta_8(z) \frac{d \bar{\sigma}_{zz}}{dz} + \beta_9(z) \frac{d^2 \bar{\sigma}_{zz}}{dz^2}, \end{aligned} \quad (11)$$

де $s^2 = s_x^2 + s_y^2$, s_x і s_y – параметри перетворення за x та y ,

$$\bar{\Delta} = \frac{d^2}{dz^2} - s^2,$$

$$\begin{aligned} \beta_7(z) = \frac{d^2}{dz^2} (2\beta_1(z) - \beta_2(z)) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{G'(z)} \right) - \\ - s^2 (\beta_6(z) + (1 + \nu(z) + E(z)\beta_1(z))\beta_1(z)), \end{aligned}$$

$$\beta_8(z) = 2 \frac{d}{dz} (2\beta_1(z) - \beta_2(z)),$$

$$\beta_9(z) = (3 + \nu(z))\beta_1(z) - 2\beta_2(z),$$

а рискою зверху позначено зображення функцій у просторі інтегрального перетворення. Легко бачити, що розв'язавши рівняння (11) відносно $\bar{\sigma}$ та підставивши результат у (10), отримаємо інтегральне рівняння для $\bar{\sigma}_{zz}$, яке можна розв'язати відомими методами. Зокрема, якщо застосувати метод резольвентного ядра [7], вираз для $\bar{\sigma}_{zz}$ знайдемо у вигляді ряду повторних ядер, отриманих рекурентно на основі ядра вихідного інтегрального рівняння. Це дає змогу побудувати явний розв'язок задачі. Зауважимо, що застосування такого підходу дозволяє отримати ключові рівняння без необхідності підвищення диферен-

ціального порядку рівнянь, що у випадку змінних властивостей матеріалу (змінних коефіцієнтів рівнянь) є суттєвою перевагою. Визначальні функції в отриманих рівняннях є фізичними величинами, що дає змогу безпосередньої перевірки адекватності розв'язку шляхом використання загальних критеріїв та принципів механіки деформівного твердого тіла [6]. Метод можна поширити для аналізу трансверсально ізотропних неоднорідних тіл з довільними залежностями властивостей матеріалу від просторових координат.

Список використаних джерел

1. Калиняк Б.М. Прямі та обернені задачі термомеханіки стосовно оптимізації та ідентифікації термонапруженого стану деформівних твердих тіл / Б.М. Калиняк, Ю.В. Токовий, А.В. Ясінський // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2016. – 59, № 3. – С. 28–42.
2. Колчин Г.Б. Расчет элементов конструкций из упругих неоднородных материалов / Г.Б. Колчин. – Кишинев: Карта Молдовеняскэ, 1971. – 172 с.
3. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – Москва: Наука, 1977. – 416 с.
4. Ding H. Elasticity of Transversely Isotropic Materials / H. Ding, W. Chen, L. Zhang. – Dordrecht: Springer, 2006. – 435 p.
5. Tanigawa Y. Some basic thermoelastic problems for nonhomogeneous structural materials / Y. Tanigawa // Applied Mechanics Reviews. – 1995. – 48, No. 6. – P. 287–300.
6. Tokovyy Y.V. Direct integration method / Y.V. Tokovyy // in R.B. Hetnarski (ed.) Encyclopedia of Thermal Stresses. – Dordrecht: Springer, 2014 – 2. – P. 951–960.
7. Tokovyy Y.V. Nonhomogeneous solids: Integral equations approach / Y.V. Tokovyy, B.M. Kalynyak, C.-C. Ma // in R.B. Hetnarski (ed.) Encyclopedia of Thermal Stresses. – Dordrecht: Springer, 2014 – 7. – P. 3350–3356.
8. Tokovyy Y. Direct integration of three-dimensional thermoelasticity equations for a transversely isotropic layer / Y. Tokovyy // Journal of Thermal Stresses. – 2019. – 42, No. 1. – P. 49–64.

References

1. KALYNYAK, B.M., TOKOVYY, Y.V., and YASINSKYY, A.V. (2019) Pryami ta obnreni zadachi termomekhaniki stosovno optimizatsiyi ta identifikatsiyi termonapruzheno ho stanu deformivnikh tverdykh til. *Matematichni metody ta fizyko-mekhanichni polya*. 236(1). p. 21–34.
2. KOLCHIN, G.B. (1971) *Raschet elementov konstrukcij iz uprugikh neodnorodnykh materialov*. Chisinau: Kartya Moldoveniaske.
3. LEKHNITSKII, S.G. (1977). *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela*. Moscow: Nauka.
4. DING, H., CHEN, W., and ZHANG, L. (2006). *Elasticity of transversely isotropic materials*. Dordrecht: Springer.
5. TANIGAWA, Y. (1995) Some basic thermoelastic problems for nonhomogeneous structural materials. *Applied Mechanics Reviews*. 48(6). p. 287–300.
6. TOKOVYY, Y.V. (2014). Direct integration method. In R.B. Hetnarski (ed.) *Encyclopedia of Thermal Stresses*, Dordrecht: Springer. 2. p. 951–960.
7. TOKOVYY, Y.V., KALYNYAK, B.M., and MA, C.-C. (2014). Nonhomogeneous solids: Integral equations approach In R. B. Hetnarski (ed.) *Encyclopedia of Thermal Stresses*, Dordrecht: Springer. 7. p. 3350–3356.
8. TOKOVYY, Y. (2019) Direct integration of three-dimensional thermoelasticity equations for a transversely isotropic layer. *Journal of Thermal Stresses*. 42(1). p. 49–64.

Надійшла до редколегії 12.08.19

УДК 539.3

Лавренюк М. В.¹, к.ф.-м.н., доц.

**Методи розрахунку прогину
ортотропної неоднорідної пластини на
пружній основі**

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01033, м. Київ, вул.
Володимирська, 64,
e-mail: mlavrenyuk@univ.kiev.ua

M. V. Lavrenyuk¹, Ph.D. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.

**Methods of calculating the deflection of an
orthotropic inhomogeneous plate on an elastic
basis**

¹ Kyiv Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 01033, Kyiv, Volodymyrs'ka str., 64,
e-mail: mlavrenyuk@univ.kiev.ua

Розглянуто задачу пружної рівноваги ортотропної неоднорідної прямокутної пластини на пружній основі, шарнірно закріпленої з усіх сторін. Проаналізовано придатність методу послідовних наближень та методу збурень для чисельного розв'язання задачі визначення напружено-деформованого стану такої пластини. Встановлені залежності прогину від механічних і геометричних параметрів пластини і основи. В роботі використовується метод Нав'є для знаходження функції прогинів на кожному кроці ітераційного процесу та методи збурень та послідовних наближень як ітераційні методи розв'язання задачі.

Ключові слова: метод послідовних наближень, метод збурень, ортотропна неоднорідна пластина.

The problem of elastic equilibrium of an orthotropic nonhomogeneous rectangular plate on an elastic basis (one-parameter Winkler model) is considered, hingedly fixed from all sides.

We use the Navier method for finding the deflection function at each step of the iterative process and perturbation methods and successive approximations as iterative methods for solving the problem.

The suitability of the method of successive approximations and the method of perturbations for the numerical solution of the problem of determining the stress-strain state of such a plate, the limits of the applicability of these methods, their accuracy and convergence of the iterative process in solving the deformation problems of heterogeneous orthotropic plates have been analyzed.

The dependence of the deflection on the mechanical and geometric parameters of the plate and the base is established. It was found that the Poisson ratio practically does not affect the stress state of the plate (when the Poisson ratio is changed two times, the difference between the intensities of the shear stresses does not exceed 10%), it is possible to consider it as a constant using the methods of successive approximations and disturbances. It is also established that the method of successive approximations and the method of perturbations has a limit on the nature of inhomogeneity, the convergence essentially depends on the nature of the heterogeneity.

Key Words: method of successive approximations, perturbation method, orthotropic inhomogeneous plate.

Статтю представив д.техн.н., проф. Лимарченко О.С.

В останні роки все ширше використовуються композитні матеріали, особливо в аерокосмічній, автомобільній та судноплавній галузях. Композити зазвичай складаються з двох або більше матеріалів, які поєднують для утворення нового матеріалу з потрібними властивостями. Такі композити часто представлені у вигляді

пластин, що мають складну неоднорідну структуру.

Зокрема, прямокутна, поперечно навантажена пластина зі змінними геометричними і механічними параметрами може спиратися на пружну основу, як, наприклад, в покриттях автомобільних доріг, мостів або злітно-посадкових смуг аеродромів. Для аналізу

міцності і надійності таких конструкцій потрібно знати їх напружено-деформований стан.

Задача згину неоднорідних анізотропних пластин на пружній основі є однією з актуальних задач теорії пружності. В замкнутій аналітичній формі розв'язок цієї задачі можна побудувати лише для деяких крайових задач [1]–[3].

Альтернативним підходом є пошук наближеного розв'язання цієї задачі [4]–[6] є представлення розв'язку у вигляді рядів. Також, можна використовуючи варіаційні методи, звести вихідні рівняння в частинних похідних до системи звичайних диференціальних рівнянь. Недоліком цих методів є їх явна залежність від способів задання крайових умов і видів навантаження. Застосування скінченно-різницевого підходу призводить до труднощів задання граничних умов та задовільної точності одержаних чисельних розв'язків.

У даній роботі для чисельного розв'язання задачі про згин пластини застосовується комбінований чисельно-аналітичний підхід. У якості ітераційних методів розв'язання задачі використовуються методи збурень та послідовних наближень, а для знаходження функції прогинів на кожному кроці ітераційного процесу – метод Нав'є.

Також в роботі проаналізовано придатність методу послідовних наближень та методу збурень для чисельного розв'язання задачі визначення напружено-деформованого стану пружної неоднорідної ортотропної пластини на пружній основі, межі застосування цих методів, їх точність та збіжність ітераційного процесу при розв'язанні задач деформації неоднорідних ортотропних пластин.

Розглянемо пружну неоднорідну ортотропну тонку прямокутну пластину на пружній вінклерівській основі. На пластину діє розподілене поперечне навантаження, а краї пластини шарнірно закріплені. Рівняння рівноваги в прогинах для пружної неоднорідної ортотропної пластини на пружній вінклерівській основі запишемо у вигляді:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_1 + 2D_{xy}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \left(\frac{\partial^2 D_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D_1}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 D_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D_y}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \left(\frac{\partial^2 D_1}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 D_{xy}}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial D_1}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} +$$

$$+ 4 \frac{\partial D_1}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 4 \frac{\partial D_{xy}}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} + 4 \frac{\partial D_{xy}}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 2 \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial D_y}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) + c_1 w = q.$$

Граничні умови на контурі $x = \text{const}$ запишуться:

$$w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

$$\text{а на контурі } y = \text{const}: w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

$$\text{Тут } D_{xy} = \frac{C_1 h^3}{12}, D_1 = \frac{\alpha_{xy} h^3}{12}, D_x = \frac{\alpha_x h^3}{12},$$

$$D_y = \frac{\alpha_y h^3}{12}, \alpha_{xy}, \alpha_y, \alpha_x - \text{параметри пружності,}$$

C_1 – модуль зсуву.

Розглянемо метод послідовних наближень для нашої задачі. Рівняння рівноваги можна переписати у наступному вигляді:

$$\langle D_x \rangle \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(\langle D_1 \rangle + 2\langle D_{xy} \rangle) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \langle D_y \rangle \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + c_1 w = q - \overline{D_x} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(\overline{D_1} + 2\overline{D_{xy}}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \overline{D_y} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \left(\frac{\partial^2 \overline{D_x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{D_1}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 \overline{D_1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{D_y}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \left(\frac{\partial^2 \overline{D_1}}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 \overline{D_{xy}}}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial \overline{D_1}}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} + 4 \frac{\partial \overline{D_{xy}}}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 4 \frac{\partial \overline{D_{xy}}}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} + 2 \left(\frac{\partial \overline{D_x}}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial \overline{D_y}}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right).$$

Для k -го кроку методу одержимо наступну крайову задачу:

Рівняння рівноваги

$$\langle D_x \rangle \frac{\partial^4 w^{(k)}}{\partial x^4} + 2(\langle D_1 \rangle + 2\langle D_{xy} \rangle) \frac{\partial^4 w^{(k)}}{\partial x^2 \partial y^2} + \langle D_y \rangle \frac{\partial^4 w^{(k)}}{\partial y^4} + c_1 w^{(k)} = q - \overline{D_x} \frac{\partial^4 w^{(k-1)}}{\partial x^4} + 2(\overline{D_1} + 2\overline{D_{xy}}) \frac{\partial^4 w^{(k-1)}}{\partial x^2 \partial y^2} + \overline{D_y} \frac{\partial^4 w^{(k-1)}}{\partial y^4} - \left(\frac{\partial^2 \overline{D_x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{D_1}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w^{(k-1)}}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 \overline{D_1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{D_y}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w^{(k-1)}}{\partial y^2} + 2 \left(\frac{\partial^2 \overline{D_1}}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 \overline{D_{xy}}}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial^2 w^{(k-1)}}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial \overline{D_1}}{\partial x} \frac{\partial^3 w^{(k-1)}}{\partial y^2 \partial x} +$$

$$+4 \frac{\partial \overline{D}_1}{\partial y} \frac{\partial^3 w^{(k-1)}}{\partial x^2 \partial y} + 4 \frac{\partial \overline{D}_{xy}}{\partial x} \frac{\partial^3 w^{(k-1)}}{\partial y^2 \partial x} + 4 \frac{\partial \overline{D}_{xy}}{\partial y} \frac{\partial^3 w^{(k-1)}}{\partial x^2 \partial y} +$$

$$+ 2 \left(\frac{\partial \overline{D}_x}{\partial x} \frac{\partial^3 w^{(k-1)}}{\partial x^3} + \frac{\partial \overline{D}_y}{\partial y} \frac{\partial^3 w^{(k-1)}}{\partial y^3} \right),$$

та граничні умови на контурі $x = const$:

$$w^{(1)} = 0, D_x \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial y^2} = 0,$$

а на контурі $y = const$:

$$w^{(1)} = 0, D_y \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial x^2} = 0.$$

Ітераційний процес триває доти, доки $\max_{0 \leq x \leq a} |w^{(k)} - w^{(k-1)}| > \varepsilon$, де ε – задана наперед точність обчислень.

Розглянемо тепер визначальні співвідношення методу збурень для нашої задачі. Визначальні

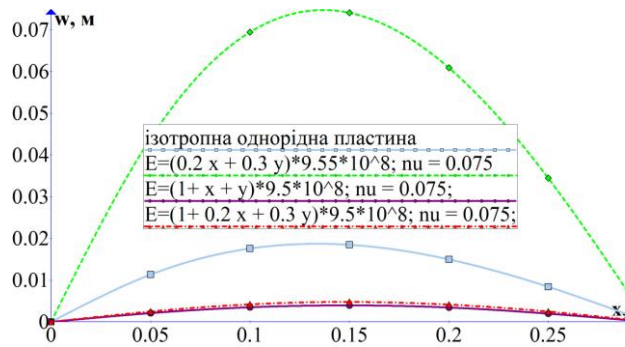


Рис. 1 Прогин однорідної та лінійно-неоднорідних пластин

співвідношення методу збурень [7] для k -го кроку записуються у вигляді:

$$w^{(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^{(k)} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right),$$

$$a_{mn}^{(k)} = \frac{q_{mn}^{(k)}}{\left(D_x \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2H \frac{m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b^2} + D_y \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 + c_1 \right)},$$

$$q_{mn}^{(k)} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q^{(k)}(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy,$$

$$q^{(0)} = q,$$

$$q^{(k)} = - \left(\frac{\partial^2 \overline{D}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{D}_1}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w^{(k-1)}}{\partial x^2} -$$

$$- \left(\frac{\partial^2 \overline{D}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{D}_y}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w^{(k-1)}}{\partial y^2} -$$

$$- 2 \left(\frac{\partial^2 \overline{D}_1}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 \overline{D}_{xy}}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial^2 w^{(k-1)}}{\partial x \partial y} - 4 \frac{\partial \overline{D}_1}{\partial x} \frac{\partial^3 w^{(k-1)}}{\partial y^2 \partial x} -$$

$$- 4 \frac{\partial \overline{D}_1}{\partial y} \frac{\partial^3 w^{(k-1)}}{\partial x^2 \partial y} - 4 \frac{\partial \overline{D}_{xy}}{\partial x} \frac{\partial^3 w^{(k-1)}}{\partial y^2 \partial x} - 4 \frac{\partial \overline{D}_{xy}}{\partial y} \frac{\partial^3 w^{(k-1)}}{\partial x^2 \partial y} -$$

$$- 2 \left(\frac{\partial \overline{D}_x}{\partial x} \frac{\partial^3 w^{(k-1)}}{\partial x^3} + \frac{\partial \overline{D}_y}{\partial y} \frac{\partial^3 w^{(k-1)}}{\partial y^3} \right), k \geq 1.$$

Як і для методу послідовних наближень, граничні умови автоматично задовольняються на кожному кроці ітерації.

Ітераційний процес триває доти, доки $\max_{0 \leq x \leq a} |w^{(k)}| > \varepsilon$, де ε – задана наперед точність обчислень.

Коефіцієнт основи для моделі Вінклера брався рівним $c_1 = 5 \cdot 10^7$. Геометричні характеристики пластини: $a = 0.3$ м; $b = 0.3$ м; $h = 0.02$ м.

Для ізотропного матеріалу модуль Юнга задавався лінійною функцією координат, а коефіцієнт Пуасона та товщина пластини – постійними. Для анізотропного матеріалу D_x і D_y задавалися лінійними функціями координат, а D_{xy} та D_1 – постійними. Розглядалися пластини з фанери ($s_{11} = 1.18 \cdot 10^{-9}$ м²/Н, $s_{22} = 2.37 \cdot 10^{-9}$ м²/Н, $s_{12} = -0.852 \cdot 10^{-10}$ м²/Н, $s_{66} = 2.03 \cdot 10^{-8}$ м²/Н, $\alpha_x = 8.497 \cdot 10^8$ Н/м², $\alpha_y = 4.230 \cdot 10^8$ Н/м², $\alpha_{xy} = 3.055 \cdot 10^7$ Н/м², $G_{xy} = 4.926 \cdot 10^7$ Н/м²) та з гіпотетичного крихкого ізотропного матеріалу, близького по модулю Юнга до текстоліту (для

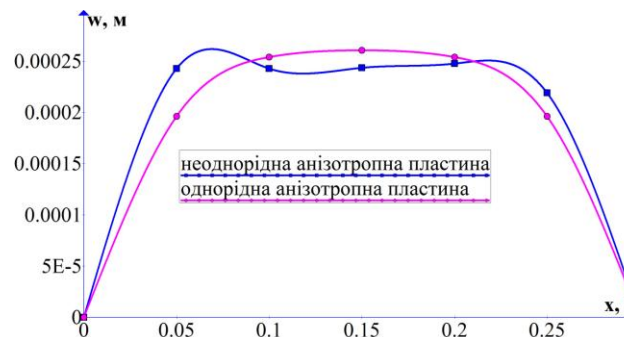


Рис. 2 Прогин однорідної та неоднорідної анізотропних пластин

порівняння брався матеріал із коефіцієнтом Пуасона як середнє між коефіцієнтами Пуасона вздовж (0.085) та поперек (0.065) волокон зовнішніх шарів фанери. і модулем Юнга як середнє між α_x та α_y).

На рисунку 1 наведено величини прогину вздовж осі симетрії однорідної та неоднорідної ізотропних пластин. На рисунку 2 наведено величини прогину вздовж осі симетрії однорідної та неоднорідних ізотропних пластин з лінійним

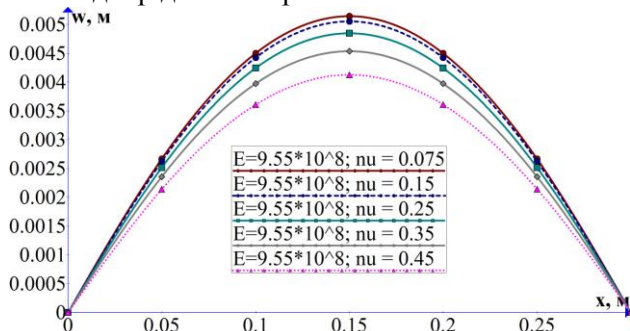


Рис. 3 Прогин однорідних ізотропних пластин, $0.075 \leq \nu \leq 0.45$

розподілом величини модуля Юнга. На рисунку 3 наведено величини прогину вздовж осі симетрії однорідних ізотропних пластин для різних значень коефіцієнта Пуасона. Коефіцієнт Пуасона для всіх пластин брався рівним 0.075.

На основі проведених чисельних розрахунків можна зробити наступні висновки:

1) коефіцієнт Пуасона практично не впливає на напружений стан пластини (при зміні коефіцієнт Пуасона в два рази, різниця між інтенсивностями дотичних напружень не перевищує 10%), тому можна при використанні методу послідовних наближень вважати його постійним, що суттєво спрощує алгоритм розв'язання задачі;

2) метод послідовних наближень, як і метод збурень, допускають відхилення $D_1(x, y)$, $D_x(x, y)$, $D_y(x, y)$, $D_{xy}(x, y)$ від їх відповідних осереднених значень $\langle D_1 \rangle$, $\langle D_x \rangle$, $\langle D_y \rangle$, $\langle D_{xy} \rangle$ не більше ніж на 10%;

3) метод послідовних наближень, як і метод збурень, доволі чутливі до характеру неоднорідності пружних характеристик пластини.

Список використаних джерел

1. Григоренко Я.М., Мольченко Л.В. Основи теорії пластин та оболонок з елементами магнітопружності, Київ: Вид-во Київський ун-т, 2010. – 403 с.
2. Lekhnitsky S.G. The anisotropic plates. M.: Gostekhizdat, 1957. – 463p.
3. Vlasov V.Z., Leontjev N.N. Beam, plates and shells on elastic foundation, M: Physmatgiz, 1960. – 491p.
4. Идимешев С.В. // Расчет напряженно-деформированного состояния изотропных прямоугольных пластин на упругом основании, Известия Алтайского государственного университета, 2014. – №1(81). – С. 53-56
5. Lenser Aghalovyan // Asymptotic theory of anisotropic plates and shells, Journal of National Academy of Sciences of Armenia. – 2009 – №1(62), – pp. 5-39.
6. Tovstik P.E., Tovstik T.P. // Two-dimensional models of shells made of an anisotropic material, Acta mechanica. 2014. – №3(225), – pp. 647–661
7. Nayfeh A.H. Perturbation methods. John Wiley and Sons. – 1973. – 455p.

References

1. HRYHORENKO YA.M., MOLCHENKO L.V. (2010) *Osnovy teorii plastyn ta obolonok z elementamy mahnitoprzhnosti*. Kyiv: Vydavnytstvo Kyivskiy universytet.
2. LEKHNITSKY S.G. (1957) *The anisotropic plates*. Moskva: Gostekhizdat.
3. VLASOV V.Z., LEONTJEV N.N. (1960) *Beam, plates and shells on elastic foundation*. Moskva: Physmatgiz.
4. IDIMESHEV S.V. (2014) *Raschet napriazhenno-deformirovannogo sostoianiya yzotropnykh priamouholnykh plastyn na uprugom osnovanyu*. *Yzvestiya Altaiskoho hosudarstvennoho unyversyteta*. 81 (1). p. 53-56.
5. LENSER A. (2009) *Asymptotic theory of anisotropic plates and shells*. *Journal of National Academy of Sciences of Armenia*. 62 (1). p.5-39.
6. TOVSTIK P.E., TOVSTIK T.P. (2014) *Two-dimensional models of shells made of an anisotropic material*. *Acta mechanica*. 225 (3). p.647-661.
7. Nayfeh A.H. (1973) *Perturbation methods*. Weinheim: John Wiley and Sons.

Надійшла до редколегії 20.06.2019

УДК 532.595

Лимарченко О. С.¹, д. т. н., проф.
Слюсарчук Ю. А.¹, аспірант.

**Аналіз впливу маси резервуару на
поведінку системи сферичний резервуар
– рідина з вільною поверхнею**

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4е,
e-mail: julija0711@gmail.com

O. S. Limarchenko¹, Full Doctor, Professor
Y. A. Sliusarchuk¹, PhD Student.

**Analysis of reservoir's mass influence on
the system free – surfaced liquid and
spherical reservoir**

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4e,
e-mail: julija0711@gmail.com

У рамках моделі сумісного руху досліджено вплив співвідношення маси резервуару і рідини на поведінку сферичного резервуару з вільною поверхнею при гармонічному збудженні. Досліджено поведінку системи для двох випадків: маса резервуару в 5 разів менша за масу рідини та маса резервуару в 5 разів більша за масу рідини. Показано, що збільшення відносної маси рідини не сприяє виходу системи на впорядкований режим коливань.

Ключові слова: резервуар, вільна поверхня рідини, дрейф середнього коливань, модуляція.

Within the framework of combined motion the effect of ratio of masses of reservoir and liquid on the behavior of a free surface of liquid in the reservoir of spherical shape is studied. We suppose that liquid is ideal and it fills partially the reservoir. Mathematical modelling is done on the basis of the model, which takes into account combined character of nonlinear dynamics of liquid and the reservoir. Examples were done based on mathematical model of combined motion of liquid in spherical reservoir and free-surfaced liquid under harmonic force disturbance in horizontal direction. Two cases of the ratio of masses in the system are considered. First, the mass of the reservoir is 5 times less than the mass of the liquid; the mass of the reservoir is 5 times greater than the mass of the liquid. In order to identify specific features of the system behavior, the results were compared with the results for liquid behavior in cylindrical and conical reservoirs. It was ascertained that mass increasing has no tendency of converging to a steady mode of motion, which was confirmed experimentally. Distinctions of manifestation of nonlinear processes for the below-resonance, near-resonance and above-resonance modes are shown. We note manifestation of nonlinear effects such as modulation, the presence of high-frequency normal modes of oscillations, antiresonance and drift of the mean of oscillations.

Key Words: reservoir, free-surfaced liquid, drift of oscillation, modulation.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Жук Я.О.

Практичні потреби техніки зумовлюють інтерес до задач динаміки рідини, яка знаходиться в резервуарі. У більшості випадків рідина не цілком заповнює резервуар і при транспортуванні таких систем виникають коливання вільної поверхні. При великій відносній масі рідини її хвильові рухи істотніше впливають на поведінку системи, тому з практичного погляду важливо розглянути цей випадок. Для дослідження задачі було використано модель [1], яка була протестована для задач динаміки резервуарів з рідиною з вільною поверхнею в дорезонансному,

резонансному та зарезонансному діапазонах зміни частот. Метою цієї роботи є вивчення особливостей динамічної взаємодії рідини з сферичним резервуаром для випадків різного співвідношення маси резервуару та рідини.

Математичне формулювання задачі про рух системи резервуар – рідина з вільною поверхнею, складається з кінематичних умов, динамічних рівнянь та початкових умов [1]. Кінематичні умови розглядаються як механічні в'язі. Динамічні граничні умови та рівняння руху отримані на основі варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського.

Для досліджуваної системи до кінематичних умов слід віднести вимогу нерозривності потоку в області τ

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } \tau;$$

умову неперетікання на границі контакту тіло – рідина Σ з ортом зовнішньої нормалі $\vec{n}$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{n} \text{ на } \Sigma;$$

і умову неперетікання на вільній поверхні рідини

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{1}{f^2} \frac{\partial\xi}{\partial\alpha} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{1}{\alpha^2 f^2} \frac{\partial\xi}{\partial\theta} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{\alpha f'}{f} \frac{\partial\xi}{\partial\alpha} \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$$

$$\text{при } \beta = \frac{1}{H} \xi(\alpha, \theta, t)$$

Динамічна гранична умова має наступний вигляд

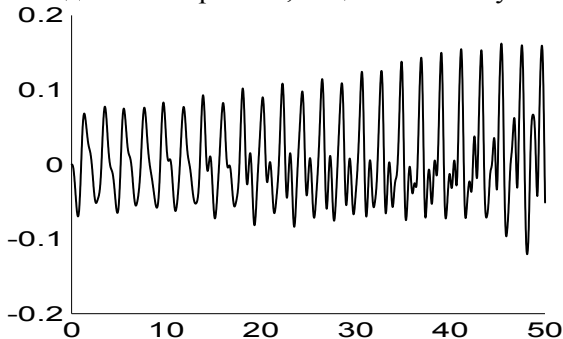
$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\vec{\nabla}\varphi)^2 - \vec{\nabla}\varphi \cdot \dot{\vec{\varepsilon}} - \vec{g} \cdot \vec{r} = 0 \text{ на } S.$$

Динамічні граничні умови та рівняння руху отримуються з принципу Гамільтона – Остроградського з функцією Лагранжа у вигляді:

$$L = \frac{\rho}{2} \int_{\tau} (\vec{\nabla}\varphi)^2 d\tau + \frac{1}{2} M_p (\dot{\vec{\varepsilon}})^2 - \frac{1}{2} \rho g \int_{S_0} \xi^2 dS - (M_p + M_f) \varepsilon_z g.$$

Кінематичні умови розглядаються як кінематичні в'язі відносно варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського. Для ефективного застосування варіаційних методів всім кінематичним обмеженням необхідно задовольнити до розв'язання варіаційної задачі. Отримується варіаційна задача для вільної системи, для якої записуються рівняння Лагранжа другого роду.

Побудова нелінійної дискретної моделі динаміки сумісного руху тіла з рідиною з вільною поверхнею здійснюється на основі метода Канторовича, що застосовується до



варіаційного формулювання задачі динаміки системи, отриманої на основі варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського. Були введені наступні узагальнені координати: a_i – амплітуди збудження форм коливань рідини; α_i – кути відхилення резервуару; ε_i – параметри поступального руху резервуару.

Рівняння сумісного руху системи резервуар – рідина можна представити в наступному вигляді:

$$\sum_{n=1}^N p_{rn}(a_k, t) \ddot{a}_n + \sum_{n=N+1}^{N+3} p_{rn}(a_k, t) \ddot{\varepsilon}_{n-N} = q_r(a_k, \dot{a}_l, t)$$

$$r = \overline{1, N+3}$$

де p_{rn} – квадратна матриця, а q_r – вектор розмірності $N+3$.

Досліджувався сумісний рух сферичного резервуару і рідини з вільною поверхнею при русі під дією періодичної сили $Y = A \sin(\omega t)$ в горизонтальній площині. Поведінка системи розглядалась для двох випадків:

– маса резервуару в 5 разів менша за масу рідини $M_r = 0.2 M_g$;

– маса резервуару в 5 разів більша за масу рідини $M_r = 5 M_g$

Для цієї задачі поведінку системи було розглянуто для частоти $0.5\omega_N$ в дорезонансному діапазоні (рис. 1), для частот $0.9\omega_N$ (рис. 2), $0.98\omega_N$ (рис. 3), $1.02\omega_N$ (рис. 4) в малому околі резонансної частоти, а також для частот $1.1\omega_N$ (рис. 5) та $1.5\omega_N$ (рис. 6) більших за резонансні. ω_N – власна частота сумісного руху рідини та резервуару, яка залежить від співвідношення їх мас.

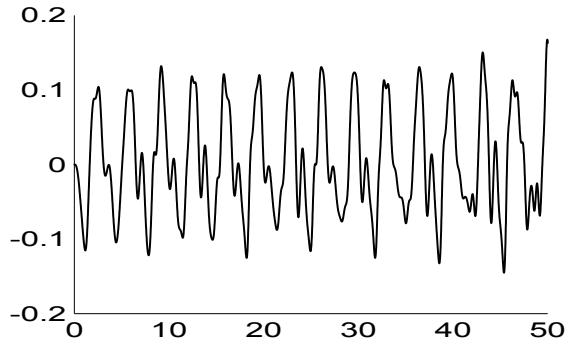


Рис. 1. Збурення вільної поверхні рідини для дорезонансної частоти ($0.5\omega_N$)

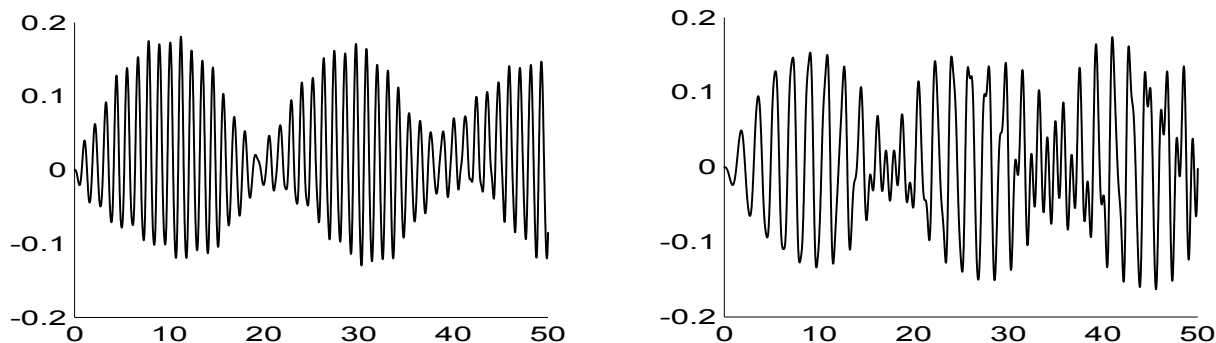


Рис. 2. Збурення вільної поверхні рідини для резонансної частоти ($0.9\omega_N$)

На рисунках показано залежність амплітуди коливань від часу в секундах для випадків $M_r = 0.2M_g$ (ліворуч) та $M_r = 5M_g$ (праворуч). По вісі x відкладений час, по вісі y – збурення.

З рисунків можна помітити, що зі збільшенням маси розглянутого резервуару і значення частоти вплив модуляції коливань посилюється.

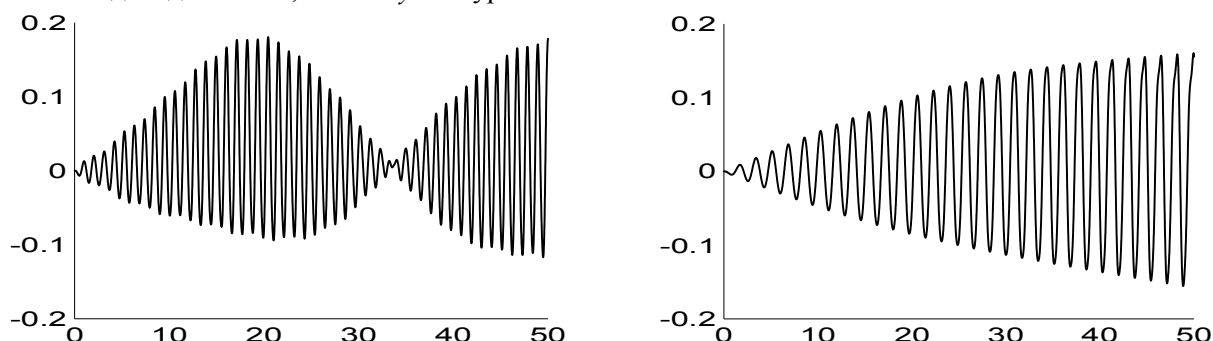


Рис. 3. Збурення вільної поверхні рідини для резонансної частоти ($0.98\omega_N$)

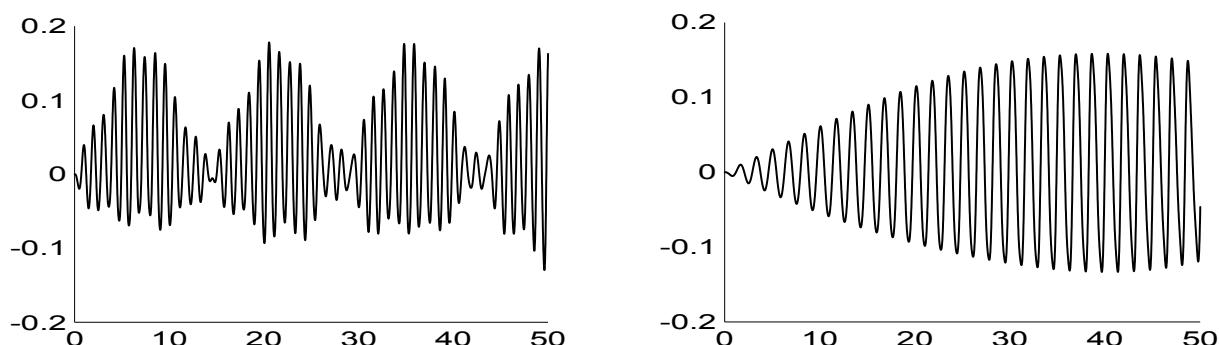


Рис.4. Збурення вільної поверхні рідини для резонансної частоти ($1.02\omega_N$)

Ефект модуляції коливань проявляється для випадку $M_r = 5M_g$ в білярезонансному та зарезонансному діапазонах зміни частот. З рисунків видно, що ефект антирезонансу більше проявляється для випадку $M_r = 0.2M_g$. Для резонансного діапазону характерними є несиметрія та дрейф середнього. Для коливань системи в нелінійному діапазоні збурень характерним також є вплив вищих гармонік,

який більш суттєво проявляється для частоти $0.5\omega_N$ та $1.5\omega_N$ у випадку, коли маса резервуару в 5 разів менша за масу рідини.

Аналіз коливань для більшого часового проміжку свідчить про те, що для коливань системи в резонансному діапазоні збурень період модуляції для сферичного резервуару, який в 5 разів важчий за рідину, більший.

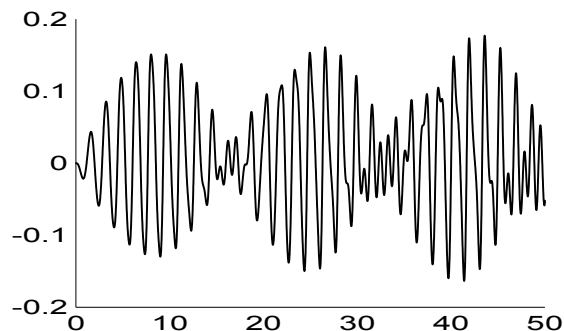
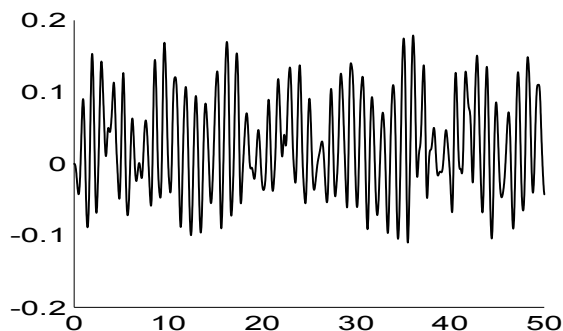


Рис. 5. Збурення вільної поверхні рідини для зарезонансної частоти ($1.1\omega_N$)

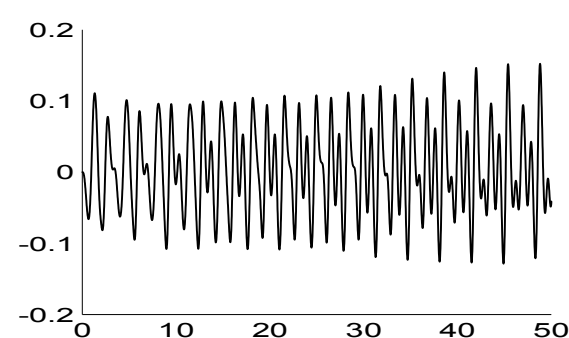
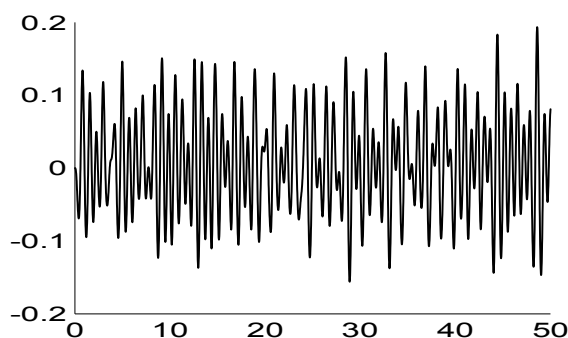


Рис. 6. Збурення вільної поверхні рідини для зарезонансної частоти ($1.5\omega_N$)

Отже, аналіз залежності розвитку динамічних процесів від співвідношення маси резервуару і маси рідини свідчить про те, що збільшення відносної маси рідини не сприяє виходу системи на впорядкований режим коливань. Помічено різницю прояву нелінійних процесів для

дорезонансного, біларезонансного та зарезонансного діапазонів зміни частот. Для сферичного резервуару було виявлено прояв таких нелінійних ефектів як модуляція, вплив вищих гармонік, антирезонанс та дрейф середнього значення, які засвідчені в експериментах.

Список використаних джерел

1. Лимарченко О.С. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью / О. С. Лимарченко, В. В. Ясинский. – Киев: Национальный технический университет Украины "КПИ" – 1997. – 348 с.
2. Лимарченко О.С. Динамічна поведінка резервуара в формі тіла обертання під дією гармонічної сили в дорезонансному діапазоні частот / О. С. Лимарченко, О. Ю. Паранькіна, Ю. А. Слюсарчук // *Mathematical Modeling and Computing*. – 2017. – 4, № 2. – С. 156-161.
3. Лимарченко О.С. Резонансна поведінка вільної поверхні рідини в резервуарі в формі тіла обертання / О. С. Лимарченко, О. Ю. Паранькіна, Ю. А. Слюсарчук // *Збірник праць Інституту математики НАН України*. – 2016. – 13. – 2, Р. 1–9.
4. Лимарченко О.С. Поведінка системи нециліндричного резервуару – рідина у зарезонансному діапазоні зміни частот / О. С. Лимарченко, О. Ю. Паранькіна, Ю. А. Слюсарчук // *Механіка гіроскопічних систем*. – 2018. – С. 5 – 10.

References

1. LIMARCHENKO, O.&YASINSKIY, V. (1997) *Nely'nejnaya dy'namy'ka konstrukcy'j s zhy'dkost'yu*. NTUU "KPI".
2. LIMARCHENKO, O.&PARANKINA, O.&SLYSARCHUK, Yu. (2017) *Dy'namiczna povedinka rezervuara v formi tila obertannya pid diyeyu garmonichnoyi syly v dorezonansnomu diapazoni chastot*. *Mathematical Modeling and Computing*. 4(2). P. 156-161.
3. LIMARCHENKO, O.&SLYSARCHUK, Yu &PARANKINA O. (2016) *Rezonansna povedinka vil'noyi poverhni ridyny v rezervuari v formi tila obertannya*. *Zbirnyk prac' Instytutu matematyky NAN Ukrainy*. 13(2). P. 1–9.
4. LIMARCHENKO, O.&SLYSARCHUK, Yu, &PARANKINA O. (2018) *Povedinka systemy necylindrychnyj rezervuar – ridyna u zarezonansnomu diapazoni zminy chastot*. *Mehanika giroskopichnyh system*. P.5–10.

Надійшла до редколегії 08.07.2019

УДК 553.982

Лубков М. В. д.ф.-м.н., с.н.с

M. V. Lubkov, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
Sr. Sci. Researcher

**Застосування скінчено-елементно-
різницьового методу для моделювання
фільтраційних процесів**

**Application of the finite element-differences
method for modeling of filtration processes**

Полтавська гравіметрична обсерваторія
НАНУ, 36015, м. Полтава, вул. Мясоедова
27/29
e-mail: mikhail.lubkov@ukr.net

Poltava Gravimetric Observatory of NASU, 36015,
Poltava, Myasoedova st., 27/29
e-mail: mikhail.lubkov@ukr.net

Розглянуто моделювання і геофізичну інтерпретацію результатів у практиці нафто-газовидобування. Для вирішення цих прикладних проблем застосовано комбінований скінчено-елементно-різницьовий метод розв'язання задачі п'єзопровідності з урахуванням неоднорідного розподілу фільтраційних параметрів нафто-газоносних пластів та умов інфільтрації нафти і газу на їх границях.

Ключові слова: комп'ютерне моделювання, нафто-газовидобування, комбінований скінчено-елементно-різницьовий метод.

We consider modeling and geophysical interpretation of the obtained results in the oil and gas production problems. For solving these practical problems, we use combined finite element-differences method of resolving piezoconductivity problem with calculation of heterogeneous filtration parameters distribution of oil and gas productive reservoirs and oil-gas penetration conditions in the borders of the reservoirs. At that, we consider the main factors, which influence on the intensity of filtration processes near oil production well and gas production well respectively. These factors are important for effective supporting in practice high level of the oil and gas production. On the base of computer modeling, we have showed that intensity of filtration process near the acting oil and gas production wells mainly depends on oil phase and respectively gas phase permeability, as in close zone of well acting so in remote zone. The viscosity and reservoir porosity parameters in close and remote zones of the well action have little direct effect on filtration process near the acting well. However, these parameters can influence on the filtration process implicitly via direct acting on the respective phase permeability. We also have carried out analysis of the pumping well influence on the filtration process near production well in different practical cases.

Key Words: computer modeling, oil and gas producing, combined finite element-differences method.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

У наш час у зв'язку з потужним розвитком обчислювальних методів механіки і математики, а також завдяки досягнутому прогресу в розумінні основних законів фільтрації у пористих колекторських пластах, виникають унікальні можливості дослідження раніше недоступних фільтраційних процесів. Це перш за все стосується процесів, які протікають у специфічних неоднорідних продуктивних пластах нафтоносних і газоконденсатних родовищ. Недосяжність для прямих геологічних і фізичних вимірювань у більшості таких об'єктів,

роблять математичне моделювання одним із основних інструментів дослідження.

Ця стаття присвячена моделюванню і практичному застосуванню результатів у нафто- і газовидобуванні. Для вирішення цих практичних проблем застосовано комбінований скінчено-елементно-різницьовий метод розв'язання нестационарної задачі п'єзопровідності для рідкої фази та задачі п'єзопровідності (Лейбензона) для газової фази з урахуванням інфільтрації відповідної фази на межах розглянутого пласта [1, 2, 3]. У випадку нафтоносного деформованого пласта, враховуючи, що його товщина значно менше горизонтальних розмірів, достатньо

скористатись двовимірною постановкою задачі п'єзопровідності у декартовій системі координат:

$$\frac{\partial P_n}{\partial t} = \chi_n \left(\frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_n}{\partial y^2} \right) + \gamma_n; \quad (1)$$

$$P_n(t=0) = P_n^0; \quad (2)$$

$$k_n \text{grad} P_n = \alpha_n (P_n - P_{zp}). \quad (3)$$

Тут (1) – рівняння п'єзопровідності; (2) – початкова умова; (3) – умова інфільтрації нафти на межах розглянутого пласта; $P_n(x, y, t)$ – тиск пласта, як функція координат і часу; $\chi_n = \frac{k_n}{\eta_n(m_n\beta_1^n + \beta_2^n)}$ – коефіцієнт п'єзопровідності нафти; η_n – коефіцієнт в'язкості нафти; m_n – коефіцієнт пористості пласта; β_1^n – стискання нафти; β_2^n – стискання скелету порід пласта; γ_n – параметр витоку нафти в пласті; P_n^0 – початковий тиск нафти у пласті; k_n – коефіцієнт проникності нафтової фази; α_n – коефіцієнт інфільтрації нафтової фази на границях розглянутої області; P_{zp} – тиск на границях розглянутої області. Відповідно у випадку газоносного пласта двовимірна задача п'єзопровідності Лейбензона набуває вигляду:

$$\frac{\partial P_z^2}{\partial t} = \chi_z \left(\frac{\partial^2 P_z^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_z^2}{\partial y^2} \right) + \gamma_z; \quad (4)$$

$$P_z(t=0) = P_z^0; \quad (5)$$

$$k_z^2 \text{grad} P_z^2 = \alpha_z^2 (P_z^2 - P_{zp}^2). \quad (6)$$

Тут (4) – рівняння п'єзопровідності газової фази (Лейбензона); (5) – початкова умова; (6) – умова інфільтрації газової фази на межах розглянутого пласта; $\chi_z = \frac{k_z P_z^0}{\eta_z m_z}$ – коефіцієнт п'єзопровідності газової фази (Лейбензона). Представлені тут параметри газоносного пласта відповідають аналогічним за індексними позначеннями параметрам нафтоносного пласта.

2. Метод розв'язання задач

У подальшому для спрощення запису математичних виразів індекси, що означають належність до нафтової або газової фази будемо опускати. Для розв'язання нестационарної задачі

п'єзопровідності (1–3) застосовується варіаційний скінчено-елементний метод, що приводить до розв'язання варіаційного рівняння п'єзопровідності [3]:

$$\delta I(P) = 0. \quad (7)$$

Тут $I(P)$ – функціонал задачі п'єзопровідності (1) – (3), який представляється у вигляді [3]:

$$I(P) = \frac{1}{2} \iint_S \left\{ k \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 \right] + 2 \int_{P_0}^P \frac{k}{\chi} \frac{\partial P}{\partial t} \times \right. \\ \left. \times dP - 2\gamma P \right\} dx dy - \frac{1}{2} \int_L \alpha (P - 2P_{zp}) P dl; \quad (8)$$

S – площа перерізу області, яка досліджується, L – контур, що охоплює площу S , dl – елемент контуру. При розв'язанні варіаційного рівняння (7) застосовується восьмивузловий ізопараметричний чотирикутний скінчений елемент [3]. Як глобальна система координат, де відбувається об'єднання всіх скінчених елементів, на які розбито площу S , використовується декартова система (x, y) . В якості локальної системи координат, де в межах скінченого елемента визначаються функції апроксимації φ_i на основі квадратичних поліномів і проводиться чисельне інтегрування, використовується нормалізована система координат (ξ, η) [3]. В цій системі координати, тиск, початковий тиск пласта, тиск на границях області, коефіцієнт інфільтрації нафти на межах області, а також похідні від тиску по координатах апроксимуються наступним чином:

$$x = \sum_{i=1}^8 x_i \varphi_i; y = \sum_{i=1}^8 y_i \varphi_i; P = \sum_{i=1}^8 P_i \varphi_i; \\ P_0 = \sum_{i=1}^8 P_{0i} \varphi_i; P_{zp} = \sum_{i=1}^8 P_{zp}^i \varphi_i; \alpha = \sum_{i=1}^8 \alpha_i \varphi_i;$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \sum_{i=1}^8 P_i \Psi_i; \frac{\partial P}{\partial y} = \sum_{i=1}^8 P_i \Phi_i; \\ \Psi_i = \frac{1}{|J|} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right); \\ \Phi_i = \frac{1}{|J|} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right); \quad (9)$$

$$J = \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad \text{– якобіан переходу між}$$

системами координат (x, y) і (ξ, η) .

Виходячи з варіаційного рівняння (7) і вважаючи, що вузлові значення від похідних тиску за часом dP_i/dt є відомими величинами і не варіюються, складемо систему диференціаль-

них рівнянь для n -го вузла p -го скінченного елемента у вигляді:

$$\frac{\partial I_p}{\partial P_n} = \sum_{i=1}^8 \{H_{ni}^p \frac{dP_i}{dt} + (A_{ni}^p + Q_{ni}^p)P_i - Q_{ni}^p P_0^i\} - \gamma_n^p = 0; \quad (10)$$

$$H_{ij}^p = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{k^p}{\chi^p} \varphi_i \varphi_j |J| d\xi d\eta;$$

$$A_{ij}^p = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k^p (\Psi_i \Psi_j + \Phi_i \Phi_j) |J| d\xi d\eta;$$

$$Q_{ij}^p = \int_L \alpha \varphi_i \varphi_j dl; \gamma_i^p = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \gamma^p \varphi_i |J| d\xi d\eta.$$

Для розв'язання системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку (10) при початкових умовах з (9) використовується метод скінчених різниць, в якому апроксимація похідної за часом здійснюється на основі неявної різницевої схеми [1, 5]:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t}. \quad (11)$$

Підставляючи вираз (11) в систему (10), отримуємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{i=1}^8 \{(\frac{1}{\Delta t} H_{ni}^p + A_{ni}^p + Q_{ni}^p)P_i(t + \Delta t) - \frac{1}{\Delta t} H_{ni}^p P_i(t) - Q_{ni}^p P_0^i\} - \gamma_n^p = 0 \quad (n=1-8). \quad (12)$$

Додаючи рівняння (12) по всіх скінчених елементах, отримуємо глобальну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, що дозволяє визначати невідомі значення тиску в момент часу $t + \Delta t$ через їх значення в попередній момент часу t . Розв'язання глобальної системи рівнянь здійснюється на основі чисельного методу Гауса без вибору головного елемента [3]. В результаті розв'язання, тиск визначається в усіх вузлових точках скінчено-елементної сітки. По знайдених вузлових значеннях тиск визначається у довільній точці нафтоносного пласта досліджуваної області будь-який момент часу.

При розгляді задачі п'єзопровідності для газової фази (Лейбензона) (4-6), після заміни $\tilde{P} = P^2$ хід розв'язання задачі подібний.

3. Моделювання процесів фільтрації у нафтоносному пласті

Розглянемо нафтоносну пластову ділянку в околиці діючої нафтовидобувної свердловини розміром 90×90 м². Оберемо деякі характерні

середні параметри нафтоносного пласта [1, 2]: $k = 1$ Д (Дарсі) = 10^{-12} м²; $m = 0,2$; $\eta = 10^{-3}$ Па·с; $\beta_1 = 10^{-9}$ Па⁻¹; $\beta_1 = 10^{-9}$ Па⁻¹. В цьому випадку коефіцієнт п'єзопровідності $\chi = 3,33$ м²/с. При моделюванні розподілу тисків у розглянутій пластовій ділянці припустимо, що початковий тиск у пласті дорівнює 200 атм, середня потужність видобувної свердловини складає 173 м³ нафти на добу.

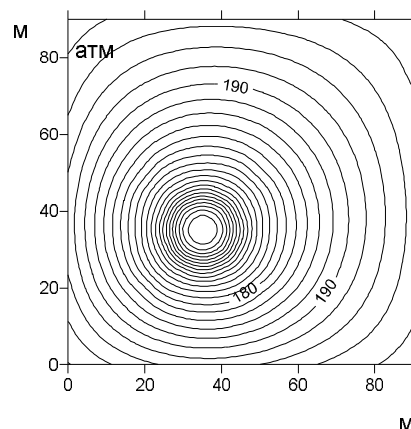


Рис. 1 Розподіл встановленого тиску в околиці нафтовидобувної свердловини при збільшенні проникності нафтової фази у ближній зоні дії свердловини у 2 рази ($R_d < 5$ м).

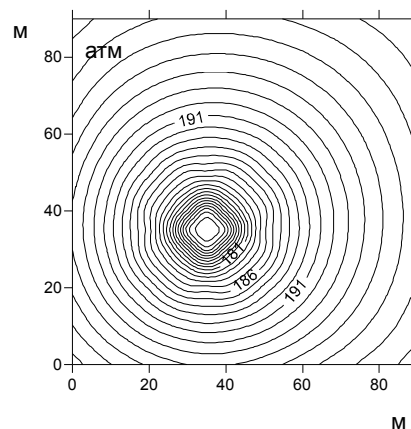


Рис. 2 Розподіл встановленого тиску в околиці нафтовидобувної свердловини при збільшенні проникності нафтової фази у дальній зоні дії свердловини у 2 рази ($R_d > 5$ м).

4. Моделювання процесів фільтрації у газоносному пласті

Розглянемо процеси фільтрації продуктивного газоносного пласта в околиці видобувної свердловини потужністю 11520 м³ на добу при пластовому тиску 10 МПа. З урахуванням розширення газу, при виході на поверхню потужність свердловини буде складати $1,152 \cdot 10^6$ м³ на добу. Припустимо, що розміри розглянутого газоносного пласта 9×9 км². Виберемо деякі

характерні середні параметри газоносного пласта [1, 2]: $k = 0,0012$ Д (Дарсі) $= 0,12 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$; $m = 0,15$; $\eta = 0,18 \cdot 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{с}$; $P_0 = 100 \text{ атм}$. В цьому випадку коефіцієнт п'єзопровідності Лейбензона $\chi = 0,45 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2/\text{с}$.

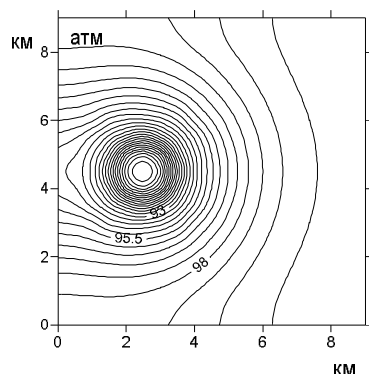


Рис. 3 Розподіл тиску в околиці газовидобувної свердловини при збільшенні проникності газової фази у ближній зоні дії свердловини у 2 рази ($R_d < 500 \text{ м}$) через 100 діб після початку дії.

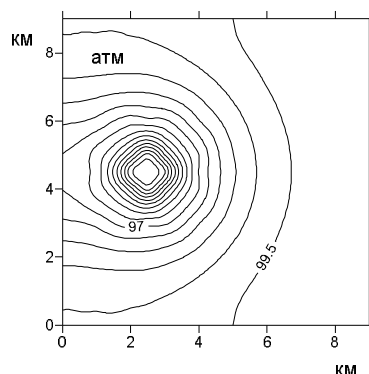


Рис. 4 Розподіл тиску в околиці газовидобувної свердловини при збільшенні

проникності газової фази у дальній зоні дії свердловини у 2 рази ($R_d > 500 \text{ м}$) через 100 діб після початку дії.

Висновки

Результати моделювання показують, що інтенсивність процесу фільтрації в околицях нафтогазовидобувних свердловин головним чином залежить від розподілу проникності нафтової і відповідно газової фази, як у близькій так і віддаленій зонах дії свердловини. Причому вплив проникності відповідної фази у віддаленій зоні більший у порівнянні з впливом у близькій зоні дії свердловини. В'язкість та пористість нафтогазоносного пласта у близькій та віддаленій зонах дії свердловини явним чином мало впливають на процес фільтрації в околиці видобувної свердловини. Проте ці параметри можуть впливати на коефіцієнт проникності відповідної фази безпосередньо і тим самим змінювати інтенсивність процесу фільтрації поблизу свердловини. Аналіз динаміки впливу нагнітальної рідини або газу на інтенсивність фільтраційного процесу навколо видобувної свердловини в залежності від проникності відповідної фази і розташування нагнітальної свердловини показує, що для стабільного підтримання достатньо високого рівня тиску в околиці видобувної свердловини при низьких параметрах відповідних фазових проникностей необхідно використовувати нагнітальні свердловини.

Список використаних джерел

1. Азиз Х. Математическое моделирование пластовых систем / Х. Азиз, Э. Сеттари. – М.: Ин-т комп'ют. исслед., 2004. – 416 с.
2. Басниев К. С. Нефтегазовая гидромеханика: учебное пособие для вузов / К.С. Басниев, Н. М. Дмитриев, Г. Д. Розенберг. – М.: Ин-т комп'ют. исслед., 2003. – 479 с.
3. Лубков М. В. Моделювання продуктивного тиску в неоднорідних нафтоносних пластах / М.В. Лубков // Геоінформатика. – 2017. – 3(63). – С. 23 – 29.

References

1. AZIZ, H. (2004) *Matematicheskoe modelirovanie plastovyh sistem*. Moskwa: In-t komp'jut. issled.
2. BASNIEV, K., DMITRIEV, N., ROZENBERG, G. (2003) *Neftegazovaja gidromekhanika: uchebnoe posobie dlja vuzov*. Moskwa: In-t komp'jut. issled.
3. LUBKOV, M. (2017) Modelyuvannya produktyvnogo ty'sku v neodnorodny'h naftonosny'h plastax. *Geoinformatics*. 63(2). p. 23 – 29.

Надійшла до редколегії 01.06.19

УДК 539.375

Маковійчук М. В.¹, к.ф.-м.н., доц.,
Шацький І. П.², д.ф.-м.н., проф.

**Згин зосередженою силою тонкої
пластини, розташованої на пружній
основі та послабленої контактною
тріщиною**

^{1,2} Івано-Франківський відділ Інституту
прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, 76002,
м. Івано-Франківськ, вул. Микитинецька, 3,
¹ e-mail: makoviy@ua.fm
² e-mail: ipshatsky@gmail.com

M. V. Makoviichuk¹, Cand. Phys. & Math. Sc.,
I. P. Shatskyi², Dr. Phys. & Math. Sc.

**Bending by concentrated force of thin plate
located on elastic foundation and weakened by
contact crack**

^{1,2} Ivano-Frankivsk Branch of Pidstryhach-Institute
for Applied Problems in Mechanics and Mathematics,
NAS of Ukraine, 76002, Ivano-Frankivsk,
Mykytynetska str., 3,
¹ e-mail: makoviy@ua.fm
² e-mail: ipshatsky@gmail.com

У двовимірній постановці розглянуто задачу про контактну взаємодію берегів тріщини під час згину зосередженою силою пластини на пружній основі Вінклера. Закриття тріщини описано з використанням моделі контакту вздовж лінії в лицьовій поверхні пластини. Досліджено розподіл контактної реакції на лінії тріщини, а також вплив жорсткості пружної основи та закриття дефекту на граничну рівновагу пластини у залежності від координати точки прикладання зосередженої сили. Встановлено область коректності постановки задачі, коли закриття тріщини відбувається по всій довжині.

Ключові слова: пластина, пружна основа, закриття тріщини, зосереджена сила, згин, міцність.

The paper considers the two-dimensional formulation of the problem of the contact interaction of the crack edges in a plate bent by the concentrated force on the elastic Winkler foundation. The crack closure is described using the model of contact along a line in one of the plate surfaces. Within the framework of this model, the boundary value problem is formulated for the equations of the classical theories of plate bending on the elastic foundation and a plane stress state with interrelated tension and bending conditions on the crack line. The obtained boundary value problem has been solved using singular integral equations method.

Based on numerical solutions of the integral equation the dependences of forces and moments intensity factors in the vicinity of the defect tips and distribution of contact forces along the crack line on the parameters of elastic foundation stiffness and the coordinate of the application point of the load have been investigated. The effect of crack closure and influence of the elastic foundation stiffness on the limit equilibrium of the plate, depending on the coordinate of the point of application of the concentrated force, has been evaluated. The area of the correctness of the problem statement when the crack closure occurs throughout its length has been established. It was found that the crack closure leads to the appearance of nonzero forces intensity factor, reduction of the moments intensity factor and increase of the limit load. The dependences of the forces and moments intensity factors and the limit load on the dimensionless coordinate of the point of application of the concentrated force are nonmonotonic. Numerical analysis showed that increasing the elastic foundation stiffness, as well as the displacement of the point of application of the force from the center of the cut, increase the limit load and weaken the contact reaction.

Key Words: plate, elastic foundation, crack closure, concentrated force, bending, strength.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Дослідження міцності тонкостінних конструкцій на пружній основі стосується широкого кола інженерних проблем у різних

галузях промисловості. Однією з особливостей таких задач є явище повного або часткового закриття дефектів в зоні стискаючих напружень, яке зручно

аналізувати у двовимірній постановці на основі моделі контакту вздовж лінії [1].

У даній роботі досліджується вплив контакту берегів тріщини та жорсткості пружної основи на напружено-деформований стан та несучу здатність пластини під дією локального навантаження.

Постановка та інтегральне рівняння задачі

Розглянемо нескінченну ізотропну пластину завтовшки $2h$ з наскрізною прямолінійною тріщиною завдовжки $2l$, підкріплену пружною основою Вінклера. Нехай на лінії тріщини на

відстані a від її центру прикладено зосереджену силу P перпендикулярно до пластини. Решта поверхонь пластини вільна від навантаження та в'язей. Дослідимо вплив закриття тріщини та жорсткості пружної основи на напружено-деформований стан та граничну рівновагу пластини.

Введемо систему декартових координат $Oxyz$ з початком у центрі розрізу та віссю абсцис уздовж його лінії (рис. 1).

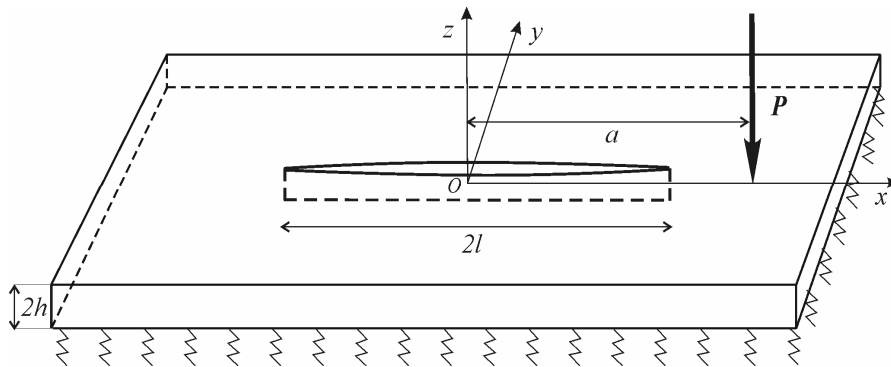


Рис. 1. Тріщина у пластині на пружній основі з прикладеною зосередженою силою

У рамках двовимірних теорій така задача зводиться до розв'язання рівнянь згину пластин на вінклеровій основі та плоского напруженого стану з взаємопов'язаними крайовими умовами на розрізі і нульовими на нескінченності [2, 3]:

$$D\Delta\Delta w + kw = P\delta(x-a)\delta(y), \quad \Delta\Delta\phi = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2; \quad (1)$$

$$[u_y] = h |[\theta_y]| \geq 0, \quad M_y = hN_y \operatorname{sgn}[\theta_y], \quad N_y \leq 0, \quad x \in L; \quad (2)$$

$$N_x = N_{xy} = N_y = 0, \quad M_x = M_{xy} = M_y = 0, \quad (x, y) \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Тут ϕ – функція напружень, w – прогин пластини; $D = 2Eh^3 / (3(1-\nu^2))$, h – півтовщина пластини, E і ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона її матеріалу; k – коефіцієнт жорсткості основи; Δ – оператор Лапласа; $L = (-l, l)$ – контур тріщини; $[u_y]$ – розкриття тріщини в серединній поверхні пластини, $[\theta_y]$ – стрибок кута повороту нормалі; N_{ij} – мембранні сили, M_{ij} – моменти; $\delta(x)$ – функція Дірака.

Для побудови розв'язку сформульованої задачі скористались методом сингулярних інтегральних рівнянь [4]. Повторюючи процедуру, наведену в статтях [1, 2], приходимо до сингулярного інтегродиференціального рівняння відносно знакосталого за припущенням стрибка кута повороту нормалі:

$$\frac{D}{4\pi} \int_{-l}^l \left\{ \frac{3(1-\nu^2)}{\xi-x} + K_0(\xi-x) \right\} [\theta_y]'(\xi) d\xi = M_y^0(x, 0), \quad x \in (-l, l); \quad [\theta_y](\pm l) = 0. \quad (4)$$

Тут

$$K_0(z) = \frac{2(1-\nu)^2}{z} \left(\frac{2}{|\gamma|z|} \operatorname{kei}'(\gamma|z|) - \operatorname{ker}(\gamma|z|) \right) - 2(1-\nu^2)\gamma \operatorname{sgn} z \operatorname{ker}'(\gamma|z|) - 2\gamma^2 \int_0^z \operatorname{kei}(\gamma|z|) dz;$$

$$M_y^0(x, 0) = \frac{P}{2\pi} \left(\nu \operatorname{kei}''(\gamma|x-a|) + \frac{\gamma}{|x-a|} \operatorname{kei}'(\gamma|x-a|) \right);$$

$$\gamma = (k/D)^{1/4}, \quad z = \xi - x.$$

Аналіз результатів

Числовий розв'язок задачі (4), отримали методом квадратур [4] при $\nu = 0.3$. За знайденим розв'язком $[\theta_y]$ визначали розкриття тріщини $[u_y]$, контактну реакцію у довільній точці розрізу та коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів у вершинах тріщини:

$$K_N^\pm = \mp \frac{B}{4\sqrt{l}} \lim_{x \rightarrow \pm l} \sqrt{l^2 - x^2} [u_y]'(x),$$

$$K_M^\pm = \pm \frac{Da_0}{4\sqrt{l}} \lim_{x \rightarrow \pm l} \sqrt{l^2 - x^2} [\theta_y]'(x).$$

Граничне навантаження P_* , при якому починається розповсюдження тріщини отримали на основі енергетичного критерію руйнування за умов комбінованого розтягу та згину [5]

$$\frac{\pi}{4h^2 E} \left\{ K_N^2 + \kappa \left(\frac{K_M}{h} \right)^2 \right\} = 2\gamma_*.$$

Тут $\kappa = 3(1+\nu)/(3+\nu)$, γ_* – густина ефективної поверхневої енергії матеріалу.

Встановлено залежності безрозмірних коефіцієнтів інтенсивності зусиль $\tilde{K}_N^+ = hK_N^+ / P\sqrt{l}$, моментів $\tilde{K}_M^+ = K_M^+ / P\sqrt{l}$ та граничного навантаження $\tilde{P}_* = P_* / P^0$ ($P^0 = 2h^2 \sqrt{2E\gamma_* / (\pi l)}$) для правої вершини тріщини від параметра жорсткості основи $\lambda = l\gamma = l(k/D)^{1/4}$ за різних значень $\alpha = a/l$ (рис. 2). Суцільними лініями наведено результати з урахуванням, а штриховими – без урахування контакту. Спостерігаємо немонотонну залежність результатів від координати точки прикладання навантаження α . Найменші значення для граничного навантаження отримаємо при $\alpha=1$, що відповідає розташуванню навантаження у вершині тріщини.

Суцільні лінії на рис. 2 обриваються при $\lambda = \lambda_*$, якщо $\lambda > \lambda_*$, то порушується умова контакту $N_y \leq 0$ і потрібно розв'язувати мішану задачу. Область допустимих значень параметра жорсткості основи, для яких контакт відбувається по всій довжині розрізу, показана на рис. 3.

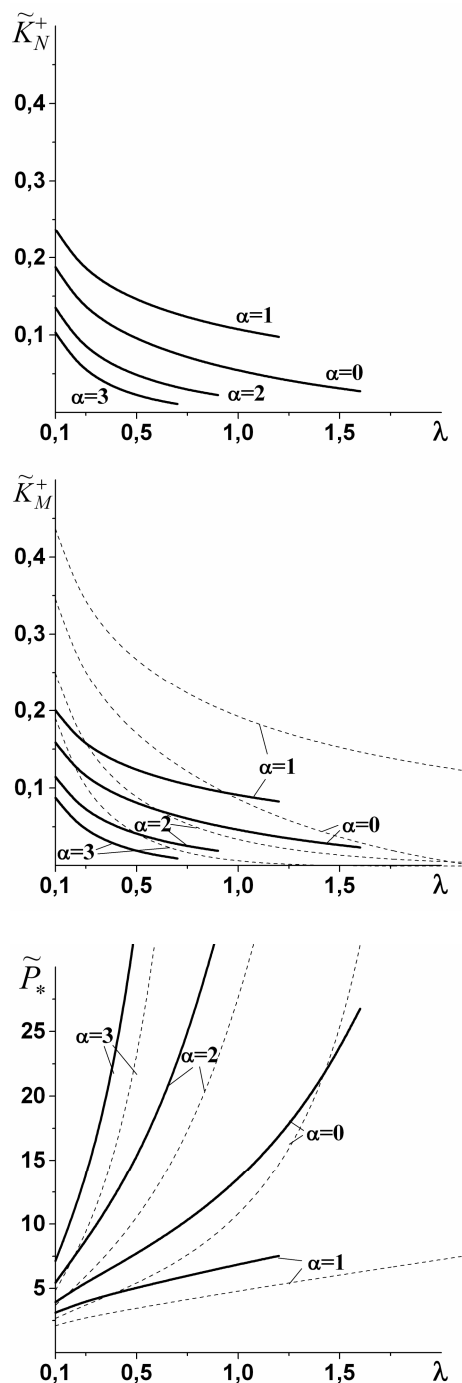


Рис. 2. Залежності коефіцієнтів інтенсивності зусиль $\tilde{K}_N^+$, моментів $\tilde{K}_M^+$ та граничного навантаження $\tilde{P}_*$ від параметра λ за різних значень α .

Розподіл безрозмірної контактної реакції вздовж тріщини побудовано для фіксованих значень координати α при $\lambda = 0.5$ (рис. 4).

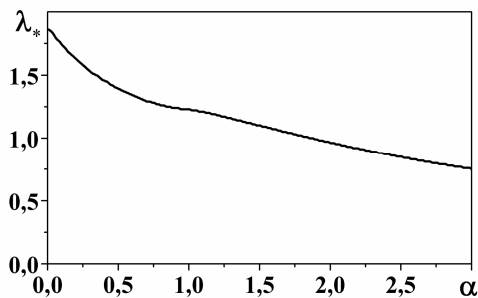


Рис. 3. Залежність граничних значень параметра основи λ_* від координати α

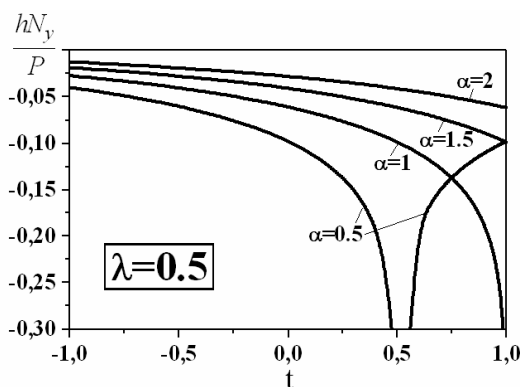


Рис. 4. Розподіл контактної реакції на розрізі ($t = x/l$) для різних значень α

Якщо точка прикладання навантаження розташована у межах тріщини, то у цій точці контактна реакція має логарифмічну особливість. Зі збільшенням жорсткості основи, а також при віддаленні точки прикладання навантаження від центра розрізу контактна реакція послаблюється.

Висновки

Встановлено, що закриття тріщини призводить до появи ненульових коефіцієнтів інтенсивності зусиль, зменшення коефіцієнтів інтенсивності моментів і збільшення граничного навантаження. Залежність коефіцієнтів інтенсивності зусиль, моментів та граничного навантаження від безрозмірної координати точки прикладання зосередженої сили є немонотонна. Із збільшенням жорсткості основи, а також при віддаленні точки прикладання зосередженої сили від центра розрізу руйнівне навантаження зростає, а контактна реакція послаблюється. Найменші значення граничного навантаження отримано у випадку прикладання зосередженої сили у вершині тріщини.

Список використаних джерел

1. Шацький І.П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами / І.П. Шацький // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1988. – № 7. – С. 49 – 51.
2. Шацький І.П. Контактна взаємодія берегів тріщини під час згину пластини на пружній основі / І.П. Шацький, М.В. Маковійчук // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – 39, № 3. – С. 59–62.
3. Маковійчук М.В. Про взаємодію берегів тріщини у пластині на пружній основі під час згину зосередженою силою / М.В. Маковійчук // Конф. молод. учених «Підстригачівські читання – 2012». Тези доп. – Львів, 2012. – С. 53 – 54.
4. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М. П. Саврук. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
5. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами / В. А. Осадчук. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.

References

1. SHATSKYI, I. P. (1988) Zgyn plastyny, oslablenoi rozrizom z kontaktuyuchymy beregamy. *Dop. AN URSS. Ser. A.* (7). – p. 49-51.
2. SHATSKYI, I. P. & MAKOVICHUK, M. V. (2003) Kontaktna vzayemodiya beregiv trishchyny pid chas zgynu plastyny na pruzhniy osnovi. *Fizyko-khimichna mekhanika materialiv*, 39 (3). p. 59-62.
3. MAKOVICHUK, M. V. (2012) Pro vzayemodiyu beregiv trishchyny u plastyni na pruzhnii osnovi pid chas zgynu zoseredzhenoyu siloyu. In *Conference of Young Scientists «Pidstryhachivskiy chytannya – 2012»*, 23d to 25th May 2012. Lviv – pp. 53-54.
4. SAVRUK, M. P. (1981) *Dvumernye zadachi uprugosti dlia tel s treshchinami*. Kiev: Naukova dumka.
5. OSADCHUK, V. A. (1985) *Napriazhenno-deformirovannoe sostoianie i predel'noe ravnovesie obolochek s razrezami*. Kiev: Naukova dumka.

Надійшла до редколегії 20.06.19

УДК 539.3

Маслов Б.П., д.ф.-м.н., с.н.с.

**Застосування квазілінійної моделі
в'язкопружності для прогнозування
повзучості неоднорідного геологічного
середовища**

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН
України, 03057, м. Київ-57, вул. Нестерова, 3,
e-mail: maslov@inmech.kiev.ua

Maslov B.P., Dr. Sci., Phys.-Math.

**Application of a quasi-linear visco-elastic
model for the creep of a non-heterogeneous
geological media prediction**

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics NAS
Ukraine, 03057, Kyiv, 3 Nesterov Str.,
e-mail: maslov@inmech.kiev.ua

Розглянуто задачу комп'ютерного моделювання фізико-механічних процесів у геологічних середовищах, властивості яких змінюються у часі. Запропоновано теоретичне обґрунтування підходів до методики побудови мікромеханічних геофізичних моделей пористого середовища з рідиною. Проведено аналіз сучасного стану проблеми побудови розрахункових нелінійних моделей багатофазних геологічних середовищ та зазначено необхідність застосування підходів нелінійної реології. Отримані раніше результати в межах пружній лінійній та нелінійній областях поведінки середовища узагальнено на випадок вязкопружної квазілінійної поведінки. Запропоновано методику ідентифікації параметрів повзучості та проникності багатофазного пористого середовища та алгоритмів прогнозування на основі розробленого чисельно-аналітичного моделювання ефективних фізико-механічних властивостей флюїдонасиченої гірської породи. Розглянуто варіанти випадкової або періодичної мікроструктури. Модель базується на використанні фундаментальних співвідношень механіки в'язкопружного суцільного середовища, інтегральних перетворень Фур'є та Лапласа-Карсона із застосуванням відповідних чисельних алгоритмів.

Ключові слова: нелінійна в'язкопружність, багатофазне середовище.

The problem of computer modeling of physical and mechanical processes in geological environments whose properties change in time is considered. The theoretical substantiation of approaches to the method of constructing micromechanical geophysical models of a porous medium with a liquid is proposed. The analysis of the current state of the problem of construction of calculated nonlinear models of multiphase geological environments is carried out and the necessity of using nonlinear rheology approaches is indicated. The results obtained earlier within the elastic linear and nonlinear domains of the behavior of the medium are generalized to the case of visco-elastic quasilinear behavior. The method of identification of creep parameters and permeability of multiphase porous medium and forecasting algorithms is proposed on the basis of developed numerical-analytical modeling of effective physical and mechanical properties of fluid-saturated rocks. Considered variants of random or periodic microstructure. The model is based on the use of the fundamental relations of the mechanics of the viscoelastic continuous medium, integral Fourier transforms and Laplace-Carson using the corresponding numerical algorithms.

Ключові слова: nonlinear visco-elasticity, multiphase medium.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Комп'ютерне моделювання фізико-механічних процесів у геологічних середовищах, властивості яких змінюються у часі, являє собою актуальну задачу сучасної прикладної механіки [1, 2]. Необхідним є теоретичне обґрунтування підходів до методики побудови мікромеханічних

геофізичних моделей пористого середовища з рідиною. Аналіз сучасного стану проблеми побудови розрахункових нелінійних моделей багатофазних геологічних середовищ [3, 4] свідчить про недостатню увагу до застосування саме нелінійної реології. Адже у зв'язку із розвитком обчислювальних методів механіки і

математики виникають можливості дослідження складних геофізичних процесів. Слід зазначити, що постановка задачі в пружній лінійній та нелінійній областях запроваджена в роботах [2,4,5]. В той же час аналіз деформацій повзучості, руйнування, та, як результат, зміни параметрів проникності [4] потребує подальшої уваги. Одночасно існує необхідність розробки методик ідентифікації параметрів повзучості [6, 7] та проникності багатофазного пористого середовища та алгоритмів прогнозування на основі запропонованих теоретичних підходів. В статті пропонується новий підхід до чисельно-аналітичного моделювання ефективних фізико-механічних властивостей флюїдонасиченої гірської породи з урахуванням її випадкової або періодичної мікроструктури. Модель базується на використанні фундаментальних співвідношень механіки в'язкопружного суцільного середовища, інтегральних перетворень Фур'є (FT) та Лапласа-Карсона (LC) із застосуванням відповідних чисельних алгоритмів [1, 6].

1. Об'єкт дослідження.

Постановка задачі

Зазвичай, критеріями при виділенні колекторів слугують коефіцієнти глинистості та пористості [3]. Оцінка тріщинуватості виконується за допомогою акустичного каротажу, при інтерпретації якого відмічають значне затухання амплітуд і зростання інтервального часу пробігу на тріщинуватих ділянках [2]. Це свідчить про наявність в'язкої складової у загальній деформації середовища та вимагає застосування моделі в'язкопружної поведінки для аналізу фізико-механічних властивостей пористого середовища. Тому перспективним є застосування саме в'язкопружної моделі середовища із подальшим аналізом реакції складнобудованої геологічної структури на збурення з різними частотами, та з використанням як акустичних, так і електромагнітних полів [1]. Постановка задачі в пружній моделі не надає можливості виявити саме частотну залежність поведінки пористого флюїдонасиченого середовища від частоти та форми збуджуючого імпульсу. Комплексний аналіз результатів досліджень акустичних властивостей в умовах змінних тисків надає можливість якісно визначити особливості структури пустотного простору порід. Як типову структуру для подальшого аналізу розглянемо теригенну породу, яка складається з глинистої в'язкопружної матриці, вкраплених в неї лінійно пружних зерен кварцу і кальциту, та яка містить різно-форматний тріщинно-поровий простір. Розглянемо надалі клас

гірських порід з неперервною матричною фазою, в яку вміщено мінеральні вclusions та пори різного формату [2, 4]. Мінеральна матриця являє собою однорідний континуум, фізико-механічна поведінка якого описується відповідною в'язкопружною моделлю [6, 7]. Таким чином, у першому наближенні, вапняковистий пісковик в мезоскопічній шкалі розглядається як система матриця-включення. Глинисті мінерали утворюють матричну фазу, яка підкріплена зернами кальциту і кварцу. Одна або кілька фаз середовища можуть демонструвати нелінійну поведінку, що описується гіперпружними моделями типу Мурнагана (стисливі породи) або Муні-Рівліна (випадок нестисливості) [1]. В [4] визначено параметри цих моделей для теригенної породи, яка складається із глинистої в'язкопружної матриці, в яку вкраплені лінійно пружні зерна кварцу і кальциту. Використовуємо визначальні рівняння квазілінійної, у розумінні Работнова, в'язкопружності, а саме

$$\begin{aligned}\sigma^R(t) &= (g * d\sigma)(t) = \int_{-\infty}^t g(t-t_1) d\sigma(t_1), \\ g &= J(t) / J(0), \\ \sigma^R &= \frac{\partial W}{\partial e}, \quad W = W(e, x, t).\end{aligned}\quad (1)$$

Тут $\sigma^R(t)$ - модифіковані напруження Работнова, $J(t)$ - тензорна функція повзучості, $e(x, t)$ - деформації повзучості, x - просторова координата, t - час. Енергія пружної деформації на одиницю об'єму матеріалу може бути подана розвиненням у ряд Тейлора в околі природного, ненапруженого стану [1]

$$W(e) = \frac{1}{2!} C_{ijkl} e_{ij} e_{kl} + \frac{1}{3!} C_{ijklmn} e_{ij} e_{kl} e_{mn} + K \quad (2)$$

де $e_{ij}(x, t)$ - компоненти лінійного тензора деформацій; C_{ijkl} - тензор констант лінійної пружності. Тензор пружних констант третього порядку C_{ijklmn} характеризує нелінійні властивості геологічного середовища. Симетричний тензор напружень Коші є градієнтом пружної енергії по відношенню до пружних деформацій

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}} = C_{ijkl} e_{kl} + \frac{1}{2} C_{ijklmn} e_{kl} e_{mn} \quad (3)$$

Співвідношення (3) можна обернути, в результаті отримуємо вираз, корисний саме в задачах механіки повзучості, де напруження є заданими, а нелінійні деформації є результатом моделювання

$$e_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \sigma_{ij}} = J_{ijkl} \sigma_{kl} + \frac{1}{2} J_{ijklmn} \sigma_{kl} \sigma_{mn}. \quad (4)$$

Тут

$$U(\sigma) = \frac{1}{2} J_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + \frac{1}{3!} J_{ijklmn} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \sigma_{mn} \quad (5)$$

додакова енергія деформації, що визначається перетворенням Лежандра від функції $W(e)$.

Тензор деформацій повзучості $e(x, t)$ можна адитивно розкласти [7] на девіаторну частину $e_d(x, t)$ і сферичну частину $e_m(x, t)$, які визначаємо, відповідно

$$e_m = \frac{1}{3} \text{tr}(e) I, \quad e_d = e - \frac{1}{3} \text{tr}(e) I. \quad (9)$$

Тут I - одиничний тензор другого рангу, таким чином

$$e(x, t) = e_d(x, t) + e_m(x, t) \quad (10)$$

У лінійній теорії в'язкопружності розв'язок задач може бути значно спрощено використанням принципу відповідності [1, 6].

2. Квазілінійна в'язкопружність

Природною є спроба узагальнити цей принцип на задачі квазілінійної в'язко-пружності. У спрощених варіантах визначальних рівнянь нелінійної в'язкопружності використовується концепція модифікованих пружних напружень

$$\sigma^R(t) = \frac{\partial W}{\partial e}. \quad \text{Функція } W(e) \text{ являє собою}$$

пружний потенціал. Для аналізу задач повзучості в рамках квазілінійної моделі в'язкопружності використовуємо модифікований принцип відповідності, відмінний від застосовуваного у лінійній теорії [6]. Залежність поточних напруг в'язкопружності $\sigma(t)$ від відповідних їм відновлених пружних (модифікованих) $\sigma^R(t)$ запишемо у формі

$$\sigma(x, t) = \int_0^t h(t-s) \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial W}{\partial \sigma}(e, x, s) ds \quad (11)$$

де $h(t)$, за аналогією з лінійної теорією, нормалізований тензор релаксації напруг четвертого порядку, $\sigma(t)$ – тензор напружень Коші, $\sigma^R(e, t)$ – спадкова функція миттєвої пружної деформації. Напруги $\sigma^R(t)$ розглядаються як еквівалентні, модифіковані, пружні напруги, які визначаються через пружний потенціал $W(e)$.

3. Ітераційний розв'язок граничної задачі із заданими зусиллями

Звичайний підхід до аналізу нелінійної задачі – збурення відповідної лінійної задачі [1, 2]. Задані поверхневі зусилля t_R визначено як функції x і t на границі $\partial\Omega$. Масові сили

також задано як функції x і t . Тут припускаємо, що відлікова конфігурація є природним станом середовища, тоді можна записати

$$\sigma(e) = \sum_{s=1}^{\infty} \sigma_{[s]}(e), \quad (12)$$

де $\sigma_{[s]}(e)$ - однорідний поліном ступеня s . Однорідність середовища тут не вводиться, таким чином, змінні σ , і e можуть залежати від координати x . Підставляючи розкладання (12) в рівняння рівноваги, отримуємо послідовність систем диференціальних рівнянь і відповідних граничних умов. Розв'язок нелінійної теорії пружності другого порядку дається послідовністю

$$u^{[2]}(x, t) = u^{[1]}(x, t) + \varepsilon^2 u_{[2]}(x, t) \quad (13)$$

Тут $u^{[1]}(x, t)$ - розв'язок задачі лінійної теорії пружності.

4. Ідентифікація параметрів. Приклади

Надалі використовуємо інтегральне представлення визначальних рівнянь в'язкопружності дробового порядку [6, 7], та застосовуємо принцип відповідності для трансформування в'язкопружної задачі дробового порядку в аналогічну квазіпружну. Для цього переходимо з області змінної часу t в область змінної z перетворення Лапласа.

$$LC\{f(t)\} = f(z) = z \int_0^{\infty} f(t) e^{-zt} dt. \quad (14)$$

Припускаючи, що макроскопічні напруги на границі представницького елемента геоматеріалу задані, формулюємо задачу локальної рівноваги в'язкопружного середовища в області змінних перетворення Лапласа-Карсона. Реалізуючи обчислювальну процедуру, визначену співвідношеннями (13), отримуємо

$$e_{(2)}^{(r)} = A^{(r)} \bar{e} + d_{(1)}^{(r)}(\bar{e}). \quad (16)$$

При цьому

$$\begin{aligned} A^{(m)} &= (I + e^T)^{-1}, \quad e^T = \sum_{i=1}^n c^{(i)} z^{(i)} h^{(i)}, \\ A^{(i)} &= (I + e^{gi}) A^{(m)}, \quad e^{gi} = (zh)^{(i)} \\ d^{(m)} &= - \sum_{i=1}^n c^{(i)} q^{(i)} \gamma^{(i)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Розв'язок (16, 17) дозволяє знайти макроскопічні фізичні співвідношення в'язкопружності другого та третього порядків типу (3). Коефіцієнти Ламе другого λ, μ і третього ν_k порядків та їх в'язкопружні аналоги визначаються формулами

$$\chi = 3 \langle \kappa \kappa_A \rangle - \frac{2}{3} \mu, \quad \mu = 2 \langle \mu \mu_A \rangle, \quad \nu_i = \langle a_{ik} \nu_k \rangle. \quad (19)$$

Кутові дужки означають операцію статистичного осереднення тензорів або скалярів. Використано позначення, прийняті в [2]. В наближенні малих деформацій отримано чисельні результати розрахунку швидкості поздовжньої хвилі у флуїдонасиченому зразку та порівняно їх із лабораторними експериментальними даними [3]. На основі проведених чисельних експериментів зроблено висновки про вплив фактору часу і миттєвої пружної нелінійності середовища на динамічні характеристики поведінки складнобудованого середовища. В цілому, порівняння отриманих чисельних результатів прогнозування та лабораторних експериментальних даних [4], дозволяють вважати достовірною запропоновану

чисельно-аналітичну модель. Одним з перспективних напрямків подальших досліджень, можна вважати узагальнення запропонованої моделі на випадок великих деформацій [1, 3] у неоднорідному середовищі із попереднім гідростатичним навантаженням. Це дозволить більш надійно оцінювати перспективність розвідки та експлуатації ущільнених порід-колекторів [2, 4].

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКБК 6541230).

Список використаних джерел

1. Булат А.Ф. Прикладная механика упругонаследственных сред, Том 3 / В.И. Дырда, В.Г. Карнаухов – К: Наук. думка. – 2013. – 427 с.
2. Выжва С.А. Эффективные упругие свойства нелинейных многокомпонентных геологических сред / С.А. Выжва, Б.П. Маслов, Г.Т. Продайвода // Геофиз. журнал. – 2005. – 27, №6. – С.86-96.
3. Лубков М.В. Застосування в'язкопружної моделі Кельвіна-Фойгта для моделювання геотектонічних процесів / М.В. Лубков // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фіз.-мат. науки. – 2017. – 3. – С. 127-130.
4. Маслов Б. Моделювання нелінійних в'язкопружних властивостей теригенно-вапняковистих пісковиків / Б. Маслов, І. Онищук, А. Шинкаренко // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Геологія. – 2017. – 77 (2). – С. 99–105.
5. Маслов Б. Прогнозування довготривалої міцності гірського масиву у геологічних середовищах складної структури /Б. Маслов, Я. Ляшенко, О. Максименко // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Геологія. – 2009, № 3. – С. 57-60.
6. Maslov B.P. Combined numerical and analytical determination of Poisson's ratio for viscoelastic isotropic materials / B. P. Maslov // International Appl. Mechanics, 2018. – 54, N2. – P. 220-230.
7. Golub V.P. Identification of the Hereditary Kernels of Isotropic Linear Viscoelastic Materials in Combined Stress State II. Deviators Proportionality / V.P. Golub, B.P. Maslov, P.V. Fernati // International Appl. Mechanics. – 2016. – 52, N.6. – P.111-125.

References

1. BULAT, A.F., DYRDA, V.I. & KARNAUHOV, V.G. (2013) *Prykladnaya mehanika uprugonasledstvennyh sred*. Tom 3. K: Naukova dumka.
2. VYZHVA, S.A., MASLOV, B.P. & PRODAYVODA, G.T. (2005) *Effektyvnye uprugye svoystva nelyneynyh mnogokomponentnyh geologicheskyyh sred*. *Geofyzycheskiy zhurnal*. 27, 6. pp.86-96.
3. LUBKOV, M.V. (2017) *Zastosuvannya vyazkopruzhoi modeli Kelvina-Fojgta dlya modelyuvannya geotektonichnyh procesiv*. *Visnyk Kyivskogo natsionalnogo universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Seriya fizyko-matematychni nauky*. 3. pp. 127-130.
4. MASLOV, B., ONYSCHUK, I. & SHYNKARENKO, A. (2017) *Modelyuvannya nelineynykh vyazko-pruzhnykh vlastyvostey terygenno-vapnyakovystykh piskovykiv*. *Visnyk Kyivskogo nacionalnogo universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Geologiya*. – 77 (2). – pp. 99-105.
5. MASLOV, B., LYASHENKO, Ya. & MAKSYMENKO, O. (2009) *Prognozuvannya dovgotryvaloyi micznosti girskogo masyvu u geologichnyh seredovyshhah skladnoyi struktury*. *Visnyk Kyivskogo natsionalnogo universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Geologiya*. 3. pp. 57-60.
6. MASLOV, B.P. (2018) *Combined numerical and analytical determination of Poisson's ratio for viscoelastic isotropic materials*. *International Applied Mechanics*. 54, 2. pp. 220-230.
7. GOLUB, V.P., MASLOV, B.P. & FERNATI P.V. (2016) *Identification of the Hereditary Kernels of Isotropic Linear Viscoelastic Materials in Combined Stress*. *International Appl. Mechanics*. 52, 6. pp.111-125.

Надійшла до редколегії 28.08.2019

УДК 519.9

Мегреганіан Н.¹, канд. наук,
Фаллах А.С.², канд. наук
Люка Л.А.¹, канд. наук

**Великі пружно-пластичні деформації
квадратних мембран під дією
локалізованих імпульсних навантажень**

¹ Imperial College London, London,
Exhibition Road, London SW7 2AZ UK
e-mail: n.mehreganian14@imperial.ac.uk

² Brunel University, Kingston Lane, London,
Uxbridge, UB8 3PH UK
e-mail: mestASF@brunel.ac.uk

N. Mehreganian¹, Ph.D.
A.S. Fallah², Ph.D.
L.A. Louca¹, Ph.D.

**Large elastic-plastic deformation of
square membranes subjected to localised
pulse pressure loads**

¹ Imperial College London, London, Exhibition
Road, London SW7 2AZ UK
e-mail: n.mehreganian14@imperial.ac.uk

² Brunel University, Kingston Lane, London,
Uxbridge, UB8 3PH UK
e-mail: mestASF@brunel.ac.uk

Дана робота зосереджена на пружній і еластичній енергіях мембрани і має ціллю виведення, шляхом мінімізації енергетичного функціоналу в поєднанні з визначальними співвідношеннями скінченного аналізу, динамічного пружно-пластичного відгуку квадратних мембран на локалізоване ударне навантаження, що приводить до великих деформацій. Припускається, що функція вибухового навантаження має вигляд мультиплікативного розкладу заданої безперервної кусково-гладкої просторової функції та довільної функції часу, яка може приймати різні часові форми.

Ключові слова: ударне навантаження, квадратна мембрана, метод Рітца-Гальоркіна.

Ductile isotropic materials are widely used in protective systems against transient pulse pressure loads, such as those of localised blasts. This is due to the combined elastic-plastic response which contributes to dissipation of total impulse from extensive loading as the energy stored elastically limits deformation while the energy expended plastically limits the level of transferred forces in the structure. In the case of thin, modern armour graded steel plates, the tailored metallurgy helps the structure store energy within the bounds of elastic region, which may be dissipated at a later stage as damping kills it off in subsequent cycles. On the other hand, the plastic work is almost entirely converted to heat and dissipates.

The present work focuses on the elastic and plastic energies in the membrane and aims at deducing, from the minimization of Föppl-Von-Kármán (FVK) energy functional combined with enforcing the constitutive relations of limit analysis, the dynamic elastic-plastic response of localised blast loaded square membranes undergoing large deformations. The presumed blast load function is a multiplicative decomposition of a prescribed continuous piecewise smooth spatial function and an arbitrary temporal function which may assume various temporal shapes (e.g. rectangular, linear, exponential).

Considering the elastic response, a single-degree-of-freedom model was developed from the prescribed displacement field and associated stress tensor having clamped and simply supported boundary conditions. The explicit closed form solutions were sought by using the Ritz-Galerkin's variational method as well as the Poincaré-Lindstedt perturbation method. The theoretical solutions of rigid-perfectly plastic square membranes subjected to the same blast scenarios were then discussed. From the combined effects we deduce the load displacement curves representing the trajectory of the nonlinear elastic-perfectly plastic structure.

Key Words: localised blast, square membrane, Ritz-Galerkin method.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Жук Я.О.

1. Introduction

Transient pulse pressure loads, such as those from gas or IED (Improvised Explosive Device) explosions, generate high velocity impulse ensuing the large deformations and potential failure of the

structural components. The level of damage depends on the source of impulse, the stand-off distance, high explosive mass geometric configurations.

Most protective structural systems, such as blast walls, shutters, doors, as well as armored vehicles

components, are designed in the form of plated elements. These elements can be fabricated from ductile isotropic materials such as modern armour graded steel with high load bearing capacity beyond the initial yield point, leading to an elastic-plastic response. Such alloys possess high yield strength and low ductility, whereby the elastic strain energy becomes significant.

Assuming the load duration is insignificant compared to the structural component's natural period of vibration while the component is made of strain rate insensitive material and no hardening, the visco-elasticity and visco-plasticity phenomena can be ignored, the constitutive tensor may be treated as that of elastic-perfectly plastic material. The elastic analysis provides a useful insight into predicting the complex response of quasi-brittle, thin structural plated elements, such as glass panes, composites and thin armour steel plates. The latter is a suitable candidate material for blast protection as it bears high elastic energy capacity preceding its small plastic deformation [1], [2].

The present study deals with applying the well-established Föppl-Von-Kármán model to address the influence of finite displacement, or geometry changes in the overall response of the structure, in light of the developed membrane resistance in conjunction with the bending resistance of the structure. The objective of this work is to examine the explicit solutions delineating geometric and material nonlinearity of ductile, isotropic homogeneous square plates to the transient blast pressure with generic spatial function as described in Eq.(1). The plates investigated herein are assumed as thin, where the terms of transverse shear from the Mindlin-Reisner plate theory can be neglected, but as the external force maps the material coordinates in reference configuration to the deformed state, the response of the structure is characterised by the deformed configuration, rather than the reference configuration. Thus, the influence of finite displacements, or geometry changes, due to the presence of membranal forces must be retained in the analysis performed. This is achieved by implementing the well-known Föppl-Von-Kármán (FVK) nonlinear theory together with the constitutive framework of limit analysis.

The current work is organized in four sections and entails a description of the localised blast in section 1, followed by the derivation of the governing equations of membrane elasticity in section 2. In Section 3, the theoretical solutions at two distinct phases of motion are investigated, followed by the elastic-plastic response of the membrane elements. Finally, the concluding remarks are presented in section 4.

1.1 Localised Pulse Pressure Load

Consider an initially flat, monolithic, ductile isotropic square plate with side length $2L$, thickness of H and areal density of $\mu = \rho H$. The plate is secured along its periphery with simply supported boundary conditions and subjected to a localised pressure load. Such a load may be truncated into a single term of multiplicative decomposition of its temporal (pulse shape) and spatial (load shape) functions [1], [3]–[6], as presented in Eqs. (1)–(2). As the load is axisymmetric the domain of study is reduced to only one quarter of the plate.

$$p_1(r) = \begin{cases} p_0, & 0 \leq r \leq R_e, \\ p_0 a e^{-br}, & R_e \leq r \leq R \end{cases} \quad (1)$$

$$p_2(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq t_d, \\ 0, & t \geq t_d \end{cases} \quad (2)$$

Using the Ritz-Galerkin's method, load functional is minimised in Eq.(3). The load is rotationally symmetric, thus independent of the polar coordinate θ . It follows that, with $x = r \cos \theta$ and $y = r \sin \theta$, the functional of Eq.(3) may be furnished into a single dimensionless parameter α in Eq.(4), which is influenced by the central constant load radius R_e as well as the load decay exponent b :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{R_e} p_0 \delta w r dr d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{R_e}^L p_0 e^{-(br-bR_e)} \delta w r dr d\theta = \alpha p_0 L^2 \quad (3)$$

$$\text{where } \delta w = \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2L}\right),$$

$$\alpha = \frac{32}{\pi(4L^2 b^2 + \pi^2)^2} \left[\left(\frac{1}{16} \pi^4 b R_e + \frac{1}{4} L^2 b^2 (b R_e + 3) \pi^2 + L^4 b^4 \right) \cos \frac{\pi R_e}{2L} + \frac{1}{8} \pi^3 \left(b^2 L^2 + 2Lb + \frac{1}{4} \pi^2 \right) e^{-b(L-R_e)} - \left(b^2 L^2 + \frac{1}{4} \pi^2 \right)^2 \right]$$

It is straightforward to show that the various values of α converge to a unique parameter pertinent to the case of uniformly distributed load as $R_e \rightarrow L$, independent of the decay type.

2. Governing Equations

The FVK Equations describing the fundamental description of nonlinear elastic dynamics of the thin plate reads[7]:

$$D\nabla^4 w(x, y, t) - H\ell(w, \Phi) = p(x, y, t), \quad (5)$$

$$\nabla^4 \Phi(x, y, t) = -\frac{E}{2} \ell(w, w) \Leftrightarrow -E(\kappa_x \kappa_y - \kappa_{xy}^2) \quad (6)$$

It is assumed that the reference configuration is stress free and the material elements and behave isotopically relative to the reference configuration. The right-hand side of Eq.(6) represents Gaussian curvature which is quadratic with respect to the transverse displacement field, while the term $\Phi(x, y, t)$ denotes the Airy stress function. This function describes the membrane action induced by large displacements. In Eq.(5) $D = \frac{EH^3}{12(1-\nu^2)}$ is the flexural rigidity of the plate, while the biharmonic operator ∇^4 and the differential operator $\ell(w, \Phi)$ are expressed in Eqs.(7) and (8), respectively.

$$\nabla^4 \Phi = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4}, \quad (7)$$

$$\ell(w, \Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (8)$$

Hence the term $\ell(w, w)$ from the compatibility Eq.(6), is evaluated by replacing Φ with w in Eq.(9). Eqs. (5)-(8) are coupled, highly nonlinear, fourth order Partial Differential Equations (PDE) which represent geometric nonlinearities of an elastic system induced by in-plane displacements and membranal forces.

The approach resorted to herein to solve the FVK equations seeks, by utilizing an iterative procedure, to reduce the PDE to an Ordinary Differential Equations (ODE) using the Poincaré-Lindstedt (P-L) perturbation technique, combined with the RG method. The mathematical procedure for such shell elements is outlined as follows:

1. Assume an ansatz for displacement fields and the associated stress tensors.

$$\iint_{(A)} \left\{ D\nabla^4 \bar{w}^{(i+1)} - H^3 E \ell(\bar{w}^{(i)}, \bar{\Phi}^{(i+1)}) + (\dots) \mu \bar{w}^{(i+1)} \right\} \delta w dA = \iint_{(A)} \frac{p(x, y, t)}{H} \delta w dA \quad (11a)$$

$$\iint_{(A)} \left\{ \nabla^4 \bar{\Phi}^{(i+1)} + \frac{1}{2} \ell(\bar{w}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}) \right\} \delta \Phi dA = 0 \quad (11b)$$

2. Determine the membranal stress from the compatibility relation of Eq. (9).
3. Update the displacement field from Eq.(5).
4. The final form of transverse displacement will be nonlinear, but in a reduced closed form expression.

The assumed expressions of the displacement field and the associated Airy stress functions may be expressed as multiplicative decomposition into a spatial part as well as that of the temporal part, i.e.

$$w(x, y, t) = H\bar{w}(t) w^*(x, y) \quad (9)$$

$$\Phi(x, y, t) = f(t) \phi^*(x, y) \quad (10)$$

where the prescribed partial functions $w^*(x, y) = \phi^*(x, y)$ is assumed as the first term of the trigonometric truncation $\cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{2L}\right)$, which characterises the vibration of a Single Degree of Freedom model, i.e., they are associated with the first (fundamental) mode of vibration. Accordingly, the dimensionless parameters $\bar{\phi} = \frac{f(t)}{EH^2}$, and

$\bar{w}(t) = \frac{w(0,0,t)}{H}$ have been employed.

The RG variational technique to minimize the total elastic energy functional can be sketched in Eqs.(11a-b), where the superscript (i) denotes the iteration. With this strategy, as discussed earlier, we may dynamically update the interrelation between the transverse displacement field in Eq. (11a) from the state of membranal stress tensors satisfying Eq.(11b), and vice versa.

3. Dynamic Response

3.1 First Phase of Motion (Forced Vibration)

Substituting Eqs.(9) and (10) in Eqs. (11, a-b) and performing the integrations reduces the FVK Partial Differential Equation to an ODE in the form of (12)

$$\omega_e^2 \bar{w}^{(i+1)} + (..) \bar{w}^{(i+1)} - \frac{3E\pi^2 \varepsilon}{4\rho L^2} \bar{w}^{(i)} \bar{\phi}^{(i+1)} = \frac{4\alpha p_0}{\rho H^2} \quad (12)$$

where $\varepsilon = \frac{8H^2}{9L^2}$ is a parameter of small value. From the compatibility equation (11-b) we obtain:

$$\bar{\phi}^{(i+1)} = -\frac{4}{3\pi^2} \bar{w}^{(i)2} \quad (13)$$

The coefficient of the nonlinear term $\bar{w}^{(i)} \bar{\phi}^{(i+1)}$, may be visualized as the equivalent membrane stiffness of the plate; for a multiple degree of freedom system, this nonlinear term accounts for the mode coupling of the structure. The vibration frequency ω_e^2 gives the ratio of the bending stiffness to the equivalent mass of the structure expressed as:

$$\omega_e^2 = \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{D}{\mu}} \quad (14)$$

The solution to the first iteration $\bar{w}^{(1)}$ is derived by linearizing the form of the ODE in Eq.(12), i.e. eliminating the Airy Stress function terms $\bar{\phi}^{(i+1)}$. The general solution to the plate motion must satisfy the initial kinematic conditions $\bar{w}(0) = \dot{\bar{w}}(0) = 0$, and can be sketched as:

$$\bar{w}^{(1)} = c(1 - \cos \omega_e t) \quad (15)$$

where the amplitude of vibration is

$$c = \frac{4\alpha p_0}{\rho H^2 \omega_e^2} \quad (16)$$

While the expression of the transverse displacement in further iterations may be derived by substituting Eq. (15) in Eq. (13) and then in Eq. (11a), heuristically, with the nonlinear terms present in Eq.(12), the explicit solution entails the presence of secular terms (in the form of $t \sin t$) which brings about a non-harmonic response with unbounded growth of transient displacements. The solution can be made harmonic by employing the Poincaré-Lindstedt perturbation method to eliminate, once and for all, the dependence of the displacement field on such terms. To this end, the frequency response is normalised as $\tau = (\omega_e + \varepsilon \bar{\omega}_1 + O(\varepsilon^2))t$, where $\bar{\omega}_1$ is referred to as the pseudo vibration hereinafter at the phase (i)th of motion. Accordingly, the displacement field is expressed as a truncated series of its iterative terms given by:

$$\bar{w}(\tau) = \bar{w}^{(1)}(\tau) + \varepsilon \bar{w}_1^{(2)}(\tau) + O(\varepsilon^2) \quad (17)$$

$$\tau = (\omega_e + \varepsilon \bar{\omega}_1 + O(\varepsilon^2))t \quad (18)$$

To derive the ODE expression for the second term, we shall hence forth ignore the terms of higher order as $\varepsilon^2 \ll 1$. Hence, substituting Eq. (17) and (18) in Eq. (12) together with the use of Eq. (15) yields

$$\omega_1^2 (\bar{w}^{(2)} + (..) \bar{w}^{(2)}) + 2\omega_e (..) \bar{\omega}_1^{(1)} c \bar{w} + \frac{E\varepsilon}{\rho L^2} (\bar{w}^{(1)})^3 = 0 \quad (19)$$

Sequentially, the ODE of Eq.(19) is re-evaluated and solved to determine, unequivocally by imposing the initial boundary conditions, the plate maximum transverse displacement as

$$\begin{aligned} \bar{w}^{(2)} = & -\frac{c\tau \sin \tau}{8\omega_e^2 L^2 \rho} (8L^2 \omega_e \bar{\omega}_1 \rho - 15Ec^2) + C_2 \sin \tau + \\ & C_1 \cos \tau - c / (8\omega_e^2 L^2 \rho (Ec^2 (\cos \tau^3 - 8\cos \tau^2 - \\ & - 15\cos \tau + 24) + 8L^2 \cos \tau \omega_e \bar{\omega}_1 \rho)), \end{aligned} \quad (20)$$

where the integration constants are

$$C_2 = 0, \quad C_1 = (17c^3 E) / (8\omega_e^2 L^2 \rho) \quad (21)$$

While the expression of pseudo vibration term to eliminate the secular term is given as

$$\bar{\omega}_1 = \frac{15Ec^2}{8L^2 \omega_e \rho}, \quad (22)$$

which recasts Eq.(20) into Eq. (23). The dependence of this parameter on the plate slenderness ratio and load parameters is illustrated in Fig 1.

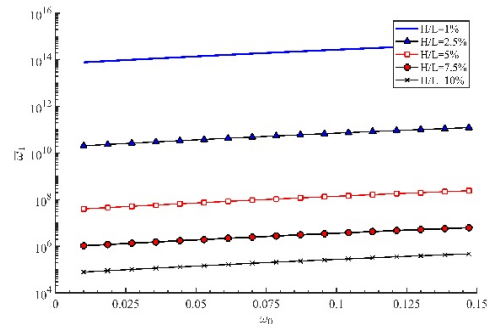


Fig. 1- Variations of the pseudo vibration with central uniform load radius (with $b = 50m^{-1}$)

$$\bar{w}^{(2)} = -\frac{Ec^3}{8\omega_e^2 L^2 \rho} (\cos \tau - 1) (\cos \tau^2 - 7 \cos \tau - 24) \quad (23)$$

3.2 Second Phase of Motion (Free Vibration)

The loading is complete at time $t = t_d$; however, the system retains its motion due to the initial inertia effects and the energy stored in it. It follows that the associated response of the plate is governed by a free vibration following the forced vibration of the previous phase. Subsequently, at the time point of completion of loading, the kinematic continuity applies to ensure there is no displacement or velocity jumps throughout the motion.

The analysis in this phase is carried out in the same spirit as the previous phase of motion- with the solution of linear and nonlinear parts of the displacement field determined on $\bar{\phi}^{(1)} = 0$ (or $\varepsilon \downarrow 0 = 0$), and on $\bar{\phi}^{(2)}$ respectively. Provided that the nonlinear terms are disregarded, the first iteration of ODE is expressed, using the kinematic continuity of displacement and velocity fields of each mode at $t = t_d$, as:

$$\bar{w}^{(1)} = c(\cos \omega_e(t - t_d) - \cos \omega_e t) \quad (24)$$

The plate reaches its peak transient deformations when the velocity vanishes, i.e. $\dot{\bar{w}}^{(i)} = 0$, occurring at

$$t_{\max} = \frac{1}{2\omega_e} ((2k-1)\pi + \omega_e t_d), \quad (25)$$

where k is an integer. A plot of the maximum transient deformation against various load magnitudes is illustrated in Fig. 2.

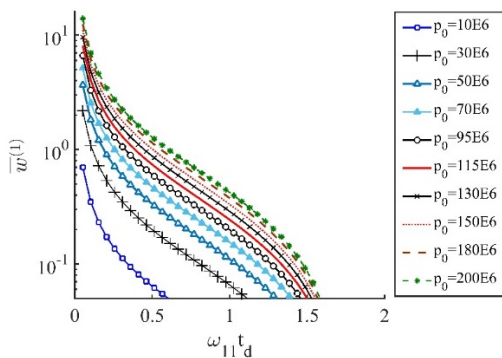


Fig. 2- Variations of the peak transient Mid-point deflection with load magnitude

In the same spirit, Eq. (24) was employed to evaluate the solutions of the ODE (19) as:

$$\bar{w}^{(2)} = C_3 \sin \tau + C_4 \cos \tau + \frac{Ec^3}{32L^2 \omega_e^2 \rho} (\cos(3\tau - 3\tau_1) - 3 \cos(3\tau - 2\tau_1) + 3 \cos(3\tau - \tau_1) +$$

$$(\frac{16L^2 \omega_e \bar{\omega}_2 \rho}{Ec^2} - 18) (\cos(\tau - \tau_1) - \cos \tau) + 6 \cos(\tau - 2\tau_1) - 6 \cos(\tau - \tau_1) - \cos \dots) \quad (26)$$

In expression (26) the condition to make the response harmonic is imposed by, using algebraic manipulations, deriving the solution of the parameter $\bar{\omega}_2$, as expressed in Eq. (27), to eliminate the secular term. It turns out that the pseudo vibration in this phase is pulse dependent, while a surface plot of its variation with the load parameters is drawn in Fig 3. The integration constants were attained by imposing the kinematic continuity, given in Eqs. (28 a-b).

$$\bar{\omega}_2 = \frac{3}{4} c^2 E \frac{(1 - \cos \tau_1)}{\rho L^2 \omega_e} \quad (27)$$

$$c_3 = \frac{Ec^3}{16\omega_e^2 L^2 \rho} \sin \tau_1 (2 \cos \tau_1^3 + 6 \cos \tau_1^2 \sin \tau_1 - 26 \cos \tau_1^2 - 32 \cos \tau_1 \sin \tau_1 - 37 \cos \tau_1 - 34 \sin \tau_1 + 1) \quad (28a)$$

$$c_4 = \frac{1}{8} \frac{Ec^3}{16\omega_e^2 L^2 \rho} \left(\frac{37}{2} + \cos \tau_1^4 + (3 \sin \tau_1 - 13) \cos \tau_1^3 - \left(16 \sin \tau_1 + \frac{37}{2} \right) \cos \tau_1^2 + (-17 \sin \tau_1 + 12) \cos \tau_1 \right) \quad (28b)$$

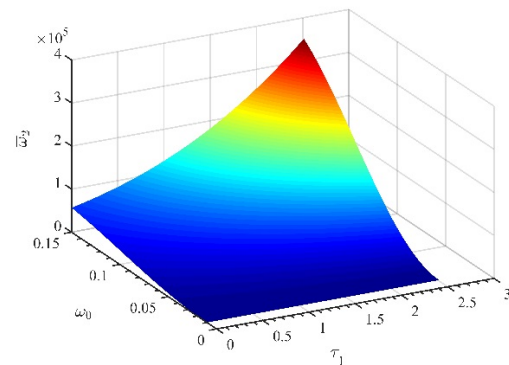


Fig. 3 Variations of the pseudo vibration $\bar{\omega}_2$ with central uniform load radius (with $b = 50m^{-1}$)

3.3 Elastic-Plastic response of the plates

As an extensive transient load is imparted on the structure, the plastic hinges may form in local boundary elements and/or the central zones while the remaining of the plate would behave elastically. The regions where plastic flow occurs may appear intermittently. It turns out that finding the plastic deformation can be difficult as they are inter-spread with elastic deformations. In the past, however, the actual response of the structure has been simplified

into a three stage of elastic-plastic response: the first stage presumed as wholly elastic, which terminates when the yield criterion is invoked, followed by a rigid, perfectly plastic stage. Finally, the motion is concluded with a residual elastic vibration, corresponding to a 'latent' elastic strain energy of the rigid-plastic stage [8]–[11]. The three-stage analysis may be idealised, preferably, into a primarily dominating rigid-plastic form solution with infinite elastic stiffness, together with the 'latent' elastic deformations by permitting the flexural rigidity to revert to its actual value from infinity. The actual deformations would be summation of the rigid-plastic part as well as the elastic deformations.

However, this simplification remains valid provided the material obeys the Hook's law (linear elastic response) during the elastic vibrations, which may not be pertinent to the case of extensive blast loads inducing geometric nonlinearities in the plate. Furthermore, most materials exhibit such nonlinearities in the elastic state with some/little plasticity. Thus, it is pragmatic to investigate the elastic-plastic response of the plated elements where the influence of the membrane forces plays a significant role throughout the structural response.

The foregoing analysis assumed the material performance is wholly elastic. Indeed, the material points through plate section strain plastically when the trajectory of the stress state reaches the yield curve of the associated constitutive yield criterion. Since large nonlinear deformations are of concern, it may be presumed that the bending strain energy is insignificant to the membrane strain energy. To determine the elastic-plastic deformations, it is assumed that the response is predominantly governed by the membrane forces.

Evaluating the components of the Cauchy stress tensor from the Airy stress function, we have:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{12} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}, \quad (29)$$

where σ_{12} represents the shear stress. In 2-dimensional state of stress, the principle stresses represent the eigenvalues of the Cauchy stress tensor as

$$\sigma_k = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \left[\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2 \right] \quad (30)$$

with $k = 1, 2$ giving the maximum and minima of the principle stresses, respectively. Eqs. (29) is utilised, together with Eq.(30), to delineate the membrane forces in principle directions is evaluated as (34)-(35):

$$N = \int \sigma_k dZ, \quad (34a)$$

$$N = -\frac{1}{4L^2} \pi^2 \bar{\phi}^{(i+1)} H \cos \frac{\pi(x+y)}{2L} \quad (34b)$$

From Eq. (34), the membrane plastic collapse capacity per unit length of the structure is given as:

$$N_0 = \sigma_0 H \quad (35)$$

Equation (35) states a quadratic relationship of the transverse displacement field with the membranal forces, which attains a peak at each peak of displacement field. When $N = N_0$ the plate yields. Yielding occurs almost instantaneously before the plate reaches its first peak. The normalised membrane force displacement of armour steel and mild steel are plotted in Fig. 4 – Fig. 5 on four different square plates, namely, 4mm thick Mild steel, 4.61mm AR440T, 3.8mm AR370T and 4.16mm AR500T plates, the all having 400mm side length dimension. Details of the geometric and material properties of the candidates are found in [1]. The path of deformation, having reached the critical point of yielding, follows the straight line governed by Rigid-perfectly plastic theory. The permanent deformation of the plats may be found from the explicit solutions to rigid-perfectly plastic response of the plate in [6].

4. Concluding remarks

In this work we develop an analytical model to delineate the nonlinear dynamic response of elastic thin plated structures subject to transient pressure loads, such as localised blasts occurring due to proximal charges. The load was assumed to be multiplicatively decomposable into a spatial and a temporal distribution. Considering this idealization and utilising the Ritz-Galerkin's functional, a single dimensionless parameter was obtained which characterises various blast loading scenarios by the correct choice of its parameters b, R_s .

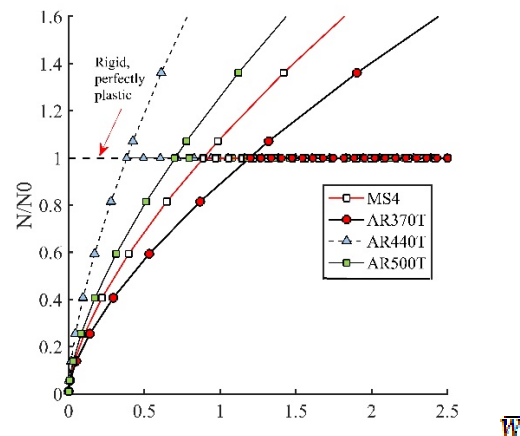


Fig. 4- Force vs normalised mid-point displacement of the panels subject to localised blast load with parameters $p_0 = 600 \text{ MPa}$, $t_d = 20 \mu\text{s}$,

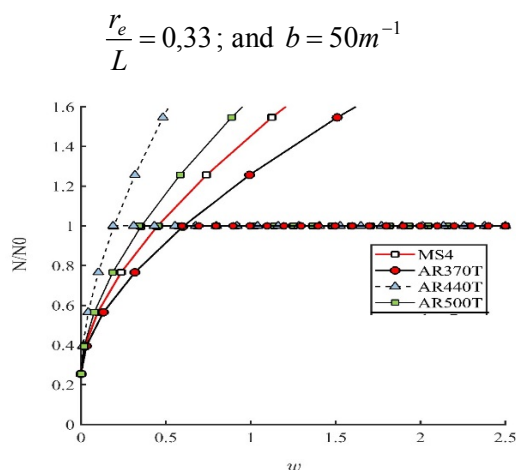


Fig. 5- Force vs normalised mid-point displacement of the panels subject to load parameters $p_0 = 20MPa$, $t_d = 0,1\mu s$ and

$$\frac{r_e}{L} = 0,33; \text{ and } b = 50m^{-1}$$

Список використаних джерел

1. Mehreganian, N. The response of mild steel and armour steel plates to localised air-blast loading-comparison of numerical modelling techniques / N. Mehreganian, L. A. Louca, G. S. Langdon, R. J. Curry, N. Abdul-Karim // *Int. J. Impact Eng.* – 2018. – **115**. – P. 81–93.
2. McDonald, B. Experimental response of high strength steels to localised blast loading / B. McDonald, H. Bornstein, G. S. Langdon, R. Curry, A. Daliri & A. C. Orifici // *Int. J. Impact Eng.* – 2017. – **115**. – P. 106–119.
3. Karagiozova, D. Simulation of the response of fibre-metal laminates to localised blast loading / D. Karagiozova, G. S. Langdon, G. N. Nurick & S. Chung Kim Yuen // *Int. J. Impact Eng.* – 2010. – **37**(6). – P. 766–782.
4. Fallah, A. S. Dynamic response of Dyneema® HB26 plates to localised blast loading / A. S. Fallah, K. Micallef, G. S. Langdon, W. C. Lee, P. T. Curtis & L. A. Louca // *Int. J. Impact Eng.* – 2014. – **73**. – P. 91–100.
5. Micallef, K. The dynamic performance of simply-supported rigid-plastic circular steel plates subjected to localised blast loading / K. Micallef, A. S. Fallah, D. J. Pope & L. A. Louca // *Int. J. Mech. Sci.* – 2012. – **65**(1). – P. 177–191.
6. Mehreganian, N. Inelastic dynamic response of square membranes subjected to localised blast loading / N. Mehreganian, A. S. Fallah & L. A. Louca // *Int. J. Mech. Sci.* – 2018. – **148**. – P. 578–595.

The Ritz-Galerkin method was similarly employed, to minimize the nonlinear coupled FVK equations considering a kinematically admissible displacement field and an associated Airy stress function in an iterative procedure. The state variables were determined in two distinguished phases of motion, the first reflecting the forced vibration while the second addressing the free vibration due to initial inertia effects and the stored elastic energy of the system. The Poincaré-Lindstedt perturbation method was employed to avoid the non-convergent explicit solution due to the presence of secular terms whilst rendering the predicted oscillation harmonic.

The Elasto-plastic response of the plate was discussed by considering the plates as membrane, i.e., negligible bending stiffness compared with the membrane stiffness, with the assumption of perfect plasticity, i.e. neglecting the strain rate sensitivity and strain hardening phenomena.

References

1. MEHREGANIAN, N., LOUCA, L. A., LANGDON, G. S., CURRY, R. J. & ABDULKARIM, N. (2018) The response of mild steel and armour steel plates to localised air-blast loading-comparison of numerical modelling techniques. *Int. J. Impact Eng.* 115. p. 81–93.
2. McDONALD, B., BORNSTEIN, H., LANGDON, G. S., CURRY, R., DALIRI, A., & ORIFICI, A. C. (2017) Experimental response of high strength steels to localised blast loading. *Int. J. Impact Eng.* 115. p. 106–119.
3. KARAGIOZOVA, D., LANGDON, G. S., NURICK, G. N. & CHUNG KIM YUEN, S. (2010) Simulation of the response of fibre-metal laminates to localised blast loading. *Int. J. Impact Eng.* 37 (6). p. 766–782.
4. FALLAH, A. S., MICALLEF, K., LANGDON, G. S., LEE, W. C., CURTIS, P. T. & LOUCA, L. A. (2014) Dynamic response of Dyneema® HB26 plates to localised blast loading. *Int. J. Impact Eng.* 73. p. 91–100.
5. MICALLEF, K., FALLAH, A. S., POPE, D. J. & LOUCA, L. A. (2012) The dynamic performance of simply-supported rigid-plastic circular steel plates subjected to localised blast loading. *Int. J. Mech. Sci.* 65(1). p. 177–191.
6. MEHREGANIAN, N., FALLAH, A. S & LOUCA, L. A. (2018) Inelastic dynamic response of square membranes subjected to localised blast loading. *Int. J. Mech. Sci.* 148. p. 578–595.

7. Szilard, R. Theories and applications of plate analysis: classical numerical and engineering methods. – New York: Wiley-Interscience Publication. – 2004.
8. Symonds, P. S. Parkes revisited: On rigid-plastic and elastic-plastic dynamic structural analysis / P. S. Symonds & W. T. Fleming // *Int. J. Impact Eng.* – 1984. – **2**(1). – P. 1–36.
9. Yuan, Y. Large deformation, damage evolution and failure of ductile structures to pulse-pressure loading / Y. Yuan, P. J. Tan, K. A. Shojaei & P. Wrobel // *Int. J. Solids Struct.* – 2016. – **96**. – P. 320–339.
10. Zheng, C. The elastic-plastic dynamic response of stiffened plates under confined blast load / C. Zheng, X. S. Kong, W. G. Wu & F. Liu // *Int. J. Impact Eng.* – 2016. – **95**. – P. 141–153.
11. Rigby, S. E. Elastic-plastic response of plates subjected to cleared blast loads / S. E. Rigby, A. Tyas & T. Bennett // *Int. J. Impact Eng.* – 2014. – **66**. – P. 37–47.
7. SZILARD, R. (2004) *Theories and applications of plate analysis: classical numerical and engineering methods*. New York: Wiley-Interscience Publication.
8. SYMONDS, P. S. & FLEMING, W. T. (1984) Parkes revisited: On rigid-plastic and elastic-plastic dynamic structural analysis. *Int. J. Impact Eng.* 2(1). p. 1–36.
9. YUAN, Y., TAN, P. J., SHOJAEI, K. A. & WROBEL, P. (2016) Large deformation, damage evolution and failure of ductile structures to pulse-pressure loading. *Int. J. Solids Struct.* 96. p. 320–339.
10. ZHENG, C., KONG, X. S., WU, W. G. & LIU, F. (2016) The elastic-plastic dynamic response of stiffened plates under confined blast load. *Int. J. Impact Eng.* 95. p. 141–153.
11. RIGBY, S. E., TYAS, A. & BENNETT, T. (2014) Elastic-plastic response of plates subjected to cleared blast loads. *Int. J. Impact Eng.* 66. p. 37–47.

Надійшла до редколегії 29.09.19

УДК 539.3

Можаровський В. В., д. т. н., проф.,
Москалева М. В.

**Реалізація розрахунку згинних
деформацій зубів зубчастих коліс з
композитів**

Гомельський державний університет
ім. Ф. Скорини, 246019, м. Гомель, вул.
Советская, 104, e-mail: mozh@gsu.by

V. V. Mozharovsky, Dr. Sci. (Tech.), Prof.,
M. V. Moskaleva

**Realization of calculation of bended
deformations of teeth of gear wheels from
composites**

Francisk Skorina Gomel State University, 246019,
Gomel, Sovetskaya str., 104
e-mail: mozh@gsu.by

В роботі розглядається реалізація розрахунку згинних деформацій зубів зубчастих коліс з композитів. Для вирішення розглянутих завдань (розрахунку напружено-деформованого стану) розроблена автоматизована методика і створений програмний модуль. Досліджується згинна деформація зуба зубчастого колеса з волокнистого матеріалу з анізотропними властивостями, що знаходиться під дією зосередженої сили в різних характерних точках на поверхні зуба. Для розрахунку деформації зубчастих коліс з металів і пластмас також розроблена програма в середовищі Delphi, яка дає можливість реалізувати розрахунок коефіцієнта згинної деформації зуба зубчастого колеса. Було розглянуто три моделі зуба: у вигляді клина, параболи і евольвенти з галтеллю. Розроблено алгоритм і створена програма, що реалізує розрахунок коефіцієнта згинної деформації для трьох моделей зуба зубчастого колеса з композитів.

Ключові слова: деформація, композит, евольвента, зубчасте колесо, програмний комплекс.

In this work the implementation of calculation of bended deformations of teeth of gear wheels from composites is considered. To solve the problems considered (calculation of stress-strain state), an automated technique was developed and a program module was created. The flexural deformation of a toothed tooth from a fibrous material with anisotropic properties under the action of concentrated force in various distinctive points on the surface of the tooth is researched. To calculate the deformation of gear wheels from metals and plastics, a program is also developed in the Delphi environment, which makes it possible to implement the calculation of the coefficient of bending deformation of the tooth of the toothed wheel. Three models of the tooth were considered: in the form of a wedge, parabolas and evolvents with a gallet. The algorithm is developed and the program, which implements the calculation of the bending coefficient for three models of the gear tooth of composites, is developed.

Key words: deformation, composite, evolvent, gear wheel, software complex.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Широкий розвиток нових композиційних матеріалів значно стимулює їх застосування в розробках сучасних елементів деталей машин в різних галузях машинобудування. Ясно, що таке впровадження і застосування композиційних матеріалів вимагає створення неklasичних методів розрахунку на міцність з урахуванням їх фізико-механічних властивостей. У даній роботі ці розрахунки стосуються створення і реалізації комп'ютерної програми розрахунку згинних деформацій зубів зубчастих коліс з композитів. Хоча маємо великий досвід в області розробок методів розрахунку на міцність і деформа- тивність зубчастих коліс з металів і пластмас, але

застосування таких методик для композитів дає значні похибки і потрібно створити нові комп'ютерні програми, за допомогою яких можна успішно реалізувати розрахунки. Сучасний світовий досвід використання зубчастих коліс з композитів [1], [2], [3] показав, що розвиток таких розрахунків має місце в розробках комп'ютерних програм, в основі яких лежать чисельні методи, такі як метод скінченних елементів (МСЕ) [4], метод граничних рівнянь (МДУ), метод граничних елементів і т. д.. Використовуючи широко відомі програмні продукти, наприклад, ANSYS, легко можна розрахувати деформацію зубів зубчастих коліс, але таке

застосування викликає ряд питань про наявність програм, їх вартість і точність обчислення.

Тому постараємося надати комп'ютерну методику, в основі якої лежать методи опору матеріалів для розрахунку деформацій зубів зубчастих коліс [5]. (Тут і далі використовуємо класичний термін «деформація», прийнятий у деталях машин, маючи на увазі, що визначається розмірна величина, тобто переміщення).

2. Постановка задачі та її розв'язання

Нехай необхідно розрахувати згинну деформацію зуба зубчастого колеса з волокнистого матеріалу з анізотропними властивостями. Моделюємо розрахунок деформації зуба у вигляді дії зосередженої сили в різних характерних точках на поверхні зуба, вважаючи, що зуб можна моделювати у вигляді клина, параболи і евольвенти з галтеллю. Нас цікавить, наскільки близько до реальних результатів деформацій зубів дає розрахунок по вище зазначеним моделям. При цьому важливо відзначити, що розрахунок для зуба-клина і зуба-параболи виконується по замкнутим формулам, а для реального зуба з евольвентою і галтеллю потрібно чисельне інтегрування.

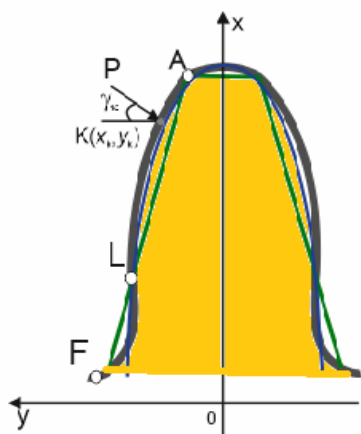


Рис. 1. Схема деформації зуба зубчастого колеса

Розглянемо зуб (рисунок 1), позначивши т. А - початок і (вершина зуба), т. L - кінець евольвенти і початок галтелі, т. F - кінець галтелі. Розташуємо систему координат так, щоб початок координат збігалося з центром зубчастого колеса. Нехтуючи тертям, прийнемо, що сила в деякій точці (рис.1) діє по нормалі до робочої поверхні профілю зуба.

Введемо позначення: δ_e – деформація зуба, що має евольвентну форму, δ_{kl} – деформацію зуба клина, δ_{par} – деформація зуба, що має форму параболи (рисунок 1).

3. Методика побудови математичної моделі

Як відомо, деформації зубів складається з трьох складових згинної δ_u , зсуву δ_{sd} і деформації стиску δ_{sg} . Величина деформації в напрямку сили P буде $\delta = \delta_u + \delta_{sd} + \delta_{sg} = y_u \cos \gamma_k + y_{sd} \cos \gamma_k + y_{sg} \sin \gamma_k$, де y_u, y_{sd}, y_{sg} – відповідні деформації, γ_k – кут тиску в точці.

Застосовуючи теорему Кастільяно, отримаємо формулу для деформації зуба з евольвентним профілем:

$$\delta_e = \frac{P \cos^2 \gamma_k}{E b_w} \left\{ 1,5 J_1 + [1, 2(1 + \nu) + 0,5 \tan^2 \gamma_k] J_2 \right\},$$

де E_c – модуль пружності композиту, P – сила, що діє в точці $K(x_k; y_k)$, b_w – ширина зубчастого вінця, ν – коефіцієнт Пуассона,

$$J_1 = \int_{x_{yp}}^{x_k} \frac{(x_k - x)[(x_k - x) - y_k \tan \gamma_k]}{y^3} dx,$$

$$J_2 = \int_{x_{yp}}^{x_k} \frac{dx}{y}. \quad (2)$$

Далі в роботі будемо розглядати безрозмірний коефіцієнт деформації:

$$k_e = \delta_e \frac{E_c b_w}{P} \quad (3)$$

Для визначення J_1 і J_2 розділимо ділянку інтегрування $[x_F; x_k]$ на дві $[x_F; x_L]$ і $[x_L; x_k]$, відповідно описувані рівняннями: галтелі

$$\begin{aligned} x &= \frac{z_2}{2} \cos \varphi - \left(\frac{a_n}{\sin \alpha_s} + \rho_0 \right) \sin(\alpha_s - \varphi), \\ y &= \frac{z_2}{2} \sin \varphi - \left(\frac{a_n}{\sin \alpha_s} + \rho_0 \right) \cos(\alpha_s - \varphi), \end{aligned} \quad (4)$$

і евольвенти

$$\begin{aligned} x &= R \cos \beta \\ y &= R \sin \beta \end{aligned} \quad (5)$$

$$\varphi = \frac{2}{z_2}(a_n \operatorname{ctg} \alpha_s + b_n); a_n = f_0 + c_0 - \rho_0;$$

$$b_n = \frac{\pi}{4} + f_0 \operatorname{tg} \alpha_0 + \rho_0 \cos \alpha_0; \beta = \frac{\pi}{2z_2} +$$

$$+ \operatorname{inv} \alpha_0 - \operatorname{inv} \alpha; \alpha = \arccos \frac{z_2 \cos \alpha_0}{2R}.$$

В (4) – (6) введені позначення: f_0 – коефіцієнт висоти головки зуба, α_0 – профільний кут, c_0 – коефіцієнт радіального зазору вихідного контуру інструмента, ρ_0 – радіус округлення вихідного контуру інструмента, α – кут профілю зуба в довільній точці профілю, α_s – кут між початковою прямою рейки і загальною нормаллю до галтелі ($20^\circ \leq \alpha_s \leq 90^\circ$), m – модуль, z_2, z_1 – число зубів колеса і шестерні відповідно.

Координати точки впадини x_F, y_F знаходимо з (5) при $R = R_F = \frac{z_2}{2} - (f_0 + c_0)$, координати точки галтелі: x_L, y_L – з (4) при $\alpha_s = \alpha_0$.

Координати точок прикладання навантаження x_k і y_k визначаємо з [6].

Кут тиску для кожної точки визначається за формулою $\gamma_k = \alpha_k - \beta_k$, де α_k – з таблиці 1, β_k – визначається по (6).

Деформація зуба-клина знаходимо аналогічно як для евольвенти, замінивши $J_1 = J'_1$ і $J_2 = J'_2$ з координатами x', y' . Інтеграли J'_1, J'_2 обчислимо по (2), маючи на увазі, що рівняння збоку клина являє собою пряму

$$x' = cy' + d, \text{ де } c = \frac{x_L - x_A}{y_L - y_A}, d = x_A - cy_A.$$

Деформацію зуба, профіль якого описується параболою, знаходимо аналогічно як для евольвенти, замінивши $J_1 = J''_1$ і $J_2 = J''_2$ з координатами x'', y'' . Інтеграли J''_1, J''_2 обчислимо по (2), маючи на увазі, що рівняння зуба являє собою рівняння параболу виду

$$x'' = ay''^2 + b, \text{ де } b = \frac{z_2}{2} + f_0, a = \frac{x_L - b}{y_L^2}$$

Зауважимо, що тут і нижче викладки даються для зубчастого колеса одиничного модуля $m = 1$ і з числом зубів $z_2 \geq z_1$.

Розрахунки проведені для зубчастих коліс, що нарізають рейковим інструментом з вихідним контуром по ГОСТ13755-68 ($\alpha_0 = 20^\circ$; $f_0 = 1$; $c = 0.25$).

Як показали попередні розрахунки, вплив коефіцієнта Пуассона незначно, тому для наступних розрахунків прийнято середнє значення $\nu = 0.4$.

3. Приклад числових досліджень

На основі описаної вище методики був розроблений програмний комплекс. Приклад роботи програми наведено на рисунку 2.

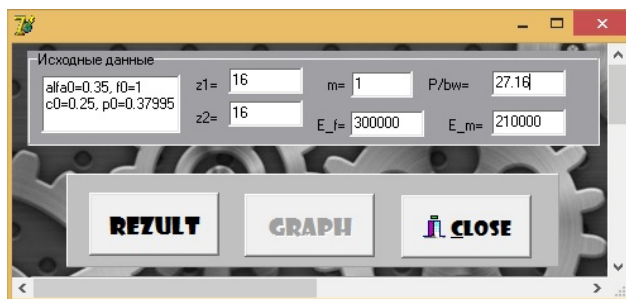


Рис. 2 Головне вікно програми

Програма, за заздалегідь визначеним алгоритмом, обчислює координати необхідних точок), розраховує інтеграли і визначає коефіцієнт деформації всі дані виводяться у вигляді таблиць. Після натискання кнопки «Graph» будуть побудовані графіки.

4. Деформативність зубів зубчастих коліс з композиту

Вище зазначений алгоритм і методика розрахунку згинальних переміщень зуба зубчастого колеса представлений у відносних величинах, незалежно від властивостей матеріалу. Але якщо зубчасте колесо виготовлено з композиту, то необхідно модуль пружності Юнга записати з позицій макропідходу тобто зробити таку заміну $E_c = E_f V_f + E_m V_m$, де E_c, E_f, E_m – модулі пружності Юнга для зуба з композиту, волокна армування, матриці (середовища армування), відповідно, V_f – об'ємний вміст волокна в композиті, V_m – об'ємний вміст матеріалу матриці в композиті.

Була прорахована деформація для трьох вище описаних моделей по V_f . На рисунку 3 можна побачити графік цієї залежності.

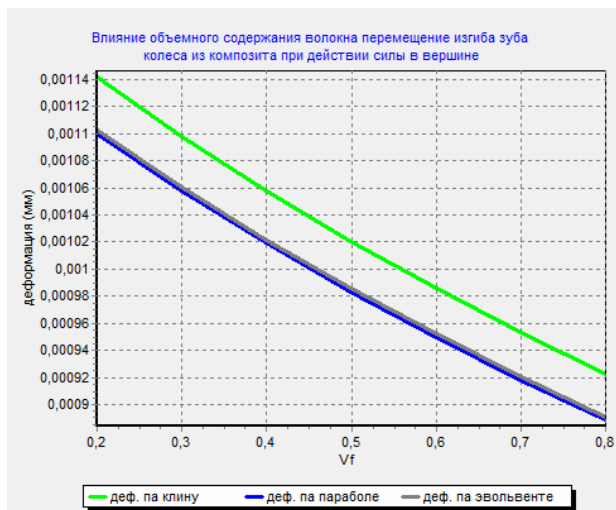


Рис. 3 Графік переміщення (мм) згину зуба колеса щодо об'ємного вмісту волокна

Дані розрахунки проводились з урахуванням дії сили в вершині, але дана програма дозволяє підрахувати згинну деформацію і при дії сили в інших характерних точках. Розроблений програмний комплекс дозволяє вільно варіювати

матеріалами зубів і їх характеристиками і показує достовірні результати. Тестування програми здійснювалося в порівнянні з результатами інших дослідників, отриманих при розрахунку деформації зубів по параболі [2] приймаючи, що зубчасте колесо з волокнистого композиту ($E_f = 3.0 \cdot 10^5$ МПа, $E_m = 2.1 \cdot 10^5$ МПа, при $z_2 = 16$, $P = 1466$ Н·м).

Висновки

Розроблено автоматизовану методика і створений програмний модуль знаходження згинних деформацій зубів зубчастих коліс з композиту. Дана програма дозволяє не тільки обчислити коефіцієнт деформації з різним профілем зуба (евольвентний, по клину і по параболі) і в характерних точках, а й розрахувати переміщення в даних точках з урахуванням профілю зуба і властивостей композиційного матеріалу. Дана програма результати розрахунків надає як в чисельному вигляді, так і у вигляді графіків.

Список використаних джерел

1. Mahendran, S. Design and Analysis of Composite Spur Gear / S. Mahendran, K.M.Eazhil, L.Senthil Kumar // IJRSI. – 2014. – Vol. 1, Issue 6. – P. 42 – 53.
2. TanujSrivastava, Design and Manufacturing of Spur gear tooth: A New Approach Towards Composites / TanujSrivastava, Sushovan Ghosh, Rohit Ghosh, Dr.RabindraNath Barman // IJET. – 2017. – Vol. 9, No. 3. – P. 1551 – 1560.
3. Badkas, S. A. Static and dynamic analysis of spur gear / S. A. Badkas, N. Ajmera // IJMET. – 2016. – Vol. 7, No. 4. – P. 8–21.
4. Chatterjee, S. A comparative analysis on two gear tooth materials for low speed and high torque transmission / S. Chatterjee, K. Gupta // Advances in Modelling and Analysis C. – 2018. – Vol. 73, No. 3. – P. 79–83.
5. Можаровский, В.В. О влиянии формы зуба на изгибную деформацию зубьев эвольвентных цилиндрических зубчатых колес // Известия АН БССР, сер.физ.-техн. / В.В. Можаровский, В.Е. Старжинский. –1974, № – 4. – С. 118 – 123.
6. Можаровский, В.В. О расчете параметров характерных точек n-парного зубчатого зацепления // Известия АН БССР, сер.физ.-техн. / В.В. Можаровский, В.Е. Старжинский. –1975, № – 12. – С. 1082 – 1084.

References

1. Mahendran, S. (2014) Design and Analysis of Composite Spur Gear *International Journal of Research and Scientific Innovation*. 1 (6).p. 42 – 53.
2. TanujSrivastava (2017) Design and Manufacturing of Spur gear tooth: A New Approach Towards Composites *International Journal of Engineering & Technology*. 9(3). p. 1551 – 1560.
3. Badkas S. (2016) A. Static and dynamic analysis of spur gear *International Journal of Mechanical Engineering & Technology*. 7(4). p. 8–21.
4. Chatterjee, S (2018) A comparative analysis on two gear tooth materials for low speed and high torque transmission *Advances in Modelling and Analysis C*. 73(3).p. 79–83.
5. Mozharovskiy V.V. & Starzhinskiy V.Ye. (1974) On the influence of tooth shape on the bending deformation of teeth of involute cylindrical gears *Izvestiya AN BSSR, ser.fiz.-tekhn.* 4. p. 118 – 123.
6. Mozharovskiy V.V. & Starzhinskiy V.Ye. (1975) On the calculation of the parameters of characteristic points of the n-fresh gear *Izvestiya AN BSSR, ser.fiz.-tekhn.* 12. p. 1082 – 1084.

УДК 539.3

Онишкевич В. М.¹, к.ф.-м.н., доц.,
Сулим Г. Т.², д.ф.-м.н., проф.

**Урахування зношування при плоскому
контакті прямокутного штампа з
пружною півплощиною**

¹ Національний лісотехнічний університет
України, 79057, м. Львів, вул. Генерала
Чупринки, 103,
e-mail: onyshkevych@nltu.edu.ua

² Львівський національний університет імені
Івана Франка, 79000, м. Львів, вул.
Університетська, 1,
e-mail: gtsulym@gmail.com

V. M. Onyshkevych¹, Ph. D. (Phys.-Math.), Assoc.
Prof.,
G. T. Sulym², Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

**Consideration of wear in plane contact of
rectangular punch and elastic half-plane**

¹ Ukrainian National Forestry University, 79057,
L'viv, General Chuprynka str., 103,
e-mail: onyshkevych@nltu.edu.ua

² Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytetska str., 1,
e-mail: gtsulym@gmail.com

Розглядається плоска задача про зношування пружного півпростору під дією прямокутного в перерізі штампа, що рухається вздовж твірної з постійною швидкістю. Поза штампом поверхня півплощини незавантажена. Температурними ефектами, які неминуче виникають, нехтуємо, оскільки задача розглядається в стаціонарній постановці. Розв'язок задачі теорії пружності будується за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Контактні напруження шукаються у вигляді ряду Фур'є, коефіцієнти розвинення якого задовольняють парним інтегральним рівнянням, що призводять до системи нелінійних алгебричних рівнянь. Отримано еволюцію контактних напружень, зношування і стирання в часі.

Ключові слова: контакт, тертя, зношування.

The plane contact problem on wear of elastic half-plane by a rigid punch has been considered. The punch moves with constant velocity. Arising thermal effects are neglected because the problem is investigated in stationary statement. In this case the crumpling of the nonhomogeneities of the surfaces and abrasion of half-plane take place. Out of the punch the surface of half-plane is free of load. The solution for problem of theory of elasticity is constructed by means of Fourier integral transformation. Contact stresses are found in Fourier series which coefficients satisfy the dual integral equations. It leads to the system of nonlinear algebraical equations for unknown coefficients by a method of collocations. This system is reduced to linear system in the partial most interesting cases for computing of maximum and minimum wear. The iterative scheme is considered for investigation of other nonlinear cases, for initial approximation the mean value of boundary cases is used. The evolutions of contact stresses, wear and abrasion in the time are given. For both last cases increase or invariable of vertical displacement correspondently is obtained. In the boundary cases coincidence of results with known is obtained.

Key Words: contact, friction, wear.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Уперше задачі з урахуванням зносу досліджувалися в [1, 2], а математичні моделі зношування було наведено в [3]. Осесиметричну контактну задачу із зношуванням для кругового штампа і півпростору розв'язано в [4]. Задачу про

термопружний контакт півплощини з прямокутним штампом за теплоутворення від тертя розв'язано в [5].

Розглядається плоска задача про зношування пружного півпростору під дією прямокутного в перерізі штампа, що рухається вздовж твірної з постійною швидкістю. Температурними

ефектами, які неминуче виникають, нехтуємо, оскільки задача розглядається в стаціонарній постановці. Нехай до моменту часу $\tau=0$ під втиснутим силою P у пружну півплощину штампом тиск стаціонарно розподілявся, змінюючи мікронерівності поверхні. З моменту часу $\tau=0$ штамп рухається з постійною швидкістю V_0 і відбувається стирання півплощини. Поза штампом поверхня півплощини незавантажена.

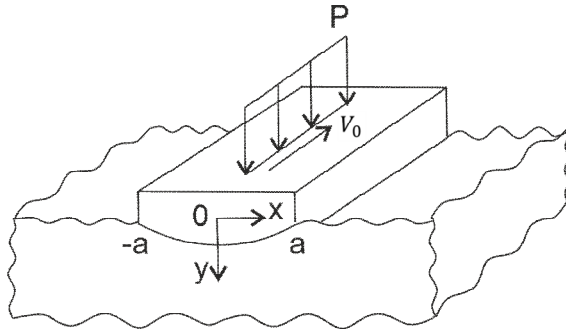


Рис. 1 Геометрія задачі

2. Математична постановка задачі

Для розв'язання задачі необхідно проінтегрувати рівняння теорії пружності

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \partial \theta / \partial x = 0, \quad (1)$$

$$\mu \Delta v + (\lambda + \mu) \partial \theta / \partial y = 0, \quad (2)$$

де $\theta = \partial u / \partial x + \partial v / \partial y$, u і v – компоненти вектора переміщень, λ і μ – коефіцієнти Ламе, за таких граничних умов при $y=0$:

$$v = f(x) + (k_1 V_0 \tau / H_b + k_2) |\sigma_y(x)|^\alpha, \quad |x| \leq a, \quad (3)$$

$$\sigma_y(x) = 0, \quad |x| \geq a, \quad (4)$$

$$\tau_{xy}(x) = 0, \quad |x| < \infty. \quad (5)$$

Тут $f(x)$ – задані переміщення під штампом, a – півширина штампа, H_b – твердість за Брінелем матеріала півплощини, τ – час. Процес зношування визначається параметрами [6] k_1 , k_2 , $0 \leq \alpha \leq 1$.

3. Розв'язок задачі для півплощини

Застосовуючи до рівнянь (1)-(2) інтегральне перетворення Фур'є та задовольняючи граничним умовам (3)-(5), отримаємо парні інтегральні рівняння

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu) C_1 \xi^2 e^{-i\xi x} / \lambda d\xi = f(x) + (k_1 V_0 \tau / H_b + k_2) |\sigma_y(x)|^\alpha, \quad |x| \leq a \quad (7)$$

$$-\frac{\mu}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda + \mu)^2 C_1 \xi^2 |\xi| e^{-i\xi x} / \lambda d\xi = 0, \quad |x| > a \quad (8)$$

Продовжуючи (8) на всю вісь x за допомогою функції Хевісайда

$$-\frac{\mu}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda + \mu)^2 C_1 \xi^2 |\xi| e^{-i\xi x} / \lambda d\xi = \sigma_y(x) H(a - |x|)$$

та представляючи нормальні напруження у вигляді ряду Фур'є

$$\sigma_y(x) = \sum_{n=-N}^N a_n \exp(i\pi n x / a), \quad (9)$$

із співвідношень (7)-(8) отримаємо:

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} \sum_{n=-N}^N a_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi a + \pi n)}{|\xi|(\xi + \pi n / a)} e^{-i\xi x} d\xi + 2\pi \left(\frac{k_1 V_0 \tau}{H_b} + k_2 \right) \left(\sum_{n=-N}^N a_n \exp \frac{i\pi n x}{a} \right)^\alpha = -2\pi f(x).$$

Використавши метод точкової колокації при $x = x_j = -a + a(j-1)/N$, $(j = \overline{1, 2N+1})$, для знаходження невідомих коефіцієнтів a_n , $(n = \overline{1, 2N+1})$ отримаємо систему нелінійних алгебричних рівнянь

$$\bar{z} \|A\| + C(\bar{z} \|D\|)^\alpha = \bar{b}, \quad (10)$$

де

$$\bar{z} = (a_{-N}, a_{-N+1}, \dots, a_{N-1}, a_N) = (z_1, z_2, \dots, z_{2N+1}),$$

$$C = 2\pi(k_1 V_0 \tau / H_b + k_2), \quad b_j = -2\pi f(x_j),$$

$$a_{k,j} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi a + \pi n)}{|\xi|(\xi + \pi k / a)} e^{-i\xi x} d\xi,$$

$$d_{k,j} = \exp(i\pi kx/a), \quad (k, j = \overline{1, 2N+1}).$$

4. Розв'язання системи рівнянь

При $\alpha = 1$ та $\alpha = 0$ нелінійна система рівнянь (10) перетворюється у лінійну і відповідно набуває вигляду

$$\bar{z}_1 \|A\| + C(\|D\|) = \bar{b} \quad (11)$$

та

$$\bar{z}_0 \|A\| = \bar{b} - \bar{c}. \quad (12)$$

Граничні випадки ($\alpha = 0$, $\alpha = 1$) становлять найбільший інтерес, оскільки дають можливість обчислити найменше і найбільше зношування. При $0 < \alpha < 1$ розв'язок (10) буде міститися між розв'язками задач (11) і (12).

Для розв'язання нелінійної системи рівнянь (10) використаємо метод простої ітерації. Представимо систему у вигляді

$$\bar{z} = \bar{g}(\bar{z}) \quad \text{або} \quad z_j = g_j(z_1, z_2, \dots, z_k), \quad (k = 2N + 1),$$

де

$$g_j(z_1, z_2, \dots, z_k) = -\frac{1}{a_{j,j}} \cdot$$

$$\left\{ \sum_{m=j+1}^{j-1} a_{j,m} z_m + \sum_{m=1}^k a_{j,m} z_m + C \left(\sum_{m=1}^k a_{j,m} z_m \right)^\alpha \right\} + b_j.$$

Ітерація проводилась за формулою

$$\bar{z}^{(n+1)} = \bar{g}(\bar{z}^{(n)}), \quad \text{тобто} \quad z_j^{(n+1)} = g_j(z_1^{(n)}, \dots, z_k^{(n)}),$$

($j = \overline{1, k}$), або інакше

$$\begin{cases} z_1^{(n+1)} = g_1(z_1^{(n)}, \dots, z_k^{(n)}) \\ z_2^{(n+1)} = g_2(z_1^{(n)}, \dots, z_k^{(n)}) \\ \dots\dots\dots \\ z_k^{(n+1)} = g_k(z_1^{(n)}, \dots, z_k^{(n)}) \end{cases} \quad (13)$$

За нульове наближення вибираємо середнє значення $\bar{z}^{(0)} = (\bar{z}_0 + \bar{z}_1)/2$ між розв'язком задачі (11) і (12).

5. Числовий аналіз

Числові результати отримано при таких значеннях вхідних параметрів (система SI):

матеріал півплощини – алюміній ($H_B = 11.3$, $\lambda = 5.6 \times 10^{10}$, $\mu = 2.6 \times 10^{10}$), $V_0 = 0.25$, $a = 0.25$, $k_1 = 10^{-10}$, $k_2 = 10^{-11}$, $f(x) = \text{const} = 0.01$, $N = 23$.

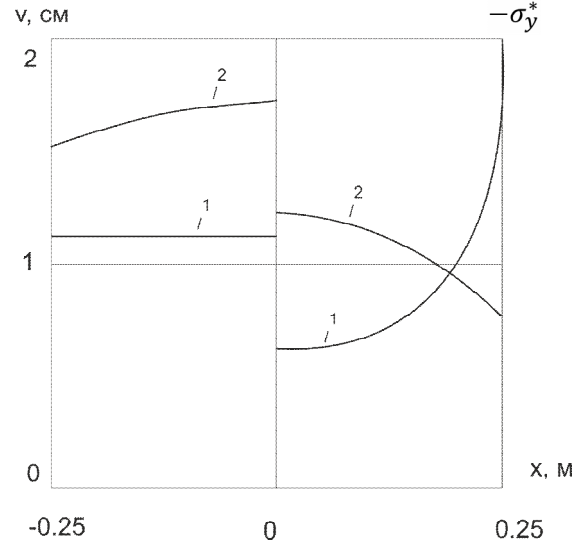


Рис. 2. Розподіл переміщень та приведених напружень при $\tau = 0$ ($1 - \alpha = 0$, $2 - \alpha = 1$)

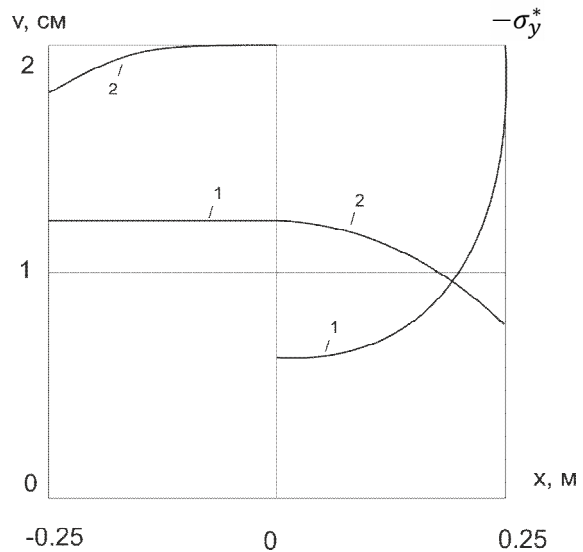


Рис. 3. Розподіл переміщень та приведених напружень при $\tau = 100$ ($1 - \alpha = 0$, $2 - \alpha = 1$)

Розподіл переміщень v та приведених напружень $\sigma_y^* = 2\sigma_y a / P$ наведено на рис. 2 та рис. 3 відповідно при $\tau = 0$ і $\tau = 100$. Криві 1 відповідають $\alpha = 0$, а криві 2 – $\alpha = 1$. Значення сили P обчислювалося за формулою:

$$P = -\int_{-a}^{+a} \sigma_y(x) dx = -\int_{-a}^{+a} \sum_{k=-N}^N z_{N+k+1} \exp \frac{i\pi kx}{a} = -2az_{N+1}$$

У випадку $\alpha = 1$ із збільшенням часу взаємодії вертикальні переміщення зростають, що свідчить про збільшення величини зношення матеріалу (криві 2 на рис. 2 та рис. 3). Випадку $\alpha = 0$ відповідають постійні переміщення v (криві 1 на рис. 2 та рис. 3).

Отримані результати для граничного випадку $\alpha = 0$, $\tau = 0$ співпадають з відомими в літературі [1].

Відзначимо, що на одержаний розв'язок потрібно накласти розв'язок антиплоскої задачі, коли до півплощини прикладено дотичні напруження $\tau_{yz} = f_T \sigma_y$, де f_T – коефіцієнт тертя, а σ_y представлені формулою (9).

Список використаних джерел

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости при наличии износа / Л.А. Галин // ПММ. – 1976. – Т.40, №6. – С. 981-989.
2. Коровчинский М.В. Локальный контакт упругих тел при изнашивании их поверхностей / М.В. Коровчинский // Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа. – М.: Наука, 1971. – 240 с.
3. Александров В.М. О постановке плоских контактных задач теории упругости при износе взаимодействующих тел / В.М. Александров // ДАН СССР. – 1983. – Т.271, №4. – С. 827-831.
4. Онишкевич В.М. Осесимметрична контактна задача із зношуванням / В.П. Левицький, В.М. Онишкевич // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1993. – Вип. 38. – С. 60-63.
5. Онишкевич В. М. Задача про термопружний контакт півплощини з прямокутним штампом за теплоутворення від тертя / В. М. Онишкевич, Г. Т. Сулим // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: фізико-математичні науки. – 2017. – № 3. – С. 165-168.
6. Гавриков М.В. Наследственно-стареющая модель изнашивания и ее применение к задачам с монотонно растущей зоной контакта / М.В. Гавриков, Р.И. Мазинг // Трение и износ. – 1988. – Т.9, №2. – С. 274-279.

References

1. GALIN, L.A. (1976) Kontaknyie zadachi teoryi uprugosti pri nalichiyi iznosa. *PMM*. 40(6). p.981-989.
2. KOROVCHINSKYI, M.V. (1971) Lokalnyi kontakt uprugih tel pri iznashivaniyi ih poverhnostey. *Kontaknoye vzaimodeystviye tverdyh tel i raschet sil treniya i iznosa eoryya reshetok*. Moskva: Nauka.
3. ALEKSANDROV, V.M. (1983) O postanovke ploskih kontaknyh zadach teoryi uprugosti pri iznose vzaimodeystvuyushchih tel. *DAN SSSR*. 271(4). p.827-831.
4. LEVYTSKYI, V.P. & ONYSHKEVYCH, V.M. (1993) Osesymetrychna kontaktna zadacha iz znoshuvanniam. *Bulletin of Lviv University. Series: Mechanics & Mathematics*. 38. p.60-63.
5. ONYSHKEVYCH, V. M. & SULYM, G. T. (2017) Zadacha pro termopruznyi kontakt pivploshchyny z priamokutnym shtampom za teploutvorenniya vid tertya. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*. 3. p.165-168.
6. GAVRIKOV, M.V. & MAZING, R.I. (1988) Nasledstvenno-stareyushchaya model iznashivaniya i eyo primeneniye k zadacham s monotonno rastushchey zonoy kontakta. *Treniye i iznos*. 9(2). p.274-279.

Надійшла до редколегії 29.05.19

УДК 539.3

Опанасович В. К.¹, д. ф.-м. н., проф.,
Слободян М. С.¹, к. ф.-м. н., доц.,
Білаш О. В.², к. е. н.

V. K. Opanasovych¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
M. S. Slobodyan¹, Ph.D.,
O. V. Bilash², Ph.D.

Чистий згин полоси (балки) з довільно орієнтованою наскрізною тріщиною

Pure bending of strip (beam) with the arbitrarily oriented cross-cutting crack

¹ Львівський національний університет імені
Івана Франка, 79000, м. Львів, вул.
Університетська, 1,
e-mail: slobkolia@gmail.com

² Національна академія сухопутних військ
імені гетьмана Петра Сагайдачного, 79012,
м. Львів, вул. Героїв Майдану, 32,
e-mail oksana.bilash@gmail.com

¹ Ivan Franko National University of L'viv, 79000,
L'viv, Universytetska str., 1,
e-mail: slobkolia@gmail.com

² Hetman Petro Sahaidachnyi National Army
Academy, 79012, L'viv, Heroes of Maidan street, 32,
e-mail: oksana.bilash@gmail.com

В роботі досліджена задача про чистий згин полоси (балки) з наскрізною прямолінійною тріщиною, береги якої вільні від зовнішнього навантаження. Під дією згинального моменту, залежно де вона розміщена, її береги можуть не контактувати або гладко контактувати по всій її довжині чи по частині. Використовуючи методи теорії функцій комплексної змінної та комплексні потенціали, розв'язок задачі зведено до задач лінійного спряження, знайдено їх аналітичний розв'язок, на основі якого отримано явний вираз для комплексних потенціалів. Визначено коефіцієнти інтенсивності напружень, виходячи з енергетичного критерію руйнування, знайдено граничне значення згинального моменту, коли тріщина почне поширюватися. Для випадку, коли береги тріщини частково контактуватимуть, визначено довжину області контакту її берегів. Проведено числовий аналіз критичного моменту руйнування полоси (балки) при різних параметрах задачі, які пов'язані з механічним станом тріщини та побудовано відповідні графічні залежності.

Ключові слова: тріщина, полоса (балка), комплексні потенціали, згинальний момент, коефіцієнти інтенсивності напружень.

The problem of pure bending of strip (beam) with transverse rectilinear crack, edges of which are free from acuter load, is investigated in this paper. Under bending moment its edges may not contact or smoothly contact throughout its area length or part. Dependently on where it is located. Using methods of theory of functions of complex variable and complex potentials the problem at issue has been reduced to the problems of linear conjugation, their analytical solution is found. Explicit expressions on complex potentials is written. Based on the energy criterion of destruction stress intensity factors are determined. Limit value of moment when the crack begins to propagate is found. For the case when crack edges partially contact, area length of contact of her edges is determined. Numerical analysis of critical moment of failure of strip (beams) is performed under various parameters of the problem, which are related to the mechanical state of crack. The corresponding graphic dependencies are constructed.

Key Words: crack, strip (beam), complex potentials, bending moment, stress intensity factors.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Балочні елементи конструкцій широко використовуються в інженерній практиці, вони можуть містити тріщини, які є сильними

концентраторами напружень і значно знижують їх міцність і надійність роботи.

Дослідження чистого згину полоси (балки) з тріщиною, перпендикулярною до осі балки, вперше було проведено у працях Панасюка В.В. і

Лозового Л.Б. [1]. Були розглянуті випадки, коли тріщина перпендикулярно розміщена до осі балки, її береги частково контактують, або вона знаходиться в зоні розтягуючих напружень, її береги не контактують. В даній роботі досліджено напружено-деформований стан полоси (балки) за її чистого згину з наскрізною прямолінійною тріщиною, береги якої можуть гладко контактувати по всій її довжині, або по частині, чи взагалі не контактувати залежно, де розміщена тріщина.

2. Формулювання задачі

Дослідимо напружено-деформований стан смуги (балки) завтовшки $2b$ і заввишки $2h$, яка перебуває в умовах чистого згину під дією моментів M . В смугі наявна наскрізна тріщина завдовжки $2l$, береги якої вільні від зовнішнього навантаження, а під дією згинальних моментів M , вони можуть не контактувати (випадок а)) чи гладко контактувати по всій її довжині (випадок в)) або по частині (випадок б)) залежно від того, де розміщена тріщина у балці (див. рис.1).

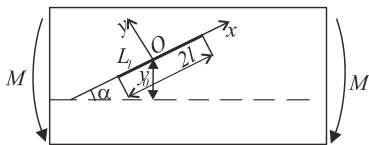


Рис. 1. Схема навантаження полоси (балки)

Виберемо декартову систему координат Oxy з початком координат у центрі тріщини, направивши вісь Ox по ній. Лінію осі Ox , де береги тріщини контактують чи не контактують позначимо відповідно через L і L_1 , а всю лінію – через $\tilde{L}$. Відстань центру тріщини від осі балки позначимо через y_0 , при чому $y_0 > 0$, якщо точка O знаходиться вище осі балки, і $y_0 < 0$ в протилежному випадку. Кут, що утворює тріщина з віссю балки, позначимо через α . Координату точки, що розмежовує область контакту берегів тріщини з контактуючого її частиною, позначимо через λ .

Згідно формулювання задачі маємо такі крайові умови відповідно для кожного випадку:

$$а) \sigma_{yy}^{\pm} = \sigma_{xy}^{\pm} = 0, \text{ на } L_1; \quad (1)$$

$$б) \sigma_{yy}^{\pm} = \sigma_{xy}^{\pm} = 0, \text{ на } L_1; \sigma_{yy}^{+} = \sigma_{yy}^{-}, \quad \sigma_{xy}^{\pm} = 0, \\ v^{+} - v^{-} = 0 \text{ на } L; \quad (2)$$

$$в) \sigma_{yy}^{+} = \sigma_{yy}^{-}, \quad \sigma_{xy}^{\pm} = 0, \quad v^{+} - v^{-} = 0 \text{ на } L; \quad (3)$$

де σ_{yy} і σ_{xy} – компоненти тензора напружень; значками "+" і "-" позначено граничне значення відповідної величини при $y \rightarrow \pm 0$; v – компонента вектора переміщення точки балки на вісь Oy .

3. Побудова розв'язку задачі

Введемо в розгляд комплексні потенціали $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$ [2] та скористаємося залежностями

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (4)$$

$$2\mu(u + iv)'_x = \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (5)$$

де μ – модуль зсуву; κ – стала Мусхелішвілі; $f' = \partial f / \partial x$; u – компоненти вектора переміщення точки балки на вісь Ox ; $z = x + iy$, $i = \sqrt{-1}$.

В монографії [2] наведено вираз для комплексних потенціалів при чистому згині балки, коли вісь Ox направлена по осі балки. Використовуючи формули переходу від однієї системи координат до іншої [2], потенціали $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$ при великих $|z|$ можна подати так

$$\Phi(z) = A_1 z + A_0 + O(1/z^2),$$

$$\Omega(z) = B_1 z + B_0 + O(1/z^2), \quad (6)$$

$$A_1 = iae^{i\alpha}, \quad A_0 = -ay_0, \quad B_1 = -iae^{-i\alpha}(2 - e^{-2i\alpha}),$$

$$B_0 = ay_0(2e^{-2i\alpha} - 1), \quad a = -M/4I, \quad I = (4/3)bh^3. \quad (7)$$

У всіх випадках, як видно з (1) – (3), має місце крайова умова

$$(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^{+} - (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^{-} = 0, \quad x \in \tilde{L}. \quad (8)$$

Якщо врахувати (4), то з (8) отримаємо задачу лінійного спряження, розв'язавши яку, матимемо

$$\Omega(z) = \Phi(z) - D(z), \quad (9)$$

$$D(z) = 2iae^{-i\alpha}(1 + i \sin 2\alpha)z - 2ay_0e^{-2i\alpha}. \quad (10)$$

Введемо функцію

$$F(z) = \Phi(z) - D(z)/2, \quad (11)$$

яку при великих $|z|$, врахувавши (6), (7), (10), можна подати у вигляді

$$F(z) = -2iae^{-i\alpha} \sin \alpha (z \sin \alpha + y_0) + O(1/z^2). \quad (12)$$

Перейдемо до дослідження конкретних випадків.

Почнемо спочатку з розгляду випадку б).

3 крайові умови: $\sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^-$, $x \in L_1$;
 $(v^+ - v^-)'_x = 0$ на $x \in L$. Врахувавши (4), (5), (9), (11), отримаємо задачу лінійного спряження, розв'язавши яку, одержимо

$$F(z) + \bar{F}(z) = \sqrt{z - \lambda} (b_1 z + b_0) / \sqrt{z - l}, \quad (13)$$

$$b_1 = -4a \sin^3 \alpha, \quad b_0 = -2a \sin^2 \alpha (2y_0 - (l - \lambda) \sin \alpha), \quad (14)$$

$$\lambda = -(4y_0 / 3 \sin \alpha) - l/3. \quad (15)$$

Як видно з (15), при умові $y_0 = 0$, $\lambda = -l/3$, тобто довжина області контакту тріщини не залежить від кута нахилу тріщини до осі балки і є такою ж, як для випадку тріщини перпендикулярної до осі балки [1]. Якщо $y_0 \neq 0$, то при $y_0 < 0,5l \sin \alpha$ береги тріщини контактуватимуть частково, а при $y_0 > 0,5l \sin \alpha$ – не контактуватимуть, але при $y_0 < -l \sin \alpha$ береги тріщини повністю контактуватимуть.

З крайові умови $\sigma_{xy}^+ = 0$, $x \in \tilde{L}$, отримаємо задачу лінійного спряження, розв'язавши яку та врахувавши (11) і (13), одержимо

$$\Phi(z) = \frac{1}{2} \left[D(z) + R(z) + \sqrt{\frac{z - \lambda}{z - l}} (b_1 z + b_0) \right]. \quad (16)$$

$$R(z) = -iasin2\alpha \left[\sin \alpha (2z^2 - l^2) + 2y_0 z \right] / \sqrt{z^2 - l^2}. \quad (17)$$

Коефіцієнти інтенсивності напружень знайдемо за формулами [3]

$$K_1^\pm - iK_2^\pm = 2 \lim_{x \rightarrow \pm l \pm 0} \left[\sqrt{2|x \pm l|} \Phi(x) \right]. \quad (18)$$

Підставляючи (16) у (18), отримаємо

$$K_1^\pm = \frac{M}{I} h^{3/2} \tilde{K}_1^\pm, \quad K_2^\pm = \frac{M}{I} h^{3/2} \tilde{K}_2^\pm, \quad (19)$$

$$\tilde{K}_1^\pm = \sin^3 \alpha \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\tilde{y}_0}{\sin \alpha} + \tilde{l} \right) \right]^{3/2}, \quad \tilde{K}_1^- = 0, \quad \tilde{K}_2^\pm = -0,5 \sin 2\alpha \tilde{K}^\pm,$$

$$\tilde{K}^\pm = \sqrt{\tilde{l}} \left(\tilde{y}_0 \pm \frac{1}{2} \tilde{l} \sin \alpha \right), \quad \tilde{y}_0 = \frac{y_0}{h}, \quad \tilde{l} = \frac{l}{h}.$$

Критичне значення згинального моменту знайдемо на основі енергетичного критерію

руйнування, при якому балка зруйнується

$$M^{*\pm} = \frac{M}{b^2 h^{3/2} \sqrt{E\gamma^*}} = \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{(\tilde{K}_1^\pm)^2 + (\tilde{K}_2^\pm)^2}}. \quad (21)$$

де E – модуль Юнга, γ^* – густина ефективної поверхневої енергії матеріалу.

Розглянемо випадок а), коли береги тріщини не контактуватимуть. Функцію $\Phi(z)$ визначимо за формулою

$$\Phi(z) = (\alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0 / \sqrt{z^2 - l^2}) + D(z)/2, \quad (22)$$

$$\alpha_2 = -2\tilde{a} \sin \alpha, \quad \alpha_1 = -2y_0 \tilde{a}, \quad \alpha_0 = \tilde{a} l^2 \sin \alpha,$$

$$\tilde{a} = a \sin \alpha (\sin \alpha + i \cos \alpha).$$

Як видно з (22), якщо $\alpha = 0$, тріщина паралельна до осі балки, то вона не впливає на її напружений стан.

Врахувавши (22), на основі (18) знайдемо коефіцієнти інтенсивності напружень, а з (21) знайдемо критичне значення моменту

$$M^{*\pm} = 8\sqrt{2} / (3\sqrt{\pi} \sin \alpha \tilde{K}^\pm). \quad (23)$$

Аналіз формули (23) показує, що руйнування почнеться з вершини найбільш віддаленої від осі балки.

Розглянемо випадок в). Функцію $\Phi(z)$ визначимо за формулою

$$\Phi(z) = [D(z) - 4a \sin^2 \alpha (z \sin \alpha + y_0) + R(z)] / 2, \quad (24)$$

а функцію $R(z)$ – знайдемо за формулою (17).

Як видно з (17), при $\alpha = \pi/2$ або $\alpha = 0$ $R(z) = 0$, а тому повністю контактуюча тріщина не впливає на напружений стан балки. У цьому випадку коефіцієнт інтенсивності $\tilde{K}_1^\pm = 0$, а вирази для $\tilde{K}_2^\pm$ будуть такими ж самими, як для тріщини, береги якої частково контактують, тобто, мають місце залежності (19) і (20). При цьому критичний момент руйнування балки, визначимо за формулою

$$M^{*\pm} = \frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi} \sin 2\alpha |\tilde{K}^\pm|}. \quad (25)$$

На основі (25) і (20) можна зробити висновок, що руйнування почнеться з вершини найбільш віддаленої від осі балки, як і в попередньому випадку.

4. Числовий аналіз та висновки

На рис. 2 та рис. 3 дається графічна залеж-

ність критичного моменту, коли береги тріщини не контактують (рис. 2 а)), а на рис. 2 б), коли вони повністю контактують, при чому рис. 3 відповідає випадку, коли береги тріщини частково контактують.

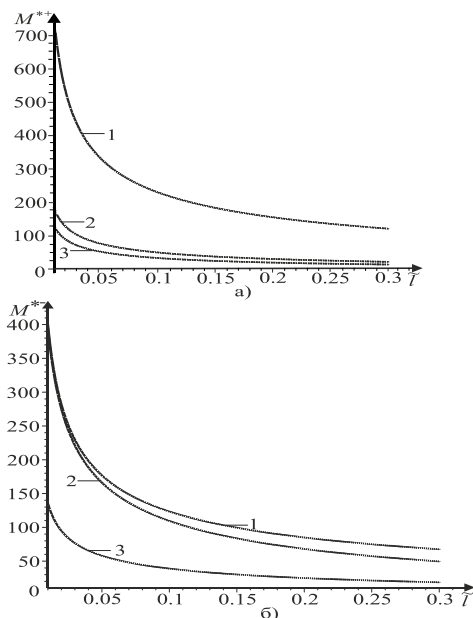


Рис. 2. Графічна залежність M^* від $\tilde{l}$.

На рис. 2 дається графічна залежність критичного моменту від $\tilde{l}$ при різних значеннях α , причому рис. 2 а) побудовано при $\tilde{y}_0 = 0,16$, а рис. 2 б) – при $\tilde{y}_0 = -0,31$. На цьому рисунку крива 1 побудована при $\alpha = 10^\circ$, крива 2 – при $\alpha = 45^\circ$, крива 3 – при $\alpha = 90^\circ$. На основі цього рисунка

можна зробити висновок, що при зростанні параметра $\tilde{l}$ критичний момент руйнування балки зменшується, а при збільшенні величини α він зростає, при фіксованому $\tilde{l}$.

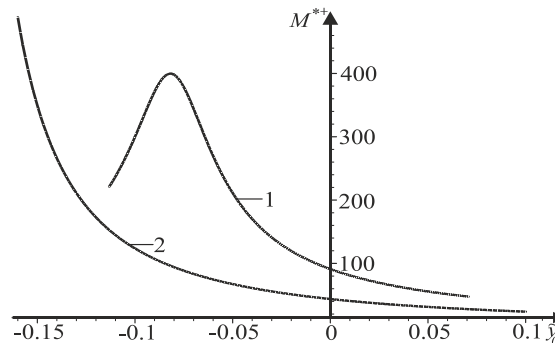


Рис. 3. Графічна залежність M^{**} від $\tilde{y}_0$.

На рис. 3 дається графічна залежність M^{**} від $\tilde{y}_0$ при різних значеннях α та $\tilde{l}$. Причому, крива 1 побудована при $\alpha = 45^\circ$, крива 2 – при $\alpha = 90^\circ$. Рис. 3 побудовано при $\tilde{l} = 0,2$. Як видно з цього рисунка при зростанні $\tilde{l}$ критичний момент зменшується. При $\alpha = 90^\circ$ критичний момент зменшується, якщо ж $\alpha \neq 0$, то критичний момент спочатку зростає з ростом $\tilde{y}_0$, а потім спадає.

Список використаних джерел

1. Панасюк В.В. Вибрані праці (1954-1970) / В.В. Панасюк, НАН України. Фіз.-мех. інст. ім. Г.В. Карпенка. – Львів, 2001. – 450 с.
2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
3. Саврук М.П. Механика разрушения и прочность материалов: справочное пособие : в 4 т. / общ. ред. В. В. Панасюк. Т. 2: Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / М.П. Саврук. – К.: Наук. думка, 1988. – 620 с.
4. Zehnder A.T. Fracture mechanics of thin plates shells under combined membrane, bending and twisting loads / A.T. Zehnder, M.J. Viz // Applied Mechanics Reviews. – 2005. – Vol. 58. – P. 37 – 48.

References

1. PANASYUK, V. (2001) *Vybrani pratsi (1954-1970)*. Lviv: Material science.
2. MUSKHELISHVILI, N. (1966) *Nekotoryie osnovnyie zadachi matematicheskoi teorii uprugosti*. M.: Nauka.
3. SAVRUK, M. (1988) *Mehanika razrysheniya i prochnosti materialov : spravochnoe posobie : v 4 t. / obshch. red. V.V. Panasyuk. T. 2. Koeffitsiyenty intensyvnosti napryazheniy v telax s treshchinami*. Kiev: Naukova dumka.
4. ZEHNDER, A. and M. VIZ (2005) Fracture mechanics of thin plates shells under combined membrane, bending and twisting loads. *Applied Mechanics Reviews*. 58. – p. 37 – 48.

Надійшла до редколегії 20.06.2019

УДК 532.5

Остос О. Х., аспірант,
Жук Я. О., д.ф.-м.н, проф.

**Термомеханічна задача про коливання
в'язкопружного гумоподібного стержня
при динамічному навантаженні**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4е
e-mail: ostos.alexander1994@gmail.com;
y.zhuk@i.ua

O. J. Ostos, Ph.D. Student,
Y. A. Zhuk, Dr.Sci., (Phys.-Math.)

**Thermomechanical problem on vibration of a
viscoelastic rubberlike rod under dynamic
loading**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova pr., 4e
e-mail: ostos.alexander1994@gmail.com;
y.zhuk@i.ua

Розглянуто задачу про коливання в'язкопружного стержня при динамічному навантаженні, прикладеному на одному з його кінців. Досліджено термомеханічні властивості гумоподібного неогуківського матеріалу. Для розв'язання задачі використано концепцію комплексних модулів. Отримані амплітудно-частотні характеристики для напруження та деформації. Введено дисипативну функцію, за допомогою якої досягнуто дисипативний розігрів стержня. На основі скінченно-елементної моделі побудовано розв'язок задачі з врахуванням в'язкопружних властивостей матеріалу. Проаналізовано результати згідно з класичною теорією терморухливості. Зроблені відповідні висновки щодо поведінки гумоподібного матеріалу при термомеханічному навантаженні. Перевірено достовірність значень частот для перших резонансів на основі теоретичних розрахунків.

Ключові слова: неогуківський матеріал, динамічне навантаження, дисипативна функція, терморухливість.

The problem on vibration of a viscoelastic rod under dynamic load at one of its ends is considered. The external loading has a significant influence on the dynamic characteristics of the material. By using the complex moduli, the problem on vibration of the viscoelastic rod was solved. The complex shear and Young's moduli of a rubberlike material should exhibit the same dependence on frequency. The properties of a rubberlike material was applied. The temperature influence is associated both with the Newton boundary conditions and dissipative heating. The dissipative function is expressed in terms of deformations. The frequencies of high-damping materials occur at or near frequencies that are normally of interest in vibration problems at room temperature. For solving the problem a finite element model was applied. Using this model, qualitative analysis of the influence of dynamic load and dissipative heating on the resonant vibrations of viscoelastic rod is performed. According to the theory of viscoelasticity an analysis of the results was done. The reliability of the values of frequencies for the first resonances was checked. The numerical results of the problem on vibration of a viscoelastic cylindrical rod under dynamic load at one of its end by the general thermomechanical laws on vibration in damped mechanical systems were obtained and investigated. Distribution of the temperature of dissipative heating along the rod axis is analyzed.

Key Words: Neo-Hookean material, dynamic load, dissipative function, thermomechanics.

Статтю представив акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Перестюк М.О.

1. Вступ

Важливість дослідження термомеханічної поведінки елементів конструкції, які складаються з полімерів та еластомерів, виникає в багатьох сферах сучасної техніки, у тому числі при розрахунку механічного та теплового стану гумотехнічних виробів, віброізоляторів,

великогабаритних пневматичних шин тощо. Внаслідок таких специфічних властивостей цих матеріалів, як істотна залежність механічних характеристик від температури, низька теплопровідність, значні внутрішні втрати, тривале динамічне навантаження може супроводжуватися високим рівнем дисипативного розігріву. Взаємодія теплових та механічних полів у

в'язкопружних тілах вивчається в межах теорії термов'язкопружності. В нинішній час, термомеханічний стан еластомерних елементів досліджується зазвичай на основі розв'язання зв'язаних задач лінійної термов'язкопружності, в яких співвідношення між напруженнями та деформаціями є лінійними, хоча при цьому враховується залежність властивостей матеріалу від температури. Демпфуюча здатність матеріалу грає величезну роль в динамічній поведінці конструкції. Вона призводить до значного зниження амплітуд при вимушених коливаннях та згладжування напружень в зоні концентрації при коливаннях.

2. Постановка задачі

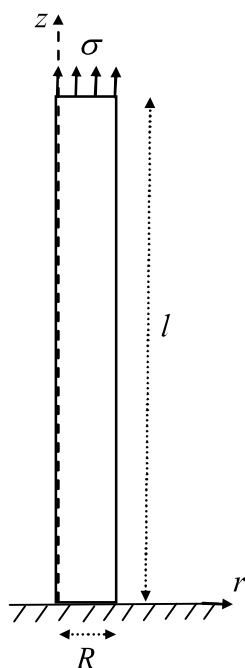


Рис. 1. Схема навантаження

Розглянемо задачу про дисипативний розігрів при гармонічних коливаннях скінченного циліндричного стержня $0 \leq z \leq l$ та радіусом R , із заданою динамічною умовою на його верхньому кінці

$$\tilde{\sigma}_z|_{z=l} = P \quad (1)$$

Нижній край стержня жорстко закріплений.

Гармонічні коливання у в'язкопружному середовищі у спрощеній постановці описуються рівнянням виду

$$(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}) \nabla \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mu} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} + \rho \omega^2 \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad (2)$$

$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}' + i\mathbf{u}''$ – комплексна амплітуда переміщень, ρ – густина матеріалу,

$$\tilde{\lambda} = \frac{\nu \tilde{E}}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\tilde{E}}{2(1 + \nu)}, \quad \tilde{E} = E' + iE'' -$$

комплексні коефіцієнти Ламе та модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона, ω – кругова частота коливань.

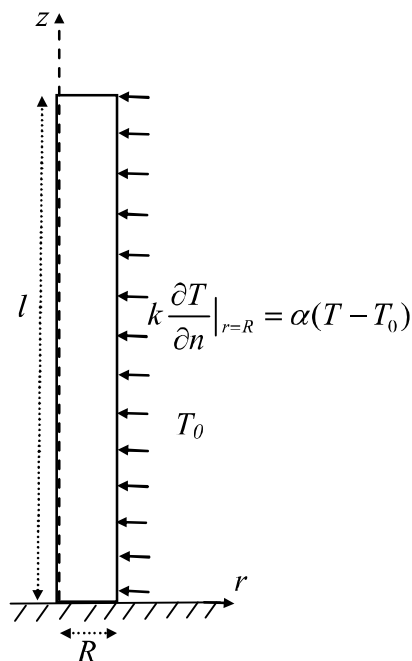


Рис. 2. Схема теплової задачі

При коливаннях в'язкопружного матеріалу відбуваються втрати енергії, що призводить до його нагрівання. Інтенсивність виділення тепла при гармонічних коливаннях описується усередненою дисипативною функцією, яка може бути виражена через амплітуди деформацій

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \text{ у формі}$$

$$\begin{aligned} \bar{D} = \frac{\omega}{2} [& \lambda'' \{ (\varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22} + \varepsilon'_{33})^2 + (\varepsilon''_{11} + \varepsilon''_{22} + \varepsilon''_{33})^2 \} + \\ & + \mu'' \{ 2(\varepsilon'^2_{11} + \varepsilon'^2_{22} + \varepsilon'^2_{33}) + (\gamma'^2_{12} + \gamma'^2_{13} + \gamma'^2_{23}) + \\ & + 2(\varepsilon''^2_{11} + \varepsilon''^2_{22} + \varepsilon''^2_{33}) + (\gamma''^2_{12} + \gamma''^2_{13} + \gamma''^2_{23}) \}], \end{aligned} \quad (3)$$

де $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$, $i \neq j$.

Передачу тепла у середовищі будемо описувати рівнянням теплопровідності відносно наближених, усереднених за період коливань значень температури $\bar{T}$

$$k \nabla^2 \bar{T} + \bar{D} = \rho c \frac{\partial \bar{T}}{\partial t}, \quad (4)$$

де k – коефіцієнт теплопровідності, c – теплоємність. У початковий момент часу стержень має температуру навколишнього середо-

вища T_0 . На його бічній поверхні накладаються умови Ньютона

$$Q = -k \frac{\partial \bar{T}}{\partial n} \Big|_{r=R} = \alpha(\bar{T} - T_0) \quad (3),$$

де Q – густина теплового потоку, α – коефіцієнт тепловіддачі.

3. Розв'язок задачі та результати

При чисельному розрахунку задачі були взяті наступні значення:

$$R = 0,01 \text{ м}, l = 0,2 \text{ м}, P = 1000 \text{ Па}, T_0 = 20^\circ\text{C}.$$

Для отриманої зв'язаної термомеханічної задачі в якості гумоподібного матеріалу був вибраний неогуківський матеріал, який має наступні термомеханічні величини:

$$E' = 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2},$$

$$E'' = 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2},$$

$$\mu' = G' = \frac{E'}{2(1+\nu)} = 3,356 \times 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2},$$

$$\mu'' = G'' = \frac{E''}{2(1+\nu)} = 3,356 \times 10^4 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2},$$

$$\nu = 0,49, \quad \rho = 1200 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

де $\tilde{G} = G' + iG''$ – комплексний модуль зсуву.

$$K' = \frac{E'}{3(1-2\nu)} = 1,667 \cdot 10^8 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2},$$

$$C_{10} = \frac{\mu'}{2} = 1,678 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$$

$$D_1 = \frac{2}{K'} = 1,2 \cdot 10^{-8} \frac{\text{м}^2}{\text{Н}},$$

$$c = 2000 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, \quad \alpha = 9,1 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}},$$

$$k = 0,08 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}.$$

Задача розглядалася в наступному частотному діапазоні: $0 \leq f \leq 1000$ Гц, а розв'язок задачі будувався в околі першого резонансу $f = 114$ Гц.

Використовуючи скінченно-елементну модель, був отриманий розподіл температури вздовж стержня при частоті, близькій до резонансної при заданих механічних та теплових умовах. На малюнку наведений цей розподіл, де значення температур вказані в градусах $^\circ\text{C}$.

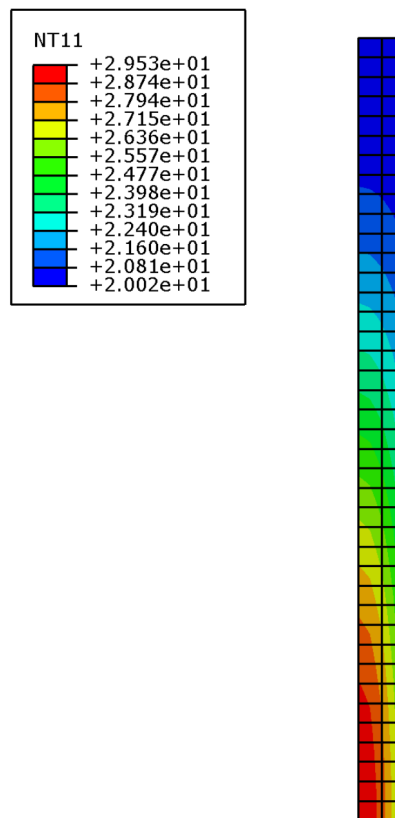


Рис. 3. Розподіл температури вздовж стержня

4. Висновки

Використовуючи концепцію комплексних модулів була розв'язана термомеханічна задача про розігрів циліндричного стержня при гармонічних поздовжніх коливаннях в околі першої резонансної частоти. Дану задачу в термінах комплексних амплітуд основних польових змінних розв'язано із застосуванням модифікованого методу скінченних елементів, який узагальнено на випадок амплітудних співвідношень при гармонічному деформуванні. З графіку розподілу температури бачимо, що температура зростає згори донизу та спадає від середини стержня до бічної поверхні. Це зумовлено збільшенням амплітуди деформацій та напружень на даній формі коливань у нижній частині стержня. При амплітуді напруження на верхній поверхні стержня 10^3 Па та температурі зовнішнього середовища 20°C найбільше значення температури досягається в нижній середній точці стержня: $T_{\max} = 29.53^\circ\text{C}$. Таким чином, можемо зробити висновок, що скінченноелементне моделювання дозволяє ефективно розв'язувати термомеханічні задачі про розігрів в'язкопружних тіл з використанням концепції комплексних модулів.

Список використаних джерел

References

1. *Green A. E. Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics* / A. E. Green. – Oxford: At the Clarendon Press, 1960. – 455 p.
2. *Behnke R. Thermo-mechanically coupled investigation of steady state rolling tires by numerical simulation and experiment* / R. Behnke, M. Kalishke – International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2015. – 68. – С. 101–131.
3. *Карнаухов В. Г. Термомеханика предварительно деформированных вязкоупругих тел* / В. Г. Карнаухов, Б.П. Гуменюк. – Киев: Наук. думка, 1990. – 304 с.
4. *Карнаухов В. Г. Влияние предварительного деформирования на резонансные колебания и диссипативный разогрев вязкоупругого цилиндра конечной длины* / В.Г. Карнаухов, И.К. Сенченков, О.П. Червинко // Прикладная механика. – 1997. – 33, № 1. – С. 39 – 42.
5. *Nashif A. D. Vibration Damping* / A. D. Nashif, D. I. Jones, J. P. Henderson – New York: A Wiley-Interscience Publication. – 1985. – 448 p.
6. *Карнаухов В. Г. Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении* / В. Г. Карнаухов, И. К. Сенченков, Б. П. Гуменюк. – Киев: Наук. думка, 1985. – 288 с.
7. *Astarita G. Thermodynamics of dissipative materials with entropic elasticity* / G. Astarita – Polymer Engineering & Sci. – 1974. – 14, № 10. – С. 730 – 733.
8. *Babra R. C. Thermodynamics of simple materials of differential type* / R. C. Babra – J. Mech. – 1976. – 15, № 3. – С. 457 – 466.
9. *Freakley P. K. Theory and practice of engineering with rubber* / P. K. Freakley, A. R. Payne – London: Applied Science Publishers, 1978. – 667 p.
10. *Anderson V. W. Damping and fatigue properties of magnesium and magnese-copper alloys proposed as new high damping materials* / V. W. Anderson, B. J. Lazan. – Minnesota: Internal rept., Aero Library. – 1957. – 243 p.
11. *Goodman J. Mechanics applied to engineering* / J. Goodman. – London: Longmans-Green, 1899. – 148 p.
1. GREEN, A. E., ADKINS, J. E. (1960) *Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics*. Oxford: At the Clarendon Press.
2. BEHNKE, R. and KALISKE, M. (2015) Thermo-mechanically coupled investigation of steady state rolling tires by numerical simulation and experiment. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 68. p. 101–131.
3. KARNAUKHOV, V. G., GUMENUK, B. P. (1990) *Termomekhanika predvaritel'no deformirovannykh vyazkoupругikh tel*. Kiev: Naukova dumka.
4. KARNAUKHOV, V. G., SENCHENKOV, I. K., and CHERVINKO, O. P. (1997) *Vliyaniye predvaritel'nogo deformirovaniya na rezonansnyye kolebaniya i disipativnyy razogrev vyazkoupругogo tsilindra konechnoy dliny*. *Applied mechanics*. 33(1). p. 39 – 42.
5. NASHIF, A. D., JONES, D. I., and HENDERSON, J. P. (1985) *Vibration Damping*. New York: A Wiley-Interscience Publication.
6. KARNAUKHOV, V. G., SENCHENKOV, I. K., and CHERVINKO, O. P. (1985) *Termomekhanicheskoye povedeniye vyazkoupругikh tel pri garmonicheskoy nagruzhenii*. Kiev: Naukova dumka.
7. ASTARITA, G. (1974) Thermodynamics of dissipative materials with entropic elasticity. *Polymer Engineering & Sci*. 14 (10). p. 730 – 733
8. BABRA, R. C. (1976) Thermodynamics of simple materials of differential type. *J. Mech*. 15(3). p. 457 – 466.
9. FREAKLEY, P. K. and PAYNE, A. R. (1978) *Theory and practice of engineering with rubber*. – London: Applied Science Publishers.
10. ANDERSON, V. W., LAZAN, B. J. (1957) *Damping and fatigue properties of magnesium and magnese-copper alloys proposed as new high damping materials*. Minnesota: Internal rept., Aero Library.
11. GOODMAN, J. (1899) *Mechanics applied to engineering*. London: Longmans-Green.

Надійшла до редколегії 29.06.19

УДК 539.376

Павлюк Я.В., к.т.н., науковий співробітник,

**До задачі розрахунку релаксації
напружень у тонкостінних трубчастих
елементах із лінійно-в'язкопружних
матеріалів**

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН
України, 03057, м. Київ-57, вул. Нестерова, 3,
e-mail:¹ creep@inmech.kiev.ua,

Y.V. Pavlyuk, Ph. D.,

**Creep of isotropic homogeneous and non-
aging of linear-viscoelastic materials under
the complex stress state**

National Academy of Sciences of Ukraine
S.P.Timoshenko Institute of Mechanics, 03057,
Kyiv-57, P. Nesterov str., 3,
e-mail:¹ creep@inmech.kiev.ua,

Розглядається релаксація ізотропних однорідних і нестаріючих лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану. Розв'язок будується шляхом узагальнення вихідної одновимірної моделі в'язкопружності на складний напружений стан, що побудований на використанні гіпотези пропорційності девіаторів. Ядра спадковості задаються дробово-експоненційною функцією Работнова. Встановлюється залежність між ядрами інтенсивності та об'ємної повзучості, що задають скалярні властивості лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану у визначальних рівняннях типу рівнянь малих пружно-пластичних деформацій, і ядрами повздовжньої і поперечної повзучості, що задають спадкові властивості лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов одновісного розтягу. Розв'язано та експериментально апробовано задачі розрахунку релаксації напружень тонкостінних труб за умов комбінованого навантаження розтягом із скрученням.

Ключові слова: релаксація, лінійно-в'язкопружність, ядро спадковості.

The relaxation of isotropic homogeneous and non-aging linear-viscoelastic materials under conditions of complex stress state is considered. Thin-walled tubular specimens of High Density Polyethylene (HDPE) for creep under a single-axial stretching, with a pure twist and combined load tension and torsion are considered as base experiments, tests. The solution is obtained by generalizing the initial one-dimensional viscoelasticity model to a complex stressed state, constructed using the hypothesis of the proportionality of deviators. The heredity kernels are given by the Rabotnov's fractional-exponential function. The dependence between the kernels of intensity and volumetric creep is established, which determine the scalar properties of linear viscoelastic materials in the conditions of a complex stressed state in the defining equations of the type of equations of small elastic-plastic deformations, and the kernels of longitudinal and transverse creep defining the hereditary properties of linear-viscoelastic materials under the conditions of the uniaxial tension. The problems of stress relaxation calculation of thin walled tubes under combined tension with torsion have been solved and experimentally approved.

Key Words: relaxation, linear-viscoelastic, heredity kernel.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ. У процесі експлуатації в'язкопружні матеріали у відповідальних елементах багатьох сучасних конструкцій деформуються і руйнуються при складному напруженому стані і складних режимах навантаження. Особливо актуальними є задачі із прогнозування релаксації напружень, що викликає перерозподіл напружень в елементах конструкцій у часі і порушення функціональних можливостей конструкції в

цілому. Дослідження процесів повзучості і релаксації лінійно-в'язкопружних матеріалів, особливо при складному напруженому стані і змінних режимах навантаження, все ще перебувають на стадії розвитку. Основні труднощі і нерозв'язані задачі в цій галузі пов'язані з вибором форми узагальнення одновимірних визначальних рівнянь теорії на складний напружений стан, з розробкою методів ідентифікації ядер

спадковості і методів визначення параметрів ядер, з вибором і обґрунтуванням системи базових експериментів, необхідних для визначення функцій і констант теорії.

1. Постановка задачі

Розглядається релаксація ізотропних однорідних і нестаріючих лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану. Визначальні рівняння повзучості, що задають залежність між компонентами тензорів напружень σ_{ij} , деформацій ε_{ij} і часом t , записуються у вигляді:

$$\varepsilon_{ij}(t) = e_{ij}(t) + \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_v(t) = \frac{1}{2G}\left[s_{ij}(t) + \lambda_s \int_0^t K_s(t-\tau)s_{ij}(\tau)d\tau\right] + \left(\frac{1}{3B}\delta_{ij}\left[\sigma_0(t) + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau)\sigma_0(\tau)d\tau\right]\right); \quad (i, j = \overline{1,3}),$$

розв'язком якого є рівняння релаксації напружень

$$\sigma_{ij}(t) = 2Ge_{ij}(t) - 2G\lambda_s \int_0^t R_s(t-\tau)e_{ij}(\tau)d\tau + \delta_{ij}\left[3B\varepsilon_v(t) - 3B\lambda_v \int_0^t R_v(t-\tau)\varepsilon_v(\tau)d\tau\right]; \quad (i, j = \overline{1,3}),$$

де $\varepsilon_{ij}(t), \sigma_{ij}(t)$ – компоненти тензорів деформацій і напружень; $e_{ij}(t), s_{ij}(t)$ – компоненти девіатора деформацій і девіатора напружень; $\varepsilon_v(t)$ – об'ємна деформація; $K_s(t-\tau), K_v(t-\tau)$ – ядра зсувної і об'ємної повзучості; $R_s(t-\tau), R_v(t-\tau)$ – ядра зсувної і об'ємної релаксації; G – модуль зсуву; B – об'ємний модуль; λ_s, λ_v – реологічні параметри; δ_{ij} – дельта-функція одинична функція Кронекера.

В якості ядер повзучості $K(t-\tau)$ та релаксації $R(t-\tau)$ в (1) і (2) вибираються дробово-експоненційні функції [1]

$$K(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha)]}, \quad (3)$$

$$R(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda + \beta)^n (t-\tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha)]},$$

де α і β – параметри ядер ($-1 < \alpha < 0$; $\beta > 0$); $\Gamma[\cdot]$ – гамма-функція Ейлера.

Між ядрами повзучості і релаксації існує інтегральний зв'язок:

$$R(t) - K(t) = \lambda \int_0^t K(t-\tau)R(\tau)d\tau, \quad (4)$$

який дозволяє знаходити значення параметрів одного ядра за значеннями параметрів другого ядра.

Як базові експерименти для визначення параметрів ядер релаксації напружень використовуються результати випробувань зразків на повзучість матеріалу при одновісному розтягу і чистому скрученні.

Ідентифікація ядер релаксації $R_s(t)$ і $R_v(t)$ в (2) здійснюється на основі групи базових дослідів на повзучість при постійних напруженнях. Група базових дослідів включає випробування суцільних циліндричних зразків на повзучість за умов одновісного розтягу із заміром повздовжніх і поперечних деформацій. Одновимірні моделі повзучості, що встановлюють залежність між напруженнями, деформаціями і часом, задаються у цьому випадку рівняннями

$$\varepsilon_{11}(t) = \frac{\sigma_{11}(t)}{E} + \frac{\lambda_{11}}{E} \int_0^t K_{11}(t-\tau)\sigma_{11}(\tau)d\tau;$$

$$\gamma_{21}(t) = \frac{\tau_{21}(t)}{G} + \frac{\tau_{21}}{G} \int_0^t K_{21}(t-\tau)\tau_{21}(\tau)d\tau,$$

які при $\sigma_{11} = const$ та $\tau_{21} = const$ зводяться до рівнянь

$$\varepsilon_{11}(t) = \frac{\sigma_{11}}{E} \left(1 + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(t-\tau)d\tau \right);$$

$$\gamma_{21}(t) = \frac{\tau_{21}}{G} \left(1 + \lambda_{21} \int_0^t K_{21}(t-\tau)d\tau \right).$$

тут $\sigma_{11}(t)$ – повздовжнє напруження; $\tau_{21}(t)$ – дотичне напруження кручення; $\varepsilon_{11}(t)$ і $\gamma_{21}(t)$ – повздовжня і кутова деформація, що включає пружну деформацію і деформацію повзучості; $K_{11}(t)$ – ядро повздовжньої повзучості; $K_{21}(t)$ – ядро зсувної повзучості; E – модуль пружності; G – модуль зсуву; λ_{11} і λ_{21} – реологічні параметри.

Задача полягає у визначенні параметрів ядер спадковості лінійно-в'язкопружних матеріалів при складному напруженому стані і вирішенні задач розрахунку релаксації напружень в тонкостінних трубчастих елементах при комбінованому навантаженні розтягом і крученням.

2. Ідентифікація ядер інтенсивності та об'ємної повзучості

Залежність між ядрами інтенсивності повзучості $K_i(t)$ і ядрами повздовжньої і зсувної

повзучості $K_{11}(t)$ і $K_{21}(t)$ встановлюється, виходячи з сумісного розв'язку рівнянь (1) і (6).

З другого рівняння в (1) з урахуванням (6), виходячи з умови зв'язку компонентів тензорів напружень і деформацій за умов одновісного розтягу при $\sigma_{11}(t) = \text{const}$ і $\sigma_i(t) = \text{const}$ отримуємо співвідношення

$$\begin{aligned} \frac{(1+\nu)}{E} \left(\sigma_{21}(t) + \lambda_i \int_0^t K_i(t-\tau) \tau_{21}(\tau) d\tau \right) = \\ = \frac{1+\nu}{E} \left(\tau_{21}(t) + \lambda_{21} \int_0^t K_{21}(t-\tau) \sigma_{21}(\tau) d\tau \right), \end{aligned} \quad (7)$$

з якого випливає співвідношення

$$\lambda_i K_i(t) = \lambda_{21} K_{21}(t), \quad (8)$$

і відповідно можна вважати

$$\lambda_i = \lambda_{21} \text{ і } K_i(t) = K_{21}(t). \quad (9)$$

$$\text{У (7) прийнято, що } \gamma_{21}(t) = 2\varepsilon_{21}(t); G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (10)$$

Із співвідношень (8) і (9) випливає, що параметри ядер інтенсивності повзучості збігаються з параметрами ядер зсувної повзучості, що визначаються в експерименті на чисте кручення.

Залежність між ядрами об'ємної повзучості $K_v(t)$ і ядрами поздовжньої і зсувної повзучості $K_{11}(t)$ і $K_{21}(t)$ встановлюється, виходячи з сумісного розв'язку рівнянь (1) і (6).

З першого рівняння в (1) з урахуванням (6), виходячи з умови зв'язку компонентів тензорів напружень і деформацій за умов одновісного розтягу при $\sigma_{11}(t) = \text{const}$ отримуємо співвідношення

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(t) = \frac{2(1+\nu)\sigma_{11}}{3E} \left(1 + \lambda_i \int_0^t K_i(t-\tau) d\tau \right) + \\ + \frac{(1-2\nu)\sigma_{11}}{3E} \left(1 + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) d\tau \right), \end{aligned} \quad (11)$$

з урахуванням першого рівняння в (1) і (8) впливає залежність між операторами

$$\begin{aligned} \frac{1-2\nu}{3} \left(1 + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) d\tau \right) = \left(1 + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(t-\tau) d\tau \right) - \\ - \frac{2(1+\nu)}{3} \left(1 + \lambda_{21} \int_0^t K_{21}(t-\tau) d\tau \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Диференціюючи обидві частини рівняння (12) по t і використовуючи теорему Ньютона-Лейбніца, отримуємо рівняння

$$\lambda_v K_v(t) = \frac{3\lambda_{11}K_{11}(t) - 2(1+\nu)\lambda_{21}K_{21}(t)}{1-2\nu}. \quad (13)$$

Рівняння (13) встановлює залежність між ядром об'ємної повзучості і ядрами поздовжньої і зсувної повзучості при одновісному розтягу та чистому крученні. Дозволяє розрахувати дискретні значення ядер об'ємної повзучості $K_v(t)$ за умов складного напруженого стану в функції часу t . Параметри ядер визначаються за результатами апроксимації дискретних значень ядер вибраним для ядра аналітичним виразом.

3. Розрахунок релаксації нормальних і дотичних напружень

Розв'язується задача розрахунку релаксації нормальних та дотичних напружень у тонкостінних трубчастих елементах за умов навантаження одновісним розтягом та скрученням.

Об'єктом дослідження обрані тонкостінні трубчаті зразки з поліетилену високої щільності ПЕВП. Експериментальні дані запозичені з роботи [2]. В якості базових експериментів розглядаються випробування тонкостінних трубчастих зразків на повзучість при одновісному розтягу, при чистому крученні і при комбінованому навантаженні з розтягом і крученням. За даними випробувань на одновісний розтяг визначаються параметри ядер поздовжньої та зсувної повзучості.

У таблиці 1 наведені значення параметрів ядер спадковості поліетилену ПЕВП. Значення пружних сталей запозичені з [1].

Таблиця 1
Значення параметрів ядер спадковості для ПЕВП

$K_{11}(t), \text{ год}^{-1}$			$K_{21}(t), \text{ год}^{-1}$		
α_{11}	β_{11}	λ_{11}	α_{21}	β_{21}	λ_{21}
-0,6460	0,1398	1,9439	-0,4700	1,2467	2,0197
$K_i(t), R_i(t), \text{ год}^{-1}$			$K_v(t), R_v(t), \text{ год}^{-1}$		
α_i	β_i	λ_i	α_v	β_v	λ_v
-0,4706	1,2402	2,0155	-0,6334	0,2971	9,1396

Значення параметрів ядер спадковості визначаються за результатами апроксимації дискретних значень ядер повзучості дробово-експоненційною функцією (3) за методикою викладеною в [1]. Розмірність коефіцієнтів β і λ – $\text{год}^{-(1+\alpha)}$, а коефіцієнт α – безрозмірний.

Розв'язок будується на основі тривимірної моделі в'язкопружності (1) з використанням

значень параметрів ядер спадковості, наведених в таблиці 1.

Для розрахунку релаксації нормальних напружень $\sigma_{11}(t)$ із (1) при $\varepsilon_{11} = const$; $\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = 0$ і при $\varepsilon_{11} = const$; $\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = const$, у випадку заміру в базовому експерименті поздовжніх і поперечних деформацій повзучості отримуємо з урахуванням (3) рівняння

$$\sigma_{11}(t) = \frac{4}{3} G(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) \left\{ 1 - \lambda_s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda_s + \beta_s)^n t^{(1+n)(1+\alpha_s)}}{\Gamma[1 + (1+n)(1+\alpha_s)]} \right\} + (14)$$

$$+ 3B(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{22}) \left\{ 1 - \lambda_v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda_v + \beta_v)^n t^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma[1 + (1+n)(1+\alpha_v)]} \right\},$$

де прийнято

$$e_{ij} = \varepsilon_{11} - \frac{1}{3} \varepsilon_v; \quad \varepsilon_v = \varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{22}; \quad \varepsilon_v = (1 - 2\nu)\varepsilon_{11}.$$

Для розрахунку релаксації дотичних напружень $\tau_{21}(t)$ із (1) при $\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = const$; $\varepsilon_{11} = 0$ і при $\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = const$; $\varepsilon_{11} = const$ з урахуванням (3) рівняння

$$\tau_{21}(t) = 2G\varepsilon_{21} \left\{ 1 - \lambda_s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda_s + \beta_s)^n t^{(1+n)(1+\alpha_s)}}{\Gamma[1 + (1+n)(1+\alpha_s)]} \right\}, (15)$$

де прийнято $\sigma_{ij} = \tau_{21}(t)$ і $e_{ij} = \varepsilon_{21}$.

Результати розрахунків релаксації нормальних $\sigma_{11}(t)$ та дотичних $\tau_{21}(t)$ напружень

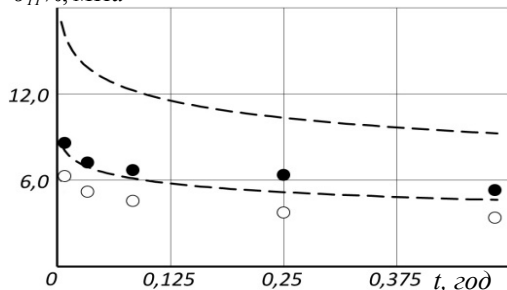


Рис.1 Релаксація нормальних напружень

Список використаних джерел

1. Голуб В.П. Идентификация ядер наследственности изотропных линейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии. 1. Суперпозиция сдвиговой и объемной ползучести / В. П. Голуб, Б. П. Маслов, П. В. Фернати // Прикл. механика. – 2016. – 52. – № 2. – С. 78-90.
2. Крегерс А.Ф. Комплексное исследование полиэтилена высокой плотности в условиях нелинейной ползучести и релаксации напряжений / А.Ф. Крегерс, М.Р. Килевич // Механика композитных материалов. – 1985. – №2. – С. 195-201.

напружень у тонкостінних трубчастих елементах з поліетилену високої щільності ПЕВП, виконаних за рівняннями (14) і (15) з використанням наведених в таблиці 1 значень параметрів ядер спадковості, співставлені на рис. 1 і 2 з експериментальними даними. Результати розрахунків нанесені штриховими лініями, а експериментальні дані – точками.

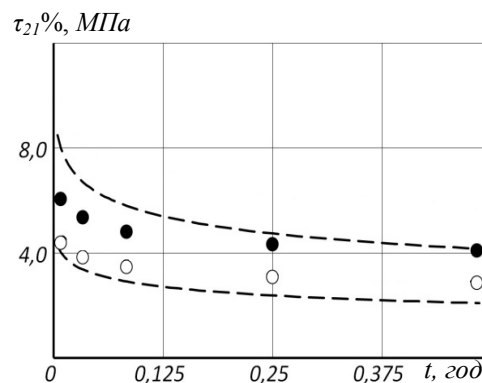


Рис. 2 Релаксація дотичних напружень

Для поліетилену ПЕВП релаксація нормальних (рис. 1) та дотичних (рис.2) напружень розраховувались при деформуванні видовженнями і зсувами при $\varepsilon_{11} = 1,0$ і $\varepsilon_{21} = 0,87$ (криві 1,○) та при $\varepsilon_{11} = 2,0$ і $\varepsilon_{21} = 1,73$ (криві 2,●) %.

Висновки

Як видно із результатів розрахунків релаксації нормальних та дотичних напружень, наведених на рис. 1-2, отримано задовільне узгодження результатів розрахунку з експериментами. Максимальна похибка, при розрахунку релаксації напружень не перевищувала 20%.

References

1. GOLUB, V.P., MASLOV, B.P. and FERNATI, P.V. (2016) Identifikatsiya yader nasledstvennosti izotropnykh lineyno-vyazkoupругih materialov pri slozhnom napryazhennom sostoyanii. 1. Superpozitsiya sdvigovoy i ob'emnoy polzuchesti. *Prikladnaya mehanika*. 52(2). p. 78-90.
2. KREGERS A.F. and KILEVICH M.R. (1985) Kompleksnoe issledovanie polietilena vyisokoy plotnosti v usloviyah nelineynoy polzuchesti i relaksatsii napryazheniy. *Mekhanika kompozitnykh materialov*. 2. p. 195-201.

Надійшла до редколегії 31.05.2019

УДК 539.3

Плащинська А.В., к.т.н., с.н.с.

**Щодо моделювання розповсюдження
тріщин втомі в тонких ізотропних
пластинах в умовах двовісного
асиметричного розтягу-стиску**

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН
України, 03057, м. Київ-57, вул. Нестерова, 3,
e-mail: creep@inmech.kiev.ua

Alla Plashchynska, Ph.D

**To the modelling of the fatigue cracks
propagation in a thin isotropic plates under
biaxial asymmetric tension-compression**

National Academy of Sciences of Ukraine
S.P.Timoshenko Institute of Mechanics, 03057,
Kyiv-57, P.Nesterov str., 3,
e-mail: creep@inmech.kiev.ua

Розглянуто моделювання процесу руйнування від втоми тонких ізотропних нескінченних пластин з тріщинами в умовах зовнішнього двовісного асиметричного циклічного навантаження. Розв'язок задачі побудовано на основі сумісного розгляду концепцій механіки руйнування й механіки неперервного пошкодження, та застосування двох видів критеріїв еквівалентних напружень. Перший – зводить асиметричне циклічне навантаження до еквівалентного за часом до руйнування симетричного циклічного навантаження. Другий – зводить плоский напружений стан в околі вершини тріщини до одновісного. Отримана система рівнянь моделі відносно еквівалентного коефіцієнта інтенсивності напружень дозволяє визначити тривалість інкубаційної стадії та швидкість розповсюдження тріщини втомі в пластинах з різними концентраторами напружень. Побудовано розрахункові залежності довжини тріщини втомі від числа циклів навантаження в нескінченній алюмінієвій пластині з круговим отвором при варіюванні параметрів асиметрії циклу та коефіцієнту двовісності навантаження.

Ключові слова: тріщина втомі, двовісне асиметричне циклічне навантаження, пошкодження.

The modelling of the fatigue fracture process of the thin isotropic infinite plates with cracks under external biaxial asymmetric cyclic loading is considered. The solution of the problem is based on the joint consideration of the fracture mechanics and continuous damage mechanics concepts and using two types of equivalent stress criteria's. The first one reduces an asymmetrical cyclic load to the equivalent symmetric cyclic load in time of the rupture. The second one reduces a plane stress state in the vicinity of the top crack to a single-axial one. The obtained system of equations of the model a relatively equivalent stress intensity factor allows us to determine the duration of the incubation stage and the rate of fatigue crack propagation in plates with different stress concentrators. The calculated dependences of the crack length, which extends from the circular hole, from the number of load cycles in the infinite aluminum plate with a circular hole at the variation of the parameters of the asymmetrical cycle and the coefficient of the biaxiality loading are constructed.

Key words: fatigue crack, biaxial asymmetric cyclic loading, damage.

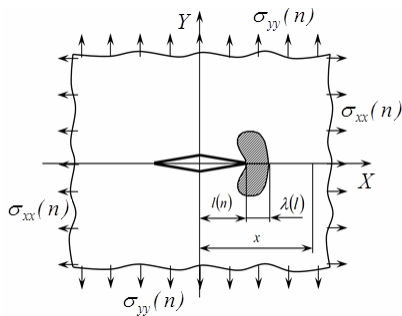
Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Прогнозування термінів безпечної експлуатації елементів конструкцій, які знаходяться в умовах багатовісного циклічного навантаження, є актуальною задачею. Один зі шляхів її вирішення

полягає в побудові теоретичної моделі розповсюдження тріщини втомі на основі сумісного розгляду концепцій механіки руйнування, неперервного пошкодження [1] та критеріїв еквівалентності напружень [2,3].

1. Об'єкт дослідження. Постановка задачі

Розглянемо процес розповсюдження тріщини довжиною 2ℓ в тонкій нескінченній ізотропній пластині (фіг. 1) при зовнішньому двовісному



Фіг. 1 Нескінченна пластина з тріщиною при двовісному розтягу-стиску

асиметричному циклічному навантаженні

$$\begin{cases} \sigma_{ij}(n) = (\sigma_m)_{ij} + (\sigma_a)_{ij} \sin(2\pi n) \\ (\sigma_{max})_{ij} = (\sigma_m)_{ij} + (\sigma_a)_{ij} < \sigma_Y \end{cases}, \quad (1.1)$$

де $i = j = 1, 2$ ($x = 1, y = 2$), $(\sigma_{max})_{ij}$, $(\sigma_m)_{ij}$, $(\sigma_a)_{ij}$ – максимальні, середні та амплітуди циклічних напружень, відповідно; σ_Y – межа течії.

Застосовуючи концепцію еквівалентних напружень [2], які дозволяють звести асиметричні цикли навантажень по кожній з координатних осей до еквівалентних за кількістю циклів до руйнування n_R симетричних циклів, умови навантаження (1.1) запишемо у вигляді

$$\begin{cases} \sigma_{ij}(n) = (\sigma_{a,eqv})_{ij} \sin(2\pi n) & i = j = 1, 2 \\ \max((\sigma_{a,eqv})_{ij}) < \sigma_Y \end{cases} \quad (1.2)$$

де еквівалентні напруження $(\sigma_{a,eqv})_{ij}$ за аналогією з наведеною в [2] структурою, задаються співвідношенням

$$(\sigma_{a,eqv})_{ij} = \left[\cos \left[\frac{\pi}{2} \frac{(\sigma_m)_{ij}}{\sigma_B} \right] \right]^{-\eta} (\sigma_a)_{ij}, \quad (1.3)$$

де σ_B – межа міцності матеріалу пластини при розтягу; η коефіцієнт чутливості матеріалу пластини до асиметрії циклу навантаження при одновісному розтягу-стиску.

$$\begin{aligned} \Delta K_I &= K_I(\ell(n)) = (\sigma_{a,eqv})_{yy} \sqrt{\pi \ell(n)} [(1 + \xi) - (1 - \xi) \cos 2\alpha] \\ \Delta K_{II} &= K_{II}(\ell(n)) = (\sigma_{a,eqv})_{yy} \sqrt{\pi \ell(n)} (1 - \xi) \sin 2\alpha \end{aligned}, \quad (2.5)$$

Тріщину втоми розглядаємо як вузьку гострокінцеву щілину розташовану вздовж осі OX . При циклічному навантаженні, згідно моделі Райса [4], в околі тріщини формуються дві пластичні зони – монотонна та циклічна. Вважаємо, що розповсюдження тріщини здійснюється стрибками на довжину циклічної пластичної зони вздовж осі OX , а накопичення пошкоджень $\omega(x, n)$ відбувається у півциклах розтягу.

Метою дослідження є побудова двостадійної моделі розповсюдження тріщини втоми при двовісному розтягу-стиску.

2. Двостадійна модель розповсюдження тріщини втоми при двовісному розтягу-стиску

Запишемо еволюційне рівняння кінетики накопичення пошкоджень внаслідок втоми при двовісному циклічному навантаженні

$$\frac{\partial \omega(x, n)}{\partial n} = D \left[\frac{(\Delta \sigma_{eqv}(x, n))^q}{1 - \omega(x, n)} \right] \quad (2.1)$$

з граничними умовами

$$\begin{cases} \max\{\omega[\ell_0 + \lambda(\ell_0), \theta, n]\} = 1; & 0 \leq n \leq n_*; \\ \max\{\omega[\ell(n) + \lambda(\ell(n)), \theta, n]\} = 1; & 0 \leq n \leq n_* \end{cases}, \quad (2.2)$$

де n_* – тривалість інкубаційної стадії; еквівалентне напруження в околі вершини тріщини

$$\Delta \sigma_{eqv}(x, n) = \frac{\Delta K_{eqv}(\ell(n))}{\sqrt{2\pi(x - \ell(n))}} \quad (2.3)$$

отримане за критерієм еквівалентних напружень [3]

$$\Delta K_{eqv}(\ell(n)) = (\Delta K_I^4(\ell(n)) + 8 \Delta K_{II}^4(\ell(n)))^{1/4}, \quad (2.4)$$

який зводить плоский напружений стан до одновісного

Співвідношення для розмахів коефіцієнтів інтенсивності напружень в околі тріщини при плоскому напруженому стані [5] мають вид

де α – кут нахилу тріщини до осі OY ;
 $\xi = (\sigma_{a,eqv})_{xx} / (\sigma_{a,eqv})_{yy}$ – коефіцієнт двовісності
навантаження.

Довжину циклічної пластичної зони
визначаємо з виразу [4]

$$\lambda(\ell(n)) = \frac{\pi}{8} \left[\frac{\Delta K_{eqv}(\ell(n))}{4\sigma_Y} \right]^2 \quad (2.6)$$

Інтегруючи рівняння (2.1) з врахуванням
граничних умов (2.2) отримуємо рівняння руху
фронтів тріщини втомі у вигляді нелінійного
інтегрального рівняння Вольтера I роду

$$\begin{aligned} 1 - (1+q)D \left[\frac{(\sigma_{a,eqv})_{yy}}{\sqrt{2}} \right]^q \int_0^{n_*} \left[\frac{\ell_0}{\ell(n) + \lambda(\ell(n)) - \ell_0} \right]^{\frac{q}{2}} d\tau = \\ = (1+q)D \left[\frac{(\sigma_{a,eqv})_{yy}}{\sqrt{2}} \right]^q \int_{n_*}^n \left[\frac{\ell(\tau)}{\ell(n) + \lambda(\ell(n)) - \ell(\tau)} \right]^{\frac{q}{2}} d\tau \end{aligned} \quad (2.7)$$

За методикою розв'язку, викладеного в [1,2],
отримуємо систему визначальних рівнянь
двостадійної моделі розповсюдження тріщини

втомі при двовісному асиметричному розтягу-
стиску у вигляді

$$\begin{cases} \frac{d\ell}{dn} = \left(1 + \frac{1}{q} \right) D \left(\frac{4\sigma_Y}{\pi} \right)^{q-2} \left[\cos \left[\frac{\pi (\sigma_m)_{yy}}{2 \sigma_B} \right] \right]^{-2\eta} (\sigma_a)_{yy}^2 \ell(n) \\ n_* = \frac{1}{(1+q)D} \left(\frac{\pi}{4\sigma_Y} \right)^q \end{cases} \quad (2.8)$$

де D, q – коефіцієнти, що характеризують
інтенсивність накопичення пошкоджень
внаслідок втомі й визначаються зі стандартних
іспитів на втому гладких циліндричних зразків
при одновісному симетричному багатоциклового
розтягу-стиску.

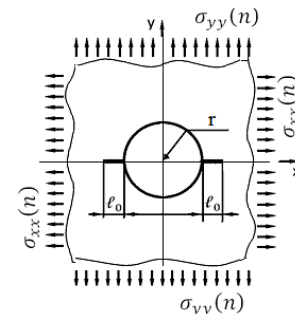
Систему (2.8) запишемо у вигляді

$$\begin{cases} \frac{d\ell}{dn} = \left(1 + \frac{1}{q} \right) D \frac{(4\sigma_Y)^{q-2}}{(\pi)^{q-1}} [\Delta K_{eqv}(\ell(n))]^2 \\ n_* = \frac{1}{(1+q)D} \left(\frac{\pi}{4\sigma_Y} \right)^q, \end{cases} \quad (2.9)$$

який дає можливість застосувати модель до
пластин з концентраторами напружень різної
геометричної форми.

3. Рішення задач

Розглянемо нескінченну тонку ізотропну
пластину (фіг.2) з концентратором напружень у
вигляді кругового отвору радіуса $r = 25,4 \cdot 10^{-3}$ м та



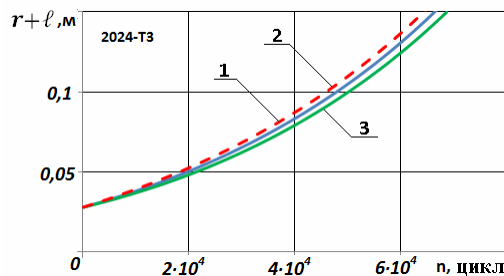
Фіг. 2 Нескінченна пластина з круговим
отвором й тріщинами при двовісному
розтягу-стиску

двома симетричними тріщинами довжиною
 $\ell_0 = 2,54 \cdot 10^{-3}$ м вздовж осі OX , що виходять з
контурів отвору. Пластина знаходиться в умовах
двовісного асиметричного багатоциклового
розтягу-стиску (1.1).

Побудуємо залежності довжини тріщини від
кількості циклів навантаження з застосуванням
(2.9) та співвідношення для ΔK_{eqv} у вигляді [6]

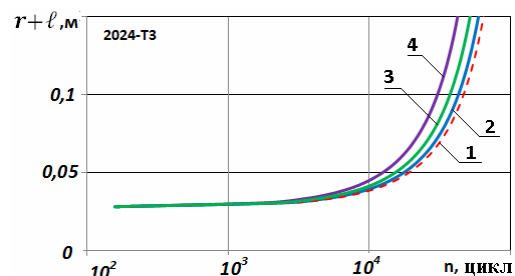
$$\Delta K_{eqv} = (\sigma_{a,eqv})_{yy} \sqrt{\pi r} \sqrt{\frac{1-\delta^4}{4\delta}} \left\{ (1+\zeta) - (1-\zeta) \left[4 \left(\frac{1}{1+\delta^2} - 1 \right) - \left(\frac{1-\delta^2}{1+\delta^2} \right)^2 \right] \right\}, \quad \delta(n) = \left(1 + \frac{\ell(n)}{r} \right)^{-1} \quad (3.1)$$

На фіг. 2 наведені результати розрахунків залежності довжини тріщини $(r + \ell)$ від кількості циклів навантаження n в пластині з алюмінієвого сплаву 2024-T3 в залежності від



а

коефіцієнту двовісності навантаження ζ (фіг. 2а) при $(\sigma_{a,eqv})_{yy} = 69$ МПа та від коефіцієнтів асиметрії циклу R_x, R_y (фіг. 2б)



б

Фіг. 2 Залежність $(r + \ell)$ від кількості циклів навантаження n при варіюванні: а – $\zeta = 0$ (1), $\zeta = 1$ (2), $\zeta = 2$ (3); б – $R_x = R_y = -1$, (1); $R_x = R_y = 0$, (2); $R_x = R_y = 0,2$, (3); $R_x = R_y = 0,33$, (4)

Результати розрахунків за системою рівнянь (2.9) свідчать, що зі збільшенням коефіцієнту двовісності навантаження ζ спостерігається незначне, біля 10%, зменшення швидкості розповсюдження тріщин втомі при однаковій

кількості циклів навантаження, а зі збільшенням коефіцієнтів асиметрії циклу R_x, R_y – швидкість розповсюдження тріщин зростає.

Список використаних джерел

1. Голуб В.П. Модель усталостного разрушения тонких изотропных пластин с трещинами при осевом нагружении / В.П.Голуб, А.В.Плещинская // Прикл. механика.- 1994.- 30, №7.- С. 53-63.
2. Голуб В.П. Прогнозирование усталостной долговечности призматических металлических стержней при асимметричном растяжении-сжатии методом эквивалентных напряжений / В.П.Голуб, В.Н.Пелых, А.Д.Погребняк // Вісник НТУУ «КПІ». Машинобудування.- 2010, №58.- С. 177-182.
3. Tanaka K. Fatigue crack propagation from a crack inclined to the cyclic tensile axis // Eng. Fract. Mech.- 1974.- N6.- P. 493-507.
4. Rice J.R. Mechanics of crack tip deformation and extension by fatigue // ASTM STP 415, Fatigue Crack Propagation.- 1967.- P. 247-309.
5. Eftis J. The inclined crack under biaxial load / J.Eftis, N.Subramonian // Eng. Fract. Mech.- 1978, 10.- P. 43-67
6. Каминский А.А. Хрупкое разрушение вблизи отверстий / А. А. Каминский. – Киев: Наукова думка, 1982. – 160 с.

References

1. GOLUB, V.P. and PLASHCHYNSKA, A.V. (1994) Model` ustalostnogo razrusheniya tonkikh izotropnykh plastin s treshchinamy pri osevom nagruzhennii *Prikl. Mehkanika*. 30(7). p. 53-63.
2. GOLUB, V.P., PELYKH, V.N. and POGREBNIYAK, A.D. (2010) Prognostirovanie ustalostnoj dolgovechnosti prizmaticheskikh metallicheskich sterzhnej pri asimmetrichnom rastyazhenii-szhatii metodom ekvivalentnykh napryazheniy. *Visnyk NTUU «KPI». Mashynobuduvannya*. 58. p. 177-182.
3. TANAKA, K. (1974) Fatigue crack propagation from a crack inclined to the cyclic tensile axis. *Eng. Fract. Mech*. 6. p. 493-507.
4. RICE, J.R. (1967) Mechanics of crack tip deformation and extension by fatigue. ASTM STP 415, *Fatigue Crack Propagation*.
5. EFTIS, J. and SUBRAMONIAN, N. (1978) The inclined crack under biaxial load. *Eng. Fract. Mech*. 10. p.43-67.
6. KAMINSKYJ, A.A. (1982) *Khrupkoe razrushenie vblizi otverstij*. Kyiv: Naukova dumka

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

Надійшла до редколегії 20.05.2019

УДК 539.3

Попов В. Г.¹, д.ф.-м.н., проф.,
Литвин О. В.¹, к.ф.-м.н., доц.

V. G. Popov¹, Dr.Sci. (Phys.-Math.),
O. V. Lytvyn¹, PhD (Phys.-Math.).

**Напружений стан у пружному тілі з
триланковим жорстким включенням при
гармонічних коливаннях поздовжнього
зсуву**

**The stress state in an elastic body with a
rigid inclusion of the shape of three segments
broken line under the action of the harmonic
oscillation of the longitudinal shift**

¹ Національний університет «Одеська морська
академія», 65029, м. Одеса, вул. Дідріхсона, 8,
e-mail: dr.vg.popov@gmail.com
e-mail: litvinov.od@gmail.com

^{1,2} National university «Odessa Maritime Academy»,
65029, Odessa, Didrihsona str., 8,
e-mail: dr.vg.popov@gmail.com
e-mail: litvinov.od@gmail.com

Розв'язана задача визначення напруженого стану в околі тунельного жорсткого включення, що в перерізі представляє собою триланкову ламану лінію. На включення, розташоване у необмеженому пружному просторі, діє гармонічна зсувна сила. Задача зведена до розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь з нерухомими особливостями. Для наближеного розв'язання вказаної системи застосований числовий метод, який враховує справжню асимптотику невідомих функцій і використовує спеціальні квадратурні формули для сингулярних інтегралів.

Ключові слова: включення, зсувна сила, нерухомі особливості.

There is a thin absolutely rigid inclusion that in a cross-section represents three segments broken line in an infinite elastic medium (matrix) that is in the conditions of antiplane strain. The inclusion is under the action of harmonic shear force $Pe^{-i\omega t}$ along the axis Oz . Under the conditions of the antiplane strain the only one different from 0 z -component of displacement vector $W(x; y)$ satisfies the Helmholtz equation.

The inclusion is fully couple with the matrix. The tangential stresses are discontinuous on the inclusion with unknown jumps

$$\tau_{zy_k}(x_l, +0) - \tau_{zy_k}(x_l, -0) = \chi_{1k}(x_k), \quad -d_k < x_k < d_k, \quad k = 1; 2; 3.$$

The method of the solution is based on the representation of displacement $W(x; y)$ by discontinuous solutions of the Helmholtz equation. After the satisfaction of the conditions on the inclusion the system of integral equations relatively unknown jumps is obtained. One of the main results is a numerical method for solving the obtained system, which takes into account the singularity of the solution and is based on the use of the special quadrature formulas for singular integrals.

Key Words: inclusion, shear force, fixed singularities

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ. Як відомо, реальні дефекти (тріщини, тонкі включення) мають кусково-гладку поверхню, можуть перетинатись або розгалужуватись. Що стосується задач з визначення напруженого стану в тілах з подібними дефектами, то найбільш дослідженими є задачі рівноваги тіл з тріщинами. Серед аналогічних динамічних задач можна вказати [1], [2], [3], де досліджувалась взаємодія плоских гармонічних хвиль з тріщиною у вигляді дво- і триланкової ламаної. Але аналогічні задачі для тіл з жорсткими включеннями майже не

розглядались навіть у випадку гармонічних коливань. Тут можна згадати роботу [4]. Для розв'язання отриманих при цьому систем сингулярних інтегральних рівнянь з нерухомими особливостями був запропонований числовий метод, що враховує справжні особливості розв'язків. Саме цей метод застосовується при розв'язанні розглянутої далі задачі.

Постановка задачі. Нехай ізотропне пружне тіло знаходиться в умовах антиплоскої деформації і містить абсолютно жорстке тунельне вклю-

чення, яке в перерізі xOy є триланковою лама-
ною.

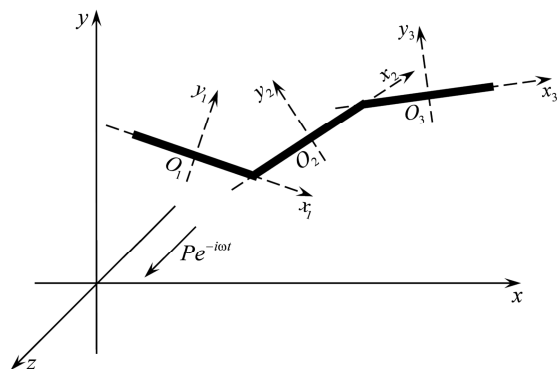


Рис. 1. Розташування включення у координатній площині

Ланки включення у площині xOy займають відрізки $2d_k$ і утворюють з віссю Ox кути α_k (Рис. 1). На включення діє гармонічна зсувна вздовж осі Oz сила $Pe^{-i\omega t}$. Множник $e^{-i\omega t}$, що визначає залежність від часу, надалі всюди відкинутий.

Нехай $W(x; y)$ – z -компонента вектора переміщень розсіяного хвильового поля. В системі координат xOy вона задовольняє рівняння Гельмгольца

$$\Delta W + \kappa_2^2 W = 0, \quad \kappa_2^2 = \rho \omega^2 / G. \quad (1)$$

Для формулювання граничних умов на включенні з кожною його ланкою пов'язується система координат $x_k O_k y_k$, $k = 1; 2; 3$.

Припускається, що між включенням і пружним середовищем здійснено повне зчеплення, тому

$$W_k^1(x_k, 0) = c, \quad k = 1; 2; 3, \quad (2)$$

де $W_k(x_k, y_k)$ – переміщення $W(x, y)$ після переходу до систем $x_k O_k y_k$.

Також на включенні розривні дотичні напруження з невідомими стрибками

$$\tau_{zyk}(x_l, +0) - \tau_{zyk}(x_l, -0) = \chi_{1k}(x_k), \quad -d_k < x_k < d_k \quad (3)$$

До рівності (3) входить c – невідоме переміщення включення під дією зсувної сили, яке визначається з рівняння руху включення

$$-(m_1 + m_2 + m_3)\omega^2 c = P + \sum_{k=1}^3 \int_{-d_k}^{d_k} \chi_{1k}(\eta) d\eta, \quad (4)$$

m_k , $k = 1; 2; 3$ – маса кожної ланки включення.

Розв'язання задачі. Для розв'язання задачі для кожної ланки включення з номером l у системі координат $x_l O_l y_l$, пов'язаної з нею, будеться розривний розв'язок рівняння (1) зі стрибком (3) [5]

$$W_{1l}^1(x_l, y_l) = \int_{-d_l}^{d_l} \frac{\chi_{1l}(\eta)}{G} r_2(\eta - x_l, y_l) d\eta, \quad (5)$$

$$r_2(\eta - x_l, y_l) = \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(\kappa_0 \sqrt{(\eta - x_l)^2 + y_l^2} \right),$$

$H_0^{(1)}(z)$ – функція Ганкеля.

Після цього переміщення у системі координат xOy подаються у вигляді

$$W(x, y) = \sum_{l=1}^3 W_l^g(x, y), \quad (6)$$

де $W_l^g(x, y)$ отримуються з (5) внаслідок перетворення координат.

Для визначення невідомих стрибків використовуються умови (2). Після реалізації цих умов отримана система сингулярних інтегральних рівнянь з додатковими умовами

$$\int_{-1}^1 \left(-\frac{E}{\tau - \xi} + Q(\tau, \xi) + R(\tau, \xi) \right) \Phi(\tau) d\tau = 0, \quad -1 < \xi < 1,$$

$$\int_{-1}^1 (U \ln |\tau - 1| + D(\tau)) \Phi(\tau) d\tau = \frac{-\pi P_0}{\kappa_0^2 \varepsilon \rho r}. \quad (7)$$

В системі (7) E – одинична матриця розміру 3×3 , U – діагональна матриця розміру 3×3 з елементами $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ на головній діагоналі,

$$\Phi(\tau) = \begin{pmatrix} \phi_1(\tau) \\ \phi_2(\tau) \\ \phi_3(\tau) \end{pmatrix}, \quad \phi_k(\tau) = \frac{\chi_k(\eta)}{G},$$

$$Q(\tau, \xi) = \begin{pmatrix} 0 & q_{12}(\tau, \xi) & 0 \\ q_{21}(\tau, \xi) & 0 & q_{23}(\tau, \xi) \\ 0 & q_{32}(\tau, \xi) & 0 \end{pmatrix},$$

$$q_{ll\mp 1}(\tau, \xi) = \frac{\gamma_{l\mp 1}(\gamma_l(\xi \pm 1) - \gamma_{l\mp 1}(\tau \mp 1) \cos \beta_{ll\mp 1})}{s_{ll\mp 1}(\tau, \xi)},$$

$$s_{ll\mp 1} = \gamma_{l\mp 1}^2(\tau \mp 1)^2 - 2\gamma_l \gamma_{l\mp 1}(\tau \mp 1)(\xi \pm 1) \cos \beta_{ll\mp 1} + \gamma_l^2(\xi \pm 1)^2, \quad (8)$$

$$\eta = d_l \tau, \quad x_l = d_l \xi, \quad \gamma_l = d_l / d, \quad \varepsilon_l = a_l / d, \quad \delta_l = b_l / d,$$

$$d = \max(d_1; d_2; d_3), \quad r = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3.$$

Наведені формули показують, що функції $q_{ll+1}(\tau, \xi)$, які визначають ненульові елементи матриці $Q(\tau, \xi)$, мають особливості при $\tau = \pm 1$, $\xi = \mp 1$. Матриці $R(\tau, \xi)$ і $D(\tau)$ складаються з функцій, що визначають регулярні інтеграли.

До системи (7) необхідно додати рівність (4) для визначення невідомої амплітуди колювання включення.

Наближене розв'язання системи інтегральних рівнянь. Як в [4], знайдемо, що невідомі функції належить шукати у вигляді

$$\varphi_k(\tau) = (1-\tau)^{-\sigma_k} (1+\tau)^{-\lambda_k} \psi_k(\tau), \quad (9)$$

$$\sigma_1 = \lambda_2 = \delta_1, \lambda_1 = \sigma_3 = 1/2, \sigma_2 = \lambda_3 = \delta_2.$$

де степеневі показники δ_1, δ_2 визначаються рівностями, наведеними у [4].

Далі, як і в [4], невідомі функції подаються у вигляді

$$\varphi_k(\tau) = (1-\tau)^{\sigma_k} (1+\tau)^{\lambda_k} g_k(\tau) +$$

$$+ (1+\tau)^{\lambda_k} (1-\tau)^{\sigma_k-1} \frac{\psi_k(1)}{2} + (1+\tau)^{\lambda_k-1} (1-\tau)^{\sigma_k} \frac{\psi_k(-1)}{2} \quad (10)$$

де $g_k(\tau)$ - нові невідомі функції, що задовольняють умови Гольдера при $\tau \in (-1; 1)$,

$$\sigma_1 = \lambda_2 = 1 - \delta_1; \sigma_2 = \lambda_3 = 1 - \delta_2; \sigma_3 = \lambda_1 = 1/2.$$

Для інтегралів з ядром Коші справедливі наступні квадратурні формули [4], [6]

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi_k(\tau) d\tau}{\tau - \xi_{jk}} = \sum_{m=1}^n g_{mk} \frac{A_{mk}}{\tau_{mk} - \xi_{jk}} + \frac{\psi_k(-1)}{2} b_{jk}^- + \frac{\psi_k(1)}{2} b_{jk}^+ \quad (11)$$

де $g_{mk} = g_k(\tau_{mk})$, ξ_{jk} - корені функцій Якобі другого роду $J_n^{1-\sigma_k, 1-\lambda_k}(\xi)$; $j = 1; \dots; n+1$ відповідно, а A_{mk} - коефіцієнти відповідної квадратурної формули Гаусса-Якобі [7], $Q_{nk}(\tau) = P_n^{1-\sigma_k, 1-\lambda_k}(\tau)$ - многочлени Якобі, τ_{mk} - корені цих многочленів, $k = 1; 2; 3$.

При отриманні формул (11) інтеграли

$$b_{jk}^\mp = \int_{-1}^1 \frac{1}{\tau - \xi_{jk}} \left[\frac{(1-\tau)^{\sigma_k} (1+\tau)^{\lambda_k-1}}{(1-\tau)^{\sigma_k-1} (1+\tau)^{\lambda_k}} \right] d\tau,$$

знаходились методом, викладеним в [8].

Далі для числового розв'язання задачі необхідні квадратурні формули для інтегралів з нерухомими особливостями:

$$E_{kl}^j = \int_{-1}^1 q_{kl}(\tau, \xi_{jk}) \varphi_l(\tau) d\tau, \quad (12)$$

$$l \neq k = 1; 2; 3, j = 1; \dots; n+1.$$

Для цих інтегралів і інтегралів з логарифмічною особливістю використовуються квадратурні формули, аналогічні наведеним у [4].

Знайдені формули для сингулярних інтегралів та квадратурні формули Гаусса-Якобі для інтегралів з регулярними ядрами дозволили замінити (7) системою лінійних алгебраїчних рівнянь. В результаті розв'язання цієї системи були знайдені $g_{mk} = g(\tau_{mk})$, $\psi_k(\pm 1)$, c_0 .

Однією з важливих характеристик напруженого стану навколо включення є коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) [1]. Для їх обчислення знаходимо прості формули

$$K_1 = G\sqrt{d_1} \frac{\psi_1(-1)}{2^{\delta_1}}, K_2 = G\sqrt{d_3} \frac{\psi_3(1)}{2^{\delta_2}}. \quad (13)$$

Результати числового аналізу. На основі отриманих формул (13) досліджено вплив на залежність КІН від безрозмірного хвильового числа κ_0 кута, утвореного ланками включення (рис. 2).

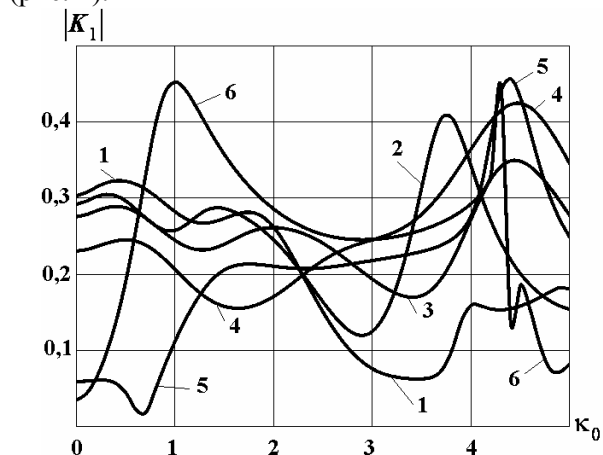


Рис. 2 Залежність КІН від безрозмірної частоти

Ланки включення утворюють з віссю Ox кути $\alpha_1 = \pi + \beta$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \beta$ при наступному співвідношенні довжин ланок: $d_1 = d_3 = d$, $d_2 = 3d$. Результати наведені на рис. 2 для наступних значень кута: $1 - \beta = 5^\circ$, $2 - 45^\circ$, $3 - 90^\circ$, $4 - 135^\circ$, $5 - 165^\circ$, $6 - 170^\circ$. Графіки

показують, що при всіх значеннях кута β між ланками включення залежність КІН від хвильового числа у розглянутому частотному діапазоні має декілька максимумів. При цьому максимальні значення можуть перевищувати значення КІН при статичному навантаженні включення зсувною силою. Це перевищення може скласти декілька разів при $\beta > 135^\circ$. Але в області низьких частот ($\kappa_0 < 0,55$) при збільшенні кута β спостерігається зменшення абсолютних значень КІН.

Висновки. Врахування реальної особливості розв'язків і застосування до сингулярних інтегралів спеціальних квадратурних формул забезпечують швидку збіжність і стабільні числові результати в досить широкому частотному діапазоні. Отримані в результаті наближені формули для обчислення КІН дали можливість дослідити вплив на їх значення частоти коливальних і форми включення і встановити ряд якісних ефектів, зокрема наявність частот, за яких значення КІН сягають максимуму.

Список використаних джерел

1. Пастернак Я.Н., Сулим Г.Т. Плоска задача теорії пружності анізотропного тіла з тонкими гілястими пружними включеннями // Вісник ТНТУ. -2011.-т. 16, №4.-С. 23-31.
2. Попов В.Г. Напружений стан навколо двох тріщин, що виходять з однієї точки при гармонічних коливаннях поздовжнього зсуву // Вісник Київського Нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. – Сер. фіз.-мат. наук.-2013. – Вип. 3. –С.205-208.
3. Попов В.Г. Тріщина у вигляді триланкової ламаної під дією хвилі поздовжнього зсуву // Матем. методи та фіз.-мех. поля. -2015. – Т.50, №1. –С. 112-120.
4. Литвин О.В., Попов В.Г. Взаємодія гармонічної хвилі поздовжнього зсуву з v-подібним включенням // Львів. Математичні методи та фізико-механічні поля. 2017. -60, №1. –С. 1-11.
5. Попов В.Г. Исследование полей напряжений и перемещений при дифракции упругих волн сдвига на тонком жестком отслоившемся включении // Изв. РАН Механика твердого тела. -1992. -№3. – С.139-146.
6. Андреев А.В. Прямой численный метод решения сингулярных интегральных уравнений первого рода с обобщенными ядрами// Изв. РАН. Механика твердого тела.- 2005. -№1. –С.126-146.
7. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов.–Москва: Наука, 1967.–500 с.
8. Сега Г. Ортогональные многочлены. - Москва: Физматгиз, 1962. -500 с.

References

1. PASTERNAK Y.M., SULIM G.T. (2011) Plane problems of elasticity of anisotropic bodies with thin elastic branching inclusions. Bulletin TNTU. 16(4). p. 23-31.
2. POPOV V.G. (2013) Stress state near two cracks emanating from one point during harmonic oscillation of the longitudinal shear. Bulletin of Kiev Shevchenko nat. Univ. Ser: Phys. – math. Sciences. 3. p. 205-208.
3. POPOV V.G. (2015) The crack in the form of a three-unit broken under the action of wave of longitudinal shear. Mat. methods and physical and fur. field. 50(1). p. 112-120.
4. LITVIN O. V., POPOV V.G. (2017) Interaction the harmonic wave of the longitudinal shift with V-similar inclusion. Mat. methods and physical and fur. field. 60(1). p. 1-11.
5. POPOV V. G. (1992) Investigation of the fields of stresses and displacements in the case of diffraction of elastic shear waves on a thin rigid exfoliated inclusion. Moscow: Izv. RAS, Mechanics of Solid State. 3. p.139–146.
6. ANDREEV A.V. (2005) A direct numerical method for solving singular integral equations of the first kind with generalized kernels. Izv. RAS. Mechanics of a solid. № 1. p. 126-146.
7. KRYLOV V.I. (1967) *The approximate calculation of integrals*. Moscow: Science.
8. SZEGO G. (1962) *Orthogonal polynomials*. Moscow: Fizmatgiz.

Надійшла до редколегії 20.06.19

УДК 539.3

Процюк Б. В., д.ф.-м.н., пров.н.с.

**Визначення квазістатичного
термопружного стану шаруватих
термочутливих плит**

Інститут прикладних проблем механіки і
математики ім. Я. С. Підстригача НАН
України, 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б,
e-mail: dept19@iapmm.lviv.ua

B. V. Protsiuk, Dr. Sci, (Phys.Math),
Leading Sci. Researcher

**Determination of quasi-static thermoelastic
state of layered thermosensitive plates**

Pidstryhach Institute of Applied Problems of
Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine,
79060, Lviv, Naukova str., 3-b
e-mail: dept19@iapmm.lviv.ua

Проілюстровано методику визначення квазістатичного термопружного стану шаруватих вільних від силових навантажень термочутливих плит. Значну увагу приділено розв'язанню одновимірних нелінійних нестационарних задач теплопровідності. Наведено результати числових розрахунків температурного поля у двошаровій плиті, яке зумовлене сталим тепловим потоком. Досліджено точність знайденого розв'язку. Виконано порівняння з температурними полями, які визначені за припущення простої нелінійності, сталих теплофізичних характеристик та на основі точного розв'язку відповідної нелінійної стаціонарної задачі теплопровідності.

Ключові слова: шарувата термочутлива плита, термопружний стан, нелінійна задача теплопровідності, функція Гріна, лінійні сплайни.

The technique of determining the quasistatic thermoelastic state of the layered thermosensitive plates free of load is illustrated. Much attention is paid to finding analytical-numerical solutions of one-dimensional non-stationary heat conduction problems taking into account the temperature dependences of the thermal and temperature conductivity coefficients. Their finding involves use of the Kirchhoff transformation, generalized functions, Green's functions of the corresponding linear heat conduction problem, exact sums of the series, in particular those for which the Gibbs effect takes place, linear splines and solving the received recurrent systems of nonlinear algebraic equations relative to the values in the nodes of the spline of the Kirchhoff variable on the layer division surfaces and the derivative in time on inner flat-parallel surfaces of layers. The results of numerical calculations of temperature fields in two-layer plates with different thicknesses of layers and the external surface heated by a constant heat flux are presented. The accuracy of the found solution is investigated. The comparison of the temperature fields, which are determined assuming simple nonlinearity, stable thermophysical characteristics with the ones based on the exact solution of the corresponding nonlinear stationary heat conduction problem is fulfilled.

Key Words: layered thermosensitive plate, thermoelastic state, nonlinear heat conduction problem, Green's function, linear splines.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Під час прогнозування термомеханічної поведінки елементів конструкцій сучасної техніки, які перебувають в умовах високотемпературного нагрівання, виникає необхідність у теоретичних дослідженнях їх напружено-деформованого стану на основі математичних моделей, що враховують температурну залежність (термочутливість) фізико-механічних характеристик. Із-за складності відповідних задач для їх розв'язання, крім число-

вих, часто використовують і аналітично-числові методи. Один з них орієнтований [1, 2] на розв'язання квазістатичних задач термопружності, яке передбачає на першому етапі знаходження температурних полів. На основі отриманих з використанням цього методу відповідних розв'язків досліджено, зокрема, температурні поля в тришаровій плиті за припущення простої нелінійності (відношення залежних від температури коефіцієнтів теплопровідності і об'ємних теплоємностей, тобто коефіцієнти температуропровідності,

є сталі) та в одношаровій, в якій враховано температурну залежність і коефіцієнта теплопровідності. Тут цей метод адаптовано до розв'язання задачі теплопровідності для шаруватих плит із температурнозалежними коефіцієнтами тепло- і теплопровідності.

2. Формулювання задачі

Розглянемо віднесену до циліндричної системи координат $\tilde{r}, \varphi, \tilde{z}$ плиту складену з n ідеально контактуючих шарів, кожен з яких має відповідно початкову температуру $\bar{T}_{i0} \bar{T}_{i0}(\tilde{z})$ ($\tilde{z}_{i-1} < \tilde{z} < \tilde{z}_i$, $i = \overline{1, n}$, $\tilde{z}_0 = 0$). Нехай одна з обмежувальних поверхонь ($\tilde{z} = 0$) перебуває під дією теплового потоку зі змінною у часі густиною $q_0 q(\tau)$, а інша ($\tilde{z} = \tilde{z}_n$) підтримується при температурі $t_c T_c(\tau)$. Визначимо одновимірне нестационарне температурне поле плити з урахуванням температурних залежностей коефіцієнтів теплопровідності $\lambda_{ti}(T_i) = \lambda_i A_i(T_i)$ і об'ємної теплоємності $c_{vi}(T_i) = c_i C_i(T_i)$ шарів. Тут множники біля функцій мають розмірності відповідних величин.

За таких припущень задача теплопровідності у безрозмірних величинах матиме вигляд

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\bar{\Lambda}_i(\bar{T}_i) \frac{\partial \bar{T}_i}{\partial z} \right] = A_i \bar{C}_i(\bar{T}_i) \frac{\partial \bar{T}_i}{\partial Fo}, \quad i = \overline{1, n}; \quad (1)$$

$$\lambda_{j+1} \bar{\Lambda}_{j+1}(\bar{T}_i) \frac{\partial \bar{T}_{j+1}}{\partial z} = \lambda_j \bar{\Lambda}_j(\bar{T}_i) \frac{\partial \bar{T}_j}{\partial z},$$

$$\bar{T}_{i+1} = \bar{T}_i, \quad z = z_j, \quad j = \overline{1, n-1}; \quad (2)$$

$$\left(\bar{\Lambda}_1(\bar{T}_1) \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = -Ki \bar{q}(Fo),$$

$$\bar{T}_n(z_n, Fo) = \bar{t}_c \bar{T}_c(Fo); \quad (3)$$

$$\bar{T}_i(z, 0) = \bar{t}_{i0} \bar{T}_{i0}(z), \quad (4)$$

де

$$\bar{T} = \frac{T}{T_s}, \quad \bar{t}_c = \frac{t_c}{T_s}, \quad \bar{t}_{i0} = \frac{t_{i0}}{T_s}, \quad z = \frac{\tilde{z}}{l}, \quad z_i = \frac{\tilde{z}_i}{l}, \quad A_i = \frac{a_i}{a_1},$$

$$a_i = \lambda_i / c_i, \quad \bar{T}_c(Fo) = T_c(l^2 Fo / a_1), \quad \bar{T}_{i0}(z) = T_{i0}(z l),$$

$$[\bar{\Lambda}(\bar{T}), \bar{C}(\bar{T})] = [\Lambda(T), C(T)] \Big|_{T=T_s \bar{T}}, \quad Ki = l q_0 / (\lambda_1 T_s),$$

$$\bar{q}(Fo) = q(l^2 Fo / a_1), \quad Fo = a_1 \tau / l^2, \quad T_s - \text{характерна}$$

для задачі температура; l – параметр, що має розмірність одиниці довжини.

3. Побудова розв'язку задачі

Застосувавши до задачі (1) – (4) перетворення

Кірхгофа $\theta_i = \int_{\bar{T}_*}^{\bar{T}_i} \bar{\Lambda}_i(\zeta) d\zeta$ за припущення, що функції $\theta_i = \theta_i(\bar{T}_i)$ мають обернені $\bar{T}_i(\theta_i)$, дістанемо

$$\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial z^2} = A_i \frac{\bar{C}_i(\bar{T}_i)}{\bar{\Lambda}_i(\bar{T}_i)} \frac{\partial \theta_i}{\partial Fo}; \quad (5)$$

$$\lambda_{j+1} \frac{\partial \theta_{j+1}}{\partial z} = \lambda_j \frac{\partial \theta_j}{\partial z},$$

$$\theta_{j+1} - \theta_j = F_{j+1}(\theta_{j+1}), \quad z = z_j, \quad j = \overline{1, n-1}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = -Ki \bar{q}(Fo),$$

$$\theta_n(z_n, Fo) = \theta_c(Fo); \quad (7)$$

$$\theta_i(z, 0) = \theta_{i0}^*(z), \quad (8)$$

де

$$F_{j+1}(\theta_{j+1}) = \int_{\bar{T}_*}^{\bar{T}_{j+1}(\theta_{j+1})} [\bar{\Lambda}_{j+1}(\zeta) - \bar{\Lambda}_j(\zeta)] d\zeta,$$

$$\theta_{i0}^*(z) = \int_{\bar{T}_*}^{\bar{t}_{i0} \bar{T}_{i0}(z)} \bar{\Lambda}_i(\zeta) d\zeta,$$

$$\theta_c(Fo) = \int_{\bar{T}_*}^{\bar{t}_c \bar{T}_c(Fo)} \bar{\Lambda}_n(\zeta) d\zeta, \quad \bar{T}_* = \frac{T_*}{T_s},$$

T_* – нижня межа діапазону температур, в якому змінюються теплофізичні характеристики (ТФХ).

Далі замість системи рівнянь (5) і умов контакту (6) розглядатимемо еквівалентне їм рівняння з узагальненими по z похідними

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\lambda(z)}{\lambda_1} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] = \frac{c(z)}{c_1} \frac{\partial \theta}{\partial Fo} - w_i(z, Fo) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_1} F_j(\theta_{j+1}) \Big|_{z=z_j} \delta'(z - z_i), \quad (9)$$

де $\delta'(x)$ – похідна від дельта-функції Дірака; функції $\theta(z, Fo)$, $\lambda(z)$, $c(z)$, $\theta_0^*(z)$, $w_i(z, Fo)$, співпадають відповідно з $\theta_i(z, Fo)$, λ_i , c_i , $\theta_{i0}^*(z)$, $w_{ii}(z, Fo) = [1 - \bar{C}_i(\bar{T}(\theta_i)) / \bar{\Lambda}_i(\bar{T}(\theta_i))] \partial \theta_i / \partial Fo$, при $z_{i-1} < z < z_i$.

Розв'язок задачі (9), (7) і (8) за допомогою функції Гріна $G(z, \zeta, Fo)$ [1] подамо у вигляді

$$\theta(z, Fo) = \theta_L(z, Fo) + \theta_w(z, Fo) + \theta_f(z, Fo), \quad (10)$$

де

$$\theta_L(z, Fo) = \int_0^{z_n} \frac{c(\zeta)}{c_1} \theta_0^*(\zeta) G(z, \zeta, Fo) d\zeta + \\ + Ki \int_0^{Fo} G(z, 0, Fo - \xi) \bar{q}(\xi) d\xi - \\ - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \int_0^{Fo} \frac{\partial G(z, \zeta, Fo - \xi)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=z_n} \theta_c(\xi) d\xi; \quad (11)$$

$$\theta_w(z, Fo) = \int_0^{Fo} \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} G(z, \zeta, Fo - \xi) w_{ti}(\zeta, \xi) d\zeta d\xi; \quad (12)$$

$$\theta_f(z, Fo) = \\ = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_1} \int_0^{Fo} \frac{\partial G(z, \zeta, Fo - \xi)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=z_j+0} \varphi_{j+1}(\xi) d\xi; \quad (13) \\ \varphi_{j+1}(Fo) = F_{j+1}(\theta_{j+1}) \Big|_{\zeta=z_j}.$$

Функції $\theta_i(z, Fo)$ та $\partial \theta_i(z, Fo) / \partial Fo$ ($i = \overline{1, n}$) і $\theta_{i+1}(z_i, Fo)$ ($i = \overline{1, n-1}$), визначаємо за таким алгоритмом. У (12) інтеграли по координаті подаємо як суму інтегралів від x_{j-1}^i до x_j^i ($j = \overline{1, J_i}$, $z_{i-1} = x_0^i < x_1^i < \dots < x_{J_i}^i = z_i$). У кожному з цих інтегралів замінюємо $w_{ti}(\zeta, \xi)$ на $w_{ij}(\xi) \approx w_{ti}(z_{ij}^*, \xi)$ відповідно, де $z_{ij}^* = (x_{j-1}^i + x_j^i) / 2$. Після цього функції $\varphi_{i+1}(Fo)$, що входять у (13), і $w_{ij}(Fo)$ апроксимуємо лінійними сплайнами.

Використовуючи ці апроксимації, точні суми рядів, в т. ч. і тих, для яких характерний ефект Гібса, метод колокації і співвідношення

$$\theta_i(z_{ij}^*, Fo_q) \approx \left[(y_{ij}^0 + y_{ij}^q) / 2 + B_{ij}^q \right] Fo_1 + \theta_{i0}^*(z_{ij}^*), \quad (14)$$

де

$$y_{ij}^0 = \frac{1}{A_i} \left(\frac{\bar{A}_i(\bar{T}_i)}{\bar{C}_i(\bar{T}_i)} \Big|_{Fo=0} \frac{\partial^2 \theta_{i0}^*(z)}{\partial z^2} \right) \Big|_{z=z_{ij}^*}, \quad Fo_q = q Fo_1, \\ y_{ij}^q = \frac{\partial \theta_i}{\partial Fo} \Big|_{z=z_{ij}^*, Fo=Fo_q}, \quad B_{ij}^q = \sum_{k=1}^{q-1} y_{ij}^k, \quad Fo_1 = \frac{a_1 \Delta \tau}{l^2},$$

$\Delta \tau$ – крок сітки сплайна, із (10) одержуємо рекурентну систему нелінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження у вузлах сплайнів Fo_q значень змінної Кірхгофа на поверхнях $z = z_i + 0$ та її по-

хідних на поверхнях $z = z_{ij}^*$. Розв'язавши її, знайдемо шукані функції, а на їх основі решту відповідних величин, через які виражається розв'язок задачі (5)-(8).

Температуру визначаємо за формулою $\bar{T}_i(z, Fo) = \bar{T}_i(\theta_i)$, яка, зокрема, для лінійної залежності $\bar{A}_i(\bar{T}_i) = 1 + k_i(T_i - T_*)$, запишеться так

$$\bar{T}_i(z, Fo) = \bar{T}_* + \frac{\sqrt{1 + 2k_i\theta_i} - 1}{k_i}. \quad (15)$$

Зауважимо, що у формулі (15) змінні Кірхгофа для відповідної стаціонарної задачі мають вигляд

$$\theta_i(z) = \theta_c - Ki [f_i(z) - f_n(z_n)] - \sum_{j=i}^{n-1} F_j(\theta_{j+1}) \Big|_{z=z_j},$$

де

$$f_i(z) = z + \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{j+1}} - \frac{\lambda_1}{\lambda_j} \right) (z - z_j), \\ F_j(\theta_{j+1}) = \\ = \left(1 - \frac{k_j}{k_{j+1}} \right) \left\{ \theta_{j+1}(z) - \frac{\sqrt{1 + 2k_{j+1}\theta_{j+1}(z)} - 1}{k_{j+1}} \right\} \\ \theta_i(z_{i-1}) = \theta_c - Ki [f_i(z_{i-1}) - f_n(z_n)] - \\ - \sum_{j=i}^{n-1} F_j(\theta_{j+1}) \Big|_{z=z_j}, \quad i = \overline{n, 2};$$

За відомого температурного поля температурні напруження визначаємо за формулами [1].

4. Числові результати

Розрахунки виконували для двошарової плити при $t_{i0} = t_c = T_* = 300$ К, $T_{i0}(\tilde{z}) = T_c(\tau) = 1$, $q(\tau) = 1$, $q_0 = 1.12 \cdot 10^6$ Вт/м², $\Delta \tau = 0.03215$ с, $T_s = l q_0 / \lambda_1$, $l = \tilde{z}_2$, $\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1 = 10$ мм для двох товщин першого шару: $\tilde{z}_1 = 1; 2$ мм і відповідно: $J_1 = 2; 4$, $J_2 = 4$. Матеріал першого шару – склокераміка, другого – сталь 15ХМ1Ф.

Оцінювали похибку числових результатів залежно від кроку сітки сплайна і кількості розбиттів J_1 проміжку $[0, z_1]$. Порівняння з безрозмірними температурами підрахованими в одні ті ж моменти часу з кроком у два рази меншим від наведеного вище показало різницю меншу ніж 10^{-8} , а при зменшенні J_1 ($\tilde{z}_1 = 2$ мм) у два рази – меншу ніж 0.005.

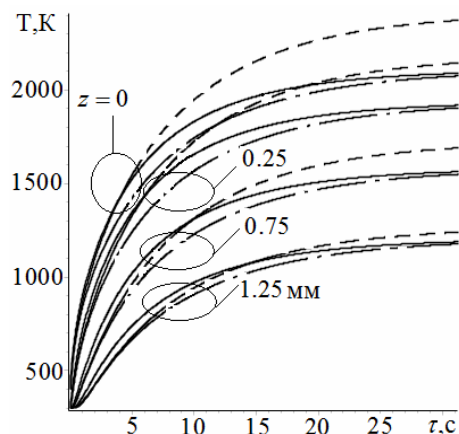


Рис.1. Залежність температури від часу на різних поверхнях першого шару товщиною 2 мм

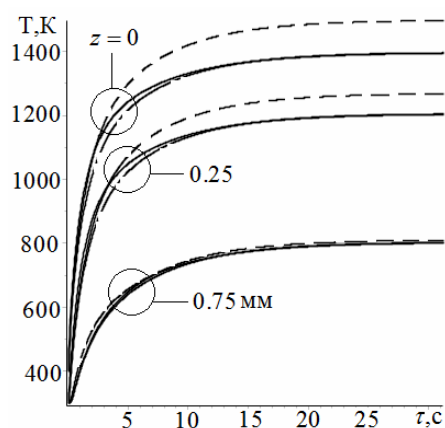


Рис.2. Залежність температури від часу на різних поверхнях першого шару товщиною 1 мм

Результати числових досліджень, частину з яких у вигляді графіків наведено на рис. 1 і 2 (штрихові лінії відповідають сталим, суцільні – заданим температурним залежностям ТФХ, штрихпунктирні – простій нелінійності), засвід-

чили, що зі зменшенням товщини першого шару зменшуються максимальні температури на поверхнях нагріву; у першому шарі зменшується також різниця між температурами підрахованими за сталих і температурнозалежних коефіцієнтів тепло- і температуропровідності (максимальна різниця зменшується з 300 до 100 °С) та за простої нелінійності; у других шарах плит вплив термочутливості неістотний; на одних і тих поверхнях другого шару максимальні температури однакові.

Температури поверхонь підраховані при відповідних часах (близьких до виходу на стаціонарний режим) і на основі розв'язку стаціонарної задачі практично не відрізняються.

5. Висновки

У рамках запропонованого раніше підходу до розв'язання квазістатичних задач термопружності для термочутливих тіл визначення нестационарних температурних полів у шаруватих плитах з урахуванням температурних залежностей коефіцієнтів тепло- і температуропровідності зведено до розв'язання рекурентної системи нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень змінної Кірхгофа у фіксовані моменти часу на поверхнях поділу і похідної за часом на внутрішніх плоскопаралельних поверхнях шарів. На прикладі двошарової плити досліджено точність знайденого розв'язку. Проаналізовано вплив термочутливості та товщини шару, зовнішня поверхня якого нагрівається сталим тепловим потоком.

Робота виконана за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка розвитку пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

Список використаних джерел

1. Процюк Б.В. Квазістатическіе температурне напруження в многослойной пластине при нагреве тепловым потоком / Б.В. Процюк // Теоретическая и прикладная механика. – 2003. – Вып. 38. – С. 63-69.
2. Процюк Б. Метод інтегральних рівнянь у нестационарних задачах теплопровідності термочутливих тіл / Б.В. Процюк // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2009. – Вип. 10. – С. 96-105.

References

1. PROTSIUK, B.V. (2003) Kvizystaticheskiye temperaturnye napryazheniya v mnohosloynoy plastyne pry nahreve teplovym potokom. *Teoreticheskaya y prykladnaya mekhanika*. 38. pp. 63-69.
2. PROTSIUK, B. (2009) Metod intehral'nykh rivnyan' u nestatsionarnykh zadachakh teploprovodnosti termochutlyvykh til. *Fizyko-matematychne modelyuvannya ta informatsiyni tekhnolohiyi*. 10. pp. 96-105.

Надійшла до редколегії 18.06.19

УДК 532.595

Райновський І. А.¹, м.н.с.

Усталені резонансні коливання рідини у вертикальному циліндричному баці при орбітальних збуреннях

¹ Інститут математики НАН України,
вул. Терещенківська 3, Київ, 01004, Україна,
e-mail: ihor.raynovskyy@gmail.com

I. A. Raynovskyy¹, Junior Researcher, PhD.

Steady-state resonant sloshing in upright cylindrical tank due to elliptical forcing

¹ Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine,
Tereshchenkivska 3, str., Kiev, 01004, Ukraine,
e-mail: ihor.raynovskyy@gmail.com

Нелінійні модальні рівняння Наріманова-Моїсєєва використовуються для дослідження резонансного коливання рідини (хлюпання) у вертикальному баці із круговим перерізом, що відбувається внаслідок орбітального (ротаційного) руху бака в горизонтальній площині з частотою збурення близькою до власної частоти коливання рідини. Побудовано асимптотичний усталений розв'язок і проаналізовано амплітудно-частотні характеристики. Отримані теоретичні результати підтверджуються існуючими експериментами. Підйоми хвиль на вертикальній стінці достатньо добре прогнозовано, за винятком частотного діапазону, де спостереження модельного тестування повідомляли про розрив хвилі та / або вихорові потоки.

Ключові слова: коливання рідини, демпфування, усталені резонансні хвилі, орбітальні збурення.

The nonlinear Narimanov-Moiseev multimodal equations are used to study the swirling-type resonant sloshing in a circular base container occurring due to an orbital (rotary) tank motion in the horizontal plane with the forcing frequency close to the lowest natural sloshing frequency. These equations are equipped with linear damping terms associated with the logarithmic decrements of the natural sloshing modes. The surface tension is neglected. An asymptotic steady-state solution is constructed and the response amplitude curves are analyzed to prove their hard-spring type behavior for the finite liquid depth (the mean liquid depth-to-the-radius ratio $h > 1$). For the orbital forcing only swirling occurs. This behavior type is supported by the existing experimental data. Phase lags, which are piecewise functions along the continuous amplitude response curves in the undamped case, become of the non-constant character when the damping matters. The wave elevations at the vertical wall are satisfactory predicted except for a frequency range where the model test observations reported wave breaking and/or mean rotational flows.

Keywords: sloshing, damping, steady-state waves, orbital forcing.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Розглядається резонансне коливання рідини (хлюпання) у вертикальному циліндричному баці радіуса r_0 у фіксованій (циліндричній) системі координат. Задача розглядається в обезміреному випадку, припускаючи, що r_0 - характерний розмір баку, а $1/\sigma$ (σ - частота збурення) є характерним часом. Бак, без втрати загальності, описує поступальні орбітальні рухи малої амплітуди проти руху годинникової стрілки, рух якого описується двома обезміреними узагальненими координатами $\eta_1(t) = \eta_a \cos t$ та $\eta_2(t) = \eta_a \sin t$, де амплітуда збурення є малою, $\eta_a = O(\varepsilon) \ll 1$.

Згідно [2], припускається нев'язка, нестислива рідина з іротаційними потоками. На Рис.1 подано геометричні позначення та показано, як осі бака рухаються по його круговій траєкторії руху радіуса η_a . Вільна поверхня визначається однозначним представленням $z = \zeta(r, \theta, t)$ (у циліндричній координатній системі), а потік рідини визначений через потенціал швидкості $\Phi(r, \theta, z, t)$. Невідомі, ζ and Φ , визначені у фіксованій з баком системі координат $Oxyz$.

Функції ζ та Φ можна знайти або з відповідної задачі вільної поверхні, або з її варіаційної постановки Бейтмена-Люке (див. глава 7, [1]). Останнє варіаційне формулювання полегшує нелінійний мультимодальний метод,

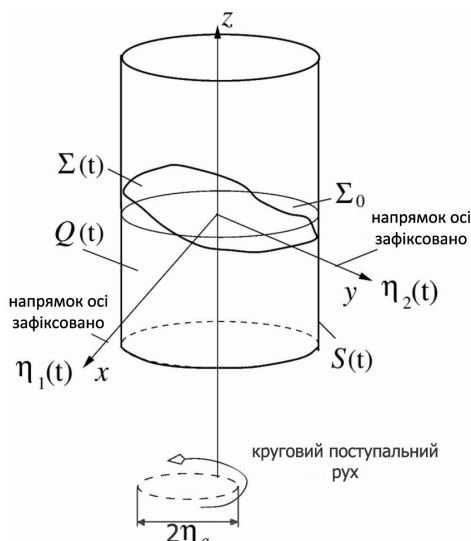


Рис. 1 Ескіз бака та прийнятої номенклатури.

що базується на представленні рядів Фур'є ζ та Φ через власні форми коливання рідини, що впливають із спектральної граничної задачі.

$$C^2 j_{Mi} = 0 \text{ в } Q_0; \quad j_{Mi}/n = 0 \text{ в } S_0; \\ j_{Mi}/z = k_{Mi} \text{ на } S_0; \quad T_{S_0} j_{Mi} dS = 0, \quad (1)$$

де k_{Mi} – власні значення, Σ_0 – незбурена вільна поверхня, Q_0 – область рідини та S_0 – змочена поверхня бака.

На основі нелінійної модальної системи з глави 7, книги [4], Фалтінсен, Луковський та Тимоха [2] вивели модальні рівняння Наріманова-Моїсєєва через розв'язки Фур'є, а саме представлення вільної поверхні $z = z(r, q, t)$ та потенціалу швидкості $F(r, q, z, t)$.

Виведення припускають, що частота збурення баку σ є близькою до власної частоти коливання $\sigma_1 = \sigma_{11}$ та немає вторинних резонансів (див. про вторинні резонанси у главах 8 та 9 книги [4]). Використовуємо асимптотику Наріманова-Моїсєєва

$$p_{11} : r_{11} = O(e^{1/3}); \quad p_{0j} : p_{2j} : r_{2j} = O(e^{2/3}); \quad (2) \\ r_{1(j+1)} : p_{1(j+1)} : r_{3j} : p_{3j} = O(e), \quad j \geq 1.$$

Нехтуючи величинами порядку $o(\varepsilon)$, модальні рівняння (відносно p_{Mi} та r_{mi}) приймають вигляд нелінійних модальних рівнянь типу Наріманова-Моїсєєва відносно узагальнених гідродинамічних координат [2]. Оскільки в'язке демпфування може мати вагомий вклад у коливанні рідини, ми вводимо демпфуючі члени,

де коефіцієнти демпфування ξ_{Mi} виражають кумулятивний ефект різних дисипативних факторів, нижня межа яких пов'язана із в'язким ламінарним поверхневим шаром на змочених стінках бака та ефектом об'ємного тертя [5]. Формули коефіцієнта демпфування є аналогічними формулам Хендерсон-Майлза, тільки перевиведені для даної задачі у відповідних позначеннях. Узагальнені координати із $M \geq 4$ описуються однорідними лінійними модальними рівняннями, що не мають неоднорідних членів та, внаслідок цього, не дають внеску в усталені рухи згідно теорії Наріманова-Моїсєєва. В даній задачі розглядаються умови періодичні.

Для знаходження асимптотичного періодичного розв'язку рівнянь Наріманова-Моїсєєва, ми задаємо узагальнені координати найнижчого порядку наступним чином:

$$p_{11}(t) = a \cos(st) + \bar{a} \sin(st) + o(e^{1/3}), \\ r_{11}(t) = \bar{b} \cos(st) + b \sin(st) + o(e^{1/3}), \quad (3)$$

де $a, \bar{a}, b$ та $\bar{b}$ є безмірними амплітудними параметрами порядку $O(\varepsilon^{1/3})$. Шляхом кількох підстановок та групуванням доданків перед першою гармонікою, при $\cos t$ та $\sin t$, отримуємо необхідну умову розв'язності у вигляді секулярної системи нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно $a, \bar{a}, b$ та $\bar{b}$. Для зручності переходимо до альтернативної секулярної системи відносно інтегральних амплітуд A, B та зсувів фаз y, j

$$\begin{cases} A[\Lambda + m_1 A^2 + (m_3 - F) B^2] = \varepsilon \cos \psi; \\ B[\Lambda + m_1 B^2 + (m_3 - F) A^2] = \varepsilon \sin \varphi; \\ A[DB^2 + \xi] = \varepsilon \sin \psi; \\ B[DA^2 - \xi] = \varepsilon \cos \varphi, \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{де} \quad a = A \cos y, \quad \bar{a} = A \sin y, \\ \bar{b} = B \cos j, \quad b = B \sin j. \quad (5)$$

Криві амплітудно-частотних характеристик жорсткої нелінійності

$$A^2 \left[(\Lambda + (m_1 + m_3) A^2)^2 + \xi^2 \right] = \varepsilon^2; \quad A = B > 0, \quad (6)$$

проілюстровано на Рис. 2. Він показує гістерезис в діапазоні частот між W та S . Коефіцієнт частоти $(\sigma/\sigma_{11})_*$ точки S визначено

$$(\sigma/\sigma_{11})_* = (1 - (m_1 + m_s)(\varepsilon/\xi)^2)^{-1/2} \quad (7)$$

Це відношення зростає разом із ε/ξ таким чином, що, знаючи ξ та ε , можна оцінити S , де повинен відбуватися стрибок із вищої гілки на нижчу при збільшенні частоти збурення (σ/σ_{11}) .

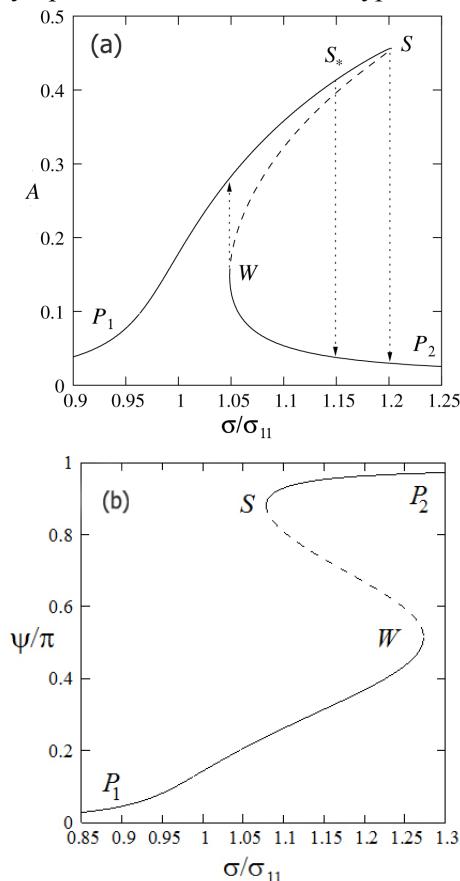


Рис.2. Теоретичні амплітудно-частотні характеристики при кругових збуреннях, пов'язані із експериментальним випадком у [7].

На рисунку (а) зображено домінуючу амплітуду хвилі, а (b) відповідає зсуву фази відносно частоти збурення. Суцільні лінії відповідають стійкому коливанию рідини, а штрих-пунктирні - нестійкому. Між W та S бачимо гістерезис, де співіснують два усталені розв'язки. Положення точки S визначається коефіцієнтами демпфування. Обчислення були проведені при $\eta_a = 0.02$, $h = 1.04$ та $\xi = 0.034$.

Усталені підйоми хвилі біля стінки вимірювались для двох абсолютно твердих циліндричних баків радіусів 72мм та 287мм ($h = 1.04$) поступовим збільшенням частоти збурення вздовж P_1S (Рис.2). Наша теорія вимагає, щоб амплітуда збурення η_a була малою

та (σ/σ_{11}) було в околі одиниці. Три серії експериментів були виконані у [6,7] при $h_a = 0.01, 0.02$ та 0.04 .

Проводимо оцінку знизу коефіцієнта демпфування як $\xi \geq 0.031$ та зверху як $\xi \leq 0.034$ (для амплітуд збурення 0.01 та 0.02. $(\sigma/\sigma_{11}) = 1.27$ та 1.45, відповідно). Це означає, що демпфування в модельних тестах [6,7], в основному, пов'язане із граничним шаром рідини та об'ємною в'язкістю.

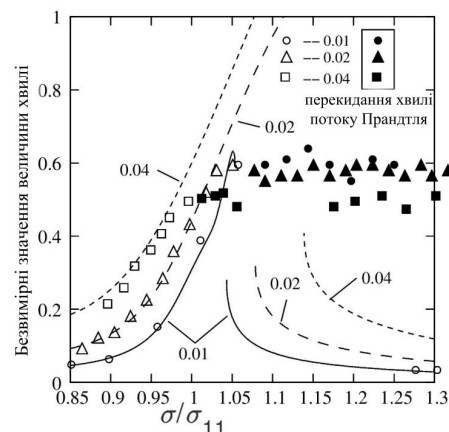


Рис.3 Теоретичні лінії та експериментальні символи обеміреної амплітуди хвилі біля вертикальної стінки, $\frac{1}{2}(\zeta_{\max} - \zeta_{\min})$.

На Рис.3 зображено гарне узгодження експериментів [6,7] із теорією (лінії) до тих пір, доки не спостерігаються фактори додаткової дисипації, таких як (i) перекидання хвилі чи (ii) феномен Прандтля.

Тим не менше, виявлено сильну невідповідність для заповнених символів, де згадані феномени фіксуються. Незважаючи на це, ефект перекидання хвилі часто може бути змодельованим збільшенням коефіцієнта демпфування.

Експерименти [6,7] було проведено, використовуючи покрокове збільшення частоти збурення забезпечуючи дані вздовж вищої гілки на Рис.2. Криві, позначені обеміреними амплітудами $\eta_a = 0.01, 0.02$ та 0.04 . В обчисленнях взято коефіцієнт демпфування $\xi = 0.034$. Заповнені символи відповідають експериментальним випадкам, коли фіксувались перекидання хвилі [6,7] та феномен Прандтля.

У підсумку, використовуючи модальну теорію коливання рідини Наріманова-Моїсєєва [2], яка описує резонансне хлюпання у вертикальному циліндричному баці при орбітальному збуренні, було вивчено усталені типи хвиль, коли частота збурення є близькою до найнижчої

власної частоти коливання рідини. Побудований аналітичний асимптотичний розв'язок нелінійних модальних рівнянь, коли ці рівняння включають лінійні члени демпфування, і він показує, що амплітудно-частотним характеристикам притаманна жорстка нелінійність, яка підтверджена експериментами. Крім того, рішення добре описує підйоми хвилі біля стінки, коли феноменами (i) та (ii) можна знехтувати згідно з [7,8].

Список використаних джерел

1. Тимоха О.М. Усталене резонансне коливання рідини у вертикальному циліндричному контейнері, що спричиняє круговий орбітальний рух / І.А. Райновський, О.М. Тимоха // *Mathematical Problems in Engineering*. – 2018. – 2018. – С. 1-9.
2. Фалтінсен О.М. Усталене резонансне коливання рідини у вертикальному циліндричному контейнері, що спричиняє круговий орбітальний рух / О.М. Фалтінсен, І.О. Луковський, О.М. Тимоха // *Resonant sloshing in an upright annular tank*. – 2016. – 804. – С. 608-645.
3. Райновський І.А. Асимптотична модальна теорія Наріманова-Моїсєєва усталених демпфованих коливань в циліндричному баці / І.А. Райновський. – дисертація. – 2018. – Інститут математики НАНУ. – 161с.
4. Фалтінсен О.М. *Sloshing* / О.М. Фалтінсен, О.М. Тимоха. – Cambridge University Press. – 608 с.
5. Майлз Д. Примітки щодо демпфування внутрішнього та граничного шарів при хвилях на поверхні рідини в циліндричному баці / Д. Майлз, Д. Хердerson. // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1998. – 364. – С. 319-323.
6. Рекларі М. Гідродинаміка орбітально збурених біореакторів / М. Рекларі // дисертація. – Laboratoire de Machines Hydrauliques, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne. – 2013. – 159 с.
7. Рекларі М. Динаміка поверхневих хвиль в орбітально збурених циліндричних контейнерах / М. Рекларі, М. Дрейер, М., Тиссот, Д., Обрешджов Ф.М., Вурм // *Physics of Fluids*. – 2014. – 26. – ID 052104.

Незважаючи на те, що перекидання хвилі може бути успішно змодельовано шляхом збільшення коефіцієнтів демпфування, цей підхід не є застосовним для кругового збурення. Для покращення аналітичної теорії коливання рідини слід включити в математичну модель феномен переміщення маси Прандтля.

References

1. RAYNOVSKYY, I.A. and TIMOKHA, A.N. (2018) *Steady-state resonant sloshing in an upright cylindrical container performing a circular orbital motion*. *Mathematical Problems in Engineering*. **2018**, Paper ID 5487178, pp. 1-9.
2. FALTINSEN, O.M., LUKOVSKY, I.A. and TIMOKHA, A.N. (2016) *Resonant sloshing in an upright annular tank*. *Journal of Fluid Mechanics*. Vol. **804**, pp. 608-645.
3. RAYNOVSKYY, I.A., (2018) *An asymptotic modal Narimanov-Moiseev theory of the damped steady-state sloshing in an upright cylindrical tank*. PhD Thesis. Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv.
4. FALTINSEN, O.M. AND TIMOKHA, A.N. (2009) *"Sloshing"*. Cambridge University Press.
5. MILES, J.W. and HENDERSON, D.M. (1998) A note on interior vs. boundary-layer damping of surface waves in a circular tank. *Journal of Fluid Mechanics*. Vol. **364**, pp. 319-323.
6. RECLARI, M. (2013) *Hydrodynamics of orbital shaken bioreactors*. PhD Thesis #5759, Laboratoire de Machines Hydrauliques, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, p. 159.
7. RECLARI, M., DREYER, M., TISSOT, S., OBRESCHJOW, D. and WURM, F.M. (2014) Surface wave dynamics in orbital shaken cylindrical containers. *Physics of Fluids*. Vol. **26**, Article ID 052104.

Надійшла до редколегії 31.05.2019

УДК 539.3

Ревенко В. П., д.ф.-м.н., пров.н.с.

**Розрахунок методом скінченних тіл
плоского напруженого стану
прямокутної пластини
із прямокутним отвором**

Інститут прикладних проблем механіки і
математики ім. Я.С.Підстригача НАН України,
79601, м. Львів, вул. Наукова 3б,
e-mail: victorrev@ukr.net

V. P. Revenko, Dr.Sci. (Phys.-Math.).

**Method of finite bodies for determination of
the plane stressed state of rectangular plates
with a rectangular hole**

Pistryhach Institute for Applied Problems of
Mechanics and Mathematics, NAS of Ukraine, 3-b,
Naukova str., L'viv, 79060, Ukraine
e-mail: victorrev@ukr.net

Запропоновано аналітично-числовий метод скінченних тіл для розрахунку напруженого стану прямокутних пластин із прямокутним отвором. Метод ґрунтується на умовному розділенні двозв'язної поверхні пластини на прямокутні області, апроксимації її напруженого стану скінченною сумою визначальних функцій і запропонованому способі зведення задоволення всіх умов ідеального контакту прямокутних частин пластини і крайових умов до мінімізації узагальненої квадратичної форми. Встановлено критерії, за яких побудований наближений розв'язок збігається з точним.

Ключові слова: пластинка, прямокутний отвір, метод скінченних тіл.

The paper is devoted to the determination of the stress-deformed state of structurally heterogeneous bearing rectangular plates with a rectangular hole. The new analytical-numerical method (finite bodies) was used, to find the stress state of the plate with a hole. The method of finite bodies uses the conditional partition of the doubly-connected surface of the plate into simpler connected rectangular parts. On the lines of conditional contact, the conditions of ideal contact are taken into account, which ensure the equality of stresses, deformations and displacements. The perturbed stressed state, which is presented in the form of a series of functions, which is rapidly intercepted at a distance from the outline of the hole, is considered. A finite sum of solutions of a plane problem is used and the stress state of a perturbed state is given as a sum of a series for nonorthogonal functions. The components of vector of displacements and stresses are written. The determination of the coefficients of the sum of a series is based on the proposed method of satisfying all boundary conditions and the conditions of ideal contact to find the minimum of a generalized quadratic form. The numerical criterion for the convergence of the method is theoretically established. It is shown that the accuracy of satisfaction of boundary conditions and conditions of ideal contact is estimated by one number – the minimum of a generalized quadratic form.

Key Words: plate, rectangular hole, method finite bodies.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Розрахунок плоского напруженого стану нескінченних пластин із гладким отвором присвячені роботи [1, 2], де запропоновані аналітичні методи на основі конформних відображень теорії функцій комплексного змінного. Використання цих методів до розрахунку нескінченної площини з прямокутним отвором приводить до появи

особливостей в напруженнях у кутових точках отвору.

Метою статті є подальша розробка нового аналітично-числового методу скінченних тіл [3] до розрахунку плоского напруженого стану прямокутних пластин із прямокутним отвором, а також обґрунтування відсутності особливостей в напруженнях у кутових точках отвору за коректних навантажень пластини.

2. Постановка задачі

Розглянемо пластину сталої товщини h , серединна поверхня якої займає прямокутну область $\Pi = \{(x, y) \in [-a, a] \times [-b, b]\}$ з прямокутним отвором $\Pi_1 = \{(x, y) \in [-a_1, a_1] \times [-b_1, b_1]\}$.

В [4] на основі використання загального розв'язку рівнянь Ляме знайдено аналітичний вираз переміщень

$$\begin{aligned} u &= -(1+\nu) \left\{ y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right\} - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ v &= -(1+\nu) \left[y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right] + (1-\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1)$$

і напружень

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \\ \Phi &= E \left(y \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

плоскої задачі теорії пружності, де Φ , Ψ – гармонічні функції переміщень, ν – коефіцієнт Пуассона.

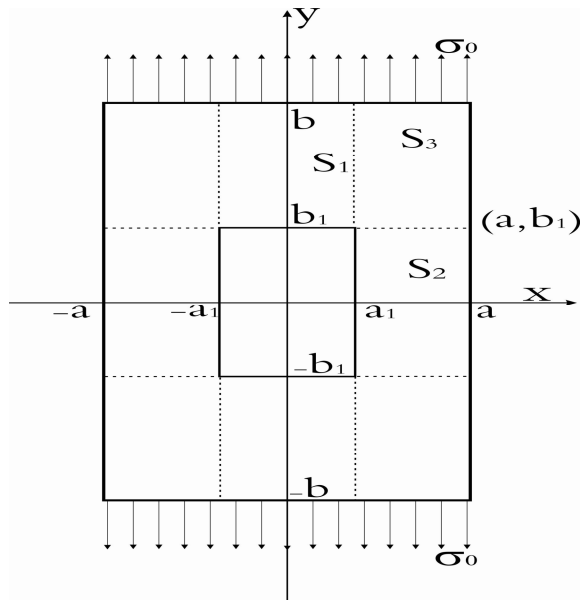


Рис. 1. Схема умовного поділу пластини на прямокутні частини.

Для простоти викладу методу скінченних тіл припустимо, що пластину розтягують постійними навантаженнями σ_0 вздовж осі Оу, а контур отвору Π_1 не навантажений (рис. 1). Слідуючи працям [3, 5], двозв'язну поверхню пластини умовно розділимо на вісім

прямокутних частин. Для цього проведемо із кутів отвору умовні розрізи паралельні осям координат, на яких мають виконуватися умови ідеального контакту. Контур отвору Π_1 буде розділений на чотири відрізки. Внаслідок симетрії задачі достатньо розглянути перший квадрант, в якому буде два умовних розрізи, що виділяють три прямокутні області: $S_1 \in [-a_1, a_1] \times [b_1, b]$, яка містить частину контуру отвору, який позначимо Π_1^1 , де $x \in [-a_1, a_1]$; $S_2 \in [a_1, a] \times [-b_1, b_1]$ – край отвору Π_1^2 , де $y \in [-b_1, b_1]$; $S_3 \in [a_1, a] \times [b_1, b]$, границя якої містить умовний розріз L_1 між областями S_1 і S_3 , який позначимо L_1 і L_2 – між областями S_2 і S_3 .

Напружено-деформовані стани прямокутних частин пластини розділимо на дві складові: відомий основний напружений стан і збурений, який виникає внаслідок наявності отвору Π_1 .

Збурені напружені стани швидко зникають при віддаленні від країв Π_1^1 , Π_1^2 отвору. Покладемо $a, b \gg a_1, b_1$, так щоб збуреним станом на зовнішньому контурі Π можна було знехтувати. Для визначення збуреного стану достатньо розглянути крайові умови на відрізках Π_1^1 , Π_1^2 і умови ідеального контакту на відрізках L_1 , L_2 .

Слідуючи роботам [3, 5], подамо шукані функції переміщень збурених станів: в області S_1

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k^1 \exp[-k\omega_1(y-b_1)] \sin k\omega_1 x, \\ \psi_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k^1 \exp[-k\omega_1(y-b_1)] \cos k\omega_1 x, \end{aligned} \quad (3)$$

в області S_2

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \exp[-k\omega_2(x-a_1)] \sin k\omega_2 y, \\ \psi_2 &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \exp[-k\omega_2(x-a_1)] \cos k\omega_2 y, \end{aligned} \quad (4)$$

в області S_3

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \sum_{k=1}^{\infty} \{ a_k^3 \exp[-k\omega_3(y-b_1)] \sin k\omega_3 x + \\ &+ a_k^4 \exp[-k\omega_4(x-a_1)] \sin k\omega_4 y \}, \end{aligned}$$

$$\psi_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \{b_k^3 \exp[-k\omega_3(y-b_1)] \cos k\omega_3 x + b_k^4 \exp[-k\omega_4(x-a_1)] \cos k\omega_4 y, \quad (5)$$

де $\omega_1 = k_1/b_1$, $\omega_2 = k_1/a_1$, $\omega_3 = 2k_1/(a-a_1)$, $\omega_4 = 2k_1/(b-b_1)$, $2,8 < k_1 < \pi$, вибір параметра k_1 дозволяє поліпшити збіжність обчислень.

3. Методика одночасного задоволення всіх крайових умов і умов ідеального контакту

Виразимо крайові умови на відрізках контуру отвору Π_1^1 , Π_1^2

$$\sigma_y^1 = \sigma_0, \quad \tau_{xy}^1 = 0, \quad x \in [\beta_1, \alpha_1], \quad y = b_1, \quad (6)$$

$$\sigma_x^2 = 0, \quad \tau_{xy}^2 = 0, \quad y \in [\beta_2, \alpha_2], \quad x = a_1. \quad (7)$$

Умови ідеального контакту на відрізках L_1 , L_2

$$\sigma_x^1 = \sigma_x^3, \quad \tau_{xy}^1 = \tau_{xy}^3, \quad u^1 = u^3, \quad v^1 = v^3, \quad y \in [\beta_3, \alpha_3], \quad (8)$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_y^3, \quad \tau_{xy}^2 = \tau_{xy}^3, \quad u^2 = u^3, \quad v^2 = v^3, \quad x \in [\beta_4, \alpha_4], \quad (9)$$

де

$$\beta_1 = -a_1, \quad \alpha_1 = a_1, \quad \beta_2 = -b_1, \quad \alpha_2 = b_1, \quad \beta_3 = b_1, \quad \alpha_3 = b, \quad \beta_4 = a_1, \quad \alpha_4 = a.$$

При аналітично-числовому задоволенні умов (6)–(9) обмежимося в рядах (3)–(5) першими N членами ряду щодо індексу k , де $N \square$ задане натуральне число. Внесемо одержані функції ϕ_j , ψ_j у подання (1)–(2) і знайдемо вирази переміщень і напружень в областях S_j , $j = \overline{1,3}$.

Після підстановки їх в умови (6)–(8), одержимо систему дванадцяти рівнянь

$$\sum_{k=1}^M c_k A_{m,k}(\gamma_m) = P_m, \quad m = \overline{1, K}, \quad (10)$$

де

$$\gamma_m \in [\beta_m, \alpha_m], \quad K = 12, \quad M = 8N, \quad c_{k+M_1} = a_k^j, \quad c_{k+N+M_1} = b_k^j, \quad M_1 = 2(j-1)N, \quad k = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, 4}, \quad P_m = \sigma_0 \delta_m^1, \quad A_{m,k}(\gamma_m) - \text{відомі функції.}$$

Для задоволення системи рівнянь (10) використовуємо аналітично-числовий метод [3, 5]. Запропонована там методика дозволяє числовий розв'язок системи рівнянь (10) звести

до знаходження мінімуму такої узагальненої квадратичної форми:

$$\sum_{m=1}^K \left\| \sum_{k=1}^M c_k A_{m,k}(\gamma_m) - P_m \right\|_m^2 = \sum_{k,j=1}^M c_k c_j W_{kj} - 2 \sum_{k=1}^M c_k V_k + P^2, \quad (11)$$

де

$$\|f\|_m = \sqrt{\int_{\beta_m}^{\alpha_m} f^2(\gamma) d\gamma} - \text{норма в } L_2[\beta_m, \alpha_m].$$

За визначенням узагальнена квадратична форма (11) невід'ємна. Мінімум її для заданого N позначимо $F(N)$, а невідомі c_k , на яких він досягається, — c_k^N . Невідомі c_k^N визначимо з умови мінімуму узагальненої квадратичної форми (11). Базові функції частин пластини (3)–(5), що визначаються знайденими коефіцієнтами c_k^N , позначимо $\phi_j^N(x, y)$, $\psi_j^N(x, y)$.

4. Знаходження числових критеріїв збіжності побудованого розв'язку

Лема [3]. Функція $F(N)$ невід'ємна і не зростає.

Теорема. Якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке N , що $F(N) < \frac{\varepsilon^2}{4}$, то переміщення і напруження, виражені через функції $\phi_j = \lim_{N \rightarrow \infty} \phi_j^N$, $\psi_j = \lim_{N \rightarrow \infty} \psi_j^N$, будуть точно задовольняти умови (10) у метриках $L_2[\beta_m, \alpha_m]$.

Відзначимо, що квадратична форма (11) означена таким чином, що для її мінімуму $F(N)$ і знайдених невідомих c_k^N виконується рівність

$$F(N) = \sum_{m=1}^K \left\| \sum_{k=1}^M c_k^N A_{m,k}(\gamma_m) - P_m \right\|_m^2,$$

яка дає оцінку точності задоволення умов (10)

$$F(N) > \left\| \sum_{k=1}^M c_k^N A_{m,k}(\gamma_m) - P_m \right\|_m^2, \quad m = \overline{1, K}.$$

Обговорення результатів. Числовими розрахунками встановлено, що процес одночасного задоволення рядами Фур'є всіх крайових умов на контурах Π і Π_1 двозв'язної поверхні пластини є нестійким. Це пояснюється

тим, що в подання розв'язку плоскої задачі (див. (3)–(5)) входять експоненціальні функції, показники яких лінійно зростають або спадають зі збільшенням N . Всі ці функції не можна (без умовного розрізання пластини з отвором на частини) нормувати так, щоб вони не зростали на деяких сторонах пластини, або отвору. У роботах [5, 6] показано, що обчислювальний процес побудови методом рядів Фур'є розв'язку крайової задачі в прямокутній пластині є стійкий, оскільки експоненціальні функції можна нормувати так, що вони будуть рівні одиниці на заданих сторонах прямокутника і зменшуватися при віддаленні від них.

Контур отвору розділений на чотири відрізки, на яких всі точки будуть знаходитись під дією обмежених навантажень. Згідно результатів робіт [5, 6], у випадку коректних навантажень, при розрахунку запропонованим методом

прямокутних пластин з отвором будуть відсутності особливості в напруженнях.

Висновки. Обґрунтовано метод скінченних тіл, заснований на умовному поділі пластини з прямокутним отвором на прямокутні частини, на краях яких експоненціальні функції нормовані одиницею. Це дозволить побудувати стійкий алгоритм розв'язання граничної задачі. Розроблено підхід, який дозволив одночасно враховувати велику кількість граничних і контактних умов як в зусиллях, так і в переміщеннях, заданих на різних краях як пластини, так і отвору. Запропоновано метод, який узагальнює відоме розкладання Фур'є для одного рівняння на випадок розв'язування системи рівнянь з неортогональними коефіцієнтами. Встановлено критерії, при яких побудований наближений розв'язок збігається з точним.

Список використаних джерел

1. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
2. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / Г.Н. Савин. – Киев: Наукова думка, 1968. – 888 с.
3. Revenko V.P. Analytical and numerical method of finite bodies for calculation of cylindrical orthotropic shell with rectangular hole / V.P. Revenko, V.N. Bakulin// Russian Mathematics. – 2016. – № 6. – P. 1–11.
4. Revenko V.P. Determination of Plane Stress-Strain States of the Plates on the Basis of the Three-Dimensional Theory of Elasticity / V.P. Revenko, A.V. Revenko // Materials Science. – 2017. – Vol. 52, No 6. – P. 811–818.
5. Revenko V.P. Application of the least-squares method to the analysis of displacements and stresses in the two-dimensional problem / V.P. Revenko// Materials Science. – 2008, – 44, №4, P. 482–488.
6. Meleshko V. V. Selected topics in history of the two-dimensional biharmonic problem / V. V. Meleshko // Appl. Mech. Rev. – 2003. – Vol. 56, № 1. P. – 33–85.

References

1. MUSHELISHVILI, N. (1966) *Nekotoryye osnovnyye zadachi matematizeskoj teorii uprygosti*. Moskva: Nauka.
2. SAVY'N, G. (1968) *Raspredelenie napryazhenij okolo otverstiy*. Kiev: Naukova dumka.
3. REVENKO, V.P. and BAKULIN, V.N. (2016) Analytical and numerical method of finite bodies for calculation of cylindrical orthotropic shell with rectangular hole. *Russian Mathematics*. No 6. p. 1–11.
4. REVENKO, V.P. and REVENKO, A.V. (2014) Determination of Plane Stress-Strain States of the Plates on the Basis of the Three-Dimensional Theory of Elasticity. *Materials Science*. (52)6. p. 811–818.
5. REVENKO, V.P. (2008) Application of the least-squares method to the analysis of displacements and stresses in the two-dimensional problem. *Materials Science*. (44)4. p. 482–488.
6. MELESHKO, V. V. (2003) Selected topics in history of the two-dimensional biharmonic problem. *Appl. Mech. Rev.* (56)1. p. 33–85.

Надійшла до редколегії 20.06.19

УДК 531.7 : 621.763

Рево С. Л.¹, д.ф.-м.н., проф.,
Мельниченко М. М.¹, к.ф.-м.н., с.н.с.,
Авраменко Т. Г.¹, к.ф.-м.н.,
Іваненко К. О.¹, к.ф.-м.н.,
Андрущенко В. О.¹, пров. інж.

Мікротвердість компактованого термічно розширеного графіту

¹ Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ,
пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: revo@univ.kiev.ua

S. L. Revo¹, Dr. Sc,
M. M. Melnichenko¹, PhD
T. G. Avramenko¹, PhD,
K. O. Ivanenko¹, PhD,
V.O. Andruschenko¹, Chief Eng.

Microhardness of compacted thermally expanded graphite

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: revo@univ.kiev.ua

Використовуючи метод неперервного мікроіндентування з різним навантаженням на індентор, було вивчено мікротвердість компактованих зразків термічно розширеного графіту (ТРГ) різної дисперсності. Аналіз отриманих результатів показав, що зі збільшенням середнього розміру поперечного перерізу частинок ТРГ від 40 до 120 мкм збільшується і мікротвердість досліджуваних зразків. Було також проведено аналіз впливу дисперсності та морфології частинок ТРГ на розподіл мікротвердості на поверхні компактованих зразків ТРГ. Запропонований метод дослідження та аналізу мікротвердості на поверхні компактованих зразків ТРГ дає можливість не лише характеризувати мікромеханічні властивості досліджуваного матеріалу, а й оптимізувати технологічні режими одержання зразків.

Ключові слова: мікромеханічні властивості, графіт, мікротвердість, термо-розширений графіт.

Using the method of continuous microindentation with different loading on the indenter, the microhardness of compacted thermo-expanded graphite (TEG) samples of different dispersion was studied. The analysis of the obtained results showed that, with an increase in the average cross-sectional area of TEG particles from 40 to 120 microns, the microhardness of the samples under investigation also increases. An analysis of the influence of the dispersion and morphology of the TEG particles on the distribution of microhardness on the surface of the compacted samples of TEG was also carried out. The microhardness indicatrix for the samples of the original TEG shows that when the radial displacement from the center of the sample, the microhardness of the material decreases. So in the central part of the discoid sample the values of microhardness lie in the range from 0,04 to 0,025 GPa. In the next concentric region, the microhardness decreases by 30% and gains a value of (0.028 ... 0.014) GPa. When the dispersion of TEG particles changes, the distribution of microhardness also changes. The microhardness indicatrix for a compacted Tg sample with an average particle size of 180 μm shows that the microhardness value at the center of the sample ranges from 0.065 to 0.15 GPa. As you approach the edge of the sample, the microhardness of the material decreases from 0.15 to 0.054 GPa. The study of TEG with an average particle size of 50 μm showed that the indentation in the center and in the middle region of the sample gives an isotropic distribution of microhardness values. The microhardness values coincide in the central and middle regions of the sample and correspond to ≈ 0.1 GPa. The proposed method of research and analysis of microhardness on the surface of compacted specimens of TEG gives an opportunity not only to characterize the micromechanical properties of the investigated material but also to optimize the technological regimes for obtaining samples.

Key Words: micromechanical properties, graphite, microhardness, thermo-expanded graphite.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

В сучасному матеріалознавстві активно і всебічно вивчаються вуглецеві матеріали з нанорозмірною структурою. Одним з перспективних представників нановуглецевих матеріалів є термічно розширений графіт (ТРГ). Цей матеріал зберігає ряд фізико-хімічних властивостей графіту і завдяки розгалуженій наноструктурній морфології частинок проявляє гарну здатність до компактування при пресуванні [1]. Це дозволяє використовувати ТРГ не лише для виготовлення високоефективних ущільнювачів, вузлів тертя, вогнезахисних покриттів, ізоляційних матеріалів тощо, а й у якості сировини для отримання інших нанорозмірних форм вуглецю, наповнювача нанокомпозиційних матеріалів, адсорбенту органічних сполук, альтернативного прекурсор для отримання суперконденсаторів та ін. [2,3].

Сучасні стандартні методи механічних випробувань (на розтяг, стиснення, згин) не завжди допомагають повністю характеризувати механічні властивості нових матеріалів, що пов'язано з малим розміром зразків, а також їх недостатньою пластичністю при кімнатній температурі. Як правило, для визначення фізико-механічних властивостей крихких та малопластичних матеріалів широко використовуються різні методи індентування [4].

Використовуючи метод неперервного мікроіндентування в даній роботі було проаналізовано особливості впливу дисперсності та морфології частинок ТРГ на поверхневий розподіл мікротвердості компактованих зразків.

Зразки і методи вимірів

Вихідний порошок ТРГ отримували шляхом швидкого нагрівання окисленого графіту в печі циклонного типу. Насипна вага ТРГ складала $0,015 \text{ г/см}^3$, питома площа поверхні - $50 \text{ м}^2/\text{г}$.

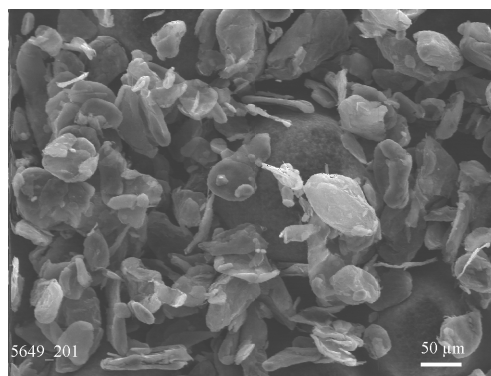
Механічне подрібнення частинок ТРГ проводили у спеціальному дезінтеграторі вертикального типу. Порошок подрібнювали впродовж 30 хв., після чого ТРГ сепарували на фракції 50-260 мкм. Із кожної порошкової фракції ТРГ були компактовані дископодібні зразки, діаметр яких складав 20 мм, товщина - 2 мм. Компактування порошку здійснювали в циліндричній прес-формі під тиском 30 МПа.

Морфологію та мікроструктуру порошків ТРГ вивчали за допомогою скануючого електронного мікроскопа. Мікротвердість досліджуваних матеріалів вимірювали при кімнатній температурі приладом Мікрон-Гамма, який дозволяє визначати мікромеханічні характеристики

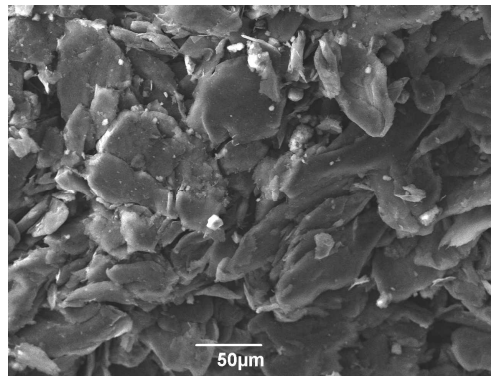
матеріалів методами неперервного вдавлювання індентора, сканування індентором (склерометрія), металографії та топографії. В роботі було проаналізовано і узагальнено отримані результати мікроіндентування компактованих зразків ТРГ при навантаженні від 20 г до 80 г за схемою «навантаження-розвантаження» індентора (без витримки між циклами). Кожний з уколів індентора визначався як середнє значення із 15 послідовних занурень індентора з кроком 50 мкм.

Результати та їхнє обговорення

Попередні експериментальні дослідження структури ТРГ [1] показали, що частинки вихідного порошку складаються із сукупності графітових пластин, товщина яких змінюється від



а



б

Рис. 1 СЕМ зображення порошку ТРГ з середнім розміром частинок 50 мкм (а) та компактованого порошку ТРГ з середнім розміром частинок перпендикулярно напрямку пресування зразків (б).

одиниць до сотень нанометрів, а відстань між ними - від 10 нм до 10 мкм. Форма частинок з середнім розміром поперечного перерізу $\sim 50 \text{ мкм}$ наближається до дископодібної (Рис.1а). При компактуванні за рахунок структурних особливостей ТРГ спостерігається тенденція до розшарування та орієнтації частинок перпендикулярно до напрямку пресування (Рис.1б).

Використовуючи метод неперервного наноіндентування з різним навантаженням на індентор, було оцінено мікротвердість компактованих зразків ТРГ різної дисперсності. Залежності середнього значення мікротвердості по методу Мейєрса від навантаження для вихідного та зразків диспергованого ТРГ наведено на рис. 2. Аналіз отриманих результатів показав, що із збільшенням середнього розміру поперечного перерізу частинок ТРГ від 50 до

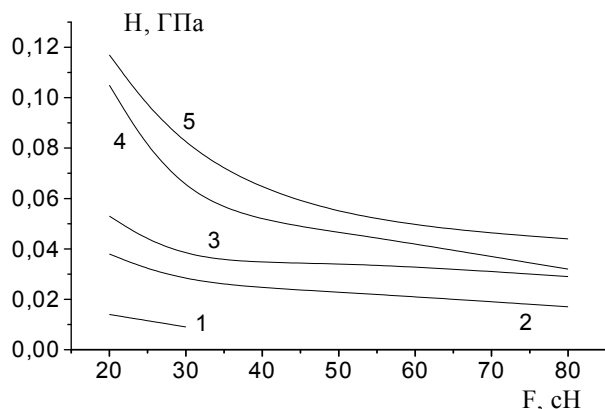


Рис. 2. Залежність мікротвердості компактованих зразків від навантаження на індентор: для вихідного ТРГ(1) та з середнім розміром поперечного перерізу частинок ТРГ 50 мкм(2), 80 мкм(3), 120 мкм(4), 180 мкм(5)

180 мкм залежності $H(F)$ зміщуються в область більших значень мікротвердості. Розраховані значення модуля Юнга досліджуваних зразків, показали, що максимальні значення модуля Юнга (1 ГПа) мають зразки компактованого ТРГ із середнім розміром частинок ТРГ = 180 мкм.

Було також проведено аналіз розподілу мікротвердості при сталому навантаженні на поверхні компактованих зразків ТРГ. Поверхню кожного зразка умовно розділяли на 3 рівні частини і проводили вимірювання в межах концентричних кіл з відповідними радіусами $1/4R$, $1/2R$ та $3/4R$, де R – радіус зразка. При переміщенні індентора за годинниковою стрілкою фіксували зміну кутової координати (азимуту) та визначали мікротвердість зразків. На рисунках 5, 6, 7 наведено індикатиси мікротвердості для зразків вихідного ТРГ та з середнім розміром частинок ТРГ 180 мкм та 50 мкм. Розподіл мікротвердості для вихідного ТРГ (рис. 5) показує, що при радіальному переміщенні від центра зразка мікротвердість матеріалу зменшується. Так в центральній частині дископодібного зразка значення мікротвердості лежать в межах від 0,04 до 0,025 ГПа. В наступній

концентричній області мікротвердість зменшується на 30 % і набуває значення (0,028...0,014) ГПа (лінія б на рис. 5). Близьче до

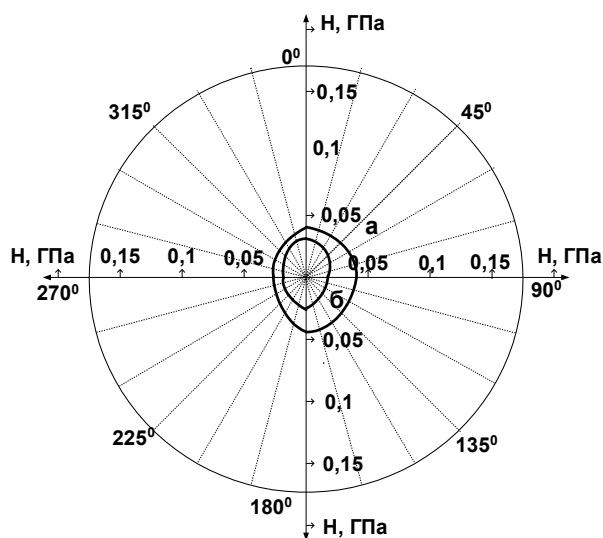


Рис. 5. Розподіл мікротвердості на поверхні компактованого зразка вихідного ТРГ. Контур «а» - вимірювання в центрі зразка, «б» - вимірювання по «середній лінії зразка»

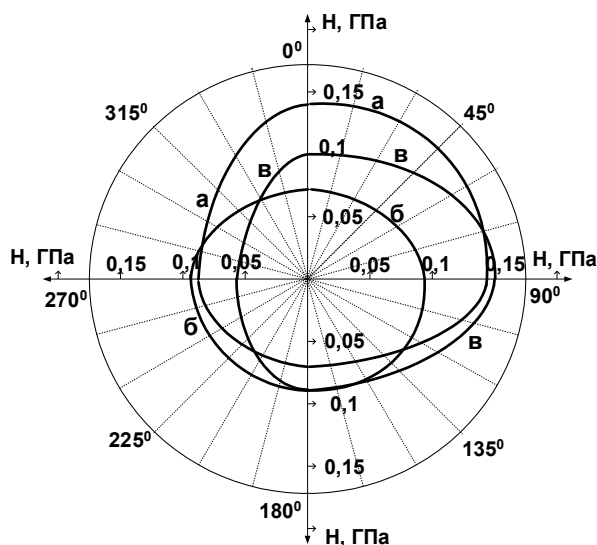


Рис. 6. Розподіл мікротвердості на поверхні компактованого зразка ТРГ з середнім розміром частинок 180 мкм. Контур «а» - вимірювання в центрі зразка, «б» - вимірювання по «середній лінії зразка», «в» - вимірювання по краю зразка

країв досліджуємий зразок дуже крихкий і при незначній механічній взаємодії індентора з поверхнею окремі її ділянки розшаровуються, що створює труднощі при визначенні глибини

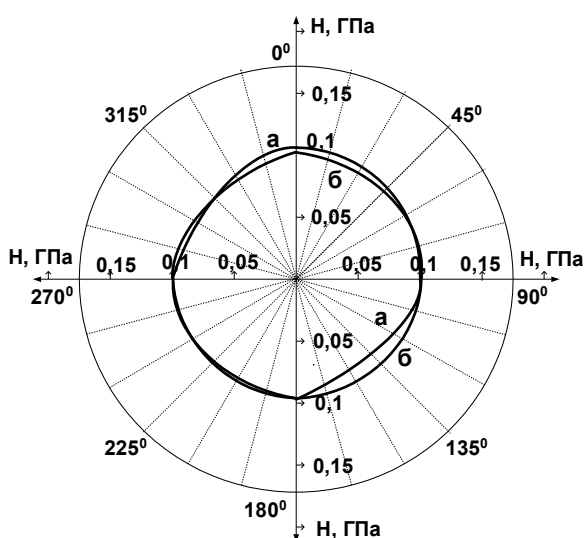


Рис. 7. Розподіл мікротвердості на поверхні компактованого зразка ТРГ з середнім розміром частинок 50 мкм. Контур «а» - вимірювання в центрі зразка, «б» - вимірювання по «середній лінії зразка».

занурення індентора та вимірюванні мікротвердості матеріалу. При зміні дисперсності частинок ТРГ, картина розподілу мікротвердості також змінюється. Індикатриса мікротвердості для компактованого зразка ТРГ з середнім

розміром частинок 180 мкм наведена на рис 6. В центрі зразка значення мікротвердості змінюється в межах від 0,065 до 0,15 ГПа. При цьому в деяких секторах величина мікротвердості майже в 6 разів перевищує відповідні значення мікротвердості отримані для вихідного ТРГ. З наближенням до краю зразка мікротвердість матеріалу зменшується від 0,15 до 0,054 ГПа.

При дослідженні компактованого зразка ТРГ з середнім розміром частинок 50 мкм, індентування в центрі та по «середній лінії зразка» дає ізотропний розподіл значень мікротвердості контур «а» та «б» (рис. 7). При цьому значення мікротвердості співпадають для центральної і середньої концентричних областей зразка і дорівнюють $\approx 0,1$ ГПа. Відсутність контуру «в» на рис. 7 обумовлена труднощами визначення мікротвердості зразка ближче до краю через крихкість матеріалу.

Таким чином запропонований підхід аналізу мікротвердості дає можливість не лише характеризувати мікромеханічні властивості досліджуваного матеріалу, а й оптимізувати технологічні режими одержання зразків. Так більші значення твердості в середині компактованих зразків ТРГ можуть забезпечувати кращу конструктивну міцність деталей в цілому.

Список використаних джерел

1. Семенцов Ю.І. Терморозширений графіт / І.Ю. Семенцов, С.Л. Рево, К.О. Іваненко // За редакцією акад. НАН України Картеля М.Т. – Київ: ТОВ «НВП Інтерсервіс». – 2016. – с. 241.
2. Avramenko T.G. Structure and sorption characteristics of nanoporous carbon materials / T.G. Avramenko, N.V. Khutoryanskaya, O.V. Mikhalyuk et al. // Surf Eng Appl Elect. – 2016. – vol. 52. – N. 4. – p. 313-318.
3. Revo S.L. Electrode Material for Supercapacitors Based on Nanostructured Carbon / S. L. Revo, I. M. Budzulyak, B. I. Rachiy, and M. M. Kuzishin // Surf Eng Appl Elect. – 2013. – vol. 49. – N. 1. – p. 68-72.
4. Miyoshi K. Surface characterization techniques: an overview / K. Miyoshi // NASA/TM – 2002-211497, Glenn Research Center of NASA. – 2002. – p.45.

References

1. SEMENTSOV YU.I., REVO S.L., IVANENKO K.O. (2016) *Thermally exfoliated graphite*. Kyiv: Interservis.
2. AVRAMENKO T.G., KHUTO-RYANSKAYA N.V., MIKHALYUK O.V. et al. (2016) Structure and sorption characteristics of nanoporous carbon materials. *Surf Eng Appl Elect.* 52(4). p. 313-318.
3. REVO S.L, BUDZULYAK I.M., RACHIY B.I., and KUZISHIN M.M. (2013) Electrode Material for Supercapacitors Based on Nanostructured Carbon. *Surf Eng Appl Elect.* 49(1). p. 68-72.
4. MIYOSHI K. (2002) Surface characterization techniques: an overview. *NASA/TM 2002-211497, Glenn Research Center of NASA.* p.45.

Надійшла до редколегії 20.09.17

УДК 519.9

Резнік В.С., к.ф.-м.н., н.с.

V.S. Reznik, Ph.D. (Phys.-Math.), Sci. researcher.

**Про один метод визначення
параметрів ядер спадковості нелінійно
в'язкопружних матеріалів за умов
складного напруженого стану**

**On some method of the heredity kernel
parameters determination of nonlinear viscoelastic
materials under the complex stress state**

Інститут механіки С.П. Тимошенка НАН
України, вул. Нестерова, 3, 03057, Київ;
e-mail: creep@inmech.kiev.ua

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics, 252680,
Nesterov str, 3, Kiev;
e-mail: creep@inmech.kiev.ua

Деформування в'язкопружних середовищ задається за допомогою визначальних рівнянь спадкового типу. Ці рівняння встановлюють залежність між компонентами тензора деформацій, тензора напружень і часовим інтегральним оператором і містять набір функцій і коефіцієнтів, що визначаються з базових експериментів. Розроблено метод визначення параметрів ядер спадковості нелінійно в'язкопружних матеріалів. В якості моделі в'язкопружності обрано визначальні рівняння спадкового типу в яких зв'язок між компонентами тензору деформацій і тензору напружень задається виходячи з гіпотези пропорційності девіаторів тензорів, а нелінійність в'язкопружних властивостей задається рівняннями типу моделі Работнова. Метод ґрунтується на співвідношеннях між ядрами повзучості, що отримані за умов складного напруженого стану і ядрами повзучості за умов одновимірного напруженого стану. Метод апробується експериментально на задачах розрахунку деформацій повзучості при комбінованому навантаженні тонкостінних трубчатих елементів з поліетилену високої щільності.

Ключові слова: нелінійна в'язкопружність, складний напружений стан, повздовжня повзучість, зсувна повзучість, об'ємна повзучість.

The deformation of viscoelastic medium given by means of constitutive equations of the hereditary type. These equations establish the relationship between the components of strain tensor, the components of stress tensor and the integral time operator, and contain the set of function and coefficients that are determined from the basic experiments. A method of the heredity kernel parameters determination of nonlinear viscoelastic materials is developed. As the visco-elastic model, the constitutive equations of the hereditary type are chosen in which the relationship between the components of the strain tensor and the stress tensor is given based on the hypothesis of the deviators proportionality. The nonlinearity of the viscoelastic properties is given by the equations of Ratotnov's type. The method is based on the relations between the creep kernels under complex stress state and the creep kernels under one-dimensional stress state. The method verified experimentally for the problems of determination of creep deformations under combined loading applied to the thin-walled tubular elements made of polyethylene of high density.

Key words: nonlinear visco-elasticity, complex stressed state, longitudinal creep, shearing creep, volume creep.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Особливості деформування в'язкопружних середовищ найчастіше задаються за допомогою рівнянь спадкового типу [1-2]. Ці рівняння встановлюють залежність між компонентами тензора деформацій, тензора напружень і

часовим інтегральним оператором, і містять ядра спадковості, набір функцій і коефіцієнтів, що мають бути визначені.

Однією з гіпотез, що використана при побудові визначальних рівнянь за умов складного напруженого стану є гіпотеза

пропорційності девіаторів тензорів. В рамках цієї гіпотези в роботі [3] побудовано систему визначальних рівнянь для нелінійних в'язкопружних середовищ. В роботі [4] ядра спадковості за умов складного напруженого стану визначаються за ядрами повздовжньої і поперечної повзучості.

В даній роботі, в рамках гіпотези пропорційності девіаторів тензорів, ідентифікуються ядра спадковості за умов складного напруженого стану через ядра повздовжньої і зсувної повзучості.

1. Постановка задачі

В роботі розглядається деформування ізотропних нелінійно-в'язкопружних середовищ зі стабільними механічними властивостями за умов складного напруженого стану із заданою програмою навантаження, так що

$$\sigma_{ij}(\tau), \tau \in (0, t), \quad (1)$$

де σ_{ij} – компоненти тензора напружень; t – час спостереження; τ – час, що передуює моменту спостереження. Процес навантаження (1) вважаємо простим, так що виконуються співвідношення

$$\sigma_{11} = \mu(t)\bar{\sigma}_{11}, \dots, \tau_{12} = \mu(t)\bar{\sigma}_{12}, \dots$$

Визначальні рівняння що задають залежність між компонентами тензора деформацій $\varepsilon_{ij}(t)$ і компонентами тензора напружень $\sigma_{ij}(t)$ при повзучості запишемо у вигляді [3]

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_v(t) = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i(\sigma_i(t); t)}{\sigma_i(t)} (\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij}\sigma_0(t)), \\ \varphi_i(\varepsilon_i(t)) = \sigma_i(t) + \lambda_i \int_0^t K_i(t-\tau)\sigma_i(\tau)d\tau; \\ \varphi_v(\varepsilon_v(t)) = \sigma_0(t) + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau)\sigma_0(\tau)d\tau, \end{cases} \quad (2)$$

де $\varepsilon_v(\cdot)$ і $\varepsilon_i(\cdot)$ – об'ємна деформація і інтенсивність тензора деформацій; $\sigma_0(t)$ і $\sigma_i(t)$ – перший інваріант і інтенсивність тензора напружень, δ_{ij} – дельта-функція Кронекера, $\varphi_i(\cdot)$ і $\varphi_v(\cdot)$ – функції, що задають нелінійність скалярних властивостей; $K_i(\cdot)$, $K_v(\cdot)$, λ_i , λ_v – реологічні параметри.

Нелінійність в'язкопружних властивостей в рівнянні (2) задається функціями $\varphi_i(\cdot)$ і $\varphi_v(\cdot)$, які задовольняють гіпотезі єдиної діаграми короткотривалого деформування (рис. 1) в координатах „інтенсивність напружень σ_i – інтенсивність деформацій ε_i ” і „середнє напруження σ_0 – об'ємна деформація ε_v ”.

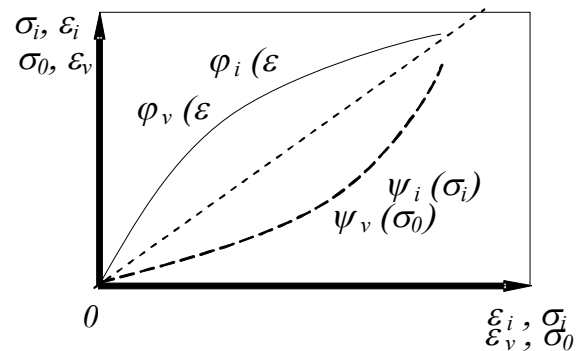


Рис. 1 – Графічне представлення функцій, що задають нелінійність в'язкопружних властивостей за умов складного напруженого стану

Вважається, що діаграми короткотривалого деформування інваріантні по відношенню до виду напруженого стану.

Функції, що вимірюються в експерименті та задані дискретно, апроксимуються згладжуваними кубічними сплайнами

$$y(x) = y_i + \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(2k_i + k_{i+1}) \right] (x - x_i) + \frac{k_i}{2} (x - x_i)^2 + \frac{k_{i+1} - k_i}{6h_i} (x - x_i)^3; \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad h_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = \overline{1, L-1}, \quad (3)$$

де k_i – коефіцієнти сплайна, які визначаються з умови неперервності першої похідної в точках x_i і деяких крайових умов на кінцях відрізка, що задають апроксимуючу функцію $y(x)$; x_i – табличні значення апроксимуючої функції.

Задача полягає у встановленні залежності між ядрами спадковості за умов складного напруженого стану визначаються та ядрами повздовжньої і зсувної повзучості та апробації отриманих залежностей між ядрами на задачах розрахунку деформацій повзучості та релаксації напружень.

2. Встановлення залежностей між ядрами за умов складного напруженого стану і одновимірного напруженого стану

Одновимірні визначальні рівняння, що задають нелінійні в'язкопружні властивості в

повздовжньому і зсувному напрямках, запишемо у вигляді

$$\varphi_{11}(\varepsilon_{11}(t)) = \sigma_{11}(t) + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(t-\tau) \sigma_{11}(\tau) d\tau; \quad (4)$$

$$\varphi_{12}(\varepsilon_{12}(t)) = \sigma_{12}(t) + \lambda_{12} \int_0^t K_{12}(t-\tau) \sigma_{12}(\tau) d\tau.$$

Застосовуючи до обернення функцій $\varphi_{11}(\varepsilon_{11}(t))$ і $\varphi_{12}(\varepsilon_{12}(t))$ в (9) і до перших рівнянь систем (3) і (4) отримаємо співвідношення

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}(t) = \psi_{11}(\sigma_{11}(t)) + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(t-\tau) \psi_{11}(\sigma_{11}(\tau)) d\tau; \\ \varepsilon_{12}(t) = \psi_{12}(\sigma_{12}(t)) + \lambda_{12} \int_0^t K_{12}(t-\tau) \psi_{12}(\sigma_{12}(\tau)) d\tau; \end{cases} \quad (5)$$

і відповідно співвідношення

$$\begin{cases} \varepsilon_i(t) = \psi_i(\sigma_i(t)) + \lambda_i \int_0^t K_i(t-\tau) \psi_i(\sigma_i(\tau)) d\tau; \\ \varepsilon_v(t) = \psi_v(\sigma_v(t)) + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) \psi_v(\sigma_v(\tau)) d\tau, \end{cases} \quad (6)$$

де $\sigma_{12}(\cdot)$ – дотичне напруження; $\varphi_{12}(\cdot)$ – функція, що задає нелінійність зсувної повзучості; $K_{12}(\cdot)$ – ядро зсувної повзучості; λ_{12} – реологічний параметр; $\psi_{12}(\sigma_{12})$, – функція, що задає нелінійність в'язкопружних властивостей в зсувному напрямі.

Із систем спільного розв'язку (5) і (6) і враховуючи, що за умов одновісного розтягу і чистого кручення

$$\sigma_i(t) = \sigma_{11}(t); \quad \varepsilon_i(t) = \frac{2}{3}(\varepsilon_{11}(t) - \varepsilon_{22}(t)); \quad \sigma_0(t) = \frac{1}{3}\sigma_{11}(t);$$

$$\varepsilon_v(t) = \frac{1}{3}(\varepsilon_{11}(t) + 2\varepsilon_{22}(t)); \quad \varepsilon_i = \frac{2\sqrt{3}}{3}\varepsilon_{12}; \quad \sigma_i = \sqrt{3}\sigma_{12},$$

отримаємо залежності між ядрами

інтенсивності деформацій повзучості $K_i(t)$ і ядрами повздовжньої $K_{11}(t)$ і зсувної $K_{21}(t)$ повзучості у вигляді

$$\lambda_i K_i(t) = \lambda_{12} K_{12}(t), \quad (7)$$

а також залежності між ядрами об'ємної повзучості $K_v(t)$ із ядрами повздовжньої $K_{11}(t)$ і зсувної $K_{12}(t)$ повзучості у вигляді

$$\lambda_v K_v(t) = \frac{3\lambda_{11} K_{11}(t) \psi_{11}(\sigma_{11}(t)) - 2\sqrt{3}\lambda_{12} K_{12}(t) \psi_{12}\left(\frac{\sigma_{11}(t)}{\sqrt{3}}\right)}{3\psi_{11}(\sigma_{11}(t)) - 2\sqrt{3}\psi_{12}\left(\frac{\sigma_{11}(t)}{\sqrt{3}}\right)} \quad (8)$$

звідки випливає, що ядро інтенсивності деформацій повзучості $K_i(t)$ співпадає з ядром зсувної повзучості $K_{12}(t)$.

3. Розрахунок деформацій повзучості за умов складного напруженого стану

В роботі в якості ядра спадковості обрано дробово-експоненційне ядро

$$K(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha)]}; \quad (9)$$

де α і β – параметри ядер $(-1 < \alpha < 0; \beta > 0)$; $\Gamma[\cdot]$ – гамма-функція Ейлера.

Для компонент тензора деформацій повзучості $\varepsilon_{ij}(t)$ із системи рівнянь (2) з врахуванням (9) отримаємо рівняння

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{3}{2} \frac{1}{\sigma_i(t)} \psi_i \left[\sigma_i(t) + \lambda_i \int_0^t \frac{(-\beta_i)^n (t-\tau)^{(1+\alpha_i)n}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha_i)]} \sigma_i(\tau) d\tau \right] \quad (10)$$

$$\left[\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij} \sigma_0(t) \right] + \frac{1}{3} \delta_{ij} \psi_v \left[\sigma_0(t) + \lambda_v \int_0^t \frac{(-\beta_v)^n (t-\tau)^{(1+\alpha_v)n}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha_v)]} \sigma_0(\tau) d\tau \right],$$

Розраховуються деформації повздовжньої, поперечної і зсувної повзучості тонкостінних трубчатих елементів із поліетилену ПЕВП за умов складного напруженого стану при постійних значеннях компонент тензора напружень. Для деформацій повздовжньої повзучості $\varepsilon_{11}(t)$ при $\sigma_{11} = const$ і $\tau_{21} = const$ із (15) отримаємо рівняння

$$\varepsilon_{11}(t) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2}} \sum_{k=0}^3 g_{k,j} \left\{ \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2} \left[1 + \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_i)]} \right] \right\}^k +$$

$$+ \frac{1}{3} \delta_{ij} \sum_{k=0}^3 m_{k,j} \left\{ \frac{1}{3} \sigma_{11} \left[1 + \lambda_v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_v)^n t^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_v)]} \right] \right\}^k, \quad (11)$$

а для деформацій зсувної повзучості $\varepsilon_{12}(t)$ – рівняння

$$\varepsilon_{12}(t) = \frac{3}{2} \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2}} \sum_{k=0}^3 g_{k,j} \times$$

$$\times \left\{ \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2} \left[1 + \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_i)]} \right] \right\}^k.$$

Параметри ядер спадковості, знайдені за викладеною вище методикою та методикою,

викладеною в роботі 4 наведені в таблиці 1 для поліетилену ПЕВП/

Таблиця 1
Значення параметрів ядер поліетилену ПЕВП

$\alpha_{11}=-0,168$	$\beta_{11}=5,404$	$\lambda_{11}=4,572$
$\alpha_{12}=-0,206$	$\beta_{12}=4,675$	$\lambda_{12}=3,322$
$\alpha_i=-0,206$	$\beta_i=4,675$	$\lambda_i=3,322$
$\alpha_v=-0,209$	$\beta_v=3,927$	$\lambda_v=48,444$

Результати розрахунків деформацій повздовжньої $\varepsilon_{11}(t)$ повзучості згідно (11), з використанням параметрів ядер з табл.1 (штрих-пунктирні лінії) співставленні на рис. 2 для поліетилену ПЕВП з експериментальними даними, за умов одночасної дії розтягу з крученням

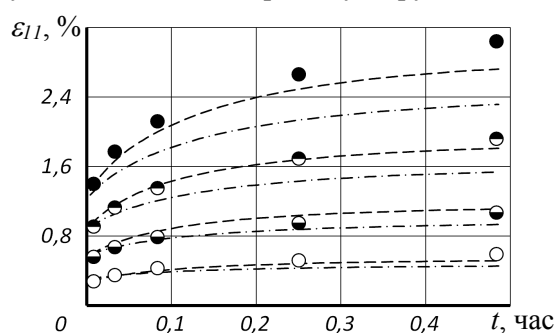


Рис.2 Результати розрахунків деформацій повздовжньої повзучості.

при напруженнях $\sigma_{11} = 1,77$, $\tau_{21} = 0,83$ (○); $\sigma_{11} = 3,54$, $\tau_{21} = 1,66$ (●); $\sigma_{11} = 5,31$, $\tau_{21} = 2,49$ (●); $\sigma_{11} = 7,08$, $\tau_{21} = 3,32$ (●) МПа. Штриховими лініями

нанесено розрахунки виконані в роботі (4). Результати розрахунків деформацій зсувної $\varepsilon_{12}(t)$ повзучості за рівняннями (12), з використанням параметрів ядер з таблиці 1 (штрих-пунктирні лінії) співставленні на рис. 3 для поліетилену ПЕВП з експериментальними даними, за умов одночасної дії розтягу з крученням при напруженнях $\sigma_{11} = 1,77$, $\tau_{21} = 0,83$ (○); $\sigma_{11} = 3,54$, $\tau_{21} = 1,66$ (●); $\sigma_{11} = 5,31$, $\tau_{21} = 2,49$ (●); $\sigma_{11} = 7,08$, $\tau_{21} = 3,32$ (●) МПа.

Як видно з рисунків 2 і 3, за методикою, викладеною в статті [4] і за викладеною в даній статті методикою отримані практично однакові результати, але експеримент

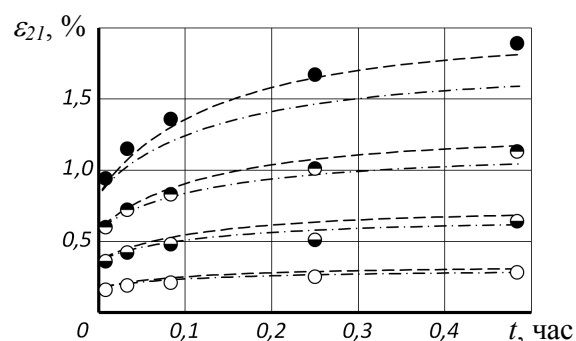


Рис.3 Результати розрахунків деформацій зсувної повзучості

на повздовжню повзучість більш поширений ніж на поперечну. В середньому, максимальна похибка розрахунків не перевищує 20%.

Список використаних джерел

1. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. – Москва: Наука, 1966. – 752 с.
2. Кристенсен Р.М. Введение в теорию вязкоупругости//Пер. с англ. под ред. Г.С.Шапира. – Москва: Мир, 1974. – 340 с.
3. Голуб В. П., Кобзарь Ю. М., Рагулина В. С. К задаче определения параметров ядер наследственности изотропных нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии // Теорет. и прикл. механика. – 2013. – №5(51). – С. 26-35.
4. Голуб В.П., Кобзарь Ю.М., Фернати П.В. К решению задач ползучести изотропных нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии // Теор и прикл. механика. - 2014. - Вып 8 (54). - С. 45-56

References

- 1.RABOTNOV, U. N. (1966) *Polzuchest' elementov konstrukcii. Moskva: Nauka.*
- 2.KRISTENSEN, R.M. (1974). *Vvedenie v teoriyu vyazkouprugosti. Moskva: Mir.*
- 3.GOLUB, V.P., KOBZAR, U.M. & RAGULINA, V.S. (2013) K zadache opredeleniya parametrov yader nasledstvennosri izotropnih nelineyno-vyazkouprugih materialov pri slozhnom napryagennom sostoyanii. *Teoret. i prikl. mehanika.* 5(51). pp. 26-35.
- 4.GOLUB, V.P., KOBZAR, U.M. & FERNATI, P.V. (2014) K resheniu zadach polzuchesti izotropnih nelineyno-vyazkouprugih materialov pri slozhnom napryagennom sostoyanii. *Teoret. i prikl. mehanika.* 5(51). pp. 26-35.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми "Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджен" (КПКВК 6541230).

Надійшла до редколегії 16.05.2019

УДК 539.3

Реут В. В., к.ф.-м.н., доц.,
Молоканов Ю. В., студент

Плоский напряженный стан для смуги, що ослаблена тріщиною

Одеський національний університет імені
І. І. Мечникова, 65082, м. Одеса, вул.
Дворянська, 2,
e-mail: reut@onu.edu.ua,
molokanov9@gmail.com

V. V. Reut, Cand. Sc. (Phys. & Math.), Assoc. Prof.,
Yu. V. Molokanov, student

Plane stress state of a strip weakened by a crack

Odesa I. I. Mechnikov National University, 65082,
Odesa, Dvoryan'ska str., 2,
e-mail: reut@onu.edu.ua,
molokanov9@gmail.com

Досліджено плоску задачу теорії пружності для нескінченної смуги зі скінченною поздовжньою тріщиною. Запропоновано метод, що може бути застосований для розрахунку напруженого стану та переміщень для нескінченної та напівнескінченної смуги із поздовжньою тріщиною та довільною конфігурацією крайових умов. Його перевага полягає у відсутності потреби використання апарату матричного диференційного числення. За допомогою узагальненої схеми метода інтегральних перетворень початкову задачу зведено до одновимірної крайової задачі. Застосуванням оберненого інтегрального перетворення Фур'є отриману одновимірну задачу зведено до розв'язування системи сингулярних інтегральних рівнянь на скінченному інтервалі. Розв'язок цієї системи будувався методом ортогональних многочленів за допомогою розкладення шуканих функцій у ряд за многочленами Чебишова другого роду. Побудовано графік залежності коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) від геометричних параметрів задачі. Показано, що зі збільшенням ширини смуги значення КІН наближається до значення КІН для нескінченної площини.

Ключові слова: плоска задача теорії пружності, нескінченна смуга, поздовжня тріщина, напружений стан, коефіцієнт інтенсивності напружень.

The plane stress elastic infinite strip problem of a finite longitudinal crack is investigated. The method that can be applied to calculate the stress state and the displacements for an infinite and semi-infinite strip with the longitudinal crack and arbitrary configuration of the boundary conditions is proposed. The main advantage of this method lies in the absence of necessity for use of the apparatus of the matrix differential calculus. Initial problem is reduced to the one-dimensional boundary value problem with the help of the generalized scheme of the integral transform method. By using the inverse integral Fourier transform, the one-dimensional problem is reduced to solving of the system of singular integral equations on a finite interval. The solution of this system was constructed with the help of the method of orthogonal polynomials by means of the second kind Chebyshev polynomials series expansion of the unknown functions. A graph of dependence of the stress intensity factor (SIF) on the geometric parameters of the problem is plotted. It is shown that the SIF for the case of the said strip tends to the SIF for the case of an infinite plane as the width of the strip approaches infinity.

Key Words: plane elastic problem, infinite strip, longitudinal crack, stress state, stress intensity factor.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Розв'язання задач теорії пружності для нескінчених смуг із поздовжніми тріщинами має велике значення для практичних застосувань та розробки теоретичних методів. Дефекти типу тріщин часто трапляються в різноманітних

інженерних конструкціях (компонентах машин, підвалів будівель, обшивці суден і автомобілів). Такі дефекти помітно знижують міцність конструкцій під час експлуатації та в деяких випадках можуть призвести до повного їх руйнування, тому важливою є розробка методів, за допомогою яких було б можливо розрахувати

коефіцієнти інтенсивності напружень в околі тріщини та з'ясувати вплив їх розташування на можливе руйнування тіл.

Для побудови розв'язків задач пружності використовуються два підходи: аналітичні методи та чисельні методи. Чисельні методи можуть бути застосовані до задач теорії пружності, але у випадку наявності особливих точок такі методи не можуть забезпечити точних розрахунків. Цим обумовлюється необхідність розробки аналітичних методів розв'язання задач теорії пружності.

Так, у праці Саврука М. П. та ін. [1] було розроблено метод сингулярних інтегральних рівнянь для розв'язання двовимірних задач теорії пружності із тріщинами; Слепяна Л. І. [2] — досліджено статичні, повільно зростаючі та динамічні тріщини у твердих тілах і критерій росту тріщини; Саврука М. П. [3] — розглянуто методи розв'язання двовимірних крайових задач математичної теорії тріщин для ізотропних тіл, досліджено задачі для напівплощин та смуг із тріщинами; Михаськова В. та ін. [4] — досліджено тривимірну пружно-динамічну взаємодію між круглою тріщиною і тонким проміжним шаром, що з'єднує два пружних півпростори, за допомогою модифікованого методу крайових інтегральних рівнянь; Устинова К. Б. [5] — зведено задачу про напівнескінчену тріщину, паралельну межі напівплощини, до матричної задачі Рімана за допомогою двостороннього перетворення

Лапласа; Антіпова Ю. А. та ін. [6] — розглянуто плоску деформівну задачу пружної напівплощини із тріщиною, що проходить вздовж межі двох ідеально зчеплених окремих чвертьплощин, і послідовно зведено змішану крайову задачу до системи двох функціональних рівнянь типу Вінера — Гопфа. У роботах [7], [8] було запропоновано новий підхід із застосуванням матричних диференціальних обчислень і матричного апарату Гріна, що дозволяє врахувати фіксовані особливості в задачі для пружної напівнескінченної смуги із поперечною тріщиною при побудові її рішень.

Запропонований у цій роботі метод може бути застосований для розрахунку напруженого стану та переміщень для нескінченної та напівнескінченної смуги зі скінченною поздовжньою тріщиною та довільною конфігурацією крайових умов. Його перевага в порівнянні із розглянутими вище методами [7], [8] полягає у відсутності потреби використання апарату матричного диференціального числення. При цьому для забезпечення єдиності розв'язку накладаються додаткові обмеження на асимптотику функцій-розв'язків, які полягають у необхідності спадання шуканих функцій на нескінченності.

Показано, що розв'язок плоскої задачі для смуги у випадку фінітного (за y) навантаження у класі функцій-розв'язків можна звести до системи рівнянь (1)

$$\begin{cases} \Delta^2 \sigma_x = -[\Delta X' + (1+\nu)X'^{\square}] + [\Delta Y^{\square} - (1+\nu)Y'^{\square}], & -a < x < b, \quad -\infty < y < \infty, \\ \tau_{xy}^{\square} = -\sigma'_x - X, & \sigma_y^{\square} = \sigma''_x + X' - Y^{\square}, \\ Ev^{\square} = [\Delta \sigma_x - (1+\nu)\sigma_x^{\square}] + X' - Y^{\square}, \\ Eu^{\square} = -[\Delta \sigma'_x + (1+\nu)\sigma_x'^{\square}] - [\Delta X + (1+\nu)X^{\square}] - \nu X + Y'^{\square}. \end{cases} \quad (1)$$

Штрихом в (1) позначено похідну за змінною x , крапкою — похідну за змінною y ; u , v — переміщення; σ_x , σ_y , τ_{xy} — напруження. Це дозволяє засотувати інтегральне перетворення за змінною y .

Постановка задачі

Розглянемо плоску задачу теорії пружності для нескінченної смуги $\{-a < x < b, |y| < \infty\}$, обидві межі якої знаходяться у стані гладкого контакту. Усередині смуги вздовж відрізка $\{x=0, |y| < 1\}$ розташована тріщина, на береги якої діє

нормальне навантаження інтенсивності $p(y)$ та дотичне навантаження інтенсивності $t(y)$. Об'ємні сили відсутні. Припускається, що контакт берегів тріщини відсутній.

З математичної точки зору задача зводиться до розв'язування крайової задачі виду

$$\begin{cases} \Delta^2 \sigma_x(x, y) = 0, & -a < x < b, \quad -\infty < y < \infty, \\ x = -a: & \sigma'_x = 0, \quad \sigma''_x = 0, \\ x = b: & \sigma'_x = 0, \quad \sigma''_x = 0, \\ x = \pm 0, |y| < 1: & \sigma_x = p(y), \quad \tau_{xy} = t(y). \end{cases} \quad (2)$$

Метод розв'язування та аналітичні результати

Дотримуючись узагальненої схеми метода інтегральних перетворень, замінімо останні умови в (2) на умови

$$\langle \sigma_x \rangle = \langle \tau_{xy} \rangle = 0, \langle u \rangle = \chi(y), \langle v \rangle = \mu(y),$$

де $\langle f(x) \rangle = f(-0) - f(+0)$.

Застосовуючи до системи (2) інтегральне перетворення Фур'є за змінною y та враховуючи співвідношення (1), перейдемо до одновимірної крайової задачі

$$\begin{cases} L^2 \sigma_\lambda(x) = 0, & -a < x < b, \quad x \neq c, \\ U_j[\sigma_\lambda] = 0, & j = \overline{0, 3}, \\ \langle \sigma_\lambda^{(k)} \rangle \Big|_{x=c} = \sigma_k, & k = \overline{0, 3}, \end{cases} \quad (3)$$

$$U_j[\sigma_\lambda] = 0, \quad j = \overline{0, 3}, \quad (4)$$

$$\langle \sigma_\lambda^{(k)} \rangle \Big|_{x=c} = \sigma_k, \quad k = \overline{0, 3}, \quad (5)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dy^2} \int_{-1}^1 \chi(\eta) \ln \frac{1}{|y-\eta|} d\eta + \int_{-1}^1 \chi(\eta) K_{11}(y, \eta) d\eta + \int_{-1}^1 \mu(\eta) K_{12}(y, \eta) d\eta = p(y), & |y| < 1, \\ \frac{d^2}{dy^2} \int_{-1}^1 \mu(\eta) \ln \frac{1}{|y-\eta|} d\eta + \int_{-1}^1 \chi(\eta) K_{21}(y, \eta) d\eta + \int_{-1}^1 \mu(\eta) K_{22}(y, \eta) d\eta = t(y), & |y| < 1, \end{cases} \quad (7)$$

де $K_{ij}(y, \eta)$ — нескінченно-диференційовані функції, а $\chi(\eta)$ та $\mu(\eta)$ — відповідні стрибки нормальних та дотичних переміщень при переході через тріщину, причому

$$K_{11}(y, \eta) = \int_0^\infty \lambda^4 \hat{G}_\lambda(\pm 0, 0) \cos \lambda(y - \eta) d\lambda,$$

$$K_{12}(y, \eta) = \int_0^\infty \lambda^3 \hat{G}_\lambda^\square(\pm 0, 0) \sin \lambda(y - \eta) d\lambda,$$

$$K_{21}(y, \eta) = -\int_0^\infty \lambda^3 \hat{G}_\lambda'(\pm 0, 0) \sin \lambda(y - \eta) d\lambda,$$

$$K_{22}(y, \eta) = \int_0^\infty \lambda^2 \hat{G}_\lambda^{\square\square}(\pm 0, 0) \cos \lambda(y - \eta) d\lambda,$$

де функція $\hat{G}_\lambda(x, \xi)$ має вигляд (9) – (10).

Розв'язок системи (7) будувався методом ортогональних многочленів [9] за допомогою розкладення шуканих функцій $\chi(\eta)$, $\mu(\eta)$ у ряд за многочленами Чебишова другого роду:

де $U_0[\sigma_\lambda] = \sigma'_\lambda|_{x=-a}$, $U_1[\sigma_\lambda] = L\sigma'_\lambda|_{x=-a}$, $U_2[\sigma_\lambda] = L\sigma'_\lambda|_{x=b}$, $U_3[\sigma_\lambda] = L\sigma'_\lambda|_{x=b}$; $\sigma_0 = \sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \mu_\lambda$, $\sigma_3 = \chi_\lambda$. Тоді розв'язок крайової задачі (3) – (5) матиме вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_\lambda(x) = & -\sigma_3 G_\lambda(x, c) + \sigma_2 G_\lambda^\square(x, c) - \\ & -\sigma_1 [G_\lambda^{\square\square}(x, c) - 2\lambda^2 G_\lambda(x, c)] + \\ & + \sigma_0 [G_\lambda^{\square\square\square}(x, c) - 2\lambda^2 G_\lambda^\square(x, c)] = \\ & = E i \lambda^3 \mu_\lambda G_{|\lambda|}^\square(x, 0) + E \lambda^4 \chi_\lambda G_{|\lambda|}(x, 0), \end{aligned} \quad (6)$$

де $G_\lambda(x, \xi)$ — функція Гріна крайової задачі (3) – (4).

Застосування до (6) оберненого інтегрального перетворення Фур'є дозволяє звести проблему до розв'язування системи сингулярних інтегральних рівнянь на скінченному інтервалі виду (7)

$$\begin{aligned} \chi(\eta) = & \sqrt{1-\eta^2} \sum_{k=0}^\infty \chi_k P_k^{1/2/2}(\eta), \\ \mu(\eta) = & \sqrt{1-\eta^2} \sum_{k=0}^\infty \mu_k P_k^{1/2/2}(\eta). \end{aligned}$$

В результаті отримана нескінченна система лінійних алгебраїчних многочленів типу Пуанкаре — Коха коефіцієнтів розкладення

$$\begin{cases} \chi_n + \sum_{k=0}^\infty [\chi_k A_{nk}^{(1,1)} + \mu_k A_{nk}^{(1,2)}] = B_n^{(1)}, & n = \overline{0, \infty}, \\ \mu_n + \sum_{k=0}^\infty [\chi_k A_{nk}^{(2,1)} + \mu_k A_{nk}^{(2,2)}] = B_n^{(2)}, \end{cases} \quad (8)$$

де $B_0^{(1)} = 1$, $B_0^{(2)} = 0$, $B_n^{(1)}, B_n^{(2)} = 0, n = \overline{1, \infty}$, а коефіцієнти $A_{nk}^{(i,j)}$ мають вигляд (11).

$$\begin{aligned} \hat{G}_\lambda(x, \xi) = & \frac{1 + \lambda|x + \xi + 2a|}{4\lambda^3} e^{-\lambda|x + \xi + 2a|} + \\ & + \frac{1}{4\lambda} [C_0^{(2)} ch\lambda(x + a) + C_1^{(2)}(x + a) sh\lambda(x + a)] \cdot [(b - \xi) e^{-\lambda|b - \xi|} + (b + \xi + 2a) e^{-\lambda|b + \xi + 2a|}] + \\ & + \frac{1}{4} [C_0^{(3)} ch\lambda(x + a) + C_1^{(3)}(x + a) sh\lambda(x + a)] \cdot \{ [\lambda(b - \xi) - 2] e^{-\lambda|b - \xi|} + [\lambda(b + \xi + 2a) - 2] e^{-\lambda|b + \xi + 2a|} \}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} C_0^{(2)} &= \frac{3\lambda^2 \operatorname{sh} \lambda (a+b) + \lambda^3 (a+b) \operatorname{ch} \lambda (a+b)}{2\lambda^3 \operatorname{sh}^2 \lambda (a+b)}, \\ C_1^{(2)} &= -\frac{1}{2\operatorname{sh} \lambda (a+b)}, \\ C_0^{(3)} &= -\frac{\operatorname{sh} \lambda (a+b) + \lambda (a+b) \operatorname{ch} \lambda (a+b)}{2\lambda^3 \operatorname{sh}^2 \lambda (a+b)}, \\ C_1^{(3)} &= \frac{1}{2\lambda^2 \operatorname{sh} \lambda (a+b)}. \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} A_{nk}^{(1,1)} &= \frac{4E}{n!k!} \cdot \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) \cdot \Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right) \cdot \cos\left[\frac{\pi}{2}(k-n)\right] \cdot \int_0^\infty \lambda^2 \hat{G}_\lambda(\pm 0, 0) \cdot J_{n+1}(\lambda) \cdot J_{k+1}(\lambda) d\lambda, \\ A_{nk}^{(1,2)} &= \frac{4E}{n!k!} \cdot \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) \cdot \Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right) \cdot \sin\left[\frac{\pi}{2}(k-n)\right] \cdot \int_0^\infty \lambda \hat{G}_\lambda^\square(\pm 0, 0) \cdot J_{n+1}(\lambda) \cdot J_{k+1}(\lambda) d\lambda, \\ A_{nk}^{(2,1)} &= -\frac{4E}{n!k!} \cdot \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) \cdot \Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right) \cdot \sin\left[\frac{\pi}{2}(k-n)\right] \cdot \int_0^\infty \lambda \hat{G}_\lambda'(\pm 0, 0) \cdot J_{n+1}(\lambda) \cdot J_{k+1}(\lambda) d\lambda, \\ A_{nk}^{(2,2)} &= \frac{4E}{n!k!} \cdot \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) \cdot \Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right) \cdot \cos\left[\frac{\pi}{2}(k-n)\right] \cdot \int_0^\infty \lambda \hat{G}_\lambda^{\square\prime}(\pm 0, 0) \cdot J_{n+1}(\lambda) \cdot J_{k+1}(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (10)$$

Чисельні результати

Застосуванням методу редукції до (8) було отримано розв'язок системи та розраховано значення коефіцієнта інтенсивності нормальних напружень (КІН) для різних геометричних параметрів задачі.

На графіку (рис. 1) показано залежність КІН K від величини параметра b для випадку, коли тріщина знаходиться на однаковій відстані від обох меж смуги ($a = b$). З нього випливає, що зі збільшенням параметра b (зростанням ширини смуги) значення КІН наближається до значення КІН для нескінченної площини

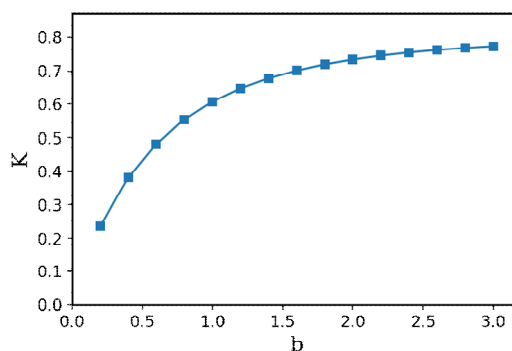


Рис. 1 Залежність КІН від ширини смуги.

Список використаних джерел

1. Саврук М.П. Численный анализ в плоских задачах теории трещин. / М.П. Саврук, П.Н. Осив, И.В. Прокопчук. – Киев: Наукова думка, 1989. – 248 с.
2. Слепян Л.И. Механика трещин. / Л.И. Слепян. – Ленинград: Судостроение, 1990. – 296 с.
3. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. / М.П. Саврук. – Киев: Наукова думка, 1981. – 324 с.
4. Mykhas'kiv V. 3-D dynamic interaction between a penny-shaped crack and a thin interlayer joining two elastic half-spaces. / V. Mykhas'kiv, V. Stankevych, I. Zhabadynskyi та ін. // International Journal of Fracture. – 2009. – № 159 (2). – С. 137-149.

References

1. SAVRUK, M. P., OSIV, P. N. and PROKOPCHUK, I. V. (1989) *Chislennyy analiz v ploskih zadachah teorii treschin*. Kiev: Naukova dumka.
2. SLEPYAN, L. I. (1990) *Mehanika treschin*. Leningrad: Sudostroenie.
3. SAVRUK, M. P. (1981) *Dvumernye zadachi uprugosti dlya tel s treschinami*. Kiev: Naukova dumka.
4. MYKHAS'KIV, V., STANKEVYCH, V., ZHBADYNSKYI, I. and ZHANG, C. (2009) 3-D dynamic interaction between a penny-shaped crack and a thin interlayer joining two elastic half-spaces. *International Journal of Fracture*. 159 (2). p.137-149.

Надійшла до редколегії 31.05.19

УДК 519.9

Романов О. В.¹, к.т.н., с.н.с.
Фернаті П.В.², к.т.н., с.н.с..

**До питання врахування впливу третього
інваріанту девіатора напружень на процес
довготривалого деформування нелінійно-
в'язкопружних матеріалів**

¹ Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН
України, 03057, м. Київ-57, вул. Нестерова, 3,
e-mail: ²creep@inmech.kiev.ua

Romanov A. V.¹, Ph. D.,
Fernati P. V.², Ph. D.,

**To the problem of influence of the third
invariant of stress deviator on the process of long-
term deformation of nonlinear viscoelastic
materials**

¹ National Academy of Sciences of Ukraine
S.P.Timoshenko Institute of Mechanics, 03057,
Kyiv-57, P. Nesterov str., 3,
e-mail: ²creep@inmech.kiev.ua

Розглядається питання врахування впливу виду напруженого стану на процес довготривалого деформування нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов простих та близьких до простих режимів навантаження, що здійснюється шляхом введення у визначальні рівняння функції з параметром кута виду напруженого стану. Ця функція визначається на основі аналізу базових експериментальних даних, що отримані з базових дослідів на одновісний розтяг та чисте скручення. Фізико-механічні властивості нелінійно-в'язкопружного середовища задаються залежностями між інваріантами тензорів деформації і напружень у формі модифікованої нелінійної моделі в'язкопружності Работнова. Ядро спадковості використовується у вигляді дробово-експоненційної функції. Отримані визначальні рівняння апробуються експериментально на задачах розрахунку нелінійних деформацій повзучості при комбінованому навантаженні тонкостінних трубчатих елементів з поліетилену високої щільності і поліетилену низького тиску. Співставлення розрахунків із експериментальними даними показало, що врахування виду напруженого стану якісно і кількісно покращує їх узгодження.

Ключові слова: нелінійно-в'язкопружний матеріал, розтяг з крученням, деформація повзучості, кут виду напруженого стану.

The problem on the influence of stressed state on the process of long-term deformation of nonlinear viscoelastic materials under the simple and quasi-simple modes of loading by introduction of the function with the parameter of Lode angle into the defining equations is considered. The mentioned function is determined by analysis of base experimental data obtained from the base experiments on axial tension and pure torsion. Physical and mechanical properties of nonlinear viscoelastic solids are defined by the correspondence between the invariants of deformation tensors and tensions according to the modified nonlinear Rabotnov's model for viscoelasticity. The heredity kernels are given by the fractional-exponential function. The constructed defining equations are verified experimentally for the problems of determination of nonlinear creep deformations under combined loading applied to the thin-walled tubular elements made of polyethylene of high density and low pressure polyethylene. As a result of juxtaposition of experimental data and calculations it is stated that allowing for the type of stressed state improves their agreement qualitatively and quantitatively.

Key words: nonlinear viscoelastic materials, tension with torsion, creep strains, Lode angle.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Елементи конструкцій енергетичного устаткування працюють, як правило, в умовах складного напруженого стану і піддаються дії комплексу термомеханічного навантаження. В цих умовах на процес повзучості впливає безліч факторів, як фізико-механічні властивості самого

матеріалу, температура експлуатації, режим навантаження, так і вид напруженого стану, який в свою чергу визначається тензором напруження.

Одним із шляхів побудови визначальних рівнянь для розрахунку деформацій повзучості в умовах складного напруженого стану за умов

простих і близьких до простих режимах навантаження є узагальнення на складний напружений стан одновимірних рівнянь повзучості. Узагальнення виконується виходячи з тензорно-лінійного зв'язку між тензором напруження та деформації у вигляді пропорційності їх девіаторів

$$e_{ij}(t) = \lambda(\cdot) s_{ij}(t), \quad (1)$$

де коефіцієнт пропорційності відображає як фізико-механічні властивості середовища, так і її реакцію на силову дію і в загальному випадку може залежати від трьох інваріантів тензора напружень, температури і т.д..

При розв'язку практичних задач часто застосовується підхід, якій базується на гіпотезі існування єдиної кривої деформування матеріалу що враховує вплив тільки другого інваріанту напружень. Слід, зазначити, що в разі короточасного активного навантаження, вона в багатьох випадках задовільно або навіть добре узгоджується з експериментом як для металевих [1,2], так і полімерних матеріалів [3,4,5] навіть інколи і для непротих видів навантаження, а у випадку довготривалого навантаження, в більшості дослідів для вказаних вище матеріалів вона не підтверджується [4,5].

1. Постановка задачі, об'єкт дослідження

В роботі процес повзучості розглядається при ізотермічному режимі навантаження, а також вважається, що на кінетику деформування сферова компонента суттєво не впливає [6]. З врахуванням цих допущень для коефіцієнта пропорційності в (1) маємо

$$\lambda(\cdot) = \lambda \{ J_2 [D_\sigma(t)], J_3 [D_\sigma(t)] \}, \quad (2)$$

де, передбачається врахування впливу як другого так і третього інваріантів девіатора напружень, якій визначає форму девіатора напружень і характеризується кутом виду напруженого стану в інтерпретації [7].

Вплив третього інваріанту девіатора напружень враховується за допомогою функції кута виду напруженого стану $\gamma(\psi_\sigma)$, в якій параметр кута виду напруженого стану ψ_σ розглядається у вигляді

$$\psi_\sigma = \frac{1}{3} \arccos \frac{27 J_3(D_\sigma)}{2 \sigma_i^3}. \quad (3)$$

В (2),(3) прийнято $J_2[D_\sigma(t)]$, $J_3[D_\sigma(t)]$ – другий і третій інваріанти девіатора напружень

відповідно; σ_i – інтенсивність нормальних напружень; ψ_σ – кут виду напруженого стану, графічна інтерпретація якого (рис. 1) показує орієнтацію октаедричного дотичного напруження

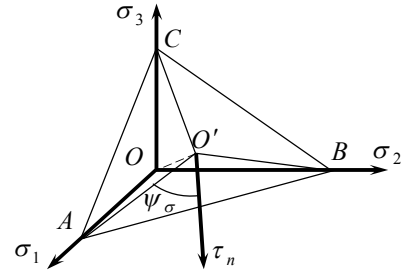


Рис. 1

τ_n в октаедричній площині ABC відносно проєкції AO' на цю площину осі максимального головного напруження σ_1 .

В цій інтерпретації одновісному розтягу відповідає $\psi_\sigma = 0$, одновісному стиску $\psi_\sigma = \pi/3$, а чистому скрученню $\psi_\sigma = \pi/6$.

Залежність між девіаторами деформацій і напружень (1) з врахуванням (2) приймає вигляд

$$e_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i [\sigma_i(t), t, \gamma(\psi_\sigma)]}{\sigma_i(t)} s_{ij}(t), \quad (4)$$

де $\varepsilon_i(\cdot)$ – інтенсивність деформацій.

Визначення залежностей функції $\gamma(\psi_\sigma)$ від ψ_σ здійснюється на основі базових дослідів на одновісний розтяг $-\bar{\varepsilon}_i(\sigma_i = \text{const}, t)$ та чисте скручення $-\tilde{\varepsilon}_i(\sigma_i = \text{const}, t)$ за формулою

$$\gamma(\psi_\sigma) = 1 - 6\psi_\sigma \{ [1 - \tilde{\varepsilon}_i(\sigma_i, t) / \bar{\varepsilon}_i(\sigma_i, t)] \} / \pi. \quad (5)$$

Система визначальних рівнянь з врахуванням $(\varepsilon_v \neq 0)$ і (4), (5) записується у вигляді

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t) &= \frac{3}{2} \frac{[\pi \pm 6(1 - \gamma_\varepsilon)\psi_\sigma] \bar{\varepsilon}_i(\sigma_i, t)}{\pi \sigma_i(t)} \times \\ &\times (\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij} \sigma_0(t)) + \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v(t); \\ \varphi_i(\bar{\varepsilon}_i(t)) &= \sigma_i(t) - \gamma_i \int_0^t K_i(t - \tau) \sigma_i(\tau) d\tau; \\ \varphi_v(\varepsilon_v(t)) &= \sigma_0(t) + \gamma_v \int_0^t K_v(t - \tau) \sigma_0(\tau) d\tau. \end{aligned} \right. \quad (6)$$

де $\varphi_v(\cdot)$, $\varphi_i(\cdot)$ – функції, які задають не

лінійність об'ємних і зсувних в'язкопружних властивостей; $\varepsilon_V(\cdot)$ – об'ємна деформація; $K_V(\cdot)$, $K_i(\cdot)$ – функції, які задають ядра об'ємної і зсувної повзучості, задаються дробово-експоненціальними функціями [9]; λ_V , λ_i – реологічні параметри.

Фізико-механічні властивості ізотропних нелінійно-в'язкопружних середовищ задаються залежностями між інваріантами деформацій і напружень в формі модифікованої нелінійної моделі в'язкопружності Работнова [8].

2. Експериментальна апробація.

Розв'язуються задачі розрахунку деформацій

подовжньої і зсувної повзучості тонкостінних трубчастих елементів з поліетилену високої щільності ПЕВП і поліетилену низького тиску в умовах одновісного розтягу, чистого скручення і комбінованого навантаження розтягом із скрученням з урахуванням впливу виду напруженого стану.

Експериментальні дані, які використані для визначення матеріальних констант і для апробації результатів розрахунків, запозичені з робіт [4,5].

Для розрахунку деформацій повзучості $\varepsilon_{11}(t)$ і $\varepsilon_{21}(t)$ за умов, коли $\sigma_{11} = \text{const}$ і $\tau_{12} = \text{const}$, з (6) отримуємо рівняння

$$\varepsilon_{11}(t) = \frac{3}{2} \frac{[\pi - 6(1 - \gamma_\varepsilon)\psi\sigma]}{\pi\sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2}} \sum_{k=0}^3 g_{k,j} \left\{ \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2} \left[1 + \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_i)^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1 + (1+n)(1+\alpha_i)]} \right] \right\}^k +$$

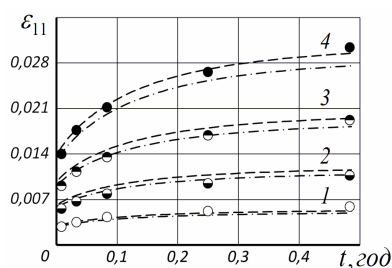
$$+ \frac{1}{3} \sum_{k=0}^3 f_{k,j} \left\{ \frac{1}{3} \sigma_{11} \left[1 + \lambda_V \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_V)^{(1+n)(1+\alpha_V)}}{\Gamma[1 + (1+n)(1+\alpha_V)]} \right] \right\}^k,$$

$$\varepsilon_{21}(t) = \frac{3}{2} \frac{[\pi - 6(1 - \gamma_\varepsilon)\psi\sigma]}{\pi\sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2}} \sum_{k=0}^3 g_{k,j} \left\{ \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2} \left[1 + \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_i)^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1 + (1+n)(1+\alpha_i)]} \right] \right\}^k \quad (8)$$

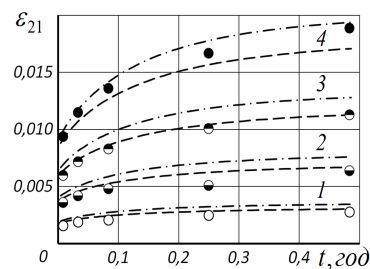
де $\sigma_i = \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2}$; $\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma_{11}$.

Результати розрахунків деформацій повзучості тонкостінних трубчастих елементів з поліетилену високої щільності ПЕВП і поліетилену низького тиску в умовах комбінованого навантаження одновісним розтягом і скрученням ($\sigma_{11} \neq 0$,

$\tau_{21} \neq 0$), які виконані за рівняннями (7) і (8), співставленні на рис. 2.1 з експериментальними даними. Роракунки за рівняннями (7) і (8) нанесені штрих пунктирними лініями, а штриховими лініями нанесені результати розрахунків за рівняннями (7) і (8), в яких вплив виду напруженого стану не враховувався.



а



б

Рис. 2.1. Деформації повзучості тонкостінних трубчастих елементів з поліетилену високої щільності ПЕВП за умов комбінованого навантаження (1- $\sigma_{11} = 1,77$, $\tau_{21} = 0,83$; 2- $\sigma_{11} = 3,54$, $\tau_{21} = 1,66$; 3- $\sigma_{11} = 5,31$, $\tau_{21} = 2,49$; 4- $\sigma_{11} = 7,08$, $\tau_{21} = 3,32$ МПа)

ВИСНОВОК

В статті запропоновано підхід до побудови визначальних рівнянь повзучості нелінійно-в'язкопружних середовищ за умов простих та

близьких до простих режимів навантаження, що враховують вплив виду напруженого стану. Вважається, що за цих умов навантаження деформування відбувається по траєкторії малої

кривизни, а девіатор деформацій пропорційний девіатору напружень. Врахування залежності деформування від виду напруженого стану у визначальних рівняннях, здійснюється за допомогою функції з параметром кута виду напруженого стану.

Співставлення результатів розрахунків деформацій повзучості тонкостінних трубчатих

елементів з поліетилену при комбінованому навантаженні розтягом із скрученням показали, що врахування виду напруженого стану якісно і кількісно покращує узгодження з результатами експерименту в зрівнянні розрахунками без його врахування, що дозволяє зробити висновок про обґрунтованість даного підходу до побудови визначальних рівнянь.

Список використаних джерел

1. Дэвис Е. Текучесть и разрушение стали со средним содержанием углерода при сложном напряженном состоянии / Теория пластичности. / М.: Изд. иностр. лит., 1948, -с. 364-374.
2. Жуков А. М. Сложное нагружение и теория пластичности изотропных металлов / Изв. АН СССР, Отд. техн. наук. – 1955, № 8.
3. Баев Л.В. Исследование ползучести органического стекла (полиметил-метакрилата) при совместном действии растяжения с кручением / Л.В. Баев, Н.И.Малинин // Механика полимеров. – 1966, №5. – С. 671-677.
4. Васков Б. С. Некоторые вопросы ползучести полиэтиленовых труб // Прочность материалов и конструкций. Труды ЛПИ. № 278. – Л: Машиностроение, 1967. – С. 13-19.
5. Креггерс А.Ф. Комплексное исследование полиэтилена высокой плотности в условиях нелинейной ползучести и релаксации напряжений / А.Ф Креггерс., М.Р. Килевич // Механика композитных материалов. – 1985, №2. – С. 195-201.
6. Наместников В.С. О ползучести при постоянных нагрузках в условиях сложного напряженного состояния // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. – 1957, №4. – С. 141-145.
7. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – Москва: Машиностроение, 1975. – 400 с.
8. Голуб В. П. Нелинейная ползучесть вязкоупругих органических волокон при растяжении / В. П. Голуб, Ю. М. Кобзарь, П. В Фернати // Прикл. механика.-2005.- Том 41, №7
9. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.

References

1. DEVIS E. (1948) Tekuchest i razrushenie stali so srednim soderzhaniem ugleroda pri slozhnom napryazhennom sostoyanii *Teoriya plastichnosti* Moskva: Izd. Inostr. Lit. p. 364-374.
2. ZHUKOV A. M. (1955) Slozhnoe nagruzhenie i teoriya plastichnosti izotropnyih metallov in *Izv. AN SSSR, Otd. tehn. nauk.* № 8.
3. BAEV L.V., MALININ N.I. (1966) Issledovanie polzuchesti organicheskogo stekla (polimetilmetakrilata) pri sovmestnom deystvii rastyazheniya s krucheniem *Mehanika polimerov.* № 5. – p. 671-677.
4. VASKOV B. S. (1967) Nekotoryie voprosy polzuchesti polietilenovyih trub. *Prochnost materialov i konstruktsiy. Trudy LPI.* № 278. – L: Mashinostroenie,. – p. 13-19.
5. KREGERS A.F., KILEVICH M.R. (1985) Kompleksnoe issledovanie polietilena vyisokoy plotnosti v usloviyah nelineynoy polzuchesti i relaksatsii napryazheniy. *Mehanika kompozitnyih materialov,* №2. – pp. 195-201.
6. NAMESTNIKOV V.S. (1957) O polzuchesti pri postoyannyih nagruzkah v usloviyah slozhnogo napryazhennogo sostoyaniya. *Izv. AN SSSR. Otd. tehn. Nauk* №4. – pp. 141-145.
7. MALININ N.N. (1975) *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti.* Moskva: Mashinostroenie.
8. GOLUB V. P., KOBZAR Yu. M., FERNATI P. V. (2005) Nelineynaya polzuchest vyazkouprugih organicheskikh volokon pri rastyazhenii *Prikl. mehanika.*-Tom 41, №7
9. RABOTNOV Yu.N. (1966) *Polzuchest elementov konstruktsiy.* Moskva: Nauka,

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

Надійшла до редколегії 17.05.19

УДК 532.5

Розумнюк В.І., к.ф.-м.н., с.н.с.

Про загальні розв'язки рівнянь Ейлера і Нав'є-Стокса

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т Глушкова, 4е;
e-mail:vyach1@ukr.net

V.I. Rozumniuk, PhD

About general solutions of Euler's and Navier- Stokes equations

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4e;
e-mail:vyach1@ukr.net

Побудова загального **розв'язку** рівняння Нав'є-Стокса є фундаментальною проблемою сучасної механіки рідини та математики через нелінійність, що виникає при переході до змінних Ейлера. Запропоновано нову процедуру переходу без появи в рівнянні нелінійних доданків, що дає можливість побудувати **загальний розв'язок** рівняння Нав'є-Стокса як поєднання загальних розв'язків рівнянь Лапласа та дифузії. Існування, унікальність та гладкість **розв'язків** рівнянь Нав'є-Стокса та Ейлера з'ясовуються при дослідженні **розв'язків** рівнянь Лапласа та дифузії, які добре вивчені.

Ключові слова: рівняння Ейлера і Нав'є-Стокса, загальні розв'язки.

Constructing a general solution to the Navier-Stokes equation is a fundamental problem of current fluid mechanics and mathematics due to nonlinearity occurring when moving to Euler's variables. A new transition procedure is proposed without appearing nonlinear terms in the equation, which makes it possible constructing a general solution to the Navier-Stokes equation as a combination of general solutions to Laplace's and diffusion equations. Existence, uniqueness, and smoothness of the solutions to Euler's and Navier-Stokes equations are found out with investigating solutions to the Laplace and diffusion equations well-studied.

Key Words: Euler's and Navier-Stokes equations, general solutions

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Математичний опис в'язкого стисливого континууму в русі, як відомо, є теоретичною основою дослідження рухомого середовища.

Залишаючи загальний аналіз для подальшого, розглядаємо особливий і надзвичайно важливий випадок нестисливого в'язкого континууму, тобто, в'язкої рідини.

Ми знаємо, що рівняння Нав'є-Стокса описує цей процес [1,2,3]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) + (\nabla \times \bar{u}) \times u = -\nabla H + \nu \Delta u \quad (1)$$

що разом із умовою нестисливості

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0 \quad (2)$$

визначає рух рідини [1,2,3]. Тут $\bar{u}$ – швидкість елементарного об'єму, що містить достатньо багато матеріальних частинок (точок), ν – кінематична в'язкість, ∇H – сума потенційних сил, прикладених до елементарного об'єму.

У проблемах механіки рідини

$$\nabla H = \nabla \Psi + \nabla \frac{p}{\rho}, \quad (3)$$

де $\nabla \Psi$ – деяка задана сила на одиницю маси (якщо така є), p – гідродинамічний тиск, ρ – густина.

Про нелінійність

Ліва частина (1), що містить нелінійні доданки, розглядається як визначальна перешкода для побудови загального рішення. Більше того, зараз ще не доведено існування (чи ні) такого рішення. Отже, необхідно шукати інший підхід для вирішення проблеми.

Звідси можна стверджувати, що лише більш глибокий аналіз фізичних аспектів рівняння здатний дати шанс вирішити цю проблему; тому рівняння (1) розглядається нижче, перш за все, як опис руху рідини, а не формальне диференціальне рівняння.

Щоб з'ясувати напрямок нашого дослідження, було проведено аналіз фізичного змісту підходу Ейлера, який показує неминучу появу нелінійності в (1), і будь-яка модернізація цієї процедури викликає значні сумніви.

Отже, наша кінцева мета – знайти альтернативу підходу Ейлера і описати рух рідини рівнянням без нелінійних доданків, і, виходячи з

цього, побудувати загальний розв'язок рівняння Нав'є-Стокса.

Стан проблеми

Існує два способи, що описують рідину в русі, і обидва розглядають просторовий рух деякої частини рідини, розміщеної у достатньо малому (елементарному) об'ємі. Перший, запозичений з класичної механіки, використовує змінні Лагранжа. За принципом Даламбера

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = -\nabla H + \nu \Delta \bar{u} \quad (4)$$

Ліва частина є повною похідною, тобто, елементарний об'єм рухається в просторі, як матеріальна точка, тоді як права частина – це сума всіх сил, прикладених до об'єму; і це є прийнятним, враховуючи подвійність у визначенні поняття елементарного об'єму.

Цей спосіб мало застосовується для руху рідини, оскільки переміщення відповідного об'єму має, як правило, скінченне значення протягом нескінченно малого часу, що порушує математичну коректність опису.

Ось чому в механіці рідини домінує інший спосіб, що використовує змінні Ейлера, де ми маємо справу з переміщенням відповідного елементарного об'єму в околі геометричної точки, довільно фіксованої. Це дозволяє описати його рух вектором швидкості $\bar{u}$ в цій точці, що в кінцевому підсумку призводить до появи додаткових членів у (4) і забезпечує цим математичну коректність опису у вигляді (1).

Для ідеальної рідини ($\nu=0$) і маємо рівняння Ейлера [1-3]

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) + (\nabla \times \bar{u}) \times \bar{u} = -\nabla H \quad (5)$$

Ще одна особливість такого підходу полягає в тому, що $\bar{u}$ характеризує швидкість об'єму з скінченними розмірами (хоча і малими). Це випливає з теореми Гельмгольца [1,2,3], де показано, що швидкість $\bar{u}$ кожної частинки в об'ємі є сумою поступальної швидкості $\bar{u}_p$ деякого полюса (в об'ємі) і миттєвої швидкості обертання досліджуваного об'єму, як твердого тіла, навколо полюса

$$\bar{u} = \bar{u}_p + \varpi \times \bar{r}_p, \quad (6)$$

де $\bar{r}_p$ і ϖ – радіус-вектор та миттєва швидкість обертання об'єму в локальній системі координат з початком у полюсі.

Як результат, в аналізі виникають дві додаткові невідомі змінні. Щоб відійти від цієї ситуації, до рівняння Ейлера застосовується оператор

ротора, що виключає змінну $\bar{r}_p$ і, в кінцевому підсумку, призводить до нелінійного рівняння Гельмгольца

$$\frac{\partial \bar{\Omega}_h}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{\Omega}_h - (\bar{\Omega}_h \cdot \nabla) \bar{u} = \nu \Delta \bar{u}, \quad (7)$$

де $\nabla \times \bar{u} = 2\varpi = \bar{\Omega}_h$ – вихровий вектор, який традиційно використовується як визначальна характеристика обертального руху у рідині.

Звичайно, така дія можлива, якщо осі локальної системи відліку постійно паралельні осям абсолютної (інерціальної) системи координат.

Таким чином, опис руху середовища вимагає вирішення нелінійних рівнянь (1) та (7), що ускладнює проблему.

Альтернативний підхід

Вважатимемо, що час – абсолютний; всі процеси вивчаються в евклідовому просторі і розглядаються в абсолютній (інерціальній) системі відліку.

Ми також припускаємо, що геометричний простір містить матеріальне середовище, що складається з однакових частинок, які перебувають у русі, і лінійні розміри цих частинок невеликі порівняно з елементарним об'ємом, який містить їх достатньо багато для усереднення, однак має при цьому достатньо невеликий розмір, щоб дослідити його рух як матеріальної точки.

Тимчасово будемо вважати, що тангенціальні напруження відсутні ($\nu = 0$); з точки зору механіки континууму це означає, що вивчається ідеальна нестислива рідина.

Майже завжди фундаментальні фізичні закони відображають рух єдиної матеріальної точки, і ми маємо справу зі змінними Лагранжа, де параметри (a, b, c) мають постійні значення. У той же час, якщо деяка геометрична точка зафіксована, параметри (a, b, c) є змінними стосовно часу, тому що кожна матеріальна точка, що надходить туди, має власні величини цих параметрів, і ми отримуємо ($t, a(t), b(t), c(t)$). При цьому просторові координати обраної точки x, y, z залишаються фіксованими і не залежать від часу. Іншими словами, ми досліджуємо поведінку поля швидкості відносно часу у фіксованій геометричній точці.

Це дозволяє визначити рух точки у формі

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\nabla \left(H + \frac{u^2}{2} \right). \quad (8)$$

Зауважимо, що у правій частині при цьому виникає додатковий доданок, який є кінетичною енергією елементарного об'єму у фіксованій геометричній точці на даний момент.

Тепер введемо до розгляду рухому систему відліку, початок якої співпадає з початком абсолютної системи, і припустимо, що вона обертається навколо початку з деякою миттєвою швидкістю $\bar{\Omega}$. У цьому випадку (індекс r вказує на цю рухому систему), як зазвичай,

$$\bar{u} = \bar{\Omega} \times \bar{r}_r + \bar{u}_r, \quad (9)$$

і ліва частина (8) набуває форму

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{r}_r) + \frac{\partial (\bar{\Omega} \times \bar{r}_r)}{\partial t} + \bar{\Omega} \times \bar{u}_r + \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t}, \quad (10)$$

де права частина (10) записана в рухомій системі відліку. Підставивши у (8) і використовуючи (9), отримаємо

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) + \bar{\Omega} \times \bar{u} = -\nabla H, \quad (11)$$

де

$$\frac{u^2}{2} = \frac{(\bar{\Omega} \times \bar{r}_r)^2}{2} + \frac{u_r^2}{2} \quad (12)$$

Зауважимо, що $\bar{\Omega} \times \bar{u}$ в (11) – це половина сили Коріоліса.

Важливо зазначити, що $\bar{\Omega} \times \bar{r}_r$ – це миттєва швидкість обертального руху об'єму, розташованого у нерухомій точці на даний момент, навколо початку рухомої системи відліку. Оскільки цей вектор повністю описує обертальний компонент руху, ми обираємо вектор $\bar{\Omega} \times \bar{r}_r$ як визначальну характеристику обертального руху замість $\bar{\Omega}$, як зазвичай.

Рівняння Ейлера

Повернувшись до теореми Гельмгольца (6), ми жорстко зв'язуємо локальну систему координат, що введена там, із елементарним об'ємом; очевидно, що вони будуть обертатися разом з миттєвою кутовою швидкістю $\bar{\Omega}$.

Користуючись можливістю вільного вибору $\bar{\Omega}$, ми записуємо умову синхронізації обох систем (локальної і рухомої)

$$\bar{\Omega} = \bar{\omega}. \quad (13)$$

Тоді (5) і (11) збігаються з точністю до несуттєвого коефіцієнта при силі Коріоліса, і отримуємо рівняння Ейлера

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) + \bar{\Omega} \times \bar{u} = -\nabla H. \quad (14)$$

Але слід зазначити той факт, що, формально співпадаючи, ці рівняння суттєво відрізняються

способом опису обертального руху елементарного об'єму.

Слід також підкреслити, що визначення вектора (9) як суми швидкості рухомої системи координат та відносної швидкості в ній є традиційною, хоча і умовною ситуацією для класичної механіки; тому ми можемо діяти в інший спосіб і вважати, що права сторона (9) – це просто деяка відносна швидкість. У такому випадку рухома система відліку знаходиться в спокої, і ми можемо вважати, що вона збігається з абсолютною системою; тоді сила Коріоліса $\bar{\Omega} \times \bar{u}$ дорівнює нулю, і (14) набирає форму

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \nabla \varphi, \quad (15)$$

де

$$\varphi = H + \frac{\bar{u}^2}{2}. \quad (16)$$

Підставляючи (9) у (15) і враховуючи незалежність обертального та поступального рухів, ми отримуємо для кожної складової швидкості (причому $r = r_r$)

$$\frac{\partial (\bar{\Omega} \times r)}{\partial t} = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t} = -\nabla \varphi. \quad (18)$$

З (17) випливає, що $\bar{\Omega} \times r$ має бути нулем або функцією просторових координат. Перший випадок ($\bar{\Omega} = 0$) свідчить про відсутність будь-якого обертального руху у рідині. В іншому випадку обертальний рух викликано зовнішніми факторами, не пов'язаними з рухом рідини, тобто, $\bar{\Omega}$ є заданою змінною.

Повертаючись до (18), слід врахувати, що $\bar{u}_r$ є потенційним вектором, тобто, $\bar{u}_r = \nabla \psi$, де ψ – потенціал швидкості. Використовуючи умову нестисливості (2), можна записати рівняння Лапласа

$$\Delta \psi = 0, \quad (19)$$

що визначає поступальний рух відповідного об'єму. З іншого боку, рівняння (18), враховуючи (16), має форму

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + \frac{(\bar{\Omega} \times r)^2}{2} = f(t), \quad (20)$$

де функція $f(t)$, або, зокрема, $f(t) = C = const$, визначається з відповідних граничних умов. Цей зв'язок називається інтегралом Коші – Лагранжа і для стаціонарних граничних умов він набуває форми добре відомої рівності Бернуллі

$$\Psi + \frac{p}{\rho} + \frac{u_r^2}{2} + \frac{(\bar{\Omega} \times r)^2}{2} = C. \quad (21)$$

Очевидно, що ці рівності дозволяють знаходити тиск у рідині, якщо швидкість течії відома. Слід, однак, зазначити, що тепер вони включають також внесок зовнішньої завихреності (якщо така є), тобто вони є узагальненням існуючих на даний момент рівностей і можуть використовуватися для всього потоку в цілому, а не вздовж вибраної лінії току.

Таким чином, рішення рівняння Ейлера (5) визначається шляхом розв'язання рівняння Лапласа (19) та застосування рівності (20) або (21). Це означає, що існування, унікальність та гладкість рішення рівняння Ейлера (5) визначаються загальним рішенням рівняння (19).

Рівняння Нав'є-Стокса

При аналізі руху в'язкої рідини ($\nu \neq 0$) рівняння Ейлера (14) трансформується у рівняння Нав'є – Стокса (1).

Як зазначено вище, у нашому підході сила Коріоліса дорівнює нулю; після використання відомої формули векторного аналізу $\Delta u = \nabla(\nabla \cdot u) - \nabla \times (\nabla \times u)$, умови нестисливості (2) і враховуючи рівність $u_r = \nabla \psi$, ми маємо

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = -\nabla \varphi, \quad (22)$$

$$\Delta(\bar{\Omega} \times r) - \frac{1}{\nu} \frac{\partial(\bar{\Omega} \times r)}{\partial t} = 0. \quad (23)$$

Звідси випливає, що рух в'язкої рідини завжди містить обертальний компонент, що залежить від часу; у такому випадку $\frac{(\bar{\Omega} \times r)^2}{2}$ не дорівнює нулю в (20) і (21).

Таким чином, загальний розв'язок рівняння Нав'є – Стокса (1) – це комбінація загальних розв'язків рівнянь (22), (23). Очевидно, що його загальний розв'язок буде існувати, якщо відповідні

рішення цих рівнянь існують; унікальність і гладкість рівняння (1) визначається їх відповідними властивостями.

Висновки

Розв'язання рівнянь Нав'є-Стокса та Ейлера є можливим після відмови від підходу Ейлера та модифікації традиційного фізичного опису досліджуваних процесів.

Запропонована процедура трансформує рівняння Нав'є-Стокса в рівняння Лапласа та дифузії; тобто, існування, унікальність та гладкість рішення рівняння Нав'є-Стокса, визначаються властивостями цих рівнянь. Виходячи з їх властивостей, можна відзначити, що в рівнянні Нав'є-Стокса (1) відсутні фізичні ефекти, які могли б бути відповідальними за породження вихорів у рухомих потоках рідини. Це означає, що ми маємо справу з формальним загальним рішенням диференціального рівняння (1), оскільки останнє буде описувати лише ламінарні течії. Зрозуміло, що ця ситуація має фізичну природу і, отже, потребує більш глибокого аналізу фізичної бази рівняння (1).

Запропонований шлях є пов'язаним з описом чисто механічного руху для в'язкого нестисливого середовища, а тому оцінка ефекту його стисливості є ще одним кроком у подальшій розробці розглянутого підходу.

З цієї ж причини ми не обговорюємо дисипативних ефектів, що відіграють важливу роль у рухомій в'язкій рідині, хоча така дискусія необхідна через опис обертального компонента в рухомій рідині нарівні з потенційним.

Зауважимо, що вищевикладені питання не є метою цієї публікації і будуть обговорюватися при публікації наступних частин нашого дослідження.

Список використаних джерел

1. Бэтчелор Дж.К. Введение в динамику жидкости / Дж. К. Бэтчелор. – Москва: Мир, 1973. – 758с.
2. Кочин Н.Е Теоретическая гидромеханика, т.1,2 / Н.Е. Кочин, И.А Кибель, Н.В Розе. – Москва: Физматгиз, 1963. – 583с., 727с.
3. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т.1,2 / Л.И. Седов : Москва, Физматгиз, 1970. – 492с., 568с.

References

1. BATCHELOR, G.K (1973) *Vvedenie v dinamiku gidkosti*. Moskva: Mir.
2. Kochin, N.E., Kibel, I.A. and ROZE, N.V. (1963) *Teoreticheskaya gidromekhanika*. v.1,2, Moskva: Fizmatgiz.
3. SEDOV, L.I. (1970) *Mekhanika splochnoi sredi*. v.1,2, Moskow: Fizmatgiz.

УДК 517.9

Самойленко В. Г.¹, д.ф.-м.н.н., проф.,
Самойленко Ю.І.², д.ф.-м.н.н., с.н.с.,
Вовк В.С.³, аспірант

Асимптотичний аналіз сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, пр-т
Глушкова 4е,

e-mail: valsamyul@gmail.com

² Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, пр-т
Глушкова 4е,

e-mail: yusam@univ.kiev.ua

³ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, пр-т
Глушкова 4е,

e-mail: vovkvitali@gmail.com

V. H. Samoilenko¹, Dr. Hab. in Phys. and Math.,
Yu. I. Samoilenko², Dr. Hab. in Phys. and Math.,
V. S. Vovk³, Ph.D. student

Asymptotic analysis of the singularly perturbed Korteweg-de Vries equation

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Glushkova str., 4e,

e-mail: valsamyul@gmail.com

² Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Glushkova str., 4e,

e-mail: yusam@univ.kiev.ua

³ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Glushkova str., 4e,

e-mail: vovkvitali@gmail.com

Для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами побудовано асимптотичні розв'язки солітонного типу.

Ключові слова: рівняння Кортевега-де Фріза, сингулярне збурення, асимптотичний розв'язок.

The paper deals with the singularly perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients. An algorithm for constructing asymptotic one-phase soliton-like solutions of this equation is described. The algorithm is based on the nonlinear WKB technique.

The constructed asymptotic soliton-like solutions contain a regular and singular part. The regular part of this solution is the background function and consists of terms, which are defined as solutions to the system of the first order partial differential equations. The singular part of the asymptotic solution characterizes the soliton properties of the asymptotic solution. These terms are defined as solutions to the system of the third order partial differential equations. Solutions of these equations are obtained in a special way. Firstly, solutions of these equations are considered on the so-called discontinuity curve, and then these solutions are prolonged into a neighborhood of this curve.

The influence of the form of the coefficients of the considered equation on the form of the equation for the discontinuity curve is analyzed. It is noted that for a wide class of such coefficients the equation for the discontinuity curve has solution that is determined for all values of the time variable. In these cases, the constructed asymptotic solutions are determined for all values of the independent variables. Thus, in the case of a zero background, the asymptotic solutions are certain deformations of classical soliton solutions.

Key Words: the Korteweg-de Vries equation, singular perturbation, asymptotic solution.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ. Рівняння Кортевега-де Фріза [1] є одним з фундаментальних рівнянь сучасної математичної фізики і описує різноманітні хвильові процеси в гідродинаміці, фізиці плазми, оптичних, біологічних і телекомунікаційних системах та інш.

Вивчення властивостей розв'язків цього рівняння призвело до створення нового напрямку в теорії рівнянь математичної фізики – методу оберненої задачі розсіювання [2], який успішно був застосований для знаходження точних розв'язків низки нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, зокрема,

нелінійного рівняння Шредінгера, рівняння *sin*-Гордон, модифікованого рівняння Кортевега-де Фріза, рівняння Кадомцева-Петвіашвілі та багатьох інших.

У даній статті розглядається рівняння Кортевега-де Фріза вигляду

$$\varepsilon^2 u_{xxx} = a(x, t, \varepsilon) u_t + b(x, t, \varepsilon) u u_x, \quad (1)$$

коефіцієнти якого записуються у вигляді асимптотичних рядів

$$a(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x, t) \varepsilon^k, \quad b(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x, t) \varepsilon^k,$$

де $a_k(x, t), b_k(x, t) \in C^\infty(R \times [0; T])$, $k \geq 0$, ε – малий параметр.

Основні позначення. Аналогічно [3 – 5] позначимо через $G_1 = G_1(R \times [0; T] \times R)$ лінійний простір таких нескінченно диференційовних функцій $f(x, t, \tau)$, $(x, t, \tau) \in R \times [0; T] \times R$, що для довільних невід’ємних цілих чисел n, p, q, r рівномірно щодо (x, t) на кожній компактній множині $K \subset R \times [0; T]$ виконуються умови:

1⁰. справджується співвідношення:

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \tau^n \frac{\partial^p}{\partial x^p} \frac{\partial^q}{\partial t^q} \frac{\partial^r}{\partial \tau^r} f(x, t, \tau) = 0;$$

2⁰. існує така нескінченно диференційовна функція $f^-(x, t)$, що

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \tau^n \frac{\partial^p}{\partial x^p} \frac{\partial^q}{\partial t^q} \frac{\partial^r}{\partial \tau^r} (f(x, t, \tau) - f^-(x, t)) = 0.$$

Нехай $G_1^0 = G_1^0(R \times [0; T] \times R) \subset G_1$ – простір функцій $f(x, t, \tau) \in G_1$, $(x, t, \tau) \in R \times [0; T] \times R$, для яких рівномірно щодо змінних (x, t) на кожному компакт $K \subset R \times [0; T]$ виконується умова:

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} f(x, t, \tau) = 0.$$

Означення. Функція $u = u(x, t, \varepsilon)$, де ε – малий параметр, називається однофазовою солітоноподібною, якщо ця функція для довільного цілого $N \geq 0$ зображується асимптотичним розкладом вигляду:

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j (u_j(x, t) + V_j(x, t, \tau)) + O(\varepsilon^{N+1}), \quad (2)$$

де $u_j(x, t)$ – нескінченно диференційовні;
 $V_0(x, t, \tau) \in G_1^0$, $V_j(x, t, \tau) \in G_1$, $j = \overline{1, N}$;

$\tau = \frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}$, $\varphi(t) \in C^\infty([0; T])$ – деяка скалярна дійсна функція.

Функція $x - \varphi(t)$ називається фазою однофазової солітоноподібної функції $u(x, t, \varepsilon)$.

Побудова асимптотичного розв’язку. Асимптотичний розклад для однофазового солітоноподібного розв’язку рівняння (1) шукається у вигляді (2). Функція

$$U_N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j u_j(x, t)$$

називається регулярною частиною асимптотики (2), а функція

$$V_N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j V_j(x, t, \tau), \quad \tau = \frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon},$$

– сингулярною частиною асимптотики (2).

При цьому, очевидно,

$$Y_N(x, t, \varepsilon) = U_N(x, t, \varepsilon) + V_N(x, t, \varepsilon).$$

Зауважимо, що регулярна частина асимптотичного розв’язку відіграє роль фонові функції, а сингулярна частина характеризує власне солітонні властивості шуканих наближених розв’язків. Члени регулярної частини $u_j(x, t)$, $j = \overline{0, N}$, асимптотики (2) визначається з системи диференціальних рівнянь вигляду

$$a_0(x, t) \frac{\partial u_0}{\partial t} + b_0(x, t) u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$a_0(x, t) \frac{\partial u_j}{\partial t} + b_0(x, t) \left(u_0 \frac{\partial u_j}{\partial x} + u_j \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) = f_j(x, t, u_0, u_1, \dots, u_{j-1}), \quad j = \overline{1, N} \quad (4)$$

де функції $f_j(x, t, u_0, u_1, \dots, u_{j-1})$ визначаються рекурентним чином.

Розв’язки рівнянь (3), (4) знаходяться за допомогою методу характеристик.

Члени сингулярної частини асимптотики (2) визначаються із системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau^3} + a_0(x, t) \frac{\partial V_0}{\partial \tau} \varphi'(t) - b_0(x, t) (V_0 + u_0) \frac{\partial V_0}{\partial \tau} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^3 V_j}{\partial \tau^3} + a_0(x, t) \frac{\partial V_j}{\partial \tau} \varphi'(t) -$$

$$-b_0(x, t) \left(u_0 \frac{\partial V_j}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \tau} (V_0 V_j) \right) = F_j(x, t, \tau), \quad (6)$$

де значення

$$F_j(x, t, \tau, u_0(x, t), \dots, u_j(x, t), V_0(x, t, \tau), \dots, V_{j-1}(x, t, \tau))$$

знаходяться рекурентно після визначення функцій $u_0(x, t), u_1(x, t), \dots, u_j(x, t), V_0(x, t, \tau), V_1(x, t, \tau), \dots, V_{j-1}(x, t, \tau), j = \overline{1, N}$.

Інтегрування рівнянь (5), (6) потрібно провести в просторах G_1^0, G_1 , відповідно. Побудова розв'язків цих рівнянь має певну специфіку, а саме: потрібно не лише знайти невідомі функції, а треба ще визначити функцію $\varphi = \varphi(t)$, яка задає криву розриву $x = \varphi(t)$.

Ця задача розв'язується наступним чином: спочатку ці рівняння розглядаються на апіорі відомій кривій розриву $\varphi = \varphi(t)$ і знаходяться розв'язки рівнянь (5), (6) на кривій розриву. Потім отримується звичайне диференціальне рівняння для функції $\varphi = \varphi(t)$, після чого будується продовження сингулярної частини асимптотики з кривої розриву $x = \varphi(t)$ в деякий окіл цієї кривої – область

$$\Omega_\mu(\Gamma) = \{(x, t) \in R \times [0, T] : |x - \varphi(t)| < \mu\}$$

таким чином, щоб члени сингулярної частини асимптотики побудованого розв'язку належали простору G_1 . Тут μ – деяка стала.

Підставивши розклад (2) в рівняння (1) та враховуючи рівняння для регулярної частини асимптотики (3), (4), знаходимо, що функції

$$v_j = v_j(t, \tau) = V_j(x, t, \tau) \Big|_{x=\varphi(t)}, \quad j = \overline{0, N},$$

задовольняють диференціальні рівняння вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 v_0}{\partial \tau^3} + a_0(\varphi, t) \frac{\partial v_0}{\partial \tau} \varphi'(t) - \\ - b_0(\varphi, t) (V_0 + u_0(\varphi, t)) \frac{\partial v_0}{\partial \tau} = 0, \quad (7) \\ \frac{\partial^3 v_j}{\partial \tau^3} + a_0(\varphi, t) \frac{\partial v_j}{\partial \tau} \varphi'(t) - \\ - b_0(\varphi, t) \left(u_0(\varphi, t) \frac{\partial v_j}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \tau} (v_0 v_j) \right) = F_j(t, \tau), \quad (8) \end{aligned}$$

де

$$F_j(t, \tau) = F_j(x, t, \tau, u_0, \dots, u_j, V_0, \dots, V_{j-1}) \Big|_{x=\varphi(t)}, \quad j = \overline{1, N}.$$

Розв'язком рівняння (7) в просторі G_1^0 є функція

$$v_0(t, \tau) = -3 \frac{A(\varphi, t)}{b_0(\varphi, t)} \cosh^{-2} \left(\frac{\sqrt{A(\varphi, t)}}{2} (\tau + C(t)) \right), \quad (9)$$

де $\varphi = \varphi(t)$,

$$A(\varphi, t) = -a_0(\varphi, t) \varphi'(t) + b_0(\varphi, t) u_0(\varphi, t) > 0, \quad (10)$$

$C(t)$ – стала інтегрування.

Якщо $F_j \in G_1^0, j = \overline{1, N}$, то рівняння (8) мають розв'язки у просторі G_1 тоді і лише тоді, коли виконуються умова ортогональності

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_j(t, \tau) v_0(t, \tau) d\tau = 0. \quad (11)$$

При цьому функція $v_j(t, \tau), j = \overline{1, N}$, записується у вигляді

$$v_j(t, \tau) = v_j(t) \eta_j(t, \tau) + \psi_j(t, \tau), \quad j = \overline{1, N},$$

де $\psi_j(t, \tau) \in G_1^0$,

$$v_j(t) = [a_0(\varphi, t) \varphi'(t) - b_0(\varphi, t) u_0(\varphi, t)]^{-1} \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \Phi_j(t, \tau),$$

$$\Phi_j(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} F_j(t, \tau) d\tau + E_j(t),$$

причому, для сталої інтегрування $E_j(t)$ виконується співвідношення

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \Phi_j(t, \tau) = 0,$$

а для функції $\eta_j(t, \tau) \in G_1$ – умова $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \eta_j(t, \tau) = 1$.

З умови ортогональності (11) отримуємо диференціальне рівняння для визначення функції $\varphi = \varphi(t)$

$$\begin{aligned} 15a_0(\varphi, t) b_0(\varphi, t) \frac{d}{dt} A(\varphi, t) + \\ + [10a_{0x}(\varphi, t) b_0(\varphi, t) - 36b_{0x}(\varphi, t) a_0(\varphi, t)] \varphi'(t) + \\ + 10b_0^2(\varphi, t) u_{0x}(\varphi, t) + 3(b_0^2(\varphi, t))_x u_0(\varphi, t) - \\ - 5a_0(\varphi, t) (b_0^2(\varphi, t))_t A(\varphi, t) = 0. \quad (12) \end{aligned}$$

За умови, що $F_j \in G_1^0, j = \overline{1, N}$, та умови ортогональності (11) маємо, що $v_j \in G_1^0, j = \overline{1, N}$, тоді і лише тоді, коли виконується умова

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \Phi_j(t, \tau) = 0, \quad j = \overline{1, N}. \quad (13)$$

У випадку нульового фону, тобто коли $u_0(x, t) \equiv 0$ і умов $a_0(x, t) = a_0(x)$, $b_0(x, t) = b_0(x)$, співвідношення (11), (13) при $j=1$ будуть сумісними, якщо виконується рівність

$$a_0^5(x) = c b_0^{12}(x) \quad (14)$$

де c – довільна ненульова стала.

У цьому випадку рівняння для $\varphi = \varphi(t)$ спрощується і записується у вигляді

$$(a_0(\varphi))^{\frac{2}{3}} \frac{d\varphi}{dt} = c_1, \quad (15)$$

де c_1 – довільна ненульова стала.

Список використаних джерел

1. Korteweg D.J. On the change in form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves / D.J. Korteweg, G. de Vries // *Philos. Mag.* – 1895. – № 39. – P. 422 – 433.
2. Gardner C.S. Method for solving the Korteweg-de Vries equation / C.S. Gardner, J.M. Green, M.D. Kruskal, R.M. Miura // *Physical Review Lett.* – 1967. – V. 19. – P. 1095 – 1097.
3. Samoilenko V. Asymptotic expansions for one-phase soliton-type solutions of the Korteweg-de Vries equation with variable coefficients / V. Samoilenko, Yu. Samoilenko // *Ukrainian Mathematical Journal.* – 2005. – V. 57, № 1. – P. 132 – 148.
4. Samoilenko V. Asymptotic solutions of the Cauchy problem for the singularly perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients / V. Samoilenko, Yu. Samoilenko // *Ukrainian Mathematical Journal.* – 2007. – V. 59, № 1. – P. 126 – 139.
5. Maslov V.P. Geometric asymptotics for PDE. I / V.P. Maslov, G.A. Omel'yanov. Providence: American Mathematical Society, 2001. – 243 p.
6. Miura R.M. Application of non-linear WKB-method to the KdV equation / Miura R.M., Kruskal M. // *SIAM J. Appl. Math.* – 1974. – V. 26, № 3. – P. 376 – 395.

Для досить широкого класу функцій $a_0(x, t)$, $b_0(x, t)$ рівняння (15) має розв'язки для всіх значень t . Це дозволяє побудувати асимптотичні однофазові солітоноподібні розв'язки для рівняння (1), які будуть визначені для всіх значень незалежних змінних (x, t) . Серед таких асимптотичних розв'язків можна виділити розв'язки, сингулярна частина яких містить лише функції, що є швидко спадними за змінною τ . Саме такі розв'язки будуть певними деформаціями класичних солітонних розв'язків.

Висновки. Запропоновано алгоритм побудови асимптотичних однофазових розв'язків солітонного типу для рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами і сингулярним збуренням.

References

1. KORTEWEG D.J., DE VRIES G. (1895) On the change in form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves. *Philos. Mag.* 39. p. 422-433.
2. GARDNER C.S., GREEN J.M., KRUSCAL M.D., MIURA R.M. (1967) Method for solving the Korteweg-de Vries equation. *Physical Review Lett.* 19. p. 1095-1097.
3. SAMOILENKO V., SAMOILENKO YU. (2005) Asymptotic expansions for one-phase soliton-type solutions of the Korteweg-de Vries equation with variable coefficients. *Ukrainian Mathematical Journal.* 57 (1). p. 132-148.
4. SAMOILENKO V., SAMOILENKO YU. (2007) Asymptotic solutions of the Cauchy problem for the singularly perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients. *Ukrainian Mathematical Journal.* 59 (1). p. 126-139.
5. MASLOV V.P., OMEL'YANOV G.A. (2001) Geometric asymptotics for PDE. I Providence: American Mathematical Society.
6. MIURA R.M., KRUSCAL M.D. (1974) Application of non-linear WKB-method to the KdV equation. *SIAM J. Appl. Math.* 26 (3). p. 376-395.

Надійшла до редколегії 21.06.19

УДК 539.3

Савельєва К. В.¹, к. ф.-м. н., доц.,
Дашко О.Г.¹, к. ф.-м. н.,
Симчук Я.В.², к. ф.-м. н., доц.

K. V. Savelieva¹, Ph. D.(Phys.-Math.),
Sr. Sci. Researcher
O. G. Dashko¹, Ph. D. (Phys.-Math.), Sci. Researcher
Y. V. Simchuk², Ph. D. (Phys.-Math.), Sci. Researcher

Плоскі хвилі в нанокompозитних матеріалах

Plane waves in nano-composite materials

¹ Інститут механіки ім.С.П.Тимошенка НАН
України, 03057 м. Київ, вул. П.Нестерова, 3,
e-mail: katerina1971s@gmail.com

¹S. P. Timoshenko Institute of Mechanics NAS of
Ukraine, 03057, Kyiv, P.Nesterov str., 3
e-mail: katerina1971s@gmail.com

² Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря
Сікорського», 03056, м. Київ, пр-т
Перемоги, 37,
e-mail: yar_simchuk@ukr.net

²National Technical University of Ukraine
“I.Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, 03056, Kyiv,
Peremohy pr., 37
e-mail: yar_simchuk@ukr.net

Проаналізовано методи теоретичного дослідження взаємодії плоских гармонічних хвиль у нанокompозитних матеріалах, нелінійні властивості яких моделюються пружним потенціалом Мурнагана. Наведені результати використання двох методів. Метода повільно змінних амплітуд, шляхом побудови укорочених, еволюційних рівнянь та співвідношень Менлі-Рова, при дослідженні генерації третьої гармоніки поздовжньої хвилі. Та метода збурень, при дослідженні перемикання хвильового процесу між вертикально та горизонтально поляризованими поперечними хвилями одночасно з перепомпванням енергії між різними типами поперечних хвиль і трансформації їх в треті гармоніки. Проведене чисельне дослідження задачі на основі отриманих теоретичних результатів для різних типів нанокompозитних матеріалів. Побудовано відповідні графіки, ілюструючи хвильову картину, отриману при розв'язанні задач. Прокоментовано результати чисельного аналізу для цих матеріалів.

Ключові слова: кубічна нелінійність, пружна плоска хвиля, нанокompозитні матеріали, метод повільно змінних амплітуд, метод збурень.

The propagation of plane waves in a hyper-elastic medium is theoretically investigated. Two methods of research were used: the method of slowly variable amplitudes and the method of perturbations (successive approximations). The results obtained by these methods are analyzed. The wave interaction in nanocomposite materials is studied. A theoretical study of the cubically nonlinear elastic interaction of plane harmonic waves is carried out for a material whose nonlinear properties are described by the Murnaghan elastic potential. The solution for self-generation of the longitudinal wave is obtained by the method of slowly varying amplitudes. The interaction of transverse horizontally and vertically polarized harmonic waves are studied using the perturbing method. The pumping of energy between different harmonics of a longitudinal wave and various types of transverse waves is described analytically. The results of numerical analysis for various types of nanocomposite materials are presented.

Key Words: cubic nonlinearity, elastic plane wave, nanocomposite materials, method of slowly varying amplitudes, perturbation method.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Теоретичне дослідження взаємодії плоских гармонічних хвиль проводилося для нанокompозитних матеріалів, нелінійні властивості яких моделюються пружним потенціалом Мурнагана, представлення якого дозволяє врахувати нелінійності, до четвертого

порядку включно, відносно компонентів градієнта деформації [1,6,7]. Таке представлення, як відомо [7,10,11], дозволяє досліджувати квадратично і кубічно нелінійні хвильові ефекти в гіперпружних матеріалах [6,8,9,10].

Вектор переміщень

$$\vec{u} = \{u_1(x_1, t); u_2(x_1, t); u_3(x_1, t)\}$$

залежить від однієї просторової змінної x_1 та часу t . Нелінійні хвильові рівняння відносно компонент вектора переміщення для поздовжніх (L),

$$\begin{aligned} \rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu) u_{1,11} = \\ N_1 u_{1,11} u_{1,1} + N_2 (u_{2,11} u_{2,1} + u_{3,11} u_{3,1}) + \\ + N_3 u_{1,11} (u_{1,1})^2 + N_4 (u_{2,11} u_{2,1} u_{1,1} + u_{3,11} u_{3,1} u_{1,1})^2; \end{aligned} \quad (1)$$

горизонтально (TH) та вертикально (TV) поляризованих поперечних хвиль мають вигляд:

$$\begin{aligned} \rho u_{2,tt} - \mu u_{2,11} = N_2 (u_{2,11} u_{2,1} + u_{1,11} u_{2,1}) + \\ + N_4 u_{2,11} (u_{2,1})^2 + N_5 u_{2,11} (u_{1,1})^2 + N_6 u_{2,11} (u_{3,1})^2; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \rho u_{3,tt} - \mu u_{3,11} = N_2 (u_{3,11} u_{2,1} + u_{1,11} u_{3,1}) + \\ + N_4 u_{3,11} (u_{3,1})^2 + N_5 u_{3,11} (u_{1,1})^2 + N_6 u_{3,11} (u_{2,1})^2. \end{aligned} \quad (3)$$

У рівняннях (1)-(3) використані стандартні позначення [1-3]: ρ – стала густина; λ, μ – пружні сталі другого порядку (сталі Ламе); A, B, C – пружні сталі третього порядку (сталі Мурнагана);

$$N_1 = 3(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C);$$

$$N_2 = \lambda + 2\mu + \frac{1}{2}A + B;$$

$$N_3 = \frac{3}{2}(\lambda + 2\mu) + 6(A + 3B + C);$$

$$N_4 = \frac{1}{2}[2(\lambda + 2\mu) + 5A + 14B + 4C];$$

$$N_6 = 3A + 10B + 4C.$$

Дослідження поширення хвиль здійснювалося двома методами.

Метод повільно змінних амплітуд

Цей метод був використаний окремо для дослідження взаємодії кубічних, виключно поздовжніх (за рівнянням(1)) та виключно поперечних хвиль однієї, горизонтальної (за рівнянням (2)), або вертикальної (за рівнянням (3)) поляризації.

Відповідні рівняння для таких досліджень мають вигляд:

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu) u_{1,11} = N_3 u_{1,11} (u_{1,1})^2$$

для поздовжньої хвилі, при умові відсутності поперечних переміщень, та

$$\begin{aligned} \rho u_{2,tt} - \mu u_{2,xx} = N_4 u_{2,xx} (u_{2,x})^2; \\ \rho u_{3,tt} - \mu u_{3,xx} = N_4 u_{3,xx} (u_{3,x})^2 \end{aligned}$$

для поперечних хвиль (при цьому поздовжні переміщення та взаємодія між поперечними хвилями різної поляризації не враховується). За цим методом проаналізований механізм самогенерації відповідних хвиль. Метод передбачає, в кожному зазначеному випадку, послідовну побудову вкороченого рівняння, еволюційних, при умові виконання умови частотного синхронізму, рівнянь та співвідношень Менлі-Рова. Графічний аналіз останніх дає можливість стверджувати, що, при одночасному збудженні потужної хвилі накачки (P -хвилі) та слабкої сигнальної хвилі відповідної поляризації (S -хвилі), відбувається міжхвильове перепомповування енергії і, в результаті, перемикання кубічно нелінійної поздовжньої хвилі, або, відповідно, поперечної хвилі з основної (ω) на потрійну (3ω) частоту.

Метод збурень

Метод використовувався для дослідження одночасного поширення двох поперечних хвиль різної поляризації. Розв'язки було отримано з точністю до третього наближення у вигляді

$$\begin{aligned} u_2(x, t) = u_2^0 \cos(kx - \omega t) - \\ - \frac{k^3}{6\mu\rho} u_2^0 \left((u_2^0)^2 N_4 + (u_3^0)^2 N_6 \right) x \sin 3(kx - \omega t), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} u_3(x, t) = u_3^0 \cos(kx - \omega t) - \\ - \frac{k^3}{6\mu\rho} u_3^0 \left((u_3^0)^2 N_4 + (u_2^0)^2 N_6 \right) x \sin 3(kx - \omega t). \end{aligned} \quad (5)$$

Внаслідок нелінійної хвильової взаємодії, хвилі поступово трансформуються в свої треті гармоніки. За умови різної початкової інтенсивності хвиль різної поляризації, відбувається перепомповування енергії з потужної хвилі в слабку [3], що ілюструється рис. 1.

Загальні висновки

Крім суто аналітичних досліджень поширення хвиль зазначеними двома методами, були проведені відповідні чисельні дослідження,

результати яких можуть бути частково продемонстровані наведеним на Рис.1 графіком.

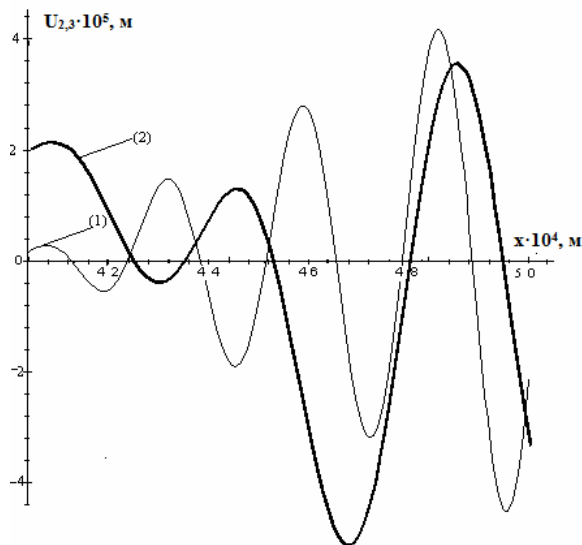


Рис. 1 Перепомпвання енергії між вертикальними хвилями різної поляризації

Для обчислень було використано значення ефективних сталих для чотирьох типів нанокompозитних матеріалів, відповідних до моделі Зпапо, з роботи [10]. Складовими зазначених нанокompозитів є: матриця, представлена в двох варіантах (N1 - суміш смоли Епон-828 і полістиролу, з м'якою характеристикою нелінійності; N2 - суміш смоли Епон-828 і скла-пирекс, з жорсткою характеристикою нелінійності), і наповнювач - вуглецеві нанотрубки двох різних типів (N1 - звивисті вуглецеві нанотрубки; N2- хіральні вуглецеві нанотрубки). Характеристики та властивості матеріалів та їх складових представлені і детально описані в роботі [10]. Розрізняються використані при дослідженні матеріали також об'ємним вмістом наповнювача.

Дослідження проводилося для п'яти варіантів концентрації наповнювача в чотирьох видах нанокompозитів. Хвильові параметри $\omega = 1.0$ МГц, $u_2^0 = u_0 = 1 \cdot 10^{-7}$ м, $k \approx 0,5 \cdot 10^6$ 1/м обиралися однаковими для всіх розглянутих варіантів матеріалу. Обґрунтування вибору значень цих величин викладено в роботі [3].

Було побудовано графіки змінення профілю хвилі в залежності від просторової координати x : горизонтально поляризованої поперечної хвилі, згідно формулі (4); та для вертикально поляризованої поперечної хвилі, згідно (5).

Основним явищем, виявленим за допомогою обох методів, є перемикування хвильового процесу з основної на потрібну частоту кубічно

нелінійних хвиль. При цьому було встановлено, що відбувається спотворення профілів останніх.

Внаслідок нелінійної хвильової взаємодії, хвилі поступово трансформуються в свої треті гармоніки. За умови різної початкової інтенсивності хвиль різної поляризації, відбувається перепомпвання енергії з потужної хвилі в слабку [3].

Були побудовані графіки зміни профілю хвилі в залежності від просторової координати x : горизонтально поляризованої поперечної хвилі, згідно формулі (4); та вертикально поляризованої поперечної хвилі, згідно (5). Амплітуда горизонтально поляризованої хвилі, що була задана початково малою в порівнянні з амплітудою вертикально поляризованої хвилі, при поширенні збільшувалася, зменшуючи при цьому амплітуду вертикально поляризованої хвилі. Це свідчить про перепомпвання енергії з більш потужної вертикальної поперечної хвилі до початково слабкої горизонтальної.

Відповідні графіки для різних матеріалів було побудовано для дослідження одночасного поширення двох поперечних хвиль різної поляризації. При цьому було встановлено, що відбувається спотворення профілів цих хвиль. Внаслідок нелінійної хвильової взаємодії, хвилі поступово трансформуються в свої треті гармоніки.

Таким чином, обидва зазначені методи застосовні для дослідження кубічно нелінійних гіперпружних хвиль. Використання того чи іншого метода залежить від початкової постановки задачі. Результати обох методів узгоджені між собою і свідчать про перемикування хвильового процесу з одинарної на потрібну частоту, і навпаки, в процесі поширення хвиль у кубічно нелінійних нанокompозитних матеріалах.

Список використаних джерел

1. Рушицький Я. Я. Хвилі в матеріалах з мікроструктурою. / Я. Я. Рушицький, С. І. Цурпал. – Київ: Інст. механіки ім. С. П. Тимошенка, 1998. – 377 с.
2. Achenbach J. D. Wave Propagation in Elastic Solids. / J. D. Achenbach – Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1973. – 425 p.
3. Cattani C. Wavelet and Wave Analysis as Applied to Materials with Micro or Nanostructure. / C. Cattani, J. J. Rushchitsky – Singapore-London: World Scientific, 2007. – 466 p.
4. Kratzer A. Transcendente Funktionen. / A. Kratzer, W. Franz – Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1960. – 466 S.
5. Olver F.W.J. Asymptotics and Special Functions. / F.W.J. Olver – New York: Academic Press, 1974. – 528 p.
6. Rushchitsky J. J. Nonlinear Elastic Waves in Materials. / J. J. Rushchitsky – Heidelberg: Springer, 2014. – 454 p.
7. Rushchitsky J. J. Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – derivation of wave equations. Plane strain state / J. J. Rushchitsky // Int. Appl. Mech. – 2005. – Vol. 41, № 5. – P. 701–712.
8. Rushchitsky J. J. Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – derivation of wave equations. Axisymmetrical and other states / J. J. Rushchitsky // Int. Appl. Mech. – 2005. – Vol. 41, № 6. – P. 831–840.
9. Rushchitsky J. J. Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – primary analysis of evolution / J. J. Rushchitsky // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 7. – P. 825–833.
10. Гузь А.Н. Введение в механику нано-композитов / А. Н. Гузь, Я. Я. Рушицкий, И.А. Гузь – Киев: Академперіодика, 2010. – 398 с.
11. Rushchitsky J.J. On the Self-Switching Hypersonic Waves in Cubic Nonlinear Hyperelastic Nanocomposites / Rushchitsky J. J. // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, N 1. – P. 73–93.

References

1. RUSHCHITSKY, J. J. & TSURPAL, S.I. (1998) *Hvili v Materialah z Mikrostrukturoyu*. K.: Inst. Mehaniki im.S. P.Timoshenka.
2. ACHENBACH, J. D. (1973) *Wave Propagation in Elastic Solids*. Amsterdam: North Holland Publishing Company.
3. CATTANI, C. & RUSHCHITSKY, J. J. (2007) *Wavelet and Wave Analysis as Applied to Materials with Micro or Nanostructure*. Singapore-London: World Scientific.
4. KRATZER, A. & FRANZ, W. (1960) *Transcendente Funktionen*. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft.
5. OLVER, F. W. J. (1974) *Asymptotics and Special Functions*. New York: Academic Press.
6. RUSHCHITSKY, J. J. (2014) *Nonlinear Elastic Waves in Materials*. Heidelberg: Springer.
7. RUSHCHITSKY, J. J. (2005) *Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – derivation of wave equations. Plane strain state*. Int. Appl. Mech. 41 (5). p. 701–712.
8. RUSHCHITSKY, J. J. (2005) *Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – derivation of wave equations. Axisymmetrical and other states*. Int. Appl. Mech. 41 (6). p. 831–840.
9. RUSHCHITSKY, J. J. (2005) *Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – primary analysis of evolution* Int. Appl. Mech. 41 (7). p. 825–833.
10. GUZ, A.N. & RUSHCHITSKY, J. J. & GUZ, I.A. (2010) *Introduction to mechanics of nanocomposites*. Kiev: Akadempriodika
11. RUSHCHITSKY, J. J. (2009) *On the Self-Switching Hypersonic Waves in Cubic Nonlinear Hyperelastic Nanocomposites* Int. Appl. Mech. 45 (1). p. 73–93.

Надійшла до редколегії 31.05.2019

УДК 531.39

Сенченков И. К.¹, д.ф.-м.н., с.н.с.
Червинко О. П.¹, к.ф.-м.н., с.н.с.

**Нестационарные процессы в
подкрепленном тонкостенной
оболочкой вязкоупругом цилиндре
при импульсном нагружении**

¹ Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН
Украины, 03057, г. Киев, ул. Петра Нестерова, 3
e-mail: term@inmech.kiev.ua

I. K. Senchenkov¹, Dr.Sci, sen.res.
O. P. Chervinko¹, PhD (Phys.-Math.), sen.res.

**Unsteady processes in stiffened by thin shell
viscoelastic cylinder under pulse loading**

¹ S. P. Timoshenko Institute of Mechanics NAS of
Ukraine, 03057, Kyiv, P. Nesterov str., 3
e-mail: term@inmech.kiev.ua

С использованием метода конечных элементов получены оценки максимальных в переходном процессе напряжений на границе цилиндр-оболочка и в оболочке при нарастающем давлении на внутренней или внешней поверхности цилиндра.

Ключевые слова: вязкоупругий цилиндр, импульсная нагрузка, максимальные критические напряжения.

Solid propellant rocket motor is considered as hollow viscoelastic cylinder inserted in multilayered elastic shell-like case. The material of propellant is considered to be compressible. An estimation of maximum unsteady stresses on cylinder-shell boundary and shell under growing pressure on interior or external cylindrical surface were calculated by FEM. Four corner isoparametric finite element is utilized. Numark method to integrate by time the dynamic equations is used. The problem of linear viscoelasticity have been employing of the Schapery method. In the case of internal pressure, the possibility of tensile radial stresses on the contact surface of the propellant-shell during the transition process has been established. The dependence of the maximum contact stresses as well as circumferential stresses in the shell on the shell thickness is established. In the case of external pressure pulse, the presence of significant tensile radial stresses on the propellant-shell interface is shown. Insignificant tensile circumferential stresses in the transient wave process are possible in the shell.

Key Words: viscoelastic cylinder, pulse loading, maximum dynamical stresses.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Введение

В настоящее время ракетные двигатели на твердом топливе (РДТТ) широко используются в военной и гражданской областях [1]

Одной из основных проблем проектирования ракет с РДТТ является расчет напряженно-деформированного и термического состояния заряда и корпуса РДТТ при динамическом нагружении [2].

При воспламенении заряд подвергается резко возрастающему внутреннему давлению. Если ракета установлена в шахте, то заряд подвергается и внешнему давлению.

Напряжения в генерируемых при этом волнах могут существенно превышать напряжения, а также отличаться знаками от

напряжений при соответствующих статических нагрузках.

В большинстве расчетов принимаются упрощающие гипотезы, в частности о несжимаемости материала топлива, а также о плоской деформации в РДТТ [1, 2].

В настоящей работе представлены результаты расчетов динамических напряжений, проведенных с помощью МКЭ, для демонстрационного варианта РДТТ без указанных выше допущений. Получены оценки растягивающих динамических напряжений на границе корпус-топливо, а также в корпусе РДТТ, в зависимости от времени возрастания

давления. Материал топлива предполагается линейно вязкоупругим, а корпуса – упругим.

2. Схема РДТТ

Схема РДТТ показана на рис. 1 (меридиональное сечение). РДТТ имеет размеры: топливо ($0,1085\text{ м} < r < 0,434\text{ м}$), теплоизоляция ($0,434\text{ м} < r < 0,437\text{ м}$), корпус ($0,437\text{ м} < r < 0,447\text{ м}$), теплоизоляция ($0,447\text{ м} < r < 0,450\text{ м}$).

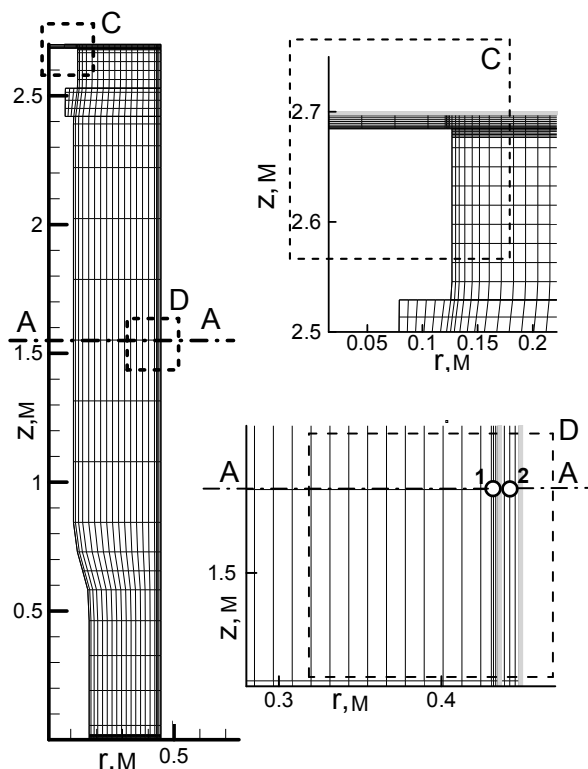


Рис. 1. Схема и конечно-элементная разбивка РДТТ. Точка 1 – в топливе вблизи границы контакта, 2 – в корпусной оболочке

3. Постановка осесимметричной динамической задачи термомеханики

Постановка динамической осесимметричной задачи в цилиндрической системе координат $Orz\varphi$ для изотропного материала включает кинематические уравнения, уравнения движения и теплопроводности.

Механическая нагрузка определяется давлением в канале или на поверхности корпуса, которое линейно нарастает до значения p_0 в течение характерного времени t_p

$$\sigma_{rr} = \begin{cases} -p_0 t / t_p & 0 < t < t_p \\ -p_0 & t \geq t_p \end{cases}, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad T = T_1, \quad (1)$$

где T_1 – температура поверхности нагружения.

Остальная поверхность тела предполагается свободной от нагрузки и обменивается теплом с окружающей средой по закону Ньютона.

Для начальных условий имеем

$$u_i = 0; \quad \dot{u}_i = 0; \quad T = T_0 \quad \text{при} \quad t = 0; \quad i = r, z.$$

На внутренних границах слоев принимаются условия идеального термомеханического контакта.

4. Характеристики материалов и параметры нагружения

Твердое топливо (ТТ) предполагается линейно вязкоупругим изотропным термореологически простым материалом, характеристики которого задаются выражениями для функции релаксации при одноосном растяжении E_{rel} и модуля объемного сжатия K :

$$E_{rel} = E_\infty + \sum_{k=1}^n A_k e^{-t/2\tau_k a_T}, \quad K = 3530 \text{ МПа}, \quad (2)$$

значения τ_k и A_k приведены в работе [3].

Здесь $a_T(T)$ – функция сдвига, определяющая горизонтальный сдвиг изотермической функции релаксации вдоль шкалы $\log t$ для разных температур. Согласно формуле Williams-Landel-Ferry имеем

$$\log a_T = -C_1(T - T_{ref}) / (C_2 + (T - T_{ref})), \quad (3)$$

где T_{ref} – отсчетная температура, C_1, C_2 – материалы коэффициенты. Материалы наружных слоев изоляции и оболочки принимаются изотропными линейно упругими.

Преобразование Лапласа (2) дает т.н. операционный модуль:

$$E(s) = s\bar{E}_{rel}(s) = E_\infty + \sum_{k=1}^n sA_k / (s + 1/2a_T\tau_k). \quad (4)$$

Используя (2) и (4), получаем выражения операционных коэффициентов Пуассона и модуля сдвига

$$\nu = (1 - E(s)/3K)/2, \quad G = 3KE(s)/(9K - E(s)). \quad (5)$$

Для любого момента времени, подставляя величину $s = 1/2t$ в уравнения (4), (5), получаем величины $G(t)$, $\nu(t)$ и $E(t)$, которые могут быть использованы в ассоциированном квазиупругом решении. Оно рассматривается как

приближенное в смысле Шепери зависящее от времени решение задачи вязкоупругости [4].

В расчетах используются характеристики материалов, взятые из работ [3, 5, 6].

Для решения задач механики и теплопроводности используется конечно-элементная методика, развитая в работе [7].

4. Расчет напряженно-деформированного состояния РДТТ

Рассматривается задача нагружения РДТТ на внутренней или внешней поверхности давлением для значений параметров $t_p = 10^{-4} \text{ с}$, $p_0 = 8 \text{ МПа}$.

Сходимость по временному шагу интегрирования с точностью 2% по $\max \sigma_{rr}(t)$ достигается при $\Delta t = 10^{-6} \text{ с}$.

Изменение напряжений в точках 1 и 2 (рис. 1) в случае нагружения по внутренней поверхности показано на рис. 2.

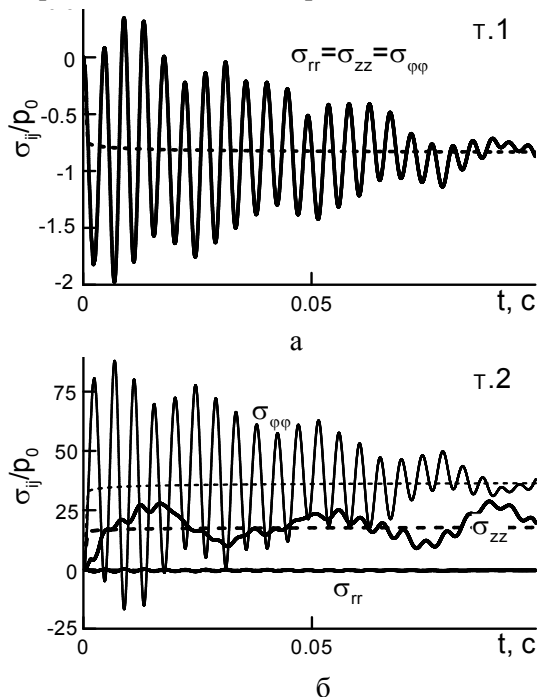


Рис. 2. Изменение во времени компонент напряжений в точках 1 и 2 (внутренняя нагрузка)

Для максимальных растягивающих контактных напряжений σ_{rr} (рис. 2а) имеем $\max \sigma_{rr} \approx 0.37 p_0$. Все компоненты σ_{rr} , σ_{zz} , $\sigma_{\phi\phi}$ равны между собой, что свидетельствует о гидростатическом напряженном состоянии. Имеет место затухание волн во времени вследствие диссипации энергии в вязко-упругом материале топлива, и напряжения приближаются к статическому решению (штриховые линии).

Отметим, что в задаче [2] для кругового цилиндра ступенчатое повышение давления не приводит к растягивающим напряжениям на поверхности контакта. Наличие растягивающих напряжений в РДТТ, возможно, обусловлено влиянием верхней крышки корпуса, приводящей к нарушению условия плоской деформации, принятого в работе [2].

На рис. 3 показана зависимость максимальных в переходном процессе нормированных напряжений σ_{rr}/p_0 в точке 1 и $\sigma_{\phi\phi}/p_0$ в точке 2 (рис. 1) от толщины корпуса h .

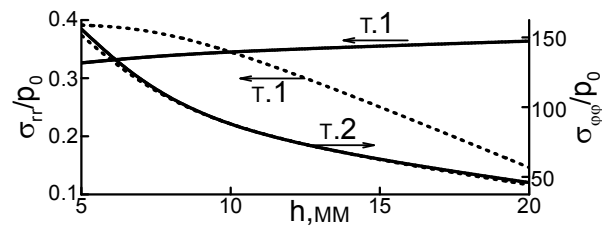


Рис. 3. Зависимость максимальных напряжений от толщины корпуса h (внутренняя нагрузка)

Сплошные линии отвечают зависимостям при варьировании толщины только боковой части корпуса с постоянной толщиной крышки 10 мм. Штриховые линии отвечают изменению толщины всего корпуса. Видно, что отрывные напряжения в точке 1 слабо зависят от толщины боковой части корпуса и существенно снижаются с увеличением толщины крышки. Напряжения $\sigma_{\phi\phi}$ в точке 2 снижаются при увеличении h .

Для задачи о давлении на внешней поверхности корпуса на рис. 4 показана зависимость максимального напряжения σ_{rr} в т. 1 и напряжения $\sigma_{\phi\phi}$ в т. 2 от времени t_p нарастания давления.

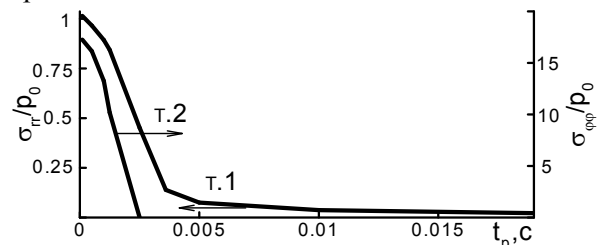


Рис. 4. Зависимость максимальных напряжений σ_{rr} в точке 1 и $\sigma_{\phi\phi}$ в точке 2 от времени импульса t_p (внешняя нагрузка)

Видно, что чем выше скорость нарастания давления, тем больше возможность отрыва топлива от корпуса РДТТ, причем $\max \sigma_{rr} \approx p_0$.

Аналогична зависимость растягивающих напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$ в корпусе, причем условие $\sigma_{\varphi\varphi} > 0$ реализуется в переходном динамическом процессе при $t_p \leq 2 \cdot 10^{-3} \text{ с}$.

Выводы

В работе проведен расчет динамических напряжений в РДТТ при импульсе давления на внутренней или внешней поверхности.

В случае внутреннего давления установлена возможность растягивающих радиальных напряжений на контактной поверхности топливо-

оболочка в течение переходного процесса. Установлена зависимость максимальных контактных напряжений, а также окружных напряжений в оболочке от толщины оболочки. Установлено влияние толщины крышки на контактные напряжения.

При импульсе внешнего давления показано наличие значительных растягивающих радиальных напряжений на поверхности контакта топливо-оболочка. В оболочке возможны незначительные растягивающие окружные напряжения в переходном колебательном процессе.

Список использованных источников

1. Москвитин В.В. Сопротивление вязкоупругих материалов. Применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе / В.В. Москвитин. – М.: Наука, 1972. – 325 с.
2. Ахенбах Г.Д. Динамическое поведение длинного скрепленного с корпусом вязкоупругого цилиндра / Г.Д. Ахенбах // Ракетная техника и космонавтика. – 1965. – № 4. – С. 124 – 129.
3. Renganahan K., Slump Estimation of Cylindrical Segment Grains of a Typical Rocket Motor under Vertical Storage Conditions / K. Renganahan, Rao B. Nageswara, M. K. Jana // Trends in Applied Sciences Research, 2006. – 1(1). – P.97 – 104.
4. Shapery R.A. Approximate methods of transform inversion of viscoelastic stress analysis / R.A. Shapery // Proc. U.S. Natl. Congr. Appl. Mech., 1962. – V 2. – P. 1075 – 1055.
5. Marimuthu R. Development of efficient finite elements for structural integrity analysis of solid rocket motor propellant grains / R. Marimuthu, Nageswara Rao B. // Intern. Jour. Pressure Vessels and Piping. – 2013. – P. 131 – 145.
6. Jayakumar K. / A multi-layer cylindrical shell under electro-thermo-mechanical loads / K. Jayakumar, D. Yadav, Rao Nageswara // Trends in Appl. Sci. Research. – 2006. – 1 (4). – P. 356 – 401.
7. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 1. Термоупругость / И.А. Мотовиловец, В.И. Козлов – Киев: Наук. думка, 1957. – 264 с.

References

1. MOSKVITIN V.V. (1972) *Soprotivleniye vyazkoupругikh materialov. Primenitel'no k zaryadam raketnykh dvigateley na tverdom toplive*. Moskva: Nauka.
2. AKHENBAKH G.D. (1965) *Dinamicheskoye povedeniye dlinnogo skreplennogo s korpusom vyazkoupругogo tsilindra*. Raketnaya tekhnika i kosmonavtika. № 4. p. 124 – 129.
3. RENGANAHAN K., NAGESWARA RAO B. and JANA M.K. (2006) *Slump Estimation of Cylindrical Segment Grains of a Typical Rocket Motor under Vertical Storage Conditions*. Trends in Applied Sciences Research. 1(1). p. 97 – 104.
4. SHAPERY R.A. (1962) Approximate methods of transform inversion of viscoelastic stress analysis. *Proc. U.S. Natl. Congr. Appl. Mech.* V 2. p. 1075 – 1055.
5. MARIMUTHU R. and NAGESWARA RAO B. (2013) *Development of efficient finite elements for structural integrity analysis of solid rocket motor propellant grains*. Intern. Jour. Pressure Vessels and Piping. p. 131 – 145.
6. JAYAKUMAR K., YADAV D. and NAGESWARA RAO (2006) *A multi-layer cylindrical shell under electro-thermo-mechanical loads*. Trends in Appl. Sci. Research. 1 (4). p. 356 – 401.
7. *Mekhanika svyazannykh poley v elementakh konstruksiy. T. 1. Termouprugost (1957)* I.A. Motovilovets, V.I. Kozlov. Kyev: Nauk. dumka.

Надійшла до редколегії 01.06.19

УДК 539.3

Середницька Х. І., к. ф.-м. н.,
Мартиняк Р. М., д. ф.-м. н., проф.

**Термопружна поведінка біматеріалу з
міжфазною щілиною, заповненою
нестисливою рідиною**

Інститут прикладних проблем механіки і мате-
матики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б
e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

Kh. I. Serednytska, Ph. D. (Phys.-Math.),
R. M. Martynyak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

**Thermoelastic behavior of a bimaterial
with interface crack filled with an
incompressible fluid**

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Me-
chanics and Mathematics, National Academy of
Sciences of Ukraine, 79060, Lviv, Naukova str., 3-b
e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

Досліджено термонапружений стан біматеріалу з міжфазною щілиною, заповненою нестисливою рідиною. Задачу термопружності зведено до нелінійної системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь відносно розкриття щілини та стрибка температури між берегами щілини. Тиск рідини на береги щілини визначено з умови нестисливості рідини. Побудовано аналітично-числову процедуру розв'язування системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь. Проаналізовано залежності тиску рідини, розкриття щілини та коефіцієнта інтенсивності нормальних напружень від прикладеного силового і теплового навантаження.

Ключові слова: біматеріал, міжфазна щілина, нестислива рідина, тиск рідини.

Thermo-stressed state of the bimaterial with the interfacial crack filled with an incompressible fluid is investigated. The bimaterial with zero Dundurs parameter is considered. The thermo-elastic problem is reduced to nonlinear systems of singular integro-differential equations for a temperature jump between the cracks faces and an opening crack. The pressure of the fluid is determined from the equation of the incompressible fluid. Using the method of successive approximations a numerical solution of the problem is constructed. The opening crack and temperature jump are determined by the finite sum for Chebyshev polynomials of the second kind. The coefficients for Chebyshev polynomials are determined from the system of linear algebraic equations. Having made numerical calculations, the dependences of the pressure of the fluid and the opening crack from the mechanical loads and density and direction of the heat flow have been constructed. The influence of fluid pressure on the stress intensity factor mode I are analyzed.

Key Words: bimaterial, interfacial crack, incompressible fluid, fluid pressure.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

На термопружний стан біматеріальних тіл істотно впливають розташовані на поверхні розмежування матеріалів дефекти: тріщини, щілини тощо. Середовище, яке заповнює ці дефекти, вносить свій вклад в розподіл міжфазних напружень, оскільки чинить тиск на поверхні дефектів і зумовлює передачу тепла між ними. У літературі відомі дослідження матеріалів з дефектами, заповненими газами та рідинами, де враховано окремо термічні чи механічні характеристики заповнювача [1-2]. Для міжфазних тріщин проаналізовано одночасно термічний і механічний вплив ідеального газу на напружено-

деформований стан двокомпонентного тіла [3]. Для рідини – заповнювача міжфазних тріщин вивчено лише вплив тиску на термопружну поведінку тіла [4].

У цій статті досліджено термопружну поведінку біматеріалу з міжфазною щілиною, заповненою нестисливою рідиною, з урахуванням тиску і термоопору її заповнювача.

2. Формулювання задачі

Розглянемо біматеріальну площину, яка складається з півплощин D_1 і D_2 , що характеризуються коефіцієнтами теплопровідності λ_1 і λ_2 , коефіцієнтами лінійного теплового розширення α_1 і α_2 , коефіцієнтами Пуассона ν_1 і ν_2 , моду-

лями зсуву G_1 і G_2 . Вважаємо, що параметр Дандерса [5] біматеріалу рівний нулеві, тобто $G_1(1-2\nu_2) = G_2(1-2\nu_1)$. На міжфазній лінії біматеріалу розташована щілина, що має початкову висоту $h_0(x)$ і довжину $2a$ (рис. 1). Порожни́на щілини заповнена нестисливою рідиною з коефіцієнтом теплопровідності λ_f . Вважаємо, що рідина чинить тиск P_f на береги щілини.

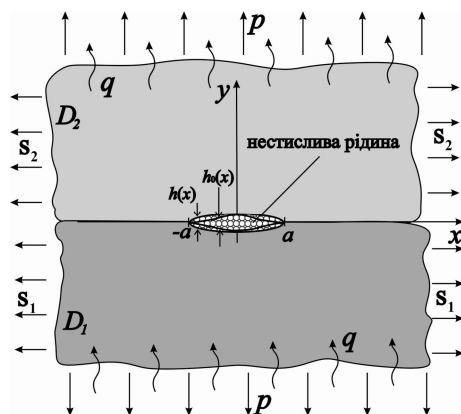


Рис. 1. Біматеріал з міжфазною щілиною, заповненою нестисливою рідиною

До біматеріалу на нескінченності прикладено перпендикулярні до міжфазної лінії однорідний стаціонарний тепловий потік q та рівномірно розподілені стискальні навантаження p . Паралельно міжфазній лінії до півплощин D_1 і D_2 на нескінченності прикладені лінійно розподілені по координаті y нормальні напруження S_1 і S_2 [5], які компенсують поздовжню деформацію в напрямку осі Ox і глобальне викривлення границь півплощин, що зумовлені зусиллями p і тепловим потоком q .

Вплив теплопровідності рідини на теплопередачу між берегами щілини враховуватимемо [5] термоопором $r(x)$, пропорційним висоті щілини $h(x)$, що змінюється в процесі навантаження, і обернено пропорційним коефіцієнту теплопровідності заповнювача λ_f : $r(x) = h(x)/\lambda_f$.

Тиск рідини P_f визначається з умови нестисливості рідини

$$\int_{-a}^a h(x) dx = \int_{-a}^a h_0(x) dx. \quad (1)$$

Поза тріщиною виконуються умови ідеального теплового і механічного контакту півплощин D_1 і D_2 .

3. Сингулярні інтегро-диференціальні рівняння задачі

Згідно з викладеною у праці [5] методикою сформульовану задачу зведено до системи нелінійних сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь (СІДР) відносно висоти щілини $h(x)$ та стрибка температури між її берегами $\gamma(x)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{h'(t) dt}{t-x} = -\frac{K}{2} (-p + P_f) - \frac{\lambda \eta^-}{2} \gamma(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{h'_0(t) dt}{t-x} \quad |x| < a, \quad (2)$$

$$\lambda_f \frac{\gamma(x)}{h(x)} - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma'(t) dt}{t-x} = q, \quad |x| < a, \quad (3)$$

де $K = (1 - \kappa_1 \kappa_2) / (G_1(1 - \kappa_2))$; $\eta^- = \eta_2 - \eta_1$; $\lambda = 2\lambda_1 \lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2)$; $\eta_i = \alpha_i(1 + \nu_i) / \lambda_i$ – термічна дистортивність компонент біматеріалу D_i ; $\kappa_i = 3 - 4\nu_i$, $i = 1, 2$.

Шукані функції на кінцях тріщини задовольняють умови $h(\pm a) = 0$, $\gamma(\pm a) = 0$.

Розв'язок системи (2), (3) з врахуванням умови (1) подамо у такому вигляді:

$$h(x) = h_0(x) + \frac{K}{2} (p - P_f) \sqrt{a^2 - x^2} + q h_\gamma(x), \quad (4)$$

$$\gamma(x) = q \gamma_q(x), \quad |x| < a; \quad (5)$$

$$P_f = p + \frac{4q}{Ka^2\pi} \int_{-a}^a h_\gamma(x) dx, \quad (6)$$

де $h_\gamma(x)$, $\gamma_q(x)$ – розв'язки системи рівнянь:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{h'_\gamma(t) dt}{t-x} = -\frac{\lambda \eta^-}{2} \gamma_q(x), \quad |x| < a, \quad h_\gamma(\pm a) = 0; \quad (7)$$

$$\lambda_f \frac{\gamma_q(x)}{h(x)} - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma'_q(t) dt}{t-x} = 1, \quad |x| < a, \quad \gamma_q(\pm a) = 0. \quad (8)$$

Для розв'язування системи (7), (8) адаптовано аналітично-числову процедуру дослідження задачі термопружності для міжфазних тріщин [5].

5. Числові результати та їх аналіз

Для числових розрахунків вводимо в розгляд безрозмірні величини: розкриття тріщини $\bar{h} = h/a$, змінна $\bar{x} = x/a$, коефіцієнт теплопрові-

дності заповнювача $\bar{\lambda}_f = \lambda_f / \lambda$, розтягувальні зусилля $\bar{p} = Kp$, тепловий потік $\bar{q} = qa\eta^-$, тиск рідини $\bar{P}_f = P_f K$, коефіцієнт інтенсивності нормальних напружень [5] $\bar{K}_1 = K_1 K / \sqrt{a}$. Вважаємо, що термічні дистортивності (ТД) матеріалів різні ($\eta_1 \neq \eta_2, \eta^- \neq 0$).

Безрозмірний тепловий потік $\bar{q}$ набуває додатних значень ($\bar{q} > 0$), якщо тепловий потік скерований до матеріалу з більшою ТД, та від'ємних ($\bar{q} < 0$), якщо до матеріалу з меншою ТД.

Числовий аналіз проведено для стискальних навантажень $\bar{p} = 0.001$ і форми щілини $\bar{h}_0(\bar{x}) = 0.001(1 - \bar{x}^2)^{3/2}$.

На рис. 2 проілюстровано залежність тиску рідини $\bar{P}_f$ від густини теплового потоку $|\bar{q}|$ для різних значень коефіцієнта теплопровідності рідини $\bar{\lambda}_f$ і двох напрямів теплового потоку. Бачимо, що при збільшенні густини теплового потоку, скерованого до матеріалу з більшою ТД, тиск спадає, а для потоку, скерованого до матеріалу з меншою ТД, – зростає. Збільшення коефіцієнта теплопровідності рідини приводить до зменшення її тиску. Різниця між значеннями тиску для двох протилежних напрямів теплового потоку зростає зі зменшенням коефіцієнта теплопровідності рідини. При зменшенні густини теплового потоку тиск рідини наближається до значень стискальних зусиль $\bar{p} = 0.001$, заданих на безмежності.

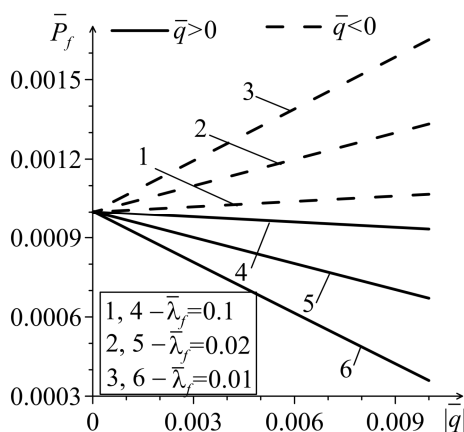


Рис. 2. Залежність тиску рідини $\bar{P}_f$ від густини теплового потоку $|\bar{q}|$ для різних коефіцієнтів теплопровідності рідини $\bar{\lambda}_f$.

Розподіл висоти щілини $\bar{h}(\bar{x})$ для двох напрямів теплового потоку $\bar{q}$ зі збільшенням його густини $|\bar{q}|$ зображено на рис. 3. Тут штрихова крива ілюструє початкову висоту щілини, суцільні чорні криві – висоту щілини за дії теплового потоку, скерованого до матеріалу з більшою ТД, суцільні сірі криві – висоту щілини за дії потоку, скерованого до матеріалу з меншою ТД. Бачимо, що за теплового потоку скерованого до матеріалу з більшою ТД, відбувається зменшення максимальної висоти щілини в її центрі та збільшення поблизу її країв. Водночас в малому околі країв щілина набуває форми близької до еліптичної на протизагу початковій щілині з берегами, що плавно зникаються. Для теплового потоку, скерованого до матеріалу з меншою ТД, форма щілини подібна до початкової і зі збільшенням густини потоку відбувається збільшення висоти на центральній частині та її зменшення на крайніх ділянках щілини, причому в деякому малому околі поблизу кінців щілини висота набуває від'ємних значень. Останній факт свідчить про те, що у випадку теплового потоку, скерованого до матеріалу з меншою ТД, необхідно враховувати контакт берегів щілини на краях.

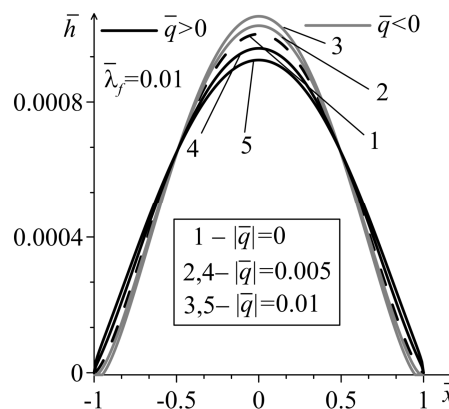


Рис. 3. Розподіл висоти щілини $\bar{h}(\bar{x})$ для двох напрямів теплового потоку за різних значень густини теплового потоку $|\bar{q}|$.

На рис. 4 проілюстровано залежність коефіцієнта інтенсивності нормальних напружень $\bar{K}_1$ від тиску рідини $\bar{P}_f$ для фіксованого коефіцієнта теплопровідності рідини $\bar{\lambda}_f$. $\bar{K}_1$ спадає зі збільшенням тиску і може набувати навіть від'ємних значень для певних значень тиску, що відповідають діапазону зміни густини теплового потоку, скерованого до матеріалу з меншою ТД. Цей

факт ще раз підтверджує необхідність врахування контакту берегів щілини по краях для теплового потоку, скерованого до матеріалу з меншою ТД.

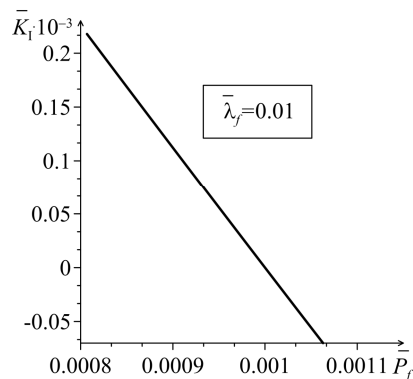


Рис. 4. Залежність коефіцієнта інтенсивності нормальних напружень $\bar{K}_I$ від тиску рідини $\bar{P}_f$.

6. Висновки

Досліджено термопружну поведінку біматеріалу з міжфазною щілиною, заповненою нестис-

ливою рідиною, з урахуванням тиску і теплопровідності рідини. Теплопровідність рідини враховано термоопором, що пропорційний висоті щілини і обернено пропорційний коефіцієнту теплопровідності рідини. Задачу термопружності зведено до системи сингулярних інтегродиференціальних рівнянь відносно висоти щілини та стрибка температури між її берегами. Тиск рідини визначено з умови нестисливості рідини. Визначено залежність тиску рідини від густини і напрямку теплового потоку. Проаналізовано розподіл висоти щілини під дією теплового потоку та залежності коефіцієнтів інтенсивності нормальних міжфазних напружень від тиску та коефіцієнта теплопровідності рідини. Виявлено можливість появи контакту берегів щілини на прилеглих до її країв ділянках під дією теплового потоку, скерованого до матеріалу з меншою термічною дистортивністю.

Список використаних джерел

1. Кит Г.С. Термоупругое состояние бесконечного тела с теплопроводящей круговой трещиной / Г.С. Кит, О.В. Побережный // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1970. – № 9.
2. Евтушенко А.А. Концентрация напряжений возле полости, заполненной жидкостью / А.А.Евтушенко, Г.Т. Сулим // Физ.-хим. механика материалов. – 1980. – 16, № 6. – С. 70–73.
3. Serednytska Kh. The thermoelastic state of a bi-material with an open gas-filled interface crack / Kh. Serednytska, R. Martynyak, K. Chumak // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. – 2019. – 57(2). – P. 331-341.
4. Kaczyński A. On the problem of some interface defect filled with a compressible fluid in a periodic stratified medium / A. Kaczyński, B. Monastyrsky // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. – 2004. – 42, 1. – P. 41-57.
5. Мартиняк Р.М. Контактні задачі термопружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах / Р.М. Мартиняк, Х.І. Середницька. – Львів: Растр-7, 2017. – 168 с.

References

1. KIT, H. S. and POBEREGNYI, O. V. (1970) Termouprugoye sostoyaniye beskonечноgo tela s teploprovodyashchey krugovoy treshchenoy. *Teplovyye napryazheniya v elementah konstrukciy*. 9. p. 78-88.
2. YEVTUSHENKO, A. and SULYM, H (1980) Koncentraciya napruzhen' poblyzu shhilyny, zapovnenoyi ridynoyu. *Fizyko-khimichna mekhanika materialiv*. 16 (6). p. 70-73.
3. SEREDNYTSKA, K., MARTYNYAK, R. M. and CHUMAK, K. (2019) The thermoelastic state of a bi-material with an open gas-filled interface crack. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 57(2). p. 331-341.
4. KACZYŃSKI, A. and MONASTYRSKY, B. (2004) On the problem of some interface defect filled with a compressible fluid in a periodic stratified medium. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 42 (1). p. 41-57.
5. MARTYNYAK, R. M. and SEREDNYTSKA, K. I. (2017) *Kontaktni zadachi termoprugnosti dlya migfaznyh trishchyn v bimaterialnyh tilah*. Lviv : Rastr-7.

Надійшла до редколегії 01.06.2019

УДК 532.595

Тимоха О. М.^{1,2}, д.ф.-м.н., чл.-кор. НАН
України,
Лагодзінський О.Є.², аспірант

Вимушені усталені коливання рідини в баці з квадратним перерізом

¹ Центр Досконалості “Автономні морські
операції та системи”, Норвезький університет
природничих та технологічних наук, NO-7491,
Трондхейм, Норвегія,
e-mail: alexander.timokha@ntnu.no

² Інститут математики НАН України,
вул. Терещенківська 3, Київ, 01004, Україна,
e-mail: lagodzinskyi@gmail.com

A. N. Timokha^{1,2}, Prof. Dr. Hab., Cor. Mem. of the
NAS of Ukraine,
O.E. Lahodzinskyi², PhD Student

Steady-state sloshing in an orbitally-forced square-base tank

¹ The Centre of Excellence “Autonomous Marine
Operations and Systems”, Norwegian University of
Science and Technology, NO-7491, Trondheim,
Norway,
e-mail: alexander.timokha@ntnu.no

² Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine,
Tereshchenkivska 3, str., Kiev, 01004, Ukraine,
e-mail: lagodzinskyi@gmail.com

Ця стаття є продовженням серії теоретичних робіт Фалтінсена та Тимохи, присвячених резонуючим усталеним хлюпанням рідини в твердому баці з квадратним перерізом, із використанням нелінійної модальної системи Наріманова-Мойсеева, яка вперше була виведена та застосована цими вченими для дослідження проблем хлюпання рідини. Системи рівнянь такого виду можливо застосувати до коливальних, поступальних, хвильових та кренових періодичних збурень, але, через складність математичного апарату, попередні роботи досліджували лише частинні випадки цих рухів, а саме зворотно-поступальні (повздожні, поперечні та діагональні) у різних типах баків. В цій роботі показано, що усталені хвилі, під дією таких типів збурення, асимптотично ідентичні до таких, які виникають внаслідок горизонтального орбітального збурення в баку.

Ключові слова: хлюпання рідини, демпфування, усталені хвилі.

The paper conducts a series of analytical studies on the resonant steady-state sloshing in a rigid square base container, which have been originated by Faltinsen & Timokha who derived and applied the Narimanov-Moiseev-type nonlinear modal equations for investigation in the sloshing problem. The modal equations, which consist on nine-dimensional system of ordinary differential equations, should be applicable for sway/pitch/surge/roll periodic excitations but, due to, basically, mathematical difficulties, the previous papers exclusively concentrated on the reciprocating (longitudinal, oblique and diagonal) motions of the container. This article is showed that the steady-state waves caused by this kind of forcing are asymptotically identical to those occurring when the tank performs horizontal orbital motions. We generalize the previous results by Faltinsen & Timokha to classify the steady-state wave regimes versus the semi-axes ratio of the forcing ellipse in the tank which is filled by a liquid with a finite depth.

Key Words: sloshing, damping, steady-state waves.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

A rigid square base rigid tank is partially filled by a perfect incompressible (irrotational flows) liquid with a finite liquid depth. The tank moves periodically by surge, sway, roll, and pitch with the prescribed translatory angular motions as shown in fig. 1. Sloshing is considered in the non-inertial tank-fixed coordinate system.

The free surface $\Sigma(t): z = f(x, y, t)$ and the absolute velocity potential $\Phi(x, y, z, t)$ should simultaneously be found from the corresponding free-surface problem or its variational analogy. When focusing on the steady-state wave motions in the tank, one should find a periodic solution of the problem, namely $T = 2\pi / \sigma$ -periodic (σ is the forcing frequency) function $f(x, y, t)$ and $\Phi(x, y, z, t)$. Following [1],

getting the required periodic solutions may employ the nine-dimensional system of nonlinear ordinary differential (modal) equations, which are based on the Narimanov-Moiseev approximation of the resonant liquid sloshing. The asymptotic approximation suggests the small (relative to tank breadth L) non-dimensional forcing amplitude

$$\eta_i(t) \sim O(\epsilon) \quad (1)$$

where $\eta_i(t)$ are the generalised coordinates determining the container motions with four degrees of freedom.

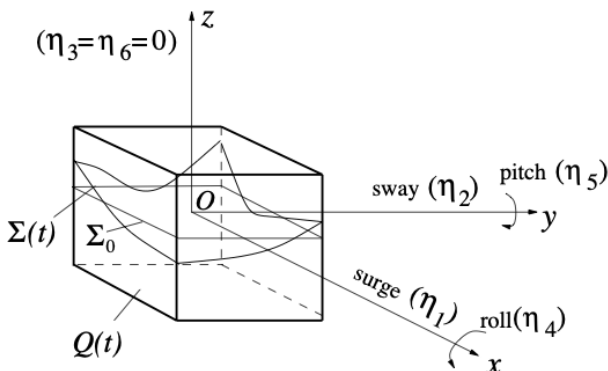


Fig. 1. The sketch of the spatially-moving tank with four degrees of freedom, which explains which the generalised coordinates in (1)

In addition, we consider the L -scaled Fourier (modal) representation of the free surface

$$\begin{aligned} f(x, y, t) = & a_1(t)f_1(x) + b_1(t)f_1(y) + \\ & a_2(t)f_2(x) + b_2(t)f_2(y) + c_1(t)f_1(x)f_1(y) + \\ & a_3(t)f_3(x) + b_3(t)f_3(y) + c_{21}(t)f_2(x)f_1(y) + \\ & c_{12}(t)f_2(y)f_1(x) + [linear] + o(m) \end{aligned} \quad (2)$$

where the first two terms have the $o(m^{1/3})$ order, the next three terms are of the order $o(m^{2/3})$ and the remaining quantities, without linear components, have $o(m)$ order. Here the spatial components $f_i^{(1)}(x)f_j^{(2)}(y)$ are the natural sloshing modes determined by the two-dimensional Stokes waves

$$\begin{aligned} f_i^{(1)}(x) &= \cos(\pi i(x + 1/2)), \\ f_i^{(2)}(y) &= \cos(\pi i(y + 1/2)), i \geq 0 \end{aligned}$$

According to [1], the lowest-order sloshing-related generalised coordinates in (2) are governed by the Narimanov-Moiseev-type nonlinear modal equations

$$\begin{aligned} & \ddot{a}_1 + 2\xi_{1,0}\sigma_{1,0}\dot{a}_1 + \sigma_{1,0}^2 a_1 + d_1 \left(\ddot{a}_1 a_2 + \dot{a}_1 \dot{a}_2 \right) + \\ & + d_2 \left(\ddot{a}_1 a_1^2 + \dot{a}_1^2 a_1 \right) + d_3 \ddot{a}_2 a_1 + d_6 \ddot{a}_1 b_1^2 + \\ & + b_1 (d_7 c_1 + d_8 a_1 b_1 + d_9 c_1 b_1 + d_{10} \dot{b}_1^2 a_1 + \\ & + d_{11} \dot{a}_1 \dot{b}_1 b_1 + d_{12} \dot{b}_1 \dot{c}_1) = -P_{1,0} \left(\ddot{\eta}_1 - S_{1,0} \ddot{\eta}_5 - g \eta_5 \right) = K_x(t), \\ & \ddot{b}_1 + 2\xi_{0,1}\sigma_{0,1}\dot{a}_1 + \sigma_{0,1}^2 b_1 + d_1 \left(\ddot{b}_1 b_2 + \dot{b}_1 \dot{b}_2 \right) + \\ & + d_2 \left(\ddot{b}_1 b_1^2 + \dot{b}_1^2 b_1 \right) + d_3 \ddot{b}_2 b_1 + d_6 \ddot{b}_1 a_1^2 + a_1 (d_7 c_1 + d_8 a_1 b_1) \\ & + d_9 c_1 a_1 + d_{10} d_{11} \dot{a}_1 \dot{b}_1 a_1 + d_{12} \dot{a}_1 \dot{c}_1 = -P_{0,1} \left(\ddot{\eta}_2 + S_{0,1} \ddot{\eta}_4 + g \eta_4 \right) = K_y(t); \end{aligned}$$

where the natural (circular) sloshing frequencies

$$\begin{aligned} \sigma_{j,i} &= \sigma_{i,j} = \sqrt{g\pi \sqrt{i^2 + j^2} \tanh(\pi \sqrt{i^2 + j^2} h)} \\ P_{i,0} &= P_{0,i} = \frac{2}{\pi i} \tanh(\pi i h) [(-1)^i - 1], \\ S_{i,0} &= S_{0,i} = \frac{2}{\pi i} \tanh(\pi i h / 2). \end{aligned}$$

The hydrodynamic coefficients at the nonlinear terms are functions of the mean liquid depth h .

When constructing the asymptotic periodical solution, we introduce the lowest-order component of the periodic solution

$$\begin{aligned} a_1(t) &= a \cos \sigma t + \bar{a} \sin \sigma t + O(m); \\ b_1(t) &= \bar{a} \cos \sigma t + a \sin \sigma t + O(m), \end{aligned}$$

Substitute them in the nonlinear modal equations, gather the similar quantities at different Fourier harmonics and show that the lowest-order amplitudes are governed by the secular equations

$$\begin{cases} a \left[\Lambda + m_1 \left(a^2 + \bar{a}^2 \right) + m_2 \bar{b}^2 + m_3 b^2 \right] + \bar{a} \left[(m_2 - m_3) \bar{b} b + \xi \right] = \bar{m}_x, \\ \bar{a} \left[\Lambda + m_1 \left(a^2 + \bar{a}^2 \right) + m_2 b^2 + m_3 \bar{b}^2 \right] + a \left[(m_2 - m_3) \bar{b} b - \xi \right] = \bar{m}_x, \\ b \left[\Lambda + m_1 \left(b^2 + \bar{b}^2 \right) + m_2 \bar{a}^2 + m_3 a^2 \right] + \bar{b} \left[(m_2 - m_3) \bar{a} a - \xi \right] = \bar{m}_y, \\ \bar{b} \left[\Lambda + m_1 \left(b^2 + \bar{b}^2 \right) + m_2 a^2 + m_3 \bar{a}^2 \right] + b \left[(m_2 - m_3) \bar{a} a + \xi \right] = \bar{m}_y \end{cases}$$

where

$$a^2 + \bar{a}^2 = aa, \quad b^2 + \bar{b}^2 = bb, \quad m_2 - m_3 = m_{23}.$$

This means that $a, \bar{a}, b, \bar{b} = O(m^{1/3})$ become functions of the forcing frequency $\Lambda = 1 - \sigma_1^2 / \sigma^2$, the damping coefficient $\xi = 2\xi_{0,1} = 2\xi_{1,0}$ and the $O(m)$ -order non-dimensional forcing amplitudes $m_x, \bar{m}_x, m_y$ and $\bar{m}_y$ in the front of the lowest Fourier harmonics in the right-hand sides of the modal equations ($K_x(t)$ and $K_y(t)$), i.e.

$$m_x = \frac{\sigma}{\pi} \int_0^{2\pi/\sigma} \cos \sigma t K_x(t) dt;$$

$$\bar{m}_x = \frac{\sigma}{\pi} \int_0^{2\pi/\sigma} \sin \sigma t K_x(t) dt,$$

$$\bar{m}_y = \frac{\sigma}{\pi} \int_0^{2\pi/\sigma} \cos \sigma t K_y(t) dt;$$

$$m_y = \frac{\sigma}{\pi} \int_0^{2\pi/\sigma} \sin \sigma t K_y(t) dt.$$

Because we consider sloshing due to the primary resonance, i.e., the forcing frequency is close to the lowest natural sloshing frequency, the right-hand side of the secular equations is not zero, i.e., at least, one of the non-dimensional amplitude parameters $m_x, \bar{m}_x, \bar{m}_y$ and m_y is not be zero. Based on the input

(forcing) amplitude parameters $m_x, \bar{m}_x, \bar{m}_y$ and m_y , one can identify the types of the tank forcing in terms of the primary resonance but adopting the secular system solution, $a, \bar{a}, b, \bar{b}$, as a function of σ / σ_1 , we can specify (classify) the types of liquid sloshing regimes and analyse the stability of these regimes.

When analysing the Narimanov-Moiseev-type approximation of the steady-state resonant sloshing in a circular base tank, [2] showed that each steady-state wave regime caused by the sway/surge/pitch/roll

periodic tank excitations has, to within the $O(m)$ contribution (which does not affect the wave type and its stability), an equivalent steady-state wave regime excited by a suitable orbital horizontal (elliptic) container movement. The same holds true for the square base container. Indeed, the non-dimensional

wave amplitude parameters $a, \bar{a}, b, \bar{b}$ are exclusively linked in with the four non-dimensional non-zero amplitudes $m_x, \bar{m}_x, \bar{m}_y$ and m_y associated with the lowest Fourier harmonics of the periodic tank forcing $\eta_i(t), i=1,2,4,5$. The higher harmonics do not

influence $a, \bar{a}, b, \bar{b}$ and, as we remarked in previous sections, the first $O(m^{1/3})$ and second $O(m^{2/3})$ components of the asymptotic periodic solution and its stability. The same non-dimensional forcing amplitudes $m_x, \bar{m}_x, \bar{m}_y$ appear for the orbital (cyclic) horizontal tank motions by

$$\eta_1(t) = e_x \cos \sigma t + \bar{e}_x \sin \sigma t,$$

$$\eta_2(t) = \bar{e}_y \cos \sigma t + e_y \sin \sigma t,$$

$$\eta_4(t) = \eta_5(t) \equiv 0,$$

$$m_x = P_1 e_x, \bar{m}_x = P_1 \bar{e}_x, \bar{m}_y = P_1 \bar{e}_y, m_y = P_1 e_y; P_1 = P_{1,0} = P_{0,1} < 0$$

so that, when

$$e_x e_y - \bar{e}_x \bar{e}_y = 0, \quad (4)$$

the tank trajectory degenerates to a straight line, namely, it reduces to the reciprocating tank movements.

This means that the types of the steady-state resonant wave regimes and their stability for the periodic sway/pitch/roll/surge tank movements can, within the framework of the Narimanov-Moiseev approximation, be associated with asymptotically equivalent steady-state wave regimes caused

by $m_x, \bar{m}_x, \bar{m}_y$ and m_y . Using an appropriate time lag

$t := t + t_0$, one can exclude $\bar{e}_x$ and focus on the only three input amplitude parameters.

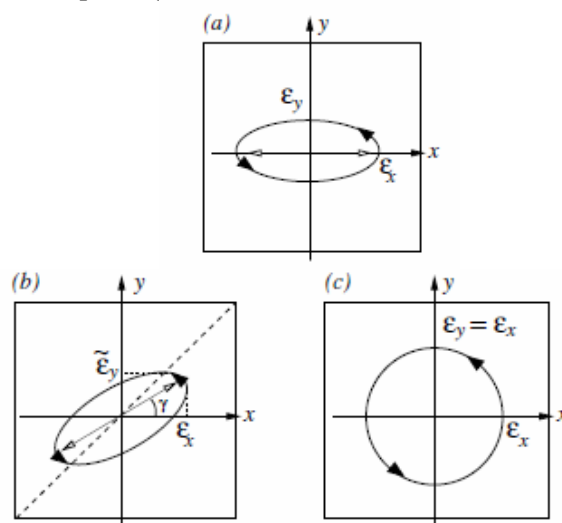


Fig. 2. The three types of equivalent orbital forcing caused.

When (4) is not satisfied, the orbital horizontal tank forcing determines a *centred elliptic trajectory* (of the tank) in the O_{xy} -plane, which is governed by

$$\left(e_y^2 + \bar{e}_y^2\right)x^2 + \left(e_x^2 + \bar{e}_x^2\right)y^2 - 2\left(e_x \bar{e}_y + \bar{e}_x e_y\right)xy = (e_x e_y - \bar{e}_x \bar{e}_y)^2$$

The corresponding tank trajectories in fig. 2 correspond to the three forcing types schematically depicted in figure: (a) the longitudinal elliptic forcing whose the major axis belongs to O_x , (b) the oblique elliptic forcing when the major axis has $0 < \gamma \leq \pi/4$ to the O_x -axis, and (c) the circular orbital forcing, which is the limiting case of (a) and (b). Here, $A = \sqrt{a^2 + \bar{a}^2}$, $B = \sqrt{b^2 + \bar{b}^2}$ and the solid lines imply forcing in fig. 2 (c).

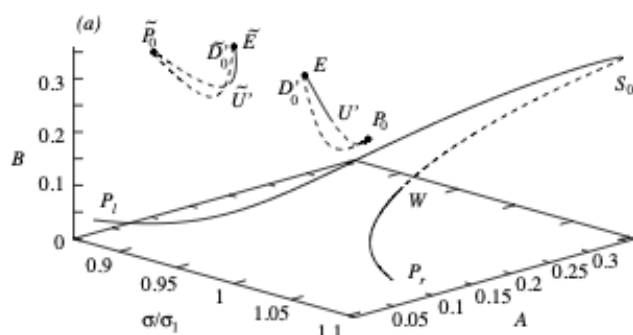


Fig. 3. The amplitude response curves in the

$(\sigma / \sigma_1, A, B)$ space for the circular orbital tank the stable steady-state sloshing. Specifically, the loop-type curves correspond to neatly-standing waves but the hard-spring type response curve reflects the swirling wave mode.

We conducted a numerical study of the steady-state waves and their stability for a range of the input parameters. The results are illustrated in fig. 3 for the circular type forcing from fig. 2(c). Here, the solid lines correspond to the stable sloshing but the dashed ones imply the hydrodynamic instability. The numerical analysis shows a paradox: even though the tank is exposed to a circular forcing and the only swirling is expected as in [2] for the circular base tank, there is a frequency range where the nearly standing (squares-like, [1]) sloshing occurs. This is because of the loop-type response curves in fig. 3. The nearly-standing waves are expected for the forcing frequencies in the left of σ_1 . The aforementioned paradox requires an experimental conformation and deducted model tests

Список використаних джерел

1. FALTINSEN, O. M. & ROGNEBAKKE, O. F. & TIMOKHA, A.N. (2003) Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square base basin. *Journal of Fluid Mechanics*. 387.p. 1-42.
2. RAYNOVSKYY, I. & TIMOKHA, A. (2018) Damped steady-state resonant sloshing in a circular base container. *Fluid Dynamics Research*. 50. Article ID 5487178.—p. 1-8.
3. FALTINSEN, O. M. & TIMOKHA, A.N. (2001) Adaptive multimodal approach to nonlinear sloshing in a rectangular tank. *J. Fluid Mech.* 432, 167–200.
4. MOISEYEV, N. N. & RUMYANTSEV, V. V. 1968 *Dynamic Stability of Bodies Containing Fluid*. Springer.

References

1. FALTINSEN, O. M. & ROGNEBAKKE, O. F. & TIMOKHA, A.N. (2003) Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square base basin. *Journal of Fluid Mechanics*. 387.p. 1-42.
2. RAYNOVSKYY, I. & TIMOKHA, A. (2018) Damped steady-state resonant sloshing in a circular base container. *Fluid Dynamics Research*. 50. Article ID 5487178.—p. 1-8.
3. FALTINSEN, O. M. & TIMOKHA, A.N. (2001) Adaptive multimodal approach to nonlinear sloshing in a rectangular tank. *J. Fluid Mech.* 432, 167–200.
4. MOISEYEV, N. N. & RUMYANTSEV, V. V. 1968 *Dynamic Stability of Bodies Containing Fluid*. Springer

УДК 532.595

Тимоха О. М.^{1,2}, д.ф.-м.н., чл.-кор. НАН
України,
Ткаченко Є. М.², аспірант

**Резонансні усталені хлюпання у
вертикальних баках, що рухаються
періодично у тривимірному просторі**

¹Центр Досконалості “Автономні морські
операції та системи”, Норвезький університет
природничих та технологічних наук, NO-7491,
Трондхейм, Норвегія,
e-mail: alexander.timokha@ntnu.no

²Інститут математики НАН України,
вул. Терещенківська 3, Київ, 01004, Україна,
e-mail: tkachenko45555@gmail.com

O. M. Timokha^{1,2}, Prof.Dr.Hab., Cor.Mem.of the
NAS of Ukraine,
E. M. Tkachenko², PhD Student

**Resonant steady-state sloshing in upright
tanks performing a three-dimensional
periodic motion**

¹ The Centre of Excellence “Autonomous Marine
Operations and Systems”, Norwegian University of
Science and Technology, NO-7491, Trondheim,
Norway,

e-mail: alexander.timokha@ntnu.no

²Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine,
Tereshchenkivska 3, str., Kiev, 01004, Ukraine,
e-mail: tkachenko45555@gmail.com

Розвиваються аналітичні підходи до гідростатичних капілярних (меніск) проблем у нескінченному горизонтальному каналі та осесиметричному контейнері. Для цих геометричних випадків знаходження капілярних менісків зводиться до задачі із невідомою границею із спеціальною системою звичайних диференціальних рівнянь. Їх розв'язки описують капілярні криві, які виникають в результаті перетину капілярних менісків та чи перерезного перерізу, чи меридіональної площини (в залежності від форми контейнера). Подальші дослідження капілярних хвиль вимагають знати аналітичні наближення цих капілярних кривих у метриці C_n , $n \geq 3$. Метою може бути побудова аналітичних наближених розв'язків відповідних систем звичайних диференціальних рівнянь. Ця стаття присвячена дослідженню границь застосувань аналітичних наближень Тейлора та Паде, які було запропоновано для цього класу капілярних задач у 1984 році Барняком та Тимохою. Ключові слова: хлюпання рідини, демпфування, усталені хвилі.

Analytical approaches to hydrostatic capillary (meniscus) problem in infinite horizontal channel and axisymmetric container are developed. For these geometric cases, finding the capillary menisci reduces to free boundary problems for special systems of ordinary differential equations. Their solutions describe capillary curves, which appear as intersections of the capillary menisci and (depending on the container type) either cross section or meridional plane. Further studies on capillary waves require to know analytical approximations of these capillary curves in the C_n , $n \geq 3$ metrics. An objective may consist of constructing analytical approximate solutions of the corresponding systems of ordinary differential equations. The present paper focuses on limits of applicability of the Taylor polynomial and Pad'e approximations, which were proposed for this class of capillary problems in 1984 by Barnyak & Timokha.

Keywords: sloshing, damping, steady-state waves.

Статтю представив д.т.н., проф. Лимарченко О.С.

The present paper considers two capillary surface problems for partly filled infinite channels and axisymmetric reservoirs. Finding the capillary surface (meniscus) reduces to boundary value problems for systems of ordinary differential equations. The ODEs describe capillary lines, which are an intersection of either cross or meridional plane, respectively. We show that the capillary lines are solutions of one-parameter families of the Cauchy problem for the ODEs. Following Barnyak & Timokha [1], we construct the Taylor and Pad'e approximations of these solutions.

Their radii of convergence are estimated. Whereas the capillary lines for channels may be effectively approximated by using both Taylor and Pad'e approximations, the approximations are less accurate for axisymmetric reservoirs.

Capillary surface in infinite channels

Consider the Oz-symmetric and, generally speaking, closed infinite channel (horizontal tube) whose rigid walls are defined by the function $y = \pm f(z)$ as in fig. 1. The tube is partly filled with a liquid whose hydrostatic shape, which is affected

by gravity force (parallel to Oz) and surface tension, is bounded with the capillary surface and the wetted tank surface $S_0 = x, y, z: -\infty < x < \infty, y, z \in O$. In the cross-section, Σ_0 is fully determined by capillary curve l_0 but S_0 is defined by l_1

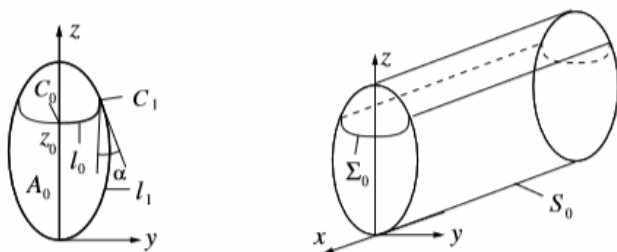


Figure 1. Capillary surface Σ_0 in an infinite closed channel (horizontal tube). Three-dimensional and cross-section views. Capillary curve l_0 is resulted from intersection of Σ_0 and the Oyz plane. Curve l_1 implies the intersection with the wetted tank surface. The present study assumes that the tank surface is defined as the single-valued presentation $y = \pm f(z)$. The gravity acceleration is parallel to the Oz axis.

Mathematical formulation

The problem on the capillary curve l_0 is furthermore considered in nondimensional statement, which appears after introducing the characteristic length r_0 of the two-dimensional cross-sectional area A_0 where $s = 0$ implies the starting point, $C_0 = (0, z_0)$, on the Oz-axis, but s_1 is the actual length of l_0 and implies the contact point

$$c_1 = (y(s_1) = f(z(s_1)), z(s_1)) \text{ of } l_0 \text{ and } l_1$$

$$y'' = -z'(B_0 z + c), \quad z'' = -y'(B_0 z + c), \quad (1)$$

where B_0 is the Bond number ($B_0 = \frac{\rho g r_0^2}{T_s}$).

System (1) should be equipped with the initial conditions $y(0) = z'(0) = 0$, $y'(0) = 1$ as well as one can suggest $z(0) = z_0 > 0$.

The Taylor approximation

M. Barnyak was most probably the first one who proposed to adopt the Taylor approximation for solving the capillary meniscus problem. Postulating this approximation

$$Z = \sum_{k=1}^N b_k S^{2k-2}, \quad Y = \sum_{k=1}^N a_k S^{2k-1}, \quad N \rightarrow \infty \quad (2)$$

$$a_1 = 1, b_1 = \epsilon,$$

$$b_{j+1} = \frac{b}{2j(2j-1)} \sum_{k=1}^j b_k a_{j-k+1} (2(j-k)+1), \quad (3)$$

$$a_{j+1} = \frac{b}{j(2j+1)} \sum_{k=1}^j b_k a_{j-k+2} (j-k+1), \quad j \geq 1.$$

When N is finite, the Taylor approximation (2) is applicable for $|S| \leq S_T(N, \epsilon, \epsilon)$ $|S| \leq S_T(N, \epsilon, \epsilon) < R_T$, where ϵ is a given accuracy. An estimate of the radius $S_T(N, \epsilon, \epsilon)$ follows from the condition $S_T = \max S_0$ such that

$$|Z'^2(S) + Y'^2(S) - 1| \leq \epsilon, \quad 0 < S < S_0(N, \xi, \epsilon)$$

This means that using the Taylor solution (2) deduces the Pad'e approximant

$$Y = S \frac{1 + \sum_{i=1}^L p_i^{(Y)} S^2}{1 + \sum_{i=1}^M q_i^{(Y)} S^2}; \quad (4)$$

$$Y = \frac{\xi + \sum_{i=1}^L p_i^{(Y)} S^2}{1 + \sum_{i=1}^M q_i^{(Y)} S^2}; \quad M + L = N$$

For given N, M (the number of simple poles accounted for ξ and the accuracy ϵ), one can define radius of convergence of (4) as $S_p = \max S$. Because the Pad'e approximant should account for the nearest simple poles, we expect to improve accuracy and increase radius of convergence with respect to the Taylor polynomials, i.e. $S_T = S_p$. Axisymmetric capillary surface.

Mathematical formulations

Cavities of revolution may provide either axisymmetric or exotic (nonsymmetric) capillary surface. The exotic surface was theoretically predicted and, later on, validated in the Space experiments [2]. In the present paper, we exclusively focus on studying the axisymmetric capillary meniscus whose mathematical formulation reduces, as in the previous section, to the system of ODEs

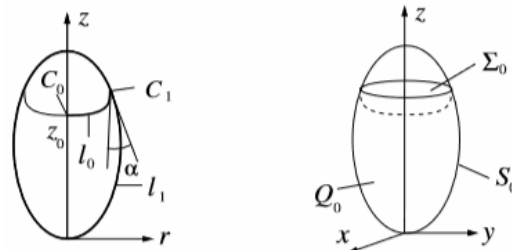


Figure 1. The same as in fig.1 but for containers of revolution and three-dimensional axisymmetric capillary surfaces.

$$\begin{aligned} r^{j'} &= -z' \left(B_0 z - \frac{z'}{r} + c \right), \\ \frac{r^{j'}}{z} &= r' \left(B_0 z - \frac{z'}{r} + c \right), \end{aligned} \quad (5)$$

the Taylor and Pad'e approximations of L_0^* .

The solution R , Z can also be suggested as analytical functions of $S \in \mathbb{C}$ at $S=0$. In the contrast to the previous section, we cannot prove that R and Z are meromorphic functions but only show, following

[1], that R and Z may have the simple pole singularity. This means that using the Taylor and Pad'e approximations of the Cauchy problem has no rigorous mathematical argumentation but could be considered as a numerical experiment. Adopting the Taylor polynomials

$$R = \sum_{k=1}^N a_k S^{2k-1}, \quad Z = \sum_{k=1}^N b_k S^{2k-2}, \quad N \rightarrow \infty, \quad (6)$$

leads to the recurrence formulas

$$a_1 = 1, \quad b_1 = \varepsilon,$$

$$b_{j+1} = \frac{1}{(2j)^2 \left[b \sum_{m=1}^j a_{j-m+1} [2(j-m) + 1] \sum_{l=1}^m a_l b_{m-l+1} - 4j \sum_{m=1}^{j-1} [m a_{j-m+1} b_{m+1}] \right]}, \quad (7)$$

$$a_{j+1} = -\frac{1}{j(2j+1)^2 \left[\sum_{m=1}^{j-1} a_{m+1} a_{j-m+1} m(2m+1) + \sum_{m=1}^j b_{j-m+2} (j-m+1) \left(b \sum_{l=1}^m [b_l a_{m-l+1} - 2m b_{m+1}] \right) \right]}, \quad j > 1.$$

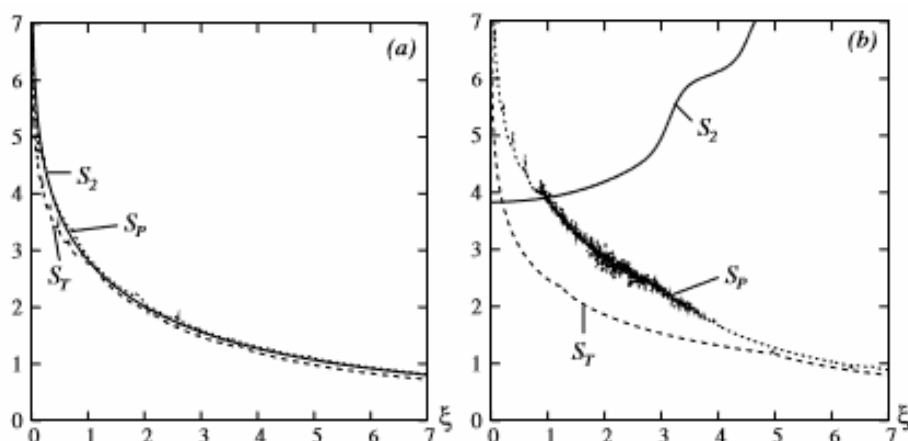


Figure 2. $T = 40$, $c = 10^{-7}$ and $M = 6$. The case (a) $B_0 > 0$ and (b) $B_0 < 0$.

The constructed approximations provide an accurate approximation when $S_T \geq S_2$ (for the Taylor polynomials) and/or $S_P \geq S_2$ (for the Pad'e approximants).

Fig. 2 represents results of numerical experiments on the radii of convergence $S_T(\xi)$, $S_P(\xi)$ as well as $S_2(\xi)$ as functions of ξ for $N = 40$, $M = 6$ and $\varepsilon = 10^{-7}$. When $B_0 > 0$ (the panel a), the Pad'e approximant slightly improves the accuracy so that $S_P \geq S_T$. However, this improvement is

not as strong as for channels. Most likely, there are either other types of singularities in the complex plane (not only simple poles) or many of the simple poles are located relatively close to $S=0$. Practically, usage of the Pad'e approximant guarantees rather accurate solution for the positive Bond number except, perhaps, for small ξ . Numerical estimates of $S_T(\xi)$, $S_P(\xi)$ and $S_2(\xi)$ for negative Bond numbers ($B_0 < 0$) are presented in fig. 2 (b). Here, we see that switching from Taylor to Pad'e approximation may significantly increase

the radius of convergence as $\varepsilon \leq 5$. However, this does not help. Neither Taylor nor Pad'e approximations are practically applicable for solving the capillary problem with the negative Bond number. The reason is that $S_2 \rightarrow \infty$ with increasing ξ , namely, the solution becomes non-periodic in the limiting case.

Conclusion

The present paper tests Taylor and Pad'e approximations of the capillary meniscus problem in infinite channels and axisymmetric containers. This continues the study by Barnyak&Timokha [1] who suggested that rational approximation may significantly improve the numerical accuracy. We showed that, for the positive Bond number ($B_0 > 0$), using the Pad'e approximants may

indeed provide an accurate solution of the capillary meniscus problem, except, perhaps, for large Bond numbers, when the capillary curve rapidly changes its behaviour at the contact line. In the contrast, neither Taylor polynomials nor rational approximations can guarantee getting an accurate analytical approximate solution for negative values of B_0 . Our approach reduces the problem to an one-parameter set of the Cauchy problems and, as long as $B_0 < 0$, there are critical values of this parameter when one must find the solution on large interval that is impossible by using our two analytical approximate methods.

Список використаних джерел

1. Barnyak M.Ya. On finding approximate analytical solutions of planar and axisymmetric single-connected capillary surfaces in the form of rational functions / M. Ya. Barnyak, A. N. Timokha // In Book: "Numerical-Analytical Methods for Investigation of Dynamics and Stability of Multidimensional Systems" / Lukovsky, I. (Ed.).— 1984.— P. 38–47.— Institute of Mathematics. Academy of Sciences of the UkrSSR, (inRussian).
2. Concus P., Finn, R., Weislogel M. Capillary surfaces in an exotic container: results from Space experiments / P. Concus, R. Finn, M. Weislogel // Journal of Fluid Mechanics.— 1999.— 394.— P. 119-135.

References

1. BARNYAK, M. Ya., TIMOKHA, A. N. (1984) On finding approximate analytical solutions of planar and axisymmetric single-connected capillary surfaces in the form of rational functions. In Book: "Numerical-Analytical Methods for Investigation of Dynamics and Stability of Multidimensional Systems". Kiev: Institute of Mathematics. Academy of Sciences of the UkrSSR.
2. CONCUS, P., FINN, R., WEISLOGEL, M. (1999) Capillary surfaces in an exotic container: results from Space experiments. *Journal of Fluid Mechanics*. 394. pp.119-135.

Надійшла до редколегії 30.05.2019

УДК 532.5

Троценко Я. П., аспірант.

Чисельне моделювання потоку в'язкої нестисливої рідини крізь циліндричні порожнини

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Акад.
Глушкова, 4-е,
e-mail: yaroslav.p.trotsenko@gmail.com

Ya. P. Trotsenko, Ph.D. student.

Numerical simulation of the flow of viscous incompressible fluid through cylindrical cavities

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-е,
e-mail: yaroslav.p.trotsenko@gmail.com

Досліджено течію в'язкої нестисливої рідини у циліндричному каналі з двома послідовними діафрагмами на основі чисельного розв'язання нестационарних рівнянь Нав'є–Стокса. Показано, що при певних параметрах течія рідини в області між діафрагмами нестационарна і характеризується наявністю нестійкого зсувного шару, у якому утворюється послідовний ряд кільцевих вихорів, що викликають квазіперіодичні автоколивання полів швидкості та тиску в отворі другої діафрагми. В залежності від довжини порожнини, утвореної діафрагмами, можуть виникати чотири режими автоколивань. При збільшенні відстані між діафрагмами частота коливань спадає в межах одного режиму автоколивань та різко збільшується при переході на наступний режим.

Ключові слова: пряме чисельне моделювання, циліндрична порожнина, канал з діафрагмами, вихрові структури, автоколивання.

The flow of viscous incompressible fluid in a cylindrical duct with two serial diaphragms is studied by the numerical solution of the unsteady Navier–Stokes equations. The discretization procedure is based on the finite volume method using the TVD scheme for the discretization of the convective terms and second order accurate in both space and time difference schemes. The resulting system of non-linear algebraic equations is solved by the PISO algorithm. It is shown that the fluid flow in the region between the diaphragms is non-stationary and is characterized by the presence of an unstable shear layer under certain parameters. A series of ring vortices is formed in the shear layer that causes quasi-periodic self-sustained oscillations of the velocity and pressure fields in the orifice of the second diaphragm. There can be four self-sustained oscillation modes depending on the length of the cavity formed by the diaphragms. With the increase in the distance between the diaphragms, the frequency of oscillations decreases within the same self-oscillation mode and rises sharply with the switch to the next mode.

Key Words: direct numerical simulation, cylindrical cavity, duct with diaphragms, vortical structures, self-sustained oscillations.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Течія рідини чи газу в нерегулярних каналах широко зустрічається як в природі, так і в технічних або наукових приладах. Через складну геометрію таких систем структура потоку приймає нестационарний характер, що при певних умовах призводить до виникнення автоколивань середовища і, як наслідок, появи звуку. Сьогодні даній проблемі приділяється значна увага як в експериментальному плані, так і в теоретичному. Завдяки прогресу комп'ютерної техніки стає можливим розв'язувати такі задачі за допомогою прямого чисельного моделювання [1].

Метою даної роботи є дослідження течії рідини в напівнескінченному циліндричному каналі з двома послідовними діафрагмами при різних довжинах порожнини, утвореної цими діафрагмами, а саме: моделювання відповідних процесів і чисельний розрахунок; аналіз структури потоку в області між діафрагмами; та визначення характеристик автоколивальних процесів залежно від відстані між діафрагмами.

2. Постановка задачі.

Розглядається течія рідини у напівнескінченному циліндричному каналі з двома послідовними діафрагмами. При цьому довжина

порожнини, утвореної діафрагмами, може набувати різного значення. В поздовжньому перетині каналу контури діафрагм в околі отворів мають форму півкола (рис. 1). Вважається, що поверхні каналу та діафрагм абсолютно жорсткі. Потік рідини з густиною ρ потрапляє в розрахункову область з рівномірною швидкістю V_1 через ліву межу ($x = 0$) та покидає її через праву ($x = L$). Течія розглядається при швидкостях значно менших за швидкість звуку в середовищі. Також припускається, що рух рідини в області між діафрагмами є близьким до осесиметричного, на що вказують експериментальні дослідження [1].

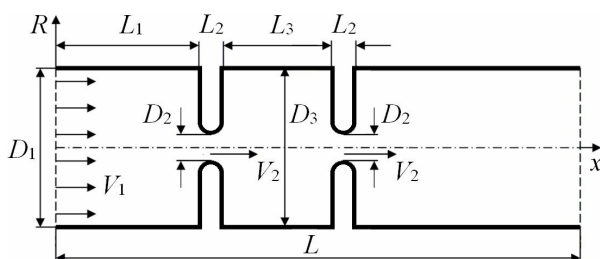


Рис. 1. Поздовжній перетин каналу

Геометричні параметри обираються такими: $D_2 = 6.35$ мм, $D_1/D_2 = D_3/D_2 = 8.16$, $L_1/D_2 = 12$, $L_2/D_2 = 1$, $L/D_2 = 92$. Відстань між діафрагмами змінюється в межах $L_3/D_2 \in [2.25, 6.5]$. Кінематична в'язкість середовища $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5}$ м²/с.

Відомо, що розміри джерел звуку, що породжується потоком, тобто розміри діафрагм та порожнини між ними, – малі в порівнянні з довжиною звукової хвилі [1]. Тому приймаються наступні гіпотези: потужність збуджених потоком акустичних коливань є значно меншою за потужність самого потоку, і звук не впливає на його характер. У зв'язку з цим задача розв'язується в межах моделі в'язкої нестисливої рідини.

Основним параметром задачі є число Рейнольдса, яке можна визначити як $Re = V_2 D_2 / \nu$, де V_2 – швидкість потоку в отворах діафрагм, осереднена за поперечним перетином. Тоді масштабом довжини є діаметр отворів діафрагм D_2 , швидкості – швидкість V_2 , часу – величина D_2 / V_2 , а масштабом тиску – подвоєний швидкісний напір ρV_2^2 .

В межах прийнятої моделі процес описується системою нестационарних рівнянь Нав'є–Стокса, що в безрозмірних величинах у векторній формі має вигляд

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{U} - \nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0. \quad (1)$$

Крайові умови для швидкості: рівномірний потік на вході в розрахункову область зі швидкістю $V_1 = 0.15$ м/с, що відповідає числу Рейнольдса $Re = 4228$; умова прилипання на твердих поверхнях; та рівність нулю нормального градієнту на виході з розрахункової області. Для тиску задається рівність нулю нормального градієнту на всій межі області окрім виходу з неї, де обирається постійний тиск рівний нулю. В початковий момент середовище знаходиться у стані спокою.

3. Чисельний алгоритм розв'язання задачі.

Розв'язання поставленої задачі проводиться чисельно за методом скінчених об'ємів. Внаслідок припущення щодо осової симетрії потоку в якості розрахункової області приймається половина поздовжнього перетину каналу. Для дискретизації області використовується неортогональна блочно-структурована сітка зі згущенням вузлів в отворах діафрагм та при наближенні до їх поверхонь. Кількість контрольних об'ємів вздовж поперечного перетину отвору діафрагми – 69 з найменшим кроком біля поверхні – $4 \cdot 10^{-5}$ м, загальна кількість об'ємів змінювалась від 125046 до 175446 залежно від відстані між діафрагмами.

Для обчислення інтегралів по контрольному об'єму застосовується узагальнена процедура Гауса. Для інтерполяції конвективних членів використовується TVD форма центрально-різницевої схеми з обмежувачем потоку типу Sweby [2]. Нормальні градієнти швидкості на поверхні елементів обчислюються зі значень швидкості в центроїдах сусідніх комірок за схемою другого порядку. На неортогональних ділянках сітки використовується процедура корекції похибки [3]. В якості схеми дискретизації похідної за часом обирається неявна триточкова схема другого порядку з різницями назад. Зв'язаний розрахунок поля швидкості та тиску проводиться за процедурою PISO [4].

Для розв'язання системи лінеаризованих алгебраїчних рівнянь використовуються ітераційні розв'язники, що побудовані на основі методу спряжених/біспряжених градієнтів для симетричних та асиметричних матриць. В якості передобумовлення обрано спрощені схеми неповної факторизації Холецкого та неповної LU-факторизації для симетричних і асиметричних матриць відповідно [5]. Задача розв'язується з використанням обчислювальних потужностей комплексу СКІТ Інституту кібернетики ім. В.М.

Глушкова НАН України. Більш детально алгоритм розв'язання та обґрунтування вибору відповідних методів розглянуто у роботі [6].

4. Аналіз результатів обчислень.

В роботі [7] було показано, що при відношенні відстані між діафрагмами до діаметру їх отворів $L_3/D_2 = 6$ в діапазоні чисел Рейнольдса $Re \in [2678, 4228]$ течія рідини в області між діафрагмами є нестационарною: утворюється кільцевий зсувний шар, у якому при наближенні до отвору другої діафрагми послідовно утворюються кільцеві вихори, що спричиняють в ньому коливання полів швидкості та тиску. Ці коливання мають періодичний характер та дають змогу оцінити частоту збудженого потоком звуку.

Розглянемо залежність поведінки системи від відстані між діафрагмами при $Re = 4228$. На рис. 2 зображено поле завихреності в половині поздовжнього перетину каналу після закінчення перехідних процесів при $L_3/D_2 = 2.5$. При даній, а також меншій, довжині порожнини утворення вихорів у зсувному шарі в області між діафрагмами практично не спостерігається. Тобто, після закінчення перехідних процесів зсувний шар стабілізується, а в глибині порожнини формується великий стійкий вихор.

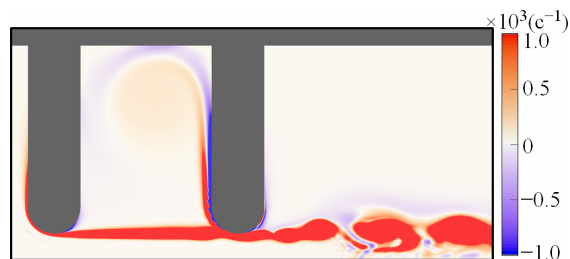


Рис. 2. Поле завихреності при $L_3/D_2 = 2.5$

При невеликому збільшенні відстані між діафрагмами до $L_3/D_2 = 2.75$ зсувний шар стає значною мірою нестационарним (рис. 3). Великий кільцевий вихор не розширюється вглиб порожнини, а залишається близько до струменя. Натомість розширюється другорядний вихор протилежної завихреності біля першої діафрагми. У зсувному шарі при наближенні до другої діафрагми чітко спостерігається утворення кільцевих вихорів. Частота утворення вихорів в даному випадку рівна $f_1 \approx 915.2$ Гц.

При подальшому збільшенні відстані між діафрагмами до $L_3/D_2 = 3.25$ структура потоку не змінюється, а частота утворення вихорів спадає майже обернено пропорційно відстані до

$f_1 \approx 830.5$ Гц. А при $L_3/D_2 = 3.5$ частота автоколивань різко зростає до $f_2 \approx 965.9$ Гц. Структура поля завихреності при цьому змінюється несуттєво. Внаслідок збільшення частоти зіткнення вихорів з діафрагмою, зменшується амплітуда утворених збурень і великий вихор біля другої діафрагми стає більш стійким.

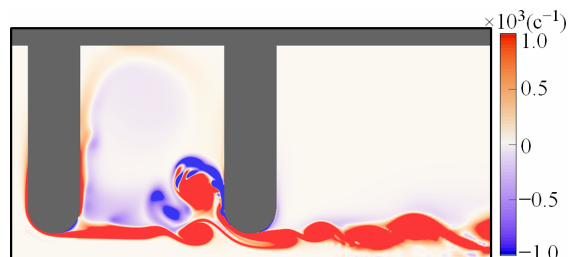


Рис. 3. Поле завихреності при $L_3/D_2 = 2.75$

Аналогічно до попереднього випадку, частота коливань зменшується до $f_2 \approx 853.4$ Гц при збільшенні відстані до $L_3/D_2 = 4.5$, а структура потоку майже не змінюється. При $L_3/D_2 = 4.75$ відбувається ще один стрибок частоти автоколивань до $f_3 \approx 942$ Гц. При цьому структура поля завихреності значно змінюється. З рис. 4 видно, що при $L_3/D_2 = 5$ великий вихор біля другої діафрагми розширюється вглиб порожнини. Проте через деякий час він руйнується, і процес його формування починається заново. При збільшенні відстані до $L_3/D_2 = 5.5$ зменшується час існування вихору, і збільшується час його формування. Частота коливань при цьому спадає до $f_3 \approx 865.8$ Гц.

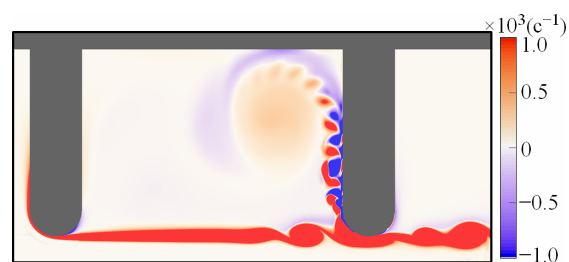


Рис. 4. Поле завихреності при $L_3/D_2 = 5$

При відстані між діафрагмами $L_3/D_2 = 5.75$ частота коливань знову різко зростає до $f_4 \approx 931.5$ Гц. При такій відстані течія в області між діафрагмами значно турбулізується. Великий вихор більше не розширюється вглиб порожнини, а періодично формується і руйнується біля струменя. А при відстані більшій за $L_3/D_2 = 6.25$ великий вихор вже не формується, і регулярність утворення кільцевих вихорів у зсувному шарі втрачається (рис. 5).

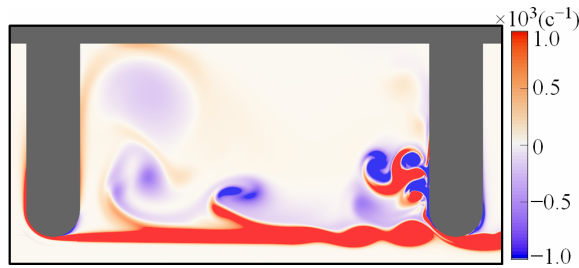


Рис. 5. Поле завихреності при $L_3/D_2 = 6.5$

Отже, можна побудувати графік залежності числа Струхаля коливань поздовжньої швидкості потоку U_x в отворі другої діафрагми від відношення відстані між діафрагмами до діаметрів їх отворів L_3/D_2 . В даній роботі його доречно визначити через відстань між отворами діафрагм $St_L = f(L_3 + L_2)/V_2$. З рис. 6 видно, що мають місце чотири режими автоколивань, в межах яких число Струхаля повільно зростає зі збільшенням відстані між діафрагмами, а перехід між цими режимами відбувається стрибком.

Список використаних джерел

1. Вовк І.В. Звук, рожденный потоком (очерки об аэрогидродинамической акустике) / И.В. Вовк, В.Т. Гринченко. – Киев: Наукова думка, 2010. – 221 с.
2. Sweby P.K. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws / P.K. Sweby // J. Numer. Anal. – 1984. – 21 (5) – P. 995–1011.
3. Jasak H. Error analysis and estimation for the finite method with applications to fluid flows. Ph.D. Thesis / H. Jasak. – London: Imperial College, 1996. – 394 p.
4. Ferziger J.H. Computational methods for fluid dynamics / J.H. Ferziger, M. Peric. – Berlin: Springer, 2002. – 424 p.
5. Barrett R. Templates for the solution of linear systems: Building blocks for iterative methods, 2nd Ed. / R. Barrett, M. Berry, T.F. Chan, J. Demmel, J.M. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine, H. Van der Vorst. – Philadelphia: SIAM, 1994. – 107 p.
6. Малу́га В.С. Численное исследование течения в канале с двумя последовательно расположенными стенозами. Алгоритм решения / В.С. Малу́га // Прикл. гидромех. – 2010. – 12, № 4. – С. 45–62.
7. Вовк І.В. Збудження автоколивань потоком рідини в циліндричному каналі з двома діафрагмами / І.В. Вовк, В.Т. Маципура, Я.П. Троценко // Нелінійні коливання. – 2019. – 22, №1. – С. 35–53.

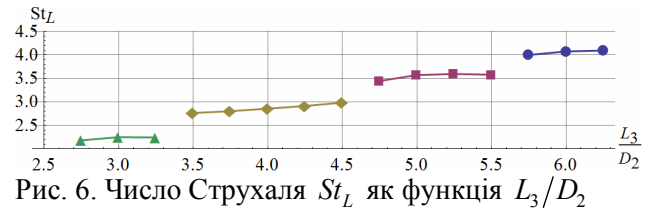


Рис. 6. Число Струхаля St_L як функція L_3/D_2

5. Висновки

Проведено чисельне моделювання течії в'язкої нестисливої рідини в циліндричному каналі з двома послідовними діафрагмами. Проведено аналіз особливостей руху середовища в області між діафрагмами залежно від відстані між ними. Показано, що при певних параметрах у зсувному шарі утворюється послідовний ряд вихорів, що спричиняють квазіперіодичні коливання полів швидкості та тиску в отворі другої діафрагми. Встановлено, що залежно від відстані між діафрагмами можуть виникати чотири режими автоколивань, перехід між якими відбувається зі стрибком частоти коливань.

References

1. VOVK, I. V. and GRINCHENKO, V. T. (2010) *Zvuk, rozhdennyj potokom*. Kiev: Naukova dumka.
2. SWEBY, P. K. (1984). High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *J. Numer. Anal.*, 21 (5), p. 995–1011.
3. JASAK, H. (1996). *Error analysis and estimation for the finite method with applications to fluid flows*. Ph.D. Thesis. London: Imperial College.
4. FERZIGER, J. H. and PERIC, M. (2002). *Computational methods for fluid dynamics*. Berlin: Springer.
5. BARRETT, R., BERRY, M., CHAN, T. F., DEMMEL, J., DONATO, J. M., DONGARRA, J., EIJKHOUT, V., POZO, R., ROMINE, C. and VAN DER VORST, H. (1994). *Templates for the solution of linear systems: Building blocks for iterative methods*, 2nd Ed. Philadelphia: SIAM.
6. MALYUGA, V. S. (2010). Численне дослідження течії в каналі з двома послідовно розташованими стенозами. Алгоритм рішення. *Прикл. Гідромех.*, 12 (4), p. 45–62.
7. VOVK, I. V., MATSYUPURA, V. T. and TROTSSENKO, Ya. P. (2019). Zbudzhennia avtokolyvan' potokom ridyny v tsylindrychnomu kanali z dvoma diafrahmamy. *Nelin. kolyv.*, 22 (1), p. 35–53.

Надійшла до редколегії 29.05.19

УДК 519.9

Турчин І.М.^{1,2}, д.ф.-м.н., доц.
Василько Г.В.¹, аспір.
Іваськевич О.Я.¹, нач. відділу

**Нестационарна змішана задача
теплопроводності для півбезмежного
порожнистого циліндра**

¹Львівський національний університет імені
Івана Франка, 79000, Львів, вул. Університетська, 1

²Університет Казимира Великого, 85064,
м. Бидгощ, вул. Хоткевича, 30, Польща
e-mail: ihorturchyn@gmail.com

I.M. Turchyn^{1,2}, Dr. Sci., Assoc. Prof.
G.V. Vasylo¹, PhD Student
O.Ya. Ivaskevych¹, Head of Department

**The mixed unsteady heat conduction problem for
a half-infinite hollow cylinder**

¹Ivan Franko National University of L'viv, 79000,
L'viv, Universytetska str., 1,

²Kazimierz Wielki University, 85064, Bydgoszcz,
Khotkiewicha str., 30, Poland
e-mail: ihorturchyn@gmail.com

Отримано розв'язок нестационарної задачі теплопроводності для півбезмежного порожнистого циліндра. Задача розглядається за змішаних умов нагрівання: на частині зовнішньої та внутрішньої граничних поверхонь циліндра та на його торці задано розподіл температури, а на іншій частині його граничної поверхні теплообмін за законом Ньютона. Розв'язок одержано із використанням інтегрального перетворення Лагерра за часовою змінною та перетворення Фур'є за просторовою змінною. Змішані умови на обох поверхнях задовольняються шляхом зведення задачі до послідовності парних інтегральних рівнянь, розв'язок яких будується методом рядів Неймана. Обґрунтовується збіжність методу та числових процедур його реалізації.

Ключові слова: нестационарна теплопроводність, змішані крайові умови, поліноми Лагерра, парні інтегральні рівняння.

Analysis of temperature fields is important for many engineering applications. The account of actual operating conditions of these structures frequently leads to mixed heating condition. The authors of this paper developed a new effective method of solutions derivation for mixed boundary-value unsteady heat conduction problems. This paper considers the cylinder with at the part of surface of which the temperature distribution is known. Outside this area the heat transfer by Newton's law is performed.

To the heat conductivity problem it is applied the Laguerre integral transformation in time variables and integral Fourier transformation in spatial variable. As a result the triangular sequence of ordinary differential equations is obtained. The general solution of these sequences is obtained in the form of algebraic convolution. Taking into account the mixed boundary conditions leads to dual integral equations. For solution of this problem it is proposed the method of Neumann's series. By this method the problem is reduced to the infinite system of algebraic equations, for which the convergence of reduction procedure is proved. Finally, the unknown temperature is submitted as a series of Laguerre polynomials. The coefficient of these series is Fourier integrals.

Key Words: unsteady heat conduction problem; mixed boundary conditions; Laguerre polynomials; dual integral equations.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

При розв'язуванні нестационарних задач теплопроводності зі змішаними крайовими умовами з використанням методу інтегрального перетворення Лапласа [1] дослідників чекають значні труднощі, пов'язані із розглядом так званих парних (дуальних) інтегральних рівнянь [2], які містять як незалежну змінну параметр перетво-

рення за Лапласом. Оскільки точний розв'язок таких систем віднайти вкрай важко, то доводиться застосовувати різні числові чи асимптотичні методи, що може вплинути на точність та достовірність результатів. Поряд із традиційними підходами до розв'язування таких задач останнім часом одержав розвиток метод поліномів Лагерра [3,4], який використовується в цій праці.

2. Постановка задачі та її розв'язання

Розглянемо півбесмежний порожнистий циліндр з радіусами внутрішньої поверхні R_1 та зовнішньої - R_2 . З моменту часу $t=0$ циліндр миттєво занурюється на глибину L в середовище, що має сталу температуру T^* . Нехтуючи процесом теплопровідності в середовищі та приповерхневими явищами біля границі циліндра будемо вважати, що в результаті цього занурення на торцевій поверхні циліндра, а також на частині внутрішньої та зовнішньої поверхонь циліндра вважається заданим часовий розподіл температури $T_c(t) = T^*(1 - \exp(-t_0 t))$, де t_0 - величина розмірності $[1/\text{sec}]$, яка визначає час стабілізації температури на поверхнях циліндра. Зовні ділянки $0 \leq z \leq L$ на поверхнях циліндра відбувається теплообмін за законом Ньютона із середовищем нульової температури. Зважаючи на це, задачу теплопровідності сформулюємо наступним чином:

$$\partial_{\rho\rho}^2 T + \rho^{-1} \partial_{\rho} T + \partial_{\tau\tau}^2 T = \partial_{\tau} T; \quad (1)$$

$$T(\rho, \gamma, 0) = 0; \quad (2)$$

$$T(\rho, 0, \tau) = T_c(\tau); \quad (3)$$

$$T(\rho_2, \gamma, \tau) = T_c(\tau), \quad 0 \leq \gamma \leq 1; \quad (4)$$

$$\partial_{\rho} T(\rho_2, \gamma, \tau) + \text{Bi} T(\rho_2, \gamma, \tau) = 0, \quad \gamma > 1; \quad (5)$$

$$T(\rho_1, \gamma, \tau) = T_c(\tau), \quad 0 \leq \gamma \leq 1; \quad (6)$$

$$\partial_{\rho} T(\rho_1, \gamma, \tau) - \text{Bi} T(\rho_1, \gamma, \tau) = 0, \quad \gamma > 1; \quad (7)$$

Тут $\rho = r/L$, $\gamma = z/L$ - безрозмірні змінні циліндричної системи координат, $\tau = a_T t / L^2$, $\text{Bi} = \kappa d / \lambda_T$, $\rho_1 = R_1 / L$, $\rho_2 = R_2 / L$, λ_T, a_T - відповідно, коефіцієнт теплопровідності та температуропровідності циліндра; κ - коефіцієнт тепловіддачі з його поверхонь.

До рівняння (1) застосуємо інтегральне перетворення Лагерра за змінною τ [4] та $\sin$ -перетворення Фур'є за змінною γ [5]. В результаті, враховуючи нульові початкові умови (2) та умови на торці (3) одержимо трикутну послідовність звичайних диференціальних рівнянь

$$\rho^{-1} d_{\rho} (\rho d_{\rho} \bar{T}_n) - \omega^2 \bar{T}_n = \lambda \sum_{m=0}^{n-1} \bar{T}_m - \xi T_{cn}, \quad (8)$$

У цих послідовностях $\omega^2 = \xi^2 + \lambda$, $\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = \int_0^{\infty} \exp(-\lambda \tau) \left[\int_0^{\infty} T_n^{(i)}(\rho, \gamma, \tau) \sin(\xi \gamma) d\gamma \right] L_n(\lambda \tau) d\tau$.

Аналогічно до результатів, одержаних в роботі [6], загальний розв'язок послідовностей (8) запишемо у вигляді

$$\bar{T}_n(\xi, \rho) = \sum_{j=0}^n \left[A_{n-j}(\xi) G_j(\xi, \rho) + B_{n-j}(\xi) W_j(\xi, \rho) \right] + Q_n \quad (9)$$

де

$$Q_n = \frac{\xi}{\omega^2} \left\{ T_{cn} - \frac{\lambda}{\omega^2} \sum_{k=0}^{n-1} T_{ck} \left(\frac{\xi^2}{\omega^2} \right)^{n-1-k} \right\}, \quad (10)$$

$$G_j(\xi, \rho) = \sum_{k=0}^j a_{j,k} \rho^k I_k(\omega \rho) \quad (11)$$

$$W_j(\xi, \rho) = \sum_{k=0}^j a_{j,k} (-\rho^k) K_k(\omega \rho). \quad (12)$$

Коефіцієнти $a_{j,k}$ одержуються із рекурентних співвідношень:

$$a_{j,k+1} = \frac{\lambda}{2\omega(k+1)} \sum_{m=k}^{j-1} a_{m,k} \quad (13)$$

при довільних $a_{j,0}^{(i)}$. В подальших розрахунках покладено $a_{0,0} = 1$, $a_{j,0}^{(i)} = 0, j \geq 1$.

Невідомі $A_n(\xi), B_n(\xi)$ знайдемо з умов (4)-(7).

Після застосування інтегрального перетворення Лагерра ці умови набудуть вигляду

$$T_n(\rho_2, \gamma) = T_{cn}, \quad 0 \leq \gamma \leq 1; \quad (14)$$

$$\partial_{\rho} T_n(\rho_2, \gamma) + \text{Bi} T_n(\rho_2, \gamma) = 0, \quad \gamma > 1; \quad (15)$$

$$T_n(\rho_1, \gamma) = T_{cn}, \quad 0 \leq \gamma \leq 1; \quad (16)$$

$$\partial_{\rho} T_n(\rho_1, \gamma) - \text{Bi} T_n(\rho_1, \gamma) = 0, \quad \gamma > 1; \quad (17)$$

Безпосереднє застосування $\sin$ -перетворення Фур'є до цих умов є неможливим, внаслідок їх різномірності, тому поступимо традиційно для випадку змішаних умов - продовжимо умови (15) і (17) на всю піввісь, увівши при цьому в розгляд невідомі функції $g_{n1}(\gamma)$ і $g_{n2}(\gamma)$:

$$\rho = \rho_1: \quad \partial_{\rho} T_n - \text{Bi} T_n = g_{n1}(\gamma) S_+(1 - \gamma)$$

$$\rho = \rho_2: \quad \partial_{\rho} T_n + \text{Bi} T_n = g_{n2}(\gamma) S_+(1 - \gamma) \quad (18)$$

Після застосування до (18) $\sin$ -перетворення Фур'є одержимо

$$\begin{aligned} \partial_{\rho} \bar{T}_n - \text{Bi} \bar{T}_n &= \bar{g}_{n1}(\xi), \quad \rho = \rho_1 \\ \partial_{\rho} \bar{T}_n + \text{Bi} \bar{T}_n &= \bar{g}_{n2}(\xi), \quad \rho = \rho_2. \end{aligned} \quad (19)$$

Безпосередня підстановка розв'язків (9) в умови (14)-(15) після виділення в лівій частині лише невідомих з нижнім індексом n приводить до систем алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} b_{1,1}A_n + b_{1,2}B_n = c_{1,n} \\ b_{2,1}A_n + b_{2,2}B_n = c_{2,n} \end{cases} \quad (20)$$

де $b_{1,1} = \omega I_1(\omega\rho_2) + \text{Bi} I_0(\omega\rho_2)$,

$b_{1,2} = -\omega K_1(\omega\rho_2) + \text{Bi} K_0(\omega\rho_2)$,

$b_{2,1} = \omega I_1(\omega\rho_1) - \text{Bi} I_0(\omega\rho_1)$,

$b_{2,2} = -\omega K_1(\omega\rho_1) - \text{Bi} K_0(\omega\rho_1)$,

$c_{1,n} = \bar{g}_{n1}(\xi) + \text{Bi} Q_n - \sum_{j=1}^n [A_{n-j}(\xi) \{G'_j(\xi, \rho_1) -$

$-\text{Bi} G_j(\xi, \rho_1)\} +$

$+B_{n-j}(\xi) \{W'_j(\xi, \rho_1) - \text{Bi} W_j(\xi, \rho_1)\}]$,

$c_{2,n} = \bar{g}_{n2}(\xi) - \text{Bi} Q_n - \sum_{j=1}^n [A_{n-j}(\xi) \{G'_j(\xi, \rho_2) +$

$\text{Bi} G_j(\xi, \rho_2)\} + B_{n-j}(\xi) \{W'_j(\xi, \rho_2) +$

$\text{Bi} W_j(\xi, \rho_2)\}]$. (21)

Рекурентний розв'язок систем (20) містить наразі невідомі функції $\bar{g}_{ni}(\xi)$, ($i=1,2$), які визначимо із змішаних умов (14)-(17). Із урахуванням формули обернення для $\sin$ -перетворення Фур'є після перетворень ці умови зведено до двох послідовностей парних інтегральних рівнянь

$$\int_0^\infty \xi^{-1} \bar{g}_{ni}(\xi) [1 + f_i(\xi)] \sin(\xi\gamma) d\xi = -\frac{\pi}{2} T_{cn} + \int_0^\infty F_{ni}(\xi) \sin(\xi\gamma) d\xi, \quad 0 \leq \gamma \leq 1 \quad (22)$$

$$\int_0^\infty \bar{g}_{ni}(\xi) \sin(\xi\gamma) d\xi = 0, \quad \gamma > 1, \quad (23)$$

$n=0,1,2,\dots, i=1,2$

де $\bar{g}_{ni}(\xi)$ - шукані функції, $f_i(\xi)$ та $F_{ni}(\xi)$ - відомі.

Для побудови розв'язку послідовностей парних інтегральних рівнянь (22), (23) подамо шукані функції $\bar{g}_{ni}(\xi)$ у вигляді рядів Неймана [5]

$$\bar{g}_{ni}(\xi) = \sum_{k=0}^\infty \sqrt{2k+1} a_{n,k}^{(i)} J_{2k+1}(\xi), \quad i=1,2. \quad (24)$$

Безпосередньою підстановкою легко пересвідчитись, що рівняння (23) задовольняється тотожно при довільних коефіцієнтах $a_{n,k}^{(i)}$, а з рівняння (20) одержуємо послідовності безмежних систем лінійних алгебричних рівнянь

$$a_{n,k}^{(i)} + \sum_{m=0}^\infty a_{n,m}^{(i)} b_{m,k}^{(i)} = c_{n,k}^{(i)} \quad (25)$$

де:

$$b_{m,k}^{(i)} = 2\sqrt{2m+1}\sqrt{2k+1} \int_0^\infty \frac{f_i(\xi)}{\xi} J_{2m+1}(\xi) J_{2k+1}(\xi) d\xi,$$

$$c_{n,k}^{(i)} = 2\sqrt{2k+1} \int_0^\infty \left[-\frac{\bar{T}_n^*(\xi)}{\sqrt{\xi}} + \frac{F_{ni}(\xi)}{\xi} \right] J_{2k+1}(\xi) d\xi;$$

Використовуючи властивості рядів Неймана та розривних інтегралів Вебера-Шафхейтліна можна встановити, що

$$\sum_{m,k=0}^\infty (b_{m,k}^{(i)})^2 < \infty, \quad \sum_{k=0}^\infty (c_{n,k}^{(i)})^2 < \infty. \quad (26)$$

Виконання умов (22) свідчить про квазі-регулярність систем (21), забезпечує збіжність числової процедури їх редукції. Крім того, знайдені коефіцієнти $a_{n,k}^{(i)}$ задовольнятимуть умову $\sum_{k=0}^\infty (a_{n,k}^{(i)})^2 < \infty, i=1,2; n=0,1,2,\dots$

Знаходження невідомих $a_{n,k}^{(i)}$ з систем (25) завершує побудову розв'язку вихідної задачі теплопровідності.

Як відомо, при числовому розрахунку обернення $\sin$ -перетворення Фур'є для малих γ виникають труднощі обчислювального характеру, пов'язані із нерегулярною збіжністю відповідних інтегралів.

Для усунення цієї проблеми проведено їх регуляризацию, а розв'язок остаточно подається у вигляді:

$$T(\rho, \gamma, \tau) = T^*(\tau) S_+(1-\gamma) + \lambda \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^\infty L_n(\lambda\tau) \int_0^\infty \{T_n(\xi, \rho) - T_n^* \frac{1 - \cos \xi}{\xi}\} \sin(\xi\gamma) d\xi \quad (27)$$

Як свідчать проведені числові експерименти, таке подання значно покращує практичну збіжність інтегралів, особливо на границях циліндра $\rho = \rho_1$, $\rho = \rho_2$ та при малих значеннях γ .

3. Висновки

Розглянуто нестационарну задачу теплопровідності для півбезмежного циліндра, на торцевій поверхні якого та на частинах зовнішньої та внутрішньої поверхонь задана температура, а на решті частин поверхонь – теплообмін за законом Ньютона. Розв'язок задачі будується із використанням інтегрального перетворення Лагерра за

часовою змінною та перетворення Фур'є за просторовою змінною.

Остаточно розв'язок має вигляд рядів за поліномами Лагерра із коефіцієнтами у вигляді інтегралів Фур'є.

Список використаних джерел

References

1. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю.М. Коляно – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
2. Sneddon I. Mixed Boundary-Value Problems in Potential Theory / I. Sneddon - North-Holl. Publ. Comp., Amsterdam, 1966. - 282 p.
3. Galazyuk V.A. Quasistatic thermal stress state of a layer with mixed heating conditions / V.A. Galazyuk, I.M. Turchin // Int. Appl. Mech. – 1998. – V.34, No 9. – P. 886-893.
4. Turchin I.M. Nonstationary end heating of a multilayer semiinfinite plate / I.M. Turchin // Journ. of Eng. Physics and Thermoph. - 2012. - Vol. 85, Iss. 6. - P. 1453-1462.
5. Sneddon I. Fourie transforms / I. Sneddon - McCraw-Hill Book Company, New York, 1951. – 542 p.
6. Turchin I.M. Nonstationary axisymmetric temperature field in a two-layer slab under mixed heating conditions / I.M. Turchin, Yu. O. Kolodiy, I. Timar // Journ. of Eng. Physics and Thermoph. - 2015. - Vol.88, Iss. 5. - P. 1135-1144.
7. Turchyn I.M. Quasistatic plane problem of thermoelasticity for the half space with coating under mixed conditions of heating / I.M. Turchin, Yu. O. Kolodiy // Journal of Math. Sci. – 2017. – 223, No. 2. – P. 145–158.
8. Колодій Ю.О. Змішана нестационарна задача теплопровідності для півбезмежного циліндра з покриттям / Ю.О. Колодій, І.М. Турчин, В.В. Хома // Вісник КНУ ім. Т. Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки - 2017, №3. – С. 91-94.
1. KOLYANO, Yu. M. (1992) *Metody teploprovodnosti i termouprugosti neodnorodnogo tela*. Kiev: Naukova Dumka.
2. SNEDDON, I. (1966) *Mixed Boundary-Value Problems in Potential Theory*. Amsterdam: North-Holland Publishers Company.
3. GALAZYUK, V. A. & TURCHIN, I. M. (1998) Quasistatic thermal stress state of a layer with mixed heating conditions. *Int. Appl. Mech.*, 34 (9). pp. 886-893.
4. TURCHIN, I.M. (2012) Nonstationary end heating of a multilayer semiinfinite plate. *Journ. of Eng. Physics and Thermoph.* 85 (6). pp. 1453-1462.
5. SNEDDON, I. (1951) *Fourie transforms*. New York: McCraw-Hill Book Company.
6. TURCHIN, I.M., KOLODIY, Yu.O. & TIMAR, I. (2015) Nonstationary axisymmetric temperature field in a two-layer slab under mixed heating conditions. *Journ. of Eng. Physics and Thermoph.* 88 (5). pp/1135-1144.
7. TURCHYN, I.M. & KOLODIY, Yu.O. (2017) Quasistatic plane problem of thermoelasticity for the half space with coating under mixed conditions of heating. *Journal of Math. Sci.* 233 (2). pp. 145-158.
8. KOLODIY, Yu.O., TURCHYN, I.M. & KHOMA, V.V. (2017) Zminena nestatsionarna problema teplovidnosti dlya pivbezmezhnogo tsylindra z pokryttyam/ *Visnyk KNU im. T. Shevchenka Ser.: Phys. & Math.* N 3 pp. 91-94.

Надійшла до редколегії 01.06.2019

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 004.8

Волошин О.Ф.¹, д.т.н., проф.
Святогор Л.О.², к.т.н., с.н.с.
Моргун В.В.³, аспірант

Смисловий аналіз текстів, представлених природною мовою

^{1,2,3}Київський національний університет імені
Т. Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: ¹olvoloshyn@ukr.net,
²lasvtgr@gmail.com,
³vladislavmorgun@gmail.com

O.F. Voloshyn¹, Dr. Sci. (Tech.), Prof.
L.O. Sviatogor², PhD (Tech.), Senior Researcher
V.V. Morgun³, PhD Student

Semantic Analysis of Texts Presented in Natural Language

^{1,2,3}Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: ¹olvoloshyn@ukr.net,
²lasvtgr@gmail.com,
³vladislavmorgun@gmail.com

У статті розглядається когнітивний підхід до однієї з проблем штучного інтелекту, яка полягає у смислового аналізу текстів, представлених природною мовою. Розробка методів та засобів аналізу дискурсу є необхідним кроком для побудови систем інтелектуальної комунікації людини і комп'ютера (робота). Запропоновано наукову гіпотезу, що спостерігач навколишнього середовища вивчає і розуміє Світ, коли він може виділити і проаналізувати Факти, Події та Ситуації. Запропоновано та обґрунтовано відповідні лінгвістичні та когнітивні структури вказаних «одиниць розумового аналізу» дійсності – «Ядро речення», «Факт», «Подія», «Ситуація» і «Смисл». Смисл вважається необхідною умовою розуміння діалогу та дискурсу.

Ключові слова: штучний інтелект, когнітивістика, знання, смисл, розуміння.

The article considers a cognitive approach to one of the problems of artificial intelligence consisting in semantic analysis of texts presented in natural language. Development of methods and means of discourse analysis is a necessary step for building systems of intellectual communication between a person and a computer (robot). A scientific hypothesis is proposed suggesting that an observer of the environment studies and understands the World when he is able to highlight and analyze Facts, Events and Situations. Corresponding linguistic and cognitive structures of these "units of semantic analysis" of the reality - "Fact", "Event", "Situation" and "Sense" - are proposed and justified. The Sense is considered a prerequisite for understanding dialogue and discourse.

Keywords: artificial intelligence, cognitive science, knowledge, sense, understanding.

Статтю представив д.т.н. Кудін В.І.

Вступ

У теорії штучного інтелекту (AI), як і в практиці природного, досить гострою є проблема розумового спілкування. В наш час відбуваються пошуки методів та засобів спілкування на рідній мові між людиною та системою штучного інтелекту (роботом, аватаром і т. ін.).

У науковому світі відома так звана «Проблема Тьюрінга», яка встановлює критерії успішності розумного діалогу між людиною та невідомим їй опонентом, в якості якого може бути інша людина або комп'ютерна програма. Побудовано досить потужні інтелектуальні системи – «Ватсон» та

«Джил» (США), які дуже ефективно імітують людський діалог в деякій обмеженій концептосфері. Але машинна технологія розумної комунікації, яка б суттєво базувалася на виявлених законах людського мислення та глибинного (за смислом) діалогу, поки що не побудована. Розробка такої технології є завданням окремої дисципліни – когнітивістики [1]. Перші серйозні спроби виявити тісні зв'язки між текстом та його смисловим змістом, а також формалізувати категорію «Смисл» спостерігаються в теоретичній лінгвістиці. В роботі [2] поставлена проблема, відома під назвою «Смисл – текст». Проте в лінгвістичній парадигмі ці спроби не ви-

явилися досить успішними. Як пізніше було доведено, причина невдачі полягає в тому, що сам текст розглядався як суто лінгвістичний об'єкт, в той час, як смисл являє собою «екстралінгвістичне явище» [3, 4]. Проблема Смыслу привернула до себе увагу дослідників багатьох природничих наук. Проте, як показав огляд успіхів в даному напрямку [4], в рамках окремих наук – лінгвістики, психології, логіки, філософії і т.д. – найбільш важливі задачі штучного інтелекту не вирішуються. Так було запропоновано новий підхід – «Інженерія знань» [5]. Зараз формується окрема гуманітарна дисципліна – «когнітивістика», яка базується на методах представлення знань, а також вивчає засоби їхнього перетворення та розуміння [4, 1]. Побудова моделей людського мислення [6, 7] має на меті як фундаментальні науково-теоретичні здобутки, так і комп'ютерні реалізації інтелектуальних систем. Буде корисним вказати на принципові особливості когнітивної науки, що можуть привести до непорозуміння. В центрі уваги тут знаходиться мисляча людина та її інтелектуальні і психічні здібності. Тому тут «не спрацьовує» властивість, яка в математиці називається «відношенням рефлексивності». Це означає, що під час діалогу суб'єкта з партнером його відчуття власного «Я» може змінюватись. Поведінка може змінюватись на протилежну. Прогнозування стає неможливим. Логічне мислення замінюється емоційним. Семантичний критерій «істини» або «хибності» змінюється на інший, який залежить від цілей суб'єкта. Комунікація може перетворитися на конкуренцію. Ці риси є притаманними інтелекту і вони не є хибними. В багатьох ситуаціях суб'єкта цікавить не сам інформаційний факт, а його оцінка, бо саме вона впливає на його реакцію (або на «життєвий досвід») і забезпечує власну «безпеку». Але ж оцінка, за своєю природою, є суб'єктивною (ментальною). Тому і критерії когнітивістики набувають, на відміну від математичних наук, – суб'єктивного, а не об'єктивного характеру. З цього випливає друга принципова риса когнітивної сфери: її постановки задач не відносяться до класу оптимізаційних задач із чіткими формалізованими критеріями. Це не має означати, що прийняття людиною рішень на основі когнітивного аналізу не має під собою жодних критеріїв: це означає, що самі критерії зміщуються із семантичної сфери Знання в бік прагматичних людських відносин. Адже Знання, за своєю сутністю, втілює в собі не тільки адекватне відображення

зовнішньої реальності в людській мові (онтологічній картині світу), але й вміщує, так би мовити, «рецепти людської поведінки» (продукційні твердження та настанови дидактичного характеру). В більшості ситуацій мислячий суб'єкт зіштовхується з невідомими йому раніше явищами буття, або з невідомими компонентами цих явищ. Тому саме «цінність» і «корисність» інформації безпосередньо впливають на реакцію людини на зовнішні події, та/або фіксується в її пам'яті у вигляді довгострокового досвіду. Отже, саме прагматичний компонент Знання набуває великого значення при вивченні розумової діяльності людини і має бути врахованим під час пошуку конструктивних процедур когнітивного аналізу.

В даній роботі за мету ставиться: запропонувати конструктивний підхід до когнітивного аналізу текстів природної мови. Він полягатиме в тому, що розуміння тексту являє собою процес, в якому інформація підлягає поступовому перетворенню із простих форм в складніші. Відповідно до цього на кожному етапі перетворень формуються відповідні «структурні одиниці», які мають різну складність та когнітивну навантаженість, причому структурованість цих одиниць поступово збільшується. Гіпотеза полягає в тому, що такі одиниці здатні моделювати деякі процеси людського мислення, зокрема, процеси мовної комунікації та розпізнавання текстів на природній мові. Зокрема, вони могли б виступати в ролі «конструктивів» під час розумового аналізу фактів дійсності та поведінки суб'єктів. За допомогою таких формалізованих «конструктивних одиниць» та операцій над ними стане можливим поступовий перехід від поданого тексту до його осмислення та ментального засвоєння.

Формалізація когнітивних одиниць передбачає, що їх можливо буде використати для створення комп'ютерних систем штучного інтелекту. Конструктивність запропонованих одиниць буде перевірена за допомогою експериментів. На відміну від багатьох дослідників, автори додержуються думки стратегічного характеру, що полягає в тому, що в лексиконі когнітивістики повинно використовувати не математичний чи формально-логічний апарати представлення знань, а дуже прості і зрозумілі кожній людині категорії. Адже ціною, що сплачуємо за ускладнення, є нерозуміння.

Що ми розуміємо під категорією «Смисл»

Результатом когнітивного аналізу тексту чи дискурсу повинен бути «Смисл» [8]. Смисл пере-

дає сутність тих думок, які автор повідомлення хотів передати партнеру по комунікації – користувачеві. Критерієм спілкування ми вважаємо взаєморозуміння комунікантів. Розумовий аналіз дискурсу базується на когнітивній парадигмі – «Розуміння через Смысл».

Смысл розглядається як когнітивна одиниця пізнання Світу. Він уособлює Знання в його максимально стиснутій, компресованій формі. Тобто, таке знання має узагальнений характер. У такому вигляді воно дозволяє суб'єкту орієнтуватися в безмежному світі фактів і подій і накопичувати цінний досвід. В суспільстві всі накопичені знання поєднуються в загальну «концептосферу», а особистості долучаються до неї як до компедіуму Знань і формують власні, ментальні і обмежені концептосфери [4]. Суб'єктивізм людини, яка сприймає конкретну інформацію, породжує, як правило, не один, а декілька смыслів. Вони, звісно, мають певну когнітивну кореляцію, але іноді можуть навіть вступати у протиріччя одне до одного. Множинність Смыслу ми вважаємо цілком нормальною для самореалізації інтелекту. Навпаки, така неоднозначність об'єктивно відображує той факт, що континууми знань та способи мислення комунікантів перетинаються, але не співпадають – адже кожний з них є непересічною особистістю.

З практичної точки зору, Смысл можна інтерпретувати як тезу або твердження на природній мові, яке має наступні властивості: (а) воно складається з мінімальної кількості слів та (б) за когнітивним змістом є максимально наближеним до задуму автора тексту. Задумом ми вважаємо комунікативну ідею автора повідомлення, яка виступає ментальною інтенцією активного суб'єкта.

Треба розрізнявати смысли двох типів.

Смысли першого типу називаються «концептосферними», тому що вони є згенерованими багатьма поколіннями людей та зафіксовані в тисячолітній культурній спадщині людства. До них віднесемо афоризми, моральні настанови, прислів'я та приказки, мудрі сентенції – тобто такі твердження, які відображають «правила життя» на певному етапі розвитку суспільства. Часто вони є моральними настановами або носять філософський характер і мають явно виражену прагматичну направленість. Наприклад, дуже часто літературний твір у жанрі байки містить у собі чітко і лаконічно сформульований Смысл даного твору (тобто, його «мораль»).

Смысл другого типу умовно назовемо «конструктивним», оскільки його треба самостійно побудувати суб'єктові в своїй свідомості. Конструктивний смысл формулює сам отримувач інформації. При цьому він користується своїми внутрішніми (ментальними) знаннями по Світ і вибирає з власної Базису знань потрібні концепти, зв'язуючи їх в потрібний спосіб між собою.

Окремо від вказаних типів будемо розглядати «тривіальний» смысл. Його слід розуміти як такий, що не має для користувача цінності, тому що він лежить на поверхні свідомості людини.

Повертаючись до багатозначності Смыслів, можемо додати наступне. Другий комунікант може згенерувати й такі смысли, яких автор повідомлення зовсім не мав на увазі. Це відповідає реаліям комунікації. Щоб запобігти такому результату, автор повинен максимально коректно висловлювати свою ідею та ретельно вибудовувати контекст повідомлення. Діалог допомагає зняти невизначеності. В усякому разі, перекриття смыслів відкриває нові можливості інтелектуального спілкування та розширює горизонти взаєморозуміння. Навіть – завдяки багатозначності комуніканти можуть навзаєм отримати нові знання. В когнітивній парадигмі Смысл можна розглядати як інструмент спілкування людей з підвищеним рівнем інтелекту. Інтелектуальна комунікація передбачає, що співрозмовники переходять від констатації фактів до їхнього узагальнення та оцінок. Будь-яке суспільство є сильним за рахунок сукупності власних смыслів [6]. Як відомо, наукова галузь, яка вивчає закони генерування знакових послідовностей – семіотика – поділяє свій контент на три області. Це – синтаксис, семантика і прагматика. Якщо семантика вивчає відношення Знака до Світу (або Дійсності), то прагматика розглядає відношення Знака до Користувача. Саме тут повинні бути прийнятими до уваги інтелектуальні особливості людини, її суб'єктивне ставлення до Світу та до інших осіб. Отже, категорію Смысл ми будемо вважати прагматичним явищем людського розуму, яке виступає на перший план комунікації в окремих ситуаціях спілкування.

Стратифікація Знань

В процесі інтелектуального саморозвитку людина набуває свої знання за допомогою запитань. Наприклад, щоб зрозуміти деякий простий факт дійсності, що спостерігається, суб'єкту достатньо його локалізації в просторі та часі: «що, де, коли?»

Або потрібно визначити кількість — вказати «скільки?». Ці запитання можна вважати «координатами знання». В наступному варіанті те ж явище потребує додаткових пояснень — «чому?», «внаслідок чого?». Більше розуміння ми отримаємо, отримавши відповіді на інші суттєві запитання: «для чого?», «з якою метою?», або «який маємо результат?». Якщо ж ми спостерігаємо досить складне явище, пов'язане, наприклад, з поведінкою людини, то виникають питання «що відбувається?», «що сталося?». Нарешті, при наявності складної ситуації, яка реалізувалась в результаті ряду подій, її можливо пояснити за допомогою запитань: «яка склалася ситуація?», «що призвело до цієї ситуації?» та «які наслідки можна очікувати?». Кардинальним запитанням може бути таке: «який смисл ситуація має особисто для мене?».

Вказані, та можливі інші запитання розрізняються глибиною проникнення в сутність явища, отже — його розуміння. Тому вони мають назву «страти знань» [9]. Саме стратифікація знань підказує нам шляхи до виявлення «одиноць знань», якими, на наш погляд, може оперувати людина в процесі семантико-прагматичного аналізу мовної поведінки мислячого суб'єкту.

Структуровані одиниці аналізу

В даному розділі подаються «одиноць когнітивного аналізу», структура яких поступово ускладнюється. Перехід від однієї до іншої означає поступове наближення до смислової конструкції. Як було вказано, Текст є носієм семантичної та прагматичної інформації. Обидва компоненти є присутніми як в авторському Задумі, так і в кінцевому результаті сприйняття та розуміння Тексту. Сам текст цікавить нас з боку когнітивної комунікації — адже він є носієм людської думки. У відповідності до задачі, що розглядається, з нього потрібно вилучити саме прагматичну складову — Смысл дискурсу. Для досягнення цієї мети потрібно винайти об'єкти та процедури когнітивного аналізу.

Центральним поняттям синтаксису, основною його одиницею є речення. Речення — це мінімальна комунікативна одиниця, яка про щось повідомляє. Лінгвістичним елементом речення можна вважати «слово».

Ім'я. Такі слова, що вживаються в мові для іменування предметів, мають когнітивне навантаження. Саме імена суб'єктів, об'єктів та дій, як правило, забезпечують семантичний зв'язок онто-

логічної Мовної картини світу із реальністю, тому ми їх можемо зрозуміти.

Ядро. Як правило, речення бувають розширеним. Головне смислове навантаження несуть підмет, присудок та доповнення або обставини образу дії. Ця трійка максимальним чином відтворює задум автора, тому другорядні члени речення в деякому розгляді можна відкинути. При редукції залишається «ядро речення», яке залишає суттєву інформацію про подію. Саме тому ядро несе когнітивне навантаження і може виступати як «одиноць розуміння».

Факт. Кожне просте речення описує один Факт. Факт розглядається як фрагмент дійсності, що реалізувався в своєму часі та просторі. З точки зору природного походження Факт, сам по собі, є нейтральним, тобто, він не може бути ні хорошим, ні поганим. Тільки після того, як людина, що спостерігає, виявить якийсь зв'язок між фактом і собою, вона може надати йому Оцінку. Тобто, Факт сам по собі не має смислу — окрім такого, що він відбувся. Смысл може бути виявлений або сконструйований в концептосфері мислячого суб'єкта — в його ментальній і мовній «Картині світу». Деякі вербалізовані факти потребують інтерпретації, після чого вони стануть зрозумілими. В чому полягає їхня інтерпретація? Людське мислення побудоване таким чином, що вона — людина — прагне встановити причини та наслідки будь-якого явища. Це — першочергові чинники розуміння факту. Їх ми будемо називати «мотивацією» факту. Вмотивований Факт є пристосованим до його інтерпретації в заданій концептосфері. Його когнітивна здатність є зафіксованою і потужною.

Друге «висвітлення» Факту надає вказівка на результат його появи, або, якщо дія не завершена, — мета діючого суб'єкта.

Отже, Факт повинен виступати в контексті причини та наслідку, і саме в цьому контексті він отримує новий статус — бути зрозумілим.

Подія. Таким чином, вмотивований Факт утворює нову когнітивну одиницю, яку ми називаємо «подією». При тому в якості причини ми вибираємо або попередній в часі факт, або результат певної дії, або досягнення системою певного стану, або досягнення показником певного рівня і таке інше. Ці параметри можуть знаходитись або в самому контексті, або бути взятими із Бази знань. А в якості наслідків вибираємо мету діючого Суб'єкту або

результат його дії. Отже, формат події може бути визначений таким чином:

$$\text{ПОДІЯ} = (\text{ПРИЧИНА} + \text{ФАКТ} + \text{МЕТА} \mid \text{РЕЗУЛЬТАТ})$$

Знак «+» означає приписування до Факту зліва та справа відповідних груп слів. Отже, Факт повинен виступати в контексті причини, цілі та результату, і саме в такому контексті він отримує новий когнітивний статус – бути зрозумілим.

Приклад Події. «Завдяки тому, що почався дощ, мандрівники швидко розгорнули палатку, щоб залишити продукти і одяг сухими».

Деяку сукупність взаємопов'язаних Подій, які пов'язані єдністю місця, часу та діючими особами можна об'єднати в окрему Ситуацію.

Ситуація. Ситуація розглядається як опис деякого стану системи, що має цілісність представлення та закінченість деякого процесу. Цей опис фрагменту реальності несе в собі макрочастину авторського задуму. Весь текст покривається скінченим числом ситуацій, і для кожної з них можна побудувати свій смисл. Після когнітивного поєднання і узагальнення всіх ситуативних смислів ми отримаємо загальний Смысл (або декілька смислових тез) повного тексту. Що і буде остаточним результатом смислового аналізу. Таким чином, Ситуація виступає як мовний (вербалізований) об'єкт досить складної структури, який інтелектуальна свідомість сприймає як цілком достатній матеріал для різнобічного вивчення та осмислення. Отже, відносимо ситуацію до когнітивних макроодиниць аналізу довколишньої реальності.

Щодо Ситуації є особливо доречним ставити питання, який вона має Смысл для спостерігача.

Смысл. Визначення Смыслу було дане вище. В даному контексті можна лише підкреслити, що Смысл також є когнітивною одиницею розуміння дійсності. А саме, він завершує певний етап аналізу Ситуації (або Події), є конкретним результатом аналізу і може розглядатись як одиниця прагматики. Смысл синтезується після виявлення Фактів, Подій та Ситуацій і виступає як їхня розумова інтерпретація.

Кроки до виявлення смислу

Після обґрунтування одиниць когнітивного аналізу сам процес виявлення Смыслу виглядає наступним чином.

– Кожне речення заданого Тексту ідентифікується як Факт – тобто, записується в певному форматі «Факт».

– До кожного Факту додаються Причина (ліве подовження Факту) та Мета або Результат (праве подовження речення). Отримуємо послідовність Подій, які є присутніми в повному Тексті.

– Взаємопов'язані між собою групи Подій поєднуються в окремі Ситуації. Кожна з них записується в заданому форматі. Для розчленування послідовності Подій на Ситуації можуть бути використані синтаксичні ознаки Тексту – абзаци, або ознаки скінченності дій – дієслова.

– Група взаємопов'язаних Подій, що оформлюється як Ситуація, а також має власний формат запису. Сам цілісний Текст перетворюється на послідовність Ситуацій, а можливо – на одну. Кожна Ситуація має глибинну когнітивну природу і легко піддається осмисленню та розумінню. Для кожної Ситуації в концептосфері відшукується відповідний ситуаційний Смысл.

– Далі всі ситуаційні смисли за допомогою певних когнітивних процедур узагальнюються і перетворюються на один (або більше) загальний Смысл повного Тексту. Отримано кінцевий результат когнітивного аналізу.

Зауваження. Якість вказаного перетворення «Текст – Смысл» може бути оцінена або іншою людиною (експертом), або перевірена на практиці. Можливо також вводити до розгляду певні статистичні критерії. В цьому полягає принцип прагматичності інтелектуального мислення, який апелює до самонавчання «розумної» системи та підвищення її статусу. В цьому полягає принцип інтелектуального прагматичного мислення.

Висновки

Розумова комунікація суб'єктів має на увазі обмін знаннями та розуміння їх партнерами. Важливо виявити такі «когнітивні одиниці» та операції над ними, які сприяють досягненню цієї мети. Запропоновані вище «одиниці когнітивного аналізу» дискурсу відображають деякі суттєві властивості людського мислення, що стосуються аналізу мовної інформації про зовнішній Світ. Вони мають різні структури та складність, вкладаються в певні формати представлення та є конструктивними для комп'ютерного моделювання. Сприйняття тексту в свідомості суб'єкта досягається в парадигмі «Розуміння через Смысл». Смысл розглядається як когнітивне наближення до авторського Задуму, який

втілюється в текстовому повідомленні засобами природної мови. Розуміння трактується як побудова Смислу за допомогою засобів власної (ментальної) або суспільної концептосфери. Стверджується, що в якості критерія адекватності Смислу до текс-

ту може застосовуватися оцінка іншої людини (експерта або автора). Як показує науковий прогрес, ця важлива обставина не може заважати побудові комп'ютерних програм і створенню «розумних» роботів та інтелектуальних систем.

Список використаних джерел

1. Таран Т.А. Искусственный интеллект и гуманитарные проблемы: конфликты, рефлексивные процессы, обучающие системы: избр. труды / Т. А. Таран. – Київ: Просвіта, 2011. – 223 с.
2. Мельчук И. А. Язык: от смысла к тексту / И.А.Мельчук. – М.: Языки славянской культуры. 2012. – 76 с. — (Studia philologica).
3. Рубашкин В.Ш. Представление и анализ смысла в интеллектуальных информационных системах / В. Ш. Рубашкин. – М.: Наука, 1989. – 189 с.
4. Маслова В.А. Введение в когнитивную лингвистику / В.А. Маслова – М.:Флинта: Наука, 2011. – 296 с.
5. Гаврилова Т. А. Извлечение и структурирование знаний для экспертных систем / Т. А. Гаврилова, К. Р. Червинская. – Москва: Радио и связь, 1992. – 200 с.
6. Чернышев Д.А. Как люди думают? / Д. А Чернышев. – Москва: Манн, Иванов и Фербер, 2013. – 304 с.
7. Новиков А. И. Смысл: семь дихотомических признаков / А. И. Новиков // Теория и практика речевых исследований. – Москва: Изд. МГУ, 1999. – С. 132-144.
8. Штерн І. Б. Вибрані топіки та лексикон сучасної лінгвістики: Енциклопедичний словник / І. Б. Штерн. – Київ: Артєк, 1998. – 336 с.
9. Гаврилова Т.А., Воинов А.В. Визуальный концептуальный анализ знаний и данных для интеллектуальных и обучающих систем // VI международная конф. «Знание – Диалог – Решение» (KDS – 97). Сборник научных трудов в 2-х томах. Т.1. – Ялта, 1997.

References

1. TARAN, T.A. (2011) *Iskusstvennyj intellekt i humanitarnye problemy: konflikty, refleksivnye proces-sy, obuchajushhie sistemy: izbr.trudy*. Kyiv: Prosvita.
2. MELCHUK, I. A. (2012) *Jazyk: ot smysla k tekstu*. Moskva: Jazyki slavjanskoj kul'tury.
3. RUBASHKIN, V. Sh. (1989) *Predstavlenie i analiz smysla v intellektual'nyh informacionnyh sistemah* Moskva: Nauka.
4. MASLOVA, V.A. *Vvedenie v kognitivnuju lingvistiku*. Moskva: Flinta: Nauka.
5. GAVRILOVA, T.A., CHERVINSKAYA, K.R. (1992) *Izvlechenie i strukturirovanie znanij dlja jekspertnyh system*. Moskva: Radio i Sviaz'.
6. CHERNYSHEV, D.A. (2013) *Kak ljudi dumajut??* Moskva: Mann, Ivanov & Ferber.
7. NOVIKOV, A.I. (1999) *Smysl: Sem' dihoto-mischeskih priznakov. Teorija i praktika rechevyh issledovanij*. Moskva: MGU.
8. STERN, I.B. (1998) *Vy`brani topiky` ta leksy`kon suchasnoyi lingvisty`ky`*: *Ency`klopedy`chny`j slovny`k*. Kyiv: Artek.
9. GAVRILOVA, T.A., VOINOV, A.V (1997) *Vizual'nyj konceptual'nyj analiz znanij i dannyh dlja intellektual'nyh i obuchajushhih sistem* // VI mezhdunarodnaja konf. «Znanie– Dialog– Reshenie».

Надійшла до редколегії 25.11.2019

РАДІОФІЗИКА

УДК 571.1

Є.В. Мартиш, д.ф.-м.н., проф.

Зменшення негативного впливу змін космічної погоди на стан людини

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, Факультет радіофізики,
електроніки та комп'ютерних систем, 03127, м.
Київ, просп. Акад. Глушкова, 4г
e-mail: e.martysh@gmail.com

E.V.Martysh, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Prof.

Reducing the negative impact of changes in space weather on human condition

Taras Shevchenko National University of Kyiv;
Faculty of Radio Physics, Electronics
and Computer Systems,
03127, Kyiv, Hlushkova Avenue, 4g,
e-mail: e.martysh@gmail.com

В статті на основі аналізу фізичних факторів, які відповідають за параметри космічної погоди біля Землі, можливих шляхів впливу збурень геомагнітного поля на стан людського організму та методи нетрадиційної медицини по запобіганню негативного впливу таких збурень, зроблені висновки про можливість застосування акупунктури у профілактиці і ліквідації такого впливу та можливість використання плазмової медицини для вирішення з підвищеною ефективністю цих проблем.

Ключові слова: Магнітні бурі, акупунктура, плазмова медицина

In the article, based on the analysis of the physical factors responsible for the parameters of space weather near the Earth, possible ways of influence of the geomagnetic field disturbances on the state of the human body and methods of untraditional medicine to prevent the negative impact of such disturbances, the conclusions about the possibility of using acupuncture in the prevention and elimination of such influence are made. and the ability to use plasma medicine to address these problems with high efficiency.

Keywords: Magnetic storms, acupuncture, plasma medicine

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Черняк В.Я.

Проблема впливу сонячної активності на здоров'я людини представляє значний інтерес і збільшення кількості досліджень в цій галузі свідчить про вагомість постановки такої задачі у сьогоденні. Фізичні аспекти цієї проблеми становлять помітну частину сонячно-земної фізики. Її сучасні успіхи дозволяють роботи більш-менш обґрунтовані прогнози геомагнітної обстановки на 3-4 дні. Як відомо [1], Сонце випромінює енергію практично в усьому спектрі електромагнітного випромінювання. Цей спектр складає приблизно 20 октав (Рис.1).

Найбільша частина цієї енергії зосереджена в променях видимого світла та теплових інфрачервоних променях. Енергія цих випромінювань надає можливість існування всіх численних форм життя на нашій планеті. Проте навіть невелика по кількості частина небезпечної для живих організмів іонізуючої радіації, що проникає до Землі, здатна вбити все живе. Тому можна сказати, що життя на нашій планеті є

можливим значною мірою завдяки кільком природним захисним оболонкам. Вони входять до структури атмосфери та навколишнього для Землі космічного простору. Першою з них, починаючи з межі міжпланетного середовища, є магнітосфера. Вона сприймає потік галактичних та сонячних променів і сонячного вітру.

Останній народжується у верхніх прошарках сонячної атмосфери. Температура цих прошарків є досить значною (біля 6000 K), тому вони постійно випаровуються в оточуючий космічний простір. Головною складовою речовини, яка внаслідок такого процесу утворилась та поширюється в об'єм Сонячної системи, є плазма. Вона складається з іонів водню та гелію і, звичайно, електронів. Цей потік „прихоплює” з собою і часточку магнітного поля Сонця, заповнює в такому складі всю планетну систему і поширюється навіть далеко за її межі. Цей потік і репрезентує сонячний вітер. Швидкість його розльоту складає сотні кілометрів за секунду

навіть тоді, коли Сонце є спокійним, і збільшується у кілька разів при збуреннях.

Більшість планет Сонячної системи мають власні магнітні поля. Сонячний вітер приносить також поле від Сонця, тому в цій системі утворюється так зване міжпланетне магнітне поле. Його стан є суттєвим для процесу взаємодії складових сонячного вітру з магнітним полем Землі (Рис. 2).



Рис.2. Схема взаємодії сонячного вітру з магнітосферою Землі.

Наступна важлива оболонка – іоносфера. Цей прошарок має товщину у кілька сотень кілометрів, а його нижня межа знаходиться на відстані 90 км від поверхні Землі. Він має значну густину газу, помітна частина якого є іонізованою. Такий стан підтримується за рахунок поглинання шкідливих для життя *рентгенівських* та ультрафіолетових променів.

Решту далекого ультрафіолетового випромінювання, яке проходить ще ближче до земної поверхні, поглинає особливий прошарок атмосфери – озоновий. Він існує за рахунок поглинання ультрафіолету з довжиною хвилі, меншою від 0,3 мкм. Тому енергійні зміни в сонячному вітрі та короткохвильовому випромінюванні, які обумовлені сонячною активністю, не проникають в біосферу.

Внизу вказані області сонячної атмосфери, де здебільшого формується спостережуване випромінювання. Заштриховано область спектру *а-б*, яка сприймається людським оком. У тому ж рядку відмічені області спектру поглинання і випромінювання, яке поглинається в атмосфері Землі, або відбивається іоносферою. Земля має власне магнітне поле, яке досить сильно взаємодіє з міжпланетним магнітним полем.

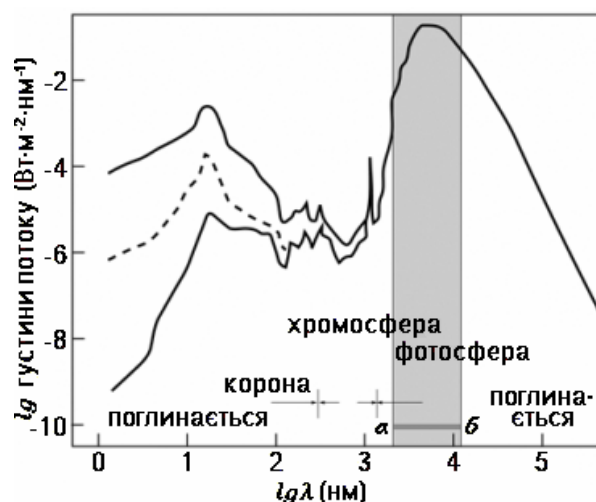


Рис. 1. Спектр сонячного випромінювання за межами земної атмосфери: 1 – максимум сонячної активності, 2 – мінімум сонячної активності, 3 – трибальний спалах.

Для спрощеного опису явищ, які викликані при цьому (так звані геомагнітні збурення), можна ввести наступну градацію:

1. спокійний сонячний вітер, тобто постійно існуючий потік сонячної плазми, що заповнює весь міжпланетний простір;
2. квазістаціонарні високошвидкісні потоки сонячної плазми, які відповідають за більш-менш регулярні геомагнітні збурення;
3. спорадичні високошвидкісні потоки, відносно короточасні, але дуже неоднорідні, складні за структурою. Вони є відповідальними за сильні збурення магнітосфери.

Магнітосфера Землі (Рис. 3) – це область, границя якої (магнітопауза) розділяє області міжпланетного та геомагнітного полів і плазмових середовищ.

Переходи енергії магнітного поля в інші її види теж можуть супроводжуватись помірною геомагнітною активністю, надаючи принциповий вплив на стан атмосфери, гідросфери, біосфери, включаючи організм людини.

Крім складної фізичної картини згаданих вище процесів існує проблема кількісного опису геомагнітної активності для дослідження впливу фізичних процесів в навколотемному середовищі на біосферу.

Спостереження, проведені геомагнітними обсерваторіями та виміри з борту спеціальних

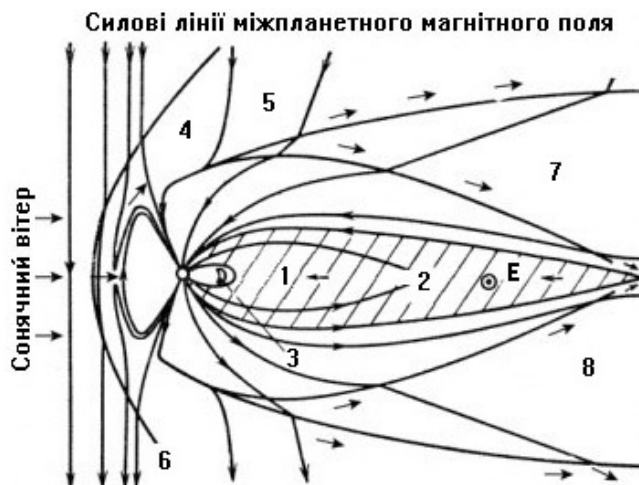


Рис. 3. Магнітосфера Землі: 1 - авроральна зона, 2 - плазмовий шар, 3 - кільцевий шар, 4 - касп, 5 - магнітопауза, 6 - головна ударна хвиля, 7 - плазмова мантия, 8 - перетин лінії з площиною.

супутників [2] дозволили виділити найбільш інформативний параметр – це вертикальна (дотична до геомагнітного поля на екваторі) компонента міжпланетного магнітного поля B_z – її від'ємне значення.

Медичними дослідженнями виявлена специфічна динаміка тижневого ритму та достовірна залежність числа викликів «швидкої допомоги» з приводу інфаркту міокарду та раптової смерті при певному рівні B_z . З медичних показників, до числа яких входило 10 захворювань і травм різного характеру, ефекти, які можна віднести до наслідків дії геомагнітних факторів, спостерігались практично лише в групі хворих з різкою патологією серцево-судинної системи, переважно з інфарктом міокарду. Достовірно показаним є вплив геомагнітної активності на фізіологічні параметри та здоров'я людини не тільки у час її підвищення, але також у час зменшення [3].

Особливо обачними в цей період слід бути не тільки тим, хто має проблеми з серцево-судинною системою, але і людям з підвищеною метеозалежністю. Знаючи прогноз геомагнітних коливань, люди зможуть певною мірою захиститися від негативного впливу сонця на організм і будуть заздалегідь готові до можливого погіршення самопочуття під час магнітних бур.

7-добовий прогноз є наслідком поточних спостережень активних областей поблизу східного лімбу Сонця та передбачає збурення геомагнітної активності, які походять від

переміщення цих активних областей до лінії Сонце – Земля через час, який приблизно дорівнює чверті періоду обертання Сонця. Цей прогноз має найбільшу достовірність після прогнозів на кілька годин.

Існування прогнозів магнітних бур і оцінки їх можливого рівня поставило питання профілактики можливих негативних наслідків. Звичайно в цій ситуації пропонується хіміотерапія. Але моніторинг артеріального тиску (АТ) та частот серцево-судинних скорочень (ЧСС) [2] у пацієнтів з діагнозом «гіпертонія», проведений протягом 2001–2003 рр. у Всеросійському кардіологічному центрі (Москва), на фоні терапії у двох групах (І – один тип ліків, ІІ – два типи разом), дав такі результати. Друга група пацієнтів реагує більш визначено на зміну геомагнітної активності (ГМА), ніж перша. Найбільш високі значення зміни фізіологічних показників були встановлені в день, який співпадає з піком ГМА, і вони зберігались до наступного після піку дня.

Відомо [5], що в роки сонячного максимуму людство до 50% тривалості року живе в умовах помірних та сильних бур, а за життя середньостатистична людина проживає в цих умовах біля 15 років. Тому в [4] був зроблений загальний висновок про те, що регулярний моніторинг АТ може слугувати для прийняття превентивних заходів, ще у дні, попередні до змін у ГМА і може бути корисним для попередження негативних наслідків. Питання про корисність хіміотерапії досі потребує додаткових досліджень.

Одночасно відомо, що існує акупунктура, яка має офіційну назву "голкорексфлексотерапія". Вона є частиною більш загальної рефлексотерапії і має власну ліцензію МОЗ України. Акупунктура (голковколання та глибоке прогрівання біологічно активних точок – БАТ) – різновид рефлексотерапії, який здійснюється з використанням багаторазових стерильних голок.

Вони вводяться під шкіру на різну глибину в обраних БАТ та залишають їх на певний час. Для проведення процедури використовують дуже тонкі голки для мінімізації неприємних відчуттів. Тривалість сеансу – менше 1 год. Для посилення впливу в ході маніпуляції голки можуть нагрівати. Деякі дослідники [6] зараз вважають, що проколання шкіри сприяє виробленню ендорфінів (природної речовини, схожого з морфіном), адреналіну і інших речовин. Сучасні дослідження голкотерапії підтвердили

ефективність цих методик в лікуванні серцево-судинної системи та деяких інших систем.



Рис.4 (зліва) "Плазмова голка". (праворуч) Плазма з плазмової голки розширюється до субстрату

У наш час є добре встановлена корисність використання газових розрядів атмосферного тиску при кімнатній температурі (створення «холодної плазми») для різних біомедичних застосувань. Технологічні особливості таких дій розглянуті в [6]. Серед них і стимуляція імунної системи людини, яку можна використати для підготовки її до розглянутих вище змін ГМА. В роботі [7] було доведено, що для виконання конкретної лікувальної операції потрібно створювати спеціальне джерело плазми. Вона генерує електричні поля, світло різної довжини хвилі та реактивні складові - оксиди азоту, гідроксильний радикал, атомарний кисень, озон та інші.

Вона генерує електричні поля, світло різної довжини хвилі та реактивні складові - оксиди азоту, гідроксильний радикал, атомарний кисень, озон та інші.

Розроблені нові джерела холодної плазми з добре контрольованою температурою нижче 40 °С, що дозволяє безпечно застосовувати цю плазму на тілі людини. Одним з найбільш придатних для зазначеної мети біомедичних пристроїв є ручна плазмова голка (Рис.4). Показано [7], що вихід потужності від цієї плазми є спрямованим. Для різних внесків були отримані оцінки для теплопровідності, випромінювання та хімічні реакції.

Список використаних джерел

1. Chaisson E., McMillan S. *Astronomy today* / E. Chaisson, S. McMillan. – Boston : Pearson 2015 - 832 p.
2. Бреус Т.К., Рапопорт С.И. Магнитные бури, медикобиологические и геофизические аспекты / Т.К.Бреус, С.И. Рапопорт. – Москва: Советский спорт, 2003. - 192 с.
3. Черноух А.М. Влияние геомагнитной возмущенности на биоритмы человека / А.М. Черноух, Л.И. Виноградова, Б.М. Гехт, Н.Ф. Новикова // Проблемы космической биологии. – 1981. – Т.48. – С.47 – 58.
4. Бинги В.Н. Принципы электромагнитной биофизики / В.Н. Бинги - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 592 с.
5. Молостов В. Д. Иглоотерапия и мануальная терапия. Практическое руководство по лечению заболеваний / В.Д. Молостов. – Москва: Эксмо, 2008. – 784 с.
6. Fridman A., Fridman G. *Plasma Medicine* / A. Fridman, G. Friedman. – New York: John Wiley & Sons, 2013. - 536 p.
7. Мартиш Є.В. Peculiarities of plasma sources in plasma medicine / Є.В. Мартиш // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія радіофізика та електроніка. –2013. – №19. – С. 39-42.

References

1. CHAISSON, E., MCMILLAN, S. (2015) *Astronomy today*. Boston : Pearson.
2. BREUS, T., RAPOPORT, S. (2003) *Magnitnye buri, mediko-biologicheskie i geofizicheskie aspekty*. Moskva: Sovetskij sport.
3. CHERNOUH, A., VINOGRADOVA, L., GEHT, B., NOVIKOVA, N. (1981) Vliyanie geomagnitnoj vozmuschennosti na biorithmy cheloveka. *Problemy kosmicheskoy biologii*. 48. p.47 – 58.
4. BINGI, V. (2011) *Principles of electromagnetic biophysics*. Moskva: FIZMATLIT.
5. MOLOSTOV, V. (2008) *Prakticheskoe rukovodstvo po lecheniyu zabolevanij*. Moskva: Exmo.
6. FRIDMAN, A., FRIEDMAN, G. (2013) *Plasma Medicine*. New York: John Wiley & Sons.
7. MARTYSH E. (2013) Peculiarities of plasma sources in plasma medicine. *Visnyk Taras Shevchenko national university of Kyiv. Ser. Radio Physics and electronics*. 19. p. 39-42.

Надійшла до редколегії 12.11.2019

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 535.372

Ящук В. М.¹, д. ф.-м. н., проф.,
Лебедева І.В.¹, к. ф.-м. н., доц.,
Навозенко О. М.¹, інженер.

Прояви міграції триплетних електронних збуджень у π -електрон-містких полімерах

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, м. Київ, вул. Володимирська, 60,
e-mail: yashchukvaleriy@gmail.com

V. M. Yashchuk¹, Ph.D., Dr.Sci (Phys.-Math.), Prof.,
I. V. Lebedyeva¹, Ph.D. (Phys.-Math.), As.Prof.,
O.M. Navozenko¹, engineer.

Manifestations of triplet electronic excitations migration in π -electron containing polymers

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
60 Volodymyrska Street, City of Kyiv, Ukraine,
01033,
e-mail: yashchukvaleriy@gmail.com

Розглянуто результати спектральних досліджень полімерів з ароматичними бічними групами. Зокрема, представлено і проаналізовано спектри фосфоресценції полівінілкарбазолу (ПВК) і полівініл-7бензокарбазолу (ПВ7БК) поліпропілкарбазолу (ПЕПК). Показано, що фосфоресценція цих полімерів пов'язана з міграцією триплетних екситонів у макромолекулах. Фосфоресценцію ПВК визначають при 77 К глибокі пастки (оксиди), при 4,2 – мілкі пастки (мономерні ланки ПВК). Довжина пробігу триплетних екситонів у макромолекулах ПВК дорівнює 600 Å – середня відстань між сусідніми пастками в макромолекулі. У макромолекулах ПВ7БК подібні пастки відсутні. Середня довжина пробігу триплетних екситонів дорівнює приблизно 1000 Å. Ця відстань фактично лімітується ймовірністю зустрічі двох триплетних екситонів у макромолекулі та їх анігіляцією за даної інтенсивності збудження.

Ключові слова: полімери, фосфоресценція, триплетні екситони, глибокі та мілкі пастки.

The results of spectral studies of polymers with aromatic side groups are considered and analyzed. In particular, the phosphorescence spectra of polyvinylcarbazole (PVCa) polyvinyl-7-benzocarbazole (PV7BK) polypropylcarbazole (PEPC) are presented and analyzed. The phosphorescence of these polymers has been shown to be related to the migration of triplet excitons in macromolecules. The phosphorescence of PVC is determined at 77 by deep traps (oxides), at 4.2 -shallow traps (monomer units of PVCa). The spreading length of triplet excitons in PVCa macromolecules is 600 Å –that corresponds to the average distances between adjacent traps in the macromolecule. There are no such traps in PV7BK macromolecules. The boundary conditions for triplet excitons in macromolecules of PV7BCa were used for evaluation the excitons spreading length. With this aim the dependence of phosphorescence spectra on molecular weight were studied. The effect of changing of spectral positions of phosphorescence bands when exciton rich the end macromolecular cell was used. The average trip length of triplet excitons is approximately 1000 Å. This distance is in fact limited by the probability of the meeting of triplet excitons in the macromolecule and their annihilation at a given excitation intensity.

Key Words: polymers, phosphorescence, triplet excitons, deep and shallow traps.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Однією із особливостей органічних середовищ, структурними елементами яких є π -електронмісткі молекули, або групи атомів, є процеси перенесення енергії електронного збудження, спричинені поглинанням фотонів.[1] Це явище застосовують при створенні функціональних систем різного типу, наприклад, для фотоди-

намічної терапії [2] чи створення органічних світлодіодів [3].

Дослідження фосфоресценції вініл-ароматичних полімерів [4] вказують на те, що завдяки перенесенню електронних збуджень, крім структурної фосфоресценції мономерних ланок спостерігається сенсibilізована фосфоресценція домішкових центрів, яка дає у низці випадків основний внесок у спектри

фосфоресценції. Експеримент свідчить, що в макромолекулах полівінілкарбазолу(ПВК) та поліепоксипропілкарбазолу(ПЕПК) існують центри захоплення триплетних збуджень, що присутні початково, і, що відповідають за сенсibilізовану довгохвильову фосфоресценцію, яка виникає за рахунок процесів підведення до них енергії триплетними екситаонами. Дослідження цих процесів та отримання відповідних параметрів є дуже важливим для розуміння їх механізмів та розробки органічних функціональних макро- та наносистем.

2. Результати та їх обговорення

Центри захоплення (пастки) триплетних екситаонів проявляють себе через власну фосфоресценцію. Безструктурність спектру та довгохвильовий зсув цього свічення у порівнянні зі спектром фосфоресценції мономерних ланок ПВК і відповідного низькомолекулярного аналогу - ЕК привели Кльопфера [5], а згодом і Буркхарта [6], до висновку про ексимерний характер фосфоресценції, що спостерігається. Однак існують суттєві заперечення проти ексимерного походження безструктурної фосфоресценції ПВК та інших хромоформістких полімерів. З іншого боку, так чи інакше, глибокі пастки захоплення енергії триплетного збудження в макромолекулах ПВК існують, і саме вони в основному обмежують пробіг триплетних екситаонів.

Дослідження залежності спектрів фосфоресценції розчинів ПВК від молекулярної маси (М) полімера при 77 К [7] дозволяє оцінити концентрацію цих пасток. У спектрах фосфоресценції з малим М (М=2000) (рис. 1) випромінювання домішкових центрів відсутнє.

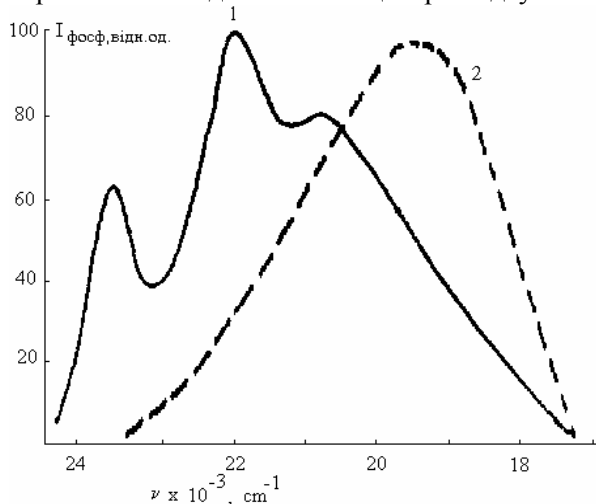


Рис.1. Фосфоресценція розчинів ПВК:
1–М=2000, 2–М=3·10⁵.

При зростанні М виникає безструктурна фосфоресценція, яка починає переважати над структурною при М≈40000. Середня довжина макромолекули ПВК для цієї молекулярної маси дорівнює 600÷800 Е і відповідає середній довжині пробігу Т-екситаону в даних умовах. Концентрація центрів захоплення Т-екситаонів відповідно може бути оцінена як $C=5 \cdot 10^{-3}$ (0,05%). Слід відзначити, що довжина пробігу Т-екситаона в макромолекулі ПВК обмежується і анігіляційними процесами, однак за даної інтенсивності збуджуючого ($L \leq 10^{13}$ фотон/см²·с; $\lambda_b=313$ нм) світла ймовірність виникнення двох триплетних екситаонів на проміжку між двома домішковими центрами і їх анігіляції за час життя мобільних Т-збуджень невелика, про що свідчить відносно мала інтенсивність затриманої флюоресценції розчинів ПВК з великим М, та лінійна залежність інтенсивності фосфоресценції від інтенсивності збуджуючого світла.

Порошки та плівки ПВК проявляють в основному довгохвильову безструктурну фосфоресценцію незалежно від молекулярної маси полімеру. Це приводить до висновку про те, що крім внутрішньомолекулярної міграції енергії триплетного збудження, існує обмін триплетними збудженнями між макромолекулами, або ж одна і та ж пастка для триплетних екситаонів у плівках (порошках) полімерів перехоплює екситаони, що рухаються, вздовж макромолекул, ланки яких перебувають на малих відстанях від пастки. На користь останньої версії свідчать експерименти, проведені для синглетних екситаонів

При зниженні температури до 4,2 К триплетні екситаони в ПВК, ПВ7БК, ПВ5БК, ПВ11БК та ПЕПК локалізуються на мономерних екситаонах-пастках, не досягаючи домішкових центрів захоплення, внаслідок чого у спектрах фосфоресценції і розчинів і плівок для всіх М спостерігається структурна короткохвильова фосфоресценція. На рис.2 цей ефект продемонстрований для ПВ7БК[4]. Подібна залежність фосфоресценції макромолекул від температури є спільною для багатьох полімерів.

У спектрах фосфоресценції ПВК[4] при 4,2 К проявляється структура, яка особливо чітка для випадку порошку (рис.3). Структура, що виділяється на кожній із смуг, на нашу думку, свідчить про те, що "мономерні" пастки не є моноенергетичними. Їх є певний набір з певним розподілом за енергіями. Перший вузький короткохвильовий пік 24050 см⁻¹ спектру фосфоресценції, поданий на рис. 3, в принципі

може належати випромінюванню триплетного екситону.

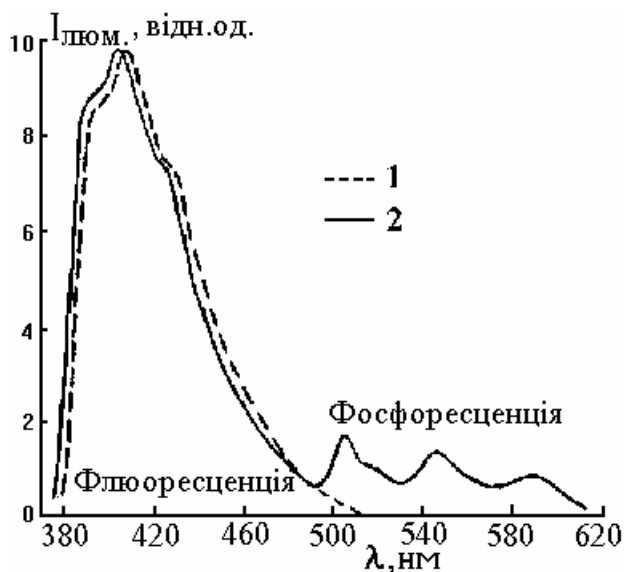


Рис. 2 Спектри люмінесценції розчинів високомолекулярного ПВ7БК ($M=5 \cdot 10^5$) у диоксані ($C=10^{-4}$ моль/л), $\lambda_{36}=313$ нм; 1 - 77 К; 2 - 4,2 К

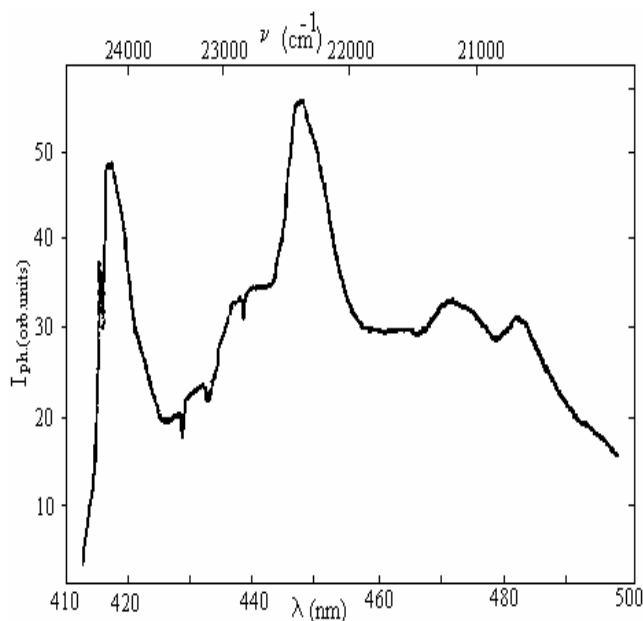


Рис. 3 Спектр фосфоресценції порошку ПВК при 4,2 К, $M=3 \cdot 10^5$, $\lambda_{36}=313$ нм

У той час як у макромолекулах ПВК та ПЕПК пробіг триплетних екситонів при 77 К в основному обмежується центрами захоплення, які відповідають за довгохвильову безструктурну фосфоресценцію, в макромолекулах ПВ7БК і ПВ11БК (тверді розчини) подібні центри у фосфоресценції не проявляються. Довжина пробігу екситонів у цьому випадку визначається

анігіляційними процесами [7]. У порошках і плівках цих полімерів також спрацьовують глибокі пастки, що ще раз свідчать про зростання ефективності перенесення енергії триплетних збуджень при переході від розчинів до плівок (чи порошків). Вимальовується наступна картина: в окремих макромолекулах ПВ7БК і ПВ11БК фосфоресценція глибоких пасток відсутня, оскільки відстань між ними більша, ніж середня довжина пробігу триплетного екситону за мінімально можливих для даного експерименту рівнів збудження. Екситони не досягають пасток у зв'язку з анігіляційними процесами. При зближенні макромолекул у плівках ПВК та ПЕПК ефективна концентрація пасток зростає, що проявляється у виникненні їх фосфоресценції.

Згідно з отриманими даними [7, 8] положення максимумів фосфоресценції ПВ7БК при зменшенні M від $\sim 10^6$ до 10^5 практично не змінюється, а потім при $M \geq 10^5$ починається зсув смуг фосфоресценції в короткохвильовий бік (у напрямку до положення смуг низькомолекулярного аналогу Е7БК) (рис. 4). Як видно з рис. 4, положення максимумів смуг фосфоресценції для ПВ7БК з $M=5000$ відрізняється від положення відповідних смуг Е7БК на 170 cm^{-1} . На наш погляд, кінцеві ланки макромолекули за своєю енергетичною структурою мають бути ближче до низькомолекулярного аналогу, ніж внутрішні, які взаємодіють з сусідніми (зліва та справа) ланками. Тому зсув спектру фосфоресценції для $M \approx 10^5$ означає, що мігруючі електронні збудження починають деактивуватися в кінцевих ланках макромолекул $M=10^5$ (це відповідає контурній довжині макромолекули ~ 1000 А).

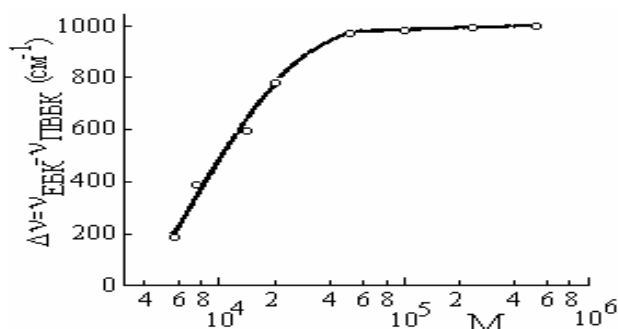


Рис. 4 Залежність положення 0-1 смуги фосфоресценції розчинів ПВ7БК (по відношенню до максимуму смуги Е7БК) від M при 77 К

Останнє дає можливість оцінити довжину пробігу триплетного екситону. Видно, що середнє значення величини пробігу триплетного екситону

$\langle I_T \rangle \approx 1000$ А при використаних інтенсивностях збуджуючого світла $L = 10^{13}$ фот/см² с. Як буде показано нижче, близьке значення $\langle I_T \rangle$ для цього полімеру можна отримати із залежності інтенсивності фосфоресценції від М. Як свідчить експеримент, фосфоресценція гомополімеру ПВК деполаризована. І це ще раз свідчить про те, що триплетні збудження в ПВК є, в основному, мобільними.

У випадку ПВК (за відсутності домішок) залежність спектрів фосфоресценції від М при $T = 4,2$ К близька до тієї, що спостерігається для ПВ7БК. Однак при $T \geq 40$ К і подальшому підвищенні температури залежність спектрів фосфоресценції від М значною мірою відмінна. У той час як для ПВ7БК з ростом М (починаючи з низькомолекулярного аналогу до певного значення М) спостерігається довгохвильовий

зсув смуг, що пов'язується зі зміною місць локалізації екситонів, для ПВК у вказаному діапазоні температур зі зростанням М відбувається трансформація спектру з коротко-хвильового структурного у довгохвильовий безструктурний, що пов'язується з випромінюванням окислених ланок (рис.1) [7]. Таким чином, екситони в макромолекулах ПВК з $M \sim 10^5$ локалізуються в основному у таких пастках, що відповідає $I_T = 600 \div 800$ А.

Висновки

У досліджених полімерах фосфоресценція визначається процесами міграції триплетних збуджень. Згідно з нашими оцінками, пробіг Т-екситонів у макромолекулах ПВК при 77 К $I_T = 600 \div 800$ А. Для макромолекул ПВ7БК $\langle I_T \rangle \approx 1000$ А. Отримані дані можуть бути використані при розробці органічних світлодіодів.

Список використаних джерел

1. Yashchuk V.M. Migrating Electronic Excitations in π -electron-containing Polymers / V.M. Yashchuk // *Molecular Crystals and Liquid Crystals*. – 1998. – Vol.324. – P.211-222.
2. Losytskyy M. Yu. Energy Transfer in $\text{Ce}_{0.85}\text{Tb}_{0.15}\text{F}_3$ Nanoparticles-CTAB Shell-Chlorin e_6 System / M.Yu. Losytskyy, L.V. Kuzmenko, O.B. Shcherbakov, N.F. Gamaleia, A.I. Marynin, V.M. Yashchuk // *Nanoscale Research Letters*. – 2017. – Vol.12. – P. 294-299.
3. Kosach V.V. Diflavonols as single emitters for polymer-based WOLEDs / V.V.Kosach, Y.V. Pivovarenko, V.M. Yashchuk // *Functional Materials*. – 2016. – №23. – P. 1-4.
4. Yashchuk V.M. Triplet excitons in π -electron containing polymers / V.M. Yashchuk // *Polimery*. – 1999. – Vol. 44. – P. 475-480.
5. Klupffer W. Zur Excimer fluoreszenz und phosphoreszenz in polyvinylcarbazol / W. Klupffer, H. Bauser // *Z. Phys. Chem, K.P.* – 1976. – Vol.101. – P. 25-29.
6. Burkhart R. D. An investigation of binding energies of triplet excimers in carbazoly-containing polymers / R. D. Burkhart, N.-I. Jhon, S. Boileau // *Macromolecules*. – 1991. – Vol. 24. – P. 6310-6317.
7. Ящук В.М. Фотоніка полімерів / В. М. Ящук. – Київ: ВПЦ «Київський університет», 2004. – 145 с.
8. Faidysh A.N. Intramolecular energy transfer by singlet and triplet excitons in macromolecules / A.N. Faidysh, V.V. Slobodyanik, V.N. Yashchuk // *J. Luminescence*. – 1979. – Vol.21. – P. 85-92.

References

1. YASHCHUK, V. (1998) Migrating Electronic Excitations in π -electron-containing Polymers. *Molecular Crystals and Liquid Crystals*. 324. p. 211-222.
2. LOSYTSKY, M. YU., KUZMENKO, L. V., SHCHERBAKOV, O. V., GAMALEIA, N. F., MARYNIN, A. I. & YASHCHUK, V. M. (2017) Energy Transfer in $\text{Ce}_{0.85}\text{Tb}_{0.15}\text{F}_3$ Nanoparticles-CTAB Shell-Chlorin e_6 System. *Nanoscale Research Letters*. 12. p. 294 – 299.
3. KOSACH, V.V., PIVOVARENKO, Y. V. & YASHCHUK, V. M. (2016) Diflavonols single emitters for polymer-based WOLEDs. *Functional Materials*. 23. p. 1 – 4.
4. YASHCHUK, V. M. (1999) Triplet excitons in π -electron containing polymers. *Polimery*. 44. p. 475 – 480.
5. KLUPFFER, W. & BAUSER, H. (1976) Zur Excimer fluoreszenz und phosphoreszenz in polyvinylcarbazol. *Z. Phys. Chem, K.P.* 101. p. 25 – 29.
6. BURKHART, R. D., JHON, N.-I. & BOILEAU, S. (1991) An investigation of binding energies of triplet excimers in carbazoly-containing polymers. *Macromolecules*. 24. p. 6310 – 6317.
7. YASHCHUK, V. M. (2004) *Photonica polymeriv*. Kyiv: «Kyiv's'kyi universytet».
8. FAIDYSH, A. N., SLOBODYANIK, V. V. & YASHCHUK, V. M. (1979) Intramolecular energy transfer by singlet and triplet excitons in macromolecules. *J. Luminescence*. 21. p.85-92.

Надійшла до редколегії 11.11.19

Підписано до друку _____. Формат _____. Друк. офс.
Папір офс. № _____. Друк. арк. _____. Тираж _____. Зам. _____.
Друкарня _____.