



ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО
УНІВЕРСИТЕТУ**

**Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ
НАУКИ
ВИПУСК №4**



Київ - 2005

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

ВІСНИК

Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Наукова бібліотека
ім. М. Максимовича
КНУ

ім. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА



13435JB

М/М - механіко-математичний

Ц. 10.00

ВИПУСК № 4 2005

Редакційна колегія:

- **Головний редактор – Булавін Леонід Анатолійович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Відповідальний секретар – Анісімова Тетяна Харитонівна**, старший науковий співробітник.

Члени редколегії:

- **Адаменко Ірина Іванівна**, доктор фізико-математичних наук, професор (фізичний факультет);
- **Акименко Віталій Володимирович**, доктор технічних наук, професор (факультет кібернетики);
- **Анісімов Анатолій Васильович**, доктор фізико-математичних наук, професор (факультет кібернетики);
- **Гаращенко Федір Григорович**, доктор технічних наук, професор (факультет кібернетики);
- **Кириченко Володимир Васильович**, доктор фізико-математичних наук, професор (механіко-математичний факультет);
- **Козаченко Юрій Васильович**, доктор фізико-математичних наук, професор (механіко-математичний факультет);
- **Левитський Сергій Михайлович**, доктор фізико-математичних наук, професор (радіофізичний факультет);
- **Єжов Станіслав Миколайович**, доктор фізико-математичних наук, професор (фізичний факультет);
- **Попов Юрій Дмитрович**, доктор технічних наук, професор (факультет кібернетики);
- **П'ятецький Василь Олександрович**, кандидат фізико-математичних наук, доцент (механіко-математичний факультет);
- **Родіонова Тетяна Василівна**, кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник (радіофізичний факультет).

Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Адреса редакційної колегії:

03022, вул. Глушкова, 2, корп. 6,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
факультет кібернетики,
тел. (044) 259-01-49

ISBN 966-76-52-00-9

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Бондаренко В.В. Про число класів спряжених елементів групи $UT_n(k)$ над скінченним полем, які складаються із елементів порядку 2	9
Боярищева Т.В., Слюсатчук П.В. Оцінки швидкості збіжності до нормального закону в термінах середніх псевдомоментів	17
Бондаренко Є.В. Дії груп ітерованих монодромій субгіперболічних квадратичних многочленів на кореневому дереві	25
Головащук Н.С. Конструкція редукції боксів	31
Григор'єва В.Б. Моногенні кільця з модальною структурою підкілець	41
Нетреба Н.В. Енгелеві ряди алгебр Лі асоційованих з силівськими p -підгрупами скінченних симетричних груп	47
Сливка Г.І. Властивості розв'язку задачі про коливання прямокутного паралелепіпеда з випадковими початковими умовами	52

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Борисенко Д.С., Галло А., Тоскано Р. Інтегральні нерівності Гронуолла-Беллмана-Біхері для розривних функцій та оцінки розв'язків імпульсних систем	60
Горошко О.О., Філімоніхін Г.Б., Пирогов В.В., Філімоніхіна І.І. Стабілізація положення осі обертання абсолютно твердого тіла багатомаятниковим (багатокульовим) автобалансиром	67
Калайда О.Ф. Двосторонні симетричні наближення функцій, похідних та інтегралів та розв'язків інтегральних рівнянь, диференціальних та інтегро-диференціальних задач	77
Карнаухов В.Г., Карнаухова Т.В., П'ятецька О.В., Нікітенко В.М. Вплив температури дисипативного розігріву на демпфірування вимушених резонансних коливань круглої пластини з використанням п'єзoeлектричних сенсорів та актуаторів	84
Лебедєва І.В. Про розклад за власними функціями задачі для зрізаного двопорожнинного гіперболоїда обертання	92
Цибульник В.О. Визначення напружено-деформованого стану	99

конічних оболонок змінної в двох координатних напрямках товщини під дією локального поверхневого навантаження	
Щобак Н.М. Про розв'язність нелінійних крайових задач з параметрами	106
Яровой Л.К. Аналіз трьох хвильової інтерференції в лазерному віброметрі	116

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Бичков О.С. Побудова інтегралу за процесом нечіткого блукання	125
Верченко А.П., Попов В.В. Про один ефективний алгоритм векторизації растрового бінарного зображення	134
Войцехівський С.О., Саженьок В.С., Сущенко П.О. Методи штрафу та фіктивних областей для чисельного розв'язування одного класу нелінійних варіаційних нерівностей в області довільної форми	141
Горбачук В.М., Гаркуша Н.І. Максимізація функції доходу та мінімізація функції витрат у дворівневому програмуванні	147
Заворотний А.Л., Касьянюк В.С. Про розв'язок задач обробки та інтерпретації результатів вимірювань в умовах нечіткості	153
✓ Закусило О.К., Лисак Н.П. Дослідження характеристик деякої рідинної мережі	158
Заславська О.В. Декомпозиційний алгоритм оптимізації прибутку посередника	163
Іванов І.Ю. Про захист програмного забезпечення від атак збоку злочинного хоста	170
Калайда О.Ф. Двосторонні симетричні наближення функцій, похідних та інтегралів та розв'язків інтергальних рівнянь, диференціальних та інтегровано-диференціальних задач	176
Левович О.Л., Кравченко Є.В. Моделювання та дослідження руху атмосферних вихорів	183
Макушенко І.А. Про максимізацію середнього прибутку для $[SM \square GI \square \infty]^r$ - мережі	189
Маляр М.М. Опис задач вибору на мові розмитих множин	197
Пічкур В.В. Про умову локальної рівномірності	202
Порхун О.В. Побудова параметричного простору в задачах атрибуції текстів. Метод формування вхідного вектора для розпізнавання стилю тексту нейронною мережею	207
Пришляк В.О. Інтегральні рівняння першого роду в задачах оцінювання за неповними даними слідів розв'язків зовнішніх крайових задач для рівняння Гельмгольца	213
Рябікова Г.В. Мінімаксне оцінювання невідомих правих частин	221

рівнянь та граничних умов крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь	
Скопюк –Стеценко Н.С. Аналіз тематичної та функціональної спрямованості Web –проталів	227
Слабоспицький О.С. Рекурентне оцінювання нестационарних параметрів нелінійних динамічних систем з дискретним часом при неklasичних припущеннях	232
Турбал Ю. Про операторний метод моделювання спіральних структур	237
Хлобистов В.В., Кашпур О.Ф., Поповічева Т.М. Операторні інтерполянти в гільбертовому просторі асимптотично точні на поліномах	242
Швець О.Ф. Використання методу структурно-параметричної оптимізації в задачах цифрової обробки інформації	249

РАДІОФІЗИКА

Анісімов І.О., Ничипорук Т.В. Перехідне випромінювання модульованого електронного потоку в неоднорідній замагніченій плазмі	259
Бех І.І., Дмитришин О.А., Льченко В.В. Лушкін О.Є., Присяжний В.В. Особливості механізму емісії скандатних металевопористих емітерів	269
Голобородько А.О., Курашов В.Н., Мельничук Д.М. Моделювання зміни поляризації світла при багаторазовому розсіюванні.	275
Григорук В.І., Онисько Ю.Т., Слінченко Ю.А., Шанойло В.С. Поляризаційна самодія гаусових еліптичних пучків в середовищі з кубічною нелінійністю поляризації	280
Льченко Л.М., Колєнов С.О., Литвиненко С.В., Молочко П.В., Смирнов Є.М. Механізми виникнення диференційно-фазового фотоелектричного відгуку	284
Находкін М.Г., Федорченко М.І. Адсорбція Sb на Si(100)2x1 та Si(111)7x7.	294
Нінідзе Г.К., Кушніренко В.В., Павлюк С.П., Савицький С.М., Третяк О.В. Дослідження параметрів модифікованих кремнієвих діодів.	304
Овечко В.С., Щур О.В. Дослідження опору нанопористого скла зі срібними наночастинками сталому струму	311
Чигінь В.І., Карп'як С.Ю. Модель нерівноважної плазми пульсівної негативної корони	317

СУЧАСНА ФІЗИКА

Адаменко І.І., Григор'єв А.М., Кузовков Ю.Г., Салюк О.А. Відштовхувальна частина потенціалу міжмолекулярної взаємодії та коефіцієнт самодифузії рідин	329
Альохін О.Д., Рудніков Є.Г. Теплоємність неоднорідної рідини в гарвітаційному полі поблизу критичної точки	331
Бегун С.В., Каденко І.М., Майданюк В.К. Врахування ефекту поглинання гамма-квантів зразком в нейтронному активаційному методі	335
Весна Г.В., Дегода В.Я., Кучакова Т.О., Макара В.А., Проскура А.И. Накопичування світлосуми керамікою ZnS-Cu при рентгенівському збудженні	342
Гречко Л.Г., Лерман Л.Б., Покотило О.Я., Шкода Н.Г. Іонно- електростатична взаємодія малих кульових частинок в розчи- ні електроліту. Частина I. Обчислення енергії взаємодії при заданих щільностях поверхневих зарядів	351
Козаченко В.В., Круковський С.І., Ніколаєнко Ю.Є., Савкіна Р.К., Смірнов О.Б. Вплив комплексного легування на властивості шарів GaAs, отриманих методом рідинно-фазної епітаксії	359
Копань Ю.В., Хуторянська Н.В., Копань В.С. Концентраційна залежність границі міцності багат шарових композиційних матеріалів	365
Корнієнко М.Є. Колективні властивості теплопровідності рідин. I. Резонансні властивості теплопровідності води і водних розчинів.	372
Онанко А.П. Вказівна поверхня пружно - непружного тіла сплаву $Al_{0.5}Be_{0.5}$	385
Охріменко Б.А., Старков Д.Ю. Колапс радіальної хвильової функції 5f- електрона іона Tl ⁺ у кристалічному полі	388
Поперенко Л.В., Лоза Є.А. Про можливість визначення плазмової частоти аморфних сплавів за допомогою перетворення Крамерса-Кроніга	399
Робур Л.Й., Прокопєць В.М., Захарченко І.В. Генерація другої гармоніки при відбиванні р-поляризованого світла від поверхні металів	404
Чалий К.О., Булавін Л.А., Чалий О.В. Проходження та пружне розсіяння нейтронів в обмежених рідинах в критичній області	420
Ващенко В.М., Лоза Є.А., Патлашенко Ж.І., Банніков О.О., Черниш О.Є. Чисельний метод абераційного розрахунку монохроматорів. Ч. I	430

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

УДК 512.8

Віталій В. Бондаренко*

Vitaliy V. Bondarenko*

Про число класів спряжених елементів групи $UT_n(k)$ над скінченним полем, які складаються із елементів порядку 2. Серія: фізико-математичні науки

On the number of the conjugacy classes in the group $UT_n(k)$ over a finite field that consist of elements of order 2. Series: Physics & Mathematics

У статті вивчаються класи спряжених елементів груп унітрикутних матриць над полем характеристики 2. Знайдено число цих класів спряжених елементів в групі $UT_n(k)$, що складаються із елементів порядку 2, де k — скінченне поле із 2^m елементів.

In the paper we study conjugacy classes of the groups of unitriangular matrices over a field of characteristic 2. We compute the number of the conjugacy classes in the group $UT_n(k)$ that consist of elements of order 2, where k is a finite field of order 2^m .

Ключові слова: унітрикутні матриця, спряжені елементи, скінченне поле.

Key Words: unitriangular matrix, conjugate elements, finite field.

*E-mail: vitaliy.bondarenko@gmail.com

Класи спряжених елементів груп унітрикутних матриць вивчаються в багатьох роботах (див. напр., роботи [?] – [?] разом із посиланнями, що містяться в них). У цій статті вивчаються класи спряжених елементів групи унітрикутних матриць над полем характеристики $p = 2$, що складаються із елементів порядку 2 (відмітимо, що при $p \neq 2$ вказана група не має елементів порядку 2).

1. Опис представників класів спряжених елементів групи $UT_n(k)$, що складаються із елементів порядку 2.

На протязі всієї статті k позначає поле характеристики 2, а k^* — множину його оборотних елементів (тобто $k^* = k \setminus 0$). Далі, $UT_n(k)$ ($n > 1$) позначає групу верхніх унітрикутних матриць над полем k . Порядком матриці $A \in UT_n(k)$ ми будемо називати найменше натуральне число r ,

таке, що A^t — одинична матриця (а не число n); якщо такого t не існує, то A — матриця нескінченного порядку.

Повна система представників класів спряжених елементів групи $UT_n(k)$, що складаються із елементів порядку 2, описана в [7].

Наведемо відповідний результат.

Покладемо $[1, n] = \{1, 2, \dots, n\}$ (n — натуральне число), $[1, n]^2 = [1, n] \times [1, n]$ і $[1, n]_{<}^2 = \{(p, q) \in [1, n]^2 \mid p < q\}$.

Через $E(n)$ ми позначаємо одиничну матрицю розміру $n \times n$, а через $I_{ij}(n)$ — матрицю розміру $n \times n$, в якій на місці (i, j) стоїть одиничний елемент, а на решті місць стоять нульові елементи. Часто замість $E(n)$ та $I_{ij}(n)$ ми пишемо просто E та I_{ij} .

Нехай P — підмножина в $[1, n]_{<}^2$. Елемент $x = (i, j) \in [1, n]_{<}^2$ назвемо P -ізолюваним, якщо для довільного $y = (p, q) \in P$, $y \neq x$, множина $\{i, j\} \cap \{p, q\}$ пуста (зрозуміло, що $y = x$ може мати місце лише в тому випадку, коли $x \in P$). Позначимо через $\mathcal{I}_n$ сукупність всіх підмножин $P \subset [1, n]_{<}^2$, $P \neq \emptyset$, таких, що кожний елемент $x \in P$ є P -ізолюваним.

Нехай $X \in \mathcal{I}_n$ і λ — деяке відображення із X в k^* : замість $\lambda((i, j))$ будемо писати $\lambda(i, j)$. Позначимо через $M(X, \lambda)$ наступну матрицю із $UT_n(k)$:

$$M(X, \lambda) = E(n) + \sum_{(i,j) \in X} \lambda(i, j) I_{ij}(n).$$

Легко бачити, що $(M(X, \lambda))^2 = E(n)$.

У статті [7] доведена наступна теорема (яка описує повну систему представників класів спряжених елементів групи $UT_n(k)$, що складаються із елементів порядку 2).

Теорема 1. 1) Нехай K — клас спряжених елементів групи $UT_n(k)$, що складаються із елементів порядку 2. Тоді існують X та λ , такі, що $M(X, \lambda) \in K$.

2) Нехай K_1, K_2 — класи спряжених елементів в $UT_n(k)$, що містять відповідно елементи $M(X_1, \lambda_1)$ і $M(X_2, \lambda_2)$. Якщо $(X_1, \lambda_1) \neq (X_2, \lambda_2)$, то $K_1 \neq K_2$.

2. Приклади. Користуючись теоремою 1, випишемо повну систему представників класів спряжених елементів групи $UT_n(k)$, що складаються із елементів порядку 2), у випадку, коли k — поле із 2-х елемен-

тів і $n = 2, 3, 4$. Для такого поля групу $UT_n(k)$ позначаємо через $UT_n(2)$. Далі, в цьому випадку для довільного $X \in \mathcal{I}_n$ існує лише одне відображення λ із X в $k^* = \{1\}$ (а саме $\lambda(i, j) = 1$ для довільного $(i, j) \in X$); тому матрицю $M(X, \lambda)$ будемо позначати просто через $M(X)$.

У випадку $n = 2$ група $UT_n(2)$ має порядок 2 і повна система вказаних представників складається із однієї матриці

$$M_{12} = M(X_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ де } X_1 = \{(1, 2)\}.$$

У випадку $n = 3$ група $UT_n(2)$ має порядок 8 і повна система визначених теоремою 1 представників складається із наступних матриць:

$$M_{13} = M(X_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ де } X_1 = \{(1, 2)\};$$

$$M_{23} = M(X_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ де } X_2 = \{(1, 3)\};$$

$$M_{33} = M(X_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ де } X_3 = \{(2, 3)\}.$$

У випадку $n = 4$ група $UT_n(2)$ має порядок 64 і повна система визначених теоремою 1 представників складається із наступних матриць:

$$M_{14} = M(X_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ де } X_1 = \{(1, 2)\};$$

$$M_{24} = M(X_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ де } X_2 = \{(1, 3)\};$$

$$M_{34} = M(X_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ де } X_3 = \{(1, 4)\};$$

$$M_{44} = M(X_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ де } X_4 = \{(2, 3)\};$$

$$M_{54} = M(X_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ де } X_5 = \{(2, 3)\};$$

$$M_{64} = M(X_6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ де } X_6 = \{(3, 4)\};$$

$$M_{74} = M(X_7) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ де } X_7 = \{(1, 2), (3, 4)\};$$

$$M_{84} = M(X_8) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ де } X_8 = \{(1, 4), (2, 3)\}.$$

3. Число класів спряжених елементів групи $UT_n(k)$, що складаються із елементів порядку 2.

Головною метою цієї статті є доведення наступної теореми.

Теорема 2. Нехай k — скінченне поле із 2^m елементів і $K_n(k, 2)$ — число класів спряжених елементів в групі $UT_n(k)$, що складаються із елементів порядку 2. Тоді

$$K_n(k, 2) = n! \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(2^m - 1)^s}{2^s s! (n - 2s)!}.$$

Нагадаємо, що через $\mathcal{I}_n$ ми позначаємо сукупність всіх підмножин $P \subset [1, n]_<^2$, $P \neq \emptyset$, таких, що кожний елемент $x \in P$ є P -ізолюваним. Окрім того, ми позначимо через $\mathcal{I}_{n,s}$ сукупність множин $P \in \mathcal{I}_n$, таких, що $|P| = s$. Відмітимо, що елемент $x \in P$ є P -ізолюваним тоді і лише тоді, коли він є $P \setminus \{x\}$ -ізолюваним.

Із теореми 1 випливає, що у випадку скінченного поля $K_n(k, 2)$ залежить лише від n і від порядку поля, тому замість $K_n(k, 2)$ будемо писати $K_n(2^m, 2)$.

Розглянемо спочатку випадок, коли $m = 1$, тобто коли k — поле із двох елементів. Тоді згідно теореми 1 $K_n(2, 2) = |\mathcal{I}_n|$.

Очевидно, що порядок множини $\mathcal{I}_n$ дорівнює порядку множини $[1, n]_<^2$, тобто

$$|\mathcal{I}_n| = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Число $n(n-1)/2$ позначимо через N .

Порядок множини $\mathcal{I}_{n,2}$ можна обчислити наступним чином. Кожна множина $X \in \mathcal{I}_{n,2}$ складається із двох елементів — $x_1 = (p_1, q_1)$ і $x_2 = (p_2, q_2)$. Для елемента x_1 є N можливостей (x_1 може бути довільним елементом із $[1, n]_<^2$). Якби нас цікавили довільні підмножини $X = \{x_1, x_2\}$, то для елемента x_2 була б (при вже вибраному x_1) $N-1$ можливість — виключається лише варіант, коли $x_2 = x_1$. Але в нашому випадку x_2 є $\{x_1\}$ -ізолюваним елементом і тому треба виключити варіанти, коли елемент x_2 має один із таких видів: (p_1, y) , (y, p_1) , (z, q_1) , (q_1, z) . Коротше кажучи, виключаються всі пари, які містять координату p_1 або q_1 . Позаяк число таких пар із $[1, n]_<^2$

дорівнює $(n - 1 + n - 1) - 1 = (n - 1) + (n - 2)$, то для елемента x_2 множини X маємо $N - (n - 1) - (n - 2)$ можливості. Відмітимо, що обчислюючи таким способом порядок множини $\mathcal{I}_{n2}$, ми враховуємо кожну фіксовану множину $X_0 = \{y_0, z_0\}$ із $\mathcal{I}_{n2}$ два рази, бо ми можемо спочатку вибрати y_0 , а потім z_0 , і можемо спочатку вибрати z_0 , а потім y_0 . І тому

$$|\mathcal{I}_{n2}| = \frac{N[N - (n - 1) - (n - 2)]}{2} = \frac{n(n - 1)(n - 2)(n - 3)}{8}.$$

Порядок множини $\mathcal{I}_{n3}$ можна обчислювати по тій же схемі. В цьому випадку X складається із трьох елементів — $x_1 = (p_1, q_1)$, $x_2 = (p_2, q_2)$ і $x_3 = (p_3, q_3)$. Як ми вже знаємо, для елемента $x_1 \in N$ можливостей і для елемента x_2 (при вже зафіксованому x_1) $\in N - (n - 1) - (n - 2)$ можливості. Оскільки $x_3 \in \{x_1, x_2\}$ -ізолюваним елементом, то рахуючи число можливостей для x_3 (при вже зафіксованих x_1 і x_2), треба виключити всі пари, які містять координату p_1, p_2, q_1 або q_2 . Легко бачити, що число таких пар (із $[1, n]_<^2$) дорівнює $(n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + (n - 4)$ і значить для елемента x_3 множини X маємо $N - (n - 1) - (n - 2) - (n - 3) - (n - 4)$ можливості. Відмітимо, що обчислюючи таким способом порядок множини $\mathcal{I}_{n3}$, ми враховуємо кожну фіксовану множину $X_0 = \{y_0, z_0, t_0\} \in \mathcal{I}_{n3}$ $3! = 6$ раз (бо кількість перестановок на множині із трьох елементів дорівнює $3!$). І тому

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_{n3}| &= \frac{N[N - (n - 1) - (n - 2)][N - (n - 1) - (n - 2) - (n - 3) - (n - 4)]}{6} \\ &= \frac{n(n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4)(n - 5)}{48}. \end{aligned}$$

Порядок множини $\mathcal{I}_{ns}$ можна обчислити аналогічним чином для довільного допустимого s . Будемо мати наступну рівність:

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_{ns}| &= \frac{1}{s!} N[N - (n - 1) - (n - 2)] \cdots [N - (n - 1) - (n - 2) - \cdots - (n - 2s + 1) - (n - 2s)] \\ &= \frac{1}{s!} \prod_{i=0}^{s-1} [N - (n - 1) - (n - 2) - \cdots - (n - 2i + 1) - (n - 2i)] = \frac{1}{s!} \prod_{i=0}^{s-1} (N - 2in + 2i^2 + i) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{s!} \prod_{i=0}^{s-1} \left(\frac{n(n-1)}{2} - 2in + 2i^2 + i \right) = \frac{1}{s!} \prod_{i=0}^{s-1} \frac{(n-2i)(n-2i-1)}{2} = \\
 &= \frac{1}{2^s s!} n(n-1) \cdots (n-2s+2)(n-2s+1) = \frac{n!}{2^s s! (n-2s)!}.
 \end{aligned}$$

Легко бачити, що порядок множини $\mathcal{I}_{ns}$ може бути лише таким: $1, 2, \dots, [n/2]$. Дійсно, із викладеної вище схеми видно, що обчислюючи число можливостей для елемента $x_j = (p_j, q_j)$ множини $X = \{x_1, \dots, x_j\} \in \mathcal{I}_n, j > 1$ (коли $x_1 = (p_1, q_1), \dots, x_{j-1} = (p_{j-1}, q_{j-1})$ (p_j, q_j) вже зафіксовані), ми забороняємо для p_j і q_j значення рівні $p_1, \dots, p_{j-1}, q_1, \dots, q_{j-1}$; і тому множина $X \in \mathcal{I}_n$ не може мати порядок більший за $[n/2]$ або, іншими словами, $|\mathcal{I}_{ns}| = \emptyset$ при $s > [n/2]$. З іншого боку, в $\mathcal{I}_n$ існує множина X порядку $[n/2]$ — наприклад, $X = \{(1, 2), (3, 4), \dots, (n-1, n)\}$, якщо n парне, і $X = \{(1, 2), (3, 4), \dots, (n-2, n-1)\}$, якщо n непарне. Якщо при цьому ще врахувати, що довільна підмножина $Y \neq \emptyset$ множини $X \in \mathcal{I}_n$ також належить $\mathcal{I}_n$, то і будемо мати шукане твердження.

Таким чином, в останній формулі s може приймати значення $1, 2, \dots, [n/2]$ і значить

$$\mathcal{K}_n(k, 2) = \sum_{s=1}^{[n/2]} |\mathcal{I}_{ns}| = \sum_{s=1}^{[n/2]} \frac{n!}{2^s s! (n-2s)!} = n! \sum_{s=1}^{[n/2]} \frac{1}{2^s s! (n-2s)!}.$$

Теорема 2 для $m = 1$ доведена.

Загальний випадок легко випливає із випадку $m = 1$. Дійсно, якщо через $\mathcal{K}_m(2^m, 2)$ позначити число матриць виду $M(X, \lambda)$ над полем k , де $X \in \mathcal{I}_{ns}$, то легко бачити (враховуючи твердження 1) теореми 1), що $\mathcal{K}_{ns}(2^m, 2) = (2^m - 1)^s |\mathcal{I}_{ns}|$ ($2^m - 1$ — це число елементів в $k^* = k \setminus \{0\}$). І, отже,

$$\mathcal{K}_n(2^m, 2) = \sum_{s=1}^{[n/2]} (2^m - 1)^s |\mathcal{I}_{ns}| = \sum_{s=1}^{[n/2]} \frac{n! (2^m - 1)^s}{2^s s! (n-2s)!} = n! \sum_{s=1}^{[n/2]} \frac{(2^m - 1)^s}{2^s s! (n-2s)!}.$$

- [1] Гудивок П. М., Капитонова Ю. В., Поляк С. С., Рудько В. П., Цыпкин А. И. Классы сопряженных элементов унитарной группы // Кибернетика. - 1990. - N1. - С. 40-48. 133.
- [2] Vera-Lopez A., Arregi J. M. Conjugacy classes in Sylow p -subgroups of $GL(n, q)$ // IV Glasgow Math. J. - 1994. - 36. - P. 91-96.
- [3] Isaacs I. M., Dikran Karaguezian. Conjugacy in groups of upper triangular matrices // J. Algebra. - 1998. - 202. - P. 704-711.
- [4] Robinson, Geoffrey R. Counting conjugacy classes of unitriangular groups associated to finite-dimensional algebras // J. Group Theory. - 1998. - N1. - P. 271-274.
- [5] Vera-Lopez A., Arregi J. M. Conjugacy classes in unitriangular matrices // Linear Algebra Appl. - 2003. - 370. - P. 85-124.
- [6] Vera-Lopez Antonio, Arregi J. M. Computing in unitriangular matrices over finite fields // Linear Algebra Appl. - 2004. - 387. - P. 193-219.
- [7] Бондаренко В. В. Про спряжені елементи порядку 2 в групі унітрикутних матриць над полем характеристики 2 // Науковий вісник Ужгородського ун-ту - 2005. - вип. 10. - С. 36-50.

Надійшла до редакції 1.09.2005

УДК 519.21

Тетяна В. Боярищева,

Петро В. Слюсарчук

Оцінки швидкості збіжності до
нормального закону в термінах
середніх псевдомоментів

Tetjana V. Bojaryscheva,

Petro V. Slusarchuk

The Estimates of the Rate of
Convergence to normal law in
the term of middle
pseudomoments

Робота містить оцінки швидкості
збіжності до нормального закону
функцій розподілу сум випадкових
величин. Ці оцінки отримано в
термінах середніх псевдомоментів.

Ключові слова: швидкість збіжності,
псевдомомент.

The paper contains estimates of
the rate of convergence to
normal law of distributive
function of sums of random
variables. These estimates are
getting in the term of middle
pseudomoments.

Key Words: rate of convergence,
pseudomoment.

У роботі [1] (стор. 377 – 381) одержано досить загальну оцінку швидкості збіжності до нормального закону і відзначається можливість використання різної структури псевдомоментів. У даній роботі розглядається оцінка швидкості збіжності функцій розподілу сум незалежних різно розподілених випадкових величин до нормального закону розподілу. При цьому використано псевдомоменти, аналогічні до введених у [2], [3], але оцінка отримана з допомогою усереднених псевдомоментів, що суттєво покращує результат [2] і [3], при цьому вимагається виконання слабших умов, що накладаються на випадкові величини. У роботі продовжуються дослідження, розпочаті в [2], [4].

Нехай $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ - послідовність незалежних випадкових величин з $M\xi_k = 0$, $D\xi_k = \sigma_k^2$ ($0 < \sigma_k^2 < +\infty$), функціями розподілу $F_k(x)$, характеристичними функціями $f_k(t)$, $\Phi(x)$ - функція розподілу стандартного нормального закону, $\Phi_n(x)$ - функція розподілу випадкової величини $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{B_n}$, де $B_n^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$, $\bar{\sigma}_k = \min(1, \sigma_k)$, $\bar{B}_n^2 = \bar{\sigma}_1^2 + \dots + \bar{\sigma}_n^2$,

$$\rho_n = \sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)|.$$

Введемо позначення

$$\kappa_k^{(1)}(r, y) = \int_{|x| \leq y} |x|^{r-1} |H_k(x)| dx, \quad \kappa_k^{(2)}(y) = \int_{|x| > y} |x| |H_k(x)| dx,$$

$$\kappa_{k0}^{(1)}(3, y) = \int_{|x| \leq y} \max(1, x^2) |H_k(x)| dx, \quad \kappa_{k0}^{(2)}(y) = \int_{|x| > y} \max(1, |x|) |H_k(x)| dx,$$

$$\bar{\kappa}^{(1)}(r, y) = \frac{1}{\bar{B}_n^2} \sum_{k=1}^n \kappa_k^{(1)}(r, y), \quad \bar{\kappa}^{(2)}(y) = \frac{1}{\bar{B}_n^2} \sum_{k=1}^n \kappa_k^{(2)}(y), \quad \bar{\kappa}(r, y) = \max(\bar{\kappa}^{(1)}(r, y), \bar{\kappa}^{(2)}(y)),$$

$$\bar{\kappa}_0^{(1)}(3, y) = \frac{1}{\bar{B}_n^2} \sum_{k=1}^n \kappa_{k0}^{(1)}(3, y), \quad \bar{\kappa}_0^{(2)}(y) = \frac{1}{\bar{B}_n^2} \sum_{k=1}^n \kappa_k^{(2)}(y), \quad \bar{\kappa}_0(3, y) = \max(\bar{\kappa}_0^{(1)}(3, y), \bar{\kappa}_0^{(2)}(y))$$

Теорема.

Для всіх $n \geq 1$ справедливі нерівності

$$\rho_n \leq A_1(r) \inf_{y>0} \left\{ \left(\frac{\bar{\kappa}^{(1)}(r, y)}{\bar{B}_n^{r-2}} + \bar{\kappa}^{(2)}(y) \right) \frac{1}{\sigma^{r+2}} + \delta(\bar{\kappa}(r, y)) \frac{(\kappa(r, y))^{\frac{n}{m+1}}}{\bar{B}_n} \right\}, \quad (1)$$

$$\rho_n \leq A_2 \inf_{y>0} \left\{ \left(\frac{\bar{\kappa}_0^{(1)}(3, y)}{\bar{B}_n} + \bar{\kappa}_0^{(2)}(y) \right) \frac{1}{\sigma^3} + \delta(\bar{\kappa}_0(3, y)) \frac{(\kappa_0(3, y))^{\frac{n}{m+1}}}{\bar{B}_n} \right\}, \quad (2)$$

$$\text{де } \delta(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Доведення.

Для доведення використаємо нерівність (наслідок із [5], стор. 299)

$$\rho_n \leq \frac{2}{\pi} \int_0^X \left| \prod_{k=1}^n f_k(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi \sqrt{2\pi X}}, \quad (3)$$

поклавши в ній $X = T' \bar{B}_n$, де $T' = (\bar{\kappa}(r, y))^{r'} c^{\frac{r+2}{2(r-2)}}$,

$$r' = \begin{cases} \frac{1}{r-2}, & \bar{\kappa}(r, y) > 1, \\ \frac{n}{rn+1}, & \bar{\kappa}(r, y) \leq 1, \end{cases} \quad \bar{\kappa}(r, y) = \max(\bar{\kappa}^{(1)}(r, y), \bar{\kappa}^{(2)}(y)), \text{ стала } c \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ буде}$$

визначена пізніше.

Оскільки для довільного дійсного t ([4])

$$e^{\frac{t^2 \sigma_i^2}{2}} - 1 \leq \frac{e^{\frac{c}{2}} - 1}{c} \bar{\sigma}_i^2 \min(c, t^2), \quad (4)$$

тому

$$|f_k(t)| \leq e^{\frac{t^2 \sigma_k^2}{2}} + \omega_k(t) \leq \exp \left\{ \frac{e^{\frac{c}{2}} - 1}{c} \bar{\sigma}_k^2 \min(c, t^2) + \omega_k(t) \right\}, \quad (5)$$

$$e^{\frac{t^2 \sigma_i^2}{2}} = 1 + e^{\frac{t^2 \sigma_i^2}{2}} - 1 \leq \exp \left\{ e^{\frac{t^2 \sigma_i^2}{2}} - 1 \right\} \leq \exp \left\{ \frac{e^{\frac{c}{2}} - 1}{c} \bar{\sigma}_i^2 \min(c, t^2) \right\}, \quad (6)$$

а

$$\exp\left\{\frac{1-e^{-\frac{\varepsilon}{2}}}{c}\bar{\sigma}_k^2 \min(c, t^2)\right\} \leq e^{\frac{\varepsilon}{2}}, \quad (7)$$

Тут враховується, що функція $\frac{1-e^{-t}}{t}$ є спадною при $t > 0$ і $\lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{1-e^{-t}}{t} = 1$.

Нехай $T_1 = \sqrt{c}$, $T_2' = \min(T, T')$.

Будемо вважати, що $\bar{\kappa}^{(2)}(y) \leq c^2$, бо у випадку $\bar{\kappa}^{(2)}(y) > c^2$ $\rho_n \leq c^{-2} \bar{\kappa}^{(2)}(y)$ і нерівність (1) правильна.

Якщо $T_2' = T'$ (у цьому випадку $\bar{\kappa}(r, y) > c^{\frac{2}{p'(r-2)}}$), то при $|t| \leq T'B_n$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \omega_k \left(\frac{t}{B_n} \right) &\leq \sum_{k=1}^n \left(2^{s-2r} \frac{|t|^r}{B_n^r} \bar{\kappa}_k^{(1)}(r, y) + 2 \frac{t^2}{B_n^2} \bar{\kappa}_k^{(2)}(y) \right) = \\ &= \frac{t^2}{B_n^2} \bar{B}_n^2 \left(2^{s-2r} \bar{\kappa}^{(1)}(r, y) \frac{|t|^{r-2}}{B_n^{r-2}} + 2 \bar{\kappa}^{(2)}(y) \right) \leq \\ &\leq \frac{t^2}{B_n^2} \bar{B}_n^2 \left(2^{s-2r} (\bar{\kappa}(r, y))^{1-p'(r-2)} c^{\frac{r+2}{2}} + 2c^2 \right) \leq 4c^2 \bar{B}_n^2 \frac{t^2}{B_n^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Якщо $T_2' = T_1$ $\left(\bar{\kappa}(r, y) \leq c^{\frac{2}{p'(r-2)}} \right)$, то при $|t| \leq T_1 B_n$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \omega_k \left(\frac{t}{B_n} \right) &= \frac{t^2}{B_n^2} \bar{B}_n^2 \left(2^{s-2r} c^{\frac{r-2}{2}} \bar{\kappa}^{(1)}(r, y) + 2 \bar{\kappa}^{(2)}(y) \right) \leq \\ &\leq \frac{t^2}{B_n^2} \bar{B}_n^2 \left(2^{s-2r} c^{\frac{r-2}{2} + \frac{2}{p'(r-2)}} + 2c^2 \right) \leq 4c^2 \bar{B}_n^2 \frac{t^2}{B_n^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

а при $T_1 B_n < |t| \leq T'B_n$ (врахуємо, що $p' = \frac{n}{rn+1}$, $1-rp' > 0$, $1-2p' > 0$)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \omega_k \left(\frac{t}{B_n} \right) &= \bar{B}_n^2 \left(2^{s-2r} (\bar{\kappa}(r, y))^{1-rp'} c^{\frac{r-2}{2} + \frac{2r}{r-2}} + 2 (\bar{\kappa}(r, y))^{1-2p'} c^{\frac{4}{r-2}} \bar{\kappa}^{(2)}(y) \right) \leq \\ &\leq \bar{B}_n^2 \left(2^{s-2r} (\bar{\kappa}(r, y))^{1-rp'} + 2 (\bar{\kappa}(r, y))^{1-2p'} \right) c^s \leq 4c^s \bar{B}_n^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Із (5), (6), (7), (8), (9), (10) при $|t| \leq T_2' B_n$

$$|\psi_m(t)| \leq e^{\frac{\varepsilon}{2}} \exp\left\{\frac{e^{-\frac{\varepsilon}{2}} - 1}{c} \bar{B}_n^2 \frac{t^2}{B_n^2} + 4c^2 \bar{B}_n^2 \frac{t^2}{B_n^2}\right\} = e^{\frac{\varepsilon}{2}} \exp\left\{-c_1' \bar{B}_n^2 \frac{t^2}{B_n^2}\right\}, \quad (11)$$

де $c_1' = \frac{1-e^{-\frac{\varepsilon}{2}}}{c} - 4c^2$, і сталу c виберемо так, щоб $c_1' > 0$.

Із (3)

$$\rho_n \leq \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{T_2 B_n} \left| \varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \frac{dt}{t} + \int_{T_2 B_n}^{T B_n} \left| \varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \frac{dt}{t} \right) + \frac{24}{\pi \sqrt{2\pi T' B_n}} =$$

$$= \frac{2}{\pi} (I'_1 + I'_2) + \frac{24(\bar{\kappa}(r, y))^{r'}}{\pi \sqrt{2\pi B_n} c^{\frac{r+2}{2(r-2)}}} \quad (12)$$

Із (11) при $n \geq 2$ при $|t| \leq T_2' B_n$

$$\left| \varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \leq e^{\frac{c}{2}} \sum_{k=1}^n \left(2^{s-2r} \frac{|t|^r}{B_n^r} \bar{\kappa}_k^{(1)}(r, y) + 2 \frac{t^2}{B_n^2} \bar{\kappa}_k^{(2)}(y) \right) e^{-4\bar{B}_n^2 \frac{t^2}{B_n^2}} =$$

$$= e^{\frac{c}{2}} \left(2^{s-2r} \frac{|t|^r}{B_n^r} \bar{\kappa}^{(1)}(r, y) + 2 \frac{t^2}{B_n^2} \bar{\kappa}^{(2)}(y) \right) e^{-4\bar{B}_n^2 \frac{t^2}{B_n^2}} \cdot \bar{B}_n^2$$

Тоді

$$I'_1 \leq C_1(c, r) \left(\frac{\bar{\kappa}^{(1)}(r, y)}{\bar{B}_n^{r-2}} + \bar{\kappa}^{(2)}(y) \right) \quad (13)$$

При $T_2' = T'$ $I'_2 = 0$. При виконанні умови $\frac{\bar{\kappa}(r, y)}{\bar{B}_n^{r-2}} \geq \frac{(\bar{\kappa}(r, y))^{r'}}{\bar{B}_n}$ одержуємо

нерівність (1), а якщо вказана умова не виконується, то (1) стає очевидною.

Тому будемо вважати, що $T_2' = T_1$ (у цьому випадку $\bar{\kappa}(r, y) \leq c^{\frac{2}{r(r-2)}}$).

При $n \geq 2$ і $T_2' B_n < |t| \leq T' B_n$ із (5), (7) і (10)

$$\prod_{k=1}^n \left(e^{\frac{t^2 \sigma_k^2}{2B_n^2}} + \omega_k \left(\frac{t}{B_n} \right) \right) \leq e^c e^{-c c_2' \bar{B}_n^2} \quad (14)$$

де $c_2' = \frac{1-e^{-\frac{c}{2}}}{c} - 4c^4$, і сталу c виберемо так, щоб $c_2' > 0$.

Для подальшого доведення використаємо нерівність ([5])

$$\left| \prod_{i=1}^n a_i - \prod_{i=1}^n b_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| \prod_{i=1, i \neq j}^n |b_i| \prod_{k=1, k \neq j}^n (|b_k| + |a_k - b_k|) + \prod_{i=1}^n |a_i - b_i|,$$

у якій покладемо $a_i = f_i \left(\frac{t}{B_n} \right)$, $b_i = e^{\frac{t^2 \sigma_i^2}{2B_n^2}}$. Тоді

$$\left| \varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \leq \sum_{i=1}^n \omega_i \left(\frac{t}{B_n} \right) \sum_{j=1}^n e^{\frac{t^2 \sigma_j^2}{2B_n^2}} \prod_{k=1, k \neq j}^n \left(e^{\frac{t^2 \sigma_k^2}{2B_n^2}} + \omega_k \left(\frac{t}{B_n} \right) \right) + \prod_{k=1}^n \omega_k \left(\frac{t}{B_n} \right) \quad (15)$$

Із (14) і (15) при $n \geq 2$ і $T_1 B_n < |t| \leq T' B_n$

$$\left| \varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \leq (n-1) e^{-\frac{t^2}{2B_n^2}} e^c e^{-\frac{t^2}{2B_n^2}} B_n^2 \left(2^{5-2r} \frac{|t|^r}{B_n^r} \bar{\kappa}^{(1)}(r, y) + 2 \frac{t^2}{B_n^2} \bar{\kappa}^{(2)}(y) \right) + \prod_{k=1}^n \omega_k \left(\frac{t}{B_n} \right). \quad (16)$$

Із (16) одержуємо

$$I_2' = \int_{T_1 B_n}^{T_2 B_n} \left| \varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \frac{dt}{t} \leq (n-1) e^c e^{\frac{c}{2B_n^2}} B_n^2 \int_{T_1 B_n}^{T_2 B_n} e^{-\frac{t^2}{2B_n^2}} \left(2^{5-2r} \frac{|t|^r}{B_n^r} \bar{\kappa}^{(1)}(r, y) + 2 \frac{t^2}{B_n^2} \bar{\kappa}^{(2)}(y) \right) \frac{dt}{t} + \int_{T_1 B_n}^{T_2 B_n} \left(\prod_{k=1}^n \omega_k \left(\frac{t}{B_n} \right) \right) \frac{dt}{t} \leq C_2(c, r) \frac{1}{\sigma^{r+2}} \left(\frac{\bar{\kappa}^{(1)}(r, y)}{B_n^{r-2}} + \bar{\kappa}^{(2)}(y) \right) + \int_{T_1}^{T_2} \left(\prod_{k=1}^n \omega_k(t) \right) \frac{dt}{t}. \quad (17)$$

Оскільки при $T_1 < |t| \leq T_2$

$$\omega_k(t) \leq 2^{5-2r} |t|^r \kappa_k^{(1)}(r, y) + 2t^2 \kappa_k^{(2)}(y) \leq (\kappa_k^{(1)}(r, y) + \kappa_k^{(2)}(y)) |t|^r 2c^{\frac{r-2}{2}},$$

то

$$\begin{aligned} \int_{T_1}^{T_2} \left(\prod_{k=1}^n \omega_k(t) \right) \frac{dt}{t} &\leq \left(\prod_{k=1}^n 2c^{\frac{r-2}{2}} (\kappa_k^{(1)}(r, y) + \kappa_k^{(2)}(y)) \right) \int_{T_1}^{T_2} t^{m-1} dt \leq \\ &\leq \left(\frac{2c^{\frac{r-2}{2}} \sum_{k=1}^n (\kappa_k^{(1)}(r, y) + \kappa_k^{(2)}(y))}{n} \right)^n \frac{T_2^m}{rn} \leq \\ &\leq \left(2c^{\frac{r-2}{2}} (\bar{\kappa}^{(1)}(r, y) + \bar{\kappa}^{(2)}(y)) \right)^n \frac{T_2^m}{rn} \leq \frac{\left(2c^{\frac{r-2}{2}} \right)^n (\bar{\kappa}(r, y))^{n-rn}}{n} c^{\frac{m(r+2)}{2(r-2)}} = \\ &= \frac{(\bar{\kappa}(r, y))^{r'}}{n} \left(2c^{\frac{3r-2}{r-2}} \right)^n \leq \frac{(\kappa(r, y))^{r'}}{n} \left(2c^{\frac{3r-2}{r-2}} \right)^2. \end{aligned}$$

Тоді із (17) одержуємо, що при $n \geq 2$ (врахуємо, що $c < \frac{1}{2}$)

$$I_2' \leq C_3(c, r) \frac{1}{\sigma^{r+2}} \left(\frac{\bar{\kappa}^{(1)}(r, y)}{B_n^{r-2}} + \bar{\kappa}^{(2)}(y) \right) + \frac{(\bar{\kappa}(r, y))^{r'}}{n} \left(2c^{\frac{3r-2}{r-2}} \right)^2. \quad (18)$$

Із (12), (13) і (18) при $n \geq 2$ випливає (1).

Нехай $n=1$ і $\kappa(r, y) \leq c^{\frac{2}{r(r-2)}}$, тоді

$$\begin{aligned} \rho_1 &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{T_0} \left| f_1\left(\frac{t}{\sigma_1}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi \sqrt{2\pi T' \sigma_1}} \leq \\ &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{T_0} \left(2^{s-2r} \frac{|t|^r}{\sigma_1^r} \kappa_1^{(1)}(r, y) + 2 \frac{t^2}{\sigma_1^2} \kappa_1^{(2)}(y) \right) \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi \sqrt{2\pi T' \sigma_1}} = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(2^{s-2r} \kappa_1^{(1)}(r, y) \frac{1}{r} (T')^r + (T')^2 \kappa_1^{(2)}(y) \right) + \frac{24}{\pi \sqrt{2\pi T' \sigma_1}} \leq \\ &\leq \bar{\sigma}_1^2 (\bar{\kappa}(r, y))^r \frac{2}{\pi} \left(2^{s-2r} \frac{1}{r} c^{\frac{r(r+2)}{2(r-2)}} + c^{\frac{r+2}{r-2}} \right) + \frac{24}{\pi \sqrt{2\pi}} \frac{(\bar{\kappa}(r, y))^r}{c^{\frac{r+2}{2(r-2)} \bar{\sigma}_1}} \leq C_4(c, r) \frac{(\bar{\kappa}(r, y))^{\frac{1}{r+1}}}{\bar{\sigma}_1} \end{aligned}$$

Це завершує доведення нерівності (1).

Покладемо в (3) $X = T'' B_n$, де $T'' = (\bar{\kappa}_0(3, y))^{-r'} c^{\frac{s}{2}}$, $p'' = \begin{cases} 1, \bar{\kappa}_0(3, y) \geq 1, \\ \frac{n}{n+1}, \bar{\kappa}_0(3, y) < 1, \end{cases}$

$\bar{\kappa}_0(3, y) = \max(\bar{\kappa}_0^{(1)}(3, y), \bar{\kappa}_0^{(2)}(y))$, а стала $c \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ буде визначена пізніше.

Нехай знову $T_2'' = \min(T_1, T'')$, $T_1 = \sqrt{c}$.

Будемо вважати, що $\kappa_0^{(2)}(y) \leq c^2$, бо у протилежному випадку нерівність (2) є очевидною.

Аналогічно (8) – (10), якщо $T_2'' = T'' \left(\bar{\kappa}_0(3, y) \geq c^{\frac{2}{p''}} \right)$, то при $|t| \leq T'' B_n$

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \left(\frac{t}{B_n} \right) \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{|t|^3}{2B_n^3} \kappa_{i0}^{(1)}(3, y) + 2 \frac{t^2}{B_n^2} \kappa_{i0}^{(2)}(y) \right) \leq \frac{t^2}{B_n^2} \bar{B}_n^2 2,5c^2 \quad (19)$$

Якщо ж $T_2'' = T_1 \left(\bar{\kappa}_0(3, y) \leq c^{\frac{2}{p''}} \right)$, то при $|t| \leq T_1 B_n$

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \left(\frac{t}{B_n} \right) \leq \frac{t^2}{B_n^2} \bar{B}_n^2 2,5c^2, \quad (20)$$

а при $T_1 B_n \leq |t| \leq T'' B_n$

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \left(\frac{t}{B_n} \right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{|t|}{B_n} (\kappa_{i0}^{(1)}(3, y) + \kappa_{i0}^{(2)}(y)) \leq 2 \bar{B}_n^2 c^{\frac{3}{2}} \quad (21)$$

При виконанні умов (5) – (7) справедливою буде оцінка

$$\begin{aligned}
 |\psi_n(t)| &\leq \exp \left\{ \frac{e^{\frac{c}{2}} - 1}{c} (\bar{\sigma}_1^2 + \dots + \bar{\sigma}_{i-1}^2) \min \left(c, \frac{t^2}{B_n^2} \right) + \frac{e^{\frac{c}{2}} - 1}{c} (\bar{\sigma}_{i+1}^2 + \dots + \bar{\sigma}_n^2) \min \left(c, \frac{t^2}{B_n^2} \right) + \right. \\
 &+ \left. \sum_{k=i+1}^n \omega_k \left(\frac{t}{B_n} \right) \right\} = \exp \left\{ \frac{e^{\frac{c}{2}} - 1}{c} (\bar{B}_n^2 - \bar{\sigma}_i^2) \min \left(c, \frac{t^2}{B_n^2} \right) + \sum_{k=i+1}^n \omega_k \left(\frac{t}{B_n} \right) \right\} \leq \\
 &\leq e^{\frac{c}{2}} \exp \left\{ \frac{e^{\frac{c}{2}} - 1}{c} \bar{B}_n^2 \min \left(c, \frac{t^2}{B_n^2} \right) + c \bar{B}_n^2 \min \left(c, \frac{t^2}{B_n^2} \right) \right\} \leq \\
 &\leq e^{\frac{c}{2}} \exp \left\{ -c_1 \bar{B}_n^2 \min \left(c, \frac{t^2}{B_n^2} \right) \right\},
 \end{aligned}$$

Тому із (19) і (20) при $|t| \leq T^* B_n$

$$|\psi_n(t)| \leq e^{\frac{c}{2}} \exp \left\{ \frac{e^{\frac{c}{2}} - 1}{c} \bar{B}_n^2 \frac{t^2}{B_n^2} + 2,5 c^2 \bar{B}_n^2 \frac{t^2}{B_n^2} \right\} = e^{\frac{c}{2}} \exp \left\{ -c_1'' c^2 \bar{B}_n^2 \frac{t^2}{B_n^2} \right\}, \quad (22)$$

де $c_1'' = \frac{1 - e^{\frac{c}{2}}}{c} - 2,5 c^2$ (сталу c вибираємо так, щоб $c_1'' > 0$).

Із (3)

$$\rho_n \leq \frac{2}{\pi} (I_1'' + I_2'') + \frac{24 (\bar{\kappa}_0(3, y))^{p^*}}{\pi \sqrt{2\pi c^2} B_n}, \quad (23)$$

де

$$I_1'' = \int_0^{T_2^* B_n} \left| \varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \frac{dt}{t}, \quad I_2'' = \int_{T_1^* B_n}^{T_2^* B_n} \left| \varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \frac{dt}{t}.$$

Аналогічно (13), при $n \geq 2$ і $|t| \leq T_2^* B_n$

$$\left| \varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \leq e^{\frac{c}{2}} \left(\frac{|t|^3}{2B_n^3} \bar{\kappa}_0^{(1)}(3, y) + \frac{2t^2}{B_n^2} \bar{\kappa}_0^{(2)}(y) \right) \bar{B}_n^2 e^{-c \bar{B}_n^2 \frac{t^2}{B_n^2}},$$

тому

$$I_1'' \leq C_3(c, r) \left(\frac{\bar{\kappa}_0^{(1)}(3, y)}{\bar{B}_n} + \bar{\kappa}_0^{(2)}(y) \right). \quad (24)$$

Оскільки при $T_2^* = T^*$ $I_2'' = 0$, то будемо вважати $T_2^* = T_1^* \left(\bar{\kappa}_0(r, y) \leq c^{\frac{2}{p^*}} \right)$.

Із (5), (7) і (15) при $n \geq 2$ і $T_1^* B_n \leq |t| \leq T^* B_n$

$$\prod_{k=1}^n \left(e^{\frac{r^2 \omega_k^2}{2B_n^2}} + \omega_k \left(\frac{t}{B_n} \right) \right) \leq e^c e^{-\alpha_2^2 B_n^2}, \quad (25)$$

де $c_2'' = \frac{1 - e^{-\frac{c}{2}}}{c} - 2c^{\frac{3}{2}}$, сталу c вибираємо так, щоб $c_2'' > 0$.

Із (15) та (24) при $n \geq 2$ і $T_1 B_n \leq |t| \leq T'' B_n$

$$\left| \varphi_n(t) - e^{\frac{r^2}{2}} \right| \leq (n-1) e^{\frac{r^2 B_n^2}{2B_n^2}} e^c c^{-\alpha_2^2 B_n^2} |t| \bar{\kappa}_0(3, y) + \prod_{k=1}^n \omega_k \left(\frac{t}{B_n} \right).$$

Оскільки

$$\omega_k(t) \leq |t| (\kappa_{k0}^{(1)}(3, y) + \kappa_{k0}^{(2)}(y)),$$

то, аналогічно доведенню нерівності (1), одержимо

$$I_2'' \leq C_6(c, r) \frac{1}{\sigma^5} \left(\frac{\bar{\kappa}_0^{(1)}(3, y)}{B_n} + \bar{\kappa}_0^{(2)}(y) \right) + \frac{4c^3}{n} (\bar{\kappa}_0(3, y))^{\frac{n}{n+1}}. \quad (26)$$

Із (23), (24) і (26) при $n \geq 2$ одержуємо (2). Оцінка для ρ_1 проводиться аналогічно попередньому випадку.

Список літератури

1. Золотарев В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. – М.: Наука, 1986. – 416 с.
2. Боярищева Т. В., Поляк І. Й., Слюсарчук П. В. Оцінка близькості розподілів сум до нормального // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія математика і інформатика. – Ужгород, 2000. – Вип. 5 – С. 4 – 10.
3. P.V. Shlusarchuk, T.V. Bojaryscheva. The approximation of convergence of sums to the normal law // Theory of Stochastic Processes. – 2003, vol. 9(25), no 3 – 4, pp. 206 – 210.
4. Слюсарчук П. В., Поляк І. Й. Узагальнення одного результату В. М. Золотарьова. // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія математика. – Ужгород, 1998. – Вип. 3 – С. 184 – 189.
5. Лозв М. Теория вероятностей. – М.: Из-во иностр. лит., 1962. – 720 с.

Надійшла до редакції 2.09.2005

УДК 512.54

Євген В. Бондаренко¹

**Дії груп ітерованих монодромій
суб-гіперболічних квадратичних
многочленів на кореневому
дереві.**

*Знайдено нуклеуси дій груп
ітерованих монодромій суб-
гіперболічних квадратичних многочленів
на кореневому дереві. Встановлено інші
властивості їхньої дії.*

*Ключові слова: самоподібні групи,
стискуючі дії, нуклеус.*

¹ E-mail: ibond@math.tamu.edu

Ievgen V. Bondarenko¹

**Actions of iterated monodromy
groups of sub-hyperbolic quadratic
polynomials on rooted tree.**

*Nuclei of actions of iterated
monodromy groups of sub-hyperbolic
quadratic polynomials on the rooted tree
are described. Other properties of the
actions are determined.*

*Key Words: self-similar groups,
contracting actions, nucleus.*

Вступ

Теорія самоподібних груп інтенсивно розвивається протягом останніх двох десятиліть (див. [1,2]). Важливим класом прикладів самоподібних груп є так звані групи ітерованих монодромій пост-критично скінченних раціональних функцій (див. [2]). Цей приклад будує зв'язок між класичною динамікою і самоподібними діями.

В даній роботі досліджується дія груп ітерованих монодромій суб-гіперболічних квадратичних многочленів на бінарному кореневому дереві. Основним результатом роботи є знаходження їхнього нуклеусу. Також показано, що орбіти дії цих груп на границі дерева співпадають з конфінальними класами і що дії є рекурентними.

2. Основна частина

Нехай X – скінченна множина, яку ми будемо називати алфавітом. Символом X^* ми позначимо множину всіх скінченних слів $x_1x_2\dots x_n$ над алфавітом X , включаючи порожнє слово $\emptyset$. Довжину слова $v = x_1x_2\dots x_n$ ми позначимо $|v|$.

Множина X^* природним чином представляється як кореневе дерево. А саме, корінь дерева це порожнє слово $\emptyset$ і кожне слово $v \in X^*$ з'єднано ребром з vx , для кожного $x \in X$. Множина X^* слів довжини n називається n -тим рівнем дерева. При $|X| = 2$ дерево X^* будемо називати бінарним.

Множину всіх нескінченних вправо послідовностей виду $x_1x_2\dots$, $x_i \in X$, позначимо X^ω . Дві нескінченні послідовності $x_1x_2\dots$, $y_1y_2\dots \in X^\omega$

називаються конфінальними, якщо вони відрізняються лише в скінченному числі літер. Відношення конфінальності є відношенням еквівалентності. Класи еквівалентності цього відношення називаються конфінальними.

Для кожного слова $v \in X^*$ розглянемо піддерево vX^* . Нехай $g \in \text{Aut}X^*$. Розглянемо автоморфізм $g|_v: X^* \rightarrow X^*$ такий, що $g|_v(x) = y \Leftrightarrow g(vx) = uy$ для деякого $u \in X^*$, $|u| = |v|$. Автоморфізм $g|_v$ називається обмеженням g на слові v або станом g у слові v .

Кожен автоморфізм $g \in \text{Aut}X^*$ індукує підстановку $\pi \in S(X)$ на першому рівні дерева та обмеження $g|_x, x \in X$, причому різним автоморфізмам відповідають різні такі набори. Тому автоморфізми можна записувати у вигляді $g = (g|_1, \dots, g|_n)\pi$, що, фактично, повторює канонічне зображення елементів вінцевого добутку $\text{Aut}X^* \approx S(X) \wr \text{Aut}X^*$.

Означення. Точна дія групи G на просторі X^* ($G < \text{Aut}X^*$) називається самоподібною, якщо для кожних $g \in G$ та $x \in X$ існують $h \in G$ і $y \in X$ такі, що для всіх $w \in X^*$ виконується співвідношення $g(xw) = yh(w)$.

Означення. Підмножина S групи G називається самоподібною, якщо всі стани кожного з елементів з S знову лежать в S .

Для кожного $x \in X$ позначимо через $St_G(x)$ стабілізатор слова x в групі G . Визначимо гомоморфізм $\phi_x: St_G(x) \rightarrow G$ за формулою $\phi_x(g) = g|_x$.

Означення. Самоподібна дія (G, X^*) називається рекурентною, якщо $\phi_x(St_G(x)) = G$.

Важливим підкласом класу самоподібних груп є клас стискуючих груп.

Означення. Самоподібна дія групи G називається стискуючою, якщо існує скінченна множина $N \subset G$ така, що для кожного $g \in G$ існує $k \in \mathbb{N}$ таке, що $g|_v \in N$ для всіх слів $v \in X^*$ довжини $\geq k$. Довільна множина N з такою властивістю називається квазінуклеусом. Мінімальне з квазінуклеусів називається нуклеусом групи.

Нуклеус можна визначати як множину:

$$N = \bigcap_{g \in G, n \in \mathbb{N}} \{g|_v: v \in X^*, |v| \geq n\}.$$

Будемо говорити, що елемент $g \in G$ стискується до множини $S \subset G$, якщо існує рівень $n \in \mathbb{N}$ такий, що для кожного $v \in X^*$ $g|_v \in S$.

Покладемо $X = \{0, 1\}$. Визначимо клас груп $G_{\omega, s}$.

Означення. Для довільних слів $v = v_1 \dots v_s \in X^*$ і $\omega = \omega_1 \dots \omega_s \in X^*$ (v може бути $\emptyset$, $s = 0$) визначимо групу $G_{\omega, s}$ автоморфізмів бінарного кореневого дерева: $G_{\omega, s} = \langle a, h_1, \dots, h_s, g_1, \dots, g_s \rangle$, де:

$a = (1, 1)\sigma$ – кореневий автоморфізм,

$$\begin{aligned} h_1 &= (1, a)^{u_1}, h_{s-1} = (1, h_s)^{u_{s-1}}, \dots, h_1 = (1, h_2)^{u_n} \\ g_1 &= (h_1, g_2)^{u_1}, g_2 = (1, g_3)^{u_2}, \dots, g_i = (1, g_1)^{u_i} \\ \text{де } (x, y)^1 &= (x, y), (x, y)^0 = (y, x). \end{aligned}$$

(У випадку, коли $u = \emptyset$, твірних h_i немає, а $g_1 = (a, g_2)^{u_1}$. Якщо $|\omega| = 1$, тоді $g_1 = (a, g_1)^{u_1}$)

Групи $G_{v,\omega}$ природно з'являються при дослідженні дії груп ітерованих монодромій квадратичних многочленів на кореневому дереві (див. [1,2,3]). Більш того, всі групи ітерованих монодромій пост-критично скінченних квадратичних многочленів $z^2 + c$, де c – точка Місюревича, мають такий вигляд (див. [3]).

Помітимо, що множина твірних S групи – самоподібна. Крім того, покажемо, що $S = S^{-1}$. Дійсно:

$$\begin{aligned} a^2 &= (1, 1) = 1, & h_i^2 &= (1, a^2)^{u_i} = 1, \dots, h_1^2 = (1, h_2^2)^{u_n} = 1 \\ g_1^2 &= (h_1^2, g_2^2)^{u_1} = (1, g_2^2)^{u_1}, & g_2^2 &= (1, g_3^2)^{u_2}, \dots, g_i^2 = (1, g_1^2)^{u_i}. \end{aligned}$$

Оскільки $g_1^2, \dots, g_i^2$ діють тривіально на першому рівні дерева і рекурсивно визначаються один через одного і через одиницю, то вони одиничні.

Покажемо, що групи $G_{v,\omega}$ стискаючі, і знайдемо їхній нуклеус. Для цього нам будуть потрібні деякі леми і наступне означення.

Означення. Слово $\omega \in X^*$ називається періодичним, якщо існує $v \in X^*$ таке, що $|v| < |\omega|$ і $\omega = v \dots v$. Якщо такого слова v не існує, то ω називається неперіодичним.

Надалі, маючи слово $\omega \in X^*$, під ω_i , $k \in \mathbb{Z}$ будемо розуміти k -ту літеру нескінченного в обидва боки слова $\dots \omega \omega \omega \dots$, нумерація літер в якому продовжує нумерацію літер ω .

Лема 1. Нехай $\omega \in X^n$ і існують $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, такі, що для всіх $k \in \mathbb{N}$ виконується рівність $\omega_{i+k} = \omega_{j+k}$. Тоді $\omega = v \dots v$, де $|v| = \text{НСД}(|i-j|, n)$.

Доведення. Нехай $d = \text{НСД}(|i-j|, n)$. Тоді існують $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ такі, що $d = (i-j)\alpha + n\beta$. З умов леми випливає, що для довільного $k \in \mathbb{N}$ $\omega_{i-j+k} = \omega_k$. Тоді для довільного $k \in \mathbb{N}$ $\omega_k = \omega_{i-j+k} = \omega_{(i-j)\alpha+k} = \omega_{(i-j)\alpha+n\beta+k} = \omega_{d+k}$. Отже, $\omega = v \dots v$, де $v = \omega_1 \dots \omega_d$. Лему доведено.

Лема 2. Нехай $\omega \in X^*$. Якщо $\omega = v \dots v$ і $\omega = \tau \dots \tau$, де $v, \tau \in X^*$, причому v неперіодичне, тоді $\tau = v \dots v$.

Доведення. Нехай $l = |\tau|$, $m = |v|$, $d = \text{НСД}(l, m)$. Тоді існують $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ такі, що $d = l\alpha + m\beta$. Тоді для всіх $k \in \mathbb{N}$: $\omega_k = \omega_{l\alpha+k} = \omega_{l\alpha+m\beta+k} = \omega_{d+k}$. Отже, $\omega = v \dots v$, де $|v| = d$. Але $d \mid m$, а v – неперіодичне, тому $m = d$. Отже, $m \mid l$ а тому $\tau = v \dots v$. Лему доведено.

Теорема. G_{ω} – стискаюча група з нуклеусом

$$N(G_{\omega}) = \{1, a, h_1, \dots, h_s, g_1, \dots, g_t\} \cup \\ \cup \{g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_k, i_1 \equiv i_2 \equiv \dots \equiv i_k \pmod{|\tau|}, k \geq 2\}$$

де τ – неперіодичне слово таке, що $\omega = \tau \dots \tau$.

Доведення. Спочатку помітимо, що при $i \equiv j \pmod{|\tau|}$ $g_i g_j = g_j g_i$. Дійсно, оскільки $\omega_i = \omega_j$, то

$$g_i g_j = (\varepsilon, g_{i+1} g_{j+1})^{\omega_i} \quad g_j g_i = (\varepsilon, g_{j+1} g_{i+1})^{\omega_j},$$

де ε приймає значення h_1 або 1, в залежності від значень i та j . З цих формул видно, що $g_i g_j$ і $g_j g_i$ діють однаково на одній гілці дерева, а на другій діють як $g_{i+1} g_{j+1}$ і $g_{j+1} g_{i+1}$ відповідно. Продовжуючи вже для $g_{i+1} g_{j+1}$ і $g_{j+1} g_{i+1}$, отримаємо наше твердження.

Доведемо тепер, що якщо $|\tau|$ не ділить $|i - j|$, то $g_i g_j$ стискається до елементів з множини $\{1, a, h_1, \dots, h_s, g_1, \dots, g_t\}$. Для цього запишемо добуток $g_i g_j$ в загальному вигляді:

$$g_i g_j = \begin{cases} (g_{i+1} \varepsilon_1 \varepsilon_2 g_{j+1})^{\omega_i}, & \text{якщо } \omega_i \neq \omega_j, \\ (\varepsilon, g_{i+1} g_{j+1})^{\omega_i}, & \text{якщо } \omega_i = \omega_j; \end{cases}$$

де $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ приймають значення h_1 або 1. Помітимо, що $h_i g_j$ стискається до елементів з множини $\{1, a, h_1, \dots, h_s, g_1, \dots, g_t\}$, оскільки обмеження h_i на слова довжини $s + 1$ одиничні. Припустимо тепер, що $g_i g_j$ не стискається до цих елементів. Тоді $\omega_i = \omega_j, \omega_{i+1} = \omega_{j+1}, \dots$. За лемою 1 $\omega = \kappa \dots \kappa$, де $|\kappa| = \text{НСД}(|i - j|, |\omega|)$, а тоді за лемою 2 $\kappa = \tau \dots \tau$. Звідси випливає, що $|\tau|$ ділить $|i - j|$. Протиріччя.

Розглянемо множину:

$$N = \{1, a, h_1, \dots, h_s, g_1, \dots, g_t\} \cup \\ \cup \{g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_k, i_1 \equiv i_2 \equiv \dots \equiv i_k \pmod{|\tau|}, k \geq 2\}$$

Доведемо, що довільний елемент g групи G_{ω} стискається до елементів з множини N . Елемент g є словом з алфавіту S – твірних групи. Якщо це слово містить літеру з множини $\{a, h_1, \dots, h_s\}$, тоді на рівні не більшому $s + 1$ воно стиснеться до слів меншої ніж g довжини. Тому будемо розглядати g таке, що містить лише добутки g_i -тих. Якщо g містить добуток $g_i g_j$ такий, що $|i - j|$ не ділиться на $|\tau|$, тоді буде існувати рівень на якому g стиснеться до слів меншої довжини, оскільки в цьому випадку $g_i g_j$ стискається до елементів $\{1, a, h_1, \dots, h_s, g_1, \dots, g_t\}$. Тому врешті решт ми отримаємо, що g стискається до елементів

$\{1, a, h_1, \dots, h_s, g_1, \dots, g_t\} \cup \{\text{добутки } g_i, \text{ де в кожному добутку індекси рівні за модулем } |\tau|\}$. А оскільки при $i \equiv j \pmod{|\tau|}$ g_i і g_j комутують і $g_i^2 = 1$ для довільного i , то g стискається до елементів з N . Отже, N – квазінуклеус.

Доведемо, що N нуклеус групи $G_{v,\omega}$. Елементи $\{1, a, h_i, g_i\}$ належать нуклеусу, оскільки для довільного $s \in \{1, a, h_i, g_i\}$ і довільного $n \in N$ існує $v \in X^*, |v| \geq n$ таке, що $g_i|_v = s$.

Розглянемо елемент $g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_k} \in N$. Оскільки $i_1 \equiv i_2 \equiv \dots \equiv i_k \pmod{|\tau|}$, то $\omega_{i_1+n} = \omega_{i_2+n} = \dots = \omega_{i_k+n}$ для довільного $n \in N \cup \{0\}$. Звідси випливає:

$$\begin{aligned} g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_k} &= (\varepsilon, g_{i_1+1} g_{i_2+1} \dots g_{i_k+1})^{\omega_{i_1}} \\ g_{i_1+1} g_{i_2+1} \dots g_{i_k+1} &= (\varepsilon, g_{i_1+2} g_{i_2+2} \dots g_{i_k+2})^{\omega_{i_1+1}} \\ &\dots \\ g_{i_1-1} g_{i_2-1} \dots g_{i_k-1} &= (\varepsilon, g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_k})^{\omega_{i_1-1}}. \end{aligned}$$

Отже, $g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_k}$ рекурентно визначається через себе і тому належить нуклеусу.

Тепер доведемо, що в N немає однакових елементів. По-перше помітимо, що всі елементи в $N \setminus \{1\}$ не одиничні. По-друге, жодні два елементи з $\{a, h_1, \dots, h_s\}$ не рівні між собою і жоден не дорівнює g_i -ому (які в свою чергу не рівні між собою) або добутку g_i -тих, оскільки проєкції елементів з першої множини на рівень $s+1$ одиничні, а других – ні. Тепер припустимо $g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_n} = g_{j_1} g_{j_2} \dots g_{j_m} \Rightarrow g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_n} g_{j_m} \dots g_{j_2} g_{j_1} = 1$. Якщо $i_1 \equiv j_1 \pmod{|\tau|}$, тоді всі елементи в цьому добутку комутують. Оскільки $g_i^2 = 1$, скоротимо усі такі можливі вирази і, якщо не все скоротиться, отримаємо $g_{k_1} g_{k_2} \dots g_{k_r} = 1$ при $k_1 < k_2 < \dots < k_r$, що неможливо. Тому при такому скороченні все скоротиться. Отже, $n = m$ і $i_1 = j_1, \dots, i_n = j_n$. Якщо $i_1 \equiv j_1 \pmod{|\tau|}$, тоді в виразі $g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_n} g_{j_n} \dots g_{j_2} g_{j_1}$ усі індекси різні. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що $i_1 = 1$, інакше ми можемо розглянути проєкцію цього елемента на рівень на якому g_1 вперше з'являється. Тоді цей елемент діє нетривіально на $s+2$ -ому рівні дерева і тому не рівний одиниці. Протиріччя.

Отже, N – нуклеус групи $G_{v,\omega}$. Теорему доведено.

Твердження 1. Самоподібна дія $(G_{v,\omega}, X^*)$ є рекурентною.

Доведення. Розглянемо гомоморфізм $\phi: g \rightarrow g|_1$. З визначення твірних групи маємо:

$$\begin{aligned} \phi(\{h_i, ah_i, a\}) &= \{1, a\} \quad \text{і при } i \neq s \quad \phi(\{h_i, ah_i, a\}) = \{1, h_{i+1}\} \\ \phi(\{g_i, ag_i, a\}) &= \{h_1, g_2\} \quad \text{і при } i \neq 1 \quad \phi(\{g_i, ag_i, a\}) = \{1, g_{i+1}\} \end{aligned}$$

Отже, $\phi_1(St_{G_{v,w}}(x))$ містить усі твірні групи $G_{v,w}$, а тому $\phi_1(St_{G_{v,w}}(x)) = G_{v,w}$.
Твердження доведено.

Наслідок. Дія $(G_{v,w}, X^*)$ транзитивна на рівнях дерева.

Твердження 2. Орбіти дії $(G_{v,w}, X^*)$ співпадають з конфінальними класами.

Доведення. Помітимо, що для довільного твірного g групи $G_{v,w}$ і довільного нескінченного слова $v \in X^*$, слова v і $g(v)$ відрізняються якнайбільше в одному місці. Тому конфінальні класи є об'єднанням орбіт дії $(G_{v,w}, X^*)$. З рекурентності дії випливає, що для довільного $h \in G_{v,w}$ і довільного скінченного слова $v \in X^*$ існує такий $g \in G_{v,w}$, що $g(v) = v$ і $g|_v = h$. Тоді для довільних слів $v_1, v_2 \in X^*$, $|v_1| = |v_2|$, існує $g \in G_{v,w}$ такий, що $g(v_1) = v_2$ і $g|_{v_1} = 1$. Дійсно, з транзитивності дії випливає, що існує $g_1 \in G_{v,w}$ такий, що $g_1(v_1) = v_2$. Існує $g_2 \in G_{v,w}$ такий, що $g_2(v_1) = v_1$ і $g_2|_{v_1} = (g_1|_{v_1})^{-1}$. Тоді для $g = g_1 g_2$ маємо $g(v_1) = v_2$ і $g|_{v_1} = 1$. Тому орбіти будуть об'єднанням конфінальних класів. Отже, орбіти дії $(G_{v,w}, X^*)$ співпадають з конфінальними класами. Твердження доведено.

3. Висновки

Результати роботи можуть бути використані при подальшому вивченні граничних просторів груп ітерованих монодромій субгіперболічних квадратичних многочленів, а це в свою чергу дозволяє досліджувати множини Жуліа відповідних многочленів. Крім того, опис нуклеусу цих груп дозволяє зробити оцінку складності алгоритму, що розв'язує проблему слів в цих групах (див. [4]).

Література

1. Bartholdi L., Grigorchuk R.I., Nekrashevych V.V. From fractal groups to fractal sets.// In Peter Grabner and Wolfgang Woess, editors, Fractals in Graz 2001. Analysis -- Dynamics -- Geometry -- Stochastics. -- 2003. -- с. 25-118.
2. Nekrashevych V. Self-similar groups. -- AMS, 2005.
3. Bartholdi L., Nekrashevych V. Iterated monodromy groups of quadratic polynomials. -- Preprint, 2003.
4. Savchuk D. On word problem in contracting automorphism groups of rooted trees// Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. 2003. -- 1. -- с. 51-56.

Надійшла до редакції 07.09.2005

УДК 512.643, 512.583, 512.647

Наталія С. Головащук*

Конструкція редукції боксів

Серія: фізико-математичні
науки

У цій роботі розвиваються конструкції регуляризації та редукції вільних боксів, які мають систему деревоподібних зображень, що є каменями, і задовольняють деяким додатковим властивостям.

Ключові слова: бокс, категорія зображень, деревоподібні зображення.

Nataliya S. Golovashchuk*

The reduction construction over the boxes

Series: Physics & Mathematics Sciences

In this paper we develop a constructions of regularization and reduction of free boxes having the system of tree like stone representations with some additional properties.

Key words: box, representation category, tree like representation.

*E-mail: golova@univ.kiev.ua

1 The system of tree like stone representations

In this paper we use results and notations from [1].

We consider a normal box $\mathcal{A} = (K, V, \mu, \varepsilon)$ over an algebraically closed field $\mathbb{k}$. Let we are given by a separated alternative thin stone system $\{X^1, \dots, X^m\}$, and put $l^i = \dim X^i$, $S_i = \text{supp } X^i$, $i \in I_m = \{1, \dots, m\}$. Put $S = \bigsqcup_{i \in I_m} S_i \subset \text{Ob } K$ and consider the restricted box $\mathcal{A}_S$ with the basis

$\mathcal{G}_S = (\Delta_S, \Omega_S, \Phi_S)$, $\Omega_S = \bigsqcup_{i \in I_m} \Omega_{S_i}$. The representations X^i are tree like (by

Corollary 2, [1]) and we fix the 0/1 decomposition $\Delta_{S_i} = \dot{\Delta}_{S_i} \sqcup \ddot{\Delta}_{S_i}$ for each $X^i = \{\lambda_a^i\}_{a \in \Delta_{S_i}} \in \mathfrak{X}(l^i, l^i)$, $i \in I_m$.

Let $\mathcal{P}_{S_i} = \text{Path}(\Delta_{S_i})$, $i \in I_m$. We denote $\dot{\mathcal{P}}_{S_i} = \text{Path}(\dot{\Delta}_{S_i})$ and $\dot{\mathcal{W}}_{S_i} = \text{Walk}(\dot{\Delta}_{S_i}) = \mathcal{P}(\dot{\Delta}_{S_i} \cup \dot{\Delta}_{S_i}^{-1})/\sim$ the paths and walks categories over $\dot{\Delta}_{S_i}$ correspondingly. We put $\Delta_{S_i S_j} = \{a \in \Delta_S \mid s(a) \in S_i, t(a) \in S_j\}$, $i, j \in I_m$. Then $\Delta_{S_i S_i} = \Delta_{S_i}$ and $\Delta_S = \bigsqcup_{i, j \in I_m} \Delta_{S_i S_j}$. Given $a \in \Delta_S$ there are the uniquely

defined $i, j \in I_m$ such that $a \in \Delta_{S_i S_j}$. Similarly, $\Phi_S = \bigsqcup_{i, j \in I_m} \Phi_{S_i S_j}$.

Definition. We put $\dot{\Delta}_S = \bigsqcup_{i \in I_m} \dot{\Delta}_{S_i}$ and $\dot{W}_S = \text{Walk}(\dot{\Delta}_S)$. Denote by $\mathcal{W}_{\Delta_S/\dot{\Delta}_S} = (\mathcal{P}_{\Delta_S \cup \dot{\Delta}_S^{-1}})_{\sim}$ the partial walk category over Q_S . Then $\dot{W}_{S_i} = \mathcal{W}_{\Delta_{S_i}/\dot{\Delta}_{S_i}} \subset \mathcal{W}_{\Delta_S/\dot{\Delta}_S}$ is a partial walk subcategory for $i \in I_m$.

Assumption. We consider the class of boxes to be closed under the basis changes over $\dot{W}_S$. For this, we must assume that for the differentiation $\delta : \Omega_S \rightarrow \bar{V}$ there are $\sigma_i, \sigma'_i \in \mathcal{W}_{\Delta_S/\dot{\Delta}_S}$, $\kappa_i \in \mathbb{k}$, $\varphi_i \in \Phi_S$ in the formulae $\delta_S(x) = \sum_i \kappa_i \sigma_i \varphi_i \sigma'_i$, $x \in \Delta_S$.

For all $i, j \in I_m$, the $\mathbb{k}$ -linear map $\mathcal{F}_{X^i, X^j} : \mathcal{H}(l^i, l^j) \rightarrow \mathcal{X}(l^i, l^j)$ (see (1) from [1]) is given by the equalities: $\mathcal{F}_{X^i, X^j}(H)_a = h_{t(a)} \lambda_a^i - \lambda_a^j h_{s(a)} + \sum_{\delta_S(a)} \kappa \lambda_\sigma^j h_\varphi \lambda_\tau^i$, $a \in \Delta_{S_i S_j}$, where $H = (h_A, h_\varphi)_{\substack{A \in S_i \cap S_j, \\ \varphi \in \Phi_{S_i S_j}}}$, and $\tau \in \mathcal{W}_{\Delta_{S_i}/\dot{\Delta}_{S_i}}$, $\sigma \in \mathcal{W}_{\Delta_{S_j}/\dot{\Delta}_{S_j}}$. Here $\kappa \sigma \varphi \tau \in \dot{W}_S, \Phi_{S_i S_j}, \dot{W}_{S_i}$ provided the summand $\kappa \lambda_\sigma^j h_\varphi \lambda_\tau^i$ of $\delta_{S_i S_j}$ is non zero.

For $a \in \Delta_{S_i S_j}$, $i, j \in I_m$, denote by $\dot{\delta}(a)$ the sum of all summands $\kappa \sigma \varphi \tau$, $\kappa \neq 0$ of $\delta_S(a)$ which belongs to $\dot{W}_S, \Phi_{S_i S_j}, \dot{W}_{S_i}$, and let $\delta_S(a) = \dot{\delta}(a) + \bar{\delta}(a)$. Then (1) from [1] can be rewritten as follows:

$$\mathcal{F}_{X^i, X^j}(H)_a = h_{t(a)} \lambda_a^i - \lambda_a^j h_{s(a)} + \sum_{\delta_S(a)} \kappa \lambda_\sigma^j h_\varphi \lambda_\tau^i, \quad a \in \Delta_{S_i S_j}. \quad (1)$$

If two variables h_φ, h_ψ are contained in the same equation from (1) then there exist $a \in \Delta_{S_i S_j}$ and the walks $\sigma, \sigma' \in \dot{W}_{S_j}$, $\tau, \tau' \in \dot{W}_{S_i}$ such that $\dot{\delta}(a) = \alpha \sigma \varphi \tau + \beta \sigma' \psi \tau' + \dots$, $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$, $\alpha, \beta \neq 0$, in particular, $\sigma \varphi \tau \parallel \sigma' \psi \tau'$.

Remark 1. Given $\sigma \varphi \tau, \sigma' \varphi \tau' \in \dot{W}_S, \Phi_{S_i S_j}, \dot{W}_{S_i}$ such that $\sigma \varphi \tau \parallel \sigma' \varphi \tau'$ one has $\sigma \sim \sigma', \tau \sim \tau'$ and therefore $h_\sigma = h_{\sigma'}, h_\tau = h_{\tau'}$. It follows from the fact that $\dot{Q}_{S_i}, \dot{Q}_{S_j}$ are trees. Then we may assume that every summand $\kappa \sigma \varphi \tau$ from $\dot{\delta}_{S_i S_j}(a)$, $a \in \Delta_{S_i S_j}$ is uniquely determined by the element $\varphi \in \Phi_{S_i S_j}$, besides, σ, τ are the reduced walks. Given $a \in \Delta_{S_i S_j}$ and $\varphi \in \Phi_{S_i S_j}$ there exists at most one path of a form $\sigma_\varphi \varphi \tau_\varphi$ from $\dot{\delta}_{S_i S_j}(a)$.

The map $\Phi_{S_i S_j} \xrightarrow{\dot{W}_S} \Phi'_{S_i S_j}$ such that $\varphi \mapsto \varphi' \in \dot{W}_S, \Phi_{S_i S_j}, \dot{W}_{S_i}$ is called a good defined basis change on $\mathcal{A}$ provided the set $\Phi'_{S_i S_j}$ is a basis of $\mathbb{k}^{\Phi_{S_i S_j}}$ by modulo $a = 1$ for all $a \in \dot{\Delta}_S$. This basis change will be denoted as $\Phi_{S_i S_j} \xrightarrow{\dot{W}_S \wedge \dot{W}_{S_j}} \Phi'_{S_i S_j}$ and as $\Phi_{S_i} \xrightarrow{\dot{W}_{S_i}} \Phi'_{S_i}$ in the case $i = j$.

2 Good basis

Let X be a thin stone of the normal box $\mathcal{A}$, $l = \underline{\dim} X \in \mathbb{E}^+$, $S = \text{supp } l$. Due to the remark 1, the system (3) from [1] is of a form

$$\begin{cases} \left\{ \begin{aligned} h_{t(a)} - h_{s(a)} + \sum_{\varphi \in \Phi_S} \kappa_\varphi \lambda_{\sigma_\varphi} h_\varphi \lambda_{\tau_\varphi} &= 0, & a \in \dot{\Delta}_S; \\ \sum_{\varphi \in \Phi_S} \kappa_\varphi \lambda_{\sigma_\varphi} h_\varphi \lambda_{\tau_\varphi} &= 0, & a \in \ddot{\Delta}_S. \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (2)$$

Here $\dot{\delta}_S(a) = \sum_{\varphi \in \Phi_S} \kappa_\varphi \sigma_\varphi \varphi \tau_\varphi$ with $\kappa_\varphi \in \mathbb{k}$, $\sigma_\varphi, \tau_\varphi \in \dot{W}_S$, $a \in \Delta_S$. It is the system of $|\Delta_S|$ linear equations in $|\Phi_S \cup S|$ variables $H = (h_A, h_\varphi)_{\substack{A \in S \\ \varphi \in \Phi_{S_i}}} \in \mathcal{H}(l, l)$. Since X is an exceptional stone then $|\Phi_S \cup S| - |\Delta_S| = 1$ and this system has a one dimensional space of solutions (see (4) from [1]). Note that the quiver $\dot{Q}_S$ is a tree. Then solving the triangular system we obtain a good defined basis change on Φ_S .

Therefore the rank of the first subsystem of (2) (for all $a \in \Delta_S$) equals $|S| - 1$, and the rank of the second equals $|\Phi_S|$, in particular, this system is homogenous and determinate, so it has a unique zero solution.

More precisely, denote $\ddot{n} \stackrel{df}{=} |\ddot{\Delta}_S| = |\Phi_S|$. There exist orders $a_1, \dots, a_{\ddot{n}}$ on $\ddot{\Delta}_S$; $\varphi_1, \dots, \varphi_{\ddot{n}}$ on Φ_S and a basis change $\Phi_S \xrightarrow{\dot{W}_S} \Phi'_S = \{\varphi^{a_t}\}_{t=1}^{\ddot{n}}$, $\varphi_t \mapsto \varphi'_t = \varphi^{a_t}$ such that $\dot{\delta}(a_k) = \varphi^{a_k}$, $1 \leq k \leq \ddot{n}$. In the new basis Φ'_S there hold $\left\{ \delta_S(a) = \underbrace{\varphi^a}_{\dot{\delta}(a)} - \bar{\delta}'(a), \quad a \in \ddot{\Delta}_S \right.$ where $\bar{\delta}'(a)$ does not contain any summand from $\dot{W}_S(\Phi'_S) \dot{W}_S$.

Let $X^1, \dots, X^m$ be a 0, 1-directed alternative separated thin stone system of the normal box $\mathcal{A}$, $0 < m \leq |\text{Ob } K|$. Denote by $\vec{l} = \{l^1, \dots, l^m\}$ the attached separated root system with $l^i = \underline{\dim} X^i \in \mathbb{E}^+$, $S_i = \text{supp } l^i$, $i \in I_m$. Let $S = \bigsqcup_{i \in I_m} S_i \subset \text{Ob } K$.

Lemma 1. *There exist decompositions $\Delta_S = \dot{\Delta}_S \sqcup \ddot{\Delta}_S$, $\Phi_S = \dot{\Phi}_S \sqcup \ddot{\Phi}_S$ with $|\ddot{\Delta}_S| = |\ddot{\Phi}_S|$, and a basis change $\ddot{\Phi}_S \xrightarrow{\dot{W}_S} \ddot{\Phi}'_S = \{\varphi^a\}_{a \in \ddot{\Delta}_S}$ such that in the basis $(\Delta_S, \Omega_S, \Phi'_S)$ where $\Phi'_S = \dot{\Phi}_S \cup \ddot{\Phi}'_S$ and the differential δ'_S (with respect to the new basis) holds $\bar{\delta}'(a) = \varphi^a$ and therefore*

$$\delta'_S(a) = \varphi^a + \bar{\delta}'(a), \quad a \in \ddot{\Delta}_S$$

where $\bar{\delta}'(a)$ does not contain any summand from $\dot{W}_S(\Phi'_S) \dot{W}_S$. Moreover, for $i, j \in I_n$, $i \neq j$, we have

$$|\Delta_{S_i S_j} \setminus \ddot{\Delta}_{S_i S_j}| = \max\{0, -\langle l^i, l^j \rangle\}, \quad |\Phi_{S_i S_j} \setminus \ddot{\Phi}_{S_i S_j}| = \max\{0, \langle l^i, l^j \rangle\}.$$

Consider the bigraph $\mathcal{B}' = (S', \Delta_S \setminus (\dot{\Delta}_S \cup \ddot{\Delta}_S), \Phi_S \setminus \ddot{\Phi}_S)$ with the set of vertices $S' = \{S_1, \dots, S_m\}$ such that $\Delta_{S_i S_j} \setminus (\dot{\Delta}_{S_i S_j} \cup \ddot{\Delta}_{S_i S_j})$ is the set of solid and $\Phi_{S_i S_j} \setminus \ddot{\Phi}_{S_i S_j}$ is the set of dotted edges from S_i to S_j on $\mathcal{B}'$. The bigraph $\mathcal{B}'$ can be obtained from $\mathcal{B}$ by putting $a = 0$ for all $a \in \ddot{\Delta}_S$ and $a = 1$ for all $a \in \dot{\Delta}_S$. It follows from Lemma 1 that $\mathcal{B}'$ is an alternative bigraph and coincides with $\mathcal{B}_\Gamma$ (see the definition from [1]). Denote the corresponding Tits form by χ_Γ . In particular, the bigraph $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_\Gamma$ is weakly positive and directed. The same hold for the correspondent stone system.

Let we fix the basis which is constructed in Lemma 1.

Given $a \in \Delta_{S_i S_j}$, $i, j \in I_m$, denote $\delta_S(a) = \varphi^a + \bar{\delta}(a) + \hat{\delta}(a)$ where for each summand $\zeta = \kappa\sigma\varphi\tau \in \delta_S(a)$ holds:

$$\begin{cases} \zeta \in \bar{\delta}(a) & \text{if } \zeta \equiv 0 \pmod{\ddot{\Delta}_S}, \\ \zeta \in \hat{\delta}(a) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Remark 2. 1. Given $\zeta = \kappa\sigma\varphi\tau \in \hat{\delta}_S(a)$ it holds $\varphi \neq \varphi^a$.

2. Given $\zeta \in \hat{\delta}(a)$, $a \in \Delta_{S_i S_j}$ it holds: $\zeta \notin \dot{W}_S \Phi_S \dot{W}_S$.

Lemma 2. Denote $q = |\ddot{\Delta}_S|$. There exists an order $a_1, \dots, a_q$ on $\ddot{\Delta}_S$ such that $\varphi^{a_i} \notin \hat{\delta}(a_i)$ for $i \leq j$.

Proof. Assume opposite. Due to the remark 2 there exist the elements $b_1, \dots, b_t \in \ddot{\Delta}_S$, $b_i : B_i \rightarrow C_i$, $t > 1$, such that $\tau_i \varphi^{b_i} \sigma_i \in \hat{\delta}(b_{i+1})$, $i = 1, \dots, t-1$; $\tau_t \varphi^{b_t} \sigma_t \in \hat{\delta}(b_1)$. Therefore there are the partial closed walks $\tau = \tau_t \dots \tau_2 \tau_1 \in \dot{W}_{\Delta_S/\dot{\Delta}_S}(C_1, C_1)$, and $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_t \in \dot{W}_{\Delta_S/\dot{\Delta}_S}(B_1, B_1)$, besides, either $\tau \not\sim \mathbf{1}_{C_1}$ or $\sigma \not\sim \mathbf{1}_{B_1}$ since otherwise $\tau, \sigma \in \dot{W}_S$ in contradiction with Remark 2. By the condition, $\tau, \sigma \not\equiv 0 \pmod{\ddot{\Delta}_S}$. Hence, putting $a = 1$ for all $a \in \dot{\Delta}_S$ we obtain the non trivial 0-cycle on $\mathcal{B}_\Gamma$ with contradicts to the directness of χ_Γ . $\square$

Lemma 3. There exists a basis change $\{\varphi^a\}_{a \in \ddot{\Delta}_S} \xrightarrow{W_{\Delta_S/\dot{\Delta}_S}} \{\psi^a\}_{a \in \ddot{\Delta}_S}$ such that

$$\delta_S(a) = \psi^a + \bar{\delta}(a), \quad \bar{\delta}(a) \equiv 0 \pmod{\ddot{\Delta}_S}, \quad a \in \ddot{\Delta}_S.$$

Proof. Let $\ddot{\Delta}_S = \{a_1, \dots, a_q\}$ in accordance with Lemma 2. Then $\hat{\delta}(a_1)$ does not contain $\varphi^{a_1}, \dots, \varphi^{a_q}$, we put $\psi^{a_1} = \varphi^{a_1} + \hat{\delta}(a_1)$. Iterating this construction we obtain, that $\hat{\delta}(a_i)$ does not contain $\varphi^{a_i}, \dots, \varphi^{a_q}$, we

put $\psi^{a_i} = \varphi^{a_i} + \widehat{\delta}(a_i)$, $i = 2, \dots, q$. It defines an invertible transformation $\{\varphi^{a_i}\}_{a_i \in \ddot{\Delta}_S} \xrightarrow{W_{\Delta_S/\dot{\Delta}_S}} \{\psi^{a_i}\}_{a_i \in \dot{\Delta}_S}$, $i = 1, \dots, q$ and thus it is a basis change. $\square$

3 Regularization

Let $X^1, \dots, X^m$ be an alternative directed separated thin stone system of the normal box $\mathcal{A}$. Consider the box $\mathcal{A}_S$ with respect to the basis $(S, \Delta_S, \Omega_S, \Phi_S)$. Using Lemma 3, we can fix the basis Ψ such that $\ddot{\Phi}_S = \{\psi^a\}_{a \in \ddot{\Delta}_S}$.

Define the free category $\tilde{K}$ over $\mathbb{k}$ with the set of objects $\text{Ob } \tilde{K} = \{A^1, \dots, A^m\}$ and the set of generators $\tilde{\Delta} = \bigcup_{i,j \in I_m} \tilde{\Delta}_{ij}$ where $\tilde{\Delta}_{ij} = \{\tilde{a} : A^i \rightarrow A^j \mid a \in \Delta_{S_i S_j} \setminus (\dot{\Delta}_{S_i S_j} \cup \ddot{\Delta}_{S_i S_j})\}$, $i, j \in I_m$. Besides, $\tilde{\Delta}_{ii} = \emptyset$ for all $i \in I_m$. By $\tilde{\mathcal{P}}$ will be denoted the path category of the underlying quiver $Q_{\tilde{K}}$ and by $\tilde{\mathcal{R}}$ its radical. The projection functor $F_0 : K \rightarrow \tilde{K}$ is defined in the following way: $F_0 : A \rightarrow A^i$ provided $A \in S_i$, and for $a \in \Delta_S$ there are

$$F_0(a) = 0, a \in \ddot{\Delta}_S, \quad F_0(a) = \mathbf{1}, a \in \dot{\Delta}_S, \quad F_0(a) = \tilde{a}, a \in \Delta_S \setminus (\dot{\Delta}_S \cup \ddot{\Delta}_S).$$

More precisely, given $a \in \dot{\Delta}_{S_i} \subset \dot{\Delta}_S$ we put $F_0(a) = \mathbf{1}_{A^i}$, $F_0(a^{-1}) = \mathbf{1}_{A^i}$. Then the functor F_0 can be extended to the map: $F_0 : \mathcal{W}_{\Delta_S/\dot{\Delta}_S} \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}$.

Remark 3. Note that, under the condition of Lemma 1, there are $|\tilde{\Delta}_{ij}| = \max\{0, -\langle l^i, l^j \rangle\}$. The quivers $Q_{\tilde{K}}$ and $Q_{\tilde{l}}$ coincides.

Let $\Omega_{\tilde{K}} = \{\omega_{A^i}\}_{i \in I_m}$ be a section. Let $\tilde{\Phi} = \bigcup_{i,j \in I_m} \tilde{\Phi}_{ij}$ with $\tilde{\Phi}_{ij} = \{\tilde{\varphi} : A^i \rightarrow A^j \mid \varphi \in \Phi_{S_i S_j} \setminus \ddot{\Phi}_{S_i S_j}\}$, $i, j \in I_m$. Denote by V' the $\tilde{K}$ -bimodule which is freely generated by $\Omega_{\tilde{K}}$ and $\tilde{\Phi}$ with the $\tilde{K}$ -bimodule structure induced by F_0 . Let $F'_1 : V_S \rightarrow V'$ is $\tilde{K}$ -bimodule morphism such that

$$F'_1(\omega_A) = \omega_{A^i}, A \in S_i, \quad F'_1(\psi^a) = 0, \psi^a \in \ddot{\Phi}_{S_i}, \quad F'_1(\varphi) = \tilde{\varphi}, \varphi \in \Phi_S \setminus \ddot{\Phi}_S.$$

Then $F'_1(\sigma\varphi\tau) = F_0(\sigma)F'_1(\varphi)F_0(\tau) \in \tilde{\mathcal{P}}\tilde{\Phi}\tilde{\mathcal{P}}$ for all $\sigma, \tau \in \mathcal{W}_{\Delta_S/\dot{\Delta}_S}$, $\varphi \in \Phi_S$.

Lemma 4. $F'_1(d(a)) = 0$ for all $a \in \dot{\Delta}_S \cup \ddot{\Delta}_S$.

Proof. Given $a \in \ddot{\Delta}_S$ we have, due to Lemma 3, that $\delta(a) = \psi^a + \ddot{\delta}(a)$. Since by the construction $F_0(a) = 0$, $F_1(\psi^a) = 0$, $F_1(\ddot{\delta}(a)) = 0$, then the relation

$$F_1(d(a)) = F_1(\omega_{t(a)})F_0(a) - F_0(a)F_1(\omega_{s(a)}) + F_1(\psi^a) + F_1(\ddot{\delta}(a)) = 0$$

is satisfied automatically.

Given $a \in \dot{\Delta}_S \subset \dot{\Delta}_S$ there are $F_0(a) = \mathbb{1}_{A^i}$, $F_1(\omega_{s(a)}) = F_1(\omega_{t(a)}) = \omega_{A^i}$ and we have $F_1(d(a)) = F_1(\delta(a))$. In this case $F_1(d(a)) \in \tilde{\mathcal{P}}\tilde{\Phi}\tilde{\mathcal{P}}(A^i, A^i)$ which implies $F_1(d(a)) = 0$ in view of 1-directness of the bigraph $\tilde{\mathcal{B}}$ this relation holds automatically. $\square$

Denote by $\tilde{V}$ the factor bimodule of V' by all the relations of a shape $F_1'(d(a)) = 0$ for all $a \in \dot{\Delta}_S \cup \ddot{\Delta}_S$, and by $\pi : V' \rightarrow \tilde{V}$ the projection. Then $F_1 = \pi F_1' : V_S \rightarrow \tilde{V}$ is K -bimodule morphism. By putting

$$\tilde{\mu}(\tilde{\varphi}) = (F_1 \otimes F_1)(\mu(\varphi)), \quad \tilde{\varepsilon}(\tilde{\varphi}) = F_0(\varepsilon(\varphi)), \quad \tilde{d}(\tilde{a}) = \tilde{d}(F_0(a)) = F_1(d(a))$$

for $\tilde{\varphi} \in \tilde{\Phi}$ and $\tilde{a} \in \tilde{\Delta}$ we obtain the box $\tilde{\mathcal{A}} = (\tilde{K}, \tilde{V}, \tilde{\mu}, \tilde{\varepsilon})$. Denote by $F = (F_0, F_1) : \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ the morphism of boxes.

Remark 4. By the construction, there are $|\tilde{\Phi}_{ij}| = \max\{0, \langle l^i, l^j \rangle\}$. The bigraphs $\tilde{\mathcal{B}} = (\text{Ob } \tilde{K}, \tilde{\Delta}, \tilde{\Phi})$ and $\mathcal{B}_{\tilde{F}}$ coincides.

Lemma 5. The box $\tilde{\mathcal{A}}$ is free. The box $\tilde{\mathcal{A}}$ is 0, 1-directed as well as the correspondent bigraph $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_{\tilde{F}}$.

It follows from the construction and Lemma 4.

Theorem 1. Let $\mathcal{A} = (K, V, \mu, \varepsilon)$ be a free normal box and $\{X^1, \dots, X^m\}$, $m \leq |\text{Ob } K|$ be an alternative directed separated thin stone system, $\tilde{\mathcal{A}} = (\tilde{K}, \tilde{V}, \tilde{\mu}, \tilde{\varepsilon})$ the constructed above free normal 0, 1-directed box. Then there exists full and faithful functor $\tilde{F} : \text{Rep } \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Rep } \mathcal{A}$ such that $\text{Im } \tilde{F} \simeq \text{Rep}_A^+(X^1, \dots, X^m)$. For a general $\tilde{X} \in \text{Rep } \tilde{\mathcal{A}}$ the representation $\tilde{F}(\tilde{X}) \in \text{Rep } \mathcal{A}$ is general as well.

Proof. Given any $\tilde{X} \in \text{Rep } \tilde{\mathcal{A}}$ we construct $X = \{X_a\}_{a \in \Delta_S} \tilde{F}(\tilde{X}) \in \text{Rep } \mathcal{A}$ by putting:

$$X_a = \begin{cases} 0, & \text{if } a \in \ddot{\Delta}_S; \\ 1, & \text{if } a \in \dot{\Delta}_S; \\ \tilde{X}_{\tilde{a}}, & \text{if } a \in \Delta_S \setminus (\dot{\Delta}_S \cup \ddot{\Delta}_S). \end{cases}$$

Given any $\tilde{H} \in \text{Hom}_{\tilde{\mathcal{A}}}(\tilde{X}, \tilde{Y})$ we construct $H = \tilde{F}(\tilde{H}) \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\tilde{F}(\tilde{X}), \tilde{F}(\tilde{Y}))$ as follows:

$$H_A = \tilde{H}_{A^i} \text{ if } i \in S_i; \quad H_\varphi = \begin{cases} 0, & \text{if } \varphi \in \ddot{\Phi}_S; \\ \tilde{H}_{\tilde{\varphi}}, & \text{if } \varphi \in \Phi_S \setminus \ddot{\Phi}_S. \end{cases}$$

$\square$

4 Reduction

Consider the normal box $\mathcal{A} = (K, V, \mu, \varepsilon)$ with the basis $\mathcal{G} = (\Delta, \Omega, \Phi)$. Let $d = \sum_{A \in \text{Ob } K} d_A e(A) \in \mathbb{L}^+$ be some dimension and $S = \text{supp } d$. For $A \in \text{Ob } K$, denote by $I_{d,A}$ the index set $I_{d,A} = \{1, \dots, d_A\}$ if $A \in S$ ($d_A > 0$) and $I_{d,A} = \emptyset$ otherwise.

Let us split each $A \in \text{Ob } K$ as $A = \bigoplus_{i \in I_{d,A}} A_i$. It gives the idempotent decomposition $\mathbb{1}_A = \bigoplus_{i \in I_{d,A}} \mathbb{1}_{A_i}$. Define the K -chains category $K^{(d)}$ with $\text{Ob } K^{(d)} = \bigcup_{A \in S} \bigcup_{i \in I_{d,A}} A_i$ and a projection functor $\pi^{(K)} : K^{(d)}(A_i, B_j) \rightarrow \mathcal{P}(A, B)$ in the following way:

1. given $A \in \text{Ob } K$ and $i \in I_{d,A}$, there is $\pi^{(K)}(A_i) = A$;
2. given $a \in \Delta(A, B)$, $i \in I_{d,A}$, $j \in I_{d,B}$ the $g = \mathbb{1}_{B_j} a \mathbb{1}_{A_i} \in K^{(d)}(A_i, B_j)$ is a K -chain with $\pi^{(K)}(g) = a$;
3. given two K -chains $g = \mathbb{1}_{B_j} x \mathbb{1}_{A_i} \in K^{(d)}(A_i, B_j)$ and $h = \mathbb{1}_{C_k} y \mathbb{1}_{B'_j} \in K^{(d)}(B'_j, C_k)$ the composition rule is given by:

$$h \circ g = \delta_{B, B'} \delta_{jj'} \mathbb{1}_{C_k} y \mathbb{1}_{B_j} x \mathbb{1}_{A_i} \in K^{(d)}(A_i, C_k) \quad (3)$$

besides $\pi^{(K)}(h \circ g) = \pi^{(K)}(h) \pi^{(K)}(g)$ where $\delta_{B, B'}$, $\delta_{jj'}$ are the Kronecker symbols.

Then $K^{(d)}$ is a free $\mathbb{k}$ -category with the system of generators

$$\Delta^{(d)} = \bigcup_{A_i, B_j \in \text{Ob } K^{(d)}} \{ \mathbb{1}_{B_j} a \mathbb{1}_{A_i} \mid a \in \Delta(A, B) \}.$$

The V -chain is a record $hvg : A_i \rightarrow D_l$ where $g \in K^{(d)}(A_i, B_j)$, $h \in K^{(d)}(C_k, D_l)$, and $v \in (\Phi \cup \Omega)(B, C)$. The left or right product of K -chain and V -chain is defined like before in (3) for two K -chains, it is zero or a V -chain as well. Let $V^{(d)}(A_i, B_j)$ be the $\mathbb{k}$ -vector space generated by all V -chains $A_i \rightarrow B_j$, $A_i, B_j \in \text{Ob } K^{(d)}$. Denote by $\pi^{(V)} : V^{(d)} \rightarrow \mathcal{V}$ a projection map such that $\pi^{(V)}(hvg) = \pi^{(K)}(h) v \pi^{(K)}(g)$. We have $\pi^{(V)}(\mathbb{1}_{B_j} \varphi \mathbb{1}_{A_i}) = \varphi$ and $\pi^{(V)}(\mathbb{1}_{A_j}(\omega_A) \mathbb{1}_{A_i}) = \omega_A$. Let

$$\Phi' = \bigcup_{A_i, B_j \in \text{Ob } K^{(d)}} \{ \mathbb{1}_{B_j} \varphi \mathbb{1}_{A_i} \mid \varphi \in \Phi(A, B) \}$$

$$\Omega' = \bigcup_{\substack{A \in \text{Ob } K, \\ i, j \in I_{d,A}, i \neq j}} \{ \mathbb{1}_{A_i}(\omega_A) \mathbb{1}_{A_i} \}; \quad \Omega^{(d)} = \Omega_{K^{(d)}} = \bigcup_{\substack{A \in \text{Ob } K, \\ i \in I_{d,A}}} \omega_{A_i}$$

where $\omega_{A_i} = \mathbb{1}_{A_i}(\omega_A) \mathbb{1}_{A_i}$. We set $\Omega^{(d)}$ to be a section and $\Phi^{(d)} = \Phi' \cup \Omega'$.

Denote by $V^{(d)}$ (resp., $\bar{V}^{(d)}$) the $K^{(d)}$ -bimodule generated $\Phi^{(d)} \cup \Omega^{(d)}$ (resp., by $\Phi^{(d)}$). Given $A, B \in \text{Ob } K$, $i \in I_{d,A}$, $j \in I_{d,B}$ define the $\mathbb{k}$ -linear maps

$$\rho_{B_j A_i}^{(K)} : K(A, B) \rightarrow K^{(d)}(A_i, B_j), \quad \rho_{B_j A_i}^{(V)} : V(A, B) \rightarrow V^{(d)}(d)(A_i, B_j)$$

as follows:

$$\rho_{B_j A_i}^{(K)}(a) = \sum_{\substack{\xi \in K^{(d)}(A_i, B_j): \\ \pi^{(K)}(\xi) = a}} \xi, \quad a \in K(A, B),$$

$$\rho_{B_j A_i}^{(V)}(v) = \sum_{\substack{\xi \in \bar{V}^{(d)}(A_i, B_j): \\ \pi^{(V)}(\xi) = v}} \xi, \quad v \in V(A, B).$$

Lemma 6. 1. $\rho_{B_j A_i}^{(K)}(a) = \mathbb{1}_{B_j} a \mathbb{1}_{A_i}$ for $a \in \Delta(A, B)$; $\rho_{B_j A_i}^{(V)}(\varphi) = \mathbb{1}_{B_j} \varphi \mathbb{1}_{A_i}$ for $\varphi \in \Phi(A, B)$.

2. The following property is satisfied for $a \in K(A, C)$, $b \in K(C, B)$, $i \in I_{d,A}$, $j \in I_{d,B}$:

$$\rho_{B_j A_i}^{(K)}(ba) = \sum_{k \in I_{d,C}} \rho_{B_j C_k}^{(K)}(b) \cdot \rho_{C_k A_i}^{(K)}(a).$$

Define the $\mathbb{k}$ -bilinear map

$$(\rho^{(K)} \times \rho^{(K)})_{B_j A_i} : K(C, B) \times K(A, C) \rightarrow (K^{(d)} \times K^{(d)})(A_i, B_j) \text{ as follows:}$$

$$(\rho^{(K)} \times \rho^{(K)})_{B_j A_i}(b, a) = \sum_{k \in I_{d,C}} \rho_{B_j C_k}^{(K)}(b) \times \rho_{C_k A_i}^{(K)}(a), \quad a \in K(A, C), \quad b \in K(C, B).$$

Then it holds

$$m'(\rho^{(K)} \times \rho^{(K)})_{B_j A_i} = \rho_{B_j A_i}^{(K)} m$$

where $m : K \times K \rightarrow K$, $m' : K^{(d)} \times K^{(d)} \rightarrow K^{(d)}$ denotes the multiplications in the categories K , $K^{(d)}$ correspondingly.

Here we mean by $\rho_{B_j A_i}^{(K)} : K \rightarrow K^{(d)}$ its extension on K , hence $\rho_{B_j A_i}^{(K)}(K(X, Y)) = 0$ if $X \neq A$ or $Y \neq B$.

The map $(\rho^{(V)} \times \rho^{(V)})_{B_j A_i} : V(C, B) \times V(A, C) \rightarrow (V^{(d)} \times V^{(d)})(A_i, B_j)$ is defined similarly.

To obtain the box $\mathcal{A}^{(d)} = (K^{(d)}, V^{(d)}, \mu', \varepsilon')$ with the system of generators $\mathcal{G}^{(d)} = (\Delta^{(d)}, \Omega^{(d)}, \Phi^{(d)})$ it remains to define the comultiplication and counit. The μ', ε' are $K^{(d)}$ -bilinear maps given for generators $\varphi \in \Phi(A, B)$ and $\omega_A \in \Omega, A, B \in \text{Ob } K$ by the formulae: $\mu'(\mathbb{1}_{B_j} \varphi \mathbb{1}_{A_i}) = (\rho^{(V)} \times \rho^{(V)})_{B_j A_i}(\mu(\varphi))$; $\mu'(\mathbb{1}_{A_j}(\omega_A) \mathbb{1}_{A_i}) = (\rho^{(V)} \times \rho^{(V)})_{A_j A_i}(\mu(\omega_A))$; $\varepsilon'(\mathbb{1}_{B_j} \varphi \mathbb{1}_{A_i}) = 0$; $\varepsilon'(\mathbb{1}_{A_j}(\omega_A) \mathbb{1}_{A_i}) = \delta_{ji} \mathbb{1}_{A_i} (= \rho_{A_j A_i}^{(K)}(\omega_A))$.

Theorem 2. If $\mathcal{A} = (K, V, \mu, \varepsilon)$ is a normal box and $d = \sum_{A \in \text{Ob } K} d_A e(A) \in \mathbb{L}^+$

then the reduced box $\mathcal{A}^{(d)} = (K^{(d)}, V^{(d)}, \mu', \varepsilon')$ is normal as well. There is a full and faithful functor $F^{(d)} : \text{Rep } \mathcal{A}^{(d)} \rightarrow \text{Rep } \mathcal{A}$ which maps a general representations to a general one. Given any $R \in \text{Rep } \mathcal{A}$ with $\dim R = d$ there exists a thin representation $R' \in \text{Rep } \mathcal{A}^{(d)}$ such that $F^{(d)}(R') = R$.

Theorem 3. Let $\{R^1, \dots, R^m\}$, $m \leq |\text{Ob } K|$, be an alternative directed representation system consisting of tree like stone representations of the box $\mathcal{A}$. Denote $d^i = \dim_{\mathcal{A}} R^i$ for $i \in I_m = \{1, \dots, m\}$. Consider the reduced box $\mathcal{A}^{(d)}$ with $d = \sum_{i \in I_m} d^i$. Then there exist the alternative directed separated thin stone system $\{R^{1'}, \dots, R^{m'}\}$ of the box $\mathcal{A}^{(d)}$ such that $F^{(d)}(R^{i'}) = R^i$.

5 The main result

Let $\mathcal{A} = (K, V, \mu, \varepsilon)$ be normal box. We assume the bigraph $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ to be directed and form consistent.

Theorem 4. Let $\{R^1, \dots, R^m\}$ $m \leq |\text{Ob } K|$, be an alternative directed separated stone system consisting of tree like representations of the box $\mathcal{A}$. Then there exists a free regular triangular box $\mathcal{A}'$ with a directed and form consistent bigraph $\mathcal{B}_{\mathcal{A}'}$, and a full faithful functor $\mathcal{I} : \mathcal{A}' - \text{mod} \rightarrow \mathcal{A} - \text{mod}$, such that $\text{Im } \mathcal{I}$ is dense in $\text{Rep}_{\mathcal{A}}^+(R^1, \dots, R^m)$. The functor $\mathcal{I}$ sends general representations to general.

Proof. Using Theorem 3 we construct the box $\mathcal{A}^{(d)}$ with $d = \sum_{i \in I_m} \dim_{\mathcal{A}} R^i$, the separated thin stone system $\{R^{1'}, \dots, R^{m'}\}$, and the full and faithful functor $F^{(d)} : \text{Rep } \mathcal{A}^{(d)} \rightarrow \text{Rep } \mathcal{A}$. After that we apply Theorem 1 to obtain the free normal box $\mathcal{A}' = \tilde{\mathcal{A}}^{(d)}$ and the full and faithful functor $\mathcal{I} = \tilde{F}^{(d)} : \text{Rep } \tilde{\mathcal{A}}^{(d)} \rightarrow \text{Rep } \mathcal{A}^{(d)} \rightarrow \text{Rep } \mathcal{A}$. $\square$

Corollary 1. *Given a quiver Γ let $\{R^1, \dots, R^m\}$, $m \leq |\text{Ob } K|$, be an alternative representation system of Γ . Then there exists a regular box A' and a full faithful functor $J : A' - \text{mod} \rightarrow A_\Gamma - \text{mod}$, such that $\text{Im} J$ is dense in $\text{Rep}_{A_\Gamma}^+(R^1, \dots, R^m)$.*

Literature

1. Golovashchuk N.S., The tree like representations of boxes, Вісник Київського університету, 2005, № 3.
2. Ringel C.M., Tame Algebras and Integral Quadratic Forms, Springer LNM, 1099, 1984.
3. Кас V., Root systems, representations of quiver and invariant theory, Springer LNM 996, (1983), 74-108.
4. Ovsienko S., Bimodule and matrix problems, Progress in Math., Vol.173, Birkhaeuser, (1999), 323-357.
5. Ovsienko S., Generic representations of free bocses, Preprint 93-010, DSM, Univ. Bielefeld, 1993, 1-28.
6. Golovashuk N., Maximal non degenerated forms, In book: "Quadratic forms in the Representation Theory", SFB 343, DSM 96-001, 1996, 12-1-12-16.
7. Drozd Yu., Ovsienko S. Coverings of tame boxes and algebras. – Bonn, 2000. – 44 p. – Preprint of Max-Plank Institute, MPI-2000-26.

20.05.2005.

УДК 519

Валентина Б.Григор'єва

Valentina B.Grigor'eva

Моногенні кільця з модальною
структурою підкілець

The monogenic rings with modal
structure of subrings

Вивчаються моногенні нільпотентні
кільця, решітка підкілець яких задовольняє
модальному закону.

The monogenic nilpotent rings are
studied whose subrings lattice satisfies the
modal law for $n=3$.

Ключові слова: модальний закон,
решітка підкілець, моногенне
нільпотентне кільце.

Key words: modal law, subrings lattice,
monogenic nilpotent ring.

Вступ. В роботі розглядаються структурні властивості моногенних кілець з модальною структурою підкілець. Дослідження кілець з обмеженнями на решітку підкілець здійснювали в своїх роботах Кириченко В.В. [1], Туганбаєв О.О. [2], Фрейдман П.О. [3, 4] та ін. Зокрема, в роботі [3] розглядалося питання опису будови моногенних нільпотентних кілець з дистрибутивною решіткою підкілець.

Основним результатом даної статті є наступне твердження.

Теорема. Нільпотентне кільце K , породжене одним елементом a порядку p^n , є 3-модальним тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:

- 1) $a^2 = ta$, для деякого $t \in \mathbb{Z}_p$;
- 2) кільце K ізоморфне кільцю $K_1 = \langle a \mid a^3 = 0, 2a^2 = 0, 4a = 0 \rangle$;
- 3) кільце K ізоморфне кільцю $K_2 = \langle a \mid a^4 = 0, 2a = a^3, 4a = 0 \rangle$.

Справедливість теореми впливає з наступних допоміжних результатів.

Лема 1. Кільце K , породжене елементом a порядку 2^n , де $n > 1$, та індексу 3, є модальним тоді і тільки тоді, коли воно або дистрибутивне, або ізоморфне кільцю $K_1 = \langle a \mid a^3 = 0, 4a = 0, 2a^2 = 0 \rangle$.

Доведення. Нехай $n=2$. Тоді $K = \langle a \mid a^3 = 0, 4a = 0 \rangle$. Якщо $2a^2 \neq 0$, то $a^2 + 2a \neq 0$. Розглянемо підкілця: $A = \langle a^2 \rangle$, $B = \langle 2a \rangle$, $C = \langle a^2 + 2a \rangle$, $T = \langle 2a^2 + 2a \rangle$. Очевидно, A , B і C – підкілця з нульовим множенням, причому $T = \{0, 2a^2 + 2a\}$ і $T \subseteq (A+B) \cap (A+C) \cap (B+C)$. Неважко перевірити, що в цьому випадку для підкілець T , A , B і C порушується умова модальності. Якщо ж $2a^2 = 0$, то довільний елемент $f \in K$ має вигляд $f = ka^2 + la$, де $k \in \{0, 1\}$, $l \in \{0, 1, 2, 3\}$. У випадку, коли $a^2 + 2a \neq 0$, неважко перевірити, що $M = \{0, 2a, a^2, 2a + a^2\}$ – єдине максимальне підкілце кільця K . Отже, решітка RK всіх підкілець кільця K має вид, вказаний на мал. 1, а тому на RK виконується модальний закон. У випадку, коли $a^2 + 2a = 0$, кільце K містить єдине власне підкілце $M = \langle 2a \rangle$, а тому RK – дистрибутивна решітка. Т.я. з рівності

$a^2+2a=0$ впливає $2a^2=0$, то одержали, що кільце $K=\langle a \mid a^3=0, 4a=0 \rangle$ є модальним тоді і тільки тоді, коли $2a^2=0$.

Нехай $n>2$, тоді $K=\langle a \mid a^3=0, 2^n a=0 \rangle$. Неважко перевірити, що при $a^2=ka$ для деякого $k \in N$, решітка підкілець RK – дистрибутивна. А тому будемо вважати, що для кожного k $a^2 \neq ka$. Якщо $2^{n-1}a^2 \neq 0$, то елементи $t=2^{n-1}a^2+2^{n-1}a \neq 0$ і $f=a^2+2^{n-1}a \neq 0$. Розглянемо підкілець: $T=\langle t \rangle$, $A=\langle a^2 \rangle$, $B=\langle f \rangle$, $C=\langle 2^{n-1}a \rangle$. Ясно, що $A \vee B = A \vee C = B \vee C = M = \langle a^2, 2^{n-1}a \rangle$, а тому $L = T \cap (A \vee B) \cap (A \vee C) \cap (B \vee C) = T \cap M = T$. З іншого боку, як легко перевірити, $R = T \cap A \vee T \cap B \vee T \cap C = \{0\}$. Оскільки $R = \{0\}$ і $T \neq \{0\}$, то $T \not\subseteq R$, тобто RK – немодальна решітка. Припустимо тепер, що $2^t a^2 = 0$, $1 \leq t < n$, $n > 2$. Нехай $t > 1$. Розглянемо підкілець: $T = \langle 2^{t-1}a^2 + 2^{n-1}a \rangle$, $A = \langle a^2 \rangle$, $B = \langle 2^{n-1}a \rangle$, $C = \langle a^2 + 2^{n-1}a \rangle$. Для елемента $f = 2^{t-1}a^2 + 2^{n-1}a$ маємо: $f+f=f$, $f=0$. Маємо: $A \vee B = A \vee C = B \vee C = M = \langle a^2, 2^{n-1}a \rangle$ і $T \subseteq M$. Нехай $T \cap A \neq \{0\}$, тоді одержуємо рівність: $2^{t-1}(1-2^{n-t})a^2 + 2^{n-1}a = 0$, а тому одержали протиріччя. Аналогічно доводиться, що $T \cap B = \{0\}$, $T \cap C = \{0\}$. Таким чином, елемент $f = 2^{t-1}a^2 + 2^{n-1}a = 0$. Якщо $t=2$, тоді $2a^2 = 2^{n-1}a$.

Нехай $t > 2$. Оскільки $2a^2 \neq 0$, то елемент $f = 2a^2 + 2^{t-1}a \neq 0$. Розглянемо підкілець: $T = \langle 2a^2 + 2^{t-1}a \rangle$, $A = \langle 2a^2 \rangle$, $B = \langle 2a \rangle$, $C = \langle a^2 + 2a \rangle$. Очевидно, $2a^2 \in (B \vee C) \cap (B \vee T) \cap (C \vee T) \subseteq (A \cap B) \vee (A \cap C) \vee (A \cap T) = R$.

Оскільки A – підкілець з нульовим множенням, то $R = A \cap B + A \cap C + A \cap T$, а тому існують такі числа α_1, α_2 і α_3 , що має місце рівність

$$2a^2 = \alpha_1 a^2 + \alpha_2 a^2 + \alpha_3 a^2, \quad (1)$$

де $\alpha_1 a^2 \in B$, $\alpha_2 a^2 \in C$, $\alpha_3 a^2 \in T$. Звідси маємо:

$$\begin{cases} \alpha_1 a^2 = \beta_1 2a, \\ \alpha_2 a^2 = \beta_2 (a^2 + 2a), \\ \alpha_3 a^2 = \beta_3 (2a^2 + 2^{t-1}a). \end{cases} \quad (2)$$

Досліджуючи систему (2), дістаємо рівність $2a^2 = ta$, де $t : 2^t$.

Нехай, нарешті, $2a^2=0$, $2^n a=0$, $n>2$, $t=1$. Розглянемо підкілець: $T=\langle a^2+4a \rangle$, $A=\langle a^2 \rangle$, $B=\langle 2a \rangle$, $C=\langle a^2+2a \rangle$. Оскільки $B \vee C = B \vee T = C \vee T = M = \langle a^2, 2a \rangle$, то

$$A \subseteq M = (B \vee C) \cap (B \vee T) \cap (C \vee T) \subseteq A \cap B + A \cap C + A \cap T,$$

т.я. підкілець $A = \{0, a^2\}$ – з нульовим множенням. Неважко переконатися, що $A \cap B = \{0\}$, $A \cap C = \{0\}$ та $A \cap T = \{0\}$. Оскільки K – модальне кільце, то $A = \langle a^2 \rangle \subseteq L = A \cap B + A \cap C + A \cap T = \{0\}$, отже, $a^2=0$, що неможливо. Отже, у цьому випадку будь-яке модальне кільце K буде дистрибутивним.

Лему доведено.

Лема 2. Кільце K , породжене нільпотентним елементом a індексу 3, порядок якого дорівнює p^n , де $n>1$, тоді тільки тоді є модальним, коли воно дистрибутивне.

Доведення. Необхідність. Нехай K – модальне кільце. За умовою $p \neq 2$. Нехай $pa^2 \neq 0$ і p' – порядок елемента a^2 , тоді $p^{t-1}a^2 \neq 0$. Розглянемо підкільця: $T = \langle a^2 \rangle$, $A = \langle a^2 + p^{t-1}a \rangle$, $B = \langle (p-1)a^2 + p^{t-1}a \rangle$, $C = \langle p^{t-1}a \rangle$. Легко показати, що $A \vee B = A \vee C = B \vee C = M = \langle a^2, p^{t-1}a \rangle$. Оскільки за умовою K – модальне кільце, то виконується включення: $a^2 \in (T \cap A) \vee (T \cap B) \vee (T \cap C) = R$. Крім того, A – кільце з нульовим множенням, а тому $a^2 = \alpha a^2 + \beta a^2 + \gamma a^2$ для деяких цілих чисел α , β і γ , причому $\alpha a^2 \in T \cap A$, $\beta a^2 \in T \cap B$ і $\gamma a^2 \in T \cap C$. Звідси випливає система рівностей:

$$\begin{cases} \alpha a^2 = \alpha' a^2 + \alpha' p^{t-1} a, \\ \beta a^2 = \beta' (p-1) a^2 + \beta' p^{t-1} a, \\ \gamma a^2 = \gamma' p^{t-1} a, \end{cases} \quad (3)$$

для деяких цілих чисел α' , β' і γ' . З рівностей системи (3) маємо рівність: $a^2 = ta$, причому $t \vdots p'$. За лемою 3 з [3] кільце K є дистрибутивним.

Нехай тепер $pa^2 = 0$. У цьому випадку $t=1$ і підкільця T , A , B і C – з нульовим множенням і порядку p , де $T = \langle a^2 \rangle$, $A = \langle a^2 + p^{n-1}a \rangle$, $B = \langle (p-1)a^2 + p^{n-1}a \rangle$ і $C = \langle p^{n-1}a \rangle$. Оскільки $p > 2$, то елемент $a^2 \in M = (A \vee B) \cap (A \vee C) \cap (B \vee C) = \langle a^2, p^{n-1}a \rangle$. За умовою модальності $a^2 \in T \cap A + T \cap B + T \cap C$. Безпосередньо перевіряється, що у випадку, коли $T \cap A \neq \{0\}$, $T \cap B \neq \{0\}$, $T \cap C \neq \{0\}$ справедлива рівність: $a^2 = ta$ для деякого числа t , тоді за лемою 3 з [3] кільце K буде дистрибутивним.

Достатність очевидна, оскільки будь-яке дистрибутивне кільце K буде модальним. Лему доведено.

Зауваження:

- 1) Кільце K , породжене нільпотентним елементом індексу $m \leq 3$, порядок якого дорівнює простому числу p , є дистрибутивним, а тому модальним кільцем.
- 2) Кільце K , породжене елементом a індексу $m=4$, порядок якого дорівнює простому числу $p > 2$ є немодальним, а для $p=2$ є модальним недистрибутивним кільцем.

Доведення. Випадок 1) очевидний. Нехай $m=4$, тоді неважко показати, що підкільця $A = \langle a^2 \rangle$, $B = \langle a^3 \rangle$, $C = \langle a^2 + a^3 \rangle$ та $M = \langle a^2, a^3 \rangle$ утворюють решітку, вказану на мал. 1 і для них порушується умова модальності.

Лема 3. Кільце K , породжене нільпотентним елементом a індексу $m > 4$, порядок якого дорівнює простому числу p , не є модальним кільцем.

Доведення. У випадку, коли $m=5$, розглянемо підкільця $T = \langle a^3 \rangle$, $A = \langle a^2 \rangle$, $B = \langle a^3 + a^4 \rangle$, $C = \langle a^2 + a^4 \rangle$. Безпосередньо перевіряється, що для них порушується умова модальності. У випадку, коли $m \geq 6$, розглянемо наступні підкільця: $T = \langle a^{m-3} \rangle$, $A = \langle a^{m-1} + a^{m-3} \rangle$, $B = \langle a^{m-2} + a^{m-3}, a^{m-1} \rangle$, $C = \langle a^{m-1}$,

a^{n-2} , які, очевидно, є кільцями з нульовим множенням. Неважко довести, що для цих підкілець порушується умова модальності.

Лема 4. Кільце K , породжене нільпотентним елементом a індексу $m=4$, порядок якого дорівнює p^n , де $n>1$, є модальним тоді і тільки тоді, коли K або дистрибутивне кільце, або ізоморфне кільцю $K_5 = \langle a \mid a^4=0, 4a=0, 2a=a^3 \rangle$.

Доведення. Розглянемо ідеал $I = (a^3)$. Будь-який елемент $f \in I$ має вигляд $f = la^3$, де $l \in \mathbb{Z}$. Для фактор-кільця $\bar{K} = K/I = \langle \bar{a} \rangle$ маємо: $\bar{a}^3 = \bar{0}$, $p^n \bar{a} = \bar{0}$. Нехай $p\bar{a} \neq \bar{0}$. В цьому випадку $n>1$. Оскільки гомоморфним образом модального кільця є модальне кільце, то для $\bar{K}$ за лемою 1 можливі два випадки: i) $\bar{K}$ – дистрибутивне кільце; ii) $\bar{K} \cong F = \langle \bar{a} \mid \bar{a}^3 = \bar{0}, 2\bar{a}^2 = \bar{0}, 4\bar{a} = \bar{0} \rangle$. Якщо $\bar{K}$ – дистрибутивне кільце, то для деякого цілого γ , яке ділиться на p , виконується рівність: $\bar{a}^2 = \gamma\bar{a}$, тобто $a^2 - \gamma a \in I$. Звідси одержуємо рівність $a^2 = ta$ для деякого числа t . Крім того, $t \vdots p$. Тоді за роботою [3] маємо, що K – дистрибутивне кільце. Якщо кільце $\bar{K}$ задовольняє умовам ii), то звідси випливає, що елементи a^3 , $4a$ і $2a^2 \in I = (a^3)$, а тому маємо рівності: $4a = la^3$, $2a^2 = sa^3$ для деяких цілих чисел l і s . З останніх рівностей випливає: $2a^3 = 0$, $4a^2 = 0$, $8a = 0$. Таким чином, для кільця K $n \leq 3$ і $p=2$. Припустимо, що $n=2$. Якщо s – парне, то маємо кільце $K \cong K_1 = \langle a \rangle$, де $4a=0$, $a^4=0$, $2a^2=0$. Неважко переконатися, що підкільце $M = \langle 2a, a^2, a^3 \rangle$ кільця K є немодальним, тоді K_1 – немодальне кільце. У випадку непарного s легко показати, що підкільце $M = \langle 2a, a^2 \rangle$ є єдиним максимальним підкільцем кільця K , а тому кільце $K \cong K_1 = \langle a \mid a^4=0, 4a=0, a^3=2a^2 \rangle$ є модальним і не дистрибутивним. Підкільця $A = \langle 2a \rangle$, $B = \langle 2a^2 \rangle$, $C = \langle 2a+a^2 \rangle$, $M = \langle 2a, a^2 \rangle$ утворюють решітку, вказану на мал. 1.

Нехай $n=3$. Маємо: $K \cong K_3 = \langle a \mid a^4=0, 8a=0, 4a=la^3, 2a^2=sa^3 \rangle$. Оскільки $2a^3=0$ і $4a \neq 0$, то l – непарне, а тому $4a=a^3$. Якщо s – парне, то $2a^2=0$. Розглянемо підкільця: $T = \langle a^2+4a \rangle$, $A = \langle a^2 \rangle$, $B = \langle 2a+a^2 \rangle$, $C = \langle 2a \rangle$. Очевидно, $(A \vee B) \cap (A \vee C) \cap (B \vee C) = L \supseteq T$ і за умовою K – модальне кільце, а тому $L \subseteq (T \cap A) \vee (T \cap B) \vee (T \cap C) = (T \cap A) + (T \cap B) + (T \cap C)$. Безпосередньо доводиться, що $T \cap A \neq \{0\}$, $T \cap B \neq \{0\}$, $T \cap C \neq \{0\}$, а тому одержуємо, що $T = \{0\}$, звідки $a^3=0$, що суперечить умові. Таким чином, у випадку парного числа s кільце K є немодальним. Нехай s – непарне. Маємо: $K \cong K_4 = \langle a \mid a^4=0, 8a=0, 4a=a^3, 2a^2=a^3 \rangle$. Якщо $a^2=la$ для деякого числа l , то за роботою [3] K_4 – дистрибутивне кільце, де $l \in \{2; 6\}$. Припустимо, що для кожного цілого числа l маємо: $a^2 \neq la$. Розглянемо підкільця: $T = \langle 2a+a^2 \rangle$, $A = \langle a^2 \rangle$, $B = \langle 2a \rangle$, $C = \langle 6a+a^2 \rangle$. Елемент $f = 2a+a^2 \in (A \vee B) \cap (A \vee C) \cap (B \vee C) = L = \langle a^2, 2a \rangle$. З іншого боку, як легко перевірити, $S = (T \cap A) \vee (T \cap B) \vee (T \cap C) = \{0\}$. Тоді елемент $f = 2a+a^2 \notin S$, а тому K – немодальне кільце.

Розглянемо випадок, коли $p\bar{a} = \bar{0}$. В цьому випадку елемент $pa \in I$, а тому $pa = la^3$ для деякого цілого числа l . Звідси $pa^2 = 0$ і $pa^3 = 0$, а тому $(l, p) = 1$. Припустимо, що $p > 2$. Нехай кільце K – модальне. Розглянемо підкільця: $T = \langle a^2 \rangle$, $A = \langle a^2 + p^{n-1}a \rangle$, $B = \langle (p-1)a^2 + p^{n-1}a \rangle$, $C = \langle p^{n-1}a \rangle$. Якщо $A = \{0\}$ або $B = \{0\}$, то K – дистрибутивне, тому нехай $A \neq \{0\}$ і $B \neq \{0\}$. Маємо: $A \vee B = A \vee C = B \vee C = M = \langle a^2, p^{n-1}a \rangle$. За умовою $T \subseteq M \subseteq (T \cap A) \vee (T \cap B) \vee (T \cap C)$, а тому хоча б один із доданків відмінний від 0. Очевидно, T , A , B і C – кільця порядку p з нульовим множенням. Якщо $T \cap A \neq \{0\}$, то результаті одержуємо рівність $a^2 = sp^{n-1}a$ для деякого числа s . Аналогічно, ця рівність справедлива і у випадку, коли $T \cap B \neq \{0\}$ та $T \cap C \neq \{0\}$. Таким чином, у випадку $p > 2$ і $p\bar{a} = \bar{0}$ кільце K є дистрибутивним. Якщо ж $p = 2$ і $2\bar{a} = \bar{0}$, то маємо рівність $2a = la^3$ для деякого числа l . Звідси $2a^2 = 0$, $2a^3 = 0$ і $(l, 2) = 1$. Таким чином, $2a = a^3$ і $4a = 2a^3 = 0$, а тому $n = 2$. Одержали кільце $K \cong K_5 = \langle a | a^4 = 0, 4a = 0, 2a = a^3 \rangle$, яке є модальним, але не дистрибутивним. Підкільця $A = \langle a^2 \rangle$, $B = \langle 2a \rangle$, $C = \langle 2a + a^2 \rangle$, $M = \langle 2a, a^2 \rangle$ утворюють решітку, вказану на мал. 1.

Лему доведено.

Лема 5. Кільце K , породжене нільпотентним елементом a індексу $m > 4$, порядок якого дорівнює p^n , де $n > 1$, є модальним тоді і тільки тоді, коли $p > 2$ і $a^2 = la$ для деякого цілого $l : p$.

Доведення. Нехай $p > 2$. Розглянемо ідеал $I = (a^4)$. Тоді для фактор-кільця $\bar{K} = K/I = \langle \bar{a} \rangle$ маємо: $\bar{K}$ – модальне кільце, для якого $\bar{a}^4 = \bar{0}$, $p^n \bar{a} = \bar{0}$. Доведемо, що $n > 1$. Можна довести, що для кільця $\bar{K}$ маємо умову $p\bar{a} \neq \bar{0}$, а тому за лемою 4 кільце $\bar{K}$ є або дистрибутивним, або $\bar{K} \cong K_5$. Так як $p > 2$, то $\bar{K}$ – дистрибутивне кільце, а тому, враховуючи результати роботи [3], одержуємо, що K – дистрибутивне кільце.

Нехай $p = 2$, тоді розглянемо фактор-кільце $\bar{K} = K/I = \langle \bar{a} \rangle$, де $I = (a^4)$. Припустимо, що $2\bar{a} = \bar{0}$, тоді для підкільць $T = \langle a^{m-1} + a^{m-2} + a^{m-3} \rangle$, $A = \langle a^{m-1}, a^{m-2} \rangle$, $B = \langle a^{m-1}, a^{m-3} \rangle$, $C = \langle a^{m-2}, a^{m-3} \rangle$, як неважко показати, порушується умова модальності. Нехай $2\bar{a} \neq \bar{0}$, тоді $\bar{K} \cong K_5$. Звідси впливають рівності:

$$\begin{cases} 4a = \alpha_4 a^4 + \dots + \alpha_{m-1} a^{m-1}, \\ 2a - a^3 = \gamma_4 a^4 + \dots + \gamma_{m-1} a^{m-1}, \end{cases} \quad (4)$$

для деяких цілих чисел α_i, γ_i . З системи (4) одержуємо, що $2a^{m-2} = 2a^{m-1} = 0$. Якщо $m > 5$ і γ_4 – непарне число, то для підкільць $T = \langle 2a^{m-1} \rangle$, $A = \langle a^{m-2} \rangle$, $B = \langle a^{m-3} + a^{m-2} \rangle$, $C = \langle a^{m-3} \rangle$ порушується умова модальності. У випадку парного γ_4 розглянемо підкільця: $T = \langle a^{m-2} \rangle$, $A = \langle a^{m-2} + a^{m-3} \rangle$, $B = \langle a^{m-2} + 2a^{m-3} \rangle$, $C = \langle a^{m-3} \rangle$. Легко довести, що для них порушується умова модальності, отже, K – немодальне кільце.

Якщо, нарешті, $m=5$, то $4a=\alpha_4a^4$, $2a-a^3=\gamma_4a^4$, звідки одержуємо рівності: $2a^2=a^4$, $2a^3=0$, $4a^2=0$, $4a=0$. Якщо γ_4 – непарне число, то неважко показати, що для підкілець $T=\langle 2a \rangle$, $A=\langle a^3 \rangle$, $B=\langle a^2 \rangle$, $C=\langle a^2+a^3 \rangle$ порушується умова модальності. Якщо ж γ_4 – парне, то розглянемо підкілець $T=\langle 2a \rangle$, $A=\langle 2a+2a^2 \rangle$, $B=\langle 2a+a^2 \rangle$, $C=\langle a^2 \rangle$. Легко перевірити, що для них порушується умова модальності. Отже, K – немодальне кільце.

Лему доведено.

Література

1. Кириченко В.В., Хиби́на М.А. Полусовершенные полудистрибутивные кольца // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – К.: Ин-т математики АН Украины, 1993. – С.457-480.
2. Туганбаев А.А. О полудистрибутивных кольцах // XIX Всесоюз. алгебраическая конференция: Тез. сообщ. – Львов, 1987. – Ч.1. – С.112.
3. Фрейдман П.А. Кольца с дистрибутивной структурой подколец / Математический сборник, 1967, т.73(115). – № 4. – С.513-534.
4. Фрейдман П.А. Нилькольца без кручения с модулярной структурой подколец / Алгебраические системы и их многообразия. – Свердловск, 1982. – С.115-123.



Мал. 1

Надійшла до редакції 14.06.2005.

УДК 512.554.314

Наталія В. Нетреба¹

**Енгелеві ряди алгебр Лі
асоційованих з силівськими р-
підгрупами скінченних
симетричних груп**

Вивчаються енгелеві ряди алгебр Лі L_n асоційованих з силівськими р-підгрупами симетричних груп порядку p^n (p – просте число). Показано, що k -ий член енгелевого ряду збігається з k -им членом нижнього центрального ряду цієї алгебри.

Ключові слова: Алгебри Лі, Алгебра Лі асоційована з нижнім центральним рядом групи, енгелевий ряд.

Nataliya V. Netreba¹

**Engel series of Lie algebras
associated with Sylow p-subgroups
of finite symmetric groups**

We study the Engel series of Lie algebras associated with the Sylow p-subgroups of symmetric groups of degree p^n (p is a prime). It is shown that the k -th term of the Engel series coincides with the k -th term of the lower central series of this algebra.

Key Words: Lie algebra, Lie algebra associated with the lower central series of the group, engel series.

¹ E-mail: netr@univ.kiev.ua

Вступ

Алгебри Лі асоційовані з нільпотентними або нільпотентно апроксимованими групами є одним з об'єктів дослідження в різноманітних розділах теорії груп і теорії проскінченних груп [1], [2]. Це пов'язано з тим, що методи теорії алгебр Лі виявились важливим інструментом для розв'язання цілого ряду теоретико-групових проблем, зокрема послабленої теореми Бернсайда. Зв'язок між групами і асоційованими кільцями і алгебрами Лі дозволяє спрощувати обчислення, використовуючи лінійні методи при дослідженні, здійснювати природне переформулювання різних теоретико-групових проблем в лівих термінах.

В даній роботі досліджуються енгелеві ряди алгебр Лі L_n асоційованих з силівськими р-підгрупами симетричних груп порядку p^n (p – просте число, $n \in \mathbb{N}$). В роботі [3] було показано, що елементи алгебри Лі L_n мають певне “табличне” зображення аналогічне тому, що використовувалось при дослідженні силівської р-підгрупи симетричної групи порядку p^n [4], [5], [6]. Всі технічні поняття: висоти редукованого многочлена, характеристики таблиці, характеристики підалгебр та інші, переносяться на алгебри Лі L_n завдяки такому зображенню. Використовуючи це зображення в теоремі 2 доведено, що енгелевий ряд алгебри Лі L_n збігається з її нижнім центральним рядом.

2. Основна частина

Нехай L – довільна алгебра Лі. Комутатор вигляду

$$E_k(x_1, x_2) = (\dots((x_1, x_2), x_2), \dots, x_2) = (x_1, x_2)$$

називається *енгелевим* довжини k . Ряд вербальних ідеалів алгебри Лі L

$$L = E_0(L) \geq E_1(L) \geq E_2(L) \geq \dots,$$

визначених енгелевими комутаторами, називається *енгелевим* рядом цієї алгебри. Якщо для деякого $n \in \mathbb{N}$ виконується $E_n(L) = \{0\}$ та $E_{n-1}(L) \neq \{0\}$, то кажуть, що алгебра L є *енгелевою* довжини k .

Кожна нільпотентна алгебра Лі L ступеня k також є енгелевою алгеброю Лі довжини, не більше k , оскільки для кожного $k \in \mathbb{N}$ має місце включення

$$E_k(L) \leq \gamma_k(L),$$

де $\gamma_k(L)$ – k -й член нижнього центрального ряду алгебри Лі L .

Розглянемо алгебру L_m асоційовану з силівською p -підгрупою симетричної групи порядку p^m . Елементи алгебри L_m – це трикутні таблиці (див. [3]) вигляду

$$u = [c_1, c_2(x_1), \dots, c_m(x_1, \dots, x_{m-1})], \quad (1)$$

де $c_1 \in \mathbb{Z}_p$, $c_i(x_{i-1}) \in \mathbb{Z}_p^{(0)}[x_1, \dots, x_{i-1}]$, $i=2, 3, \dots, m$ – редуковані многочлени степеня $\leq p-1$ по модулю ідеала I_i , породженого степенями $x_1^p, x_2^p, \dots, x_{i-1}^p$. k -ту координату таблиці (1) будемо позначати символом $\{u\}_k$. r -координатною таблицею називається таблиця, у якій всі координати нульові, крім r -тої.

Операції на алгебрі Лі L_m визначаються наступним чином:

- (i) Сумою таблиць $u, v \in L_m$ називається таблиця $u + v$ з координатами

$$\{u + v\}_k = \{u\}_k + \{v\}_k \quad (k=1, 2, \dots, m).$$
- (ii) Добутком таблиці $u \in L_m$ на елемент $a \in L_m$ називається таблиця au з координатами

$$\{au\}_k = a\{u\}_k \quad (k=1, 2, \dots, m).$$
- (iii) Дужкою Лі таблиць $u, v \in L_m$ називається таблиця (u, v) з координатами

$$\{(u, v)\}_k = \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{\partial \{v\}_k}{\partial x_i} \{u\}_i - \frac{\partial \{u\}_k}{\partial x_i} \{v\}_i \right)$$

Нижче наведемо основні поняття, що використовуються для дослідження алгебри Лі L_m .

Висотою редукованого одночлена $v = ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_s^{k_s}$ $0 \leq k_i \leq p-1$ ($i=1,2,\dots,s$), називається число $h(v) = i + k_1 + k_2p + \dots + k_sp^{s-1}$, а висотою $h(f)$ редукованого многочлена $f(x_1, \dots, x_s)$ – найбільша із висот його одночленів. Будемо вважати, що висота нульового многочлена рівна нулю.

Цілочисельний вектор

$$h(u) = \langle h(\{u\}_1), h(\{u\}_2), \dots, h(\{u\}_m) \rangle$$

будемо називати характеристикою таблиці $u \in L_m$.

На множині характеристик таблиць алгебри L_m вводиться частковий порядок покоординатного порівняння, т. б. якщо $\chi = \langle h_1, h_2, \dots, h_m \rangle$, $\chi' = \langle h'_1, h'_2, \dots, h'_m \rangle$ – дві характеристики таблиць, то покладемо $\chi \leq \chi'$ тоді і тільки тоді, коли $h_i \leq h'_i$ для всіх $i=1,2,\dots,m$. Вектор $\langle 1, p, p^2, \dots, p^{m-1} \rangle$ є максимальним, а вектор $\langle 0, 0, \dots, 0 \rangle$ – мінімальним відносно так визначеного порядку.

Означення 1. Підалгебра $U < L_m$ називається паралелотопічною, якщо для довільних таблиць $u, v \in L_m$ з того, що $u \in U$ і $h(v) \leq h(u)$, випливає, що $v \in U$.

Кожна паралелотопічна підалгебра U однозначно визначається вектором

$$h(U) = \langle \max_{u \in U} \{h(\{u\}_1)\}, \max_{u \in U} \{h(\{u\}_2)\}, \dots, \max_{u \in U} \{h(\{u\}_m)\} \rangle$$

який називається її характеристикою. Паралелотопічна підалгебра з характеристикою h складається із всіх можливих таблиць, характеристики яких не перевищують h в сенсі покоординатного порівняння.

Наступна теорема описує нижній центральний ряд алгебри Лі L_m в термінах паралелотопічних підалгебр.

Теорема 1. [3] k -тий член $\gamma_k(L_m)$ ($k \geq 0$) нижнього центрального ряду алгебри Лі L_m є паралелотопічною підалгеброю з характеристикою

$$\langle (1-k)^+, (p-k)^+, (p^2-k)^+, \dots \rangle$$

де

$$(p^i - k)^+ = \max\{0, p^i - k\} \quad (i \geq 0, k \geq 0).$$

Наслідок 1. Алгебра Лі L_m є нільпотентною ступеня p^{m-1} .

Теорема 2. k -тий член $E_k(L_m)$ ($k \geq 0$) енгелевого ряду алгебри Лі L_m є паралелотопічною підалгеброю з характеристикою

$$\langle (1-k)^+, (p-k)^+, (p^2-k)^+, \dots \rangle$$

де

$$(p^s - k)^+ = \max\{0, p^s - k\} \quad (s \geq 0, k \geq 0).$$

Доведення. Оскільки $E_k(L_m) \leq \gamma_k(L_m)$, то за теоремою 1 достатньо довести включення в інший бік.

Доведемо, що для будь-якого r ($k < p^{r-1}$) ідеал $E_k(L_m)$ містить r -координатну таблицю, висота r -тої координати якої рівна $p^{r-1} - k$. Розглянемо таблиці

$$u = [0, \dots, 0, x_1^{p-1} x_2^{p-1} \dots x_{r-1}^{p-1}, 0, \dots, 0],$$

$$v = [1, x_1^{p-1}, x_1^{p-1} x_2^{p-1}, \dots, x_1^{p-1} x_2^{p-1} \dots x_{r-2}^{p-1}, 0, \dots, 0].$$

Покажемо, що r -та координата $\{(u, v)\}_r$ таблиці (u, v) є одночленом висоти $p^{r-1} - k$. Доведення проведемо індукцією по кількості членів енгелевого ряду.

Для $k=1$ маємо

$$(u, v) = [0, \dots, (p-1)x_1^{p-2} x_2^{p-1} \dots x_{r-1}^{p-1}, \dots, 0]$$

$$\text{і } h(\{(u, v)\}_r) = p^{r-1} - 1.$$

Припустимо, що $\{(u, v)\}_r = x_1^{a_1} x_{i+1}^{a_{i+1}} \dots x_{r-1}^{a_{r-1}}$, $a_i > 0$, – одночлен висоти $p^{r-1} - k$. Тоді легко помітити, що

$$\{(u, v)\}_{r+1} = \alpha_i x_1^{p-1} x_2^{p-1} \dots x_{i-1}^{p-1} x_i^{a_i-1} x_{i+1}^{a_{i+1}} \dots x_{r-1}^{a_{r-1}},$$

оскільки при множенні всі інші доданки з похідною від многочлена $x_1^{a_1} x_{i+1}^{a_{i+1}} \dots x_{r-1}^{a_{r-1}}$ по j -тій координаті ($j \geq i+1$) будуть містити степені $x_1, \dots, x_{j-1}$, які перевищують $p-1$, і тому рівні нулю. Висота цього одночлена дорівнює

$$\begin{aligned} h(\{(u, v)\}_{r+1}) &= h(\alpha_i x_1^{p-1} x_2^{p-1} \dots x_{i-1}^{p-1} x_i^{a_i-1} x_{i+1}^{a_{i+1}} \dots x_{r-1}^{a_{r-1}}) = \\ &= 1 + (p-1) + \dots + (p-1)p^{i-2} + (\alpha_i - 1)p^{i-1} + \alpha_{i+1}p^i + \dots + \alpha_{r-1}p^{r-2} = \\ &= 1 + p^{i-1} - 1 - p^{i-1} + p^{r-1} - k - 1 = p^{r-1} - k - 1, \end{aligned}$$

що й потрібно було показати.

Тоді висота r -тої координати таблиці (u', v) , де $u' = (u, v)$, дорівнює $p^{r-1} - k - t$. Звідси випливає, що для будь-якого r ($k < p^{r-1}$) і будь-якого $h < p^{r-1} - k$ ідеал $E_k(L_m)$ містить r -координатну таблицю, r -та координата якої є одночленом висоти h . Оскільки $E_k(L_m)$ підалгебра алгебри Лі L_m , то вона містить і всі таблиці, характеристики яких менші або рівні $\langle (1-k)^*, (p-k)^*, (p^2-k)^*, \dots, (p^{m-1}-k)^* \rangle$. Звідси, $E_k(L_m)$ – паралелотопічна підалгебра з характеристикою $\langle (1-k)^*, (p-k)^*, (p^2-k)^*, \dots, (p^{m-1}-k)^* \rangle$. Теорему доведено.

Наслідок 2. 1) k -тий член енгелевого ряду алгебри Лі L_m співпадає з k -тим членом її нижнього центрального ряду.

2) Алгебра Лі L_m має енгелеву довжину p^{m-1} .

3. Висновки

Дана робота є ще одним прикладом того, що табличне зображення і пов'язана з ним техніка обчислень може знайти широке застосування алгебр L_m та різних її модифікацій. Результати даної роботи можуть бути використані при подальшому вивченні будови алгебр Лі асоційованих з силівськими p -підгрупами скінченних симетричних груп, зокрема при вивченні вербальних ідеалів, дослідженні тотожностей в L_m тощо.

Література

1. Huppert B., Blackburn N. Finite groups. // v.2, Berlin etc., Springer, 1982.
2. Vaughan M. Lie Methods in group Theory. // In: Group St. Andrews 2001 in Oxford, v. II, Cambridge: Camb. Univ. press, 2003, 547-585.
3. Суцанский В.И. Нижний центральный ряд кольца Ли силовой p -подгруппы $I_p Z_p$ // IV Всесоюзная школа алгебры Ли и их применения в математике и физике. Тезисы докл. – Казань, 1990, с. 44.
4. Kaloujnine L. La structure des p -groupes de Sylow des groupes Symmetriques finis. // Ann.Sci l'Ecole Normal Superior, 1948, Vol 65, P 239-276.
5. Калужнин Л. А. Избранные главы теории групп. // Киев, Изд-во КГУ, 1979, 32 с.
6. Суцанський В. І. Сікора В. С. Операції на групах підстановок. Теорія та застосування. // Чернівці, "Рута", 2003, 255 с.
7. Gupta C.K. Sushchansky V.I. Lie algebra associated with the group of finitary automorphisms of a p -adic tree // Preprint. Univ. Manitoba, 2000, 20 p.

Надійшла до редакції 30.05.2005

УДК 519.21

Ганна І. Сливка

**Властивості розв'язку задачі
про коливання прямокутного
паралелепіпеда з випадковими
початковими умовами**

Досліджено крайову задачу для рівняння коливання прямокутного паралелепіпеда коли початкові умови є сумісно $SSub_*(\Omega)$ випадкові поля. Встановлено умови існування двічі неперервно диференційовного з імовірністю одиниця розв'язку, які сформульовано у термінах кореляційних функцій.

Ключові слова: прямокутний паралелепіпед, сумісно $SSub_*(\Omega)$ випадкові поля.

Anna I. Slivka

**Properties of solution of problem
of rectangular parallelepiped's
vibration with random initial
conditions**

The boundary-value problem for the rectangular parallelepiped's vibration, if the initial conditions are jointly $SSub_*(\Omega)$ random fields, is analyzed in the work. The conditions of existence of twice continuously differentiated solution of the problem with probability 1 in terms of correlation function of random fields are found.

Key words: rectangular parallelepiped, jointly $SSub_*(\Omega)$ random fields.

1. Вступ

В роботі розглядається крайова задача для рівняння коливання прямокутного паралелепіпеда коли початкові умови є сумісно $SSub_*(\Omega)$ випадкові поля. Для такої задачі знайдено умови існування двічі неперервно диференційовного розв'язку, які формулюються у термінах кореляційних функцій. Отримано оцінку для розподілу супремуму розв'язку. Подібна задача для коливання прямокутної мембрани, коли початкові умови є строго субгауссовими випадковими початковими умовами, розглядались в [1], рівняння гіперболічного типу математичної фізики у багатовимірному випадку з сумісно $SSub_*(\Omega)$ випадковими початковими умовами досліджувалось в [2].

2. Рівняння коливання прямокутного паралелепіпеда з сумісно $SSub_*(\Omega)$ випадковими початковими умовами

Розглянемо задачу про вільні коливання прямокутного паралелепіпеда $x \in [0, a]$, $y \in [0, b]$, $z \in [0, c]$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$
$$x \in [0, a], y \in [0, b], z \in [0, c], t \in [0, T],$$

який задовольняє початкові умови

$$u|_{t=0} = \xi(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \eta(x, y, z), \quad (2)$$

крайовій умові

$$u|_{x=0} = u|_{x=a} = u|_{y=0} = u|_{y=b} = u|_{z=0} = u|_{z=c} = 0. \quad (3)$$

Нехай початкові умови $\xi(x, y, z), \eta(x, y, z) \in SSUB_\Phi(\Omega)$ (див. [2]) випадкові поля для яких виконуються умови

$$\xi(0, y, z) = \xi(a, y, z) = \xi(x, 0, z) = \xi(x, b, z) = \xi(x, y, 0) = \xi(x, y, c) = 0, \quad (4)$$

$$\eta(0, y, z) = \eta(a, y, z) = \eta(x, 0, z) = \eta(x, b, z) = \eta(x, y, 0) = \eta(x, y, c) = 0. \quad (5)$$

Позначимо кореляційні функції цих полів

$$B_\xi(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = E\xi(x, y, z)\xi(x_1, y_1, z_1),$$

$$B_\eta(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = E\eta(x, y, z)\eta(x_1, y_1, z_1),$$

$$x, x_1 \in [0, a], y, y_1 \in [0, b], z, z_1 \in [0, c].$$

Тоді з (4) і (5) випливає, що

$$\begin{aligned} B_\xi(0, y, z, x_1, y_1, z_1) &= B_\xi(x, 0, z, x_1, y_1, z_1) = B_\xi(x, y, 0, x_1, y_1, z_1) = \\ &= B_\xi(a, y, z, x_1, y_1, z_1) = B_\xi(x, b, z, x_1, y_1, z_1) = B_\xi(x, y, c, x_1, y_1, z_1) = \\ &= B_\xi(x, y, z, 0, y_1, z_1) = B_\xi(x, y, z, x_1, 0, z_1) = B_\xi(x, y, z, x_1, y_1, 0) = \\ &= B_\xi(x, y, z, a, y_1, z_1) = B_\xi(x, y, z, x_1, b, z_1) = B_\xi(x, y, z, x_1, y_1, c), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} B_\eta(0, y, z, x_1, y_1, z_1) &= B_\eta(x, 0, z, x_1, y_1, z_1) = B_\eta(x, y, 0, x_1, y_1, z_1) = \\ &= B_\eta(a, y, z, x_1, y_1, z_1) = B_\eta(x, b, z, x_1, y_1, z_1) = B_\eta(x, y, c, x_1, y_1, z_1) = \\ &= B_\eta(x, y, z, 0, y_1, z_1) = B_\eta(x, y, z, x_1, 0, z_1) = B_\eta(x, y, z, x_1, y_1, 0) = \\ &= B_\eta(x, y, z, a, y_1, z_1) = B_\eta(x, y, z, x_1, b, z_1) = B_\eta(x, y, z, x_1, y_1, c). \end{aligned} \quad (7)$$

Згідно [3] розв'язок даної задачі шукається у вигляді

$$u(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} V_i(x, y, z)(a_i \cos \lambda_i t + b_i \sin \lambda_i t), \quad (8)$$

$$\text{де } a_i = \int_0^a \int_0^b \int_0^c \xi(x, y, z) V_i(x, y, z) dx dy dz, \quad b_i = \int_0^a \int_0^b \int_0^c \eta(x, y, z) V_i(x, y, z) dx dy dz.$$

Власні функції $V_i(x, y, z)$ і власні значення λ_i мають вигляд

$$V_i(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin \frac{\pi k_i x}{a} \sin \frac{\pi l_i y}{b} \sin \frac{\pi m_i z}{c}, \quad \lambda_i^2 = \pi^2 \left(\frac{k_i^2}{a^2} + \frac{l_i^2}{b^2} + \frac{m_i^2}{c^2} \right).$$

Позначимо через $D = [0, a] \times [0, b] \times [0, c]$, а $C(D)$ – простір неперервних на D функцій, який є сепарабельним банаховим простором.

3. Основний результат

Накладемо деякі умови на кореляційні функції $B_\xi(x, y, z, x_1, y_1, z_1)$ і $B_\eta(x, y, z, x_1, y_1, z_1)$, при яких будуть справедливі умови теореми 3 роботи [4]. Продовжимо функції $B_\xi(x, y, z, x_1, y_1, z_1)$ і $B_\eta(x, y, z, x_1, y_1, z_1)$ на весь

простір так, щоб вони були періодичними функціями з періодом $2a$ за x, x_1 , $2b$ за y, y_1 , $2c$ за z, z_1 і щоб виконувались рівності

$$B_{\xi}(-x, y, z, x_1, y_1, z_1) = B_{\xi}(x, -y, z, x_1, y_1, z_1) = B_{\xi}(x, y, -z, x_1, y_1, z_1) = \\ = B_{\xi}(x, y, z, -x_1, y_1, z_1) = B_{\xi}(x, y, z, x_1, -y_1, z_1) = B_{\xi}(x, y, z, x_1, y_1, -z_1) = \\ = -B_{\xi}(x, y, z, x_1, y_1, z_1),$$

$$B_{\eta}(-x, y, z, x_1, y_1, z_1) = B_{\eta}(x, -y, z, x_1, y_1, z_1) = B_{\eta}(x, y, -z, x_1, y_1, z_1) = \\ = B_{\eta}(x, y, z, -x_1, y_1, z_1) = B_{\eta}(x, y, z, x_1, -y_1, z_1) = B_{\eta}(x, y, z, x_1, y_1, -z_1) = \\ = -B_{\eta}(x, y, z, x_1, y_1, z_1).$$

Нехай

$$\Delta_{\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4 \tau_5 \tau_6} f(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = f(x + \tau_1, y + \tau_2, z + \tau_3, x_1 + \tau_4, y_1 + \tau_5, z_1 + \tau_6) - \\ - f(x + \tau_1, y, z, x_1, y_1, z_1) - f(x, y + \tau_2, z, x_1, y_1, z_1) - \\ - f(x, y, z + \tau_3, x_1, y_1, z_1) - f(x, y, z, x_1 + \tau_4, y_1, z_1) - \\ - f(x, y, z, x_1, y_1 + \tau_5, z_1) - f(x, y, z, x_1, y_1, z_1 + \tau_6) - f(x, y, z, x_1, y_1, z_1),$$

$$B_{\xi}^*(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = \frac{\partial B_{\xi}^{18}(x, y, z, x_1, y_1, z_1)}{\partial x^3 \partial y^3 \partial z^3 \partial x_1^3 \partial y_1^3 \partial z_1^3},$$

$$B_{\eta}^*(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = \frac{\partial B_{\eta}^{18}(x, y, z, x_1, y_1, z_1)}{\partial x^3 \partial y^3 \partial z^3 \partial x_1^3 \partial y_1^3 \partial z_1^3}.$$

Теорема 1. Нехай $\xi(x, y, z)$ і $\eta(x, y, z)$ -- незалежні випадкові поля з простору $SSub_0(\Omega)$. Для того, щоб з ймовірністю одиниця існував двічі неперервно диференційовний розв'язок задачі (1) – (3), при наведених вище обмеженнях, що зображується у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду (8), достатньо, щоб виконувались умови:

- 1) у продовжених на весь простір функцій $B_{\xi}(x, y, z, x_1, y_1, z_1)$ і $B_{\eta}(x, y, z, x_1, y_1, z_1)$ існували обмежені похідні

$$\frac{\partial B_{\xi}^{18}(x, y, z, x_1, y_1, z_1)}{\partial x^3 \partial y^3 \partial z^3 \partial x_1^3 \partial y_1^3 \partial z_1^3}, \quad \frac{\partial B_{\eta}^{18}(x, y, z, x_1, y_1, z_1)}{\partial x^3 \partial y^3 \partial z^3 \partial x_1^3 \partial y_1^3 \partial z_1^3};$$

- 2) при достатньо малих $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6 > 0$

$$\int_{-a-b-c}^a \int_{-a-b-c}^b \int_{-a-b-c}^c \int_{-a-b-c}^a \int_{-a-b-c}^b \int_{-a-b-c}^c \Delta_{\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4 \tau_5 \tau_6} |B_{\xi}^*(x, y, z, x_1, y_1, z_1)| dx dy dz dx_1 dy_1 dz_1 \leq c_1 \tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4 \tau_5 \tau_6,$$

$$\int_{-a-b-c}^a \int_{-a-b-c}^b \int_{-a-b-c}^c \int_{-a-b-c}^a \int_{-a-b-c}^b \int_{-a-b-c}^c \Delta_{\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4 \tau_5 \tau_6} |B_{\eta}^*(x, y, z, x_1, y_1, z_1)| dx dy dz dx_1 dy_1 dz_1 \leq c_2 \tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4 \tau_5 \tau_6;$$

- 3) для достатньо малих $\tau'_1, \tau'_2, \tau'_3 > 0$ і $\delta > 1 - \frac{1}{p}$

$$\int_{-a-b-c}^a \int_{-a-b-c}^b \int_{-a-b-c}^c \int_{-a-b-c}^a \int_{-a-b-c}^b \int_{-a-b-c}^c \Delta_{\tau'_1 \tau'_2 \tau'_3} |B_{\xi}^*(x, y, z, x_1, y_1, z_1)| dx dy dz dx_1 dy_1 dz_1 \leq \frac{c_3 \tau'_1 \tau'_2 \tau'_3}{(\ln \tau'_1)^{\delta} + (\ln \tau'_2)^{\delta} + (\ln \tau'_3)^{\delta}},$$

$$\int_{-a}^a \int_{-b}^b \int_{-c}^c \int_{-a}^a \int_{-b}^b \int_{-c}^c \Delta_{\tau_1 \tau_2 \tau_3} B_{\xi}^*(x, y, z, x_1, y_1, z_1) dx dy dz dx_1 dy_1 dz_1 \leq \frac{c_3 \tau_1' \tau_2' \tau_3'}{(\ln \tau_1')^{\delta} + (\ln \tau_2')^{\delta} + (\ln \tau_3')^{\delta}}.$$

Доведення. Умова 1) забезпечує виконання умови 1) теореми 3 роботи [4]. Для того, щоб при зроблених припущеннях виконувались умови 1) і 2) теореми 3 роботи [4] достатньо показати, що

$$|Ea_i a_j| \leq \frac{C_1}{|k_i k_j m_i m_j l_i l_j|^4}, \quad (9)$$

$$|Eb_i b_j| \leq \frac{C_2}{|k_i k_j m_i m_j l_i l_j|^4}, \quad (10)$$

$$|Ea_i a_j| \leq \frac{C_3}{|k_i k_j m_i m_j l_i l_j|^8 |(\ln \tau_1)^{\delta} + (\ln \tau_2)^{\delta} + (\ln \tau_3)^{\delta}|}, \quad (11)$$

$$|Eb_i b_j| \leq \frac{C_4}{|k_i k_j m_i m_j l_i l_j|^8 |(\ln \tau_1)^{\delta} + (\ln \tau_2)^{\delta} + (\ln \tau_3)^{\delta}|}, \quad (12)$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 — деякі сталі. За означенням

$$Ea_i a_j = \int_{000000}^{abcabc} B_{\xi}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) V_i(x, y, z) V_j(x_1, y_1, z_1) dx dy dz dx_1 dy_1 dz_1,$$

$$Eb_i b_j = \int_{000000}^{abcabc} B_{\eta}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) V_i(x, y, z) V_j(x_1, y_1, z_1) dx dy dz dx_1 dy_1 dz_1,$$

$$Ea_i^2 = \int_{000000}^{abcabc} B_{\xi}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) V_i(x, y, z) V_i(x_1, y_1, z_1) dx dy dz dx_1 dy_1 dz_1,$$

$$Eb_i^2 = \int_{000000}^{abcabc} B_{\eta}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) V_i(x, y, z) V_i(x_1, y_1, z_1) dx dy dz dx_1 dy_1 dz_1.$$

Розглянемо

$$\begin{aligned} Ea_i a_j &= \int_{000000}^{abcabc} B_{\xi}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) V_i(x, y, z) V_j(x_1, y_1, z_1) dx dy dz dx_1 dy_1 dz_1 = \\ &= \frac{8}{abc} \int_{000000}^{abcabc} B_{\xi}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) \sin \frac{\pi k_i x}{a} \sin \frac{\pi l_i y}{b} \sin \frac{\pi m_i z}{c} \times \\ &\quad \times \sin \frac{\pi k_j x_1}{a} \sin \frac{\pi l_j y_1}{b} \sin \frac{\pi m_j z_1}{c} dx dy dz dx_1 dy_1 dz_1. \end{aligned}$$

Інтегруючи частинами і використовуючи (7), отримаємо

$$\begin{aligned} |Ea_i a_j| &= \left| \int_{000000}^{abcabc} B_{\xi}(x, y, z, x_1, y_1, z_1) V_i(x, y, z) V_j(x_1, y_1, z_1) dx dy dz dx_1 dy_1 dz_1 \right| \leq \\ &= \frac{8|abc|^5}{\pi^{18} |k_i l_i m_i k_j l_j m_j|^3} \left| \int_{000000}^{abcabc} \frac{\partial B_{\xi}^{18}(x, y, z, x_1, y_1, z_1)}{\partial x^3 \partial y^3 \partial z^3 \partial x_1^3 \partial y_1^3 \partial z_1^3} \times \right. \end{aligned}$$

$$\times \cos \frac{\pi k_j x}{a} \cos \frac{\pi l_j y}{b} \cos \frac{\pi m_j z}{c} \times \cos \frac{\pi k_j x_1}{a} \cos \frac{\pi l_j y_1}{b} \cos \frac{\pi m_j z_1}{c} dx dy dz dx_1 dy_1 dz_1 \leq$$

$$= \frac{8|abc|^5}{\pi^{18} |k_i l_i m_i k_j l_j m_j|^3} \int_0^a \int_0^b \int_0^c \int_0^a \int_0^b \int_0^c |B_\xi^*(x, y, z, x_1, y_1, z_1)| dx dy dz dx_1 dy_1 dz_1.$$

Оскільки функція $B_\xi^*(x, y, z, x_1, y_1, z_1)$ періодична з періодом $2a$ за x, x_1 , $2b$ за y, y_1 , $2c$ за z, z_1 , то

$$\int_0^a \int_0^b \int_0^c \int_0^a \int_0^b \int_0^c B_\xi^*(x, y, z, x_1, y_1, z_1) dx dy dz dx_1 dy_1 dz_1 =$$

$$= \int_0^a \int_0^b \int_0^c \int_0^a \int_0^b \int_0^c B_\xi^*\left(x + \frac{a}{k_i}, y + \frac{b}{l_i}, z + \frac{c}{m_i}, x_1 + \frac{a}{k_j}, y_1 + \frac{b}{l_j}, z_1 + \frac{c}{m_j}\right) dx dy dz dx_1 dy_1 dz_1.$$

Крім того,

$$\int_0^a \int_0^b \int_0^c \int_0^a \int_0^b \int_0^c B_\xi^*(x, y, z, x_1, y_1, z_1) dx dy dz dx_1 dy_1 dz_1 =$$

$$= - \int_0^a \int_0^b \int_0^c \int_0^a \int_0^b \int_0^c B_\xi^*\left(x + \frac{a}{k_i}, y, z, x_1, y_1, z_1\right) dx dy dz dx_1 dy_1 dz_1.$$

Звідси враховуючи умову 2) даної теореми, отримаємо

$$\frac{1}{8} \int_0^a \int_0^b \int_0^c \int_0^a \int_0^b \int_0^c \left[B_\xi^*\left(x + \frac{a}{k_i}, y + \frac{b}{l_i}, z + \frac{c}{m_i}, x_1 + \frac{a}{k_j}, y_1 + \frac{b}{l_j}, z_1 + \frac{c}{m_j}\right) - \right.$$

$$- B_\xi^*\left(x + \frac{a}{k_i}, y, z, x_1, y_1, z_1\right) - B_\xi^*\left(x, y + \frac{b}{l_i}, z, x_1, y_1, z_1\right) -$$

$$- B_\xi^*\left(x, y, z + \frac{c}{m_i}, x_1, y_1, z_1\right) - B_\xi^*\left(x, y, z, x_1 + \frac{a}{k_j}, y_1, z_1\right) -$$

$$- B_\xi^*\left(x, y, z, x_1, y_1 + \frac{b}{l_j}, z_1\right) - B_\xi^*\left(x, y, z, x_1, y_1, z_1 - \frac{c}{m_j}\right) +$$

$$\left. - B_\xi^*(x, y, z, x_1, y_1, z_1) \right] dx dy dz dx_1 dy_1 dz_1 \leq$$

$$\leq \frac{1}{8} \int_0^a \int_0^b \int_0^c \int_0^a \int_0^b \int_0^c \Delta_{\frac{abc}{k_i l_i m_i k_j l_j m_j}} |B_\xi^*(x, y, z, x_1, y_1, z_1)| dx dy dz dx_1 dy_1 dz_1 \leq \frac{C}{k_i l_i m_i k_j l_j m_j}.$$

Звідси й отримаємо, що виконується (9). Виконання умов (10), (11), (12) доводимо аналогічно.

4. Оцінка розподілу супремуму розв'язку задачі про коливання прямокутного паралелепіпеда.

Нехай

$$u_n(x, y, z, t) = \sum_{i=n}^{\infty} V_i(x, y, z) (a_i \cos \lambda_i t + b_i \sin \lambda_i t)$$

Нехай виконується умова як і в теоремі 2 роботи [4], а саме

$$\sup_{\substack{|x-x_1| \leq h, |y-y_1| \leq h \\ |z-z_1| \leq h, |t-t_1| \leq h}} \left(E |S_n^{(0)}(x, y, z, t) - S_n^0(x_1, y_1, z_1)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sigma_0(h),$$

де $\sigma_0(h)$ -- неперервна монотонно зростаюча функція, така що $\sigma_0(h) \rightarrow 0$

при $h \rightarrow 0$, і виконується умова $\int_{0+} \psi \left(\ln \frac{1}{\sigma_0^{(-1)}(\varepsilon)} \right) d\varepsilon < \infty$, де

$$\psi(u) = \frac{u}{\varphi^{(-1)}(u)}, \quad \sigma_0^{(-1)}(\varepsilon) -- \text{обернена функція до } \sigma_0(\varepsilon).$$

Тоді має місце нерівність

$$P \left\{ \sup_{(x,y,z,t) \in D} |u_n(x, y, z, t)| > u \right\} \leq 2\tilde{A}(u, \theta),$$

де

$$\tilde{A}(u, \theta) = \exp \left\{ -\varphi^* \left(\frac{1}{\tilde{\varepsilon}_0} \left[u(1-\theta) - \frac{2}{\theta} \tilde{I}_\varphi(\theta \tilde{\varepsilon}_0) \right] \right) \right\}, \quad \tilde{\varepsilon}_0 = \sup_{(x,y,z,t) \in D} \left(E |u_n(x, y, z, t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_\varphi(\theta, \tilde{\varepsilon}_0) = & \int_0^{\theta \tilde{\varepsilon}_0} \psi \left(\ln \left(\frac{a}{2\sigma^{(-1)}(\varepsilon)} + 1 \right) + \ln \left(\frac{b}{2\sigma^{(-1)}(\varepsilon)} + 1 \right) + \right. \\ & \left. + \ln \left(\frac{c}{2\sigma^{(-1)}(\varepsilon)} + 1 \right) + \ln \left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(\varepsilon)} + 1 \right) \right) d\varepsilon. \end{aligned}$$

5. Висновки

В роботі знайдено умови існування з ймовірністю одиниця двічі неперервно диференційовного розв'язку рівняння коливання прямокутного паралелепіпеда з сумісно $SSub_*(\Omega)$ випадковими початковими умовами, що сформульовані у термінах кореляційних функцій. Знайдено оцінку для розподілу супремуму розв'язку такої задачі.

Література

1. Сливка Г. І. Властивості розв'язку задачі про коливання прямокутної мембрани з випадковими початковими умовами // Математичні методи та фізико-механічні поля -- 2003. -- 46т., №4. -- С. 138--144.
2. Козаченко Ю.В., Сливка Г.І. Обґрунтування методу Фур'є для гіперболического рівняння з випадковими початковими умовами // Теорія ймовірн. та матем. статистика. -- 2003. -- Вип. 69 -- с. 63--78.
3. Соболев С.Л. Уравнения математической физики.- М.: Гос. изд. Технико-теоретической литературы, 1954. -- 444с.
4. Сливка Г. І. Обґрунтування застосування методу Фур'є до задачі про коливання прямокутного паралелепіпеда з випадковими початковими умовами. //Вісник Київ. у-ту. Сер. фіз-мат. науки. -- 2004.-- 4. -- С. 66--73.

Надійшла до редакції 5. 09. 2005

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

УДК 517.9

Данило С.Борисенко¹, Анжелла
Галло, Раффаеле Тоскано

**Інтегральні нерівності
Грунголла-Беллмана-Біхарі для
розривних функцій та оцінки
розв'язків імпульсних систем**

*Доведені нові аналоги результатів
Грунголла – Беллмана-Біхарі для
розривних функцій, що задовольняють
інтегро-сумарним нерівностям.*

*Отримано точні оцінки розв'язків
імпульсних систем з нелінійностями
гельдерового типу.*

*Ключові слова: інтегральні
нерівності типу Беллмана-Біхарі,
системи диференціальних рівнянь з
імпульсним збуренням, оцінки розв'язків*

Danylo S.Borysenko^{*}, A.Gallo,
R.Toscano

**Integral inequalities Gronwall-
Bellman-Bihari-Type for
discontinuous functions and
estimates of solutions impulsive
systems**

*The new analogies of the results
Gronwall-Bellman-Bihari for
discontinuous functions, which satisfies
itegro-sum inequalities are proved.*

*Exact estimates for solutions
impulsive systems with nonlinearities of
Hölder type are obtained.*

*Key Words: integral inequalities
Bellman-Bihari Type, systems of differential
equations with impulse influence, estimates
solutions.*

¹ E-mail: borys@mbox.com.ua

Вступ. Віддаючи належне результатам Грунголла Т. [1], Беллмана Р. [2], Біхарі І. [3] та їх багаточисельним узагальненням на випадок неперервних функцій, що задовольняють інтегральним нерівностям (лінійним, нелінійним, одновимірним, багатовимірним, функціональним т.і.), зазначимо, що перші аналоги цих результатів (лема Грунголла - Беллмана, лема Біхарі) на випадок розривних функцій були отримані лише у 80-ті роки минулого сторіччя [5-8]. Як і у неперервному випадку, це дало міцний поштовх до нових досліджень у розвиненні методу Беллмана-Біхарі розв'язання нерівностей для розривних функцій [7,8]. Особливе значення цього методу полягає в його ефективному застосуванні при дослідженні якісних характеристик розв'язків систем диференціальних, інтегро-диференціальних, функціонально-диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням [7,8], а саме обмеженість, притягування, стійкість, практична стійкість, т.і. Причому всі ці властивості розв'язків отримуються з точних оцінок їх норм.

В даній роботі розглянуто новий клас інтегро-сумарних [4] нерівностей вигляду

$$u(t) \leq \varphi(t) + \int_{t_0}^t K(t,s,u(s))ds + \sum_{t_0 < t_i < t} \psi(t,t_i)\xi(u(t_i-0)), \quad (1)$$

де функція $\xi(u)$ на відміну від попередніх робіт [6, 8] не обов'язково ліпшицева та системи диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \neq t_i, \quad \Delta x|_{t=t_i} = I_i(x), \quad (2)$$

де функції, $I_i(x)$, що характеризують величину імпульсів також не обов'язково ліпшицеві.

Отримано точні оцінки розв'язків систем вигляду (2) при найбільш загальних припущеннях на праву частину. Сформульовано нові аналоги теорем типу Беллмана-Біхарі для кусково-неперервних функцій, з яких як наслідок випливають результати отримані в [6, 7, 8]. Дослідження роботи базуються на результатах

[1-8] і розширюють можливості застосування методу інтегро-сумарних нерівностей для більш широкого класу нелінійних імпульсних систем.

1. Аналоги лем Гронулла-Беллмана-Біхарі та їх застосування.

1.1 Розглянемо імпульсну систему вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \neq t_i, \quad \Delta x|_{t=t_i} = I_i(x), \quad (3)$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbb{R}^n$, $I_i(x) \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots$, $t \geq t_0 \geq 0$, $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$, $t_{i-1} < t_i$, $\forall i = 1, 2$. Припустимо,

що $f(t, x)$, $I_i(x)$ визначені в області D:

$$D = \{(t, x) : t \in J = [t_0, T], \quad T \leq \infty, \quad \|x\| \leq h, \quad h = \text{const} > 0\} \quad (4)$$

і задовольняють в D наступним умовам:

$$i) \quad \|f(t, x)\| \leq b(t)\|x\|, \quad b(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \forall t \geq t_0;$$

$$ii) \quad \|I_i(x)\| \leq \gamma_i \|x\|^m, \quad \gamma_i = \text{const} > 0, \quad m = \text{const} > 0.$$

Якщо $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ розв'язок задачі Коші для системи (3), то справедливе інтегро-сумарне представлення цього розв'язку у вигляді [7]:

$$x(t, t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau, t_0, x_0)) d\tau + \sum_{t_0 < t_i < t} I_i(x(t_i - 0, t_0, x_0)) \quad (5)$$

Враховуючи i), ii) з (5) отримуємо інтегро-сумарну нерівність

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t b(\tau) \|x(\tau, t_0, x_0)\| d\tau + \sum_{t_0 < t_i < t} \gamma_i \|x(t_i - 0, t_0, x_0)\|^m. \quad (6)$$

У випадку $m=1$, нерівність типу (6) розглядалась в [5-8], для $m \neq 1$ розглядається вперше (це стосується також інших інтегро-сумарних нерівностей, які вивчаються далі в роботі).

Щоб отримати оцінку норми розв'язку задачі Коші для системи (3) з нерівності (6) нам необхідне наступне твердження.

Лема 1. (аналог леми Гронулла-Беллмана). Нехай невід'ємна кусково-неперервна на $J = [t_0, \infty[$ функція $V(t)$ з розривами 1-го роду в точках $\{t_i\} : t_1 < t_2 < \dots$, $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$ задовольняє інтегро-сумарну нерівність

$$V(t) \leq \psi(t) + \int_{t_0}^t q(\tau) V(\tau) d\tau + \sum_{t_0 < t_i < t} a_i V^m(t_i - 0), \quad (7)$$

де $\psi(t) > 0$ неспадна на J функція, $q(\tau) \geq 0$, $a_i \geq 0$, $m > 0$.

Тоді для $V(t)$ справджуються оцінки:

$$V(t) \leq \psi(t) \prod_{t_0 < t_i < t} (1 + a_i \psi^{m-1}(t_i)) \exp \left[\int_{t_0}^t q(s) ds \right], \quad 0 < m \leq 1, \quad \forall t \geq t_0. \quad (8)$$

$$V(t) \leq \psi(t) \prod_{t_0 < t_i < t} (1 + a_i \psi^{m-1}(t_i)) \exp \left[m \int_{t_0}^t q(s) ds \right], \quad m \geq 1, \quad \forall t \geq t_0. \quad (9)$$

Доведення. Доведення проведемо за схемою наведеною в [] з (7) маємо нерівність

$$\frac{V(t)}{\psi(t)} \leq 1 + \int_{t_0}^t q(s) \frac{V(s)}{\psi(s)} ds + \sum_{t_0 < t_i < t} a_i \psi^{m-1}(t_i) \left[\frac{V(t_i - 0)}{\psi(t_i)} \right]^m.$$

Позначимо

$$u(t) = \frac{V(t)}{\psi(t)}, \quad u(t_0) = 1.$$

Тоді

$$u(t) \leq 1 + \int_{t_0}^t q(s) u(s) ds + \sum_{t_0 < t_i < t} a_i \psi^{m-1}(t_i) u^m(t_i - 0). \quad (10)$$

Розглянемо інтервал $[t_0, t_1]$. Тоді (10) запишеться у вигляді

$$u(t) \leq 1 + \int_{t_0}^t q(s) u(s) ds,$$

а значить $u(t) \leq \exp \left[\int_{t_0}^t q(s) ds \right]$, $\forall t \in [t_0, t_1]$ (класичний результат Гронуолла-

Беллімана). Звідки $V(t) \leq \psi(t) \exp \left[\int_{t_0}^t q(s) ds \right]$, $\forall t \in [t_0, t_1]$. Очевидно, що для

інтервалу $[t_0, t_2]$ справедливий ланцюжок нерівностей

$$\begin{aligned} u(t) &\leq 1 + a_1 \psi^{m-1}(t_1) \exp \left[m \int_{t_0}^{t_1} q(s) ds \right] + \int_{t_1}^t q(s) u(s) ds + \int_{t_0}^{t_1} q(s) \exp \left[\int_{t_0}^s q(\tau) d\tau \right] ds = \\ &= a_1 \psi^{m-1}(t_1) \exp \left[m \int_{t_0}^{t_1} q(s) ds \right] + \exp \left[\int_{t_0}^{t_1} q(s) ds \right] + \int_{t_1}^t q(s) u(s) ds \leq \\ &\leq \begin{cases} (1 + a_1 \psi^{m-1}(t_1) \exp \left[\int_{t_0}^{t_1} q(s) ds \right] + \int_{t_0}^{t_1} q(s) u(s) ds, & 0 < m \leq 1, \\ (1 + a_1 \psi^{m-1}(t_1) \exp \left[m \int_{t_0}^{t_1} q(s) ds \right] + \int_{t_0}^{t_1} q(s) u(s) ds, & m \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

А значить

$$u(t) \leq \begin{cases} (1 + a_1 \psi^{m-1}(t_1) \exp[\int_{t_0}^t q(s) ds]), & 0 < m \leq 1, \\ (1 + a_1 \psi^{m-1}(t_1) \exp[m \int_{t_0}^t q(s) ds]), & m \geq 1 \end{cases}, \quad \forall t \in [t_0, t_2]. \quad (11)$$

З (11) випливає (враховуючи) $u(t) = \frac{V(t)}{\psi(t)}$ справедливості (8), (9)

для $V(t)$.

Продовжуючи цю процедуру для довільного $t \in [t_0, t_2]$ отримаємо оцінку (8), (9), що справджуються $\forall t \geq t_0$.

Застосовуючи до інтегро-сумарної нерівності (6) результат леми 1, отримаємо таке твердження.

Твердження 1. Нехай для системи (3) справджуються умови i), ii). Тоді для норми розв'язку задачі Коші $\|x(t, t_0, x_0)\|$ мають місце наступні оцінки:

$$A) \quad \|x(t, t_0, x_0)\| \leq \|x_0\| \prod_{t_0 < t_i < t} (\gamma_i \|x_0\|^{m-1} + 1) \exp \left[\int_{t_0}^t b(\tau) d\tau \right], \quad \text{для довільних } t \geq t_0 \text{ при}$$

$0 < m \leq 1$;

$$B) \quad \|x(t, t_0, x_0)\| \leq \|x_0\| \prod_{t_0 < t_i < t} (1 + \gamma_i \|x_0\|^{m-1}) \exp \left[m \int_{t_0}^t b(\tau) d\tau \right], \quad \text{для довільних } t \in J \text{ та}$$

$m \geq 1$.

Зауваження 1. Для випадку $m=1$ оцінки A), B) співпадають з результатом роботи [4-7], а сформульована лема 1 узагальнює фундаментальний результат Гронуолла-Беллмана для розривних функцій, що задовольняють нерівність (7).

1.2 Розглянемо систему (3) у випадку, коли вектор-функція $f(t, x)$ у правій частині системи не лінійною, а є суттєво нелінійною та задовольняє умові:

$$iii) \quad \|f(t, x)\| \leq \bar{b}(t) \|x\|^m, \quad \bar{b}(t): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad m > 0.$$

Вектор функцій $I_i(x)$, $\forall i \in N$, $\forall x \in D$ задовольняють умові ii).

Враховуючи умови ii), iii) з (5) отримаємо наступну інтегро-сумарну нерівність для норми розв'язку задачі Коші системи (3):

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t \bar{b}(\tau) \|x(\tau, t_0, x_0)\|^m d\tau + \sum_{t_0 < t_i < t} \gamma_i \|x(t_i - 0, t_0, x_0)\|^m. \quad (12)$$

Для розв'язання нерівності (12) (знаходження точної оцінки для $\|x(t, t_0, x_0)\|$) нам знадобиться наступний результат.

Лема 2 (аналог леми Біхарі). Нехай для функції $\bar{V}(t) \geq 0$, $\forall t \in J$ кусково-неперервної на J з розривами першого роду в точках $\{t_i\}$, що задовольняють умовам леми 1, справджується нерівність

$$\bar{V}(t) \leq \bar{\psi}(t) + \int_{t_0}^t \bar{q}(\tau) \bar{V}^m(\tau) d\tau + \sum_{t_0 < t_i < t} \bar{a}_i \bar{V}^m(t_i - 0), \quad (13)$$

де $\bar{\psi}(t) > 0$, $\bar{q}(t) \geq 0$, $\bar{a}_i \geq 0$, $m > 0$, $m \neq 1$ і $\bar{\psi}(t)$ неспадна функція на всьому проміжку J .

Тоді $\bar{V}(t)$ задовольняє наступним оцінкам:

$$\bar{V}(t) \leq \bar{\psi}(t) + \prod_{t_0 < t_i < t} (1 + \bar{a}_i \bar{\psi}^{m-1}(t_i)) \left[1 + (1-m) \int_{t_0}^t \bar{\psi}^{m-1}(\tau) \bar{q}(\tau) d\tau \right]^{\frac{1}{1-m}}, \quad \forall t \geq t_0 \text{ і } 0 < m < 1. \quad (14)$$

$$\bar{V}(t) \leq \bar{\psi}(t) + \prod_{t_0 < t_i < t} (1 + \bar{a}_i m \bar{\psi}^{m-1}(t_i)) \left[1 - (m-1) \left[\prod_{t_0 < t_i < t} (1 + \bar{a}_i \bar{\psi}(t_i) m) \right]^{m-1} \times \right. \\ \left. \times \int_{t_0}^t \bar{q}(\tau) \bar{\psi}^{m-1}(\tau) d\tau \right]^{\frac{1}{m-1}}, \quad \forall t \geq t_0; \quad (15)$$

$$\int_{t_0}^t \bar{q}(\tau) \bar{\psi}^{m-1}(\tau) d\tau \leq \frac{1}{m}, \quad m > 1, \quad (16)$$

$$\prod_{t_0 < t_i < t} (1 + \bar{a}_i m \bar{\psi}^{m-1}(t_i)) < \left(\frac{m}{m-1} \right)^{m-1}. \quad (17)$$

Доведення. Позначимо $u(t) = \frac{\bar{V}(t)}{\bar{\psi}(t)}$. З (13) отримаємо

$$u(t) \leq 1 + \int_{t_0}^t \bar{q}(\tau) \bar{\psi}^{m-1}(\tau) u^m(\tau) d\tau + \sum_{t_0 < t_i < t} \bar{a}_i \bar{\psi}^{m-1}(t_i) u^m(t_i - 0). \quad (18)$$

Враховуючи результат [] на інтервалі $[t_0, t_1[$ функція $u(t)$ задовольняє нерівностям

$$u(t) \leq \left[1 + (1-m) \int_{t_0}^t \bar{\psi}^{m-1}(\tau) \bar{q}(\tau) d\tau \right]^{\frac{1}{1-m}}, \quad 0 < m < 1, \quad \forall t \in [t_0, t_1[; \quad (19)$$

$$u(t) \leq \left[1 - (m-1) \int_{t_0}^t \bar{\psi}^{m-1}(\tau) \bar{q}(\tau) d\tau \right]^{\frac{1}{m-1}}, \quad m > 1, \quad \forall t: \int_{t_0}^t \bar{\psi}^{m-1}(\tau) \bar{q}(\tau) d\tau < \frac{1}{m-1}. \quad (20)$$

З урахуванням умови (16), нерівність (20) справджується завжди. Таким чином на інтервалі $[t_0, t_1[$ оцінки (14), (15) для функції $\bar{V}(t)$ виконуються.

Розглянемо інтервал $[t_0, t_2[$. Зважаючи на (19) отримаємо наступну нерівність

$$u(t) \leq \bar{a}_1 \bar{\psi}^{m-1}(t_1) \left[1 + (1-m) \int_{t_0}^{t_1} \bar{\psi}^{m-1}(\tau) \bar{q}(\tau) d\tau \right]^{\frac{1}{1-m}} + \\ + \left[1 + (1-m) \int_{t_0}^{t_1} \bar{\psi}^{m-1}(\tau) \bar{q}(\tau) d\tau \right]^{\frac{1}{1-m}} + \int_{t_1}^t \bar{q}(\tau) \bar{\psi}^{m-1}(\tau) u^m(\tau) d\tau. \quad (21)$$

Легко бачити з (16), (17), (21), що $\bar{V}(t)$ на інтервалі $[t_0, t_2[$ задовольняє оцінкам:

$$\bar{V}(t) \leq \bar{\psi}(t) \left(1 + \bar{a}_1 \bar{\psi}^{m-1}(t_1)\right) \left[1 + (1-m) \int_{t_0}^t \bar{\psi}^{m-1}(\tau) \bar{q}(\tau) d\tau\right]^{\frac{1}{1-m}}, \quad \text{якщо } 0 < m < 1, \quad \forall t \in [t_0, t_2];$$

$$\bar{V}(t) \leq \bar{\psi}(t) \left(1 + \bar{a}_1 m \bar{\psi}^{m-1}(t_1)\right) \left[1 - (m-1) \left[1 + \bar{a}_1 m \bar{\psi}^{m-1}(t_1)\right]^{m-1} \int_{t_0}^t \bar{q}(\tau) \bar{\psi}^{m-1}(\tau) d\tau\right]^{\frac{1}{m-1}}, \quad \text{якщо } m > 1.$$

Таким чином (14) та (15) мають місце і на інтервалі $[t_0, t_2]$. Далі, як в лемі 1. Доведення леми 2 завершено.

Наслідок 2. У випадку, коли $\bar{\psi}(t) = c = \text{const} > 0$ з нерівності (13) отримуємо наступні оцінки для функції $\bar{V}(t)$:

$$\bar{V}(t) \leq \prod_{t_0 < t_i < t} (1 + \bar{a}_i c^{m-1}) \left[c^{1-m} - (1-m) \int_{t_0}^t \bar{q}(\tau) d\tau \right]^{\frac{1}{1-m}}, \quad \forall t \geq t_0 \text{ та } 0 < m < 1; \quad (22)$$

$$\bar{V}(t) \leq c \prod_{t_0 < t_i < t} (1 + \bar{a}_i m c^{m-1}) \left[1 - (m-1) \left[c \prod_{t_0 < t_i < t} (1 + \bar{a}_i m c^{m-1}) \right]^{m-1} \int_{t_0}^t \bar{q}(\tau) d\tau \right]^{\frac{1}{m-1}}, \quad \text{при } m > 1, \quad (23)$$

$$\forall t \geq t_0: \quad \int_{t_0}^t \bar{q}(\tau) d\tau \leq \frac{c^{1-m}}{m}, \quad \prod_{t_0 < t_i < t} (1 + \bar{a}_i m c^{m-1}) < \left(\frac{m}{m-1} \right)^{\frac{1}{m-1}} \quad (24)$$

З (22)-(24) слідує справедливність такого результату.

Твердження 2. Нехай для системи (3) виконуються умови i), iii). Мають місце наступні оцінки розв'язків.

$$C) \quad \|x(t, t_0, x_0)\| \leq \prod_{t_0 < t_i < t} (1 + \gamma_i \|x_0\|^{m-1}) \left[\|x_0\|^{1-m} + (1-m) \int_{t_0}^t \bar{b}(\tau) d\tau \right]^{\frac{1}{1-m}}, \quad \forall t \geq t_0, \quad 0 < m < 1;$$

$$D) \quad \|x(t, t_0, x_0)\| \leq \|x_0\| \prod_{t_0 < t_i < t} (1 + \gamma_i m \|x_0\|^{m-1}) \left[1 - (m-1) \left[\|x_0\| \prod_{t_0 < t_i < t} (1 + \gamma_i m \|x_0\|^{m-1}) \right]^{m-1} \int_{t_0}^t \bar{b}(\tau) d\tau \right]^{\frac{1}{m-1}} \quad \text{для}$$

$m > 1,$

$\forall t \geq t_0:$

$$m \|x_0\|^{m-1} \int_{t_0}^t \bar{b}(\tau) d\tau \leq 1, \quad \prod_{t_0 < t_i < t} (1 + \gamma_i m \|x_0\|^{m-1}) < \left(\frac{m}{m-1} \right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

Зауваження 2. Лема 2 узагальнює результат Біхарі на випадок розривних функцій. Подібний аналог було отримано в роботі [4], де розглядалась нерівність вигляду

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^t V(\tau) u^m(\tau) d\tau + \sum_{t_0 < t_i < t} \beta_i u(t_i - 0). \quad (25)$$

Очевидно, що результат [4] та твердження леми 2 є незалежними аналогами класичної леми Біхарі.

Література

1. Gronwall T.H. Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations // Ann. of Math.- 1919.- 20, N2.- P. 292-296
2. R. Bellman Theory of solution stability of differential equations, "Isdatelstvo Inostz. Lit", Moscow, 1954.
3. J. Bihari A generalization of lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations. Acta Math. Acad. Scient Hung. 7 (1)(1956) 71-94.
4. D. S. Borysenko About one integral inequality for piece-wise continuous functions, Proc. X Int. Kravchuk Conf, Kyiv, 2004, P. 323.
5. S. D. Borysenko About asymptotical stability solutions systems with impulse influence, Ukr. Mat. Zh, 35 (2) (1983) 144-150.
6. A. M. Samoilenko, S. D. Borysenko Integro-sum inequalities and stability of processes with discrete disturbances, Proc. of third Int. Conf. "Differential Equations and Applicat." Russa, Bulgaria, (1987) 377-380.
7. A. M. Samoilenko, S. D. Borysenko, C. Cattani, G. Matarazzo, V. Yasinsky Differential Models: Stability, Inequalities and Estimates, "Naukova Dumka", Kyiv, 2001.
8. A. M. Samoilenko, N. Perestyuk Differential Equations with Impulse Effect, "Visha Shkola", Kyiv, 1987.

Надійшла до редакції 6.09.2005

УДК 531.36:62-752+62-755

Олег О.Горошко,
Геннадій Б.Філімоніхін*,
Володимир В.Пирогов*,
Ірина І. Філімоніхіна

**Стабілізація положення осі
обертання абсолютно твердого
тіла багатомаятниковим (багато-
кульовим) автобалансиром**

Розглянута задача стабілізації положення осі обертання абсолютно твердого тіла багатомаятниковим (багатокульовим) автобалансиром. Тіло рухається плоскопаралельно, усередині знаходиться матеріальна точка, що створює незрівноваженість. Положення осі обертання тіла стабілізують маятники (кулі), які рухаються усередині тіла. Встановлено, що за умови існування стійкі основні рухи системи, у яких вона обертається навколо головної центральної осі інерції тіла, а решта рухів, побічних - нестійка.

Ключові слова: автобалансир, стабілізація, абсолютно тверде тіло.

Oleg O.Goroshko,
Hennadiy B.Filimonikhin*,
Volodimir V.Pirogov*,
Irina I. Filimonikhina

**Stabilization of the position of the
axis of the rotation of the absolute
rigid body of the pendulums (balls)**

Is considered the problem of stabilization, of the position of the axis of the rotation of the absolute rigid body of the pendulums (balls) concerning itself. The body makes plane-parallel motions. Inside the body there is a material point, which creates unbalanced weight. The rule of his axis of rotation is stabilized by pendulums (balls), which move inside a body. Is established that under condition of existence is stable the main motions of a system - the motion in which the system rotates around the central axis inertia of the body, other motions - collateral - are unstable.

Key Words: autobalancer, stabilization, absolute rigid body.

*E-mail: filimonikhin@narod.ru, pirogovvv@rambler.ru

Вступ. Задача стабілізації положення осі обертання абсолютно твердого тіла (АТТ) є актуальною задачею механіки [1-6]. Таким тілом може бути штучний супутник Землі або космічний апарат, положення якого у просторі стабілізується обертанням [1-5], ротор, який зрівноважується автобалансиром (АБ) [6] тощо. В роботі [1] запропоновано стабілізувати кульовим АБ положення осі обертання космічного апарата. В роботі [4] була досліджена задача стабілізації положення осі обертання АТТ двохмаятниковим (двохкульовим) АБ. При цьому була досліджена стійкість основного руху системи - в якому АТТ обертається навколо власної головної центральної осі - в малому за допомогою першого методу Ляпунова. В роботі [5] була розглянута аналогічна задача. При цьому була досліджена стійкість всіх ustalених рухів шляхом дослідження на умовний екстремум повної (кінетичної) енергії системи.

В даній роботі розв'язується більш загальна задача, а саме, коли положення осі обертання АТТ стабілізує багатомаятниковий (багато-

кульовий) АБ. При цьому для дослідження стійкості ustalених рухів застосовується як перший метод Ляпунова, так і дослідження на умовний екстремум.

1. Опис моделі системи. Розглядувана ізольована система складається із несучого АТТ масою M , що стабілізується (в подальшому просто АТТ). В ідеальному випадку АТТ повинно обертатися навколо власної головної центральної осі w , яка проходить через центр мас АТТ – точку O і спрямована на нас (рис.1). Використовуємо допоміжні осі u, v , які виходять із точки O , жорстко зв'язані з АТТ, причому вісь u спрямована в бік точки D , а вісь v так, що система координат є правою. Вважаємо, що АТТ симетричне відносно площини Ouv . Всередині АТТ у цій площині знаходиться нерухома відносно АТТ матеріальна точка D масою m_d , що створює незрівноваженість (рис. 1, а). Для її компенсації усередині АТТ встановлені додаткові тіла, що створюють АБ (рис. 1, а, б). У випадку багатомаятникового АБ на вісь w встановлено n маятників масою m , фізичної довжини l , з осьовим моментом інерції ml^2 відносно осі, на яку насаджені. У випадку багатокульового АБ n куль масою m рухаються по кільцевим доріжкам радіуса l , причому кулі приймаються за матеріальні точки, або l – відстань від осі w до центра мас j -ої кулі і осьовим моментом інерції кулі відносно власного центра мас нехтуємо. Відмітимо, що в силу особливостей системи будь-яка вісь, що паралельна осі w – є головною віссю інерції системи.

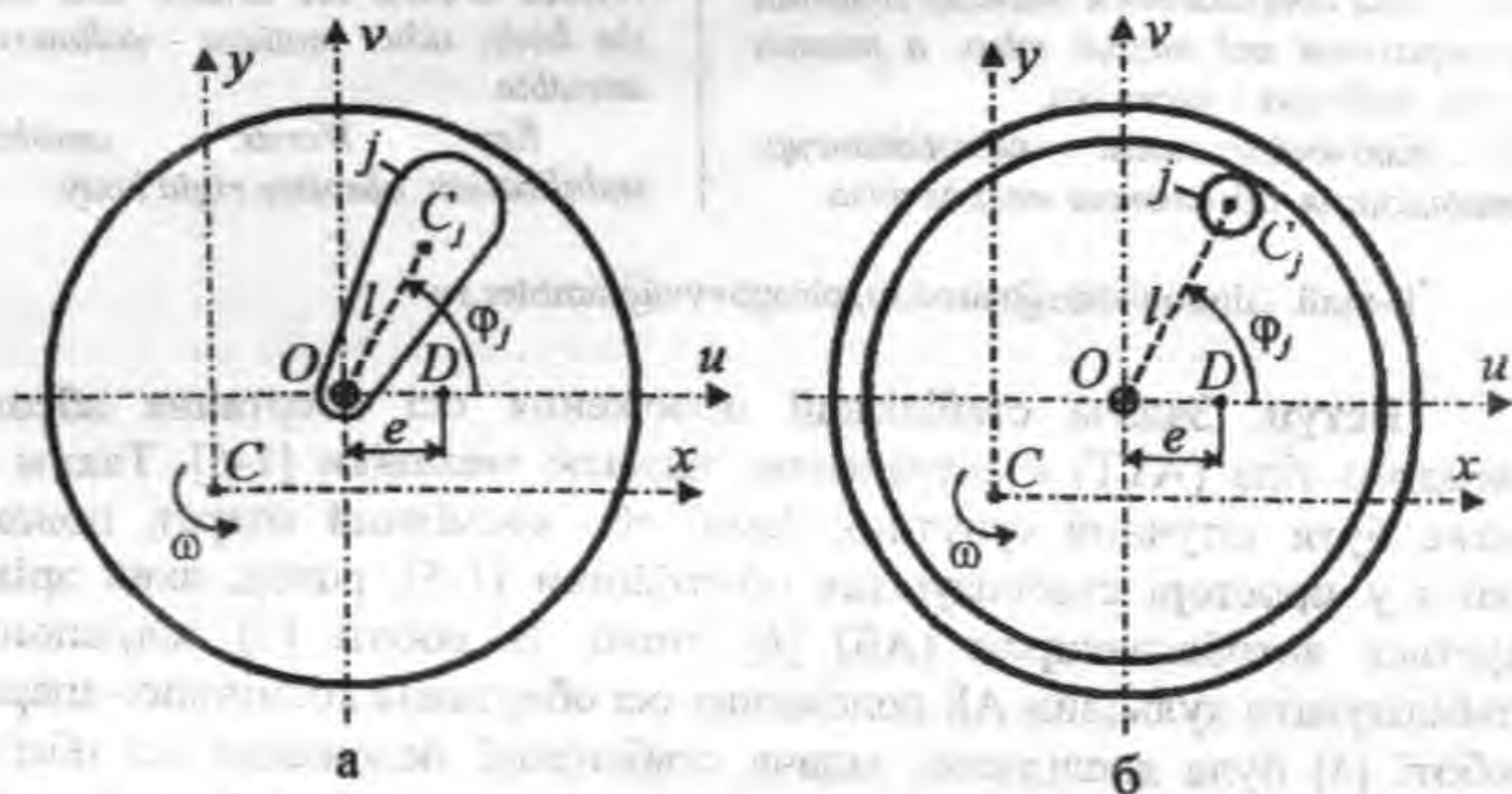


Рис. 1 – Модель АТТ і багатомаятникового (багатокульового) АБ

Спільний центр мас маятників (куль) знаходиться в одній площині з точками O, D . В цій площині знаходиться і центр мас системи – точка C (рис. 1, а). Рух АТТ визначаємо відносно осей x, y , які виходять з центра мас системи – точки C і паралельні осям u, v . Для зручності положення центра мас системи показано так, щоб координати відносно них були

додатними. Центр мас ізольованої системи рухається рівномірно і прямолінійно. Тому, не обмежуючи загальності, будемо вважати, що він нерухомий.

Позначимо через J_O осьовий момент інерції АТТ відносно осі w , а через ω – кутову швидкість обертання тіла. Координати точки D відносно осей u, v , мають вид $(e, 0, 0)$.

Положення маятників (куль) визначається кутами φ_j , які відраховуються від додатного напрямку осі u . При русі маятника відносно АТТ на нього діє момент сил в'язкого опору $-Hl\dot{\varphi}_j$, де H – коефіцієнт сил в'язкого опору, $\dot{\varphi}_j$ – відносна кутова швидкість обертання маятника. При русі кулі відносно АТТ на неї діє сила в'язкого опору $-Hl\dot{\varphi}_j$, де H – коефіцієнт в'язкого опору, $l\dot{\varphi}_j$ – швидкість руху кулі по доріжці відносно АТТ.

Вважаємо, що згідно початкових умов, АТТ рухалось плоскопаралельно. Сили, які виникають при русі маятників (куль) відносно АТТ, не будуть виводити його з плоскопаралельного руху. Тому будемо вважати, що АТТ і далі рухається плоскопаралельно.

Вважаємо, що вісь w – найбільшого моменту інерції [2]. В іншому випадку вважаємо, що існує активна система з підтримання плоскопаралельного руху АТТ, причому, в силу вказаних особливостей системи, її маса і створювані сили – малі і їх можна не враховувати.

Будемо виділяти основні рухи, в яких точка D зрівноважена маятниками (кулями), точки O і C співпадають і АТТ обертається із сталою кутовою швидкістю ω_0 навколо осі $w=z$. Тут і нижче будемо вважати, що $0 \leq e_0 < 1$, причому дана нерівність – достатня умова існування основних рухів. Поряд з основними рухами можуть існувати побічні рухи. В них точка D незрівноважена і АТТ обертається навколо осі z , яка не співпадає з віссю w . Відмітимо, що в силу особливостей системи вісь z – її головна центральна вісь інерції.

В подальшому, для більшої стислості, будемо посилатися на маятниковий АБ. Дослідження будемо проводити за методикою, застосованою у роботах [3-5].

2. Рівняння руху системи. Маємо такі рівняння у безрозмірному вигляді, що визначають рух системи і які одержані з допомогою:

- теореми про рух центра мас системи

$$\xi + e_0 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos \varphi_j = 0, \quad \eta + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sin \varphi_j = 0; \quad (1)$$

- закону збереження моменту кількості руху матеріальної системи

$$(R_j - \xi^2 - \eta^2) R_{*} + \xi \eta - \dot{\eta} \xi + \frac{1}{2\tilde{R}_{*}n} \sum_{j=1}^n \dot{\varphi}_j = R_j; \quad (2)$$

- і теореми про зміну моменту кількості руху для маятників

$$\ddot{\phi}_j + \dot{R}_\omega + h_j \dot{\phi}_j - i\tilde{R}_m \left[(\ddot{z} + 2iR_\omega \dot{z} - R_\omega^2 z + i\dot{R}_\omega z) e^{-i\phi_j} - \right. \\ \left. - (\ddot{\bar{z}} - 2iR_\omega \dot{\bar{z}} - R_\omega^2 \bar{z} - i\dot{R}_\omega \bar{z}) e^{i\phi_j} \right] = 0, \quad / j = \overline{1, n} / , \quad (3)$$

де у (1-3) безрозмірні змінні і час:

$$\xi = \frac{x}{r^*}, \quad \eta = \frac{y}{r^*}, \quad z = \xi + i\eta, \quad R_\omega = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \frac{d}{dt} = \omega_0 \frac{d}{d\tau}, \quad (4)$$

і безрозмірні параметри:

$$e_0 = \frac{m_d e}{nml}, \quad R_m = \frac{nm}{M_\Sigma} = 2\tilde{R}_m, \quad h = \frac{H}{ml^2 \omega_0}, \quad R_j = \frac{J_0 + m_d e^2 + nml^2}{M_\Sigma r^{*2}}, \quad (5)$$

причому у (4) та (5) $r^* = nml/M_\Sigma$ - найбільша відстань, на яку може відхилитись матеріальна точка D від центру мас АТТ так, щоб її могли зрівноважувати маятники і при цьому АТТ б оберталося навколо осі $w=z$; $M_\Sigma = M + m_d + nm$ - сумарна маса системи; t - розмірний час, i - уявна одиниця. З рівнянь (1-3) видно, що динаміку системи характеризують 5 суттєво відмінних безрозмірних параметрів:

$$h \geq 0, \quad n > 2, \quad 0 \leq e_0 < 1, \quad R_j > 0, \quad 0 < \tilde{R}_m < 0,5. \quad (6)$$

3. Приведення задачі визначення умов стабілізації положення осі обертання тіла до задачі дослідження осьового моменту інерції системи на умовний екстремум.

Оскільки на систему діють тільки дисипативні сили і її повна енергія співпадає з кінетичною, то для дисипативних систем маємо закон зміни кінетичної енергії системи у такому вигляді

$$dT/dt = -2R, \quad (7)$$

де T - кінетична енергія системи, R - дисипативна функція Релея. В зв'язку з тим, що під час перехідних процесів до системи не підводиться зовнішня і внутрішня енергія, то з часом вона прийде до усталеного руху. В ньому кінетична енергія системи набуде мінімального значення внаслідок розсіювання енергії системи за рахунок тертя, яке виникає при русі маятників відносно АТТ. В усталених рухах рух маятників відносно АТТ відсутній, тому вони будуть обертатися з ним як одне жорстке ціле, а кінетична енергія системи у безрозмірному вигляді визначатиметься формулою

$$T = \tilde{J}_z R_\omega^2 / 2, \quad (8)$$

де

$$\tilde{J}_z = R_j - \xi^2 - \eta^2 = R_j - \left(e_0 + \sum_{j=1}^n \cos \phi_j / n \right)^2 - \left(\sum_{j=1}^n \sin \phi_j / n \right)^2, \quad (9)$$

- безрозмірний осьовий момент інерції системи. З (8) та (9) видно, що в усталеному русі кінетична енергія системи залежить від параметрів $\xi, \eta, \phi_j, R_\omega$. В усталеному русі, враховуючи рівняння (2), кінетичну енергію системи перепишемо слідуочим чином

$$T = R_z^2 / (2\tilde{J}_z). \quad (10)$$

Оскільки $R_z^2/2$ - константа, то коли кінетична енергія системи приймає мінімальне значення, осьовий момент інерції системи - максимальне, і т. д. Тому далі на відміну від роботи [5], будемо досліджувати на умовний екстремум осьовий момент інерції системи, а не її кінетичну енергію.

4. Дослідження осьового моменту інерції системи на умовний екстремум у випадку $e_0 < 1$.

4.1. Дослідження на умовний екстремум осьового моменту інерції системи як функції ξ, η . Візьмемо перші частинні похідні від рівняння (9) за ξ, η і прирівняємо їх до нуля, матимемо:

$$\partial \tilde{J}_z / \partial \xi = -2\xi = 0, \quad \partial \tilde{J}_z / \partial \eta = -2\eta = 0. \quad (11)$$

Необхідна умова існування екстремуму виконується при $\xi, \eta = 0$. Зауважимо, що це відповідає основним рухам системи, бо в них АТГ обертається навколо власної центральної осі. Візьмемо другі частинні похідні від рівняння (9) за ξ і η , матимемо:

$$a_{11} = \frac{\partial^2 \tilde{J}_z}{\partial \xi^2} = -2; \quad a_{22} = \frac{\partial^2 \tilde{J}_z}{\partial \eta^2} = -2; \quad a_{12} = a_{21} = \frac{\partial^2 \tilde{J}_z}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 \tilde{J}_z}{\partial \eta \partial \xi} = 0. \quad (12)$$

Введемо у розглядання квадратну матрицю 2-го порядку A , складену з елементів (12). Тоді її головні діагональні мінори матимуть вигляд:

$$\Delta_1 = a_{11} < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 4 > 0. \quad (13)$$

На основі критерію Сильвестра [7] отримуємо, що $\tilde{J}_z$ приймає максимальне значення. Тоді T приймає мінімальне значення, і основні рухи стійкі.

4.2. Дослідження на умовний екстремум осьового моменту інерції системи, як функції φ_j .

4.2.1. Визначення кількості усталених рухів та їх класифікація. Візьмемо перші частинні похідні від рівняння (9) за φ_j і прирівняємо їх до нуля, матимемо систему n нелінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\partial \tilde{J}_z / \partial \varphi_j = 2(e_{z0} \sin \varphi_j - e_{x0} \cos \varphi_j) / n = 0, \quad /j = \overline{1, n, /}, \quad (14)$$

де

$$e_{z0} = e_0 + \sum_{i=1}^n \cos \varphi_i / n, \quad e_{x0} = \sum_{i=1}^n \sin \varphi_i / n \quad (15)$$

- відповідно безрозмірна незрівноваженість по осі u та v . Аналіз системи рівнянь (14) показує, що вона має такі істотно відмінні розв'язки.

1. Основні рухи, в яких відбувається стабілізація положення осі обертання АТГ ($z = w$) і $e_{z0} = 0, e_{x0} = 0$. Для визначення n невідомих кутів використовуються два алгебраїчних рівняння. Їх розв'язок дає $(n-2)$ параметричну сім'ю рухів, в яких $\xi = 0$ і $\eta = 0$.

2. Побічні рухи, в яких система незрівноважена і не відбувається стабілізації положення осі обертання АТТ ($z \neq w$). Побічні рухи розрізнятимемо за положенням маятників відносно точки D та O .

а) У випадку, коли $e_0 \neq 0$, маятники будуть відхилені вздовж осі u (рис. 2, а) і розв'язок матиме вигляд:

$$\varphi_j = k_j \pi, \quad \cos \varphi_j = (-1)^{k_j}, \quad / j = \overline{1, n} / , \quad (16)$$

де k_j - числа, що задають напрямок відхилення маятників. Якщо $k_j = 0$, то маятник j відхилений у бік точки D , якщо $k_j = 1$ - у протилежний бік.

Зауважимо, що маятники створюють незрівноваженість $e(k) = \sum_{i=1}^n (-1)^{k_i} / n$.

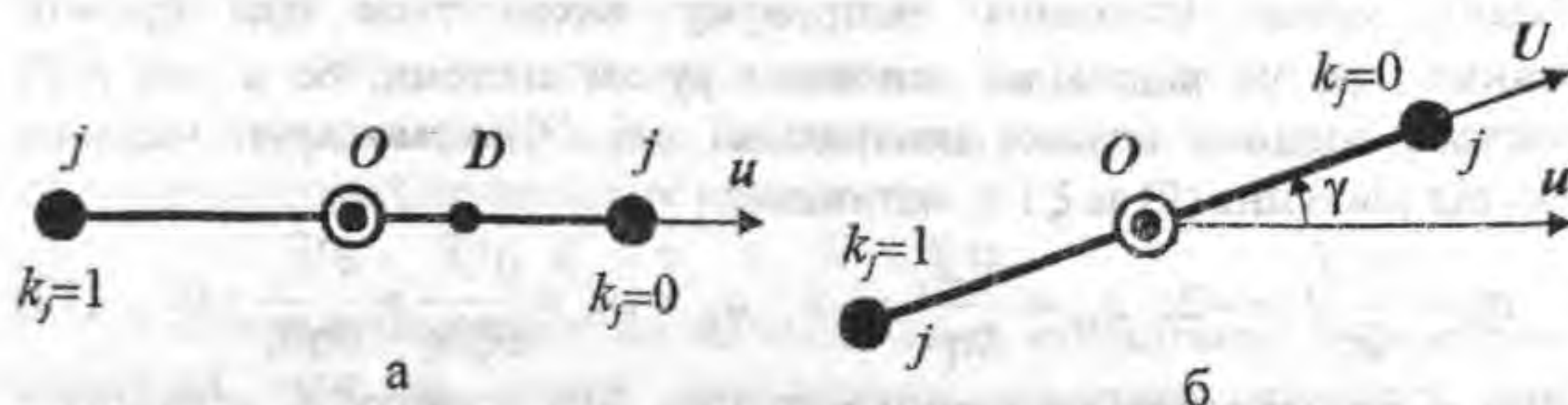


Рис. 2 – Побічні рухи при $e_0 \neq 0$ (а) та при $e_0 = 0$ (б)

Оскільки маятники однакові, то принципово різних побічних рухів буде $(n+1)$.

б) У випадку, коли $e_0 = 0$, маятники відхилені вздовж лінії U , повернутої на кут γ відносно осі u (рис. 2, б) та створюють незрівноваженість $e(k)$. При цьому:

$$\varphi_j = \gamma + k_j \pi, \quad \cos \varphi_j = \cos(\gamma + k_j \pi) = \cos \gamma (-1)^{k_j}, \quad / j = \overline{1, n} / , \quad (17)$$

де γ - деякий параметр. Оскільки маятники однакові і при заміні кута γ на кут $\gamma + \pi$ вони змінюють орієнтацію на протилежну, то загальна кількість істотно відмінних сімей однопараметричних рухів наступна: для парної кількості маятників - $(n/2 + 1)$; для непарної - $(n+1)/2$.

4.2.2. Дослідження стійкості побічних рухів. Для з'ясування характеру нестійкості побічних рухів дослідимо $\tilde{J}_z(\varphi_j)$ на умовний екстремум на цих рухах. Не обмежуючи загальності матимемо наступний вигляд других частинних похідних від виразу (9):

$$\begin{aligned} \partial^2 \tilde{J}_z / \partial \varphi_j^2 &= a_{jj} = 2(-1)^{k_j} \left[e_0 + \sum_{i=1, i \neq j}^n (-1)^{k_i} / n \right] / n, \quad / j = \overline{1, n} / ; \\ \frac{\partial^2 \tilde{J}_z}{\partial \varphi_j \partial \varphi_i} &= \frac{\partial^2 \tilde{J}_z}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} = a_{ji} = -\frac{2}{n^2} (-1)^{k_j} (-1)^{k_i}, \quad / j, i = \overline{1, n}, j \neq i / . \end{aligned} \quad (18)$$

Введемо у розглядання квадратну матрицю n -го порядку $A = \|a_{ji}\|$, складе

ну з елементів (18). Із застосуванням критерію Сильвестра [7] проведемо аналіз стійкості (нестійкості) побічних рухів. Розглянемо взаємовиключні випадки:

1. Якщо існують принаймні два маятника, відхилені в протилежні боки, то не обмежуючи загальності, нумерацію маятників будемо проводити так, щоб на основі перших двох мінорів можна було сказати про стійкість (нестійкість) розглядуваних побічних рухів, а саме $k_1 = 0$, $k_2 = 1$. Тоді для випадку коли:

а) $e_0 \neq 0$, отримаємо що:

$$\Delta_1 = 2 \left[e_0 + \sum_{i=2}^n (-1)^{k_i} / n \right] / n, \quad \Delta_2 = -4 \left[e_0 + \sum_{i=2}^n (-1)^{k_i} / n \right]^2 / n < 0; \quad (19)$$

б) $e_0 = 0$, отримаємо що:

$$\Delta_1 = 2 \sum_{i=2}^n (-1)^{k_i} / n^2, \quad \Delta_2 = -4 \left[\sum_{i=2}^n (-1)^{k_i} / n \right]^2 / n^2 < 0. \quad (20)$$

Отже, оскільки Δ_2 від'ємне, то на основі критерію Сильвестра, $\tilde{J}_2$ не може прийняти максимальне значення, а T - мінімальне. Тому розглядувані рухи нестійкі.

2. Всі маятники відхилені у один бік. Можливі два випадки: $e(k)=1$ (всі маятники відхилені в бік точки D : $k_j = 0$, $j = \overline{1, n}$), та $e(k)=-1$ (всі маятники відхилені у протилежну сторону від точки D : $k_j = 1$ $j = \overline{1, n}$). Введемо такі позначення:

$$a = a_{jj} = 2[1 \pm e_0 - (1/n)]/n, \quad b = a_{ij} = a_{ji} = -2/n^2, \quad (21)$$

де тут і надалі верхній знак відповідає випадку, коли $e(k)=1$, нижній – $e(k)=-1$. Можна перевірити, що неможливо відповісти про стійкість (нестійкість) розглядуваних побічних рухів на основі перших двох головних діагональних мінорів. Тому перейдемо до розгляду матриці A , складеної з елементів (21), яка має такий вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & a \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} d+nb & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d \end{pmatrix}, \quad (22)$$

де A – матриця до перетворення, A^* – отримана після перетворення з допомогою лівих і правих елементарних операцій [8]. Тут $d = a - b = 2(1 \pm e_1)/n$.

Для випадку, коли $e(k) = \pm 1$, матимемо:

$$\Delta_1 = d + nb, \quad \Delta_2 = (d + nb)d, \dots, \Delta_n = (d + nb)d^{n-1}, \quad (23)$$

де $d + nb = \pm 2e_0/n$. При $e_0 < 1$: коли $e(k) = 1$, то $\tilde{J}_z$ - приймає мінімальне значення, а T - максимальне; коли $e(k) = -1$, то $\tilde{J}_z$ не може прийняти максимальне значення, а T - мінімальне. Отже, розглядувані рухи нестійкі.

Отже, оскільки у системи стійкі основні рухи, а побічні - нестійкі, то з часом будуть здійснюватися тільки основні рухи. Відмітимо, що усталені рухи системи можна одержати і з рівнянь (1-3), поклавши в цих рівняннях похідні рівними нулю. Але для відповіді на питання про характер стійкості (нестійкості) рухів необхідне дослідження кінетичної енергії (осьового моменту інерції) системи на умовний екстремум.

5. Дослідження стійкості основного усталеного руху першим методом Ляпунова для випадку $e_0 < 1$. Дане дослідження дає можливість визначити швидкість затухання перехідних процесів (за наявністю коливань системи - і їх частоту) у випадку, коли система була виведена, внаслідок збурень, з будь-якого руху із сім'ї основних. Будемо використовувати диференціальні рівняння (3). Збурений рух має вигляд:

$$z = s; \quad \varphi_j = \tilde{\varphi}_j + \alpha_j; \quad R_z = 1 + p, \quad (24)$$

де s, α_j, p - збурення ($|s|, |\alpha_j|, |p| \ll 1$); $0, \tilde{\varphi}_j, 1$ - незбурений рух. З рівнянь (1) та (2), враховуючи, що для основного руху $\xi, \eta = 0$, знайдемо:

$$s = -\sum_{j=1}^n \frac{i}{n} \alpha_j e^{i\tilde{\varphi}_j}, \quad \bar{s} = \sum_{j=1}^n \frac{i}{n} \alpha_j e^{-i\tilde{\varphi}_j}, \quad p = -\frac{1}{2\tilde{R}_z R_z} \sum_{j=1}^n \frac{\dot{\alpha}_j}{n}. \quad (25)$$

Стійкість основного руху будемо досліджувати за параметром s , який визначає відхилення головної центральної осі тіла w від головної центральної осі системи z . Тому систему з n рівнянь (3) приводимо до системи з мінімальною кількістю рівнянь відносно параметра s . Введемо нову змінну:

$$\beta = \sum_{j=1}^n \alpha_j / n, \quad (26)$$

- „середній” кут повороту маятників (куль). Враховуючи вирази (25), матимемо таку систему n лінійаризованих диференціальних рівнянь динаміки маятників:

$$D_l = \ddot{\alpha}_l + h_l \dot{\alpha}_l - (\ddot{\beta} / 2\tilde{R}_z R_z) - i\tilde{R}_z [(\ddot{s} + 2i\dot{s} - s)e^{-i\tilde{\varphi}_l} - (\ddot{\bar{s}} - 2i\dot{\bar{s}} - \bar{s})e^{i\tilde{\varphi}_l}] = 0, \quad /l = \overline{1, n}/. \quad (27)$$

Якщо відбувається певний основний рух із сім'ї основних, то $s = \bar{s} = 0$, і

$$e_0 = -\sum_{l=1}^n e^{i\tilde{\varphi}_l} / n, \quad e_0 = -\sum_{l=1}^n e^{-i\tilde{\varphi}_l} / n. \quad (28)$$

Введемо позначення

$$\mu = \ddot{\beta}, \quad \dot{\mu} = \ddot{\beta}. \quad (29)$$

Тоді, з огляду на вирази (28) та (29), з n рівнянь (27) отримаємо наступну систему рівнянь з трьома незалежними змінними μ, s та $\bar{s}$:

$$\sum_{l=1}^n D_l / n = \dot{\mu} + h\mu - (\dot{\mu} / 2\tilde{R}_m R_J) - i\tilde{R}_m e_0 [(\ddot{s} + 2i\dot{s} - s) - (\ddot{\bar{s}} - 2i\dot{\bar{s}} - \bar{s})] = 0,$$

$$L = -\sum_{l=1}^n D_l i e^{i\varphi_l} / n = \ddot{s} + h\dot{s} - (ie_0 \dot{\mu} / 2\tilde{R}_m R_J) +$$

$$+ \tilde{R}_m [-(\ddot{s} + 2i\dot{s} - s) + (\ddot{\bar{s}} - 2i\dot{\bar{s}} - \bar{s})\tilde{b}_{12}] = 0, \quad \bar{L} = 0, \quad (30)$$

де

$$\tilde{b}_{12} = \sum_{l=1}^n e^{2i\varphi_l} / n, \quad |\tilde{b}_{12}| < 1 \quad (31)$$

- сталі параметри, обчислені на поточному основному русі із сім'ї, в околі якого рухається система. Як видно з системи рівнянь (30), стійкість будь-якого руху системи із сім'ї основних визначають змінні $s, \bar{s}$ та μ .

Введемо позначення:

$$qR_m = 1/2\tilde{R}_m R_J = nml^2 / (J_0 + m_d e^2 + nml^2), \quad (32)$$

де $J_0 = M\rho_0^2$; ρ_0 - радіус інерції АТТ. Тоді $q = M_z l^2 / (M\rho_0^2 + m_d e^2 + nml^2)$.

Подемо характеристичне рівняння системи (30) у вигляді поліному:

$$\Delta(\lambda) = a_0 \lambda^5 + a_1 \lambda^4 + a_2 \lambda^3 + a_3 \lambda^2 + a_4 \lambda + a_5,$$

де $a_0 = 1 - qR_m - R_m [1 - qR_m (1 - e_0)]$; $a_1 = h\{3 - 2qR_m - R_m [2 - qR_m (1 - e_0)]\}$;

$$a_2 = h^2 (3 - qR_m) + R_m [1 - h^2 - qR_m (1 - e_0)] + \frac{R_m^2}{4} [2qR_m e_0 (1 - \tilde{b}_{12} - \bar{\tilde{b}}_{12}) +$$

$$+ (1 - qR_m) (1 - \tilde{b}_{12} \bar{\tilde{b}}_{12})]; \quad a_3 = h\{h^2 + R_m [2 - qR_m (1 - e_0)] + [R_m^2 (1 - \tilde{b}_{12} \bar{\tilde{b}}_{12}) / 4]\};$$

$$a_4 = R_m h^2 + \frac{R_m^2}{4} [2qR_m e_0 (1 - \tilde{b}_{12} - \bar{\tilde{b}}_{12}) + (1 - qR_m) (1 - \tilde{b}_{12} \bar{\tilde{b}}_{12})];$$

$$a_5 = R_m^2 h (1 - \tilde{b}_{12} \bar{\tilde{b}}_{12}) / 4. \quad (33)$$

Отриманий поліном п'ятого степеня має дійсні коефіцієнти, тому можливі наступні варіанти: 1) всі корені дійсні; 2) три корені дійсні і одна пара комплексно спряжених; 3) один корінь дійсний і дві пари комплексно спряжених.

Дослідимо стійкість основних рухів у випадку, коли маса маятників (куль) набагато менша маси системи, тобто $R_m \ll 1$, ($q \sim 1$). Тоді корені характеристичного рівняння системи (30) мають такі розкладання:

$$\lambda_{1,2,3} \approx -h, \quad \lambda_4 \approx R_m \left(-1 + \sqrt{\tilde{b}_{12} \bar{\tilde{b}}_{12}} \right) / h, \quad \lambda_5 \approx R_m \left(-1 - \sqrt{\tilde{b}_{12} \bar{\tilde{b}}_{12}} \right) / h, \quad (34)$$

тут $0 < \tilde{b}_{12} \bar{\tilde{b}}_{12} < 1$, в силу рівнянь (31). Оскільки корені (34) від'ємні, то основні рухи стійкі, а перехідні процеси аперіодичні.

Висновки. Для розглядуваної ізольованої матеріальної системи, складеної з АТТ, що стабілізується, багатомаятникового (багато

кульового) АБ, і матеріальної точки, яка створює незрівноваженість встановлено, що:

- 1) система має $n-2$ параметричну сім'ю основних рухів, в яких точка зрівноважена і відбувається стабілізація положення осі обертання АТТ ($z = w$);
- 2) система має побічні рухи, в яких точка незрівноважена і не відбувається стабілізації положення осі обертання АТТ ($z \neq w$), причому при $e_0 \neq 0$ для парної і непарної кількості маятників існують $(n+1)$ істотно відмінних побічних рухів, а при $e_0 = 0$ для парної кількості маятників - $n/2 + 1$, для непарної - $(n+1)/2$ істотно відмінних однопараметричних сімей побічних рухів;
- 3) основні рухи стійкі, а побічні - нестійкі;
- 4) з часом система буде здійснювати певний рух із сім'ї основних, тобто відбудеться стабілізація положення осі обертання АТТ;
- 5) у випадку, коли $R_{\infty} \ll 1$ і система була виведена з основного руху, перехідні процеси повернення системи до певного основного руху із сім'ї - аперіодичні.

Література

1. Automatic balancer: patent 3,433,534 US, / G.E.Mercer (US). Serial No. - 616,429. Filed Feb. 10, 1967. Patented Mar. 18, 1969.
2. Pringle R.Jr. Stability of the Force-Free Motions of a Dual-Spin Spacecraft. //AIAA Journal, Vol. 7, No. 6, 1969, pp. 1054-1063.
3. Мирер С.А., Сарычев В.А. Оптимальные параметры спутника, стабилизируемого вращением, с демпфером маятникового типа // Космические исследования. - 1997. - т.35. №6. - С. 651-658.
4. Філімоніхін Г.Б. Стабілізація маятниками положення осі обертання ізолюваного абсолютно твердого тіла // Вісник, математика-механіка. Київський національний університет. Вип. №7-8, 2002. С.67-71.
5. Горошко О.О., Філімоніхін Г.Б., Пирогов В.В. Стабілізація положення осі обертання абсолютно твердого тіла маятниковим (кульовим) автобалансиром / Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. н., вип. № 3, 2004. С.95-102.
6. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами. - Кіровоград: КНТУ, 2004. - 352с.
7. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. - М., "Наука", 1976 г., 320 стр.
8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М.: "Наука", 1966. - 576 с.

Надійшла до редакції 22.06.2005.

УДК 517.948

Олексій Ф. Калайда

Двосторонні симетричні наближення функцій, похідних та інтегралів та розв'язків інтегральних рівнянь, диференціальних та інтегро-диференціальних задач

Побудовано двосторонні симетричні формули апроксимації функцій, похідних, інтегралів, а також відповідні двосторонні симетричні методи розв'язування задачі Коші для нормальних диференціальних рівнянь, інтегральних рівнянь та лінійних диференціальних та інтегро-диференціальних задач.

Ключові слова: функція, похідна, інтеграл.

E-mail: akalayda@i.com.ua

Olexiy F. Kalayda

The two-sided symmetric approximation of functions derivative and integrals and decisions of the integral equations, differential and integro-differential tasks

The build two-sided symmetric formulas for aprocsimatsii functions, derivative and integrals and also the proper two-sided symmetric methods of untling of task Coshi for the normal differential equations, integral equations and linear differential and integro-differential tasks.

Key Words: function, derivative, integral.

Побудовано параметричні двосторонні симетричні формули для апроксимації функцій, похідних та інтегралів а також відповідні двосторонні симетричні методи розв'язування задачі Коші для нормальних диференціальних рівнянь (методи типу Кротова, Адамса та методи Рунге - Кутта), інтегральних рівнянь та лінійних диференціальних, а також інтегро-диференціальних задач.

При наближенні $N = \sum_{j=0}^n p_j f_j$ функцій f , похідних $f^{(k)}(x)$ та інтегралів з різними ваговими функціями (позначаються T), побудованих на основі колокант, маємо рівність

$$T = N + \delta, \quad (1)$$

де δ – похибка апроксимації. На основі цього можна побудувати симетричні двосторонні наближення $\hat{N}$, $\tilde{N}$ даних об'єктів у вигляді

$$\begin{aligned} \hat{N} &= (1 - \varepsilon) p_0 f_0 + \sum_{j=1}^{n-1} p_j f_j + (1 + \varepsilon) p_n f_n, \\ \tilde{N} &= (1 + \varepsilon) p_0 f_0 + \sum_{j=1}^{n-1} p_j f_j + (1 - \varepsilon) p_n f_n. \end{aligned} \quad (2)$$

Дійсно, похибки цих наближень мають вигляд

$$T - \bar{N} = \delta - \varepsilon(f_0(p_0 - p_n) - p_n((x_n - x_0)f'_0 - (x - x)^2 f''_0/2! - \dots)), \quad (3)$$

$$T - \bar{N} = \delta + \varepsilon(f_0(p_0 - p_n) - p_n((x_n - x_0)f'_0 - (x - x)^2 f''_0/2! - \dots)), \quad (4)$$

так що $T - (\bar{N} + \bar{N})/2 = \delta$. При цьому в разі симетричної відносно середини відрізка $[x_0, x_n]$ системи вузлів x_j може виконуватись рівність $p_0 = p_n$.

З виконаних побудов слідує, що при застосуванні двосторонніх формул (2), (3) для розв'язування різноманітних задач, що містять похідні та (або) інтеграли, теж дістанемо симетричні двосторонні наближення їх розв'язків. Пройлюструємо це на прикладах. Нижче наведено таблиці одержаних наближень різноманітних задач. В них наведено похибки двосторонніх наближень розв'язку відповідної задачі (перша та друга колонки) та похибку середнього арифметичного цих наближень (третя колонка).

Таблиця (апроксимація функції $x^2 f(x) = 1/(1+x^2)$ многочленом Лагранжа)

1.524002791623014E-04	-1.525867380097745E-04	-9.322942373657384E-08
-4.221895839195966E-05	4.241425646611674E-05	9.764903707853989E-08
2.072554063436982E-05	-2.091851856356186E-05	-9.648896459601985E-08
-1.339003505185232E-05	1.357404944957175E-05	9.200719885971154E-08
1.040873778623830E-05	-1.057807993787296E-05	-8.467107581733302E-08
-9.473290130235235E-06	9.624941917363294E-06	7.582589356402991E-08
1.015494924316851E-05	-1.028924275126020E-05	-6.714675404584369E-08
-1.334250356188615E-05	1.346209917163499E-05	5.979780492992859E-08
2.382637834530410E-05	-2.393457089011619E-05	-5.409627235053449E-08
-7.892122792174661E-05	7.901820988587271E-05	4.849098211856528E-08

(відкрита система 11 вузлів Чебишова на відріжку $[0, 1]$, $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$).

Таблиця (апроксимація функції неповною раціональною функцією)

1.315664910350733E-07	-1.322125413594222E-07	-3.230251621744173E-10
-1.490444976326444E-07	1.496212540530450E-07	2.883790983787549E-10
1.679972179147171E-07	-1.684739512342048E-07	-2.383657715654408E-10
-1.857816869232920E-07	1.861318548179725E-07	1.750848355186463E-10
1.998192669105947E-07	-2.000298842119719E-07	-1.053095388670044E-10
-2.085558801212528E-07	2.086310715299078E-07	3.759481614906690E-11
2.113273200876620E-07	-2.112921322350303E-07	1.759481449425948E-11

(система 11 вузлів Чебишова з законтурними вузлами, $\varepsilon = 10^{-5}$).

Таблиця (апроксимація функції повною раціональною функцією)

-2.797406750687514E-11	2.796873843635694E-11	-3.552713678800501E-15
-2.095035256388655E-11	2.094679985020775E-11	-1.776356839400250E-15
2.263789156131679E-11	-2.264499698867439E-11	-3.552713678800501E-15
1.826094830903457E-11	-1.826805373639218E-11	-3.552713678800501E-15
-1.641176083921891E-11	1.640287905502191E-11	-5.329070518200751E-15
-1.337419064384449E-11	1.337774335752329E-11	1.776356839400250E-15
9.885425811262394E-12	-9.883649454422994E-12	1.776356839400250E-15
7.833733661755105E-12	-7.828404591236904E-12	3.552713678800501E-15

-4.394706820676220E-12 4.400035891194420E-12 3.552713678800501E-15
-3.138822535220243E-12 3.138822535220243E-12 0.000000000000000E+00
(система вузлів Чебишова з законтурними вузлами, 8 основних, 7 додатко-
вих вузлів, $\varepsilon = 10^{-9}$).

Таблиця (апроксимация двократного нуля функции $x \mapsto \sin^2 x$)
7.352048006850631E-12 -7.370481612187230E-12 -9.216802668299273E-15
(система 11 вузлів з сталим кроком, $\varepsilon = 10^{-6}$).

Таблиця (апроксимация четвертой похідной многочленом Лагранжа)
-1.337772779657076E-04 1.337485658445825E-04 -1.435606056254812E-08
-4.133354948532286E-06 4.145513387232569E-06 6.079219350141329E-09
4.095774866041957E-06 -4.102523153082238E-06 -3.374143520140649E-09
-2.921681980461166E-06 2.926820061310842E-06 2.569040424837965E-09
2.758963356774835E-06 -2.764219706130611E-06 -2.628174677887785E-09
-3.543148260454210E-06 3.550319241818478E-06 3.585490682134207E-09
4.502452462640250E-06 -4.515762306089854E-06 -6.654921724802421E-09
6.192318228770421E-05 -6.189175932902469E-05 1.571147933976391E-08
(система 11 вузлів Чебишова з законтурними вузлами, $\varepsilon = 10^{-3}$).

Таблиця (апроксим. першої похідної неповною раціональною функцією)
-1.992291442931560E-09 1.998527898727787E-09 3.118172386962215E-12
1.806855998154333E-09 -1.812356043018326E-09 -2.750022431996513E-12
-1.755423473248641E-09 1.760688816965228E-09 2.632671858293634E-12
1.833937002260200E-09 -1.839302932182818E-09 -2.682964961309153E-12
-2.046426916813004E-09 2.052228165183578E-09 2.900568674135684E-12
2.445720514998584E-09 -2.452536840280573E-09 -3.408162640994306E-12
-3.190496311589186E-09 3.199205012016648E-09 4.354294702579864E-12
4.783457741019959E-09 -4.796377406357522E-09 -6.459832668781473E-12
-9.546769264012767E-09 9.572321491013724E-09 1.277611350047891E-11
(закрита система 11 вузлів Чебишова, $\varepsilon = 10^{-3}$).

Таблиця (апроксимация першої похідної повною раціональною функцією)
3.623459310375665E-10 -3.625679756424915E-10 -1.110223024625157E-13
-5.760218968475783E-10 5.753264531449531E-10 -3.477218513125990E-13
-2.808888677208188E-10 2.808684396171657E-10 -1.021405182655144E-14
-1.171212016259915E-10 1.171166497115905E-10 -2.220446049250313E-15
2.303091051203410E-11 -2.303135460124395E-11 -2.220446049250313E-16
-1.544053773727683E-11 1.546784922368261E-11 1.365574320288943E-14
3.680156179797223E-11 -3.700872941436728E-11 -1.035838081975271E-13
1.823596829098051E-11 -1.815136929650407E-11 4.229949723821846E-14
-1.152689055317069E-11 1.141720051833772E-11 -5.484501741648273E-14
7.733842455337481E-10 -7.586636874279407E-10 7.360223541752475E-12
1.984634678819930E-11 -1.974398422532886E-11 5.118128143521972E-14
(відкрита сист. 11 вузлів Чебишова, 11 основн., 10 додатк. вузлів $\varepsilon = 10^{-9}$).

Таблиця (апроксимация регулярного інтеграла)

2.810390808960506E-13 -2.833983048233790E-13 -1.179611963664229E-15

(замкнута система 11 вузлів з сталим кроком, $\varepsilon = 10^{-9}$).

Таблиця (апроксимація інтеграла швидко осцилюючої функції)

(-2.625882844498051E-011, -1.758554413200386E-011)

(2.620520467289111E-011, 1.759775658527474E-011)

(-2.681188604469753E-014, 6.106226635438361E-015)

(замкнута система 11 вузлів Чебишова, $\varepsilon = 10^{-9}$).

Таблиця (апроксимація сингулярного інтеграла)

2.556982159340748E-07 -2.556980418511046E-07 8.704148513061227E-14

(замкнута система 11 вузлів Чебишова, $\varepsilon = 10^{-7}$).

Таблиця (метод типу Крилова, система 2-х рівнянь)

x_i похибки двостор. набл. для y_1 похибки двостор. набл. для y_2

0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	2.82104E-09	-2.82103E-09	-2.70674E-10	2.70684E-10
0.2	2.70752E-09	-2.70752E-09	-5.37711E-10	5.37719E-10
0.3	2.65291E-09	-2.65290E-09	-8.08922E-10	8.08930E-10
0.4	2.55449E-09	-2.55448E-09	-1.06795E-09	1.06796E-09
0.5	2.43770E-09	-2.43769E-09	-1.31903E-09	1.31904E-09
0.6	2.29142E-09	-2.29141E-09	-1.55413E-09	1.55414E-09
0.7	2.12840E-09	-2.12839E-09	-1.77825E-09	1.77825E-09
0.8	1.93132E-09	-1.93131E-09	-1.97226E-09	1.97226E-09
0.9	1.76942E-09	-1.76941E-09	-2.21373E-09	2.21373E-09
1.0	1.87339E-11	-1.87296E-11	1.20240E-11	-1.20309E-11

Таблиця (інтерполяційні методи Адамса)

-1.425179418923506E-12 1.426594953279903E-12 7.077671781985373E-16
 -1.884048472788891E-13 1.877387134641140E-13 -3.330669073875470E-16
 -1.417699291295094E-12 1.418809514319719E-12 5.551115123125783E-16
 -2.590150316450490E-13 2.584599201327364E-13 -2.220446049250313E-16
 -1.406569305473226E-12 1.407596261771005E-12 4.996003610813204E-16
 -3.289590821964339E-13 3.284039706841213E-13 -2.220446049250313E-16
 -1.392025383850637E-12 1.392774784392259E-12 3.885780586188048E-16
 -3.981259766305811E-13 3.976818874207311E-13 -2.220446049250313E-16
 -1.373678948368706E-12 1.374733660242100E-12 5.551115123125783E-16
 -4.662936703425657E-13 4.658495811327157E-13 -2.220446049250313E-16
 -1.351974088237284E-12 1.353250844715603E-12 6.106226635438361E-16
 -5.333511410299252E-13 5.329070518200751E-13 -2.220446049250313E-16
 -1.327160603636912E-12 1.328159804359075E-12 4.996003610813204E-16
 -5.989653217852720E-13 5.986322548778844E-13 -2.220446049250313E-16
 -1.298905427660202E-12 1.299738094928671E-12 3.885780586188048E-16

(система двох рівнянь, замкнута система 11 вузлів з сталим кроком,

11-вузлові інтерполяційні формули Адамса, $\varepsilon = 10^{-7}$).

Таблиця (метод Рунге - Кутта 4-го порядку)

$$y' = 2xy, y(0) = 1 (y(x) = \exp(x^2))$$

0.0000000000000000E+00	0.0000000000000000E+00	0.0000000000000000E+00
3.283295841678413E-04	-3.283287491653297E-04	4.175011447671295E-10
3.316260722012743E-04	-3.316172252685323E-04	4.423466259950715E-09
3.559690034289353E-04	-3.559325529585156E-04	1.822523532091225E-08
4.046518965192814E-04	-4.045371134777653E-04	5.739152064698771E-08
4.837628757285994E-04	-4.834408251379596E-04	1.610252953199165E-07
6.031840112672437E-04	-6.023439654219143E-04	4.200229226647423E-07
7.782565032570243E-04	-7.761914190886898E-04	1.032542084056232E-06
1.032472606125934E-03	-1.027648587311969E-03	2.412009407093407E-06
1.401802920933282E-03	-1.391010060838749E-03	5.396430047266421E-06
1.941684911910713E-03	-1.918378760895845E-03	1.165307550721195E-05

(відрізок $[0, 1]$, крок інтегрування $h = 0.1$, $\varepsilon = 10^{-1}$).

Таблиця (інтегральне рівняння Фредгольма другого роду)

0.0000000000000000E+00	0.0000000000000000E+00	0.0000000000000000E+00
-3.954736538247516E-11	3.954703231556778E-11	-1.110223024625157E-16
-1.154385476098696E-10	1.154374373868450E-10	-5.551115123125783E-16
-2.215251315718092E-10	2.215226890811550E-10	-1.221245327087672E-15
-3.492123257231583E-10	3.492086619871770E-10	-1.887379141862766E-15
-4.881559600988794E-10	4.881508530729661E-10	-2.553512956637860E-15
-6.270994834522980E-10	6.270929331364528E-10	-3.330669073875470E-15
-7.547868996482521E-10	7.547787950201723E-10	-4.107825191113079E-15
-8.608732615655867E-10	8.608641577367848E-10	-4.551914400963142E-15
-9.367642217483763E-10	9.367545628080620E-10	-4.884981308350689E-15
-9.763118091754563E-10	9.763014841013273E-10	-5.107025913275720E-15

(замкнута система 11 вузлів Чебишова, $\varepsilon = 10^{-7}$).

Таблиця (інтегральне рівняння Вольтерра другого роду)

0.0000000000000000E+00	0.0000000000000000E+00	0.0000000000000000E+00
5.959445437131450E-11	-5.960071325361582E-11	-3.136380044566067E-15
9.997633276803697E-11	-9.998701866464899E-11	-5.329070518200751E-15
1.603907007208250E-10	-1.604077426442529E-10	-8.548717289613705E-15
2.097776952147967E-10	-2.098004547868015E-10	-1.137978600240785E-14
2.744879878946449E-10	-2.745170757378901E-10	-1.454392162258955E-14
3.293695316486378E-10	-3.294052808300307E-10	-1.787459069646502E-14
4.232368899792505E-10	-4.232829642347724E-10	-2.298161660974074E-14
4.327382896462950E-10	-4.327842528795145E-10	-2.298161660974074E-14
1.064792476412890E-09	-1.064855648102991E-09	-3.164135620181696E-14
-2.29216101654828E-08	2.292156309202653E-08	-2.353672812205332E-14

(замкнута система 11 вузлів з сталим кроком, $\varepsilon = 10^{-6}$).

Таблиця (крайова диференціальна задача для рівняння 2-го порядку)

-1.551467769811410E-07	1.550575713382685E-07	-4.460276592510581E-11
-1.476909876618748E-07	1.476014872547893E-07	-4.475020354277603E-11

-1.139512677550414E-07 1.138615395301912E-07 -4.486411242510258E-11
-6.613026859447757E-08 6.604013047528667E-08 -4.506905959544838E-11
-7.257943579475068E-09 7.167347604308816E-09 -4.529798758312609E-11
5.902652233658046E-08 -5.911764144883591E-08 -4.555955612772777E-11
1.286092303764974E-07 -1.287008795092248E-07 -4.582445534140334E-11
1.970145928620326E-07 -1.971067173922592E-07 -4.606226511327804E-11
2.595528769688826E-07 -2.596454284908845E-07 -4.627564997861100E-11
3.115760436323001E-07 -3.116688640503185E-07 -4.641020900919557E-11
3.489510109755400E-07 -3.490440856346311E-07 -4.653721852321269E-11
3.556142929017625E-07 -3.557072734139410E-07 -4.649014506696858E-11

(замкнута система 12 вузлів Чебишова, $\varepsilon = 10^{-8}$).

Таблиця (крайова інтегро-диференціальна задача типу Фредгольма для
рівняння (2, 1)-го порядку)

7.527258816253379E-10 -7.457257034104714E-10 3.500089107433269E-12
7.831986170714345E-10 -7.762301912350722E-10 3.484323940483591E-12
8.417493368995110E-10 -8.349561042564346E-10 3.396616321538204E-12
9.210410212290299E-10 -9.145362245277511E-10 3.252509372941859E-12
1.006166483463744E-09 -1.000140636975289E-09 3.012923244227750E-12
1.076183142600939E-09 -1.070848298923011E-09 2.667421838964401E-12
1.111205127912740E-09 -1.106756464253067E-09 2.224220807534039E-12
1.102456348434089E-09 -1.099011992522492E-09 1.722177955798543E-12
1.058864107505997E-09 -1.056381648822935E-09 1.241229341530925E-12
1.004625271860959E-09 -1.002928851079332E-09 8.482103908136196E-13
9.681575541264920E-10 -9.668474909574343E-10 6.550315845288424E-13

(замкнута система 11 вузлів Чебишова, $\varepsilon = 10^{-7}$).

Таблиця (крайова інтегро-диференціальна задача типу Вольтерра для
рівняння (2, 1)-го порядку)

-4.505744888305685E-09 4.417942456313995E-09 -4.390132701814764E-11
-4.647376039557116E-09 4.559301158835183E-09 -4.403744036096668E-11
-4.936483444240025E-09 4.848218049247066E-09 -4.413269749647952E-11
-5.346276976680997E-09 5.257652535561874E-09 -4.431233158186387E-11
-5.860383955891280E-09 5.771360278572502E-09 -4.451194968169148E-11
-6.429970778043526E-09 6.340482361366639E-09 -4.474420833844306E-11
-7.094581144784229E-09 7.004610891314655E-09 -4.498512673478672E-11
-7.676320468164022E-09 7.585906347529203E-09 -4.520694929510682E-11
-8.360667491658091E-09 8.269838813745878E-09 -4.541433895610680E-11
-8.793036521126396E-09 8.701934062216310E-09 -4.555111843274062E-11
-9.260282096690275E-09 9.168915848789538E-09 -4.568323497267102E-11
-9.382108867583838E-09 9.290820113250220E-09 -4.564437716680914E-11

(замкнута система 12 вузлів Чебишова, $\varepsilon = 10^{-3}$).

Формули (2) і відповідні їм методи побудовано збуренням значень
функції лише в крайніх вузлах. Можна побудувати аналогічні за власти-

востями формули та методи шляхом збурення цих значень у більшій кількості вузлів, а то й в усіх вузлах. Так, за допомогою многочленних колокант будусмо двосторонні наближення функції f у вигляді

$$\hat{L}_n(x; f) = \sum_{j=0}^n \omega_j(x) f_j (1 + \varepsilon_j (-1)^j), \quad \check{L}_n(x; f) = \sum_{j=0}^n \omega_j(x) f_j (1 - \varepsilon_j (-1)^j). \quad (5)$$

(множник $(-1)^j$ можна замінити одиницею). Невідомі збурення ε_j можна знаходити методом колокації в заданих точках $\bar{x}_i$ відрізка $[x_0, x_n]$ або методом найменших квадратів. У першому випадку матимемо систему

$$\sum_{j=0}^n \varepsilon_j \omega_j(\bar{x}_i) f_j = \delta(\bar{x}_i), \quad i = \overline{0, n}, \quad \delta(x) = f(x) - L_n(x; f),$$

у другому випадку – систему

$$\sum_{j=0}^n \varepsilon_j f_j f_i \int_a^b \rho(x) \omega_i(x) \omega_j(x) dx = f_i \int_a^b \rho(x) \delta(x) \omega_i(x) dx, \quad i = \overline{0, n}.$$

Нижче наведено приклад за першим способом збурення в усіх вузлах.

Талиця (апроксимації функції многочленом зі збуренням в усіх вузлах)
-3.740652232409047E-11 3.744515808534743E-11 1.931788062847772E-14
5.900613331277782E-12 -5.936140468065787E-12 -1.776356839400250E-14
-2.549960242959060E-12 2.582156710673189E-12 1.620925615952729E-14
1.607602939657227E-12 -1.640465541186131E-12 -1.643130076445232E-14
-1.276756478318930E-12 1.308952946033060E-12 1.598721155460225E-14
1.213251721310371E-12 -1.244560010604800E-12 -1.554312234475219E-14
-1.362243651215067E-12 1.391553539065171E-12 1.465494392505207E-14
1.833200258261058E-12 -1.863842413740713E-12 -1.554312234475219E-14
-3.147260230207394E-12 3.176570118057498E-12 1.465494392505207E-14
8.252509786643714E-12 -8.275158336346067E-12 -1.154631945610163E-14

(замкнута система 11 вузлів Чебишова).

Принагідно зауважимо, що для лінійної системи

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad m < n \vee m = n \vee m > n, \quad (6)$$

системи

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} (1 - \varepsilon_j)^{-1} \hat{x}_j = b_i, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} (1 + \varepsilon_j)^{-1} \check{x}_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (7)$$

теж являються симетричними двосторонніми. Дійсно, співставлення (6) з (7) показує, що

$$\hat{x}_j = x_j (1 - \varepsilon_j), \quad \check{x}_j = x_j (1 + \varepsilon_j), \quad x_j = (\hat{x}_j + \check{x}_j) / 2,$$

тобто розв'язки систем (7) являються повністю симетричними двосторонніми наближеннями розв'язків системи (6).

Надійшла до редакції 21.04.2005

УДК 529.3

Василь Г. Карнаухов,
Тетяна В. Карнаухова,
Віктор М. Нікітенко,
Олена В. П'ятецька

Vasyl G. Karnaukhov,
Tatyana V. Karnaukhova,
Victor N. Nikitenko,
Olena V. Pyatetska

Вплив температури дисипативного розігріву на демпфірування вимушених резонансних коливань круглої пластини з використанням п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів

Influence of the temperature of dissipative heating on the damping of forced resonant vibrations of circular plate with the use of piezoelectrical sensors and actuators.

Досліджується вплив температури дисипативного розігріву на демпфірування вимушених резонансних коливань круглої пластини за допомогою п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів при дії на неї нормального гармонічного за часом тиску

The influence temperature of the dissipative heating on the damping of forced resonant vibrations of circular plate with the use of piezoelectric sensors and actuators under the action of a normal harmonic pressure is investigated

Ключові слова: дисипативний розігрів, сенсор, актуатор, температура, демпфірування

Key words: dissipative heating, sensor, actuator, temperature, damping

Круглі пластини знаходять широке застосування в різних галузях сучасної техніки. Стаціонарні та нестаціонарні коливання є найбільш розповсюдженими режимами їх роботи. Для зменшення амплітуди таких коливань можуть ефективно використовуватись активні методи демпфірування [4,9,11,12]. Перший з таких методів полягає в тому, що в структуру пластини вводяться п'єзоелектричні сенсори та актуатори. Сенсори дають інформацію про амплітуду коливань, а до актуаторів підводиться різниця потенціалів, пропорційна першій похідній за часом від різниці потенціалів сенсора. В результаті змінюються дисипативні характеристики пластини. Другий метод полягає в тому, що до актуатора підводиться різниця потенціалів відповідної амплітуди й фази, яка компенсує найбільш енергоємні перші моди, що приводить до суттєвого зменшення інтенсивності коливань. На ефективність активного демпфірування коливань можуть суттєво вплинути температурні ефекти, зокрема температурна залежність характеристик пасивних та п'єзоактивних матеріалів сенсорів та актуаторів, а також температурні деформації й напруження. При цьому зміна температури елемента може бути викликана взаємодією з зовнішнім середовищем і дисипативним розігрівом, обумовленим гістерезисними втратами в матеріалах [2,3,5]. Температурні ефекти особливо важливі для пластин із полімер-

них матеріалів та композитів на їх основі, які дуже чутливі до зміни температури. В [5] досліджено вплив температури дисипативного розігріву на показники круглого сенсора, розміщеного на круглій пластині, а в [4] – вплив температури на демпфірування коливань круглої пластини за допомогою другого з вказаних вище підходів.

Метою даної роботи є дослідження впливу температури дисипативного розігріву на демпфірування вимушених резонансних коливань круглої пластини за допомогою першого з вказаних вище підходів, коли одночасно використовуються і сенсори, і актуатори. Такі дослідження в літературі відсутні.

Розглянемо суцільну круглу пластину радіусом a і товщиною h_0 , на поверхнях якої розміщено круглі сенсори з протилежною поляризацією малої товщини h_1 . На пластину діє рівномірно розподілений поверхневий тиск, який змінюється з часом за гармонічним законом. Матеріал пластини вважається в'язкопружним з комплексними характеристиками, які залежать від температури. Із-за гістерезисних втрат в цьому матеріалі при гармонічному деформуванні температура пластини підвищується. Втрати в п'єзоактивному матеріалі і вплив сенсора та актуатора на жорсткісні характеристики пластини не враховуються із-за їх малої товщини порівняно з товщиною пластини, хоча такий вплив легко врахувати простою модифікацією виразів для згинної жорсткості [3]. При моделюванні термомеханічної поведінки пластини використовуються гіпотези Кірхгофа-Лява, а температура дисипативного розігріву вважається постійною по товщині пластини. В результаті цих припущень термомеханічна поведінка пластини описується такою нелінійною системою диференціальних рівнянь [2,4]:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d^2}{d\rho^2} \left[D \left(\rho \frac{d^2 w}{d\rho^2} + \nu \frac{dw}{d\rho} \right) \right] + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[D \left(\nu \frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right) \right] -$$

$$(\gamma h) a^4 \omega^2 w + a^4 p_0(\rho) + a^2 \left(\frac{d^2 M_0}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dM_0}{d\rho} \right) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d^2 T}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dT}{d\rho} - \frac{2\alpha a^2}{(\lambda h)} (T - T_C) + \frac{\omega E^*(T) h^3}{24a^2(1-\nu^2)(\lambda h)} \times$$

$$\times \left[\left(\frac{d^2 w'}{d\rho^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 w''}{d\rho^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{dw'}{d\rho} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{dw''}{d\rho} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{1}{\rho} \frac{dw'}{d\rho} \frac{d^2 w'}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw''}{d\rho} \frac{d^2 w''}{d\rho^2} \right) \right] = 0. \quad (2)$$

Тут w – поперечний прогин, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – згинна жорсткість, γ – густина матеріалу, ω – частота коливань, E, ν – комплексний модуль та коефіцієнт Пуасона, T – температура дисипативного розігріву, α – коефіцієнт те-

плообміну з зовнішнім середовищем з температурою T_c , λ - коефіцієнт теплопровідності. Нехай контур пластини жорстко закріплений, а температура на ньому дорівнює T_c . Тоді механічні й теплові граничні умови матимуть вид

$$w = 0, \quad \frac{dw}{d\rho} = 0, \quad \text{при } \rho = 1, \quad (3)$$

$$T = T_c \quad \text{при } \rho = 1. \quad (4)$$

Будемо вважати, що нанесені на сенсор нескінченно тонкі електроди розімкнуті. Тоді різниця потенціалів, яку показує сенсор радіуса $\rho_1 = \frac{b}{a} < 1$ при коливаннях пластини, матиме вигляд:

$$V_s = - \frac{h_1(h_0 + h_1) \int_0^{\rho_1} \frac{d_{31}}{s_{11}(1-\nu)} \left(\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right) \rho d\rho}{2 \int_0^{\rho_1} \varepsilon_{33} (1 - k_p^2) \rho d\rho}. \quad (5)$$

Тут використані позначення монографій [1,2]. Якщо характеристики сенсора не залежать від температури, то вираз (5) приймає вигляд:

$$V_s = - \frac{h_1(h_0 + h_1)}{2} \frac{k_p^2}{d_{31}(1 - k_p^2)} \int_0^{\rho_1} \left(\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right) \rho d\rho. \quad (6)$$

Вираз (6) залишиться без зміни і в тому випадку, коли вважати, що характеристики сенсора залежать від осередненої по його площі температури. В подальшому будемо вважати, що ν - дійсна величина і не залежить від температури. В багатьох випадках можна вважати, що матеріал нестисливий, і тоді $\nu = 1/2$. Комплексний модуль пружності пов'язаний з модулем зсуву формулою $G = 2(1 + \nu)E$. В діапазоні температур $20^\circ\text{C} \leq \theta \leq 80^\circ\text{C}$ наведені в роботах [7,8] експериментальні дані для поліетилену про залежність дійсної та уявної частин модуля зсуву від температури θ можуть бути з досить високою точністю апроксимовані лінійним законом:

$$G = G' + iG'', \quad G' = G'_0 - G'_1 T, \quad G'' = G''_0 - G''_1 T, \\ G' = 968 - 8,69\theta, \quad G'' = 87,1 - 0,7\theta \quad (\text{МПа}) \quad (7)$$

Для введення додаткового демпфірування вимушених коливань використовується описана вище технологія, коли прикладена до актуатора різниця потенціалів V_a пропорційна швидкості зміни різниці потенціалів сенсора $\dot{V}_s$:

$$V_a = -G_s \dot{V}_s, \quad G_s = G G_e \quad (8)$$

При цьому в рівнянні руху появляється член, пропорційний швидкості зміни амплітуди зміщення. В (8) G_e - опір підсилювача, а G вибирається з умови найбільш швидкого затухання вільних коливань або суттєвого

зменшення вимушених коливань. Формула для заряду, яку фіксує сенсор при коротко-замкнених електродах, має вигляд:

$$q = \gamma_{31} (h_0 + h_1) \iint_{(S_1)} (\kappa_1 + \kappa_2) dx dy, \quad (9)$$

де h_0 - товщина пасивної пластини, h_1 - товщина п'єзоактивної пластини, S_1 - площа сенсора. При цьому з (6) маємо

$$\dot{V}_s = \frac{h_1 (h_0 + h_1) \gamma_{31}}{S_1 \gamma_{33}} \iint_{(S_1)} (\dot{\kappa}_1 + \dot{\kappa}_2) dx dy. \quad (10)$$

Якщо використати класичне співвідношення між різницею потенціалів V_s і зарядом q для діелектриків

$$q = \frac{V S_1 \gamma_{33}}{h_1}, \quad (11)$$

то формально з формули (9) одержимо формулу (10) і навпаки. При використанні формули

$$V_s = -G_s \frac{dq}{dt} \quad (12)$$

матимемо

$$V_s = -G_s \gamma_{31} (h_0 + h_1) \iint_{(S_1)} (\dot{\kappa}_1 + \dot{\kappa}_2) dx dy. \quad (13)$$

В подальшому будемо використовувати саме це співвідношення, бо в ньому менше параметрів.

$$\text{В рівняннях руху (1) фігурує величина} \quad (14)$$

$$M_0 = B V_s, \quad B = (h_0 + h_1) \gamma_{31}.$$

З використанням (12), (13) матимемо

$$M_0 = -G_s \gamma_{31}^2 (h_0 + h_1)^2 \iint_{(S_1)} (\dot{\kappa}_1 + \dot{\kappa}_2) dx dy. \quad (15)$$

Для нестационарних коливань $w = A(t) \tilde{w}(x, y)$. Для стаціонарних коливань $A(t) = A e^{i\omega t}$. При цьому для нестационарних і стаціонарних коливань відповідно матимемо формули

$$M_0 = -m_0 F \dot{A}(t), \quad M_0 = -m_0 F A e^{i\omega t}. \quad (16)$$

Тут

$$m_0 = G_s \gamma_{31}^2 (h_0 + h_1)^2, \quad (17)$$

$$F = \iint_{(S_1)} \Delta \tilde{w} dS. \quad (18)$$

Величина M_0 фігурує у варіаційному принципі

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ (D' + i D'') \left[\left(\frac{d^2 w}{d\rho^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right)^2 + \frac{2\nu}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \frac{d^2 w}{d\rho^2} \right] - (\gamma h) a^4 \omega^2 w^2 - 2 p_0(r) a^4 \omega - \int_0^1 M_0 \Delta w \right\} \rho d\rho,$$

який еквівалентний розв'язку механічної задачі для круглої пластини.

Для визначення M_0 потрібно обчислити інтеграл F по площі сенсора, який залежить від граничних умов і апроксимації прогину. Для круглої пластини з жорстким закріпленням торця покладемо

$$\tilde{w}(\rho) = (1 - \rho^2)^2. \quad (19)$$

А тому

$$F = 8\pi\rho_1^2(1 - \rho_1^2). \quad (20)$$

Нехай температура на контурі задана і дорівнює T_C . Апроксимуємо температуру $\theta = T - T_C$ виразом

$$\theta = T_0(1 - \rho^2). \quad (21)$$

Застосовуючи до розв'язку задачі (1) варіаційний метод або метод Бубнова-Гальоркіна, для параметра T_0 матимемо:

$$T_0 = \frac{C_1 x}{C_0 + C_2 x}, \quad (22)$$

де

$$C_0 = 1 + \frac{1}{6}\psi_4, C_1 = (1 + \frac{\nu}{12})\psi_0, C_2 = (\frac{1}{6} + \frac{\nu}{10})\psi_1, \quad (23)$$

Тут введено позначення

$$\psi_0 = \frac{8\omega}{\lambda h a^2} D_0'', \psi_1 = \frac{8\omega}{\lambda h a^2} D_1'', \psi_4 = \frac{2\alpha a^2}{\lambda h}. \quad (24)$$

За допомогою стандартної варіаційної техніки з (18) знайдемо вираз для комплексної амплітуди коливань:

$$A = \frac{P_0}{A_1 + iA_2}, \quad (25)$$

де

$$A_1 = B_1 - b_1 T_1, A_2 = \hat{B}_2 - b_2 T_1, B_1 = \frac{64D_0'}{a^4} - \frac{3}{5}(\gamma h)\omega^2, B_2 = \frac{64D_0''}{a^4}, \\ b_1 = \frac{96D_1'}{a^4}(\frac{1}{4} + \frac{\nu}{12}), b_2 = \frac{96D_1''}{a^4}(\frac{1}{4} + \frac{\nu}{12}), \hat{B}_2 = B_2 + G_2. \quad (26)$$

З (25) знайдемо такий вираз для квадрата амплітуди коливань:

$$x = \frac{q_0^2}{(B_1^2 + B_2^2) - 2(b_1 B_1 + b_2 \hat{B}_2) T_0 + (b_1^2 + b_2^2) T_0^2}. \quad (27)$$

Виключаючи x з (22), (27), матимемо кубічне рівняння для визначення T_0 :

$$T_0^3 - d_2 T_0^2 + d_1 T_0 - d_0 = 0, \quad (28)$$

де

$$d_0 = \frac{C_1 q_0 / C_0}{b_1^2 + b_2^2}, d_1 = \frac{B_1^2 + \hat{B}_2^2 + C_2 q_0^2 / C_0}{b_1^2 + b_2^2}, d_2 = 2 \frac{b_1 B_1 + b_2 \hat{B}_2}{b_1^2 + b_2^2}. \quad (29)$$

Введемо безрозмірну температуру

$$y = T_0 / T_C. \quad (30)$$

Тоді з (28) матимемо кубічне рівняння для y :

$$y^3 - e_2 y^2 + e_1 y - e_0 = 0, \quad (31)$$

де

$$e_0 = \frac{d_0}{T_c^3}, \quad e_1 = \frac{d_1}{T_c^2}, \quad e_2 = \frac{d_2}{T_c}. \quad (32)$$

Додаткове затухання характеризується величиною G_2 , яка розраховується або з варіаційного принципу або методом Бубнова-Гальоркіна з використанням наведених вище виразів для M_0 .

Застосовуючи ці методи, для круглої пластини з жорстким закріпленням торця знаходимо

$$G_2 = \frac{24}{a^2} G_s \gamma^2 \rho_1^2 (h_0 + h_1)^2 \rho_1^2 (1 - \rho_1^2) F. \quad (33)$$

Таким чином, крім затухання, яке породжується гістерезисними втратами в матеріалах, за рахунок G_2 появляється додаткове затухання, яким можна керувати в досить широких межах. При розрахунку температури дисипативного розігріву у виразі для дисипативної функції потрібно використовувати вираз для амплітуди коливань з врахуванням цього додаткового затухання.

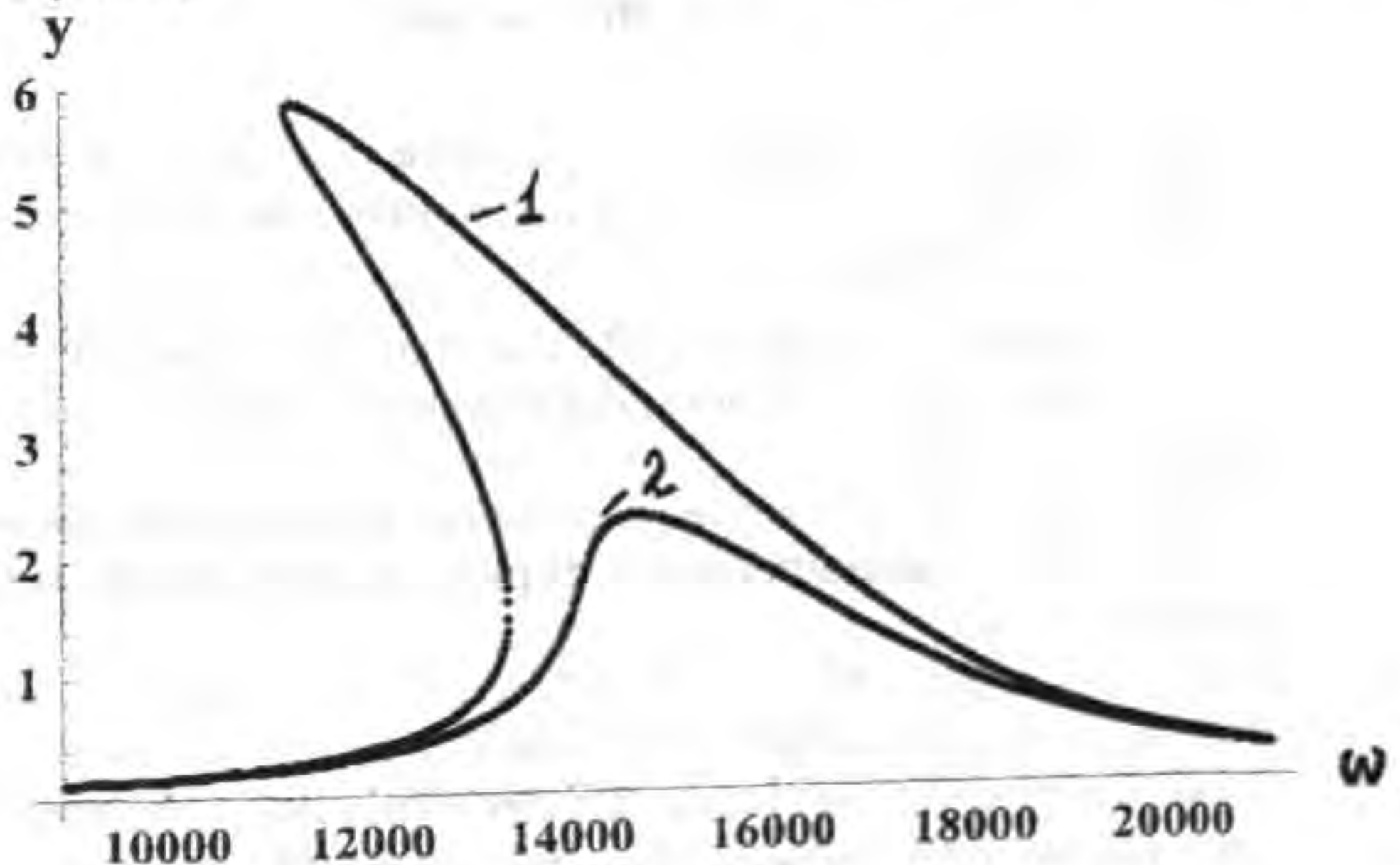


Рис.

Для ілюстрації впливу параметру G_2 на демпфірування коливань поліетиленової пластини радіуса $a = 0,0536 \text{ м}$ і товщиною $h_0 = 0,01 \text{ м}$ на рисунку представлено температурно – частотні характеристики для різних значень цього параметру при фіксованому значенні амплітуди навантаження $p_0 = 10,61 \text{ МПа}$. Коефіцієнт теплообміну вибирався рівним

$\alpha = 0,5 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{град}$, а коефіцієнт теплопровідності для поліетилену $\lambda = 0,47 \text{ Вт/м} \cdot \text{град}$. Тут кривій 1 відповідає випадок, коли $G_2 = 0$, тобто коливанням пластини без додаткового затухання. Кривій 2 відповідає випадок, коли $G_2 = B_2$. Як бачимо, при такому виборі параметра оберненого зв'язку має місце різке зниження температури дисипативного розігріву, при цьому залежність температури від частоти стає однозначною.

Крива 1 показує типову для нелінійних систем м'яку температурно-частотну характеристику, коли в деякому частотному діапазоні має місце два стійких температурних стани і один нестійкий температурний стан. Аналогічний характер мають і криві залежності амплітуди від частоти. Для вибраного рівня навантаження температура в центрі пластини на частоті лінійного резонансу піднімається на 40°C . Таким чином, додаткове затухання, яке появляється за рахунок одночасного використання сенсорів та актуаторів приводить не тільки до кількісних змін температурно-частотних та амплітудно-частотних характеристик, а і якісно змінює характер залежності температури і амплітуди від частоти.

Література

1. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. - Т.5. - К.: Наук. думка, 1989. - 290 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5-ти т.; Т.5).
2. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Электротермовязкоупругость. - К.: Наук. думка, 1988. - 328с. - (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5-ти т.; Т.4).
3. Карнаухов В.Г. Тепловое разрушение полимерных элементов конструкций при моногармоническом деформировании//Прикл. механика. - 2004.- 40, №3. С. 1-46.
4. Карнаухов В.Г., Козлов В.І, П'ятецька О.В. Активне демпфування осесиметричних резонансних коливань круглої пластини за допомогою п'єзоелектричних включень //Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. -2003. -№2. - С.81-85.
5. Карнаухов В.Г., Карнаухова Т.В., П'ятецька О.В. Вплив температури дисипативного розігріву на показники п'єзоелектричного сенсора при вимушених осесиметричних коливаннях круглої пластини//Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. -2004. -№1. - С.107-113.
6. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. - К.: Наук. думка, 1970. - 307с.
7. Нестеренко Н.П., Червинко О.П., Сенченков И.К. Моделирование ультразвукового разогрева структурных элементов полимерных волокнистых

УДК 539.3

Ірина В. Лебедева

Про розклад за власними функціями задачі для зрізаного двопорожнинного гіперboloїда обертання

Серія: фізико-математичні науки

Методом Тітчмарша отримано формули розкладу довільної функції за власними функціями мішаної граничної задачі теорії потенціалу для зрізаного двопорожнинного гіперboloїда обертання. Представлено узагальнення інтегрального перетворення Мелера-Фока.

Ключові слова: власні функції, мішана задача, інтегральне перетворення

Iryna V. Lebedyeva

To the Expansion by Eigenfunctions of the Problem for the Parted Hyperboloid of Revolution

Series: Physics & Mathematics Sciences

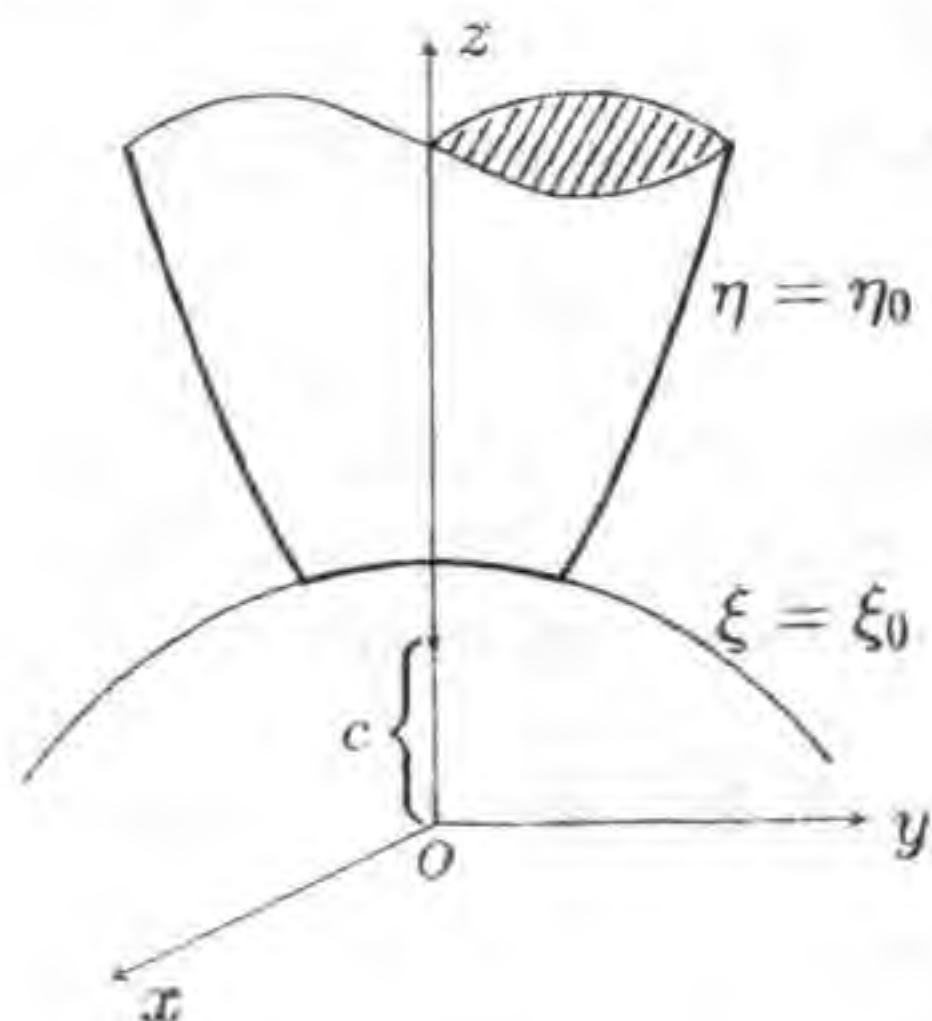
The expansion to an arbitrary function by eigenfunctions of the potential theory mixed boundary problem for the parted blunt-nosed hyperboloid of revolution is found by use of the Titchmarsh method. The generalization of the Mehler-Fok integral transform is presented.

Key Words: eigenfunctions, mixed boundary problem, integral transform

*E-mail: Lebedevai@ukr.net

1. Вступ. Аналіз класичних інтегральних перетворень математичної фізики з точки зору граничних задач теорії потенціалу показує, що інтервали інтегрування, на яких діють ці перетворення, збігаються з повними інтервалами зміни відповідних криволінійних координат. Тобто перетворення стосуються граничних задач для областей, обмежених поверхнями однієї з трьох координат. Побудова розв'язків для областей, утворених перетином різних сімей координатних поверхонь, приводить до узагальнень класичних перетворень. Зокрема, при розв'язанні задачі теорії потенціалу для двопорожнинного гіперboloїда обертання за допомогою інтегрального перетворення Мелера-Фока знайдено формули розкладу довільної функції $f(\xi)$ на інтервалі $(0; \infty)$ за власними функціями рівняння Лежандра [1,2]. Вирішення граничної задачі для зрізаного двопорожнинного гіперboloїда обертання слід почати з виведення розкладу функції $f(\xi)$ на інтервалі $(\xi_0; \infty)$ за власними функціями цього рівняння. Вперше ця задача з нульовими граничними умовами першого та другого роду на поверхні зрізу була розв'язана в роботах Н.А.Белової, Я.С.Уфлянда [3,4] та А.Ф.Улітка [5,6]. У даній роботі подано розв'язок задачі за нульових граничних умов третього роду.

2. Мішана задача теорії потенціалу для зрізаного двопорожнинного гіперболоїда обертання. До найважливіших ортогональних криволінійних координат, для яких рівняння Лапласа допускає відокремлення змінних, належить система еліпсоїдальних координат (ξ, η, φ) , пов'язаних з прямокутними координатами (x, y, z) співвідношеннями [6, 7]



$$\begin{aligned}x &= c \operatorname{sh} \xi \sin \eta \cos \varphi, \\y &= c \operatorname{sh} \xi \sin \eta \sin \varphi, \\z &= c \operatorname{ch} \xi \cos \eta\end{aligned}\quad (1)$$

$$(0 \leq \xi < \infty, 0 \leq \eta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

Масштабні множники Ламе у цій системі координат дорівнюють

$$\begin{aligned}h_\xi &= h_\eta = \frac{c}{\sqrt{2}} (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^{\frac{1}{2}}, \\h_\varphi &= c \operatorname{sh} \xi \sin \eta.\end{aligned}\quad (2)$$

У випадку осесиметричного розподілу потенціалу рівняння Лапласа в координатах (1) має вигляд

Рис. 1

$$\frac{1}{\operatorname{sh} \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\operatorname{sh} \xi \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\sin \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sin \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (3)$$

Граничну умову для цього рівняння формулюємо так

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} + h\theta = 0 \quad (\xi = \xi_0, 0 \leq \eta < \eta_0), \quad (4)$$

$$\theta = f(\xi) \quad (\eta = \eta_0, \xi_0 < \xi < \infty).$$

Легко довести, що якщо шукати частинні розв'язки рівняння (3) виду

$$\theta(\xi, \eta) = u(\xi)v(\eta), \quad (5)$$

то змінні можна відокремити і дістати для знаходження кожного із співмножників звичайні диференціальні рівняння

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u}{d\xi^2} + \operatorname{cth} \xi \frac{du}{d\xi} - \lambda(\lambda + 1)u &= 0, \\ \frac{d^2 v}{d\eta^2} + \operatorname{ctg} \eta \frac{dv}{d\eta} + \lambda(\lambda + 1)v &= 0,\end{aligned}\quad (6)$$

де λ – параметр відокремлення. У роботах [1, 6] показано, що розв'язання поставленої задачі можливе, якщо вибрати $\lambda = -1/2 + i\tau$ ($0 \leq \tau \leq \infty$).

У відповідності до цього перше рівняння (6) набуває форми

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + \operatorname{cth} \xi \frac{du}{d\xi} + \left(\tau^2 + \frac{1}{4} \right) u = 0, \quad (7)$$

а його розв'язок записуються через функції Лежандра [1]

$$u(\xi) = a_1 P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \xi) + b_1 Q_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \xi), \quad (8)$$

де a_1, b_1 – сталі. Ці частинні розв'язки є вихідними для побудови загального розв'язку граничної задачі (3), (4).

3.Метод Тітчмарша. У роботі [5] розклад довільної функції $f(\xi)$ на інтервалі $(\xi_0; \infty)$ за власними функціями рівняння (8) було здійснено методом Тітчмарша [8]. Нижче викладено основні положення теорії Тітчмарша згідно з [5, 6].

Розглядається задача про розклад довільної функції за власними функціями рівняння

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [\lambda - q(x)]y = 0 \quad (9)$$

в інтервалі $(0; \infty)$. Дійсна функція $q(x)$ вважається неперервною і обмеженою на будь-якому скінченному інтервалі $(0; N)$; нульова точка є неособливою точкою рівняння (9). Доводиться, що власні значення параметра λ можуть бути лише дійсними. Природа спектру залежить від поведінки функції $q(x)$ на нескінченності. Зокрема, якщо $q(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, то додатна піввісь $(0; \infty)$ заповнюється точками неперервного спектру, а на від'ємній півосі $(-\infty, 0)$ можливий лише скінчений дискретний спектр (його може взагалі не бути).

Параметр λ у рівнянні (9) покладають рівним комплексному числу $\lambda = \sigma + i\delta$. Вводять до розгляду функцію $\Phi(x, \lambda)$, яка задовольняє неоднорідне рівняння

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} + [\lambda - q(x)]\Phi = f(x). \quad (10)$$

Розв'язок для $\Phi(x, \lambda)$ записують через два лінійно незалежних розв'язки однорідного рівняння у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi(x, \lambda) = & [\mathcal{G}(x, \lambda) + m(\lambda)\varphi(x, \lambda)] \int_0^x \varphi(y, \lambda) f(y) dy + \\ & + \varphi(x, \lambda) \int_x^\infty [\mathcal{G}(y, \lambda) + m(\lambda)\varphi(y, \lambda)] f(y) dy, \end{aligned} \quad (11)$$

при цьому функції $\varphi(x, \lambda)$ і $\mathcal{G}(x, \lambda)$ на регулярному кінці інтервалу підпорядковані таким граничним умовам

$$\begin{aligned}\varphi(0, \lambda) &= \sin \alpha, \quad \varphi'(0, \lambda) = -\cos \alpha, \\ \mathcal{G}(0, \lambda) &= \cos \alpha, \quad \mathcal{G}'(0, \lambda) = \sin \alpha,\end{aligned}\tag{12}$$

де α – деяке дійсне число, $m(\lambda)$ – аналітична функція $\lambda = \sigma + i\delta$, регулярна у верхній півплощині. Для $m(\lambda)$ справедлива рівність

$$\int_0^\infty |\mathcal{G}(x, \lambda) + m(\lambda)\varphi(x, \lambda)|^2 dx = -\frac{\operatorname{Im}[m(\lambda)]}{\delta}.\tag{13}$$

Звідси випливає, що для змінного у верхній півплощині λ $\operatorname{Im}[m(\lambda)] < 0$, і вона не може мати кратних полюсів на дійсній осі. У конкретних випадках для визначення функції $m(\lambda)$ найчастіше використовується умова, що функція $\mathcal{G}(x, \lambda) + m(\lambda)\varphi(x, \lambda)$ належить $L^2(0; \infty)$ при довільному недійсному значенні параметра λ .

Розклад функції $f(x)$ можна дістати інтегруванням функції $\Phi(x, \lambda)$ по контурах, що розширюються, у комплексній площині λ . Стягуючи контур інтегрування до дійсної осі, на якій розташовані особливості функції $m(\lambda)$, дістанемо розклад у ряд або інтеграл за власними функціями. Зокрема, для загального сингулярного випадку доводиться гранична рівність

$$f(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \operatorname{Im} \left[-\frac{1}{\pi i} \int_{-R+i\delta}^{R+i\delta} \Phi(x, \lambda) d\lambda \right] \right\}.\tag{14}$$

Стягуючи контур до дійсної осі ($\delta \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow \sigma$), приходимо до формули розкладу у вигляді інтеграла

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, \lambda) [-\operatorname{Im} m(\lambda)] d\lambda \int_0^\infty \varphi(y, \lambda) f(y) dy.\tag{15}$$

Якщо $m(\lambda)$ має полюси на від'ємній півосі, то формула (15) доповнюється дискретною частиною розкладу і записується у вигляді

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \varphi(x, \lambda) [-\operatorname{Im} m(\lambda)] d\lambda \int_0^\infty \varphi(y, \lambda) f(y) dy + \\ &+ \sum_{n=0}^N r_n \varphi(x, \lambda_n) \int_0^\infty \varphi(y, \lambda_n) f(y) dy,\end{aligned}\tag{16}$$

де r_n – лишки функції $m(\lambda)$ у її полюсах.

Якщо функції $q(x)$, $f(x)$ належать $L(0; \infty)$ і $f(x)$ належить $L^2(0; \infty)$ то розклади (15), (16) збігаються за тих же умов, що і звичайний ряд Фур'є.

При цьому обмеження, накладені на $f(x)$, у багатьох випадках можна послабити.

4. Розклад функції на інтервалі $(\xi_0; \infty)$. Згідно з теорією Тітчмарша обидва лінійно незалежні розв'язки, що входять до частинного розв'язку (8), мають бути дійсними. Функція комплексного значка $P_{-1/2+i\tau}(\text{ch}\xi)$ є дійсною [1], а функція $Q_{-1/2+i\tau}(\text{ch}\xi)$ – комплексною. Тому, беручи до уваги співвідношення [7]

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\text{ch}\xi) = i \frac{\text{cth}\pi\tau}{\pi} [Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\text{ch}\xi) - Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(\text{ch}\xi)], \quad (17)$$

другий лінійно незалежний розв'язок введемо за формулою

$$L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\text{ch}\xi) = \frac{1}{\pi} [Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\text{ch}\xi) + Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(\text{ch}\xi)]. \quad (18)$$

Запишемо асимптотичні формули для цих розв'язків [5, 6]

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\text{ch}\xi) \sim 1, \quad L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\text{ch}\xi) \sim \frac{1}{\pi} \ln \frac{\text{ch}\xi + 1}{\text{ch}\xi - 1}, \quad \xi \rightarrow 0, \quad (19)$$

$$Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\text{ch}\xi) \sim \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+i\tau)}{\Gamma(1+i\tau)} e^{-\frac{\xi}{2}} e^{-i\tau\xi}, \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (20)$$

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\text{ch}\xi) \sim i \frac{\text{cth}\pi\tau}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\xi}{2}} \left[\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+i\tau)}{\Gamma(1+i\tau)} e^{-i\tau\xi} - \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-i\tau)}{\Gamma(1-i\tau)} e^{i\tau\xi} \right], \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (21)$$

$$L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\text{ch}\xi) \sim \frac{e^{-\frac{\xi}{2}}}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+i\tau)}{\Gamma(1+i\tau)} e^{-i\tau\xi} + \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-i\tau)}{\Gamma(1-i\tau)} e^{i\tau\xi} \right], \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (22)$$

Заміна

$$y(\xi) = \sqrt{\text{sh}\xi} u(\xi). \quad (23)$$

дає змогу перетворити рівняння (7) до стандартного вигляду (без першої похідної)

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \left(\lambda + \frac{1}{4 \text{sh}^2 \xi} \right) y = 0, \quad (24)$$

де $\lambda = \tau^2$ – комплексне число, що змінюється у верхній півплощині. Лінійно незалежними розв'язками рівняння (24) будуть функції

$$y_1(\xi) = \sqrt{\text{sh}\xi} P_{-\frac{1}{2}+i\sqrt{\lambda}}(\text{ch}\xi), \quad y_2(\xi) = \frac{\pi}{2} \sqrt{\text{sh}\xi} L_{-\frac{1}{2}+i\sqrt{\lambda}}(\text{ch}\xi). \quad (25)$$

Їх визначник Вронського дорівнює одиниці.

Згідно з граничними умовами (12), які для довільного значення кута α відповідають розв'язкові задач за нульових граничних умов третього роду (4), побудуємо функції Тітчмарша $\phi(\xi, \lambda)$, $\vartheta(\xi, \lambda)$:

$$\begin{aligned}\varphi(\xi, \lambda) &= -y_1(\xi, \lambda) \{y_2(\xi_0, \lambda) \cos \alpha + y_2'(\xi_0, \lambda) \sin \alpha\} + \\ &\quad + y_2(\xi, \lambda) \{y_1(\xi_0, \lambda) \cos \alpha + y_1'(\xi_0, \lambda) \sin \alpha\}, \\ \vartheta(\xi, \lambda) &= y_1(\xi, \lambda) \{y_2(\xi_0, \lambda) \sin \alpha - y_2'(\xi_0, \lambda) \cos \alpha\} - \\ &\quad - y_2(\xi, \lambda) \{y_1(\xi_0, \lambda) \sin \alpha - y_1'(\xi_0, \lambda) \cos \alpha\}.\end{aligned}\quad (26)$$

Загальний розв'язок рівняння (24) шукаємо у вигляді

$$\psi(\xi, \lambda) = \vartheta(\xi, \lambda) + m(\lambda)\varphi(\xi, \lambda). \quad (27)$$

Функцію $m(\lambda)$, введену до розгляду в (11), можна знайти з умови $\psi(\xi, \lambda) \in L^2(\xi_0, \infty) \quad \forall \lambda = \sigma + i\delta : \delta > 0$. Оскільки $\sqrt{\text{sh } \xi} Q_{-\frac{1}{2}+i\sqrt{\lambda}}(\text{ch } \xi) \in L^2(\xi_0, \infty) \quad \forall \lambda = \sigma + i\delta : \delta > 0$, то на підставі формули (20) можна стверджувати, що з точністю до множника розв'язок $\psi(\xi, \lambda)$ має збігатися з функцією $\sqrt{\text{sh } \xi} Q_{-\frac{1}{2}-i\sqrt{\lambda}}(\text{ch } \xi)$. Отже, комбінація функцій y_1 та y_2 , яка

поводиться на нескінченності як $e^{i\xi\sqrt{\lambda}}$, матиме вигляд

$$U(\xi, \lambda) = y_1(\xi, \lambda) - i\frac{2}{\pi} \text{cth } \pi\sqrt{\lambda} y_2(\xi, \lambda) = -i\frac{2}{\pi} \text{cth } \pi\sqrt{\lambda} \sqrt{\text{sh } \xi} Q_{-\frac{1}{2}+i\sqrt{\lambda}}(\text{ch } \xi) \quad (28)$$

Порівнюючи функції $\psi(\xi, \lambda)$ та $U(\xi, \lambda)$, дістанемо вираз для $m(\lambda)$

$$\begin{aligned}-m(\lambda) &= \frac{\left\{y_1' - i\frac{2}{\pi} \text{cth } \pi\sqrt{\lambda} y_2'\right\}_{\xi=\xi_0} \cos \alpha - \left\{y_1 - i\frac{2}{\pi} \text{cth } \pi\sqrt{\lambda} y_2\right\}_{\xi=\xi_0} \sin \alpha}{\left\{y_1' - i\frac{2}{\pi} \text{cth } \pi\sqrt{\lambda} y_2'\right\}_{\xi=\xi_0} \sin \alpha + \left\{y_1 - i\frac{2}{\pi} \text{cth } \pi\sqrt{\lambda} y_2\right\}_{\xi=\xi_0} \cos \alpha} = \\ &= \frac{\frac{d}{d\xi} \left\{\sqrt{\text{sh } \xi} Q_{-1/2-i\lambda}(\text{ch } \xi)\right\}_{\xi=\xi_0} \cos \alpha - \sqrt{\text{sh } \xi_0} Q_{-1/2-i\lambda}(\text{ch } \xi_0) \sin \alpha}{\frac{d}{d\xi} \left\{\sqrt{\text{sh } \xi} Q_{-1/2-i\lambda}(\text{ch } \xi)\right\}_{\xi=\xi_0} \sin \alpha + \sqrt{\text{sh } \xi_0} Q_{-1/2-i\lambda}(\text{ch } \xi_0) \cos \alpha}.\end{aligned}\quad (29)$$

Функція $m(\lambda)$ може мати полюси на дійсній від'ємній півосі, які знаходяться в нулях функції

$$\frac{d}{d\xi} \left\{\sqrt{\text{sh } \xi} Q_{-1/2-i\sqrt{\sigma+i\delta}}(\text{ch } \xi)\right\}_{\xi=\xi_0} \sin \alpha + \sqrt{\text{sh } \xi_0} Q_{-1/2-i\sqrt{\sigma+i\delta}}(\text{ch } \xi_0) \cos \alpha \quad (30)$$

при $\delta \rightarrow 0$. Асимптотичне та чисельне дослідження рівняння

$$\frac{d}{d\xi} \left\{\sqrt{\text{sh } \xi} Q_{-1/2+\sqrt{\sigma}}(\text{ch } \xi)\right\}_{\xi=\xi_0} \sin \alpha + \sqrt{\text{sh } \xi_0} Q_{-1/2+\sqrt{\sigma}}(\text{ch } \xi_0) \cos \alpha = 0 \quad (31)$$

показують, що воно має один корінь $\lambda = \lambda_0$. Це дослідження є предметом окремої наступної публікації. Таким чином, розклад (16) міститиме один член, що відповідає дискретній гілці спектра. Для решти значень λ значення функції $-\text{Im}[m(\lambda)]$ при $\delta \rightarrow 0$ буде таким

$$-\text{Im}[m(\lambda)] = \quad (32)$$

$$= \begin{cases} \frac{\frac{2}{\pi} \operatorname{th} \pi \sqrt{\lambda}}{\left[\operatorname{th} \pi \sqrt{\lambda} \{y_1 \cos \alpha + y_1' \sin \alpha\} \Big|_{\xi=\xi_0}^2 + \left[\frac{2}{\pi} \{y_2 \cos \alpha + y_2' \sin \alpha\} \Big|_{\xi=\xi_0}^2 \right]}, & \lambda = \sigma > 0, \\ 0, & \lambda = \sigma < 0. \end{cases}$$

Якщо прийняти для $y_1(\xi, \tau)$, $y_2(\xi, \tau)$ позначення (25), а для $\varphi(\xi, \xi_0, \tau)$ позначення (26), в яких $\lambda = \sigma = \tau^2$, то за допомогою формули (16) можемо записати шукане інтегральне перетворення:

$$f(\xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\varphi(\xi, \xi_0, \tau) \tau \operatorname{th} \pi \tau}{\left[\operatorname{th} \pi \sqrt{\lambda} \{y_1 \cos \alpha + y_1' \sin \alpha\} \Big|_{\xi=\xi_0}^2 + \left[\frac{2}{\pi} \{y_2 \cos \alpha + y_2' \sin \alpha\} \Big|_{\xi=\xi_0}^2 \right]} d\tau \times \\ \times \int_{\xi_0}^\infty \varphi(x, \xi_0, \tau) f(x) \operatorname{sh} x dx + r_0 \varphi(\xi, \xi_0, \tau_0) \int_{\xi_0}^\infty \varphi(x, \xi_0, \tau_0) f(x) \operatorname{sh} x dx. \quad (33)$$

Покладаючи в (32) $\alpha = 0$, дістанемо інтегральне перетворення, отримане в роботах А.Ф. Улітка [6, 7]. Частинному випадку $\alpha = 0$ в граничних умовах (12) спектральної задачі відповідає нульова гранична умова Діріхле на зрізі $\xi = \xi_0$ двопорожнинного гіперболоїда. При цьому спектр задачі буде чисто неперервним.

Література

1. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. — М.: Физматгиз, 1963. — 358 с.
2. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. — Л.: Наука, 1967. — 402 с.
3. Белова Н.А., Уфлянд Я.С. О разложении по собственным функциям одной сингулярной краевой задачи для уравнения Лежандра. — Дифференц. Уравнения, 1967, 3, №8.
4. Белова Н.А., Уфлянд Я.С. О кручении усеченного гиперболоида. — Прикл. математика и механика, 1970, 34, №2.
5. Улитко А.Ф. Об одном обобщении интегрального преобразования Мелера-Фока. — Прикл. механика, 1967, 3, №5.
6. Улитко А.Ф. Векторные разложения в пространственной теории упругости. — Киев: Академперіодика, 2002. — 341 с.
7. Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. — М.: Изд-во иностр. лит. 1952.
8. Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. — М.: Изд-во иностр. лит. 1960. — Т.1.

Надійшла до редколегії 31.08.05

УДК 539.3

Віталій О. Цибульник

Визначення напружено-деформованого стану конічних оболонок змінної в двох координатних напрямках товщини під дією локального поверхневого навантаження

Запропоновано розв'язок класу задач про напружено-деформований стан конічних оболонок змінної в двох координатних напрямках товщини під дією локального поверхневого навантаження на основі застосування дискретних рядів Фур'є.

Ключові слова: конічні оболонки, змінна товщина, локальне навантаження, дискретні ряди Фур'є.

Vitaly O. Tsybulnyk

The definition of stress-strain state of conical shells with variable thickness in two directions under the action of local surface load

Solution of class of tasks about the stress-strain state of conical shells with variable thickness in two co-ordinate directions under the action of the local surface load on the basis of application of the discrete Fourier series is offered. Key Words: conical shells, variable thickness, local load, discrete Fourier series.

Поряд з оболонками постійної товщини в якості конструктивних елементів широке застосування мають оболонки змінної товщини, що дозволяє досягти більш раціонального напружено-деформованого стану за рахунок закону зміни товщини при збереженні ваги конструкції. Це стосується і конічних оболонок, які використовуються як елементи машин, літальних апаратів та приборів [1,2].

Тут розглядається клас задач про напружено-деформований стан конічних оболонок змінної в двох координатних напрямках товщини під дією локального поверхневого навантаження на основі точних рівнянь теорії тонких оболонок. Середина поверхні оболонки віднесена до ортогональної системи координат s, θ , де s – довжина дуги по меридіану, а θ – центральний кут у паралельному крузі. Радіус окружності в поперечному перетині $r(s) = r_0 + \cos \varphi \cdot s$, де r_0 – радіус паралельного круга в площині відліку, φ – кут між нормаллю до серединної поверхні оболонки та віссю обертання z . Розв'язувальна система рівнянь має вигляд [1,2,6]:

$$\frac{\partial N_r}{\partial s} = -\frac{(1-\nu)\cos\varphi}{r}N_r + \frac{\nu\sin\varphi}{r}N_z - \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial S}{\partial\theta} - \frac{\nu\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 M_z}{\partial\theta^2} + \\ + \frac{(1-\nu^2)\sin^2\varphi}{r^3}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(D_M\frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2}\right) + \frac{(1-\nu^2)D_M}{r^2}u_r -$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^4}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(D_M\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta^2}\right)+\frac{(1-\nu^2)}{r^2}D_N\frac{\partial v}{\partial\theta}- \\
 & -\frac{(1-\nu^2)\sin^2\varphi}{r^4}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(D_M\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)-\frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(D_M g_s)-q_r; \\
 \frac{\partial N_z}{\partial s} = & -\frac{\cos\varphi}{r}N_r-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial S}{\partial\theta}+\frac{4\sin\varphi}{r^3}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{D_M}{p_0 D_N}S\right)+\frac{\nu\cos\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 M_s}{\partial\theta^2}- \\
 & -\frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^4}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(D_M\frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2}\right)+\frac{(1-\nu^2)\cos^2\varphi}{r^4}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(D_M\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta^2}\right)- \\
 & -\frac{2(1-\nu)}{r^4}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{D_M}{p_0}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}\right)+\frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^4}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(D_M\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+ \\
 & +\frac{(1-\nu^2)\cos^2\varphi}{r^3}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(D_M g_s)+\frac{2(1-\nu)}{r^3}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{D_M}{p_0}\frac{\partial g_s}{\partial\theta}\right)-q_z; \\
 \frac{\partial S}{\partial s} = & -\frac{\nu\cos\varphi}{r}\frac{\partial N_r}{\partial\theta}-\frac{\nu\sin\varphi}{r}\frac{\partial N_z}{\partial\theta}-\frac{2\cos\varphi}{r}S-\frac{\nu\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial M_s}{\partial\theta}+ \\
 & +\frac{(1-\nu^2)\sin^2\varphi}{r^4}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(D_M\frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2}\right)-\frac{(1-\nu^2)}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}(D_N u_r)- \\
 & -\frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^4}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(D_M\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta^2}\right)-\frac{1-\nu^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(D_N\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)- \\
 & -\frac{(1-\nu^2)\sin^2\varphi}{r^4}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(D_M\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)-\frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^3}\frac{\partial}{\partial\theta}(D_M g_s)-q_\theta; \\
 \frac{\partial M_s}{\partial s} = & \sin\varphi N_r-\cos\varphi N_z-\frac{4\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{D_M}{p_0 D_N}S\right)-\frac{(1-\nu)\cos\varphi}{r}M_r- \\
 & -\frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^3}\left(D_M\frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2}\right)+\frac{2(1-\nu)}{r^3}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{D_M}{p_0}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}\right)+ \\
 & +\frac{(1-\nu^2)\cos^2\varphi}{r^3}\left(D_M\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta^2}\right)+\frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^3}\left(D_M\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)- \\
 & -\frac{2(1-\nu)}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{D_M}{p_0}\frac{\partial g_s}{\partial\theta}\right)+\frac{(1-\nu^2)\cos^2\varphi}{r^2}(D_M g_s); \\
 \frac{\partial u_r}{\partial s} = & \frac{\cos^2\varphi}{D_N}N_r+\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{D_N}N_z-\frac{\nu\cos\varphi}{r}u_r-\frac{\nu\cos\varphi}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}-\sin\varphi g_s; \\
 \frac{\partial u_z}{\partial s} = & \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{D_N}N_r+\frac{\sin^2\varphi}{D_N}N_z-\frac{\nu\sin\varphi}{r}u_r-\frac{\nu\sin\varphi}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\cos\varphi g_s;
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{2}{(1-\nu)p_0 D_N} \hat{S} - \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\sin \varphi}{r} \left(\frac{4D_M}{r^2 p_0 D_N} - 1 \right) \frac{\partial u_z}{\partial \theta} +$$

$$+ \frac{\cos \varphi}{r} v - \frac{4 \sin \varphi D_M}{r^2 p_0 D_N} \frac{\partial g_s}{\partial \theta};$$

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial s} = \frac{1}{D_M} M_s + \frac{\nu \sin \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{\nu \cos \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} - \frac{\nu \sin \varphi}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\cos \varphi}{r} g_s, \quad (1)$$

де $p_0 = 1 + \frac{4 \sin^2 \varphi D_M}{r^2 D_N}$, N_s, Q_s, S, M_s, H – зусилля і моменти; u, v, w – перемі-

щення; q_s, q_θ, q_r – компоненти навантаження; $D_N = \frac{E \cdot h(s, \theta)}{1 - \nu^2}$,

$D_M = \frac{E \cdot h^3(s, \theta)}{12(1 - \nu^2)}$ – тангенціальна та згинна жорсткості; $h = h(s, \theta)$ – товщина

оболонки; E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона. При цьому ($0 \leq s \leq L$, $0 \leq \theta \leq \pi$), мають місце співвідношення:

$$N_r = N_s \cos \varphi + \hat{Q}_s \sin \varphi, \quad N_z = N_s \sin \varphi - \hat{Q}_s \cos \varphi,$$

$$u_r = u \cos \varphi + w \sin \varphi, \quad u_z = u \sin \varphi - w \cos \varphi,$$

$$q_r = q_s \cos \varphi + q_\theta \sin \varphi, \quad q_z = q_s \sin \varphi - q_\theta \cos \varphi,$$

$$\hat{Q}_s = Q_s + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad \hat{S} = S + \frac{2 \sin \varphi}{r} H, \quad g_s = -\frac{\partial w}{\partial s}. \quad (2)$$

Таким чином, крайова задача про напружено-деформований стан конічної оболонки описується системою диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами та відповідними граничними умовами при $s=0$ і $s=L$.

В загальному випадку, оскільки коефіцієнти системи (1) залежать від s і θ , то розділити змінні не вдається. Тому для розв'язання двовимірної крайової задачі застосуємо підхід, оснований на зведенні задачі до одновимірної шляхом застосування дискретних рядів Фур'є [2,4-6]. Для цього введемо наступні доповняльні функції:

$$\psi_1^j = D_M \left\{ \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2}, \frac{\partial v}{\partial \theta}, g_s \right\}, (j=1,2,3,4); \quad \psi_5^j = \frac{1}{D_N} \{N_r, N_z\}, (j=1,2),$$

$$\psi_2^j = D_N \left\{ u_r, \frac{\partial v}{\partial \theta} \right\}, (j=1,2); \quad \psi_6 = \frac{1}{p_0 D_N} \hat{S},$$

$$\psi_3^j = \frac{D_M}{p_0} \left\{ \frac{\partial u_z}{\partial \theta}, \frac{\partial g_s}{\partial \theta} \right\}, (j=1,2); \quad \psi_7 = \frac{1}{D_M} M_s,$$

$$\psi_4^j = \frac{D_M}{p_0 D_N} \left\{ \hat{S}, \frac{\partial u_z}{\partial \theta}, \frac{\partial g_s}{\partial \theta} \right\}, (j=1,2,3); \quad (3)$$

Розкладемо розв'язувальні і доповняльні функції в ряди Фур'є по θ .

$$X(s, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(s) \cos \lambda_n \theta, \quad Y(s, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(s) \sin \lambda_n \theta; \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{2\pi} = \frac{n}{2};$$

$$X = \{N_r, N_z, M_s, u_r, u_z, \vartheta, \psi_1', \psi_2', \psi_3', \psi_4', q_r, q_z\},$$

$$Y = \{S, v, \psi_5', \psi_6', \psi_7', q_\theta\}. \quad (4)$$

Після підстановки рядів (4) в систему (1) та деяких перетворень отримуємо зв'язану систему звичайних диференціальних рівнянь для амплітудних значень рядів (4):

$$\begin{aligned} \frac{dN_r^n}{ds} &= -\frac{(1-\nu)\cos\varphi}{r} N_r^n + \frac{\nu\sin\varphi}{r} N_z^n - \frac{\cos\varphi}{r} \lambda_n S^n + \frac{\nu\sin\varphi}{r^2} \lambda_n^2 M_s^n - \\ &\quad - \frac{(1-\nu^2)\sin^2\varphi}{r^4} \lambda_n^2 \psi_{1,n}^1 + \frac{1-\nu^2}{r^2} \psi_{2,n}^1 + \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^4} \lambda_n^2 \psi_{1,n}^2 + \\ &\quad + \frac{1-\nu^2}{r^2} \psi_{2,n}^2 + \frac{(1-\nu^2)\sin^2\varphi}{r^4} \lambda_n^2 \psi_{1,n}^3 + \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} \lambda_n^2 \psi_{1,n}^4 - q_r; \\ \frac{dN_z^n}{ds} &= -\frac{\cos\varphi}{r} N_z^n - \frac{\sin\varphi}{r} \lambda_n S^n + \frac{4\sin\varphi}{r^3} \lambda_n \psi_{4,n}^1 - \frac{\nu\cos\varphi}{r^2} \lambda_n^2 M_s^n + \\ &\quad + \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^4} \lambda_n^2 \psi_{1,n}^1 - \frac{(1-\nu^2)\cos^2\varphi}{r^4} \lambda_n^2 \psi_{1,n}^2 - \frac{2(1-\nu)}{r^4} \lambda_n \psi_{3,n}^1 - \\ &\quad - \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^4} \lambda_n^2 \psi_{1,n}^3 - \frac{(1-\nu^2)\cos^2\varphi}{r^3} \lambda_n^2 \psi_{1,n}^4 + \frac{2(1-\nu)}{r^3} \lambda_n \psi_{3,n}^2 - q_z; \\ \frac{dS^n}{ds} &= \frac{\nu\cos\varphi}{r} \lambda_n N_r^n + \frac{\nu\sin\varphi}{r} \lambda_n N_z^n - \frac{2\cos\varphi}{r} S^n + \frac{\nu\sin\varphi}{r^2} \lambda_n M_s^n - \\ &\quad - \frac{(1-\nu^2)\sin^2\varphi}{r^4} \lambda_n \psi_{1,n}^1 + \frac{(1-\nu^2)}{r^2} \lambda_n \psi_{2,n}^1 + \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^4} \lambda_n \psi_{1,n}^2 + \\ &\quad + \frac{1-\nu^2}{r^2} \lambda_n \psi_{2,n}^2 + \frac{(1-\nu^2)\sin^2\varphi}{r^4} \lambda_n \psi_{1,n}^3 + \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^3} \lambda_n \psi_{1,n}^4 - q_\theta; \\ \frac{dM_s^n}{ds} &= \sin\varphi N_r^n - \cos\varphi N_z^n - \frac{4\sin\varphi}{r^2} \lambda_n \psi_{4,n}^1 - \frac{(1-\nu)\cos\varphi}{r} M_s^n - \\ &\quad + \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^3} \psi_{1,n}^1 + \frac{2(1-\nu)}{r^3} \lambda_n \psi_{3,n}^1 + \frac{(1-\nu^2)\cos^2\varphi}{r^3} \psi_{1,n}^2 + \\ &\quad + \frac{(1-\nu^2)\sin\varphi\cos\varphi}{r^3} \psi_{1,n}^3 - \frac{2(1-\nu)}{r^2} \lambda_n \psi_{3,n}^2 + \frac{(1-\nu^2)\cos^2\varphi}{r^2} \psi_{1,n}^4; \\ \frac{du_r^n}{ds} &= \cos^2\varphi \cdot \psi_{5,n}^1 + \sin\varphi\cos\varphi \cdot \psi_{5,n}^2 - \frac{\nu\cos\varphi}{r} u_r^n - \frac{\nu\cos\varphi}{r} \lambda_n v^n - \sin\varphi \vartheta^n; \\ \frac{du_z^n}{ds} &= \sin\varphi\cos\varphi \cdot \psi_{5,n}^1 + \sin^2\varphi \cdot \psi_{5,n}^2 - \frac{\nu\sin\varphi}{r} u_r^n - \frac{\nu\sin\varphi}{r} \lambda_n v^n + \cos\varphi \vartheta^n; \\ \frac{dv^n}{ds} &= \frac{2}{1-\nu} \psi_{6,n} + \frac{\cos\varphi}{r} \lambda_n u_r^n + \frac{4\sin\varphi}{r^3} \psi_{4,n}^2 + \frac{\sin\varphi}{r} \lambda_n u_z^n + \end{aligned}$$

$$\frac{\cos \varphi}{r} v^n - \frac{4 \sin \varphi}{r^2} \psi_{4,n}^3;$$

$$\frac{d\theta^n}{ds} = \psi_{7,n} - \frac{v \sin \varphi}{r^2} \lambda_n^2 u_r^n + \frac{v \cos \varphi}{r^2} \lambda_n^2 u_z^n - \frac{v \sin \varphi}{r^2} \lambda_n v^n - \frac{\cos \varphi}{r} g_z^n; \quad (5)$$

Граничні умови для системи (5):

$$B_1 \bar{Z}(0) = \bar{b}_1, \quad B_2 \bar{Z}(L) = \bar{b}_2, \quad (6)$$

де $\bar{Z}(s) = \{N_{r,n}, N_{z,n}, \hat{S}_n, M_{s,n}, u_{r,n}, u_{z,n}, v_n, g_{z,n}\}^T$ - вектор-стовбець розв'язувальних функцій, B_1 і B_2 - прямокутні матриці, $\bar{b}_1$ і $\bar{b}_2$ - вектори.

В системі (5) функції $\psi_{1,n}^j (j=1,2,3,4)$, $\psi_{2,n}^j (j=1,2)$, $\psi_{3,n}^j (j=1,2)$, $\psi_{4,n}^j (j=1,2,3)$, $\psi_{5,n}^j (j=1,2)$, $\psi_{6,n}$, $\psi_{7,n}$ - амплітудні значення доповняльних функцій (3) - не виражаються явно через коефіцієнти рядів Фур'є розв'язувальних функцій, а розраховуються під час інтегрування системи (5) із застосуванням дискретних рядів Фур'є на кожному кроці $s=const$ та залежать від амплітудних значень розв'язувальних функцій з урахуванням (3) [2,4-6].

Рівняння системи (5) інтегруються одночасно для всіх гармонік рядів (4) за допомогою чисельного метода дискретної ортогоналізації. В процесі інтегрування для розрахунку амплітудних значень доповняльних функцій за поточними значеннями амплітуд розв'язувальних функцій при $s = s_k (k = \overline{0, K})$ розраховуємо в деяких точках $\theta_r (r = \overline{0, R})$ на інтервалі $0 \leq \theta \leq \pi$ значення амплітуд доповняльних функцій та будуємо ряд Фур'є для дискретно заданої функції [3]. На початку інтегрування враховуються граничні умови на цьому краї. Після підстановки знайдених амплітудних значень доповняльних функцій в систему (5) продовжується інтегрування по s . При цьому розраховуємо в точках $\theta_r (1 \leq r \leq R)$ наступні величини

$$D_M^r, D_N^r, \frac{D_M^r}{p_0^r}, \frac{D_M^r}{p_0^r D_N^r}, \frac{1}{D_N^r}, \frac{1}{p_0^r D_N^r}, \frac{1}{D_M^r}.$$

Враховуючи отримані значення та вирази доповняльних функцій через розв'язувальні (3), розраховуються значення всіх доповняльних. Використовуючи знайдені значення доповняльних функцій, будуємо дискретні ряди Фур'є у вигляді (4), коефіцієнти яких є недостатніми амплітудними значеннями доповняльних функцій при $s=s_k$ для системи (5). За допомогою стандартної процедури знаходимо їх чисельні значення [3].

Після підстановки цих значень в рівняння системи (5) продовжуємо інтегрування по s , переходячи від точки s_k до точки s_{k+1} . Розв'язок крайової задачі (5), (6) здійснюємо за допомогою стійкого чисельного методу дискретної ортогоналізації. По значенням розв'язувальних функцій можна визначити всі фактори напружено-деформованого стану оболонки.

На основі даного підходу розв'яжемо задачу про напружено-деформований стан жорстко закріпленої на торцях кінчної оболонки, що

навантажена на частині бокової поверхні нормальним навантаженням $q(\theta) = q_0 (\cos \theta - \cos \alpha)$ (рис.1).

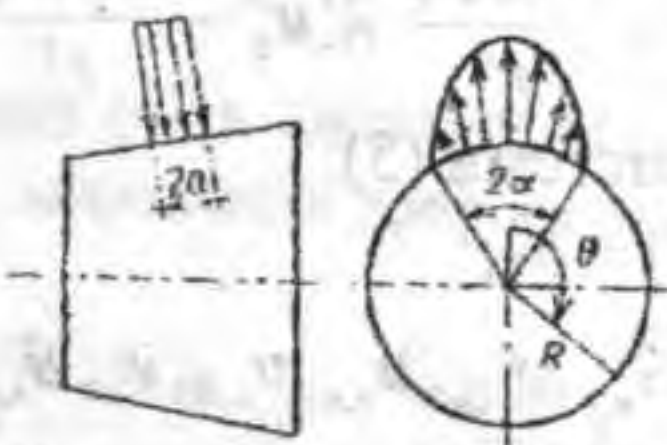


Рис.1. Конічна оболонка, навантажена на частині бокової поверхні нормальним навантаженням $q(\theta) = q_0 (\cos \theta - \cos \alpha)$

Таке навантаження можна представити у вигляді ряду

$$q(\theta) = \frac{q_0}{\pi} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) + \frac{q_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{n-1} - \frac{2 \sin n\alpha \cos \alpha}{n} + \frac{\sin(n+1)\alpha}{n+1} \right) \cos n\theta. \quad (7)$$

Виберемо закон зміни товщини оболонки

$$h(s, \theta) = \frac{H}{1-\gamma/3} \left[1 - \gamma \left(\frac{2s}{L} - 1 \right)^2 \right] \cdot (1 + \beta \cos \theta), \quad (0 \leq s \leq L, 0 \leq \theta \leq 2\pi). \quad (8)$$

таким чином, що при різних γ і β величина $\bar{h} = \int_0^L \int_0^{2\pi} h(s, \theta) ds d\theta$ не змінює свого значення, тобто виконується умова збереження ваги оболонки.

Задача розв'язувалась при $L=30$; $H=0,25$; середній радіус $R=30$; $\alpha=5$; $\alpha=\pi/4$. Враховувались перших 12 членів рядів (4), що гарантує достатньо точний результат [5].

На рис. 2 і 3 приведено розподіл прогину w по θ в середньому перетині $s=L/2$ в залежності від різних β при $\gamma=0$ для випадків $\varphi=\pi/2$ (рис.2) і $\varphi=\pi/3$ (рис.3).

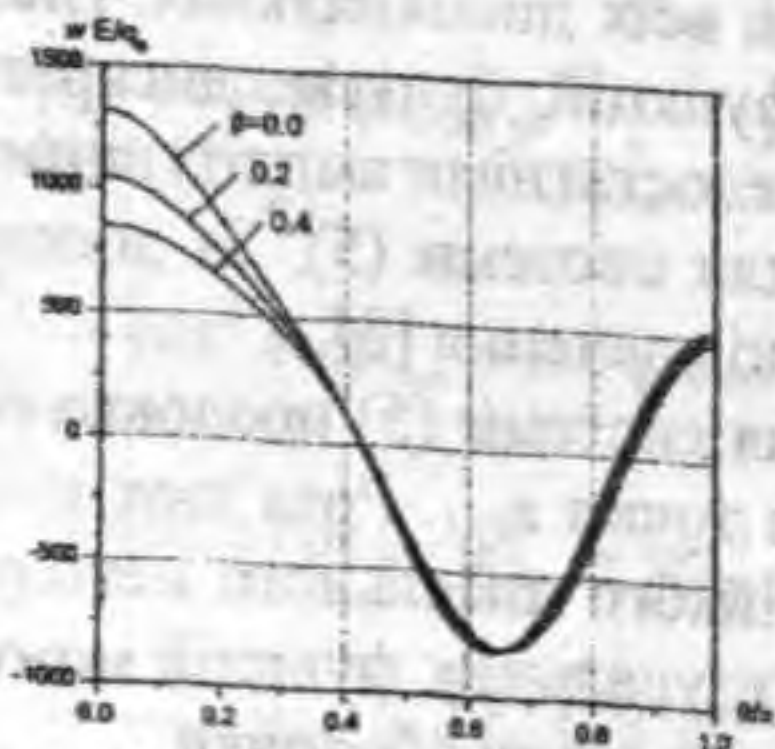


Рис.2. Розподіл прогину w по θ в перетині $s=L/2$ при $\gamma=0$ для $\varphi=\pi/2$.

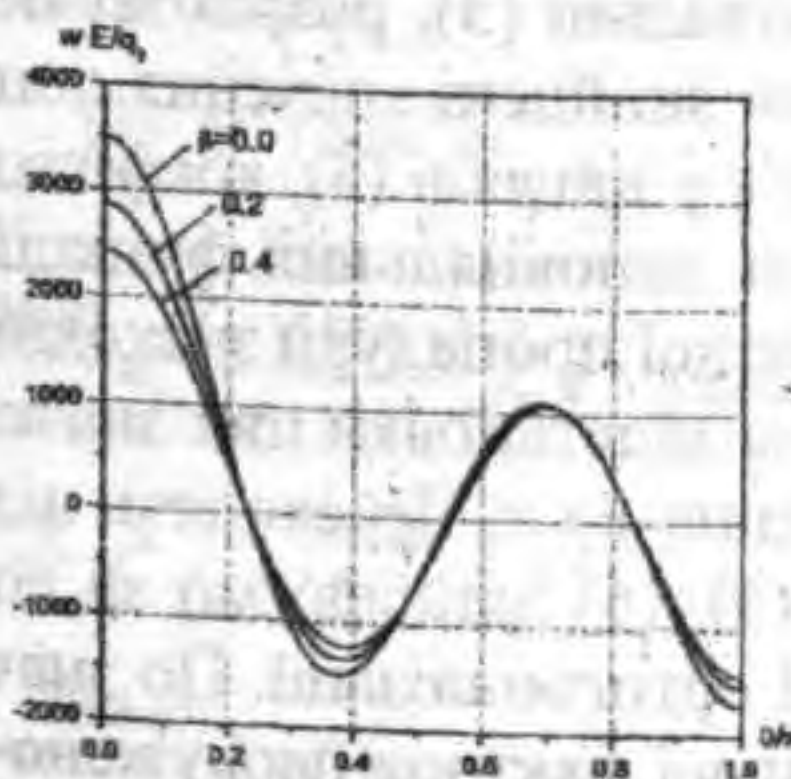


Рис.3. Розподіл прогину w по θ в перетині $s=L/2$ при $\gamma=0$ для $\varphi=\pi/3$.

На рис. 4 і 5 приведено розподіл прогину w по s вздовж лінії $\theta=0$ в залежності від різних γ при $\beta=0$ для випадків $\varphi=\pi/2$ (рис.2) і $\varphi=\pi/3$ (рис.3).

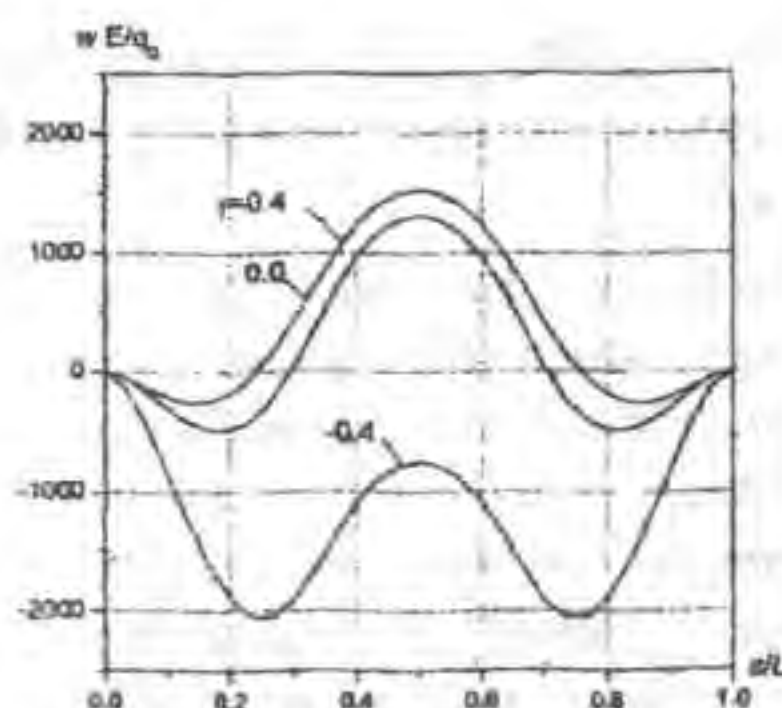


Рис.4. Розподіл прогину w по s вздовж $\theta=0$ при $\beta=0$ для $\varphi=\pi/2$.

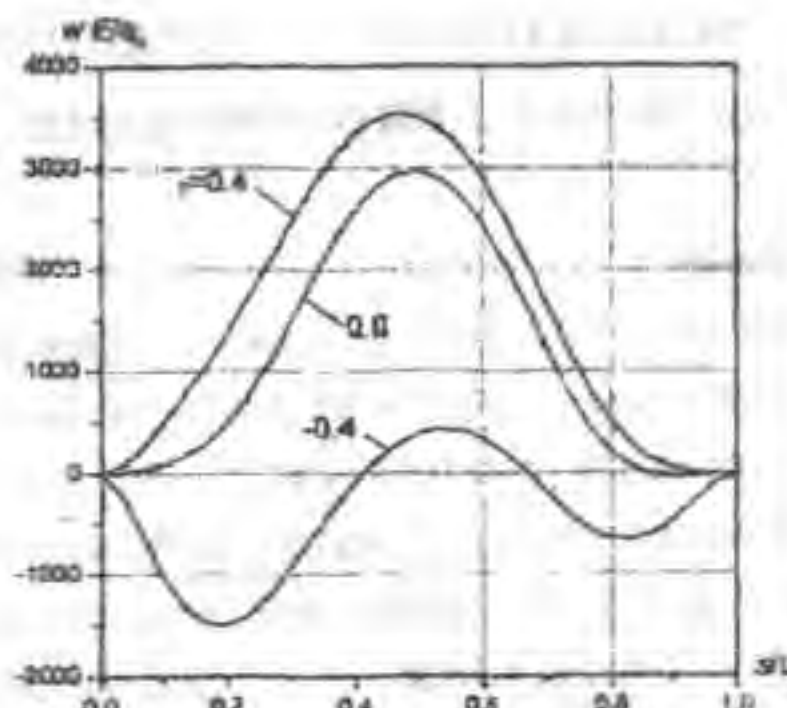


Рис.5. Розподіл прогину w по s вздовж $\theta=0$ при $\beta=0$ для $\varphi=\pi/3$.

З наведених графіків видно, що варіюючи коефіцієнтами γ і β в законі зміни товщини (8) можливо при збереженні ваги оболонки вибирати їх значення, щоб отримати найбільш раціональний розподіл прогину або інших факторів напружено-деформованого стану оболонки.

Література.

1. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жёсткости. – К.:Наук.думка, 1981. – 544с. – (Методы расчёта оболочек: В 5-ти т.; Т.4).
2. Григоренко Я. М., Мукоєд А. П. Розв'язання лінійних і нелінійних задач теорії оболонок на ЕОМ. – К.: Либідь, 1992. – 152 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.:Физматгиз, 1966 – Т.3. 656с.
4. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Discrete Fourier-series method in problems of bending of variable-thickness rectangular plates // Journal of Engineering Mathematics – 2003. – 46, p.269-280.
5. Grigorenko Ya.M., Tsybulnik V.A. On Application of Discrete Fourier Series to Analysis of the Stress State of Cylindrical Shells of Variable Thickness at Arbitrary Restraint of Faces // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N6. – p.655-664.
6. Grigorenko Ya.M., Tsybulnik V.A. Solving the conical shells' with variable thickness in circular direction problem with discrete Fourier series application // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N9. – p.978-989.

Надійшла до редакції 29 вересня 2005р.

УДК 517.9

Наталія М. Щобак*

Nataliya N. Shchobak*

**Про розв'язність нелінійних
крайових задач з параметрами**

**About solvability of non-linear
boundary-value problems with
parameters**

Крайова задача з двома параметрами в нелінійних звичайних диференціальних рівняннях та в нелінійних крайових умовах зводиться за допомогою заміни змінних до сім'ї параметризованих крайових задач з лінійними умовами та деяких нелінійних алгебраїчних визначальних рівнянь. Розв'язки модифікованої задачі досліджуються за допомогою чисельно-аналітичної техніки. Доводяться необхідні та достатні умови існування розв'язків.

By using a suitable change of variables, we reduce the boundary-value problem containing two parameters both in the non-linear ordinary differential equations and in the non-linear boundary conditions to a family of boundary-value problems with linear conditions plus some non-linear algebraic determining equations. We construct a numerical-analytic scheme suitable for studying the solutions of the transformed boundary-value problem. We prove the sufficient and necessary conditions of the existence of solutions.

Ключові слова: чисельно-аналітичний метод послідовних наближень, нелінійна крайова задача з параметрами.

Key words: numerical-analytic method of successive approximations, non-linear boundary value problems with parameters.

*E-mail: shchobak@ukr.net

Універсальність ідеї чисельно-аналітичного методу послідовних наближень, запропонованого А. М. Самойленком [1-2], сприяли проведенню активних досліджень по узагальненню та використанню чисельно-аналітичних методів до широкого класу крайових задач. Наприклад, різні типи нелінійних крайових задач з параметрами за допомогою чисельно-аналітичного алгоритму вивчалися в роботах [1-10].

В даній роботі розглядається один з підходів, що робить можливим дослідження розв'язності нелінійних крайових задач з двома параметрами більш загального вигляду ніж в [9]. Встановлено достатні та необхідні умови для існування розв'язку.

1. Постановка задачі та чисельно-аналітична схема для дослідження її розв'язків.

Розглянемо нелінійну двоточкову крайову задачу з параметрами такого вигляду:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t), \lambda_1, \lambda_2), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

$$g(y(0), y(T), \lambda_1, \lambda_2) = 0, \quad (2)$$

$$y_1(0) = h(\lambda_1, \lambda_2, y_2(0), y_3(0), \dots, y_n(0)). \quad (3)$$

де $\lambda_k \in J_k$ ($J_k = [a_k, b_k]$, $k = 1, 2$) – невідомі скалярні параметри.

Припустимо, що функції $f: [0, T] \times G \times J_1 \times J_2 \rightarrow R^n$, $g: G \times G \times J_1 \times J_2 \rightarrow R^{n+1}$, $h: J_1 \times J_2 \times G_1 \rightarrow R$ є неперервними, де множини $G \subset R^n$, $G_1 \subset R^{n-1}$ ($G_1 \subset G$) – компактні зв'язні області.

Потрібно знайти такі значення параметрів λ_1 , λ_2 , при яких задача (1), (2) має неперервний диференційовний розв'язок та задовольняє додаткову умову (3).

Неважко переконатися, що за допомогою заміни змінних $y(t) = x(t) + w$, де $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \Omega \subset R^n$ – невідомий параметр (w вибираємо так, щоб $D + \Omega \subset G$), $x \in D$ (D – компактна множина), задача (1)–(3) зводиться до еквівалентної сім'ї крайових задач з лінійними крайовими умовами

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t) + w, \lambda_1, \lambda_2), \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

$$Ax(0) + Bx(T) = 0, \quad (5)$$

$$x_1(0) = h(\lambda_1, \lambda_2, x_2(0) + w_2, x_3(0) + w_3, \dots, x_n(0) + w_n) - w_1, \quad (6)$$

яка розглядається разом із системою визначальних алгебраїчних рівнянь

$$g(x(0) + w, -B^{-1}Ax(0) + w, \lambda) = 0, \quad (7)$$

де $-B^{-1}Ax(0) = x(T)$.

Припускаємо, що крайова задача (1)–(3), або, що теж саме, задача (4)–(7), задовольняє такі умови:

А) функція $f(t, y, \lambda_1, \lambda_2)$ є неперервною в $[0, T] \times G \times J_1 \times J_2$ і справедлива умова Ліпшица

$$|f(t, u, \lambda_1, \lambda_2) - f(t, v, \lambda_1, \lambda_2)| \leq K|u - v|$$

для $t \in [0, T]$, фіксованих $\lambda_k \in J_k$ ($k = 1, 2$), довільних $\{u, v\} \subset G$ і деякої невід'ємної сталої матриці $K = (K_{ij})_{i,j=1}^n$ (цю нерівність, як і подібні співвідношення нижче, розуміємо покомпонентно);

В) є непорожньою множина $D_\beta = \{y \in R^n : B(y, \beta(y)) \subset G\}$, де

$$\beta(y) = \frac{T}{2} \delta_G(f) + |(B^{-1}A + I_n)y|,$$

$$\delta_G(f) = \frac{1}{2} \left[\max_{(t,y,\lambda_1,\lambda_2) \in [0,T] \times G \times J_1 \times J_2} f(t,y,\lambda_1,\lambda_2) - \min_{(t,y,\lambda_1,\lambda_2) \in [0,T] \times G \times J_1 \times J_2} f(t,y,\lambda_1,\lambda_2) \right],$$

де I_n – n -вимірний одиничний матриця, $B(y, \beta(y))$ – куля радіуса $\beta(y)$ з центром в точці y ;

С) спектральний радіус $r(K)$ матриці K з умови А) задовольняє нерівність $r(K) < \frac{q}{T}$, де $q = \frac{10}{3}$;

Д) визначена підмножина $U \subset R^{n-1}$ таким чином:

$$U = \{u = (u_2, u_3, \dots, u_n) \in R^{n-1} : z \in D_\beta\},$$

де

$$z = (h(\lambda_1, \lambda_2, u_2 + w_2, u_3 + w_3, \dots, u_n + w_n) - w_1, u_2, u_3, \dots, u_n). \quad (8)$$

Зауваження. В умові С) замість константи $q = \frac{10}{3}$ можемо відповідно до результатів, отриманих в роботі [11], використовувати $q = 3,416131$. Скориставшись цією менш обмежувальною умовою, можна показати, що зберігаються всі встановлені нижче твердження. При цьому зміняться деякі технічні деталі (наприклад, вигляди оцінок).

У вигляді рекурентного співвідношення будемо наближення

$$x_{m+1}(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2) = z + \int_0^t f(s, x_m(s, w, u, \lambda_1, \lambda_2) + w, \lambda_1, \lambda_2) ds - \\ - \frac{t}{T} \int_0^T f(s, x_m(s, w, u, \lambda_1, \lambda_2) + w, \lambda_1, \lambda_2) ds + \frac{t}{T} [B^{-1}A + I_n]z, \quad (9)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, \quad x_0(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2) = z \in D_\beta,$$

де $w \in \Omega \subset R^n$, $u \in U \subset R^{n-1}$, $\lambda_k \in J_k$ ($k = 1, 2$), вектор z визначається рівністю (8) $x_m(0, w, u, \lambda_1, \lambda_2) = z$, $m = 0, 1, 2, \dots$.

Послідовність (9) для всіх $w \in \Omega \subset R^n$, $u \in U \subset R^{n-1}$, $\lambda_k \in J_k$ ($k = 1, 2$) задовольняє крайові умови (5), (6).

Мають місце такі твердження.

Теорема 1. Нехай для крайової задачі (1)–(2) в області визначення $[0, T] \times G \times J_1 \times J_2$ виконуються умови А)–Д). Тоді:

1) послідовність функцій (9) рівномірно збігається при $m \rightarrow \infty$ в області $(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2) \in [0, T] \times \Omega \times U \times J_1 \times J_2$ до неперервної граничної функції $x^*(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2)$, причому справедлива така оцінка:

$$|x^*(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2) - x_m(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2)| \leq \frac{20}{9} t \left(1 - \frac{t}{T}\right) Q^{m-1} (I_n - Q)^{-1} \times \\ \times [Q \delta_G(f) + K(B^{-1}A + I_n)z], \quad (10)$$

де вектор $\delta_G(f)$ визначається в умові В), а матриця $Q = \frac{3T}{10} K$;

2) гранична функція $x^*(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2)$ з початковим значенням $x^*(0, w, u, \lambda_1, \lambda_2) = z \in \mathbb{R}^n$ є розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t) = z + \int_0^t f(s, x(s) + w, \lambda_1, \lambda_2) ds - \\ - \frac{t}{T} \left[\int_0^T f(s, x(s) + w, \lambda_1, \lambda_2) ds + (B^{-1}A + I_n)z \right],$$

тобто, що теж саме, розв'язком збуреної по відношенню до (4)–(7) крайової задачі вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x + w, \lambda_1, \lambda_2) + \Delta(w, u, \lambda_1, \lambda_2), \\ Ax(0) + Bx(T) = 0, \quad (12)$$

$$x_1(0) = h(\lambda_1, \lambda_2, x_2(0) + w_2, x_3(0) + w_3, \dots, x_n(0) + w_n) - w_1,$$

де збурення

$$\Delta(w, u, \lambda_1, \lambda_2) = -\frac{1}{T} \left[(B^{-1}A + I_n)z + \int_0^T f(s, x(s) + w, \lambda_1, \lambda_2) ds \right]. \quad (13)$$

Теорема 2. Нехай для крайової задачі (1)–(2) виконуються умови А)–D). Розв'язок $x = x(w, u, \lambda_1, \lambda_2)$ задачі Коші

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t) + w, \lambda_1, \lambda_2) + \mu, \quad t \in [0, T],$$

$$x(0) = z = (h(\lambda_1, \lambda_2, x_2(0) + w_2, x_3(0) + w_3, \dots, x_n(0) + w_n) - w_1, u_2, u_3, \dots, u_n),$$

де $\mu \in \mathbb{R}^n$, $z \in D_f$, $w \in \Omega$, $\lambda_k \in J_k$ ($k=1,2$) – параметри, задовольняє крайові умови (5), (6) тоді і тільки тоді, коли $\mu = \Delta(w, u, \lambda_1, \lambda_2)$, де відображення $\Delta: \Omega \times U \times J_1 \times J_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ визначене формулою (13).

Доведення наведених вище теорем можна провести по-аналогії з доведенням відповідно теореми 1 та теореми 2 з [9].

Наступні твердження показують зв'язок розв'язку $x = x^*(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2)$ збуреної задачі (12) з розв'язком задачі (4)–(6).

Теорема 3. Нехай для крайової задачі (1)–(2) виконуються умови А)–D). Тоді функція $x^*(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2)$ є розв'язком крайової задачі з параметрами (4)–(6) тоді і тільки тоді, коли четвірка $\{w, u, \lambda_1, \lambda_2\} \in \Omega \times U \times J_1 \times J_2$ задовольняє систему визначальних рівнянь

$$\left[B^{-1}A + I_n \right] z + \int_0^T f(s, x^*(s, w, u, \lambda_1, \lambda_2) + w, \lambda_1, \lambda_2) ds = 0, \quad (14)$$

де z задане рівністю (8), а w і λ_2 розглядаються як параметри.

Доведення. Достатньо застосувати теорему 2 і відзначити, що диференціальне рівняння в задачі (12) співпадає з (4) тоді і тільки тоді,

коли $\Delta(t, w, u^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = 0$, тобто, коли $\{w, u^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*\}$ задовольняють рівність (14), де w і λ_2 розглядаються як параметри.

Теорема 4. Нехай для крайової задачі (1)–(2) виконуються умови А)–D), тоді для того, щоб функція

$$y^*(t) = x^*(t, w^*, u^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) + w^* \quad (15)$$

була розв'язком крайової задачі з параметрами (1)–(3) необхідно і достатньо, щоб четвірка

$$\{w^*, u^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*\} \quad (16)$$

задовольняла систему визначальних алгебраїчних рівнянь

$$g(z + w, -B^{-1}Az + w, \lambda_1, \lambda_2) = 0, \quad (17)$$

де

$$z = (h(\lambda_1^*, \lambda_2^*, u_2^* + w_2^*, u_3^* + w_3^*, \dots, u_n^* + w_n^*) - w_1^*, u_2^*, u_3^*, \dots, u_n^*) \quad (18)$$

а пара $\{u^*, \lambda_1^*\}$ є розв'язком системи (14) з параметрами w і λ_2 .

Доведення. Векторний параметр z в (18) може бути інтерпретований, як початкове значення при $t = 0$ можливого розв'язку задачі (4)–(6). Тому рівняння (7) можна записати у вигляді (17). Оскільки задача (1)–(3) еквівалентна сім'ї крайових задач (4)–(6), яка розглядається разом з визначальним рівнянням (7), то взявши до уваги заміну змінних, відзначимо, що функція $y^*(t)$ у (15) співпадає з розв'язком крайової задачі (1)–(3) тоді і тільки тоді, коли $w = w^*$, $\lambda_2 = \lambda_2^*$ задовольняють рівняння (17).

Як наслідок з теорем 3 та 4 очевидним є наступне твердження.

Теорема 5. Нехай для крайової задачі (1)–(2) виконуються умови А)–D), функція $y^*(t)$ вигляду (15) буде розв'язком крайової задачі з параметрами (1)–(3) тоді і тільки тоді, коли четвірка (16) задовольняє систему визначальних рівнянь

$$\begin{cases} [B^{-1}A + I_n]z + \int_0^T f(s, x^*(s, w, u, \lambda_1, \lambda_2) + w, \lambda_1, \lambda_2) ds = 0, \\ g(z + w, -B^{-1}Az + w, \lambda_1, \lambda_2) = 0, \end{cases} \quad (19)$$

що містить $2n + 1$ скалярних алгебраїчних рівнянь.

2. Існування достатніх умов.

Позначимо

$$\begin{aligned} \Delta_m(w, u, \lambda_1, \lambda_2) = \\ = \frac{-1}{T} \left[(B^{-1}A + I_n)z + \int_0^T f(s, x^*(s, w, u, \lambda_1, \lambda_2) + w, \lambda_1, \lambda_2) ds \right] \end{aligned} \quad (20)$$

де $x_m(s, w, u, \lambda_1, \lambda_2)$ обчислюється за формулою (9).

Тоді замість системи (19) розглянемо наближену визначальну

систему

$$\begin{cases} \Delta_m(w, u, \lambda_1, \lambda_2) = 0, \\ g(z + w, -B^{-1}Az + w, \lambda_1, \lambda_2) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Теорема 6. Нехай для нелінійної крайової задачі (4)–(7) виконуються умови A)–D) і, крім того:

E) існує випукла замкнена область $H' = \Omega' \times U' \times J'_1 \times J'_2 \subset \Omega \times U \times J_1 \times J_2$ така, що для деякого $m \geq 1$ наближена визначальна система (21) має в цій області єдиний розв'язок $(w, u, \lambda_1, \lambda_2) = (w_m, u_m, \lambda_{1m}, \lambda_{2m})$, індекс якого відмінний від нуля;

F) на границі $\partial H'$ області H' справедлива нерівність

$$\inf_{(w, u, \lambda_1, \lambda_2) \in \partial H'} |\Delta_m(w, u, \lambda_1, \lambda_2)| > \frac{10}{27} TKW(w, u, \lambda_1, \lambda_2), \quad (22)$$

де

$$W(w, u, \lambda_1, \lambda_2) = Q^{m-1} (I_n - Q)^{-1} [Q \delta_G(f) + K|(B^{-1}A + I_n)z|], \quad Q = \frac{3TK}{10}.$$

Тоді для задачі (4)–(7) існує розв'язок $x^*(t, w^*, u^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)$ з початковим значенням

$$x^*(0, w^*, u^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = z,$$

де $z = (h(\lambda_1^*, \lambda_2^*, u_1^* + w_1^*, u_2^* + w_2^*, \dots, u_n^* + w_n^*) - w_1^*, u_2^*, u_3^*, \dots, u_n^*), w^* \in \Omega', u^* \in U', \lambda_1^* \in J'_1, \lambda_2^* \in J'_2$.

Доведення. Оцінимо різницю $|\Delta(w, u, \lambda_1, \lambda_2) - \Delta_m(w, u, \lambda_1, \lambda_2)|$. Взявши до уваги нерівність (10),

$$\begin{aligned} |x^*(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2) - x_m(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2)| &\leq \overline{\alpha_1(t)} W(w, u, \lambda_1, \lambda_2) = \\ &= \varepsilon(x^*(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2), x_m(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2)), \end{aligned}$$

де, згідно із [2],

$$\overline{\alpha_1(t)} = \frac{20}{9} t(1 - \frac{t}{T}) \leq \frac{5}{9} T$$

$$W(w, u, \lambda_1, \lambda_2) = Q^{m-1} (I_n - Q)^{-1} [Q \delta_G(f) + K|(B^{-1}A + I_n)z|],$$

і використовуючи умову Ліпшица A), з рівностей (13) і (20) отримаємо наступну оцінку:

$$\begin{aligned} |\Delta(w, u, \lambda_1, \lambda_2) - \Delta_m(w, u, \lambda_1, \lambda_2)| &\leq \frac{1}{T} KW(w, u, \lambda_1, \lambda_2) \int_0^T \overline{\alpha_1(s)} ds = \\ &= \frac{10}{27} TKW(w, u, \lambda_1, \lambda_2) = \varepsilon(\Delta(w, u, \lambda_1, \lambda_2), \Delta_m(w, u, \lambda_1, \lambda_2)). \end{aligned} \quad (23)$$

На основі нерівностей (22) та (23) аналогічно як в теоремах 3.1, 17.1 з [1], можемо довести, що векторні поля $\Delta(w, u, \lambda_1, \lambda_2)$ і $\Delta_m(w, u, \lambda_1, \lambda_2)$ є

гомотопними. Це означає, що точне визначальне рівняння (13), а тому і визначальна система (19) крайової задачі (4)–(7) (тобто задачі (1)–(3)) має в області H' хоча б один розв'язок $w = w^*$, $u = u^*$, $\lambda_1 = \lambda_1^*$, $\lambda_2 = \lambda_2^*$.

Отже, можна зробити висновок, що параметризована крайова задача (4)–(7) має хоча б один розв'язок $x^*(t, w^*, u^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)$.

Причому,

$$x^*(0, w^*, u^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = z,$$

де $z = (h(\lambda_1^*, \lambda_2^*, u_2^* + w_2^*, u_3^* + w_3^*, \dots, u_n^* + w_n^*) - w_1^*, u_2^*, u_3^*, \dots, u_n^*), w^* \in \Omega', u^* \in U', \lambda_1^* \in J_1', \lambda_2^* \in J_2'$.

Зауваження. Очевидно, що тоді функція $y^*(t) = x^*(t, w^*, u^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) + w^*$ є розв'язком крайової задачі (1)–(3).

3. Існування необхідних умов.

Лема 1. Нехай для крайової задачі (1)–(3) виконуються умови A)–D), тоді для будь-яких четвірок

$$(w', u', \lambda_1', \lambda_2'), (w'', u'', \lambda_1'', \lambda_2'') \in \Omega \times U \times J_1 \times J_2 \quad (24)$$

справедлива така оцінка:

$$\begin{aligned} & |x^*(w', u', \lambda_1', \lambda_2') - x^*(w'', u'', \lambda_1'', \lambda_2'')| \leq [I_n + \overline{\alpha_1(t)} K (I_n - Q)^{-1}] \times \\ & \times \|z' - z''\| + b_1(z', z'') + \overline{\alpha_1(t)} K (I_n - Q)^{-1} \|w' - w''\|, \end{aligned} \quad (25)$$

де

$$b_1 \|z' - z''\| = [B^{-1} A + I_n] \|z' - z''\|,$$

$$z' = (h(\lambda_1', \lambda_2', u_2' + w_2', u_3' + w_3', \dots, u_n' + w_n') - w_1', u_2', u_3', \dots, u_n'),$$

$$z'' = (h(\lambda_1'', \lambda_2'', u_2'' + w_2'', u_3'' + w_3'', \dots, u_n'' + w_n'') - w_1'', u_2'', u_3'', \dots, u_n'').$$

Доведення. На основі формули (9) маємо

$$x_1(w', u', \lambda_1', \lambda_2') - x_1(w'', u'', \lambda_1'', \lambda_2'') =$$

$$= (z' - z'') + \int_0^t [f(s, z' + w', \lambda_1', \lambda_2') - f(s, z'' + w'', \lambda_1'', \lambda_2'')] ds -$$

$$- \frac{t}{T} \int_0^T [f(s, z' + w', \lambda_1', \lambda_2') - f(s, z'' + w'', \lambda_1'', \lambda_2'')] ds + \frac{t}{T} [B^{-1} A + I_n] (z' - z'').$$

Застосувавши до цієї різниці умову Ліпшица, аналогічно як в лемі 17.1 з [1], отримаємо

$$\begin{aligned} & |x_1(w', u', \lambda_1', \lambda_2') - x_1(w'', u'', \lambda_1'', \lambda_2'')| \leq [I_n + \overline{\alpha_1(t)} K] \|z' - z''\| + \\ & + \overline{\alpha_1(t)} K \|w' - w''\| + b_1(z', z''). \end{aligned}$$

Аналогічно

$$\begin{aligned} & |x_2(w', u', \lambda_1', \lambda_2') - x_2(w'', u'', \lambda_1'', \lambda_2'')| \leq [I_n + \overline{\alpha_1(t)} K + \overline{\alpha_2(t)} K^2] \|z' - z''\| + \\ & + [\overline{\alpha_1(t)} K + \overline{\alpha_2(t)} K^2] \|w' - w''\| + [I_n + \overline{\alpha_1(t)} K] b_1(z', z''), \end{aligned}$$

де

$$b_1|z' - z''| = [B^{-1}A + I_n]z' - z'',$$

$$\alpha_{m+1}(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t \alpha_m(s) ds + \frac{t}{T} \int_t^T \alpha_m(s) ds, \quad \alpha_0(t) = 1, \quad \alpha_1(t) = 2t \left(1 - \frac{t}{T}\right).$$

Застосовуючи метод математичної індукції переконуємося, що

$$|x_m(w', u', \lambda'_1, \lambda'_2) - x_m(w'', u'', \lambda''_1, \lambda''_2)| \leq \left[\sum_{i=0}^m \overline{\alpha_i(t)} K^i \right] |z' - z''| + \\ + \left[\sum_{i=1}^m \overline{\alpha_i(t)} K^i \right] |w' - w''| + \left[\sum_{i=0}^{m-1} \overline{\alpha_i(t)} K^i \right] b_1(z', z''). \quad (26)$$

Беручи до уваги оцінку леми 2.4 3 [2] $\alpha_{m+1}(t) \leq \left(\frac{3T}{10}\right)^m \overline{\alpha_1(t)}$, де

$$\overline{\alpha_1(t)} = \frac{10}{9} \alpha_1(t), \quad \text{і умову F), тобто те, що } \lambda(Q) < 1 \quad \left(Q = \frac{3TK}{10}\right), \quad \text{та}$$

переходячи до границі при $m \rightarrow \infty$, з нерівності (26) випливає оцінка (25), що потрібно було довести.

Лема 2. Нехай для нелінійної крайової задачі (1)–(3) виконуються умови A)–D). Тоді функція $\Delta(w, u, \lambda_1, \lambda_2)$ вигляду (13) визначена і неперервна в області $\Omega \times U \times J_1 \times J_2$ і для будь-яких четвірок (24) справедлива нерівність

$$|\Delta(w', u', \lambda'_1, \lambda'_2) - \Delta(w'', u'', \lambda''_1, \lambda''_2)| \leq \frac{b_1(z', z'')}{T} + \\ + \left[K + \frac{10}{27} K^2 T (I_n - Q)^{-1} \right] \times [|z' - z''| + |w' - w''| + b_1(z', z'')] = \\ = \varepsilon(\Delta(w', u', \lambda'_1, \lambda'_2), \Delta(w'', u'', \lambda''_1, \lambda''_2)) \quad (27)$$

Доведення. Згідно із теоремою 1 границя функції (9) для всіх $(w, u, \lambda_1, \lambda_2) \in \Omega \times U \times J_1 \times J_2$ є неперервною функцією. Тому при $(w, u, \lambda_1, \lambda_2) \in \Omega \times U \times J_1 \times J_2$ функція $\Delta(w, u, \lambda_1, \lambda_2)$ також неперервна і обмежена в даній області.

Враховуючи рівність (13), за допомогою безпосередніх обчислень неважко переконатися в справедливості наступної нерівності:

$$|\Delta(w', u', \lambda'_1, \lambda'_2) - \Delta(w'', u'', \lambda''_1, \lambda''_2)| \leq \frac{b_1(z', z'')}{T} + \\ + K[|z' - z''| + b_1(z', z'')] + \frac{K^2}{T} (I_n - Q)^{-1} [|z' - z''| + b_1(z', z'')] \int_0^T \overline{\alpha_1(t)} dt + \\ + \frac{K^2}{T} (I_n - Q)^{-1} |w' - w''| \int_0^T \overline{\alpha_1(t)} dt + K|w' - w''|.$$

Оскільки $\int_0^T \alpha_1(t) dt = \frac{10}{27} T^2$, з останньої нерівності випливає

$$\begin{aligned} |\Delta(w', u', \lambda_1', \lambda_2') - \Delta(w'', u'', \lambda_1'', \lambda_2'')| &\leq \frac{b_1(z', z'')}{T} + \\ &+ K[|z' - z''| + b_1(z', z'')] + \frac{10}{27} \frac{K^2}{T} (I_n - Q)^{-1} [|z' - z''| + b_1(z', z'')] + \\ &+ \frac{10}{27} \frac{K^2}{T} (I_n - Q)^{-1} |w' - w_2'| + K|w' - w_2'|. \end{aligned}$$

Групуючи доданки в останньому співвідношенні, отримаємо потрібну нам нерівність (27).

Наступне твердження дає необхідні умови існування розв'язку параметризованої крайової задачі (4)–(7) (тобто задачі (1)–(3)).

Теорема 7. Нехай для задачі (1)–(3) виконуються умови A)–D). Для того, щоб в деяку область $H'' = \Omega'' \times U'' \times J_1'' \times J_2'' \subset \Omega \times U \times J_1 \times J_2$ входила четвірка $\{w', u', \lambda_1', \lambda_2'\}$ даного розв'язку $x^*(t, w', u', \lambda_1', \lambda_2')$ крайової задачі з параметрами (4)–(7) (або, що теж саме, розв'язку $y^*(t) = x^*(t, w', u', \lambda_1', \lambda_2') + w'$ задачі (1)–(3)) необхідно, щоб для кожного m і довільної четвірки $\{\bar{w}, \bar{u}, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2\} \in H''$ виконувалась така нерівність:

$$\begin{aligned} |\Delta_m(\bar{w}, \bar{u}, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)| &\leq \\ &\leq \sup_{(w, u, \lambda_1, \lambda_2) \in H''} \left\{ \frac{b_1(\bar{z}, z)}{T} + \left[K + \frac{10}{27} K^2 T (I_n - Q)^{-1} \right] [| \bar{z} - z | + | \bar{w} - w | + b_1(\bar{z}, z)] \right\} + \\ &+ \varepsilon(\Delta(\bar{w}, \bar{u}, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2), \Delta_m(\bar{w}, \bar{u}, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)), \end{aligned} \quad (28)$$

де $b_1|z' - z''| = [B^{-1}A + I_n] |z' - z''|$, а вектор $\varepsilon(\Delta(\bar{w}, \bar{u}, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2), \Delta_m(\bar{w}, \bar{u}, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2))$ задається правою частиною (23).

Доведення. Нехай $w = w', u = u', \lambda_1 = \lambda_1', \lambda_2 = \lambda_2'$ задовольняють систему визначальних рівнянь (19), тобто $x^*(t, w', u', \lambda_1', \lambda_2')$ є розв'язком задачі (4)–(7). Запишемо нерівність (27) для четвірок $(w', u', \lambda_1', \lambda_2') = (\bar{w}, \bar{u}, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)$ та $(w'', u'', \lambda_1'', \lambda_2'') = (w, u, \lambda_1, \lambda_2)$. Тоді

$$\begin{aligned} |\Delta(\bar{w}, \bar{u}, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)| &\leq \frac{b_1(\bar{z}, z)}{T} + \\ &+ \left[K + \frac{10}{27} K^2 T (I_n - Q)^{-1} \right] [| \bar{z} - z | + | \bar{w} - w | + b_1(\bar{z}, z)] \end{aligned}$$

З (27) для $(w, u, \lambda_1, \lambda_2) = (\bar{w}, \bar{u}, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)$ матимемо

$$\Delta_m(\bar{w}, \bar{u}, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2) \leq \Delta(\bar{w}, \bar{u}, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2) + \varepsilon(\Delta(\bar{w}, \bar{u}, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2), \Delta_m(\bar{w}, \bar{u}, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)).$$

Об'єднуючи дві останні нерівності, отримаємо потрібне

співвідношення (28), що і потрібно було довести.

Висновки. Одержані результати можуть бути використані при дослідженні існування та побудові наближених розв'язків нелінійних крайових задач з параметрами, а також узагальнені на більш широкий клас задач.

Література

1. Самойленко А.М., Ронто М.Й. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – К.: Наукова думка, 1992. – 279 с.
2. Ronto M., Samoilenko A.M. Numerical-analytic methods in the theory of boundary-value problems. – Singapore: World Scientific, 2000. – 455 p.
3. Ронто Н. И., Король И. И. Исследование и решение краевых задач с параметрами численно-аналитическим методом // Укр. мат. журн. – 1994. – 46, №8. – С. 1031–1043.
4. Ronto M. On numerical-analytic method for BVPs with parameters // Publ. Univ. of Miskolc. Series D. Natural Sciences. – 1996. – 36, №2. – P. 125–132.
5. Ronto M. On some existence results for parametrized boundary-value problems // Publ. Univ. of Miskolc. Series D. Natural Sciences. – 1997. – 37. – P. 95–103.
6. Ronto M., Tégen M. Numerical-analytic methods for investigating three point boundary-value problems with parameters // Publ. Univ. of Miskolc. Series D. Natural Sciences. – 1999. – 40. – P. 67–77.
7. Rontó M. On non-linear boundary-value problems containing parameters // Archivum Mathematicum. – Brno, 2000. – Tomus 36. – P. 585–593.
8. Rontó M. On the investigation of parametrized non-linear boundary-value problems // Nonlinear Analysis. – 2001. – 47. – P. 4409–4420.
9. Ronto M., Shchobak N. On the numerical-analytic investigation of parametrized problems with nonlinear boundary conditions // Nonlinear Oscillations. – 2003. – 6, №4. – P. 482–510.
10. Ронто А.Н., Ронтó М., Щобак Н.М. О параметризации трехточечных нелинейных краевых задач // Нелінійні коливання. – 2004. – Т.7, №3. – P. 395–413.
11. Ronto A., Rontó M. A note on the numerical-analytic method for non-linear two-point boundary-value problems // Nonlinear Oscillations. – 2001. – 4., №1. – P. 112–128.

Надійшла до редколегії 20.10.2005.

УДК 539.3 621.378

Леонід К. Яровой, с.н.с., к.т.н.

Leonid K. Yarovoi, PhD.

**Аналіз трьох хвильової
інтерференції в лазерному
віброметрі.**

**Three-wave interference analysis in
laser vibrometer.**

Досліджено вплив на сигнал лазерного доплерівського віброметра небажаного віддзеркалення або розсіювання, що потрапляє на фотодетектор. Ця хвиля-завада завдяки інтерференції з основними хвилями інтерферометра дає видимий внесок у вихідний сигнал віброметра у вигляді специфічної хвилястості і піків, що спотворюють доплерівський сигнал швидкості. Запропоновано математичну модель, котра дозволяє аналізувати ці явища. Проведені експерименти, результати яких порівнюються з розрахунками.

In a laser Doppler interferometer, besides probe and reference beam a third coherent light wave, caused by spurious reflection, may hit the detector. Dependent on the actual intensity ratios, interference effects between regular and unwanted waves contribute to the generation of the electrical output signal. A mathematical analysis predicts the appearance of ripple and spikes riding on the demodulated signal due to distorted modulation of the Doppler signal. These effects are verified by experiments, demonstrating the dependence of distortions on given optical conditions.

Ключові слова: лазерна віброметрія, вимірювання вібрацій, доплерівські прилади.

Keywords: laser Doppler vibrometry, oscillation measurement, Doppler devices.

E-mail: Yarovoi@univ.kiev.ua

Лазерні доплерівські віброметри (ЛДВ) широко використовують в наукових дослідженнях при вивченні параметрів механічних коливань об'єктів різної природи [1, 2]. Основу кожного ЛДВ складає інтерферометр, в якому корисний сигнал, що має інформацію про миттєву швидкість об'єкту, утворюється при інтерференції на фотодетекторі опорної та зондувальної хвиль. Подекуди на фотодетектор може потрапляти третя хвиля, що приводить до спотворення вихідного сигналу ЛДВ [3]. Це трапляється при наявності додаткових поверхонь, або вікон випромінювання, поблизу фокусу лазерного променя [3, 4]. Вплив цієї додаткової компоненти може привести до спотворення сигналу та помилки визначення миттєвої швидкості.

В роботі проведений теоретичний аналіз, експериментальне дослідження та запропоновано використання досліджених ефектів для високо точного дискретного вимірювання переміщення.

Нехай на поверхні фотодетектору інтерферують три когерентні хвилі: $e_0 = E_0 \exp(-i \cdot (\omega_{opt} t + \Phi_0))$ - опорна хвиля, $e_1 = E_1 \exp(-i \cdot (\omega_{opt} t + \Phi_1))$ - зондувальна хвиля, $e_2 = E_2 \exp(-i \cdot (\omega_{opt} t + \Phi_2))$ - завада, або хвиля, що спот-

ворює сигнал, Φ_0, Φ_1, Φ_2 - початкові фази, ω_{opt} - кругова оптична частота. Струм i_{det} фотоприймача є пропорційним сумарній інтенсивності лазерного випромінювання E^2 :

$$E^2 = (e_0 + e_1 + e_2) \cdot (e_0 + e_1 + e_2)^* \quad (1)$$

Після перетворень отримаємо рівняння:

$$i_{det} \propto E_1^2 + E_2^2 + E_0^2 + 2E_2E_1 \cos(\Phi_2 - \Phi_1) + 2E_2E_0 \cos(\Phi_2 - \Phi_0) + 2E_0E_1 \cos(\Phi_0 - \Phi_1) \quad (2)$$

У випадку гомодинного інтерферометру струм i_{det} має стаціонарну величину, яка залежить від співвідношення фаз між трьома хвилями. У випадку гетеродинного інтерферометра, початкова фаза хвилі, що має зсув по частоті (нехай у нашому випадку це буде опорна хвиля), має додатковий член $2\pi f_0 t$, який відповідає наявності частоти гетеродина f_0 . У рівнянні (2) сума членів з косинусами представляють кінцевий доплерівський сигнал. Його високочастотний компонент пов'язаний з фазою Φ_0 опорної хвилі. Таким чином рівняння (2) може бути записано у вигляді:

$$i = I \cdot \cos(\Phi_0 - \phi), \text{ де} \\ I = 2E_0 \cdot \sqrt{2E_2E_1 \cos(\Phi_2 - \Phi_1) + E_1^2 + E_2^2} \quad - \text{амплітуда} \\ \phi = \arctan \left[\frac{E_1 \sin(\Phi_1) + E_2 \sin(\Phi_2)}{E_1 \cos(\Phi_1) + E_2 \cos(\Phi_2)} \right] \quad - \text{фаза.} \quad (3)$$

Нехай об'єкт, що досліджується, коливається за гармонічним законом, $x(t) = x_0 \cos(\Omega t)$. Фаза зондувальної хвилі становить відповідно $\Phi_1 = x_0 \cos(\Omega t) + \phi_1$, а $\Phi_2 = \phi_2$ - фазовий кут небажаного (шумового) компонента - стала величина. Доплерівська частота визначається, як похідна від фази ϕ : $\omega_{Dop} = \frac{d}{dt} \phi$, а миттєва швидкість об'єкту пропорційна доплерівському зсуву частоти $\nu = \frac{\omega_{Dop}}{2k}$ [1]. Після

перетворень отримаємо сигнал миттєвої швидкості:

$$\nu(t) = -\frac{1}{2} \Omega \cdot x_0 \left[1 + \frac{(\eta^2 - 1)}{2\eta \cdot \cos(2k \cdot x_0 \cdot \cos(\Omega t) + (\phi_1 - \phi_2)) + \eta^2 + 1} \right] \sin(\Omega t), \quad (4)$$

де через $\eta = E_1 / E_2$ - позначено відношення амплітуд зондувальної хвилі та завади, ϕ_1 та ϕ_2 - константи.

Аналіз співвідношення (4) показує, що наявність небажаного віддзеркалення ($E_2 \neq 0$) викликає появу специфічної хвилястості в доплерівському сигналі, як це показано на малюнку Мал. 1(а) для випадку $\eta = 10$.

Якщо відбиття, що створює сигнал, відсутнє ($\eta = \infty$) другий член в дужках у співвідношенні (4) дорівнює одиниці. Цей випадок - є

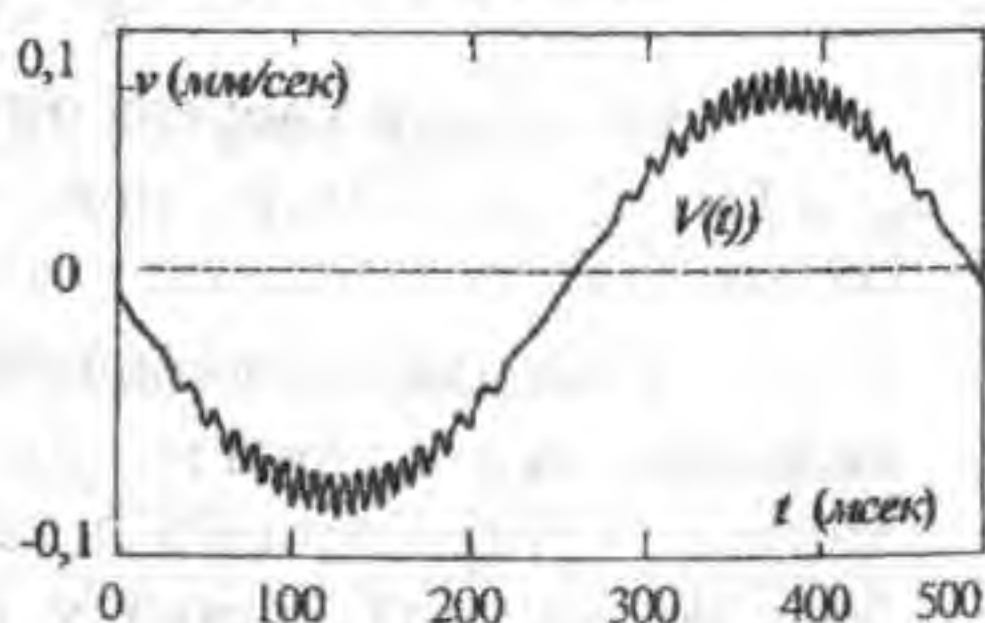
класична інтерференція двох хвиль. При цьому демодульований сигнал швидкості у (4) відповідає формі коливання $v(t) = -x_0 \cdot \Omega \cdot \sin(\Omega t)$.

Коли амплітуди обох цих сигналів відрізняються на незначну величину, тоді замість хвилястості невеликої амплітуди на сигналі швидкості з'являються чисельні гігантські імпульси. Аналіз другого члена у (4), який і відповідає за хвилястість функції $v(t)$, показує, що амплітуда хвилястого збурення сягає нескінченності при умовах, що $\eta \rightarrow 1$ і фаза косинуса у знаменнику дорівнює $(2n+1) \cdot \pi$, ($n=0,1,\dots$). Поблизу цієї особливої точки амплітуда імпульсів пропорційна $\frac{\eta+1}{\eta-1}$. Гігантські імпульси зображені на графіку на Мал.2, який розрахований для $\eta=1.01$ та тих же параметрів, що і сигнал на Мал. 1(a).

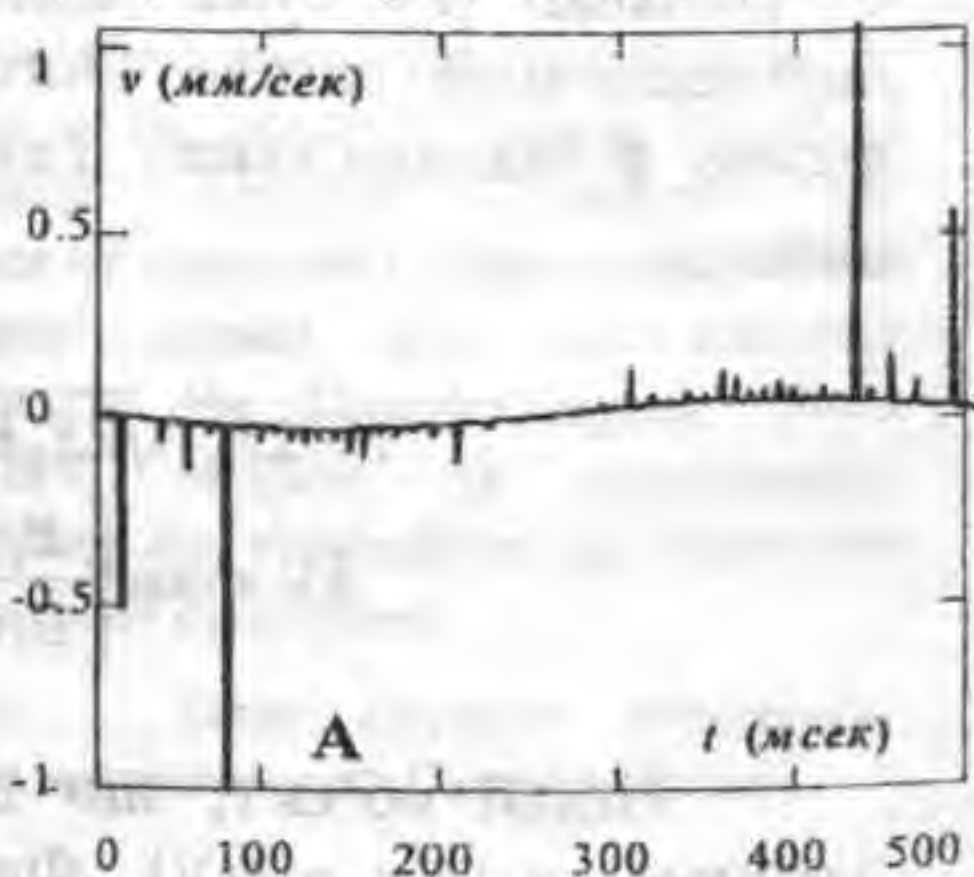
При умові $x < \lambda/2$ різниця фаз $(\phi_1 - \phi_2)$ хвиль, що інтерферують, критично впливає на виникнення гігантських імпульсів. А саме, імпульси майже завжди присутні при умові $(\phi_1 - \phi_2) = (2n+1) \cdot \pi$ і відсутні, коли $(\phi_1 - \phi_2) = 2n \cdot \pi$, ($n=0,1,\dots$).

Аналіз сигналу швидкості, а саме другого члену формули (4), котрий відповідає за ефект хвилястості, показує, що максимум амплітуди досягається, коли косинус у знаменнику дорівнює одиниці. Таким чином імпульси, що спостерігаються у сигналі миттєвої швидкості, точно фіксують зміну відстані до об'єкту на $\lambda/2$. Що може бути використано для дискретного вимірювання переміщення разом з вимірюванням швидкості. Для перевірки результатів розрахунків було проведено за допомогою лазерного віброметра серії CLV [5]. Сигнал (напряга) на виході лазерного віброметра пропорційний величині миттєвої швидкості вібрації. Для формування третьої лазерної хвилі, що моделює заваду, в зондувальному проміні віброметра була розміщена скляна пластинка з відомим коефіцієнтом відбиття. Досліджуваним об'єктом був гучномовець, на дифузори якого закріплена мішень - спеціальна фольга, котра має коефіцієнт відбиття в зворотному напрямку 4%. Гучномовець збуджувався генератором гармонічних коливань.

Дані на Мал. 3 подають результати експериментального вимірювання швидкості на частоті вібрації 311 гц при амплітуді



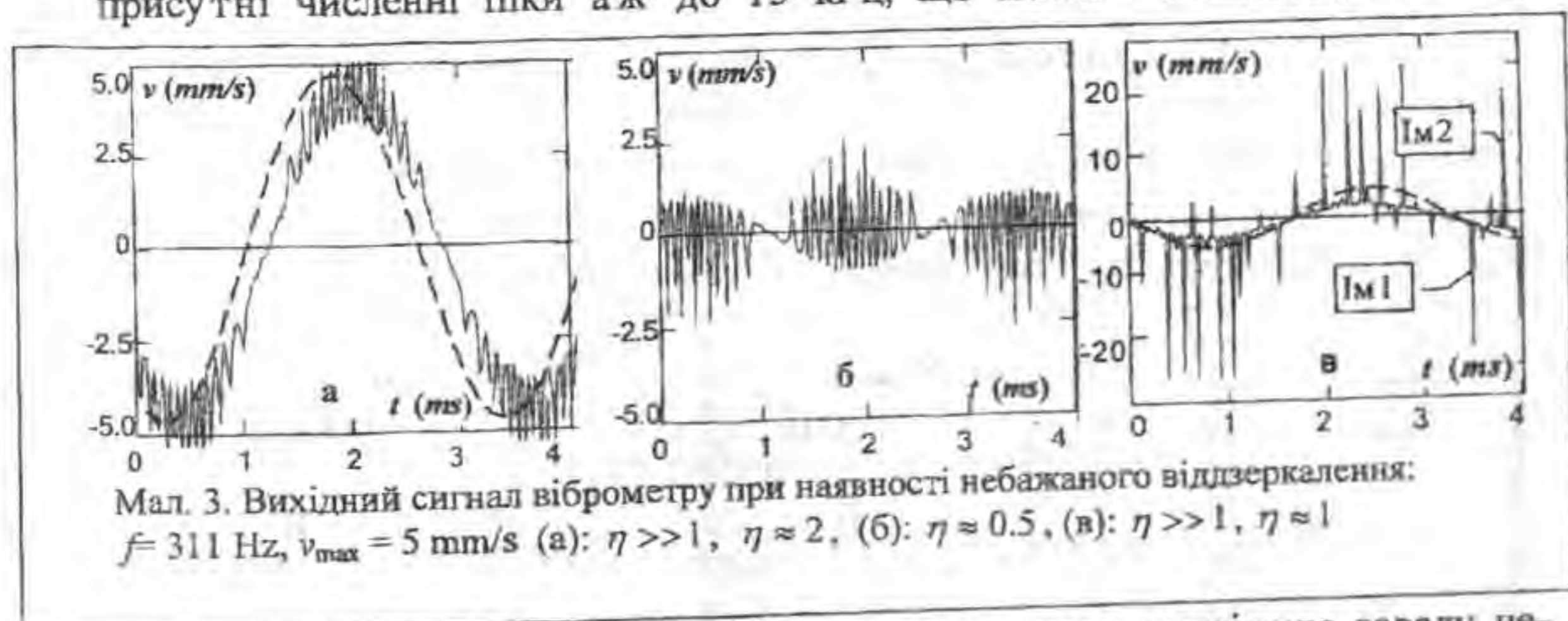
Мал. 1. Вихідний сигнал ЛДВ у присутності третьої хвилі $\eta = 10$



Мал. 2. Гігантські імпульси в сигналі ЛДВ при $\eta = 1.01$

швидкості 5 мм/с і різних значеннях η . Для порівняння пунктирною лінією зображений сигнал швидкості, що не спотворений завадою, тобто при умові $\eta \gg 1$.

Дані експерименту (графік 3а) відповідають відношенню амплітуд $\eta = 2$. Оскільки, небажане віддзеркалення у цьому випадку значне, хвилястість виникає, як явно видимий шумовий компонент сигналу швидкості. Відповідний нормалізований частотний спектр зображений на Мал. 4а. На додаток до очікуваного піку на частоті вібрації в спектрі присутні численні піки аж до 15 кГц, що можна вважати, як межу

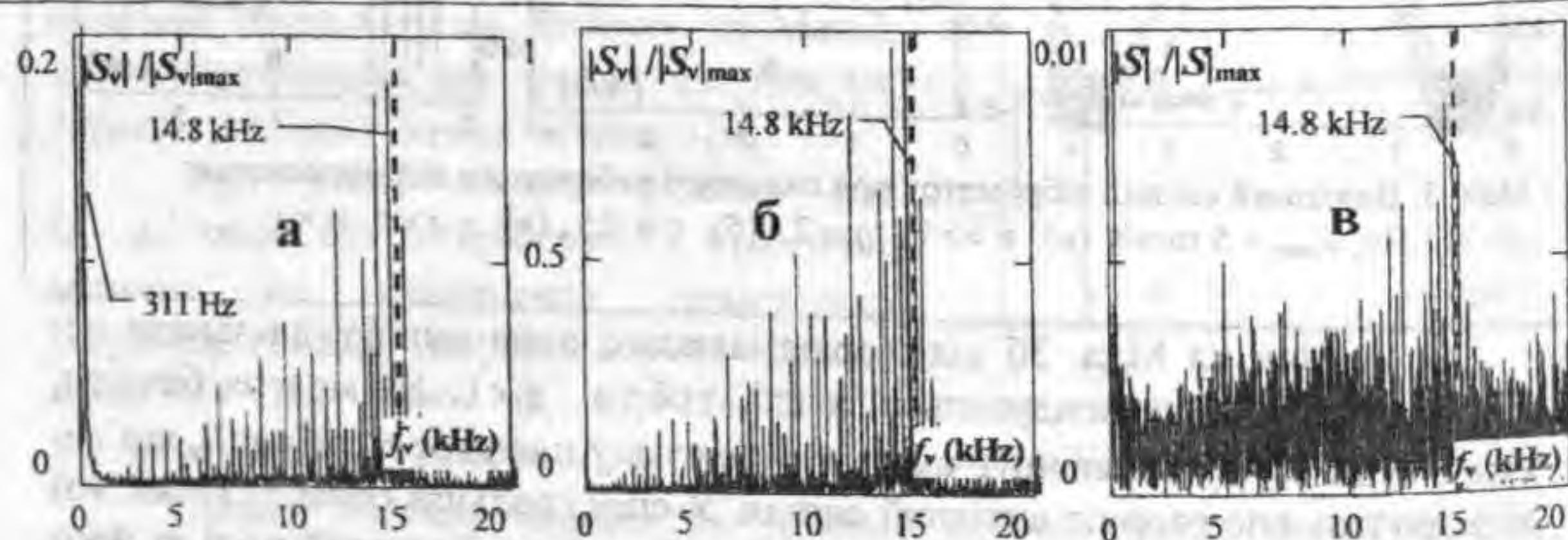


Графік на Мал. 3б відтворює випадок, коли амплітуда завади перевищує амплітуду зондувальної хвилі, тобто $\eta < 1$. Як можна бачити, амплітуда шуму перевищує амплітуду сигналу швидкості вібрації, що невідворотно спотворює вихідний сигнал. У спектральній області (Мал. 4б) відповідно спотворює вихідний сигнал. У спектральній області (Мал. 4б) компонент, що відповідає частоті вібрації, майже відсутній тоді як його гармоніки, що відповідають наявності хвилястості, домінують аж до 15 кГц.

Для того, щоб спостерігати гігантські імпульси, ми ретельно зрівняли інтенсивності сигналу і "шумового" променів, тобто встановили $\eta = 1$. На малюнку Мал. 3в представлений розподіл миттєвої швидкості у часі при $\eta \approx 1$. Цікаво відзначити зміну орієнтації імпульсів в точці $\eta = 1$. При $\eta > 1$ піки направлені "за межами" хвилі косинуса (пік Im1 на Мал. 3в), тоді як при $\eta < 1$ картини зворотний (пік Im2). Оскільки в реальному експерименті неможливо точно утримувати умову $\eta = 1$, орієнтація піків випадково змінюється навіть в межах половини періоду коливання відповідно тому, як тільки термін $(1 - \eta)$ замінює свій знак. Можна також бачити, що у випадку $\eta = 1$ амплітуда вібрації зменшується майже у двічі, як це і передбачено співвідношенням (4).

Відповідний випадку $\eta \approx 1$ спектр сигналу зображений на Мал. 4. в. Знов з'являється складова на частоті коливання об'єкту 311 Hz. В той же час ширина спектру значно розширюється за межу 14,8 кГц.

Спектри сигналу швидкості, що зображені на Фіг. 4, крім основного імпульсу на частоті вібрації 311 Гц мають нескінченну послідовність імпульсів, які є, фактично, результатом впливу ефекту хвилястості. Можна відзначити також, що у випадку $\eta \neq 1$ існує явно видима границя спектру близько частоти 14.8 кГц. Ця частота, як можна перевірити, співпадає з максимальною доплерівською частотою вібрації, котра розраховується за відомою формулою $\Delta f = \frac{2v_0}{\lambda}$. На наш погляд, це є результатом того, що спектр демодульованого сигналу швидкості (4) головним чином визначається членом $\cos(2k \cdot x_0 \cdot \cos(\Omega t) + (\phi_1 - \phi_2))$, який є фазомодульованим сигналом з максимальним відхиленням фази (індекс кутової модуляції) рівним $\Delta\phi = 2k \cdot x_0$. Відомо [6], що спектр фазомодульованих сигналів харак-



Мал. 4. Експериментальні спектри сигналів швидкості. (а): $\eta \approx 2$; (б): $\eta \approx 0.5$ (в): $\eta \approx 1$

теризується нескінченним рядом гармонік з частотами $n\Omega$ ($n=0, 1, \dots$), а їх амплітуди визначаються Беселевськими функціями. За умови $\Delta\phi \gg 1$ гармоніки поза $f_{\max} = \Delta\phi \cdot \Omega / 2\pi$ мають незначну амплітуду. Приймаючи до уваги, що при гармонійних коливаннях $v_0 = x_0 \Omega$ отримаємо до формулу, яка встановлює граничну частоту спектрів миттєвої швидкості $f_{\max} = \frac{2v_0}{\lambda}$.

Висновки

Присутність небажаного віддзеркалення в лазерному віброметрі зумовлює ефекти трьох хвильового фотозміщення лазерних променів. Математичний аналіз вказує, що результатом цього є спотворення доплерівського сигналу, котре проявляється у вигляді хвилястості або піків. Ці ефекти були досліджені також експериментально та

встановлено, зокрема, що амплітуда піків необмежено збільшується при зрівнянні амплітуд зондувальної хвилі та завади.

Хоча конструкція інтерферометра і пригнічує небажане внутрішнє віддзеркалення, зовнішнє розсіяння може також вплинути на його роботу при певних застосуваннях лазерного віброметра. Піки спостерігаються, наприклад, при дослідженні об'єктів, що вкриті склом або рідиною, а також при наявності пилу або інших розсіювачів к повітрі.

При наявності додаткової хвилі, котра потрапляє на фотодетектор, спектр сигналу швидкості має, в загальному випадку нескінченну смугу. Але існує видима гранична частота спектру поза якою амплітуди гармонік є малими. Ця гранична частота співпадає з доплерівською частотою максимальної швидкості об'єкту $f_{\max} = \frac{2v_0}{\lambda}$.

Поява додаткових піків у вихідному сигналі віброметра точно відповідає зміні амплітуди вібрації на $\lambda/2$. Це може бути використано для дискретного отримання величини амплітуди переміщення об'єкту одночасно з даними миттєвої швидкості.

Список використаної літератури

1. *Drain L. E.* The Laser Doppler Technique. - New York: John Wiley & Son Ltd., 1980.
2. *Куценко О. Г., Яровой Л. К.* Дослідження впливу неоднорідності на згині коливання балки методом лазерної віброметрії // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. 2003. - 3. - С. 95-100.
3. *Яровой Л. К.* Влияние когерентных помех на сигнал доплеровских виброметров // Фізичні методи та засоби контролю середовищ, матеріалів та виробів, Київ-Львів, 2004, - С. 20-25.
4. *Ombeline de La Rochefoucauld, Shyam M. Khana, Elizabeth S. Olson.* Recording depth and signal competition in heterodyne interferometry // J. Acoust. Soc. Am. 2005, - 117 (3) March. P.1267-1284.
5. *A. Lewin.* Compact laser vibrometer for industrial and medical application // Proc. SPIE: Vibration Measurements by Laser Techniques: Advances and Applications. - 1998. June Vol. 3411, p. 61-67,
6. *Радиотехнические цепи и сигналы* / Под ред. К.А. Самойло. - М.: Радио и связь, 1982.

Надійшла до редакції 14.10.2005

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 517.929

Олексій Бичков

Побудова інтегралу за процесом нечіткого блукання.

Приводяться основні означення теорії нечітких множин, побудовано інтеграл за процесом нечіткого блукання для кусково-постійної та кусково-неперервної функцій. Доведено основні властивості інтегралу.

Ключові слова: нечіткий елемент, нечіткий процес, інтеграл за процесом нечіткого блукання.

Alexei Bychkov

Constructing integral by a process of fuzzy roaming.

This paper introduces basic definitions of fuzzy set theory, and constructs an integral by process for piecewise-constant and piecewise-continuous functions. Basic properties of this integral are proved.

Key Words: fuzzy element, fuzzy process, integral by process of fuzzy roaming.

Стандартними моделями недетермінованих процесів були ймовірнісні моделі. Класичне означення ймовірності говорить про те, що ці моделі призначені для опису подій, які багаторазово повторюються. Теорія можливостей – розширення теорії нечітких множин – має справу з іншою недетермінованістю. Для подій, які не можна повторювати, використовується інша шкала – шкала «ступенів довіри», або можливостей.

На відміну від ймовірності, що має справу зі стохастичним експериментом, теорія можливостей орієнтована на відносну оцінку можливості появи деякої події. Вона маніпулює лише поняттями «більш можливо» й «менш можливо». Взагалі, можливісна шкала інваріантна щодо будь-якого неперервного монотонного перетворення шкали $[0,1]$.

Для моделювання динаміки нечітких об'єктів за допомогою систем диференціальних рівнянь уведемо поняття інтеграла за нечітким процесом. Дана робота є розвитком [5].

Вступ

Нехай (X, A) – вимірний простір, A – σ -алгебра на X . Через $\beta(X)$ позначатимемо сукупність всіх підмножин множини X . Будь-яку множину $A \subseteq X$ можна задати своєю характеристичною функцією:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}, \quad x \in X.$$

Заде в [1] вводить нечітку множину за допомогою характеристичної функції, що задана на множині X і приймає значення з відрізка $[0,1]$. Ця функція визначає значимість елементу x в множині A .

Означення 1 [2]. Можливісною шкалою називається півкільце $L = \{[0,1], \leq, +, \bullet\}$, тобто відрізок $[0,1]$ із звичайним порядком $\leq$ і двома операціями:

$$1. \quad a + b = \max\{a, b\};$$

$$2. \quad a \bullet b = \min\{a, b\}.$$

Надалі будемо розглядати A -вимірні функції $f: X \rightarrow L$. Позначимо через $L(X)$ клас таких функцій, що виконуються наступні властивості:

$$1. \quad f \in L(X), a \in L \Rightarrow a \bullet f = \min(a, f(x)) \in L(X);$$

$$2. \quad f, g \in L(X) \Rightarrow f + g = \min(f(x), g(x)) \in L(X); \quad f \bullet g = \max(f(x), g(x)) \in L(X);$$

$$3. \quad f \in L(X) \Rightarrow -f \equiv 1 - f(x) \in L(X);$$

4. Якщо послідовність функцій $f_1, \dots, f_n, \dots \in L(X)$, то
 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \in L(X)$; $\bullet \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \in L(X)$.

Для визначення можливісного простору необхідно ввести означення можливісної міри.

Означення 2 [2]. Функція $p: L(X) \rightarrow L$ із властивостями:

$$1. p((a \bullet f)(\cdot) + (b \bullet g)(\cdot)) = (a \bullet p(f(\cdot))) + (b \bullet p(g(\cdot)));$$

$$2. p\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\cdot)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p(f_n(\cdot));$$

$$3. \text{Якщо } f(\cdot) \equiv 1, \text{ то } p(f(\cdot)) = 1,$$

називається можливісною мірою.

Означення 3 [2]. Визначимо функцію $P: \beta(X) \rightarrow L$ таким чином:
 $P(A) = p(\chi_A(\cdot))$. Назвемо цю функцію можливістю чіткої події A .

Тоді можливісним простором назвемо трійку (X, A, P) .

Важливою рисою можливості є монотонність: якщо $A \subseteq B$, $P(A) \leq P(B)$.

В теорії можливостей нечітка множина визначається таким чином:

Означення 4 [2]. Нехай (X, A, P) – можливісний простір. Нечіткою множиною $\tilde{A} \in \tilde{\beta}(Y)$ назвемо вимірну відносно A функцію $\tilde{A}: X \rightarrow \beta(Y)$.

Характеристична функція множини $\tilde{A}$ обчислюється як
 $\mu_{\tilde{A}}(y) = P\{y \in \tilde{A}(x)\} = P(A^{-1}(y))$. В подальшому нечіткі множини будемо позначати через $\tilde{A}, \tilde{B}, \dots$. Сукупність всіх нечітких підмножин множини X будемо позначати через $\tilde{\beta}(X)$.

Легко показати, що теоретико-можливісні операції на нечітких множинах визначаються таким чином:

$$1. \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}, \quad x \in X;$$

$$2. \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}, \quad x \in X.$$

Означення 5 [2]. Нехай $\tilde{A}$ – нечітка множина. Назвемо величину
 $P(\tilde{A}) = p(\mu_{\tilde{A}}(\cdot))$ можливістю нечіткої множини $\tilde{A}$.

З визначення випливають найпростіші властивості операцій над подіями.

$$1. P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \max(P(A), P(B));$$

$$2. P(A \cap B) \leq P(A) \bullet P(B) = \min(P(A), P(B)).$$

Означення 6 [2]. Якщо $P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B)$, то події називаються незалежними.

Означення 7 [2]. Умовна, щодо події B , можливість події A є розв'язок
 $P\{A|B\}$ рівняння

$$\min\{P(A|B), P(B)\} = P(A \cap B).$$

Якщо розв'язків декілька, кожний з них назвемо варіантом умовної можливості. Наступна теорема показує, що в теорії можливостей σ -алгебра має менше значення, ніж у теорії ймовірностей.

Теорема 1 [2]. Можливість P можна продовжити на всі підмножини X (позначимо розширену можливість як $\bar{P}: \tilde{\beta}(X) \rightarrow L$) так, щоб:

1. Для будь-яких $A, B \subseteq X$ виконується $A \subseteq B \Rightarrow \bar{P}(A) \leq \bar{P}(B)$;
 $\bar{P}(A \cup B) = \max\{\bar{P}(A), \bar{P}(B)\}$.

2. Для будь-якого сімейства множин $A_j \subseteq X; j \in J$ виконується
 $\bar{P}\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) = \sup_{j \in J} \bar{P}(A_j)$. Зокрема, $\bar{P}(A) = \begin{cases} \sup_{x \in A} \bar{P}(\{x\}); & A \neq \emptyset \\ 0; & A = \emptyset \end{cases}$.

3. Для кожного $A \in \mathcal{A}$ $\bar{P}(A) = P(A)$.

Таке розширення не єдине, однак серед усіх розширень є максимальне, тобто для будь-якого іншого розширення $\bar{P}$ виконується $\bar{P}(\tilde{A}) \geq \bar{P}(\tilde{A})$.

Для введення поняття нечіткої величини дамо наступне означення.

Означення 8. Нехай задано σ -алгебри $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$. Функцію $\xi(\cdot)$ назовемо $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -вимірною, якщо для кожної множини $B \in \mathcal{B}$ її прообраз $\xi^{-1}(B) = \{x : \xi(x) \in B\} \in \mathcal{A}$.

Означення 9. Нехай задано можливісний простір $(X, \mathcal{A}, P)$ та вимірний простір $(Y, \mathcal{B})$. Нечіткою величиною назовемо $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -вимірну функцію $\xi : X \rightarrow Y$.

Нечітка величина породжує можливісний простір $(Y, \mathcal{B}, P_\xi)$, де можливість для кожного $B \in \mathcal{B}$ задається як $P_\xi(B) = P(\xi^{-1}(B)) = P\{\xi(x) \in B\}$.

З теореми 1 випливає, що можна визначити функцію $\mu_\xi(y) = \bar{P}\{\xi = y\}$, яка називається розподілом нечіткої величини. Можливість того, що нечітка величина ξ потрапить у множину B , можна виразити через розподіл: $P\{\xi \in B\} = \sup_{y \in B} \mu_\xi(y)$.

Означення 10 [2]. Нечіткі величини ξ та η зветься незалежними, якщо розподіл нечіткого вектора (ξ, η) дорівнює $\mu_{\xi\eta}(u, v) = \min\{\mu_\xi(u), \mu_\eta(v)\}$.

Означення 11. Нечітку величину ξ (скалярну або векторну) назовемо нормальною, якщо її розподіл має вигляд

$$\mu_\xi(u) = \varphi\left\|\Xi^{-1/2}(u - u_0)\right\|^2\right\},$$

де $\varphi(x)$ – монотонно спадна функція, що задана при $x \geq 0$ і така, що $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$, $\varphi(0) = 1$.

Вектор u_0 називається математичним сподіванням нормальної нечіткої величини, додатно визначена матриця Ξ – коваріаційною матрицею нормальної нечіткої величини.

Клас нормальних розподілів дуже широкий, але один такий розподіл можна перетворити в інший ізоморфним перетворенням можливісної шкали. Будь-який

нормальний розподіл $\mu_{\xi_1}(u) = \varphi_1\left\|\Xi^{-1/2}(u - u_0)\right\|^2\right\}$ можна перетворити в інший розподіл

$\mu_{\xi_2}(u) = \varphi_2\left\|\Xi^{-1/2}(u - u_0)\right\|^2\right\}$ з тією ж матрицею Ξ ізоморфним перетворенням

можливісної шкали $\gamma(z) = \varphi_2(\varphi_1^{-1}(z))$. Для розподілів $\mu_\xi(u) = e^{-u^2}$, $\mu_\xi(u) = \frac{1}{1+|u|}$ маємо

таке перетворення шкали: $\gamma(z) = \frac{1}{1 + \sqrt{-\ln z}}$.

Означення 12. Нечітким процесом називається функція $\xi(x, t) : X \times R \rightarrow Y$.

Означення 13. Нормальний нечіткий процес $\xi(t)$ називається процесом нечіткого блукання, якщо він:

1. З незалежними приростами, тобто для будь-яких моментів часу $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ нечіткі величини $\xi(t_2) - \xi(t_1)$ і $\xi(t_4) - \xi(t_3)$ незалежні.

2. При фіксованому t його перехідна можливість має вигляд

$$P\{\xi(t) = x \mid \xi(t_0) = x_0\} = \varphi\left(\frac{\|\Xi^{-1/2}(x - x_0)\|^2}{t - t_0}\right).$$

3. $\xi(0) = 0$.

Означення 14. [4] Модою (або модальним значенням) нечіткої величини називається така точка, де функція розподілу дорівнює одиниці, тобто

$$\text{mod } \xi = u_0; \quad \mu_\xi(u_0) = 1.$$

Основний результат.

Побудуємо інтеграл за процесом нечіткого блукання.

Означення 15. Послідовність нечітких величин ξ_n збігається за можливістю до нечіткої величини ξ , якщо для будь-якого додатного c виконується

$$P\{|\xi_n - \xi| > c\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Означення 16. Нехай задано кусково-постійну функцію $f: f(t) = \{y_k : t_k \leq t < t_{k+1}\}, k = 0 \dots N-1, t_0 = 0, t_N = T, w(t)$ – скалярний процес нечіткого блукання. Покладемо

$$\int_0^T f(t) dw(t) = \sum_{k=0}^{N-1} y_k (w(t_{k+1}) - w(t_k)).$$

Назвемо таку нечітку величину інтегралом за процесом нечіткого блукання від кусково-постійної функції.

Розглянемо найпростіші властивості такого інтеграла.

Лема 1. Мода інтеграла за процесом нечіткого блукання дорівнює 0.

Доведення. З події $w(t_k) = 0; k = 1, \dots, N$ випливає подія $\int_0^T f(t) dw(t) = 0$. Тоді з монотонності можливості можна записати

$$P\left\{\int_0^T f(t) dw(t) = 0\right\} \geq P\{w(t_k) = 0; k = 1, \dots, N\}.$$

Оскільки у процесу нечіткого блукання незалежні прирости, то виконується

$$P\{w(t_k) = 0; k = 1, \dots, N\} = P\{w(t_{k+1}) - w(t_k) = 0; k = 0, \dots, N-1\} = 1.$$

Тому $P\left\{\int_0^T f(t) dw(t) = 0\right\} = 1$, значить, $\text{mod } \int_0^T f(t) dw(t) = 0$.

Лема 2. Розподіл інтеграла за процесом нечіткого блукання симетричний.

Доведення. Ця властивість випливає із симетрії розподілу нормальної нечіткої величини.

$$P\left\{\int_0^T f(t) dw(t) = x\right\} = \sup_{\substack{a_0, \dots, a_{N-1} \in \mathbb{R} \\ \sum_{k=0}^{N-1} y_k a_k = x}} P\{w(t_1) - w(t_0) = a_0, \dots, w(t_N) - w(t_{N-1}) = a_{N-1}\} =$$

$$= \sup_{\substack{a_0, \dots, a_{N-1} \in \mathbb{R} \\ \sum_{k=0}^{N-1} y_k a_k = x}} P\{w(t_1) - w(t_0) = -a_0, \dots, w(t_N) - w(t_{N-1}) = -a_{N-1}\} = P\left\{\int_0^T f(t) dw(t) = -x\right\}.$$

Лема 3. (монотонність за часом). Для будь-якої числової множини $A \in \mathcal{A}$ і будь-яких двох моментів часу $T_1 \leq T_2$ виконується

$$P\left\{\int_0^{T_1} f(t) dw(t) \in A\right\} \leq P\left\{\int_0^{T_2} f(t) dw(t) \in A\right\}.$$

Доведення. Вважатимемо, що точка T_1 входить до розбиття $t_0, \dots, t_N$ під номером m . Оскільки можливість події $w(t_{k+1}) = w(t_k)$ при $k \geq m$ дорівнює 1, то

$$P\left\{\int_0^{T_1} f(t) dw(t) \in A\right\} = \min\left(P\left\{\int_0^{T_1} f(t) dw(t) \in A\right\}, P\{w(t_{k+1}) = w(t_k); m \leq k \leq N-1\}\right).$$

Оскільки процес $w(t)$ має незалежні прирости,

$$\begin{aligned} \min\left(P\left\{\int_0^{T_1} f(t) dw(t) \in A\right\}, P\{w(t_{k+1}) = w(t_k); m \leq k \leq N-1\}\right) = \\ = P\left\{\int_0^{T_1} f(t) dw(t) \in A \text{ \& } w(t_{k+1}) = w(t_k) \text{ при } m \leq k \leq N-1\right\}. \end{aligned}$$

З цієї події впливає подія $\int_0^{T_1} f(t) dw(t) \in A$.

$$\begin{aligned} P\left\{\int_0^{T_1} f(t) dw(t) \in A \text{ \& } w(t_{k+1}) = w(t_k) \text{ при } m \leq k \leq N-1\right\} \leq \\ \leq P\left\{\int_0^{T_2} f(t) dw(t) \in A\right\}. \end{aligned}$$

Лема 4. (монотонність за підінтегральною функцією). Якщо для будь-якого t виконується $|f_1(t)| \leq |f_2(t)|$, тоді

$$P\left\{\int_0^T f_1(t) dw(t) \in A\right\} \leq P\left\{\int_0^T f_2(t) dw(t) \in A\right\}.$$

Доведення. Оскільки $\frac{f_{1i}}{f_{2i}} \leq 1$, то $P\{w_{i+1} - w_i = \alpha_i\} \leq P\left\{w_{i+1} - w_i = \alpha_i, \frac{f_{1i}}{f_{2i}}\right\}$.

$$\begin{aligned} P\left\{\int_0^T f_1(t) dw(t) \in A\right\} = \sup_{\substack{\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1} \in \mathbb{R} \\ \sum_{i=0}^{N-1} f_{1i} \alpha_i \in A}} P\{w_{i+1} - w_i = \alpha_i, i = 0 \dots N-1\} \leq \\ \leq \sup_{\substack{\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1} \in \mathbb{R} \\ \sum_{i=0}^{N-1} f_{1i} \alpha_i \in A}} P\left\{w_{i+1} - w_i = \alpha_i, \frac{f_{1i}}{f_{2i}}, i = 0 \dots N-1\right\}. \end{aligned}$$

Зробимо заміну $\beta_i = \alpha_i \frac{f_{1i}}{f_{2i}}$. Тоді маємо

$$\sup_{\substack{\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1} \in \mathbb{R} \\ \sum_{i=0}^{N-1} f_{1i} \alpha_i \in A}} P \left\{ w_{i+1} - w_i = \alpha_i \frac{f_{1i}}{f_{2i}}, i = 0 \dots N-1 \right\} =$$

$$= \sup_{\substack{\beta_0, \dots, \beta_{N-1} \in \mathbb{R} \\ \sum_{i=0}^{N-1} f_{2i} \beta_i \in A}} P \{ \Delta w_i = \beta_i, i = 0 \dots N-1 \} = P \left\{ \int_0^T f_2(t) dw(t) \in A \right\}.$$

Лема 5. Лінійність.

$$\int_0^T [af(t) + bg(t)] dw(t) = a \int_0^T f(t) dw(t) + b \int_0^T g(t) dw(t).$$

Лема 6. Адитивність. Якщо $T_1 < T_2 < T_3$, то

$$\int_{T_1}^{T_3} f(t) dw(t) = \int_{T_1}^{T_2} f(t) dw(t) + \int_{T_2}^{T_3} f(t) dw(t).$$

Властивості 5 й 6 впливають з означення.

Щоб визначити інтеграл за процесом нечіткого блукання для більш широкого класу функцій $f(t)$, доведемо наступну лему.

Означення 16. Послідовність кусково-постійних функцій $\{f_n(t)\}$ збігається до 0 в середньому, якщо $\int_0^T |f_n(t)| dt = \sum_{k=0}^{N-1} |f_k|(t_{k+1} - t_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Лема 7. Нехай послідовність кусково-постійних функцій $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ у середньому. Тоді $\int_0^T f_n(t) dw(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ за можливістю.

Доведення. За означенням збіжності в середньому маємо:

$$P \left\{ \left| \int_0^T f_n(t) dw(t) \right| > c \right\} = P \left\{ \left| \sum_{k=0}^{N-1} f_k(w(t_{k+1}) - w(t_k)) \right| > c \right\} \leq$$

$$\leq P \left\{ \sum_{k=0}^N |f_k| \cdot |w(t_k) - w(t_{k-1})| \geq c \right\} =$$

$$= \sup_{\substack{\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1} \geq 0 \\ \sum_{i=0}^N |f_i| \alpha_i \geq c}} P \{ w(t_1) - w(t_0) = \alpha_0, \dots, w(t_N) - w(t_{N-1}) = \alpha_{N-1} \}.$$

З незалежності приростів

$$\sup_{\substack{\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1} \geq 0 \\ \sum_{i=0}^N |f_i| \alpha_i \geq c}} P \{ w(t_1) - w(t_0) = \alpha_0, \dots, w(t_N) - w(t_{N-1}) = \alpha_{N-1} \} =$$

$$= \sup_{\substack{\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1} \geq 0 \\ \sum_{i=0}^N |f_i| \alpha_i \geq c}} \min [P \{ w(t_1) - w(t_0) = \alpha_0 \}, \dots, P \{ w(t_N) - w(t_{N-1}) = \alpha_{N-1} \}].$$

Позначимо

$$h(\alpha) = \min [P \{ w(t_1) - w(t_0) = \alpha_0 \}, \dots, P \{ w(t_N) - w(t_{N-1}) = \alpha_{N-1} \}].$$

Тоді

$$\sup_{\substack{\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1} \geq 0 \\ \sum_{k=0}^{N-1} |f_k| \alpha_k \geq c}} \min [P\{w(t_1) - w(t_0) = \alpha_0\}, \dots, P\{w(t_N) - w(t_{N-1}) = \alpha_{N-1}\}] = \sup_{\substack{\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1} \geq 0 \\ \sum_{k=0}^{N-1} |f_k| \alpha_k \geq c}} h(\alpha).$$

Візьмемо набір: $\bar{\alpha}_i = \frac{c(t_{i+1} - t_i)}{\int_0^T |f_n(t)| dt}$. Для цього набору виконується $\sum_{k=0}^{N-1} |f_k| \bar{\alpha}_k = c$.

$$P\{w(t_{i+1}) - w(t_i) = \bar{\alpha}_i\} = \varphi\left(\frac{-\bar{\alpha}_i^2}{(t_{i+1} - t_i)^2}\right) = \varphi\left(\frac{c^2 (t_{i+1} - t_i)^2}{\left(\int_0^T |f_n(t)| dt\right)^2 (t_{i+1} - t_i)^2}\right) = \varphi\left(\frac{c^2}{\left(\int_0^T |f_n(t)| dt\right)^2}\right).$$

Таким чином, $h(\bar{\alpha}) = \min_i P\{w(t_{i+1}) - w(t_i) = \bar{\alpha}_i\} = \varphi\left(\frac{c^2}{\left(\int_0^T |f_n(t)| dt\right)^2}\right)$.

Візьмемо інший набір $\bar{\bar{\alpha}}_i$, для якого $\sum_{k=0}^{N-1} |f_k| \bar{\bar{\alpha}}_k \geq c$, не співпадаючий з $\bar{\alpha}_i$. Для

деякого k $\bar{\bar{\alpha}}_k \geq \frac{c(t_{k+1} - t_k)}{\int_0^T |f_n(t)| dt}$, і з спадання функції $\varphi(x)$ випливає, що

$$h(\bar{\bar{\alpha}}) \leq P\{w(t_{k+1}) - w(t_k) = \bar{\bar{\alpha}}_k\} < \varphi\left(\frac{c(t_{k+1} - t_k)}{\left(\int_0^T |f_n(t)| dt\right)^2}\right) = h(\bar{\alpha}).$$

Таким чином, ми показали, що верхня грань досягається на векторі $\bar{\alpha}$.

$$P\left\{\left|\int_0^T f_n(t) dw(t)\right| > c\right\} \leq \varphi\left(\frac{c^2}{\left(\int_0^T |f_n(t)| dt\right)^2}\right).$$

Оскільки $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$, то $P\left\{\left|\int_0^T f_n(t) dw(t)\right| > c\right\}$ збігається до 0 при $n \rightarrow \infty$. Таким

чином, ми довели, що $\int_0^T f_n(t) dw(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ за можливістю. Лему доведено.

Теорема 2. Нехай задано кусково-неперервну функцію $f(t)$, до якої збігаються у середньому дві послідовності кусково-постійних функцій $f_n(t)$ й $\tilde{f}_n(t)$

та існує границя за можливістю $Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T f_n(t) dw(t)$. Тоді існує границя

$$\bar{Q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \bar{f}_n(t) dw(t) \text{ і } \bar{Q} = Q.$$

Доведення. Згідно до леми 7 існує й дорівнює 0 границя за можливістю

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T [f_n(t) - \bar{f}_n(t)] dw(t) = 0.$$

Розглянемо значення виразу $Q - R$:

$$Q = Q - R = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \bar{f}_n(t) dw(t) = \bar{Q}.$$

Теорему доведено.

Тепер наведемо таке означення.

Означення 17. Нехай $f(t)$ є кусково-неперервна функція та до неї збігається в середньому послідовність кусково-постійних функцій $f_n(t)$. Тоді покладемо границю за можливістю

$$\int_0^T f(t) dw(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T f_n(t) dw(t).$$

Цей інтеграл назвемо інтегралом за процесом нечіткого блукання.

Легко доводиться, що для інтеграла від довільної кусково-неперервної функції виконуються властивості, що представлені в лемах 1 – 6.

Означення 18 [4]. Назвемо α -зрізом нечіткої величини ξ таку множину:

$$[\xi]_\alpha = \{y : P\{\xi = y\} \geq \alpha\}, \alpha \in (0, 1]$$

Знайдемо α -зрізи інтегралу за процесом нечіткого блукання від постійної функції: $f(t) \equiv c$. За означенням інтегралу за процесом нечіткого блукання

$\int_0^T c dw(t) = c(w(T) - w(0))$. За означенням нормальної нечіткої величини, розподіл інтегралу дорівнює

$$P\left\{\int_0^T c dw(t) = y\right\} = P\left\{w(T) - w(0) = \frac{y}{c}\right\} = \varphi\left(\frac{y^2}{c^2 T^2}\right).$$

Провівши заміну $\alpha = \varphi\left(\frac{y^2}{c^2 T^2}\right)$, отримаємо, що

$$P\left\{\left|\int_0^T c dw(t)\right| = |c|T\sqrt{\varphi^{-1}(\alpha)}\right\} = \alpha.$$

Якщо врахувати спадання функції $\varphi(y)$, одержимо

$$P\left\{\left|\int_0^T c dw(t)\right| \leq |c|T\sqrt{\varphi^{-1}(\alpha)}\right\} = \alpha.$$

Використовуючи поняття α -зрізу, отримуємо

$$\left[\int_0^T c dw(t)\right]_\alpha = \left[-|c|T\sqrt{\varphi^{-1}(\alpha)}, |c|T\sqrt{\varphi^{-1}(\alpha)}\right]. \quad (1)$$

Тепер знайдемо розподіл можливостей інтегралу для будь-якої кусково-постійної функції $f(t)$.

Лема 8. Нехай $f(t)$ кусково-постійна:

$$f(t) = \{y_k : t_k < t < t_{k+1}; 0 \leq k \leq N-1; t_0 = 0; t_N = T\}.$$

$$\left[\int_0^T f(t) dw(t) \right]_\alpha = \left[- \int_0^T f(t) |dt| \cdot \sqrt{\varphi^{-1}(\alpha)}, \int_0^T f(t) |dt| \cdot \sqrt{\varphi^{-1}(\alpha)} \right]. \quad (2)$$

Доведення. Використаємо метод математичної індукції. Дійсно, для $N=1$ вираз (1) доводить цю рівність.

Припускаючи, що цей вираз справедливий для N , доведемо його для $N+1$.

Величини $\int_0^{t_N} f(t) dw(t)$ та $\int_{t_N}^{t_{N+1}} f(t) dw(t)$ незалежні. Тому

$$\begin{aligned} \left[\int_0^{t_{N+1}} f(t) dw(t) \right]_\alpha &= \left[\int_0^{t_N} f(t) dw(t) \right]_\alpha + \left[\int_{t_N}^{t_{N+1}} f(t) dw(t) \right]_\alpha = \\ &= \left[- \int_0^{t_N} f(t) |dt| \cdot \sqrt{\varphi^{-1}(\alpha)}, \int_0^{t_N} f(t) |dt| \cdot \sqrt{\varphi^{-1}(\alpha)} \right] + \left[- \int_{t_N}^{t_{N+1}} f(t) |dt| \cdot \sqrt{\varphi^{-1}(\alpha)}, \int_{t_N}^{t_{N+1}} f(t) |dt| \cdot \sqrt{\varphi^{-1}(\alpha)} \right] = \\ &= \left[- \int_0^{t_{N+1}} f(t) |dt| \cdot \sqrt{\varphi^{-1}(\alpha)}, \int_0^{t_{N+1}} f(t) |dt| \cdot \sqrt{\varphi^{-1}(\alpha)} \right]. \end{aligned}$$

Таким чином, обчислено розподіл інтегралу для будь-якої кусково-постійної функції.

Література.

1. Заде Л. А. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений. // Математика сегодня. – М.: Знание, 1974.
2. Пытьев Ю. П.. Возможность. Элементы теории и применение. УРСС, М., 2000. – 190с.
3. Чуличков А. И.. Математические модели нелинейной динамики. – М.: Физматлит, 2000. – 296 с.
4. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике: Пер с фр. – М.: Радио и связь, 1990. – 288 с.
5. А. С. Бычков Дифференциальные уравнения – теоретико-возможностный подход. Тезисы докладов 7-й Крымской Международной Математической школы, 11–18 сентября, 2004г., стр. 33.

Надійшла до редакції 15.04.2005

Андрій П. Верченко ¹,
Володимир В. Попов ²

Andrew P. Verchenko ¹,
Volodymyr V. Popov ²

**Про один ефективний алгоритм
векторизації растрового
бінарного зображення ³**

**About effective vectorization
algorithm of raster binary image**

В роботі розглядається проблема векторизації растрового зображення. Кожен виділений з зображення об'єкт можна розглядати як бінарне растрове зображення, яке містить маску даного об'єкту. Введено необхідний теоретичний апарат і запропоновано алгоритм ефективної векторизації таких растрових бінарних зображень з врахуванням випадку наявності у об'єкті отворів.

Ключові слова: векторизація, растрове бінарне зображення.

The problem of raster image vectorization is reviewed in the article. Each selected image object may be examined as binary raster image that contains a mask of one object. The basic theoretic apparatus is introduced and an effecient algorithm for vectorization of the binaryraster images has been developed. The problem of "holes" vectorization for the appropriate objects has been solved too.

Key words: vectorization, binary raster image.

¹ E-mail: verchenko@univ.kiev.ua

² E-mail: popov@ils.com.ua

Вступ. В зв'язку з потужним розвитком комп'ютерних засобів – на даний момент активно розвиваються геоінформаційні системи (ГІС), що можуть зберігати різноманітні бази графічних даних. Одна з проблем, що виникають при створенні закінчених ГІС – проблема перетворення даних із традиційних джерел – паперових носіїв – в електронну форму (скановані растрові зображення) – з подальшою їх векторизацією. Під векторизацією будемо розуміти процес перетворення растрового зображення у векторний вигляд [1,2,4].

Задача векторизації растрового зображення є інтуїтивно зрозумілою і реалізована в багатьох програмних продуктах, що працюють з графічною інформацією (можна назвати, наприклад, AutoCad (www.autodesk.com), Esry ArcInfo (www.esri.com/software/arcgis/arcinfo), Corel Trace (www.iss.soton.ac.uk/software), Easy Trace (www.easytrace.com), R2V (www.r2v.com), MapEdit (www.boutell.com/mapedit), Centaurus (www.centaurus.pworlds-soft.com), SAL GeoViewer (www.simmonsaerofilms.com) та інші). Але інформація про вид алгоритмів, які використовуються в цих програмах – обмежена для публічного використання.

³ Дана робота виконана в рамках проектів Студентської Лабораторії з інформатики компанії ILS (USA), що створена при кафедрі моделювання складних систем факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Тому, з точки зору розробника програмного забезпечення, інтерес представляють ті реалізації алгоритмів векторизації, що викладені у відкритому друці і доступні для вивчення та вдосконалення. Такі алгоритми можна знайти, наприклад, в [1–4].

Згідно з [1], на етапі первинної векторизації необхідно побудувати векторну модель кожного із виділених з зображення об'єктів у вигляді точок і відрізків між цими точками. В роботах [1–3], для цього використовується алгоритм попиксельного сканування зображення. При цьому, з кожної знайденої точки границі (якщо вона ще не помічена), запускається процедура відслідковування границі, і всі такі точки помічаються для уникнення подвійного сканування. Таким чином, окрім послідовного пересування по рядкам зображення, при відслідковуванні границі необхідно буде рухатись по іншим рядкам та стовпцям, що, у випадку зображень великих розмірів, вимагатиме суттєвих машинних витрат. Крім того, фактично, граничні точки об'єкта ми скануватимемо двічі – як при послідовному скануванні, так і при відслідковуванні границі, що також збільшує час роботи алгоритму.

У даній роботі пропонується алгоритм векторизації, який проходить по кожній точці зображення лише одноразово. Крім того, в кожен момент часу для роботи алгоритму необхідно мати інформацію лише про два поточні рядки, по яким ведеться сканування. Цей факт може бути принципово суттєвим у випадку, коли інформація про зображення передається рядками з віддаленого комп'ютера з деякою затримкою – для роботи розробленого алгоритму інформація про частину зображення, що лежить нижче поточного рядка, не є необхідною.

В роботі викладено алгоритм векторизації кожного виділеного з зображення об'єкту, причому об'єкти можуть містити отвори. При цьому акцент робився на забезпечення можливості векторизації растрових зображень великих розмірів.

Основні означення та формалізація задачі. Не порушуючи загальності, під *растровим бінарним зображенням* (РБЗ) будемо розуміти матрицю з нулів (білі точки на РБЗ) та одиниць (чорні точки), в якій об'єкт задано чорними точками растра, а фон – білими [3]. Нехай РБЗ містить лише один однозв'язний об'єкт, що може мати отвори (мал.1).

Введемо систему координат з нулем в лівій верхній точці зображення (мал.1), яка часто використовується при роботі з растровими зображеннями [5,6]. Кожен елемент матриці називатимемо *пікселем РБЗ*, кількість стовпців матриці – *шириною РБЗ* W , а кількість рядків – *висотою РБЗ* H . Координати кожного пікселя будемо асоціювати з координатами його верхнього лівого кута (тоді верхній лівий піксель РБЗ матиме координати $(0;0)$, а правий нижній – $(W-1; H-1)$).

Будемо казати, що деяка ламана належить границі об'єкта на РБЗ, якщо кожна ланка цієї ламаної лежить між сусідніми пікселями різного кольору. Очевидно, що у випадку РБЗ всі такі ламані можуть мати або вертикально, або горизонтально направлені ланки, а всі вершини ламаної можуть приймати лише цілочисельні координати (в межах від $(0;0)$ до $(W;H)$).

Таким чином, результатом векторизації об'єкта на РБЗ являється сімейство ламаних, що задовольняють умовам:

- 1) кожна ламана належить границі об'єкта на РБЗ;
- 2) кожна ламана є замкненою (тобто початкова вершина співпадає з останньою);
- 3) це сімейство ламаних є повним (тобто не існує іншої замкненої ламаної, яка також належить границі даного об'єкта на РБЗ).

Очевидно, що результат векторизації містить як мінімум одну ламану, яка описує зовнішній контур об'єкта; всі інші ламані описують границі отворів, які містяться у об'єкті. На мал.1 результат векторизації об'єкта на РБЗ зображено жирними чорними лініями.

Більшість сучасних систем, в яких використовуються векторні представлення об'єктів, підтримують шейп-формат (shape specification) опису векторного об'єкту [7], згідно з яким зовнішній контур об'єкта представляється у порядку слідування вершин за годинниковою стрілкою, а отвори – в протилежному напрямку. Результат векторизації об'єкта на РБЗ також будемо представляти у цьому форматі (деталізацію формату можна знайти в [7]). Введемо далі ряд означень, що будуть використовуватись у процесі векторизації РБЗ.

Околом точки (x,y) (тут і далі ми працюватимемо лише з цілочисельними даними) називатимемо чотири сусідні пікселі з РБЗ, у яких один із кутів співпадає з точкою (x,y) (див. мал.2). Точку (x,y) називатимемо кутиком, якщо її окіл містить кутову точку одного кольору і діагональ – іншого.

Очевидно, що для будь-якого кутика (x,y) , ламана, що належить границі об'єкта і лежить в межах околу точки (x,y) , утворюватиме прямий кут і складається з двох ланок – вертикальної та горизонтальної.



Мал.1. Приклад однозв'язного РБЗ з отворами та результат його векторизації (чорним).



Мал.2. Окіл точки (x,y) .

Будемо казати, що кутик (x, y) є *відкритим вгору (вниз)*, якщо вертикальна ланка ламаної лежить вище (нижче) вершини (x, y) . Аналогічно, кутик (x, y) називатимемо *відкритим вправо (вліво)*, якщо горизонтальна ланка ламаної лежить правіше (лівіше) вершини (x, y) . Кутик називатимемо *кратності 2*, якщо він одночасно є відкритим і вгору, і вниз (такі кутики одночасно являються і відкритими вправо та вліво). Всі інші кутики, що не є кутиками кратності 2, називатимемо *звичайними кутиками* (або кутиками кратності 1).

На мал.3 представлено всі можливі 16 типів околів. Згідно введених означень, кутиками є околи 1–4, 9–12 та 15, 16. Кутики 1, 3, 9, 11, 15, 16 є відкритими вгору; кутики 2, 4, 10, 12, 15, 16 – відкритими вниз; кутики 1, 4, 10, 11, 15, 16 – відкритими вліво, а кутики 2, 3, 9, 12, 15, 16 – відкритими вправо. При цьому кутики 15 та 16 – є кутиками кратності 2, а всі інші – звичайними.



Мал.3. Всі можливі варіанти околів.

Зрозуміло, що результатом векторизації об'єкта на РБЗ буде послідовність кутиків, причому будь-які два сусідні кутики в цій послідовності будуть відкриті в протилежні сторони (як у горизонтальному, так і у вертикальному напрямках). Перейдемо до викладення запропонованого алгоритму векторизації.

Алгоритм векторизації однозв'язного об'єкту на РБЗ. Списком L [8] будемо називати спосіб збереження даних з наступними можливостями: 1) можливість додати елемент (чергову порцію даних S) в кінець списку; 2) можливість пересування по елементам списку (від початку списку – до останнього елементу); 3) забезпечення операції $end(L)$, яка повертає адресу останнього елементу списку L . Адресою елемента списку називатимемо показник, який вказує на місце знаходження даного елементу списку в пам'яті ЕОМ [8]. Всю необхідну інформацію про кутик зберігатимемо в структурованій формі у вигляді структури $S = \langle x, y, p1 \rangle$, де (x, y) – координати кутика, а показник $p1$ міститиме адресу кутика із списку L , який є наступним у векторному представленні об'єкта. Знаючи адресу p елементу списку, можна отримати доступ до будь-якого поля структури S шляхом $p \rightarrow$ (наприклад $p \rightarrow p1$ вказуватиме на наступний кутик).

Алгоритм.

I. Підготовка даних.

1.1. Створюємо список L (поки що пустий).

1.2. Створюємо масив індикаторів A (довжиною $W+1$ по кількості можливих x -координат кутиків). Елемент масиву $A[x]$ ($x=0, \dots, W$) буде зберігати адресу поточного відкритого вниз кутика в x -му стовпці (очевидно, що не може бути одночасно відкрито вниз декілька кутиків в одному стовпці). В початковий момент всі $A[x]=0$ – це означає, що стовпець x ($x=0, \dots, W$) не містить у даний момент відкритого вниз кутика.

1.3. Створюємо показчик p_{gor} , в якому для поточного рядка зберігатиметься адреса останнього відкритого вправо кутика ($p_{gor}=0$, якщо в поточний момент такого кутика нема).

II. Основний цикл.

Починаємо сканування по рядкам РБЗ ($y=0, \dots, H$). Покладаємо $y=0$.

2.1. Якщо $y \leq H$, то *goto* 2.2, інакше *goto* III.

Для поточного рядка y – починаємо сканування по стовпцям РБЗ ($x=0, \dots, W$). Покладаємо $x=0$.

2.2. Якщо $x \leq W$, то *goto* 2.3, інакше $y := y+1$ і *goto* 2.1.

2.3. Якщо поточна точка (x, y) є кутиком, то додаємо його в кінець списку L і *goto* 2.4, інакше *goto* 2.7.

2.4. Якщо поточний кутик (x, y) є відкритим вниз, то заносимо його адресу в $A[x]$: $A[x] = \text{end}(L)$ і *goto* 2.5. Інакше (тобто кутик – відкритий вверху) $\text{end}(L) \rightarrow p1 = A[x]$ або $A[x] \rightarrow p1 = \text{end}(L)$ (в залежності від того, який з кутиків є наступним в контурі об'єкта: $A[x]$ чи $\text{end}(L)$ відповідно) і покладаємо $A[x]=0$ (тобто тепер у x -му стовпці нема відкритих вниз кутиків). *Goto* 2.5.

2.5. Якщо поточний кутик (x, y) є відкритим вправо, то покладаємо $p_{gor} = \text{end}(L)$ і *goto* 2.6. Інакше (тобто кутик відкритий вліво) $p_{gor} \rightarrow p1 = \text{end}(L)$ або $\text{end}(L) \rightarrow p1 = p_{gor}$ (в залежності від того, який з кутиків є наступним в контурі об'єкта: $\text{end}(L)$ чи p_{gor} відповідно) і покладаємо $p_{gor}=0$ (тобто тепер у x -му стовпці нема відкритих вниз кутиків). *Goto* 2.6.

2.6. Якщо поточний кутик (x, y) має кратність 2, то повторно додаємо цей кутик в кінець списку L (це пов'язано з тим, що кутик кратності 2 двічі потрапляє у контур об'єкта). Заносимо його адресу в $A[x]$ і в p_{gor} : $A[x] = \text{end}(L)$, $p_{gor} = \text{end}(L)$ (тобто знову позначатимемо, що маємо відкритий вниз кутик у стовпці x і відкритий вправо кутик у рядку y) і *goto* 2.7. Інакше – *goto* 2.7.

2.7. $x := x+1$ і *goto* 2.2.

III. *Обробка списку L .* На даному етапі у списку L знаходяться всі кутики, що утворюють векторну границю об'єкту (враховуючи і можливі отвори). Потрібно виділити з L зовнішню границю (з обходом за годинниковою стрілкою) та границі внутрішніх отворів (з обходом проти годинникової стрілки).

3.1. В силу побудови списку L , перший елемент списку (запишемо його адресу в p_0) належить зовнішній границі об'єкту. Всі інші точки зовнішнього контуру визначаємо, рухаючись по списку (від p_0 до $p_0 \rightarrow p1$, потім до $p_0 \rightarrow p1 \rightarrow p1$ і т.д.), поки знову не досягнемо елемента з адресою p_0 . Помічаємо всі пройдені у списку елементи.

3.2. Рухаємось по списку L від p_0 послідовно (по порядку запису кутиків в список), доки не досягнемо ще непоміченого елемента. Якщо досягли кінця списку, а непомічених елементів не виявлено, то даний об'єкт не містить отворів, *goto IV*. Інакше (тобто ми зупинились на непоміченому елементі списку з адресою $\bar{p}$) покладаємо $p_0 = \bar{p}$. Аналогічно пункту 3.1., рухаємось по списку, доки знову не досягнемо p_0 і помічаємо ці елементи. Отриманий ланцюжок утворює один із отворів об'єкта, тому потрібно інвертувати цю послідовність кутиків, щоб отвір проходився проти годинникової стрілки. *Goto 3.2.*

IV. *Кінець алгоритму.*

Практичні рекомендації та подальші дослідження. Запропонований алгоритм використовує в якості вхідної інформації маску об'єкта (в статті маска еквівалентна означенню однозв'язного бінарного растрового зображення). Щоб отримати із вхідного (можливо багатоколірного) зображення маску поточного об'єкта— необхідно при послідовному скануванні рядків зображення знайти перший піксель, що належить даному об'єкту. Далі, застосовуючи рекурсивну заливку з даного пікселя, необхідно знайти всі пікселі, що належать даному об'єкту (а щоб уникнути повторної заливки вже використаних пікселів— можна відмічати щойно залиті пікселі в деякій таблиці індексів). Сукупність знайдених пікселів і утворює маску даного об'єкта, на основі якої можна застосовувати запропонований вище алгоритм.

Даний алгоритм було реалізовано і протестовано в середовищі C++Builder [8]. При цьому робився акцент на реалізацію, яка спроможна обробляти (векторизувати) файли великих розмірів (до 30000×30000 пікселів), що необхідно при обробці аерокосмічних знімків поверхні чи в інших прикладних задачах обробки зображень [6].

В подальших роботах з даної тематики планується розробка подібного алгоритму векторизації за допомогою кутиків для багатоколірних растрових зображень, що містять більше одного однозв'язного об'єкта. При цьому робитиметься спроба уникнути процедури рекурсивної заливки, а кутики оброблятимуться потоково, розподіляючи їх між різними об'єктами.

Література

1. Новиков Ю.Л. Эффективные алгоритмы векторизации растровых изображений и их реализация в геоинформационной системе / Автореф. дис.канд.техн.н. – Томск, 2002, -19с.
2. Костюк Ю.Л., Кон А.Б., Новиков Ю.Л. Алгоритмы векторизации цветных растровых изображений на основе триангуляции и их реализация // Вестник Томского государственного университета, 2003, № 280. – С. 275-280.
3. Местецкий Л.М. Непрерывный скелет бинарного растрового изображения //Доклад. 8-ая международная конференция по компьютерной графике и визуализации ГРАФИКОН'98. Москва, 1998.
4. Kolesnikov A., Belekhov V., Chalenko I. Vectorization of the raster images // Pattern Recognition and Image Analysis, 1996, 6(4).– P.784–794.
5. Верченко А.П. Оптимальное наложение двух изображений как дискретная задача оптимизации пучка траекторий //Кибернетика и вычислительная техника.– 2004.– Вып.138.– С.57-67.
6. Форсайт Д, Понс Д. Компьютерное зрение. Современный подход / Пер. с англ. – М. Из-во «Вильямс», 2004.– 928с.
7. ESRI Shapefile Technical Description. An ESRI White Paper—July 1998.– 34p.– <http://www.esri.com/library/whitepapers/pdfs/shapefile.pdf>
8. Холлингворт Д., Баттерфилд Д., Сворт Б. и др. C++ Builder 5. Руководство разработчика: пер. с англ.– М.: Изд. дом «Вильямс», 2001.– 880с (1 том), 832с (2 том).

Надійшла до редакції 25.06.2005

УДК 518:517. 944/947

Сергій О. Войцехівський*,
Володимир С. Саженьюк,
Павло О. Сущенко

Методи штрафу та фіктивних областей для чисельного розв'язування одного класу нелінійних варіаційних нерівностей в області довільної форми

Методи штрафу та фіктивних областей застосовуються до нелінійної варіаційної нерівності другого порядку з обмеженням у середині області довільної форми. Отримана оцінка швидкості збіжності методів штрафу та фіктивних областей.

Ключові слова: варіаційна нерівність, метод штрафу.

Sergiy O. Voitsekhovsky*,
Vladimir S. Sazhenyuk,
Pavlo O. Suschenko

Methods of penalty and fictitious region for numerical solution of one class of nonlinear variational inequalities in any region

Using methods of penalty and fictitious region for nonlinear variational inequality of second order with restriction inside the domain in any region, estimate of velocity of convergence for method of penalty and fictitious region was proved.

Key words: variational inequality, method of penalty.

*E-mail: moe@unikyb.kiev.ua

Важливий клас математичних моделей, розв'язки яких за звичай не вдається отримати у явному вигляді, складають варіаційні нерівності. До варіаційних нерівностей приводить значна кількість розв'язуваних на практиці задач [1,2].

При побудові чисельних алгоритмів розв'язування варіаційних нерівностей виникають складності, що пов'язані з наявністю додаткових обмежень на розв'язок, тому виникає необхідність застосовувати метод штрафу. Істотним моментом при розв'язуванні варіаційних нерівностей в області довільної форми являє собою форма області, в якій шукається розв'язок. Метод фіктивних областей дозволяє перейти від задачі зі штрафом в довільній області до нової нелінійної задачі в канонічній області, як правило, у прямокутнику.

При обґрунтуванні такого підходу важливо встановити оцінки швидкості збіжності методів штрафу та фіктивних областей [3].

В цій статті досліджуються методи штрафу і фіктивних областей при їх застосуванні до нелінійних варіаційних нерівностей з обмеженням в області довільної форми. Доведено теореми та отримані оцінки швидкості збіжності комбінації методів штрафу та фіктивних областей.

1. Постановка задачі.

Нехай $\Omega \in R^2$ - обмежена, однозв'язна область з границею Γ ,

$$a(v_1, v_2) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \frac{\partial v_1}{\partial x_i} \frac{\partial v_2}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^2 b_i \frac{\partial v_1}{\partial x_i} v_2 + q_0(x) v_1 v_2 \right) dx, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \forall v_1, v_2 \in \overset{0}{W}_2^1(\Omega), \quad q(x) \in L_{\infty}(\Omega), \quad q(x) \geq q_0 > 0, \quad a_{11} > 0, \quad a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0, \\ a_{12} = a_{21}, \quad b_0 = \max(|b_1|, |b_2|), \quad \nu = a_0 \left(1 - \frac{|a_{12}|}{\sqrt{a_{11}} \sqrt{a_{22}}} \right), \quad a_0 = \min(a_{11}, a_{22}), \\ q_0 - \frac{b_0^2}{\nu} \geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

При виконанні умови (2) білінійна форма $a(v_1, v_2)$ - коерцитивна:

$$\exists \mu > 0 : a(v, v) \geq \mu \|v\|_{\overset{0}{W}_2^1(\Omega)}^2, \quad \forall v \in \overset{0}{W}_2^1(\Omega). \quad (3)$$

Крім того, $\exists M_1 > 0$, така, що

$$|a(v_1, v_2)| \leq M_1 \|v_1\|_{\overset{0}{W}_2^1(\Omega)} \cdot \|v_2\|_{\overset{0}{W}_2^1(\Omega)}, \quad \forall v_1, v_2 \in \overset{0}{W}_2^1(\Omega), \quad (4)$$

(тут і надалі через $M_i (i=1, 2, \dots)$ позначатимемо додатні сталі, які не залежать від ε та δ).

Розглянемо наступну задачу:

знайти функцію $u \in K$, таку, що:

$$a(u, v - u) + (F(x, u), v - u) \geq 0, \quad \forall v \in K, \quad (5)$$

де

$$K = \{v \mid v \in \overset{0}{W}_2^1(\Omega), v \geq 0 \text{ майже всюди в } \Omega\},$$

функція $F(x, u)$ - вимірна, $\exists f(x) \in L_2(\Omega)$, що $|F(x, u)| \leq M_2 f(x)$,

$$\exists M_3 > 0 : \left| \frac{\partial F}{\partial u} \right| \leq M_3, \quad (6)$$

$$(F(x, v_1) - F(x, v_2))(v_1 - v_2) \geq 0, \quad \forall v_1, v_2 \in \overset{0}{W}_2^1(\Omega).$$

При виконанні умов (2), (6) задача (5) має єдиний розв'язок, що належить простору $\overset{0}{W}_{2,0}^2(\Omega)$ [2, глава 3]. Для спрощення викладок будемо вважати $F(x, 0) = 0$, що вочевидь не обмежує загальності.

II. Метод штрафу.

Варіаційній нерівності (5) поставимо у відповідність наступну задачу зі штрафом:

Знайти $u_{\varepsilon} \in \overset{0}{W}_2^1(\Omega)$ таку, що

$$a(u_{\varepsilon}, v) - \frac{1}{\varepsilon} (u_{\varepsilon}^-, v) + (F(x, u_{\varepsilon}), v) = 0, \quad \forall v \in \overset{0}{W}_2^1(\Omega), \quad (7)$$

де

$$u_{\varepsilon}^- = \begin{cases} -u_{\varepsilon}, & u_{\varepsilon} < 0 \\ 0, & u_{\varepsilon} \geq 0 \end{cases}, \quad u_{\varepsilon}^- \in \overset{0}{W}_2^1(\Omega).$$

Задача (7) при виконанні умов (2), (6) має єдиний розв'язок, який належить простору $W_{2,0}^2(\Omega)$ (див. [1], [2]).

Встановимо оцінку швидкості збіжності методу штрафу.

Теорема 1.

Нехай виконуються умови (2), (6), тоді розв'язок задачі (7) збігається при $\varepsilon \rightarrow 0$ до розв'язку варіаційної нерівності (5), при чому має місце оцінка

$$\|u - u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq M_4 \sqrt{\varepsilon} \|f\|_{L_2(\Omega)}. \quad (8)$$

Доведення.

Візьмемо в (7) $v = -u_\varepsilon^-$ і, враховуючи, що

$$a(u_\varepsilon, -u_\varepsilon^-) = a(u_\varepsilon^-, u_\varepsilon^-),$$

знайдемо:

$$a(u_\varepsilon^-, u_\varepsilon^-) + \frac{1}{\varepsilon} \|u_\varepsilon^-\|_{L_2(\Omega)}^2 - (F(x, u_\varepsilon), u_\varepsilon^-) = 0.$$

Використовуючи коерциативність білінійної форми $a(u, v)$, отримаємо:

$$\frac{1}{2} \|u_\varepsilon^-\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|u_\varepsilon^-\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq |(F(x, u_\varepsilon), u_\varepsilon^-)|.$$

Праву частину останньої нерівності оцінимо за допомогою нерівності Коші-Буняковського та за допомогою умови (6):

$$|(F(x, u_\varepsilon), u_\varepsilon^-)| \leq M_2 \|f\|_{L_2(\Omega)} \|u_\varepsilon^-\|_{L_2(\Omega)}.$$

Звідси випливають дві нерівності:

$$\|u_\varepsilon^-\|_{L_2(\Omega)} \leq M_2 \varepsilon \|f\|_{L_2(\Omega)}, \quad (9)$$

$$\|u_\varepsilon^-\|_{W_2^1(\Omega)} \leq M_6 \sqrt{\varepsilon} \|f\|_{L_2(\Omega)}. \quad (10)$$

Вибираючи в (5) послідовно $v = 0$ і $v = 2u$, дістанемо

$$a(u, u) + (F(x, u), u) = 0, \quad (11)$$

$$a(u, v) + (F(x, u), v) \geq 0, \quad \forall v \in K. \quad (12)$$

В (7) покладемо $v = u$, отримаємо

$$a(u_\varepsilon, u) - \frac{1}{\varepsilon} (u_\varepsilon^-, u) + (F(x, u_\varepsilon), u) = 0.$$

Останню рівність перепишемо у вигляді

$$a(u_\varepsilon - u, u_\varepsilon - u) - a(u, u) - a(u_\varepsilon - u, u_\varepsilon) - (F(x, u_\varepsilon), u) = -\frac{1}{\varepsilon} (u_\varepsilon^-, u).$$

Враховуючи (11) і нерівність $u_\varepsilon^- \cdot u \geq 0$, звідси виводимо

$$a(u_\varepsilon - u, u_\varepsilon - u) + (F(x, u), u) - (F(x, u_\varepsilon), u) \leq a(u_\varepsilon - u, u_\varepsilon),$$

або

$$a(u_\varepsilon - u, u_\varepsilon - u) + ((F(x, u) - F(x, u_\varepsilon)), u - u_\varepsilon) + ((F(x, u) - F(x, u_\varepsilon)), u_\varepsilon) \leq \leq a(u_\varepsilon - u, u_\varepsilon).$$

Враховуючи монотонність функції $F(x, u)$, маємо:

$$a(u_\varepsilon - u, u_\varepsilon - u) + ((F(x, u) - F(x, u_\varepsilon)), u_\varepsilon) \leq a(u_\varepsilon - u, u_\varepsilon).$$

Скористаємося очевидною рівністю

$$u_\varepsilon = u_\varepsilon^+ - u_\varepsilon^-,$$

де

$$u_\varepsilon^+ = \begin{cases} u_\varepsilon, & u_\varepsilon > 0 \\ 0, & u_\varepsilon \leq 0 \end{cases},$$

тоді

$$a(u_\varepsilon - u, u_\varepsilon - u) \leq a(u_\varepsilon - u, u_\varepsilon^+) - a(u_\varepsilon - u, u_\varepsilon^-) + + ((F(x, u_\varepsilon) - F(x, u)), u_\varepsilon^+) - ((F(x, u_\varepsilon) - F(x, u)), u_\varepsilon^-). \quad (13)$$

Підставивши в (7) і (12) $v = u_\varepsilon^+$, матимемо

$$a(u_\varepsilon, u_\varepsilon^+) + (F(x, u_\varepsilon), u_\varepsilon^+) = \frac{1}{\varepsilon} (u_\varepsilon^+, u_\varepsilon^-),$$

$$a(u, u_\varepsilon^+) + (F(x, u), u_\varepsilon^+) \geq 0.$$

Для функцій u_ε^- та u_ε^+ має місце очевидне співвідношення $u_\varepsilon^- \cdot u_\varepsilon^+ = 0$, враховуючи це, останні співвідношення перепишемо у вигляді:

$$a(u_\varepsilon, u_\varepsilon^+) + (F(x, u_\varepsilon), u_\varepsilon^+) = 0,$$

$$a(u, u_\varepsilon^+) + (F(x, u), u_\varepsilon^+) \geq 0.$$

З урахуванням останніх співвідношень, (13) перепишеться у наступному вигляді

$$a(u_\varepsilon - u, u_\varepsilon - u) \leq -a(u_\varepsilon - u, u_\varepsilon^-) - ((F(x, u_\varepsilon) - F(x, u)), u_\varepsilon^-).$$

Звідси, користуючи (3), (6), знайдемо

$$\mu \|u_\varepsilon - u\|_{W_1^1(\Omega)}^2 \leq |a(u_\varepsilon - u, u_\varepsilon^-)| + |((F(x, u_\varepsilon) - F(x, u)), u_\varepsilon^-)|.$$

З умов (6) випливає Ліпшиц-неперервність функції $F(x, u)$, тобто

$\forall v_1, v_2 \in W_2^1(\Omega)$ виконується:

$$|F(x, v_1) - F(x, v_2)| \leq M_1 |v_1 - v_2|.$$

Враховуючи це, отримаємо оцінку:

$$\|u_\varepsilon - u\|_{W_1^1(\Omega)}^2 \leq M_7 (\|u_\varepsilon - u\|_{W_1^1(\Omega)} \cdot \|u_\varepsilon^-\|_{W_2^1(\Omega)} + \|u - u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|u_\varepsilon^-\|_{L_2(\Omega)}).$$

З останньої оцінки і (9), (10) випливає твердження теореми.

Теорему доведено.

Зауваження.

Умови теореми можна послабити, а саме, теорема лишається справедливою, коли замість умов (6) виконуються наступні:

$$\begin{aligned} \forall v_1, v_2 \in \overset{0}{W}_2^1(\Omega), |F(x, v_1) - F(x, v_2)| &\leq M_3 |v_1 - v_2|, \\ (F(x, v_1) - F(x, v_2))(v_1 - v_2) &\geq 0, \\ |F(x, u)| &\leq M_2 f(x). \end{aligned} \quad (14)$$

III. Метод фіктивних областей

Для розв'язку задачі (7) застосуємо метод фіктивних областей. Доповнимо область Ω деякою областю Ω_1 до прямокутника Ω_0 з границею Γ_0 . В області Ω_0 розглянемо задачу:

знайти $u_\delta \in \overset{0}{W}_2^1(\Omega_0)$ таке, що

$$\begin{aligned} a_{\Omega_0}(u_\delta, v) + \int_{\Omega} q_0 u_\delta v dx + \frac{1}{\delta} \int_{\Omega_1} u_\delta v dx - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_2} (u_\delta \cdot v) dx + \\ + \int_{\Omega_0} F(x, u_\delta) v dx = 0, \quad \forall v \in \overset{0}{W}_2^1(\Omega_0), \end{aligned} \quad (15)$$

де функція $F(x, u)$ продовжена в область Ω_1 нулем.

$$a_D(v_1, v_2) = \int_D \left(\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial v_1}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_j} + \sum_{i,j} b_{ij} \frac{\partial v_1}{\partial x_i} \cdot v_2 \right) dx.$$

Задача (15) має єдиний розв'язок у класі функцій $\overset{0}{W}_2^1(\Omega_0)$, що випливає з результатів роботи [4].

Справедлива наступна теорема.

Теорема 2. При виконанні умов тереми 1 розв'язок задачі (15) ($\varepsilon = \sqrt{\delta}$) збігається при $\delta \rightarrow 0$ до розв'язку варіаційної нерівності (5), причому має місце оцінка

$$\|u - u_\delta\|_{W_2^1(\Omega)} \leq M_8 \sqrt[4]{\delta} \|f\|_{L_2(\Omega)}. \quad (16)$$

Доведення. Розв'язок $u_\delta(x)$ задачі зі штрафом (7) продовжимо нулем в область Ω_1 . Отриману функцію позначимо через $\bar{u}_\delta(x)$. Очевидно, що $\bar{u}_\delta \in \overset{0}{W}_2^1(\Omega_0)$. Порівнюючи (7) та (15) для функції $w(x) = u_\delta(x) - \bar{u}_\delta(x)$, отримаємо

$$\begin{aligned} a_{\Omega_0}(w, v) + \int_{\Omega} q_0 w \cdot v dx + \frac{1}{\delta} \int_{\Omega_1} w \cdot v dx - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_2} [(w + \bar{u}_\delta)^- - \bar{u}_\delta^-] \cdot v dx + \\ + \int_{\Omega} [F(x, w + \bar{u}_\delta) - F(x, \bar{u}_\delta)] \cdot v dx = - \int_{\Gamma} \frac{\partial u_\delta}{\partial n} v dx, \quad \forall v \in \overset{0}{W}_2^1(\Omega_0), \end{aligned}$$

Поклавши в останній рівності $v = w$ та скориставшись монотонністю функцій $-v^-$ та $F(x, w)$, в силу яких

$$- \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_2} [(w + \bar{u}_\delta)^- - \bar{u}_\delta^-] \cdot w dx \geq 0,$$

$$\int_{\Omega} [F(x, w + \bar{u}_{\delta}) - F(x, \bar{u}_{\delta})] \cdot w dx \geq 0.$$

Знайдемо

$$\mu \|w\|_{W_2^1(\Omega_0)}^2 + \frac{1}{\delta} \|w\|_{L_2(\Omega_1)}^2 \leq - \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial n} \cdot w dx.$$

Використовуючи нерівність Коші-Буняковського та нерівність [3]

$$\left\| \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial n} \right\|_{L_2(\Gamma)} \leq M_9 \|u_{\varepsilon}\|_{W_2^2(\Omega)} \leq M_{10} \|f\|_{L_2(\Omega)},$$

з останньої нерівності, після нескладних перетворень, виводимо

$$\|w\|_{W_2^1(\Omega_0)}^2 + \frac{1}{\delta} \|w\|_{L_2(\Omega_1)}^2 \leq M_{11} \|w\|_{L_2(\Gamma)} \|f\|_{L_2(\Omega)}. \quad (17)$$

Скористаємось нерівністю [5]

$$\|w\|_{L_2(\Gamma)} \leq M_{11} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\delta}} \|w\|_{L_2(\Omega_1)}^2 + \sqrt{\delta} \|w\|_{W_2^1(\Omega_0)}^2}.$$

Тоді з нерівності (17) почергово встановимо оцінки

$$\|w\|_{L_2(\Omega_1)} \leq M_{12} \sqrt{\delta} \|f\|_{L_2(\Omega)}$$

$$\|w\|_{W_2^1(\Omega_0)} \leq M_{13} \sqrt[4]{\delta} \|f\|_{L_2(\Omega)}$$

Значить

$$\|u_{\varepsilon} - u_{\delta}\|_{W_2^1(\Omega)} \leq M_{14} \sqrt[4]{\delta} \|f\|_{L_2(\Omega)}$$

і

$$\|u - u_{\delta}\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \|u - u_{\varepsilon}\|_{W_2^1(\Omega)} + \|u_{\varepsilon} - u_{\delta}\|_{W_2^1(\Omega)} \leq M_8 (\sqrt{\varepsilon} + \sqrt[4]{\delta}) \|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Поклавши $\varepsilon = \sqrt{\delta}$, переконуємось у справедливості теореми. Теорему доведено.

Література.

1. Бенсусан А., Лионс Ж.-Л. Импульсное управление и квазивариационные неравенства: Пер. с франц. – М.: Наука, 1987. – 600с.
2. Bensoussan A., Lions J. L. Applications des equations variationnelles en controle stochastique. – Paris: Dunod, 1978. – 380p.
3. Войцеховский С.А., Гаврилюк И.П., Саженьюк В.С. Оценки скорости сходимости метода штрафа и метода фиктивных областей для одного класса вариационных неравенств второго порядка с ограничением внутри области. Докл. АН УССР 1985, №8, с. 3-6.
4. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач: Пер. с франц. – М.: Мир, 1987. – 600с.
5. Оганесян Л. А., Руховец Л. А. Вариационные разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван, изд-во АН Арм ССР, 1979, 336с.

Надійшла до редакції 29.09.2005

УДК 519.8

Василь М. Горбачук*,
Наталія І. Гаркуша*

Vasyl M. Gorbachuk*,
Nataliya I. Garkusha*

**Максимізація функції доходу та
мінімізація функції витрат у
дворівневому програмуванні**

**Revenue function maximization
and cost function minimization in
bilevel programming**

Показано, що максимізація функції доходу і мінімізація функції витрат у постановці дворівневого програмування може бути однаково ефективною при різних виробничих функціях.

It is shown that revenue function maximization and cost function minimization in a bilevel programming context may be equally efficient under different production functions.

Ключові слова: ефективність, функція доходу, функція витрат, дворівневе програмування.

Key Words: efficiency, revenue function, cost function, bilevel programming.

*E-mail: GorbachukWasyI@netscape.net, NGarkusha@unicyb.kiev.ua

Моделі вимірювання продуктивності в реальних термінах [1] мають задовольняти різноманітним важливим критеріям [2]. Наприклад, ціни входів мають відбивати граничні продуктивності. Якщо галузь не задовольняє цій умові, то продуктивність краще вимірювати без застосування цін або термінів цінності.

Розроблено міри загальної продуктивності факторів для ситуацій, коли ціни не потрібні [3, 4]. Такі міри досить просто обчислювати. Крім того, зміна загальної продуктивності факторів розкладається на технічну зміну та зміну ефективності. Така декомпозиція корисна для аналізу джерел змін продуктивності.

Обчислення міри загальної продуктивності факторів [5] потребує лише даних про входи (фактори виробництва) та виходи. Входи та виходи можуть бути множинними. Вважається, що вони вимірюються для кожної одиниці прийняття рішень (ОПР) у кожний період часу. Кількості таких одиниць і періодів можуть бути будь-якими. Якщо традиційно кількість входів обирається більшою, ніж кількість виходів, то в даній роботі дослідимо одиницю прийняття рішень (ОПР) A з одним входом x і двома виходами y_1 та y_2 . Якщо залежність виходу від входів часто обирається у вигляді функції Кобба–Дугласа, то в даній роботі припустимо, що

$$y_{A1} = 2x \cos^2(x/10), \quad y_{A2} = 2x \sin^2(x/10).$$

Тоді будь-який додатний вихід потребує додатного входу:

$$y_{A1}(0) = 0, \quad y_{A2}(0) = 0.$$

Якщо припустити, що ціни обох виходів і входу однакові (нехай така ціна дорівнює 1), то дохід (revenue) становить

$$R_A = y_{A1} + y_{A2} = 2x \cos^2(x/10) + 2x \sin^2(x/10) = 2x,$$

а функція доходу (revenue) визначається

$$R_A(\bar{x}) = \max_{x \leq \bar{x}} (y_{A1} + y_{A2}) = \max_{x \leq \bar{x}} [2x \cos^2(x/10) + 2x \sin^2(x/10)] = \max_{x \leq \bar{x}} 2x = 2\bar{x}.$$

При цьому витрати становлять

$$C_A = x,$$

а функція витрат (cost) визначається

$$C_A(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = \min\{x : 2x \cos^2(x/10) \geq \bar{y}_1; 2x \sin^2(x/10) \geq \bar{y}_2\}.$$

Водночас прибуток дорівнює

$$\pi_A = R_A - C_A = 2x - x = x,$$

а відношення доходу до витрат стало ($\forall x > 0$):

$$R_A/C_A = 2x/x = 2.$$

ОПР В з одним входом x та двома виходами

$$y_{B1} = x, y_{B2} = x$$

має таку саму функцію доходу, як ОПР А. Прибуток ОПР В збігається з прибутком ОПР А, а відношення доходу до витрат для ОПР А і В однакове. ОПР В відрізняється від ОПР А функцією витрат:

$$C_B(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = \min\{x : x \geq \bar{y}_1; x \geq \bar{y}_2\} = \max\{\bar{y}_1, \bar{y}_2\}.$$

Якщо $\bar{y}_1 = 7, \bar{y}_2 = 9$, а входи вимірюються в натуральних числах, то

$$C_A(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = 21 > 9 = C_B(\bar{y}_1, \bar{y}_2).$$

Дані ОПР А можна перевірити таблично (з наближеннями всіх значень до цілих і враховуючи, що без наближень $y_{A1}(9) < 7, y_{A1}(20) < 7, y_{A2}(35) < 9$):

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$y_{A1}(x)$	2	4	5	7	8	8	8	8	7	6	5	3	2	1	0	0	1	2
$y_{A2}(x)$	0	0	1	1	2	4	6	8	11	14	17	21	24	27	30	32	33	34
x	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
$y_{A1}(x)$	4	7	11	15	20	26	32	38	44	50	55	59	62	64	64	64	61	58
$y_{A2}(x)$	34	33	31	29	26	22	18	14	10	6	3	1	0	0	2	4	9	14

Чи означає $C_A(7,9) > C_B(7,9)$, за інших рівних умов, що ОПР В ефективніша, ніж ОПР А? Звернімо увагу, що

$$y_{A1}(21) = 11 < 21 = y_{B1}(21),$$

$$y_{A2}(21) = 31 > 21 = y_{B2}(21);$$

$$y_{A1}(9) = 7 < 9 = y_{B1}(9),$$

$$y_{A2}(9) = 11 > 9 = y_{B2}(9).$$

Якщо вага виходу y_2 досить велика порівняно з вагою виходу y_1 , то ОПР А може бути ефективнішою, ніж ОПР В. Дізнатися про ці ваги

можна за допомогою обчислення тіньових цін. Крім того, можна спробувати застосувати підхід дворівневого програмування, притаманного складним ієрархічним системам.

У задачі дворівневого програмування доходу на першому (верхньому) рівні приймається рішення максимізації функції доходу з урахуванням того, що на другому (нижньому) рівні приймається рішення мінімізації функції витрат. У задачі дворівневого програмування витрат на першому рівні приймається рішення мінімізації функції витрат з урахуванням того, що на другому рівні максимізується функція доходу.

Нехай $\bar{x} = 35$, $\bar{y}_1 = 7$, $\bar{y}_2 = 9$.

Розглянемо спочатку задачу дворівневого програмування доходу. Коли на верхньому рівні максимізувати функцію доходу без урахування мінімізації функції витрат на нижньому рівні, то

$$R_A(\bar{x}) = 2 \times 35 = 70 = R_B(\bar{x}).$$

При цьому

$$y_{B1}(35) = 35 > 7 = \bar{y}_1,$$

$$y_{B2}(35) = 35 > 9 = \bar{y}_2,$$

однак

$$y_{A1}(35) = 61 > 7 = \bar{y}_1,$$

$$y_{A2}(35) < 9 = \bar{y}_2.$$

Отже, задача дворівневого програмування доходу для ОПР В має розв'язок $x_{BR} = \bar{x} = 35$, але таке значення $x = 35$ не є розв'язком задачі дворівневого програмування доходу для ОПР А. Якщо на верхньому рівні максимізувати функцію доходу з урахуванням мінімізації функції витрат на нижньому рівні, то розв'язком задачі дворівневого програмування доходу для ОПР А є $x_{AR} = 27 < x_{BR}$.

Таким чином, поставлене питання порівняння ефективності ОПР А та В, за умов $\bar{x} = 35$, $\bar{y}_1 = 7$, $\bar{y}_2 = 9$, у термінах задачі дворівневого програмування доходу зводиться до порівняння триплетів:

$$x_{BR} = 35, y_{B1}(35) = 35, y_{B2}(35) = 35;$$

$$x_{AR} = 27, y_{A1}(27) = 44, y_{A2}(27) = 10.$$

Розглянемо тепер задачу дворівневого програмування витрат. Коли на верхньому рівні мінімізувати функцію витрат без урахування максимізації функції доходу на нижньому рівні, то

$$C_A(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = 21,$$

$$C_B(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = 9.$$

При цьому

$$y_{A1}(21) = 11 > 7 = \bar{y}_1,$$

$$y_{A2}(21) = 31 > 9 = \bar{y}_2,$$

$$y_{B1}(9) = 9 > 7 = \bar{y}_1,$$

$$y_{B2}(9) = 9 = \bar{y}_2,$$

тобто $x_{AC} = 21$ є розв'язком задачі дворівневого програмування витрат для ОНР А, а $x_{BC} = 9$ – для ОНР В.

З іншого боку, поставлене питання порівняння ефективності ОНР А та В, за умов $\bar{x} = 35$, $\bar{y}_1 = 7$, $\bar{y}_2 = 9$, у термінах задачі дворівневого програмування витрат зводиться до порівняння триплетів:

$$x_{BC} = 9, y_{B1}(9) = 9, y_{B2}(9) = 9;$$

$$x_{AC} = 21, y_{A1}(21) = 11, y_{A2}(21) = 31.$$

Вважаючи, що з часом обсяги входу зростають, приходимо до динаміки (знаходячи її джерела у розвитку прийняття рішень ОНР):

ОНР А переходить від триплету

$$\{x_{AC} = 21, y_{A1}(21) = 11, y_{A2}(21) = 31\}$$

до триплету

$$\{x_{AR} = 27, y_{A1}(27) = 44, y_{A2}(27) = 10\};$$

ОНР В переходить від триплету

$$\{x_{BC} = 9, y_{B1}(9) = 9, y_{B2}(9) = 9\}$$

до триплету

$$\{x_{BR} = 35, y_{B1}(35) = 35, y_{B2}(35) = 35\}.$$

Іншими словами, у період $t=0$ ОНР А та В приймають рішення, розв'язуючи задачі дворівневого програмування витрат, а в період $t=1$ ОНР А та В приймають рішення, розв'язуючи задачі дворівневого програмування доходу.

У загальному випадку $y_i = (y_{i1}, \dots, y_{im})^T$ – вектор M невід'ємних виходів ОНР i , $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik})^T$ – вектор K невід'ємних входів ОНР $i=1, \dots, N$. Для ОНР j міра технічної ефективності за входом (input) Фаррелла [2] визначається

$$F_i(y_j, x_j) = \min \theta,$$

$$Yz \geq y_j,$$

$$Xz \leq \theta x_j,$$

де $z = (z_1, \dots, z_N)^T \in R_+^N$, $Y = (y_1, \dots, y_N)$, $X = (x_1, \dots, x_N)$.

Тоді у період $t=0$

$$Y_0 = (y_A, y_B) = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 31 & 9 \end{pmatrix},$$

$$X_0 = (x_A, x_B) = \begin{pmatrix} 21 & 9 \end{pmatrix},$$

а міра технічної ефективності за входом Фаррелла для ОНР В визначається

$$F_i(y_{B1}, y_{B2}, x_B) = \min \theta,$$

$$11z_1 + 9z_2 \geq 9,$$

$$31z_1 + 9z_2 \geq 9,$$

$$21z_1 + 9z_2 \leq 9\theta,$$

$$z_1, z_2 \geq 0.$$

Звідси

$$9\theta \geq 21z_1 + 9z_2 = 10z_1 + 11z_1 + 9z_2 \geq 9 + 10z_1, \\ z_1 = 0, z_2 = 1, \theta = 1.$$

Аналогічно у період $t=1$

$$Y_1 = (y_A, y_B) = \begin{pmatrix} 44 & 35 \\ 10 & 35 \end{pmatrix},$$

$$X_1 = (x_A, x_B) = (27 \quad 35),$$

а міра технічної ефективності за входом Фаррелла для ОПР В визначається

$$F_1(y_{B1}, y_{B2}, x_B) = \min \theta,$$

$$44z_1 + 35z_2 \geq 35,$$

$$10z_1 + 35z_2 \geq 35,$$

$$27z_1 + 35z_2 \leq 35\theta,$$

$$z_1, z_2 \geq 0.$$

Звідси

$$35\theta \geq 27z_1 + 35z_2 = 17z_1 + 10z_1 + 35z_2 \geq 35 + 17z_1,$$

$$z_1 = 0, z_2 = 1, \theta = 1.$$

Таким чином, ОПР А і В однаково технічно ефективні за входом Фаррелла в обох періодах.

Тепер проаналізуємо всі чотири розглядувані триплети як окремі ОПР. Вектор тіньових цін (p^*, w^*) Шепарда для виходів і входів [6] можна дістати із задачі лінійного програмування для ОПР j :

$$\max_{w, p \geq 0} p^T y_j,$$

$$p^T y_i - w^T x_i \leq 0, i = 1, \dots, N,$$

$$w \leq w_j.$$

Нехай тут $y_j = (11 \quad 31)^T$, $w_j = 1$:

$$\max(11p_1 + 31p_2),$$

$$11p_1 + 31p_2 - 21w \leq 0,$$

$$44p_1 + 10p_2 - 27w \leq 0,$$

$$9p_1 + 9p_2 - 9w \leq 0,$$

$$35p_1 + 35p_2 - 35w \leq 0,$$

$$w \leq 1,$$

$$p_1, p_2, w \geq 0.$$

Звідси дістаємо:

$$11p_1 + 31p_2 = 21,$$

$$w = 1,$$

$$p_1 + p_2 \leq 1,$$

$$44p_1 + 10p_2 \leq 27,$$

звідки

$$44p_1 + 10p_2 = 27,$$

$$11p_1 + 2.5p_2 = 6.75,$$

$$28.5p_2 = 14.25,$$

$$p_2 = 0.5 = p_1,$$

тобто тіньові ціни виходів однакові.

Легко перевірити на чотирьох триплетах, що за умов $\bar{x} = 35$, $\bar{y}_1 = 7$, $\bar{y}_2 = 9$ значення функції витрат дорівнює 8, а значення функції доходу становить 35.

Таким чином, максимізація функції доходу та мінімізація функції витрат у постановці дворівневого програмування може бути однаково ефективною при різних виробничих функціях.

Література

1. Горбачук В., Гаркуша Н. Вимірювання ефективності методами математичного програмування // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2005. – 3.
2. Farrell M.J. The measurement of productive efficiency // Journal of the Royal Statistical Society. Series A. – 1957. – 120. – P. 253-281.
3. Fare R., Grosskopf S. Measuring productivity: a comment // International journal of operations & production management. – 1994. – V. 14. – 9. – P. 83-88.
4. Fare R., Grosskopf S., Lindgren B., Roos P. Productivity changes in Swedish pharmacies, 1980-1989: a nonparametric Malmquist approach // Journal of productivity analysis. – 1992. – V. 3. – 1/2. – P. 85-101.
5. Fare R., Grosskopf S., Lindgren B., Roos P. Productivity developments in Swedish hospitals: a Malmquist output index approach / Data envelopment analysis: theory, methodology and applications. A.Charnes, W.W.Cooper, A.Y.Lewis, L.M.Seiford (eds.) – Boston, MA: Kluwer Academic Publishers, 1995. – P. 253-272.
6. Shepard R.W. Theory of cost and production functions. – Princeton, NJ: Princeton University Press, 1970.

Надійшла до редакції 04.07.2005

УДК 519.6

Андрій Л. Заворотний*,
Веда С. Касьянюк

Про розв'язок задач обробки та інтерпретації результатів вимірювань в умовах нечіткості

В рамках теоретико-можливісного підходу розв'язані задачі синтезу лінійної випромінюючої системи та відновлення ділянок контурів як задачі редукції вимірювань до обчислень. Наведені результати обчислювального експерименту.

Ключові слова: теоретико-можливісний підхід, оптимізація за Парето, оцінювання.

Andriy L. Zavorotnyy*,
Veda S. Kasyanyuk

On the measurements' processing and interpretation problem decision under fuzziness condition

Within the theory of possibilities approach the linear radiating system synthesis task and contours' segment restoration task are solved as problem of measurements reduction to calculations. The computing experiment's results are submitted.

Key Words: the theory of possibilities approach, Pareto optimization, estimation.

*E-mail: zal_ua@ukrpost.net

Розглянемо типову схему вимірювань, яка описується рівністю [1]

$$y = Gu + v, \quad (1)$$

Тут y інтерпретується, як спотворений шумом v вихідний сигнал приладу G , на вхід якого поданий сигнал u . Позначимо символом Π гіпотетичний прилад, вихідний сигнал якого дає значення параметрів досліджуваного об'єкту, не спотвореного процесом вимірювання, якщо на його вхід поданий сигнал u , властивий реальному процесу вимірювань. Задача полягає у визначенні такого оператора B , який дозволив би інтерпретувати сигнал Bu як найбільш точну версію Πu .

Для розв'язку сформульованої задачі аналізу і інтерпретації результатів експерименту у випадку, коли похибка v , що присутня в результуючих даних, промодельована випадковими величинами (тобто відома певна статистична інформація про збурення), можна вказати [1-3] цілий спектр методів, пов'язаних з тією чи іншою постановкою задачі, що дають можливість отримання параметрів об'єкту на основі вимірювань вигляду (1). Але в експериментальних дослідженнях часто трапляється ситуація, коли отримати статистичну інформацію або аналітично описати природу збурень в термінах теорії ймовірності неможливо. В таких

випадках можна звернутися до експертних оцінок та використати їх в алгоритмах обробки тим чи іншим чином.

Деталізуємо представлену вище модель вимірювань. Нехай в (1) $G: H_1 \rightarrow H_2$ – лінійний обмежений оператор, що діє з гільбертового простору H_1 в скінченновимірний гільбертів простір H_2 , u – невідомий елемент простору H_1 , y – відомий елемент простору H_2 , v – нечіткий елемент простору H_2 , $\Pi: H_1 \rightarrow H_3$ – оператор Гільберта-Шмідта, що діє з H_1 в гільбертів простір H_3 . Припустимо також, що експертом заданий розподіл нечіткого елемента $v - \varphi^v(\cdot): H_2 \rightarrow L$, що реалізує принцип, природній для багатьох процесів вимірювання: більший шум має меншу можливість. Тут L – шкала на сегменті $[0;1]$ з природнім порядком, який заданий нерівністю $\leq$ та двома правилами композиції: додаванням, що інтерпретується як $\max$, та множенням, що інтерпретується як $\min$ [4]. В роботі [5] запропоновано шукати оптимальний оператор Гільберта-Шмідта $B: H_2 \rightarrow H_3$ як розв'язок задачі

$$\begin{cases} \|BG - \Pi\| \rightarrow \min_B \\ \theta \sup_z \sup_u \min(\varphi^v(z, u), \theta l(\Pi u, d(z))) \rightarrow \max_B \end{cases} \quad (2)$$

тобто задачі одночасної мінімізації норми операторної нев'язки та максимізації необхідності коректності оцінювання нечіткої величини або ж інтегралу по необхідності від $l(\Pi u, d(z))$, що записаний в термінах теорії можливостей. В (2) $d(z)$ – стратегія оцінювання; $l(\Pi u, d(z))$ – можливість відсутності похибки, що виникає при виборі $d(z)$ як значення Πu для кожного значення $u \in H_1$ (нечітке відношення коректності); θ – інволюція, що визначена в [4] – дуальний ізоморфізм, такий що $\theta(0)=1$, $\theta(1)=0$ і для довільних $a, b \in [0;1]$ відношення $a \leq b$, $\theta(a) \geq \theta(b)$ та $\theta(a) \lesssim \theta(b)$ еквівалентні ($\lesssim$ – відношення порядку, обернене до природного); $\varphi^v(z, u)$ – сумісний розподіл нечітких величин y та u , який, як легко бачити, дорівнює $\varphi^v(z - Gu)$, оскільки u за умовою є довільним невідомим елементом простору H_1 (отже, його розподіл $\varphi^u(u)=1$). За нечітке відношення коректності $l(\Pi u, Bz)$ запропоновано прийняти розподіл $\varphi^{Bv}(B(z - Gu))$ нечіткої величини Bv , який можна виразити через $\varphi^v(\cdot)$, як $\varphi^{Bv}(B(z - Gu)) = \max\{\varphi^v(w) | Bw = B(z - Gu)\}$. Очевидно, що в нашому випадку стратегія $d(z)$ це $Bz = \Pi u$.

Розв'язок задачі (2) методами, запропонованими в [5], приводить до оцінки $\Pi u = \Pi G^- z$, де G^- – оператор псевдообернений до G . До речі,

така оцінка максимально мінімізує норму операторної нев'язки. Очевидним стає, що від експерта не обов'язково вимагати визначення розподілу нечіткої величини, що моделює збурення. Достатньо лише отримати принципову відповідь, чи буде зменшуватись можливість такої величини із ростом її норми.

Розглянемо кілька ілюстративних прикладів.

І. Задача синтезу лінійної випромінюючої системи. Під лінійною випромінюючою системою [6] розуміємо лінійну антену довжини $2a$, по якій протікає струм $I(x)$, що збурює електромагнітне поле. Це поле характеризується діаграмою напрямленості в дальній зоні

$f(t) = \int_{-a}^a e^{itx} I(x) dx, t \in (-c, c)$. Задача синтезу лінійної антени за скінченою

множиною значень її діаграми напрямленості в дальній зоні полягає в знаходженні такого струму $I(x)$ в антені, який породжує діаграму напрямленості, що приймає в заданих точках $t_k, k = \overline{1, m}$ задані значення $f(t_k)$. Тобто, тут функція $I(x)$ – невідомий сигнал від об'єкту – u ;

оператор G , що задає модель вимірювань, має вигляд $\int_{-a}^a e^{it_k x} \cdot dx, k = \overline{1, m}$ –

це оператор G , що задає модель вимірювань (в даному випадку – функціонал); $y_k = f(t_k) + v_k, k = \overline{1, m}$.

Результати застосування розробленого методу до цієї задачі представлені на мал. 1 - 2. Ці малюнки ілюструють результати оцінювання на різних сигналах. Оператор Π в даному випадку є функціоналом

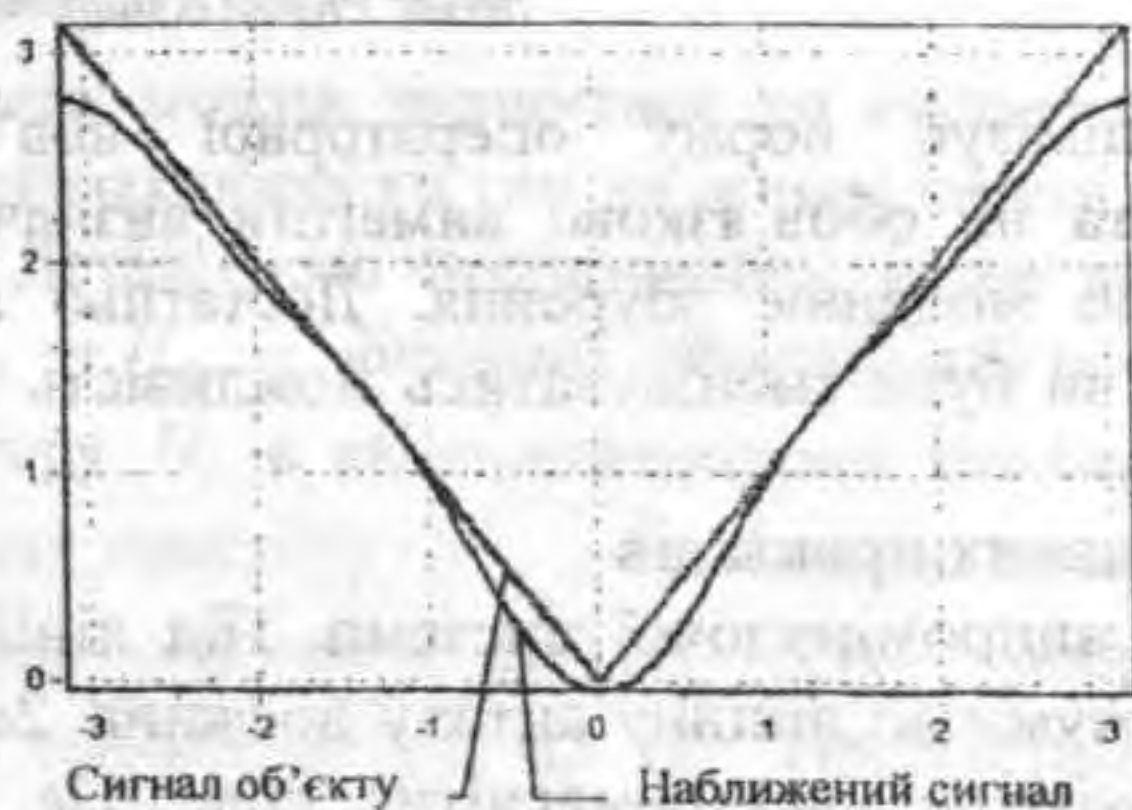
$\Pi = \int_{-a}^a \pi_{\xi}(x) \cdot dx, a = \pi$, де $\pi_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |\xi - x| \leq \varepsilon \\ 0, & |\xi - x| > \varepsilon \end{cases}$, тобто будувались оцінки

усереднених у двосторонньому ε -околі значень функції u (ε було вибрано рівним 0.01). Результати вимірювань y_k були отримані за

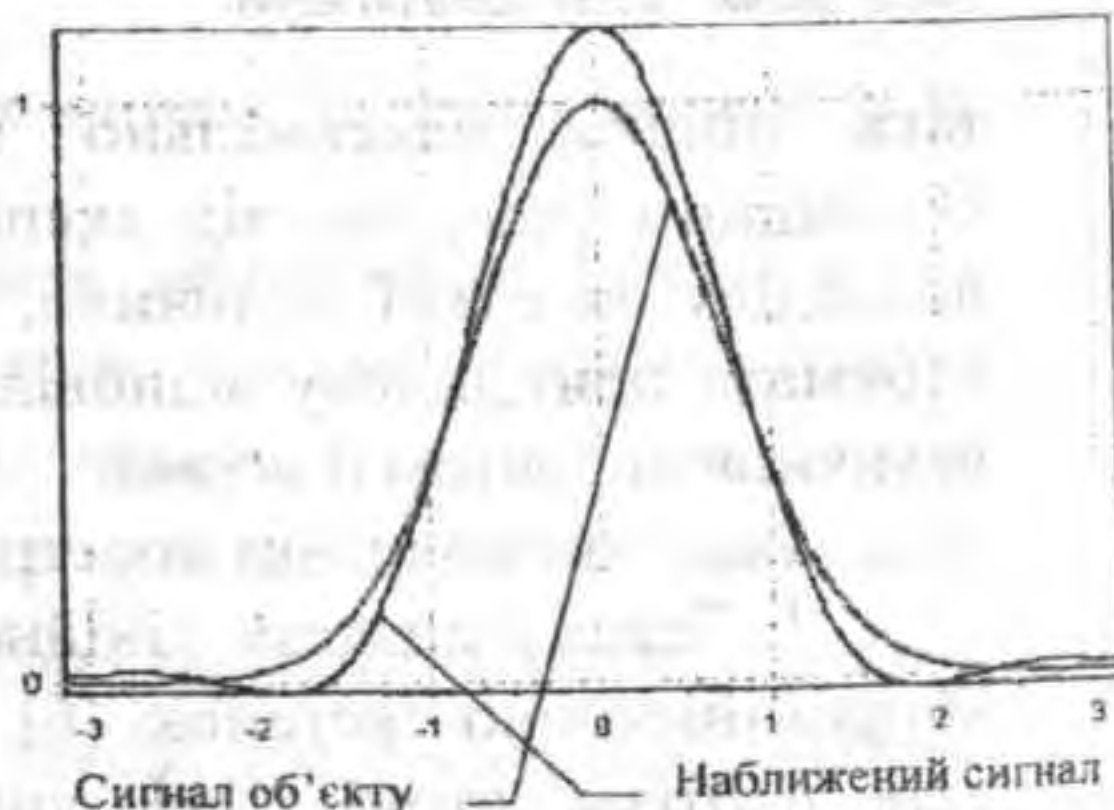
допомогою моделі вимірювань $\int_{-a}^a \cos((k-4)x) \cdot dx, k = \overline{1, 7}$, тобто

демонструвалась дійсна частина оцінки значення функціоналу G . На мал. 1 наведені результати експерименту при $u(x) = |x|$, а на мал. 2 – при

$u(x) = e^{-x^2}$.



мал. 1



мал. 2

II. Задача побудови ділянок контурів. Припустимо, що відомо q точок контуру, (x_k, y_k) , $k = \overline{1, q}$, координати яких спотворені похибками нечіткої природи, а контур апроксимується поліномом степеня p . Тоді проблема моделювання контуру за цими точками може розглядатись як задача оптимальної оцінки вектора параметрів $u = \vec{a} = (a_0, \dots, a_p)^T$ з

лінійної системи (1), де $G = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^p \\ 1 & x_2 & x_2^p \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_q & x_q^p \end{pmatrix}$, $y = (y_1, \dots, y_q)^T$, $v = (v_1, \dots, v_q)^T$ –

вектор похибок, що спотворюють ординату відомих точок контуру. Для даної задачі $\Pi = E$ – одинична матриця розмірності $q \times q$. На мал. 3 наведені результати експерименту при відновленні полінома першого степеня, а на мал. 4 – при відновленні полінома третього степеня.



мал. 3



мал. 4

Аналогічно можна апроксимувати контур, використовуючи не тільки поліноми, а будь-які узагальнені многочлени, замінюючи систему базових функцій x^m , $m = \overline{0, p}$ на іншу чебишевську систему, таку як $\sin mx$, $\cos mx$ і т.п.

Результати експерименту підтверджують, що розроблений метод успішно виконує задачу обробки та інтерпретації результатів вимірювань в умовах нечіткості. При цьому безсумнівною перевагою розробленого метода є невибагливість його до експертної інформації: необхідно відповісти лише на одне питання – чи буде зменшуватись можливість похибки із ростом її норми. До того ж, як показано в [5], в рамках даного методу нескладно оцінити не тільки Πu , а й сам сигнал u , а також ще до побудови оцінок можна перевірити їх переконливість. Все це робить розроблений метод потужним інструментом в руках дослідника або інженера.

ЛІТЕРАТУРА

1. Пытьев Ю.П. *Математические методы интерпретации эксперимента* – М.: Высшая школа, 1989. – 315 с.
2. Белов О.Ю., Касьянюк В.С. *Про деякі нові методи обробки результатів вимірювань рівней випромінювання РАВ на основі багатокритеріальної оптимізації* – К.: Наук. світ, 2000. – 36 с.
3. Заворотний А.Л. *Розв'язування задач моделювання ВОС надвисокої роздільної здатності на основі багатокритеріальної оптимізації* // Київ, Вісник КНУ, серія фіз.-мат. науки, – 2004, – № 3, – С. 198-205.
4. Ю.П. Пытьев *Возможность. Элементы теории и применения* – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 192 с.
5. Заворотний А.Л. *Теоретико-можливісний підхід до задачі редукції створеного значення лінійного оператора до значення іншого лінійного оператора* // Київ, Вісник КНУ, серія фіз.-мат. науки, – 2005, – № 3.
6. Минкович Б.М., Яковлев В.П. *Теория синтеза антенн.* – М.: Сов. радио, 1969. – 294 с.

Надійшла до редакції 07.06.2005

УДК 519.21

Олег К. Закусило, Наталія П. Лисак

Дослідження характеристик деякої рідинної мережі

В роботі розглядається мережа масового обслуговування, яка містить n обслуговуючих пристроїв, що з'єднані між собою послідовно. Вхідний потік на перший пристрій задається узагальненим пуассонівським процесом з параметром λ , а швидкість обслуговування на k -му обслуговуючому пристрої прямо пропорційна об'єму незавершеної роботи на цьому пристрої. В роботі отримано граничні теореми для основних характеристик мережі в умовах великого завантаження.

Ключові слова: узагальнений пуассонівський процес, рівняння Ланжевїна, мережа масового обслуговування

1. Вступ

В роботі розглядається мережа масового обслуговування з послідовним обслуговуванням. Вона містить n обслуговуючих пристроїв, вхідний потік на перший обслуговуючий пристрій задається узагальненим пуассонівським процесом з параметром λ , а далі вихід з кожного пристрою є входом для наступного, причому швидкість обслуговування на k -му обслуговуючому пристрої прямо пропорційна об'єму незавершеної роботи на цьому пристрої. Вимога, що надходить до мережі, повинна пройти обслуговування на всіх обслуговуючих пристроях, причому з i -ю вимогою зв'язується об'єм η_i роботи, необхідної для її обслуговування.

Якщо позначити через $x_k(t)$, $k = \overline{1, n}$, об'єм незавершеної роботи на k -му обслуговуючому пристрої в момент часу t , то швидкість обслуговування на цьому пристрої буде дорівнювати $\mu_k x_k(t)$, $k = \overline{1, n}$, і об'єм незавершеної роботи $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T \in R^n$ в такій мережі масового обслуговування буде задовольняти рівняння Ланжевїна

$$dx(t) = Ax(t)dt + dz(t),$$

Oleg K. Zakusylo, Natalie P. Lysak

The research of characteristics of some fluid network

The subject of research is the queuing network with consecutive service. It contains n consecutive servers. The input flow on the first server is a compound Poisson process with parameter λ , and the service rate on the k -th server is proportional to the amount of the uncompleted work on this server. The limiting theorems for the network characteristics in heavy traffic are obtained.

Key Words: compound Poisson process, Langevin equation, queuing network

де $z(t) = (z_1(t), 0, \dots, 0)^T \in R^n$, $z_1(t)$ – узагальнений пуассонівський процес з параметром λ та стрибками $\eta_1^1 = \eta_1, \eta_1^2, \dots, \eta_1^i, \dots$,

$$A = \begin{pmatrix} -\mu_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu_1 & -\mu_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -\mu_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_{n-1} & -\mu_n \end{pmatrix},$$

$$\mu_k > 0, k = \overline{1, n}.$$

2. Постановка задачі

Припустимо, що для обслуговування вимоги, яка надходить до мережі в момент часу t_0 (не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $t_0 = 0$), потрібно y одиниць роботи. Нехай T – тривалість перебування такої вимоги в системі, а W_i^s – загальна тривалість чекання початку обслуговування вимоги від моменту надходження її до мережі до моменту початку обслуговування її на i -му обслуговуючому пристрої ($i = \overline{1, n}$) в припущенні, що мережа функціонує в стаціонарному режимі, $\exp\{tA\} = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$.

Метою даної роботи є встановлення граничних теорем для стаціонарного розподілу вектору $x(t)$ та граничних теорем для величин T та W_n^s в умовах великого завантаження (великих інтенсивностей вхідного потоку).

В залежності від значень параметрів $\mu_k, k = \overline{1, n}$, було розглянуто такі випадки:

$$1) \quad \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = \mu, \text{ тоді } a_{ni}(t) = \frac{1}{(n-i)!} \mu^{n-i} t^{n-i} \exp\{-\mu t\}, i = \overline{1, n},$$

$$a_{ii}(t) = \frac{1}{(i-1)!} \mu^{i-1} t^{i-1} \exp\{-\mu t\}, i = \overline{1, n},$$

$$2) \quad \text{усі } \mu_k, k = \overline{1, n}, \text{ різні, тоді } a_{i,j+1}(t) = 0, i = \overline{1, n-1}, j = \overline{i, n-1},$$

$$a_{ii}(t) = \exp\{-\mu_i t\}, i = \overline{1, n}, \quad a_{i1}(t) = \sum_{k=1}^i c_{ki}^i \exp\{-\mu_k t\}, i = \overline{2, n},$$

$$a_{nj}(t) = \sum_{k=j}^n c_{kj}^n \exp\{-\mu_k t\}, j = \overline{1, n-1} \text{ (тут } c_{kj}^i \text{ – коефіцієнт, який стоїть}$$

біля $\exp\{-\mu_k t\}$ в i -му рядку, j -му стовпчику матриці $\exp\{tA\}$).

3. Основні результати

Позначимо через $F(y_1, y_2, \dots, y_n)$ функцію розподілу $\eta = (\eta_1, 0, \dots, 0)^T$, через $E\eta = (E\eta_1, 0, \dots, 0)^T$ – математичне сподівання η , де $E\eta_1 = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty y_1 dF(y_1, y_2, \dots, y_n) = m_1$.

Лема 1.

Якщо стаціонарний розподіл процесу $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ співпадає з розподілом $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$, а $E\eta_1 = m_1 < \infty$, то при $\lambda \rightarrow \infty$ вектор $\lambda^{-1}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ збігається за ймовірністю до вектора $m_1(\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1}, \dots, \mu_n^{-1})^T$.

Теорема 1.

Якщо $E\eta_1 = m_1 < \infty$, то при $\lambda \rightarrow \infty$

$$(\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1} + \dots + \mu_n^{-1})^{-1} T \xrightarrow{\text{св.}} 1.$$

Теорема 2.

Якщо $E\eta_1 = m_1 < \infty$, то при $\lambda \rightarrow \infty$

$$(\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1} + \dots + \mu_i^{-1})^{-1} W_i^s \xrightarrow{\text{св.}} 1.$$

Для випадку 1 мають місце такі теореми.

Теорема 3.

Якщо $F(x)$ належить області притягання стійкого закону з показником α , $1 < \alpha \leq 2$, то існує функція $f(\lambda) > 0$, що правильно змінюється з показником $\frac{1}{\alpha} - 1$ і така, що розподіли величин $\left(T - \frac{n}{\mu}\right) \frac{1}{f(\lambda)}$

і $\left(W_n^s - \frac{n}{\mu}\right) \frac{1}{f(\lambda)}$ слабо збігаються при $\lambda \rightarrow \infty$ до розподілу суми незалежних випадкових величини w_1 і w_2 з характеристичними функціями

$$\chi_{w_1} = \exp \left\{ \int_0^\infty \ln \chi \left(s_1 \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{n-k+1} \frac{(n\mu^{-1})^{n-k+1-j} \mu^{n-j}}{(n-k+1-j)!(k-1)!} u^{k-1} \exp\{-(n+\mu u)\} \right) du \right\}$$

$$\chi_{w_2} = \exp \left\{ \int_0^{\frac{n}{\mu}} \ln \chi \left(s_1 \sum_{k=1}^n \frac{\mu^{n-k} u^{n-k}}{(n-k)!} \exp\{-\mu u\} - 1 \right) du \right\},$$

де

$$\chi(s_1) = \exp\left\{-|s_1|^\alpha \left(1 - i \frac{s_1}{|s_1|} \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2}\right)\right\}.$$

Цей розподіл є стійким з показником α .

Теорема 4.

Якщо $F(x)$ належить області притягання стійкого закону з показником α , $0 < \alpha < 1$, то

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} P\{T < t\} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} P\{W_n^s < t\} = P\{v_1 + v_2 < 0\},$$

де випадкові величини v_1 і v_2 незалежні та мають перетворення Лапласа

$$\exp\left\{-s_1^\alpha \int_0^\infty q_1^\alpha(u) du\right\} \text{ і } \exp\left\{-s_1^\alpha \int_0^\infty q_2^\alpha(u) du\right\} \text{ відповідно, де}$$

$$q_1(u) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{n-k+1} \frac{t^{n-k+1-j} \mu^{n-j}}{(n-k+1-j)!(k-1)!} u^{k-1} \exp\{-\mu(t-u)\},$$

$$q_2(u) = \sum_{k=1}^n \frac{\mu^{n-k} u^{n-k}}{(n-k)!} \exp\{-\mu u\} - 1.$$

Для випадку 2 мають місце такі твердження.

Лема 2.

Для коефіцієнтів c_{kj}^i матриці $\exp\{tA\}$ вірні такі співвідношення:

$$\begin{aligned} 1) \sum_{k=1}^i \frac{c_{k1}^i}{\mu_k} &= \frac{1}{\mu_i}, \quad 2) \sum_{k=1}^n \frac{c_{ki}^n}{\mu_k} = \frac{1}{\mu_n}, \quad 3) \sum_{k=1}^i \frac{c_{k1}^i}{\mu_k^2} = \frac{1}{\mu_i} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \dots + \frac{1}{\mu_i} \right), \\ 4) \frac{c_{k1}^n}{\mu_k^2} &= \frac{1}{\mu_n} \left(\frac{1}{\mu_1} c_{k1}^n + \frac{1}{\mu_2} c_{k2}^n + \dots + \frac{1}{\mu_i} c_{ki}^n \right), \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Надалі для зручності позначимо $\frac{1}{\mu_1} + \dots + \frac{1}{\mu_n} = c$.

Теорема 5.

Якщо $F(x)$ належить області притягання стійкого закону з показником α , $1 < \alpha \leq 2$, то існує функція $f(\lambda) > 0$, що правильно

змінюється з показником $\frac{1}{\alpha} - 1$, і така, що розподіли величин $(T - c) \frac{1}{f(\lambda)}$ і

$(W_n^s - c) \frac{1}{f(\lambda)}$ слабо збігаються при $\lambda \rightarrow \infty$ до розподілу величини

$$\sum_{k=1}^n \frac{c_{k1}^n}{\mu_k} \exp\{-\mu_k c\} v_1 + \sum_{k=2}^n \frac{c_{k2}^n}{\mu_k} \exp\{-\mu_k c\} \sum_{j=1}^2 c_{j1}^2 v_j + \dots$$

$$+ \sum_{k=n-1}^n \frac{c_{kn-1}^n}{\mu_k} \exp\{-\mu_k c\} \sum_{j=1}^{n-1} c_{j1}^{n-1} v_j + \frac{1}{\mu_n} \exp\{-\mu_n c\} \sum_{j=1}^n c_{j1}^n v_j + \sum_{k=1}^n \frac{c_{k1}^n}{\mu_k} w_k,$$

який є стійким з показником α , і характеристична функція якого визначається характеристичними функціями незалежних випадкових величин $v_j, w_j, j=1, \dots, n$, які мають вигляд

$$\chi^{\frac{1}{\alpha \mu_j}}(s_1), \exp\left\{|s_1|^\alpha \left(1 + i \frac{s_1}{|s_1|} \operatorname{tg} \frac{\pi \alpha}{2}\right) \int_0^c (\exp\{-\mu_j u\} - 1)^\alpha du\right\},$$

$j=1, \dots, n$, відповідно.

Теорема 6.

Якщо $F(x)$ належить області притягання стійкого закону з показником $\alpha, 0 < \alpha < 1$, то

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} P\{T < t\} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} P\{W_n^* < t\} = P\left\{\sum_{k=1}^n \frac{c_{k1}^n}{\mu_k} \exp\{-\mu_k t\} w_1^* + \sum_{k=2}^n \frac{c_{k2}^n}{\mu_k} \exp\{-\mu_k t\} \sum_{j=1}^2 c_{j1}^2 w_j^* + \dots + \sum_{k=n-1}^n \frac{c_{kn-1}^n}{\mu_k} \exp\{-\mu_k t\} \sum_{j=1}^{n-1} c_{j1}^{n-1} w_j^* + \frac{1}{\mu_n} \exp\{-\mu_n t\} \sum_{j=1}^n c_{j1}^n w_j^* + \sum_{k=1}^n \frac{c_{k1}^n}{\mu_k} v_k^* < 0\right\},$$

де випадкові величини $w_j^*, v_j^*, j=1, \dots, n$, мають перетворення Лапласа

$$\exp\left\{-\frac{s_1^\alpha}{\mu_j \alpha}\right\}, \exp\left\{-s_1^\alpha \int_0^t (1 - \exp\{-\mu_j u\})^\alpha du\right\}, j=1, \dots, n, \text{ відповідно.}$$

4. Висновки

В роботі було розглянуто мережу масового обслуговування, яка містить n обслуговуючих пристроїв, що з'єднані між собою послідовно. Вхідний потік на перший пристрій задається узагальненим пуассонівським процесом з параметром λ , а швидкість обслуговування на k -му обслуговуючому пристрої прямо пропорційна об'єму незавершеної роботи на цьому пристрої. В роботі отримано ряд граничних теорем для стаціонарних характеристик мережі в умовах великого завантаження.

Література

1. К. Закусило. Марковські процеси з напівдетермінованими частинами траєкторій. // Київ, 2002, 165 с.
2. E. Lukacs. A characterization of stable processes. // J. Appl. Prob. 6 (1969), pp. 409-418.

Надійшла до редакції 15.06.2005

УДК 519.863

Олена В. Заславська

**Декомпозиційний алгоритм
оптимізації прибутку
посередника**

Досліджуються оптимізаційні моделі поведінки посередника в оптовій торгівлі.

Запропоновано декомпозиційний алгоритм розв'язання задачі оптимізації прибутку торговельного посередника з урахуванням оптових знижок. Наведений обчислювальний приклад.

Ключові слова: прийняття рішень, дискретна оптимізація, алгоритми декомпозиції, оптова торгівля

Olena V. Zaslavska¹

**Decomposition Algorithm of
Middleman's Profit Optimization**

Optimization models of middleman's behavior in wholesale trade are studied.

Decomposition algorithm for solving middleman's profit optimization problem is proposed. The results of computational example are given.

Key Words: decision making, discrete optimization, decomposition algorithms, wholesale trade.

¹ E-mail: zasla@unicyb.kiev.ua

Вступ. Стабільний розвиток економічних відносин в Україні залежить від активної діяльності економічних агентів, до яких належать торговельні посередники. Їх задачею є задоволення попиту та стимулювання виробництва товарів, що дає можливість виробникам реалізовувати великі оптові партії товару, а замовникам отримувати цей товар за ціною нижче ринкової. Це позитивно впливає як на виробників, так і на замовників, а також корисно для економіки держави.

Складність задач інтелектуальної підтримки, супроводження та реалізації бізнес процесів пов'язана з великим об'ємом, постійним оновленням та зміною інформації, що характеризує умови прийняття рішень [1]. Це вимагає застосування проблемно-орієнтованих математичних моделей та програмних систем підтримки прийняття рішень.

Розглянемо модель оптимізації прибутку посередника на ринку товару, що реалізується з урахуванням оптових знижок [2]: максимізувати

$$U(\delta, \gamma, x) = \sum_{j \in J} r_j q_j \delta_j - \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i} c_i^k \gamma_i^k x_i^k, \quad (1)$$

при обмеженнях:

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i} \gamma_i^k x_i^k = \sum_{j \in J} q_j \delta_j, \quad (2)$$

$$\sum_{k \in K_i} \gamma_i^k x_i^k \leq \beta_i^*, \quad i \in I = \{1, 2, \dots, n\}, \quad (3)$$

$$\delta \in \Delta, \quad \gamma \in \Gamma, \quad x \in X, \quad (4)$$

де множини векторів $\Delta = \{\delta = (\delta_1, \dots, \delta_j, \dots, \delta_m) \mid \delta_j \in \{0, 1\}, j \in J = \{1, 2, \dots, m\}\}$,
 $\Gamma = \{\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_i, \dots, \gamma_n) \mid \gamma_i = (\gamma_i^1, \dots, \gamma_i^k, \dots, \gamma_i^{k_i^*}), \gamma_i^k \in \{0, 1\}, k \in K_i = \{1, 2, \dots, k_i^*\}, i \in I\}$,
 $X = \{x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \mid x_i = (x_i^1, \dots, x_i^k, \dots, x_i^{k_i^*}), \alpha_i^k \leq x_i^k \leq \beta_i^k, x_i^k, \alpha_i^k, \beta_i^k - \text{цілі}, k \in K_i, i \in I\}$.

Аналіз задачі. Модель (1)-(4) є задачею дискретної оптимізації [3,4] з цілочисельними та булевими змінними, складність якої викликана:

- властивостями цільової функції (1), яка є нелінійною, кусково-неперервною на множині X при будь-яких $\delta, \gamma, \delta \in \Delta, \gamma \in \Gamma$;
- наявністю специфічних обмежень (обмеження (2) має балансовий характер, обмеження на $x_i^k, k \in K_i, i \in I$ задані на інтервалах);
- великою розмірністю задачі, яка експоненційно залежить від m - кількості замовників та $M = \sum_{i \in I} k_i^*$ - кількості категорій оптових знижок.

Таким чином, задача, що розглядається не є класичною [3,4], тому застосування існуючих алгоритмів для її розв'язання без модифікації не можливе. Структурні особливості задачі (1)-(4) є причиною розробки спеціального декомпозиційного алгоритму, орієнтованого на їх використання.

Декомпозиційний підхід до розв'язання задачі. Для розв'язання задачі (1)-(4) застосуємо параметричну декомпозицію [5], яка полягає в формуванні і вирішенні підзадач при фіксованих значеннях векторів $\tilde{\delta} = \text{const} \in \Delta$ та $\tilde{\gamma} = \text{const} \in \Gamma$. Складність розв'язання підзадач є значно меншою у порівнянні зі складністю вихідної задачі (1)-(4). Таким чином декомпозиційний підхід полягає в розробці двох основних елементів: процедур формування та алгоритму розв'язання підзадач.

Параметризована підзадача має наступний вигляд:
максимізувати

$$U(\tilde{\delta}, \tilde{\gamma}, x) = \sum_{j \in J} r_j q_j \tilde{\delta}_j - \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} c_i^k x_i^k, \quad (5)$$

при обмеженнях:

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} x_i^k = \sum_{j \in J} q_j \tilde{\delta}_j, \quad (6)$$

$$\sum_{j \in J} r_j q_j \tilde{\delta}_j - \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} c_i^k x_i^k > U_L, \quad (7)$$

$$\sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} x_i^k \leq \beta_i^*, i \in I, \quad (8)$$

$$\tilde{\delta} = \text{const} \in \Delta, \tilde{\gamma} = \text{const} \in \Gamma, x \in X, \quad (9)$$

де $K_i(\tilde{\gamma}) = \{k \mid \tilde{\gamma}_i^k = 1, k \in K_i\}, i \in I$; U_L - заданий рівень цільової функції.

Алгоритм розв'язання підзадач (5)-(9). Для розв'язання задачі дискретної оптимізації (5)-(9) пропонується наступна модифікація методу покоординатного підйому [6]:

Крок 0. Покласти $\tilde{x}_i^k = \alpha_i^k$, $k \in K_i(\tilde{\gamma})$, $i \in I$.

Крок 1. Перевірити, чи виконується умова:

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} \tilde{x}_i^k = \sum_{j \in J} q_j \tilde{\delta}_j,$$

якщо так, то перейти на крок 3, інакше виконати крок 2.

Крок 2. Вибрати $\tilde{x}_i^k$, $k \in K_i(\tilde{\gamma})$, $i \in I$, якому відповідає

$$c_i^k = \min \left\{ c_i^k \mid \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} \tilde{x}_i^k \leq \beta_i^*, \sum_{j \in J} r_j q_j \tilde{\delta}_j - \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} c_i^k \tilde{x}_i^k > U_L, k \in K_i(\tilde{\gamma}), i \in I \right\},$$

якщо таке значення знайдено, то покласти

$$\tilde{x}_i^k = \min \left\{ \beta_i^* - \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} \tilde{x}_i^k, \beta_i^k, \sum_{j \in J} q_j \tilde{\delta}_j - \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} \tilde{x}_i^k \right\}$$

та перейти на крок 1, інакше задача (5)-(9) не має допустимих розв'язків.

Крок 3. Розв'язком задачі (5)-(9) є $(\tilde{\delta}, \tilde{\gamma}, \tilde{x})$.

Процес формування підзадач. Для зменшення кількості підзадач (5)-(9), загальна кількість яких становить $|\Delta| \times |\Gamma| = 2^{m+M}$, необхідно визначити умови, які в процесі формування дозволяють усувати підзадачі, що мають порожню множину допустимих розв'язків.

Твердження 1. Підзадача (5)-(9) має порожню множину допустимих розв'язків, якщо порушується хоча б одна з наступних умов:

$$\sum_{j \in J} q_j \tilde{\delta}_j \leq \sum_{i \in I} \beta_i^*, \quad (10)$$

$$\sum_{j \in J} \left(r_j - \min_{k \in K_i, i \in I} \{ c_i^k \} \right) q_j \tilde{\delta}_j > U_L. \quad (11)$$

Доведення. Припустимо, що підзадача (5)-(9) має допустимий розв'язок $(\tilde{\delta}, \tilde{\gamma}, \tilde{x})$ і умова (10) порушується. Скористаємось (8), підставимо в (6):

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} \tilde{x}_i^k = \sum_{j \in J} q_j \tilde{\delta}_j \leq \sum_{i \in I} \beta_i^*,$$

тоді припущення суперечить (6).

Припустимо, що умова (11) порушується і підзадача (5)-(9) має допустимий розв'язок $(\tilde{\delta}, \tilde{\gamma}, \tilde{x})$, тоді враховуючи (6) $\sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} \tilde{x}_i^k = \sum_{j \in J} q_j \tilde{\delta}_j$, та

$$\min_{k \in K_i, i \in I} \{ c_i^k \} \leq c_i^k, \forall k \in K_i, i \in I \text{ маємо}$$

$$\sum_{j \in J} r_j q_j \tilde{\delta}_j - \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} c_i^k \tilde{x}_i^k \leq \sum_{j \in J} \left(r_j - \min_{k \in K_i, i \in I} \{c_i^k\} \right) q_j \tilde{\delta}_j \leq U_L,$$

що суперечить умові (7).

Твердження 2. Підзадача (5)-(9) має порожню множину допустимих розв'язків, якщо не виконуються наступні умови:

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} \alpha_i^k \leq \sum_{j \in J} q_j \tilde{\delta}_j, \quad (12)$$

$$\sum_{j \in J} q_j \tilde{\delta}_j \leq \sum_{i \in I} \min \left\{ \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} \beta_i^k, \beta_i^* \right\}, \quad (13)$$

$$\sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} \alpha_i^k \leq \beta_i^*, i \in I. \quad (14)$$

Доведення. Припустимо, що підзадача (5)-(9) має допустимий розв'язок і умова (12) порушується. Скористаємось (9), підставимо в (6):

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} \alpha_i^k \leq \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} \tilde{x}_i^k = \sum_{j \in J} q_j \tilde{\delta}_j,$$

тоді припущення суперечить (6).

Припустимо, що підзадача (5)-(9) має допустимий розв'язок і умова (13) порушується. З (6) та (8) маємо:

$$\sum_{j \in J} q_j \tilde{\delta}_j = \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} \tilde{x}_i^k \leq \sum_{i \in I} \min \left\{ \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} \beta_i^k, \beta_i^* \right\},$$

що суперечить припущенню.

Припустимо, що підзадача (5)-(9) має допустимий розв'язок і умова (14) порушується. Скористаємось (9), підставимо в (8)

$$\sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} \alpha_i^k \leq \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} \tilde{x}_i^k \leq \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} \beta_i^k,$$

що суперечить припущенню.

Твердження 3. Підзадача (5)-(9) має порожню множину допустимих розв'язків, якщо не виконується наступна умова:

$$\sum_{j \in J} r_j q_j \tilde{\delta}_j - \min_{k \in K_i(\tilde{\gamma}), i \in I} \{c_i^k\} \cdot \left(\sum_{j \in J} q_j \tilde{\delta}_j - \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} \alpha_i^k \right) + \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} c_i^k \alpha_i^k > U_L. \quad (15)$$

Доведення. Припустимо, що підзадача (5)-(9) має допустимий розв'язок $(\tilde{\delta}, \tilde{\gamma}, \tilde{x})$ і умова (15) порушується. Тоді з (5) маємо

$$\begin{aligned} U(\tilde{\delta}, \tilde{\gamma}, \tilde{x}) &= \sum_{j \in J} r_j q_j \tilde{\delta}_j - \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} c_i^k \tilde{x}_i^k = \sum_{j \in J} r_j q_j \tilde{\delta}_j - \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} c_i^k (\tilde{x}_i^k - \alpha_i^k) - \\ &- \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} c_i^k \alpha_i^k \geq \sum_{j \in J} r_j q_j \tilde{\delta}_j - \min_{k \in K_i(\tilde{\gamma}), i \in I} \{c_i^k\} \cdot \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} (\tilde{x}_i^k - \alpha_i^k) - \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} c_i^k \alpha_i^k = \\ &= \sum_{j \in J} r_j q_j \tilde{\delta}_j - \min_{k \in K_i(\tilde{\gamma}), i \in I} \{c_i^k\} \cdot \sum_{j \in J} q_j \tilde{\delta}_j - \min_{k \in K_i(\tilde{\gamma}), i \in I} \{c_i^k\} \cdot \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} \alpha_i^k - \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} c_i^k \alpha_i^k = \end{aligned}$$

$$= \sum_{j \in J} r_j q_j \tilde{\delta}_j - \min_{k \in K_i(\tilde{\gamma}), i \in I} \{c_i^k\} \cdot \left(\sum_{j \in J} q_j \tilde{\delta}_j - \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} \alpha_i^k \right) - \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} c_i^k \alpha_i^k, \text{ враховуючи}$$

умову (7) одержали суперечність із припущенням.

Наслідок. Підзадача (5)-(9) має порожню множину допустимих розв'язків, якщо не виконується наступна умова:

$$\sum_{j \in J} r_j q_j \tilde{\delta}_j - \min_{k \in K_i(\tilde{\gamma}), i \in I} \{c_i^k\} \cdot \left(\sum_{j \in J} q_j \tilde{\delta}_j - \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} \alpha_i^k \right) + \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i(\tilde{\gamma})} c_i^k \alpha_i^k > U_L. \quad (16)$$

Для формування та усунення підзадач, що мають порожню множину допустимих розв'язків, розроблені рекурсивні процедури Υ_1 та Υ_2 , які будують вектори $\tilde{\delta}$ та $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\delta} \in \Delta$, $\tilde{\gamma} \in \Gamma$. Процес формування підзадач починається з запуску процедури Υ_1 з параметрами $\delta = \bar{0}$, $j = 1$.

Процедура $\Upsilon_1(\tilde{\delta}, j)$

```
{ якщо  $j \leq m$ , то
  { ввести вектор  $\tilde{\delta}, \tilde{\delta} \in \Delta$ ;
    покласти  $\tilde{\delta} = \bar{\delta}, \tilde{\delta}_j = 1$ ;
    якщо для  $\tilde{\delta}$  виконується
      умова (10), то  $\Upsilon_1(\tilde{\delta}, j+1)$ ;
       $\Upsilon_1(\tilde{\delta}, j+1)$ ;
  } інакше
    якщо для  $\tilde{\delta}$  виконується
      умова (11), то
       $\Upsilon_2(\tilde{\delta}, \tilde{\gamma} = \bar{0}, i = 1, k = 1)$ ;
}
```

Процедура $\Upsilon_2(\tilde{\delta}, \tilde{\gamma}, i, k)$

```
{ якщо  $i \leq n$ , то
  { якщо  $k \leq k_i^*$ , то
    { ввести вектор  $\tilde{\gamma} \in \Gamma$ ;
      покласти  $\tilde{\gamma} = \bar{\gamma}, \tilde{\gamma}_i^k = 1$ ;
      якщо для  $\tilde{\delta}$  та  $\tilde{\gamma}$  виконуються умови (12),
        (14) та (16), то  $\Upsilon_2(\tilde{\delta}, \tilde{\gamma}, i, k+1)$ ;
         $\Upsilon_2(\tilde{\delta}, \tilde{\gamma}, i, k+1)$ ;
      } інакше  $\Upsilon_2(\tilde{\delta}, \tilde{\gamma}, i+1, k=1)$ 
    } інакше
      якщо для  $\tilde{\delta}$  та  $\tilde{\gamma}$  виконуються (13) та (15),
        то розв'язати підзадачу (5)-(9) при
        фіксованих  $\tilde{\delta}, \tilde{\gamma}$ ;
  }
```

Рис. 1. Процедури формування підзадач Υ_1 та Υ_2 .

Алгоритм розв'язання задачі (1)-(4).

Крок 0. Покласти $U_L = 0$, $\delta^* = \bar{0}$, $\gamma^* = \bar{0}$.

Крок 1. Запустити процес формування підзадач. Для кожної сформованої підзадачі з фіксованими $\tilde{\delta}, \tilde{\gamma}$, $\tilde{\delta} \in \Delta$, $\tilde{\gamma} \in \Gamma$, виконати крок 2.

Крок 2. Розв'язати підзадачу (5)-(9) за допомогою наведеного алгоритму. Якщо знайдено оптимальний розв'язок $(\tilde{\delta}, \tilde{\gamma}, \bar{x})$ підзадачі (5)-(9), то покласти $U_L = U(\tilde{\delta}, \tilde{\gamma}, \bar{x})$ та $(\delta^*, \gamma^*, x^*) = (\tilde{\delta}, \tilde{\gamma}, \bar{x})$.



Рис. 2. Схема декомпозиційного алгоритму.

Ілюстративний приклад. Розглянемо застосування моделі (1)-(4) на наступному прикладі. Нехай посередник має можливість укласти договір з $n=3$ виробниками (параметри категорій у схемах оптових знижок Z_i^1 , $i \in \{1, 2, 3\}$, наведені в табл.1) та $m=12$ замовниками (параметри замовлень наведені в табл.2).

Таблиця 1

i	1			2			3	
k	1	2	3	1	2	3	1	2
α_i^k	50	100	1000	20	100	400	200	500
β_i^k	80	500	1200	90	250	800	400	800
c_i^k	13.85	13.60	13.25	14.05	13.80	13.40	13.60	13.30

Таблиця 2

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
q_j	90	95	175	180	250	270	280	300	380	400	420	450
r_j	13.65	13.6	13.5	13.45	13.4	13.39	13.39	13.38	13.35	13.35	13.32	13.30

Для моделі, що пропонується в роботі [2], твердження 1-3 мають наступний зміст: умова (10) означає, що не розглядаються набори замовників, для яких сукупна кількість товару перевищує сумарну кількість товару, що є в наявності у всіх виробників на момент укладання угоди; умова (11) означає, що не розглядаються набори замовників, для яких вартість купівлі сукупної кількості товару навіть по ціні найменшій з усіх можливих не дозволяє отримати прибуток вище заданого рівня; умова (12) перевіряє необхідність (всі категорії з $K_i(\gamma)$, $i \in I$ є необхідними для закупівлі необхідної кількості товару) та умова (13) перевіряє допустимість (використання всіх категорій з $K_i(\gamma)$, $i \in I$, дозволяє закупити необхідну кількість товару) одночасного використання категорій $K_i(\gamma)$, $i \in I$ для

закупівлі фіксованої кількості товару; умова (14) перевіряє можливість одночасного використання категорій з $K_i(\gamma)$ для кожного i -го виробника; умова (15) означає, що не розглядаються набори категорій виробників, у яких вартість закупівлі необхідної кількості товару (для фіксованого набору замовників) не дозволяє отримати прибуток вище заданого рівня.

В процесі формування з розгляду усувається більше 91,36% з $|\Delta| \times |\Gamma| = 2^{12} \times 2^8 = 2^{20} = 1048576$ підзадач, з них за рахунок твердження 1 – 73,93 %, тверджень 2 та 3 – 17,43 %.

Оптимальний розв'язок задачі: $\delta^* = (1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0)$, $\gamma^* = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1)$, $x_1^* = 1200$, $x_2^* = 800$, при цьому доход посередника 26796,7 та витрати 26540, отже прибуток становить $U^* = 256,7$, при загальному об'ємі замовлення 2000 одиниць товару.

Висновок. В статті пропонується декомпозиційний алгоритм розв'язання задачі дискретної оптимізації з специфічними обмеженнями, булевими та цілочисельними змінними. Структурні особливості задачі (властивості цільової функції, множина розв'язків, специфіка обмежень) є причиною розробки спеціального підходу, призначеного для врахування та використання цих властивостей. Наведений ілюстративний приклад.

Література

1. Бьер М. Интеллектуальное ведение и сопровождение бизнеса. Пер с англ.-М.: КУДИЦ-ОБРАЗ, 2005.-240 с.
2. Заславська О.В. Моделі прийняття рішень в оптовій торгівлі // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки.-2005.-№3.-с.
3. Исследование операций: В 2-х томах. Пер. с англ. / Под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби.- М.: Мир, 1981.- Т.1. 712 с.
4. Таха Х. Введение в исследование операций: В 2-х книгах. Кн.1. Пер. с англ. - М.: Мир, 1985.- 479 с.
5. Танаев В.С. Декомпозиция и агрегирование в задачах математического программирования / Под ред. А.Д. Закревского.-Мн.: Наука и техника, 1987.-183 с.
6. Горелик В.А., Ушаков И.А. Исследование операций.- М.: Машиностроение, 1986.- 288 с.

Надійшла до редакції 01.04.05

УДК 681.3:004.056

Інокентій Ю. Іванов

Inokentiy Y. Ivanov

**Про захист програмного
забезпечення від атак збоку
злочинного хоста**

**On the problem of protecting software
from malicious host attacks**

Розглядається проблема захисту ПЗ, що виконується в злочинному оточенні. Запропоновано удосконалений метод захисту від зворотного проектування і несанкціонованої модифікації, що має ряд переваг у порівнянні з існуючими методами захисту. Ключові слова: захист ПЗ, злочинні оточення

The paper considers the problem of protecting software that runs in malicious environments. An improved method for protecting software against reverse engineering and tampering attacks is suggested.

Keywords: software protection, malicious environments

E-mail: innokentiy@epost.com.ua

У наш час досить гостро стоїть питання захисту програмного забезпечення (ПЗ). Під захистом розуміється протидія атакам – злочинним діям, що спрямовані на те, щоб змусити ПЗ виконуватись некоректно (можливо, з вигодою для того, хто атакує), або на розкриття конфіденційної інформації. Можна казати про атаки злочинного клієнта та атаки злочинного хоста. У першому випадку ПЗ виконується у гарантовано довіреному оточенні та піддається атакам множини клієнтів, що намагаються впливати на нього ззовні через відкритий інтерфейс, який надається ПЗ.

Загроза атаки злочинного хоста має місце, коли оточення, у якому буде виконуватись ПЗ, на етапі його розробки не відоме, а отже, ПЗ потенційно може піддаватися будь-якому впливу збоку цього оточення (хоста), а також інших програм, що виконуються на ньому. Слід відмітити, що в даному випадку термін “хост” розуміється у більш широкому сенсі, ніж “вузол в Інтернет”, і має на увазі деяку керуючу сутність, в рамках якої виконується програмний код.

Більшість атак на програмне забезпечення збоку злочинного хоста можна звести до двох базових атак – зворотного проектування (реверс-інженерії) та модифікації коду програми. Ці дві атаки так чи інакше є складовими інших атак на ПЗ (напр., несанкціонованого використання, крадіжки інформації, зараження вірусом), а тому протидія цим атакам є одним з найбільш важливих питань захисту програмного забезпечення.

© І. Ю. Іванов, 2005

В роботі пропонується метод захисту ПЗ, що протидіє двом вищезазначеним атакам. Метод є удосконаленням двох прогресивних методів захисту ПЗ від атак з боку злочинного хоста – затемнення на основі непроникливих предикатів та перевірки цілісності на основі “забудькуватого хешування”. В якості переваг запропонованого метода у порівнянні з базовими методами можна відмітити універсальність застосування та забезпечення більш високого рівня приховування логіки програми.

Одним з найбільш розповсюджених і ефективних способів захистити код програми від зворотного проєктування є *затемнення* (обфускація). В [1] процедура затемнення визначається наступним чином:

Затемнити програму P , що складається з об'єктів вихідного коду (класи, методи, функції, оператори) $\{S_1, \dots, S_k\}$ і маючи множину *затемнюючих перетворень* $T = \{T_1, \dots, T_n\}$, означає побудувати нову програму $P' = \{\dots, S_j' = T_i(S_j), \dots\}$ таку, що виконуються наступні умови:

- Поведінка P' повністю співпадає з поведінкою P (перетворення є семантично замкненими),
- P' забезпечує приховування семантики, тобто аналіз і реверс-інженерія програми P' буде займати не менший час, ніж аналіз і реверс-інженерія програми P ,
- Кожне з перетворень $T_i(S_j)$ є стійким, тобто повинно бути обчислювально складно автоматизувати процес виконання зворотних перетворень,
- Вартість (додатковий час виконання або простір, що є побічним результатом перетворень) P' є мінімальною.

Виділяють декілька видів затемнюючих перетворень, виходячи із способу їх дії [1] – *лексичні перетворення, перетворення даних і перетворення ходу виконання*, з яких найбільший інтерес викликають останні. Суть перетворень ходу виконання зводиться до зміни графу логіки програми таким чином, що автоматизувати його аналіз після затемнення є обчислювально складною задачею. Більшість перетворень ходу виконання базується на *непроникливих предикатах* (opaque predicates) [2]. Предикат P є *непроникливим* (opaque), якщо його значення є відомим до затемнення, але його важко отримати при дослідженні затемненої програми. Непроникливі предикати дозволяють додати “уявні” розгалуження в затемнений програмний код.

Як було сказано вище, другою складовою більшої атак на ПЗ є внесення змін до коду програми. Більшість методів, що забезпечують захист програми від модифікації (напр., [4], [5]), оперують з виконуваним (бінарним) кодом. Це викликає певні складності [8] під час аналізу та оцінки захисту, що забезпечуються такими методами; крім того, такі методи не є універсальними і залежать від конкретної ОС і архітектури середовища. На цьому фоні привабливим виглядає підхід, що був названий “забудькуватим хешуванням”

(oblivious hashing) [8]. Перевагою цього метода є те, що об'єктом його перевірки є логіка роботи програми. Суть "забудькуватого хешування" полягає в наступному. Програма (чи її частина, наприклад, процедура або тіло цикла) представляється у вигляді послідовності абстрактних машинних інструкцій $I = \{i_1, i_2, \dots, i_N\}$, які звертаються для читання та запису до комірок пам'яті $M = \{m_1, m_2, \dots, m_K\}$, початкового стану пам'яті M_0 , лічильника інструкцій C і його початкового значення C_0 . Слідом програми називається п'ятірка (I, M, C_0, M_0, P) , де P – деякий вхідний параметр, що впливає на виконання програми. В процесі виконання програми обчислюється хеш-функція від її сліду. Оскільки слід відображає семантику програми, то отримане значення хеш-функції по суті є цифровим підписом, що обчислений над поведінкою програми. Внесення змін до коду чи даних, якими оперує програма, призведе до різниці між отриманим при перевірці значення хеш-функції і оригінальним значенням, що дасть можливість виявити зміни у програмі. Недоліком підходу є його неуніверсальність. Так, перевірку методом "забудькуватого хешування" неможливо реалізувати для ділянок програми, що оперують випадковими даними (такими як поточний час, положення курсору миші і т.п.), або даними, множина значень яких надто велика. Цей фактор суттєво обмежує множину підпрограм, для яких можна застосувати цей метод захисту.

Базуючись на роботах [1], [2], [3] и [8], можна запропонувати комбінований метод захисту від зворотного проектування і модифікації коду програми. Метод складається з двох незалежних складових – затемнення і додавання перевірного коду.

По аналогії з визначенням непроникливого предикату, введемо означення непроникливої функції:

Означення. Непроникливою функцією назвемо функцію, результат якої є відомим на етапі затемнення, але його важко визначити при аналізі затемненої програми.

Затемнююча складова метода складається з двох етапів, суть кожного з яких полягає у виконанні перетворень над вихідним кодом програми. На першому етапі кожній змінній (константі), що використовується в програмі, поставимо у відповідність деякий об'єкт, який буде зберігати значення цієї змінної. Створимо глобальний масив obj всіх об'єктів, що використовуються в програмі. Т.ч., кожна змінна/константа, що використовується в програмі, буде унікально ідентифікуватися індексом в цьому глобальному масиві.

Далі, визначимо в програмі функцію f таку, що:

- f є непроникливою,
- Входом f є ціле число – унікальний ідентифікатор деякої точки в програмі, у якій відбувається звернення до змінної, виходом – індекс в масиві об'єктів.

В вихідній програмі замінимо усі звертання до змінних/констант на звертання до відповідних об'єктів таким чином:

- Кожен об'єкт адресується як деякий елемент глобального масива об'єктів,
- Номер об'єкта в масиві визначається динамічно за допомогою виклику функції *f*.

<pre>s = 1; t = x; u = y; while (u) { if (u & 1) s = (s * t) % n; u >>= 1; t = (t * t) % n; } Console.WriteLine(s);</pre>	<pre>obj[f(1)] = obj[f(2)]; obj[f(3)] = obj[f(4)]; obj[f(5)] = obj[f(6)]; while (obj[f(7)]) { if (obj[f(8)] & obj[f(9)]) obj[f(10)] = (obj[f(11)] * obj[f(12)]) % obj[f(13)]; obj[f(14)] >>= obj[f(15)]; obj[f(16)] = (obj[f(17)] * obj[f(18)]) % obj[f(19)]; } obj[f(20)].WriteLine(obj[f(21)]);</pre>
---	---

Рис. 1. Результат першого етапу

0	1	2	3	4	5	6	7
s	1	t	x	u	y	N	Console

Рис. 2. Глобальний масив об'єктів

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
0	1	2	3	4	5	4	4	1	0	0	2	6	4	1	2	2	2	6	7	0

Рис. 3. Значення, що повертаються функцією *f*

Т.ч., після першого етапу всі прямі звернення до змінних в коді програми замінені на непрямі, що суттєво ускладнює зворотний аналіз програми. При достатній непроникливості функції *f* задача визначення, який саме об'єкт є параметром при виклику тієї чи іншої функції, є практично нерозв'язною.

На другому етапі створимо глобальний масив *func* всіх функцій, що викликаються в програмі. Кожній функції у відповідність поставимо унікальний індекс в цьому масиві. Аналогічно функції *f*, введемо непроникливу функцію *g*, яка, приймаючи деякий унікальний цілочисельний аргумент, буде повертати номер функції в масиві функцій. Аналогічно тому, як це робилося на першому етапі, замінимо усі прямі виклики функцій на непрямі:

```
func[g(1)](obj[f(1)], obj[f(2)]);
func[g(2)](obj[f(3)], obj[f(4)]);
func[g(3)](obj[f(5)], obj[f(6)]);
while (func[g(4)](obj[f(7)])) {
    if (func[g(5)](obj[f(8)], obj[f(9)]))
        func[g(8)](obj[f(10)], func[g(7)](func[g(6)](obj[f(11)]),
```



```
obj[f(12)], obj[f(13)]);
func[g(9)](obj[f(14)], obj[f(15)]);
func[g(12)](obj[f(16)], func[g(11)](func[g(10)](obj[f(17)],
obj[f(18)]), obj[f(19)]));
}
func[g(13)](obj[f(20)], obj[f(21)]);
```

Рис. 4. Результат другого етапу

0	1	2	3	4	5	6
=	!=0	&	*	%	>>=	WriteLine

Рис. 5. Глобальний масив функцій

Заміна всіх прямих викликів функцій на непрямі, що визначаються на етапі виконання, робить недосяжною для статичного аналізу інформацію про послідовність викликів функцій. Фактично, єдина інформація, що є доступною для того, хто атакує, після другого етапу – це послідовність виконання умовних операторів та операторів циклу (if, while, switch и т.п.), однак цієї інформації недостатньо для відновлення логіки роботи програми, оскільки аргументи цих операторів захищені непроникливою функцією.

Складова метода, що відповідає за перевірку цілісності, базується на принципі “забудькуватого хешування”, що був запропонований в [8]. Однак, на відміну від “забудькуватого хешування”, застосовність якого має суттєві обмеження, запропонований метод може застосовуватися для перевірки цілісності будь-яких підпрограм.

Об’єктом перевірки є неперервні безумовні ділянки коду; цілісність кожного з яких перевіряється незалежно. У ході виконання ділянки, команда за командою, на вхід хеш-функції h подаються індекси функцій, що викликаються, та їх параметрів в глобальних масивах.

func[0](obj[0], obj[1]);	h(0, 0, 1);
func[0](obj[2], obj[3]);	h(0, 2, 3);
func[0](obj[4], obj[5]);	h(0, 4, 5);
while (func[1](obj[4])) {	h(while, 1, 4);
if (func[2](obj[4], obj[1]))	h(if, 2, 4, 1);
func[0](obj[0], func[4](func[3](obj[0],	h(0, 0, 4, 3,
obj[2]), obj[6]));	0, 2, 6);
func[5](obj[4], obj[1]);	h(5, 4, 1);
func[0](obj[2], func[4](func[3](obj[2],	h(0, 2, 4, 3, 2,
obj[2]), obj[6]));	2, 6);
}	
func[6](obj[7], obj[0]);	h(6, 7, 0);

Рис. 6. Хешування даних в ході виконання програми

Після завершення виконання ділянки програми отримане значення хеш-функції порівнюється з коректним значення для цієї ділянки. Таким чином, забезпечується цілісність ходу виконання програми – послідовності викликаних

функцій і параметрів-об'єктів, що їм передаються. Однак, слід відмітити, що вищенаведена процедура перевіряє лише цілісність посилань на параметри функцій – іншими словами, чи правильні змінні передаються у функцію. Процедура не гарантує цілісності даних, що містяться у використовуваних об'єктах. Для перевірки цілісності даних можна використовувати наступний підхід. При зміні значення, що зберігається в деякому об'єкті, обчислюється хеш-функція від значень всіх об'єктів в глобальному масиві. При кожному наступному зверненні до значення об'єкта, значення хеш-функції обчислюється заново і порівнюється зі значенням, що було збережено раніше. Різниця між цими двома значеннями показує, що в дані програми були внесені зміни.

Стійкість запропонованого метода напряду залежить від стійкості використовуваних непроникливих функцій. Проблема побудови таких функцій виходить за межі даної роботи, з деякими прикладами можна ознайомитись у [2]. Запропонований метод має наступні переваги у порівнянні з методами, описаними в літературі раніше:

- Використання непроникливих функцій замість непроникливих предикатів, а також непрямих викликів функцій, дозволяє досягнути більш високого рівня приховування даних,
- Процедура перевірки цілісності працює на рівні логіки програми, а не на рівні виконуваного коду, а отже, є незалежною від особливостей середовища виконання,
- Процедура перевірки цілісності є універсальною і не залежить від програми, що має бути захищеною.

Література

1. C. Collberg, C. Thomborson. Watermarking, Tamper-proofing, and Obfuscation – Tools for Software Protection. - IEEE Transactions on software engineering, vol. 28, no. 8, Aug. 2002. - 13p.
2. C. Collberg, C. Thomborson, D. Low. Manufacturing Cheap, Resilient and Stealthy Opaque Constructs. - Proc. Symp. Principles of Programming Languages (POPL'98), 1998. - 18p.
3. C. Collberg, C. Thomborson, D. Low. Breaking Abstractions and Unstructuring Data Structures. - Proc. IEEE Int'l Conf. Computer Languages (ICCL'98), 1998. - 20p.
4. B. Horne, L. Matheson, C. Sheehan, R. Tarjan. Dynamic Self-Checking Techniques for Improved Tamper Resistance. - Lecture Notes In Computer Science, Vol. 2320, 2001. - 20p.
5. A. Segurson. Summary of Protecting Software Code by Guards. - The University of Arisona, 2002. - 3p.
6. C. Linn, S. Debray. Obfuscation of Executable Code to Improve Resistance to Static Disassembly. - Proceedings of the 10th ACM conference on Computer and communications security, 2003. - 12p.
7. B. Barak, O. Goldreich, R. Impagliazzo, S. Rudich, A. Sahai, S. Vadhan, K. Yang. On the (Im)possibility of Obfuscating Programs. - Lecture Notes In Computer Science, Vol. 2139, 2001. - 43p.
8. Y. Chen, R. Venkatesan, M. Cary, R. Pang, S. Sinha, M. Jakubowski. Oblivious Hashing: A Stealthy Software Integrity Verification Primitive. - Lecture Notes In Computer Science; Vol. 2578, 2002. - 17p.

Надійшла до редколегії 26.08.2005

УДК 517.948

Олексій Ф. Калайда

Двосторонні симетричні наближення функцій, похідних та інтегралів та розв'язків інтегральних рівнянь, диференціальних та інтегро-диференціальних задач

Побудовано двосторонні симетричні формули апроксимації функцій, похідних, інтегралів, а також відповідні двосторонні симетричні методи розв'язування задачі Коші для нормальних диференціальних рівнянь, інтегральних рівнянь та лінійних диференціальних та інтегро-диференціальних задач.

Ключові слова: функція, похідна, інтеграл.

E-mail: akalayda@i.com.ua

Побудовано параметричні двосторонні симетричні формули для апроксимації функцій, похідних та інтегралів а також відповідні двосторонні симетричні методи розв'язування задачі Коші для нормальних диференціальних рівнянь (методи типу Крилова, Адамса та методи Рунге - Кутта), інтегральних рівнянь та лінійних диференціальних, а також інтегро-диференціальних задач.

При наближенні $N = \sum_{j=0}^n p_j f_j$ функцій f , похідних $f^{(k)}(x)$ та інтегралів з різними ваговими функціями (позначаються T), побудованих на основі колокант, маємо рівність

$$T = N + \delta, \quad (1)$$

де δ – похибка апроксимації. На основі цього можна побудувати симетричні двосторонні наближення $\hat{N}, \tilde{N}$ даних об'єктів у вигляді

$$\begin{aligned} \hat{N} &= (1 - \varepsilon) p_0 f_0 + \sum_{j=1}^{n-1} p_j f_j + (1 + \varepsilon) p_n f_n, \\ \tilde{N} &= (1 + \varepsilon) p_0 f_0 + \sum_{j=1}^{n-1} p_j f_j + (1 - \varepsilon) p_n f_n. \end{aligned} \quad (2)$$

Дійсно, похибки цих наближень мають вигляд

Oleksiy F. Kalaida

The two-sided symmetric approximation of functions derivative and integrals and decisions of the integral equations, differential and integro-differential tasks

The build two-sided symmetric formulas for aprocsimatsii functions, derivative and integrals and also the proper two-sided symmetric methods of untting of task Coshi for the normal differential equations, integral equations and linear differential and integro-differential tasks.

Key Words: function, derivative, integral.

$$T - \hat{N} = \delta - \varepsilon(f_0(p_0 - p_n) - p_n((x_n - x_0)f'_0 - (x - x)^2 f''_0/2! - \dots)), \quad (3)$$

$$T - \tilde{N} = \delta + \varepsilon(f_0(p_0 - p_n) - p_n((x_n - x_0)f'_0 - (x - x)^2 f''_0/2! - \dots)), \quad (4)$$

так що $T - (\hat{N} + \tilde{N})/2 = \delta$. При цьому в разі симетричної відносно середини відрізка $[x_0, x_n]$ системи вузлів x_j може виконуватись рівність $p_0 = p_n$.

З виконаних побудов слідує, що при застосуванні двосторонніх формул (2), (3) для розв'язування різноманітних задач, що містять похідні та (або) інтеграли, теж дістанемо симетричні двосторонні наближення їх розв'язків. Проілюструємо це на прикладах. Нижче наведено таблиці одержаних наближень різноманітних задач. В них наведено похибки двосторонніх наближень розв'язку відповідної задачі (перша та друга колонки) та похибку середнього арифметичного цих наближень (третя колонка).

Таблиця (апроксимація функції $x^2 f(x) = 1/(1+x^2)$ многочленом Лагранжа)

1.524002791623014E-04	-1.525867380097745E-04	-9.322942373657384E-08
-4.221895839195966E-05	4.241425646611674E-05	9.764903707853989E-08
2.072554063436982E-05	-2.091851856356186E-05	-9.648896459601985E-08
-1.339003505185232E-05	1.357404944957175E-05	9.200719885971154E-08
1.040873778623830E-05	-1.057807993787296E-05	-8.467107581733302E-08
-9.473290130235235E-06	9.624941917363294E-06	7.582589356402991E-08
1.015494924316851E-05	-1.028924275126020E-05	-6.714675404584369E-08
-1.334250356188615E-05	1.346209917163499E-05	5.979780492992859E-08
2.382637834530410E-05	-2.393457089011619E-05	-5.409627235053449E-08
-7.892122792174661E-05	7.901820988587271E-05	4.849098211856528E-08

(відкрита система 11 вузлів Чебишова на відріжку $[0, 1]$, $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$).

Таблиця (апроксимація функції неповною раціональною функцією)

1.315664910350733E-07	-1.322125413594222E-07	-3.230251621744173E-10
-1.490444976326444E-07	1.496212540530450E-07	2.883790983787549E-10
1.679972179147171E-07	-1.684739512342048E-07	-2.383657715654408E-10
-1.857816869232920E-07	1.861318548179725E-07	1.750848355186463E-10
1.998192669105947E-07	-2.000298842119719E-07	-1.053095388670044E-10
-2.085558801212528E-07	2.086310715299078E-07	3.759481614906690E-11
2.113273200876620E-07	-2.112921322350303E-07	1.759481449425948E-11

(система 11 вузлів Чебишова з законтурними вузлами, $\varepsilon = 10^{-5}$).

Таблиця (апроксимація функції повною раціональною функцією)

-2.797406750687514E-11	2.796873843635694E-11	-3.552713678800501E-15
-2.095035256388655E-11	2.094679985020775E-11	-1.776356839400250E-15
2.263789156131679E-11	-2.264499698867439E-11	-3.552713678800501E-15
1.826094830903457E-11	-1.826805373639218E-11	-3.552713678800501E-15
-1.641176083921891E-11	1.640287905502191E-11	-5.329070518200751E-15
-1.337419064384449E-11	1.337774335752329E-11	1.776356839400250E-15
9.885425811262394E-12	-9.883649454422994E-12	1.776356839400250E-15
7.833733661755105E-12	-7.828404591236904E-12	3.552713678800501E-15

-4.394706820676220E-12 4.400035891194420E-12 3.552713678800501E-15
-3.138822535220243E-12 3.138822535220243E-12 0.000000000000000E+00
(система вузлів Чебишова з законтурними вузлами, 8 основних, 7 додатко-
вих вузлів, $\varepsilon = 10^{-9}$).

Таблиця (апроксимація двократного нуля функції $x \mapsto \sin^2 x$)
7.352048006850631E-12 -7.370481612187230E-12 -9.216802668299273E-15
(система 11 вузлів з сталим кроком, $\varepsilon = 10^{-6}$).

Таблиця (апроксимація четвертої похідної многочленом Лагранжа)
-1.337772779657076E-04 1.337485658445825E-04 -1.435606056254812E-08
-4.133354948532286E-06 4.145513387232569E-06 6.079219350141329E-09
4.095774866041957E-06 -4.102523153082238E-06 -3.374143520140649E-09
-2.921681980461166E-06 2.926820061310842E-06 2.569040424837965E-09
2.758963356774835E-06 -2.764219706130611E-06 -2.628174677887785E-09
-3.543148260454210E-06 3.550319241818478E-06 3.585490682134207E-09
4.502452462640250E-06 -4.515762306089854E-06 -6.654921724802421E-09
6.192318228770421E-05 -6.189175932902469E-05 1.571147933976391E-08
(система 11 вузлів Чебишова з законтурними вузлами, $\varepsilon = 10^{-3}$).

Таблиця (апроксим. першої похідної неповною раціональною функцією)
-1.992291442931560E-09 1.998527898727787E-09 3.118172386962215E-12
1.806855998154333E-09 -1.812356043018326E-09 -2.750022431996513E-12
-1.755423473248641E-09 1.760688816965228E-09 2.632671858293634E-12
1.833937002260200E-09 -1.839302932182818E-09 -2.682964961309153E-12
-2.046426916813004E-09 2.052228165183578E-09 2.900568674135684E-12
2.445720514998584E-09 -2.452536840280573E-09 -3.408162640994306E-12
-3.190496311589186E-09 3.199205012016648E-09 4.354294702579864E-12
4.783457741019959E-09 -4.796377406357522E-09 -6.459832668781473E-12
-9.546769264012767E-09 9.572321491013724E-09 1.277611350047891E-11
(закрита система 11 вузлів Чебишова, $\varepsilon = 10^{-3}$).

Таблиця (апроксимація першої похідної повною раціональною функцією)
3.623459310375665E-10 -3.625679756424915E-10 -1.110223024625157E-13
-5.760218968475783E-10 5.753264531449531E-10 -3.477218513125990E-13
-2.808888677208188E-10 2.808684396171657E-10 -1.021405182655144E-14
-1.171212016259915E-10 1.171166497115905E-10 -2.220446049250313E-15
2.303091051203410E-11 -2.303135460124395E-11 -2.220446049250313E-16
-1.544053773727683E-11 1.546784922368261E-11 1.365574320288943E-14
3.680156179797223E-11 -3.700872941436728E-11 -1.035838081975271E-13
1.823596829098051E-11 -1.815136929650407E-11 4.229949723821846E-14
-1.152689055317069E-11 1.141720051833772E-11 -5.484501741648273E-14
7.733842455337481E-10 -7.586636874279407E-10 7.360223541752475E-12
1.984634678819930E-11 -1.974398422532886E-11 5.118128143521972E-14
(відкрита сист. 11 вузлів Чебишова, 11 основн., 10 додатк. вузлів $\varepsilon = 10^{-9}$).

Таблиця (апроксимація регулярного інтеграла)

$$y' = 2xy, y(0) = 1 (y(x) = \exp(x^2))$$

0.0000000000000000E+00	0.0000000000000000E+00	0.0000000000000000E+00
3.283295841678413E-04	-3.283287491653297E-04	4.175011447671295E-10
3.316260722012743E-04	-3.316172252685323E-04	4.423466259950715E-09
3.559690034289353E-04	-3.559325529585156E-04	1.822523532091225E-08
4.046518965192814E-04	-4.045371134777653E-04	5.739152064698771E-08
4.837628757285994E-04	-4.834408251379596E-04	1.610252953199165E-07
6.031840112672437E-04	-6.023439654219143E-04	4.200229226647423E-07
7.782565032570243E-04	-7.761914190886898E-04	1.032542084056232E-06
1.032472606125934E-03	-1.027648587311969E-03	2.412009407093407E-06
1.401802920933282E-03	-1.391010060838749E-03	5.396430047266421E-06
1.941684911910713E-03	-1.918378760895845E-03	1.165307550721195E-05

(відрізок $[0, 1]$, крок інтегрування $h = 0.1$, $\varepsilon = 10^{-1}$).

Таблиця (інтегральне рівняння Фредгольма другого роду)

0.0000000000000000E+00	0.0000000000000000E+00	0.0000000000000000E+00
-3.954736538247516E-11	3.954703231556778E-11	-1.110223024625157E-16
-1.154385476098696E-10	1.154374373868450E-10	-5.551115123125783E-16
-2.215251315718092E-10	2.215226890811550E-10	-1.221245327087672E-15
-3.492123257231583E-10	3.492086619871770E-10	-1.887379141862766E-15
-4.881559600988794E-10	4.881508530729661E-10	-2.553512956637860E-15
-6.270994834522980E-10	6.270929331364528E-10	-3.330669073875470E-15
-7.547868996482521E-10	7.547787950201723E-10	-4.107825191113079E-15
-8.608732615655867E-10	8.608641577367848E-10	-4.551914400963142E-15
-9.367642217483763E-10	9.367545628080620E-10	-4.884981308350689E-15
-9.763118091754563E-10	9.763014841013273E-10	-5.107025913275720E-15

(замкнута система 11 вузлів Чебишова, $\varepsilon = 10^{-7}$).

Таблиця (інтегральне рівняння Вольтерра другого роду)

0.0000000000000000E+00	0.0000000000000000E+00	0.0000000000000000E+00
5.959445437131450E-11	-5.960071325361582E-11	-3.136380044566067E-15
9.997633276803697E-11	-9.998701866464899E-11	-5.329070518200751E-15
1.603907007208250E-10	-1.604077426442529E-10	-8.548717289613705E-15
2.097776952147967E-10	-2.098004547868015E-10	-1.137978600240785E-14
2.744879878946449E-10	-2.745170757378901E-10	-1.454392162258955E-14
3.293695316486378E-10	-3.294052808300307E-10	-1.787459069646502E-14
4.232368899792505E-10	-4.232829642347724E-10	-2.298161660974074E-14
4.327382896462950E-10	-4.327842528795145E-10	-2.298161660974074E-14
1.064792476412890E-09	-1.064855648102991E-09	-3.164135620181696E-14
-2.29216101654828E-08	2.292156309202653E-08	-2.353672812205332E-14

(замкнута система 11 вузлів з сталим кроком, $\varepsilon = 10^{-6}$).

Таблиця (крайова диференціальна задача для рівняння 2-го порядку)

-1.551467769811410E-07	1.550575713382685E-07	-4.460276592510581E-11
-1.476909876618748E-07	1.476014872547893E-07	-4.475020354277603E-11

-1.139512677550414E-07 1.138615395301912E-07 -4.486411242510258E-11
-6.613026859447757E-08 6.604013047528667E-08 -4.506905959544838E-11
-7.257943579475068E-09 7.167347604308816E-09 -4.529798758312609E-11
5.902652233658046E-08 -5.911764144883591E-08 -4.555955612772777E-11
1.286092303764974E-07 -1.287008795092248E-07 -4.582445534140334E-11
1.970145928620326E-07 -1.971067173922592E-07 -4.606226511327804E-11
2.595528769688826E-07 -2.596454284908845E-07 -4.627564997861100E-11
3.115760436323001E-07 -3.116688640503185E-07 -4.641020900919557E-11
3.489510109755400E-07 -3.490440856346311E-07 -4.653721852321269E-11
3.556142929017625E-07 -3.557072734139410E-07 -4.649014506696858E-11

(замкнута система 12 вузлів Чебишова, $\varepsilon = 10^{-8}$).

Таблиця (крайова інтегро-диференціальна задача типу Фредгольма для
рівняння (2, 1)-го порядку)

7.527258816253379E-10 -7.457257034104714E-10 3.500089107433269E-12
7.831986170714345E-10 -7.762301912350722E-10 3.484323940483591E-12
8.417493368995110E-10 -8.349561042564346E-10 3.396616321538204E-12
9.210410212290299E-10 -9.145362245277511E-10 3.252509372941859E-12
1.006166483463744E-09 -1.000140636975289E-09 3.012923244227750E-12
1.076183142600939E-09 -1.070848298923011E-09 2.667421838964401E-12
1.111205127912740E-09 -1.106756464253067E-09 2.224220807534039E-12
1.102456348434089E-09 -1.099011992522492E-09 1.722177955798543E-12
1.058864107505997E-09 -1.056381648822935E-09 1.241229341530925E-12
1.004625271860959E-09 -1.002928851079332E-09 8.482103908136196E-13
9.681575541264920E-10 -9.668474909574343E-10 6.550315845288424E-13

(замкнута система 11 вузлів Чебишова, $\varepsilon = 10^{-7}$).

Таблиця (крайова інтегро-диференціальна задача типу Вольтерра для
рівняння (2, 1)-го порядку)

-4.505744888305685E-09 4.417942456313995E-09 -4.390132701814764E-11
-4.647376039557116E-09 4.559301158835183E-09 -4.403744036096668E-11
-4.936483444240025E-09 4.848218049247066E-09 -4.413269749647952E-11
-5.346276976680997E-09 5.257652535561874E-09 -4.431233158186387E-11
-5.860383955891280E-09 5.771360278572502E-09 -4.451194968169148E-11
-6.429970778043526E-09 6.340482361366639E-09 -4.474420833844306E-11
-7.094581144784229E-09 7.004610891314655E-09 -4.498512673478672E-11
-7.676320468164022E-09 7.585906347529203E-09 -4.520694929510682E-11
-8.360667491658091E-09 8.269838813745878E-09 -4.541433895610680E-11
-8.793036521126396E-09 8.701934062216310E-09 -4.555111843274062E-11
-9.260282096690275E-09 9.168915848789538E-09 -4.568323497267102E-11
-9.382108867583838E-09 9.290820113250220E-09 -4.564437716680914E-11

(замкнута система 12 вузлів Чебишова, $\varepsilon = 10^{-3}$).

Формули (2) і відповідні їм методи побудовано збуренням значень
функції лише в крайніх вузлах. Можна побудувати аналогічні за власти-

востями формули та методи шляхом збурення цих значень у більшій кількості вузлів, а то й в усіх вузлах. Так, за допомогою многочленних колокантів будуюмо двосторонні наближення функції f у вигляді

$$\hat{L}_n(x, f) = \sum_{j=0}^n \omega_j(x) f_j (1 + \varepsilon_j (-1)^j), \quad \check{L}_n(x, f) = \sum_{j=0}^n \omega_j(x) f_j (1 - \varepsilon_j (-1)^j). \quad (5)$$

(множник $(-1)^j$ можна замінити одиницею). Невідомі збурення ε_j можна знаходити методом колокації в заданих точках $\bar{x}_i$ відрізка $[x_0, x_n]$ або методом найменших квадратів. У першому випадку матимемо систему

$$\sum_{j=0}^n \varepsilon_j \omega_j(\bar{x}_i) f_j = \delta(\bar{x}_i), \quad i = \overline{0, n}, \quad \delta(x) = f(x) - L_n(x, f),$$

у другому випадку – систему

$$\sum_{j=0}^n \varepsilon_j f_j f_j \int_a^b \rho(x) \omega_i(x) \omega_j(x) dx = f_i \int_a^b \rho(x) \delta(x) \omega_i(x) dx, \quad i = \overline{0, n}.$$

Нижче наведено приклад за першим способом збурення в усіх вузлах.

Таблиця (апроксимації функції многочленом зі збуренням в усіх вузлах)
 -3.740652232409047E-11 3.744515808534743E-11 1.931788062847772E-14
 5.900613331277782E-12 -5.936140468065787E-12 -1.776356839400250E-14
 -2.549960242959060E-12 2.582156710673189E-12 1.620925615952729E-14
 1.607602939657227E-12 -1.640465541186131E-12 -1.643130076445232E-14
 -1.276756478318930E-12 1.308952946033060E-12 1.598721155460225E-14
 1.213251721310371E-12 -1.244560010604800E-12 -1.554312234475219E-14
 -1.362243651215067E-12 1.391553539065171E-12 1.465494392505207E-14
 1.833200258261058E-12 -1.863842413740713E-12 -1.554312234475219E-14
 -3.147260230207394E-12 3.176570118057498E-12 1.465494392505207E-14
 8.252509786643714E-12 -8.275158336346067E-12 -1.154631945610163E-14
 (замкнута система 11 вузлів Чебишова).

Принагідно зауважимо, що для лінійної системи

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad m < n \vee m = n \vee m > n, \quad (6)$$

системи

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} (1 - \varepsilon_j)^{-1} \bar{x}_j = b_i, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} (1 + \varepsilon_j)^{-1} \check{x}_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (7)$$

теж являються симетричними двосторонніми. Дійсно, співставлення (6) з (7) показує, що

$$\bar{x}_j = x_j (1 - \varepsilon_j), \quad \check{x}_j = x_j (1 + \varepsilon_j), \quad x_j = (\bar{x}_j + \check{x}_j) / 2,$$

тобто розв'язки систем (7) являються повністю симетричними двосторонніми наближеннями розв'язків системи (6).

Надійшла до редакції 21.04.2005

УДК 519.63:551.515

Олег Л. Левошич*,
Євген В. Кравченко*

Oleg L. Levoshych*
Evgen V. Kravchenko*

**Моделювання та дослідження
руху атмосферних вихорів**

**Simulation and investigation of
movement of atmospheric
whirlwinds**

Досліджено задачу формування руху вихорів з урахуванням рельєфу земної поверхні. Побудовано відповідну математичну модель. Запропоновано різницеву схему та ітераційний метод для даної задачі.

Ключові слова: вихор, циклон, антициклон, ітераційний метод.

The problem of formation and movement of whirlwinds in view of a relief of a terrestrial surface is investigated. The proper mathematical model is constructed. The difference scheme and an iterative method for the given problem are offered.

Keywords: whirlwind, cyclone, anticyclone, iterative method.

*E-mail: mss@unicyb.kiev.ua

Процеси в атмосфері характеризуються неоднорідністю їхніх властивостей в просторі та мінливістю з часом. Неоднорідність земної поверхні в різних географічних регіонах створює умови, що призводять до виникнення рухів в атмосфері, які в свою чергу викликають зміну погоди, появу різних природних явищ, зокрема, виникнення циклонів та антициклонів.

Можна сказати, що будова земної поверхні – головний чинник, що впливає на розподіл циклонів і антициклонів. Саме з циклонами і антициклонами пов'язане виникнення небезпечних природних явищ: смерчів, тайфунів тощо. Моделювання таких фізичних процесів на сьогоднішній день є актуальною і практично цінною задачею, оскільки дозволяє передбачити їх і запобігти глобальним природним катастрофам. Значні результати в цьому напрямку отримані в роботах [1,2].

У трьохвимірному випадку вектор вихору може розглядатися як подвоєна кутова швидкість елементу об'єму навколо його осі обертання. В математичному моделюванні фізичних процесів, що виникають в атмосфері Землі, найбільш широке розповсюдження отримала концепція, згідно якої дискретність структури середовища за звичайних умов не береться до уваги. Атмосферне повітря, що містить у собі рідкі та тверді частинки домішок природного та антропогенного походження, розглядається як суцільне середовище. Сучасна нелінійна теорія суцільних середовищ, заснована на наближеннях ньютонівської рідини, дозволяє представити математичну модель розглянутої складної задачі динамічної метеорології у вигляді системи рівнянь Нав'є-Стокса. Але чисельне моделювання на основі рівнянь Нав'є-Стокса є складним та мало

чисельне моделювання на основі рівнянь Нав'є-Стокса є складним та мало розробленим напрямком. В роботі пропонується досить коректна формалізація даної задачі та різницева схема для чисельного експерименту.

Розглянемо модель переміщення атмосферних циклонів [2]. Це може бути дифузія вихору в рівномірному стаціонарному потоці в'язкої рідини в області $G(r) = \{x_1 \in [0, L]; -\infty < x_2 < \infty; x_3 \in [0, H]\}$, де $H = \text{const}$ – висота, верхня границя області, $L = \text{const}$ – границя області по горизонталі. Вважаємо, що вектор швидкості співпадає з напрямком осі координат x_1 , а гірський хребет паралельний осі x_2 . Тоді модель може бути описана системою рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} + U \frac{\partial \omega}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\nu \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\nu \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\nu \frac{\partial \omega}{\partial x_3} \right) \\ U \frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\nu \frac{\partial U}{\partial x_3} \right), \end{cases} \quad (1)$$

де $\omega(t, x_1, x_2, x_3)$ – атмосферний вихор, ν – коефіцієнт дифузії всередині потоку внаслідок ізотропної турбулентності, який визначається виразом:

$$\nu = \chi^2 x_3^2 \left| \frac{\partial U}{\partial x_3} \right|, \quad U - \text{швидкість потоку}, \quad \chi = 0.4 - \text{емпірична константа.}$$

Введемо нову систему координат: $x = x_1$, $y = x_2$, $z = \frac{(x_3 - F)}{(H - F)}$, де $F(x_1, x_2, x_3)$ – рівняння рельєфу підстилюючої поверхні, яке визначає нижню границю області розв'язків $G(r)$ для даної задачі. За допомогою такої заміни змінних перетворимо область $G(r) = \{x_1 \in [0, L]; -\infty < x_2 < \infty; x_3 \in [0, H]\}$ в прямокутну область $G_1(r) = \{x \in [0, L]; z \in [0, 1]\}$. Тоді система рівнянь (1) набуває порівняно простого вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} + U \frac{\partial \omega}{\partial x} + w \frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{1}{(H - F)^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \\ U \frac{\partial U}{\partial x} + w \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{(H - F)^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial U}{\partial z} \right), \\ w = U \frac{(1 - z)}{(H - F)} \frac{dF}{dx}, \\ \nu = (H - F) \chi^2 z^2 \left| \frac{\partial U}{\partial z} \right|. \end{cases} \quad (2)$$

Отже, отримали задачу руху вихору в стаціонарному потоці в'язкої рідини, яка не стискається. Необхідно доповнити систему рівнянь (2) початковими та крайовими умовами. Початкову умову потрібно задати лише для функції ω , оскільки друге рівняння системи стаціонарне.

Нехай при $t=0$ в заданій точці міститься циліндричний вихор ω заданого радіусу зі сталою циркуляцією швидкості вздовж контуру.

Профіль швидкості стаціонарного потоку в точці $x=0$ задамо у вигляді степеневої функції

$$U(z) = U_{\max} z^{\frac{1}{n}}. \quad (3)$$

Крайові умови на нижній границі будемо визначати з урахуванням умов присипання в'язкої рідини до твердої нерухомої стінки, тобто

$$U|_{z=0} = \omega|_{z=0} = 0. \quad (4)$$

Крайові умови на верхній границі визначатимемо з урахуванням умов затухання збурень, пов'язаних з неоднорідністю підстилюючої поверхні:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=1} = \left. \frac{\partial \omega}{\partial z} \right|_{z=1} = 0. \quad (5)$$

Аналогічно умові (4) визначимо умову на правій границі:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=L} = \left. \frac{\partial \omega}{\partial x} \right|_{x=L} = 0. \quad (6)$$

Розв'язок поставленої задачі здійснюється скінченно-різницеvim методом.

Візуалізація отриманого розв'язку для різних висот $z = h_k$, $k = 1, 2, \dots, K$ проводиться на основі графічного відображення функції току $\psi_k = \psi(x, y)|_{z=h_k}$, яка обчислюється за допомогою рівняння Пуассона:

$$\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial y^2} = -\omega_k \quad (7)$$

для заданих значень $\omega_k = \omega(x, y)|_{z=h_k}$, $k = 1, 2, \dots, K$.

Для реалізації алгоритму поставленої задачі використовується багатоітераційний метод предиктор-коректор [3-5]. В застосуванні до параболізованих рівнянь Нав'є-Стокса цей метод дозволяє розв'язувати просторову задачу та порівняно швидко збігається. Тим самим метод задовольняє вимогам, що пред'являються до методів розв'язку подібних задач.

Нехай маємо рівняння

$$u_x + cu_y + du_z = \mu(u_{xx} + u_{yy}). \quad (8)$$

В результаті використання методу предиктор-коректор отримаємо різницеву схему:

$$u_{i+1,j,k}^{m+1} = u_{i,j,k}^m - \frac{c}{2} \frac{\Delta x}{\Delta y} (u_{i+1,j+1,k}^{m+1} - u_{i+1,j-1,k}^{m+1}) - \frac{d}{2} \frac{\Delta x}{\Delta z} (u_{i+1,j,k+1}^m - u_{i+1,j,k-1}^m) + \frac{\mu \Delta x}{(\Delta y)^2} (u_{i+1,j+1,k}^{m+1} - 2u_{i+1,j,k}^{m+1} + u_{i+1,j-1,k}^{m+1}) + \frac{\mu \Delta x}{(\Delta z)^2} (u_{i+1,j,k+1}^m - 2u_{i+1,j,k}^m + u_{i+1,j,k-1}^m), \quad (9)$$

де індекс m означає номер ітерації, $x = i\Delta x$, $y = j\Delta y$, $z = k\Delta z$, $i, j, k = 1, 2, \dots, K$.

Спочатку покладемо $m = 0$, відповідні члени рівняння апроксимуємо або лінійно, тобто $u_{i+1,j,k}^0 = u_{i,j,k}$, або за допомогою розвинення в ряд Тейлора: $u_{i+1,j,k}^0 = 2u_{i,j,k} - u_{i-1,j,k} + o((\Delta x)^2)$.

Тоді в рівняння (9) при $m = 0$ входять лише три невідомих:

$$u_{i+1,j+1,k}^1, u_{i+1,j,k}^1, u_{i+1,j-1,k}^1,$$

які шукаються із системи лінійних алгебраїчних рівнянь з трьохдіагональною матрицею. Таку систему зручно розв'язувати методом прогонки.

В $(i+1)$ -ій площині обчислення здійснюється в напрямку від стовпчика з номером $k = 1$, на якому задані граничні умови, до останнього стовпчика вузлових точок. На цьому перша ітерація закінчується. На наступній ітерації ($m = 1$) в рівняння (9) також входять три невідомі:

$$u_{i+1,j+1,k}^2, u_{i+1,j,k}^2, u_{i+1,j-1,k}^2.$$

Ітераційна процедура виконується доти, доки розв'язок в $(i+1)$ -ій площині не зійдеться. Для досягнення необхідної точності достатньо 3 ітерації. Після цього можна перейти до розрахунків в площині з номером $(i+2)$.

Поставлена задача розв'язана за припущень:

- двовимірність задачі, тобто гірський хребет прямий і направлений вздовж осі y ;
- стаціонарний розподіл поля швидкостей;
- відсутність зміни температури повітря внаслідок впливу різних чинників.

На середній рух атмосфери, що регулюється джерелами тепла та холоду, у великій мірі впливають такі перешкоди як гірські ланцюги.

Перш за все, повітряні течії, що перетинають такі перешкоди, будуть відхилятися як по горизонталі, так і по вертикалі, у результаті чого встановлюються географічно обумовлені поля, що впливають на розподіл вихору.

Крім того, гірські бар'єри, особливо уздовж узбережжя, діють, як стіни, що розділяють теплі і холодні повітряні маси, які впливають на рух за допомогою термічного вітру. Будова земної поверхні в однаковій мірі важлива, тому що від неї залежить здатність землі поглинати і зберігати сонячне тепло та обмінюватися теплом із атмосферою.

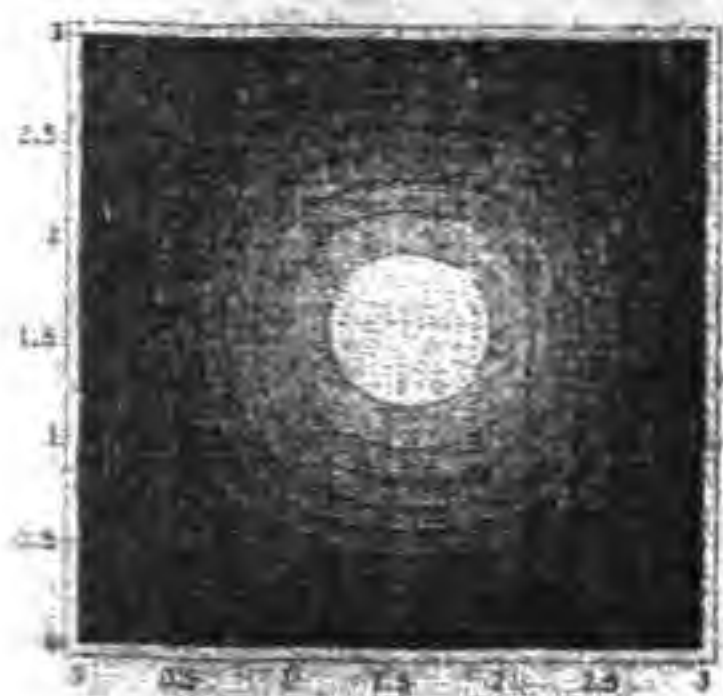
Оскільки мова йде про великомасштабні впливи, необхідно враховувати ефекти, зумовлені, по-перше, географічним розподілом осередків тепла і холоду, по-друге, гірськими бар'єрами. З цих впливів перші є термодинамічними, а останні – головним чином, механічні.

Вплив гір на великомасштабні потоки винятково складний; він змінюється в залежності від швидкості потоку і кута, під яким потік зустрічає гори, профілю перешкоди і термічної структури атмосфери. Є докази того, що ці впливи досягають великих висот, і вертикальні коливання повітря є періодичними у верхній атмосфері. Крім того, у середніх широтах, де зональний термічний вітер сильний, вектор горизонтального вихору буде вказувати на північ.

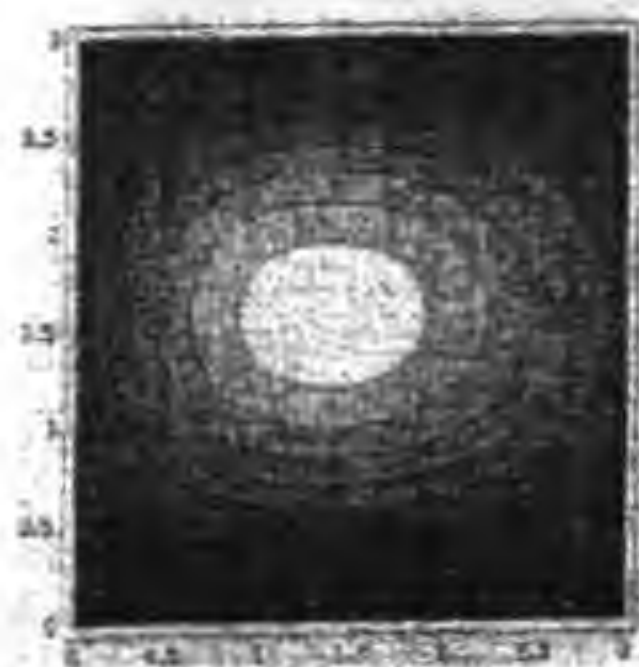
Наведені закономірності підтверджуються чисельними розрахунками. На малюнках дані зображення двох вихрових утворень: циклону і антициклону за умови, що швидкість потоку повітря $U_{\text{max}} = 10$.

На малюнках добре видно, що при проходженні через хребет на нижньому рівні атмосфери вихори деформуються. Після проходження хребту вони дещо змінюються і продовжують рух в деформованому вигляді. В деяких випадках, коли сила вітру не досить велика, вихори, подолавши гірський хребет, можуть повністю переходити на вищий рівень атмосфери.

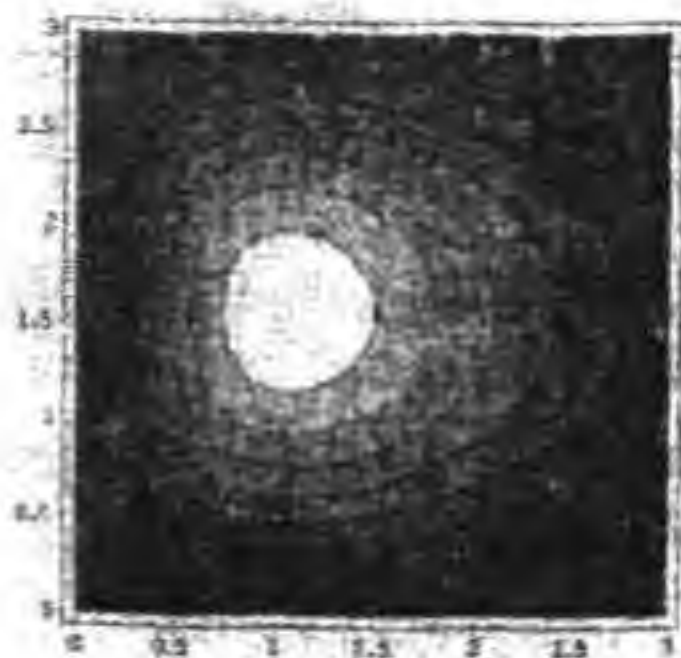
Лінії току циклонічного утворення:



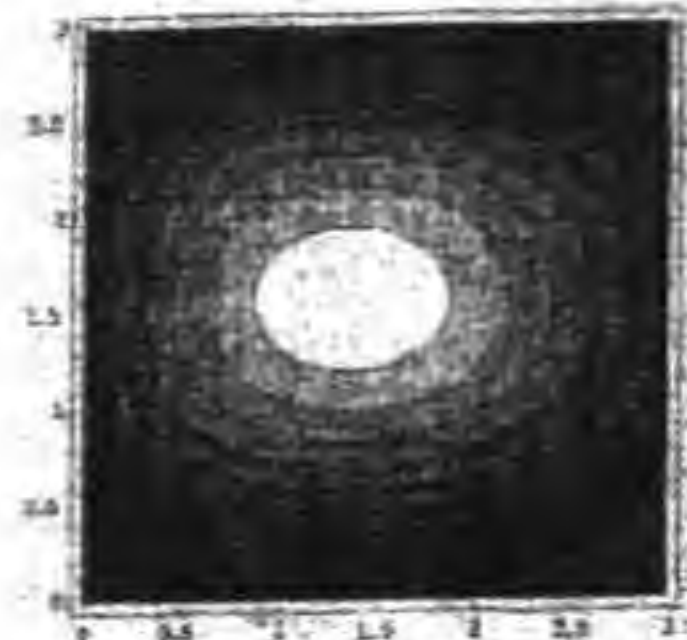
Початковий стан вихору



Стан вихору при підході до хребта

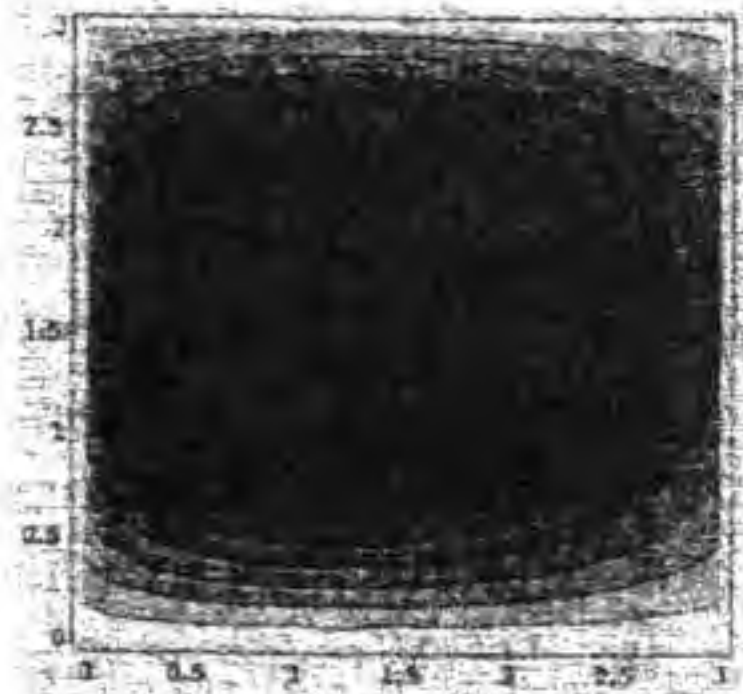
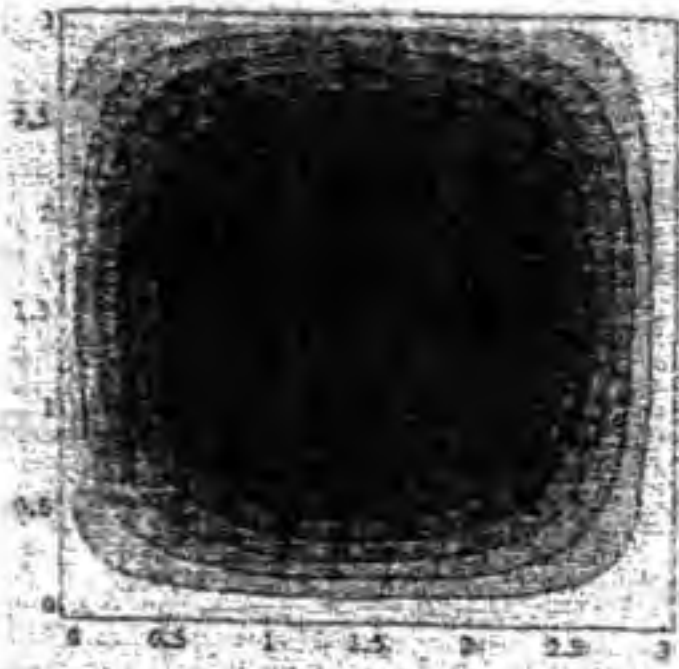


Пік деформації вихору

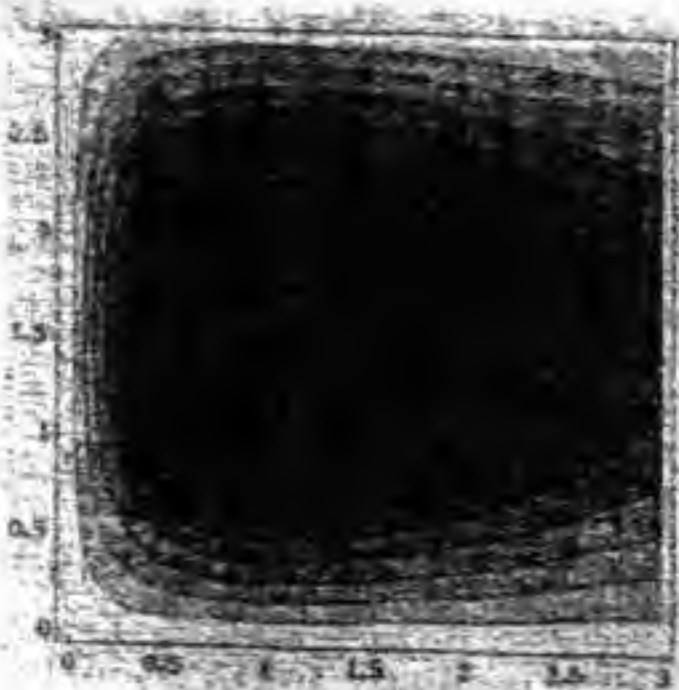


Вихор після перевалу через хребет

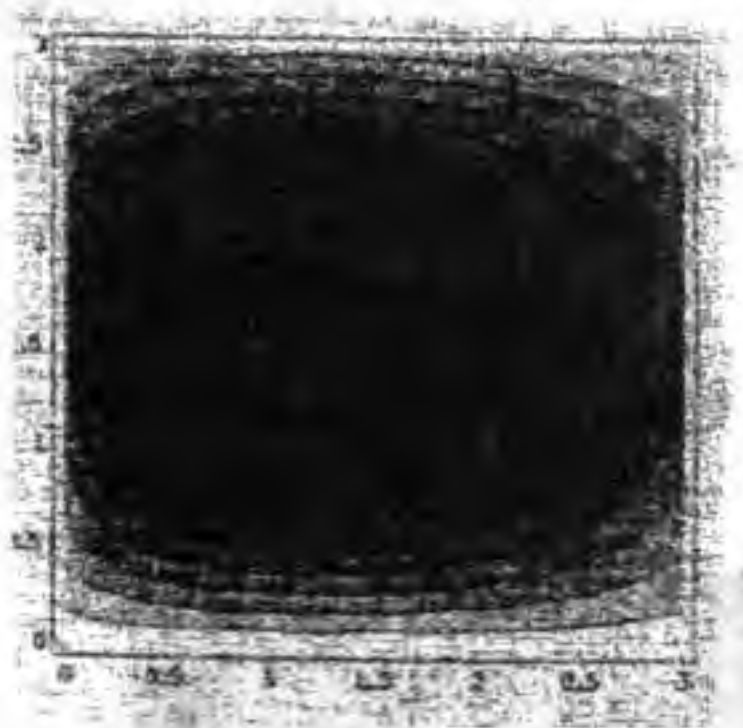
Лінії току антициклонічного утворення:



Початковий стан вихору



Стан вихору при підході до хребта



Пік деформації вихору

Вихор після перевалу через хребет

Література

1. Прусов В.А. До питання прогнозування надзвичайних ситуацій природного та техногенного характеру з різною завчасністю. Екологія і ресурси: Зб. праць Укр. ін-ту дослідж. навколиш. середовища і ресурсів/ Редкол.: В.Я. Шевчук (голов. ред.) та ін. — К.: АВС, 2001. — 234с.
2. Довгий С.А., Прусов В.А., Копейка О.В. Математическое моделирование техногенных загрязнений окружающей среды — К.: Наукова думка, 2000. — 284 с.
3. Белов П.Н., Борисенков Е.П., Панин Б.Д. Численные методы прогноза погоды — Л.: Гидрометеиздат, 1989. — 375с.
4. Приумов У. Г., Росляков Г. С. Численные методы газовой динамики. — М.: Высшая школа, 1987, 225 с.
5. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. Пер. с англ., под ред. Похожаева С.И. — М.: Мир, 1985. — 383с.

Надійшла до редакції 22.03.2005

УДК 519.21

Ігор А. Макушенко*

**Про максимізацію середнього
прибутку для $[SM|GI]_{\infty}^r$ - мережі**

Для мережі з вузлами типу $SM|GI|_{\infty}$ розглянуто задачу максимізації середнього прибутку. В явному вигляді, через параметри моделі знайдено функціонал і показано, що він лінійний відносно параметрів, що контролюються.

Ключові слова: напівмарковський процес, мережа, вузол, процес обслуговування, генератриса, інтегральне рівняння.

Igor A. Makushenko*

**About maximization of average
income for $[SM|GI]_{\infty}^r$ - network**

For a network with nodes of the $SM|GI|_{\infty}$ type a problem of maximization of average income is considered. The functional subjected to optimization is found via system parameters in explicit form. It is shown that the functional is linear over controlled parameters.

Key Words: semi-Markov process, network, node, service process, generating function, integral equation.

*E-mail: iamak@ukr.net

Розглянемо стохастичну мережу, яка функціонує наступним чином.

На "r" вузлів іззовні надходить один загальний потік пакетів, який керується напівмарковським процесом $x(t) \in \{1, 2, \dots, N\}$. Це означає, що моменти надходження пакетів співпадають з моментами τ_n , $n = 1, 2, \dots$ змін станів $x(t)$. Якщо у моменти τ_n процес $x(t)$ переходить у стан "i", то пакет з номером "n" з імовірністю h_{ij} надходить для обробки у вузол "j",

$\sum_{j=1}^r h_{ij} = 1$, $H = \|h_{ij}\|$ – прямокутна матриця розміром $N \times r$. Через

$F(t) = \|F_{ij}(t)\|_1^N$ будемо позначати напівмарковську матрицю $x(t)$, а через

$F(t) = \sum_{j=1}^N F_{ij}(t)$ – функцію розподілу часу перебування у стані "i".

Кожен з "r" вузлів представляє собою багатоканальну стохастичну систему. При надходженні пакету у таку систему зразу починається його обробка. Розподіл часу обробки залежить від номера вузла, через $G_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, r$ будемо позначати його ф. р. Після обробки у j-ому вузлі пакет з імовірністю p_{jk} надходить у вузол "k" і з імовірністю

$p_{r+1} = 1 - \sum_{k=1}^r p_{jk}$ залишає мережу, $P = \|p_{jk}\|$ – матриця маршрутизації мережі.

Додатковий вузол з номером "r+1" інтерпретується як "вихід" з мережі.

Надалі будемо вважати, що $G(0+) = 0, j = 1, 2, \dots, r$ і $F_i(0+) = 0, i = 1, 2, \dots, N$, що завжди виконується на практиці.

Нехай $Q_j(t), j = 1, 2, \dots, r$ – число пакетів у j -ому вузлі в момент часу $t \geq 0$. Тоді $Q(t) = (Q_1(t), \dots, Q_r(t))$ представляє собою багатовимірний процес обробки інформації в мережі типу $[SM|GI|_\infty]^r$. Через $Q'_i(t), i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, r$ будемо позначати число пакетів у j -ому вузлі в момент часу t , якщо у початковий момент мережа порожня, $x(0) = i$, і момент надходження першого пакету в мережу співпадає з моментом виходу з “ i ”.

Для векторів $Q(t), Q'(t) = (Q'_1(t), \dots, Q'_r(t)), i = 1, \dots, N$, введемо генератрис

$$\Phi(t, z) = Mz_1^{Q_1(t)} \dots z_r^{Q_r(t)}, \Phi^i(t, z) = Mz_1^{Q'_1(t)} \dots z_r^{Q'_r(t)}, z = (z_1, \dots, z_r), |z_j| \leq 1.$$

Траскторія пакету від моменту надходження в мережу до моменту виходу з неї може бути описана напівмарковським процесом $y(t)$, який приймає значення у множині станів $\{1, 2, \dots, r, r+1\}$ і визначається напівмарковською матрицею $\|G_{ij}(t)\|_{r+1}^{r+1}$

$$G_{ij}(t) = \begin{cases} p_{ij} G_j(t), i = 1, 2, \dots, r, j = 1, 2, \dots, r, r+1 \\ \delta_{i,r+1} G_{r+1}(t), i = r+1, j = 1, 2, \dots, r, r+1 \end{cases}, G_{r+1}(t) = \begin{cases} 0, t < 1 \\ 1, t \geq 1 \end{cases}$$

δ_{ij} – дельта Кронекера.

Стан “ $r+1$ ” для процесу $y(t)$ є поглинаючим. Поглинання у “ $r+1$ ” інтерпретується як вихід пакету з мережі. Через $p'_{ij}(t) = P(y(t) = j | y(0) = i)$ будемо позначати перехідні імовірності напівмарковського процесу $y(t)$.

Зазначимо, що при вивченні процесу обробки пакетів у $[SM|GI|_\infty]^r$ – мережі можна обмежитись аналізом r -вимірних процесів $Q'(t), i = 1, 2, \dots, N$, яким відповідають генератрис $\Phi^i(t, z)$.

На процесі обробки пакетів $Q'(t), i = 1, 2, \dots, N$ у $[SM|GI|_\infty]^r$ – мережі визначимо адитивний функціонал $S^i(t) = (S^i_1(t), S^i_2(t), \dots, S^i_r(t))$, де $S^i_j(t), j = 1, 2, \dots, r$ – число пакетів, обробка яких завершилася в j -ому вузлі за час t . Якщо існують границі $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} MS^i_j(t)$, то будемо позначати їх через $m_j, j = 1, 2, \dots, r$. Очевидно, що $m_j, j = 1, 2, \dots, r$ залежать від параметрів $[SM|GI|_\infty]^r$ – мережі: $H = \|h_{ij}\|, F(t) = \|F_{ij}(t)\|^{-N}, G_j(t), j = 1, 2, \dots, r, P = \|p_{ij}\|$. У подальшому будемо вважати, що $F(t), G_j(t), j = 1, 2, \dots, r, P$ є заданими, а вибір матриці H знаходиться у нашому розпорядженні. Таким чином

$$m_j = m_j(H), j = 1, 2, \dots, r.$$

Аналогічно, якщо існують границі $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{cov}(S_k^i(t), S_p^i(t))$, то будемо позначати їх через $V_{kp} = V_{kp}(H)$, $k, p = 1, 2, \dots, r$.

Перейдемо до постановки оптимізаційних задач.

Нехай C_j , $j = 1, 2, \dots, r$ – прибуток від обробки одного пакету в j -ому вузлі. Тоді валиве значення має наступна задача:

$$M(H) = \sum_{j=1}^r C_j m_j(H) \rightarrow \max, \quad (1)$$

при умові

$$\begin{aligned} h_{i1} + h_{i2} + \dots + h_{ir} &= 1, \quad h_{ij} \geq 0, \\ i &= 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, r. \end{aligned} \quad (2)$$

Розв'язок H^* задачі (1) – (2) представляє собою таке управління вхідним потоком, яке максимізує середній прибуток від роботи всієї мережі. Очевидно, що $D(H) = \sum_{k,p=1}^r C_k V_{kp}(H) C_p$ є величиною ризику, мірою

відхилення прибутку від очікуваного значення $M(H) = \sum_{j=1}^r C_j m_j(H)$.

Враховуючи це, ми приходимо до оптимізаційної задачі виду

$$D(H) = \sum_{k,p=1}^r C_k V_{kp}(H) C_p \rightarrow \min, \quad (3)$$

при умові

$$M(H) = \sum_{j=1}^r C_j m_j(H) = M_0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} h_{i1} + h_{i2} + \dots + h_{ir} &= 1, \quad h_{ij} \geq 0, \\ i &= 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, r, \end{aligned} \quad (5)$$

де $M^- \leq M_0 \leq M^+ = M(H^*)$ – задана величина очікуваного прибутку, M^- – мінімальне значення функціоналу $M(H)$ при обмеженнях (2).

Пріоритетність оптимізаційних задач (1) – (2), (3) – (5) залежить від мети управління стохастичною мережею. Подібні постановки часто виникають при оцінюванні прибутку і ризику при фінансових операціях ([1], стор. 79–114, [2], [3]).

Перед тим, як шукати розв'язок оптимізаційних задач, вивчимо адитивні функціонали $S^i(t) = (S_1^i(t), S_2^i(t), \dots, S_r^i(t))$, $t \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Нехай $S^i(t, z)$, $z' = (z_1, \dots, z_r)$, $|z_i| \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, N$ – генератрисы векторів $S^i(t)$. Для $S^i(t, z)$, $i = 1, 2, \dots, N$ справедливий такий результат.

Лема 1. Функції $S^i(t, z)$, $i = 1, 2, \dots, N$ є єдиним розв'язком системи інтегральних рівнянь

$$S^i(t, z) = (1 - F_i(t)) + \int_0^t \left[\sum_{j=1}^N f_{ij} S^j(t-u, z) \left(\sum_{k=1}^r h_{jk} \varphi_k(t-u, z) \right) \right] dF_i(u), \quad (6)$$

$$i = 1, 2, \dots, N,$$

$$\varphi_j(t, z) = (1 - G_j(t)) + \int_0^t \left[z_j \sum_{k=1}^r p_{jk} \varphi_k(t-u, z) + p_{j,r+1} \right] dG_j(u), \quad (7)$$

$$j = 1, 2, \dots, r.$$

Доведення. Процес обробки пакетів у $[SM|GI|_\infty]^r$ -мережі разом і введеними вище адитивними функціоналами будемо моделювати гіллястим процесом Беллмана-Харріса ([5])

$$Z'(t) = (Z^1(t), \dots, Z^N(t), Z^{N+1}(t), \dots, Z^{N+r}(t), Z^{N+r+1}(t), \dots, Z^{N+2r}(t)),$$

$$Z^{i'}(t) = (Z_1^i(t), \dots, Z_N^i(t), Z_{N+1}^i(t), \dots, Z_{N+r}^i(t), Z_{N+r+1}^i(t), \dots, Z_{N+2r}^i(t)), \quad t \geq 0,$$

з $N + 2r$ типами частинок $T_1, \dots, T_N, T_{N+1}, \dots, T_{N+r}, T_{N+r+1}, \dots, T_{N+2r}$. Кожна з частинок T_i має випадкову тривалість життя з функцією розподілу $G^i(t), i = 1, 2, \dots, N + 2r$, причому

$$G^i(t) = F_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad G^i(t) = G_{i-N}(t), \quad i = N + 1, \dots, N + r,$$

$$G^i(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}, \quad i = N + r + 1, \dots, N + 2r.$$

Генератриси

$$f^i(x), \quad x' = (x_1, \dots, x_N, x_{N+1}, \dots, x_{N+r}, x_{N+r+1}, \dots, x_{N+2r}),$$

безпосередніх нащадків від однієї частинки типу T_i дорівнюють

$$f^i(x) = \sum_{j=1}^N f_{ij} x_j \left(\sum_{k=1}^r h_{jk} x_{N+k} \right), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$f^i(x) = x_{i+r} \sum_{j=1}^r p_{i-N,j} x_{N+j} + p_{i-N,r+1}, \quad i = N + 1, \dots, N + r,$$

$$f^i(x) = x_i, \quad i = N + r + 1, \dots, N + 2r,$$

де $F(+\infty) = \|F_i(+\infty)\|_1^N = \|f_{ij}\|_1^N$ - перехідна матриця вкладеного ланцюга Маркова для напівмарковського процесу $x(t)$.

Функції $G^i(t), f^i(x), i = 1, 2, \dots, N + 2r$ підібрані таким чином, що

$Z^{i'}(t) \stackrel{d}{=} (\chi_1^i(t), \dots, \chi_N^i(t), Q_1^i(t), \dots, Q_r^i(t), S_1^i(t), \dots, S_r^i(t)), i = 1, 2, \dots, N,$ $\stackrel{d}{=}$ означає рівність за розподілом. Випадковий вектор $\chi^{i'}(t) = (\chi_1^i(t), \dots, \chi_N^i(t))$ приймає значення $e_1, \dots, e_N$ з імовірностями $p_{i1}(t), \dots, p_{iN}(t)$, де $e_j, j = 1, 2, \dots, N$ - N -вимірний вектор, j -та компонента якого дорівнює 1, а інші - 0.

Відомо ([4], стор. 231), що генератриси

$$F^i(t, x) = \sum_{\alpha} P(Z^i(t) = \alpha) x^\alpha, \quad i = 1, 2, \dots, N + 2r,$$

$\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_N, \alpha_{N+1}, \dots, \alpha_{N+r}, \alpha_{N+r+1}, \dots, \alpha_{N+2r})$ задовольняють системі інтегральних рівнянь $F^i(t, x) = x_i (1 - F_i(t)) +$

$$+ \int_0^t \left[\sum_{j=1}^N f_{ij} F^j(t-u, x) \left(\sum_{k=1}^r h_{jk} F^{N+k}(t-u, x) \right) \right] dF_i(u), \quad i=1, 2, \dots, N,$$

$$F^i(t, x) = x_i (1 - G_{i-N}(t)) + \int_0^t \left[F^{i+r}(t-u, x) \sum_{j=1}^r p_{i-Nj} F^{N+j}(t-u, x) + p_{i-Nr+1} \right] dG_{i-N}(u), \\ i = N+1, \dots, N+r,$$

$$F^i(t, x) = x_i (1 - G^i(t)) + \int_0^t F^i(t-u, x) dG^i(u), \quad i = N+r+1, \dots, N+2r.$$

З останнього рівняння випливає, що $F^i(t, x) \equiv x_i$, $i = N+r+1, \dots, N+2r$.

Використовуючи цей факт і перепозичивши

$$F^i(t, 1, \dots, 1, x_{N+r+1}, \dots, x_{N+2r}) \Big|_{x_{N+r+1}=z_1, \dots, x_{N+2r}=z_r} = S^i(t, z), \quad i=1, 2, \dots, N$$

$$F^{N+j}(t, 1, \dots, 1, x_{N+r+1}, \dots, x_{N+2r}) \Big|_{x_{N+r+1}=z_1, \dots, x_{N+2r}=z_r} = \varphi_j(t, z), \quad j=1, 2, \dots, r,$$

приходимо до системи інтегральних рівнянь (6), (7). Лему доведено.

$$\text{Нехай } m_\alpha^i(t) = \frac{\partial S^i(t, z)}{\partial z_\alpha} \Big|_{z=1}, \quad A_\alpha^j(t) = \frac{\partial \varphi_j(t, z)}{\partial z_\alpha} \Big|_{z=1}, \quad C_{ij} = \sum_{k=1}^N f_{ik} h_{kj}, \\ i=1, 2, \dots, N; \quad \alpha, j=1, 2, \dots, r.$$

Тоді як наслідок лема 1 будемо мати наступний результат.

Наслідок 1. Функції $m_\alpha^i(t)$, $A_\alpha^j(t)$, $i=1, 2, \dots, N$, $\alpha, j=1, 2, \dots, r$ є єдиним розв'язком системи інтегральних рівнянь:

$$m_\alpha^i(t) = \sum_{k=1}^N \int_0^t dF_{ik}(u) m_\alpha^k(t-u) + \sum_{j=1}^r \int_0^t C_{ij} A_\alpha^j(t-u) dF_i(u), \quad i=1, 2, \dots, N \quad (8)$$

$$A_\alpha^j(t) = \delta_{j\alpha} (1 - p_{jr+1}) G_j(t) + \sum_{k=1}^r \int_0^t dG_j(u) p_{jk} A_\alpha^k(t-u), \quad \alpha, j=1, 2, \dots, r \quad (9)$$

Для того, щоб знайти залежність $m_j(H)$, $j=1, 2, \dots, r$ від матриці H , розглянемо систему рівнянь Маяковського відновлення (9) і введемо перетворення Лапласа для функцій $A_\alpha^j(t)$, $G_j(t)$, $j, \alpha=1, 2, \dots, r$

$$A_\alpha^j(s) = \int_0^\infty e^{-st} A_\alpha^j(t) dt, \quad G_j(s) = \int_0^\infty e^{-st} dG_j(t), \quad \text{Res} \geq 0, \quad A(s) = \|A_\alpha^j(s)\|.$$

Справедливий такий результат.

Лема 2. Якщо спектральний радіус матриці маршрутизації P строго менший 1, то $\lim_{t \rightarrow \infty} \|A_\alpha^j(t)\| = A = \|A_\alpha^j\| = (I - P)^{-1} \Lambda (1 - p_{rr+1})$,

$$\text{де } (1 - p_{rr+1})' = (1 - p_{rr+1}, \dots, 1 - p_{rr+1}).$$

Доведення. В термінах перетворень Лапласа систему (9) можна записати так $A_\alpha^j(s) = \frac{1}{s} G_j(s) \delta_{j\alpha} (1 - p_{jr+1}) + \sum_{k=1}^r G_j(s) p_{jk} A_\alpha^k(s)$, $j, \alpha=1, 2, \dots, r$, або, використовуючи матричні позначення, для $A(s)$ маємо рівняння

будемо позначати матрицю відновлення, а через $a_i = \int_0^{\infty} t dF_i(t)$ – середній час перебування у стані “і”.

Наслідком попереднього аналізу є такий результат.

Теорема 1. Якщо для $[SM|GI]_{\infty}$ – мережі матриця F нерозкладна, $\max_{1 \leq i \leq r} a_i < \infty$, і спектральний радіус матриці маршрутизації P строго менший 1, то границя $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (m_1^i(t), \dots, m_r^i(t)) = m^i = (m_1, \dots, m_r)$ існує і

$$m^i = \left(\sum_{j=1}^N \pi_j a_j \right)^{-1} \pi^i H (I - P)^{-1} \Delta (1 - p_{r+1}) \quad (14)$$

Доведення. Нехай $f_i(t) = \sum_{j=1}^r C_{ij} \int_0^t A_a^j(t-u) dF_i(u)$, $i = 1, 2, \dots, N$.

З (12) випливає, що $f_i(t) \uparrow f_i = \sum_{j=1}^r C_{ij} A_a^j$, при $t \rightarrow \infty$.

Подамо функції $m_a^i(t)$, $i = 1, 2, \dots, N$ як розв'язок рівнянь Марковського відновлення (8) $m_a^i(t) = \sum_{j=1}^N \int_0^t d\tilde{F}_{ij}(u) f_j(t-u)$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Оскільки $\int_0^t d\tilde{F}_{ij}(u) f_j(t-u) = f_j \tilde{F}_{ij}(t) - \int_0^t [f_j - f_j(t-u)] d\tilde{F}_{ij}(u)$, і при виконанні умов теореми $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \tilde{F}_{ij}(t) = \left(\sum_{k=1}^N \pi_k a_k \right)^{-1} \pi_j$, то для доведення (14) залишилось показати, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t [f_j - f_j(t-u)] d\tilde{F}_{ij}(u) = 0 \quad (15)$$

Для будь-якого $0 < \varepsilon < 1$ оцінимо зверху останній інтеграл

$$\begin{aligned} \int_0^t [f_j - f_j(t-u)] d\tilde{F}_{ij}(u) &= \int_0^{t(1-\varepsilon)} [f_j - f_j(t-u)] d\tilde{F}_{ij}(u) + \int_{t(1-\varepsilon)}^t [f_j - f_j(t-u)] d\tilde{F}_{ij}(u) \leq \\ &\leq [f_j - f_j(t\varepsilon)] \tilde{F}_{ij}(t(1-\varepsilon)) + f_j [\tilde{F}_{ij}(t) - \tilde{F}_{ij}(t(1-\varepsilon))]. \end{aligned}$$

Таким чином

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t [f_j - f_j(t-u)] d\tilde{F}_{ij}(u) \leq \left(\sum_{k=1}^N \pi_k a_k \right)^{-1} \pi_j f_j \varepsilon$$

Оскільки $0 < \varepsilon < 1$ довільне, то співвідношення (15) справедливе і теорему доведено.

З теореми 1 можна зробити такий висновок. Оптимізаційна задача на максимум середнього прибутку є задачею лінійного програмування. Відповідний функціонал задається співвідношенням (14).

Література

1. Первозванский А.А., Первозванская Т.Н. Финансовый рынок: расчет и риск. – М.: Инфра, 1994. – 192 с.
2. Коваль Р.Я., Наконечный А.Н. Оптимизация риска дивидентной политики // Доповіді НАН України. – 2001. – №12. – С. 58-62.
3. Наконечный А.Н., Наконечный А.А. Марковская модель неопределенности и риск денежных потоков инвестиционных проектов // Финансовые риски. – 2002. – №4 (31). – С. 91-94.
4. Севастьянов Б.А. Ветвящиеся процессы. – М.: Наука, 1971. – 436 с.
5. Ватутин В.А. Критический ветвящийся процесс Белмана-Харриса с иммиграцией и несколькими типами частиц // Теория вероятностей и ее применения. – 1976. – Т. 21, №2. – С. 447-454.
6. Климов Г.П. Стохастические системы обслуживания. – М.: Наука, 1966. – 244 с.
7. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю., Шуренков В.М. Случайные процессы. Справочник. – К.: Наукова думка, 1983. – 368 с.
8. Королук В.С., Турбин А.Ф. Полумарковские процессы и их приложения. – К.: Наукова думка, 1976. – 184 с.

Надійшла до редакції 31.10.05

УДК 519.8

Микола М. Маляр¹

Опис задач вибору на мові розмитих множин

Для багатокритеріальної задачі з скінченним числом альтернатив визначається нечітка задача досягнення "точки задоволення особи, яка приймає рішення". Пропонуються різні типи "точок задоволення ОПР", в якості функцій належності пропонуються різні типи згорток.

Ключові слова: вибір, багатокритеріальна оптимізація, нечітка модель, згортка критеріїв, точка задоволення.

¹ E-mail: cyber@mail.uzhgorod.ua

Mikola M. Malyar¹

The choosing problem by fuzzy sets

The problem is to determine fuzzy task for achieving "the satisfaction point for the decision making person (DMP)". Here are proposed the different kinds of "the satisfaction point for the DMP". As the membership functions a lot of convolution types are proposed.

Key words: choice, multicriteria optimization, fuzzy sets, convolution, satisfaction point.

Вступ. Для вирішення складних соціально-економічних проблем перед людиною завжди виникає задача вибору, розв'язання якої підпорядковує діяльність з певною ціллю та від якої залежить успіх результату. З формальної точки зору задачу вибору можна сформулювати у вигляді пари $\langle X, P_0 \rangle$, де X - множина альтернатив, а P_0 - принцип оптимальності; розв'язком є підмножина $X^{opt} \subseteq X$, отримана за допомогою принципу оптимальності P_0 .

На даний момент часу можна виділити наступні мови моделювання задач вибору: критеріальна, парних порівнянь, функцій вибору та "розмитих множин" ("fuzzy sets") [1, 3].

Нами буде розглядатися задача, коли множина X є скінченною. На критеріальній мові принцип оптимальності P_0 означає, що задана множина з k критеріїв ефективності $\{p^i\}_{i=1,k}$, які описуються деякими цільовими функціями (функціями корисності) $f_i(x), x \in X, i = \overline{1, k}$, що наділені наступними властивостями:

- альтернатива x^1 краща за альтернативу x^2 тоді і тільки тоді, коли $f_i(x^1) > f_i(x^2), \forall i = \overline{1, k}$;
- альтернатива x^1 негірша за альтернативу x^2 тоді і тільки тоді, коли $f_i(x^1) \geq f_i(x^2), \forall i = \overline{1, k}$;
- альтернатива x^1 рівноцінна альтернативі x^2 тоді і тільки тоді, коли $f_i(x^1) = f_i(x^2), \forall i = \overline{1, k}$;

- альтернатива x^1 непорівнянна з альтернативою x^2 тоді і тільки тоді, коли x^1 краща за x^2 по деякій непорожній підмножині критеріїв і x^2 краща за x^1 теж по деякій непорожній підмножині критеріїв, перетин яких є пустою множиною.

На даний момент часу існує багато підходів розв'язання багатокритеріальних задач вибору [4]. Критеріальна мова моделювання задач вибору добре застосовується для задач, які точно кількісно описуються (добре структуровані) і погано для "розмитих" життєвих ситуацій, які описуються слабоструктурованими задачами на основі "нечіткої логіки".

"Нечітка логіка" [5], розроблена Лотфі Заде, розширює поняття стандартного розуміння множини, визначає універсальну множину нечіткою за допомогою пар виду $\langle x, \mu(x) \rangle$, де x - елемент цієї множини, а $\mu(x)$ - функція належності елемента x цій множині.

При моделюванні задач вибору за допомогою мови "нечітких множин", нечітко можуть бути описані як сама множина альтернатив, так і функції корисності. Підходи по розв'язуванню такого класу задач приведені у літературі [2].

Постановка задачі вибору. Нехай задана скінчена множина альтернатив $X = \{x^j\}, j = \overline{1, n}$, кожна з яких може бути оцінена кількісно за допомогою принципу оптимальності P_0 . Якщо принцип оптимальності задається одним кількісним критерієм, то це є найпростіша однокритеріальна задача вибору. Нехай принцип оптимальності P_0 є множина критеріальних кількісних оцінок, тобто $k \geq 2$. Тоді задача вибору є багатокритеріальною і може бути сформульована наступним чином:

- а) знайти кількісні оцінки відносної корисності альтернатив;
- б) проранжувати альтернативи;
- в) вибрати найкращу альтернативу.

Кожна з наступних задач є більш загальною і може включати попередні. Розв'язання таких задач є надзвичайно складним, оскільки критерії в загальному випадку можуть мати різну природу і вимірюватись у різних шкалах і одиницях.

Математичну модель такої задачі вибору запишемо наступним чином: поставимо у відповідність кожній альтернативі x^j k -вимірний вектор оцінок по сформульованих критеріях, тобто $x_i^j = O_{ij} = f_i(x^j), i = \overline{1, k}; j = \overline{1, n}$; тоді модель задачі вибору запишеться у вигляді матриці рішень:

$$O = (O_{ij}) \quad i = \overline{1, k}; j = \overline{1, n}, \quad (1)$$

де кожен стовпець у (1) є k -вимірний вектор оцінок відповідної альтернативи по всій множині критеріїв, а кожен рядок є n -вимірний

вектор оцінок по відповідному критерію всієї множини альтернатив X , O_j - це оцінка j -альтернативи за i -критерієм.

Як видно з вищенаведеного задача вибору описана на критеріальній мові, але щоб її розв'язувати ми запропонуємо використати і мову "нечітких множин", тобто синтезуємо ці дві мови у якусь єдину.

Не обмежуючи загальності, припустимо, що всі альтернативи належать множині Парето, тобто є непорівнянними і найкраща оцінка це максимальна. Якщо серед критеріїв є підмножини, які необхідно максимізувати і мінімізувати, то за допомогою наступного перетворення оцінок:

$$O_j = (\max_j O_j + \min_j O_j) - O_j \quad (2)$$

зводимо задачу вибору до задачі або на максимум або на мінімум по всій множині критеріїв у залежності для якої підмножини критеріїв було застосовано перетворення (2). Якщо серед оцінок O_j є недодатні, тоді за допомогою перетворення

$$O_j = \left(1 + \left| \min_j O_j \right|\right) + O_j, \quad (3)$$

всі оцінки O_j будуть належати простору R_{++} .

Задання точки задоволення. Введемо у розгляд k -вимірний вектор $T = (t_1, \dots, t_k)$ з простору R_{++}^k , компоненти якого будуть оцінки, які могли б задовольняти особу, що приймає рішення (ОПР) по відповідній множині критеріїв. Назвемо вектор T точкою "задоволення" ОПР.

Означення 1. Точкою "задоволення" називається альтернатива, в якій оцінки по всіх критеріях задовольняють ОПР.

Точка "задоволення" може бути як досяжною (реальною), так само і недосяжною (ідеальною).

Означення 2. Точка "задоволення" T називається досяжною, якщо існує хоча б одна альтернатива з множини X , яка негірша за неї.

В якості точок "задоволення" для ОПР можна запропонувати множину точок $\{T^1, T^2, T^3, T^4, T^5, T^6\}$ з координатами:

$$t_1^1 = \min_j O_j, \quad t_1^2 = \frac{n}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{O_j}}, \quad t_1^3 = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n O_j}, \quad t_1^4 = \frac{\sum_{j=1}^n O_j}{n}, \quad t_1^5 = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n O_j^2}{n}}, \quad t_1^6 = \max_j O_j. \quad (4)$$

Як відомо, між цими точками, координати яких визначені згідно формул (4), існує субординація: $T^1 \leq T^2 \leq T^3 \leq T^4 \leq T^5 \leq T^6$. Кожна ОПР може задавати свою точку "задоволення". Наприклад, для певних критеріїв значення можуть бути обчислені за формулами (4).

Побудова нечіткої множини. Як відомо, нечітка множина описується множиною самих елементів і ступенем належності їх цій множині. Виходячи із постановки задачі, візьмемо за множину елементів множину альтернатив X , а функцію належності позначимо через $\mu_A(x)$, тоді нечітка множина A_T запишеться наступним чином:

$$A_T = \{x, \mu_A(x)\}, x \in X.$$

Оскільки, кожна альтернатива $x \in X$ представляє собою точку k -вимірного евклідового простору R^k , тоді на множині альтернатив X можемо визначити деяку нечітку множину A_T , наприклад, "альтернатив близьких до точки задоволення", так як $\mu_A(x)$ характеризує "ступінь належності" альтернативи $x \in X$ нечіткій множині A_T , тоді це буде функція належності твердження "точка x близька до точки T ".

Питання побудови функції належності є одним із найважливіших питань у теорії розмитих множин. Опишемо підхід побудови функції належності $\mu_A(x)$. Припустимо, що нам відома матриця рішень (1) і задана точка "задоволення" $T=(t_1, \dots, t_k)$. Визначимо наступним чином множину величин:

$$z_{ij} = 1 - |t_i - O_{ij}| / \max\{t_i - \min_j O_{ij}; \max_j O_{ij} - t_i\}, i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Кожна така величина є відносною оцінкою близькості елемента матриці (1) до відповідного елемента точки "задоволення". Оскільки кожна альтернатива $x \in X$ є точкою простору R^k , то визначена таким чином матриця Z характеризує по стовпцях відносні оцінки близькості альтернативи x^j до точки "задоволення" T по кожному конкретному критерію і знімає питання різних шкал оцінювання.

Наступним кроком є побудова функції належності, як функції згортки даних числових оцінок. Нами запропоновано застосування наступної групи згорток при рівноважливих критеріях ефективності.

$$\mu_A^2(x^j) = \frac{m}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{z_{ij}}}, \mu_A^3(x^j) = \sqrt[m]{\prod_{i=1}^m z_{ij}}, \mu_A^4(x^j) = \frac{\sum_{i=1}^m z_{ij}}{m}, \mu_A^5(x^j) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (z_{ij})^2}{m}}, \quad (6)$$

де m – число додатніх елементів у j -стовпці матриці Z , який відповідає j -й альтернативі. У запропонованих згортках враховуються лише додатні елементи матриці Z .

Як відомо, між цими функціями існує наступна субординація:

$$\mu_A^2(x) \leq \mu_A^3(x) \leq \mu_A^4(x) \leq \mu_A^5(x), \forall x \in X \subset R^k. \quad (7)$$

Вибір відповідної функції належності залежить від характеру ОПР, його настрою, або сприйняття інтенсивності вимірювання.

Методи вибору найкращої альтернативи. Приведемо модифікацію деяких класичних [3] методів багатокритеріальної оптимізації.

Метод ідеальної точки. Нехай точка “задоволення” є ідеальною точкою. Задамо правило вибору: вибирається альтернатива $x \in X$, для якої функція належності приймає максимальне значення.

Метод з врахуванням кількості домінуючих критеріїв. Нехай задана точка “задоволення” і матриця рішень (1). Для кожної альтернативи підраховується кількість критеріїв по яких вона негірша за точку “задоволення”. Правило вибору: вибирається альтернатива, для якої ця кількість найбільша і функція належності приймає максимальне значення.

Висновки. Даний підхід дозволяє будувати модель задачі вибору через розмиті множини. Кожна ОНР таким чином може будувати свою розмиту множину, яка залежить від множини критеріїв, точки “задоволення” і способу побудови функції належності. Якщо відома матриця рішень (1), є можливість представити задачу вибору за допомогою розмитої множини, проранжувати альтернативи відносно певної точки “задоволення” ОНР і зробити вибір. При колективному прийнятті рішень кожен член колективу має можливість створювати свою розмиту модель задачі вибору [6].

Література

1. Ашихмин А.А. Разработка и принятие управленческих решений: формальные модели и методы выбора. – М.: МГТУ, 1995. – 245 с.
2. Орловський С.А. Проблеми прийняття рішень при нечіткій вихідній інформації. – М.: Наука, 1981. – 207 с.
3. Макаров И.М., Виноградская Т.М. и др. Теория выбора и принятия решений. – М.: Наука, 1982. – 328 с.
4. Мушик Э., Мюллер П. Методы принятия технических решений. – М.: Мир, 1990. – 208 с.
5. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. М: Радио и связь, 1982. – 432с.
6. Волошин А.Ф., Маляр Н.Н. Нечеткие модели многокритериального коллективного выбора. // Proceedings XI – th International Conference “Knowledge – Dialogue – Solution”. – Sofia, 2005. – Vol. 1. – P. 247 – 250.

Надійшло до редколегії 21.09.2005 року.

УДК 515.126.83

Володимир В. Пічкур

Про умову локальної
рівномірності

В статті означено клас багатозначних відображень, що задовольняють умові локальної рівномірності. Доведено теореми про належність багатозначної функції до такого класу.

Ключові слова: багатозначне відображення, локальна рівномірність, багатозначний аналіз.

Volodymyr V. Pichkur

On condition of local uniformity

In paper is defined the class of set mappings that satisfy the condition on local uniformity. The theorems multifunction belongs to such a class is proved

Key Words: multifunction, local uniformity, set-valued analysis.

E-mail: pichkur@unicyb.kiev.ua

При дослідженні задач практичної стійкості множинних динамічних систем важливу роль відіграє чутливість множинної компоненти в граничних точках відносно зміни фазової координати [1,2]. В даній статті така властивість отримала назву умови локальної рівномірності. Доведено умови, за яких розділене за змінними багатозначне відображення задовольняє умові локальної рівномірності за змінною.

Будемо позначати $\text{comp}(R^n)$ – множина компактів з R^n ; $\text{conv}(R^n)$ – множина опуклих компактів з R^n ; $\|\cdot\|$ – евклідова норма простору R^n ; $\text{int } A$ – сукупність внутрішніх точок множини A ; ∂A – границя A ; $\bar{A}$ – замикання множини A ; $A^\varepsilon = \{x: \|x - a\| \leq \varepsilon, a \in A\}$ – ε -розширення множини $A \subset R^n$; $K_r(a) = \{x \in R^n: \|x - a\| \leq r\}$ – замкнена куля, $a \in R^n$; $c(A, \psi) = \sup_{a \in A} a^T \psi$ – опорна функція множини $A \subset R^n$, $\psi \in R^n$; $\Gamma(G)$, $\Delta(G)$ – графік і трубка відображення G .

Розглянемо напівнеперервне зверху багатозначне відображення $g: D \rightarrow \text{comp}(R^n)$, де $D \subseteq R^n$ – замкнена область.

Означення 1. Будемо говорити, що багатозначне відображення g задовольняє умові локальної рівномірності в точці y_0 , якщо для $p \in \partial g(y_0)$

і довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $z \in K_\varepsilon(y_0)$ таке, що $p \in \text{int } g(z)$. Якщо g є локально рівномірною в будь-якій точці y_0 з D , то g є локально рівномірною на множині D .

Приклад 1. Нехай задане відображення $y \mapsto F(y)$, $F(y) = \{p \in R^n : \|p - y\| \leq 1\}$ і $q \in \partial F(y)$, $\|q - y\| = 1$. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Знайдемо $z \in K_\varepsilon(y)$ таке, що $q \in \text{int } F(z)$. Виберемо $z = \lambda(q - y) + y$, $\lambda \in [-1, 1]$. Тоді

$$\|y - z\| = \|y - \lambda(q - y) - y\| = |\lambda| \leq \varepsilon, \quad \|q - z\| = \|q - \lambda(q - y) - y\| = |1 - \lambda| < 1.$$

Звідси шукане $z = \lambda(q - y) + y$ при $\lambda \in (0, \varepsilon)$ і відображення $F(y)$ задовольняє умові локальної рівномірності на R^n .

Приклад 2. Розглянемо відображення $y \mapsto F(y)$, де $y \in [\pi/2, \pi]$, $F(y)$ – сектор одиничної кулі в R^2 з центром в початку координат з центральним кутом y . Така функція не є локально рівномірною. Умова локальної рівномірності не виконується, наприклад, у точці $p = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

Припустимо, що відображення g є неперервним і опуклозначним. Тоді умова локальної рівномірності в точці y_0 може бути сформульована у наступній формі: якщо для $p \in R^n$ функція $\min_{\psi \in S} [c(g(y_0), \psi) - p^T \psi] = 0$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $z \in K_\varepsilon(y_0)$ таке, що $\min_{\psi \in S} [c(g(z), \psi) - p^T \psi] > 0$.

Нехай задана напівнеперервна зверху багатозначна функція $f : [a, b] \times D \rightarrow \text{comp}(R^n)$. Будемо позначати $f(\cdot, y)$ відповідне відображення з $[a, b]$ в $\text{comp}(R^n)$ при фіксованому $y \in D$.

Означення 2. Будемо говорити, що багатозначне відображення f задовольняє умові локальної рівномірності за змінною y в точці y_0 , якщо для $p \in \Delta(f(\cdot, y_0))$ і довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $z \in K_\varepsilon(y_0)$ таке, що $p \in \Gamma(f(\cdot, z)) / \Delta(f(\cdot, z))$. Якщо f є локально рівномірним за y в будь-якій точці y_0 з множини D , то будемо говорити, що f є локально рівномірною за y на множині D .

Якщо відображення f є неперервним і просторово рівномірним, то умова локальної рівномірності за змінною y в точці y_0 означає, що при $p \in \partial f(t, y_0)$ для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $z \in K_\varepsilon(y_0)$ таке, що $p \in \text{int } f(t, z)$, де $t \in [a, b]$.

Нехай h є неперервним і опуклозначним. Тоді умова локальної рівномірності за змінною y в точці y_0 у термінах опорної функції має наступний вигляд: якщо для $p \in R^n$ функція $\min_{\psi \in S} [c(f(t, y_0), \psi) - p^T \psi] = 0$,

то для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $z \in K_\varepsilon(y_0)$ таке, що $\min_{\psi \in S} [c(f(t, z), \psi) - p^T \psi] > 0, t \in [a, b]$.

Теорема 1. Припустимо, що $g: D \rightarrow \text{comp}(R^n)$ задовольняє умові локальної рівномірності, $h: [a, b] \rightarrow \text{comp}(R^n)$, відображення $f: [a, b] \times D \rightarrow \text{comp}(R^n)$ таке, що $f(t, y) = g(y) + h(t)$ є неперервним і просторово рівномірним. Тоді f є локально рівномірним за y .

Доведення. Виберемо довільну точку $x \in \partial f(t, y)$ і зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Тоді існує представлення $x = u + v$, де $u \in \partial g(y)$, $v \in \partial h(t)$. За означенням 1 знайдеться $z \in K_\varepsilon(y_0)$ таке, що $u \in \text{int } g(z)$. Тоді $x = u + v \in \text{int } f(t, z)$. Теорему доведено.

Означення 3. Будемо говорити, що функція $g: D \rightarrow \text{comp}(R^n)$ задовольняє умові поширення на D , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ та $y \in D$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, $\delta(\varepsilon) \rightarrow +0, \varepsilon \rightarrow +0$ таке, що $(g(y))^\varepsilon \subseteq g(y^\delta)$.

Теорема 2. Нехай відображення $g: D \rightarrow \text{comp}(R^n)$ задовольняє умові поширення, образ відображення $h: [a, b] \rightarrow \text{comp}(R^n)$ є замиканням своєї внутрішньої частини, функція $f: [a, b] \times D \rightarrow \text{comp}(R^n)$ така, що $f(t, y) = g(y) + h(t)$ є неперервною і просторово рівномірною. Тоді f – локально рівномірна за y багатозначна функція.

Доведення. Виберемо довільне $x \in \partial f(t, y)$ і зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Тоді $x = u + v$, де $u \in \partial g(y)$, $v \in \partial h(t)$. Оскільки $h(t) = \overline{\text{int } h(t)}$, то знайдеться w таке, що $v + w \in \text{int } h(t)$, $\|w\| \leq \varepsilon$. Звідси $x = (u - w) + (v + w)$. З умови поширення випливає, що $u - w \in g(y^\delta)$. Це означає, що існує $z \in y^\delta$, $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, $\delta(\varepsilon) \rightarrow +0, \varepsilon \rightarrow +0$ таке, що $u - w \in g(z)$. Отже, $x \in g(z) + \text{int } h(t)$, $g(z) + \text{int } h(t) \subseteq \text{int } f(t, z)$. Теорему доведено.

Теорема 3. Нехай відображення $g: D \rightarrow \text{conv}(R^n)$ є таким, що $c(g(y), \psi) = y^T p(\psi)$, $p \in C(R^n, R^m)$, $\|\psi\| \leq \mu \|p(\psi)\|$, $\mu > 0$, $h: [a, b] \rightarrow \text{conv}(R^n)$ – неперервне відображення, $\psi \in S$, $t \in [a, b]$. Тоді функція $f: [a, b] \times D \rightarrow \text{comp}(R^n)$, $f(t, y) = g(y) + h(t)$ є локально рівномірною за y .

Доведення. Покажимо, що для g виконується умова поширення. Розглянемо

$$c(g(y^\delta), \psi) = \max_{z \in y^\delta} c(g(z), \psi) = y^T p(\psi) + \max_{z \in 0^\delta} z^T p(\psi) = y^T p(\psi) + \delta \|p(\psi)\|.$$

Оскільки $\|\psi\| \leq \mu \|p(\psi)\|$, то, вибравши $\delta = \mu \varepsilon$, отримуємо

$$c((g(y))^\varepsilon, \psi) = \varepsilon \|\psi\| + c(g(y), \psi) \leq \mu \varepsilon \|p(\psi)\| + c(g(y), \psi) = c(g(y^\delta), \psi).$$

За властивостями опорних функцій [3] виконується умова поширення, де $\delta = \mu\varepsilon$. Теорему доведено.

Приклад 3. Розглянемо відображення $f: [0,1] \times R^n \rightarrow \text{comp}(R^n)$ таке, що $f(t, y) = E_{r(t)}(y, Q)$. Тут Q – $n \times n$ -симетрична додатновизначена матриця, $r \in C[0,1]$, $E_r(y, Q)$ – еліпсоїд з матрицею Q , центром у точці y радіусу r . Функція $f(t, y) = g(y) + h(t)$, де $c(g(y), \psi) = y^T \psi$, $c(h(t), \psi) = |r(t)| \sqrt{\psi^T Q^{-1} \psi}$, $\psi \in S$. Таким чином, за теоремою 3 функція f є локально рівномірною за змінною y .

Означення 4. Будемо говорити, що відображення $g: D \rightarrow \text{comp}(R^n)$ є зірковим, якщо $g(\lambda z) \subseteq \lambda g(z)$, $\lambda \in [0,1]$, $z \neq 0$. Нехай виконується $g(\lambda z) \subseteq g(z)$, $\lambda \in [0,1]$ і $g(\lambda z) \subseteq \text{int } g(z)$, $\lambda \in (0,1)$, $z \neq 0$. Тоді відображення g назовемо строго слабкозірковим.

Теорема 4. Нехай $f: [a,b] \times D \rightarrow \text{comp}(R^n)$ є компактозначним, строго слабкозірковим за змінною y , $h: [a,b] \rightarrow \text{comp}(R^n)$, відображення $f: [a,b] \times D \rightarrow \text{comp}(R^n)$ таке, що $f(t, y) = g(t, y) + h(t)$ є неперервним і просторово рівномірним. Тоді f є локально рівномірним за y .

Доведення. Виберемо $\varepsilon > 0$. Має місце співвідношення

$$f(t, y) = g(t, y) + h(t) \subseteq \text{int } g(t, z) + h(t) \subseteq \text{int}(g(t, z) + h(t)) = \text{int } f(t, z),$$

де $z = \frac{1}{\lambda} y$, $\lambda \in (0,1)$ і $\|y - z\| = \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) \|y\| \leq \varepsilon$. Тоді λ вибираємо з умови

$$\lambda \in \left(\frac{\|y\|}{\|y\| + \varepsilon}, 1\right). \text{ Для будь-яких } p \in \partial f(t, y) \text{ виконується } p \in \text{int } f(t, z),$$

$\|y - z\| \leq \varepsilon$. Теорему доведено.

Означення 5. Багатозначне відображення $f: (t, y) \mapsto f(t, y)$, $t \in [a,b]$, $y \in D$, називається віялом за змінною y , якщо для будь-яких $\lambda \in [0,1]$, $y_1 \in D$, $y_2 \in D$ має місце співвідношення

$$B(t, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \subseteq \lambda B(t, y_1) + (1-\lambda)B(t, y_2).$$

Нехай $A \subseteq R^n$, $B \subseteq R^n$ – зіркові множини, S – одинична сфера з центром в точці 0. Будемо говорити, що сукупність

$$C = \{x \in R^n : x = k\ell, k = k_1 + k_2, k_1\ell \in A, k_2\ell \in B, k_i \geq 0, i = 1,2, \ell \in S\}$$

є сумою за напрямками множин A і B і позначимо $C = A \vec{+} B$.

Якщо A і B – компакти, то $A \vec{+} B$ – компакт. Це випливає з того, що $S \in \text{comp}(R^n)$. Має місце наступне твердження.

Теорема 5. Якщо A, B і K – зіркові множини в R^n , $A \subset K$, $B \subset K$, то $\lambda A \dot{+} (1-\lambda)B \subseteq K$, $\lambda \in [0,1]$.

Доведення. Нехай $k_1 \ell \in A$, $k_2 \ell \in B$, де $\ell \in S$, $k_i \geq 0$, $i=1,2$. Тоді

$$c = \lambda k_1 \ell + (1-\lambda) k_2 \ell \in \lambda A \dot{+} (1-\lambda)B, \lambda \in [0,1].$$

Так як $\lambda k_1 + (1-\lambda) k_2 \leq \max\{k_1, k_2\}$, то $c \in K$. Лему доведено.

Нехай відображення $f: D \rightarrow \text{comp}(R^n)$ є зірковозначним.

Означення 6. Відображення f називається *віялом за напрямками*, якщо для будь-якого $\lambda \in [0,1]$ має місце співвідношення

$$f(\lambda y + (1-\lambda)z) \subseteq \lambda f(y) \dot{+} (1-\lambda)f(z).$$

Теорема 6. Нехай $f: D \rightarrow \text{comp}(R^n)$ є зірковозначним відображенням, $f(y) = \{x \in R^n : x = b\ell, b \in [0, b(\ell, y)], \ell \in S\}$, $y \in D$. Функція $b(\ell, y)$ є опуклою за змінною y тоді і тільки тоді, коли відображення f є віялом за напрямками.

Доведення. Необхідність. За умовами леми для $\lambda \in [0,1]$ виконується

$$\begin{aligned} f(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) &= \{x \in R^n : x = b\ell, b \in [0, b(\ell, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)], \ell \in S\} \subseteq \\ &\subseteq \{x \in R^n : x = b\ell, b \in [0, \lambda b(\ell, y_1) + (1-\lambda)b(\ell, y_2)], \ell \in S\} = \\ &= \lambda f(y_1) \dot{+} (1-\lambda)f(y_2). \end{aligned}$$

Достатність. З співвідношення

$$f(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \subseteq \lambda f(y_1) \dot{+} (1-\lambda)f(y_2)$$

випливає, що для будь-яких $\ell \in S$, $\lambda \in [0,1]$ має місце включення

$$[0, b(\ell, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)] \subseteq [0, \lambda b(\ell, y_1) + (1-\lambda)b(\ell, y_2)].$$

Теорему доведено.

У подальших дослідженнях теореми 1-6 будуть застосовуватись в задачах аналізу практичної стійкості множинних динамічних систем.

Література

1. Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Практична стійкість та структурна оптимізація динамічних систем. –К.: Київський університет. -2000.
2. Пічкур В.В. Практична стійкість множинних динамічних систем//Нелінійні коливання. -2002. –т.5, №2. -С. 208-217.
3. Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды МИАН, 1985, т.169. – с.194-252.

Надійшла до редакції 29.09.2005

УДК 519.168

Олена В. Порхун

Побудова параметричного простору в задачах атрибуції текстів. Метод формування вхідного вектора для розпізнавання стилю тексту нейронною мережею.

Робота присвячена дослідженням в області знаходження унікальних характеристик авторського стилю. Запропоновано алгоритм побудови вхідного вектора параметрів для розпізнавання його нейронною мережею.

Ключові слова: авторський інваріант, перцептрон, паритетний вектор.

Helen V. Porkhun

Construction of the parametric space in the problems of authorship attribution. Method of forming input vector for recognizing style of text by neural network.

The article deals with research into the finding unique characteristics of author's style. There is offered algorithm of constructing input parametric vector for recognizing it by neural network.

Key Words: author's invariant, perceptron, parity vector.

Одним із напрямків комп'ютерного аналізу текстів є задача визначення стилю тексту та його оцінка в усіх його можливих інтерпретаціях. Задача автоматичного встановлення авторства (authorship attribution) відноситься до розділу стильометрії, який виявляє особливості проявлення авторського стилю. Перші спроби її вирішення відносяться до середини XIX століття. Методика в дослідженнях зазнала істотних змін, але суть проблеми залишається тією ж: по статистичним характеристикам (морфемним, стилістичним, семантичним та ін.) необхідно встановити, хто є автором даного тексту.

Існує широке поле діяльності по атрибуції текстів. Це такі задачі, як: виявлення плагіатів, визначення авторів анонімних та псевдонімних текстів.

Серед широко відомих прикладів суперечливого авторства можна назвати роман-епопею "Тихий Дон", який в останні десятиріччя активно обговорювався на предмет його автора. Або, наприклад, чи був "Роман с кокаїном" написаний Агеєвим, або, можливо, В. Набоковим.

Огляд підходів до розв'язання задачі визначення авторства тексту

Суб'єктивно-атрибутивна методика

Дана методика не відноситься до методів автоматичного визначення авторства тексту. В ході суб'єктивно-атрибутивної методики фіксуються зовнішні деталі авторського стилю – улюблені слова і звороти автора, тематика

помилки у випадку нехарактерного для автора твору. До того ж трапляються випадки, коли в автора взагалі немає чітко виражених зовнішніх ознак, або, наприклад, він усвідомлено змінює свій стиль і тематику від твору до твору.

Формально-кількісний підхід

Під цією назвою можна об'єднати всі методи, що так чи інакше пов'язані зі знаходженням та оцінкою характеристик, які вносяться автором не усвідомлено і, відповідно, не піддаються наслідуванню або істотній зміні.

Основною метою впровадження формально-кількісних методів в проблеми атрибуції анонімних текстів є спроба надати процесу атрибуції більш об'єктивний характер. Дані методи базуються на співставленні математичної моделі авторського стилю анонімного тексту з моделями авторських стилів можливих авторів.

Лінгвістичні спектри

На початку ХХ століття Н. А. Морозов у своїй роботі "Лингвистические спектры: средство для отличения плагиатов от истинных произведений того или иного неизвестного автора" запропонував новий метод для розв'язання задачі розпізнавання авторства тексту. Відхиляючи суб'єктивні спроби оцінки, не підкріплені математичними аргументами, Н. А. Морозов в якості характеристик стилю пропонує використати часто вживані слова – прийменники, союзи, частки, обчислюючи число вживань кожної окремо. Він будує графічне зображення стилю – лінгвістичні спектри і намагається порівняти роботи різних авторів. Навіть на декількох характеристиках деякі автори піддаються розділенню, але є й такі, які мають нестійкий лінгвістичний спектр (в дослідженнях Морозова це Л. Толстой).

Основним недоліком даного методу є мізерні масштаби експериментів. В кінцевому результаті, виявилось, що лінгвістичні спектри занадто нестійкі, щоб служити серйозним аргументом для розмежування авторського стилю. Тим не менш, це не виключає їх допоміжної ролі в загальному розв'язанні поставленої проблеми.

Метод опорних слів. Експерименти Фоменко

Розвиток формально-кількісного підходу продовжило дослідження Фоменко. Протягом всієї роботи автор намагається знайти характеристику, названу ним *авторським інваріантом*. Критерії характеристики оцінюються за правилами:

1. Для одного автора дана характеристика повинна мати мінімальну варіацію, тобто її коливання можуть бути визнані неістотними.
2. Для різних авторів відхилення характеристики від свого середнього повинно бути істотним для того, щоб було можливо статистично вірно розділити двох різних авторів.
3. "Вона повинна бути достатньо "масовою", інтегральною, для того, щоб слабо контролюватися автором на свідомому рівні".

В ході роботи була знайдена достатньо проста та ефективна характеристика – процент вмісту службових слів в тексті. Виявилось, що дана характеристика варіюється від 16% до 30% в цілому, та в межах 1-2% для конкретного автора. Таким чином, на відміну від лінгвістичних спектрів Морозова, їй властива стійкість і протягом всієї творчості автора ця ознака практично не змінюється.

Серйозним обмеженням даного метода є занадто низька роздільна здатність оцінки у випадку великої кількості авторів. Таким чином, мети опорних слів можна вважати лише допоміжним інструментом для розв'язання задачі, що володіє достатньою, але не необхідною ознакою розмежування.

Метод накопичуваних сум (QSUM)

Ідея та результати перших досліджень належать А. К. Мортону, який проводив свої експерименти в середині XX століття.

Основна задача методу накопичуваних сум заключається у перевірці тексту на однорідність стилю. Метод QSUM дозволяє встановити, писався чи інший текст одним або декількома авторами. Для того, щоб перевірити, писались два різних тексти одним автором (що рівноцінно порівнянню авторських стилів) достатньо об'єднати два тексти в один і з допомогою QSUM виміряти однорідність.

Ідея методу полягає в наступному. Вибираються характеристики, які функціями речення. Далі, проводиться обрахунок цих характеристик для кожного речення, обчислюються середні значення цих характеристик. Обчислюються відхилення від середніх значень для кожного речення, будується накопичувана сума цих відхилень. Будується масштабований графік накопичуваних сум для кожної характеристики. Для однорідного стилю графіки характеристик повинні практично співпадати, тоді як неоднорідний текст покаже їх відмінність.

Найбільш вдалим характеристиками для тексту на англійській мові Мортон вважав наступні дві стильометричні функції: довжина речення та число слів у двох і трьох літерних словах + число слів, які починаються з голосної букви.

Недолік методу полягає в неоднозначності процедури встановлення різниці в графіках характеристик. Масштабування вносить значні погрешності крім того, невідомо, яку ступінь відхилення вважати істотною.

Необхідність морфологічного аналізу

Важливим внеском у побудову параметричного простору задач атрибуції текстів також слід вважати дослідження морфологічних конструкцій. Проведені експерименти показують, що частотний аналіз достатньо ефективно розрізняє фрагменти 5-6 еталонних авторів. Ретельне дослідження привело до методик визначення авторства, яка спирається на математичну модель, в якій враховані такі формальні характеристики мови автора, як: число службових слів (прийменників, союзів, часток); використані морфеми (префіксальні, кореневі).

суфіксальні, флексивні) та їх послідовності; складність використаних граматичних конструкцій; словник використаний автором.

В рамках дослідження поставленої задачі, була розроблена система, яка дозволяє за заданим набором параметрів ідентифікувати будь-якого автора. В якості базису даної системи була використана нейронна мережа прямого розповсюдження - персептрон. Враховуючи припущення про те, що мережа може навчитися будь-яким знанням за прикладами і здатна вибрати з усього потоку входів дійсно значимі компоненти, був вибраний шлях максимального нарощування входів, в число яких було включено різні характеристики.

Множину всіх вибраних характеристик було побудовано у вигляді 2-х векторів: перший вектор – частотний, побудований на основі частотного словника для кожного тексту; другий – вектор із компонентів наступних статистичних характеристик тексту:

1. Доля появи окремих службових слів (55 службових слів, запропонованих Фоменко);
2. Доля появи внутрішніх розділових знаків речення (двокрапка, кома, тире, крапка з комою, дужки, лапки);
3. Доля появи зовнішніх знаків речення (крапка, знак оклику, знак питання, три крапки, комбінація знаків оклику і питання);
4. Середня довжина речення (середня кількість слів у реченні);
5. Доля слів визначеної довжини (доля довжин слів з однієї літери, з 2-х літер і т.д. до 10);
6. Доля речень певної довжини (з одного слова, з 2-х слів і т.д. до 30);

Кінцевим результатом роботи алгоритму по визначенню авторства тексту з вибраним набором альтернатив виступає вектор з довжиною рівною числу авторів і значеннями, які дозволяють встановити, хто є автором даного тексту.

Побудова вхідного вектора

На основі роботи блоку збору статистик було отримано два вектори - частотний вектор та вектор описаних вище характеристик. Для побудови загального вхідного вектора була реалізована їх комбінація з попередньою обробкою.

Для рівнозначного сприйняття компонентів обох векторів апаратом нейронної мережі, була реалізована наступна процедура. Для того щоб вектори мали однакову вагу для розпізнавання, була введена міра зважування. В якості міри зважування вектора пропонується використати його скалярний квадрат.

Нехай $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ та $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ – описані вектори. Тоді $\alpha = (x, x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ і $\beta = (y, y) = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_m^2$ – відповідно їх скалярні квадрати.

Визначивши відношення β/α (якщо $\beta > \alpha$) або α/β (у протилежному випадку), і домноживши компоненти вектора, що менший за мірою, на корінь

квадратний з цього відношення, ми отримаємо вектори з рівнозначними компонентами.

Після виконання цієї процедури та об'єднання двох рівних за мірою векторів ми одержимо, так званий, *паритетний* (або зважений) вектор, який складається зі зважених компонент обох векторів.

Однак, отриманий вектор із врахуванням похибок, які виникли в процесі його побудови, не слід вважати остаточним варіантом для вхідного вектора мережі. Для пошуку *оптимального* вхідного вектора пропонується скористатися методом *дихотомії*. Найкращий вектор, згідно нашої побудови, лежить на відрізку, обмеженому двома точками-векторами: перша – це вектор, який складається з компонент першого вектора та занулених компонент другого вектора; друга – це вектор з нульовими компонентами першого вектора та зваженими компонентами другого вектора. В якості середньої точки відрізка виступає описаний вище *паритетний* вектор. Оптимальна точка (вектор), згідно нашого алгоритму, знаходиться в процесі навчання мережі із застосуванням метода поділу навпіл (*дихотомії*). Він полягає у тому, що кожний раз, звужуючи інтервал пошуку поділом навпіл, ми тим самим наближаємось до оптимальної точки. Спочатку навчаємо нашу мережу на трьох точках-векторах: на кінцях відрізка та на середній точці. Далі, виходячи з оцінки навчання, ми вибираємо відповідно лівий чи правий інтервал відрізка для подальшого налаштування мережі і т.д. Ця рекурсивна процедура завершується знаходженням *оптимального* вхідного вектора. В якості оцінки навчання пропонується використати тестування системи на невеликій частині тексту, що подавався для запам'ятовування мережі. Критерієм якості може служити відстань між вихідним вектором, отриманим для тестового тексту та вектором з вірними відповідями для цього прикладу.

Обробка вхідного сигналу

Для більшості нейронних мереж, включаючи персептрон, характерна наявність такого інтервалу вхідних сигналів, в межах якого сигнали розрізняються. Для різних нейронних мереж ці інтервали різні. У випадку персептрону це пов'язано із властивостями використаних порогових функцій. Кожному типу нейрона відповідає свій інтервал прийнятних вхідних даних. Як правило, цей діапазон або співпадає з діапазоном вихідних сигналів, або є об'єднанням діапазону вихідних сигналів та відрізка, симетричного йому відносно нуля. Цей діапазон будемо позначати $[a, b]$. Для того, щоб максимально повно використати діапазон прийнятних вхідних даних необхідно числові сигнали промасштабувати та зсунути, так щоб весь діапазон значень попадав в діапазон прийнятних вхідних даних. В даній роботі була використана проста обробка числових сигналів, задана формулою:

$$c' = \frac{(c - c_{\min})(b - a)}{(c_{\max} - c_{\min})} + a$$
, де c' - одержаний після обробки новий сигнал, який буде подано на вхід мережі, $[a, b]$ - діапазон вхідних сигналів, $[c_{\min}, c_{\max}]$ - діапазон значень ознаки c .

Навчання нейронної мережі

Згідно сформованої архітектури мережі, блок вхідних нейронів передається на 3 блоки нейронів прихованого шару з відповідними пороговими функціями: $\exp(-x^2)$, $1 - (\exp(-x^2))$ та $th(x)$. Для вихідного шару нейронів була використана сигмоїдна функція $1/(1 + \exp(-x))$.

Вихідний вектор формується з 10 значень, кожне з яких лежить в інтервалі від 0 до 1. Нуль - означає, що стиль даного тексту не є стилем даного автора, 1 - навпаки, інтерпретується як стиль рівнозначний стилю даного автора. В ідеалі на виході нейронної мережі повинен бути сформований вектор з усіма нульовими компонентами крім однієї, яка і вказувала б автора. Але, так як результатом роботи мережі на практиці завжди є вектор з дробовими компонентами, то досліднику приходится розробляти свої алгоритми інтерпретації одержаних результатів. В даній роботі, проміжні значення інтерпретуються як ступінь "непевності" мережі у винесенні рішення.

В ході тестування нейронної мережі, навченій на текстах вибраних 10 письменників, було виявлено, що мережа виносить однозначні рішення на відомих їй текстах, які використовувались в процесі навчання, а також достатньо чітко розпізнає невідомі тексти при умові, що вони написані одним з 10 авторів. У випадку, коли мережі пропонувалось оцінити авторський стиль тексту, автор якого їй невідомий, вона також виносить рішення на користь того чи іншого письменника з 10 їй відомих. Не виключено, що в такому випадку можна говорити про близькість авторських стилів, але абсолютно певними в цьому бути не можна, так як мережа навчалась розпізнавати авторський стиль заданих письменників, а не вимірювати авторський стиль в цілому.

Література

1. WWW: <http://www.softcraft.ru>
2. WWW: <http://www.rusf.ru/books/analysis/history.htm>
3. Haykin S. Neural Networks: A Comprehensive Foundation // New York. - MacMillan College Publishing Co., 1994.- p.696.
4. Марусенко М. А. Атрибуция анонимных и псевдонимных произведений методами теории распознавания образов //Л.:Издательство Ленинградского университета, 1990., С.45-80.

Надійшла до редакції 29.09.2005

УДК 519.8

Володимир О. Пришляк

**Інтегральні рівняння
першого роду в задачах
оцінювання за неповними
даними слідів розв'язків
зовнішніх крайових задач для
рівняння Гельмгольца**

Одержана система граничних інтегральних рівнянь першого роду, через розв'язок якої виражаються мінімаксні оцінки функціоналів від слідів розв'язків зовнішніх крайових задач для рівняння Гельмгольца на границі області.

Ключові слова: мінімаксні оцінки, спостереження, функціонали від розв'язків.

Volodymyr O. Pryshlyak

Integral equations of the first kind in the estimation problems of the traces of the solutions to exterior boundary-value problems for Helmholtz equation

We obtain the system of boundary integral equations of the first kind via whose solution the minimax estimates of functionals from traces of the solutions to exterior Helmholtz problems on the boundary of the domain are expressed.

Key words: minimax estimates, observations, functionals from solutions.

*E-mail: privlad@voliacable.com

Вступ

В даній роботі інтегральні рівняння першого роду, отримані через переформулювання зовнішніх крайових задач Неймана для рівняння Гельмгольца, використовуються для мінімаксного оцінювання правих частин крайових задач Неймана за спостереженнями розв'язків цих крайових задач на границі області і з припущенням, що невідомі дані задачі та похибки в спостереженнях належать деяким заданим множинам. При підході, що тут розглядається, мінімаксні оцінки визначаються через розв'язки систем граничних інтегральних рівнянь першого роду.

В той же час, використання традиційного підходу (див., наприклад, [1]) для визначення цих оцінок приводить до необхідності розв'язання деяких систем інтегро-диференціальних рівнянь у всій необмеженій області.

Допоміжні результати

Далі використовуються стандартні позначення Соболевських просторів з відповідними нормами.

Нехай Ω - обмежена область в R^n з ліпшицевою границею Γ . Розглянемо в області $R^3 \setminus \bar{\Omega}$ зовнішню крайову задачу Неймана для рівняння Гельмгольца:

$$u \in H_{loc}^1(R^3 \setminus \bar{\Omega}), \quad (1)$$

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ в } R^3 \setminus \bar{\Omega}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = f \text{ на } \Gamma, \quad (3)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} - iku \right|^2 d\Gamma_R = 0, \quad (4)$$

де $i = \sqrt{-1}$, k - хвильове число, $\text{Im } k \geq 0$, $f \in L^2(\Gamma)$, $d\Gamma_R$ - елемент площі поверхні сфери $|x| = R$ в R^n , ν - зовнішня одинична нормаль до поверхні Γ , по відношенню до області Ω в (3) і до поверхні $|x| = R$ по відношенню до області $|x| < R$ в (4). Відомо, що задача [2] - [4] має єдиний розв'язок.

Досліджувана далі проблема оцінювання параметрів цієї крайової задачі розв'язується за допомогою методу граничних інтегральних рівнянь. З цією метою введемо оператори $V_k : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H_{loc}^1(R^3 \setminus \bar{\Omega})$ та $W_k : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H_{loc}^1(R^3 \setminus \bar{\Omega})$ вигляду

$$(V_k \psi)(x) := 2 \int_{\Gamma} \Phi_k(x, y) \psi(y) d\Gamma_y, \quad x \in R^3 \setminus \bar{\Omega},$$

$$(W_k \chi)(x) := 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \nu_y} \chi(y) d\Gamma_y, \quad x \in R^3 \setminus \bar{\Omega},$$

які називаються потенціалами простого та подвійного шару з щільностями $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ та $\chi \in H^{1/2}(\Gamma)$ відповідно. Тут

$$\Phi_k(x, y) = \begin{cases} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x-y|) & \text{в } R^2, \\ \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} & \text{в } R^3 \end{cases}$$

фундаментальні розв'язки рівняння Гельмгольца (1). Введемо також граничні інтегральні оператори S_k , K_k , K'_k і T_k за формулами

$$(S_k \varphi)(x) := 2 \int_{\Gamma} \Phi_k(x, y) \varphi(y) d\Gamma_y, \quad (K_k \varphi)(x) := 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \nu_y} \varphi(y) d\Gamma_y, \quad x \in \Gamma,$$

$$(K'_k \psi)(x) := 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \nu_y} \psi(y) d\Gamma_y, \quad (T'_k \psi)(x) := 2 \frac{\partial}{\partial \nu_x} \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \nu_y} \psi(y) d\Gamma_y, \quad x \in \Gamma.$$

Якщо Γ - ліпшицева поверхня, то оператори

$$S_k : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma), \quad K_k : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma),$$

$$K'_k : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma), \quad T_k : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$$

неперервні (аналогічні співвідношення справедливі і для операторів S_{-k} , K_{-k} , K'_{-k} та T_{-k}). Крім того, мають місце рівняння

$$(K_k \varphi, \psi)_{L^2(\Gamma)} = (\varphi, K'_{-k} \psi)_{L^2(\Gamma)} \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma), \psi \in H^{-1/2}(\Gamma),$$

$$(S_k \varphi, \psi)_{L^2(\Gamma)} = (\varphi, S_{-k} \psi)_{L^2(\Gamma)} \quad \forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma), \psi \in H^{-1/2}(\Gamma),$$

$$(T_k \varphi, \psi)_{L^2(\Gamma)} = (\varphi, T_{-k} \psi)_{L^2(\Gamma)} \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma), \psi \in H^{1/2}(\Gamma), \quad (5)$$

в яких ми використали позначення $(f, g)_{L^2(\Gamma)} = \int_{\Gamma} f \bar{g} d\Gamma =: g(f)$ для будь-яких $f \in H^{1/2}(\Gamma)$, $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$.

Позначимо через $N(\Omega)$ зліченну множину додатних хвильових чисел k , що мають точку згущення на нескінченності, для яких однорідна внутрішня задача Неймана

$$\Delta v + k^2 v = 0 \text{ в } \Omega, \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma$$

допускає нетривіальні розв'язки.

Відомо, що розв'язок $u(x)$ задачі (1) - (4) можна представити у вигляді

$$u(x) = W_1 \varphi(x) - V_1 f(z), \quad x \in R^3 \setminus \bar{\Omega}, \quad (6)$$

де функція $\varphi := u|_{\Gamma}$, що є слідом цього розв'язку на Γ , знаходиться єдиним чином із граничного інтегрального рівняння

$$T_k \varphi(x) = f(x) + K_k' f(x), \quad x \in \Gamma \quad (7)$$

у випадку, коли $k \notin N(\Omega)$. Існування та єдиність розв'язку цього інтегрального рівняння при будь-яких $f \in H^{-1/2}(\Gamma)$ доведені в [4].

Формулювання задачі оцінювання

Нехай Γ_j , Γ_j' , $j = 1, \dots, m$, відкриті $(n-1)$ -вимірні підмноговиди Γ (частини поверхні Γ).

Припустимо, що на поверхні Γ_j , $j = 1, \dots, m$, спостерігаються функції

$$y_i(x) = y_i(x; \varphi, \eta) = (C\varphi)(x) + \eta_i(x), \quad x \in \Gamma_j', \quad i = 1, \dots, m, \quad (8)$$

де $\varphi := u|_{\Gamma}$ - слід розв'язку крайової задачі (1)-(4) на Γ , $C: L^2(\Gamma_j) \rightarrow L^2(\Gamma_j')$ - інтегральний оператор вигляду $(C\varphi)(x) = \int_{\Gamma_j} R(x, y) \varphi(y) d\Gamma_j$ з ядром $R \in L^2(\Gamma_j' \times \Gamma_j)$, $\eta_i(x) = \eta_i(x, \omega)$ - похибки в спостереженнях, що є випадковими полями на Γ_j' з нульовими середніми значеннями.

Припустимо, що функція $f \in L^2(\Gamma)$ у рівняннях (3) і (7) та другі моменти $M[\eta_i(x)]^2$ випадкових полів $\eta_i(x)$ на Γ_j' невідомі¹. Однак відомо, що

$$f \in G_0 \text{ і } \eta := (\eta_1(\cdot), \dots, \eta_m(\cdot)) \in G_1, \quad (9)$$

де через G_0 позначена множина всіх функцій $\tilde{f} \in L^2(\Gamma)$, які задовольняють нерівність

$$\int_{\Gamma} q^2(x) |\tilde{f}(x) - f_0(x)|^2 d\Gamma \leq 1, \quad (10)$$

а через G_1 - множина всіх елементів вигляду $\tilde{\eta} = (\tilde{\eta}_1(\cdot), \dots, \tilde{\eta}_m(\cdot))$, компоненти $\tilde{\eta}_i(x) = \tilde{\eta}_i(x, \omega)$ яких є випадковими полями на Γ_j' з інтегрованими за Лебегом другими моментами $M[\tilde{\eta}_i(\cdot)]^2$ та задовольняють умову

¹Тут і надалі M - символ математичного сподівання.

$$M\tilde{\eta}_i(x) = 0 \quad (11)$$

і нерівність

$$\sum_{i=1}^m \int_{\Gamma_i} r_i^2(x) M|\tilde{\eta}_i(x)|^2 d\Gamma_i \leq 1. \quad (12)$$

Тут $q(x)$ і $r_i(x)$ – задані неперервні на Γ та Γ_i функції, які не перетворюються там в нуль.

За спостереженнями (8) потрібно в класі лінійних, по відношенню до цих спостережень, оцінок вигляду

$$\widehat{l(\varphi)} = \sum_{i=1}^m \int_{\Gamma_i} y_i(x; \varphi, \eta) \overline{u_i(x)} d\Gamma_i + c \quad (13)$$

знайти, в деякому смислі, оптимальну оцінку значення функціоналу

$$l(\varphi) = \int_{\Gamma} \overline{l_0(x)} \varphi(x) d\Gamma, \quad (14)$$

де $u_i \in L^2(\Gamma_i)$, $i = 1, \dots, m$, $c \in \mathbb{C}$ – комплексне число, $l_0 \in L^2(\Gamma)$ – задана функція.

Означення. Оцінка $\widehat{l(\varphi)} = \sum_{i=1}^m \int_{\Gamma_i} y_i(x; \varphi, \eta) \overline{u_i(x)} d\Gamma_i + \hat{c}$ називається мінімаксною середньоквадратичною оцінкою $l(\varphi)$, якщо функції $u_i(x)$ і число $\hat{c}$ визначаються із умови

$$\sigma(u, c) := \sup_{\tilde{f} \in \tilde{H}, \tilde{\eta} \in \tilde{H}_i} M|l(\tilde{\varphi}) - \widehat{l(\tilde{\varphi})}|^2 \rightarrow \inf_{u \in H, c \in \mathbb{C}}, \quad (15)$$

де $\tilde{\varphi}(x)$ – слід розв'язку $u(x)$ крайової задачі (1)–(4) на Γ при $f(x) = \tilde{f}(x)$ і

$$\widehat{l(\tilde{\varphi})} = \sum_{i=1}^m \int_{\Gamma_i} y_i(x; \tilde{\varphi}, \tilde{\eta}) \overline{u_i(x)} d\Gamma_i + c. \quad (16)$$

Величина

$$\sigma(\varphi) := \left(M|l(\varphi) - \widehat{l(\varphi)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

називається похибкою мінімаксного середньоквадратичного оцінювання.

Представлення для мінімаксних оцінок

Будемо надалі вважати, що $k \notin N(\Omega)$. Позначимо через H гільбертовий простір $L^2(\Gamma_1) \times \dots \times L^2(\Gamma_m)$ з відповідною нормою та для будь-якого фіксованого $u := (u_1, \dots, u_m) \in H$ введемо функцію $z(\cdot; u) \in L^2(\Gamma)$ як єдиний розв'язок інтегрального рівняння

$$T_{\tilde{f}} z(x; u) = l_0(x) - \sum_{i=1}^m \chi_{\Gamma_i}(x) (C_i^* u_i)(x), \quad (18)$$

де C_i^* – оператор, спряжений до оператора C_i і визначається формулою $(C_i^* \psi)(x) = \int_{\Gamma_i} \overline{R_i(y, x)} \psi(y) d\Gamma_i$, а $\chi_{\Gamma_i}(x) = 1$, якщо $x \in \Gamma_i$, та $= 0$, якщо $x \in \Gamma \setminus \Gamma_i$.

Лема 1. Якщо $k \notin N(\Omega)$, то задача мінімаксного середньоквадратичного

оцінювання еквівалентна задачі оптимального керування системою, що описується інтегральним рівнянням (18), з функцією вартості

$$J(u) = \int_{\Gamma} q^{-2}(x) |((I + K_{-k})z(\cdot; u))(x)|^2 d\Gamma + \sum_{i=1}^m \int_{\Gamma_i} r_i^{-2}(x) |u_i(x)|^2 d\Gamma_i \rightarrow \inf_{u \in H}. \quad (19)$$

Доведення. В силу (5), (8), (13), (14), (7) а також співвідношення $(K'_k \phi, \psi)_{L^2(\Gamma)} = (\phi, K_{-k} \psi)_{L^2(\Gamma)} \quad \forall \phi \in H^{1/2}(\Gamma), \psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, яке випливає із першого рівняння в (5), маємо

$$\begin{aligned} l(\bar{\phi}) - l(\widehat{\bar{\phi}}) - c &= (\bar{\phi}, l_0)_{L^2(\Gamma)} - \sum_{i=1}^m (y_i(\cdot; \bar{\phi}, \bar{\eta}), u_i)_{L^2(\Gamma_i)} - c = (\bar{\phi}, l_0)_{L^2(\Gamma)} \\ &- \sum_{i=1}^m (C_i \bar{\phi}, u_i)_{L^2(\Gamma_i)} - \sum_{i=1}^m (\bar{\eta}_i, u_i)_{L^2(\Gamma_i)} - c = (\bar{\phi}, l_0)_{L^2(\Gamma)} - \sum_{i=1}^m (\bar{\phi}, C_i^* u_i)_{L^2(\Gamma_i)} \\ &= - \sum_{i=1}^m (\bar{\eta}_i, u_i)_{L^2(\Gamma_i)} - c = (\bar{\phi}, l_0)_{L^2(\Gamma)} - (\bar{\phi}, \sum_{i=1}^m \chi_{\Gamma_i} C_i^* u_i)_{L^2(\Gamma)} - \sum_{i=1}^m (\bar{\eta}_i, u_i)_{L^2(\Gamma_i)} - c \\ &= (\bar{\phi}, l_0 - \sum_{i=1}^m \chi_{\Gamma_i} C_i^* u_i)_{L^2(\Gamma)} - \sum_{i=1}^m (\bar{\eta}_i, u_i)_{L^2(\Gamma_i)} - c = (\bar{\phi}, T_{-k} z(\cdot; u))_{L^2(\Gamma)} \\ &- \sum_{i=1}^m (\bar{\eta}_i, u_i)_{L^2(\Gamma_i)} - c = (T_k \bar{\phi}, z(\cdot; u))_{L^2(\Gamma)} - \sum_{i=1}^m (\bar{\eta}_i, u_i)_{L^2(\Gamma_i)} - c \\ &= ((I + K'_k) \bar{f}, z(\cdot; u))_{L^2(\Gamma)} - \sum_{i=1}^m (\bar{\eta}_i, u_i)_{L^2(\Gamma_i)} - c \\ &= \int_{\Gamma} (\bar{f}(x) - f_0(x)) \overline{((I + K_{-k})z(\cdot; u))(x)} d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma} ((I + K'_k) f_0)(x) \overline{z(x; u)} d\Gamma - \sum_{i=1}^m \int_{\Gamma_i} \eta_i(x) \overline{u_i(x)} d\Gamma_i - c. \end{aligned} \quad (20)$$

Звідси, використовуючи узагальнену нерівність Коші-Буняковського, знаходимо, що $\inf_{c \in \mathbb{R}} \sup_{f \in L^2(\Gamma), \bar{\eta} \in L^2(\Gamma_i)} M |l(\bar{\phi}) - l(\widehat{\bar{\phi}})|^2 = J(u)$, де $l(u)$ визначається виразом (19), інфімум по c досягається при $c = \int_{\Gamma} ((I + K'_k) f_0)(x) \overline{z(x; u)} d\Gamma$. $\square$

Покажемо далі, що розв'язання задачі оптимального керування (18), (19) зводиться до розв'язання деякої системи інтегральних рівнянь спеціального вигляду.

Теорема 1. Якщо $k \in N(\Omega)$, то існує єдина мінімаксна середньоквадратична оцінка: $\widehat{l(\bar{\phi})}$ значення функціоналу $l(\bar{\phi})$, яка має вигляд

$$\widehat{l(\bar{\phi})} = \sum_{i=1}^m \int_{\Gamma_i} y_i(x) \overline{\hat{u}_i(x)} d\Gamma_i + \hat{c}, \quad (21)$$

де $\hat{u}_i(x) = r_i^{-2}(x) (C_i p)(x)$, $i = 1, \dots, m$, $\hat{c} = \int_{\Gamma} ((I + K'_k) f_0)(x) \overline{z(x)} d\Gamma$, а функції $z \in H^{1/2}(\Gamma)$ і $p \in H^{1/2}(\Gamma)$ однозначно визначаються із розв'язку такої системи інтегральних рівнянь:

$$T_{-\bar{k}} z = l_0 - \sum_{i=1}^m \chi_{\Gamma_i} C_i^*(r_i^2 C_i p), \quad (22)$$

$$T_k p = (I + K'_k)(q^{-2}(I + K_{-\bar{k}})z). \quad (23)$$

Похибка мінімаксного середньоквадратичного оцінювання задовольняє нерівність

$$\sigma(\varphi) \leq \sigma(\hat{u}, \hat{c})^{1/2} = l(p)^{1/2}. \quad (24)$$

Доведення. Із вигляду функціонала (19) випливає існування єдиного елемента $\hat{u} \in H$ такого, що $J(\hat{u}) = \inf_{u \in H} J(u)$. Тому $\frac{d}{d\tau} J(\hat{u} + \tau v) \big|_{\tau=0} = 0$ для будь-яких $v \in H$ та $\tau \in \mathbb{R}$. Звідси враховуючи, що розв'язок $z(x, \hat{u} + \tau v)$ рівняння (18) при $u = \hat{u} + \tau v$ можна представити у вигляді $z(x, \hat{u} + \tau v) = z(x, \hat{u}) + \tau \bar{z}(x, v)$, де через $\bar{z}(x; v)$ позначено розв'язок цього рівняння при $l_0(x) \equiv 0$ та $u = v$, знаходимо

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\tau} J(\hat{u} + \tau v) \big|_{\tau=0} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} (J(\hat{u} + \tau v) - J(\hat{u})) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left(\int_{\Gamma} q^{-2}(x) ((I + K_{-\bar{k}})z(\cdot; \hat{u} + \tau v))(x) \overline{((I + K_{-\bar{k}})z(\cdot; \hat{u} + \tau v))(x)} d\Gamma \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Gamma} q^{-2}(x) |((I + K_{-\bar{k}})z(\cdot; \hat{u}))(x)|^2 d\Gamma \right) \\ &\quad + \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left(\sum_{i=1}^m (r_i^{-2}(\hat{u}_i + \tau v_i), \hat{u}_i + \tau v_i)_{L^2(\Gamma_i)} - \sum_{i=1}^m (r_i^{-2} \hat{u}_i, \hat{u}_i)_{L^2(\Gamma_i)} \right) \\ &= 2\operatorname{Re} \left(((I + K'_k)(q^{-2}(\cdot)(I + K_{-\bar{k}})z(\cdot; \hat{u})), \bar{z}(\cdot; v))_{L^2(\Gamma)} + \sum_{i=1}^m (r_i^{-2} \hat{u}_i, v_i)_{L^2(\Gamma_i)} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Аналогічно, із умови $\frac{d}{d\tau} J(\hat{u} + i\tau v) \big|_{\tau=0} = 0$, $i = \sqrt{-1}$, $\forall v \in H, \forall \tau \in \mathbb{R}$, яка випливає із того, що $\hat{u} \in H$ — єдина точка мінімуму функціонала (19), отримуємо

$$\operatorname{Im} \left(((I + K'_k)(q^{-2}(\cdot)(I + K_{-\bar{k}})z(\cdot; \hat{u})), \bar{z}(\cdot; v))_{L^2(\Gamma)} + \sum_{i=1}^m (r_i^{-2} \hat{u}_i, v_i)_{L^2(\Gamma_i)} \right) = 0.$$

Звідси та із (25) отримуємо

$$((I + K'_k)(q^{-2}(\cdot)(I + K_{-\bar{k}})z(\cdot; \hat{u})), \bar{z}(\cdot; v))_{L^2(\Gamma)} + \sum_{i=1}^m (r_i^{-2} \hat{u}_i, v_i)_{L^2(\Gamma_i)} = 0. \quad (26)$$

Введемо функцію $p \in H^{1/2}(\Gamma)$, як розв'язок граничного інтегрального рівняння

$$T_k p = (I + K'_k)(q^{-2}(\cdot)(I + K_{-\bar{k}})z(\cdot; \hat{u})). \quad (27)$$

Тоді

$$\begin{aligned} ((I + K'_k)(q^{-2}(\cdot)(I + K_{-\bar{k}})z(\cdot; \hat{u})), \bar{z}(\cdot; v))_{L^2(\Gamma)} &= (T_k p, z(\cdot; v))_{L^2(\Gamma)} = (p, T_{-\bar{k}} \bar{z}(\cdot; v))_{L^2(\Gamma)} \\ &= -(p, \sum_{i=1}^m \chi_{\Gamma_i} C_i^* v_i)_{L^2(\Gamma)} = -\sum_{i=1}^m (p, C_i^* v_i)_{L^2(\Gamma_i)} = -\sum_{i=1}^m (C_i p, v_i)_{L^2(\Gamma_i)} \end{aligned} \quad (28)$$

Із (26) та (28) випливає, що $\sum_{i=1}^m (r_i^{-2} \hat{u}_i - C_i p, v_i)_{L^2(\Gamma_i)} = 0$, звідки, покладаючи

$v_i = r_i^{-2} \hat{u}_i - Cp, v_i$, отримаємо $\sum_{i=1}^m \|r_i^{-2} \hat{u}_i - Cp\|_{L^2(\Gamma_i)}^2 = 0$. Із останнього співвідношення випливає, що $\hat{u}_i(x) = r_i^2(x)(C, p)(x) = r_i^2(x) \int_{\Gamma_i} R_i(x; t) p(t) d\Gamma_t$. Підставляючи цей вираз в (18) та позначаючи $z(x; \hat{u}) = z(x)$, доходимо висновку, що пара $z(x), p(x)$ є розв'язком системи інтегральних рівнянь (22), (23).

Єдиність розв'язку цієї системи випливає із доведеної єдиності вектор-функції $\hat{u}(x) = (\hat{u}_1(x), \dots, \hat{u}_m(x))$, для якої $J(\hat{u}) = \inf_{u \in H} J(u)$.

Установимо тепер рівність

$$J(\hat{u}) = l(p). \quad (29)$$

Тоді із доведеного в лемі 1 співвідношення $\sigma(u, c) = J(u)$ та із визначення похибки $\sigma(\varphi)$ мінімаксного оцінювання буде впливати оцінка (24).

Із рівнянь (19) та (21) з урахуванням позначення $z(x) = z(x; u)$ маємо

$$\begin{aligned} J(\hat{u}) &= \int_{\Gamma} q^{-2}(x) \left| ((I + K_{-\hat{F}})z)(x) \right|^2 d\Gamma + \sum_{i=1}^m \int_{\Gamma_i} r_i^{-2}(x) |\hat{u}_i(x)|^2 d\Gamma_i \\ &= \int_{\Gamma} q^{-2}(x) \left| ((I + K_{-\hat{F}})z)(x) \right|^2 d\Gamma + \sum_{i=1}^m \int_{\Gamma_i} r_i^2(x) \left| \int_{\Gamma_i} R_i(x; y) p(y) d\Gamma_y \right|^2 d\Gamma_i. \end{aligned} \quad (30)$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} q^{-2}(x) \left| ((I + K_{-\hat{F}})z)(x) \right|^2 d\Gamma &= (q^{-2}(I + K_{-\hat{F}})z, (I + K_{-\hat{F}})z)_{L^2(\Gamma)} \\ &= ((I + K'_{\hat{F}})(q^{-2}(I + K_{-\hat{F}})z), z)_{L^2(\Gamma)} \\ &= (T_{\hat{F}} p, z)_{L^2(\Gamma)} = (p, T_{-\hat{F}} z)_{L^2(\Gamma)} = (p, l_0 - \sum_{i=1}^m \chi_{\Gamma_i} C'_i(r_i^2 C, p))_{L^2(\Gamma)} \\ &= (p, l_0)_{L^2(\Gamma)} - \sum_{i=1}^m (p, C'_i(r_i^2 C, p))_{L^2(\Gamma_i)} = l(p) - \sum_{i=1}^m (r_i^2 C, p, C, p)_{L^2(\Gamma_i)} \\ &= l(p) - \sum_{i=1}^m \int_{\Gamma_i} r_i^2(x) \left| \int_{\Gamma_i} R_i(x; y) p(y) d\Gamma_y \right|^2 d\Gamma_i. \end{aligned} \quad (31)$$

Рівняння (29) випливає тепер із (30) та (31). Теорема доведена. $\square$

Висновки

В роботі вперше запропоновано використання апарату граничних інтегральних рівнянь 1-го роду в задачах оцінювання параметрів зовнішніх крайових задач в областях з кусково-гладкими границями. Зокрема, одержана система граничних інтегральних рівнянь першого роду, через розв'язок якої визначаються мінімаксні оцінки функціоналів від граничних значень розв'язків зовнішніх крайових задач Неймана для рівняння Гельмгольца. Доведена однозначна розв'язність цієї системи.

Отже розглянутий тут підхід дозволяє звести вказану вище задачу оцінювання до розв'язання системи граничних інтегральних рівнянь першого роду по обмеженій множині – границі області $R^1 \setminus \bar{\Omega}$, на відміну від традиційного способу знаходження мінімаксних оцінок [1], який

приводить до розв'язання системи інтегро-диференціальних рівнянь в усій необмеженій області $R^3 \setminus \bar{\Omega}$.

У зв'язку із сказаним вище відзначимо, що застосовуючи метод, за допомогою якого була одержана система граничних інтегральних рівнянь 1-го роду (22), (23) для мінімаксних оцінок, можна також одержати систему граничних інтегральних рівнянь 2-го роду для одержання цих оцінок. При цьому для областей з кусково-гладкими границями, виникають додаткові труднощі, пов'язані з втратою компактності відповідних інтегральних операторів.

Одержані результати можуть бути використані при розв'язанні ряду обернених задач математичної фізики, зокрема для одержання мінімаксних оцінок правих частин рівнянь (1), (4).

Література

1. О.Г. Наконечний, Оптимальне керування та оцінювання в рівняннях із частинними похідними, Київський університет, Київ 2004. – 103 с.
2. D. Colton and R. Kress, Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Problems, Springer-Verlag, New York, 2nd edition, 1998.
3. D. Colton and R. Kress, Integral Equations in Scattering Theory, Wiley Interscience, New York, 1983.
4. J.-C. Nédélec, Acoustic and Electromagnetic Equations. Integral Representations for Harmonic Problems, Springer-Verlag, 2001.
5. G. Chen and J. Zhou, Boundary Element Methods, Academic Press, New York, 1992.
6. Ж.-Л. Лионс, Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными, М.: Мир, 1972. – 414 с.

Надійшла до редакції 15.09.2005

УДК 519.8

Ганна В. Рябікова

Мінімаксне оцінювання невідомих правих частин рівнянь та граничних умов крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь

Доведена теорема про загальний вигляд мінімаксних оцінок значень функціоналів від правих частин рівнянь та граничних умов, що входять в постановку крайових задач для лінійних звичайних диференціальних рівнянь n -го порядку.

Ключові слова: мінімаксні оцінки, спостереження, функціонали від правих частин рівнянь.

Ganna V. Ryabikova

Minimax estimation of unknown right-hand sides of equations and boundary conditions for ordinary differential equations

The theorem on a general form of minimax estimates of values of functionals from right-hand sides of equations and boundary conditions appearing in the statement of boundary value problems for linear n -th order ordinary differential equations is proved.

Key words: minimax estimates, observations, functionals from right-hand sides of equations.

Дана стаття є продовженням роботи [1]. При цьому зберігаються всі позначення, що прийняті в [1]. Посилання вигляду (1.1) буде всюди надалі означати посилання на формулу (1) із роботи [1]. В цій статті, використовуючи метод, запропонований Ю. К. Подлипенко в [2], за спостереженнями вигляду

$$y = y(\varphi; \eta) = C\varphi + \eta \quad (1)$$

де $\varphi(x) \in W_2^n(a, b)$ – розв’язок крайової задачі

$$L\varphi(t) = \sum_{i=0}^n p_i(t)\varphi^{(n-i)}(t) = f(t) \text{ майже скрізь на } (a, b), \quad (2)$$

$$B_i(\varphi) = \alpha_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (3)$$

шукається представлення для мінімаксної оцінки $\widehat{l(F)}$ (означення див. в [1]) функціоналу

$$l(F) = \int_a^b \overline{l_0(t)} f(t) dt + \sum_{j=1}^m \overline{l_j} \alpha_j,$$

від правих частин рівняння (2) та граничних умов (3) крайової задачі (2), (3), яке не залежить від конкретного вигляду цього функціоналу і цим відрізняється від представлення, отриманого в роботі [1]. Тут для будь-якого цілого $n \geq 1$ через $W_2^n(a, b)$ позначена множина функцій, абсолютно неперервних на $[a, b]$ разом з похідними до $(n-1)$ -го порядку, для яких похідна порядку n , що існує майже скрізь на (a, b) , належить простору $L^2(a, b)$; $p_i^{(n-i)} \in C[a, b]$, $i = \overline{0, n}$ і $p_0(t) \neq 0$ на $[a, b]$; $B_i(\varphi)$, $i = \overline{1, m}$, – задана система m лінійно-незалежних форм від $2n$ змінних

$$\varphi(a), \dots, \varphi^{(n-1)}(a), \varphi(b), \dots, \varphi^{(n-1)}(b); \quad (4)$$

елемент u належить гільбертову простору H_0 над $\mathbb{C}$ із скалярним добутком $(\cdot, \cdot)_{H_0}$ і нормою $\|\cdot\|_{H_0}$ (якщо H_0 – скінченновимірний простір, то тоді припускається, що $\dim H_0 > n - r$); $c \in \mathbb{C}$; $l_0 \in L^2(a, b)$ – задана функція, $l_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1, m}$ – задані числа. При цьому вважається, що праві частини $f(t)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ рівнянь (2), (3) і похибки $\eta = \eta(\omega)$ в спостереженнях (1), які є випадковими елементами, визначеними на імовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ із значеннями в H_0 , невідомі, а відомо лише, що елементи $F := (f(\cdot), \alpha)$ і $\eta \in G_1$ належать множинам G_0 і G_1 відповідно, означення яких дано в [1], $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_m)^T \in \mathbb{C}^m$ – вектор з компонентами $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, $C \in \mathcal{L}(L^2(a, b), H_0)$ – лінійний неперервний оператор, такий що його звуження на підпростір $N(L, B) = \{\varphi_0 \in C^{(n)}[a, b] : L\varphi_0 = 0 \text{ на } (a, b), B_i(\varphi_0) = 0, i = \overline{1, m}\}$ ін'єктивно.

Позначимо яку-небудь систему лінійно незалежних розв'язків задачі

$$L^+ \psi_0 = 0 \text{ на } (a, b), B_j^+(\psi_0) = 0, j = \overline{1, 2n - m},$$

через $\psi_1, \dots, \psi_{m-r}$, а через $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-r}$ – яку-небудь систему лінійно незалежних розв'язків однорідної задачі (2), (3), де r – ранг матриці (1.7). Тут через L^+ позначений диференціальний оператор, формально спряжений до L , а через $B_j^+(\psi)$ лінійні форми, що визначаються формулою Гріна (1.4) від змінних $\psi(a), \dots, \psi^{(n-1)}(a), \psi(b), \dots, \psi^{(n-1)}(b)$. (див. [1]). Тоді має місце таке твердження.

Теорема 1. Мінімаксна оцінка виразу $l(F)$ має вигляд

$$\widehat{l(F)} = l(\hat{F}), \quad (5)$$

де $\hat{F} = (\hat{f}(\cdot), \hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_m)$; $\hat{f}(t) = Q^{-1}\hat{p}(t) + f^{(0)}(t)$, $\hat{\alpha}_j = Q_1^{-1}S^+(\hat{p})_j + \alpha_j^{(0)}$, $j = \overline{1, m}$, а функція $\hat{p}$ визначається із розв'язку задачі:

$$L^+ \hat{p}(t) = C^* J_{H_0} Q_0 (y(\varphi; \eta) - C\hat{\varphi})(t) \text{ на } (a, b), \quad (6)$$

$$B_j^+(\hat{p}) = 0, \quad j = \overline{1, 2n - m}, \quad (7)$$

$$\int_a^b Q^{-1} \hat{p}(t) \overline{\psi_i(t)} dt + (Q_1^{-1} S^+(\hat{p}), S^+(\psi_i))_{\mathbb{C}^m} = 0, \quad i = \overline{1, m - r}, \quad (8)$$

$$L\hat{\varphi}(t) = Q^{-1} \hat{p}(t) + f^{(0)}(t) \text{ на } (a, b), \quad (9)$$

$$B_{j'}(\hat{\varphi}) = Q_1^{-1} S^-(\hat{p})_{j'} + \alpha_{j'}^{(0)}, \quad j' = \overline{1, m}, \quad (10)$$

$$\int_a^b C^* J_{H_0} Q_0 (y(\varphi; \eta) - C\hat{\varphi})(t) \overline{\varphi_{i'}(t)} dt = 0, \quad i' = \overline{1, n - r}, \quad (11)$$

де $C^* : H'_0 \rightarrow L_2(a, b)$ – оператор, спряжений до C , що визначається співвідношенням $\langle Cv, w \rangle_{H_0 \times H'_0} = \int_a^b w(t) \overline{C^*v(t)} dt$ для усіх $v \in L^2(a, b)$, $w \in H'_0$, $J_{H_0} \in \mathcal{L}(H_0, H'_0)$ – оператор, що називається ізометричним антиізоморфізмом, який діє із H_0 на його спряжений простір H'_0 і визначається рівністю¹ $(v, u)_{H_0} = \langle v, J_{H_0}u \rangle_{H_0 \times H'_0} \quad \forall u, v \in H_0$, де $\langle x, f \rangle_{H_0 \times H'_0} := f(x)$ для $x \in H_0$, $f \in H'_0$. $S^+(p) := (S_1^+(p), \dots, S_m^+(p))^T \in \mathbb{C}^m$ – вектор з компонентами $S_j^+(p)$, $j = \overline{1, m}$, які є лінійними формами, що визначаються формулою Гріна, (1.4) від змінних $p(a), \dots, p^{(n-1)}(a), p(b), \dots, p^{(n-1)}(b)$, а Q, Q_1 і Q_0 – оператори, що визначені в [1]. Задача (6)–(11) має єдиний розв'язок.

Доведення. Введемо задачу оптимального керування системою рівнянь

$$L^+ \hat{p}(t; u) = -(C^* J_{H_0} u)(t) + (C^* J_{H_0} Q_0(y(\varphi; \eta)))(t) \quad \text{на } (a, b), \quad (12)$$

$$B_j^+(\hat{p}(\cdot; u)) = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad (13)$$

$$\int_a^b Q^{-1} \hat{p}(t; u) \overline{\psi_i(t)} dt + (Q_1^{-1} S^+(\hat{p}(\cdot; u)), S^+(\psi_i))_{\mathbb{C}^m} = 0, \quad i = \overline{1, m-r}, \quad (14)$$

з функцією вартості

$$I(u) = \int_a^b Q^{-1} \hat{p}(t; u) \overline{\hat{p}(t; u)} dt + (Q_1^{-1} S^+(\hat{p}(\cdot; u)), S^+(\hat{p}(\cdot; u)))_{\mathbb{C}^m} + (Q_0^{-1} u, u)_{H_0} \rightarrow \inf_{u \in U}, \quad (15)$$

де $U = \{u \in H_0 : \int_a^b C^* J_{H_0} Q_0(y(\varphi; \eta))(t) dt - \int_a^b (C^* J_{H_0} u)(t) \overline{\varphi_0(t)} dt = 0 \text{ для будь-яких розв'язків } \varphi_0(t) \text{ однорідної крайової задачі (2), (3)}\}$, а позначення $S^+(\hat{p}(\cdot; u))$ і $S^+(\psi_i)$ мають той же смисл, що і $S^+(p)$. Із вигляду функціоналу $I(u)$ випливає існування єдиного елемента $\hat{u} \in U$ такого, що

$$I(\hat{u}) = \inf_{u \in U} I(u).$$

Далі, визначаючи функцію $\hat{\varphi}(t)$, як єдиний розв'язок крайової задачі:

$$L\hat{\varphi}(t) = Q^{-1} \hat{p}(t; \hat{u}) + f^{(0)}(t) \quad \text{на } (a, b),$$

$$B_{j'}(\hat{\varphi}) = Q_1^{-1} S^+(\hat{p}(\cdot; \hat{u}))_{j'} + \alpha_{j'}^{(0)}, \quad j' = \overline{1, m},$$

$$\int_a^b C^* J_{H_0} Q_0(y(\varphi, \eta) - C\hat{\varphi})(t) \overline{\varphi_{i'}(t)} dt = 0, \quad i' = \overline{1, n-r},$$

і дослівно повторюючи міркування, за допомогою яких була доведена теорема 1 із [1], а також, вводячи позначення $\hat{p}(t) = \hat{p}(t; \hat{u})$, прийдемо висновку про однозначну розв'язність задачі (6)–(11).

¹Цей оператор існує в силу теореми Ріса.

Доведемо тепер справедливність представлення $\widehat{l(\hat{F})} = l(\hat{F})$. Для цього врахуємо той факт, що елемент $\hat{u}$ і число $\hat{c}$, які визначають мінімаксну оцінку

$$\widehat{l(\hat{F})} = (y(\varphi; \eta), \hat{u})_{H_0} + \hat{c}, \quad (16)$$

згідно з теоремою 1 із [1] знаходяться за формулами

$$\hat{u} = Q_0 C p, \quad \hat{c} = \int_a^b \overline{(l_0(t) + z(t))} f^{(0)}(t) dt + \sum_{i=1}^m \overline{(l_i + S_i^+(z))} \alpha_i^{(0)}, \quad (17)$$

де функції $p(t)$ і $z(t)$ є єдиним розв'язком системи інтегродиференціальних рівнянь

$$L^+ z(t) = -C^* J_{H_0} Q_0 C p(t) \quad \text{на } (a, b), \quad (18)$$

$$B_j^+(z) = 0, \quad j = \overline{1, 2n - m}, \quad (19)$$

$$\int_a^b Q^{-1}(l_0(t) + z(t)) \overline{\psi_i(t)} dt + (Q_1^{-1}(1 + S^+(z)), S^+(\psi_i))_{\mathbb{C}^m} = 0, \quad i = \overline{1, m - r}, \quad (20)$$

$$Lp(t) = Q^{-1}(l_0(t) + z(t)) \quad \text{на } (a, b), \quad (21)$$

$$B_{j'}(p) = Q_1^{-1}(1 + S^+(z))_{j'}, \quad j' = \overline{1, m}, \quad (22)$$

$$\int_a^b (l_0(t) - C^* J_{H_0} Q_0 C p(t)) \overline{\varphi_{i'}(t)} dt = 0, \quad i' = \overline{n - r}, \quad (23)$$

$l = (l_1, \dots, l_m)^T$ та $S^+(z) := (S_1^+(z), \dots, S_m^+(z))^T \in \mathbb{C}^m$ – вектори з компонентами l_j і $S_j^+(z)$, $j = \overline{1, m}$, відповідно і через $Q_1^{-1}(1 + S^+(z))_j$ позначена j -а компонента вектора $Q_1^{-1}(1 + S^+(z)) \in \mathbb{C}^m$.

Підставляючи вирази (17) для $\hat{u}$ і $\hat{c}$ в (16) і приймаючи до уваги рівняння (6)–(8), одержимо

$$\begin{aligned} \widehat{l(\hat{F})} &= (y(\varphi; \eta), \hat{u})_{H_0} + \hat{c} = (y(\varphi; \eta), Q_0 C p)_{H_0} + \hat{c} = \overline{(C p, Q_0 y(\varphi; \eta))_{H_0}} + \hat{c} \\ &= \overline{\langle C p, J_{H_0} Q_0 y(\varphi; \eta) \rangle_{H_0 \times H_0}} = \overline{(p, C^* J_{H_0} Q_0 y(\varphi; \eta))_{L^2(a, b)}} + \hat{c} \\ &= \int_a^b p(t) \overline{C^* J_{H_0} Q_0 y(\varphi; \eta)(t)} dt + \hat{c} = \int_a^b p(t) \overline{L^+ \hat{p}(t)} dt + \int_a^b \overline{(l_0(t) + z(t))} f^{(0)}(t) dt \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \overline{(l_j + S_j^+(z))} \alpha_j^{(0)} + \int_a^b p(t) \overline{C^* J_{H_0} Q_0 C \hat{\varphi}(t)} dt. \end{aligned} \quad (24)$$

Перетворемо далі сумму перших трьох доданків в правій частині цієї рівності за допомогою формули Гріна (1.4), враховуючи введені в ній

позначення. Внаслідок (18')-(23) та (9)-(11), маємо

$$\begin{aligned}
 & \overline{\int_a^b p(t) L^+ \hat{p}(t) dt} + \int_a^b \overline{(l_0(t) + z(t))} f^{(0)}(t) dt + \sum_{j=1}^m \overline{(l_j + S_j^+(z))} \alpha_j^{(0)} \\
 & = \int_a^b \overline{L p(t) \hat{p}(t)} dt + \sum_{j=1}^m \overline{B_j(p) S_j^+(\hat{p})} \\
 & \quad + \int_a^b \overline{(l_0(t) + z(t))} f^{(0)}(t) dt + \sum_{j=1}^m \overline{(l_j + S_j^+(z))} \alpha_j^{(0)} \\
 & = \int_a^b \overline{Q^{-1}(l_0(t) + z(t)) \hat{p}(t)} dt + \sum_{j=1}^m \overline{Q_1^{-1}(1 + S^+(z))_j S_j^+(\hat{p})} \\
 & \quad + \int_a^b \overline{(l_0(t) + z(t))} f^{(0)}(t) dt + \sum_{j=1}^m \overline{(l_j + S_j^+(z))} \alpha_j^{(0)} \\
 & = \int_a^b \overline{Q^{-1}(l_0(t) + z(t)) \hat{p}(t)} dt + \overline{(Q_1^{-1}(1 + S^+(z)), S^+(\hat{p}))} c^m \\
 & \quad + \int_a^b \overline{(l_0(t) + z(t))} f^{(0)}(t) dt + \sum_{j=1}^m \overline{(l_j + S_j^+(z))} \alpha_j^{(0)} \\
 & = \int_a^b \overline{(l_0(t) + z(t)) Q^{-1} \hat{p}(t)} dt + \overline{(1 + S^+(z), Q_1^{-1} S^+(\hat{p}))} c^m \\
 & \quad + \int_a^b \overline{(l_0(t) + z(t))} f^{(0)}(t) dt + \sum_{j=1}^m \overline{(l_j + S_j^+(z))} \alpha_j^{(0)} \\
 & = \int_a^b \overline{(l_0(t) + z(t)) Q^{-1} \hat{p}(t)} dt + \sum_{j=1}^m \overline{(l_j + S_j^+(z)) Q_1^{-1} S_j^+(\hat{p})} \\
 & \quad + \int_a^b \overline{(l_0(t) + z(t))} f^{(0)}(t) dt + \sum_{j=1}^m \overline{(l_j + S_j^+(z))} \alpha_j^{(0)} \\
 & = l(F) + \int_a^b \overline{z(t) Q^{-1} \hat{p}(t)} dt + \sum_{j=1}^m \overline{S_j^+(z) Q_1^{-1} S_j^+(\hat{p})} \\
 & \quad + \int_a^b \overline{z(t)} f^{(0)}(t) dt + \sum_{j=1}^m \overline{S_j^+(z)} \alpha_j^{(0)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= l(F) + \int_a^b \overline{z(t)}(Q^{-1}\hat{p}(t) + f^{(0)}(t))dt + \sum_{j=1}^m \overline{S_j^+(z)}(Q_1^{-1}S_j^+(\hat{p}) + \alpha_j^{(0)}) \\
 &= l(F) + \int_a^b L\hat{\varphi}(t)\overline{z(t)}dt + \sum_{j=1}^m B_j(\hat{\varphi})\overline{S_j^+(z)} = l(F) + \int_a^b \hat{\varphi}(t)\overline{L^+z(t)}dt \\
 &= l(F) - \int_a^b \hat{\varphi}(t)\overline{C^*J_{H_0}Q_0Cp(t)}dt = l(F) - \langle C\varphi, J_{H_0}Q_0Cp \rangle_{H_0 \times H'_0} \\
 &= l(F) - (C\varphi, Q_0Cp)_{H_0} = l(F) - (Q_0C\varphi, Cp)_{H_0} = l(F) - \overline{(Cp, Q_0C\varphi)_{H_0}} \\
 &= l(F) - \overline{\langle Cp, J_{H_0}Q_0C\varphi \rangle_{H_0 \times H'_0}} = l(F) - \overline{(p, C^*J_{H_0}Q_0C\varphi)_{L^2(a,b)}} \\
 &= l(F) - \int_a^b p(t)\overline{C^*J_{H_0}Q_0C\varphi(t)}dt.
 \end{aligned}$$

Звідси та з рівності (24) випливає потрібне представлення. $\square$

Наслідок. Функції $Q^{-1}\hat{p} + f^{(0)}$ і числа $Q_1^{-1}S^+(\hat{p})_j + \alpha_j^{(0)}(s)$ можна взяти за оцінки правих частин f і α_j ($j = \overline{1, m}$) рівнянь (2) і (3) відповідно.

Висновки. Основним результатом роботи є одержане представлення для мінімаксних оцінок значень функціоналів від невідомих правих частин рівнянь і граничних умов крайової задачі (2), (3), яке не залежить від конкретного вигляду цих функціоналів, що дозволило одержати оцінки самих правих частин.

Методика і результати роботи можуть бути використані при розв'язанні ряду обернених задач математичної фізики.

Література

1. Рябікова Г.В. Оптимальне оцінювання за неповними даними параметрів крайових задач для лінійних звичайних диференціальних рівнянь. // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки 2005,3.
2. Подлипенко Ю.К., Грищук Н.В. Минимаксное оценивание решений вырожденных краевых задач Неймана для эллиптических уравнений по наблюдениям, распределенным на системе поверхностей. // Системні дослідження і інформаційні технології. – 2004. – №2 с. 104 – 128.

Надійшла до редакції 14.04.2005

УДК 519.9

Ніна С. Скопюк-Стеценко¹

Аналіз тематичної та функціональної спрямованості Web-порталів

В даній статті наведено результати огляду та аналізу характеристик сучасних порталів, існуючих напрямків їх класифікації, запропоновано новий підхід до класифікації порталів.

Ключові слова: WWW, Web-портал, класифікація порталів.

Nina S. Skopiuk-Stetsenko¹

The analysis of the portals content type and functionality

In this paper the results of overview and analysis of the portal characteristics, current directions of the portals classification are presented, the new approach of the portals classification was proposed.

Key Words: WWW, Web-portal, portal types.

¹ E-mail: skopiuk@unicyb.kiev.ua

Область розробки Web-орієнтованих програмних систем відрізняється надзвичайною динамічністю: неперервно зростає кількість як нових компонент та послуг, так і методів та інструментальних засобів їх розробки. Багатоманітність існуючих на сьогоднішній день порталів різних типів доводять актуальність дослідження класифікацій порталів, яка є необхідною для більш точного позиціонування порталів при їх розробці та забезпечення в подальшому ефективного пошуку в мережі.

В той же час, порталу, як різновиду Web-систем, притаманні специфічні риси, тому проблеми, що виникають при його розробці та функціонуванні потребують нових, специфічних підходів. В такій ситуації актуальною стає проблема адекватного уточнення існуючих засобів та побудови уніфікованої теорії розробки Web-систем, зокрема, порталів.

У даній статті наведено результати дослідження характеристик порталів, їх функціональної та тематичної спрямованості, аналіз та класифікація існуючих технічних рішень в даній області. Це є необхідним кроком для виявлення суттєвих аспектів цього виду web-систем, особливостей їх структури, що визначатиме коректність процесу проектування та подальшої реалізації.

Особливості порталу як розподіленої системи, що існує в мережі Інтернет, зумовлені в першу чергу призначенням порталу. Це не лише персоніфікований та налагоджуваний інтерфейс, це – принципово нова концепція в представленні, організації і обміні інформацією з різномірних джерел між мережними клієнтами та web-серверами, яка реалізує набір необхідних сервісів для обслуговування різних аудиторій користувачів.

Визначення поняття порталу на сучасному етапі знаходиться у стадії формування, загальноприйнятого, усталеного варіанту ще не існує. Серед існуючих визначень найбільш відповідними суті даного виду програмних систем вважаю наступні:

Портал - термін (зазвичай синонімічний із точкою входу) для web-сайту, що служить початковим для користувачів, які отримали з'єднання з web [1].

Портал - web-сайт, який пропонує широкий асортимент ресурсів і служб, таких як e-mail, форуми, пошукові механізми, засоби персоналізації, аутентифікації та ін. [2].

Відсутність загальноприйнятого визначення самого поняття порталу тільки підтверджує фрагментарний характер області розробки Інтернет-порталів. Проте для однозначної відповідності предметної області побудованій концептуальній моделі чітке визначення характеристичних властивостей є необхідним. З цією метою варто дослідити запропоновані на сьогоднішній день класифікації порталів, хоча далеко не всі з них є безсумнівними. Серед наявних класифікацій можна виділити загальні та спеціалізовані.

Загальна класифікація виділяє два типи порталів:

- *Мега портали (або Інтернет-портали, публічні [2], загальні (general) [1]), які надають широкий спектр функцій, сервісів, змісту. Вони зазвичай використовують пошукові машини та містять колекцію гіперпосилань, відсортовану за категоріями та підкатегоріями. Прикладами таких порталів є Yahoo!, Netscape Netcenter, Excite, Lycos, CNET, AOL.com.*
- *Вертикальні (Vortals або niche [2], спеціалізовані (specialized) [1]) портали зосереджені на спеціалізованій аудиторії та/або тематиці. Прикладами таких порталів є Garden.com (для садівників), Fool.com (для інвесторів), SearchNetworking.com (для адміністраторів мережі).*

Серед спеціалізованих класифікацій наявні поділ порталів за наступними категоріями:

- **призначення** – публічні, вертикальні, корпоративні [3,4].
- **топология (архітектурна специфіка)** – горизонтальні, вертикальні [5,6].
- **цільова аудиторія користувачів** – портал публікації інформації, комерційні, корпоративні, персональні портали [7].
- **тип контенту і засоби, які надаються користувачам** (дана класифікація відображає еволюцію концепції порталу) – інформаційний портал, портал для сумісної роботи, портали експертизи, портали знань [7].

Детальна класифікація типів порталів запропонована аналітичною компанією Ovum [8], фактично відображена в [9] у поділі порталів на загальнодоступні, спеціалізовані, корпоративні, портали знань, торгові, універсальні. При чому поняття універсального порталу є найбільш

широким за усі перераховані вище, позначає ще нереалізований ідеальний портал, до якого усі прагнуть. Він інтегрує в собі можливість представлення довільним групам користувачів всієї необхідної для них інформації. З точки зору користувача – це ідеальний інтерфейс.

Таким чином, існуючий поділ множини порталів на класи не є однозначним та безумовним, інколи чіткої межі між групами не існує: так, в [10] портали поділяють на *публічні* та *корпоративні*, на противагу [11], де корпоративні відносять до категорії горизонтальних порталів, а комерційні (торгові) – до вертикальних. Єдине, про що можна твердити, - портали характеризує певна функціональна спрямованість. Проте дослідження таких класифікацій дозволяє визначити типову структуру порталів як різновиду Web-орієнтованих програмних систем. З цією ж метою було проаналізовано структуру сервісів ряду сучасних порталів різної спрямованості. Результати аналізу наведено у таблиці:

Таблиця. Сервіси Web-порталів

Портал \ Сервіс portalу	Персоналізація	Рубрикація	Пошук	Навігація	Пошта	Форум	Чат	Голосування	Банерна система	Новини	Розсилка	Модифікація	Статистичний моніторинг	Безпека	
														Аутентифікація	Авторизація
Yahoo! www.yahoo.com	+	+	+	+	+	-	+	-	+	+	-	+	+	+	-
MSN www.msn.com	+	+	+	+	+	-	+	-	-	+	-	-	-	+	-
Yandex www.yandex.com	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	-	+	-	+	-
Rambler www.rambler.ru	-	+	+	+	+	-	-	-	+	+	-	+	-	+	-
Торговий портал www.matrix.com.ua	-	+	+	+	-	+	-	+	+	+	+	-	+	+	-
Портал нерухомості www.domik.net	-	+	+	+	-	+	-	-	+	+	+	-	+	+	+
University of Washington www.washington.edu	+	+	+	+	-	-	-	-	-	+	-	-	-	+	-
Princeton University www.princeton.edu	-	+	+	+	+	-	-	-	-	+	-	-	+	+	-
University of Minnesota http://onestop.umn.edu	+	+	+	+	+	-	-	-	-	+	-	-	+	+	+
Российское образование www.edu.ru	+	+	+	+	-	+	-	-	-	+	+	-	-	+	-
OPENET www.openet.edu.ru	+	+	+	+	-	+	-	+	-	+	-	-	+	+	-
Российский общеобразовательный портал http://school.edu.ru	-	+	+	+	-	+	-	+	+	+	+	+	+	+	-
Interklasa www.interklasa.pl	+	+	+	+	+	+	+	-	+	+	+	-	-	+	+

Аналізуючи розподіл множини сервісів прослідковується тенденція їх групування відповідно до цільового використання порталу. Виходячи з наведених класифікацій та визначених характеристик порталів вважаю, що їх існування обумовлене необхідністю автоматизованої реалізації двох аспектів:

- інформаційно-пошуковий;
- організаційно-адміністративний.

Пріоритетність одного з цих напрямків і визначатиме принципові відмінності у характеристиках порталів, а наявність певних функціональностей дозволяє просто більш вузько класифікувати портал. Тому пропоную, відповідно до згадуваних вище аспектів, поділяти портали на дві категорії: інформаційно-пошукові та організаційно-адміністративні.

Дамо характеристику кожної з цих категорій стосовно архітектурних властивостей, специфіки наповнення та співвідношення кількості статичних та динамічних конструкцій.

1. Інформаційно-пошуковий портал. Портали першої категорії наслідують ціль пошукових машин, є інструментом ефективного доступу до ресурсів, здебільшого гетерогенних. Такі портали не містять зазвичай складових специфічної спрямованості, архітектура спрямована на забезпечення ефективного пошуку. Акценти при проектуванні розставлені на ефективну організацію інформаційних ресурсів та удосконалення механізмів пошуку. Через це допускається перевага у кількості статичних елементів над динамічними.

2. Організаційно-адміністративний портал. Для порталів другої категорії характерна наявність складових, необхідних для виконання конкретного завдання. Інформаційно-пошуковий аспект відходить на другий план, першочергового значення набуває проблема формування адекватного інструментарію, який надає портал. Такі портали мають слугувати робочим середовищем, бути адаптованими до певної проблемної області. Для досягнення цієї мети портал повинен містити достатню кількість динамічних елементів, яка в більшості випадків буде домінувати над статичними.

Схожу з моєю точку зору було також висловлено в роботі [12]. Там пропонують портали першої групи назвати навігаційними, а другої – порталами-середовищами.

Проте, незважаючи на відмінності у функціональній та тематичній спрямованості, об'єднує усі ці web-системи велика інформаційна база і наявність спектра сервісів, що за допомогою засобів web-інтеграції мають слугувати оптимізації діяльності користувача.

ВИСНОВКИ

В статті наведено результати дослідження типових властивостей порталів різної тематичної та функціональної спрямованості.

На основі проведеного аналізу формальних характеристик кращих існуючих порталів запропоновано вирішення проблеми їх класифікації, обґрунтовано новий підхід до поділу порталів на інформаційно-пошукові та організаційно-адміністративні. Проведені дослідження є важливим аспектом етапу аналізу предметної області та необхідні для систематизації процесів розробки порталів.

Література

1. Dictionary for Internet Computer Technologies www.whatis.com
2. Online Computer Dictionary for Computer and Internet Terms and Definitions www.webopedia.com
3. Н. Елманова. Web-порталы: назначение, преимущества, особенности и средства//КомпьютерПресс -2002.-6. www.compress.ru
4. Martin White. Tips and Techniques: Portals // Freepint.-2000.-58. <http://www.freepint.co.uk/issues/160300.htm#tips>
5. В.Л. Усков. Университетские порталы//Информационные технологии.-2001.-11.-с.
6. Ramona Winkler. Portals – The All-In-One Web Supersites: Features, Functions, Definitions, Taxonomy//SAP Design Guild.-2005.-3. http://www.sapdesignguild.org/editions/edition3/portal_definition.asp
7. К. Веже. Технология сервера порталов//Открытые системы.-2002.-9. <http://www.osp.ru/os/2002/09/022.htm>
8. Ovum: Telecoms and Software Consulting Company. www.ovum.com
9. Г. Галкин. Изменить лицо IT//Сетевой журнал.-2001-1. <http://www.setevoi.ru/cgi-bin/text.pl/magazines/2001/1>
10. Гуруге Анура. Корпоративные порталы на основе XML и Web-служб. – М.: КУДИЦ-Образ, 2004.
11. Государственный научно-исследовательский институт информационных технологий и телекоммуникаций www.informika.ru
12. Ernest Kinsolving, Jörg Beringer. The Posture of Portals//SAP Design Guild.-2005.-3. http://www.sapdesignguild.org/editions/edition3/portal_definition.asp

Надійшла до редакції 26.09.2005

УДК 681.5

Олександр С. Слабоспицький *

**Рекурентне оцінювання
нестационарних параметрів
нелінійних динамічних систем з
дискретним часом при
некласичних припущеннях**

Для дискретних нелінійних динамічних об'єктів при некласичних припущеннях розглядається задача оцінювання параметрів, які повільно змінюються з часом. Для оцінок параметрів вищезгаданих систем методом найменших квадратів зі змінним фактором забування та зваженої залишкової суми квадратів отримані відповідні рекурентні алгоритми.

Ключові слова: оцінювання нестационарних параметрів, дискретні системи, нелінійна динамічна система, метод найменших квадратів, змінний фактор забування, зважена залишкова сума квадратів, оператор псевдообернення.

* E-mail: sl@univ.kiev.ua

Використання математичних моделей з постійними параметрами не завжди задовольняє вимоги практики. У зв'язку з цим звернення до моделей зі змінними параметрами цілком логічне. Для оцінювання параметрів, які з часом можуть повільно змінюватися, може бути застосований метод найменших квадратів зі змінним фактором забування [1]. При класичних припущеннях для систем з дискретним часом відповідні результати представлені у роботах [1, 2]. Випадок порушення традиційних припущень для лінійних об'єктів досліджувався у публікаціях [3, 4], а для класу нелінійних дискретних динамічних систем аналогічне питання залишилося відкритим.

Дана робота присвячена задачі оцінювання нестационарних параметрів вищезгаданим методом для нелінійних динамічних об'єктів з дискретним часом. Отримано відповідні рекурентні алгоритми для оцінок нестационарних параметрів цих систем та зваженої залишкової суми квадратів при порушенні класичних припущень.

Alexander S. Slabospitsky *

**Recurrent estimation of
nonstationary parameter of
nonlinear dynamic systems with
discrete time under nonclassical
assumptions**

The estimation problem of slowly time-varying parameter is considered for discrete nonlinear dynamic objects under nonclassical assumptions. Corresponding recurrent algorithms are obtained for parameter estimates of above-mentioned systems by the least squares method with variable forgetting factor and weighted residual sum of squares.

Key words: time-varying parameter estimation, discrete-time systems, nonlinear dynamic system, least squares method, variable forgetting factor, weighted residual sum of squares, pseudoinverse operator.

Нехай математична модель динамічного об'єкту має наступний вигляд:

$$x(k+1) = F(x(k), u(k), k)\alpha + g(x(k), u(k), k) + \xi(k), \quad k \in N, \quad (1)$$

де $F(x(k), u(k), k)$, $g(x(k), u(k), k)$ - задані матрична та векторна функції відповідно, вектор фазового стану $x(k) \in R^n$, вектор керувань $u(k) \in R^m$, вектор збурень $\xi(k) \in R^n$, вектор параметрів $\alpha \in R^p$.

А j -те рівняння співвідношення (1) відповідно записується так:

$$x_j(k+1) = f_j^T(x(k), u(k), k)\alpha + g_j(x(k), u(k), k) + \xi_j(k), \quad k \in N, \quad (2)$$

де

$$x(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix}, \quad F(x(k), u(k), k) = \begin{pmatrix} f_1^T(x(k), u(k), k) \\ f_2^T(x(k), u(k), k) \\ \vdots \\ f_n^T(x(k), u(k), k) \end{pmatrix}, \quad \xi(k) = \begin{pmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \vdots \\ \xi_n(k) \end{pmatrix}.$$

Припустимо, що параметри системи α можуть повільно змінюватися з часом. Їх оцінювання будемо здійснювати методом найменших квадратів зі змінним фактором забування. Потрібна оцінка є розв'язком оптимізаційної задачі:

$$\hat{\alpha}(N) = \arg \min_{\alpha} Q(\alpha, N), \quad (3)$$

де функціонал $Q(\alpha, N) = \sum_{k=1}^N w(k, N) \|\xi(k)\|^2$,

причому вагові коефіцієнти $w(k, N)$ визначається згідно закону

$$w(k, N) = \begin{cases} \prod_{i=k}^{N-1} \lambda(i), & \text{якщо } k = \overline{1, N-1} \\ 1, & \text{якщо } k = N \end{cases},$$

а $\lambda(i)$ - фактор забування ($0 < \lambda(i) \leq 1, \forall i$).

При порушенні класичних припущень, оцінка (3) методу найменших квадратів зі змінним фактором забування не обов'язково буде єдиною. Тоді серед цих оцінок візьмемо оцінку з найменшою нормою [5], яка підраховується наступним чином:

$$\hat{\alpha}(N) = \tilde{F}_N^* \tilde{x}_N, \quad (4)$$

де $(^*)$ - оператор псевдообернення по Муру- Пенроузу,

$$\tilde{x}_N = \begin{pmatrix} w^{\frac{1}{2}}(1, N)(x(2) - g(x(1), u(1), 1)) \\ w^{\frac{1}{2}}(2, N)(x(3) - g(x(2), u(2), 2)) \\ \dots \\ w^{\frac{1}{2}}(N, N)(x(N+1) - g(x(N), u(N), N)) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{F}_N = \begin{pmatrix} w^{\frac{1}{2}}(1, N)F(x(1), u(1), 1) \\ w^{\frac{1}{2}}(2, N)F(x(2), u(2), 2) \\ \dots \\ w^{\frac{1}{2}}(N, N)F(x(N), u(N), N) \end{pmatrix}.$$

Отримаємо рекурентну процедуру для оцінки (4) у цьому загальному випадку. Вона буде корисна при уточненні значень вектора параметрів α по мірі накопичення вимірів.

Теорема 1. Рекурентний алгоритм для оцінки (4) методу найменших квадратів зі змінним фактором забування вектору нестационарних параметрів α системи (1) буде мати вигляд:

$$\begin{cases} \hat{\alpha}(N+1) = \tilde{\alpha}(N+1, n), \\ R(N+1) = \tilde{R}(N+1, n), \quad N = 0, 1, 2, \dots, \\ P(N+1) = \tilde{P}(N+1, n), \end{cases} \quad (5)$$

де якщо $\delta(N, j+1) > 0$, то

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}(N+1, j+1) = \tilde{\alpha}(N+1, j) + \tilde{P}(N+1, j)f_{j+1}(x(N+1), u(N+1), N+1) \times \\ \times [x_{j+1}(N+2) - f_{j+1}^T(x(N+1), u(N+1), N+1)\tilde{\alpha}(N+1, j) - \\ - g_{j+1}(x(N+1), u(N+1), N+1)] / \delta(N, j+1), \\ \tilde{R}(N+1, j+1) = \frac{1}{\tilde{\lambda}(N, j+1)} \{ \tilde{R}(N+1, j) - \\ - \frac{1}{\delta(N, j+1)} [\tilde{R}(N+1, j)f_{j+1}(x(N+1), u(N+1), N+1) \times \\ \times f_{j+1}^T(x(N+1), u(N+1), N+1)\tilde{P}(N+1, j) + \\ + \tilde{P}(N+1, j)f_{j+1}(x(N+1), u(N+1), N+1) \times \\ \times f_{j+1}^T(x(N+1), u(N+1), N+1)\tilde{R}(N+1, j)] + \\ + \frac{\gamma(N, j+1)}{\delta^2(N, j+1)} \tilde{P}(N+1, j)f_{j+1}(x(N+1), u(N+1), N+1) \times \\ \times f_{j+1}^T(x(N+1), u(N+1), N+1)\tilde{P}(N+1, j) \}, \\ \tilde{P}(N+1, j+1) = \tilde{P}(N+1, j) - \frac{1}{\delta(N, j+1)} \times \\ \times \tilde{P}(N+1, j)f_{j+1}(x(N+1), u(N+1), N+1) \times \\ \times f_{j+1}^T(x(N+1), u(N+1), N+1)\tilde{P}(N+1, j), \quad j = \overline{0, n-1}, \end{cases}$$

у протилежному випадку

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{\alpha}(N+1, j+1) &= \tilde{\alpha}(N+1, j) + \frac{1}{\gamma(N, j+1)} \times \\ &\times \tilde{R}(N+1, j) f_{j+1}(x(N+1), u(N+1), N+1) \times \\ &\times [x_{j+1}(N+2) - f_{j+1}^T(x(N+1), u(N+1), N+1) \tilde{\alpha}(N+1, j) - \\ &- g_{j+1}(x(N+1), u(N+1), N+1)], \\ \tilde{R}(N+1, j+1) &= \frac{1}{\tilde{\lambda}(N, j+1)} \{ \tilde{R}(N+1, j) - \\ &- \frac{1}{\gamma(N, j+1)} \tilde{R}(N+1, j) f_{j+1}(x(N+1), u(N+1), N+1) \times \\ &\times f_{j+1}^T(x(N+1), u(N+1), N+1) \tilde{R}(N+1, j) \}, \\ \tilde{P}(N+1, j+1) &= \tilde{P}(N+1, j), \quad j = \overline{0, n-1}, \end{aligned} \right.$$

з початковими умовами:

$$\tilde{\alpha}(N+1, 0) = \hat{\alpha}(N), \hat{\alpha}(0) = o,$$

$$\tilde{R}(N+1, 0) = R(N), R(0) = O,$$

$$\tilde{P}(N+1, 0) = P(N), P(0) = E,$$

$$\begin{aligned} \text{де } \gamma(N, j+1) &= \tilde{\lambda}(N, j+1) + f_{j+1}^T(x(N+1), u(N+1), N+1) \tilde{R}(N+1, j) \times \\ &\times f_{j+1}(x(N+1), u(N+1), N+1), \\ \delta(N, j+1) &= f_{j+1}^T(x(N+1), u(N+1), N+1) \tilde{P}(N+1, j) \times \\ &\times f_{j+1}(x(N+1), u(N+1), N+1), \end{aligned}$$

$$\lambda(0) = 1, \quad \tilde{\lambda}(N, j+1) = \begin{cases} \lambda(N), & j = 0, \\ 1, & j = \overline{1, n-1}. \end{cases}$$

Тут o, O – нульові вектор та матриця відповідно, E – одинична матриця, $(^T)$ – символ транспонування.

Доведення. Так як функціонал $Q(\alpha, N)$ можна переписати у вигляді

$$Q(\alpha, N) = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^n \{ w(k, N) \xi_j^2(k) \},$$

то застосовуючи теорему 1 роботи [3] послідовно до кожного з рівнянь (2), але вже з модифікованим фактором забування, отримаємо послідовність оцінок для вектора α .

А потрібна оцінка $\hat{\alpha}(N)$ у цій послідовності буде мати номер nN . Не важко бачити, що у підсумку шукана рекурентна процедура предстане у вигляді (5), причому роль модифікованого фактору забування відіграє $\tilde{\lambda}(N, j+1), j = \overline{0, n-1}, N = 0, 1, 2, \dots$

Теорема доведена.

Введемо позначення для зваженої залишкової суми квадратів $q(N) = Q(\hat{\alpha}(N), N)$. Послідовний перерахунок цього показника паралельно з оцінкою $\hat{\alpha}(N)$ є дуже корисним. У цьому може допомогти наступне твердження.

Теорема 2. Рекурентне співвідношення для зваженої залишкової суми квадратів $q(N)$ для задачі оцінювання нестационарних параметрів α об'єкту (1) методом найменших квадратів зі змінним фактором забування $\lambda(N)$ має вигляд:

$$q(N+1) = \tilde{q}(N+1, n), \quad N = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\tilde{q}(N+1, j+1) = \begin{cases} \tilde{\lambda}(N, j+1) \tilde{q}(N+1, j), & \text{якщо } \delta(N, j+1) > 0, \\ \tilde{\lambda}(N, j+1) \left\{ \tilde{q}(N+1, j) + \frac{1}{\gamma(N, j+1)} \times \right. \\ \times [x_{j+1}(N+2) - f_{j+1}(x(N+1), u(N+1), N+1) \tilde{\alpha}(N+1, j) - \\ \left. - g_{j+1}(x(N+1), u(N+1), N+1)]^2 \right\}, & \text{у протилежному випадку,} \\ j = \overline{0, n-1}, \end{cases}$$

з початковими умовами $\tilde{q}(N+1, 0) = q(N)$, $q(0) = 0$.

Обґрунтування останньої теореми проводиться аналогічно, але вже спираючись на відповідний результат для регресійної моделі з роботи [4].

Література

1. Ljung L. System Identification: Theory for the User. – Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1987.
2. Hsia T.C. System identification. Least-squares methods. – Toronto: Lexington Books, 1977.
3. Слабоспицький О.С. Рекурентний алгоритм оцінювання методом найменших квадратів зі змінним фактором забування при неklasичних припущеннях// Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 1999. – 4. – с. 237-240.
4. Слабоспицький О.С. Рекурентне оцінювання нестационарних параметрів методом найменших квадратів зі змінним фактором забування при неklasичних припущеннях// Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2000. – 1. – с. 282-285.
5. Albert A. Regression and the Moore-Penrose Pseudoinverse. – New York: Academic Press, 1972.

Надійшла до редакції 21.09.2005

УДК 519.21

Юрій Турбал

**Про операторний метод
моделювання спіральних структур**

Пропонується спосіб моделювання спіральних структур, що ґрунтується на апроксимації дії силового поля деякою послідовністю операторних перетворень.

Ключові слова: операторне перетворення, ітераційний процес, спіральна структура.

Yuriy Turbal

About the operator method of spiral structures modeling

In this paper is considered a method of spiral structures modeling which is based on approximation of a power field by the sequence of operator transformations

Key Words: operator transformation, iterative process, spiral structure

1. Вступ. Суть методу моделювання

Поняття про спіралі та вихри виникли в науці дуже давно. Як вказується в статті [2], "повітряні вихри та смерчі, водоверті, зовнішня форма раковини равлика, вир, що утворюється при спуску води в отвір ванни, — що спільного між цими явищами? Все це спіральні просторові структури. Форму спіралі мають як нескінченно великі об'єкти (галактики), так і малі, наприклад, спіральні структури утворюються у відомій хімічній реакції Білоусова-Жаботинського."

В даній роботі пропонується підхід, на основі якого можна моделювати процеси утворення просторових спіральних структур. Суть цього підходу полягає в тому, що дія фізичної сили, яка визначає формування структури, апроксимується деяким оператором A . Отже, в загальному випадку будемо розглядати деякий нелінійний детермінований оператор A , що діє в нормованому просторі X : $A:X \rightarrow X$. В даній роботі зупинимось на випадку, коли $X = \mathbb{R}^3$. В найпростішому випадку оператор A можна вважати стискаючим, тобто для якого виконується співвідношення $\|Ax^1 - Ax^2\| \leq \alpha \|x^1 - x^2\|$, $0 < \alpha < 1$ у деякій області. Однак, в загальному випадку, таке обмеження можна і не розглядати. Принциповим є те, що оператор A визначає силу, що діє на частинку речовини у певній фізичній моделі. Тобто, якщо в початковий момент часу частинка деякої маси m знаходилась в точці x , то під дією деякої сили за один крок ітераційного процесу моделювання вона опиниться в точці Ax . Враховуючи можливість сторонніх впливів, можемо розглянути послідовність:

$$x_n = Ax_{n-1} + \xi(m, x_{n-1}) \quad (1)$$

де $\xi(m, x_{n-1})$ — це деяка випадкова вектор-функція, що визначає можливе відхилення точки в результаті зіткнень та інших зовнішніх впливів. У багатьох фізичних моделях вважають, що ймовірність зіткнень є невеликою. Наприклад, в роботі [3], присвяченій гідродинамічній теорії космічної плазми, вказується, що багато задач космічної фізики призводять до розгляду ситуації, коли зіткнення є несуттєвими. Отже, випадкову складову у послідовності (1) саме в таких моделях може вважати рівною 0 майже скрізь (в загальному випадку впливи, що описуються відповідною функцією, можуть бути дуже суттєвими).

Зрозуміло, що у випадку збіжності, послідовність (1) буде прямувати до нерухомої точки оператора A . Ця нерухома точка задаватиме центр спіральної структури, що моделюється.

2. Знаходження щільності при ітераційних перетвореннях для деяких типів оператора A .

Вибір моделюючого оператора є досить складним питанням. Загальні умови, яким повинні задовольняти моделюючі оператори, будуть розглянуті пізніше. Зараз зупинимось лише на одному конкретному класі операторів. Розглянемо оператор A у вигляді:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 - z^2 + c_x \\ 2xy + c_y \\ 2xz + c_z \end{pmatrix} \quad (2)$$

де c_x, c_y, c_z - деякі параметри.

Отримати саме такий оператор можна, якщо узагальнити ітераційний процес, що використовується при побудові множини Мандельброта [3], на простір R^3 . Тобто можна розглянути послідовність

$$r_{n+1} = r_n^2 + c, \quad (3)$$

де $r_n = x_n + iy_n + jz_n$, $c = c_x + ic_y + jc_z$, i, j - "уявні одиниці", що мають властивості:
 $i^2 = -1, j^2 = -1, ij = ji = 0$.

Виходячи з специфіки підходу, описаного вище, в процесі моделювання будемо на кожній ітерації здійснювати перетворення координат усіх точок оператором A . При цьому будемо вважати, що частинки на початковій ітерації розміщені рівномірно у деякій області. Іншими словами, положення частинки описується випадковим вектором $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, що є рівномірно-розподіленням в області $G_0 = \{(x, y, z) \in R^3, -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$. Під дією оператора A цей випадковий вектор відображається у вектор $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, де

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 + c_x \\ \eta_2 &= 2\xi_1 \xi_2 + c_y \\ \eta_3 &= 2\xi_1 \xi_3 + c_z \end{aligned} \quad (4)$$

Знайдемо сумісну щільність цього вектора.

Нехай $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)^T = \Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Як відомо [4], виконується співвідношення:

$$f_\eta(Y) = f_\xi(\Phi^{-1}(Y)) / \frac{\partial \Phi}{\partial x}(\Phi^{-1}(Y)) \quad (5)$$

де $Y = (y_1, y_2, y_3)$, $f_\xi(Y)$ - сумісна щільність вектора (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , $f_\eta(Y)$ - сумісна щільність вектора (η_1, η_2, η_3) , $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ - якобіан відповідного перетворення, $\Phi^{-1}(Y)$ - обернене перетворення. Однак, в нашому випадку $\Phi^{-1}(Y)$ є неоднозначним і, отже, формула (5)

не може бути використана для знаходження щільності. Розглянемо співвідношення (4). Маємо:

$$\xi_2 = (\eta_2 - cy) / 2\xi_1, \quad \xi_3 = (\eta_3 - cz) / 2\xi_1$$

$$\eta_1 = \xi_1^2 - (\eta_2 - cy)^2 / 4\xi_1^2 - (\eta_3 - cz)^2 / 4\xi_1^2 + cx$$

Звідси

$$4\xi_1^4 + 4\xi_1^2(cx - \eta_1) - (\eta_2 - cy)^2 - (\eta_3 - cz)^2 = 0$$

$$\xi_1 = \pm \sqrt{\eta_1 - cx + \sqrt{(\eta_1 - cx)^2 + (\eta_2 - cy)^2 + (\eta_3 - cz)^2}} / \sqrt{2}$$

Як бачимо, отримали 2 різних значення (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , що відрізняються лише знаком. Позначимо

$$d\tau = \sqrt{dy_1 - cx + \sqrt{(dy_1 - cx)^2 + (dy_2 - cy)^2 + (dy_3 - cz)^2}} / \sqrt{2}$$

Тоді,

$$P\{\eta_1 \in dy_1, \eta_2 \in dy_2, \eta_3 \in dy_3\} = P\{\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 + cx \in dy_1, 2\xi_1\xi_2 + cy \in dy_2, 2\xi_1\xi_3 + cz \in dy_3\} =$$

$$P\{\xi_1 \in d\tau, \xi_2 \in dy_2 - cy / 2d\tau, \xi_3 \in dy_3 - cz / 2d\tau\} + P\{\xi_1 \in -d\tau, \xi_2 \in cy - dy_2 / 2d\tau, \xi_3 \in cz - dy_3 / 2d\tau\}$$

Враховуючи перетворення масштабу, що описується модулем відповідного якобіана та відому сумісну щільність вектора (ξ_1, ξ_2, ξ_3) можемо отримати:

$$f_\eta(Y) = f_\xi(\Phi_+^{-1}(Y)) / \frac{\partial \Phi}{\partial x}(\Phi_+^{-1}(Y)) + f_\xi(\Phi_-^{-1}(Y)) / \frac{\partial \Phi}{\partial x}(\Phi_-^{-1}(Y)), \quad (6)$$

де

$$\Phi_+^{-1}(Y) = \begin{pmatrix} \tau \\ (y_2 - cy) / 2\tau \\ (y_3 - cz) / 2\tau \end{pmatrix}, \quad \Phi_-^{-1}(Y) = \begin{pmatrix} -\tau \\ -(y_2 - cy) / 2\tau \\ -(y_3 - cz) / 2\tau \end{pmatrix}$$

$$\tau = \frac{(y_1 - cx + ((y_1 - cx)^2 + (y_2 - cy)^2 + (y_3 - cz)^2)^{1/2})^{1/2}}{2^{1/2}}$$

Відмітимо, що при перетворенні вектора (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , компоненти якого мають рівномірний розподіл на інтервалі $[-1, 1]$, формула (6) перетворюється у наступну:

$$f_\eta(Y) = 2f_\xi(\Phi_+^{-1}(Y)) / \frac{\partial \Phi}{\partial x}(\Phi_+^{-1}(Y)) \quad (7)$$

Проводячи прості операції диференціювання, які опустимо через громіздкість викладок, отримуємо:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(\Phi_+^{-1}(Y)) = \frac{8\sqrt{\alpha} \sqrt{y_1 - cx} + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{2}},$$

де $\alpha = (y_1 - cx)^2 + (y_2 - cy)^2 + (y_3 - cz)^2$.

Тоді, за співвідношенням (7),

$$f_{\eta}(Y) = 2f_{\xi}(\Phi^{-1}(Y)) / \frac{\partial \Phi}{\partial x}(\Phi^{-1}(Y)) =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{32\sqrt{(y_1 - cx)^2 + (y_2 - cy)^2 + (y_3 - cz)^2} \sqrt{y_1 - cx + \sqrt{(y_1 - cx)^2 + (y_2 - cy)^2 + (y_3 - cz)^2}}}$$

Аналізуючи співвідношення (6), можемо отримати формули і для щільності вектора $A^n \bar{\xi}$ у вигляді:

$$\begin{aligned} f_{A^n \bar{\eta}}(y_1, y_2, y_3) &= 4f_{\eta}(y_1, y_2, y_3)(f_{\eta}(\tau, (y_2 - cy)/2\tau, (y_3 - cz)/2\tau) + 4f_{\eta}(-\tau, -(y_2 - cy)/2\tau, -(y_3 - cz)/2\tau)) \\ f_{A^n \bar{\xi}}(y_1, y_2, y_3) &= 4f_{\xi}(y_1, y_2, y_3)(f_{\xi}(\tau, (y_2 - cy)/2\tau, (y_3 - cz)/2\tau) + 4f_{\xi}(-\tau, -(y_2 - cy)/2\tau, -(y_3 - cz)/2\tau)) \end{aligned} \quad (8)$$

При цьому необхідно визначити область, на якій щільність визначається за співвідношенням (8) і область, де щільність є 0. Щільність вектора (ξ_1, ξ_2, ξ_3) є ненульовою на множині $G_0 = \{(x, y, z) \in R^3, -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$, щільність вектора $\bar{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ – у області

$$G_1 = \{(x^2 - y^2 - z^2 + cx, 2xy + cy, 2xz + cz), (x, y, z) \in G_0 / (cx, cy, cz)\}$$

Аналогічно, щільність вектора $A^n \bar{\xi}$ є ненульовою у області $G_n = \{(x^2 - y^2 - z^2 + cx, 2xy + cy, 2xz + cz), (x, y, z) \in G_{n-1}\}$. Отже, остаточно можемо отримати щільність у вигляді:

$$f_{\eta}(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{32\sqrt{(y_1 - cx)^2 + (y_2 - cy)^2 + (y_3 - cz)^2} \sqrt{y_1 - cx + \sqrt{(y_1 - cx)^2 + (y_2 - cy)^2 + (y_3 - cz)^2}}}, & (y_1, y_2, y_3) \in G_1 \\ 0, & (y_1, y_2, y_3) \notin G_1 \end{cases}$$

$$f_{A^n \bar{\eta}}(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} 4f_{\eta}(y_1, y_2, y_3)(f_{\eta}(\tau, (y_2 - cy)/2\tau, (y_3 - cz)/2\tau) + 4f_{\eta}(-\tau, -(y_2 - cy)/2\tau, -(y_3 - cz)/2\tau)), & \text{якщо } (y_1, y_2, y_3) \in G_{n+1} \\ 0, & \text{якщо } (y_1, y_2, y_3) \notin G_{n+1} \end{cases} \quad (9)$$

Відмітимо, що в процесі моделювання спіральних структур необхідно врахувати відкритість системи у конкретних фізичних інтерпретаціях. Іншими словами, в процесі моделювання і, відповідно, в формулах обрахунку щільності необхідно врахувати факт постійного надходження речовини в систему ззовні. Будемо вважати, що ці надходження здійснюються на кожному етапі відповідного ітераційного процесу і щільність речовини, що надходить в систему описується функцією $g(y_1, y_2, y_3)$.

Позначимо результуючу щільність на ітерації i через $f_i(y_1, y_2, y_3)$. Тоді у припущенні, що кількість речовини (кількість точок в моделі), яка надходить в систему за один етап моделювання є стабільною і дорівнює початковій кількості, отримуємо остаточні співвідношення для щільності:

$$\begin{aligned} f_1(y_1, y_2, y_3) &= g(y_1, y_2, y_3)/2 + f_{\eta}(y_1, y_2, y_3)/2 \\ f_2(y_1, y_2, y_3) &= \frac{1}{3}(g(y_1, y_2, y_3) + f_{\eta}(y_1, y_2, y_3) + f_{A^2 \bar{\eta}}(y_1, y_2, y_3)) \\ &\dots \end{aligned} \quad (10)$$

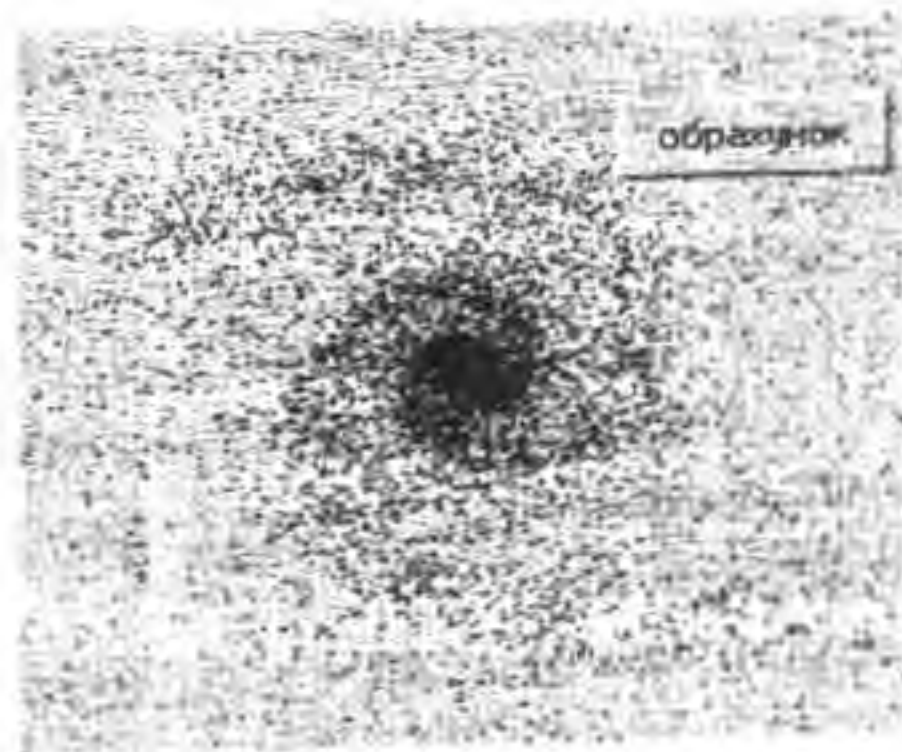
$$f_n(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{n} (g(y_1, y_2, y_3) + \sum_{i=1}^n f_{n,i}(y_1, y_2, y_3))$$

3. Результати роботи програми

На Мал.1 та Мал.2 відповідно представлено фотографію спіральної галактики NGC2997 та модель її спіральної структури, отриману як результат роботи розробленої автором програми. Відповідна програма містить підсистеми вводу даних, оцінки параметрів моделюючого оператора (запрограмовані методи оцінки параметрів, розроблені автором) та безпосереднього моделювання (побудови спіральної структури). Як вже зазначалось вище, відповідна множина, що моделює морфологічну структуру рукавів спіральної галактики, отримується як результат послідовної дії оператора A на всі точки початкової множини, рівномірно розподіленої в деякій прямокутній області. В даному випадку проведено 100 ітерацій. Щільність речовини в рукавах описується аналітично за допомогою співвідношення (10).



Мал.1



Мал.2

На Мал.2 представлено плоску структуру, оскільки, як відомо, галактика NGC2997 є плоскою. Відмітимо, що автором розроблений метод, який дозволяє для заданої спіральної структури вибирати параметри оператора з умови мінімальної відстані базової множини та моделі в деякій спеціальній метриці. Однак, опис та обґрунтування методів оцінки параметрів моделюючих операторів буде предметом наступних публікацій та досліджень.

Література

1. В.Б. Баранов, К.В. Краснобаев Гидродинамическая теория космической плазмы.- М.: Наука, 1977
2. Е.Понизовкина Единство мира за витком спирали. //Наука Урала, №6, 2003
3. В. В. Mandelbrot Fractal Geometry of Nature. W. H. Freeman & Co., 2000
4. Боровков А.А. Теория вероятностей.-М.: Едиторал УРСС, 2003

Надійшла до редакції 11.10.2005

УДК 517.988

Володимир В.Хлобистов *

Олена Ф.Кашпур

Тетяна М.Поповічева

Volodimir V. Khlobystov *

Olena F. Kashpur

Tetyana M. Popovicheva

**Операторні інтерполянти в
гільбертовому просторі
асимптотично точні на поліномах**

**Operator interpolants in Hilbert
space asymptotically accurate on
polynomials**

В гільбертовому просторі розглянуто інтерполяційні поліноми Лагранжа та Ерміта, у випадку заданих значень нелінійного оператора та його диференціалів Гато у вузлах до певного порядку включно. Такі інтерполянти асимптотично зберігають поліноми відповідного степеня.

In Hilbert space Lagrange and Hermite interpolation polynomial in a case of given the nonlinear operator values and Gateaux differentials of definite order in nodes are considered. These interpolants asymptotically retains operator polynomials of the same degree.

Ключові слова: нелінійний оператор, гільбертовий простір, операторні поліноми Лагранжа та Ерміта, диференціал Гато.

Key words: nonlinear operator, Hilbert space, operator Lagrange and Hermite polynomial, Gateaux differential.

khl@i.com.ua

moe@unicyb.kiev.ua

Операторне інтерполювання відноситься до одного із важливих методів розв'язання задач про наближення операторів. Загальна теорія поліноміального операторного інтерполювання побудована в [1, 2]. Відмітимо, що в нескінченновимірному гільбертовому просторі інтерполяційна задача в загальному випадку має множину розв'язків, а знаходження інтерполянтів, що зберігають поліноми відповідного степеня пов'язано з певними труднощами. В [3, 4] наведено результати про побудову інтерполянтів типу Ньютона, що є точними на поліномах того ж степеня, але реалізація інтерполяційних формул вимагає існування варіацій чи похідних вищих порядків та відповідних кратних інтегралів Рімана-Стільтєса по оператору скалярного аргументу. Властивість збереження інтерполяційними поліномами багаточленів того ж степеня є дуже

важливою для прикладних задач, а саме таких, як: побудова квадратурних формул при інтегруванні за мірою; одержання оцінок точності інтерполювання та теорем про збіжність послідовності інтерполянтів при зростанні числа вузлів до оператора, що інтерполюємо, а також оцінок, які використовують нерівність Лебега та ін. В статті буде розглянуто операторний інтерполяційний поліном іншої структури [5], що асимптотично (при збільшенні числа вузлів) зберігає багаточлени відповідного степеня та має мінімальну норму серед всієї множини розв'язків поставленої задачі інтерполяції [2]. При цьому для його побудови необхідно знати лише інформацію про вузлові значення оператора, якщо розглядаємо задачу типу Лагранжа, а при розв'язанні задачі типу Ерміта – значення диференціалів Гато у вузлах до певного порядку за заданими напрямками. Зауважимо, що на практиці поширені нелінійні системи поліноміального виду [6]. Як зазначалось вище, інтерполянт із [5] асимптотично (множина вузлів є зліченою) зберігає поліноми, але для задач апроксимації операторів в загальному випадку задається точність наближення, а отже для її забезпечення можна визначити необхідне число вузлів і не має потреби вимагати нескінченного його зростання.

Нехай X, Y – гільбертові простори (X – сепарабельний), Π_n – множина операторних поліномів $P_n: X \rightarrow Y$ степеня n :

$$\Pi_n = \{P_n(x): P_n(x) = L_0 + L_1x + L_2x^2 + \dots + L_nx^n\}, \quad (1)$$

де $L_0 \in Y$, $L_kx^k: X \rightarrow Y$ – k -а операторна степінь, що отримана із k - лінійної неперервної симетричної операторної форми $L_k(v_1, v_2, \dots, v_k): X^k \rightarrow Y$ коли $v_1 = v_2 = \dots = v_k = x$, $k = \overline{1, n}$. Надалі, нехай $\{e_i\}_{i=1}^m \subset X$ – елементи базисної ортонормованої системи в X , а множину $\mathfrak{Z}(m)$, що побудована за системою елементів $e_i, i = \overline{1, m}$, визначимо таким чином $\mathfrak{Z}(m) = \{0, e_{i_1} + e_{i_2} + \dots + e_{i_k}, k = \overline{1, n}, i_j = \overline{1, m}, m \geq n\}$. Число елементів множини

$\mathfrak{Z}(m)$ дорівнює $1 + N$, $N = \sum_{k=1}^n C_{m+k-1}^k$. Оператор $F: X \rightarrow Y$, в загальному випадку

нелінійний, заданий своїми значеннями $F(x_i) \in Y, i = \overline{0, N}$ на множині $\mathfrak{Z}(m)$.

Інтерполяційна задача типу Лагранжа полягає у наступному: потрібно знайти такий поліном $P_{mn}: X \rightarrow Y$, що відповідає умовам

$$P_{mn}(x_i) = F(x_i), \quad i = \overline{0, N}, \quad x_i \in \mathfrak{Z}(m). \quad (2)$$

Узагальнюючи метод ортогональних моментів [5], будемо шукати інтерполянт $P_{mn}(x)$ на послідовності вузлів $x_i \in \mathfrak{Z}(m), i = \overline{0, N}$ у вигляді

$$P_{mn}(x; F) = \sum_{k=0}^n \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^m a_{i_1 i_2 \dots i_k}(F)(x, e_{i_1})(x, e_{i_2}) \dots (x, e_{i_k}), \quad (3)$$

де невідомі коефіцієнти $a_{i_1 i_2 \dots i_k}(F) \in Y$ – симетричні відносно своїх індексів $(\cdot, \cdot)$ – скалярний добуток в X . Інтерполянт (3) є розв'язком поставленої задачі, якщо $a_{i_1 i_2 \dots i_k}(F), k = \overline{1, n}$ визначаються за рекурентними співвідношеннями [5]:

$$\begin{aligned} a_{i_1 i_2 \dots i_n}(F) = & \frac{1}{n!} \{ F(e_{i_1} + e_{i_2} + \dots + e_{i_n}) + \\ & + [F(e_{i_1} + e_{i_2} + \dots + e_{i_{n-1}}) + \dots + F(e_{i_2} + e_{i_3} + \dots + e_{i_n})] - \\ & - [F(e_{i_1} + e_{i_2} + \dots + e_{i_{n-2}}) + \dots + F(e_{i_3} + e_{i_4} + \dots + e_{i_n})] + \dots + \\ & + (-1)^{n-1} [F(e_{i_1}) + F(e_{i_2}) + \dots + F(e_{i_n})] + (-1)^n F(0) \}, \end{aligned} \quad (4)$$

$a_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}(F)$ знаходяться за формулою (4) із заміною n на $n-1$, значень $F(x)$ на

множині вузлів $\mathfrak{Z}(m)$ на $F(x) - \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^m a_{i_1 i_2 \dots i_n}(F)(x, e_{i_1})(x, e_{i_2}) \dots (x, e_{i_n})$ і т.д.

Відмітимо, коефіцієнти $a_{i_1 i_2 \dots i_k}(F)$, число яких дорівнює $N+1$, можна знайти із системи (2), що складається із $N+1$ рівняння. При цьому невідомі, визначені за допомогою рекурентної процедури та із системи (2) співпадають [1].

Нехай оператор $F(x) \equiv F_n(x) \in \Pi_n, F_n(x) = L_0 + L_1 x + L_2 x^2 + \dots + L_n x^n$. На підставі (3), (4), дістанемо, що поліном $P_{mn}(x) \equiv F_n(x)$ на підпросторі, що

утворений базисом $\{e_i\}_{i=1}^m \subset X$. А на всьому просторі X інтерполянт співпадає з $F_n(x)$ асимптотично ($m \rightarrow \infty$), оскільки $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ – ортонормований базис в X , а $a_{i_1 i_2 \dots i_k}(F) \rightarrow L_k(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})$ при $m \rightarrow \infty$. Таким чином має місце наступне

Твердження 1. *Послідовність інтерполяційних поліномів типу Лагранжа (3) ($m = n, n+1, \dots$) має властивість*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P_{mn}(x; F_n) = F_n(x), \quad \forall x \in X. \quad (5)$$

Відмітимо, що інтерполянт (3) – єдиний на множині поліномів (3), має мінімальну норму серед всієї множини інтерполяційних поліномів [2], що є розв'язками поставленої задачі і при цьому відсутній зв'язок між числом вузлів та степеню полінома (числа m та n не пов'язані між собою), а для побудови (3) необхідно знати лише інформацію про значення оператора у вузлах.

Надалі розглянемо операторну інтерполяційну задачу типу Ерміта: потрібно знайти такий поліном $P_{mn}: X \rightarrow Y$ для якого виконуються наступні умови

$$P_{mn}^{(k_i)}(y_i; F) z_k^{(i)} z_{k-1}^{(i)} \dots z_1^{(i)} = F^{(k_i)}(y_i) z_k^{(i)} z_{k-1}^{(i)} \dots z_1^{(i)}, \quad k = 0, 1, \dots, k_i, \quad (6)$$

$$0 \leq k_i \leq n, \quad i = \overline{1, s}, \quad k_1 + k_2 + \dots + k_s = 1 + N, \quad y_i, z_k^{(i)}, z_{k-1}^{(i)}, \dots, z_1^{(i)} \in \mathfrak{I}(m),$$

де $F^{(k_i)}(y_i) z_k^{(i)} z_{k-1}^{(i)} \dots z_1^{(i)} = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2 \dots \partial \alpha_k} F(y_i + \sum_{j=1}^k \alpha_j z_j^{(i)}) \right|_{\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0}$ – диференціал

Гато порядку k_i у вузлі y_i за заданими напрямками $z_k^{(i)}, z_{k-1}^{(i)}, \dots, z_1^{(i)}$. Наведемо частинні випадки задачі (6). Нехай, наприклад, $n = 2, m = 3$, тоді

$$\begin{aligned} P_{mn}(0) &= F(0), & P'_{mn}(0)e_3 &= F'(0)e_3, \\ P_{mn}(e_1) &= F(e_1), & P'_{mn}(e_1)e_1 &= F'(e_1)e_1, \\ P_{mn}(e_2) &= F(e_2), & P'_{mn}(e_2)e_2 &= F'(e_2)e_2, \\ P_{mn}(e_3) &= F(e_3), & P'_{mn}(e_3)e_2 &= F'(e_3)e_2, \\ P_{mn}(e_1 + e_2) &= F(e_1 + e_2), & P'_{mn}(e_1 + e_2)e_3 &= F'(e_1 + e_2)e_3. \end{aligned} \quad (7)$$

Для розв'язання поставлених інтерполяційних задач типу Ерміта будемо використовувати інтерполянт вигляду (3), тобто необхідно знайти всі невідомі коефіцієнти $a_{i_1 i_2 \dots i_k}(F)$, що містяться в $P_{32}(x)$, використовуючи умови (7).

Дістанемо: $a_0(F) = F(0)$, $a_3 = F'(0)e_3$, $a_{33}(F) = F(e_3) - F'(0)e_3 - F(0)$,

$$a_{ii}(F) = F'(e_i)e_i - F(e_i) + F(0), \quad a_i(F) = F(e_i) - a_{ii}(F) - F(0), i = 1, 2,$$

$$a_{23}(F) = \frac{1}{2}[F'(e_3)e_2 - a_2(F)], \quad a_{13}(F) = \frac{1}{2}[F'(e_1 + e_2)e_3 - a_3(F) - 2a_{12}(F)].$$

Таким чином, знайдено всі $a_{i_1 i_2 \dots i_k}(F)$, $1 \leq i_j \leq 3$, $k = \overline{0, 2}$ із (3). Аналогічна задача (коли задані значення оператора, що інтерполюємо, у вузлах та його значення перших диференціалів Гато першого порядку для $n=2$ і довільного m) розв'язана в [7], при цьому, використовуючи розв'язок відповідної системи рівнянь (6), були побудовані рекурентні формули для знаходження $a_{i_1 i_2 \dots i_k}(F)$.

Нехай, надалі, $n=3$, $m=3$ та задані наступні значення оператора:

$F(e_i)$, $F'(e_i)e_i$, $F''(e_i)e_i^2$, $i=1, 2, 3$, $F(e_i + e_{i+1})$, $F'(e_i + e_{i+1})e_i$, $F''(e_i + e_{i+1})e_{i+1}^2$,
 $i=1, 2$, $F(e_1 + e_3)$, $F'(e_1 + e_3)e_1$, $F''(e_1 + e_3)e_3^2$, $F(0)$, $F(e_1 + e_2 + e_3)$. Для побудови інтерполяційного полінома $P_{33}(x)$ (потрібно визначити $a_{i_1 i_2 \dots i_k}(F)$, що містяться в (3)), як і вище, розв'язуємо систему (6).

Таких прикладів постановок інтерполяційної задачі типу Ерміта (6) можна навести безліч. Для розв'язання даної задачі в загальному випадку не існує рекурентних співвідношень для знаходження невідомих коефіцієнтів із (3), але їх визначення зводиться до розв'язання відповідної системи рівнянь (6). При цьому необхідно, щоб кількість інтерполяційних умов співпадала з числом невідомих коефіцієнтів $a_{i_1 i_2 \dots i_k}(F)$, що дорівнює $N+1$, а розв'язок системи (6) був єдиним. Враховуючи структуру інтерполянта (3) і міркування викладені вище, одержимо, що наведені результати для послідовності інтерполяційних поліномів типу Лагранжа, будуть справедливими і в цьому випадку. Має місце

Твердження 2. *Послідовність інтерполяційних поліномів типу Ерміта (3) ($m = n, n+1, \dots$) має властивість (5).*

Твердження 1 та 2 є істотними при розв'язанні прикладних задач, оскільки при збільшенні числа вузлів, побудовані інтерполянти асимптотично зберігають багаточлени відповідного степеня, що є важливим для одержання оцінок точності.

Надалі, нехай μ – гаусова міра на X [8], перший момент якої дорівнює нулю, а другий – обмежений; B – кореляційний оператор цієї міри, ядерний і $\text{Ker} B = \emptyset$, H – гільбертовий простір аналітичних за Гато операторів із скалярним добутком

$$(P, Q)_H = \sum_{k=0}^{\infty} \int_X \dots \int_X \left(\frac{1}{k!} P^{(k)}(0) v_k v_{k-1} \dots v_1, \frac{1}{k!} Q^{(k)}(0) v_k v_{k-1} \dots v_1 \right)_Y \times \mu(dv_k) \mu(dv_{k-1}) \dots \mu(dv_1), \quad (8)$$

де $P, Q \in H$, $(\cdot, \cdot)_Y$ – скалярний добуток в Y . Розглянемо оператор $F(x) \in H$.

Відомо [1], що $P_n(x) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}x + \frac{F''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}x^n$ є поліномом найкращого наближення до $F(x)$ у метриці простору H . Якщо задані значення оператора і його похідні Гато в нулі до n -го порядку включно: $F(0), F'(0)e_{i_1}, F''(0)e_{i_1}e_{i_2}, \dots, F^{(n)}(0)e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_n}$, $1 \leq i_j \leq m$, то інтерполяційний поліном Ерміта

$$P_{mn}^I(x) = \sum_{k=0}^n \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^m \frac{F^{(k)}(0)e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_k}}{k!} (x, e_{i_1})(x, e_{i_2})\dots(x, e_{i_k}) \quad (9)$$

як показано в роботі [9], асимптотично зберігає поліноми відповідного степеня, тобто $\lim_{m \rightarrow \infty} P_{mn}^I(x) = P_n(x)$, а оскільки $P_n(x)$ – поліном найкращого наближення для аналітичного за Гато оператора, то формула (9) є наближенням до $P_n(x)$.

Зауваження. Для поліноміальних операторів інтерполянти типу Лагранжа, Ерміта, що визначаються формулою (3), та інтерполянт (9) співпадають між

собою, якщо для визначення невідомих коефіцієнтів задана $N + 1$ інтерполяційна умова і відповідна система має єдиний розв'язок. Такі інтерполянти зберігають багаточлени відповідного степеня в асимптотиці. Для нелінійних операторів загальної структури інтерполяційні поліноми (3), (9) – різні.

ЛІТЕРАТУРА

1. В.Л.Макаров, В.В.Хлобыстов, Л.А.Янович. Интерполирование операторов. Киев „Наукова думка”. – 2000. – 468с.
2. В.Л.Макаров, В.В.Хлобыстов. Основы теории полиномиального операторного интерполирования. НАН України. Ін-т математики. – Київ, 1998. – 278с.
3. Егоров А.Д., Соболевский П.Н., Янович Л.А. Приближенные методы вычисления континуальных интегралов. – Минск. Наука и техника, 1985. – 310с.
4. Fillipson L. Kergin interpolation in Banach Spaces // Journal of Approximation Theory 127(2004). – P.108–123.
5. В.В.Хлобыстов, Е.Ф.Кашпур. К задаче интерполирования полиномиальных операторов // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – №3. – С.102 – 108.
6. W.A.Porter. An overview of polynomic system theory. // IEEE Proc. Special issue on system theory. – v.64, №1. – 1976. – P 18 – 26.
7. В.В.Хлобыстов, О.Ф.Кашпур. Операторний інтерполянт типу Ерміта в гільбертовому просторі, що є асимптотично точним на поліномах.// Вісник Київського університету: серія фізико-математичні науки. – 2005. – №2. – С.316– 324.
8. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. –т.1, Москва, Наука. – 1971. – 664с.
9. Хлобыстов В.В., Поповичева Т.Н. Об интерполяционном приближении дифференцируемых операторов в гильбертовом пространстве. // УМЖ. – 2005, (в печати).

Ольга Ф. Швець¹

Використання методу структурно-параметричної оптимізації в задачах цифрової обробки інформації

Запропоновано алгоритм апроксимації даних на базі методу структурно-параметричної оптимізації. Проведено чисельний експеримент на серії звукових сигналів, який показує ефективність роботи алгоритму.

Ключові слова: структурно-параметрична оптимізація, апроксимація.

¹ E-mail: olgasv@univ.kiev.ua

Велику кількість задач з цифрової обробки можна звести до апроксимації функції дискретної або неперервної змінної [1-3]. При цьому система базових функцій, на основі якої необхідно проводити апроксимацію, часто задається в структурно-параметричній формі. Задача полягає в тому, щоб в заданих структурах найкращим чином апроксимувати сигнал. Якщо послідовність структурно заданих функцій та точність апроксимації відомі, то можна ставити задачу не тільки про оптимальний вибір параметрів, а й про визначення найменшої кількості апроксимуючих функцій.

Аналіз показує, що в багатьох випадках в якості структурно-параметричної системи функцій доцільно вибирати гармонічні послідовності. Це стосується тих задач, в яких сигнали мають приховані періодичності. Наприклад, при розпізнаванні мовних сигналів. Для визначення літер необхідно знати не лише частотно-фазові характеристики, а й амплітуду затухання гармонік.

Цікавою проблемою, яка розв'язується на основі методу структурно-параметричної оптимізації [4], є оптимальне розбиття даного інтервалу, на якому розглядається функція, на підінтервали з тим, щоб найкращим чином представити сигнал або ж визначити найменшу кількість параметрів для апроксимуючих функцій.

1. Загальний підхід.

Опишемо алгоритм апроксимації неперервного на відрізку $[t_0, T]$ сигналу $f(t)$ на базі системи структурно заданих диференційованих за параметрами функцій

Olga F. Shvets¹

Using the structurally - parametric optimization method for digital data processing problems.

The new algorithm of data approximating is offered. This algorithm is based on structurally - parametric optimization - method. The numerical experiment for audio signals was performed.

Key Words: structurally - parametric optimization, approximation

$$g_i(t, \alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ik_i}) = g_i(t, \alpha_i), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

де $t \in [t_0, T]$, i – номер базисної функції $\alpha_i = (\alpha_{i1} \ \alpha_{i2} \ \dots \ \alpha_{ik_i})^T$ – k_i - вимірний вектор-параметрів, який вибирається з умови найкращої апроксимації початкового сигналу $f(t)$, $g_i(t, \alpha_i)$ – відомі з точністю до параметрів α_i функції неперервні за t та неперервно-диференційовані за компонентами вектора параметрів α_i .

Запропонований алгоритм являється ітераційним. Задача найкращого представлення сигналу на кожному кроці полягає в мінімізації деякої функції цілі від заданих параметрів

$$\min_{\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \dots, \alpha_{jk_j}} \Phi_j(\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \dots, \alpha_{jk_j}) = \min_{\alpha_j} \Phi_j(\alpha_j), \quad j = 1, 2, \dots, i = \overline{1, I}, \quad (1.2)$$

де i – номер кроку ітераційної процедури, I – максимальна кількість кроків.

Апроксимацію заданого сигналу знаходимо в наступному вигляді

$$\hat{f}(t) = \sum_{j=1}^I c_j \cdot g_j(t, \alpha_j), \quad (1.3)$$

де I – кількість ітерацій, яку проходить алгоритм для досягнення необхідної точності апроксимації.

Для оптимізації цільової функції (1.2) можна використовувати різні методи градієнтного спуску [5]. При цьому необхідно визначати вектор-градієнт функції, яку мінімізуємо, компонентами якого будуть частинні похідні по введеним параметрам $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ik_i}$.

Важливою особливістю даного алгоритму є й те, що в процесі апроксимації вхідних даних будується система ортонормованих функцій, яка може використовуватись для цифрової обробки подібних за структурною формою сигналів.

Опишемо ітераційну процедуру алгоритму, на кожному кроці якого виконується оптимальний вибір параметрів α_i так, щоб найкращим чином апроксимувати вхідний сигнал.

1 крок. Для найкращого представлення вхідного сигналу $f(t)$, $t \in [t_0, T]$ структурно-параметричними функціями (1.2) на першому кроці необхідно розв'язати наступну задачу оптимізації

$$\Phi_1(\alpha_1) = \int_{t_0}^T (f_1(t) - \varphi_1(t, \alpha_1))^2 dt \rightarrow \min_{\alpha_1}, \quad (1.4)$$

де $\varphi_1(t, \alpha_1) = g_1(t, \alpha_1)$.

Параметри $\alpha_1^{opt} = (\alpha_{11}^{opt}, \alpha_{12}^{opt}, \dots, \alpha_{1k_1}^{opt})$ знаходимо з умови мінімуму (1.4), застосовуючи процедуру градієнтного спуску [5].

По знайдений на першому кроці функції $\varphi_1^{opt}(t) = \varphi_1(t, \alpha_1^{opt})$, будемо ортонормовану функцію $\psi_1(t) = \gamma_1 \cdot \varphi_1^{opt}(t)$, де коефіцієнт нормування $\gamma_1: \int_{t_0}^T \psi_1^2(t) dt = 1$.

Тоді, найкраща апроксимація функції $f(t)$ на першому кроці алгоритму має вид

$$\hat{f}_1(t) = c_1 \cdot \psi_1(t) = \int_{t_0}^T f_1(\tau) \cdot \psi_1(\tau) d\tau \cdot \psi_1(t). \quad (1.5)$$

2 крок. На другому кроці зменшуємо нев'язку між сигналом і знайденим наближенням (1.5), тобто апроксимуємо функцію

$$f_2(t) = f_1(t) - \hat{f}_1(t) = f_1(t) - \int_{t_0}^T f_1(\tau) \cdot \psi_1(\tau) d\tau \cdot \psi_1(t) \text{ по параметрично заданій функції}$$

$$\varphi_2(t, \alpha_2) = g_2(t, \alpha_2) - \int_{t_0}^T g_2(\tau, \alpha_2) \cdot \psi_1(\tau) d\tau \cdot \psi_1(t).$$

Тобто функція цілі (1.2) матиме вигляд

$$\Phi_2(\alpha_2) = \int_{t_0}^T (f_2(t) - \varphi_2(t, \alpha_2))^2 dt \rightarrow \min_{\alpha_2}, \quad (1.6)$$

По обчисленим параметрам $\alpha_2^{opt} = (\alpha_{21}^{opt}, \alpha_{22}^{opt}, \dots, \alpha_{2k_2}^{opt})$ та оптимальній функції $\varphi_2^{opt}(t) = \varphi_2(t, \alpha_2^{opt})$ будемо ортонормовану до $\psi_1(t)$ функцію $\psi_2(t) = \gamma_2 \cdot \varphi_2^{opt}(t)$, де коефіцієнт нормування γ_2 визначається з умови: $\int_{t_0}^T \psi_2^2(t) dt = 1$.

Слід зауважити, що знайдені функції $\psi_1(t)$ та $\psi_2(t)$ є ортонормованими, а апроксимація вхідного сигналу $f(t)$ на даному кроці буде

$$\hat{f}_2(t) = c_1 \cdot \psi_1(t) + c_2 \cdot \psi_2(t) = \int_{t_0}^T f_1(\tau) \cdot \psi_1(\tau) d\tau \cdot \psi_1(t) + \int_{t_0}^T f_2(\tau) \cdot \psi_2(\tau) d\tau \cdot \psi_2(t).$$

(i+1) крок. Продовжуючи процедуру на $(i+1)$ кроці наближуємо функцію

$$f_{i+1}(t) = f_i(t) - \hat{f}_i(t) = f_i(t) - \int_{t_0}^T f_i(\tau) \cdot \psi_i(\tau) d\tau \cdot \psi_i(t)$$

в класі структурно заданих функцій (1.1) з умови мінімуму середньоквадратичної нев'язки

$$\Phi_{i+1}(\alpha_{i+1}) = \int_{t_0}^T (f_{i+1}(t) - \varphi_{i+1}(t, \alpha_{i+1}))^2 dt \rightarrow \min_{\alpha_{i+1}}, \quad (1.7)$$

$$\text{де } \varphi_{i+1}(t, \alpha_{i+1}) = g_{i+1}(t, \alpha_{i+1}) - \sum_{l=1}^i \int_{t_0}^T g_{i+1}(\tau, \alpha_{i+1}) \cdot \psi_l(\tau) d\tau \cdot \psi_l(t).$$

Визначивши оптимальні параметри $\alpha_{i+1}^{opt} = (\alpha_{i+1,1}^{opt}, \alpha_{i+1,2}^{opt}, \dots, \alpha_{i+1,k_{i+1}}^{opt})$ знаходимо оптимальну $\varphi_{i+1}^{opt}(t) = \varphi_{i+1}(t, \alpha_{i+1}^{opt})$ та ортонормовану до $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_i(t)$ функцію $\psi_{i+1}(t) = \gamma_{i+1} \cdot \varphi_{i+1}^{opt}(t) : \int_{t_0}^T \psi_{i+1}^2(t) dt = 1$.

Тоді найкраще представлення вхідного сигналу $f(t)$ на $(i+1)$ кроці має наступний вид

$$\hat{f}_{i+1}(t) = \sum_{l=1}^{i+1} c_l \cdot \psi_l(t) = \sum_{l=1}^{i+1} \int_{t_0}^T f_l(\tau) \cdot \psi_l(\tau) d\tau \cdot \psi_l(t). \quad (1.8)$$

Таку процедуру продовжуємо доти, доки не досягнемо заданої наперед точності апроксимації або число ітерацій не перевищує їх граничної кількості.

2. Частинний випадок.

В якості частинного випадку приведемо алгоритм розв'язування задачі гармонічної апроксимації сигналів як частинний випадок розглянутого підходу. Постановка задачі. Нехай $f(t)$ – заданий вхідний сигнал, ε – задана наперед точність апроксимації. Розглянемо клас багаточастотних гармонічних функцій виду

$$g_i(t, a_i, b_i, w_i, c_i) = \sum_{k=1}^{k_i} (a_{ik} \cdot \sin(w_{ik} \cdot t) + b_{ik} \cdot \cos(w_{ik} \cdot t)) + c_i, \quad (2.1)$$

де $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik_i})$, $b_i = (b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{ik_i})$, $w_i = (w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{ik_i})$, $k_i \in \{1, K\}$ – кількість гармонік в наближувачій функції, K – їх гранична кількість, $i \in \{1, I\}$ – номер ітерації алгоритму, I – максимально можлива кількість ітерацій.

Задача полягає в тому, щоб в заданому параметричному класі функцій за мінімальну кількість кроків апроксимувати сигнал з точністю ε . При цьому, кількість апроксимуючих функцій повинна бути мінімальною.

Далі пропонується одна з можливих ітераційних процедур розв'язування поставленої задачі [6]. Вона включає в себе дві підзадачі: перша – на кожному кроці визначення оптимальної кількості гармонік в системі базисних функцій (2.1), друга – визначення апроксимації з заданою наперед точністю та обчислення мінімальної кількості ітерацій, при якій така точність досягається.

1 крок. На першому етапі апроксимуємо функцію $f_1(t) = f(t)$ мінімізуючи нев'язку

$$\Phi_1^k(a_i, b_i, w_i, c_i) = \int_{t_0}^T (f_1(t) - \varphi_1(t, a_i, b_i, w_i, c_i))^2 dt \rightarrow \min_{a_i, b_i, w_i, c_i}, \quad (2.2)$$

де $\varphi_1(t, a_i, b_i, w_i, c_i) = g_1(t, a_i, b_i, w_i, c_i)$, $k_i \in \{1, K\}$.

Для оптимізації функції цілі (2.2) за параметрами a_i, b_i, w_i, c_i застосовуємо ітераційну процедуру градієнтного спуску, яка при певних умовах [5] збігається до оптимального розв'язку поставленої задачі.

Після прогонки градієнтного методу для $k_i \in \{1, K\}$ отримуємо серію

оптимальних розв'язків. Вибір $k_i^{opt} \in \{1, K\}$ - оптимальної, в сенсі мінімізації нев'язки (2.2), кількості гармонік, можна здійснити, наприклад, використовуючи Фур'є перетворення сигналу, або розв'язуючи одновимірну оптимізаційну задачу $\min_k \Phi_i^k(\tilde{a}_i^{opt}, \tilde{b}_i^{opt}, \tilde{w}_i^{opt}, \tilde{c}_i^{opt})$, (2.3)

де $\tilde{a}_i^{opt} = (a_{i1}^{opt}, a_{i2}^{opt}, \dots, a_{ik_i^{opt}}^{opt})$, $\tilde{b}_i^{opt} = (b_{i1}^{opt}, b_{i2}^{opt}, \dots, b_{ik_i^{opt}}^{opt})$, $\tilde{w}_i^{opt} = (w_{i1}^{opt}, w_{i2}^{opt}, \dots, w_{ik_i^{opt}}^{opt})$, $k_i \in \{1, K\}$.

За обчисленою оптимальним чином функцією

$$\varphi_1(t, a_1^{opt}, b_1^{opt}, w_1^{opt}, c_1^{opt}) = \sum_{s=1}^{k_1^{opt}} (a_{1s}^{opt} \cdot \sin(w_{1s}^{opt} \cdot t) + b_{1s}^{opt} \cdot \cos(w_{1s}^{opt} \cdot t)) + c_1 = \varphi_1^{opt}(t),$$

в якій $a_1^{opt} = (a_{11}^{opt}, a_{12}^{opt}, \dots, a_{1k_1^{opt}}^{opt})$, $b_1^{opt} = (b_{11}^{opt}, b_{12}^{opt}, \dots, b_{1k_1^{opt}}^{opt})$, $w_1^{opt} = (w_{11}^{opt}, w_{12}^{opt}, \dots, w_{1k_1^{opt}}^{opt})$

знаходимо ортонормовану функцію $\psi_1(t) = \gamma_1 \cdot \varphi_1^{opt}(t)$, де коефіцієнт нормування

$$\gamma_1 : \int_{t_0}^T \psi_1^2(t) dt = 1.$$

Тоді, апроксимація сигналу $f(t)$ на першому кроці дорівнює

$$\hat{f}_1(t) = \int_{t_0}^T f_1(\tau) \cdot \psi_1(\tau) d\tau \cdot \psi_1(t).$$

(i+1) крок. На наступних кроках апроксимується функція

$f_{i+1}(t) = f_i(t) - \hat{f}_i(t) = f_i(t) - \int_{t_0}^T f_i(\tau) \cdot \psi_i(\tau) d\tau \cdot \psi_i(t)$ на базі параметрично заданої функції

$$\varphi_{i+1}(t, a_{i+1}, b_{i+1}, w_{i+1}, c_{i+1}) = g_{i+1}(t, a_{i+1}, b_{i+1}, w_{i+1}, c_{i+1}) - \sum_{l=t_0}^T \int g_{i+1}(\tau, a_{i+1}, b_{i+1}, w_{i+1}, c_{i+1}) \cdot \psi_l(\tau) d\tau \cdot \psi_l(t).$$

Тоді цільова функція має вид

$$\Phi_{i+1}^{k_{i+1}}(a_{i+1}, b_{i+1}, w_{i+1}, c_{i+1}) = \int_{t_0}^T (f_{i+1}(t) - \varphi_{i+1}(t, a_{i+1}, b_{i+1}, w_{i+1}, c_{i+1}))^2 dt \rightarrow \min_{a_{i+1}, b_{i+1}, w_{i+1}, c_{i+1}}. \quad (2.4)$$

Виконуючи описані вище дії (2.3) знайдемо оптимальні параметри $a_{i+1}^{opt}, b_{i+1}^{opt}, w_{i+1}^{opt}, c_{i+1}^{opt}$ та k_{i+1}^{opt} , а по них оптимальну та ортонормовану функції відповідно

$$\varphi_{i+1}^{opt}(t) = \varphi_{i+1}(t, a_{i+1}^{opt}, b_{i+1}^{opt}, w_{i+1}^{opt}, c_{i+1}^{opt}) = \sum_{s=1}^{k_{i+1}^{opt}} (a_{i+1,s}^{opt} \cdot \sin(w_{i+1,s}^{opt} \cdot t) + b_{i+1,s}^{opt} \cdot \cos(w_{i+1,s}^{opt} \cdot t)) + c_{i+1}^{opt} - \sum_{l=t_0}^T \int \left(\sum_{s=1}^{k_{i+1}^{opt}} (a_{i+1,s}^{opt} \cdot \sin(w_{i+1,s}^{opt} \cdot t) + b_{i+1,s}^{opt} \cdot \cos(w_{i+1,s}^{opt} \cdot t)) + c_{i+1}^{opt} \right) \cdot \psi_l(\tau) d\tau \cdot \psi_l(t),$$

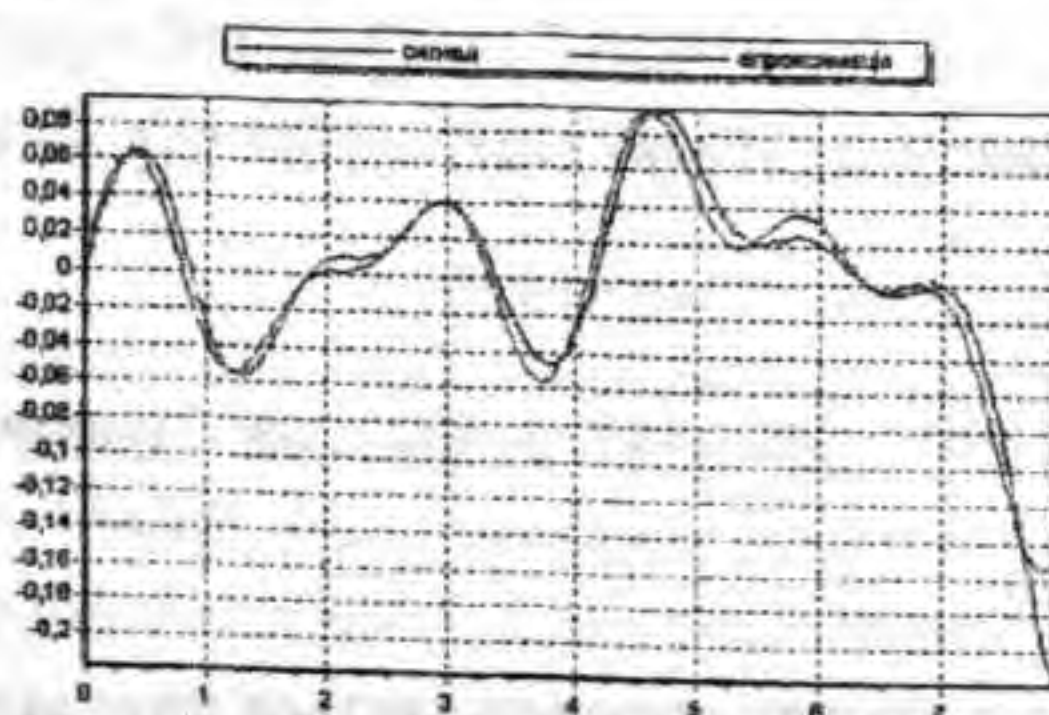
$$\psi_{i+1}(t) = \gamma_{i+1} \cdot \varphi_{i+1}^{opt}(t), \text{ де } \gamma_{i+1} : \int_{t_0}^T \psi_{i+1}^2(t) dt = 1.$$

Найкраща апроксимація початкового сигналу $f(t)$ на $(i+1)$ кроці визначається формулою (1.8).

Для дослідження ефективності розглянутого вище алгоритму було розроблене програмне забезпечення в середовищі C++ Builder 5.0 та проведено чисельний експеримент. Апроксимація проводилась на базі функцій (2.1) з наступними обмеженнями: $k_1=1$, $\varepsilon=0,04$, $I=7$. В якості даних використовувались як значення складних функцій на деякому інтервалі, так і реальні звукові сигнали.

Нижче приведені результати роботи алгоритму для звуків, взятих з різних наголошених складів.

На малюнку 1 зображено графік функції, що відповідає звуку літери "о" та його апроксимація.



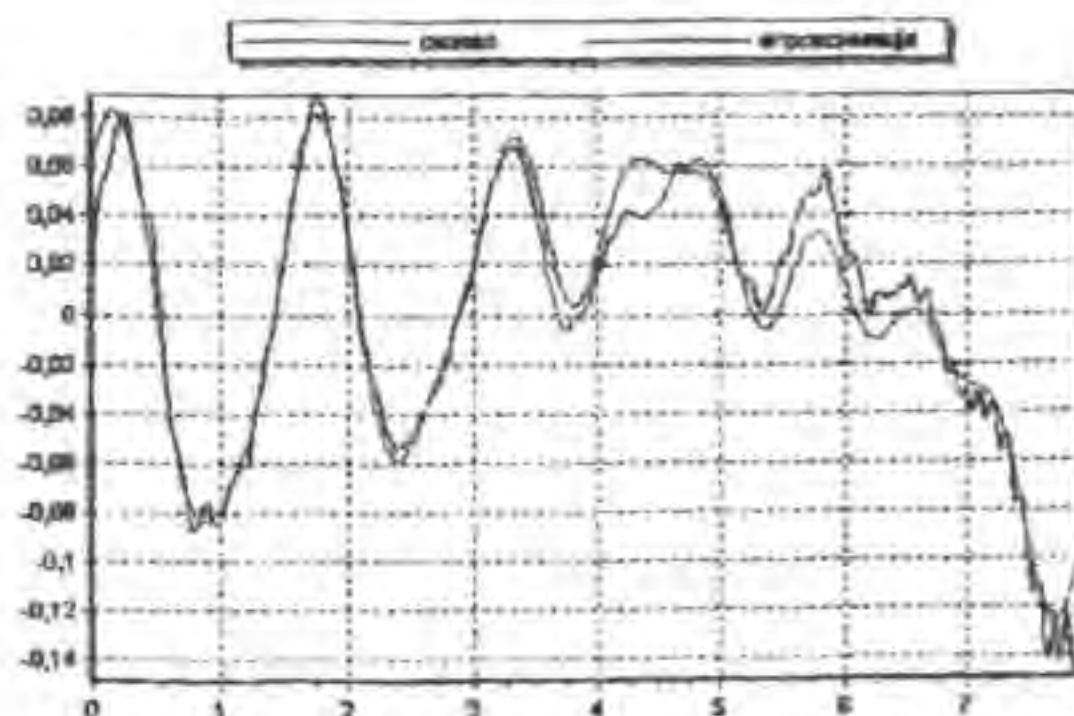
Мал.1. Звук літери "о" та його апроксимація.

В таблиці 1 приведено оптимальні параметри, обчислені на відповідній ітерації. Нев'язка між початковими даними та апроксимацією при цьому складає 0,0325.

Таблиця 1.

Номер ітерації	1	2	3	4	5	6	7
α_1^{opt}	-0,02765	0,03808	-0,02275	0,02345	0,06653		
δ_1^{opt}	0,03430	-0,00088	-0,01569	-0,01474	0,19444		
c_1^{opt}	0,00598	-0,00084	0,00231	-0,00038	-0,19410	-	-
ω_1^{opt}	1,13603	3,02942	1,76716	4,67036	0,12623		

На малюнку 2 представлено графік функції, що відповідає звуку літери "а" та його апроксимація. Нев'язка між початковими даними та апроксимацією складає 0,0326.



Мал.2. Звук літери "а" та його апроксимація.

В таблиці 2 приведено оптимальні параметри, обчислені згідно вище вказаного алгоритму.

Таблиця 2.

Номер ітерації	1	2	3	4	5	6	7
a_1^{opt}	0,04189	0,00772	0,03425	0,07093	0,01192	0,01262	
b_1^{opt}	0,00039	0,03668	0,00707	0,22376	0,01415	0,00288	-
c_1^{opt}	0,00795	0,00110	0,00090	0,22072	0,00141	0,00002	
w_1^{opt}	1,00981	3,78678	4,54413	0,12623	2,90320	7,95224	

Література

1. Прэтт У. Цифровая обработка изображений. – М.: Мир, 1982. – Кн.1, 2. – 790 с.
2. Кириченко Н.Ф., Крак Ю.В., Полищук А.А. Псевдообратные и проекционные матрицы в задачах синтеза функциональных преобразователей. //Кибернетика и системный анализ. – 2004. – №3 – С.116-129.
3. Ахмед Н., Рао К.Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. – М.: Связь, 1980. – 248с.
4. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – К.: Наукова думка, 1985. – 304 с.
5. Васильев Ф.П. Лекции по методам решения экстремальных задач. – М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1974. – 374 с.
6. Гаращенко О.Ф. Оптимальный вибір частотно-фазових характеристик в задачах гармонічної апроксимації функцій //Вісник КУ. Серія: фіз.-мат. науки. – 2003. – №1 – С.145-149.

Надійшла до редакції 17.07.2005

Вопросы и ответы
по истории

Вопросы и ответы
по истории



Вопросы и ответы
по истории

1982	1981	1980	1979	1978	1977
1982	1981	1980	1979	1978	1977
1982	1981	1980	1979	1978	1977
1982	1981	1980	1979	1978	1977
1982	1981	1980	1979	1978	1977

Вопросы и ответы

Вопросы и ответы по истории. В 1982 году в Казанском государственном университете были проведены следующие мероприятия:

1. В 1982 году в Казанском государственном университете были проведены следующие мероприятия:

2. В 1982 году в Казанском государственном университете были проведены следующие мероприятия:

3. В 1982 году в Казанском государственном университете были проведены следующие мероприятия:

4. В 1982 году в Казанском государственном университете были проведены следующие мероприятия:

5. В 1982 году в Казанском государственном университете были проведены следующие мероприятия:

6. В 1982 году в Казанском государственном университете были проведены следующие мероприятия:

7. В 1982 году в Казанском государственном университете были проведены следующие мероприятия:

8. В 1982 году в Казанском государственном университете были проведены следующие мероприятия:

9. В 1982 году в Казанском государственном университете были проведены следующие мероприятия:

10. В 1982 году в Казанском государственном университете были проведены следующие мероприятия:

РАДІОФІЗИКА

УДК 533.951

Ігор О. Анісімов¹,
Тетяна В. Ничипорук²

**Перехідне випромінювання
модульованого електронного
потoku в неоднорідній
замагніченій плазмі**

Розраховано перехідне випромінювання модульованого електронного потоку, що рухається вздовж градієнту концентрації плоскошаруватої неоднорідної холодної плазми, для довільних значень характерного розміру неоднорідності. Сильне магнітне поле також спрямоване вздовж градієнту концентрації плазми. Показано, що величина випромінювання визначається внесками від областей локальних плазмового та черенковського резонансів і суттєво залежить від напрямку руху електронного потоку.

Ключові слова: перехідне випромінювання, модульований електронний пучок, замагнічена плазма.

¹ E-mail: ioa@univ.kiev.ua

WWW: <http://ioa.rpd.univ.kiev.ua>

² E-mail: tvm@univ.kiev.ua

Igor O. Anisimov¹,
Tetiana V. Nychporuk²

**Transition radiation of the
unbounded modulated electron
beam in the inhomogeneous
magnetized plasma**

Transition radiation of the modulated electron beam moving along the concentration gradient of the cold planarly stratified inhomogeneous plasma with arbitrary length of the inhomogeneity is calculated. External strong magnetic field is also parallel to the concentration gradient. It is shown that the main contribution to the radioemission is given by local plasma resonance region (LPRR) and local Cherenkov resonance region (LChRR). Radioemission also depends substantially on the electron beam direction.

Key Words: transition radiation, modulated electron beam, magnetized plasma.

1. Introduction

Beam-plasma devices are one of the most interesting subjects of inquiry in plasma physics. They can be used for generation and amplification of electromagnetic signals (due to beam energy). One of the signal outlet mechanisms from beam-plasma devices is the linear transformation of beam waves into electromagnetic waves on the plasma concentration gradient [1].

Such transformation in weakly inhomogeneous isotropic plasma occurs mainly in the local plasma resonance region (LPRR) [2]. The presence of magnetic field leads to appearance of one more region of intensive transformation. This is the local Cherenkov resonance region (LChRR), where electron beam velocity coincides with the phase velocity of electromagnetic waves [3].

For magnetized plasma, the problem of transition radiation was solved in [3-7]. For example, a self-consistent calculation of mutual transformation of eigen waves was made in [3] for the unbounded electron beam moving parallel to the infinite magnetic field along the concentration gradient of warm plasma with linear profile. The problem was solved by Laplace contour integrals method that led to obtaining of the volumetric and incompressible formulas. The heterogeneous beam-plasma magnetized waveguide was examined in [4]. At first the problem was calculated in the given current approximation for the linear concentration profile, but only emission into plasma was found. Then a self-consistent calculation for weakly inhomogeneous plasma with arbitrary profile was made, but only transformation ratios into waves co-directional with the beam were found. Transition radiation of the point charge moving along the concentration gradient of the magnetized plasma with the model concentration profile $n(z)=n_0/[1+\exp(-z/L)]$ was calculated in [5] in the given current approximation. Transition radiation in the inhomogeneous magnetized plasma waveguide was examined in [6], but only contribution from LPRR was considered. An attempt of systematic analysis of radioemission into vacuum and plasma with consideration of LPRR and LChRR contributions was made in [7]. The common feature of these works is the model of weakly inhomogeneous plasma, hence the results can be obtained analytically.

In this article transition radiation of the modulated electron beam moving along the concentration gradient of cold planarly stratified inhomogeneous plasma with arbitrary length of inhomogeneity is examined. Strong external magnetic field is also parallel to the plasma concentration gradient. The calculation is carried out by numerical methods in the given current approximation.

2. Model description and basic equations

Cold planarly stratified plasma is considered, its concentration profile is shown on fig. 1. Stationary strong magnetic field is directed along z-axis (electron cyclotron frequency substantially exceeds all the other typical plasma frequencies). Radially unbounded charge compensated monoenergetic electron beam moves along z-axis forming the current density wave:

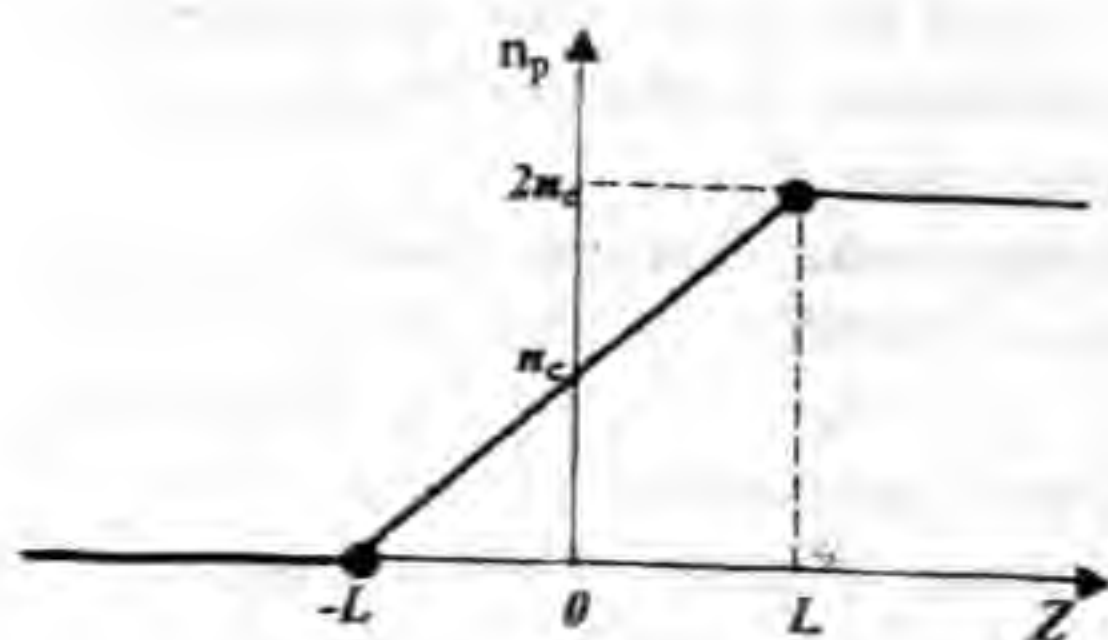


Fig. 1. Plasma concentration profile.

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{e}_z j_m \exp[i(\omega t - \vec{\kappa} \vec{r})], \quad \vec{\kappa} = \{0; \kappa_\perp; \kappa_\parallel\}, \quad \kappa_\parallel = \omega/v_0 \quad (1)$$

(ω is the modulation frequency, v_0 is the electron beam velocity). Henceforth the current density (1) is considered as given.

From Maxwell equations in the given current approximation inhomogeneous wave equation describing excitation of electromagnetic waves by the current wave (1) is obtained:

$$\frac{d^2 H_x}{dz^2} + \left(k_0^2 - \frac{\kappa_\perp^2}{\epsilon_\parallel} \right) H_x = i \frac{4\pi \kappa_\perp}{c \epsilon_\parallel} j_m \exp[i(\omega t - \kappa_\parallel z)], \quad (2)$$

here $\epsilon_\parallel(z) = 1 - 4\pi n_p(z) e^2 / m \omega (\omega - i\nu)$ is the longitudinal component of the plasma dielectric permeability tensor.

The analysis of the current wave transformation into electromagnetic waves [7] has shown that such waves are excited mainly in LPRR and LChRR. In LChRR the wave co-directional with the beam is predominantly excited.

3. Radiation amplitude calculation

The Green's function method is used for direct calculation of the excited electromagnetic wave amplitudes [5]:

$$H(z) = Y_1(z) \int_{-\infty}^z \frac{Y_2(z') f(z')}{W(z')} dz' + Y_2(z) \int_z^{\infty} \frac{Y_1(z') f(z')}{W(z')} dz', \quad (3)$$

$$W(z) = Y_1'(z) Y_2(z) - Y_1(z) Y_2'(z),$$

where $Y_{1,2}$ are the homogeneous wave equation solutions that for the case of $z \rightarrow \pm\infty$ represent the waves running from the transformation regions to the right and to the left respectively, yet the corresponding integrals determine the amplitudes of these waves.

Plasma concentration profile has a form

$$n_p(z) = \begin{cases} 0, & z \leq -L; \\ n_c(\omega)(1 + z/L), & -L < z < L; \\ 2n_c(\omega), & z \geq L, \end{cases} \quad n_c(\omega) = \frac{m\omega^2}{4\pi e^2} \quad (4)$$

(fig. 1). Its linear part $|z| < L$ is restricted by the points $n_p(z) = 0$ and $n_p(z) = 2n_c(\omega)$.

In the region $|z| < L$ solutions $Y_{1,2}$ can be represented as:

$$Y_{1,2} = A_{1,2} H_{x1} + B_{1,2} H_{x2}, \quad (5)$$

where

$$A_{1,2} = \mp K_\mp W_{1,2}, \quad B_{1,2} = \pm K_\mp R_{1,2},$$

$$K_\mp = \frac{2\sqrt{1 \pm n_\perp^2} \exp[\mp i\Lambda(\sqrt{1 - n_\perp^2} + 1)]}{W_2 R_1 - W_1 R_2}, \quad n_\perp = \frac{\kappa_\perp}{k_0}, \quad \Lambda = k_0 L, \quad (6)$$

$$W_{1,2} = \mp [i\Lambda(\sqrt{1 \pm n_\perp^2} \mp 1) + 1] \Psi(a, 2, \mp 2i\Lambda) - 2i\Lambda \Psi(a + 1, 3, 2i\Lambda),$$

$$W_{3,4} = [i\Lambda(\sqrt{1-n_{\perp}^2} + 1) \mp 1] \Psi(a, 2, \pm 2i\Lambda) + 2i\Lambda a \Psi(a+1, 3, \pm 2i\Lambda),$$

$$R_{1,2} = [\mp i\Lambda\sqrt{1 \pm n_{\perp}^2} \mp 1 - i\Lambda] F_1(a, 2, \mp 2i\Lambda) \mp i\Lambda a_1 F_1(a+1, 3, \mp 2i\Lambda),$$

$$R_{3,4} = [i\Lambda\sqrt{1 \mp n_{\perp}^2} \mp 1 + i\Lambda] F_1(a, 2, \pm 2i\Lambda) - i\Lambda a_1 F_1(a+1, 3, \pm 2i\Lambda),$$

${}_1F_1(a, b, z)$ and $\Psi(a, b, z)$ are Kummer and Trikkomi functions.

The solution (3) describes the sum of emission field and modulated electron beam eigen field. Electron beam field has spatially periodic behavior of current (1). Eliminating this behavior one can find the field amplitudes excited in plasma and in vacuum:

$$\begin{aligned} H_{p,v}(z) = \tilde{H}_{p,v}(z) \mp \frac{in_{\perp}}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 \mp n_{\perp}^2}} \frac{\exp[-i\Lambda(\sqrt{1 \mp n_{\perp}^2} \mp 1/\beta)]}{\sqrt{1 \mp n_{\perp}^2} \mp 1/\beta} + \right. \\ \left. + \frac{1}{1 \pm n_{\perp}^2 T_{2,1}} \left[\frac{\exp[i\Lambda(1 \pm n_{\perp}^2 \mp 1/\beta)]}{1 \pm n_{\perp}^2 \mp 1/\beta} - P_{1,2} \frac{\exp[-i\Lambda(1 \pm n_{\perp}^2 \pm 1/\beta)]}{1 \pm n_{\perp}^2 \pm 1/\beta} \right] \right\}, \\ \tilde{H}_{p,v} = \int_{-L}^L \frac{Y_{2,1}(z') f(z')}{W(z')} dz', \quad \beta = \frac{v_0}{c}, \\ P_{1,2} = \mp \frac{\exp(\mp 2i\sqrt{1 \pm n_{\perp}^2} \Lambda) (\pm W_{2,1} R_{4,3} \mp W_{4,3} R_{2,1})}{W_2 R_1 - W_1 R_2}, \\ T_{1,2} = \mp \frac{\exp(\mp i\Lambda(\sqrt{1+n_{\perp}^2} + \sqrt{1-n_{\perp}^2} + 2)) \Delta_{2,1}}{W_2 R_1 - W_1 R_2}, \end{aligned}$$

$$\Delta_{1,2} = -4\sqrt{1 \mp n_{\perp}^2} \Lambda^2 \left[{}_1F_1(a, 2, \mp 2i\Lambda) \Psi'(a, 2, \mp 2i\Lambda) - {}_1F_1'(a, 2, \mp 2i\Lambda) \Psi(a, 2, \mp 2i\Lambda) \right]$$

(index p and upper sign represent radioemission into plasma, index v and lower sign represent radioemission into vacuum).

In the first term of expression for the radioemission (7) (integral with the integration bounds $[-L, L]$) amplitude is determined mainly by the LPRR and LChRR contributions. In the second one (expression in the curly brackets) it is determined by the plasma concentration gradient (non-resonant emission component). For the case of $L=0$ the second term is transformed into the well-known expression for radiation on the sharp bound between two media [8].

Some terms in curly brackets in the right part of expression (7) are vanished when the condition

$$\beta = \frac{1}{1+n_{\perp}^2} \quad (8)$$

is satisfied. (8) is the Cherenkov resonance condition in the homogeneous plasma region, where $n=2n_c(\omega)$ (fig.1). For this case, it is necessary to calculate

separately Cherenkov radiation for that plasma region. For greater β or $n_{\perp}$ local Cherenkov resonance point disappears.

In the weakly inhomogeneous plasma, the resonance regions (LPRR and LChRR) are considered as separate. For that case, it is possible to calculate analytically LPRR and LChRR contributions to radiation. These regions play the major role in the radioemission. Hence, for electron beam moving into plasma the radioemission into vacuum is determined by LPRR contribution, radioemission into plasma is determined by the interference of LPRR and LChRR contributions. For electron beam moving from plasma the oscillations in LPRR are not excited, but electromagnetic wave excited in LChRR is almost completely absorbed in LPRR and only partially percolates into vacuum [3-7].

For the arbitrary inhomogeneity length LPRR and LChRR cannot be considered to be isolated, hence it is not possible to obtain the analytical solution. So integrals (3) are calculated numerically in general case to find out the radiation dependence on the problem parameters.

4. Numerical calculation results

Results of numerical calculations of the transition radiation amplitude are presented on fig. 2-4. They substantially depend on electron beam direction [3-7].

For electron beam moving into plasma the transition radiation into plasma (fig. 2a) firstly monotonically increases with the growing of the normalized inhomogeneity length Λ and with the growing of the normalized transversal wave number $n_{\perp}$. The resonance regions increasing and increasing of the intersection of radiated wave electric fields and field excited by electron beam in LPRR can explain such effect. If the specified parameters take large values the dependence becomes non-monotonic because of the large phase incursion between LPRR and LChRR contributions.

Radiation into vacuum (fig. 2b) for the electron beam moving into plasma is considerably less than the radiation into plasma for that case. This phenomenon is explained by the fact that only LPRR gives contribution into the radiation into vacuum and transparency region for electromagnetic fields from the vacuum side is separated from LPRR by the opacity region. Opacity region increases with the growing of Λ and $n_{\perp}$ hence radiation has a maximum shifting to the smaller values of $n_{\perp}$ with the growing of Λ .

Non-resonant component in expression (7) results in the amplitude oscillations caused by interference of contributions from two concentration gradient jumps ($z = \pm L$) versus Λ and $n_{\perp}$ (fig. 2b). This component is responsible for non-zero radiation at $\Lambda = 0$.

For the case of large Λ , numerical calculation results shown on fig. 2a-b coincide with the previously obtained analytical results [7].

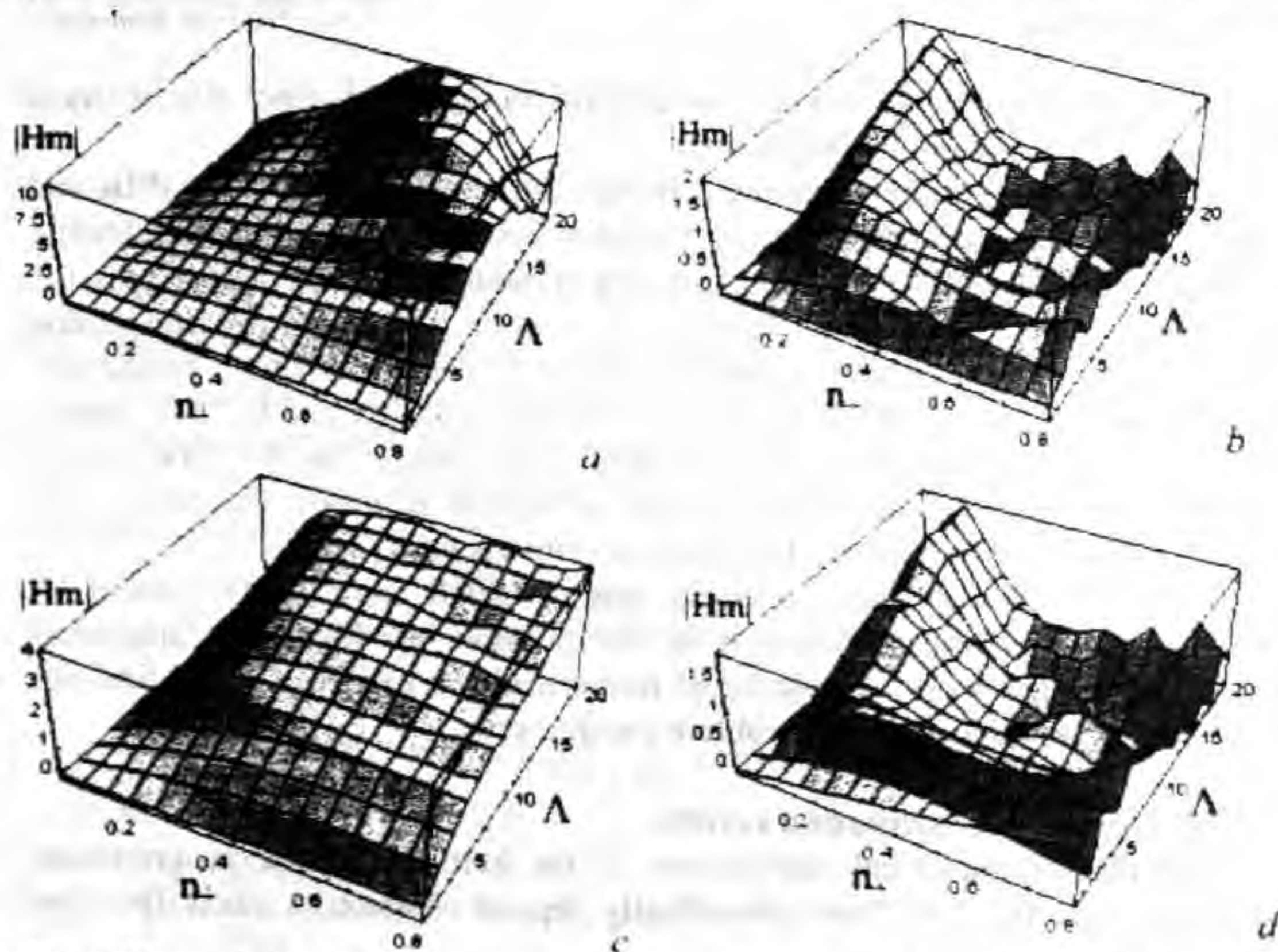


Fig. 2 The amplitude of radiation into plasma (a, c) and into vacuum (b, d) versus Λ and $n_{\perp}$ for the case of electron beam moving into plasma (a, b) and into vacuum (c, d) ($\beta = 0.5$)

For electron beam moving from plasma the radiation into plasma (fig. 2c) noticeably decreases. It doesn't vanish even for $\Lambda \geq 1$ contrary to the analytical results [3-7] (this radiation exceeds the radiation into vacuum for the beam moving from plasma, see fig. 2b). The radiation amplitude dependence versus Λ and $n_{\perp}$ is similar to the case of beam moving into plasma. There are no amplitude oscillations for large Λ because LPRR doesn't give the contribution into radiation. The presence of such radiation for moderate Λ is caused by non-zero ratio of the distributed reflection for the wave excited by modulated electron beam in LChRR and primary directed into vacuum.

The radioemission into vacuum for that case (fig. 2d) depends on the model parameters similarly to the case of the beam moving into plasma. Such effect is explained by the influence of the opacity barrier between electromagnetic wave reflection point and LPRR. The radiation amplitude is some smaller than in the previous case. The radiation source for large Λ is LChRR. Co-directional wave excited in LChRR partially penetrates through the opacity barrier and propagates into vacuum. For small Λ LPRR also gives some contribution into radiation [9].

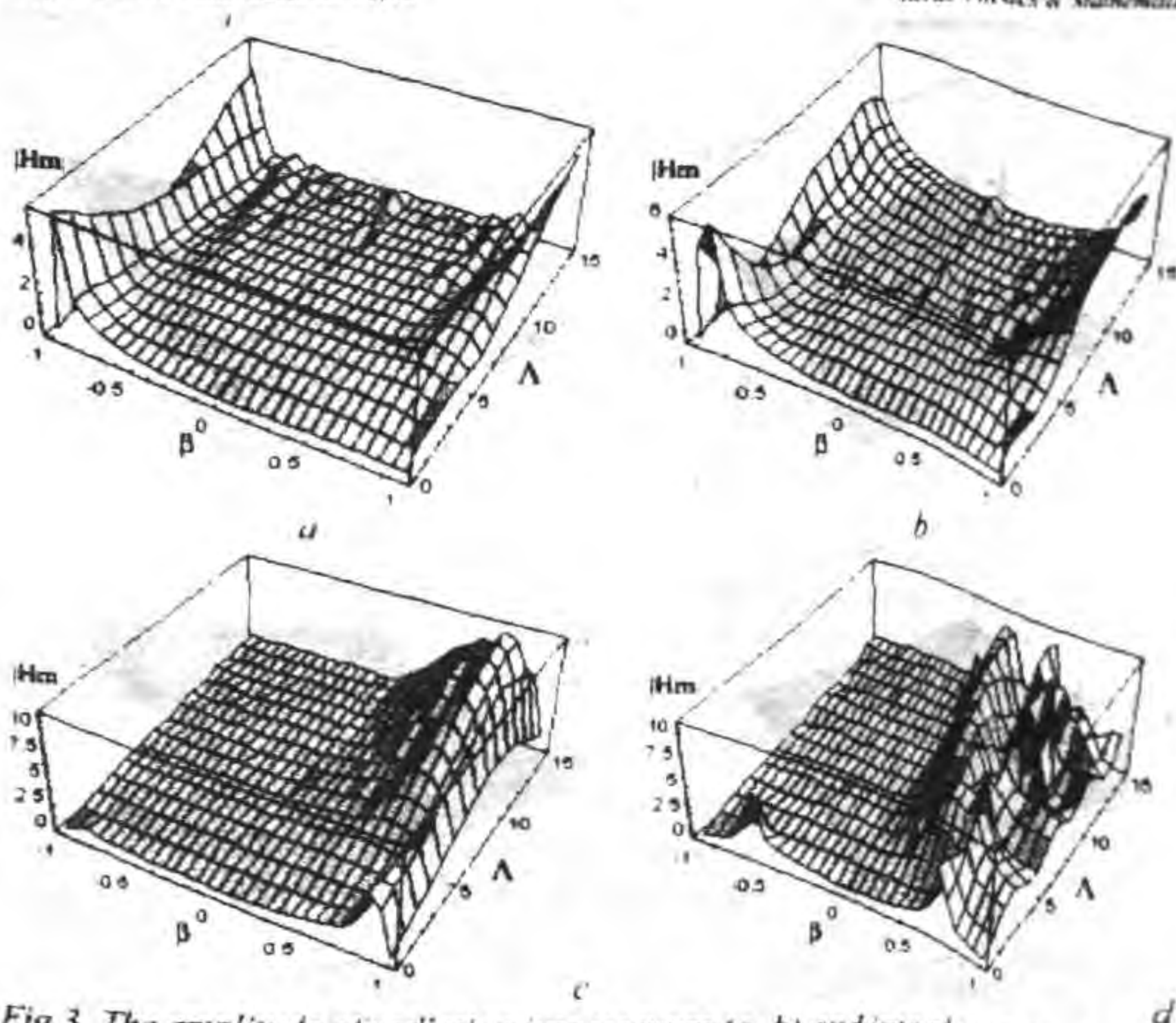


Fig.3. The amplitude of radiation into vacuum (a, b) and into plasma (c, d) versus Λ and β for the case of $n_{\perp}=0.3$ (a), $n_{\perp}=0.5$ (b, c) and $n_{\perp}=1.1$ (d)

Thus for little Λ the radiation dependence on the beam velocity direction becomes less noticeable. This phenomenon can be concerned with the two facts. First, the non-resonant radiation component caused by increasing of plasma concentration gradient gives the significant contribution to the total radioemission. On the other hand, electromagnetic wave reflection ratio from LPRR doesn't vanish for the moderate values of the concentration gradient.

The radiation amplitude dependencies on the normalized beam velocity β and on the inhomogeneity length Λ are presented on fig.3. Positive values of β correspond to the beam moving into plasma and the negative ones correspond to the beam moving into vacuum.

First, it should be noted that positions of the radiation maximums on fig. 3a-b at negative β and on fig. 3c-d at positive β meet the condition (8), that is Cherenkov resonance on the uniform plasma border. In the first case, the wave excited in LChRR penetrates through the opacity barrier into vacuum and in the second case this wave propagates directly into the dense plasma. For larger beam velocities the local Cherenkov resonance point disappears that causes the decreasing of radiation into plasma.

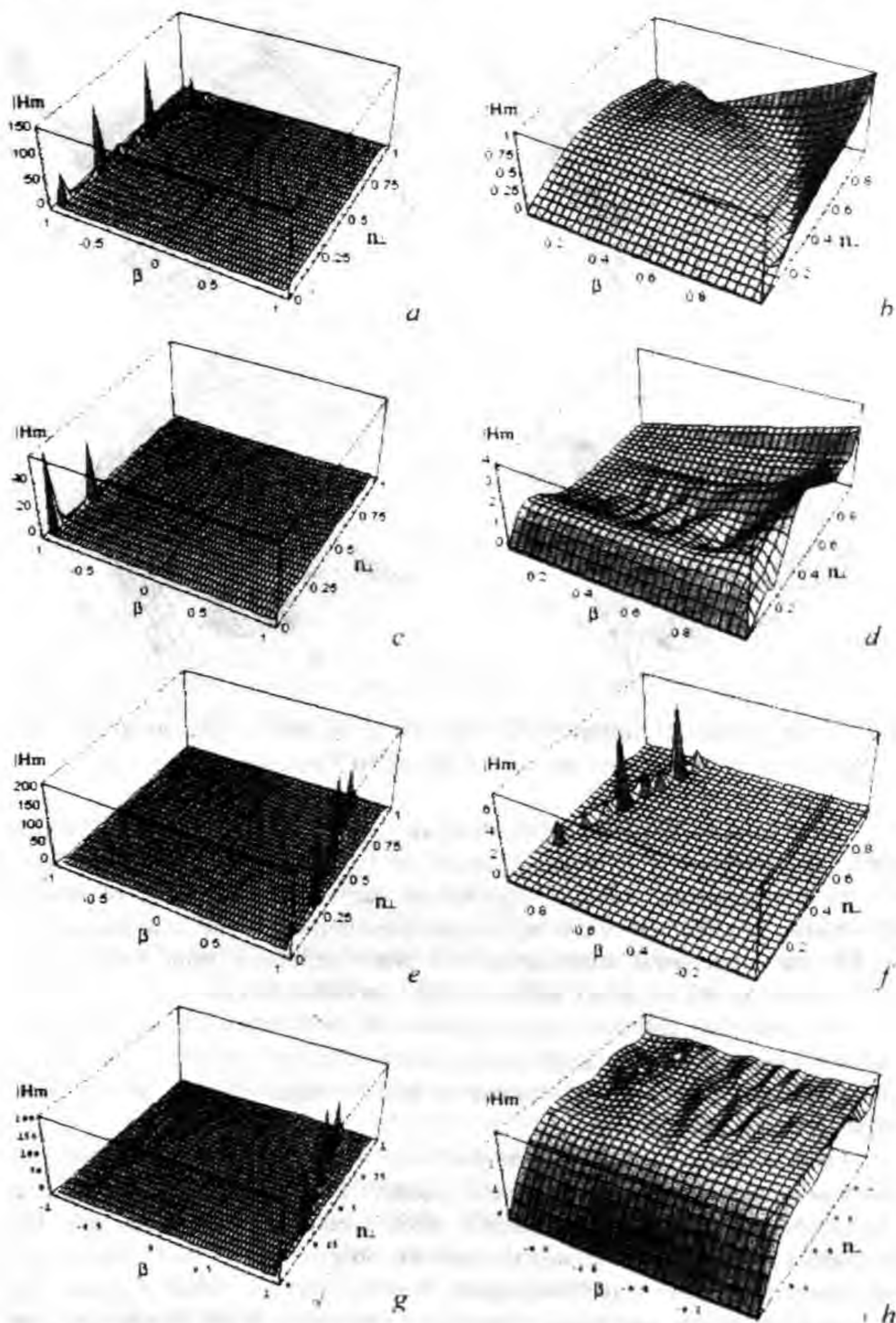


Fig.4. The amplitude of radiation into vacuum (a-d) and into plasma (e-h) versus β and $n_{\perp}$ at $\Lambda=1$ (a, b, e, f) and $\Lambda=10$ (c, d, g, h).

The radiation into vacuum for $\beta \rightarrow -1$ increases because Cherenkov resonance condition is almost satisfied for relativistic beams and electromagnetic waves propagating at a little angle to the beam [8]. This phenomenon is very noticeable for large Λ (fig.3a-b).

The increase of radiation into vacuum at $\beta \rightarrow +1$ can be caused by the co-directional electromagnetic wave excited in the pre-barrier region by the beam moving into plasma. Cherenkov resonance condition is almost satisfied in this region. The wave excited is reflected from the opacity barrier back into vacuum.

Finally, the radiation amplitude dependencies on the normalized beam velocity β and on the normalized transversal component $n_{\perp}$ of current wave number are presented on fig. 4. The most intensive radiation is obtained when the condition (8) is satisfied and beam excites co-directional wave in the Cherenkov resonance point on the homogeneous region border (sharp maximums on fig. 4a, c, e, g).

The radiation into vacuum for the beam moving into plasma significantly increases with the increasing of the inhomogeneity length (compare with fig. 4b,d). These results are conformed to the analytical calculations [3-7].

The wave excited in the Cherenkov resonance point on the homogeneous plasma border is partially reflected from heterogeneity back to the dense plasma. It results to the formation of maximums of radiation into plasma (fig.4 e) for beam moving into vacuum. Intensity of these maximums is some orders less than for the beam moving into plasma (compare with fig.4d-e). The specified maximums become unnoticeable for larger Λ when the radiation from LPRR is significant (fig.4h).

5. Conclusion

1. Transition radiation of the electron beam on the diffused border of vacuum and magnetized plasma consists of three components. These are radiation from local plasma resonance region, radiation from local Cherenkov resonance region and non-resonant radiation that disappears for large values of the plasma inhomogeneity length.

2. The most intensive transition radiation is formed by the interference of the contributions from LPRR and LChRR. It is excited by electron beam moving into weakly inhomogeneous plasma and directed into the dense plasma. For beams moving from such plasma the radiation is emitted only into vacuum. It is small in comparison with the previous case. The radiation into vacuum weakly depends on the electron beam direction and it is determined by characteristics of opacity barrier between LPRR and the electromagnetic wave reflection point.

3. The non-resonant contribution into radiation increases for small values of the plasma inhomogeneity length and results in attenuation of the radiation dependence on the electron beam direction.

4. Sharp increasing of transition radiation takes place when local Cherenkov resonance point coincides with the border between the homogeneous and inhomogeneous plasma. One can suppose that for smoothed concentration gradient that effect will become less noticeable.

5. For analyzed model of radially unrestricted electron beam, it is impossible to take into consideration the contribution to the radiation from Cherenkov resonance in homogeneous plasma (if such effect takes place). For the model of radially restricted electron beam, this phenomenon results in formation of the sharp maximum on the radiation pattern.

References

1. А.Н.Кондратенко, В.М.Куклик. Основы плазменной электроники. М., Энергоатомиздат, 1998.-320с.
2. А.А.Галеев. Переходное излучение равномерно движущегося заряда на размытой границе двух сред.// ЖЭТФ, 1964.Т.46.№4. С1335-1343.
3. Н.С.Ерохин, С.С.Моисеев. Трансформация волн в неоднородной неустойчивой плазме. // ЖЭТФ, 1973.Т.65, Вып.4.С.1431-1447.
4. С.С.Калмыкова. Излучение модулированного тока и трансформация волн плотности заряда в неоднородной плазме. // Физика плазмы, 1976. Т.2. №4. С.643-653.
5. Неравновесные и резонансные процессы в плазменной радиофизике. Н.С. Ерохин, М.В. Кузелев, С.С. Моисеев и др. М., Наука, 1982. –272с.
6. И.А.Анисимов, Д.Г.Стефановский. Возбуждение электромагнитных волн модулированным электронным потоком в слабонеоднородной изотропной плазме. // УФЖ, 1988. Т.33. №1. С.38-40.
7. І.О.Анісімов, Т.В.Туташконко. Перехідне випромінювання модульованого електронного потоку в слабконеоднорідній замагніченій плазмі. // VII Українська конференція з керованого термоядерного синтезу та фізики плазми. Збірник анотацій. Київ, 1999. С.59.
8. В.Л.Гинзбург, В.Н.Цытович. Переходное излучение и переходное рассеяние (некоторые вопросы теории). М., Наука, 1984. -360с.
9. И.А.Анисимов, И.Ю.Котляров, С.М.Левитский. Об одной возможности увеличения переходного излучения модулированного электронного потока в неоднородной плазме. // Известия вузов. Радиофизика. 1989. Т.32. № 8. С.1034-1038.

Received 15.10.2005

УДК 621.039.6

Igor I. Bekh¹, Олександр А.
Дмитришин, Василь В. Ільченко,
Олександр Є. Лушкін, Вадим В.
Присяжний.

Особливості механізму емісії скандатних металевопористих емітерів

Стаття містить результати дослідження особливостей поведінки вольт-амперних характеристик скандатних металевопористих емітерів.

За результатами експерименту робиться висновок щодо механізму емісії досліджених зразків та про можливу роль доданку окислу скандію в цьому механізмі.

Ключові слова: металевопористий емітер, емісія, поверхня, робота виходу.

¹ E-mail: sun@univ.kiev.ua

Вступ

Без сумніву потужні скандатні металевопористі термoeмітери (МПЕ) - складний, багатокомпонентний та багатофазний об'єкт, дослідження якого не втрачають актуальності [1 - 3]. Вони мають надзвичайно привабливі експлуатаційні характеристики порівняно з звичайними МПЕ (без доданка скандію) та оксидними катодами, в той час, як одностайної думки про механізм емісії катодів такого типу на сьогодні не існує. З'ясування механізму емісії автоматично визначило б шляхи подальшої модернізації скандатних МПЕ з метою поліпшення та стабілізації їх характеристик. Тривалий час виконуються дослідження як реальних катодів, так і модельних систем, які складаються з компонентів активної речовини та матеріалу губки і, певним чином, відтворюють робочу поверхню катодів [4 - 7]. Проте остаточну відповідь на питання про механізм емісії скандатних МПЕ та роль скандію у цьому механізмі можуть дати тільки результати комплексних досліджень, до складу яких входять дані, отримані при вивченні модельних систем, так і результати досліджень реальних емітерів.

Дана робота містить результати вивчення особливостей поведінки вольт-амперних характеристик скандатних металевопористих емітерів.

Igor I. Bekh¹, Alexander A.
Dmytryshyn, Vasyl V. Ilchenko,
Aleksander E. Lushkin, Vadym V.
Prysyazhnyj.

Emission mechanism features of the Sc-Ba dispensed cathodes

The investigation of the features of dispensed cathodes' I-V curves behavior are described in the article.

The emission mechanism of the dispensed cathodes and a possible role of scandium in the mechanism are concluded by the results of the experiments.

Key Words: dispensed cathode, emission, surface, work function.

Методика експерименту та експериментальні зразки

Методики експериментальних досліджень детально описані в [3].

В ході експерименту досліджувалися скандатні металевопористі катоди з наступним складом активної речовини: $2.4\text{BaO} \cdot 0.6\text{CaO} \cdot 0.1\text{Sc}_2\text{O}_3 \cdot 0.9\text{Al}_2\text{O}_3$. Один із них був щойно відактивований, а інший відпрацював у вакуумному діоді при температурі $T=1250$ К 3000 годин і, при цій температурі, зменшив свою емісійну здатність майже вдвічі.

Результати експериментальних досліджень та їх обговорення.

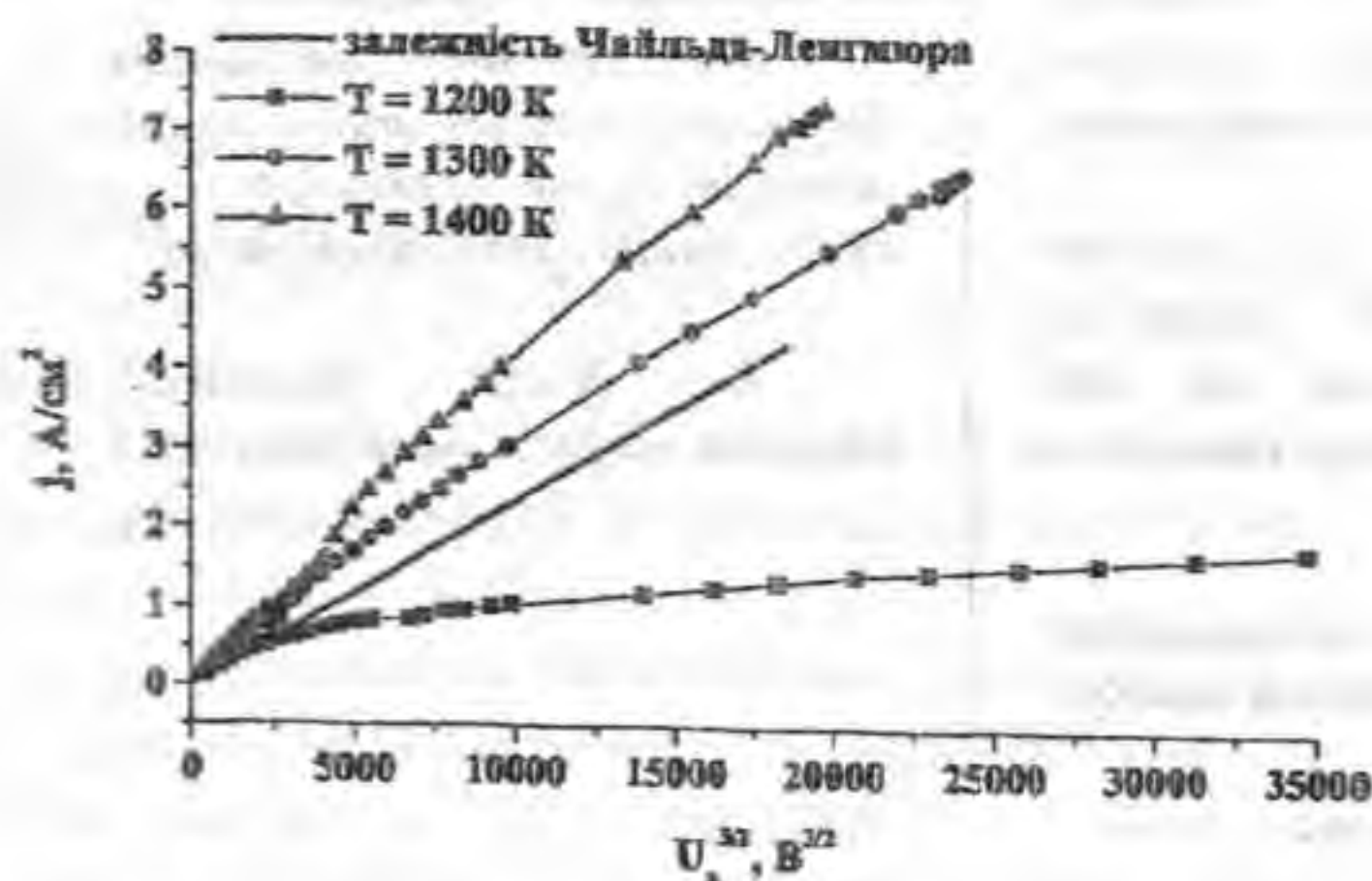


Рис. 1. Вольт-амперні характеристики щойно відактивованого зразка в області малих анодних напруг.

Як повідомлялося в роботі, опублікованій раніше [3], для металевопористих емітерів, зокрема, скандатних, характерним є непропорційне зростання густини емісійного струму в області насичення з

ростом температури. Також була помічена невідповідність експериментальних характеристик в області обмеження анодного струму просторовим зарядом (область невеликих анодних напруг) теоретичній кривій Чайльда-Ленгмюра ("закон $3/2$ "): із ростом температури вони перетинають її, причому чим вища температура, тим при більшій анодній напрузі відбувається перетин. З метою перевірки цього експериментального факту були виміряні вольт-амперні характеристики в області малих анодних напруг (у діапазоні 40 – 700 В) щойно відактивованого скандатного зразка (рис. 1) та зразка, який пройшов випробовування на довговічність (рис. 2).

Для більшої наочності отримані характеристики зображені в координатах Чайльда-Ленгмюра, де теоретична залежність є прямою лінією. Теорія передбачає, що кут нахилу будь-якої експериментальної вольт-амперної характеристики не залежить від температури.

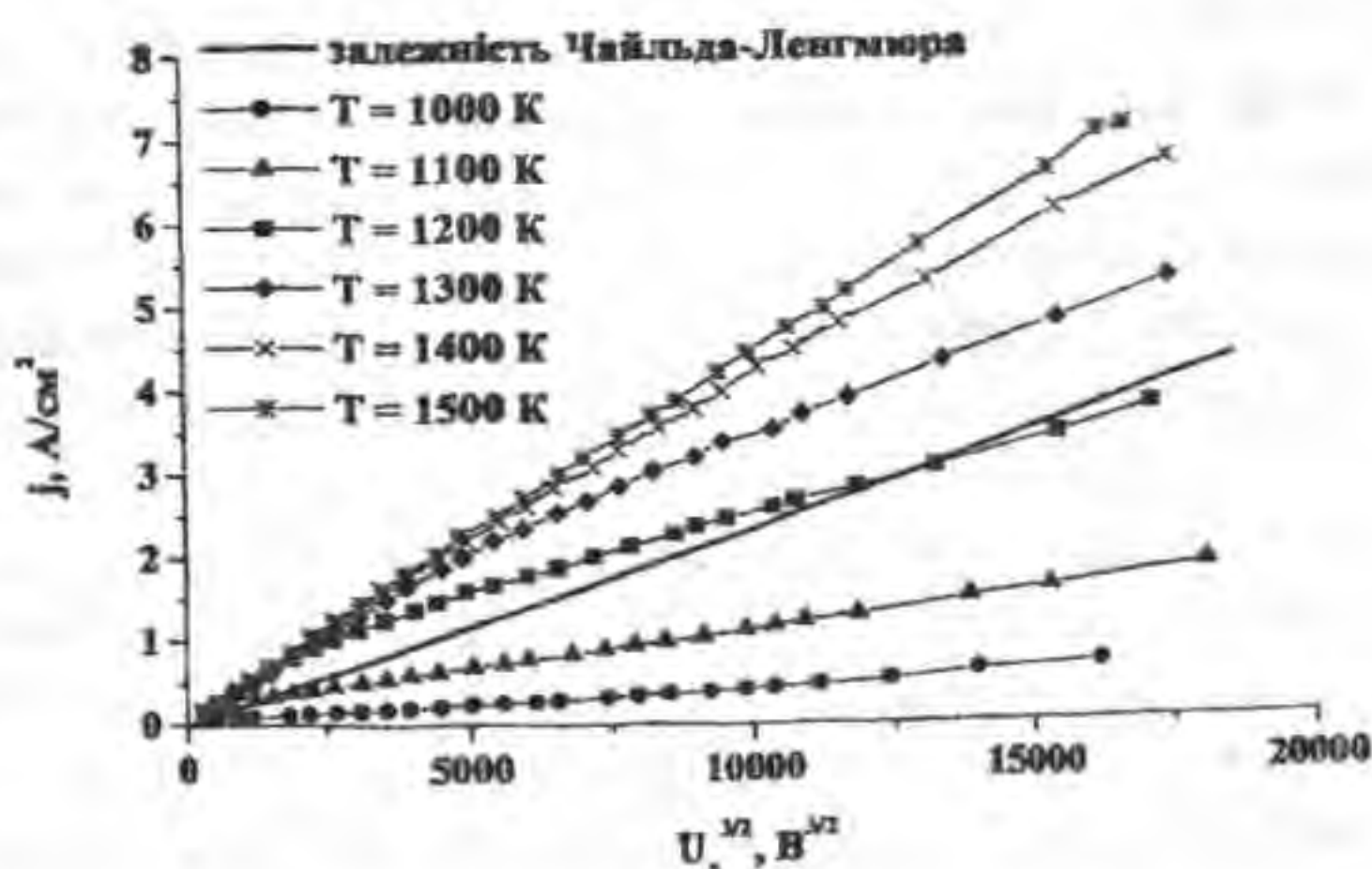


Рис. 2. Вольт-амперні характеристики зразка, який пройшов випробовування на довговічність, в області малих анодних напруг.

Проте, із рис. 1 та 2 чітко видно, що вольт-амперні характеристики зразків, що досліджувалися, в області обмеження анодного струму просторовим зарядом складають із віссю абсцис інші кути, ніж того вимагає "закон $3/2$ ". Причому кут

нахилу залежить від температури і, як і в області насичення, тут також спостерігається істотне зменшення впливу температури зразка на анодний струм при постійній анодній напрузі.

Варто зазначити, що отримані результати суперечать наведеним у літературі [8], де автори для теоретичного опису вольт-амперних характеристик скандатних металевопористих емітерів запропонували комбіновану модель: теорія Річардсона-Дешмана з врахуванням обмеження анодного струму просторовим зарядом + теорія Шоттки в області насичення. Проте аналіз методики емісійних вимірювань у [8] виявив, що експериментальні вольт-амперні характеристики вимірювалися у комбінованому режимі: стаціонарний + імпульсний. Виміри у стаціонарному режимі проводилися до відбирання густин струму зі зразка у 5 A/cm^2 , а при досягненні зазначених густин струму відбувався перехід до імпульсного режиму. Відстань катод-анод при цьому становила 0.25 мм . Проте, як показали наші дослідження, для відбирання з активного скандатного зразка густини струму емісії $\sim 5 \text{ A/cm}^2$ при відстані катод-анод у 1 мм достатньо різниці потенціалів між катодом та анодом близько 500 В . Таким чином існує велика ймовірність, що при вимірюванні характеристик зразків у стаціонарному режимі у [8] відбувалося отруєння їх поверхні за рахунок катодного ефекту.

Особливості поведінки експериментальних вольт-амперних характеристик металевопористих емітерів дають підстави припустити, що досліджувані зразки, і, насамперед, це стосується скандатних, працюють у режимі, в якому просторовий заряд поблизу катода або повністю відсутній, або, і це більш ймовірно, він настільки малий, що не обмежує анодний струм. Це може бути пов'язано з іншим механізмом впливу електричного

поля на їх емісію, в наслідок чого має місце не термоелектронна, а сукупність термо- та автоелектронної емісії. Це припущення корелює з експериментальними даними, наведеними в [2], де показано, що практично усі активні металевопористі емітери демонструють здатність до польової емісії при кімнатній температурі, причому для скандатних зразків рівень польової емісії на 4 порядки вищий, ніж у звичайних (10^{-4} А проти 10^{-8} А при напрузі катод-анод ~ 3000 В).

Роль температури з позиції термоавтоелектронного характеру емісії досліджуваних зразків може полягати у зміщенні максимуму концентрації носіїв заряду у емітері в бік рівня вакууму, що призводить до зростання густини автоемісійного струму, адже більша кількість носіїв спроможна протунелювати крізь потенціальний бар'єр на межі тверде тіло – вакуум. Для перевірки цього припущення була проведена чисельна оцінка характеру залежності енергетичного положення максимуму концентрації носіїв від температури для випадку трикутного потенціального бар'єра без врахування сил зображення. Було досліджено на екстремум наступну функцію:

$$F(\mathcal{E}) = \exp \left\{ -A(\Psi - \mathcal{E})^{3/2} - \left(\frac{\mathcal{E} - e\varphi}{kT} \right) \right\}, \quad A = \frac{8\pi\sqrt{2}m}{3h} \frac{1}{eE},$$

де $\mathcal{E}$ – кінетична енергія носіїв, Ψ – електронна спорідненість матеріалу емітера, $e\varphi$ – робота виходу, T – температура, E – напруженість електричного поля. Тут перший доданок у показнику експоненти відображає прозорість потенціального бар'єра на межі тверде тіло – вакуум у випадку трикутного бар'єра без врахування сил зображення, а другий враховує залежність концентрації носіїв від температури.

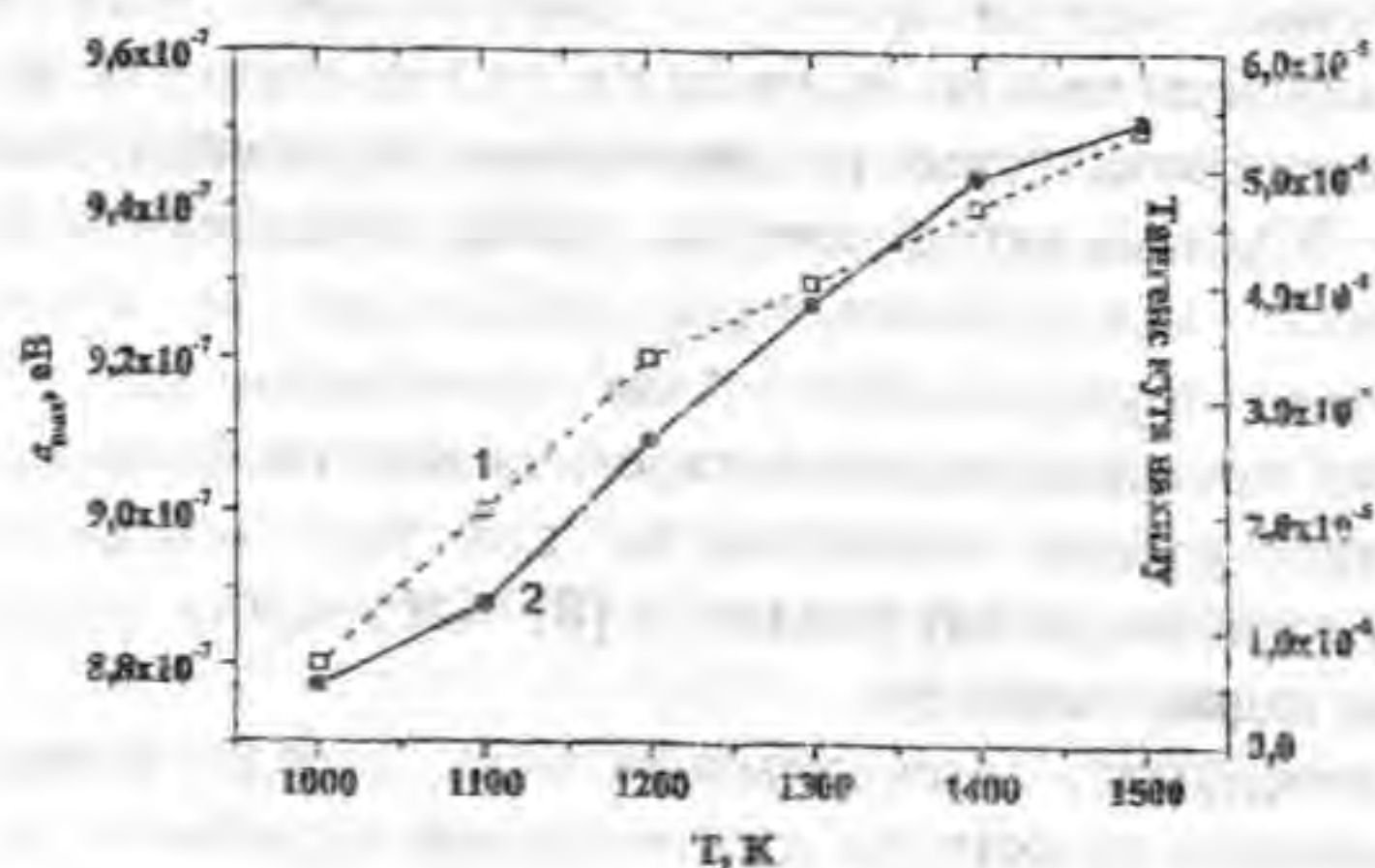


Рис. 3. Залежність енергетичного положення максимуму концентрації носіїв у емітері (1) та тангенсу кута нахилу ВАХ досліджуваного зразка (2) від температури.

На рис. 3 наведено результати чисельної оцінки (крива 1) та залежність тангенса кута нахилу вольтамперних характеристик досліджуваного зразка (крива 2), яка була отримана шляхом лінеаризації експериментальних

их ВАХ в області невеликих анодних напруг методом найменших

квадратів. Як видно з рис. 3 якісний хід цих залежностей знаходиться у гарному узгодженні. Таким чином є всі підстави говорити, що у випадку металевопористих емітерів емісія носить не термоелектронний, а термоавтоелектронний характер. Роль скандієвої компоненти в збільшенні емісійного струму якраз може полягати в створенні умов для суттєвого зростання саме автоемісійної складової загального струму. Враховуючи результати модельних досліджень [9] можна стверджувати, що присутність скандієвої компоненти сприяє збільшенню кількості та зміні форми емітуючих центрів - кристалітів окислів лужноземельних металів, що супроводжується ростом автоемісійної складової загального анодного струму.

При цьому хімічний склад кристалітів у випадку скандатного металевопористого емітера є таким, що сприяє суттєво глибшому проникненню електричного поля в їх об'єм (наприклад, напівпровідник) [10], наслідком чого також є зростання автоемісійної складової загального анодного струму. На користь цього свідчить факт, що температурні коефіцієнти роботи виходу, обчислені для кожного з досліджених зразків, лежать у межах $10^{-3} - 10^{-4}$ eV/K, що характерно для напівпровідникових сполук.

Висновки

1. Вольт-амперні характеристики скандатних металевопористих емітерів в області обмеження анодного струму просторовим зарядом (область невеликих анодних напруг) не підкоряються закону Чайльда-Ленгмюра і їх комплексний аналіз дозволяє говорити про термоавтоелектронний характер емісії.
2. Роль скандієвої компоненти в збільшенні емісійного струму полягає в створенні умов для суттєвого зростання саме автоемісійної складової загального струму шляхом сприяння збільшенню кількості та зміні форми емітуючих центрів - кристалітів окислів лужноземельних металів. При цьому хімічний склад кристалітів окислів лужноземельних металів у випадку скандатного металевопористого емітера є таким, що сприяє суттєво глибшому проникненню електричного поля в їх об'єм, наслідком чого також є зростання автоемісійної складової загального анодного струму.

Перелік посилань

1. Широков В.Ф., Михайловский Б.И., Лушкин А.Е., Ракитин С.П. и др. Влияние скандия на свойства металлопористых катодов. // Изв. АН России. Сер. Физическая, - 1994, - Т. 58, - № 10, - С. 171 - 175.
2. P. Geittner, G. Gartner, and D. Raasch. Low temperature properties of Ba-dispenser cathodes. // J. Vac. Sci. Technol., - 2000, - В 18, - № 2, - Р. 997 - 999.
3. Бех І.І., Льченко В.В., Коспокевич О.М., Лушкін О.Є. Вплив скандію на

- емісійні властивості металевопористих катодів. // Вісник Київського університету, Серія: Фіз.- мат. науки., – 2003, – Вип. 2, – С. 236 – 245.
4. Шнюков В.Ф., Горчинский А.Д., Лушкин А.Е., Формирование барьерного покрытия на поверхности вольфрама с адсорбированной на ней пленкой скандия. // Изв. РАН, Сер. Физ., – 1994, – Т. 58, – № 10, – С. 166.
 5. Wolfgang Muller. Work functions for models of scandate surfaces. // Appl. Surf. Sci., – 1997, – V. 111, – P. 30 – 34.
 6. Shih, J.E. Yater, C. Hor, R. Abrams. Interaction of Sc and O on W. // Appl. Surf. Sci., – 2002, – V. 7931, – P. 1 – 8.
 7. Shih, J.E. Yater, C. Hor. Ba and BaO on W and Sc_2O_3 coated W. // Appl. Surf. Sci., – 2005, – V. 242, – P. 35 – 54.
 8. G. Gartner, P. Geittner, H. Lydtin, A. Ritz. Emission properties of top-layer scandate cathodes prepared by LAD. // Appl. Surf. Sci., – 1997, – V. 111, – P. 11 – 17.
 9. Бех І.І., Лушкін О.Є., Ленъ Ю.А. Роль доданку окислу скандію в поліпшенні емісійних властивостей металевопористих катодів. // Вісник Київського університету, Серія: Радіофізика та електроніка, – 2001, – Вип. 3, – С. 16 – 20.
 10. Бех І.І., Ільченко В.В., Лушкін О.Є. Вплив скандію на емісійні властивості кремнієвих автоемітерів // УФЖ, – 2005, прийнято до друку.

Надійшла до редакції 20.10.2005

УДК 535.8

Андрій О. Голобородько,
Віталій Н. Курашов,
Дмитро М. Мельничук

**Моделювання зміни поляризації
світла при багаторазовому
розсіюванні.**

В роботі досліджено поляризаційні характеристики оптичного випромінювання при багаторазовому розсіянні дифузною поверхнею. Розглянуто модель розсіяння електромагнітного випромінювання у системі двох паралельних поверхонь – дифузною і дзеркальною. Методом чисельного моделювання визначено компоненти кореляційної матриці розсіяної хвилі та розраховано її ступінь поляризації. Побудовано залежності коефіцієнта поляризації від радіусу кореляції для середовищ з різними дисперсіями.

Ключові слова: дифузна поверхня, ступінь поляризації, багаторазове відбиття

Andrey A. Goloborodko,
Vitalij N. Kurashov,
Dmitry M. Melnichuk

**Simulation of polarisation changes
of multiple scattered light.**

In this paper we investigate the polarization properties of the multiple scattered optical wave. The model of electromagnetic radiation scattering in the system of two parallel surfaces is considered, one of them is rough and another is flat. By the method of numerical calculations the components of correlation matrix of the scattered wave are found and its degree of polarization is calculated. The degree of polarization is calculated in the dependences on the statistical characteristics of reflection boundaries.

Key words: rough surface, degree of polarization, multiple scattering

1. Вступ

Дослідження процесів розсіювання електромагнітного випромінювання випадково неоднорідним середовищем є однією з фундаментальних задач статистичної радіофізики та оптики [1, 2]. Приклади такої взаємодії можна зустріти в самих різних галузях теоретичної та прикладної фізики: це і розсіяння радіохвиль поверхнею моря чи Землі, розповсюдження світла крізь атмосферу, відбиття радіо- та оптичних хвиль від іоносфери, дифракційні явища на кристалічній ґратці в рентгенівському діапазоні довжин хвиль, молекулярне розсіювання в рідинах та твердих тілах, тощо.

При розсіянні електромагнітного когерентного випромінювання на неоднорідностях середовищ в площині спостереження виникають випадкові зміни інтенсивності поля, що пов'язані з когерентністю (так звані спекл-структури). Поряд зі змінами в розподілі інтенсивності поля спостерігається випадковий характер розподілу фази, що в свою чергу призводить до зміни ступеню поляризації [3, 4]. Однак, з загальних

міркувань зрозуміло, що при одноразовому розсіюванні ефекти деполаризації порівняно малі [5, 6]. Більш цікавою з практичної точки зору є багаторазове розсіювання, для якого слід чекати значної зміни ступеня поляризації розсіяного світла.

Метою даної роботи є визначення впливу дифузної поверхні на статистичні властивості багаторазово розсіяної хвилі та отримання зв'язку між ступенем поляризації розсіяного випромінювання та характеристиками розсіюючої поверхні.

2. Основні співвідношення

Ідея багаторазового розсіювання полягає в послідовному розсіюванні когерентного випромінювання на неоднорідностях поверхні.

Для створення умов багаторазового розсіювання слід використати схему, що зображена на рис.1. Оптична хвиля падає з вакууму на дифузну гомогенну поверхню RS з заданим показником заломлення n . В якості дифузної поверхні RS розглядався діелектричний зразок, що має дифузну грань, статистичний опис нерівностей на якій розглядається в межах кореляційної теорії. При статистичному усередненні за випадкові величини, що вважалися незалежними з гаусівською статистикою, приймалися змінні з заданими дисперсією σ , радіусом кореляції r_k .

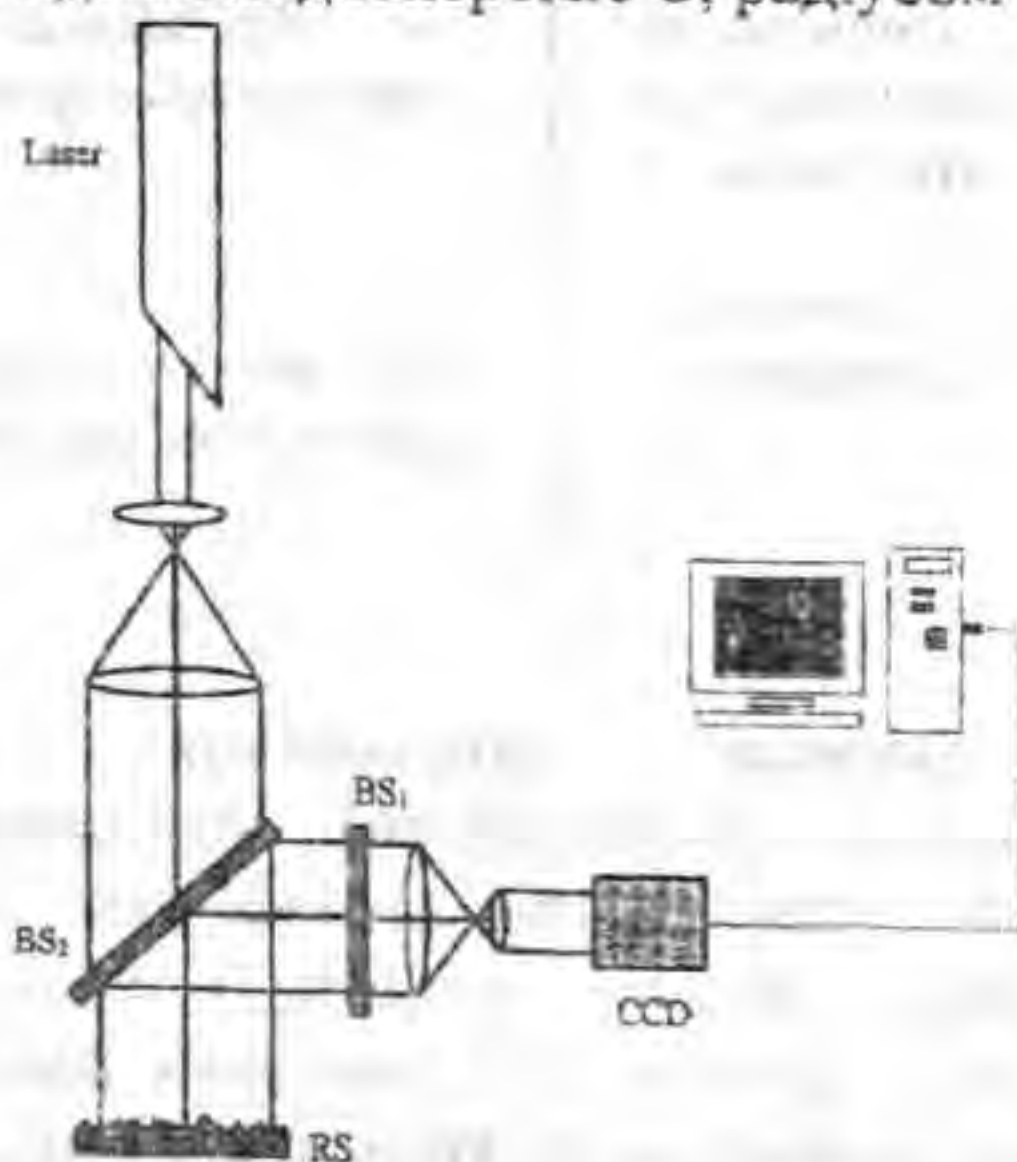


Рис.1. Схема розсіювання з багаторазовим відбиванням. RS – дифузна поверхня, BS₁ та BS₂ – напівпрозорі дзеркала.

Частина енергії хвилі, що розсіюється на нерівностях поверхні (визначається формулами [7]), і попадає на напівпрозоре дзеркало BS₁ з визначеним коефіцієнтом відбивання T . В свою чергу, дзеркало пропускає частину енергії розсіяної хвилі і вона попадає на детектор, а інша частина, що відбилась від дзеркала - знову потрапляє на дифузну поверхню, на якій відбувається ще один акт розсіювання.

Амплітуду відбитого променя під час i -того акту розсіювання від дифузної поверхні E_{out}^i можна представити у наступному вигляді:

$$E_{out}^i = M E_{in}^i \quad (1)$$

де E_{in}^i - амплітуда хвилі що попала на дифузну поверхню, а M - матриця коефіцієнтів відбивання. Для першого акту розсіювання амплітуда падаючої хвилі E_0 . Для кожного наступного розсіювання амплітуда буде визначатись через амплітуду попереднього акту розсіювання наступним чином:

$$E_{in}^i(r_i) = T \iint_{BS} \left[\iint_{RS} E_{out}^{i-1}(r_{i-1}) h(r_{i-1}, R) dr_{i-1} \right] h(R, r_i) dR \quad (2)$$

де r_{i-1} , r_i - координати в площині поверхні під час $i-1$ та i акту розсіювання, R - координата в площині напівпрозорого дзеркала; $h(r_{i-1}, R)$ та $h(R, r_i)$ є передаточними функціями при розповсюдженні хвилі від дифузної поверхні до дзеркала і назад: від дзеркала до дифузної поверхні, які в загальному вигляді можна записати [8]:

$$h(r, R) = \frac{1}{i\lambda|r-R|} e^{ik|r-R|} \quad (3)$$

Поле на виході напівпрозорого дзеркала буде дорівнювати:

$$E(R) = (1-T) \sum_i T^{i-1} \iint_{RS} E_{out}^i(r) h(r, R) dr \quad (4)$$

де амплітуда E_{out}^i визначається співвідношенням (1) з урахуванням виразу (2). Парціальні відбиті хвилі когерентно додаються в площині спостереження, в якій проводиться усереднення за статистикою рельєфу границь розділу.

Використовуючи формулу (4), можна розрахувати середній ступінь поляризації оптичної хвилі. Для цього спочатку визначимо елементи матриці когерентності в явному вигляді:

$$I = \begin{pmatrix} \langle E_x(R) E_x^*(R) \rangle & \langle E_x(R) E_y^*(R) \rangle \\ \langle E_y(R) E_x^*(R) \rangle & \langle E_y(R) E_y^*(R) \rangle \end{pmatrix} \quad (5)$$

де усереднення компонент вектора напруженості електричного поля проводиться по апертурі освітлюючого променя. Ступінь поляризації визначається через елементи матриці I звичайним чином [9]:

$$P = \sqrt{1 - \frac{4(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}I_{yx})}{(I_{xx} + I_{yy})^2}} \quad (6)$$

Якщо вважати, що падаюча хвиля повністю поляризована, то при відбиванні від дифузної поверхні ступінь поляризації оптичної хвилі, взагалі кажучи, зменшується, оскільки кореляційна матриця (5) після усереднення вже не буде факторизуватися. Проте, як вже відмічалось, при

одноразовому відбиванні хвилі від дифузної поверхні остаточний ступінь поляризації ще достатньо високий.

3. Результати та обговорення

Моделювання розсіювання дифузними об'єктами відбувалось так, як зображено на схемі на рис. 1. Розраховувались елементи кореляційної матриці (прямим шляхом), а потім використовуючи формулу (6) було розраховано коефіцієнт поляризації.

Фіксовані параметри моделі були вибрані наступними: довжина хвилі: $\lambda=633$ нм; відстань від дифузної поверхні до напівпрозорого дзеркала: 15мм; розмір апертури зондуєчого пучка: 2мм.

Одновимірний розподіл інтенсивності та фази розсіяної хвилі зображено на рис. 2.

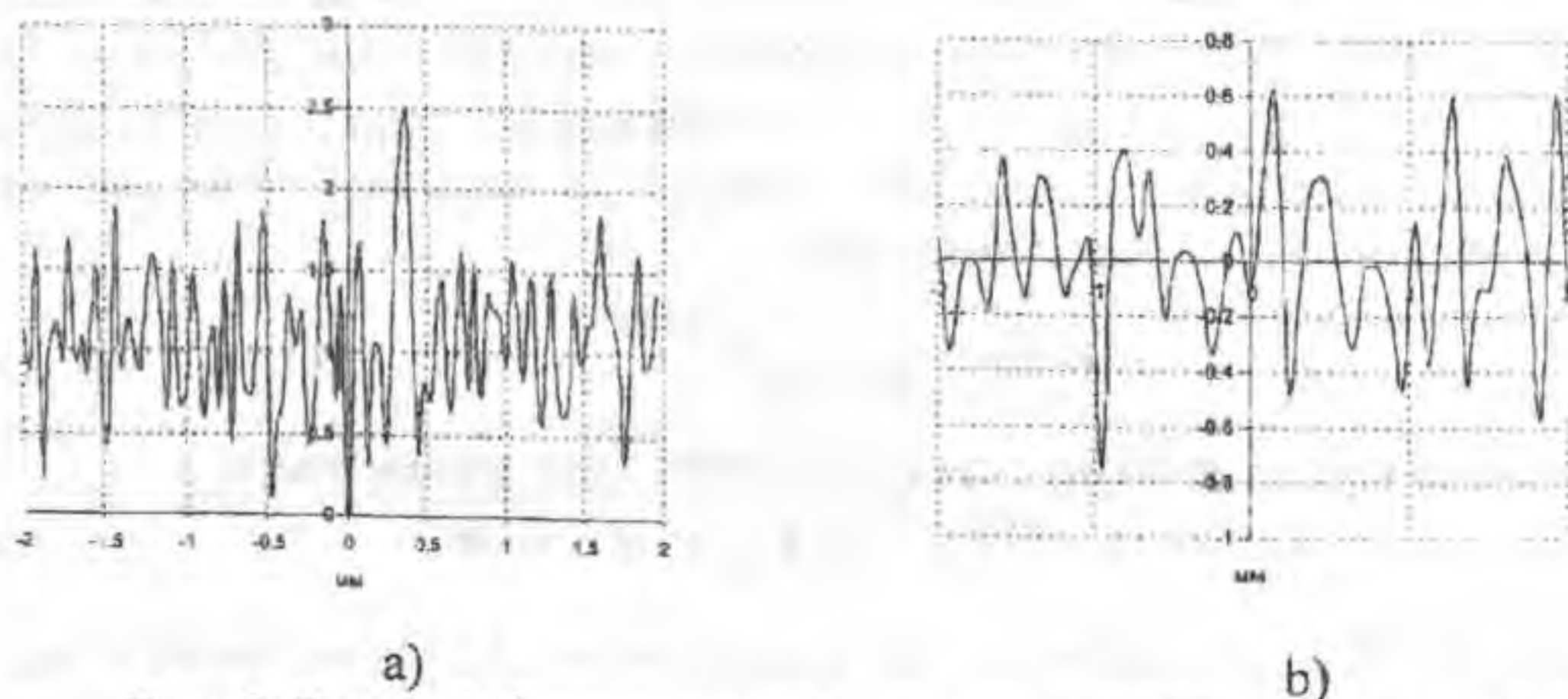


Рис. 2. Розподіл інтенсивності в площині спостереження (а) та фазовий розподіл (б). Рівні фази в радіанах, амплітуда нормована на одиницю.

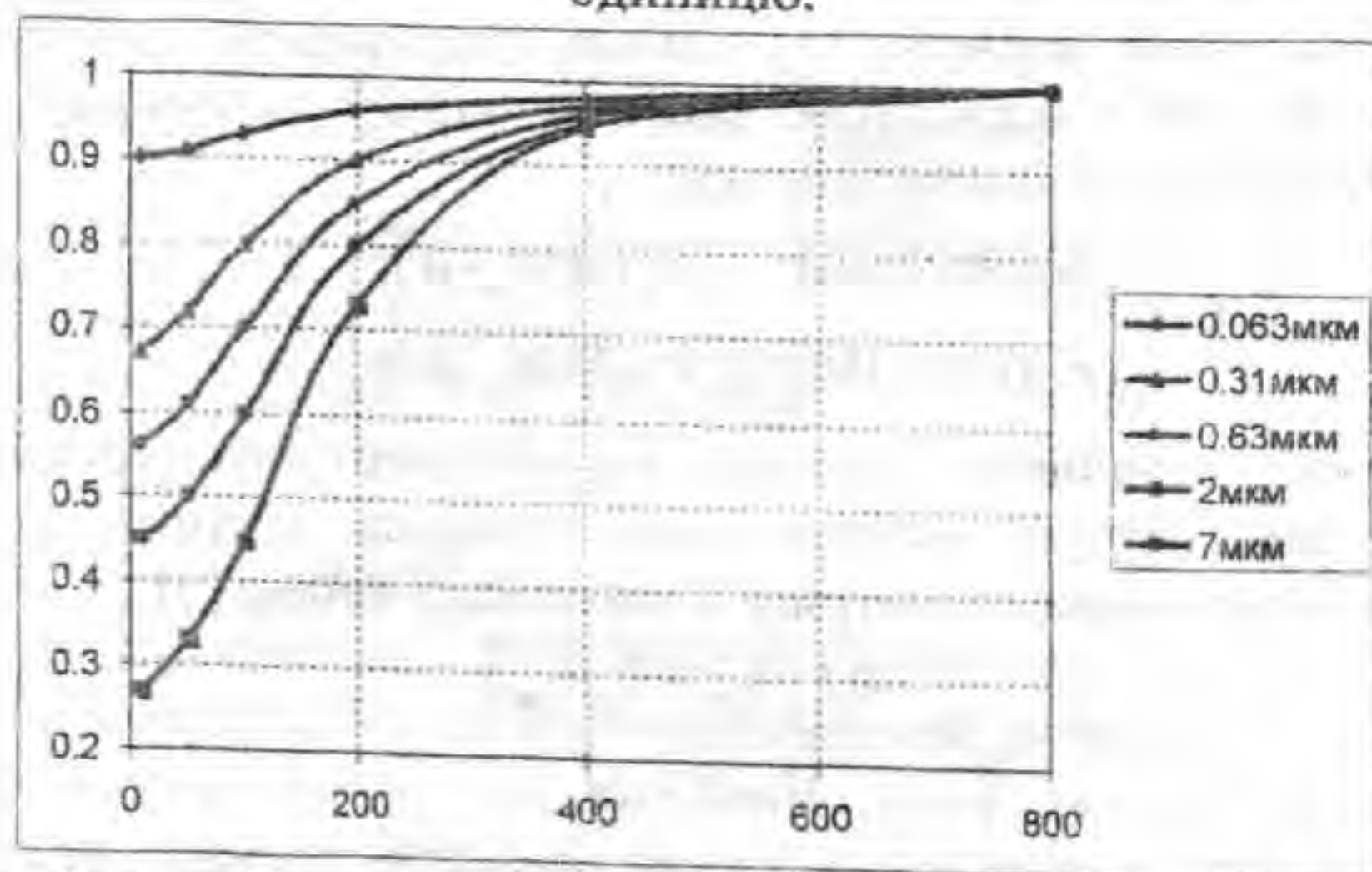


Рис.3. Залежність ступеня поляризації для середовищ з різними дисперсіями та радіусами кореляції нерівностей.

На рис. 3, наведені залежності ступеня поляризації P від радіусу кореляції для середовищ з різними дисперсіями. З графіків дійсно можна

бачити, що при багаторазовому розсіюванні ступінь поляризації розсіяного світла значно знижується. Видно, що зі збільшенням радіуса кореляції коефіцієнт поляризації збільшується і прямує до 1 – цього природно було очікувати, оскільки великий радіус кореляції означає, що поверхня майже рівна і тому не буде змінювати ступінь поляризації випромінювання.

4. Висновки

Розглянуто модель розсіювання електромагнітного випромінювання у системі двох паралельних поверхонь – дифузної і дзеркальної. Методом чисельного моделювання визначено компоненти кореляційної матриці розсіяної хвилі та розраховано її ступінь поляризації. Використана модель якісно підтверджує ефект суттєвої деполаризації когерентного випромінювання при багаторазовому розсіюванні. Визначено вплив дифузної поверхні на статистичні властивості багаторазово розсіяної хвилі та отримано зв'язок між ступенем поляризації розсіяного випромінювання та характеристиками розсіюючої поверхні.

5. Література

1. Барчук О.И., Курашов В.Н., Чумаков А.Г. "Определение корреляционных функций амплитудного пропускания фазовых диффузоров методом обратной задачи когерентного рассеяния света", Кв.электр., №38., С.82-87, 1990.
2. Leader J.C. "Bidirectional scattering of electromagnetic waves from rough surfaces", *J.App.Phys.*, Vol. 42, No. 12, pp 4808-4816, 1971.
3. Ohidal J., Lukef F. "Ellipsometric parameters of rough surfaces and of a system substrate-thin film whiz rough boudaries" *Opt.Acta*, Vol. 19, No. 10, pp. 817-843, 1972.
4. Kurashov V.N., Marienko V.V., Molebna T.V., Chumakov A.G. "Polarization changes in coherent electromagnetic radiation stattering by the rough surface", *SPIE*, Vol. 2647, pp. 48-56, 1995.
5. Fainman V., Shamir J., Peri D., Brunfeld A. "Polarization properties of speckle patterns scattered from rough conductors" *J.Opt.Soc.Am.A.*, Vol. 4, No. 12, pp. 2205-2212, 1987.
6. Ohidal J., Lukef F. "Ellipsometric parameters of rough surfaces and of a system substrate-thin film whiz rough boudaries" *Opt.Acta*, Vol. 19, No. 10, pp. 817-843, 1972.
7. А.О.Голобородько, В.Н.Курашов "Моделювання деполаризації когерентного випромінювання при багаторазовому розсіюванні" *Вісник Київського університету*, 2, ст. 246-255, 2003.
8. Born M., Wolf E., *Principles of optics*, Oxford, 1980
9. G.W.Goodman, *Statistical optics*, John Wiley and Sons, New York-Chichester-Brisbane-Toronto-Singapore, 1985

Надійшла до редакції 25.09.2005

УДК 535.5:621.029.7

Валерій І. Григорук,
Юрій Т. Онисько,
Юрій А. Слінченко,
Володимир С. Шанойло

**Поляризаційна самодія гаусових
еліптичних пучків в середовищі з
кубічною нелінійністю
поляризації**

Теоретично досліджено
поляризаційну самодію оптичного
випромінювання при поширенні в
середовищі з кубічною нелінійністю.
Знайдено залежності кута повороту
еліпса поляризації і коефіцієнт
еліптичності збуджуючої хвилі в процесі
розповсюдження. Встановлено, що зі
зменшенням діаметра хвилезода
збільшується швидкість зростання
вищезгаданого кута повороту.

Ключові слова: коефіцієнт
еліптичності, самофокусування.

Valeri I. Grygoruk, Yuri T. Onys'ko,
Yuri A. Slinchenko,
Volodymyr S. Shanoylo

**Polarization Self-action of Gauss
elliptic beams in a medium with
cubic polarization nonlinearity**

*Polarization self-action of optical
beam, which spreads in a medium with cubic
nonlinearity, was studied theoretically.
Dependencies of a polarization ellipse
rotation angle and elliptical coefficient of a
wave propagating were found. It was
determined that the speed of the rotation
angle growth increases with decrease of the
waveguide diameter.*

*Key Words: elliptic coefficient, self-
focusing*

При теоретичному описі поляризаційної самодії світла під час поширення в середовищі з кубічною нелінійністю поляризації $\bar{P}_{nl}$, як правило [1], електромагнітне поле апроксимувалось плоскою монохроматичною хвилею $\bar{E}$. Разом з тим в реальних випадках доводиться мати справу з обмеженими пучками [2]. При цьому виникають нові особливості поляризаційної самодії пучків світла, які (особливості) є наслідком обмеженості пучка. Окрім того важливим є дослідження розповсюдження пучків світла в нелінійних хвильоводних структурах і, зокрема, впливу границі середовища на просторову еволюцію поляризації пучків світла.

Нехай в ізотропне середовище, яке має кубічну нелінійну поляризацію, ззовні потрапляє еліптично поляризований пучок із гаусовим розподілом поля на вході в середовище. Еліптичний вектор запишемо у вигляді:

$$\bar{E} = \bar{E}_0(x, y, z)e^{i(k_0 z - \omega t)} + \text{к.с.},$$

де $\bar{E}_0$ - плавна функція поздовжньої координати z . При цьому нелінійна поляризація описується наступним виразом:

$$\bar{P}_{nl} = a|\bar{E}|^2 \bar{E} + b\bar{E}^2 \bar{E}^* \quad (1)$$

Тут a і b – відомі константи, які в області прозорості є дійсними величинами. Ввівши в площині $ХОУ$ орти $\bar{e}_x, \bar{e}_y$, представимо $\bar{E}_0$ у вигляді $\bar{E}_0 = A(\bar{e}_x\psi_x + \bar{e}_y\psi_y)$, де $\psi_{x,y}$ – складові еліптичної поляризації, A – множник нормування, значення якого порядку амплітуди x -компоненти поля в центрі пучка в площині $z=0$. Предметом розрахунку є комплексні скалярні амплітуди ψ_x, ψ_y . Для розрахунку задачі використаємо традиційні параболічні рівняння нелінійної оптики [3], яким задовольняють визначники $\psi_{x,y}$. У випадку аксіальної симетрії ці рівняння такі:

$$\begin{aligned} i\frac{d\psi_x}{d\zeta} &= \frac{1}{2}\Delta_\perp\psi_x + \alpha|\psi_x|^2\psi_x + \beta|\psi_y|^2\psi_x + \gamma\psi_y^2\psi_x^*, \\ i\frac{d\psi_y}{d\zeta} &= \frac{1}{2}\Delta_\perp\psi_y + \alpha|\psi_y|^2\psi_y + \beta|\psi_x|^2\psi_y + \gamma\psi_x^2\psi_y^*. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{Тут } \zeta = \frac{z}{ka_0^2}, \quad \alpha = \frac{2\pi\omega^2 a_0^2(a+b)}{c^2} A^2, \quad \beta = \frac{2\pi\omega^2 a_0^2 a}{c^2} A^2, \quad \gamma = \frac{2\pi\omega^2 a_0^2}{c^2} A^2,$$

$$\Delta_\perp = \frac{d^2}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d}{dR}, \quad R = \frac{r}{r_0}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r_0 - \text{радіус пучка на вході в середовище.}$$

Система рівнянь (2) розв'язана чисельно в широких діапазонах змін параметрів α, β, γ . Граничні значення для величин $\psi_{x,y}$ допускались рівними

$$\psi_{x/y/\zeta=0} = e^{-R\zeta}, \quad \psi_{y/\zeta=0} = e^{-R\zeta} \rho e^{i\varphi}, \quad (3)$$

де ρ, φ – відомі дійсні числа.

На рис. 1 і 2 представлені деякі з отриманих результатів, які відображають найбільш характерні закономірності, обумовлені обмеженістю пучка. Більш наглядними у порівнянні з $\psi_{x,y}$ є такі параметри, як величина кута повороту еліпса поляризації χ відносно системи координат, зв'язаної з ортами $\bar{e}_x, \bar{e}_y$, а також коефіцієнт еліптичності k_{el} (відношення напівосей еліпса). Величини χ і k_{el} відомим чином пов'язані з $\psi_{x,y}$ [4]. Під час проведення чисельних розрахунків враховувалось, що в загальному випадку еліпс на вході може бути орієнтованим довільним чином, так що, взагалі кажучи, $\chi/\zeta=0 = 0$.

На рис. 1 представлена залежність величин χ і k_{el} від ζ в різних перерізах пучка. Як видно, наявність поперечної неоднорідності призвела до появи суттєвої залежності χ і k_{el} від R . На відміну від випадку плоских хвиль, нелінійною стала також залежність $\chi(\zeta)$ і $k_{el}(\zeta)$. Отже, поперечна неоднорідність, а значить, і наявність самофокусування, призвели до значного ускладнення поляризаційної структури пучка світла. З іншого боку, параметрична взаємодія ортогональних складових має зворотній вплив на ефект самодії. Це сприяє більш швидкому, у порівнянні з лінійно поляризованим пучком, спотворенню початкового гаусового розподілу поля і відмінне по довжині фокусування для двох компонент.

На рис. 2 наведена просторова еволюція еліптично поляризованого пучка світла. Потужність пучка нижче порогової для самофокусування, тому відбувається його уширення внаслідок дифракції. В процесі поширення пучка в середовищі разом з дифракцією відбувається перекачування енергії між взаємно ортогональними компонентами. На віддальх порядку кількох дифракційних довжин виникає сильне слотворення просторового розподілу поля в компонентах, і воно перестає бути гаусовим; з'являється дифракційна структура пучка.

Дослідження впливу границі нелінійного хвильоводного середовища на стан поляризації і поперечний розподіл поля рівносильне розв'язуванню наступної задачі: поширення гаусового пучка світла в оптичному світловоді. При цьому допускається, що за рахунок повного внутрішнього відбиття випромінювання в оптичну оболонку волокна не виходить, а поле поблизу краю волокна плавно зменшується. На границі виконується умова $\psi_- = \psi_+ = 0$.

Результати чисельного розв'язку системи (2) з граничними умовами (3) приведені на рис.3. Зі зменшенням діаметра хвильовода відбувається збільшення швидкості зростання кута повороту χ і зменшення амплітуди осциляцій залежності $\chi(\zeta)$. За умови, що пучок повністю перекриває апертуру волокна на вході, залежність $\chi(\zeta)$ стає лінійною і майже повністю співпадає з аналогічною залежністю для плоских однорідних хвиль. Зменшення діаметра хвильовода призводить до того, що пучок, який мав потужність нижче порогової у випадку безмежного нелінійного середовища, починає періодично змінювати свою ширину, тобто поводить себе як пучок із закритичною потужністю. В даному випадку відбувається часткова компенсація дифракційного розпливання пучка за рахунок направляючої дії світловода, в результаті чого поріг самофокусування знижується. Таким чином, як і у випадку безмежного середовища, поляризаційна самодія пучків світла в ізотропному хвильоводі з кубічною нелінійною поляризацією приводить до виникнення неоднорідної по перерізу пучка поляризаційної структури.

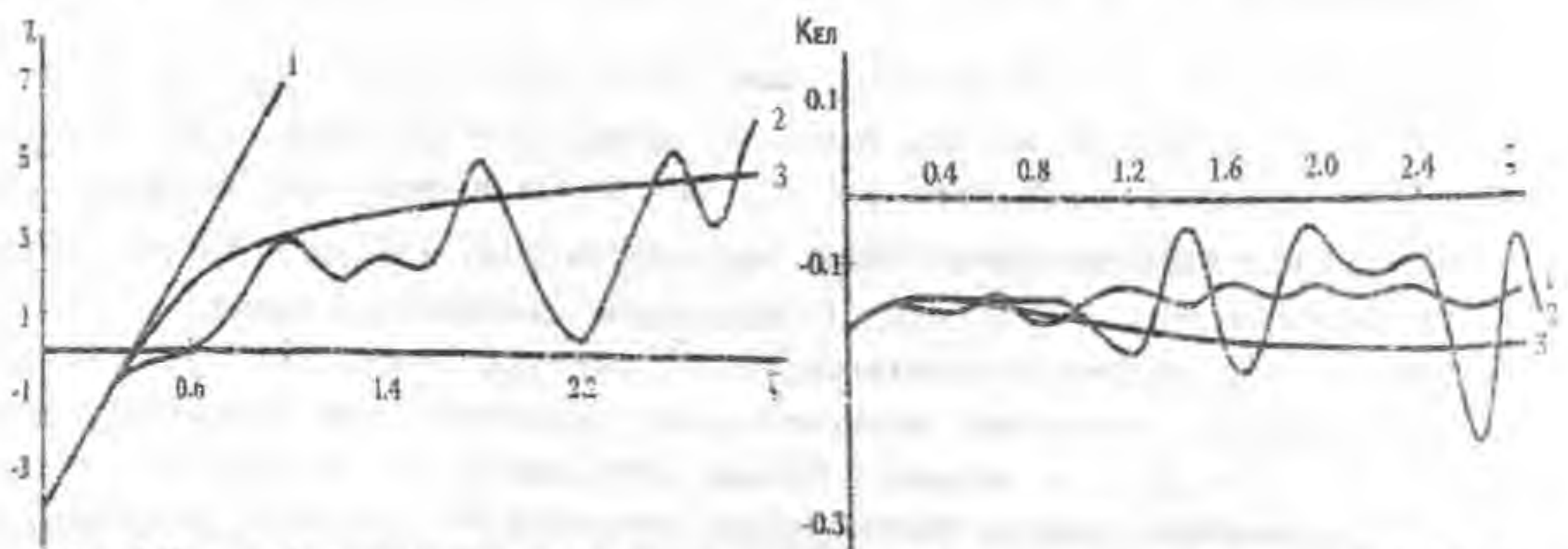


Рис.1 Залежність кута повороту еліпса χ і коефіцієнта поляризації k_{ell} від ζ в різних перерізах пучка (1: $R < 1$; 2: $R = 1$; 3: $R > 1$)

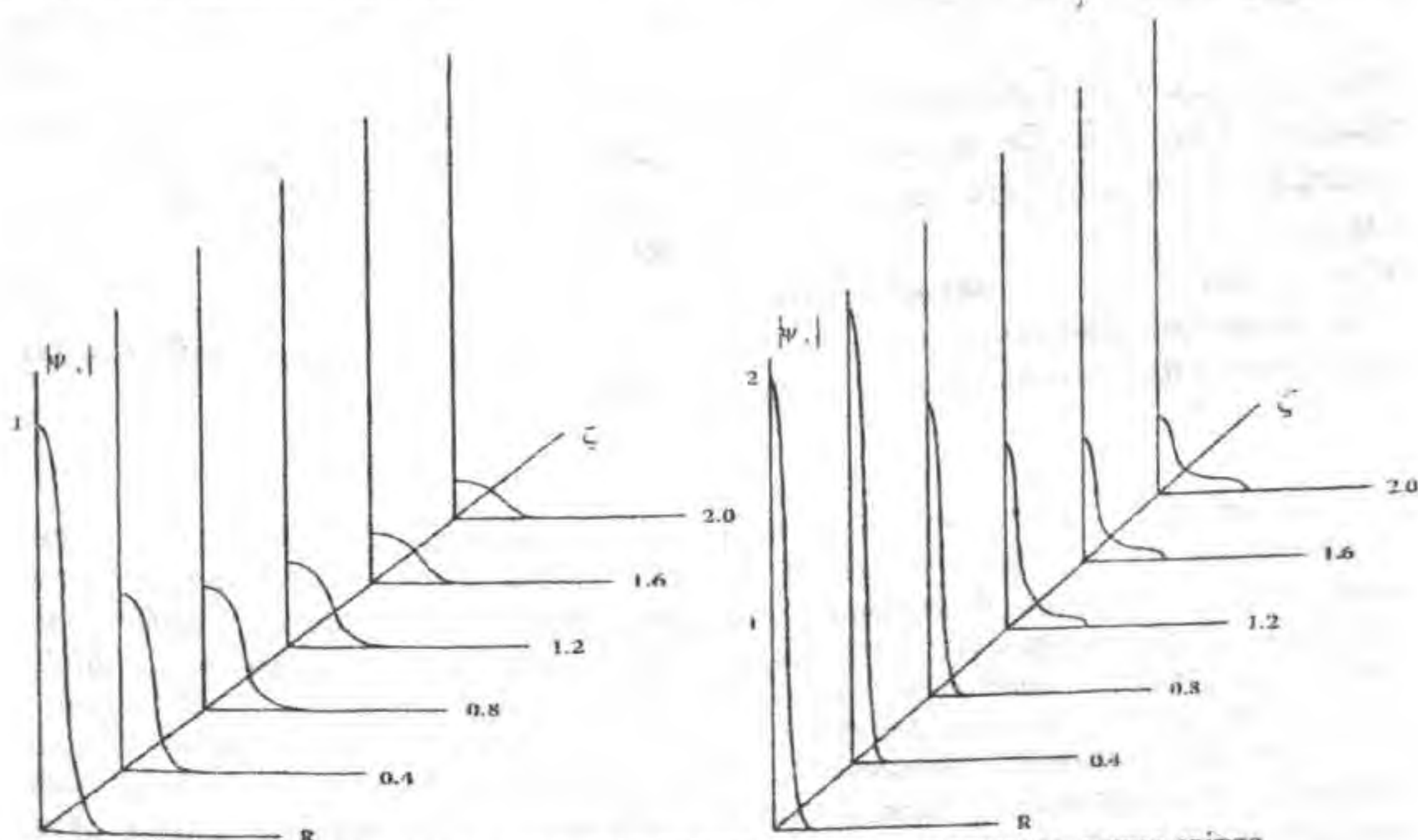


Рис. 2 Просторова еволюція еліптично поляризованого пучка світла

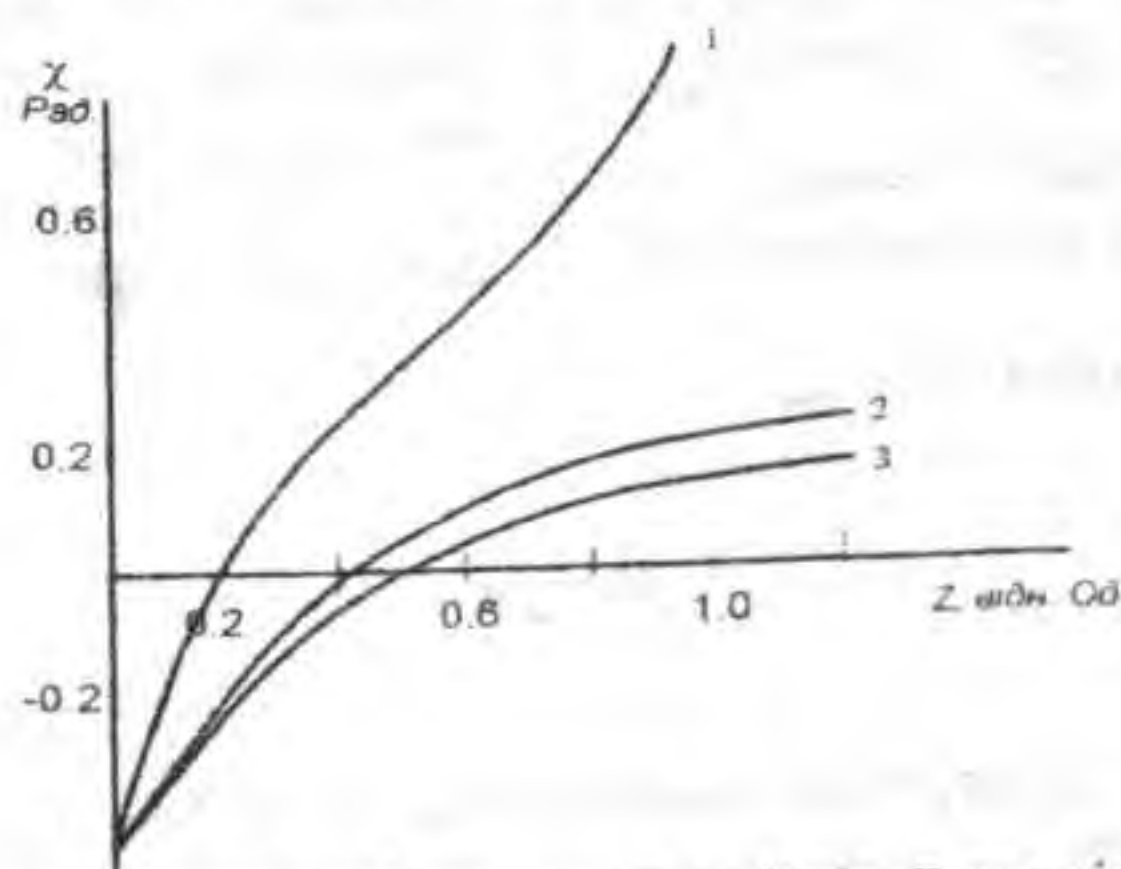


Рис. 3 Залежність кута повороту χ еліпса поляризації від ζ для різних значень радіусу r_0 пучка на вході в хвильовод. 1: r_0 рівний радіусу серцевини хвильовода; 2,3: r_0 менший радіуса хвильовода в 4 і 16 разів відповідно.

Література

1. Григорук В.І., Коротков П.А., Хижняк А.І. Лазерна фізика. – К., "МП "Леся", 1999. – 528с.
2. Агравал Г. Нелинейная волоконная оптика. Пер. с англ. – М.: Мир, 1996. – 323с.
3. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. – М.:Наука, 1979. – 383с.
4. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. – М.:Наука, 1973. – 719с.

Надійшла до редколегії 27.09.2005

УДК 534:615.47:616-074

Леонід М. Ільченко*, Сергій О.
Колєнов, Сергій В. Литвиненко,
Павло В. Молочко, Євген М.
Смирнов

Механізми виникнення
диференційно-фазового
фотоелектричного відгуку

Проведено розрахунки та експерименти, які показали принципову можливість виникнення диференційно-фазового фотоелектричного відгуку. Вивчено залежність амплітуди відгуку від частоти розщеплення променів для р-п переходів деяких фотодіодів. Отримано фотовідповідні зображення лінійного провідника при різній частоті розщеплення, вигляд яких збігається з розрахованим з теоретичної моделі.

Ключові слова: акустооптика, скануюча мікроскопія, фотоелектричний відгук.

*E-mail: ilchenko@univ.kiev.ua

Leonid N. Ilchenko*, Sergiy O.
Kolyenov, Sergiy V. Litvinenko,
Pavel V. Molochko, Eugen N.
Smirnov,

Formation of phase-differential
LBIC

Theoretical calculations and experiments were carried out to show general possibility of obtaining differential-phase photoelectric response (LBIC). Dependence of amplitude of the response on frequency of splitting of beams for p-n transitions of some photo diodes was investigated. Photoresponse images of a linear conductor were received at various frequency of splitting. Character of obtained data is in good agreement with theoretical model.

Key Words: acoustooptics, scanning microscopy, LBIC.

Вступ

В лазерній скануючій мікроскопії (ЛСМ) одним з найбільш перспективних для дослідження напівпровідників є режим фотоелектричного відгуку (ФЕВ). Використання мікроскопа у цьому режимі дозволяє отримати виключно важливу інформацію о дефектах та пошкодженнях напівпровідникових структур [1-3]. Зондування проводиться лазерним променем, сфокусованим на поверхні напівпровідникової структури, який збуджує в напівпровіднику нерівноважні носії заряду, що призводить до виникнення фотоструму, який залежить від ряду параметрів. Однак процеси релаксації призводять до розпливання носіїв заряду, що знижує чіткість та контрастність фотовідповідного зображення. В той же самий час існує особливий режим

роботи ЛСМ – диференційно-фазовий, при цьому зображення, отримані в цьому режимі в пройденному, відбитому [4, 5], розсіяному або люмінесцентному світлі [6] відрізняються особливою чіткістю та інформативністю. Тому дуже привабливим є отримання фотовідповідного зображення саме в диференційно-фазовому режимі. Механізми виникнення диференційно-фазового фотоелектричного відгуку досі були мало вивчені. В даній роботі розглядаються механізми формування диференційно-фазового ФЕВ при використанні акустооптичних методів і можливості отримання диференційно-фазового фотовідповідного зображення.

Теоретичне обґрунтування

У відповідності із принципами диференційно-фазової мікроскопії зондування поверхні об'єкта відбувається двома близько розташованими лазерними пучками, що мають близькі частоти, та рознесені на деякий кут. Зробити це можна різними методами, однак, найбільш привабливими є акустооптичні методи [7, 8]. Зондуючі лазерні промені, фокусуються на

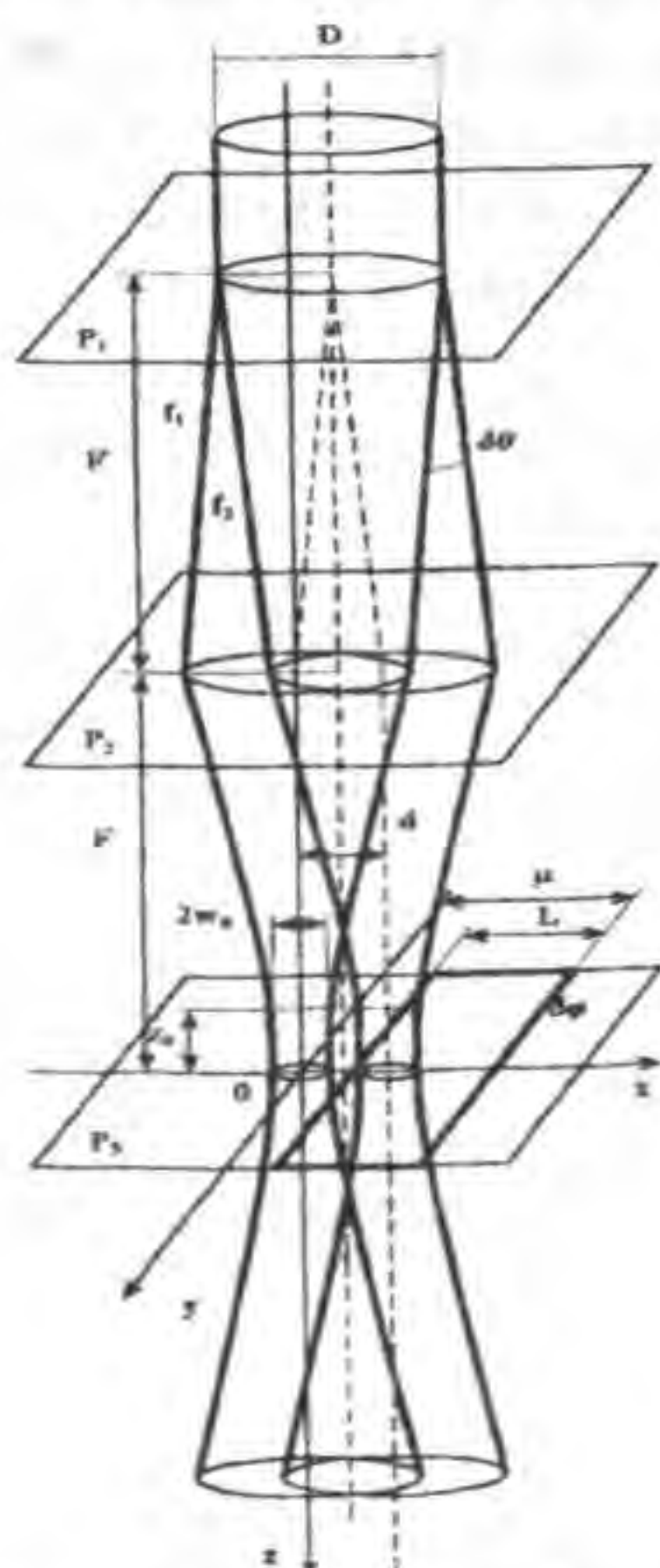


Рис. 1. Зондуючі лазерні промені.

поверхню напівпровідникової платівки, як подано на рис. 1, причому центр сканування дефлектора, об'єктив та поверхня платівки розташовані у паралельних площинах P_1 , P_2 та P_3 відповідно, крім того один з пучків падає на фазову платівку, яка додає до фази коливань електромагнітного поля деякий фазовий набіг $\delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ тим самим моделює певні поверхневі особливості напівпровідника. Ці промені мають зсув частоти $\delta f = f_1 - f_2$ та рознесені просторово за допомогою акустооптичного дефлектора на кут $\delta\theta$. Величина цього кута пов'язана з величиною частотного зсуву:

$$\delta\theta = \frac{\lambda_0}{V} \delta f \quad (1)$$

де V – швидкість звуку, λ_0 – довжина хвилі лазера.

На поверхні зразка ці промені будуть рознесені на відстань d :

$$d = \frac{\lambda_0 \cdot \delta f \cdot F}{V}, \quad (2)$$

де F – фокусна відстань об'єктива.

Якщо світлові пучки мають гаусів розподіл амплітуди, тоді розподіл поля у кожному промені матиме вигляд:

$$E(x, y, z) = \frac{E_0}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}} \cdot \exp \left\{ -i \left(kz - \arctg \left(\frac{z}{z_0} \right) \right) - (x^2 + y^2) \left(\frac{1}{w_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right)} + \frac{ik}{2z \left(1 + \frac{z_0^2}{z^2} \right)} \right) \right\}, \quad (3)$$

де E_0 – амплітуда, $k = 2\pi/\lambda$ – хвильовий вектор, w_0 – ширина пучка в області перетяжки, $z_0 = \pi w_0^2/\lambda$ – відстань від області перетяжки до області, де кривизна хвильового фронту є найбільшою, λ – довжина хвилі.

Відомо, що поглинання в напівпровіднику є дуже суттєвим, так, наприклад, в Si на глибині 3 мкм інтенсивність випромінювання на довжині хвилі 0,63 мкм згасає в 6 раз [2]. Оцінка z_0 для тієї самої довжини хвилі, та ширини сфокусованого пучка 5 мкм, дає значення $z_0 = 124$ мкм. Тобто, реально можна говорити про ефекти на відстанях $z \ll z_0$. В цих межах хвильовий фронт можна вважати плоским. Тоді вираз значно спрощується і амплітуди полів для кожного з пучків подаються у вигляді:

$$E_1(x, y, z, t) = E_{01} \cdot \exp \left\{ -i(k_1 z + k_1 c t + \varphi_1) - \frac{x^2 + y^2}{w_0^2} - \alpha \cdot z \right\}, \quad (4)$$

$$E_2(x, y, z, t) = E_{02} \cdot \exp \left\{ -i(k_2 z + k_2 c t + \varphi_2) - \frac{(x+d)^2 + y^2}{w_0^2} - \alpha \cdot z \right\}, \quad (5)$$

де φ_1, φ_2 – фази пучків, c – швидкість світла, $\alpha \cdot z$ враховує поглинання світла в напрямку розповсюдження.

Взаємодія сумарного поля $E(x, y, z, t) = E_1(x, y, z, t) + E_2(x, y, z, t)$ з матеріалом напівпровідника призведе до появи в ньому надлишкових (нерівноважних) носіїв – дірок та електронів, що призведе до появи фотоелектричного відгуку.

Інтенсивність світла (з точністю до коефіцієнта), яка буде реєструватись в певній точці об'єкту:

$$I(x, y, z) = \langle (E_1(x, y, z, t) + E_2(x, y, z, t))^2 \rangle = \langle (E_1(x, y, z, t) + E_2(x, y, z, t)) \cdot (E_1(x, y, z, t) + E_2(x, y, z, t))^* \rangle, \quad (6)$$

тобто усереднений по часу квадрат суми полів.

Припустимо, що час життя нерівноважних носіїв заряду $\tau \ll 1/(\omega_1 - \omega_2)$. Тоді кількість надлишкових дірок та електронів буде пропорційна до інтегралу інтенсивності по об'єму зразка:

$$n(t) \sim \iiint_V I(x, y, z, t) dx dy dz \quad (7)$$

Якщо різниця оптичних частот мала, $\omega_1 - \omega_2 \ll \omega_1, \omega_2$, то доданок на цій частоті усереднено не буде, тому надалі для спрощення викладок розглядається лише доданок, який є пропорційним $E_{01}E_{02}$.

Після інтегрування та спрощення, матимемо:

$$n(t) \sim \frac{\pi \cdot w_0^2 \cdot E_{01}E_{02} \cdot e^{-\frac{d^2}{2w_0^2}}}{\sqrt{(k_1 - k_2)^2 + 4\alpha^2}} \cdot \cos\left(ct(k_1 - k_2) + \varphi_1 - \varphi_2 - \arccos\left(\frac{2\alpha}{\sqrt{(k_1 - k_2)^2 + 4\alpha^2}}\right)\right) \quad (8)$$

Таким чином бачимо, що фотострум виникає на різницевої частоті $\delta f = f_1 - f_2$ і містить різницеву фазу $\delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, тобто це є диференційно-фазовий фотоелектричний відгук. Амплітуда та фаза фотоелектричного відгуку залежить від декількох параметрів, тому з метою наочності аналізу наведемо розраховані залежності записав d через $k_1 - k_2$ з (2):

$$d = \frac{\lambda c(k_1 - k_2)F}{2\pi V} \quad (9)$$

Залежності амплітуди та фази фотоелектричного сигналу від величини розщеплення при постійному коефіцієнті поглинання світла та коефіцієнта поглинання світла при постійній величині розщеплення для ширини світлових пучків $w_0 = 4$ мкм наведено на рис. 2 та рис. 3 відповідно.

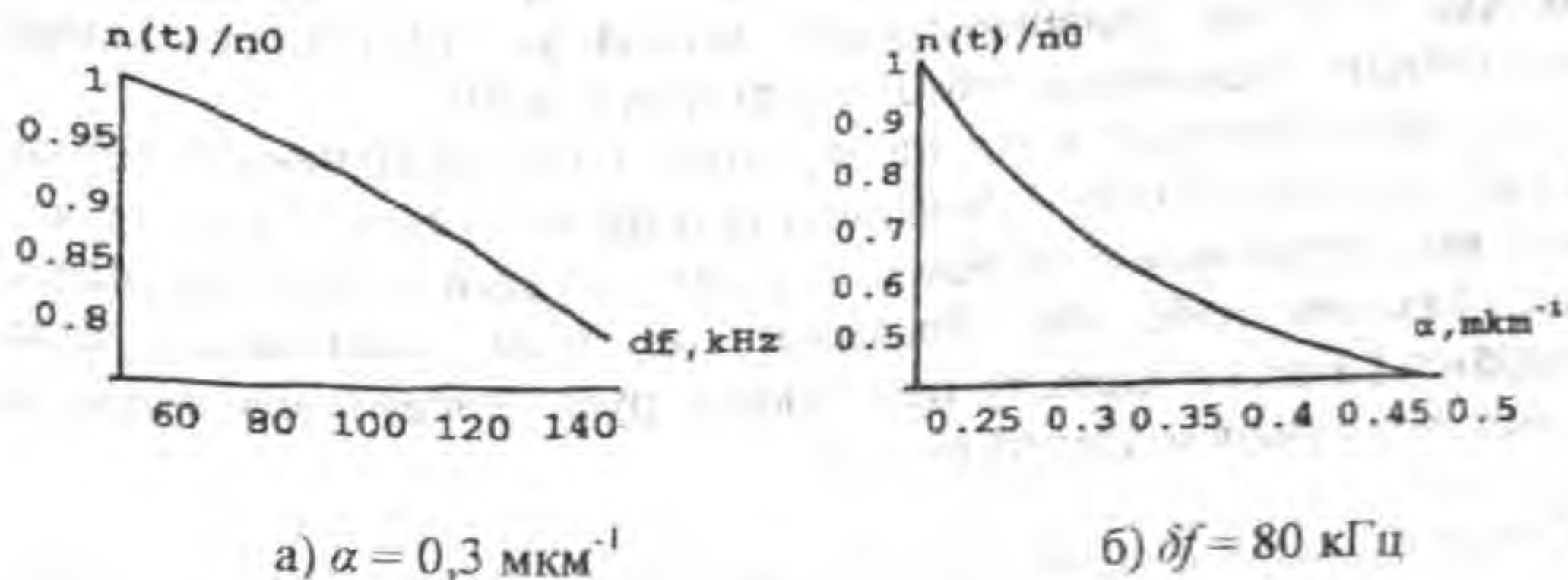


Рис. 2. Залежності амплітуди фотоелектричного сигналу.

При аналізі цих залежностей з точки зору використання диференційно-фазового фотоелектричного відгуку в лазерної скануючої

мікроскопії при дослідженні напівпровідників слід відмітити, що більш важливими є фазові залежності, оскільки всі амплітудні зміни вирівнюються при опрацюванні сигналу. Але рівень сигналу все ж повинен перевищувати деяке значення. Як бачимо з рис. 2 амплітуда сигналу зменшується з підвищенням величини розчеплення та коефіцієнта поглинання світла. Це обмежує можливість використання таких методів при великій частоті та для напівпровідників з великим поглинанням світла. Для диференційно-фазового ЛСМ інформаційним є фазовий сигнал, що складається з двох чинників. Як бачимо з виразу (7) це складова $\delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ яка виникає за рахунок фазових змін між двома пучками та складова, обумовлена змінами в величині розчеплення та коефіцієнта поглинання світла.

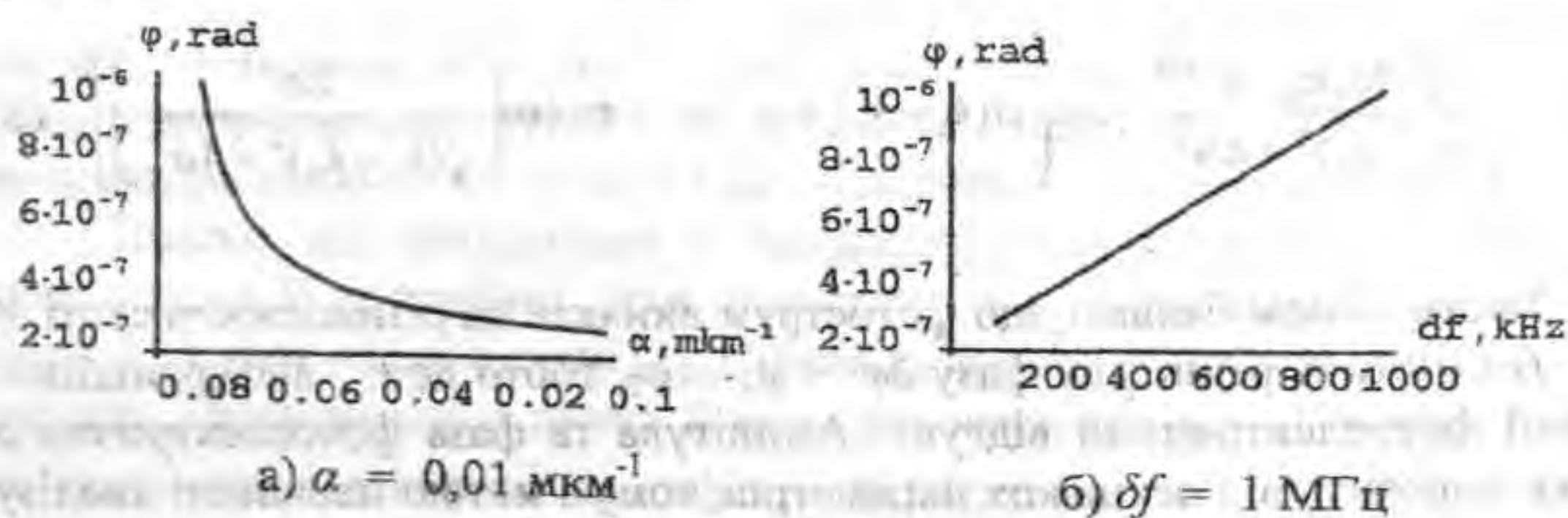


Рис. 3. Залежності фази фотоелектричного сигналу.

Ці зміни відносно суттєві (рис. 3), але по абсолютному значенню дуже малі порівняно із складовою $\delta\varphi$. Тому вважатимемо, що інформаційний сигнал виникає в основному за рахунок фазових змін між двома пучками на поверхні.

В лазерній скануючій мікроскопії формування зображення здійснюється за допомогою руху зондуючих променів у растровому режимі за лінійним законом. Враховуючи те, що ефектами, які відбуваються в об'ємі напівпровідника, можна знехтувати, розглянемо випадок лінійного сканування, тобто одновимірну задачу.

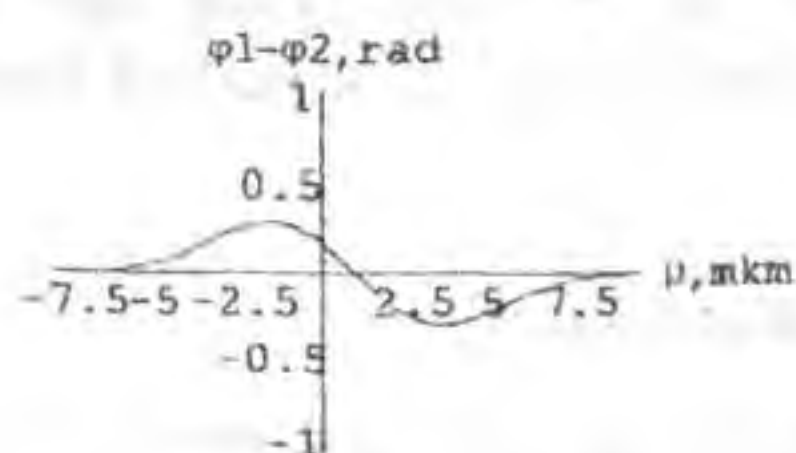
Розглянемо випадок, коли на поверхні напівпровідника є фазова платівка обмеженої довжини L , координата її правого кута μ (рис. 1), яка рухається під нерухомими пучками, і додає до фази електромагнітних коливань фазовий набіг $\delta\varphi$. Покажемо, як буде змінюватись фаза диференційно-фазового сигналу при такому русі. Вирази для амплітуд полів кожного з пучків матимуть вигляд:

$$E_1(x, t) = E_{01} \cdot \exp \left\{ -i(k_1 ct + \varphi_1 + \delta\varphi \cdot (H(x + \mu) - H(x + \mu - L))) - \frac{x^2}{w_0^2} \right\}; \quad (10)$$

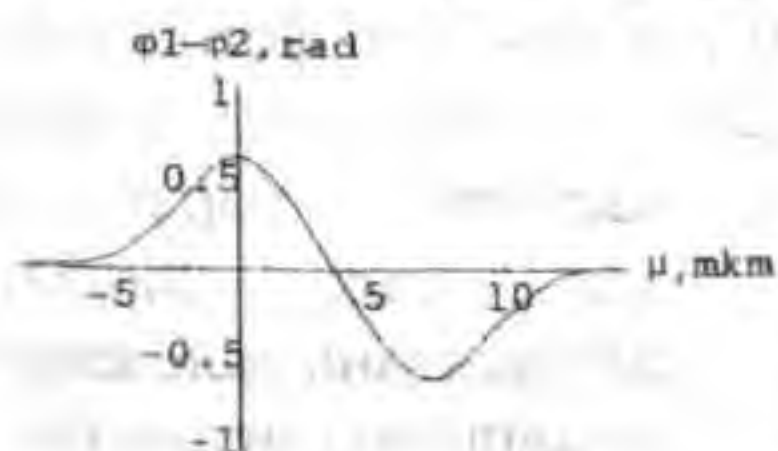
$$E_2(x, t) = E_{02} \cdot \exp \left\{ -i(k_2 ct + \varphi_2 + \delta\varphi \cdot (H(x + \mu + d) - H(x + \mu - L + d))) - \frac{(x + d)^2}{w_0^2} \right\}; \quad (11)$$

$$\text{де } H(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

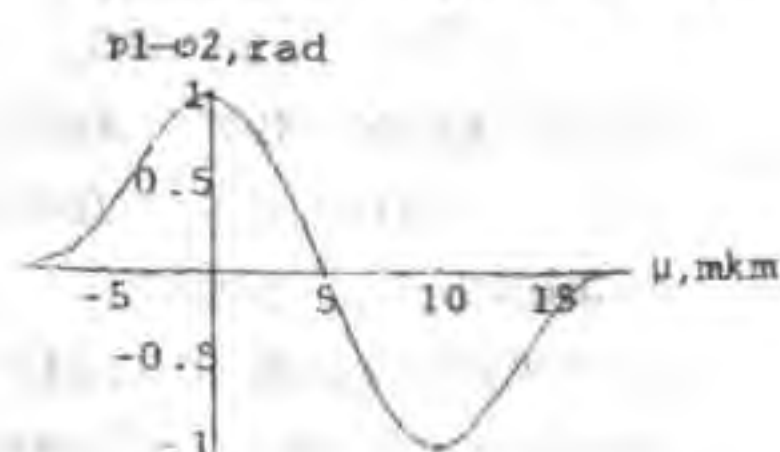
Наступні розрахунки проводились чисельно у середовищі Mathematica 4.2 за наступним алгоритмом: спочатку знаходився інтеграл



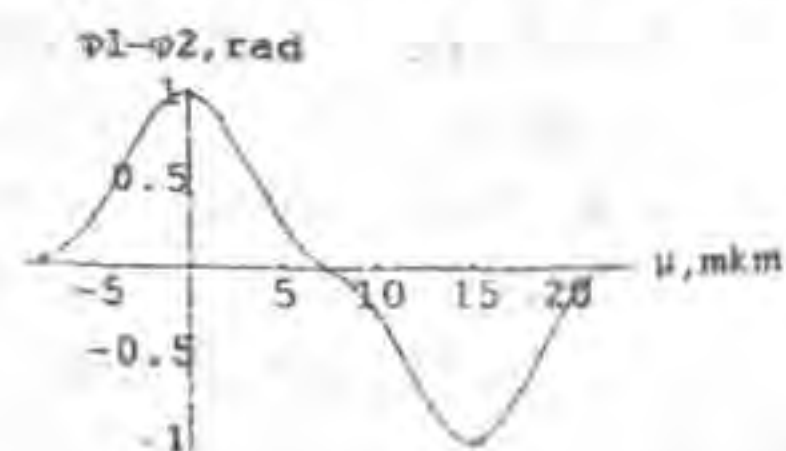
а) $d = 4$ мкм, $L = 2$ мкм



б) $d = 4$ мкм, $L = 7$ мкм



в) $d = 8$ мкм, $L = 10$ мкм



г) $d = 8$ мкм, $L = 15$ мкм

Рис. 4. Залежності фази диференційно-фазового сигналу від координати.

вимірювань. Тому необхідно збільшити відстань між пучками так, щоб вона була більше, або рівна ширині пучків $2w_0$ (рис. 4 в - г). Але як видно з

(8) з урахуванням (10) та (11). Обрахунок проводився в момент часу $t = 0$, бо цікава лише початкова фаза диференційно-фазового сигналу. Потім знаходилося відношення цього значення до максимального значення сигналу та брався арккосинус отриманого відношення, таким чином знаходилося значення фази диференційного сигналу. Підставивши (10, 11) у (8) після чисельного інтегрування та виділення фази отриманого сигналу, одержимо залежності фази диференційно-фазового сигналу від координати правого краю пластинки μ .

Результати розрахунків, при $\delta\phi = \pi/3 \approx 1.05$, $w_0 = 4$ мкм, подано на рис. 4. Отже бачимо, що при скануванні платівки під нерухомими променями (променів по нерухомій пластинці), у напрямку, що був ортогональний до вісі платівки, фаза диференційно-фазового відгуку не змінюється миттєво, при цьому, якщо відстань між пучками менше ширини кожного з пучків, то амплітудне значення фази, яке є джерелом інформації про висоти рельєфних особливостей, не досягає потрібного значення $\delta\phi$ (рис. 4 а - б). Це може призвести до появи постійної похибки таких

рис. 4 а, якщо довжина пластинки L менше відстані між пучками d , то відстань між максимумом та мінімумом на фазовій залежності, яка має визначати відстань L , дорівнює d . Таким чином можна передбачити, що про достовірність вимірювання фазового набігу $\delta\varphi$ можна говорити тільки якщо відстань між пучками рівна, або більше ширини пучка, при цьому мінімальний розмір об'єкта в напрямку сканування, який можна виміряти визначається відстанню між пучками.

Експериментальні результати

Експериментальні дослідження проводилися за допомогою моделі ЛСМ, що була розроблена раніше [2], але інформаційний сигнал знімався безпосередньо з напівпровідникової структури. Було знято амплітудно-частотні характеристики фотоелектронного відгуку для фотодіодів типів ФД-7К, ФД-17К, ФД-263, ФД-21КП. На рис. 5. зображені амплітудно-

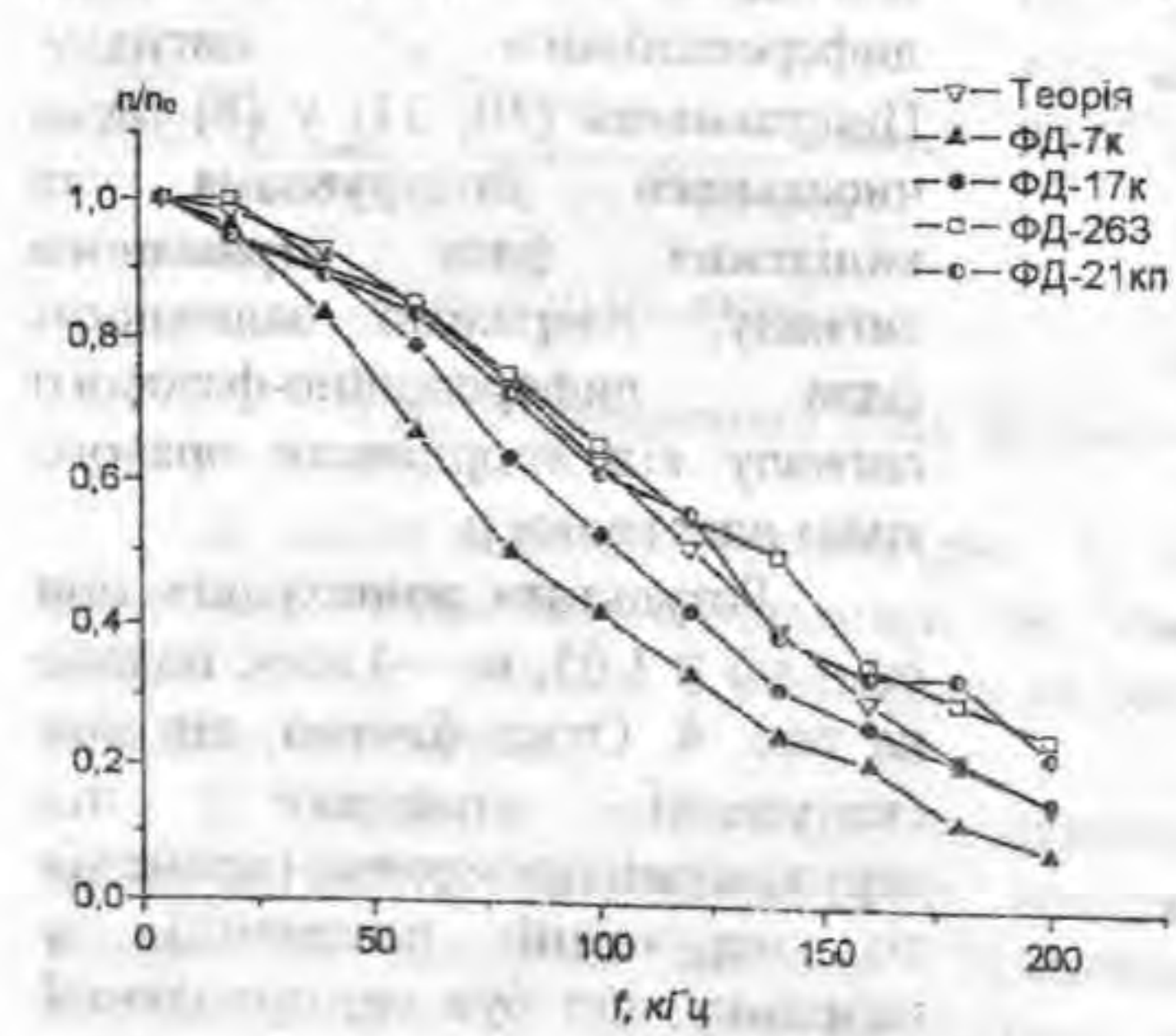


Рис. 5. Амплітудно-частотна характеристика ФЕВ для різних діодів.

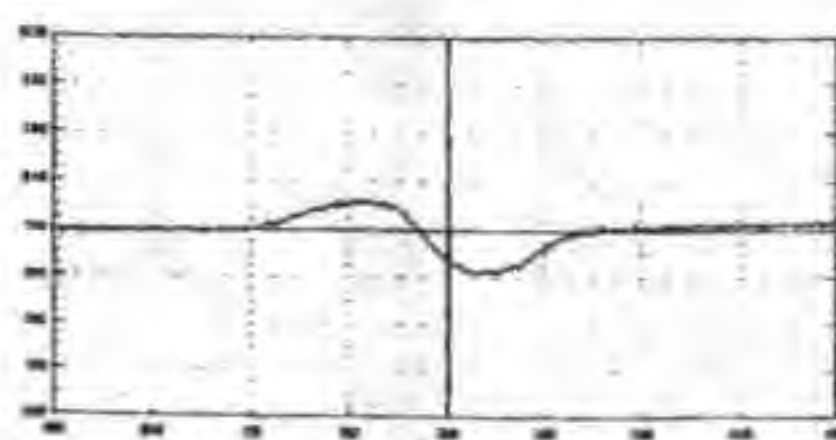
частотні характеристики для цих діодів, та розрахована залежність, для напівпровідникового зразка з коефіцієнтом затухання $\alpha=0,3 \text{ мкм}^{-1}$.

Як бачимо, зняті характеристики якісно, а для декількох діодів, і кількісно досить добре узгоджуються з теоретично розрахованою. Відмінність характеристики для діодів ФД-7К, та ФД-17К можна пояснити відмінністю у коефіцієнтах поглинання для цих діодів, адже як видно з рис. 2 амплітуда

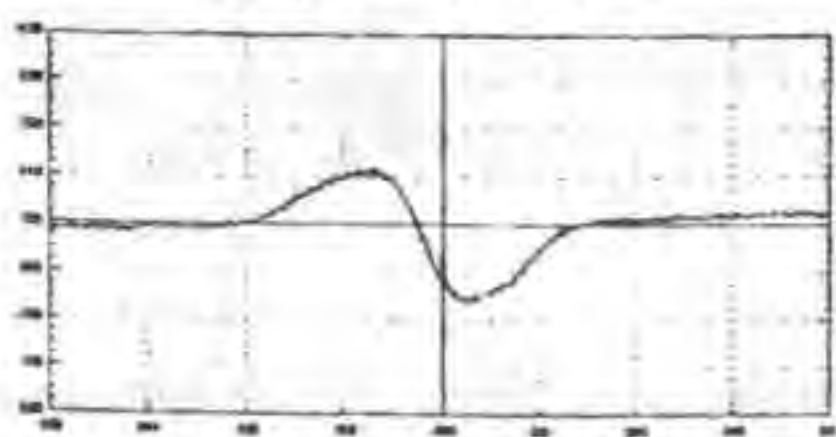
сигналу сильно залежить від коефіцієнту поглинання світла в напівпровіднику. Тобто бачимо, що експериментальні результати досить добре узгоджуються з теоретично очікуваними.

При дослідженні залежності фази диференційно-фазового сигналу від координати для фазової пластинки виникли деякі труднощі, пов'язані з моделюванням об'єкта, розглянутого при теоретичному опису. Тому був обраний найбільш подібний об'єкт – лінійний плівковий провідник на поверхні р-п переходу напівпровідникового фотодіоду ФД-263. Зондуючі промені сканувалися по лінійному закону у напрямку, що був ортогональний до вісі провідника. Отримано декілька зображень з різними

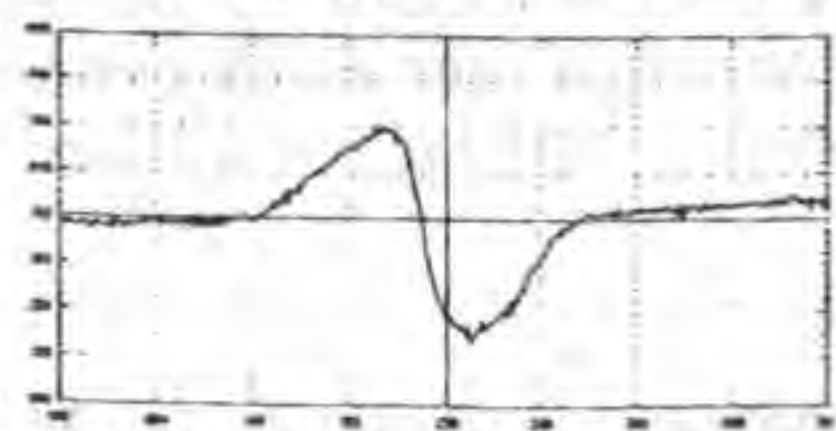
значеннями частоти розчеплення. Частоти розчеплення встановлювалися у діапазоні найбільших змін у вигляді залежностей. На рис. 6 зображені



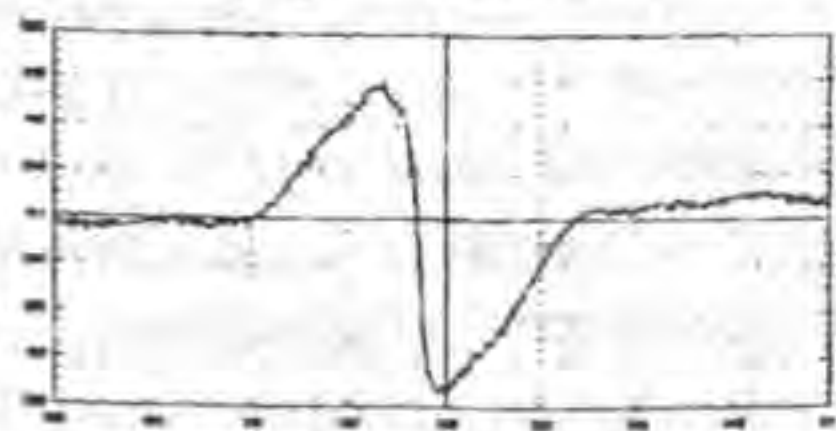
а) $\delta f = 100$ кГц



б) $\delta f = 140$ кГц



в) $\delta f = 180$ кГц



г) $\delta f = 220$ кГц

Рис. 6. Залежності фази диференційно-фазового сигналу від координати.

для напівпровідника часи релаксації набагато менші ніж період зміни інтерференційної картини в зразку. Підвищення частоти розщеплення обмежується фільтрами які знаходяться в фазовому детекторі.

Для демонстрації можливостей роботи мікроскопу в режимі диференційно-фазового фотоелектричного відгуку було отримано декілька зображень світлочутливих ділянок деяких напівпровідникових структур.

одновимірні залежності фази диференційно-фазового сигналу від координати при скануванні променів при частоті розчеплення δf від 100 кГц до 220 кГц. Масштаб по вертикальній вісі від 0 до 1024 відповідає зміні фази від 0 до $\delta\varphi_{\max}$. Масштаб по горизонтальній вісі від 0 до 512 відповідає зміні координати уздовж лінії сканування від 0 до $L_{\max}$.

Отриманий диференційно-фазовий сигнал узгоджується з теоретичною моделлю яку було запропоновано, оскільки виникає зсув фази сигналу-відгуку коли один промінь знаходиться на р-п переході, а інший знаходиться на плівковому провіднику, та навпаки коли промені міняються місцями відбувається такий же зсув але з іншим знаком. Це свідчить про те, що відносне положення променів і фазового об'єкту має вирішальну роль при виникненні сигналу-відгуку, що передбачалося в теорії.

Треба сказати що, залежність фази сигналу відгуку від локальної характеристика часу релаксації неосновних носіїв не було знайдено, оскільки типові

На рис. 7 подано диференційно-фазове зображення плівкових провідників, що нанесено на поверхню р-п переходу фотодіоду.

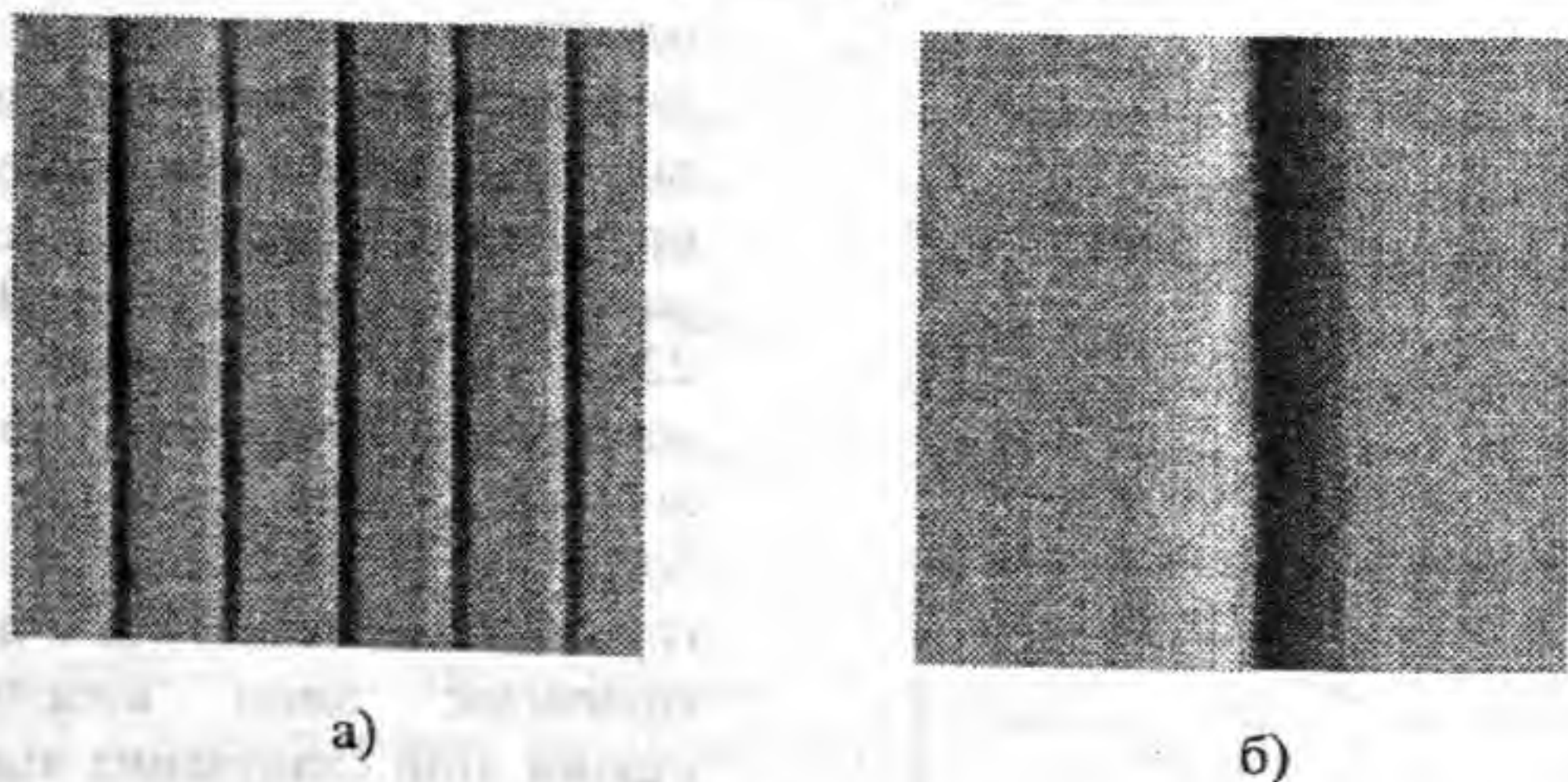


Рис. 7. Диференційно-фазове зображення плівкових провідників на поверхні фотодіоду.

На рис. 7, б подано збільшене зображення одного провідника. Це зображення отримано не за рахунок використання іншого об'єктиву, а за рахунок зменшення смуги частот керуючого сигналу, тому має дещо меншу чіткість.

Висновки

Запропонований механізм виникнення диференційно-фазового фотоелектричного відгуку та теоретичний опис дозволяють досить добре розраховувати основні параметри та залежності сигналу від ряду чинників. Встановлено, що в ряді випадків задача може значно спрощена і її рішення має простий і прозорий результат. Так, отримана залежність амплітуди відгуку від частоти розчеплення та поглинання світла у напівпровіднику підтверджується експериментально і дозволяє визначити межі застосування метода в лазерній скануючій мікроскопії. Розрахована форма сигналу відгуку при скануванні поверхні напівпровідника по лінійному закону дає важливу інформацію про діаметр зондуючих пучків та відстань між ними, що дозволить зменшити похибки при вимірюванні параметрів напівпровідникових структур. Експериментально отриманий характер поведінки сигналу відгуку збігається з розрахованим з теорії. Але на жаль, запропонований механізм є дуже приблизним і не дає зв'язку з параметрами, що характеризують більш складні напівпровідникові структури. Тем не менш, результати розрахунків можуть бути використані при розробці ЛСМ, що призначені для дослідження напівпровідників.

Література

1. Ильченко Л. Н., Москалев В. М., Обозненко Ю. Л., Смирнов Е. Н., Юрченко А. В. Некоторые акустооптические методы неразрушающего контроля материалов и изделий. // Известия вузов СССР - Электромеханика. - 1982 - вып. 2 - С. 250.
2. Ільченко Л. М., Літвіненко С. В., Кільчицька С. С. Дослідження розподілу шарового опору емітера сонячних елементів за допомогою сканування лазерним променем. // Вісник Київського університету. Серія фізико-математичні науки - 1997 - вип. 4 - С. 263-269.
3. M. Acciarria, S. Binettia, A. Racza, S. Pizzinia, G. Agostinellib. Fast LBIC in-line characterization for process quality control in the photovoltaic industry.// Solar Energy Materials & Solar Cells - 2002 - vol. 72 - P. 417-424.
4. Пат. 4650330 США, МКИ G01B 9/02. Surface condition measurement apparatus / Hiroo Fujita (Японія); Citizen Watch Co. - № 608744; Заявл. 14.05.84; Опубл. 11.04.85; НКИ 356/349.- 23 с.
5. Пат. 3796495 США, МКИ G01B 9/02. Apparatus and methods for scanning phase profilometry / Leonard Laub (США); Zenith Radio Corp. - № 257721; Заявл. 30.05.72; Опубл. 12.03.74; НКИ 356/109.- 7 с.
6. Пат. 6038041 США, МКИ G03H 1/00. Three-dimensional holographic fluorescence microscope/ Ting Chung-Poon (США); Virginia Tech Intellectual Properties Inc. - № 09/154313; Заявл. 16.09.1998; Опубл. 14.03.2000; НКИ 359/1.- 17 с.
7. Брыжина М.Ф., Есаян С. Х. Анизотропный акустооптический дефлектор на одноосных кристаллах с оптической активностью // ЖТФ, 1977 - т. 47, вып. 9 - С. 1937-1943.
8. Тищенко Ю. Н., Трубецкой А. В. Некоторые вопросы создания и исследования акустооптического дефлектора на монокристаллах TeO_2 // Автометрия - 1979 - вып. 1 - С. 87-95.

Надійшла до редакції 15.10.2005

УДК 621.385.833

Микола Г. Находкін
Микола І. Федорченко¹

Адсорбція Sb на Si(100)2x1 та Si(111)7x7

За допомогою методів ультрафіолетової фотоелектронної спектроскопії, Оже електронної спектроскопії та дифракції повільних електронів досліджено формування інтерфейсів Sb з атомарно чистими поверхнями Si(100)-2x1, Si(111)-7x7 та аморфізованими іонами Ar поверхнями α -Si(100) та α -Si(111). Встановлено відмінності у поведінці перебудови поверхні, роботи виходу та загину зон, що мають місце при формуванні відповідних інтерфейсів.

Ключові слова: Sb, сурфактант адсорбція, Si(111)-7x7, Si(100)2x1, робота виходу, загин зон.

¹ E-mail: mif@univ.kiev.ua

Mykola G. Nakchodkin
Mykola I. Fedorchenko¹

The Sb adsorption on Si(100)2x1 and Si(111)7x7

The formation of Sb interfaces with the atomically clean Si(100)-2x1, Si(111)-7x7 surfaces and amorphized by Ar ions α -Si(100) and α -Si(111) surfaces have been investigated using Auger electron spectroscopy, ultraviolet photoelectron spectroscopy and low energy electron diffraction. Differences in behaviour of surface reconstruction, work function and band-bending which take place at the formation of the corresponding interfaces have been established.

Keywords: Sb, surfactant, adsorption, Si(111)7x7, Si(100)-2x1, work function, band-bending.

Вступ

Тонкі шари сурми, адсорбовані на поверхнях Si(100)2x1 і Si(111)7x7 успішно використовуються у якості сурфактантів при епітаксiальному вирощуванні Ge/Si гетероструктур та для δ -легування Si [1-6]. Ця обставина, а також необхідність подальшого розвитку фундаментальних уявлень про формування інтерфейсів напівметал-напівпровідник стимулює продовження досліджень адсорбції Sb на поверхнях Si. Проведені дослідження визначили деякі термодинамічні та кінетичні особливості адсорбції Sb на поверхнях Si, внаслідок яких при різних температурах підкладки, більших за кімнатну, та при різних швидкостях осадження Sb утворюються різноманітні індуковані адатомами Sb надструктури з характерними для них електронними властивостями [5]. Однак нам відомо лише декілька робіт, присвячених адсорбції Sb на поверхнях Si(100)2x1 і Si(111)7x7 при кімнатній температурі та низьких швидкостях надходження Sb до поверхні [9, 10]. В них було показано, що адсорбовані шари Sb формуються за механізмом Странського-Крастанова на обох поверхнях Si. При адсорбції Sb у субмоношаровому діапазоні ступенів покриття (θ_{Sb}), коли $0 \leq \theta_{Sb} \leq 1$ МШ (моношар), відбувається перебудова обох поверхонь Si(100)2x1 і Si(111)7x7, а їх надструктури змінюються від початкових 2x1 і 7x7 до

кінцевих - 1×1 . Природно, що ці надструктури відрізняються своїми властивостями. Так, енергія зв'язку $3d_{3/2}$ електронів Sb адсорбованого на поверхні $\text{Si}(111)7 \times 7$, яка визначалась за допомогою фотоелектронної спектроскопії основних рівнів і залишалася незмінною для $0 \leq \theta_{\text{Sb}} < 1$ МШ, різко збільшувалася (на 0,8 eV) при $\theta_{\text{Sb}} \approx 1$ МШ, а при подальшому зростанні θ_{Sb} поступово зменшувалась, наближаючись до значень, характерних для масивного Sb. Автори виключають можливий вплив хімічного зсуву, мотивуючи це слабкою взаємодією Sb з кремнієм при кімнатних температурах, що взагалі узгоджується із літературними даними, де вказується на незначні хімічні зсуви, що викликаються адсорбцією Sb [5, 9-12]. Вони вважають, що різке збільшення енергії зв'язку $3d_{3/2}$ електронів Sb зв'язано зі зміною загину зон поблизу поверхні. Адсорбція субмоношарів Sb на поверхні $\text{Si}(100)2 \times 1$ також супроводжується збільшенням енергії зв'язку $3d_{3/2}$ електронів Sb у фотоелектронному спектрі. Але на відміну від поверхні $\text{Si}(111)7 \times 7$ цей процес проходить плавно при збільшенні θ_{Sb} і при $\theta_{\text{Sb}} \approx 0,8$ МШ насичується при збільшенні енергії зв'язку на 0,5 eV. Це також пояснюється зміною загину зон при адсорбції Sb. Якщо збільшення енергії зв'язку електронів в приповерхневому шарі обумовлено загином зон, то при цьому повинна збільшуватись енергетична відстань між рівнем Фермі і основними рівнями та рівнями валентної зони на поверхні, і зони повинні загинатись „вниз”. При цьому робота виходу системи повинна зменшуватись із-за зменшення енергетичної відстані між рівнем вакууму і рівнем Фермі. Тобто збільшення енергії зв'язку $3d_{3/2}$ електронів Sb при адсорбції Sb на різних поверхнях Si [9], яке пов'язується авторами зі зміною загину зон, повинно супроводжуватись і відповідним зменшенням роботи виходу.

Розрахункові роботи вказують, що Sb повинен значно менше змінювати роботу виходу поверхні Si за рахунок поляризації атомів Sb, ніж As і Bi [12, 13], бо при його адсорбції має місце передача меншого заряду, ніж у випадку адсорбції As і Bi. У своїх попередніх роботах [14, 15] ми вивчали вплив адсорбції Bi на роботу виходу поверхонь $\text{Si}(100)2 \times 1$ і $\text{Si}(111)7 \times 7$, і встановили, що на обох поверхнях робота виходу плавно змінюється при збільшенні θ_{Sb} і її зміни не перевищують 0,7 eV, а хімічні зсуви основних ліній та можливий вигин зон не дуже значні. Крім того в нашій попередній роботі [16] було встановлено, що аморфізація поверхні кремнію іонами Ag змінює вигин зон і роботу виходу, що пов'язано зі збільшенням густини поверхневих станів поблизу поверхні при аморфізації. При адсорбції Bi на поверхнях $\text{Si}(100)-2 \times 1$ і $\text{Si}(111)-7 \times 7$ до і після їх аморфізації робота виходу починала зменшуватись навіть при малих ступенях покриття θ_{Bi} [14, 15], що сильно відрізняється від їх поведінки при адсорбції Sb [9, 10].

Тому метою даної роботи було експериментально перевірити як змінюється робота виходу та енергетичне положення відносно рівня Фермі

валентних енергетичних рівнів (загин зон) на поверхнях $\text{Si}(100)2\times 1$ і $\text{Si}(111)7\times 7$ при адсорбції на них атомів Sb при кімнатній температурі та малих швидкостях осадження.

Методика експерименту

Дослідження проводились у надвисоковакумній камері з базовим тиском $\sim 2\cdot 10^{-10}$ тор, яка була оснащена методиками Оже електронної спектроскопії (ОЕС), дифракції повільних електронів (ДПЕ) та ультрафіолетової фотоелектронної спектроскопії (УФЕС). В камері містилась іонна гармата для очищення досліджуваної поверхні Si іонами Ag та система для контрольованого нанесення на досліджувану поверхню шарів Sb заданої товщини *in situ*. Дані ОЕС дозволяли визначати елементний склад поверхні та механізм плівкоутворення при напорошенні атомів Sb на Si. Картинки ДПЕ дозволяли спостерігати зміни кристалографічної структуру поверхонь, що вивчалися. Фотоелектронні спектри збуджувалися квантами світла з енергіями 7,7 і 10,2 еВ. Вони дозволяли отримувати інформацію про електронну структуру валентної зони досліджуваних інтерфейсів, їх роботу виходу та величини загину зон в приповерхневій області.

Один зі зразків Si вирізався із (111) пластини (р тип, $\rho \approx 600 \text{ Ом}\cdot\text{см}$), а інший – з (100) пластини легованої фосформ (п тип, $\rho \approx 10 \text{ Ом}\cdot\text{см}$). Після попередньої хімічної обробки зразок очищався за допомогою декількох циклів бомбардування іонами Ag та наступного прогріву при 1000°C . Вибраний стандартний метод очистки зразків дозволяв отримувати поверхні зразків $\text{Si}(100)-2\times 1$ і $\text{Si}(111)-7\times 7$ без ознак домішок в спектрах ОЕС та з контрастними картинками ДПЕ, що відповідали надструктурам 2×1 і 7×7 , відповідно.

Потік парів Sb отримувався за допомогою джерела Кнудсена, а ступінь покриття поверхні атомами Sb (θ_{Sb}) визначався спеціально проградуйованими кварцовими терезами. Швидкість нанесення Sb вибиралася рівною 0,03 МШ за хвилину. Робота виходу (ϕ) визначалась, як і в роботі [15], за допомогою спектрів УФЕС, що збуджувалися квантами світла з енергією 7,7 еВ. Зміна загину зон (ΔY_z) визначалась за допомогою спектрів УФЕС, що збуджувалися квантами світла з енергією 10,2 еВ, за зміною положення спектральних фотоелектронних піків sp^3 гібридизованих електронів Si. Типові фотоелектронні спектри наведені на рис. 1 для системи Sb/Si(100)- 2×1 .

Результати та їх обговорення

Механізм плівкоутворення при адсорбції Sb на досліджуваних поверхнях кремнію вивчався за допомогою аналізу відношення інтенсив-

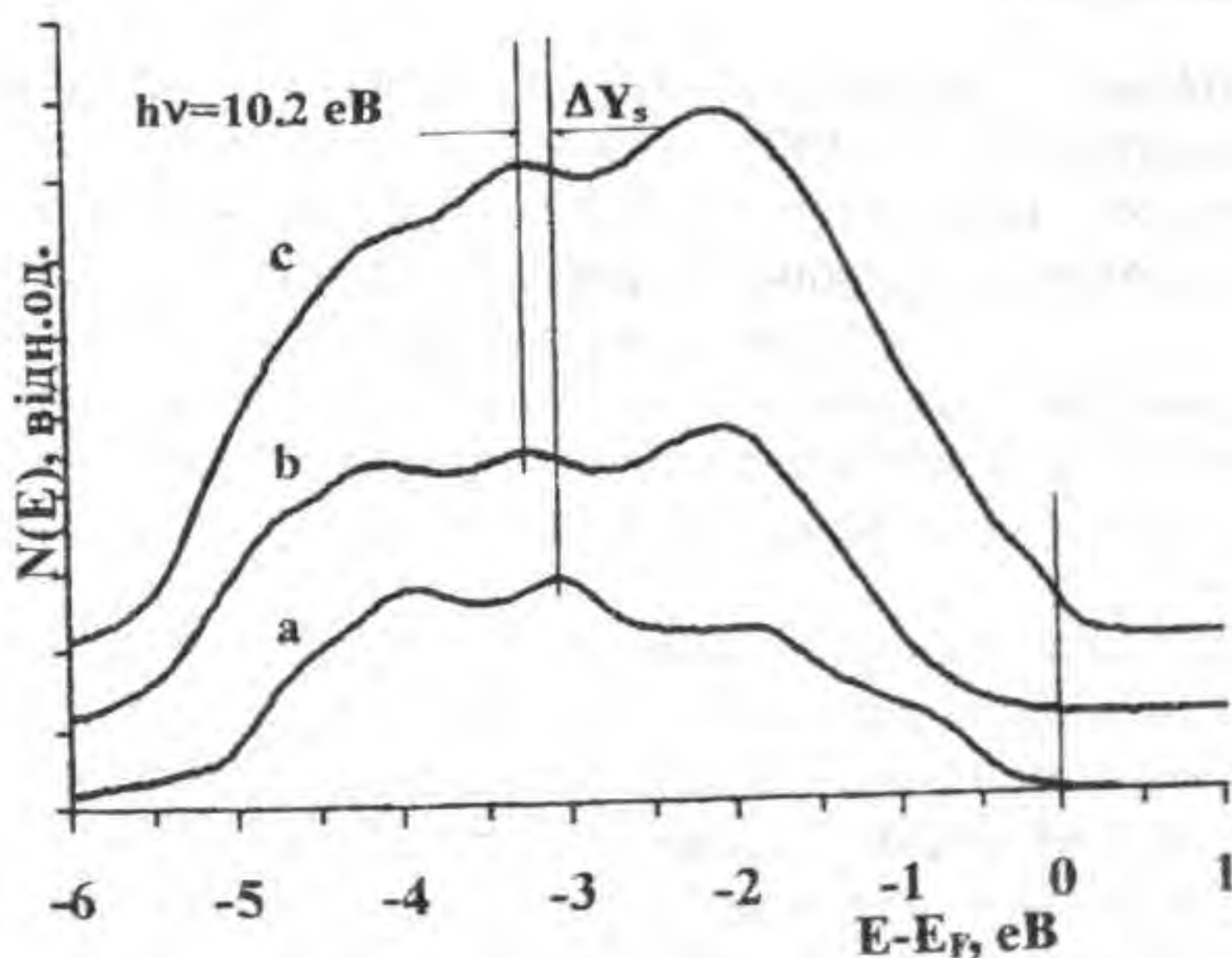


Рисунок 1 – Фотоелектронні спектри системи Sb/Si(100)2x1 при $\theta_{\text{Sb}} = 0$ МШ (а), 1 МШ (б), 8 МШ (в).

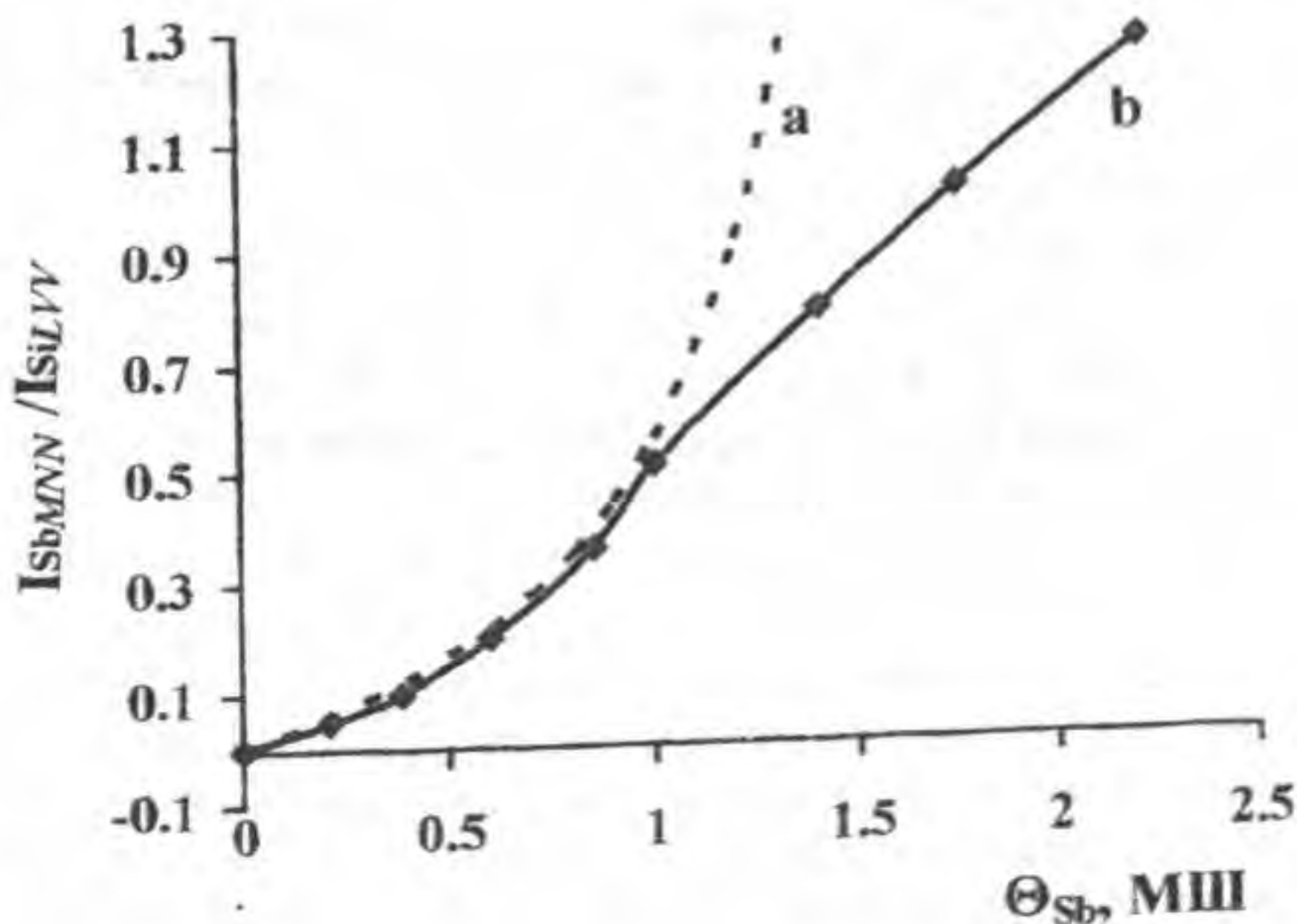


Рисунок 2 – Відношення інтенсивностей Оже ліній Sb та Si в залежності від θ_{Sb} : а– розрахована для шарового росту плівки Sb, б– експериментальна залежність для системи Sb/a-Si(100).

ностей оже ліній Sb і Si ($I_{SbMNN}/I_{SiLVV} = f(\theta_{Sb})$), типовий вигляд яких наведено на рис. 2 для системи Sb/a-Si(100). Виявилось, що на всіх досліджуваних поверхнях кремнію в діапазоні $\theta_{Sb} = 0+1$ МШ ці залежності є близькими до розрахованої по методиці запропонованій в [16] для пошарового росту Sb на Si. При $\theta_{Sb} > 1$ МШ спостерігається відхилення від цієї залежності. Такий вигляд вказаної залежності мав місце і для інших систем [8], і свідчить, що механізм формування плівок сурми при її адсорбції близький до механізму Странського – Крастанова, що узгоджується із літературними даними [5, 9, 14].

Спостереження за зміною інтенсивностей дифракційних рефлексів на картині ДПЕ дозволило встановити, що на поверхні Si(100)2×1 при збільшенні θ_{Sb} в межах $0 \leq \theta_{Sb} \leq 1$ МШ відбувається поступове зменшення інтенсивності частини рефлексів, що свідчить про поступову перебудову поверхні від початкової надструктури 2×1 до кінцевої 1×1. Цей факт збігається із розрахунковим передбаченням, що було раніше отримано в нашій лабораторії [12], та з даними робіт [9, 10]. Він свідчить про насичення вільних зв'язків на поверхні кремнію, внаслідок чого відбувається релаксацію напружень на поверхні, що досліджується. При подальшому зростанні θ_{Sb} дифракційна картина поступово розмивається, що свідчить про розупорядкування більш товстих шарів Sb. Адсорбція Sb на поверхні Si(111)7×7 при збільшенні θ_{Sb} у межах $0 \leq \theta_{Sb} \leq 1$ МШ призводить до поступового зменшення дробових рефлексів початкової надструктури 7×7, а при $\theta_{Sb} \geq 1$ МШ дробові 1/7 рефлекси практично зникають і реєструються чіткі рефлекси гексагональної дифракційної картини від надструктури 1×1, що також збігається із спостереженнями отриманими в роботах [9, 10]. Таким чином, можна стверджувати, що структури поверхонь наших систем при формуванні інтерфейсів Sb/Si(100)2×1 і Sb/Si(111)7×7 є подібними до структур, що були отримані при аналогічних умовах у роботах [9, 10].

На рис. 3 наведені залежності роботи виходу та загину зон для системи Sb/Si(100)2×1 (криві а і b, відповідно) від θ_{Sb} . Пунктиром наведено залежність роботи виходу від θ_{Sb} для аморфізованої іонами Ag поверхні a-Si(100) (крива c). Видно, що робота виходу на кристалічній і аморфізованій поверхнях кремнію зменшується при збільшенні θ_{Sb} відповідно на 0,36 eV і 0,3 eV. Це майже вдвічі менше за відповідні зменшення робіт виходу при адсорбції на таких поверхнях вісмуту [15], що узгоджується із відповідними розрахунковими оцінками [12]. На відміну від аморфізованої, на кристалічній поверхні спостерігаються немонотонності в залежності $\phi = f(\theta_{Sb})$. Вони можуть бути пов'язані з можливими змінами структури адсорбованого шару Sb, але це припущення потребує нових досліджень. Вигин зон у цієї системи майже не змінюється при $\theta_{Sb} < 0,7$ МШ і це дозволяє за допомогою початкового нахилу залежності $\phi = f(\theta_{Sb})$ здійснити оцінку

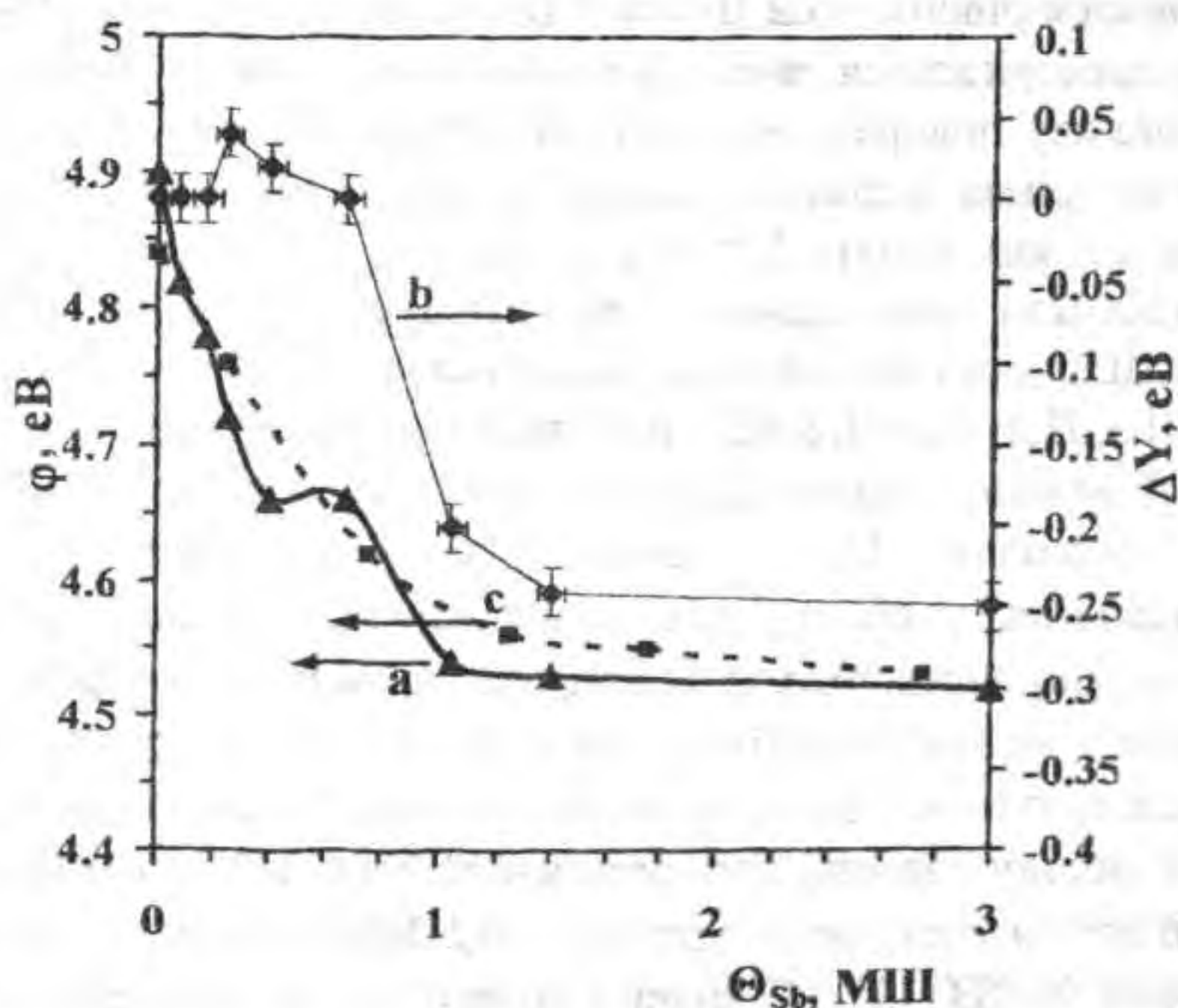


Рисунок 3 – Зміна роботи виходу (a) та загину зон (b) при адсорбції Sb на поверхню Si(100)2x1. Зміна роботи виходу аморфізованої поверхні a-Si(100) при адсорбції Sb (c).

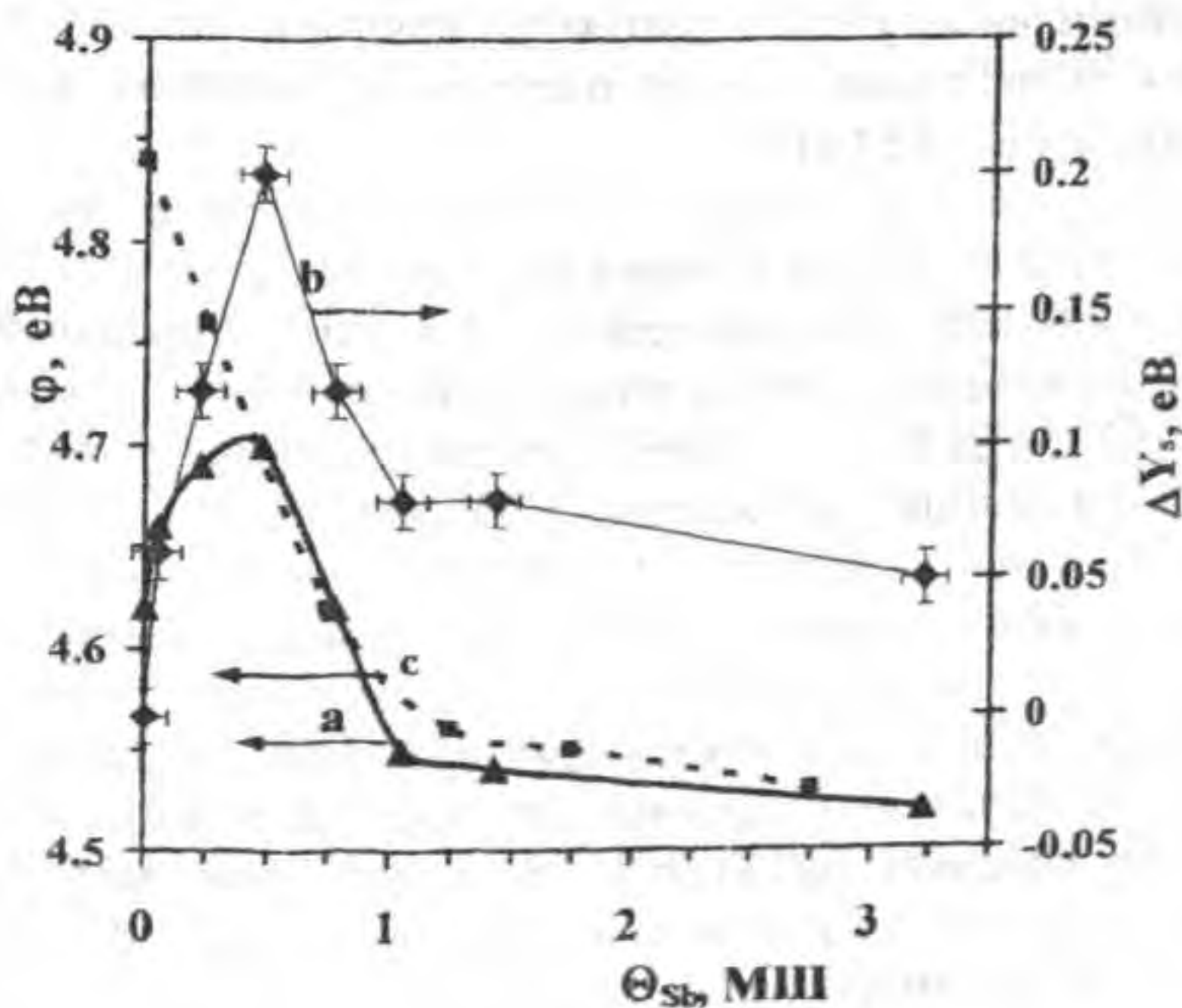


Рисунок 4 – Зміна роботи виходу (a) та загину зон (b) при адсорбції Sb на поверхню Si(111)7x7. Зміна роботи виходу аморфізованої поверхні a-Si(111) при адсорбції Sb (c).

дипольного моменту, що утворюється на початковій стадії адсорбції сурми. Він виявився рівним ~ 0.2 Дебая. При подальшому збільшенні θ_{Sb} ($\theta_{\text{Sb}} > 0,7$ МШ) спостерігається зміна вигину зон. Додатні значення зміни загибу зон поблизу поверхні відповідають переміщенню верха валентної зони в напрямку рівня Фермі (загин зон вверх), а від'ємні – в зворотному напрямку (загин зон вниз). З рисунка видно, що при адсорбції Sb на поверхню Si(100)2x1 зони спочатку загинаються вверх (на ≈ 0.04 eV при $\theta_{\text{Sb}} \approx 0,2-0,4$ МШ), а потім різко загинаються вниз на ≈ 0.25 eV в районі $\theta_{\text{Sb}} = 0,7-1,5$ МШ. При $\theta_{\text{Sb}} > 1,5$ МШ робота виходу і вигин зон насичуються.

На рис. 4 наведені зміни роботи виходу та загибу зон для системи Sb/Si(111)7x7 (криві а і b) у залежності від θ_{Sb} , а пунктиром (крива c) наведена залежність ϕ від θ_{Sb} для аморфізованої іонами Ag поверхні a-Si(111). Видно, що залежність ϕ від θ_{Sb} для a-Si(111) поверхні практично така ж як і для поверхні a-Si(100). Але властивості системи Sb/Si(111)7x7 суттєво відрізняються від властивостей системи Sb/Si(100)2x1. По-перше, зміни роботи виходу і загибу зон системи Sb/Si(111)7x7 немонотонні – на них спостерігається екстремум при $\theta_{\text{Sb}} \approx 0,5$ МШ, по-друге, зміни роботи виходу системи Sb/Si(111)7x7 значно менші – $\Delta\phi < 0,1$ eV, і в декілька разів менші за зміни, що знаходилися у роботі [10] при інтерпретації факту збільшення енергії зв'язку $3d_{3/2}$ електронів Sb (0,8 eV), по-третє, після проходження екстремуму змінюється знак загибу зон і загин зон досягає значення $\Delta Y_s \approx 0,05$ eV. При $\theta_{\text{Sb}} > 1,5$ МШ, коли зникає реконструкція обох поверхонь, роботи виходу обох систем на кристалічному Si і системи з аморфізованим Si наближаються до однакового значення, притаманного масивній плівці Sb ($\phi \approx 4,54$ eV).

Одержані результати можна пояснити наступним чином. Роботи виходу аморфізованих іонами поверхонь a-Si(111) a-Si(100) є практично однаковими ($\approx 4,84$ eV). При прогріві ці поверхні упорядковуються і їх роботи виходу змінюються. Робота виходу поверхні Si(111)7x7 стає рівною $\approx 4,62$ eV, а Si(100)2x1 – $\approx 4,9$ eV. Це знаходиться у відповідності з одержаними нами раніше результатами [17] і пояснюється перерозподілом електронної густини поблизу поверхонь при зміні їх ступеня упорядкування. Якщо вважати, що в обох аморфізованих іонами Ag поверхнях a-Si(111) та a-Si(100) “зони” є незначно загнутими вниз (0,12–0,15 eV [18]), то зміну робіт виходу цих поверхонь в процесі десорбції атомів Ag та упорядкування можна вважати обумовленою загином зон вниз на 0,22 eV для поверхні Si(111)7x7 та загином зон вверх на 0,06 eV (зменшенням величини загибу зон вниз) для поверхні Si(100)2x1. При адсорбції атомів Sb на аморфізованих поверхнях робота виходу змінюється в основному в результаті зміни електронної спорідненості систем обумовленої поляризацією атомів Sb. На початкових стадіях адсорбції атомів Sb на поверхні Si(111)7x7 має місце аморфізація приповерхневого

шару і зміна спектру поверхневих станів, що викликає відповідну зміну загину зон поблизу поверхні. Попередньо загнуті вниз зони розгинаються в процесі адсорбції атомів Sb і тим самим сприяють збільшенню роботи виходу. При $\theta_{\text{Sb}} > 0,5$ МШ зони знову гнуться вниз, що може бути викликано утворенням нових поверхневих станів донорного типу. В той же час поляризація адсорбованих атомів Sb приводить до зменшення роботи виходу при $0 \leq \theta_{\text{Sb}} \leq 1,5$. Суперпозиція загину зон та поляризації атомів Sb приводить до результуючої зміни роботи виходу (крива а рис. 4). При адсорбції атомів Sb на поверхні Si(100)2x1 її робота виходу зменшується за рахунок поляризації атомів Sb і загину зон вниз, обумовленого утворенням нових поверхневих станів (пасток донорного типу) в районі $\theta_{\text{Sb}} \approx 0,5-1$ МШ. Ці стани можуть мати однакову природу для обох кристалічних поверхонь. Це підтверджується тим, що при $\theta_{\text{Sb}} > 1$ МШ положення рівня Фермі на поверхні приблизно однакові для Sb/Si(111)7x7 та Sb/Si(100)2x1 систем.

Таким чином, було показано, що робота виходу систем Sb/Si(100)-2x1 і Sb/Si(111)-7x7, як і системи Bi/Si(100)-2x1, що було нами показано раніше [14,15], виявляються чутливими до зміни їх надструктурних особливостей. Це означає, що зміни роботи виходу вигідно використовувати як доповнювальний метод для аналізу структур і властивостей систем, що складаються з напівпровідників з адсорбованими на їх поверхні шарами металів.

Розбіжності між даними про зміну загину зон в цій роботі і літературними даними [10], можливо, зв'язані з різними електронними рівнями, що були при цьому використані. Ми використовували для збудження фотоелектронів кванти з енергіями 7,7 і 10,2 еВ, а автори роботи [10] - $h\nu \approx 1253$ еВ. Відомо, [19, 20], що збільшення енергії квантів змінює відносні внески об'ємного (В) і зсунутого по відношенню до нього поверхневого (S) піків, що змінює положення нерозділених спектральних ліній, які використовувались в цих роботах. Але дуже великі (0,8 еВ) зсуви основних рівнів при адсорбції сурми не спостерігалися іншими авторами. Тому це питання потребує додаткових експериментальних досліджень.

Висновки

Структурні та спектральні дослідження поверхонь Si(100)-2x1 та Si(111)-7x7 при адсорбції на них атомів Sb при кімнатних температурах і дуже малих швидкостях надходження Sb підтвердили, що вона насичує обірвані поверхневі зв'язки кремнію й зменшує напруження у приповерхневих шарах. Відбувається перебудова поверхонь, внаслідок якої утворюється надструктура 1x1, у якій поверхневі атоми кремнію знаходяться в оточенні подібному до об'ємного.

Адсорбція Sb змінює роботу виходу всіх поверхонь, що досліджувалися. Зменшення роботи виходу поверхонь Si(100)-2x1, a-Si(100) та a-Si(111)

становить $\sim 0,3-0,36$ еВ. Воно виявилось меншим ніж у системі Bi/Si(100)- 2×1 , як і передбачалося відповідними розрахунками [12, 13], що пов'язано з меншим дипольним моментом адсорбованого шару Sb ($\sim 0,2$ Дебая) у цієї системи.

Зміна роботи виходу поверхні Si(111) 7×7 при адсорбції Sb визначається характером зміни загину зон. Це пояснюється існуванням значного загину зон вниз на атомарно чистій поверхні Si(111) 7×7 , обумовленого її електронною структурою. На початковому етапі адсорбції ($\theta_{\text{Sb}} = 0-0,5$ МШ) атоми Sb сприяють релаксації реконструкції 7×7 , що приводить до розгину зон і до збільшення роботи виходу. При збільшенні ступеня покриття має місце зменшення роботи виходу обумовлене загином зон вниз внаслідок появи нових міжфазних електронних станів та поляризації атомів Sb. Внаслідок суперпозиції вигину зон та поляризації атомів Sb при $\theta_{\text{Sb}} \sim 1$ МШ робота виходу зменшується лише на $\sim 0,08$ еВ.

Ще раз підтверджено, що робота виходу є чутливою до змін надструктур поверхонь кремнію при адсорбції на них металів. Це означає, що роботу виходу вигідно використовувати як допоміжний метод дослідження формування інтерфейсів кремнію.

Робота виконувалась за бюджетного фінансування, проект 01БФ052-02 та часткового фінансування Міністерства освіти та науки України, гранти Ф7/230-2001 і М/240-2004.

Література

1. M. Copel, M.C. Reuter, Eftimios Kaxiras, R.T. Tromp, Surfactant in Epitaxial Growth //Phys. Rev.-1996 V.B63, №6.-P.632-635.
2. A. Portavoce, I. Berbezier, and A. Rondal Sb-surfactant-mediated growth of Si and Ge nanostructures //Phys.Rev.-2004.-V.B 69.-P.155416-155423
3. P. Zahl, R. Kury, M. Horn von Hoegen, Interplay of Surface Morphology, Strain Relief and Surface Stress During Surfactant Mediated Epitaxy Ge on Si //J.Appl. Phys.-1999.-V.A49.-P.481-489.
4. J. Wang, M. Li, E.I. Altman, Sb-Mediated Si Heteroepitaxial Growth on Ge (001)//Surf. Sci.-2004.-V.560.-P.12-26.
5. K. Oura, V.G. Lifshits, A.A. Saranin, A.V. Zotov, M. Katayama, Surface Science— An Introduction, Sprins-Verlag, 2002, G. Lifshits, A.A. Saranin, A.V. Zotov, Surface Phases on Silicon, Wiley York, 1994.
6. J.M.C. Thornton, R.J. Cole, P. Gravesteijn, Weightman, D.J Donor activation and electronic screening of an antimony delta layer in silicon //Phys. Rev. - 1996.-V.B 54, N11.-P.7972-7978
7. W.F.J. Slijkerman, P.M. Zagwijn, J.F. Van der Gravesteijn, G.F.A. Van de Walle, The interaction of Sb overlayers with Si(001)//Surf. Sci.-1992.-V.262, №2. P.25-32.

8. B. Grani, I.I. Kravchenko, C.T. Salling, STM studies of the instial stages of growth of Sb on Si(100) surfaces //Surf. Sci.-1999.-V.422.-P.43-52.
9. S.M. Shivaprasad, Vinon Kumar Paliwal, A. Chaudhuri, The evolution of the Sb/Si interface at room temperature on the Si(111)-7×7 and the Si(100)-2×1 reconstructed surfaces //Appl. Surf. Sci.-2004.-V.237.-P.93-98.
10. Vinon Kumar Paliwal, S.M. Shivaprasad, A phase diagram of the Sb/Si(100)-2×1 interfacial system //Surf. Sci.-2004.-V.561.-P.L207-L212.
11. Jun-Hyung Cho, Myung-Ho Kang, Kiyounki Teracura, Si 2p core-level shifts at the As/Si(001) and Sb/Si(001) surfaces //Phys. Rev.-1997.-V.B 55, №23.-P.15464-15466.
12. Т.В. Афанасьєва, І.П. Коваль, М.Г. Находкін, М.Ю. П'ятницький, Адсорбція елементів V групи та кисню на поверхні Si(001)-2×1 //Український фізичний журнал -1999.-V.44, №9.-С.1133-1140.
13. G. Li, Yia-Chung Chang, Electronic structures of As/Si(001)-2×1 and Sb/Si(001)-2×1 snterficial system //Phys. Rev.-1994.-B 50, №12.-P.8675-8680.
14. П.В. Мельник, М.Г. Находкін, М.І. Федорченко, О.С. Оберемок, Б.В. Солнцев, Електронні властивості інтерфейсу Bi/ Si(111) // Український фізичний журнал 1999.-V.44, №9.-С.1142-1147.
15. М.Г. Находкін, М.І. Федорченко, Залежність роботи виходу поверхні Si(001) від ступені покриття її вісмутом //Вісник Київського університету, серія фіз.. мат. Наук 2004.-вип. 4.-С.373-378.
16. И.Ф. Коваль, П.В.Мельник, Н.Г. Находкин, М.Ю. Пятницький, Т.В.Афанасьева Исследование системы Bi/Si(100) методами электронной спектроскопии //Фізико-хімічні, структурні та емісійні властивості тонких плівок і поверхні твердого тіла. Випуск 2. Книга 1. Запоріжжя, 1995.- С.255-267.
17. Мельник П.В., Находкин Н.Г., Федорченко Н.И. Влияние упорядочения на электронные и адсорбционные свойства Si(111)// Український фізичний журнал.-1991.-Т.36, N2.- С.278-285.
18. П.В. Мельник, Н.Г. Находкін, Н.И. Федорченко Изменение фото-ЭДС поверхности Si(111) при имплантации и десорбции аргона //Украинский физический журнал -1993.-Т.38, №2.-С.101-107.
19. D.H. Rich, T. Miller, G.E. Franklin, T.-C. Chiang, Sb-iduced bulk band trasitions in Si(111) and Si(001) observed in synchrotron photoemission studies //Phys. Rev.-1989.-V.B 39, №2.-P.1438-1441.
20. A. Cricenti, P. Perfetti, G. Le Lay, High-resolution Si 2p core-level photoemission spectroscopy on Sb-terminated Si(100) surfaces: evidence for a strong interfacial component //Surf. Sci.-1998.-V.401.-P.427-433.

Надійшла до редакції 28 жовтня 2005 року

УДК 537.311.33, 621.315.592

Георгій К.Нінідзе,

Вячеслав В.Кушніренко,
Сергій П.Павлюк*,
Сергій М.Савицький,
Олег В.Третяк

Georgii K.Ninidze,

Vjacheslav V.Kushnirenko,
Sergey P.Pavljuk*,
Sergey M.Savitsky
Oleg V.Tretjak

**Дослідження параметрів
модифікованих кремнієвих діодів.**

**Investigation of parameters of the
modified silicon diodes**

У роботі досліджено зміну ефективного часу життя неосновних носіїв заряду τ_p у базі силового кремнієвого p^+-n діоду марки КД-209 при короткочасному неоднорідному розігріві імпульсом прямого струму регульованої амплітуди і тривалості. Показана можливість контрольованої зміни часу життя носіїв заряду. Досліджено зміни параметрів діодів.

Ключові слова: час життя, неосновні носії заряду, контроль, вплив, струм.

The article deals with the investigation of the neosnovnih charge carrier effective lifetime τ_p in the base of power silicon p^+-n diode KD-209 at short-pulse non-homogenous diode heating with current of the controlled amplitude and duration. It was shown the possibility of controlled changing of the charge carriers lifetime. The change of parameters was investigated.

Key words: lifetime, minority charge carriers, parameter control, influence, current.

*E-mail: pps@univ.kiev.ua

Вступ

Відомо, що наявність глибоких рекомбінаційних центрів та їхня концентрація істотно визначають час життя неосновних носіїв заряду в напівпровідниках. Звичайно такі центри вводять у напівпровідник, впливаючи на нього іонізуючим випромінюванням [1], чи легуючи його відповідними домішками (наприклад, кремній - золотом) [2]. При цьому у напівпровіднику виникають різні структурні дефекти, що призводять до появи в його забороненій зоні системи електрично активних центрів, в тому числі глибоких.

У роботі [3] зроблено припущення, що різні структурні дефекти і пов'язані з ними електрично активні центри в забороненій зоні напівпровідника можуть виникати й закріплюватися в ньому під дією сильного неоднорідного розігріву кристалу. Було досліджено зміну ефективного часу життя неосновних носіїв заряду τ_p у базі силового кремнієвого p^+-n діоду марки КД-209 при його короткочасному неоднорідному розігріві внаслідок дії модифікуючого імпульсу прямого

струму регульованої амплітуди і тривалості. При цьому щільність струму в кристалі досягає 10^4 A/cm^2 , питома потужність, що підводилась до діоду, сягала $\approx 10^6 \text{ Вт}\cdot\text{см}^3$. У досліджених діодах величина τ_p зменшувалась таким чином до 10 разів. Поздовжній неоднорідний тиск на кристал істотно підсилював вплив на величину τ_p .

Дана робота є продовженням [3]. Метою цієї роботи було дослідження змін параметрів модифікованих діодів.

1. Експериментальні зразки

У дослідженнях використовувались кристали діодів із *p-n* переходом, виготовленим методом дифузії. Вихідним матеріалом для структур був кремній марки КЕФ-40 із питомим опором $40 \text{ Ом}\cdot\text{см}$, з однієї сторони він легувався бором (*p*-типу), а з другої - фосфором (*n*-типу). Кристал має форму циліндру діаметром 1.9 мм і товщиною 0.35 мм . *P-n* перехід розташований приблизно посередині кристалу.

2. Експериментальна установка та методика вимірів

Для спостереження процесів у діоді використовувався генератор струму, що забезпечував неоднорідний розігрів діоду, і система індикаторів, за допомогою яких можливе спостереження часових змін того чи іншого параметра. Час життя визначався за методикою післяінжекційної ерс діоду [6-7]. Установка дозволяє одночасно спостерігати як перехідні процеси струму в діоді при перемиканні його з прямого напрямку на зворотній, так і зміну післяінжекційної ерс діоду. В роботі використовується джерело напруги, що дозволяє заряджати батарею конденсаторів ємністю 8000 мкФ у діапазоні напруг $0-50 \text{ В}$. При вмиканні електронного ключа відбувається передача енергії, що запасється в батареї, у коло. Під час проходження імпульсу великої амплітуди кристал діоду неоднорідно розігрівається, причому зміни величин струму інжектуючого імпульсу і напруги на діоді за час розряду спостерігаються на осцилографах. За допомогою іншого осцилографа ведеться спостереження за зміною післяінжекційної ерс діода. Відповідно до [6] по лінійному спаду післяінжекційної напруги визначається час життя. При спостереженні перехідного процесу струму на діоді, при перемиканні його з прямого напрямку на зворотній, вимірюється час відновлення $t_{\text{відн}}$ - час, за який зворотній струм зменшується на 90% від початкового значення при перемиканні. Одночасно із часом відновлення можна отримати й іншу характеристику - граничну частоту f_{gr} , при якій випрямлений струм не знижується певного рівня (приблизно на 30%)[7].

Вольт-фарадні характеристики (*ВФХ*) діодів досліджували за допомогою вимірювача типу Е7-12.

3. Експериментальні результати

3.1. Дослідження змін часу життя та впливу його на частотні характеристики діоду

Залежність часу життя від амплітуди модифікуючого імпульсу показана на рис. 1, крива 1.

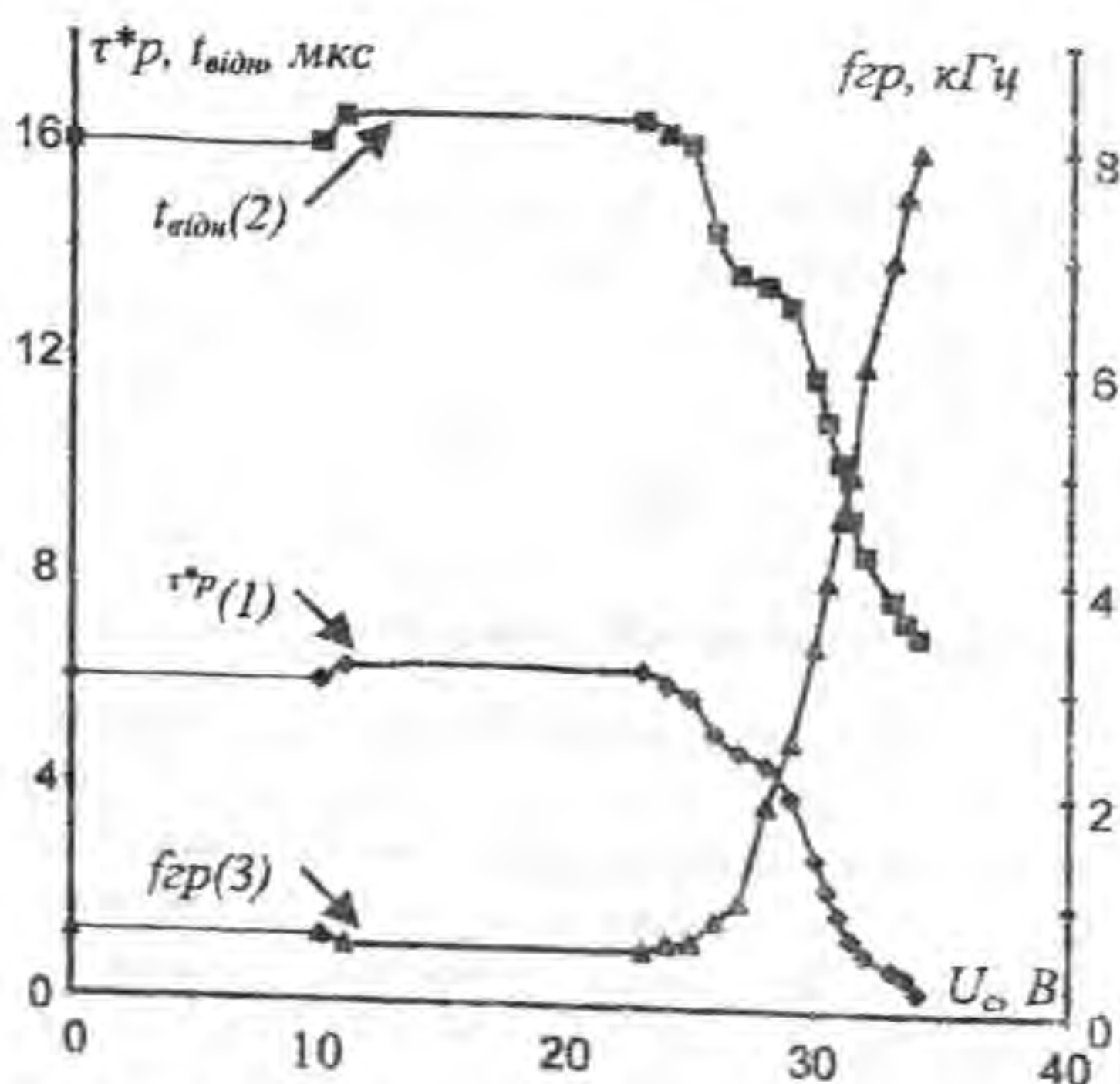


Рис.1. Залежність часу життя, часу відновлення і граничної частоти від амплітуди модифікуючого імпульсу.

Згідно отриманих результатів можна сказати, що зміна часу життя зі збільшенням амплітуди модифікуючого імпульсу відбувається у два етапи: початковий момент змін характеризується збільшенням часу життя, а при подальшому збільшенні напруги U_c відбувається зменшення часу життя (рис. 1, крива 1). Найбільше зменшення τ^* (у 14 разів) отримано в структурі, яка мала найбільше початкове значення часу життя серед усіх типів зразків[3].

Криві 2,3 на рис. 1 показують, що при зменшенні τ^* відбувається зміна перемикаючих і частотних властивостей діоду. З отриманих графіків видно, що залежність $t_{\text{відн}}$ від напруги прикладеного імпульсу (рис. 1, крива 2) має таку ж поведінку, як і зміна τ^* , що добре узгоджується з теорією, оскільки ці два параметри взаємопов'язані між собою. Однак, у порівнянні з часом життя, зменшення $t_{\text{відн}}$ менш суттєве і становить лише 2-2,25 разів, оскільки при дослідженні використовувались кристали силових випрямних діодів, для яких цей параметр не є характерним.

Оцінено зміну граничної частоти f_{gr} . Виявилось, що вона також повторює зміну часу життя (рис. 1, крива 3). Це є закономірним явищем, оскільки для збільшення f_{gr} намагаються зменшити τ^* , бо саме цим параметром визначають частотні властивості діодів. Найбільше значення збільшення граничної частоти, що вдалось отримати, дорівнювало 14 разів.

У таблиці наведені дані про зміни параметрів різних зразків. Знак "-" означає зменшення величини параметру, а знак "+" – збільшення.

Таблиця 1

№ зразка	Зміна основних параметрів діодів(у разях)			
	τ^*p	$U_{проб}$	$f_{зр}$	$t_{відн}$
1	-14	-2	+14,2	-2,2
2	-13,3	-1,85	+13	-2,19
3	-14,2	-2,17	+14,5	-2,25
4	-14,2	-2	+14,3	-2,2
5	-14	-2	+14,2	-2,2

3.2. Дослідження вольт-амперних характеристик діоду

Крім вищезгаданого впливу модифікуючого імпульсу на час життя, істотним є також зміна параметрів вольт-амперних характеристик (ВАХ) діоду, особливо пробивної напруги або величини зворотнього струму. Зміна величини пробивної напруги $U_{проб}$ при заданому зворотньому струмі для експериментальних зразків наведена в таблиці.

Як видно з даних таблиці, напруга пробою зменшується приблизно в 2 рази. Ця обставина пояснюється тим, що за рахунок домішок, які осаджуються вздовж дислокацій, з'являються локальні області зі збільшеним електричним полем і це, у свою чергу, призводить до зниження пробивної напруги.

3.3. Дослідження вольт-фарадних характеристик діоду

Відомо, що вольт-фарадні характеристики (ВФХ) дають можливість отримати основні параметри напівпровідникових структур [5-7], особливо це стосується МДН-структур і p - n переходів діодів, на яких ми й зосередимо увагу.

Для плавних p - n переходів, коли, наприклад, концентрація домішок від n до p області змінюється лінійно, за законом $N_d(x) - N_a(x) = ax$, ширина p - n переходу $d = (12\epsilon\epsilon_0[\varphi_k - U]/qa)^{1/3}$, де a – градієнт концентрації домішок, N_d – концентрація донорів, N_a – концентрація акцепторів φ_k – контактна різниця потенціалів, що визначає вигин зон, а U – прикладена напруга до p - n переходу. Остаточний вираз ємності плавного p - n переходу має вигляд $C = S \left(\frac{\epsilon^2 \epsilon_0^2 qa}{12 \varphi_k - U} \right)^{1/3}$. З якого випливає, що в p - n

переході з лінійним розподілом домішок пряма лінія отримується для залежності $1/C^3 = f(U)$. Це дозволяє визначити параметри a і φ_k .

З формули видно, що ємність зростає зі збільшенням концентрації домішок та їх градієнту.

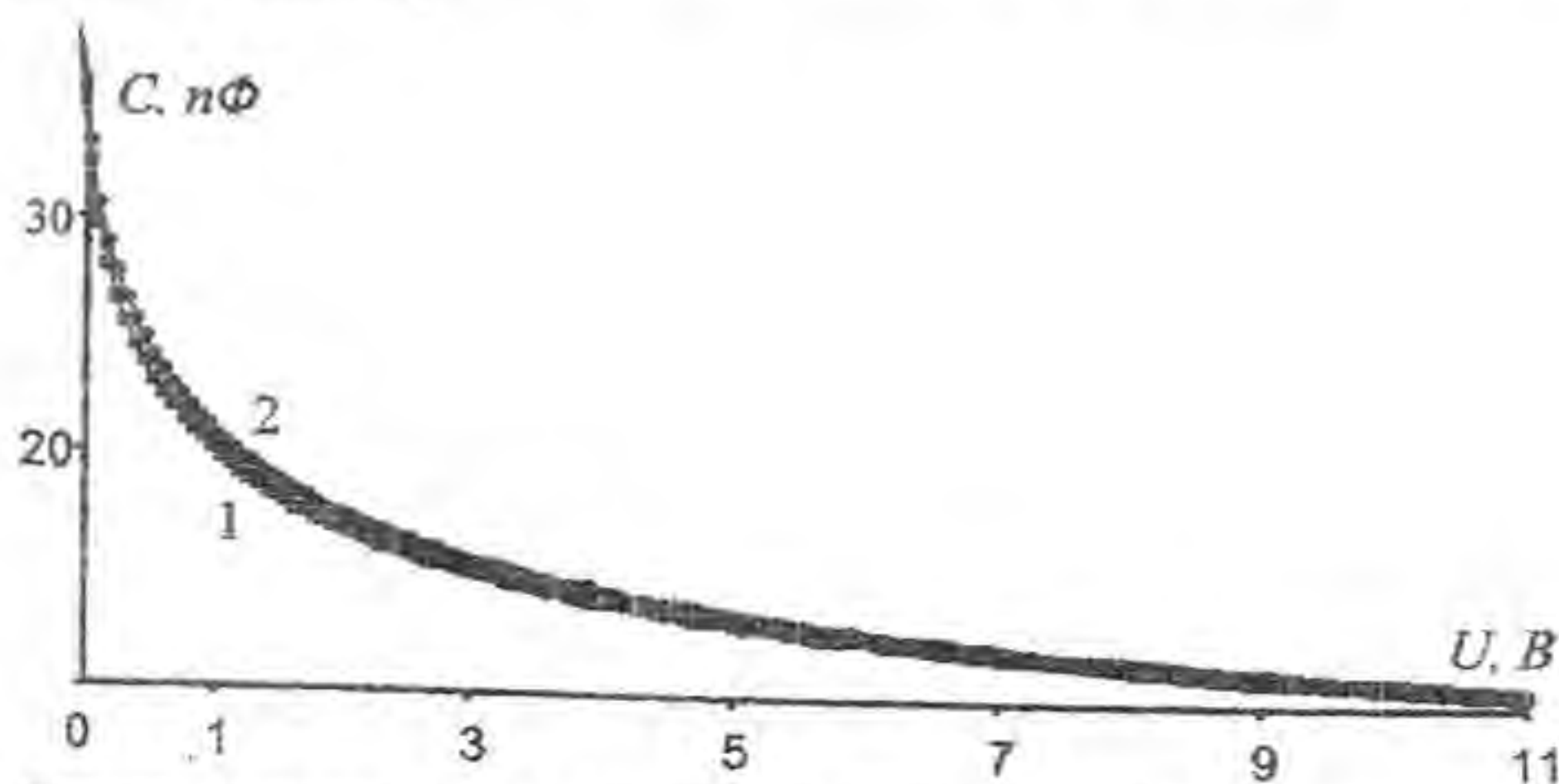


Рис.2. Експериментальні вольт-амперні характеристики. Крива 1 – до модифікації, крива 2 – після модифікації.

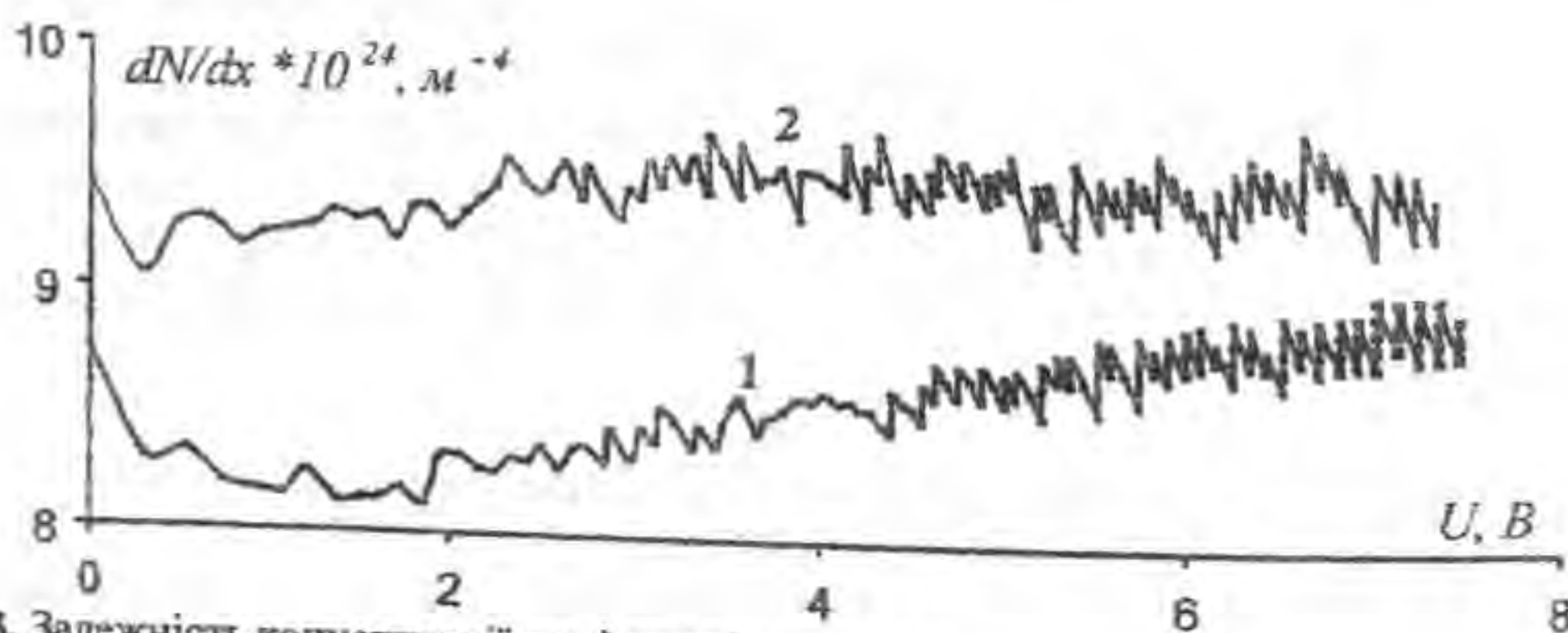


Рис.3. Залежність концентрації домішок від напруги

Експериментальні вольт-амперні характеристики показані на рис. 2. Крива 1 дає ВАХ до модифікації, а крива 2 – після модифікації. З рисунка видно, що величина ємності діода зростає в певному діапазоні напруг, що говорить про збільшення концентрації домішок та їх градієнту (рис. 3). Побудована залежність $1/C^3 = f(U)$ дала пряму лінію і це означає, що діод має лінійний розподіл домішок. Визначення φ_k показало, що величина не змінюється при модифікації і дорівнює 0,3 В.

4. Обговорення отриманих результатів.

Отримані результати пояснені так. Модифікуючий імпульс струму призводить до різкого неоднорідного розігріву діоду. У місці максимального градієнту температури в кремнії, розташованому в зоні границі p - n переходу, виникають найбільші механічні напруги, що призводять до утворення в ньому структурних дефектів. Після закінчення імпульсу струму, завдяки швидкому охолодженню кремнію, ці дефекти "заморожуються" у ньому і, зважаючи на все, відіграють роль додаткових центрів рекомбінації, зменшуючи τ_p^* .

Модифікація параметрів кремнію впливає як на величину τ_p^* , так і на частотні параметри діода. Змінюються також хід $B\Phi X$ і $BA X$ діоду. В приладах із найменшим ефективним часом життя ($\tau_p^* \approx 1,5 \text{ мкс}$) такий вплив слабкіший, ніж в діодах із найбільшим $\tau_p^* \approx 6 \text{ мкс}$. Мабуть, це пов'язано із більшою кількістю вихідних центрів рекомбінації в кремнії у першому випадку, ніж у другому, і, як наслідок, відносно слабкішим впливом модифікації на параметри такого кремнію. В усіх діодах, у першу чергу із найменшим τ_p^* , зростання імпульсного розігріву спочатку супроводжується досить помітним збільшенням τ_p^* , яке можна пояснити можливим відпалом структурних дефектів в кремнії та зменшенням кількості центрів рекомбінації. Подальше збільшення амплітуди імпульсів розігріву суттєво зменшує τ_p^* , значно збільшує зворотній струм діодів, зменшує в декілька разів напругу їхнього пробою і навіть впливає на його характер (див. табл. 1). Зміна τ_p^* , $B\Phi X$ і $BA X$ діодів після модифікації параметрів кремнію свідчить про появу в його забороненій зоні нових рекомбінаційних центрів, в тому числі, можливо, і глибоких. Пошарове селективне травлення поверхні кремнію, паралельної площині p - n переходу, виявило наявність великої кількості лінійних дислокацій. Цей результат дозволяє вважати наше припущення про зв'язок між появою рекомбінаційних центрів та структурних дефектів у кремнії після модифікації справедливим.

Вивчення $B\Phi X$ дозволило визначити, що p - n переходи в кристалах кремнію є плавними із постійним градієнтом концентрації легуючого бору.

Знайдений із $B\Phi X$ і $BA X$ діодів просторовий розподіл градієнту концентрації домішок уздовж довжини діоду показав збільшення цього градієнту після модифікації параметрів діоду, що також підтверджує висновок про утворення нових центрів рекомбінації.

Висновки

1) Модифікація параметрів кремнію впливає як на величину τ_p^* , так і на хід ВФХ і ВАХ діода. В приладах з найменшим τ_p^* такий вплив слабкіший, ніж у діодах із найбільшим τ_p^* .

2) Початкове збільшення τ_p^* можна пояснити відпалом структурних дефектів у кремнії й зменшенням кількості центрів рекомбінації. Подальше збільшення амплітуди імпульсів I_m суттєво (до 14 разів) зменшує τ_p^* , значно збільшує зворотній струм діодів, зменшує у декілька разів напругу їхнього пробою і, навіть, впливає на його характер.

3) Зміна τ_p^* , ВФХ і ВАХ діодів після модифікації параметрів кремнію свідчить про появу в його забороненій зоні нових рекомбінаційних центрів, у тому числі, можливо, і глибоких.

4) Пошарове селективне травлення поверхні кремнію, паралельної площині р-п переходу, виявило наявність великої кількості лінійних дислокацій, що доводить зв'язок між появою рекомбінаційних центрів та структурних дефектів у кремнії після модифікації його параметрів.

Література

1. Вавилов В.С. Действие излучений на полупроводники. Физматгиз. М., 1963.
2. Bakowski A.E., Forster J.H. Electrical Properties of Goal-Doped Diffused Silicon Computer Diodes. //Bell Syst. Techn. Journ., 43, P. 125, 1972.
3. Нинидзе Г.К., Павлюк С.П., Пличко Я.О., Савицкий С.М., Третьяк О.В. Модификация свойств кристалла кремниевого р⁺-п диода его разогревом импульсами прямого тока большой амплитуды. «АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА : ФТТ-2003» Тезисы докладов. Издательский центр БГУ. Минск, С. 174, 2003.
4. Полупроводниковые диоды. Параметры, методы измерений. Под ред. Горюнова Н.Н., Носова Ю.Р. Изд-во «Советское радио», С.304, 1968.
5. Zaininger H., Heiman F.P. The C-V Technique as an Analytical Tool. //Solid state technology. Part 1, P. 49-55, May 1970.
6. Zaininger H., Heiman F.P. The C-V Technique as an Analytical Tool. //Solid state technology. Part 2, P. 46-55, June 1970.
7. Зи С. Физика полупроводниковых приборов. Пер. с англ.-М.: Мир. С.80-91, 1984.

Надійшла до редакції 14.10.2005 р.

УДК 519.9

Володимир С. Овечко¹, Олександр
В. Щур²

**Дослідження опору
нанопористого скла зі срібними
наночастинками сталому струму**

Було досліджено протікання сталого струму крізь зразки порожнього пористого скла та пористого скла з металевими срібними наночастинками. У широкому діапазоні температур та струмів були зняті та проаналізовані вольт-амперні характеристики зразків, з яких було визначено енергію активації, концентрацію носіїв заряду та іонізаційні параметри.

Ключові слова: пористе скло, срібні наночастинки, нелінійна провідність.

¹ E-mail: ovs@univ.kiev.ua

² E-mail: k553@univ.kiev.ua

Volodymyr S. Ovechko¹, Alex V.
Schur²

**DC conductivity of the porous glass
with silver nanoparticles**

Direct Current (DC) methods were used for porous silica (PS) and porous silica with Ag nanoparticles (PS.Ag) investigations. Current-volt characteristics of the PS at different temperatures and wide range of voltages have been studied. Activation energy, initial concentrations of the charge carriers, ionization parameters have been determined.

Key Words: porous silica, silver nanoparticles, nonlinear conductivity.

1. Introduction

Recent tendencies in semiconductor isolator development involve porous materials as the low dielectric constant materials [1]. That's why the DC characteristics investigation of porous materials is an important step in development of modern semiconductor devices. Porous glass is one the most inexpensive and easy to make materials of such type. Besides, transport properties of porous glass make it valuable in such branches of modern device development as Lab-on-a-Chip [2].

The fundamental aspect of the problem of DC investigation is connected with the physics of surface. Extremely huge specific surface beyond any doubt takes the main part in the processes of conductivity. Volt-current characteristic measurement allows us to verify the theory of quasi-free current carriers given in this paper. Measuring this characteristic in porous glass with impregnated silver nanoparticles allows us to investigate the influence of metal nanoparticles on the main processes of conductivity in porous glass. Such materials can be used as the base on measuring the outer and inner photoemissive effect, so the investigations written in this paper can be interpreted as the first step in these future investigations.

2. DC investigations of the PS and PS with Ag nanoparticles

Direct current (DC) properties of PS and PS:Ag samples have certain interest because they depend on activation energy of the charge carrier, permanent carrier concentration, ionization potentials and so on. In applied physics, they can be used, for example, for measuring moisture of the air [3]. Porous silica is one of the possible candidates as an isolator in microelectronic devices working at high frequencies. It has to have low conductivity on DC and low dielectric permeability on high frequencies ($>10^9 \text{ Hz}$). There are well known investigations of the electric properties of porous glass with electrolyte soaking under slow (linear) growing voltage applied [4]. We did the same for direct current high voltage and without presoaking of the sample.

2.1. Experiment

The experimental setting is shown on Fig.1.

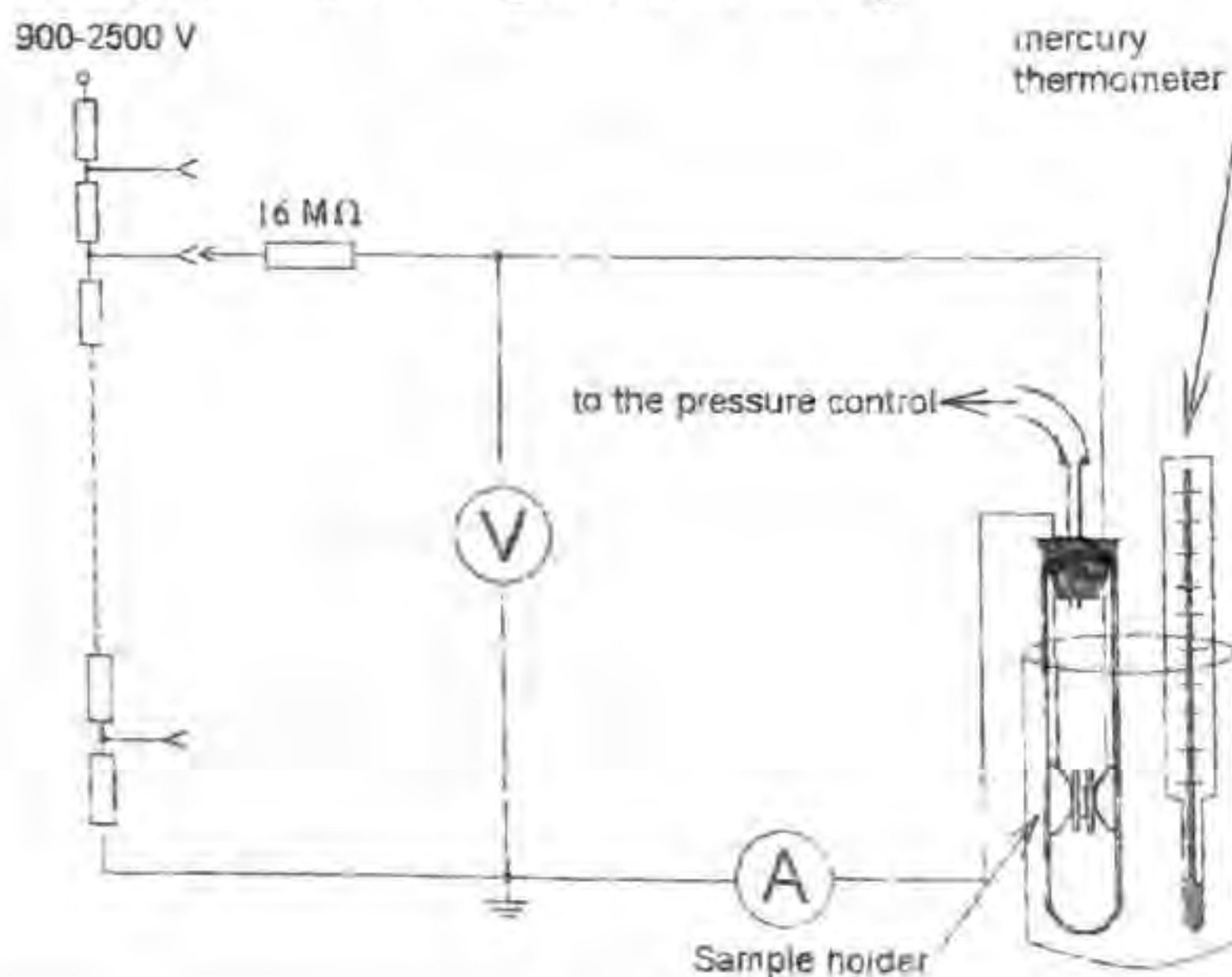


Fig. 1. Experimental installation for the DC investigations of PS.

We used rather high voltage (0.1...2.5kV), high temperature (300...700K) and small current measurement (0.01...100 μA). The main dependencies were voltage-current (V-A) characteristics. We used PS sample with pores diameter $d=3.5 \text{ nm}$, dimensions $10 \times 10 \times 0.5 \text{ mm}^3$ and the porous matrix with Ag nanoparticles with mean diameter 2 nm and concentration 10^{14} cm^{-3} . The area of the electrode is about 40 mm^2 . Typical V-A characteristics are shown on Fig.2, Fig.3. The main feature of these curves is their non-

linearity. Linear proportionality between V and A takes place below the one of the ionization parameter $U_a=50...90\text{v}$. That depends upon the temperature. When we decreased the gas pressure to $1...5$ torr, the burning discharge appeared. That's why we designed electrodes confines that prevented discharge appearance and all the V - A data was measured in ambient air. Severe difficulty in measurements caused an effect of the storage and lagging of the data in time. That's why we were forced to read quasi-stationary indicators of the instruments. It must be also pointed out that the sample was annealed at high temperature (900K) to remove the ambient water before the measurements. The doping of the Ag nanoparticles to the PS matrix led to the $10...20$ times increasing of the conductivity.

2.2. Results and discussion

As one can see from the data Fig.2, Fig.3, differential conductivity of the sample changes from $10^{-12}\Omega^{-1}\text{cm}^{-1}$ to $10^{-9}\Omega^{-1}\text{cm}^{-1}$ with the temperature and voltage growing. Such essential changes can take place for Arrhenius type temperature dependence and multiple ionization.

$$G(U, T) = D(T)N(U)e^2/kT, \quad (1)$$

where $D(T) = R^2\nu_0 \exp[-W_a/kT]$,

G – conductivity, D – diffusion coefficient,

$N(U)$ – charge carriers concentration, R – hopping distance,

ν_0 – hopping attempt frequency, W_a – activation energy.

High voltage causes nonlinear conductivity of the PS. The main subject is the voltage (intensity of the electric field) dependence of the charge carriers concentration. Let us write the equation for $N(U)$, which takes into consideration ionization and its slowing down for high voltage

$$\frac{dN(U)}{dU} = \frac{N(U)}{U_a} \exp[-U/U_i], \quad (2)$$

$N(0) = N_0$; U_a , U_i – ionization parameters.

Solution of the equation (2) is

$$N(U) = N_0 \exp\left[\frac{U_i}{U_a} \left(1 - \exp\left(-\frac{U}{U_i}\right)\right)\right]. \quad (3)$$

The final formula for current is

$$I(\delta U, T) = \frac{C}{T} \delta U \exp\left[-\frac{W_a}{kT}\right] \cdot \exp\left[\frac{1}{\delta U_a} (1 - \exp[-\delta U])\right], \quad (4)$$

where $C = \frac{e^2}{k} R^2 \nu_0 \frac{S}{e} U_i N_0$, $\delta U = \frac{U}{U_i}$, $\delta U_a = \frac{U_a}{U_i}$,

S – electrode area, l – thickness of the sample.

Theoretical function(4) is plotted along with experimental plots on Fig. 2, Fig. 3.

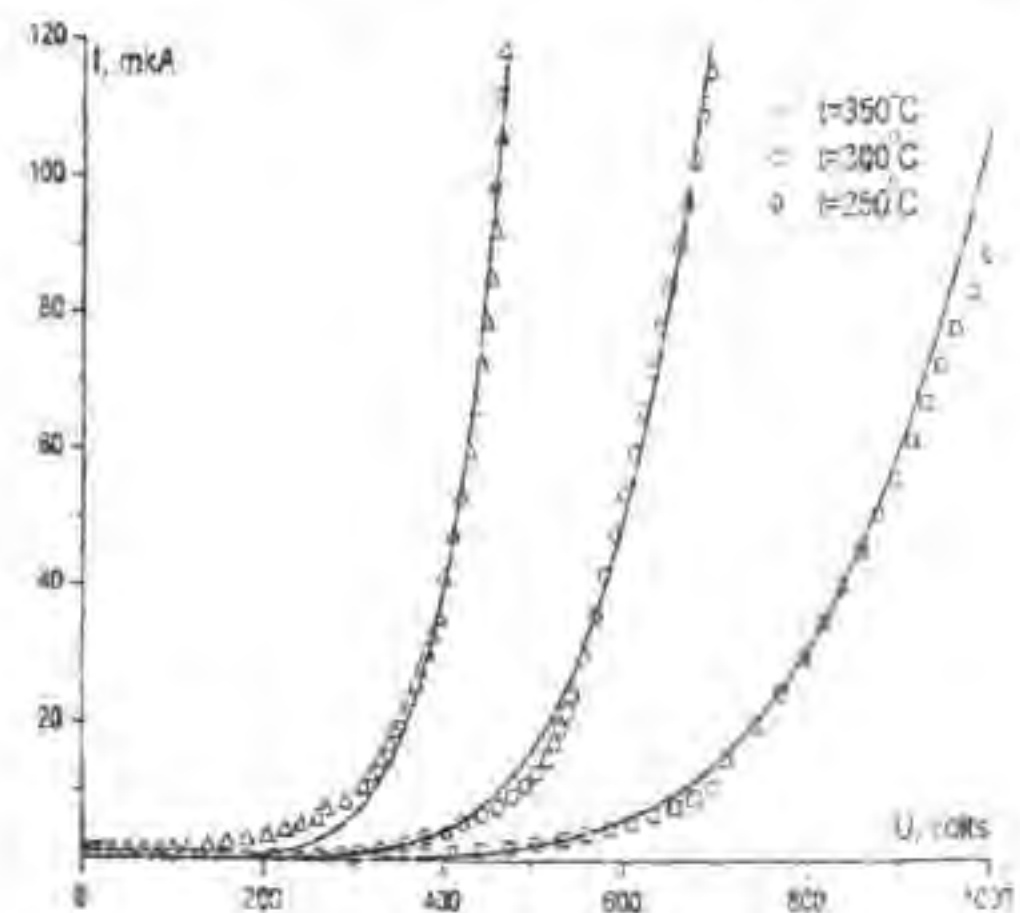
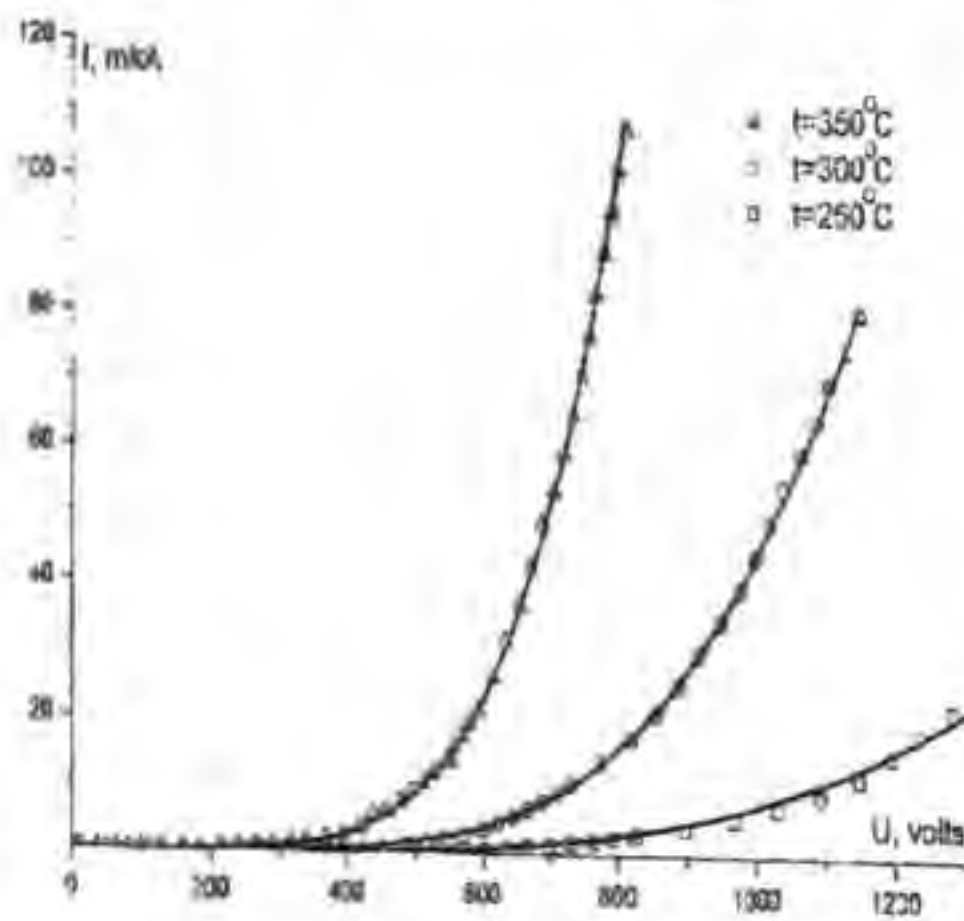


Fig. 2. $A-V$ dependencies for the pure PS at different temperatures: $d_{\text{pure}} \sim 3.5 \text{ nm}$.

Fig. 3. $A-V$ dependencies for the PS with Ag nanoparticles: $d_{\text{pure}} \sim 3.5 \text{ nm}$, $d_{\text{particles}} \sim 2 \text{ nm}$, $N_{\text{particles}} \sim 10^{14} \text{ cm}^{-3}$.

The theoretical dependencies (4) for larger ranges of parameters I, V are plotted on Fig.4;

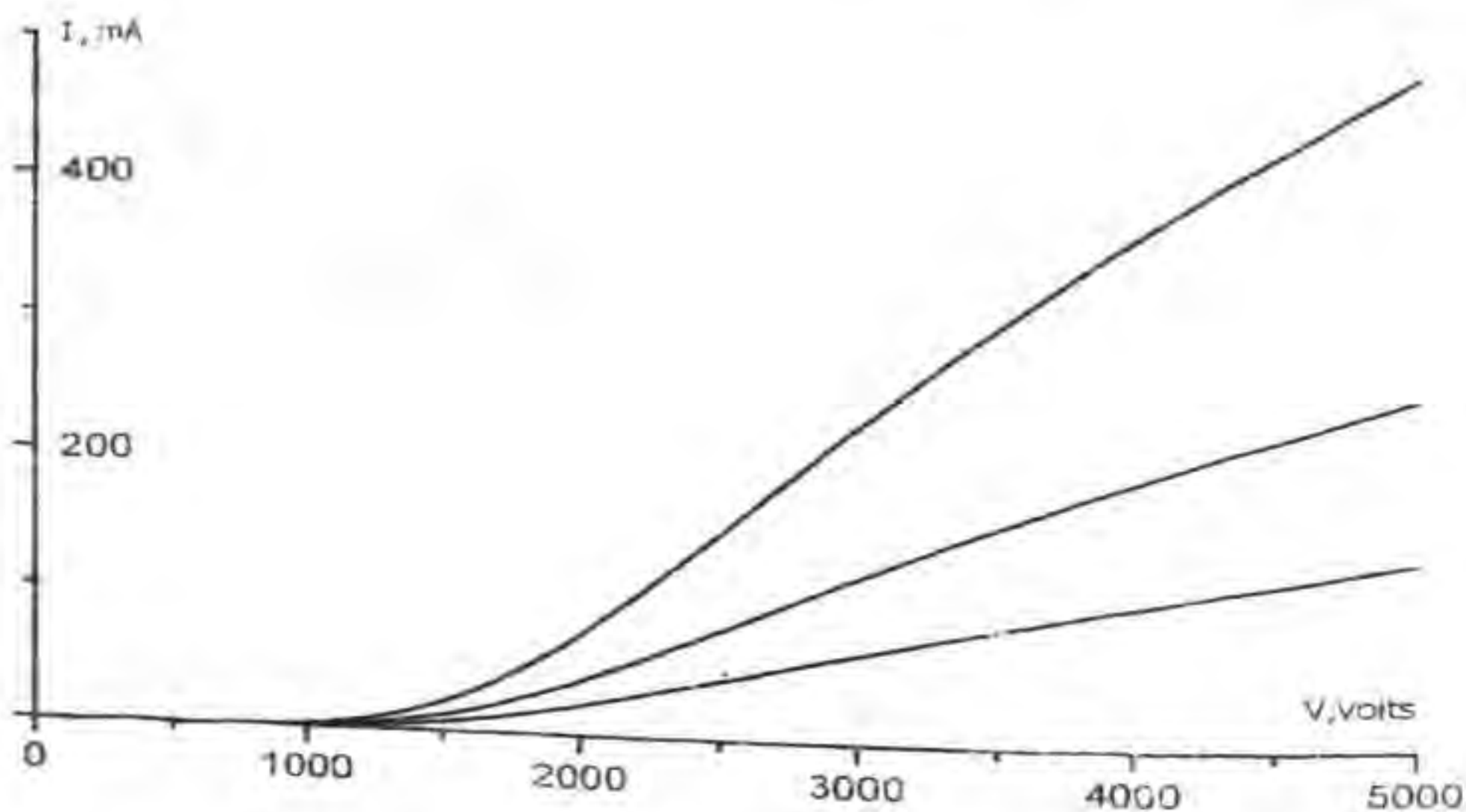


Fig. 4. Theoretical $A-V$ dependencies for PS:Ag sample: $T = 563, 573, 583 \text{ K}$ (from bottom to top), $d_{\text{pure}} \sim 3.5 \text{ nm}$, $d_{\text{particles}} \sim 2 \text{ nm}$, $N_{\text{particles}} \sim 10^{14} \text{ cm}^{-3}$.

Below we write out matching parameters for (4) dependence: $C = 1.1 \cdot 10^6 (\mu\text{A} \cdot \text{K})$, $W_a = 0.6 \text{ eV}$, $U_a = 50 \dots 90 \text{ V}$, $U_i = 728 \text{ V}$. Parameter U_a depends upon the temperature as $U_a(T) = U_{a0} - bT$ (Fig. 5).

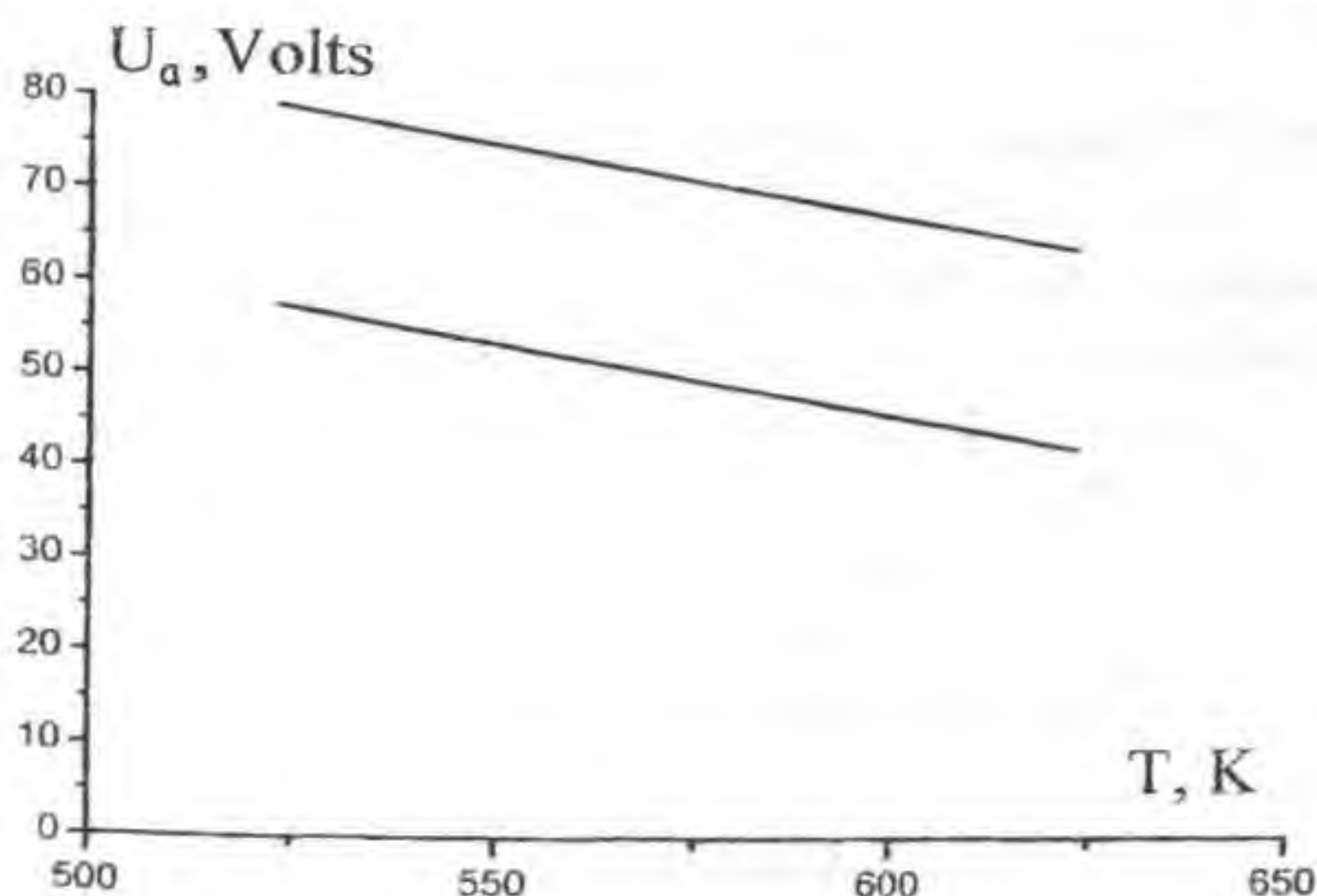


Fig. 5. Dependencies of the G-growing parameter U_a upon the temperature for PG (upper line) and PG:Ag (lower line) samples.

Furthermore, this is the only parameter that had been changed when Ag nanoparticles were doped into the PS matrix. From the value $C = 1.1 \cdot 10^6 (\mu A \cdot K)$ taking into account experimental data $S/l = 10 cm$, $U_i = 728 V$, one can easily calculate $D_0 N_0 = 8.1 \cdot 10^{10} cm^{-1} sec^{-1}$, where $D_0 = R^2 v_0$ diffusion coefficient. If we take value $D_0 = 10^{-6} cm^2/sec$, which is comparable to $D_0 = 10^{-4} cm^2/sec$ parameter for H-atom in amorphous SiO_2 [5] then initial charge carriers concentration $N_0 = 8.1 \cdot 10^{16} cm^{-3}$. However, D is much lesser for charge carriers due to Coulomb interaction. This value is in an agreement with the well-known feature for the surface charges concentration $2 \cdot 10^{11} cm^{-2}$ [6].

The main process that defines conductivity of the PS is the ionization. One can calculate initial conductivity and corresponding charge mobility μ

$$j = e \mu \frac{U}{e} N_0, \quad (5)$$

where $\mu = \frac{e}{k} R^2 v_0 \frac{\exp[-W_s/kT]}{T}$ – charge mobility.

Charge mobility (5) for low voltage at $T = 380 K$ is $\mu = 2.85 \cdot 10^{-8} cm^2/V \cdot sec$ that is nearly twofold more then the mobility of the negative ions in SiO_2 silica xerogel with 0.03 mole RbCl admixture [4].

The saturation of conductivity can be found out from this theoretical condition:

$$\frac{U_i}{U_a} \exp\left[-\frac{U_i}{U_a}\right] \ll 1 \quad (6)$$

So, $U_s \gg U_i$, $\ln[U_i/U_s] \approx 1500$ volts. Thus, the parameter U_i can be named as saturation parameter. Mathematical analysis of theoretical formula (4) shows that at low ($U \ll U_s$) and high ($U \gg U_i$) values of the electric field strength V - A dependencies are linear ones. In the case of low fields, this result can be explained by the insufficiency of ionization. When the concentration of charge carriers saturates its value, V - A dependences again become linear ones.

Therefore, direct current in PS depends upon the temperature electric field strength and particles concentration. V - A dependencies provide possibility to determine activation energy W_s , initial carriers concentration N_0 , ionization parameters U_s , U_i for the PS and PS with Ag samples.

3. Conclusions

Direct current in PS is caused by the existence of the permanent charges concentration N_0 for the low level temperature electric field strength and ionization effect for higher one. The significant peculiarity of the DC in PS is the restriction of free run of charge carrier by its porous structure.

References

- [1] Torquato S., Donev A., Evans A., Brinker C. J. of Appl. Phys. 97 (2005), 124103
- [2] <http://www.lab-on-a-chip.com>
- [3] Vanjuie Gan, Weiping Cai, Ganhua Fu et al. J. Phys.:Condens. Matter 16 (2004), L201.
- [4] Sodolsky H., Grygiel P., Tomaszewicz W. Optica Applicata XXXIII (2003), 85.
- [5] Grisom D.L. J. Appl. Phys. 58 (1985), 2524.
- [6] Kiselev v., Kozlov S., Zoteev A. Basic of physics of Solid State Surface, Moscow University Print, Moscow, 1999 (in Russian).

Надійшла до редакції 19.10.2005

УДК 621.373.43:537.523

Василь І.Чигінь¹, Сергій Ю.
Карп'як²

**Модель
нерівноважної плазми
пульсівної
негативної корони**

Вперше змодельовано нерівноважну плазму пульсівної негативної корони в азоті із домішкою кисню. Показано, що параметри плазми пульсують як у просторі (0.003 – 0.008 см від поверхні катода), так і в часі, синфазно із зміною струму при проходженні піка імпульсу. При цьому температура електронів змінюється у діапазоні 9100 – 19000 К, а середня густина плазми – $7 \cdot 10^{11}$ – $8 \cdot 10^{12}$ см⁻³.

Ключові слова: коронний розряд, нерівноважна плазма.

Vasyl I. Chyhin¹, Serhiy Y.
Karpyak²

**Model of
nonequilibrium plasma of
pulsing negative corona**

Nonequilibrium plasma of pulsing negative corona in nitrogen with oxygen mixture is simulated the first. It is shown, that plasma parameters are pulsing as in a space (0.003 – 0.008 cm to the cathode surface) and in time, in a phase with the current change in a range of the pulse pick. At that time the electron temperature changes from 9100 to 19000 K and the average density of plasma is – $7 \cdot 10^{11}$ – $8 \cdot 10^{12}$ cm⁻³.

Key Words: corona discharge, nonequilibrium plasma.

¹ E-mail: vchygin@polynet.lviv.ua

² E-mail: skarpyak@softservecom.com

Вступ

Вивчення нерівноважної плазми пульсівного негативного коронного розряду, зокрема, в електропозитивних газах із електронегативними домішками, є актуальним з огляду практичного використання – побудови давачів концентрації, тиску газу і т.п. [1-5]. Умови існування плазми таких газових розрядів, як жевріючий і дуга, визначались у більш ранніх монографіях [6-8]. Про плазму пульсівного негативного коронного розряду згадується в окремих працях [9,10], але не надається її кількісних характеристик. В єдиній недавній праці [11] виконано числове моделювання плазми негативної стаціонарної корони у циліндричній геометрії, проте умови її існування не встановлювались.

В той же час, поняття газового розряду і плазми відрізняються. Перше зв'язується [6] із всяким процесом виникнення іонізації та отримання газом під дією прикладених полів властивостей електропровідності. Плазмою називається газ, який іонізовано до такого ступеня, при якому електричні сили притягання між електронами та іонами перешкоджають помітному розділенню зарядів. У ній зіткнення заряджених і нейтральних

частинок відіграють підпорядковану роль (космічна плазма і плазма термоядерного синтезу з температурами порядку мільйонів градусів). Тут особлива увага надається колективній взаємодії заряджених частинок у магнітних полях. Фізика газового розряду охоплює велику множину складних, заплутаних і багатогранних явищ [6] - пружне розсіяння, збудження та іонізація при ударах зарядами, фотонами, збудженими молекулами і метастабілями, прилипання і відлипання електронів, рекомбінація, іон-електронна і фото-електронна емісії та інші. Газовий розряд може стати плазмою тільки при одночасному виконанні двох умов: 1. концентрація електронів і позитивних іонів є однаковою, або приблизно однаковою (умова електричної нейтральності); 2. ступінь іонізації газу є настільки високою, що унеможлиблюється розділення зарядів за рахунок їх теплових рухів.

Негативний коронний розряд запалюється при прикладанні високої постійної напруги до системи електродів вістря-площина (вістря - негативної полярності) у газовому проміжку. При цьому у деякому діапазоні напруг у зовнішньому колі виникає пульсівний струм із високостабільними параметрами імпульсів [12]. Частота імпульсів Трічеля [13] є відносно низькою, порядку 1 - 100 кГц, що суттєво залежить від напруги, геометрії проміжку і, особливо, від концентрації електровід'ємної домішки в електрододатному газі [12,14,15]. На ці імпульси можуть накладатися високочастотні осциляції струму (ВОС). Основні характеристики низькочастотних імпульсів і ВОС негативної корони в азоті та аргоні з домішкою кисню низької змінної концентрації досліджувались у працях [12,14,15].

У даній праці вперше змодельовано нерівноважну плазму негативної пульсівної корони при геометрії вістря-площина, визначено область її існування, отримано динаміку основних параметрів (координати, розмірів, дебаєвського радіуса екранування, середньої енергії електронів та іонів) у процесі виникнення і розвитку складного імпульсу струму у суміші газів N_2-O_2 при атмосферному тиску і концентрації кисню 0,6 %.

1. Теоретичні передумови

Якщо перевірити першу умову існування плазми є легко, отримавши у процесі моделювання концентрації зарядів, то для перевірки другої умови слід додатково обчислювати просторовий параметр - дебаєвський радіус екранування [6]) і порівнювати його з характерним розміром газового розряду - діаметром трубки струму і т.п. Питання визначення дебаєвського радіуса екранування у газорозрядній плазмі присвячено праці [6,8]. При цьому для обчислення потенціалу заряду ϕ в плазмі використано рівняння Пуассона:

$$\Delta\phi = -4\pi e(n_p - n_e), \quad (1)$$

де n_p і n_e – концентрації позитивних іонів та електронів. При допущенні, що вони розподіляються у просторі у відповідності із законами термодинамічної рівноваги, отримуємо для них статистичну формулу Больцмана:

$$n_p = n_{p\infty} e^{-e\varphi/kT_p}, \quad n_e = n_{e\infty} e^{e\varphi/kT_e}, \quad (2)$$

де T_p і T_e – температури іонів та електронів, а $n_{p\infty}$ і $n_{e\infty}$ – їх концентрації на далекій віддалі від розглядуваного заряду в центрі, де поляризація зникає і плазма є електронейтральною. В основному, дебаєвський радіус визначали для випадку рівності концентрацій електронів і позитивних іонів [6-8]: $n_{e\infty} = n_{p\infty} = n_\infty$. У випадку, коли енергія кулонівської взаємодії зарядів,

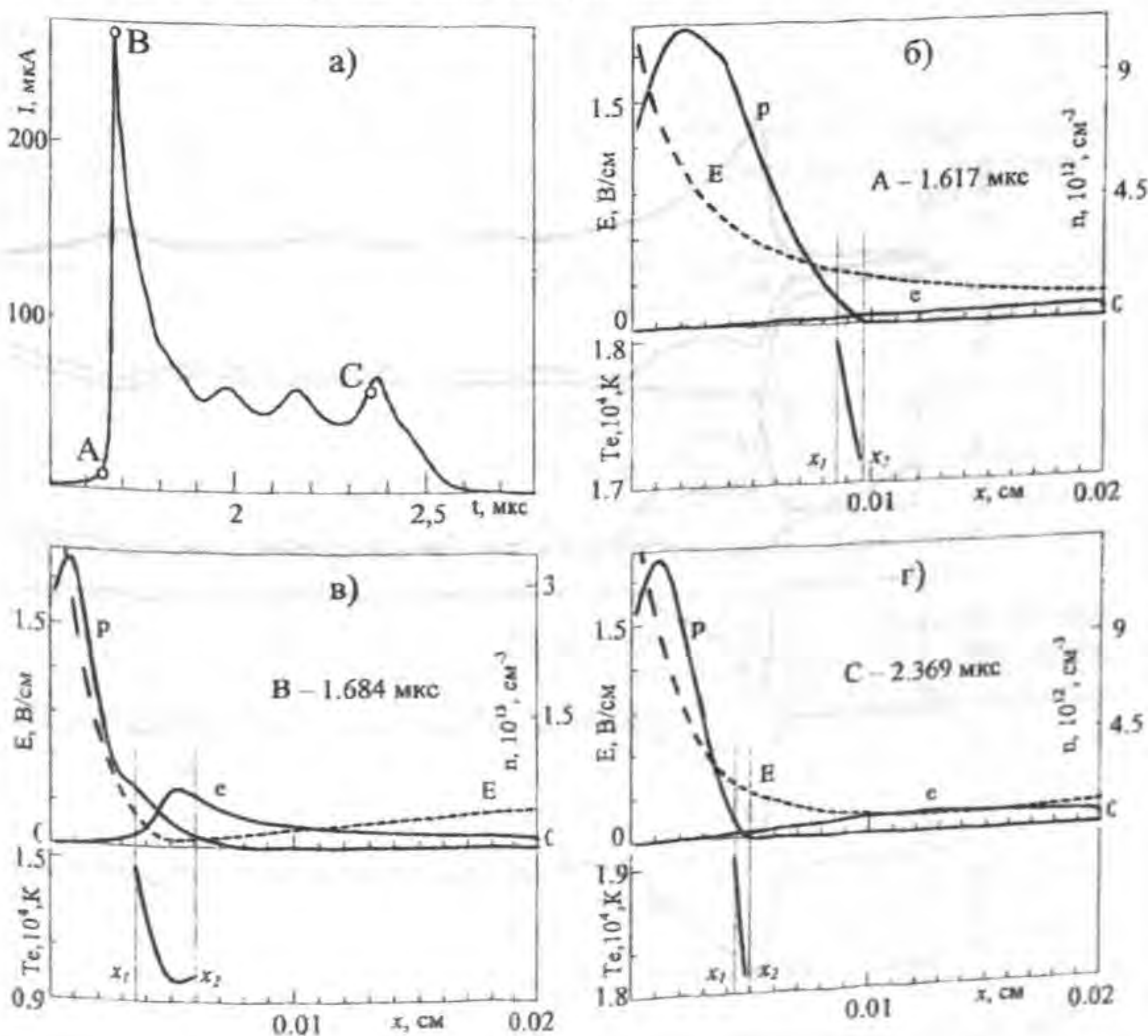


Рис. 1. Обчислені: а) залежність від часу струму корони у межах протікання всього імпульсу; б,в,г) залежності концентрації n електронів e , іонів p , напруженості поля E і температури T_e у плазмі від віддалі x до вістря. Точки А, В, С – моменти часу, при яких визначено n, E, T_e (б,в,г).

що характеризується величиною $e\varphi$, є малою у порівнянні із тепловою енергією kT , у першому наближенні з врахуванням сферичної симетрії поля отримується розв'язок рівняння Пуассона у вигляді:

$$\varphi = \frac{e}{r} e^{-r/\lambda_D}, \quad \frac{1}{\lambda_D^2} = \frac{4\pi e^2 n_e}{k} \left(\frac{1}{T_p} + \frac{1}{T_e} \right), \quad (3)$$

де e/r є кулонівським полем поблизу центрального заряду. Останнє на віддаль $r > \lambda_D$ швидко спадає за експоненціальним законом.

У рівноважній плазмі, де температури зарядів є однаковими ($T_p = T_e = T$), характерний дебаєвський радіус екранування заряду λ_D визначається як:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{kT}{4\pi e^2 n_e}} \quad (4)$$

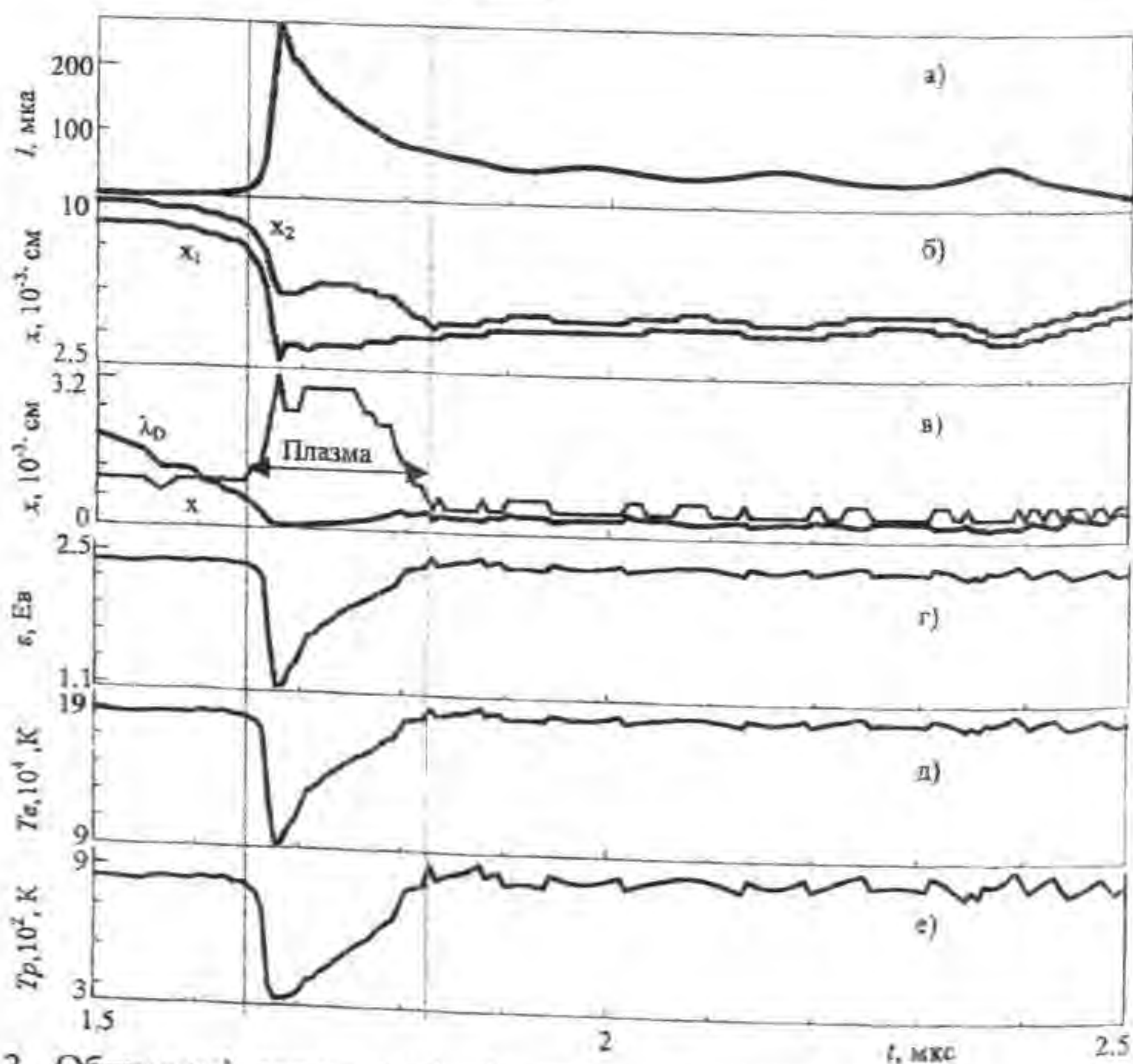


Рис. 2. Обчислені залежності від часу а) струму корони у межах протікання імпульсу, б) віддалі x_1 і x_2 від вістря, при яких $n_e = 0,2n_p$ (x_1) і $n_p = 0,2n_e$ (x_2), в) інтервалу $\Delta x = x_2 - x_1$ і дебаєвського радіуса λ_D , г) енергії електронів ε ; д) температури електронів T_e , е) температури позитивних іонів T_p – при тих же параметрах розряду, що і на рис. 1.

У нерівноважній плазмі, де температури не є однаковими (наприклад, у слабоіонізованій газорозрядній плазмі $T_e \gg T_p$), формально, згідно із формулою (3), екранування визначається низькою температурою газу (порядку T_p) і радіус є дуже дуже малий. Проте, як відзначає автор [1], просторовий заряд утворюється, в основному, за рахунок перерозподілу густини легких рухливих електронів, бо важкі малорухливі іони не встигають у кожний момент часу утворювати рівноважний розподіл біля розглядуваної рухомої частинки.

Тому, виникає сумнів у застосуванні формули Больцмана для $n_p(r)$ у даному випадку. Якщо ж вважати іони нерухомими, то у вихідному рівнянні слід покласти $n_p(r) = \text{const} = n_\infty$. Тоді член $1/T_p$ випадає з формули (3) і кінцева формула для λ_D збігається із (4). Цією величиною деколи користуються для характеристики ефекту екранування плазмою, називаючи її умовно дебаєвським радіусом. Автор [1], однак, підкреслює, що у механізмі про вплив іонів на екранування немає повного розуміння.

У праці [3] для випадку сильно неізотермічної плазми радіус екранування визначає тільки концентрацією і температурою позитивних іонів:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{kT_p}{4\pi e^2 n_p}}. \quad (5)$$

2. Методика обчислення

У кінетичній моделі негативної корони прийняли до уваги наступні процеси: іонізацію молекул N_2 при зіткненнях із електронами, прилипання електронів до O_2 , їхнє відділення від O_2^- завдяки зіткненням із N_2 в основному стані, дрейф зарядів і поверхневу іон-електронну емісію.

Основою числових розрахунків є диференціальні рівняння неперервності для потоків позитивних і негативних іонів та електронів, доповнені рівнянням Пуассона для електричного поля у квазідвомерному просторі:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \text{div}(v_e n_e) = \alpha n_e v_e - \eta n_e v_e + k_d n_n n_0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} - \text{div}(v_p n_p) = \alpha n_e v_e, \quad (7)$$

$$\frac{\partial n_n}{\partial t} + \text{div}(v_n n_n) = \eta n_e v_e - k_d n_n n_0, \quad (8)$$

$$\text{div} E = 4\pi e(n_p - n_e - n_n). \quad (9)$$

Тут n_e, n_p, n_n - концентрації електронів, позитивних і негативних іонів, n_0 - основного газу, v_e, v_p, v_n - швидкості дрейфу ($v_e = b_e E$, b_e - рухливість, стала величина), відповідно, α, η і k_d - коефіцієнти іонізації, прилипання і відлипання. Струм у колі визначається, як сума струму зміщення і потоку відлипання.

p -іонів на катод. Форму струмового каналу встановлено, виділяючи дві області розрядного проміжку: прикатодну (генерування) - циліндричну і дрейфову - параболічну. Кінетичні коефіцієнти отримано із праць [7,9,17-20]. Більшу інформацію щодо моделювання можна отримати у працях [12,14-16].

Межі можливого існування плазми x_1 і x_2 визначали із першої умови близькості концентрацій електронів і позитивних іонів, отриманих при розв'язанні системи рівнянь (6-9), а саме, $n_e = 0.2n_p$ для x_1 і $n_p = 0.2n_e$ для x_2 . На рис. 16,в,г. зображено схему визначення координат x_1 і x_2 для випадку складної пульсації струму негативної корони з включенням вторинних осциляцій струму. Результати для азоту з домішкою кисню (0.6%) при параметрах розряду: прикладеній напрузі до розрядного проміжку 2300В, радіусі вістря 0.004 см, довжині проміжку 0.6 см, зовнішньому опорі 10^6 Ом, довжині області генерування 0.006 см.

Для визначення дебаєвського радіуса екранування газорозрядної низькотемпературної нерівноважної плазми негативної корони використали формулу (5), оскільки при використанні високих температур електронів отримуються надто великі значення, що суттєво виходять за межі розмірів розряду.

Методику обчислення температур електронів і позитивних іонів у газовому розряді прийняли наступною. При обчислених значеннях напруженості поля E (9) знаходимо швидкість p -іонів $v_p = b_p E$, де b_p - їх рухливість, величина стала [6,7]. Температуру іонів T_p задали співвідношенням [10]:

$$T_p = 293 + m_p v_p^2, \quad (10)$$

де m_p - маса іонів.

Ефективну температуру електронів (при допущенні максвелівського розподілу їх енергії [7, 11]) знаходили, попередньо визначаючи характеристичну енергію D_e/b_e еВ, за методикою, описаною у праці [7] (D_e - коефіцієнт дрейфу електронів). Встановивши напруженість електричного поля у даній точці розряду, визначаємо приведену напруженість E/p , В/см/тор, де p - тиск газу. Для азоту для заданого E/p із експериментального графіку рис.11.3.5 [7] обчислюємо D_e/b_e еВ, використовуючи інтерполяційну формулу:

$$D_e/b_e = 0.58438x/(0.74044+x) + 0.58438x/(0.74044+x) + 0.02108x, \quad (11)$$

де $x = E/p$. Поділивши отримане значення на теплову енергію молекул газу при 20С ($kT_e^{20} = 0.026 \cdot 20/15 = 0.0347$ еВ, $kT_e^{15} = 0.026$ еВ, рис.11.3.5 [7]), визначаємо η - енергетичний коефіцієнт Таунседа (безрозмірний):

$$\eta = D_e/b_e / 0.347. \quad (12)$$

Средньо-квадратичну швидкість електрона обчислюємо за формулою 11.3.3 [7]:

$$v_e = 1.15\eta^{0.5}10^7, \text{ см/с.} \quad (13)$$

Отримуємо середню енергію електрона в плазмі:

$$\varepsilon = m_e v_e^2 / 2, \text{ ерг,} \quad (14)$$

або $\varepsilon_1 = \varepsilon / 1.6 \cdot 10^{-12}$, еВ (m_e - маса електрона). Кінцево, знаходимо температуру електронів [7]:

$$T_e = 2/3 \cdot 11610 \cdot \varepsilon_1, \text{ К.} \quad (15)$$

3. Результати обчислення і їх аналіз

Як видно із рис. 2 і рис. 3б,в, діапазон віддалей $\Delta x = x_2 - x_1$ у прикатодній області генерування, в якій концентрації електронів і позитивних іонів є близькими один до одного, є досить вузьким (порядку 0.0007 – 0.0010 см) протягом усього часу протікання імпульсу, крім його пікової частини (1.65–1.83 мкс). В останньому випадку Δx різко зростає до максимального значення 0.0032 см у момент максимуму струму імпульсу (точка 2 на рис.3а, $t = 1.678$ мкс) і далі швидко спадає до майже постійного значення 0.0007 см. Впливу високочастотних коливань струму у позапікові моменти часу на значення Δx не відчувається. Цікаво, що перед початком росту струму корони координати x_1 і x_2 знаходяться близько до середини заданої довжини області генерування (0.01 см). У моменти максимального підняття струму координата x_1 різко зменшується до значення 0.0025 см, а далі – плавно зростає до 0.0045 см, тоді як x_2 постійно і значно слабше знижується, і тільки в області післяпікового спаду струму слабо росте до значення 0.065 см. Така поведінка координат x_1 і x_2 приводить до згаданого вище суттєвого розширення діапазону Δx .

Діапазон зміни обчисленого дебаєвського радіуса екранування λ_D є високим протягом періода пульсації корони. До моменту початку росту струму його значення є порядку одиниць см, тоді як у момент піка струму він падає майже до нульового значення $5.9 \cdot 10^{-5}$ см. Далі λ_D плавно зростає до значення порядку 0,0006 см, близького до значення Δx , і зберігається майже постійним у межах існування імпульсу струму. Поза імпульсом цей радіус знову різко росте до великих значень порядку одиниць см, значно перевищуючи Δx . Таким чином, друга умова існування плазми коронного розряду ($\lambda_D \ll \Delta x$) виконується тільки у дуже короткому проміжку часу протікання лише пікової частини імпульсу – від 1.67 до 1.78 с. Ця тривалість є на порядок меншою у порівнянні із тривалістю протікання повного імпульсу (1 мкс) і періоду пульсації корони (~60 мкс).

Як видно із рис.2, залежність енергії (г) і температури (д) електронів від часу перебуває у майже повній антифазі із відповідною залежністю струму корони. При відносно постійних значеннях ε (2.4 еВ) і T_e ($1.9 \cdot 10^4$ К) до початку імпульсу, вони різко спадають у момент амплітуди струму ($t =$

1.678 мкс) і плавно наростають до значень децю вищих від початкових. Цікаво, що надалі ці значення зберігаються навіть за межами імпульсу. Аналогічну картину зміни температури іонів T_p у плазмі від часу можна спостерігати із рис.2.е. При майже постійних початкових і кінцевих значеннях 750 К температура T_p майже синфазно з T_e спадає при проходженні пікових значень струму. Відмінність від $T_e(t)$ полягає у значно плавнішому наростанні T_p у післяпіковий період.

Графіки залежності температури електронів від відстані до вістря $T_e(x)$ на рис. 3.г наглядно демонструють динаміку області існування плазми і її положення у процесі розвитку імпульсу струму корони в околі пікової частини у моменти часу 1-6 (рис. 3а). Як видно, у початкові моменти росту струму плазма знаходиться на далекій віддалі від вістря і її ширина є малою, порядку 0.0014 см (момент 1). При рості струму до максимального значення плазма різко наближається у напрямі до поверхні катода і збільшується у момент 2 до $\Delta x = 0.003$ см. Після проходження піка струму ширина плазми знову зменшується - майже у 3 рази (моменти 3-6), а її середнє положення незначно "плаває" між 4.5 і $5.0 \cdot 10^{-3}$ см.

Діапазон зміни температури електронів у плазмі також суттєво залежить від фази розвитку імпульсу струму. Спочатку, при дуже низьких струмах корони (момент 1) діапазон T_e є дуже вузьким ($1.5 \cdot 10^4 - 1.7 \cdot 10^4$ К). При максимальному струмі діапазон температур набуває максимального значення ($0.9 \cdot 10^4 - 1.6 \cdot 10^4$ К) при суттєвому зниженні температури. Після проходження максимуму струму температура електронів знову росте при звуженні діапазону, аж до максимального значення $1.9 \cdot 10^4$ К (момент 6). В усі моменти часу, крім точки 2, ця температура плавно знижується із ростом віддалі від катода. У момент піка струму залежність $T_e(x)$ є суттєво нелінійною, із мінімумом при $x = 4.6 \cdot 10^{-3}$ см. При цьому середня концентрація зарядів у плазмі є спадною при рості віддалі від катода, незалежно від фази розвитку імпульсу струму. Вона плавно знижується у межах $2.0 \cdot 10^{12} - 0.7 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$ у момент часу 1.67 мкс (початок зростання імпульсу), $8.0 \cdot 10^{12} - 7.0 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$ $t = 1.684$ мкс (пік струму) і $2.0 \cdot 10^{12} - 0.7 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$ при $t = 1.78$ мкс (завершення пікової частини імпульсу).

Описану вище пульсацію основних параметрів нерівноважної плазми негативної корони встановлено вперше. Досі тільки в одній праці [11] виконано моделювання плазми негативної корони у циліндричній геометрії в сухому повітрі (азот + кисень, 21%). При цьому всі параметри цієї плазми є сталими, стаціонарними у часі. Зауважимо, що автори не перевіряли 2-х умов існування плазми. Вони довільно прийняли її межі: одну - на поверхні катода, другу - як межу області генерування, з умови рівності коефіцієнтів розмноження і прилипання електронів. Між цими межами електричне поле відповідає середній кінетичній енергії електронів 1.85 еВ, тобто це область, в якій проходять реакції електронного удару.

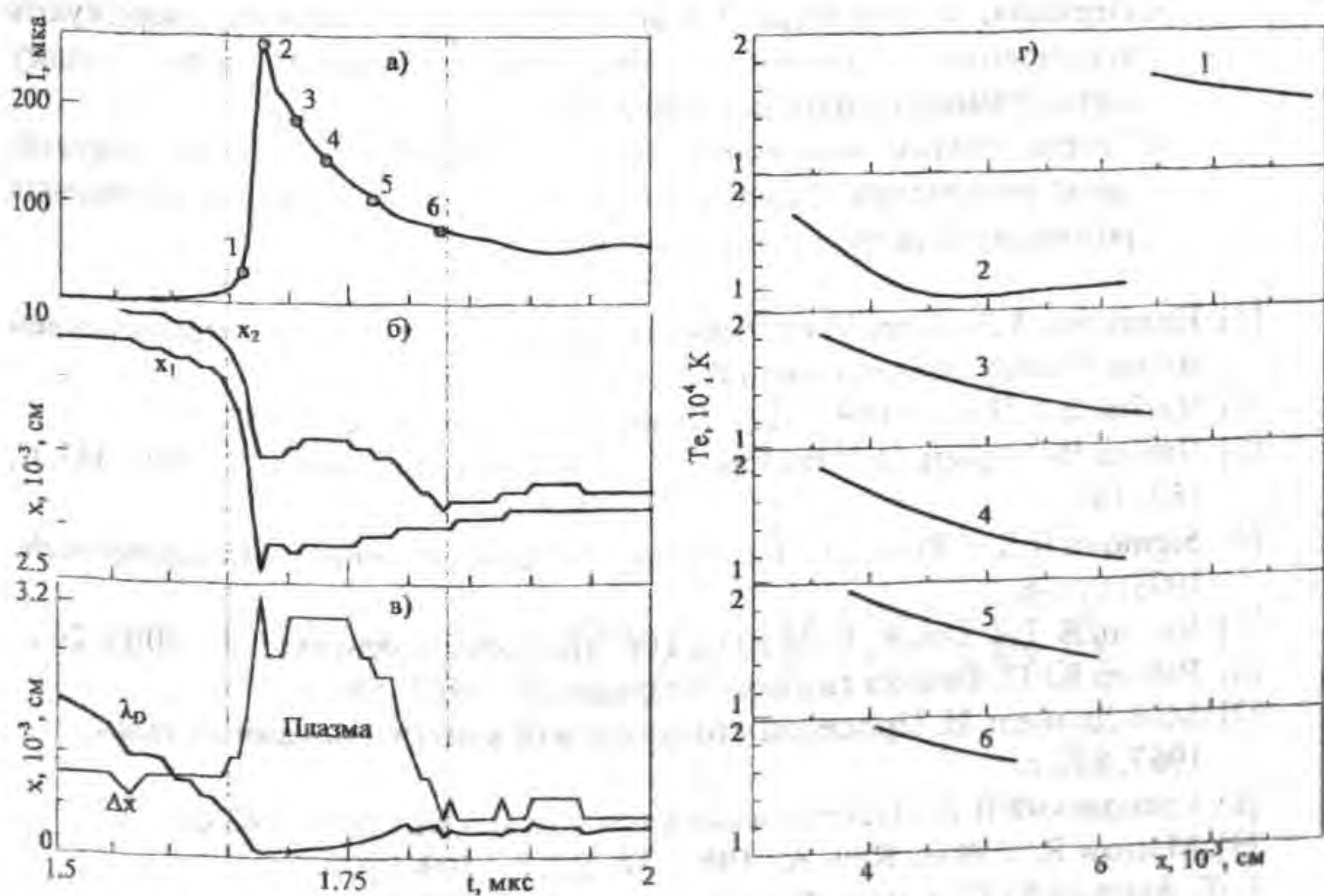


Рис. 3. Обчислені: а,б,в) залежності від часу а) струму корони у межах пікової частини імпульсу (точки 1-6 – моменти часу, для яких обчислено температуру електронів у плазмі - г); б) віддалі x_1 і x_2 від вістря, при яких $n_e = 0.2n_p(x_1)$ і $n_p = 0.2n_e(x_2)$; в) $\Delta x = x_2 - x_1$ і дебаєвського радіуса λ_D ; г) залежності температури електронів T_e від відстані до вістря.

Поза цією областю умовно існує тільки прилипання електронів до молекул кисню і утворення негативних іонів O_2^- . На наш погляд, такий підхід є сумнівним щодо строгості виконання вимог класичної фізики плазми.

Висновки

1. Вперше запропоновано методику визначення області існування нерівноважної плазми пульсівної негативної корони з використанням рівнянь потоків зарядів і Пуассона для електричного поля і обчислено її основні характеристики.
2. Показано, що плазма постійно пульсує як у просторі генераційної зони, безпосередньо прилеглої до поверхні катода, так і в часі, синфазно із зміною струму.

3. Отримані температури і концентрації електронів підтверджують відношення плазми негативної корони до класу низькотемпературної нерівноважної.
4. Теорія плазми коронного розряду потребує розвитку, зокрема, щодо визначення дебаєвського радіуса екранування і встановлення розподілу електронів за енергіями.

- [1]. Полякова А.А. и др. Масс-спектральный анализ смесей с применением ионно-молекулярных реакций, М., 1989, – 240 с.
- [2]. Чигінь В.І. Пат. 25169 // ДУ "Львівська політехніка", 1998.
- [3]. Чигінь В., Проць О. // Вісник ДУ "Львівська політехніка", 1999, 343, С. 180 -183.
- [4]. Sigmond R.S. // Proc. 11th Int. Symp. on Plasma Chemistry, Loughborough, 1993, P. 1-6.
- [5]. Чигінь В. І. // Звіт НДР №7033, НУ "Львівська політехніка", 2003, 24 с.
- [6]. Райзер Ю.П. Физика газового розряда, М., 1987, 591 с.
- [7]. Мак-Даниель И. Процессы столкновений в ионизированных газах, 1967, 832 с.
- [8]. Грановский В.Л. Электрический ток в газе. - М., 1971, 543 с.
- [9]. Morrow R. // Phys. Rev. A., 1985, 32, N3, P.1799-1809.
- [10]. Акишев Ю.С. и др. // Физика плазмы 2001, 27, N5, С.1-12.
- [11]. Chen J., Davidson J. // Plasma Chemistry and Plasma Processing 2003, 23.
- [12]. Чигінь В. І. // Вісник НУ "Львівська політехніка", 2000, 397, С. 136-146.
- [13]. Trichel G.W. // Phys. Rev. 1938, 54, С. 1078-1084.
- [14]. Чигінь В. І. // Укр. Фіз. Журн. 2002, 47, С.350-360.
- [15]. Chyhin V. I. // Condens. Matter Phys. 2002, 5, P.429-448.
- [16]. Чигінь В. І., Бойко О. // Вісник НУ "Львівська політехніка", 1998, 337, С.283-286.
- [17]. Александров Н. и др. // ТВТ, 1981, 19, С.485-490.
- [18]. Акишев Ю. и др. // Физика Плазмы, 1994, 20, С.571-584.
- [19]. Kossyi I.A. et al // Plasma Sources Sci. Technol, 1992, 1, P.207-220.
- [20]. Morrow R., Sato N. // J.Phys.D. 1999, 32, P.1.20-1.22.

Надійшла до редакції 19.10.2005

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 534.8

Адаменко І.І., професор,
Григор'єв А.М., асистент,
Кузовков Ю.Г., ст.н. співробітник
Салюк О.А., аспірант

Відштовхувальна частина
потенціалу міжмолекулярної
взаємодії та коефіцієнт
самодифузії рідин

Представлено результати
молекулярно-динамічних розрахунків
коефіцієнта самодифузії трьох
модельних рідин, молекули яких
взаємодіють за допомогою потенціалу
Леннарда-Джонса ($n=6$) з різними
показниками степені відштовхувальної
частини. Показано, що коефіцієнт
самодифузії не є величиною, чутливою
до деталей відштовхувальної частини
потенціалу міжмолекулярної взаємодії.

Ключові слова: коефіцієнт
самодифузії, потенціал між-
молекулярної взаємодії.

Adamenko I.I., professor,
Grigoriev A.N.,
Kuzovkov Yu.I.,
Saliuk A.A.

Repulsive molecular interaction
potential and self-diffusion
coefficient of liquids

Molecular dynamics calculations of
self-diffusion coefficient were carried out
for three model fluids, which particles
interact through Lennard-Jones ($n=6$)
potential with different degrees of the
repulsive part. Self-diffusion coefficient was
shown to be insensitive to peculiarities of
repulsive molecular interaction potential.

Key words: self-diffusion coefficient,
molecular interaction potential.

*E-mail: agrigoriev@univ.kiev.ua

В рамках термодинамічної теорії збурень в якості базисної системи для опису рівноважних та нерівноважних властивостей молекулярних рідин часто використовується система, частинки якої взаємодіють за допомогою потенціалу Леннарда-Джонса ($n=6$). Встановлено, що показник степені відштовхувальної частини лежить в межах $n=20-40$ [1-3]. Однією з підстав для такого висновку був аналіз даних по коефіцієнту самодифузії [3]. З іншого боку, в роботі [4] показано, що різні теплофізичні властивості мають різну чутливість до певних ділянок потенціальної кривої міжмолекулярної взаємодії. Для встановлення крутизни відштовхувальної частини слід аналізувати ті характеристики рідин, які до неї чутливі. Метою даної роботи є вивчення залежності коефіцієнта самодифузії рідин від крутизни сил відштовхування.

Коефіцієнт самодифузії D розраховувався методом молекулярної динаміки [5] в мікροканонічному ансамблі в рамках теорії лінійного відгуку:

цієнта дифузії модельної рідини, частинки якої взаємодіють за допомогою потенціалу Леннарда-Джонса (12-6), порівнювалися з відповідними експериментальними величинами D для аргона [6] (див. табл.). В якості параметрів потенціалу бралися значення $\varepsilon/k_B=118$ К та $\sigma=0.34$ нм [7] потенціалу Леннарда-Джонса (12-6). Як видно з таблиці, розраховані та експериментальні значення D збігаються в межах 5%.

На рисунку показана залежність коефіцієнта самодифузії для трьох модельних рідин при $\rho=0.8$. Як видно з рисунку, D слабо залежить від n .

Таким чином, коефіцієнт самодифузії не є величиною, чутливою до деталей відштовхувальної частини потенціалу міжмолекулярної взаємодії. У зв'язку з цим визначати n більш коректно з даних по рівнянню стану або пружним властивостям рідин [1,2].

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Адаменко И.И., Самойленко Л.П. Об уравнении состояния Тейта // Физика жидкого состояния. – 1987. – Вып. 15. – С. 117-120.
2. Бардик В.Ю., Сысоев В.М. Уравнение состояния жидкого аргона в пределе высоких плотностей // ФНТ. – 1998. – Т. 24, №8. – С. 797-799.
3. Бардик В.Ю., Шакун К.С. Дослідження функціональної форми міжмолекулярного потенціалу на основі самодифузії молекул рідини // УФЖ. – 2005. – Т. 50, № 7. – С. 659-661.
4. Adamenko I.I., Grigoriev A.N., Kuzovkov Yu.I. Description peculiarities of viscous and elastic properties of dense molecular liquids on the basis of the model of Lennard-Jones (n-6) fluid // J.Mol.Liq. – 2005. – Vol. 120. – P. 63-65.
5. Allen M.P., Tildesley D.J. Computer Simulation of Liquids. Oxford, Clarendon Press, 1987. – 385 p.
6. Van Loef J.J. Temperature and density dependence of the self diffusion coefficients in simple liquids // Physica. – 1972. – Vol.62, №2. – P. 345-356.
7. Гиршфельдер Дж., Кертис Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. – М.: ИЛ, 1961. – 930 с.

Надійшла до редколегії 07.09.05

УДК 532.536

Альошін О.Д., проф., д. ф.-м. н.,
Рудніков Є.Г., наук. співр., к.ф.-м.н

**Теплоємність неоднорідної
рідини в гравітаційному полі
поблизу критичної точки**

Виходячи з флуктуаційної теорії фазових переходів і теорії гравітаційного ефекту розроблені рівняння теплоємності неоднорідної рідини в гравітаційному полі поблизу критичної точки, вздовж трьох граничних напрямків: критичної ізохори, критичної ізотерми, межі поділу фаз. Виявлено немонотонну висотну залежність теплоємності в закритичній області температур з максимальним її значенням не на критичній ізохорі, а при некритичних густинах системи.

Ключові слова: критична точка, радіус кореляції, гравітаційне поле, теплоємність

Alekhin O. D., Prof., Dr. Sc.
Rudnikov E.G., Ph.D.

**Heat capacity for inhomogeneous
liquid under gravity near the
critical point**

Based on the fluctuation theory of phase transitions and gravity effect theory the equations of heat capacity have been constructed for inhomogeneous liquid under gravity near the critical point along three limiting critical directions: critical isochor, critical isotherm, phase interface. The nonmonotonous height dependence of heat capacity at supercritical temperature region have been obtained with its maximum not at the critical isochor but at noncritical system densities.

Keywords: critical point, correlation length, gravity field, heat capacity

*E-mail: alekhin@univ.kiev.ua

Раніше в роботі [1] на базі флуктуаційної теорії фазових переходів ФТФП [2] були представлені різноманітні термічні і калоричні рівняння стану речовини поблизу критичної точки (КТ), які пов'язані між собою кореляційними характеристиками речовини.

На основі цих досліджень в даній роботі проведені розрахунки температурної і польової залежності теплоємності неоднорідної речовини в гравітаційному полі. Виходячи з ФТФП [2], найбільш сингулярна частина теплоємності системи поблизу КТ в загальному вигляді може бути представлена рівнянням

$$C_v = \frac{\hat{c}^2}{\alpha^2} F_\phi(Z^*), \quad (1)$$

Тут $F_\phi = C_0 R_c^{-3} = C_0 t^{3\nu} \Phi(Z^*)$ – флуктуаційна частина термодинамічного потенціалу; $\Phi(Z^*)$ – масштабна функція масштабної змінної $Z^* = \Delta\mu/t^{\beta\delta}$ [2]; $\Delta\mu = (\mu - \mu_c)\mu_c$; $t = (t - t_c)/t_c$; μ_c і T_c – критичні значення хімічного потенціалу і температури. В гравітаційному полі висотна зміна хімічного потенціалу представляється у вигляді [3] $\Delta\mu = d\mu/dh \cdot h$ ($h = \rho_c g \cdot \Delta z / P_c$, ρ_c , P_c – критичні значення густини і тиску, g – стала земного тяжіння, Δz – висота, відрахована від рівня з критичною густиною).

На основі (1) знайдемо рівняння теплоємності неоднорідної рідини в гравітаційному полі вздовж трьох граничних критичних напрямків – критичної ізохори ($Z^* \ll 1$, $t > 0$), межі поділу фаз ($Z^* \ll 1$, $t < 0$), критичної ізотерми ($Z^* \gg 1$, $t < 0$ та $t > 0$). Для цього використаємо відповідно асимптотичні розклади масштабних функцій $\Phi(Z^*)$ [2]

$$\Phi_1(Z_1^*) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} (Z_1^*)^{2n}; \quad \Phi_2(Z_2^*) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (Z_2^*)^n; \quad \Phi_3(Z_3^*) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (Z_3^*)^n \quad (2)$$

Тоді на основі (1) і (2) теплоємність неоднорідної речовини в цих випадках має вигляд:

1) $Z^* \ll 1$, $t > 0$

$$C_v = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \right)_\mu = 3C_0 a_0^2 t^{3\nu-2} ((3\nu-1)\nu a_0 + a_2(3\nu-2\beta\delta)(3\nu-2\beta\delta-1) \left(\frac{\Delta\mu}{t^{\beta\delta}} \right)^2 + \dots) \quad (3)$$

2) $Z^* \ll 1$, $t < 0$

$$C_v = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \right)_\mu = 3C_0 b_0^2 t^{3\nu-2} ((3\nu-1)\nu b_0 + b_1(\beta\delta-3\nu)(\beta\delta-3\nu+1) \left(\frac{\Delta\mu}{t^{\beta\delta}} \right) + \dots) \quad (4)$$

3). $Z^* \gg 1$, $t < 0$ та $t > 0$

$$C_v = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \right)_\mu = 6C_0 \Delta\mu^{\frac{3\xi-2}{\beta\delta}} (d_2 d_0 + d_1^2) d_0 + d_1 (6d_2 d_0 + d_1^2) \left(\frac{t}{\Delta\mu^{\frac{1}{\beta\delta}}} \right) + \dots \quad (5)$$

Схематично вид цих залежностей показано на рис. 1 ($t > 0$) і рис. 2 ($t < 0$).

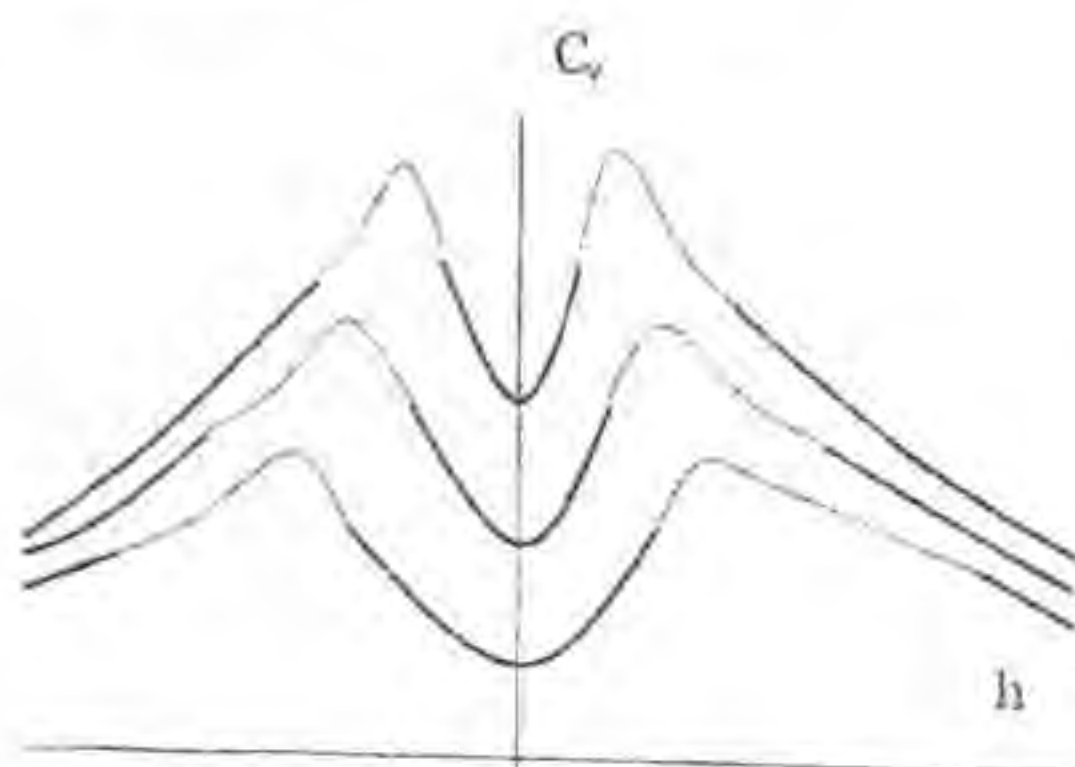


Рис. 1.

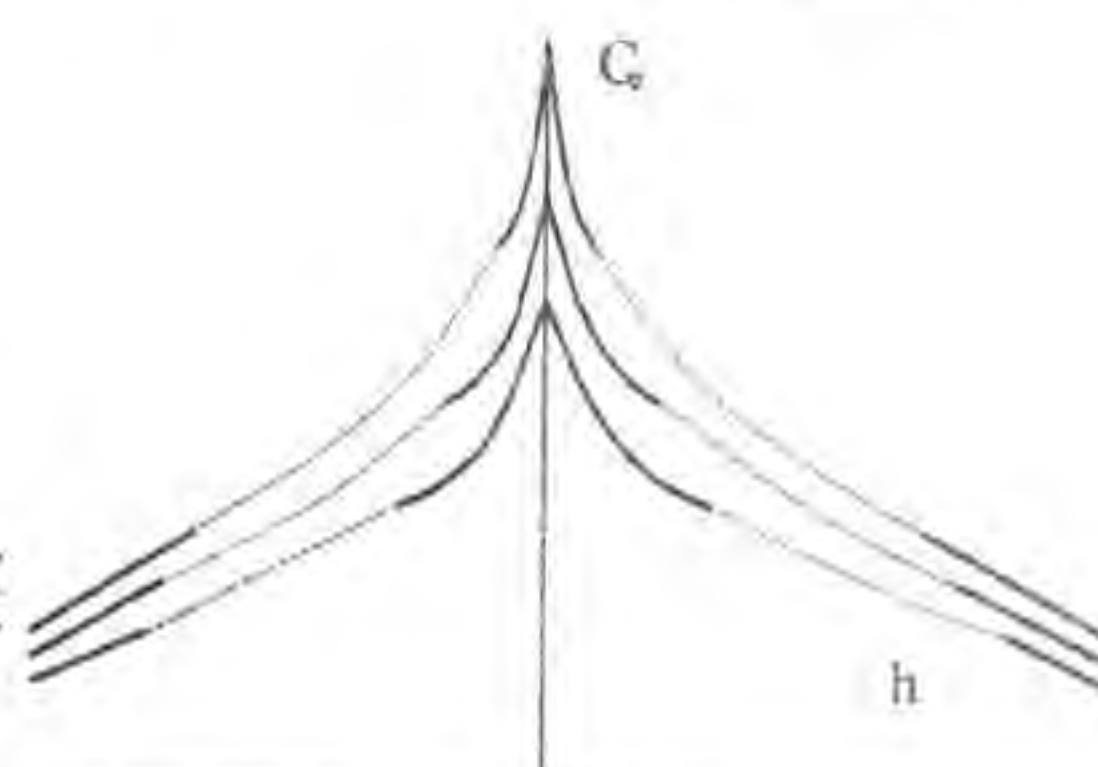


Рис. 2.

З рівнянь (3) – (5) і рис. 1, 2 слідують наступні висновки.

1). В області температур $t < 0$ (рис. 2.) при віддаленні від рівня межі поділу фаз величина теплоємності неоднорідної речовини монотонно зменшується як у випадку $Z^* \ll 1$, так і $Z^* \gg 1$ (формули (4) і (5)).

2). При віддаленні від рівня критичної ізохори $t > 0$ (рис. 1.) (3) теплоємність неоднорідної речовини, на відміну від (4) і (5), не зменшується, а зростає (добуток $(3\nu - 2\beta\delta)(3\nu - 2\beta\delta - 1) > 0$). В той же час для граничного випадку $(Z^* \gg 1, t > 0)$ (5) при збільшенні польової змінної h теплоємність неоднорідної речовини монотонно зменшується. Тобто в області температур $t > 0$ повинна спостерігатись немонотонна висотна залежність теплоємності неоднорідної рідини в гравітаційному полі з максимумом на висотах $h \neq 0$.

3). Проведені розрахунки показують також, що теплоємність неоднорідної рідини в гравітаційному полі у всіх граничних випадках $(Z^* \ll 1, t > 0 \text{ і } t < 0)$ $(Z^* \gg 1, t > 0 \text{ і } t < 0)$ монотонно збільшується при наближенні до критичної температури.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Альохін О.Д., Рудніков Є.Г. Термічні та калоричні рівняння стану речовини поблизу критичної точки / Всеукраїнський з'їзд "Фізика в Україні" Україна, Одеса, 3 – 6 жовтня 2005 р.
2. Паташинский А.З., Покровский В.Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. – М.: Наука, 2-е изд., перераб. 1982. – 382 с.
3. Альохін О.Д., Булавін Л.А., Рудніков Є.Г. Гравітаційний ефект та величина внутрішнього неоднорідного поля у речовині поблизу критичної точки // УФЖ. – 1996. – Т. 41, № 11–12. – С. 1059–1061.

Надійшла до редколегії 19.10.2005

УДК (543.42:54-78+543.522)167.23

Сергій В. Бегун¹, Ігор М. Каденко,
Володимир К. Майданюк

Sergij V. Begun¹, Igor M. Kadenko,
Volodymir K. Maidanyuk

**Врахування ефекту поглинання
гамма-квантів зразком в
нейтронному активаційному
методі**

**The account of the effect of
absorption of gamma-quanta by
the sample in the neutron
activation method**

Запропоновано метод врахування ефекту самопоглинання для аксіально-симетричної геометрії вимірювання гамма-спектрів. Створений та перевірений алгоритм дозволяє враховувати нерівномірний розподіл активності.

Method of the account of the effect of self-absorption for the case of axial-symmetric geometry of gamma-spectra measuring is proposed. Created and tested technique gives the opportunity to take into account the non-uniform distribution of activity.

Ключові слова: гамма-спектр, самопоглинання, активаційний метод.

Key Words: gamma-spectrum, self-absorption, activation method.

¹ E-mail: npds@univ.kiev.ua

Зростаючі можливості експериментальних методів ядерної фізики, зокрема нейтронного активаційного методу, призводять до покращення якості результатів вимірювань [1]. Це, в свою чергу, вимагає врахування ефектів, якими раніше можна було знехтувати на фоні набагато більшої статистичної похибки. Одним з цих ефектів є поглинання гамма-квантів у зразку (самопоглинання). Від цього ефекту можна позбутися шляхом використання тонких зразків, але це обмежує вимірювану активність. А якщо використовувати товсті зразки, то розподіл активності по їх об'єму буде нерівномірний. Тому пропонується методика розрахунку внеску від ефекту самопоглинання з врахування нерівномірного розподілу активності по об'єму зразка.

Розглядається найбільш поширена аксіально-симетрична геометрія проведення вимірювань гамма-спектрів опромінених нейтронами зразків. Зразки являють собою однорідні по густині та хімічному складу циліндри і розташовуються під час вимірювань таким чином, що вісь зразка співпадає із віссю детектора.

Як вже було відмічено вимірювання гамма-спектрів ядер продуктів активації, по можливості, необхідно проводити з використанням тонких зразків, коли можна знехтувати ефектом поглинання гамма-квантів у зразках. Але для підвищення чутливості експерименту виникає потреба у збільшенні маси зразків, що опромінюються, наприклад, у випадку дослідження ядерних реакцій, величини перерізів яких складають доли

мілібарна [1]. Збільшення товщини зразків призводить до необхідності врахування ефекту поглинання гамма-квантів у зразках. При цьому масу зразків, звісно, неможливо збільшувати до нескінченності — зростає доля поглинутих гамма-квантів. Додатково в нейтронному активаційному методі збільшення маси обмежується вимогами до розмірів зразків, що пов'язані із розмиттям пучка нейтронів по енергії.

Для наближеного врахування ефекту самопоглинання можна використовувати формулу [2]:

$$S_{\text{real}} = S_{\text{det}} \cdot \frac{\mu \cdot \rho \cdot x}{1 - e^{-\mu \cdot \rho \cdot x}}, \quad (1)$$

де S_{det} — виміряна площа гамма-піку;

S_{real} — скоригована на ефект поглинання гамма-квантів у зразку площа гамма-піку. Відповідає величині реальної активності зразка;

μ — повний масовий коефіцієнт поглинання при взаємодії гамма-квантів відповідної енергії з атомами зразка, $\text{см}^2 \cdot \text{г}^{-1}$ [3, 4];

ρ — густина матеріалу зразка, $\text{г} \cdot \text{см}^{-3}$;

x — товщина зразка, см.

Формула (1) отримана в наближенні паралельного пучка гамма-квантів та рівномірного розподілу активності по об'єму зразка. При цьому не враховується реальна геометрія вимірювань спектрів. Використання формули (1) дає занижені на 0,1÷30 % результати в порівнянні з більш точними розрахунками, проведеними із застосуванням методу Монте-Карло. Тому формулу (1), в основному, використовують для оціночних розрахунків при оптимізації умов проведення експерименту.

Для точнішого врахування внеску від ефекту поглинання гамма-квантів у зразках існує два підходи: аналітичні розрахунки (наприклад, [5–7]); розрахунки з використанням методу Монте-Карло [8]. Було обрано метод Монте-Карло, тому що розрахунки із застосуванням цього методу ефективніші у випадку складної геометрії експерименту. Модель будується в максимальному наближенні до реальності:

- використовуються паспортні дані детектора, враховується наявність алюмінієвого кожуха та “мертвого шару” детектора;
- використовуються реальні параметри геометрії проведення вимірювань: відстань зразок-детектор; розміри зразків; при застосуванні поглинаючих фільтрів із свинцю враховується їх наявність; враховується нерівномірний розподіл активності по об'єму зразка.

Значення величин коефіцієнтів взаємодії гамма-квантів з атомами речовин краще брати із банку даних [3, 4].

Зважаючи на статистичний характер розрахунків, кількість подій, які розглядаються при моделюванні, обирається таким чином, щоб кількість відібраних подій в кожному випадку була > 500000 . Для відбору подій використовується простий метод виключення [8].

На першій стадії моделювання підраховується кількість подій N_0 , коли гамма-квант, що випромінюється у зразку, попадає в чутливий об'єм детектора. При підрахунку N_0 не враховується взаємодія гамма-квантів з атомами зразка. До N_0 не входять події, коли гамма-квант за геометричних умов попадає в чутливий об'єм детектора, але взаємодія відбувається за рахунок комптонівського розсіяння, фотоефекту чи ефекту народження електрон-позитронних пар в алюмінієвому кожусі детектора, "мертвому шарі" детектора або у поглинаючому фільтрі із свинцю. Такий підхід пов'язаний з тим, що у випадку таких взаємодій гамма-квант завідомо не буде зареєстрований у відповідному піку повного поглинання. Також, до N_0 не входять події, коли гамма-квант попадає в чутливий об'єм детектора, але вилітає із нього без взаємодії. Останнє дозволяє врахувати вплив крайових ефектів при реєстрації гамма-квантів детектором. Більш докладне врахування впливу крайових ефектів значно ускладнює алгоритм розрахунку [9], але не призводить до істотного покращення точності кінцевого результату.

На другій стадії враховується взаємодія гамма-квантів з атомами зразка. Процедура підрахунку подій N_1 аналогічна тій, що застосовується для підрахунку кількості подій N_0 . Але, додатково, до N_1 не входять події, коли гамма-квант за геометричних умов попадає в чутливий об'єм детектора, але взаємодія відбувається за рахунок комптонівського розсіяння, фотоефекту чи ефекту народження електрон-позитронних пар в об'ємі зразка, тому що в такому випадку гамма-квант завідомо не буде зареєстрований у відповідному піку повного поглинання.

В результаті проведених таким чином розрахунків для кожної геометрії вимірювання гамма-спектрів та відповідних енергій гамма-квантів визначаються величини N_0 та N_1 . Величина поправки на ефект поглинання гамма-квантів у зразках визначається відповідно як відношення
$$\frac{N_0}{N_1} = 1 + \frac{N_0 - N_1}{N_1}.$$
 Тобто, виміряні площини гамма-пиків необхідно

домножати на величину цього відношення.

В розрахунках для моделювання напрямку вильоту гамма-квантів та їх вільного пробігу застосовується метод оберненої функції [8]. Для врахування нерівномірного розподілу активності по об'єму зразка моделювання координат народження гамма-квантів в зразку здійснюється за допомогою методу відбору з постійною мажорантою [8]. При цьому використовуються випадкові величини γ_i з рівномірним розподілом густини ймовірності в інтервалі $[0, 1]$, для чого в алгоритмі застосовується відповідний генератор випадкових чисел.

Спочатку, зважаючи на симетрію геометрії вимірювання спектрів, в припущенні рівномірного розподілу активності розігруються тільки дві координати народження гамма-кванта в зразку — радіус та висота (2).

Висота народження гамма-кванта відраховується від ближньої до детектора основи зразка (циліндра). Координати народження гамма-квантів розігруються в циліндричній системі координат, вісь OZ якої співпадає з віссю зразка та детектора. Для отримання формул (2) був застосований метод оберненої функції [8].

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{\gamma_1 \cdot R_s^2}, \\ h &= \gamma_2 \cdot H_s, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

де R_s – радіус зразка, см; H_s – товщина зразка, см.

Якщо нейтрони отримуються з використанням нейтронного генератора [10, 11], то для розрахунків нерівномірності активації джерело нейтронів можна моделювати як нескінченно тонкий диск. Після опромінювання активність максимальна для центральної точки на основі зразка, яка була ближньою до джерела нейтронів під час опромінювання, та зменшується при віддаленні від цієї точки вздовж радіусу та по висоті. В розрахунках диференціальний переріз ядерної реакції, яка використовується для отримання нейтронів, вважається постійним в межах тілесного кута, що перекривається зразком, а нейтрони — моноенергетичними.

Відносний розподіл активності по об'єму зразка для випадку опромінювання в геометрії зразок “впритул” до джерела нейтронів, при умові, що вісь зразка співпадає з віссю джерела нейтронів, а ближня до детектора основа зразка при вимірюванні гамма-спектрів відповідає ближній до джерела основі при опромінюванні, використовуючи стандартний підхід [12] можна описати наступною формулою:

$$A(r_1, h_1) = \int_0^{r_{\text{дж}}} \int_0^{2\pi} \frac{\exp\left(-\sigma_r \cdot N_s \cdot \frac{h_1}{h_1 + D} \cdot \sqrt{(D + h_1)^2 + r_1^2 + r^2 - 2 \cdot r_1 \cdot r \cdot \cos\phi}\right) \cdot r}{(D + h_1)^2 + r_1^2 + r^2 - 2 \cdot r_1 \cdot r \cdot \cos\phi} d\phi dr, \quad (3)$$

де D – відстань джерело нейтронів-зразок, см;

$r_{\text{дж}}$ – радіус джерела нейтронів (нескінченно тонкий диск), см;

r_1 та h_1 – координати точки у зразку, см;

σ_r – сумарний переріз ядерних реакцій [12], в результаті яких нейтрон або поглинається або вибуває із відповідної енергетичної групи, см²;

N_s – концентрація відповідних ядер, см⁻³.

Якщо досліджуваний зразок складається із ядер одного ізотопу, то

$N_s = \frac{\rho \cdot N_A}{M}$, де ρ – густина матеріалу зразка, г·см⁻³; N_A – число Авогадро, моль⁻¹;

M – молярна маса атомів зразка, г·моль⁻¹. Якщо зразок складається із різних атомів або різних ізотопів, то добуток $\sigma_r \cdot N_s$ у формулі (3)

заміняється на суму $\sum_i \sum_j (\sigma_{r_{ij}} \cdot N_{s_{ij}})$, де індекси i та j відповідають різним

ядрам та різним ядерним реакціям, а величини N_i розраховуються виходячи із масової долі ядер i -го типу у зразку. У випадку неперервного спектру нейтронів застосовується усереднене по спектру значення величини σ_i [12]. Експоненційний член у формулі (3) можна замінити без суттєвого погіршення точності розрахунку на одиницю при умові, що $\sigma_i < 2 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$. При опромінюванні зразків в дальній геометрії ($\frac{\sqrt{D^2 + R_s^2}}{r_{\text{дк}}} > 10$) — джерело нейтронів можна вважати точковим. В такому

наближенні формула для відносного розподілу активності по об'єму зразка набуває вигляду:

$$A(r_i, h_i) = \frac{\exp\left(-\sigma_i \cdot N_i \cdot \frac{h_i}{D+h_i} \cdot \sqrt{(D+h_i)^2 + r_i^2}\right)}{(D+h_i)^2 + r_i^2}. \quad (4)$$

Формула (4) на відміну від формули (3) справедлива для всіх кутів між віссю зразка та віссю джерела нейтронів. При застосуванні джерел нейтронів, які являють собою капсули $((\alpha, n)$ -джерела, ^{252}Cf [12]), з метою уникнення невизначеності в геометрії опромінювання — зразки розташовують таким чином, щоб виконувались умови точковості джерела. Як наслідок, для таких випадків також використовується формула (4). При опромінюванні зразків колімованим пучком нейтронів відносний розподіл активності буде експоненційним:

$$A(r_i, h_i) = \exp(-\sigma_i \cdot N_i \cdot h_i). \quad (5)$$

Найчастіше такий розподіл активності буде при опромінюванні зразків на ядерному реакторі [12].

Далі, в залежності від умов опромінювання зразків, на основі формули (3), (4) або (5), використовуючи метод відбору з постійною мажорантою [8], проводиться перевірка виконання критерію (6). Якщо критерій

$$\frac{A(r_i, h_i)}{A(0, 0)} \leq \gamma, \quad (6)$$

виконується, то вважається, що гамма-квант народився в точці з координатами (r_i, h_i) , якщо — ні, то розіграш за формулами (2) випадкових координат та перевірка критерію повторюються. Мажорантою в даному випадку є рівномірний розподіл активності по зразку із значенням величини активності, що відповідає точці з координатами $(0, 0)$, де активність максимальна. При цьому проводилась перевірка на відповідність розіграного розподілу активності з очікуваним за формулами (3), (4) або (5).

Після розіграшу за формулами (2)–(6) координат народження гамма-квантів в зразку проводиться за допомогою методу оберненої функції [8] розіграш випадкового напрямку вильоту. Кутові координати

вильоту гамма-кванта розраховуються за формулами (7) в сферичній системі координат. При цьому центр системи координат розташовується в точці народження гамма-кванта, кут θ відраховується від вісі перпендикулярної основі зразка, а кут ϕ відраховується від вісі, напрямом якої визначається перпендикуляром до вісі зразка проведенням із точки народження гамма-кванта.

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \arccos(2 \cdot \gamma_4 - 1), \\ \phi &= 2 \cdot \pi \cdot \gamma_5. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Для відбору подій, що відповідають взаємодії гамма-кванта в зразку, в поглинаючому фільтрі із свинцю, в алюмінієвому кожусі, "мертвому шарі" та в чутливому об'ємі детектора, за формулою (8) проводиться розіграш випадкових величин вільного пробігу гамма-кванта у відповідному матеріалі. Для отримання цієї формули також застосовано метод оберненої функції [8]. В формулі (8) використовуються сумарні величини коефіцієнтів взаємодії гамма-квантів, що включають сукупність процесів: фотоефект, комптонівське розсіяння, народження електрон-позитронних пар.

$$\ell = \left(-\frac{1}{\mu} \right) \cdot \ln(\gamma_6), \quad (8)$$

де μ — відповідний повний лінійний коефіцієнт поглинання при взаємодії гамма-квантів даної енергії з атомами речовини, см^{-1} [3, 4].

Коректність методу врахування поглинання гамма-квантів у зразках доведено експериментально. Для цього проведено порівняння скоригованих результатів визначення перерізів реакцій із результатами, визначеними в умовах, коли внесок ефекту самопоглинання був $< 1\%$ [1]. Величини перерізів узгоджувались в межах похибок.

Висновок

Запропонована методика дозволяє враховувати нерівномірний розподіл активності по об'єму зразка. Можлива адаптація представленого розрахункового алгоритму до складнішої геометрії шляхом розділення геометричних фігур на циліндри та застосування методу відбору з відповідним чином підбраною мажорантою. В адаптованому варіанті методику можна використовувати в радіоекології при вимірюваннях концентрацій радіонуклідів в пробах. Результуюча похибка від зроблених припущень в методиці при умові оптимізації експерименту не перевищує $1 \div 1,5\%$.

Література

1. Begun S.V., Kadenko I.M., Maidanyuk V.K., Neplyuev V.M., Plujko V.A., Primenko G.I., Tarakanov V.K. Determination of the cross sections of (n, x)

- nuclear reactions on Y, La, Ta, Pb and Bi at the energy of neutrons about 14 MeV // *Journal of Nuclear Science and Technology*. – 2002. – Suppl. 2, Vol. 1. – p. 425–428.
2. Cutshall N.H., Larsen I.L., Olsen C.R. Direct analysis of ^{210}Pb in sediment samples: self-absorption corrections // *Nucl. Instrum. and Meth.* – 1983. – Vol. 206. – p. 309–312.
 3. Cullen D.E., Hubbell J.H., Kissel L. EPDL97: the Evaluated Photon Data Library, '97 version: Report / University of California, Lawrence Livermore National Laboratory (USA); UCRL-50400. – Vol. 6, Rev. 5. – Livermore (USA): 1997. – 35 p.
 4. The Evaluated Photon Data Library, 1997 version (EPDL97) // International Atomic Energy Agency (IAEA), Vienna, Austria. – <http://www-nds.iaea.org/epdl97/> (online).
 5. Кравцов В.В., Рясиченко О.П., Стрижак В.И. Учет самопоглощения γ -квантов в излучателе конечных размеров // *Прикладная ядерная спектроскопия*. – М.: Атомиздат. – 1977. – Вып. 7. – с. 205–210.
 6. Моргунов Э.И., Поярков В.А., Стрижак В.И. Полуэмпирическая методика учета поглощения γ -излучения в объемных образцах // *Прикладная ядерная спектроскопия*. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние. – 1984. – Вып. 13. – с. 55–60.
 7. Поярков В.А., Войтов А.И., Каденко И.Н., Моргунов Э.И. О возможности реализации нейтронно-активационного анализа инвариантного к матрице образца // Рабочее совещание “Современные направления в активационном анализе в ОИЯИ”, Дубна (Россия), 26-28 июня 1988 г. Сборник трудов. – Д14-88-833. – Дубна: Объединенный институт ядерных исследований. – 1988. – с. 50–61.
 8. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. – М.: Наука, 1973. – 311 с.
 9. Полупроводниковые детекторы в экспериментальной физике / Ю.К. Акимов, О.В. Игнатьев, А.И. Калинин, В.Ф. Кушнирук. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 344 с.
 10. Drosch M. Sources of variable energy monoenergetic neutrons for fusion-related applications // *Nuclear Science and Engineering*. – 1990. – Vol. 106. – p. 279–295.
 11. Кирьянов Г.И. Генераторы быстрых нейтронов. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 224 с.
 12. Экспериментальные методы нейтронных исследований / Е.А. Крамер-Агеев, В.Н. Лавренчик, В.Т. Самосадный, В.П. Протасов. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 272 с.

Надійшла до редакції 7.11.2005

УДК 535.33

Весна Г.В., науковий співробітник,
Дегода В.Я., провідний науковий
співробітник,
Кучакова Т.О., інженер,
Макара В.А., професор,
Проскура А.И., науковий
співробітник

Накопичування світлосуми керамікою ZnS-Cu при рентгенівському збудженні

Встановлено, що при
рентгенівському збудженні
кристалофосфорів, на відміну від
фотозбудження, висвічуючою дією
збуджуючого випромінювання можна
знехтувати. Це дозволяє досягати при
рентгенівському збудженні майже
повної перезарядки глибоких пасток.
Експериментальна перевірка
здійснювалася на класичному
люмінофорі - люмінесцентній кераміці
ZnS-Cu.

Ключові слова: світлосума,
кінетика, висвічуюча дія
випромінювання, пасток, люмінофор.

E-mail:degoda@univ.degoda.ua

Vesna G.V., researcher,
Degoda V.Y., researcher,
Kuchakova T.O, engineer,
Makara V.A., professor,
Proskura A.I., researcher

Accumulation of the light sum by ceramics ZnS -Cu at x-ray excitation

It is set, that the x-ray excitation phosphor
crystals, as against photoexcitation,
highlight the action of stimulating radiation
can be neglected. It allows to amount for x-
ray excitation all but complete recharging
of the deep traps. The experimental check
was carried out on classical luminophor -
luminescent ceramics ZnS-Cu.

Key Words: light sum, kinetic,
highlight effect radiation, trap
luminophor.

Для багатьох люмінофорів експериментально спостерігається значно
більша накопичена світлосума при рентгенівському збудженні
кристалофосфорів, ніж при УФ зон-зонному збудженні [1-3]. Але,
відповідно до класичної теорії фотолюмінісценції (ФЛ) [4,5] граничне
накопичування світлосуми (максимальна концентрація перезаряджених
пасток) обмежується висвічуючою дією збуджуючого випромінювання.
Це висвічування обумовлено оптичним поглинанням збуджуючого
випромінювання перезарядженими пастками, що зменшує квантовий вихід
рекомбінаційного світлення люмінофора в процесі збудження, а також не
дозволяє визначити ступінь заповнення пасток і, відповідно, суму
концентрацію пасток. Також, класичною теорією ФЛ не враховується
висвічуючи дія і самого люмінесцентного випромінювання (тобто
самопоглинання люмінесценції). Для кількісного врахування оптичного
висвічування збуджуючим чи люмінесцентним випромінюванням

необхідно враховувати неоднорідне просторове збудження кристалофосфора, яке обумовлене поглинанням збуджуючого випромінювання. Для багатьох оксидів показано [6-8], що центрами забарвлення (ЦЗ) є перезаряджені пастки, які поглинають люмінесцентне випромінювання. Таким чином, зміна інтенсивності стаціонарної люмінесценції в процесі збудження може бути обумовлена не тільки накопичуванням світлосуми на пастках, але й поглинанням збуджуючого й/або люмінесцентного випромінювання перезарядженими пастками. Останні два аспекти можна оцінити в першому наближенні.

2. Оптичне висвічування збуджуючим і люмінесцентним випромінюванням

В кінетичній теорії ФЛ розглядається кінетика для середніх значень концентрацій вільних та локалізованих носіїв заряду, а тому для інтенсивності збудження та імовірності оптичної делокалізації використовуються усереднені в просторі значення. Самі автори [4,5] відзначають, що це досить грубе наближення особливо для випадку великих коефіцієнтів поглинання (k), коли виконується умова $1/k \ll d$, де d - товщина зразка. Інтенсивність збуджуючого випромінювання по товщині зразка ($0 \leq x \leq d$) визначається відповідно до закону поглинання в інтегральному або диференціальному виді:

$$I(x) = I_0(1-R)e^{-kx}, \quad \text{або} \quad \frac{dI(x)}{dx} = -I_0(1-R)ke^{-kx} \quad (1)$$

де: R - коефіцієнт відбивання, I_0 - інтенсивність падаючого на зразок збуджуючого випромінювання. Імовірність оптичного висвічування накопиченої світлосуми пропорційна інтенсивності збуджуючого випромінювання, що проходить через одиничний об'єм матеріалу. Загальна ймовірність де локалізації носія з пастки при температурі T , K визначається [4,5] імовірністю термічної та оптичної делокалізації носія:

$$w_i = w_0 \exp\left(-\frac{E_T}{kT}\right) + D_i(\lambda) I_0 \exp(-kx) \quad (2)$$

де: w_0 - частотний фактор; E_T - глибина пастки; $D_i = \text{Const}$ для i -го типу пастки та визначається перекриттям спектра оптичного висвічування пастки та спектра збуджуючого випромінювання. Просторовий розподіл поглинання збуджуючого випромінювання визначається законом поглинання (1) і дозволяє в першому наближенні одержати просторовий розподіл густини генерації електронних збуджень (концентрації вільних електронно-діркових пар і екситонів) $N(x)$:

$$N(x) = N_0 e^{-kx} \quad (3)$$

Таке просте введення просторової координати в кінетичну теорію ФЛ

неможливе, оскільки не враховує, по-перше, дифузійний рух вільних носіїв заряду і, по-друге, суперечить одному з основних принципів зонної теорії: електронне збудження належить всьому кристалу. Але це, дозволяє одержати в першому наближенні просторовий розподіл густини інтенсивності люмінесцентного випромінювання.

Спочатку необхідно визначити середній просторовий макроскопічний розподіл кількості квантів люмінесцентного випромінювання, які перетинають одиниці об'єму зразка за одиницю часу. Скористаємося циліндричною системою координат і у випадку нормального падіння збуджуючого випромінювання на зразок маємо осьову симетрію відносно осі ОХ. Якщо $\rho(x)$ – просторова густина інтенсивності люмінесценції, яке в першому наближенні описується співвідношенням (3), а $dV = 2\pi \cdot dr \cdot dx$ – елемент об'єму, то потік люмінесцентного випромінювання ($\Delta\Phi$) який перетинає одиницю поверхні (ΔS) елемента об'єму, що знаходиться на глибині x_0 від опромінюючої поверхні зразка, буде визначатися:

$$\Delta\Phi = \rho(x) dV \frac{\Delta S}{4\pi [r^2 + (x - x_0)^2]} = \Delta I \cdot \Delta S, \quad (4)$$

якщо не враховувати поглинання люмінесцентного випромінювання перезарядженими пастками. Під інтенсивністю люмінесценції (I_0) прийнято розуміти кількість квантів випромінювання які перетинають одиничну поверхню за одиницю часу. При наявності поглинання люмінесцентного випромінювання необхідно ввести множник:

$$e^{-n(x) \cdot \sigma \cdot \sqrt{r^2 + (x - x_0)^2}} \approx e^{-\bar{n} \cdot \sigma \cdot \sqrt{r^2 + (x - x_0)^2}} = e^{-\bar{n} \cdot \sigma \cdot r} \quad (5)$$

де: $n(x)$ – концентрація перезаряджених пасток, $\bar{n}$ – їхнє середнє значення; σ – переріз оптичного поглинання люмінесцентного випромінювання перезарядженими пастками. Нехтування доданком $(x - x_0)^2$ у порівнянні з r^2 обумовлено тим, що внесок у поглинання люмінесцентного випромінювання в поперечному напрямку завжди значно більший, ніж у поздовжньому напрямку (уздовж осі ОХ), оскільки практично завжди виконується умова $l/k \ll L$ – поперечний розмір зразка на який падає збуджуюче випромінювання. Інтегруючи по всьому об'ємі збудження зразка, тобто по r і x , одержуємо інтенсивність люмінесценції для оптичного висвічування:

$$\begin{aligned} I_s &= \int_x \int_r \rho_0 e^{-kx} \frac{2\pi \cdot r \cdot e^{-\bar{n} \sigma r}}{4\pi [r^2 + (x - x_0)^2]} dx dr = \frac{\rho_0}{2} \int_x e^{-kx} dx \int_{r=0}^L \frac{r \cdot e^{-\bar{n} \sigma r}}{r^2 + (x - x_0)^2} dr = \\ &\approx \rho_0 \int_x e^{-kx} dx \cdot \frac{\ln(1 + L^2 k^2)}{2} \cdot \exp\left(-\frac{\bar{n} \cdot \sigma \cdot L}{2}\right) \approx \frac{\rho_0}{k} \exp\left(-\frac{\bar{n} \cdot \sigma \cdot L}{2}\right) \cdot \ln(L \cdot k) \quad (6) \end{aligned}$$

Наявність експонентного множника в (5) забезпечує збіжність інтегралу

коефіцієнтом поглинання рентгенівського випромінювання люмінофором (μ), що і визначає макроскопічний просторовий розподіл густини інтенсивності РЛ та визначається співвідношенням (3).

Можна проаналізувати механізм висвічуваної дії збуджуючого рентгенівського випромінювання, ґрунтуючись на механізмах взаємодії рентгенівського випромінювання з твердим тілом. При релеєвському (когерентному) розсіюванні рентгенівських квантів їх енергія не передається до матриці люмінофора. При комптонівському (некогерентному) розсіюванні рентгенівських квантів на вільних електронах, тільки невелика частина енергії кванта передається електрону. Енергія рентгенівського кванта перевищує енергію зв'язку валентних електронів на три порядки, що дозволяє вважати валентні електрони практично вільними при такій взаємодії. Із закону збереження енергії випливає, що електрон одержить ту енергію, що втратить рентгенівський квант. За порядком величини це становить кілька електрон-вольт і цієї величини досить тільки для генерації одного електронного збудження або делокалізації одного електрона з пастки. Однак, переріз взаємодії комптоновського розсіювання монотонно зростає при збільшенні енергії рентгенівського кванта та кількості валентних електронів і, що саме головне, ця взаємодія не має селективного характеру. Тому, навіть при повнім перезарядженні всіх пасток, їхня концентрація залишається на багато порядків менше, ніж концентрація валентних електронів матриці люмінофора. Для рентгенівських квантів з енергією до 50 кВ ефектами розсіювання можна знехтувати, оскільки їх переріз взаємодії на порядок менший від основного виду взаємодії рентгенівського випромінювання з матеріалами – фотопоглинанням внутрішніми заповненими оболонками іонів матриці люмінофора. В результаті поглинання одного рентгенівського кванта генерується високоенергетичний фотоелектрон і утворюється вакансія в К- або L-оболонці іона. Термалізація високоенергетичного електрона при пружній і непружній взаємодії з іонами кристалофосфора відбувається за дуже короткий час $10^{-13} + 10^{-12}$ с [10,11] і при цьому генеруються сотні-тисячі електронних збуджень. Вільна або перезаряджена пастка не має будь-яких переваг у порівнянні з іонами матриці при взаємодії як з рентгенівськими квантами, так і з високоенергетичним електроном. Відсутність селективності для пасток в актах взаємодії означає, що ймовірність взаємодії буде визначатися співвідношенням концентрації дефектів, які виступають як пастки для носіїв заряду, до концентрації іонів матриці люмінофора. Таким чином, ймовірність взаємодії пасток буде як мінімум на два порядки менша від ймовірності взаємодії самої матриці зі збуджуючим випромінюванням. Навіть якщо один рентгенівський квант і зробить спустошення однієї пастки, то після його поглинання та генерації величезної кількості вільних носіїв, ймовірність заповнення пасток буде значна. Остаточного маємо, що на

будь-яких стадіях рентгенівського збудження ймовірність заповнення пасток буде значно більшою від ймовірності їхнього спустошення.

Таким чином, при рентгенівському збудженні кристалофосфорів висвічуючою дією збуджуючого випромінювання можна знехтувати, та при відсутності висвічуючої дії люмінесцентного випромінювання, можна перезарядити всі глибокі пастки, і, отже, знайти методи визначення їх концентрацій.

4. Експериментальні результати та їх обговорення

Дослідження накопичення світлосуми при рентгенівському збудженні здійснювали на класичному люмінофорі ZnS-Cu. Люмінесцентна кераміка отримана методом гарячого пресування промислового порошкового кристалофосфора ФК-106 (ZnS-Cu) у графітових прес-формах при температурі 1400 К під тиском $3 \cdot 10^7$ Па. Інтенсивність свічення кераміки трохи (~15%) перевищує свічення порошкового люмінофора, без зміни спектра люмінесценції. За рахунок інтенсивного розсіювання люмінесцентного випромінювання в цій кераміці, люмінесценція фактично реєструється від приповерхньої області зразка, для якої можна вважати інтенсивність збудження постійною величиною. Це дозволяє використати основні закономірності кінетичної теорії ФЛ.

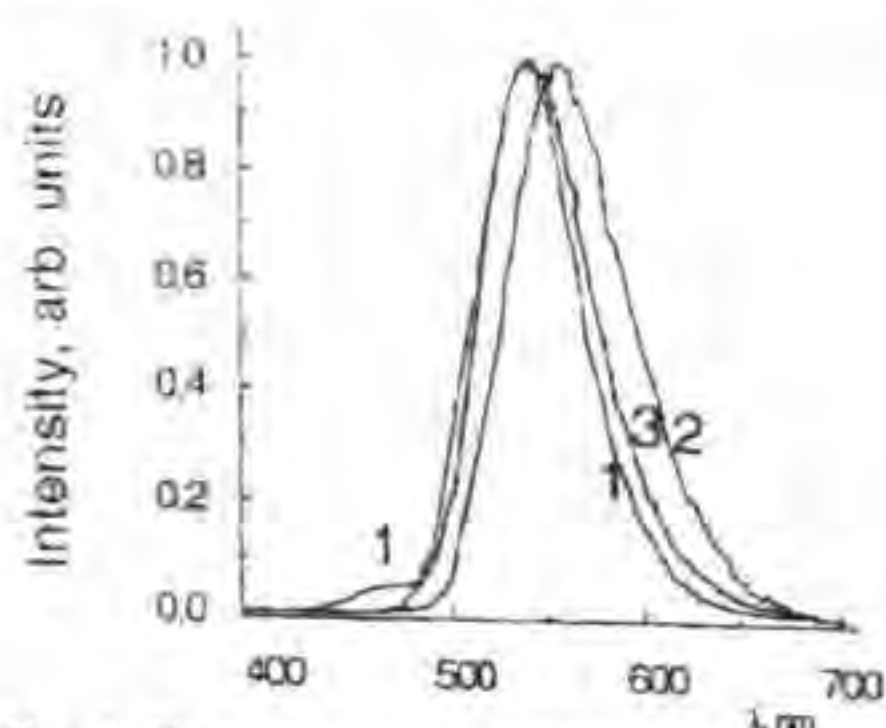


Рис. 1. Спектри стаціонарної рентгенолюмінесценції (1), флуоресценції (2) при 85 К и термостимульованої люмінесценції ($T=180$ К) кераміки ZnS-Cu

Спектри свічення люмінесцентної кераміки представлені на рис. 1.

Невеликі відмінності в напівширині спектрів стаціонарної люмінесценції (ФЛ і РЛ) і спектрального складу флуоресценції (Ф) та термостимульованої люмінесценції (ТСЛ) обумовлені, очевидно, неелементарністю основної зеленої смуги свічення ($\lambda_{\text{max}}=525\text{nm}$).

Після рентгенівського (як і після УФ-збудження, N_2 -лазером, 337nm) при кімнатній та азотній

температурах спостерігається добре відома інтенсивна Ф і ТСЛ цього матеріалу. Характерні криві ТСЛ після рентгенівського й УФ збудження наведені на рис.2. Слід зазначити, що при потужностях збудження які використовували в експериментальних дослідженнях, інтенсивність

стаціонарної ФЛ помітно перевищувала інтенсивність РЛ.

Інтенсивність висвічуваної дії збуджуючого випромінювання, як ми вже зазначали, лінійно залежить від його інтенсивності. Тому, були проведені дослідження дозових залежностей накопичування світлосуми (інтенсивності піків ТСЛ) при різних інтенсивностях збудження.

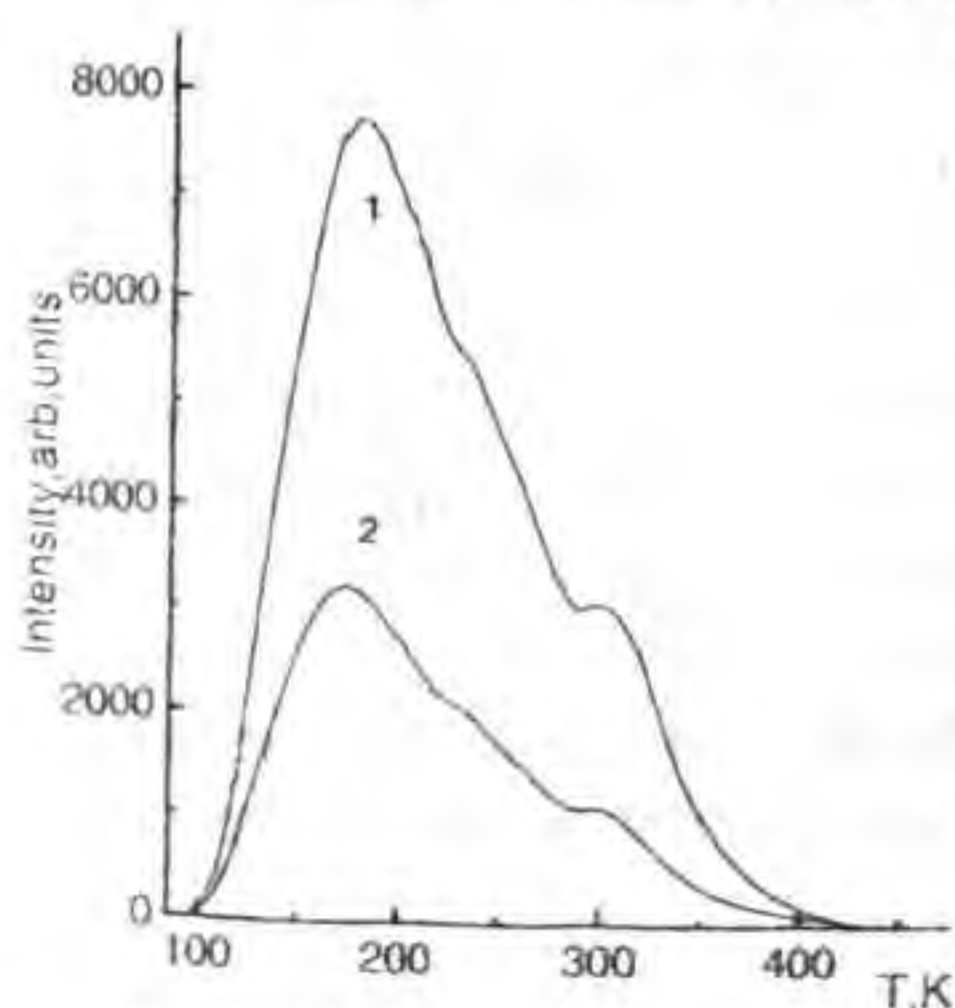


Рис.2 Криві термостимульованої люмінесценції після рентгенівського (1) і фотозбудження (2) кераміки ZnS-Cu

на рис.3. Як і очікували, ця залежність практично є лінійною. Величину накопиченої світлосуми на глибоких пастках, коли імовірністю термічної делокалізації можна знехтувати при температурі збудження зразка, визначали за інтенсивністю піків ТСЛ. Форма кривої ТСЛ люмінесцентної кераміки ZnS-Cu у межах 7 % залишається однаковою для різних доз рентгенівського опромінення. Експериментально отримані дозові залежності інтенсивності піків ТСЛ при різних інтенсивностях рентгенівського збудження представлені на рис.4. Якщо

рентгенівське збудження й/або власна люмінесценція кристалофосфора висвічує накопичену світлосуму в процесі збудження, то максимальне значення інтенсивності піків ТСЛ повинне зменшуватися при збільшенні інтенсивності збудження. Однак, експериментально одержано, що максимальне значення накопиченої світлосуми не залежить від

Форма спектра випромінювання рентгенівської трубки визначається винятково прикладеною до неї напруги й матеріалом аноду, тому інтенсивність збудження можна змінювати анодним струмом трубки. При цьому зберігається пропорційність між інтенсивністю випромінювання трубки та величиною струму трубки. Ресстрація РЛ під час збудження дозволяє одержати залежність інтенсивності стаціонарної люмінесценції від інтенсивності рентгенівського збудження, що і представлено

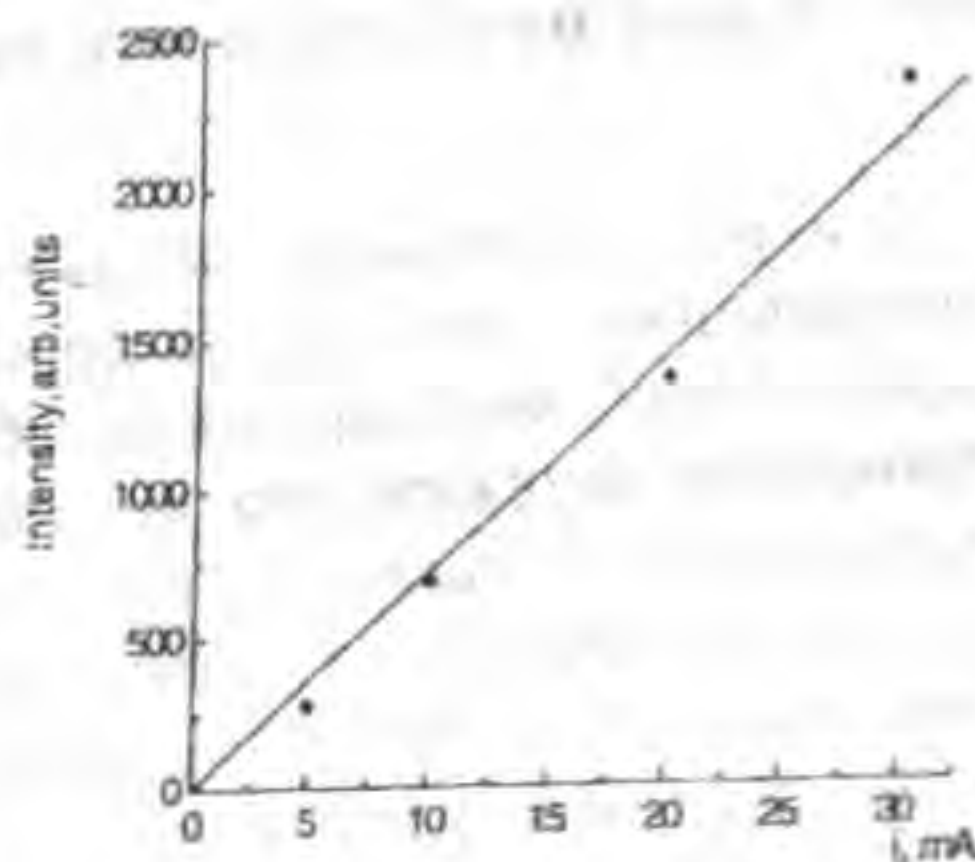


Рис.3 Залежність інтенсивності стаціонарної рентгенолюмінесценції від струму рентгенівської трубки

при $r \rightarrow \infty$. Поглинання люмінесцентного випромінювання перезарядженими пастками, що експериментально спостерігається в кристалах - ітрій алюмінієвого граната [6,7], Si_2O [7,8] і ЛГК [9,10], зменшує інтенсивність люмінесценції вздовж осі ОХ на $\sim 20\div 30\%$, а в перпендикулярному напрямку в $2\div 3$ рази ($L \sim 0.5\div 1$ см), тобто не дають значних величин коефіцієнтів додаткового поглинання, які перевищують кілька одиниць см^{-1} , що свідчить про виконання умови $\bar{n}\sigma L \leq 1$. Тому, інтенсивність люмінесцентного випромінювання, що проходить через елемент об'єму зразка, у першому наближенні не залежить від просторових координат, а сама ймовірність оптичного висвічування визначається величиною поверхні збудження зразка та інтенсивністю збуджуючого випромінювання. Таким чином, можна вважати, що інтенсивність висвічування люмінесцентним випромінюванням, у першому наближенні, постійна в усьому об'ємі зразка кристалофосфора.

З урахуванням висвічуючої дії збуджуючого та люмінесцентного випромінювання ймовірність делокалізації носіїв заряду з пасток і-го сорту буде визначатися

$$w_i = w_{i0} \exp\left(-\frac{E_\tau}{kT}\right) + D_i(\lambda) I_0 \exp(-k\alpha) + L_i(\lambda) I_{\text{л}} \quad (7)$$

де: $L_i(\lambda)$ – визначається перекриттям спектра оптичного висвічування і-го типу пастки й спектра люмінесценції. Відповідно, для різних пасток буде й різний внесок цих доданків в ймовірність делокалізації.

3. Висвічуюча дія збуджуючого рентгенівського випромінювання

При рентгенівському збудженні люмінесценції має місце макро- і мікроскопічна неоднорідність просторового збудження кристалофосфорів. Макроскопічна неоднорідність збудження обумовлена, як і для ФЛ, поглинанням збуджуючого випромінювання в матеріалі. Мікроскопічна неоднорідність характерна для високоенергетичного збудження (радіолюмінесценція) і обумовлена генерацією величезного числа електронних збуджень (сотні-тисячі) у невеликому об'ємі при поглинанні одного рентгенівського кванта. Розміри такої мікрообласті збудження визначаються процесом термалізації високоенергетичного фотоелектрона в матеріалі кристалофосфора. При енергії рентгенівських квантів < 50 кЕВ, ця мікрообласть не перевищує в діаметрі ~ 1 мкм. При звичайних потужностях збудження рентгенолюмінесценції (РЛ) від рентгенівських трубок (десятки мВт/см^2), розміри мікрообластей збуджень значно менші від їхніх середньостатистичних відстаней один від одного. Виходячи з цього, можна вважати, що вони не взаємодіють між собою. Просторовий макроскопічний розподіл генерації мікрообластей збуджень визначається

інтенсивності рентгенівського збудження. Форма кривої накопичення світлосуми добре описується експонентною залежністю, причому темп накопичення світлосуми прямо пропорційний інтенсивності збуджуючого рентгенівського

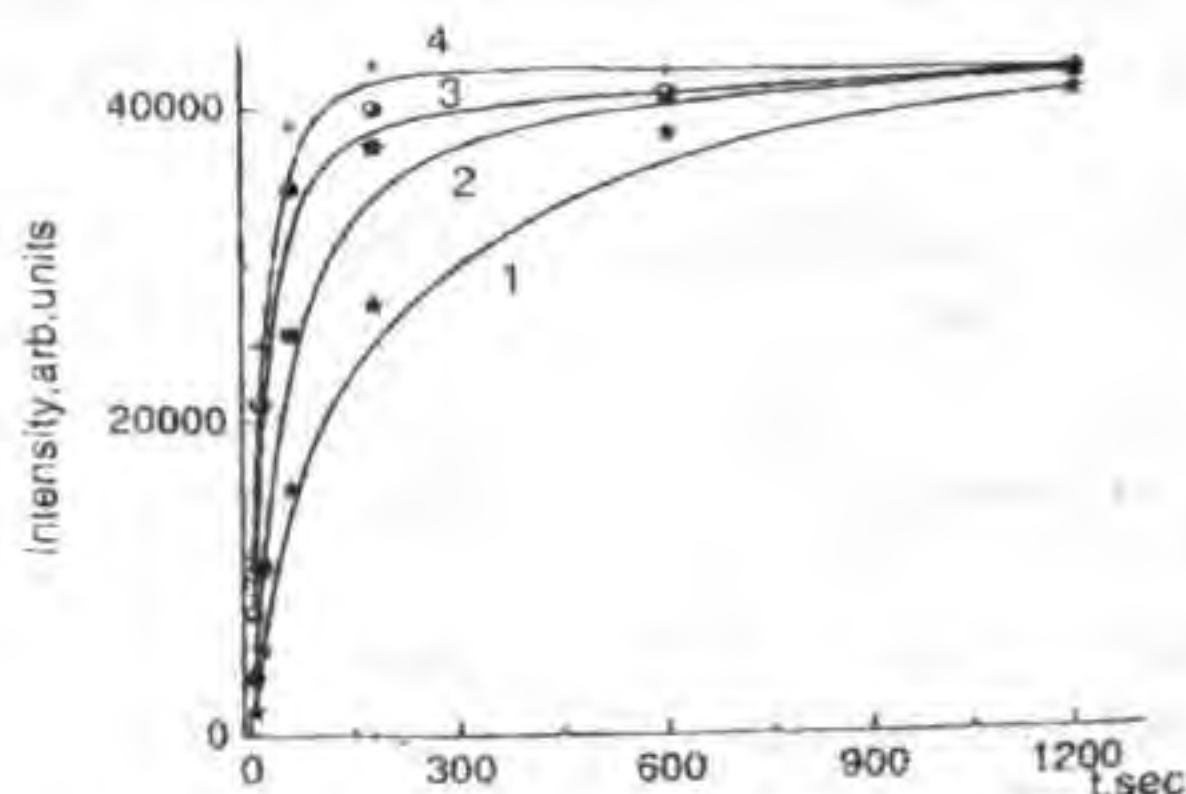


Рис. 4. Дозові залежності інтенсивності термостимульованої люмінесценції ($T=140\text{K}$) при різних інтенсивностях рентгенівського збудження: 1 - 5mA, 2 - 10mA, 3 - 20mA, 4 - 30 mA

випромінювання. Також слід зазначити, що максимальна інтенсивність ТСЛ, яку можна одержати при УФ-збудженні, помітно менша, ніж інтенсивність ТСЛ при рентгенівському збудженні, у той час як інтенсивність ФЛ перевищує інтенсивність РЛ.

Таким чином, експериментальні дослідження накопичення світлосуми при різних інтенсивностях рентгенівського збудження підтверджують незначну

ймовірність висвічуючої дії рентгенівського збудження. Це означає, що динамічна рівновага між накопичуванням і делокалізацією у процесі рентгенівського збудження кристаллофосфора значно зміщується у бік накопичування, а стаціонарний стан досягається при практично повній перезарядці всіх глибоких пасток. Це дозволить у майбутньому розробити нові методи визначення концентрацій пасток, та перейти від якісного до кількісного методу визначення концентрації дефектів, що є пастками для носіїв заряду.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Brixner L. H. // Mater. Czech and Phys, 1987, 16, № 3-4, p.253-281.
2. Анисимов Н.А., Барышев С.А., Гуменюк А.Ф., Горбань И.С., Дегода В.Я. // ЖПС, 1976, в.25, № 4, с.732-734.
3. Дегода В.Я., Кияк Б.Р., Проскура А.И. // Неорган. матер., 1995, Т.31, № 10, с.1367-1369.
4. Фок М. В. Введение в кинетику люминесценции кристаллофосфоров. М., Наука, 1964.
5. Антонов-Романовский В. В. Кинетика фотолюминесценции кристаллофосфоров. М., Наука, 1966.
6. Гуменюк А.Ф., Дегода В.Я., Кучакова Т.А. // УФЖ, 1986, Т.31, № 6, с. 831-836.

7. Вахидов Ш.А., Ибрагимова Э.М., Каипов Б., Тавшунский Г.А., Юсупов А.А. Радиационные явления в некоторых лазерных кристаллах. Ташкент: ФАН, 1977. 112 с.
8. Силинь А. Р., Трухин А. Н. Точечные дефекты и элементарные возбуждения в кристаллическом и стеклообразном SiO_2 . Рига: ЗИНАТНЕ. 1985.- 244 с.
9. Лущик Ч.Б., Лущик А.Ч. Распад электронных возбуждений с образованием дефектов в твердых телах. М.: Наука, 1989. 264 с.
10. Алукер Э.Д., Лусис Д.Ю., Чернов С.А. Электронные возбуждения и радиолюминесценция щелочно-галогидных кристаллов. Рига: "Зинатне", 1979. 252 с.
11. Алукер Э.Д., Гаврилов В.В., Дейч Р.Г., Чернов С.А. Быстропротекающие радиационностимулированные процессы в щелочно-галогидных кристаллах. Рига: "Зинатне", 1987. 184 с.

Надійшла до редколегії 21.11.05

УДК 535:537:539:546

Леонід Г. Гречко, докт. ф.-м. наук,
Леонід Б. Лерман, канд. техн. наук,
Олег Я. Покотило, аспірант,
Наталя Г. Шкода, канд. ф.-м. наук

Leonid G. Grechko, Dr. Sc.,
Leonid B. Lerman, Ph. D.,
Oleg Ya. Pokotylo,
post gradient student,
Natalya G. Shkoda, Ph. D

**Іонно-електростатична взаємодія
малих кульових частинок в розчи-
ні електроліту. Частина I. Обчис-
лення енергії взаємодії при заданих
щільностях поверхневих зарядів**

**Ion-electrostatic interaction of small
spherical particles in an electrolyte
solution. Part I. Definition of interac-
tion free energy with known densities
of surfaces' charges**

Побудовано розв'язок рівнянь
Дебая-Х'юккеля для системи куль з
довільними радіусами та поверхне-
вими зарядами, розташованих в еле-
ктроліті. Розвинуто загальний тео-
ретичний метод розрахунку взаємо-
дії частинок в таких системах. До-
кладно розглянуто практично важ-
ливий випадок двох куль. Із загальних
співвідношень в нульовому набли-
женні отримано кінцеві формули для
визначення енергії взаємодії двох
сферичних частинок зі сталими по-
верхневими зарядами. З отриманих
формул в граничних випадках випли-
вають відомі співвідношення.

Ключові слова: рівняння Дебая-
Х'юккеля, малі частинки в електро-
літі, подвійний шар, енергія взаємодії

The solution of the Debye-Huckel
equation for a system spheres with arbi-
trary radii and surfaces charges in elec-
trolyte solutions is construction. The
general theoretical method of such sys-
tems description is elaborated. The
practical important case of two spheres
is considered in detail. Finite closed
formulae to calculation of interaction
energy of two spherical particles with
constant surface charges are obtained
from general expressions in zero ap-
proximation. The known relationships
follow from our formulae in the limit
cases.

Key words: Debye-Huckell equa-
tion, particles in electrolyte, pair inter-
action

E-mail: user @ surfchem.freenet.kiev.ua

1. Introduction. Through studying ion-electrostatic interaction in systems of inorganic nanoparticles and biological cells in electrolyte solution the basis problems of calculation of the energy and forces interaction between cells and particles arise. This problem is closely connected with the problem of the electric double layer free energy of interaction between two spherical particles suspended in an aqueous electro-lyte dispersion medium. From early works [1] a great attention is paid to this problem [2-7], and it is the actual question [6] until now, especially, under consideration of in-teraction of inorganic small particles with biological cells or microorganisms. Interac-tion of double diffuse layers is usually calculated on the base of Deryaguin's approxi-

mation. But using this approach can lead to incorrect results in some cases, as it had been noted in [2,4].

In this paper we consider the general problem of a mutual interaction of arbitrary number of spherical particles in electrolyte (some materials of our work were reported in the international conference [8] early). It is assumed that particles are arranged in space in arbitrary manner, they can have different radii, different densities of surface charges/potentials. The paper includes two parts. The case of known densities of surfaces' charges is considered in part I, and the case of known surfaces' potentials we expound in part II. It should be note the solution of the problem appears to be interesting during investigation of hetero-coagulation and some other problems, too.

It is known that determination of potentials, potential energy of interaction and corresponding forces for ensembles of spherical particles in electrolyte can be reduced to solution of corresponding boundary problems for the *Debye-Huckell* equation. In the paper we propose the effective analytical method using expansions of solutions by series in the spherical functions (the scalar spherical harmonics) and the modified spherical Bessel functions. The expansions give the solutions of external problems for the *Debye-Huckell* equation in the case of a distinct sphere for both types of the boundary conditions.

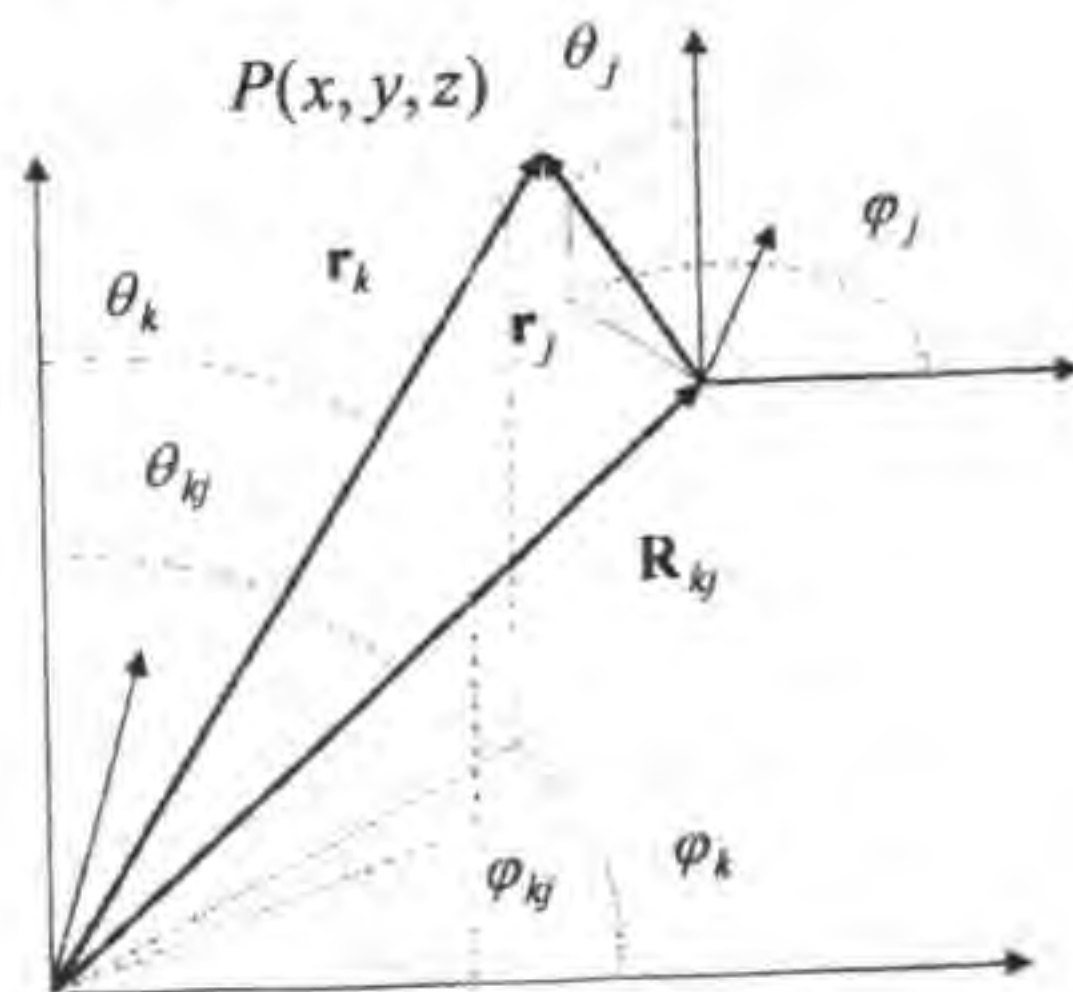
But the expressions obtained of the potentials are defined in different systems of the spherical coordinates, and to write down the boundary conditions, expressions of potentials and its derivates are needed in another local coordinates. It is not such a simple problem, as it can be seen from our previous paper [9]. In this work we use an additional theorem [10] to solve the problem. Moreover, we transform the known formulae for products of the spherical Bessel functions and the scalar spherical harmonics to the products of the modified spherical Bessel functions and the scalar spherical harmonics. It gives the opportunity to get directly from boundary conditions the infinite algebraic systems for determination of unknown potentials' coefficients. The similar formula was used in [11] for solving the problem propagation of the diffuse light in medium with spherical inhomogeneities.

The practical important case of two spheres is considered in detail. We fulfill the special transformation of the obtained systems. It gives the opportunity to separate the groups of connected coefficients in the infinite systems. This procedure simplifies essentially a practical solution of the problem. From general expressions the closed formulae to calculate the interaction energy of two particles with constant surface charge are received in a zero approximation. The known relations of other authors follow from our formulae as particular case if certain conditions are fulfilled.

2. Statement of problem. A system of N spherical particles in an electrolyte solution with permittivity ε_m is considered. Radii of the particles are denoted as a_k and their permittivities are denoted as ε_k ($k = 1, 2, \dots, j, \dots, N$). We link the local polar spherical coordinates (r_k, θ_k, ϕ_k) with centers of the particles (r_k is a polar radius, θ_k is an azimuth angle, ϕ_k is a polar angle). An arrangement of arbitrary chosen two particles from the ensemble is shown in the Figure, where the correspondent coordinates are indicated. Global coordinates (x, y, z) of observation point P are determined by

vectors $\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_j$ in the local coordinates, and a distance between centers of the spheres

$R_{kj} = |\mathbf{R}_{kj}|$, where $\mathbf{R}_{kj} = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j$.



The local coordinates connection

The potentials corresponding to the internal and the external domains of the spheres' surfaces are marked relatively by superscripts "<" and ">". In the external domain the potential $\varphi^>$ appears to be a sum of potentials $\varphi_k^> = \varphi_k^>(r_k, \theta_k, \varphi_k)$, creating by every sphere, i.e. $\varphi^> = \sum_{k=1}^N \varphi_k^>$ providing that any external field is absent. In the electrostatic approximation every potential $\varphi_k^>$ ($k = 1, 2, \dots, N$) is a solution of the Debye-Huckell equation (1), and potentials inside the spheres $\varphi_k^< = \varphi_k^<(r_k, \theta_k, \varphi_k)$ are the solutions of the Laplace equation (2) correspondently

$$\Delta \varphi_k^> - \kappa^2 \varphi_k^> = 0, \quad (1) \quad \Delta \varphi_k^< = 0, \quad (2)$$

Boundary conditions on the surface of the k -th sphere at $r_k = a_k$ can be formulated in different ways. We consider the case when the densities of surface charges are adjusted, so we have

$$\varphi_k^< = \varphi_k^>, \quad \epsilon_k \frac{\partial \varphi_k^<}{\partial r_k} - \epsilon_m \frac{\partial \varphi_k^>}{\partial r_k} = 4\pi\sigma_k. \quad (3)$$

The boundary conditions (3) reflect a continuity of potentials and electric inductions on the surfaces of spheres, and densities of surface charges can be functions of local coordinates $\sigma_k = \sigma_k(\theta_k, \varphi_k)$ generally. As usually, it is necessary to add conditions of potentials' limits:

$$\varphi_k^> \rightarrow 0 \text{ at } r_k^> \rightarrow \infty \text{ and } \varphi_k^< < \infty \text{ at } r_k^> \rightarrow 0. \quad (4)$$

2. The problem solution for system of N spheres with help of addition theorem. To solve the problem we used the expansions of solutions by series in the spherical functions $Y_{lm}(\theta_k, \varphi_k)$, $l = 0, 1, 2, \dots$, $m = -l, -l+1, \dots, 0, 1, 2, \dots, l$. We assume that the

system of the spherical functions is normalized. Inside and outside of the spheres the expansions appear to be

$$\varphi_k^< = \sum_{l,m} A_{lm}^{(k)} r_k^l Y_{lm}(\theta_k, \varphi_k); \quad (5) \quad \varphi_k^> = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_{lm}^{(k)} k_l(\kappa r_k) Y_{lm}(\theta_k, \varphi_k). \quad (6)$$

In (6) the modified spherical Bessel functions of third kind $k_l(z)$ [10] are used.

Total potential in the surrounding media can be written as follows

$$\varphi^> = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_{lm}^{(k)} [k_l(\kappa r_k)] Y_{lm}(\theta_k, \varphi_k) + \sum_{j=1}^N \left[\sum_{l_j=0}^{\infty} \sum_{m_j=-l_j}^{l_j} B_{l_j m_j}^{(j)} [k_{l_j}(\kappa r_j)] Y_{l_j m_j}(\theta_j, \varphi_j) \right], \quad (7)$$

where the stroke near the sum means that the term with subscripts $j = k$ is excluded. The sum subscripts l_j, m_j underline that they can vary independently from subscripts l, m , which correspond to k -th sphere.

The problem consists in determination of unknown coefficients $A_{lm}^{(k)}$, $B_{lm}^{(k)}$ in the expansions of potentials (5), (6) from boundary conditions (3). To write the boundary conditions expressions for potentials and its derivatives in another local coordinates are needed. For solution of the problem we use the addition theorems [10]. At this, we transform the product of the spherical Bessel functions by scalar spherical functions to a product of the modified spherical Bessel functions by the scalar spherical functions. Moreover, the properties of 3- j Wigner symbols are taken into account and the transition to coefficients of Klebsh-Gordon $C_{l'm'm'}^{l''m''}$ is fulfilled [10, 12, 13]. As result, we get the follow formula for the products $k_l(\kappa r_j) Y_{lm}(\theta_j, \varphi_j)$ at the condition $r_k < |r_j - r_k|$

$$k_l(\kappa r_j) Y_{lm}(\theta_j, \varphi_j) = \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} (-1)^{l'-m'} Y_{l'm'}(\theta_k, \varphi_k) i_{l'}(\kappa r_k) \sum_{l''=|l-l'|}^{l+l'} Y_{l'',m-m'}(\theta_{jk}, \varphi_{jk}) k_{l''}(\kappa R_{jk}) \varphi_{m-m',m-m'}^{l'l''}, \quad (8)$$

where

$$\varphi_{m-m',m-m'}^{l'l''} = [4\pi(2l+1)(2l'+1)/(2l''+1)]^{1/2} C_{l'0'l'0}^{l''0} C_{l'm'l'-m'}^{l''m-m'}. \quad (9)$$

and θ_{jk} , φ_{jk} , R_{jk} are shown in Fig.1. It is seen that the modified spherical Bessel function of the first kind $i_l(z)$ [10] is appeared in our expression (8). The symbol $C_{l'0'l'0}^{l''0}$ is not zero if $l+l'+l''$ is an even integer.

Now we can write the expression for total potential with using addition theorem (8) in the local coordinates linked with the k -th sphere

$$\varphi^> = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_{lm}^{(k)} k_l(\kappa r_k) Y_{lm}(\theta_k, \varphi_k) + \sum_{j=1}^N \sum_{l_j=0}^{\infty} \sum_{m_j=-l_j}^{l_j} B_{l_j m_j}^{(j)} \sum_{l'_j=0}^{\infty} \sum_{m'_j=-l'_j}^{l'_j} (-1)^{l'_j-m'_j} Y_{l'_j m'_j}(\theta_k, \varphi_k) i_{l'_j}(\kappa r_k) \times \\ \times \left\{ \sum_{l''_j} Y_{l''_j, m_j-m'_j}(\theta_{jk}, \varphi_{jk}) k_{l''_j}(\kappa R_{jk}) \varphi_{m_j-m'_j, m_j-m'_j}^{l'_j l''_j} \right\}, \quad (10)$$

and because the variables are separated we can found derivatives by the radial coordinates directly from (10), and then calculate their value on surface of the k -th sphere. The expansions of the potentials and their derivatives we substitute to the boundary conditions (3). As result, we have the system of $2N$ functional equations. Then we multiply the obtained equations by the complex conjugate functions $Y_{lm}^*(\theta_k, \varphi_k)$ and integrate over the surface of the sphere. The procedure leads to a family of infinite systems of algebraic linear equations. As the spherical harmonics are or-

thogonal functions, and we assume that they are normalized, we have for the integrals next values (δ_{ij} is the Kronecker symbol):

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

So in summation by indexes l_j', m_j' the terms with subscripts $l_j' = l, m_j' = m$ are remained only, and we get the following systems

$$d_k A_{lm}^{(k)} = B_{lm}^{(k)} k_l(\kappa a_k) + (-1)^{l-m} i_l(\kappa a_k) \sum_{j=1}^N \sum_{l_j=0}^{\infty} \sum_{m_j=-l_j}^{l_j} B_{l_j m_j}^{(j)} \left\{ \sum_{l_j'} Y_{l_j' m_j'}(\theta_{jk}, \varphi_{jk}) k_{l_j'}(\kappa R_{jk}) \varphi_{m_j' - m_j, m_j - m_j}^{l_j' l_j} \right\}, \quad (11)$$

$$B_{lm}^{(k)} + \alpha_l^{(k)} (-1)^{l-m} \sum_{j=1}^N \sum_{l_j=0}^{\infty} \sum_{m_j=-l_j}^{l_j} B_{l_j m_j}^{(j)} \times \left\{ \sum_{l_j'} Y_{l_j' m_j'}(\theta_{jk}, \varphi_{jk}) k_{l_j'}(\kappa R_{jk}) \varphi_{m_j' - m_j, m_j - m_j}^{l_j' l_j} \right\} = f_{lm}^{(k)}, \quad (12)$$

where $\sigma_{lm}^{(k)}$ are the expansions' coefficients of the surface charges in the spherical functions, and the notations are introduced

$$\alpha_l^{(k)} = \frac{\varepsilon_k l i_l(\kappa a_k) - \varepsilon_m \kappa a_k i_l'(\kappa a_k)}{\varepsilon_k l k_l(\kappa a_k) - \varepsilon_m \kappa a_k k_l'(\kappa a_k)}, \quad f_{lm}^{(k)} = \frac{4\pi a_k \sigma_{lm}^{(k)}}{\varepsilon_k l k_l(\kappa a_k) - \varepsilon_m \kappa a_k k_l'(\kappa a_k)} \quad (13)$$

The primes mean a differentiation of functions by their arguments. It should be noted that for the constant densities of surface charges σ_k we have $\sigma_{lm}^{(k)} = \sqrt{4\pi} \sigma_k \delta_{l0} \delta_{m0}$.

When performing algebraic transformations we exclude the coefficients $A_{lm}^{(k)}$ from the second boundary condition (3) using the equations (11), and the number of unknown coefficients is halved. After solution of the system (12) coefficients for inner potentials are founded by summing the series (11).

As result, we have the aggregate of N connected infinite systems of linear algebraic equations. The systems contain only the coefficients $B_{lm}^{(k)}$ of external potentials and solve the problem of the interaction of N spheres completely. It can be shown that the systems (12) are quasi-regular ones, and we can use a reduction method in practical calculations.

3. Ion-electrostatic energy of interaction of two particles. Now we consider the problem of interaction of two spheres in detail on the base of general relationships. The line crossing the centers of spheres is taken as the axe z . The shortest distance between spheres we denote as H , and so the distance between centers of spheres is $d = H + a_1 + a_2$. For the *Debye-Huckell* approximation to the double layer free energy $F \equiv F_0$ of a pair interaction of the i -th and the j -th spheres for the known densities of the surface charges can be found using formula [3,4]

$$F = \frac{1}{2} \left[\int_{S_i} \sigma_i(P_i) \varphi_i(P_i) dS_i + \int_{S_j} \sigma_j(P_j) \varphi_j(P_j) dS_j \right]. \quad (14)$$

Hereinafter we take that $i, j = 1, 2; i \neq j$. The potential energy V of the double layer interaction is given by the equality $V = F - F_0$ [4], where F_0 is the free energy for two single spheres, and if the densities σ_1 and σ_2 are constants

In the formula (20) the modified spherical Bessel functions of the first order $k_1(z) = -k_0'(z)$, $i_1(z) = i_0'(z)$ ($k_0(z) = (\pi/2)\exp(-z)/z$, $i_0(z) = \sinh z/z$) [10] are used.

When the distances between spheres are large at $d \rightarrow \infty$ and $k_0(\kappa d) \rightarrow 0$, general formulae are simplified, and we obtain the formula (15).

Now we consider the spheres when $a_1 = a_2 = a$ and $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Then we have the expression for improved zero approximation ($d = H + 2a$)

$$V(H) = \frac{16\pi^2 a^3 \sigma_1 \sigma_2}{\varepsilon_m (1 + \kappa a)^2} \frac{a}{H + 2a} e^{-\kappa H} + \frac{4\pi^2 a^3 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{\varepsilon_m (1 + \kappa a)^3} [(\kappa a - 1) + (\kappa a + 1)e^{-2\kappa a}] \left(\frac{a}{H + 2a} \right)^2 e^{-2\kappa H}. \quad (21)$$

To comparison we write out the formulae *Hiroiyuki Oshima* [4], which had been derived as an approximation for large radii and small separation. At the condition $a_1 = a_2 = a$ the correspondent formula takes the form:

$$V_{HO}(H) = \frac{4\pi^2 a}{\varepsilon_m \kappa^2} \frac{H + a}{H + 2a} \left[-(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \ln(1 - A^2) + 2\sigma_1 \sigma_2 \ln \frac{1 + A}{1 - A} \right], \quad (22)$$

where $A = (a/(a + H))\exp(-\kappa H)$.

If $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, it follows from (22) that

$$V_{HO}(H) = -F_0 \frac{(1 + \kappa a)}{(\kappa a)^2} \cdot \frac{H + a}{H + 2a} \ln \left(1 - \frac{a}{H + a} e^{-\kappa H} \right), \quad (23)$$

where in this case $F_0 = 16\pi^2 a^3 \sigma^2 / [\varepsilon_m (1 + \kappa a)]$.

The *Derjaguin's* method [1] gives the follow simple expression for the same case

$$V_D = -F_0 \frac{(1 + \kappa a)}{(\kappa a)^2} \ln(1 - e^{-\kappa H}). \quad (24)$$

If we neglect the second term in our formula (21), it takes the form

$$V(H) = F_0 \frac{1}{1 + \kappa a} \frac{a}{H + 2a} e^{-\kappa H}. \quad (25)$$

We see, at $\kappa H \rightarrow 0$, then $V_D \rightarrow \infty$. It means that formula (24) can give incorrect results at small κH values. The analogous situation takes place for relationship (23), too. When $\kappa H \gg 1$ and $\kappa a \gg 1$, after expanding the logarithms to correspondent series and keeping the first terms of the series we get the same expressions from formulae (23), (25).

4. Conclusion. The exact solution for interaction of a system of small spherical particles in electrolyte is obtained. On the base of the exact solutions the handily closed formulae for calculating ion-electrostatic energy of two spheres are derived. Our results correspond to the results of another authors in simple cases and generalize ones in range of small values parameter $\kappa H < 2$. In this part of the paper we have considered the case when surfaces' charges are given, but the problem of spherical particles interaction with giving surface potentials can be solved similarly. Examples of worked out calculations are presented in Part II of this work in this bulletin.

Literature

1. Deryaguin B.V., Churaev N.V., Muller V.M. Surface forces. – 1985. – M.: Nauka. – 400 p. (In Russian).
2. Bell G.M., Levine S., McCartney. Approximate method of determining the Double-layer Free Energy of Interaction between Two Charged Colloidal Spheres // J. Of Colloid and Interface Science. – 1970. – V. 33, No. 3. – P. 335-359.
3. Verner E.J.W, Overbeek J.Th.G. Theory of the Stability of Lyophobic Cjlloids. Elsevier, Amsterdam. – 1948.
4. Ohshima H. Diffuse double layer interaction between two spherical particles with constant surface charge density in an electrolyte solution // Colloid & Polymer Sci. – 1975. – 263. – P. 158-163.
5. McCartney L.N., Levine S. // J. of Colloid an Interface Sci.. An improvement on Derjaguin's Expression at Small potentials for the Double Layer Interactions Energy of Two Spherical Colloidal Particles. – 1969. – V. 30, No 3. – P. 345-354.
6. Дудник В.В. Неоднородность распределения заряда вдоль клеточной мембраны как возможная причина избирательной агрегации минеральных частиц микроорганизмами // Коллоидный ж. – 1992. Т.46, № 3. – С. 38-43.
7. Hsu J.-P., Lin S.-H.. Electrical Interaction between Two planar, Parallel Dissimilar Surfaces in a General Electrolytic Solution // Langmuir, – 2003. –19.- P. 10610 – 10616.
8. L.B. Lerman, L.G. Grechko, N.G. Shkoda, O.Ya. Pokotylo, A.A. Chuiko, K.W. Wites. Interaction of Nanoparticles with Surface of Biomembranes // NATO ADVANCED RESEARCH WORKSOP. – Pure and Applied Surface Chemistry and Nanomaterials for Human Life and Environmental Protection. – Book of abstracts. –Kyiv, Ukraine, 2005. – P. 37.
9. Grechko L.G, Lerman L.B, Pokotylo O.Ya., Shkoda N.G. Interaction of small spherical particles in a electrolyte // Bulletin of Kyiv University. – Series: Physics & Mathematics, – 2005, 3 (In Ukraine).
10. Chew W.C. Waves and Fields in Inhomogeneous Media. App. D. – New York: IEEE Press. – 1995. – P. 591-596.
11. Pustovit V.N., Markel V.A. Propagation of diffuse light in turbit medium with multiple spherical inhomogeneities // Applied Optics. – 2004, Vol. 43. –No 1. – P 104-112.
12. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables. Edited by M. Abramowitz and I.A. Stegun. – 1964.
13. Varshalovich D.A., Moskalyov A.N., Hersons V.K. Quantum theory of angles moments. – M.: Nauka, 1975 (in Russian).

Надійшла до редакції 16.10.2005.

УДК 621.315.592

Козаченко В.В., Круковський С.І.,
Ніколаєнко Ю.Є., Савкіна Р.К.,
Смірнов О.Б.

Kozachenko V.V., Krukovsky S.I.,
Nikolaenko Yu.E., Savkina R.K.,
Smirnov A.B.

**Вплив комплексного легування
на властивості шарів GaAs,
отриманих методом рідинно-
фазної епітаксії.**

**Effect of the complex doping on
GaAs-based layers grown by liquid
phase epitaxy.**

Досліджується вплив комплексного легування розплавів галію гадолінієм, алюмінієм та кремнієм на фотолюмінесцентні та електрофізичні властивості шарів GaAs, отриманих методом рідинно-фазної епітаксії.

Ключові слова: рідинно-фазна епітаксія, епітаксійні шари GaAs, фотолюмінесценція.

The possibility of the GaAs liquid phase epitaxy with the addition of Gd, Al, Si as dopant during growth from the Ga melt was investigated. Photoluminescence and Hall effect technique were carried out for studying the influence of complex doping on the electronic and structural properties of GaAs epilayers.

Key Words: liquid phase epitaxy, GaAs epilayers, photoluminescence.

E-mail: tenet@alfa.semicond.kiev.ua

На сьогодні метод рідинно-фазної епітаксії (РФЕ) успішно застосовується для вирощування матеріалів для напівпровідникової мікроелектроніки [1,2]. Одним із способів отримання чистих некомпенсованих епітаксійних шарів в технології РФЕ є легування розплавів рідкоземельними елементами (РЗЕ) [3-5]. Цей спосіб є достатньо простий, не потребує довготривалих відпалів шихти і забезпечує зниження концентрації фонових домішок в епітаксійних шарах. Проте, досягнуті значення концентрації та рухливості носіїв ще далекі від теоретично розрахованих. Перспективним в цьому плані може бути застосування комплексного легування ізовалентними та рідкоземельними елементами, підібраними в оптимальних пропорціях.

В роботі досліджується вплив комплексного ізовалентного легування розплавів галію гадолінієм та алюмінієм на фотолюмінесцентні та електрофізичні властивості шарів GaAs, отриманих методом РФЕ.

Епітаксійні шари GaAs вирощували методом РФЕ у графітовій поршневій касеті із розплаву галію (99.9999) на підкладках напівізолюючого GaAs, орієнтованих в кристалографічній площині (100). Температурний інтервал нарощування шарів знаходився в межах 700-650°C. Кристалізація шарів здійснювалась із переохолодженого розчину розплаву при швидкості охолодження 0.5-0.7 °C/хв. Легуючі домішки додавались у шихту безпосередньо перед завантаженням у касету. Для

насичення розплавів по миш'яку використовувався полікристалічний GaAs з концентрацією вільних електронів $(5 \div 7) \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$.

Були вирощені епітаксійні шари GaAs, леговані тільки Gd, та леговані комплексно Gd та Al. Для більш точної інтерпретації отриманих результатів були також вирощені епітаксійні шари GaAs з концентрацією електронів $(9 \div 10) \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$, леговані кремнієм. Товщина епітаксійних шарів становила $(5 \div 6) \text{ мкм}$. Для фотолюмінесцентних досліджень відбирались зразки з найменшою концентрацією та найвищою рухливістю носіїв, які можна було відтворювано отримати при оптимальних концентраціях легуючих елементів у розплаві галію. Оптимальна концентрація легуючих елементів у розплаві галію наведена в таблиці 1.

Дослідження спектрів фотолюмінесценції (ФЛ) епітаксійних шарів GaAs проводилися при температурі 4.2 К. Збудження ФЛ в діапазоні $(800 \div 890) \text{ нм}$ здійснювалось на довжині хвилі 514.5 нм аргонним лазером потужністю 200 мВт/см^2 , а в діапазоні $(940 \div 1120) \text{ нм}$ - напівпровідниковим лазером 810 нм потужністю 500 мВт/см^2 .

Концентрація та рухливість носіїв заряду вимірювалися при 300 К та 78 К методом ефекту Холла та приведені в таблиці 2. Аналіз електрофізичних параметрів нелегованих шарів та додатково легованих кремнієм показує, що вони мають *n*-тип провідності.

Спектри ФЛ зразків епітаксійних шарів GaAs № 1-4 (номери відповідають номерам в таблицях) показані на рис.1. В спектрі нелегованого епітаксійного шару GaAs (рис.1, крива 1) присутні декілька смуг різної інтенсивності. Смука крайової ФЛ з максимумом при 819 нм обумовлена випромінювальними переходами електронів з мілких донорних рівнів (найімовірніше, Si_{Ga}^+ [3]) у валентну зону. Наступна смука з максимумом при 835 нм є складною та обумовлена зона-акцепторними [6,7] або донорно-акцепторними [8] переходами електронів. Згідно [6-8] в якості акцептора виступають фонові домішки – вуглець C_{As} (830.5 нм) та кремній Si_{As} (835 нм).

За смугу з максимумом при 852 нм відповідають донорно-акцепторні переходи (D-A), де D - C_{Ga} , A - Si. Смука з максимумом при

Таблиця 1

№ зразка	Товщина шару, мкм	Напівширина лінії крайової ФЛ, меВ	Концентрація легуючої домішки в розплаві, ат %		
			Gd	Al	Si
1	5.1	7.6	-	-	-
2	5.3	11	-	-	-
3	5.4	2	-	-	$8 \cdot 10^{-2}$
4	5.2	0.7	$2.4 \cdot 10^{-2}$	-	-
5	5.1		10^{-2}	10^{-3}	-
6	5.2		10^{-2}	$5 \cdot 10^{-4}$	-
			10^{-2}	-	-

861 нм зумовлена власними дефектами. За смугу з максимумом при 881.5 нм відповідають переходи $e-A$, де акцептором є Mn. Всі описані вище смуги присутні також на спектрі ФЛ епітаксійного шару, додатково легуваного кремнієм (рис.1, крива 2). Проте інтенсивність смуги з максимумом при 835 нм, яка пов'язана з кремнієм, та її напівширина є більшою.

В спектрі зразка, легуваного оптимальною концентрацією Gd $2.4 \cdot 10^{-2}$ ат. % (рис.1, крива 3) присутні тільки дві смуги, обумовлені крайовою ФЛ (819 нм) та рекомбінацією електронів на акцепторах. Крім того, суттєво, у порівнянні із нелегованим зразком, зменшується напівширина екситонної смуги, а її інтенсивність перевищує інтенсивність домішкової смуги з максимумом при 830.5 нм в 3.3 рази. Інтенсивність смуги з максимумом при 835 нм є зовсім малою.

В спектрі ФЛ епітаксійного шару GaAs, комплексно легуваного Gd 10^{-2} ат. % та Al 10^{-3} ат. % (рис.1, крива 4), також присутні дві смуги – екситонна (818 нм) та домішкова (829.5 нм). Спостерігається подальше підвищення інтенсивності та зменшення напівширини першої, а друга смуга має симетричну форму з максимумом 829.5 нм. Домішкова смуга, пов'язана з кремнієм, повністю відсутня. Співвідношення інтенсивностей екситонної та домішкової смуги складає 9.3.

На рис.2 представлені спектри ФЛ шарів GaAs (№ 1-4), виміряні в діапазоні (940÷1120) нм. Для нелегованого зразка (крива 1) в цьому спектральному діапазоні спостерігається широка смуга з максимумом 1008 нм, яку пов'язують з комплексом $V_{Ga}-Si$. В шарах, додатково легуваних кремнієм, ця смуга розширюється та збільшується її інтенсивність. З'являється ще один максимум при 1018 нм. У випромінювальних переходах, відповідальних за цей максимум, приймають участь комплекси $V_{Ga}-Si_{Ga}$, де Si_{Ga} – донор. В спектрі епітаксійного шару GaAs, легуваного Gd $2.4 \cdot 10^{-2}$ ат. % (рис.2, крива 3), інтенсивність смуги значно зменшується, а в спектрі комплексно легуваного зразка смуга взагалі відсутня.

Аналіз спектрів ФЛ нелегованих епітаксійних шарів GaAs показує, що основними фоновими домішками в них є кремній та вуглець. Причому кремній проявляє амфотерні властивості, а вуглець є акцептором. Кремній

Таблиця 2

№ зразка	$n, \text{см}^{-3}$	$\mu, \text{см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$	$n, \text{см}^{-3}$	
			$\mu, \text{см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$	
			300 К	78 К
1	$3 \cdot 10^{17}$	3600	$9 \cdot 10^{16}$	9500
2	$1 \cdot 10^{18}$	2350	$9 \cdot 10^{17}$	5200
3	$2 \cdot 10^{15}$	4700	$8 \cdot 10^{14}$	15500
4	$1 \cdot 10^{14}$	5500	$4 \cdot 10^{13}$	55000
5	$1 \cdot 10^{15}$	5050	$6 \cdot 10^{14}$	22700
6	$8 \cdot 10^{16}$	4200	$3 \cdot 10^{16}$	12000

потрапляє в шихту завдяки відновленню високочистим воднем стінок кварцового реактора та при низьких температурах епітаксії проявляє донорні властивості. Додатковим, проте не визначальним, джерелом кремнію є компоненти шихти.

Як видно з таблиць, найкращі електрофізичні параметри шарів GaAs досягаються, якщо вони кристалізуються із розплавів, одночасно легованих гадолінієм та алюмінієм. При вищих концентраціях рідкоземельного елемента ніж ті, що приведені в таблиці 1, спостерігається інверсія типу провідності зразків $n \rightarrow p$. При більших концентраціїю алюмінію в розплаві вже суттєво збільшується ширина забороненої зони і рухливість основних носіїв зменшується.

Зменшення концентрації електронів та інверсія типу провідності може свідчити про зниження концентрації донорних центрів або ж введення додаткових акцепторних центрів в шарах GaAs при комплексному легуванні розплавів галію. Гадоліній та алюміній є елементами третьої групи, тому не можуть бути акцепторами в GaAs, котрі б могли компенсувати донорні центри. Про низький ступінь компенсації також свідчить висока рухливість електронів $\sim (55000) \text{ cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$ в плівках, вирощених із розплавів галію, легованих Gd та Al. Отже, введення в розплав Gd та Al імовірно обмежує доступ неконтрольованих домішок донорного типу, тобто, здійснює очистку епітаксійного шару, що кристалізується.

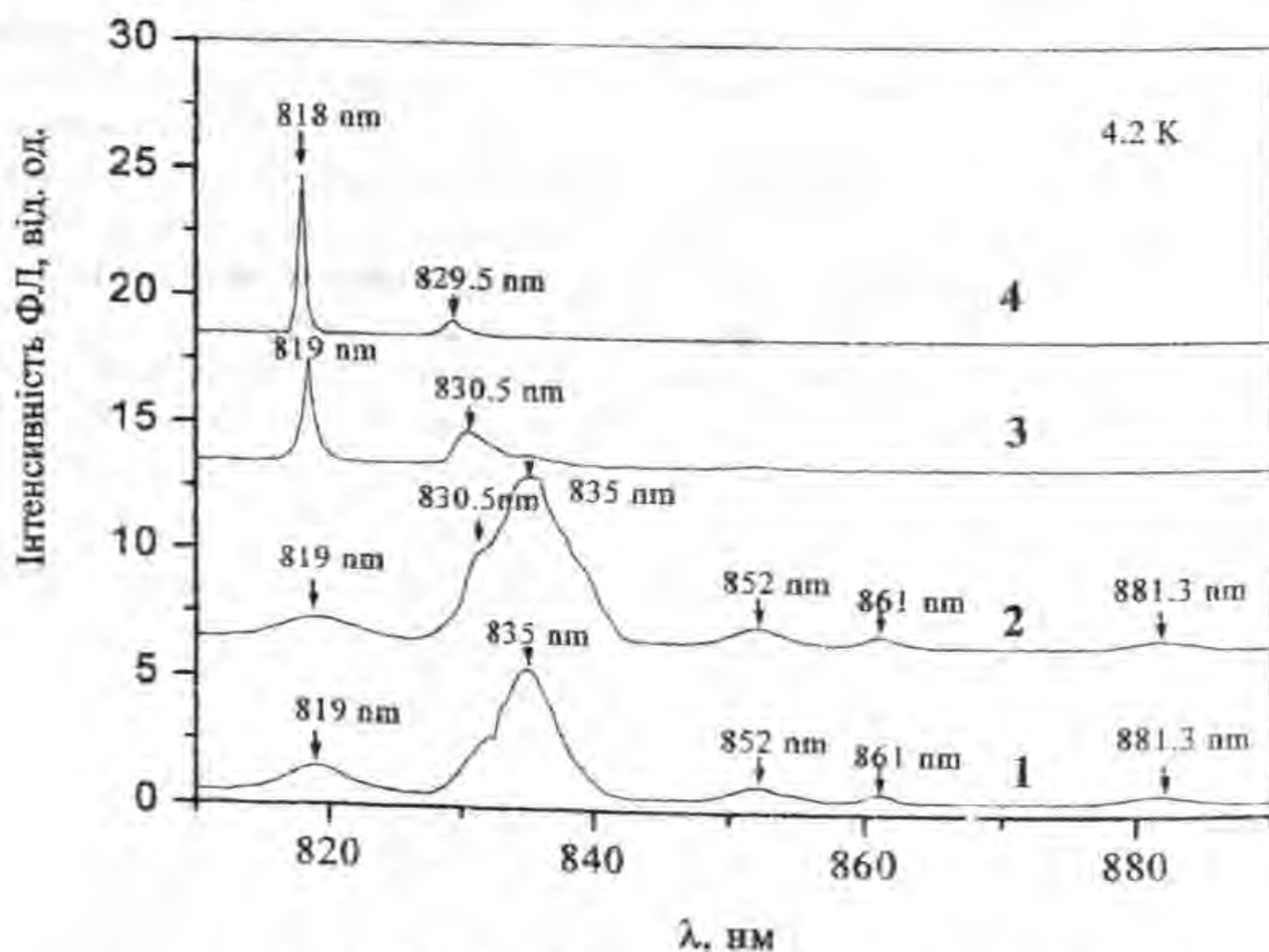


Рис 1. Спектри ФЛ епітаксійних шарів GaAs

Існують принаймні два механізми очистки епітаксійних шарів GaAs. По-перше, гадоліній може займати вакантні вузли у підрешітці галію і зменшувати тим самим імовірність входження в матрицю неконтрольованих донорних домішок. Проте, імовірність входження цих елементів в галієву підгратку є низькою, зважаючи на незначну розчинність РЗЕ в матриці. Другий механізм полягає в тому, що РЗЕ взаємодіють з фоновими домішками - киснем, сіркою, кремнієм у розплаві галію з утворенням сполук, які залишаються в розплаві при кристалізації епітаксійного шару. Це підтверджується згасанням смуги з максимумом при 835.0 нм, (рис.1 крива 3 та крива 4) та смуги з максимумом при 1008 нм (крива 3).

При комплексному легуванні алюмінієм та гадолінієм, алюміній, який має ковалентний радіус близький до галію, частково заповнює вакантні вузли галієвої підгратки, зменшуючи тим самим концентрацію вакансій галію, які утворюють комплекси $V_{Ga}-Si_{Ga}$, $V_{Ga}-Si$. Це підтверджується незначним зміщенням екситонної смуги в бік менших довжин хвиль. Про це ж свідчить повне згасання широкої смуги 1008-1018 нм в спектрах люмінесценції шарів GaAs, легованих гадолінієм та алюмінієм (рис.2, крива 4). Наявність алюмінію спричиняє зменшення коефіцієнта сегрегації кремнію в розплаві галію. Одночасно гадоліній взаємодіє в розплаві з деякими фоновими домішками (кисень), не допускаючи їх в процесі кристалізації в кристалічну гратку епітаксійного

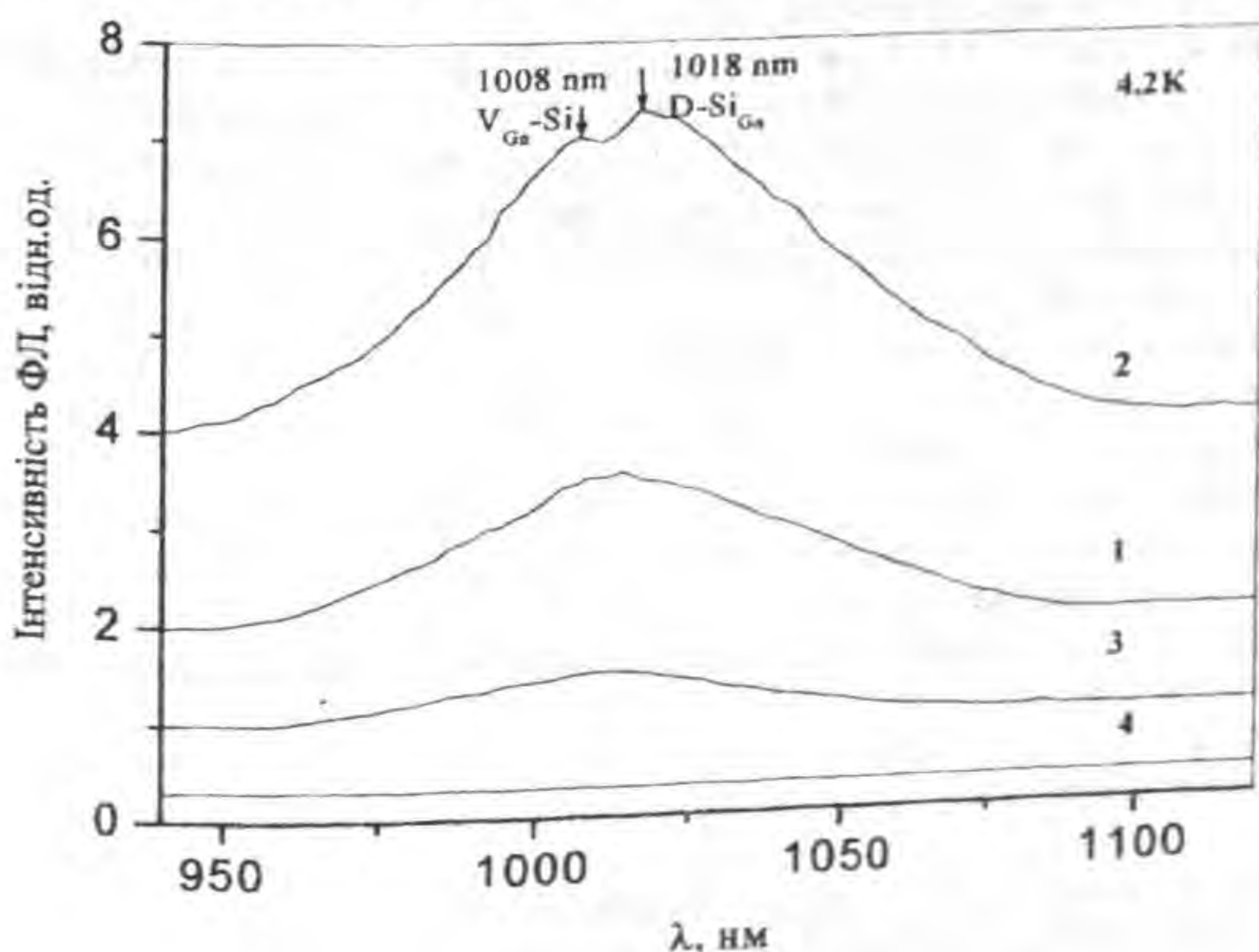


Рис 2. Спектри ФЛ епітаксійних шарів GaAs

шару. Наслідком такого подвійного впливу є підвищення структурної досконалості плівок та більш суттєве зменшення концентрації неконтрольованих домішок. Це підтверджується як зростанням рухливості основних носіїв заряду, так і збільшенням інтенсивності екситонної смуги, а також зменшенням її напівширини до 0.7 меВ.

Отже, механізм очистки при комплексному легуванні має складний характер і поєднує як хімічну взаємодію рідкоземельного елемента з фоновими домішками, так і взаємодію та перерозподіл точкових дефектів під впливом ізовалентної домішки – алюмінію. Ефективність очистки при комплексному легуванні є значно вищою, ніж у випадку застосування тільки РЗЕ.

Таким чином, показано, що в епітаксійних шарах GaAs, отриманих методом РФЕ із галієвих розплавів, комплексне легування оптимальними концентраціями гадолінію та алюмінію спричиняє значне підвищення ефекту очистки шарів GaAs від фонових домішок та підвищення їх структурної досконалості.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Алферов Ж.И., Андреев В.М., Воднев А.А., Конников С.Г., Ларионов В.П., Погребенский К.Ю., Румянцев В.Д., Хвостиков В.П. // *Письма в ЖТФ*.-1986.- Т.12, вип.18.- с.1089-1093.
2. Wu M.-C., Chiu C.-M. Very high purity InP layer grown by liquid-phase epitaxy using erbium gettering // *J. Appl. Phys.* -1993.- Vol.73.- p.468-470.
3. Семенова Г.М., Кришгаб Т.Г., Кладько Ф.П., Круковський С.І., Світельський О.В. Властивості епітаксійних шарів арсеніду галію при легуванні галієвого розплаву ітербієм або скандієм // *УФЖ*.- 1995.- Т. 40, №10 – с. 1101-1106.
4. Prochazkova O., Novotny J., Zavadil J., Zdansky K. Effect of rare earth addition on LPE InP-based semiconductor layers // *Material Science & Technology*.-1999.- Vol.B66.- p.63-66.
5. Prochazkova O., Zavadil J., Zdansky K. LPE InP layers grown in the presence of rare-earth elements // *Material Science & Technology*.-2001.- Vol.B80.-p.14-17.
6. Ohnishi N., Makita Yu., Asakura H., Iida T., Yamada A., Shibata H. Conditions for the formation of defect-induced bound exciton emissions in GaAs // *Appl. Phys. Lett.*-1993.-Vol.62.- p.1527-1529.
7. Jeganathan K., Saravanan S., Ramasamy P., Kumar J. Effect of bismuth on LPE grown GaAs layer using Ga-As-Bi melt // *J. Crystal Growth*.-1999.- Vol.200.- p.341-347.
8. Czech E., Gotz G., Cristiani G., Konuma M. Residual impurities in high purity GaAs layers grown by LPE in H₂-Ar atmosphere // *J. Crystal Growth*.-1999.-Vol.198-199.- p.1087-1091.

правилу адитивності. Наприклад, σ_b КМ у 2-10 разів перевершують σ_b біметалів того ж складу. В роботах [1-9] не була досліджена залежність σ_b від об'ємної концентрації більш пластичної компоненти C_1 . Тому до сьогодення оптимальну концентрацію C_1 підбирають емпіричним шляхом.

Мета роботи – дослідити $\sigma_b(C_1)$ КМ та відшукати критерії, що визначають C_1 , при якій σ_b максимальне.

Техніка експерименту

Зразки КМ для досліджень були виготовлені за технологією, аналогічній [5]. Спочатку складали пакет з фольг металу 1 товщиною h_1 , що чергувались з фольгами металу 2 товщиною h_2 . Метал 1 підбирався більш пластичним за метал 2. Концентрація $C_1 = [h_1 : (h_1 + h_2)] * 100\%$ об. Пакет клали у мідний конверт, зроблений з кількох шарів мідної фольги. У конверт наливали етиловий спирт, нагрівали до температури прокатки T_p , витримували в печі 3-5 хвилин і вальцювали так, що товщина пакету за перше проходження між валками прокатного стану зменшувалась на 20-30%. При цьому пакет зварювався в моноліт. Пара спирту, що заповнювала проміжки між фольгами, забезпечувала достатню для зварювання чистоту поверхонь, оскільки має відновлювальні властивості. Подальше вальцювання багатошарової фольги здійснювалось при кімнатній температурі. Так були одержані КМ з середньою товщиною шару $h = (10-50)$ нм. Саме при таких h досягається максимальне σ_b [5, 9, 10]. Температура T_p підбиралась емпірично. Для КМ Cu-Ni, наприклад, $T_p = 873 \pm 50$ К; для Al-D16 $T_p = 773 \pm 5$ К. Границя міцності на розтяг визначена на зразках розміром $50 \times 5 \times 0,02$ мм³.

Експериментальні результати

На рис. 1-4 наведено концентраційні залежності границі міцності КМ $\sigma_b(C_1)$ від об'ємної концентрації менш міцної (і, як правило, більш пластичної) компоненти C_1 . Границі міцності σ на модулі пружності E фольг у деформованому стані наведені в таблиці 1. Суцільні лінії на рис. 1-4 розраховані за формулою адитивності

$$\sigma_a(C_1) = \sigma_1 C_1 + \sigma_2 (1 - C_1), \quad (1)$$

де σ_2 – границя міцності більш міцної компоненти.

Спостерігаємо закономірності: є оптимальне C_1 , при якому $\sigma_b(C_1)$ найбільше; максимальне $\sigma_b(C_1)$ у 2-3 рази перевершує адитивне $\sigma_a(C_1)$;

Таблиця 1

Границі міцності σ і модулі пружності E фольг у деформованому вальцюванням стані.

метал	Cu	Al	D16	Ni	Ag	Fe	Pb	Zn	Sn	Cd
$\sigma \cdot 10^7$ Па	35	16	42	60	20	88	2	13	2	4
$E \cdot 10^7$ Па	13200	7100	7200	20500	8000	21000	1700	12000	5500	6350

Таблиця 2

Оптимальна концентрація C_1 % об. першої компоненти в КМ, адитивна міцність КМ $\sigma_a(C_1) \cdot 10^7$ Па, міцність у максимумі (рис. 1-4) $\sigma_b(C_1) \cdot 10^7$ Па, деформація ξ_1 % поздовжнього стискання та напруги стискання $\sigma_1 \cdot 10^7$ Па пластичнішого шару.

№ пп	КМ	C_1	ξ_1	σ_1	$\sigma_a(C_1)$	$\sigma_b(C_1)$
1	Cu-Ni	40±6	0,7	90	50	130±10
2	Cu-Fe	29±3	1,63	215	72	380±24
3	Al-D16	35±6	1,1	78	32	80±11
4	Al-Cu	28±5	1,27	90	29	98±12
5	Al-Ni	21±3	3,18	226	50	140±16
6	Ag-Ni	25±2	2,25	180	50	120±30
7	Ag-Cu	26±3	1,25	99	31	105±12
8	Ag-Fe	19±2	4,69	375	75	160±40
9	Cd-Zn	52±10	0,19	12	8	20±4
10	Cd-Al	20±0,5	1,01	64	13	30±6
11	Pb-Al	11±2	7,62	129	14	25±3
12	Zn-Al	45±6	1,63	19	14	26±2
13	Sn-Al	11±2	2,35	129	14	28±4
14	Sn-Pb	50±1	0,036	2	2	4±0,5
15	Ni-Fe	41±6	0,62	126	76	210±12
16	Zn-Cu	27±3	0,79	94	29	82

при великих C_1 $\sigma_b(C_1) < \sigma_a(C_1)$; зі збільшенням середньої товщини шару (рис 1 – 2) крива $\sigma_b(C_1)$ наближається до $\sigma_a(C_1)$. Подібне спостерігається і для інших КМ, деякі важливі параметри яких наведені у таблиці 2.

Обговорення експериментальних результатів

Розглянемо фрагмент КМ з чотирьох шарів, що знаходиться між валками прокатного стану (рис. 5). Ширина фрагменту L , товщини шарів h_1 та h_2 . Виберемо початок координат вісі ОХ на лінії, що з'єднує центри валків. При вальцюванні КМ пластичніший шар 1 (другий знизу) деформується сильніше, ніж оточуючі його шари – сусіди 2, тому у ньому виникають стискаючі вздовж ОХ напруги, а в сусідніх, менш пластичних шарах 2 – розтягуючі напруги. На границях між шарами діють дотичні напруги τ , спрямовані паралельно вісі ОХ. Їх би не було, якби між шарами не було тертя чи адгезії, або якби шари деформувалися однаково. Напруги в об'ємі шарів тим більші, чим більші τ і поверхня дотику шарів одиничної довжини $2(L+h_1)$. Тому для шару 1 довжиною dx можна записати:

$$d\sigma_1 = \frac{2(L+h_1)\tau}{Lh_1} \cdot dx \quad (2)$$

Оскільки $L \gg h_1$, то при умові $\tau = \text{const}$

$$\sigma_1 = 2 \int_0^l \frac{\tau}{h_1} dx = \frac{2\tau l}{h_1}, \quad (3)$$

де l – довжина ділянки КМ, що знаходиться між валками в стані деформації. З іншого боку, напруга стискання σ_1 обумовлює додаткову пружну деформацію $\xi_1 = \sigma_1 E_1^{-1}$ у шарі 1. Тому

$$\frac{2\tau l}{h_1} = \xi_1 E_1. \quad (4)$$

Оскільки l і τ для шарів h_1 і h_2 однакові, то для додаткових розтягуючих напруг у шарі 2 можна записати:

$$\frac{2\tau l}{h_2} = \sigma_2. \quad (5)$$

Порівнюючи (4) і (5), знаходимо:

$$\xi_1 E_1 h_1 = \sigma_2 h_2, \quad (6)$$

$$\frac{\xi_1 E_1 h_1}{h_1 + h_2} = \frac{\sigma_2 h_2}{h_1 + h_2}, \quad (7)$$

$$\xi_1 E_1 C_1 = \sigma_2 C_2 = \sigma_2 (1 - C_1), \quad (8)$$

$$\xi_1 = \frac{\sigma_2 (1 - C_1)}{E_1 C_1}. \quad (9)$$

Розтягуюча напруга σ_2 не повинна бути більшою за границю міцності фольги σ , наведену в таблиці 1. Тоді КМ матиме суцільні (нерозірвані) шари, отже, матиме найбільшу міцність. У таблиці 2 (четверта колонка) містяться величини деформацій стискання ξ_1 , розраховані за формулою (9) для оптимальних C_1 (третя колонка) з використанням даних таблиці 1. Бачимо, що ξ_1 найбільші в КМ, де шари 1 значно відрізняються по пластичності від шарів 2 (Al-Ni, Ag-Fe, Pb-Al). В них досягаються напруги стискання $\sigma_1 = E_1 \xi_1$ ($226 \cdot 10^7$ Па, $375 \cdot 10^7$ Па, $129 \cdot 10^7$ Па), що на порядки перевершують границю міцності шарів 1 при розтягуванні. Таке можливе в умовах всебічного стискання КМ між валками на ділянці $OX=l$. Тому інтегрування (3) здійснювали в межах $[0, l]$. Малі додаткові деформації стискання ξ_1 спостерігаються тоді, коли компоненти КМ близькі по механічним параметрам (Sn-Pb, Cu-Ni, Ni-Fe). У крайньому варіанті, коли шари однакові, $\xi_1 = 0$. Співвідношення (9) можна використати для знаходження оптимальної концентрації C_1 , при якій шари 2 не розриваються на фрагменти на початкових етапах вальцювання (одна з умов одержання максимального σ_3 КМ):

$$C_1 = \frac{\sigma_2}{\xi_1 E_1 + \sigma_2} \cdot 100\%. \quad (10)$$

Границю міцності σ_2 знаходимо в таблиці 1 як $\sigma_2 = \sigma$ вибравши певний метал компонентою 2 КМ.

З (10) випливає, що $C_1 \sim 50\%$, коли механічні параметри компонент 1 і 2 близькі (тобто, коли $\xi_1 E_1 \sim \sigma_2$). Якщо $E_1 \ll E_2$, то шар 1 видавлюється

вздовж шарів 2 в зоні $[0, l]$, тому значно зростає пружна напружка стискання ξ_1 , а C_1 зменшується. Це і спостерігаємо на експерименті (таблиця 2).

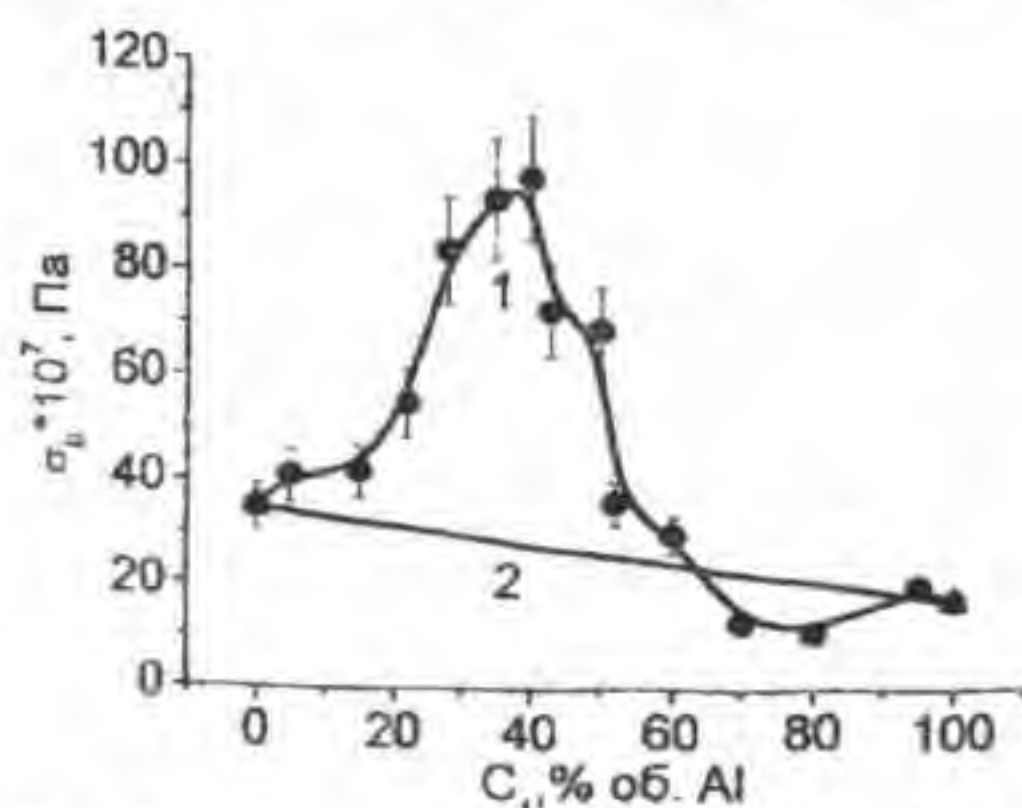


Рис.1. Концентраційна залежність (точки 1) границі міцності $\sigma_b(C_1)$ КМ Al-Cu; лінія 2 – розрахунок за формулою адитивності (1). Середня товщина шару $h=10-30$ нм.

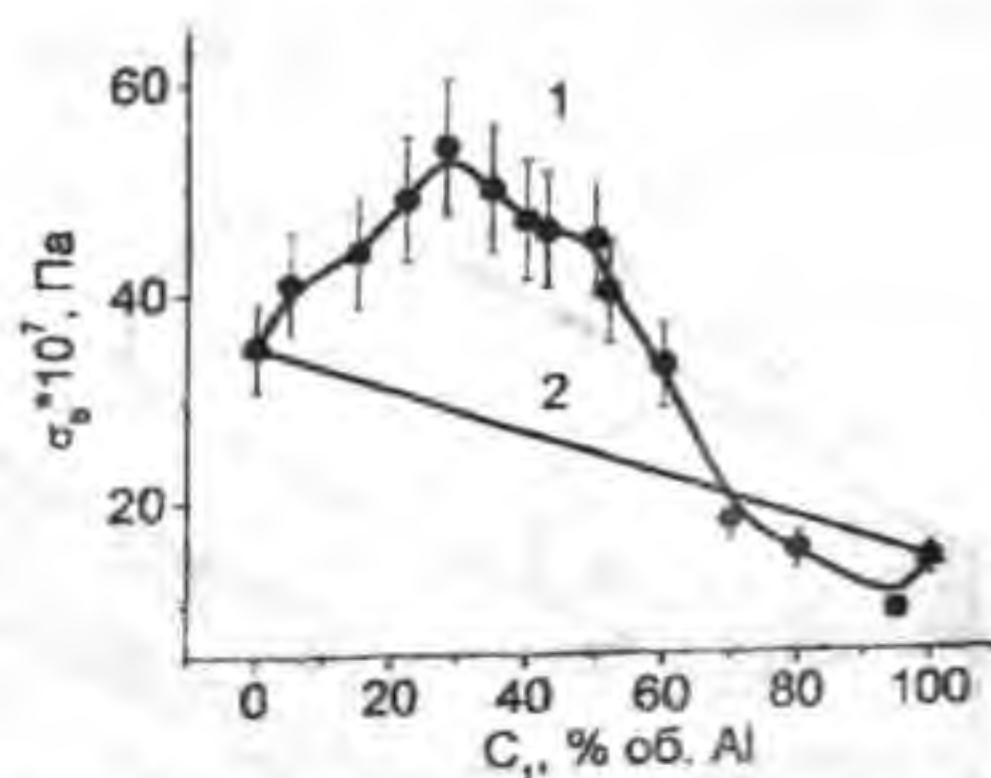


Рис.2. Концентраційна залежність (точки 1) границі міцності $\sigma_b(C_1)$ КМ Al-Cu; лінія 2 – адитивне $\sigma_b(C_1)$. Середня товщина шару $h \sim 1$ мкм.

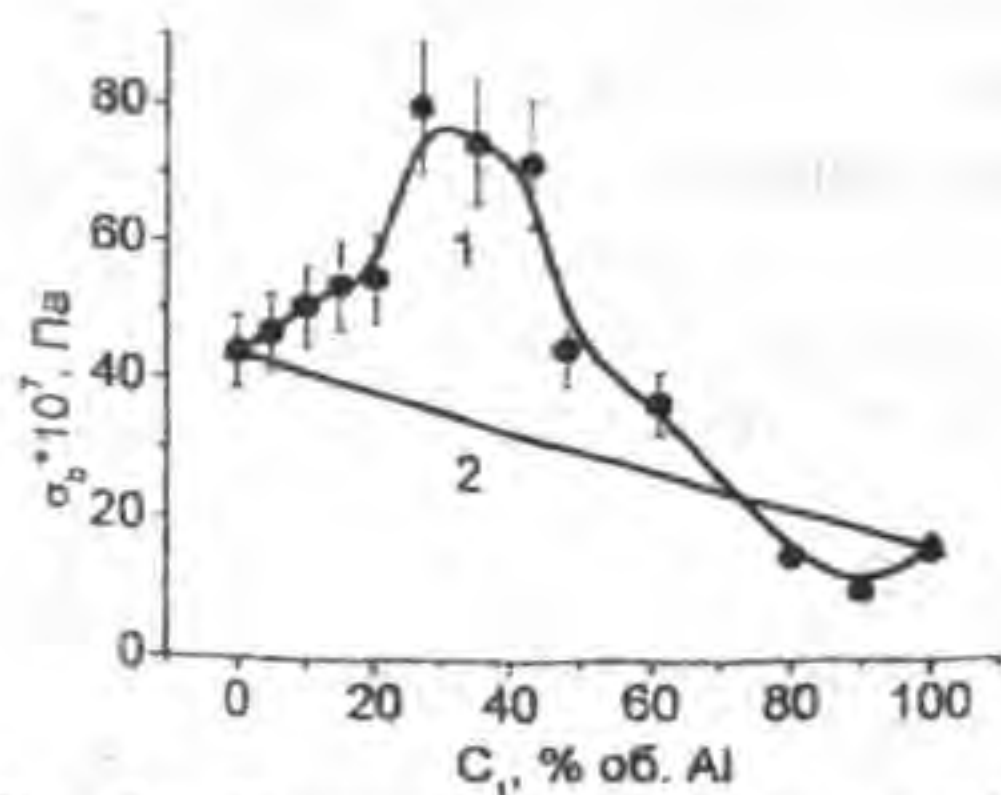


Рис.3. Концентраційна залежність (точки 1) границі міцності $\sigma_b(C_1)$ КМ Al-дюралюміній D16; лінія 2 – адитивне $\sigma_b(C_1)$. Середня товщина шару $h \sim 40-50$ нм.

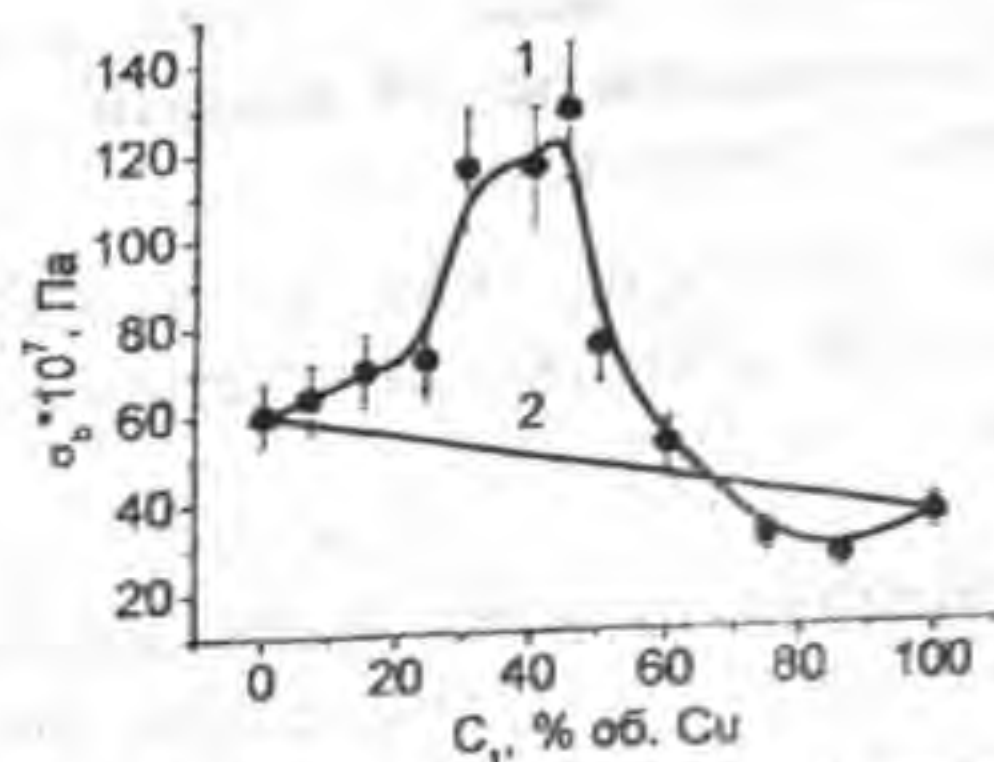


Рис.4. Залежність $\sigma_b(C_1)$ (точки 1) КМ Cu-Ni від $C_1, \% \text{ об. Cu}$. Лінія 2 – адитивне $\sigma_b(C_1)$. Середня товщина шару $h \sim 40-50$ нм.

Крім того, щоб σ_b КМ було максимальним, необхідно, як впливає з (6), щоб ξ_1 було невеликим. Це досягається вальцюванням з малими обтисненнями. Виготовляти КМ можна і куванням. При куванні схема навантаження схожа на схему рис.5, якщо її доповнити симетричною відносно площини, в якій лежать вісі валків, правою частиною (дзеркальною лівій). Роль молотка буде виконувати верхній валок, а

ковадла – нижній. При куванні відсутні додаткові напруги, що виникають при вальцюванні і розтягують шари обох компонент. Ці додаткові напруги ми не врахували при виведенні (9) і (10). Оскільки кування схоже на вальцювання з великою швидкістю, то для кування також справедливі вирази (9) і (10). Схема протягування дроту через фільтри також схожа на

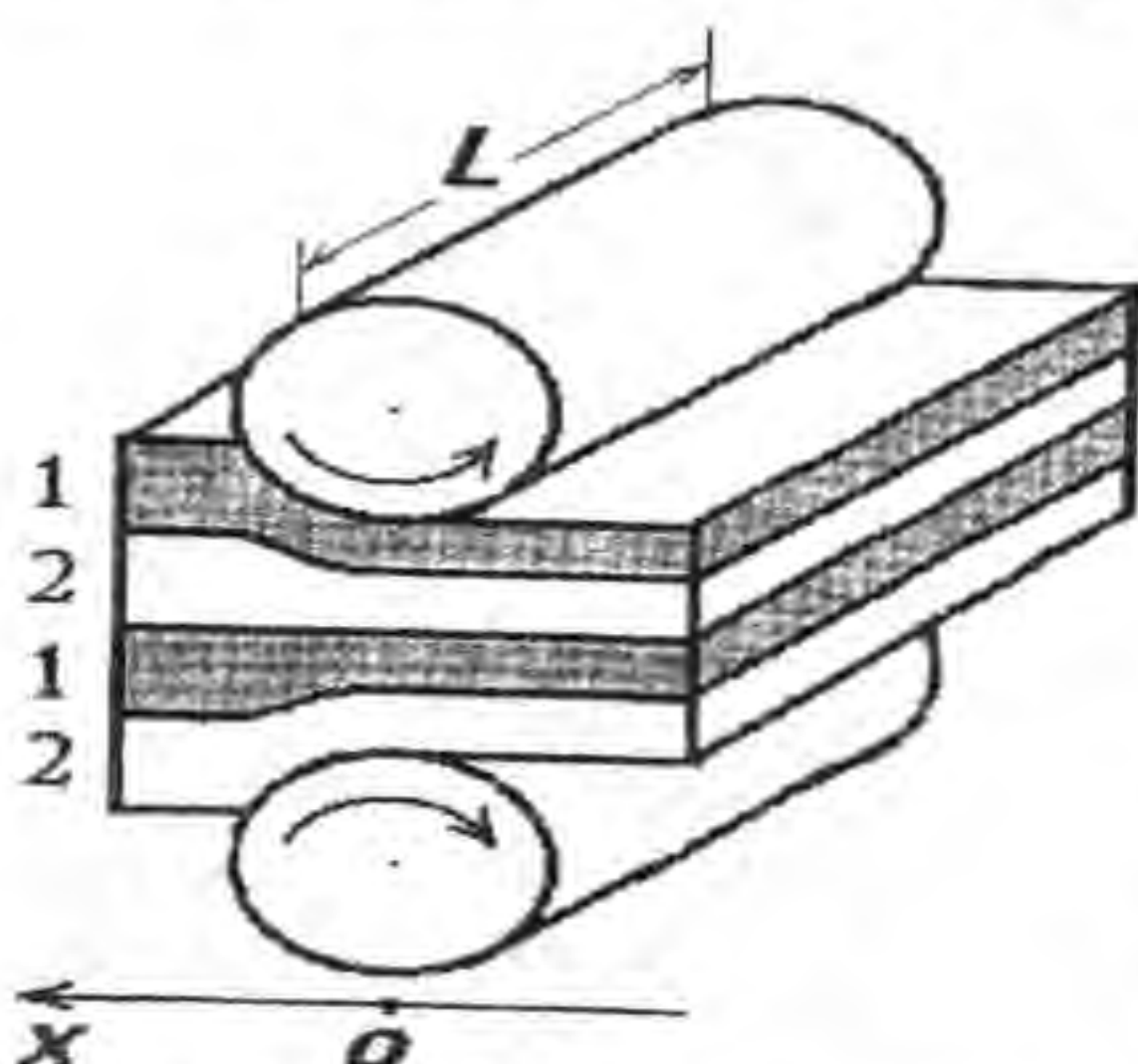


Рис.5. Схема вальцювання пакету з чотирьох фольг. В області ОХ в пластичніших шарах 1 виникають стискаючі вздовж осі ОХ напруги, а у шарах 2 – розтягуючі.

служать арматурою КМ, як волокна в волоконних КМ. Фрагменти повністю навантажуються пластичними шарами 1 лише на своїх середніх ділянках [10]. Тоді

$$\sigma_b^I = \sigma_1(1-C_1) + \sigma_2 C_2(1-l_k/2l), \quad (11)$$

де l_k – критична довжина фрагменту, при якій він руйнується навпіл.

Порівнюючи (1) і (11), знаходимо, що $\sigma_b^I < \sigma_a(C_1)$. Тому експериментальні криві σ_b (рис. 1-4) при $C_1 \rightarrow 100\%$ опускаються нижче прямої $\sigma_a(C_1)$.

Границя міцності КМ $\sigma_b(C_1)$ на максимумі кривої (рис. 1-4) у 2-4 рази перевершує адитивну міцність $\sigma_a(C_1)$ (таблиця 2). Це пояснюється [10] блокуванням тріщин і гальмуванням дислокацій на границях між шарами. Зі зменшенням товщини шару ці фактори відіграють важливу роль у зміцненні композиційних матеріалів.

Висновки

1. Досліджено концентраційну залежність границі міцності на розтяг $\sigma_b(C_1)$ композиційних матеріалів: Cu-Ni, Cu-Fe, Al-D16, Al-Cu, Al-Ni, Ag-Ni, Ag-Cu, Ag-Fe, Cd-Zn, Cd-Al, Pb-Al, Zn-Al, Sn-Al, Sn-Pb, Ni-Fe, Zn-Cu.

схему рис.5. Відрізняється тим, що при протягуванні виникають великі напруги, що розтягують шари обох компонент. Зрозуміло, що при всіх згаданих схемах деформації необхідно забезпечити мале ξ_1 . Тому з давніх давен кування булатних сталей, які являють собою КМ Fe-Fe₃C, здійснювали легкими молотками (до 20 тисяч ударів на одну ділянку). Сталі з рекордним значенням міцності також часто деформують з малими обтисненнями [11].

При зростанні $C_1 \rightarrow 100\%$ зменшується σ_b КМ (рис. 1-4). Це можна пояснити руйнуванням шарів 2, після якого фрагменти шарів 2

2. Границя міцності $\sigma_b(C_1)$ має максимальне значення, коли виконується умова $C_1 = \frac{\sigma_2}{\xi_1 E_1 + \sigma_2} 100\% \text{ об.}$, де C_1 , E_1 - об'ємна концентрація і модуль пружності більш пластичної компоненти, ξ_1 - напруження поздовжнього пружного стискання шару 1 (з компоненти 1) в зоні деформації, σ_2 - границя міцності на розтяг шару 2.

3. Границя міцності КМ $\sigma_b(C_1)$ наростає зі зменшенням товщини шару до 10-50 нм.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Астров Е.И.. Плакированные многослойные металлы. — Москва: Металлургия, 1965. — 239 с.
2. Колпашников А.И., Арефьев Б.А., Мануйлов В.Ф.. Деформирование композиционных материалов. — Москва: Металлургия, 1982. — 248 с.
3. Палатник Л.С., Ильинский А.И. О стабилизации высокопрочных вакуумных конденсатов // ДАН СССР — 1964. — №3. — С. 575-577.
4. Копань В.С.. Жаропрочность волокнистой алюминиевой проволоки // УФЖ — 1965. — №10. — С.1147-1149.
5. Копань В.С., Лысенко А.В.. Об электросопротивлении и механических свойствах многослойных композиций на основе меди и алюминия // Физ. мет. и металловедение -1970. — 29, №5. — С.1074-1080.
6. Майборода В.П., Копань В.С.. Свойства тонкослойного проката сталь — медь// Известия АН УССР, Металлы - 1973. — №3. — С.132-135.
7. Movchan B.A., Demchishin A.V., Badilenko G.F., Bunshan R.F., San S.C.. Structure — property relationships in m.l. TiC — Ni condensate // Thin Solid Films, 1982, v.96, p. 59-66.
8. Карпов М.И., Внуков В.И., Медведь Н.В., Волков Г.К. Ходос И.И.. Многослойный композит Cu-Fe с нанометрической толщиной слоев // Материаловедение - 2005. — №1. — С.36-39.
9. Копань В.С.. Микрослоистые композиционные материалы на основе алюминия, меди и железа. Автореферат докторської дисертації. Київ, — 1988. — 38 с.
10. Копань В.С., Композиційні матеріали. — Київ: Університетське видавництво „Пультсари”, 2004. — 196 с.
11. Гриднев В.И., Гаврилюк В.Г., Мешков Ю.Я. Прочность и пластичность холоднодеформированной стали. — Київ, Наукова Думка - 1974. — 231 с.

Надійшла до редколегії .08.05.

УДК 532.536

Корнієнко М.Є., ст. наук. співр.

M. Ye. Korniyenko, senior res.

**Колективні властивості тепло-
провідності рідин. 1. Резонансні
властивості теплопровідності
води і водних розчинів**

**Collective properties of heat
conductivity of liquids. 1. Resonant
properties of heat conductivity of
water and water solutions**

Встановлено існування резонансних і нерезонансних внесків в теплопровідність води і водних розчинів. Резонансні внески обумовлені колективними коливальними модами, а нерезонансні – індивідуальним рухом молекул. Детально аналізуються максимуми теплопровідності води, а також водних розчинів кислот (HCl , HNO_3 і H_2SO_4) і лугів (NaOH , NH_4OH і ін.). Показано, що для більшості водних середовищ домінують колективні механізми теплопровідності, пов'язані з високочастотними поздовжніми оптичними і акустичними модами. Розглядається нове явище резонансу індивідуальних і колективних теплових рухів у рідинах.

Ключові слова: теплопровідність, водний розчин, колективна мода, резонансний внесок.

Existence of the resonant and nonresonant contributions to heat conductivity of water and water solutions is established. The resonant contributions are caused by collective variation modes, and nonresonant – by individual motion of molecules. Maxima of heat conductivity of water, and also water solutions of acids (HCl , HNO_3 and H_2SO_4) and alkalis (NaOH , NH_4OH etc.) are in details analyzed. It's shown, that the collective mechanisms of heat conductivity, connected with high-frequency longitudinal optical and acoustic modes for the majority of water environments dominate. The new phenomenon of a resonance of individual and collective thermal movements in liquids is considered.

Key Words: heat conductivity, water solution, collective mode, resonant contribution.

E-mail: nikkorn@mail.univ.kiev.ua

1. Вступ

Раніше з використанням теорії відповідних станів було показано, що максимуми теплопровідності широкого кола рідин від низькотемпературних кріогенних до високотемпературних рідких металів, включаючи рідини з водневими зв'язками, мають подібну природу [1]. Було також встановлено, що для звичайної і важкої води в максимумах теплопровідності середня теплова енергія коливань частинок kT дорівнює енергії поздовжніх оптичних фононів $\hbar c v_{LO}$ для коливальної моди сітки водневих зв'язків (ВР) $v_{LO}=270 \text{ см}^{-1}$. Зв'язок теплового руху в конденсованих середовищах з квантовими явищами був встановлений також для процесів плавлення і кипіння [2,3]. Таким чином, проблема колективних збуджень в рідкому стані речовини [4-13] виявилася пов'язаною з квантовою механікою структуроутворення і тепловим рухом в густих середовищах. В даній роботі детально досліджується природа

максимумів теплопровідності λ у воді і водних розчинах кислот і лугів. Ми аналізуємо розчини цих речовин, тому що вони найбільш сильно впливають на структуру води через наявність в них гідратованих протонів H^+ і гідроксильних груп OH . Крім аналізу температур максимумів теплопровідності у водних середовищах і їх зсувів при зміні концентрації розчинених речовин ми розглядаємо також напівширини цих максимумів δT , що дає додаткову інформацію. Вперше встановлено існування резонансного та нерезонансного внесків у теплопровідність рідких середовищ. Проведено порівняння резонансних властивостей теплопровідності води та водних розчинів кислот і лугів. Розвиток уявлень про взаємозв'язок явищ переносу в рідинах з колективними властивостями збуджень у них, а також про резонанс індивідуальних і колективних рухів важливий для розвитку фізики рідкого стану речовини.

2. Загальний порівняльний аналіз максимумів теплопровідності води і водних розчинів

Для аналізу резонансних властивостей теплопровідності води ми використовуємо відомі табличні дані температурних залежностей $\lambda(T)$ для води в широкій області температур T і тисків P [14-16], а для розчинів електролітів при різних концентраціях і нормальних умовах - дані довідника [17]. Раніше в околі максимумів $\lambda_{\max}$ ми використовували параболічне наближення для експериментальних даних [1]. Це дозволяло аналітично визначати температуру максимуму теплопровідності $T_{\max}$ і обчислювати частоти відповідних колективних коливальних мод. Використання гауссових функцій для апроксимації залежностей $\lambda(T)$ дозволяє, крім температурних положень максимумів $T_{\max}$, визначати також величини резонансних внесків і напівширини резонансів δT . Для води при низьких тисках, а також для багатьох розчинів електролітів експериментальні залежності $\lambda(T)$ вивчені тільки в обмеженому інтервалі температур існування рідкої фази. Відсутність далеких крил у залежностях $\lambda(T)$, на відміну від усамітнених ліній $I(\nu)$ в спектроскопії поглинання чи розсіювання світла, не дозволяє точно встановити форму резонансів теплопровідності. Тут ми встановлюємо відповідність між температурою T і частотою ν , тому що значенням T відповідає визначена енергія термічно збуджуваних коливальних станів, як це розглядається в теорії теплоємностей газів і твердих тел. Однак у наших роботах ми розглядаємо цю проблему значно ширше. Зокрема, у [2,3] показана важлива роль нелінійних взаємодій коливальних мод при термічному збудженні станів обертонів і сумарних тонів, що визначає процеси плавлення і кипіння. В класичній теорії теплоємності розглядається тільки безпосереднє термічне збудження фундаментальних коливальних мод без врахування нелінійності.

У близьких до нормальних умов теплопровідність дистильованої

води і розчинів багатьох електролітів експериментально вивчалася тільки в околі широкої вершини максимуму, де поведінка $\lambda(T)$ добре описується гауссовою функцією. В критичній області і області більш високих тисків залежності $\lambda(T)$ вивчені в широкому інтервалі температур, включаючи температури, що перевищують критичне значення T_c [1,14,16]. Для тисків 100-250 МПа нам відомі експериментальні значення λ для води тільки в області $0-350^\circ\text{C} < T_c$. У зв'язку з цим для коректності порівняння результатів при низьких і високих тисках ми при аналізі експериментальних даних використовуємо по можливості приблизно рівні температурні інтервали в обидві сторони від максимуму резонансної кривої $\lambda(T)$, як це показано на рис.1а. Більш детальний аналіз повної форми резонансних кривих $\lambda(T)$ для води, включаючи критичну область, буде проведений в окремій публікації. Ми розглядаємо водні розчини кислот і лугів, тому що наявність у них додаткових протонів і гідроксильних груп повинно приводити до посилення сітки водневих зв'язків (ВЗ), що підтверджується вивченням низькочастотних коливальних спектрів сітки ВЗ [18,19]. Особливий вплив іонів H^+ і OH^- на властивості та структуру розчинів узгоджується з надзвичайно високою рухливістю цих іонів і високих граничних значень еквівалентної електропровідності [20].

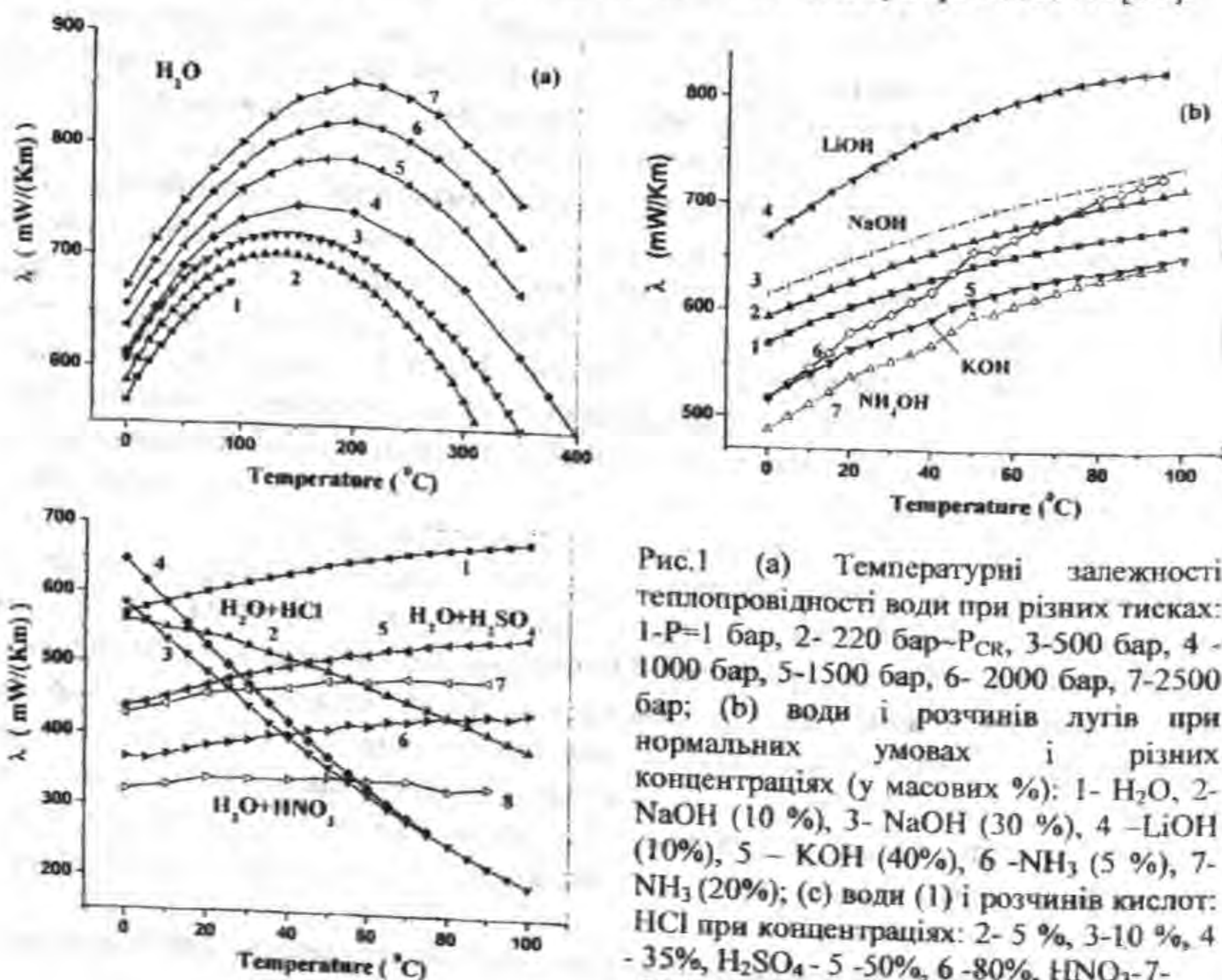


Рис.1 (а) Температурні залежності теплопровідності води при різних тисках: 1- $P=1$ бар, 2- 220 бар- P_{cr} , 3-500 бар, 4 - 1000 бар, 5-1500 бар, 6- 2000 бар, 7-2500 бар; (б) води і розчинів лугів при нормальних умовах і різних концентраціях (у масових %): 1- H_2O , 2- NaOH (10 %), 3- NaOH (30 %), 4 - LiOH (10%), 5 - KOH (40%), 6 - NH_3 (5 %), 7- NH_3 (20%); (с) води (1) і розчинів кислот: HCl при концентраціях: 2- 5 %, 3-10 %, 4 - 35%, H_2SO_4 - 5 -50%, 6 -80%, HNO_3 -7- 50%, 8 -80%.

Відповідно до колективної концепції, що розвивається [1], і важливої ролі колективних коливальних мод в теплопровідності рідин, посилення системи ВЗ повинно викликати ріст коефіцієнтів теплопровідності. Таке збільшення значень λ в порівнянні з водою дійсно спостерігається в розчинах LiOH і NaOH при всіх концентраціях і температурах, що ілюструється рис.1b. Теплопровідність розчинів KOH трохи перевищує $\lambda(\text{H}_2\text{O})$ тільки при малих концентраціях, і з подальшим ростом концентрації зменшується. Таким чином, у водних розчинах лугів дія гідроксильних груп OH^- виявляється не самотійно, а залежить від супутніх катіонів, що разом вбудовуються в сітку ВР і впливають на колективні коливальні моди і теплопровідність розчинів.

До розчинів лугів близькі водні розчини аміаку, у яких молекула NH_3 трансформується в катіон амонію NH_4^+ з утворенням аніона OH^- . Іон NH_4^+ умовно можна розглядати як іон H^+ , зв'язаний з однією молекулою аміаку, тому що завжди існують складності з встановленням числа молекул, зв'язаних з розглядуваним іоном. Відомо, що у водних розчинах NH_3 , на відміну від розчинів інших речовин, густина помітно зменшується [17] в результаті зміцнення сітки ВЗ і росту ажурності структури води. Тому у водних розчинах аміаку теплопровідність в області максимуму λ також зростає (рис.1b). Характерно, що при цьому напівширина резонансної кривої видимо зменшується, що вказує на хорошу вираженість резонансних властивостей теплопровідності, пов'язаних з посиленням колективної LO моди в розчині NH_4OH . Однак при подальшому рості концентрації NH_3 теплопровідність, як і для розчинів KOH, зменшується, що може вказувати на ослаблення резонансних властивостей в області високих концентрацій.

Іцікаві зміни максимуму теплопровідності спостерігаються в розчинах HCl, що показано на рис.1c. При концентраціях 1-5 ваг.% максимум теплопровідності швидко зміщується з області $\sim 100^\circ\text{C}$ в область $T \sim 0^\circ\text{C}$. При подальшому рості концентрації HCl максимум λ , як і в рідкому аміаку [1], зміщується в область від'ємних температур. Як видно з рис.1c, величина резонансного внеску в розчинах HCl зростає в порівнянні з дистильованою водою, що більш детально буде розглянуто нижче. Для водних розчинів азотної і сірчаної кислот, незважаючи на наявність катіонів H^+ , теплопровідність зменшується з ростом концентрації, що показано на рис.1c. Видно, що при однакових концентраціях теплопровідність розчинів HNO_3 менше ніж для розчинів H_2SO_4 і максимум теплопровідності HNO_3 з ростом концентрації швидше зміщується в область більш низьких температур. Слід відзначити також послаблення резонансних властивостей λ в концентрованих розчинах азотної і сірчаної кислот, що особливо помітно в порівнянні з різкою зміною λ у розчинах HCl.

3. Аналіз резонансних властивостей теплопровідності дистильованої води

Використана методика наближення експериментальних залежностей функціями гауссової форми дозволила вперше показати, що в теплопровідність рідин вносять вклад два процесу, що відповідають резонансному внеску λ_R і постійному чи слабо залежному від T внеску λ_0 . Отримані залежності λ_R і λ_0 від P для води показані на рис.2а,б. За результатами обробки незалежних експериментальних даних [14-16] для H_2O при всіх тисках резонансний внесок λ_R перевищує нерезонансний внесок λ_0 . У значній області тисків λ_R у 2-6 разів перевищує λ_0 . Згідно найбільш детальним експериментальним даним [14,16], резонансний внесок λ_R спочатку зростає з ростом P , а потім зменшується (див. рис.2а,б). Ріст величини λ_R разом з ростом частоти LO моди [1] вказує на посилення колективних властивостей води з ростом тиску. В області високих тисків (100-250 МПа) можливі немоновні зміни розглянутих внесків, але завжди $\lambda_R > \lambda_0$. На рис.2б для порівняння показані також розраховані величини внесків $\lambda_{R,0}$ з використанням даних [14]. Істотно, що для різних експериментальних даних спостерігаються помітні варіації одержуваних результатів при збереженні загальних закономірностей і значно менших відхиленнях для кожної серії вихідних експериментальних даних. Зокрема, при використанні даних [14] виходять менші значення λ_R і більш високі значення λ_0 , ніж за даними [15,16]. Це може вказувати на можливість існування різних станів дистильованої води при однакових зовнішніх умовах.

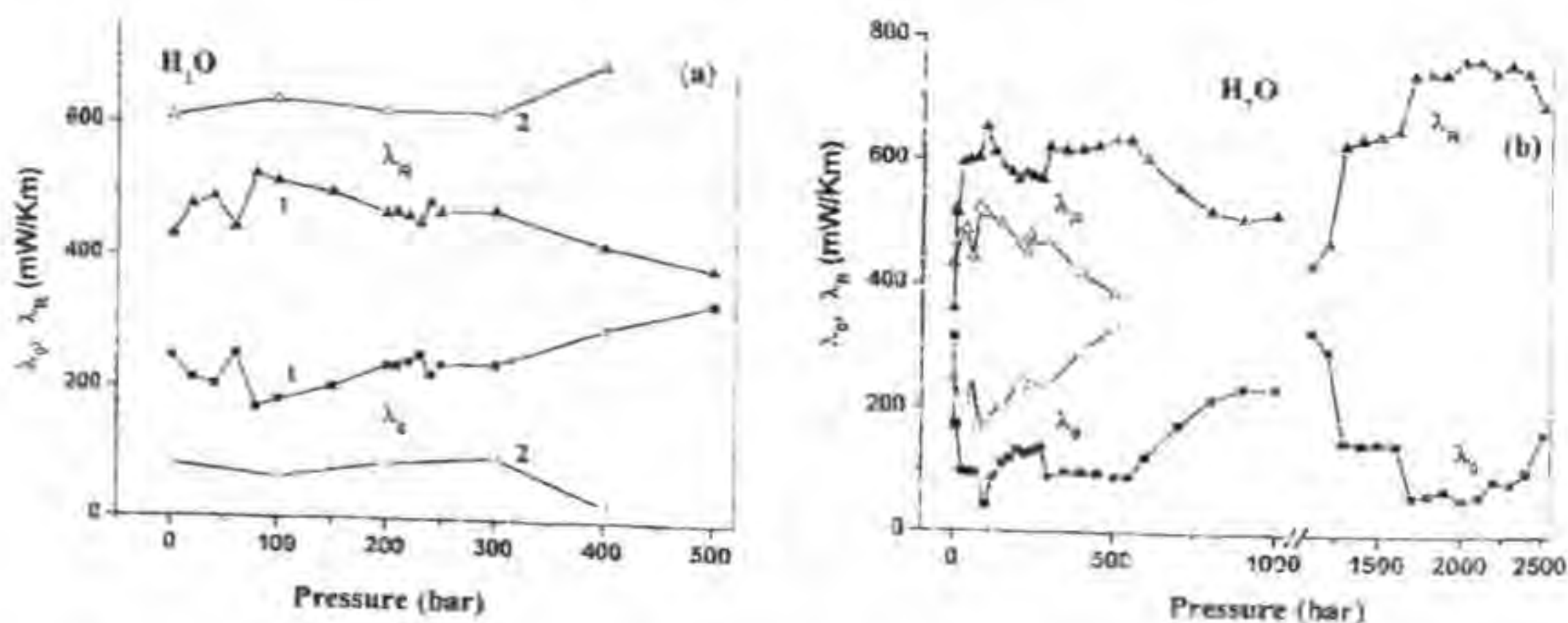


Рис.2 (а) Залежності величин резонансних λ_R і нерезонансних λ_0 внесків у теплопровідність води від тиску. Криві 1 відповідають експериментальним даним [14], а 2 - [15]. (б) Залежності $\lambda_{R,0}(P)$ для води за даними [16] (темні знаки) і даними [14] (світлі знаки).

Член λ_R відповідає внеску резонансних оптичних мод, а член λ_0 , на перший погляд, відповідає за індивідуальний рух молекул. Однак він може

відповідати і внеску акустичних мод з більш широким, в порівнянні з оптичними модами, спектром частот. Для правильної фізичної інтерпретації внесків λ_R і λ_0 необхідно враховувати найбільш різноманітні і повні експериментальні дані як по теплопровідності води і водних розчинів різних речовин, так і дані спектральних методів дослідження. Важливу інформацію для інтерпретації внесків λ_R і λ_0 можна отримати з поведінки частот і напівширин відповідних резонансних мод. Частоти резонансних оптичних мод, що дають внесок у формування температурного максимуму теплопровідності, визначаються умовою $h\nu = kT$. Для рідин з водневими зв'язками максимумами теплопровідності відповідають поздовжнім оптичним модам ν_{LO} , частоти яких були раніше виміряні методами коливальної спектроскопії [9-12]. Обґрунтування цього було дано в роботі [1].

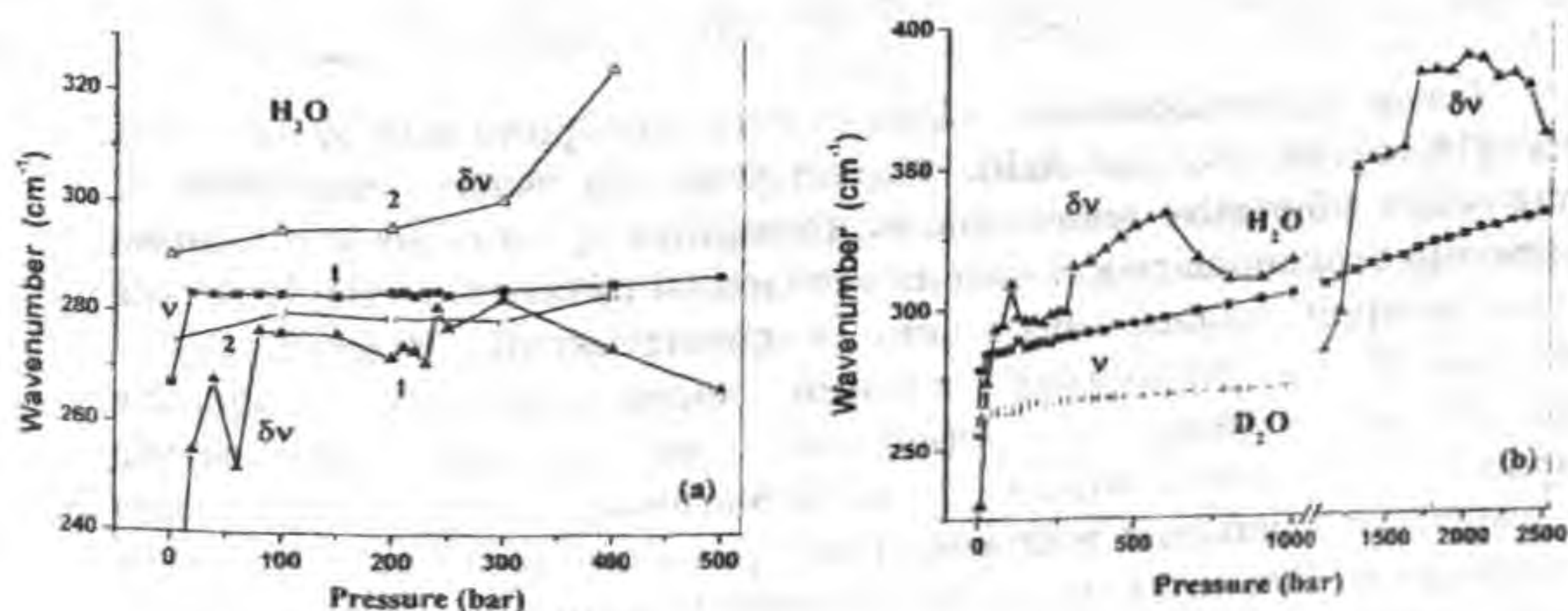


Рис.3. (а) Залежності частот ν і напівширин $\delta\nu$ поздовжніх оптичних мод у звичайній воді від тиску. Криві 1 відповідають експериментальним даним [14], а 2 - [15]; (б) Залежності ν , $\delta\nu$ (P) для звичайної води за даними [16] і ν (P) - для важкої води.

За температурними напівширинами δT максимумів λ можна визначити ефективні напівширини резонансних мод $\delta\nu = k\delta T/h\nu$. Залежності ν і $\delta\nu$ від тиску P для H_2O показані на рис.3а,б. Для порівняння на рис.3б показана залежність $\nu(P)$ для важкої води. Видно, що розраховані величини ν дійсно дорівнюють частотам поздовжніх оптичних мод, причому в H_2O ці частоти трохи більші, ніж в D_2O , що дуже добре відповідає оптичним вимірам [9-12]. З ростом P у звичайній і важкій воді частоти ν_{LO} спочатку швидко зростають (приблизно на 10-20 cm^{-1}), а далі збільшуються повільніше - приблизно за лінійним законом. З рис.3б видно, що швидкість зростання частоти ν_{LO} з ростом тиску в звичайній воді більша ніж у важкій, що, ймовірно, пов'язано з більшою лабільністю структури H_2O і, в результаті, меншою енергією водневого зв'язку порівняно з дейтерієвим. В областях повільної зміни частот мод для H_2O и D_2O була проведена

інтерполяція залежностей $\nu(P)$ прямими лініями $\nu = \nu_0 + \beta P$. Отримані результати наведені в таблиці 1. Видно, що швидкість підвищення частоти LO моди з ростом тиску P для звичайної води приблизно втричі більше, ніж для важкої, і для H_2O досягає $2,16 \text{ cm}^{-1}$ при підвищенні тиску на 100 бар. У повільних залежностях $\nu(P)$ можна виділити дві приблизно лінійних ділянки. Причому для H_2O і D_2O в областях більш високих тисків коефіцієнти β зменшуються, а значення ν_0 зростають, що вказує на посилення систем ВЗ з ростом тиску та збільшення їх стабільності.

Табл.1

Параметри лінійної апроксимації зростання з тиском частот поздовжніх оптичних мод протієвої та дейтерієвої води згідно з даними по теплопровідності [15].

H_2O			D_2O		
P , бар	ν_0 , cm^{-1}	β , $\text{cm}^{-1}/100 \text{ бар}$	P , бар	ν_0 , cm^{-1}	β , $\text{cm}^{-1}/100 \text{ бар}$
25-1500	283,9	2,157	5-125	263,3	0,731
1500-2500	292,8	1,571	125-500	265,6	0,588

У воді при використанні даних [14] напівширини мод $\delta\nu < \nu$, а для даних [15,16] $\delta\nu > \nu$ (рис.3а,б). Характерно, що велике значення λ_R узгоджується з більшою величиною $\delta\nu$. Поведінка ефективних напівширин максимумів теплопровідності водних середовищ радикально відрізняється від напівширин коливальних ліній в спектроскопії. Відомо, що в спектроскопії та радіофізиці ширини високодобротних резонансів зменшуються. Однак в ефективні напівширини максимумів теплопровідності дають внесок усі колективізовані стани оптичних мод при довільних хвильових векторах. Тому розширення області існування колективних коливальних мод буде приводити до збільшення відповідних напівширин $\delta\nu$, що і спостерігається в дійсності. Таким чином, детальний аналіз залежності $\lambda(T)$ дозволяє знаходити ефективні характеристики колективних коливальних мод у воді не спектральними методами, а також визначати співвідношення резонансних і нерезонансних внесків у теплопровідність.

4. Залежність резонансних властивостей водних розчинів кислот і лугів від концентрації

Водні розчини соляної, сірчаної і азотної кислот вивчалися шляхом апроксимації експериментальних даних по теплопровідності функціями гауссової чи лоренцевої форми. Отримані результати при використанні гауссових функцій показані на рис.4а,б. Несподівано виявилось, що резонансні внески λ_R у залежності від концентрації кислоти можуть змінюватися двояким чином. У розчинах HCl резонансний внесок λ_R з ростом концентрації сильно зростає, а нерезонансний внесок λ_0 зменшується. Для розчинів HNO_3 і H_2SO_4 величини λ_R зменшуються з ростом концентрації, а λ_0 зростають в області високих концентрацій

(рис.4а). Цей результат слабо змінюється при використанні для апроксимації функції лоренцевої форми. Дуже мала величина нерезонансних внесків λ_0 для всіх кислот в області концентрацій 10-40% не дозволяє пов'язувати їх із внеском акустичних мод. Це обумовлено тим, що в таких середовищах із сильними водневими зв'язками акустичні хвилі повинні бути присутніми і давати істотний внесок у теплопровідність розчинів. Тому λ_0 варто пов'язувати з індивідуальним механізмом теплопровідності, аналогічним зіткненням у газовій фазі. З ростом концентрації HNO_3 і H_2SO_4 резонансні внески вирівнюються з нерезонансними і, як показує проведений аналіз, в області високих концентрацій (70-100%) домінують індивідуальні механізми теплопровідності. Це особливо характерно для азотної кислоти, де величина λ_R зменшується майже до нуля. Теплопровідність висококонцентрованих кислот істотно менша в порівнянні з водою, що обумовлено в основному сильним ослабленням колективних механізмів теплопровідності в результаті ослаблення сітки ВЗ. З рис.4а видно, що величини λ_0 в азотній і сірчаній кислоті приблизно такі ж, як у дистильованій воді. Однак в області концентрацій H_2SO_4 і HNO_3 ~10-30% резонансний внесок у теплопровідність розчинів більший, ніж в дистильованій воді, що обумовлено більшою зв'язністю молекул, при якій індивідуальний внесок у теплопровідність майже відсутній.

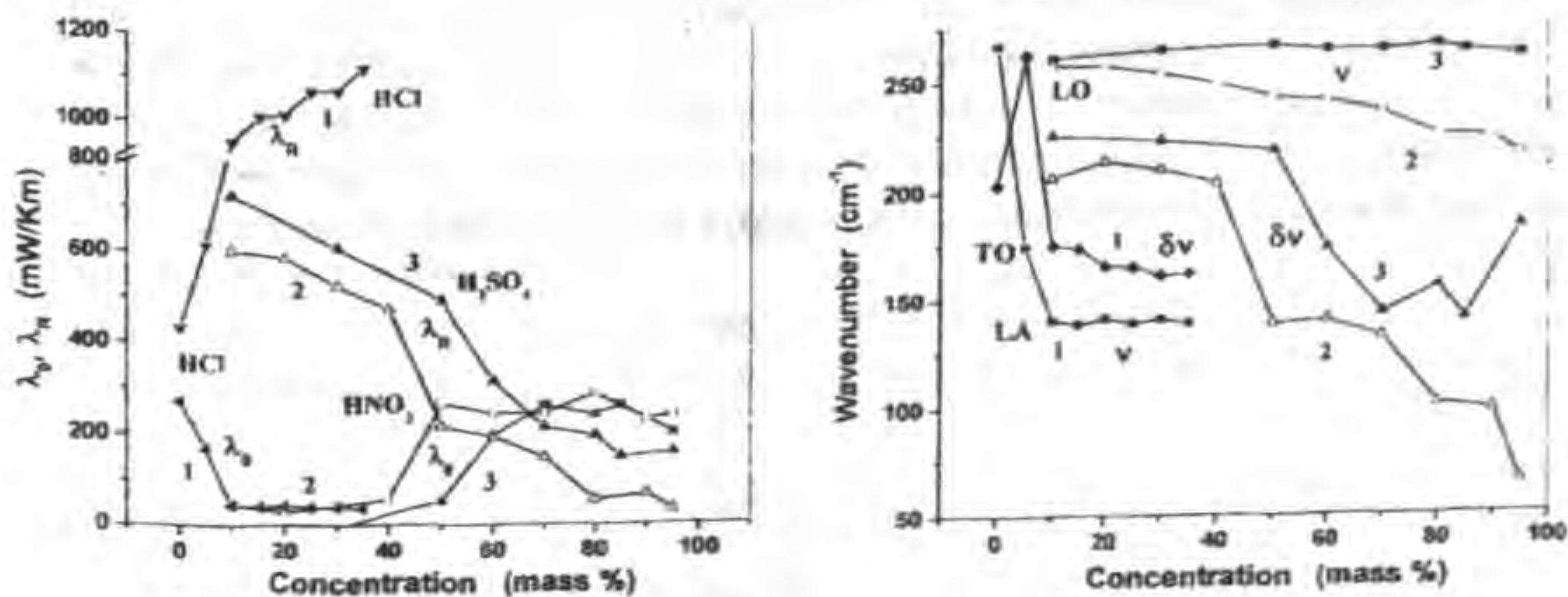


Рис. 4а,б. Залежності λ_R і λ_0 (а), а також резонансних частот і напівширин (v і δv) (б) від концентрації (в % по масі) для водних розчинів HCl (1), HNO_3 (2) і H_2SO_4 (3).

Згідно з даними, показаними на рис.4б, частота LO моди в розчинах сірчаної кислоти майже не залежить від концентрації, а загальна напівширина резонансної смуги $\delta v < v$ і додатково зменшується в області високих концентрацій. Ще більше зменшується напівширина резонансної кривої $\lambda(T)$ для азотної кислоти. У цьому випадку помітно зменшується і

частота колективної LO моди. Погоджече зменшення резонансних внесків λ_R і напівширин $\delta\nu$ у розчинах HNO_3 і H_2SO_4 з ростом концентрації вказує на ослаблення колективних властивостей системи водневих зв'язків.

Найбільш цікаві результати отримані для соляної кислоти. При малих концентраціях HCl частота максимуму теплопровідності швидко зменшується від частоти $\nu_{LO}=270 \text{ cm}^{-1}$ до частоти поперечної оптичної моди $\nu_{TO}=180 \text{ cm}^{-1}$ і далі до частоти $\sim 130 \text{ cm}^{-1}$, що відповідає частоті поздовжньої акустичної моди LA [9-12]. При цьому максимум теплопровідності явно не спостерігається, а обчислюється в результаті аналітичного продовження високотемпературного крила, показаного на рис.1с. Сталість частоти LA моди обумовлена слабкою зміною теплопровідності при концентраціях 10-35%. Розчини HNO_3 по відношенню до зміни ν з концентрацією займають проміжне положення між розчинами H_2SO_4 і HCl . Для розчинів HNO_3 з ростом концентрації частота максимуму теплопровідності плавно зміщується від моди LO до частоти обертопу 2LA (див. рис.4b). Цікаво відзначити, що відповідно до отриманих результатів напівширина смуги акустичної моди LA для HCl приблизно така ж, як і смуги оптичної LO моди при середніх концентраціях H_2SO_4 і HNO_3 . Ідентифікація безпосередніх внесків поздовжньої акустичної моди в теплопровідність розчинів HCl і HNO_3 підтверджує правильність зробленого раніше віднесення величини λ_0 до індивідуальних рухів молекул.

Аналогічні результати були отримані також для водних розчинів лугів, частина з яких показана на рис.5a,b. Для розчинів NaOH і NH_4OH , як і для розчинів азотної і сірчаної кислот, внески λ_R в основному зменшуються, а λ_0 збільшуються з ростом концентрації, що вказує на зменшення внеску колективних коливальних мод у теплопровідність.

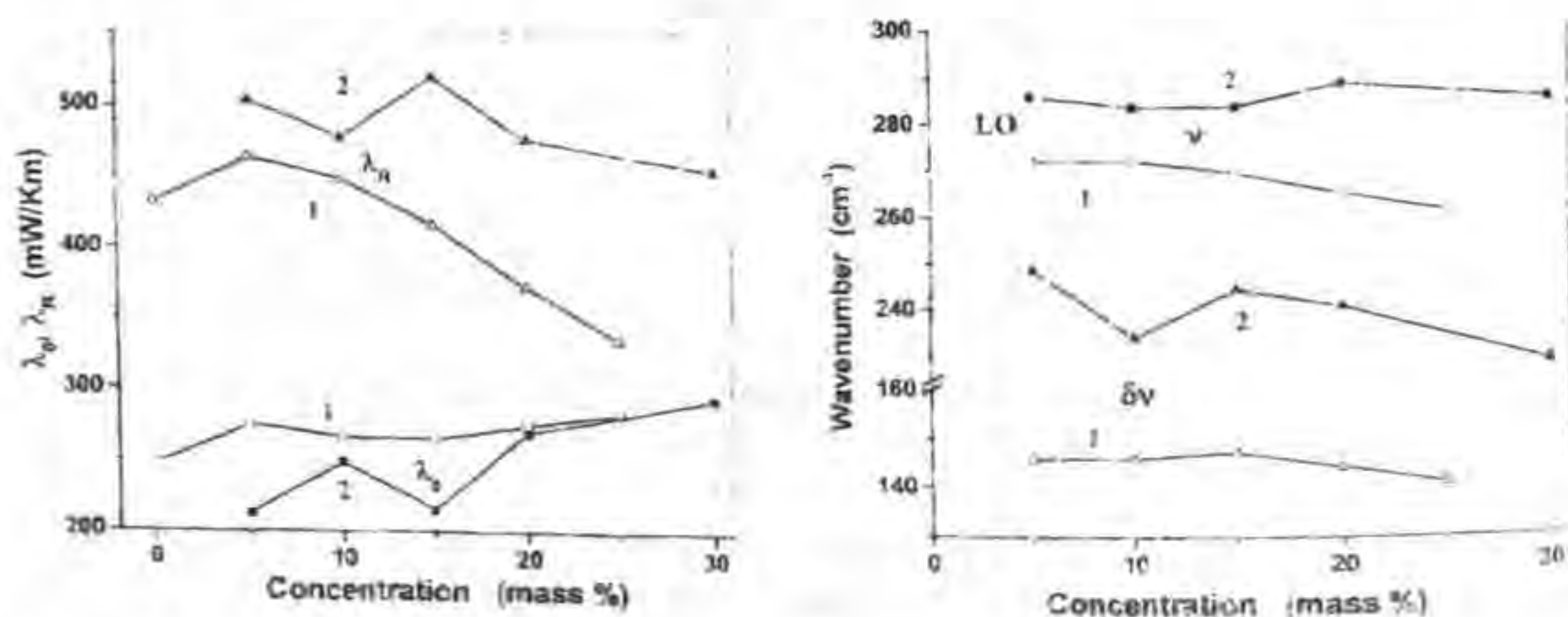


Рис. 5a,b. Залежності внесків λ_R і λ_0 (a), а також резонансних частот і напівширин (ν і $\delta\nu$) (b) від концентрації (в % по масі) для водних розчинів NH_3 (1) і NaOH (2)

Однак в області невеликих концентрацій спостерігається збільшення λ_R і посилення колективних механізмів теплопровідності (рис.5a). У розчині NH_4OH добре видна наявність оптимальної концентрації $\text{NH}_3 \sim 5-10$ ваг.%, при якій резонансний внесок у теплопровідність досягає максимуму. Частоти LO мод для розглянутих лугів слабо залежать від концентрації. Ефективні напівширини коливальних мод для розчинів NaOH є більшими порівняно з розчинами NH_4OH , що може бути пов'язане з внеском інших коливальних мод, тому що при спільній дії іонів NH_4^+ і OH^- колективні властивості коливальних мод повинні підсилюватися.

5. Обговорення результатів і висновки

1. На прикладі води і водних розчинів типових кислот і лугів встановлено існування двох типів процесів, що дають внесок у теплопровідність λ рідкого стану речовини. Резонансний внесок λ_R обумовлений впливом на теплопровідність порівняно високочастотних колективних коливальних мод води. Він забезпечує існування температурного максимуму теплопровідності води і водних розчинів. Нерезонансний внесок λ_0 пов'язаний з індивідуальним рухом молекул і, на відміну від газів, практично не залежить від температури та відповідної частоти. Відсутність далеких крил смуг у експериментальних залежностях $\lambda(T)$ не дозволяє безпосередньо вимірювати співвідношення виявлених внесків. Для чисельного розділення внесків у роботі використовувалось наближення експериментальних даних $\lambda(T)$ функціями гауссової чи лоренцевої форми. Кореляції величин резонансних внесків λ_R у теплопровідність багатьох водних розчинів з підсиленням колективних коливальних мод сітки водневих зв'язків у спектрах комбінаційного розсіяння цих розчинів додатково підтверджують існування колективних механізмів теплопровідності рідин.

2. Роздільне спостереження в водних розчинах кислот максимумів λ , обумовлених поздовжними оптичними модами $\nu_{LO} \sim 270 \text{ см}^{-1}$ і поздовжними акустичними модами $LA \sim 130 \text{ см}^{-1}$ (HCl), а також значне ослаблення постійного внеску λ_0 у розчинах кислот із сильними водневими зв'язками при концентраціях 10-40 мас.% дозволило зв'язати λ_0 із проявом індивідуальних рухів молекул у рідинах. Таким чином, у рідинах виявляються два механізми теплопровідності, пов'язані з зіткненням фононів як у твердих тілах і аналогічного зіткненням молекул у газах. У воді і більшості водних розчинів домінують колективні резонансні механізми теплопровідності. Наприклад, у воді $\lambda_R/\lambda_0 \sim 2-6$, а в розчинах HCl , HNO_3 і H_2SO_4 при концентраціях 10-40% це відношення досягає значень 15-20.

3. Посилення колективного теплопереносу спостерігається у воді з ростом тиску і в розчинах кислот і лугів при малих концентраціях. Для розчинів багатьох речовин в області високих концентрацій спостерігається

ослаблення колективного механізму і посилення індивідуального. У зв'язку з цим існують оптимальні концентрації розчинів і тиску, при яких внески колективних мод у теплопровідність максимальні. Для води в широкій області тисків можливі немонотонні зміни внесків $\lambda_{R,0}$. Для дуже високих концентрацій HNO_3 і H_2SO_4 резонансний внесок сильно послаблюється і домінуючим стає індивідуальний механізм теплопровідності. Підвищення теплопровідності розчинів LiOH , NaOH і NH_4OH в порівнянні з водою обумовлено одночасним посиленням обох внесків $\lambda_{R,0}$.

4. Частоти LO моди у воді плавно зростають з ростом тиску, причому в H_2O швидкість зміни більше ніж у D_2O , що вказує на велику стабільність дейтериевого зв'язку. Для розглянутих водних розчинів частоти резонансних мод слабо змінюються з концентрацією за винятком HCl , де у вузькому інтервалі концентрацій 0-10% відбувається швидке зменшення частоти резонансної моди від LO до LA. При концентрації ~5% значний внесок у теплопровідність HCl дає і поперечна TO мода. У водному розчині HNO_3 з ростом концентрації максимум теплопровідності плавно зменшується від LO моди до обертоу 2LA. Зміна ефективних частот коливальних мод, що дають резонансний внесок у теплопровідність водних розчинів HCl і HNO_3 , може бути пов'язане з різким зменшенням температури замерзання розчинів відповідно в області малих і високих концентрацій [21]. На нашу думку, зміна температури замерзання дуже чутлива до зміни стану розчину [1].

5. У воді і більшості вивчених розчинів ефективні напівширини колективних коливальних мод $\delta\nu$ зростають з ростом резонансних внесків коливальних мод у теплопровідність. Це вказує на те, що з посиленням системи водневих зв'язків внесок у теплопровідність дають усі коливальні стани при довільних величинах хвильових векторів. Для дистильованої води спостерігаються значні відмінності одержуваних результатів при використанні різних експериментальних даних. Ці відмінності істотно перевищують неточності вимірів і розрахунків і можуть вказувати на існування декількох дискретних станів дистильованої води, що раніше відзначалося на основі значних змін форми і інтенсивностей коливальних смуг, а також широкополосного фону в спектрах комбінаційного розсіяння [22].

6. Розвинутий новий науковий напрямок дозволяє вивчати колективні коливальні стани рідин на основі температурних залежностей теплопровідності, тобто не спектральними методами, що доповнює методи оптичної і нейтронної спектроскопії. Нова концепція дозволяє більш повно використовувати багатий експериментальний матеріал, накопичений при багаторічному вивченні явищ переносу, у тому числі в екстремальних умовах. Спостережуваний резонанс індивідуальних і колективних рухів у рідинах, при якому середня енергія теплових коливань частинок kT дорівнює енергії акустичних чи оптичних фононів, представляє істотно

нове явище, що властиве тільки рідинам і не має аналогів у кристалах і газах. Завдяки цьому максимуми теплопровідності водних середовищ і рідких металів існують при високих температурах, на відміну від фононних і електронних максимумів теплопровідності в ковалентних і іонних кристалах а також металах при дуже низьких температурах [23]. В результаті цього при кімнатних і більш високих температурах рідкі середовища функціонально більш багаті порівняно з твердими тілами. Це положення дуже важливе для розвитку сучасної біофізики та медицини, а також для розвитку нових технологій.

Список використаної літератури

1. Корнієнко М.Є., Про колективну природу теплопровідності води і деяких інших рідин// Вісник Київського університету, Серія: фізико-математичні науки.- 2005.-№3.- с.511-519.
2. Корнієнко М.Є., Про зв'язок теплот плавлення кристалів з енергіями оптичних фононів // Вісник Київського університету, Серія: фізико-математичні науки.- 2004.- № 4.- с.466-476.
3. Корнієнко М.Є., Про фонону дискретність теплот кипіння// Вісник Київського університету, Серія: фізико-математичні науки. – 2005. - №3.- с.520-534.
4. Корниенко Н.Е., Малый В.И., Понежа Г.В., Понежа Е.А. Природа частотно-угловой структуры излучения при ВКР в жидкостях// Доклады АН УССР, сер.А-1983.- № 4. - с.65-68.
5. Денисов В.Н., Маврин Б.Н., Подобедов В.Б., Стерин Х.Е. Гиперкомбинационное рассеяние и правила отбора по волновому вектору и матричному элементу в колебательных спектрах стекол и жидкости// ЖЭТФ -1983.- т. 84, вып. 4.- с. 1266-1278.
6. Корниенко Н.Е., Малый В.И., Понежа Г.В., Понежа Е.А. Антистоксово комбинационное рассеяние на поляритах в жидкости, индуцированное ВКР// Оптика и спектроскопия - 1986. - т. 60, № 6.- с. 1171-1174.
7. Корниенко Н.Е., Малый В.И., Понежа Г.В. Генерация возбужденных колебательных состояний при ВКР и поляритонный механизм релаксации в жидкостях// Оптика и спектроскопия -1986.-т.61,№1.- с.174-177.
8. Корнієнко М.Є., Спостереження поздовжньо-поперечного розщеплення в спектрах комбінаційного розсіяння рідкого хлороформу// УФЖ - 2001.-Т.46, № 5- 6. - с.546-552.
9. Kornienko N., Low-frequency collective vibrational modes of water, International Bunsen Discussion Meeting "Metastable Water", Schloss Nordkirchen, Germany, September 22-26, 1999, Abstract, p.42.
10. Kornienko N., Transverse-longitudinal split up of acoustic and optical modes of hydrogen bonds system of water, 15th International Conference on Spectral

- Line Shapes ICSLS XV, Physikalisch-Technische Bundesanstalt, Berlin, 10-14 July 2000, Program and Abstracts, P. 107.
11. Kornienko N.E., Collective vibrational modes of water and new intensive stipes in its vibrational spectra, Proceedings of the XV International School-Seminar "Spectroscopy of Molecules and Crystals", 23-30 June 2001, Chernihiv, Ukraine, p.69.
 12. Корнієнко М.Є., Низькочастотні колективні моди системи водневих зв'язків води.// УФЖ. – 2002.- Т.47, № 4. - с.361-364.
 13. Корнієнко М.Є., Круть О.В., Спостереження ґраткових мод рідкого CS_2 в області сумарних коливальних смуг ІЧ поглинання// Вісник Київського університету, Серія: фізико-математичні науки.- 2005.-№1-с.345-357.
 14. Варгафтик Н.Б., Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей,-М., Наука.- 1972.-720с.
 15. Бретшнайдер С., Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. Пер. с польск. И.- Л., Химия, 1966.-535 с.
 16. Варгафтик Н.Б., Филипов Л.П., Тарзиманов А.А., Тоцкий Е.Е., Справочник по теплопроводности жидкостей и газов,-М., Энергоатомиздат.- 1990.-352 с.
 17. Зайцев И.Д., Асеев Г.Г., Физико-химические свойства бинарных и многокомпонентных растворов неорганических веществ, -М.,-Химия, 1988.- 416 с.
 18. Kornienko N.E., Loutsenko O.V., Change of Frequencies of TO and LO Modes of System of hydrogen Bundles of Water in the sated Solutions of Salts, Proceedings of the XV International School- Seminar "Spectroscopy of Molecules and Crystals", 23-30 June 2001, Chernihiv, Ukraine, p.151.
 19. Bilyi M.U., Kornienko N.E., Loutsenko O.V., Research of strenghtening and easing of a hydrogen Bonds Grid in Water Solutions with molecular Kations and Anions, там же, p.152.
 20. Робинсон Р., Стокс Р., Растворы электролитов, -М., ИЛ, 1963. -647 с.
 21. Киргинцев А.Н., Трушников Л.Н., Лаврентьева В.Г., Растворимость неорганических веществ в воде, Л., Химия, 1972, 248 с.
 22. Корниенко Н.Е., Различные структурные состояния в жидкой воде и кинетика их перестройки, Тезисы докладов I Украинско-польского симпозиума по водородной связи (Одесса, 4-13 октября 1992 г.) Киев, 1992, с. 18.
 23. Киттель Ч., Введение в физику твердого тела, -М., Наука,-1978.-791 с.

Надійшла до редколегії 29.09.2005

УДК 548: 539.32

Анатолій П. Онанко, с.н.с.

**Вказівна поверхня пружно -
непружного тіла сплаву $Al_{0.5}Be_{0.5}$**

Досліджувались температурні залежності внутрішнього тертя та модуля пружності E (вказівна поверхня пружно - neprужного тіла) сплаву $Al_{0.5}Be_{0.5}$. Виявлені максимуми при $T_{m1} \approx 330$ K і $T_{m2} \approx 500$ K, які можливо обумовлені міграцією бівакансій.

Ключові слова: модуль пружності, внутрішнє тертя, структурні дефекти.

E-mail: onanko@mail.univ.kiev.ua

Вступ.

Вивчення мікроскопічних механізмів впливу дефектів кристалічної структури на механічні властивості сплавів дозволяє створювати функціональні матеріали з наперед заданими характеристиками. Міцність сплавів пов'язана з взаємодією дислокацій з точковими дефектами. До точкових дефектів відносяться вакансії, домішкові атоми, міжвузлові атоми, які утворюють комплекси, домішкові атмосфери, включення другої фази.

Anatoliy P. Onanko, Sen. Sci. Res.

**Indicator surface of elasticity -
inelasticity state of $Al_{0.5}Be_{0.5}$ alloy**

Temperature dependencies of internal friction and elasticity modules E (indicator surface of elasticity - inelasticity state) $Al_{0.5}Be_{0.5}$ alloy were explored. The peaks at $T_{m1} \approx 330$ K and $T_{m2} \approx 500$ K are exhibited. These effects can be explained by the migration of the bivacancies.

Key words: elastic module, internal friction, structural defects.

У вікнах виводу електронів використовуються титанові фольги, котрі при виводі значної щільності потоку електронів гріються, при цьому межа міцності σ_m при температурі більше 670 К падає. Сплав $Al_{0.5}Be_{0.5}$ використовується у вікнах виводу електронних прискорювачів.

Експеримент.

Для виміру температурних залежностей ВТ і модуля пружності E сплаву $Al_{0.5}Be_{0.5}$ (локалої) після механічного різання і шліфування використовувалися методики чотирьохскладового п'єзоелектричного вібратора на частоті ~ 117 кГц і згінних резонансних коливань на частоті ~ 3 кГц при знакозмінній деформації $\epsilon \sim 10^{-6}$ у вакуумі не гірше 10^{-3} Па [1]. Погрішність виміру ВТ максимально дорівнювала 4%, а виміру відносної зміни модуля пружності ΔE – не більше 0,1%.

Результати і їх обговорення.

На рис.1 наведено температурну залежність ВТ і модуля пружності E (вказівна поверхня пружно - непружного тіла) сплаву $Al_{0.5}Be_{0.5}$ після механічної обробки у початковому стані і відпалу при ~ 600 К протягом ~ 7200 сек і на рис.2 - після відпалу при ~ 870 К.

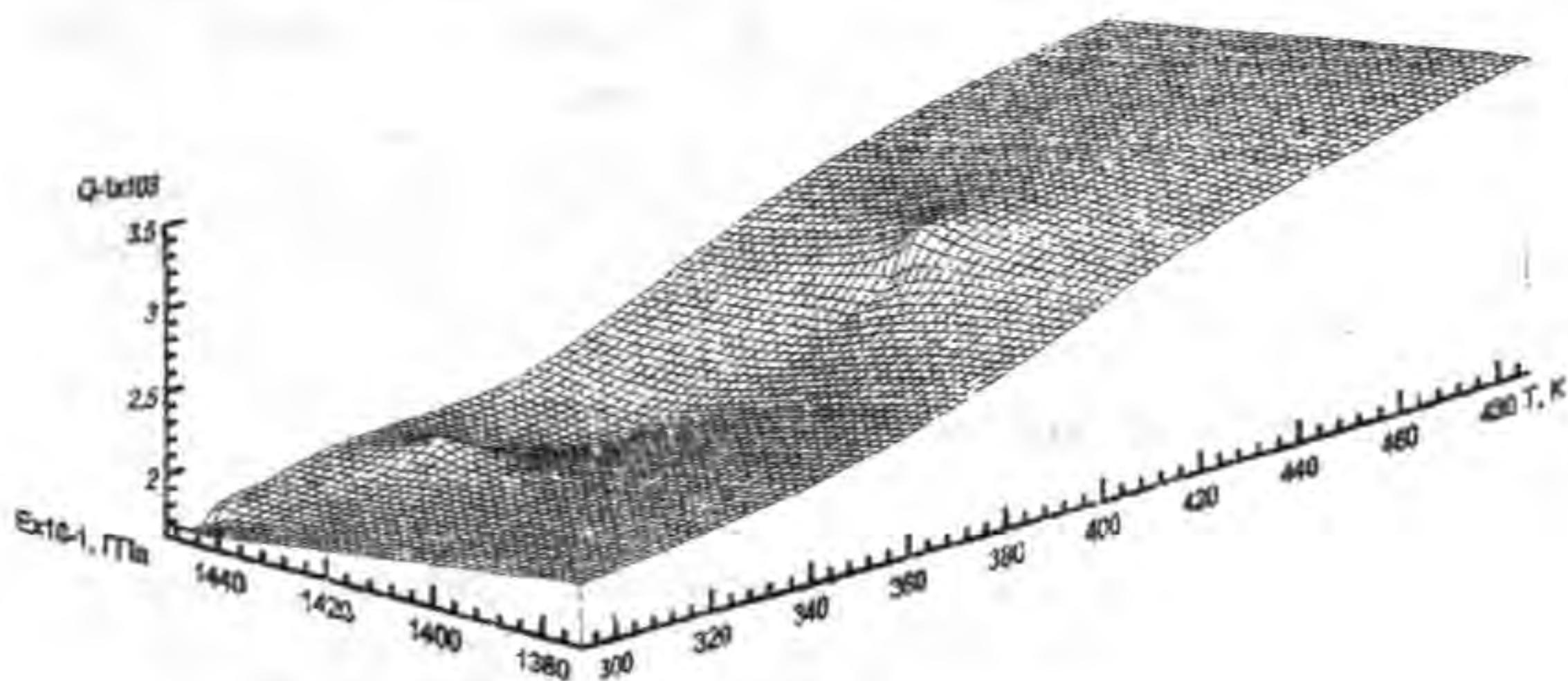


Рис.1. Температурна залежність ВТ і модуля пружності E (вказівна поверхня пружно - непружного тіла) сплаву $Al_{0.5}Be_{0.5}$ після механічної обробки у початковому стані і відпалу при ~ 600 К протягом ~ 7200 сек.

Спостерігалася висока величина фону ВТ $Q_{\phi}^{-1} \sim 4 \cdot 10^{-3}$ і гістерезис на температурній залежності модуля пружності ΔE $Al_{0.5}Be_{0.5}$.

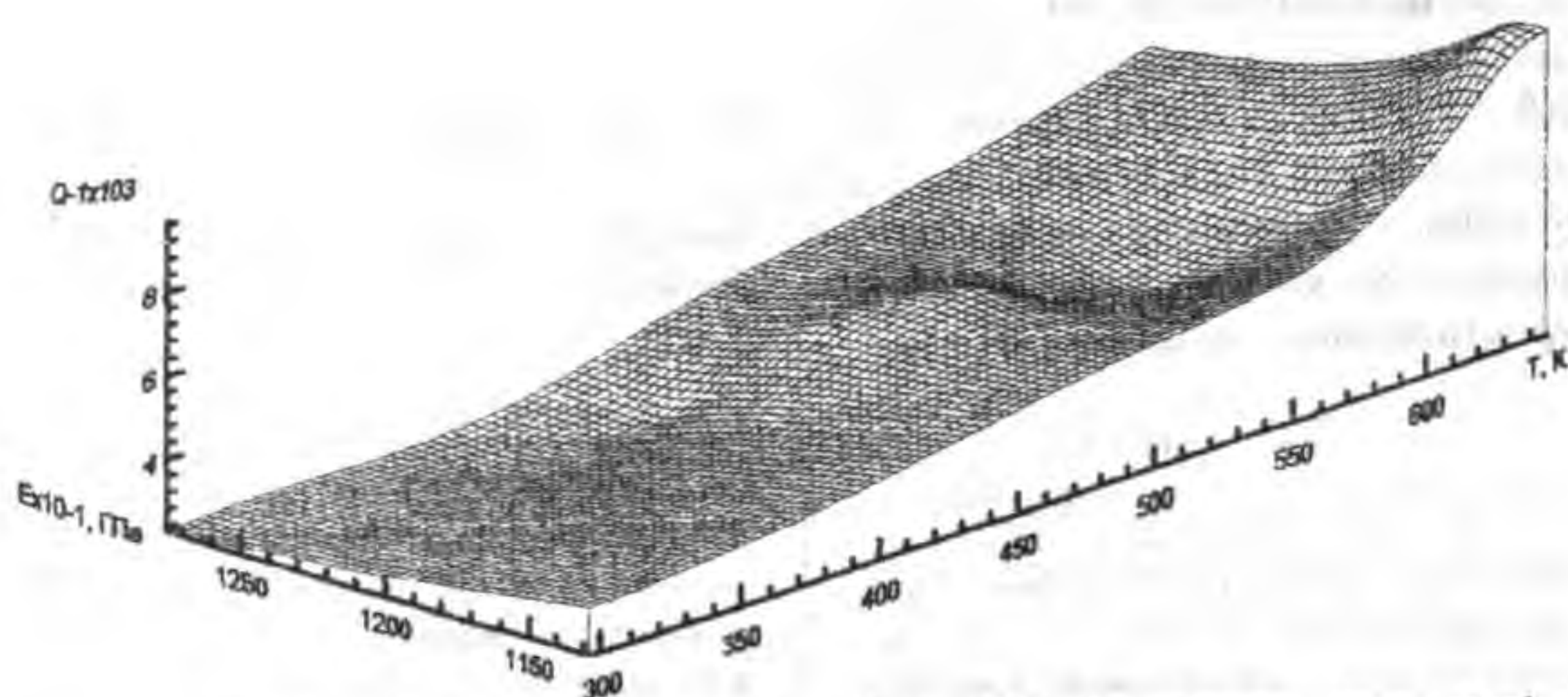


Рис.2. Температурна залежність ВТ і модуля пружності E (вказівна поверхня пружно - непружного тіла) сплаву $Al_{0.5}Be_{0.5}$ після відпалу при ~ 870 К протягом ~ 7200 сек.

Як вбачається з рис.1, для зразка сплаву $Al_{0.5}Be_{0.5}$ після механічної обробки у початковому стані і відпалу при ~ 600 К протягом ~ 7200 сек спостерігався невисокий, широкий, нестійкий максимум при температурі $T_{m1} \approx 330$ К, накладений на монотонно зростаючий фон ВТ Q^{-1} . Зникнення цього максимуму при зворотному проході, мала величина енергії його активації $H_1 = 0,6 \pm 0,1$ еВ та близькість її до енергії активації бівакансій $H_{v-v} \approx 0,65$ еВ [2] дозволяє припустити механізм ВТ, обумовлений міграцією бівакансій. Визначена постійна часу релаксації цього максимуму ВТ $\tau_{01} \sim 9,4 \cdot 10^{-16}$ сек., а також частотного фактора релаксації $f_{01} \sim 1,1 \cdot 10^{15}$ Гц.

Виявлено максимум ВТ у $Al_{0.5}Be_{0.5}$ при температурі $T_{m2} \approx 500$ К з енергією активації $H_2 = 1 \pm 0,1$ еВ, постійної часу релаксації $\tau_{02} \sim 1,1 \cdot 10^{-16}$ сек, частотним фактором релаксації $f_{02} \sim 8,7 \cdot 10^{15}$ Гц.

Релаксація модуля пружності $\Delta E/E$, що спостерігалась у цьому ж температурному інтервалі, свідчила про релаксацийний механізм процесу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Онанко А.П., Подолян А.А., Островский И.В. Влияние ультразвуковой обработки на внутреннее трение в кремнии // Письма в ЖТФ – 2003.- Т. 29, вып. 15.- с.40-44.
2. Новик А., Берри Б. Релаксационные явления в кристаллах.- М.: Атомиздат, 1975.- 472с.

Надійшла до редколегії 31.08.2005р.

УДК 539.192; 539.194

Б.А. Охріменко¹, Д.Ю. Старков²

Колапс радіальної хвильової функції 5f- електрона іона Tl^{+} у кристалічному полі

Розраховано радіальні хвильові функції іона Tl^{+} , введеного в кристалічну решітку KCl. Розрахунок проводився методом Хартрі-Фока-Слетера в полі "замороженого" остову, тобто без самоузгодження з хвильовими функціями внутрішніх електронів. Для врахування впливу поля кристалічної решітки було запропоновано нову модель, у якій окрім електростатичної взаємодії з іонами решітки, враховано також обмінну взаємодію. Обмінна взаємодія врахована за допомогою поправки Слетера. У наближенні даної моделі спостерігається колапс хвильової функції 5f електрона. Отриманий результат говорить на користь зіставлення однієї зі смуг поглинання активаторного іона Tl^{+} з переходом $5d^{10}6s^2 \rightarrow 5d^9 6s^2 5f$.

¹E-mail: baobaba@univ.kiev.ua

²E-mail: starkov@univ.kiev.ua

B.A. Okhrimenko, D. Yu. Starkov.

Collapse of 5f - electron radial wave function of Tl^{+} ion in a crystal field

The radial wave functions of Tl^{+} introduced into KCl lattice are calculated. The calculation was carried out by Hartree-Fock-Slater method in field of the "frozen" skeleton, i.e. without the self-consistency with wave functions of internal electrons. For the accounting of influence of crystal lattice field a new model was offered, in which except for electrostatic interaction with ions of a lattice the exchange interaction is taken into account. The exchange interaction is taken into account with the help of the Slater's amendment. In approach of the given model collapse of 5f-electron wave function is observed. The received result speaks for the benefit of comparison of one of band of absorption of ion Tl^{+} ion activator with transition $5d^{10}6s^2 \rightarrow 5d^9 6s^2 5f$.

У роботі [1] встановлено параметри компонентів прихованої структури спектрів поглинання і люмінесценції «координаційно-насиченого» комплексу талію, що утворюється у водьому розчині $LiCl-Tl^{+}$. У спектрі поглинання, як і в спектрі люмінесценції, виділено три компоненти, що перекриваються. Результати аналізу спектрів збудження і кінетики згасання виділених компонентів люмінесценції підтвердили висловлене раніше припущення [2], відповідно до якого окремі збуджені електронні стани центра люмінесценції генетично зв'язані з електронною конфігурацією $5d^9 6s^2 5f$ вільного іона талію. Вибір даної електронної конфігурації обумовлений, відповідно до припущення, можливістю колапсу f-електрона [3-5] у результаті впливу найближчого оточення на електронну оболонку іона талію.

Таке припущення узгоджується з результатами експериментальних досліджень спектрів поглинання і люмінесценції розчинів електролітів, що містять як активатор інші ртутеподібні іони [6-10].

Початок теоретичним дослідженням подібних центрів люмінесценції поклала відома робота Ф. Вільямса, присвячений кристалофосфору KCl-Tl^+ , спектральні характеристики якого дуже близькі до характеристик водного розчину LiCl-Tl^+ . У роботі Ф. Вільямса при обчисленнях використано хвильові функції $6s^2$ і $6s6p$ станів вільного іона талію. Подібний підхід реалізований і в більш пізніх роботах [11].

Використання хвильових функцій вільного іона в теоретичних оцінках характеристик центра люмінесценції засновано на припущенні про малий вплив оточення іона-активатора на його хвильові функції. Безпосередні обчислення радіальних хвильових функцій іона $\text{Tl}^+ (5d^{10}6s^2)$, введеного в кристали KCl , KBr і KI , підтвердили це припущення [12].

Незважаючи на те, що введення іона Tl^+ у кристал KCl супроводжується незначною зміною радіальних хвильових функцій d - і s -електронів [12], вплив оточення на радіальну хвильову функцію f -електрона може виявитися значним. Обумовлено це можливістю прояву колапсу радіальної хвильової функції f -електрона.

У даній роботі виконано розрахунки радіальної хвильової функції іона Tl^+ для електронної конфігурації $5d^9 6s^2 5f$ з урахуванням впливу поля кристалічної решітки кристалу KCl . У методику врахування впливу поля кристалічної решітки у порівнянні з роботою [12] внесено значні зміни.

Хвильова функція $5f$ – електрона іона Tl^+ з електронною конфігурацією $5d^9 6s^2 5f$ розраховувалася методом Хартрі-Фока-Слетера (ХФС) у полі “замороженого” остову інших електронів. Для цього розв'язувалася система диференціальних рівнянь, що в атомній системі одиниць має вид

$$Z^2 = P^2, \quad (1)$$

$$W' = (\varepsilon + l(l+1)r^2 + 2(U_{ef} + U_{av}))P, \quad (2)$$

$$P' = W, \quad (3)$$

де Z – ефективний заряд електронної оболонки для напруженості, P – радіальна хвильова функція $5f$ – електрона, ε – подвійне власне значення енергії, l – орбітальне квантове число (для f – електрона $l=3$), U_{ef} – ефективний потенціал, створений ядром і іншими електронами іона Tl^+ , розрахований за даними роботи [13], U_{av} – усереднений по сфері потенціал решітки $U_{Lat}(x,y,z)$. Функції, що входять у систему рівнянь (1-3), задовольняють наступним граничним умовам: $Z(0)=0$, $Z(\infty)=1$, $P(0)=P(\infty)=0$. Радіальна хвильова функція f – електрона в межах $0 < r < \infty$ повинна мати один вузол. Інтегрування системи (1-3) велося від великих значень r (~ 30).

Розглянемо більш докладно потенціали U_{ef} і U_{av} , присутні у рівнянні (2).

Як вже було зауважено вище, введення іона талію в кристалічну решітку супроводжується незначною зміною радіальних хвильових функцій d - і s -електронів. Цими змінами також можна зневажати при переході до різних конфігурацій зовнішньої електронної оболонки збудженого іона талію [12, 14, 17]. Слабка залежність радіальних хвильових функцій d - і s -електронів від конфігурації зовнішньої електронної оболонки та оточення іона дозволяє спростити обчислення. На відміну від роботи [14] розрахунок хвильової функції f -електрона проводився у полі “заморожених” d - і s -електронів зовнішньої електронної оболонки та електронів остову. У такому випадку потенціал U_{ef} можна знайти по формулі

$$U_{ef} = \int_0^{\infty} ((\int_0^r \sum_i P_i^2(r) dr) / r^2) dr - Z_{Ti} / r - (81 \sum_i P_i^2(r) / 32\pi^2 r^2)^{1/3}, \quad (4)$$

де перший доданок враховує електростатичне поле “заморожених” внутрішніх електронів, другий доданок описує поле, створений ядром іона, а третій – проста апроксимація Слетера, що враховує обмінну взаємодію f -електрона з внутрішніми електронами іона талію; $P_i(r)$ – радіальні хвильові функції внутрішніх електронів, узяті з роботи [13], r – відстань від центра іона, Z_{Ti} – заряд ядра іона талію ($Z_{Ti}=81$).

Для порівняльної оцінки результатів, отриманих методом самоузгодженого поля і методом поля “замороженого” електронного остову, були проведені розрахунки радіальної хвильової функції $5f$ -електрона вільного одновалентного іона талію в полі “заморожених” інших електронів іона. При порівнянні результатів проведеного розрахунку з результатами роботи [14], де були розраховані хвильові функції $5d$ -, $6s$ - і $5f$ -електронів методом самоузгодженого поля, виявилось, що радіальні хвильові функції $5f$ -електрона, розраховані за допомогою обох методів, практично збігаються, що говорить про обґрунтованість застосування наближення поля “замороженого” електронного остову.

Врахування у формулі (2) тільки потенціалу U_{ef} відповідає вільному іону. Щоб робити розрахунки для іона, введеного в кристалічну решітку, необхідно ввести додатковий потенціал U_{av} , який би враховував усереднене по сфері поле кристалічної решітки.

У роботі [12] була запропонована модель врахування поля решітки U_{av} , названа моделлю решітки заряджених сфер (РЗС). У цій моделі іони решітки моделювалися зарядженими сферами, заряд і радіус кожної з яких дорівнює заряду і радіусу відповідного іона, а розташування в просторі відповідало структурі решітки. Потенціал усередині кожної i -ї тієї сфери (без врахування потенціалу, створеного всіма іншими іонами решітки)

вважався постійним і рівним потенціалу на її поверхні $\pm 1/r_i$, де r_i – радіус i -го іона, а знак потенціалу залежить від знака заряду іона. Середнє значення потенціалу по об'єму решітки, при нехтуванні “порожніми” областями між зарядженими сферами, $U_{sr} = (r_k^2 - r_a^2)/(r_k^3 + r_a^3)$, де r_k і r_a радіуси катіона (K^+) і аніона (Cl^-) відповідно. Після усереднення по сфері і врахуванні тільки першої гармоніки розглянутого потенціалу, що позначимо як $U_s(r)$, для нього отримано [12] вираження

$$U_s(r) = U_{s0} \text{sinc}(\pi \sqrt{3} r/d) + U_{sr},$$

де $U_{s0} = (r_a^{-1} + r_k^{-1})/2$ – амплітуда змінної складової потенціалу $U_s(r)$, $d = r_a + r_k$ – півперіод решітки (для решітки KCl $d = 5.9337$ а.е.д.).

Крім потенціалу $U_s(r)$ необхідно також врахувати потенціал $U_m(r)$, створений у вузлах решітки всіма іонами, крім найближчого. Після аналогічної процедури врахування тільки першої гармоніки і операції усереднення по сфері отримана формула [12]

$$U_m(r) = U_{m0} \text{sinc}(\pi \sqrt{3} r/d),$$

де U_{m0} – потенціал Маделунга (для решітки KCl $U_{m0} = 0.2945$ а.е.е.)

Ефективний потенціал $U_{av}(r)$ кристалічних решітки у моделі РЗС дорівнює сумі потенціалів $U_s(r)$ і $U_m(r)$.

Незважаючи на те, що модель РЗС [12] більш точно, чим попередні моделі описує поле решітки (у ній враховані кінцеві розміри іонів і періодичність решітки), у цієї моделі також є суттєві недоліки. По-перше, потенціал усередині кожної сфери вважався постійним, що відповідає концентрації всього заряду іона на його поверхні. Це, природно, не узгоджується з реальним розподілом електронної густини. По-друге, при усередненні потенціалу по об'єму решітки знехтували “порожніми” областями між сферами, що є практично половиною об'єму решітки. У третіх, не враховувалася обмінна взаємодія електронів іона активатора з електронами іонів решітки, необхідність врахування якого обговорювалася в роботі [14]. Також до недоліків моделі можна віднести врахування тільки першої гармоніки, у той час як гармоніки більш високого порядку також можуть давати значний внесок у потенціал решітки.

Перераховані недоліки моделі РЗС указують на необхідність створення більш точної моделі поля решітки, яка й запропонована в даній роботі.

У запропонованій моделі простір решітки розбивається на рівні кубічні комірки. Розмір ребра кожної з цих комірок дорівнює відстані між ядрами найближчих іонів d . Комірки розташовані в просторі так, що центр кожного Комірки припадає на ядро відповідного іона. У запропонованій процедурі оцінки потенціалу на першому етапі потрібно

знайти розподіл потенціалу в кожній комірці, а потім усереднити його по сфері, у центрі якої знаходиться іон активатора.

Потенціал усередині кожної комірки можна представити у виді суми трьох доданків. Перший відповідає за потенціал U_m , створений всіма іонами решітки, за винятком іона, що знаходиться усередині даної комірки. Другий доданок відповідає потенціалу U_s , створюваному усередині комірки іоном, що знаходиться в даній комірці. Третій доданок обумовлений обмінною взаємодією f - електрона іона активатора з електронною оболонкою іонів решітки.

Розглянемо докладніше кожне з цих доданків.

Табл. 1.

Параметри функцій (8) і значення усередненого по комірці потенціалу іона U^f .

Ион	a	b	c	U^f (а.е.з.)
K ⁺	1.22946	1655.18114	22.60685	+0.6215 (U^f_k)
Cl ⁻	0.9	1511.35152	16.56126	-0.0389 (U^f_a)

Потенціал, створений у центрі комірки всіма іншими іонами решітки, - величина відома - це потенціал Маделунга, узятий з відповідним знаком для катіона й аніона. Необхідно розглянути поведінку потенціалу створеного всіма іонами решітки, за винятком найближчого, у різних точках відповідної комірки (далі його будемо також називати потенціалом Маделунга). Для цього необхідно розглянути суми, подібні тим, за допомогою яких розраховуються постійні Маделунга. Однак у даному випадку для розрахунку береться не центр кубічної комірки, а точка, що знаходиться на деякій відстані від нього.

Уведемо позначення

$$n_x = \text{round}(x/d), n_y = \text{round}(y/d), n_z = \text{round}(z/d), n = n_x + n_y + n_z, \quad (5)$$

де число n_x позначає номер комірки, у яку потрапить точка $(x,0,0)$ рахуючи від комірки, яку займає іон активатора, який присвоїмо нульовий номер. Аналогічний зміст мають числа n_y і n_z . Функція $\text{round}(x/d)$ округляє число x/d до його найближчого цілочисельного значення. Осі координат спрямовані уздовж кристалографічних осей 4 -го порядку, початок координат - у центрі комірки, зайнятої іоном активатора.

Розглянемо поводження потенціалу, створеного всіма іонами решітки, крім того, що знаходяться в центрі кубічної комірки.

Положення кожного іона решітки можна описати вектором $\mathbf{a}_{k,l,m}^T = [dk, dl, dm]$, де k, l, m - цілі числа.

Нехай маємо деяку точку $\mathbf{r}^T = [x', y', z']$ у межах розглянутої комірки

Відстань між іоном (k, l, m) і точкою з координатами (x', y', z')

визначається вектором $b_{k,l,m} = a_{k,l,m} - r'$. Потенціал $U_{k,l,m}(r')$, створений іоном (k,l,m) , з урахуванням його знака, у точці r' виражається за допомогою формули

$$U_{k,l,m}(x,y,z) = (-1)^{k+l+m} / |b_{k,l,m}(r')|.$$

Потенціал $U_M(x,y,z)$, створений $N = (2q)^3 - 1$ іонами, що знаходяться в кубі з ребром $2qd$, обчислюється за допомогою суми

$$U_M(r') = \sum_{k=-q}^q \sum_{l=-q}^q \sum_{m=-q}^q U_{k,l,m}(x,y,z). \quad (6)$$

При підсумовуванні в (6) виключається точка $k=l=m=0$.

Розрахунки для різного числа N врахованих іонів решітки показали, що в границях кубічної комірки потенціал, створений всіма іонами решітки крім найближчого, можна вважати практично постійним. Зміна кількості врахованих іонів змінює тільки абсолютне значення потенціалу в межах комірки. При врахування всіх іонів решітки це значення повинно дорівнювати потенціалу Маделунга для даного типу решітки. Це дає можливість говорити, що потенціал Маделунга $U_m(x,y,z)$ у точках простору, заповненого решіткою, можна представити у вигляді ступінчатої функції

$$U_m(x,y,z) = U_{m0} \cdot (-1)^n + St/r, \quad (7)$$

де $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ - відстань від центра іона активатора, n - залежить від x, y, z (5).

Функція $St = \exp(-\ln 2 \exp(-2(r-r_{ion})))$, де r_{ion} - радіус іона талію [12], приймає значення 1 за межами іона активатора і 0 усередині нього. Вона введена у формулу (7) з наступних міркувань. Потенціал Маделунга містить у собі потенціали всіх іонів решітки, у тому числі і потенціал іона активатора $-1/\epsilon$. Однак цей потенціал входить також в ефективний потенціал U_{ef} активаторного іона. Щоб не враховувати його два рази за межами комірки, що займає іон талію, він виключається з потенціалу Маделунга за допомогою доданку St/r .

Згідно (7) потенціал, створений у межах кожної комірки всіма іонами решітки крім того, що у цієї комірки знаходиться, постійний і дорівнює потенціалу Маделунга. Знак вибирається в залежності від заряду іона, що знаходиться в комірни. На відміну від моделі РЗС, у формулі (7) враховані всі гармоніки потенціалу $U_m(x,y,z)$.

Друга складова ефективного потенціалу - потенціал, створений іоном, що у цій комірни знаходиться. Для його обчислення необхідно знати розподіл електронної густини відповідного іона.

Розподіл електронної густини катіона K^+ і аніона Cl^- були обчислені за даними робіт [15] і [16], відповідно. Розраховані розподіли електронної густини аніона і катіона задані в чисельному виді. Для полегшення розрахунків ці розподіли електронної густини були апроксимовані функцією виду

$$\rho_i(r) = c_i(1 - \exp(-b_i r^2)) \exp(-a_i r), \quad (8)$$

де індекс i – відповідає чи аніону катіону.

Вид функції $\rho_i(r)$ був обраний з тих розумінь, що радіальна електронна щільність повинна прямує до нуля як r^2 , а на нескінченності поводитися як експонента. Функції $\rho_i(r)$ повинні задовольняти умові нормування

$$\int_0^\infty \rho_i(r) dr = N_i,$$

де N_i – кількість електронів відповідного іона. Знайдені параметри c_i , b_i і a_i приведені в таблиці.

Знаючи розподіл густини електронної оболонки кожного іона, можна обчислити створений нею ефективний потенціал $U^e(r)$ по формулі

$$U^e_i(r) = \int_r^\infty \left(\left(\int_0^r \rho_i(r) dr \right) / r^2 \right) dr,$$

де індекс i – відповідає чи аніону катіону.

Щоб розрахувати повний ефективний потенціал, що створює відповідний іон, необхідно також врахувати потенціал ядра $U^n_i(r)$:

$$U^n_i(r) = Z_i / r, \quad (9)$$

де Z_i – заряд ядра відповідного іона.

У такому випадку повний ефективний потенціал $U^s_i(r)$, створений іоном в комірці, яку він займає, буде дорівнювати

$$U^s_i(r) = U^n_i(r) + U^e_i(r). \quad (10)$$

Надалі робота з розрахованим у чисельному виді потенціалом $U^s_i(r)$ буде викликати великі труднощі, тому що має бути проведено усереднення потенціалу всієї решітки по сфері. Для того, щоб обійти цю проблему, знайдемо середнє значення U^s_i потенціалу, створеного відповідним іоном, по об'єму комірки, у якій він знаходиться. Це середнє значення можна знайти, проінтегрувавши по об'єму всієї комірки потенціал $U^s_i(r)$ і поділивши отримане значення на сам об'єм комірки.

$$U^s_i = \int_{-d/2}^{d/2} \int_{-d/2}^{d/2} \int_{-d/2}^{d/2} U^s_i(x,y,z) dr/d^3$$

Необхідно зауважити, що при інтегруванні виключалася особлива точка $r=0$ в області до 10^{-6} а.е.д.

Так само необхідно знайти середнє значення U^{sk} потенціалу $U^s_i(r)$ по всій решітці. Так як у використуваному наближенні об'єми комірок, займаних аніоном і катіоном однакові, то

$$U^{sk} = (U^s_a + U^s_k)/2.$$

Для решітки KCl були розраховані середні значення потенціалу по об'єму всієї решітки і по об'ємах комірок, які займають аніон і катіон (таблиця 1).

Отриманий результат розподілу потенціалу по об'єму всієї решітки подібний картині розподілу потенціалу Маделунга – потенціал по об'єму кожної комірки постійний і дорівнює U^s_a для комірки, яку займає аніон, і U^s_k для комірки, яку займає катіон. Аналогічно формулі для потенціалу Маделунга, можна записати в такому випадку вираження для розподілу потенціалу U_s по об'єму всієї решітки:

$$U_s(x,y,z) = ((U^s_a - U^s_k)/2) \cdot (-1)^n - U^{sk}. \quad (11)$$

Часто при розрахунках хвильових функцій замість досить складного методу Хартрі-Фока (ХФ) використовується більш простий метод ХФС, що дає результати близькі до результатів отриманим методом ХФ. У цьому випадку нелокальний обмінний член $U^{ob}(r_1, r_2)$ у рівняннях ХФ замінюється локальним потенціалом $U_L(r)$ [18]:

$$U_L(r) = 3(3\rho'(r)/\pi)^{1/3}/2, \quad (12)$$

де $\rho'(r)$ – електронна густина (без врахування електрона, хвильова функція якого розраховується):

$$\rho'(r) = \sum_j \varphi_j^*(r) \cdot \varphi_j(r).$$

У цьому випадку система рівнянь Хартрі-Фока переходить у більш просту систему рівнянь подібну до системи рівнянь Хартрі з додатковим членом до потенціалу у виді (12) з негативним знаком.

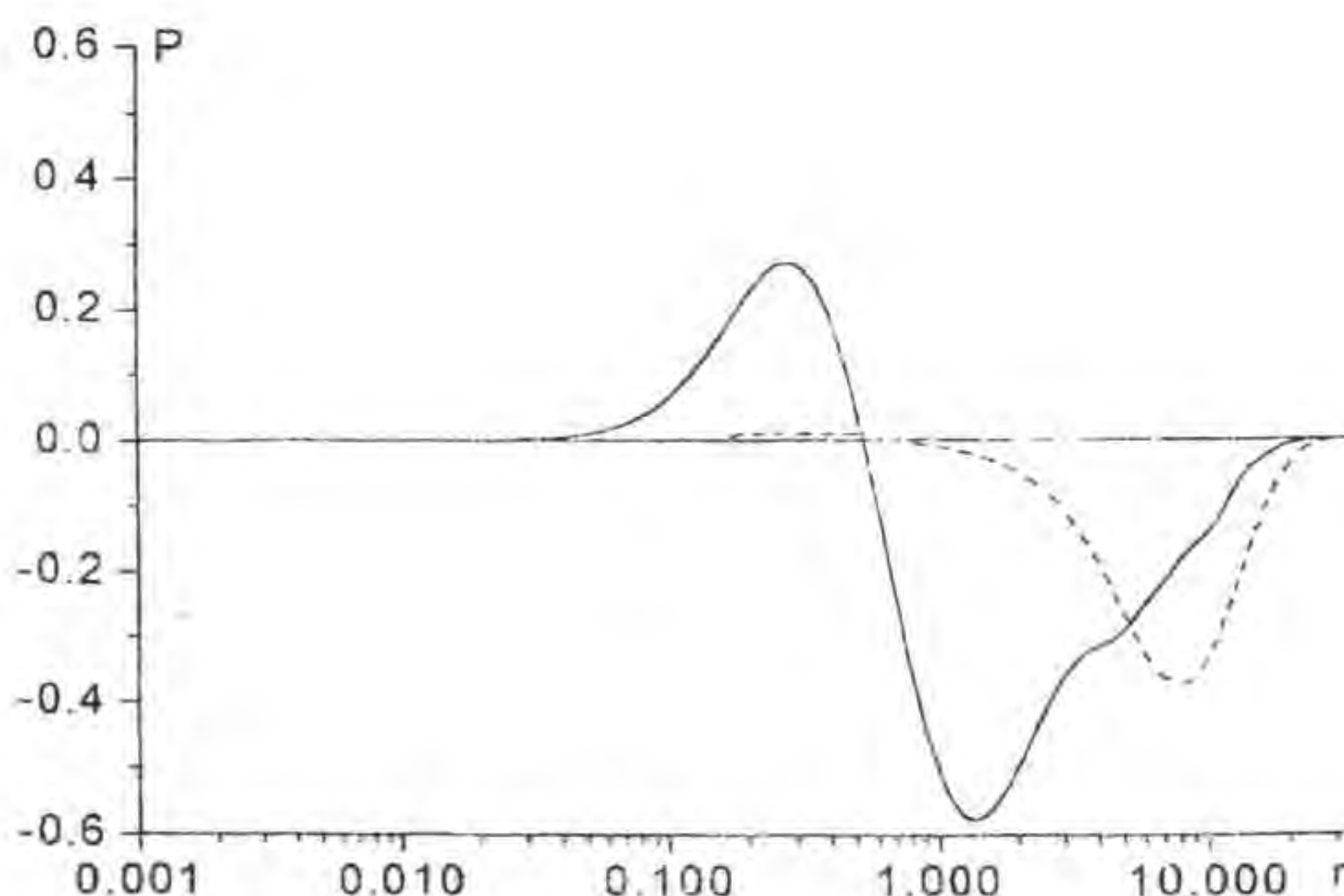


Рис.1 Радіальна хвильова функція $5f$ – електрона вільного (пунктир) і в решітці KCl (суцільна лінія) одновалентного іона талію з конфігурацією зовнішньої електронної оболонки $5d^9 6s^2 5f$.

У даній роботі будемо виходити з припущення, що (12) можна застосовувати не тільки до електронів іона Ti^{3+} , але і до електронів іонів решітки.

Знаючи розподіл радіальної електронної густини $\rho_i(r)$ катіона й аніона можна знайти розподіл електронної густини по об'єму всієї решітки. Для цього потрібно врахувати, що радіальний розподіл електронної густини іона решітки $\rho_i(r')$ і нерадіальної $\rho'_i(r')$ співвідносяться як

$$\rho(r') = 4\pi r'^2 \rho'(r'),$$

де r' який відраховується від центра іона (n_x, n_y, n_z) , що розглядається, зв'язаний із системою координат (x, y, z) , центр якої знаходиться в центрі іона активатора, через співвідношення

$$r'^2 = (x - n_x d)^2 + (y - n_y d)^2 + (z - n_z d)^2$$

Враховуючи (4), (9), (10) запишемо вираз для розподілу електронної густини по об'єму всієї решітки:

$$\begin{aligned} \rho(x, y, z) &= ((1 - (-1)^n) \cdot \rho_d(x, y, z) + (1 + (-1)^n) \cdot \rho_k(x, y, z)) / 2, \\ \rho_i(x, y, z) &= \rho_{i0} \exp(-a_i r') (1 - \exp(-b_i r'^2)) \end{aligned}$$

Повний ефективний потенціал решітки $U_{Lat}(x,y,z)$ дорівнює сумі знайдених по формулах (7), (11), і (12) потенціалів:

$$U_{Lat}(x,y,z) = U_m(x,y,z) + U_s(x,y,z) + U_p(x,y,z).$$

Для того, що б розраховувати радіальні хвильові функції іона Tl^+ у наближенні сферичного потенціалу, необхідно зробити усереднення по сфері потенціалу $U_{Lat}(x,y,z)$:

$$U_{av}(r) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} U_{Lat}(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) \sin \theta d\theta d\varphi / 4\pi.$$

Розрахований таким способом потенціал решітки позбавлено недоліків, які присутні у потенціалі, розрахованому за допомогою моделі РЗС [12]. Так у запропонованому методі враховуються усі гармоніки змінної складової потенціалу, не виключаються з розгляду "порожні" області між іонами, враховується обмінна взаємодія електронів іона Tl^+ і іонів решітки.

На рис.1 приведена розрахована радіальна хвильова функція $5f$ – електрона іона Tl^+ у збудженому стані з конфігурацією зовнішньої електронної оболонки $5d^9 6s^2 5f$, що знаходиться в поле решітки KCl. На цьому ж малюнку, для порівняння, приведена радіальна хвильова функція $5f$ – електрона вільного іона талію, узятя з роботи [14].

Як можна побачити з рис.1, у решітці KCl спостерігається колапс орбіти $5f$ – електрона (головний максимум радіальної хвильової функції зміщаються від 9 а.е.д. для вільного іона до 1,5 а.е.д для іона в решітці KCl), що говорить на користь зіставлення однієї зі смуг спектрів поглинання і люмінесценції з переходом d - електрона в f -стан.

Література

1. Белый М.У., Биндюкевич В.Н., Колесник А.С., Охрименко Б.А., Ящук В.П. // ЖТІС. 2000. Т. 67. № 1. С. 74-77.
2. Белый М.У., Зеленский С.Е., Охрименко Б.А., Яблочков С.М. // Изв. АН СССР, сер. физ. 1985. Т. 49. № 10. С. 2010-2014.
3. Robin M.B. // Chem. Phys. Lett. 1985. V. 119. P. 33-37.
4. Каразия Р.И. // УФН. 1981. Т. 135 С. 79-115.
5. Connerade J.P. The physics of non-Rydberg state. Elsevier Science Publishers, 1984. P. 643-693.
6. Білий М.У., Охріменко Б.А. // Укр. фіз. журн. 1961. Т. 6. С. 730-735.
7. Белый М.У., Охрименко Б.А. // Укр. фіз. журн. 1964. Т. 9. № 10. С. 1068-1073.

8. Белый М.У., Охрименко Б.А. // Опт. и спектр. 1968. Т. 25. № 2. С. 262-265.
9. Белый М.У., Охрименко Б.А. // Опт. и спектр. 1969. Т. 26. № 6. С. 977-980.
10. Heal H.G., May J. // J. Amer. Chem. Soc. 1958. V. 80, № 10. P. 2374-2377.
11. Кристофель Н.Н. Теория примесных центров малых радиусов в ионных кристаллах. М.: Наука, 1974. 336 с.
12. Белый М.У., Охрименко Б.А. // Известия вузов. сер. физика. 1995. Т. 38. № 2. С. 42-47.
13. Douglas A.S., Hartree D.R., Runciman W.A. // Proc. Cambr. Soc. 1955. V. 51. № 4. P. 486-503.
14. Охрименко Б.А., Старков Д.Ю. // Вісник Київ. Унів. Сер. фіз.-мат. науки. 2003. № 1. С. 388-394.
15. Froese Fischer C. // Atomic Data. 1972. V. 4. № 4. P. 319.
16. Hartree D.R., Hsrtree W. // Proc. Roy. Soc. 1936, № 156A, P 59.
17. Охрименко Б.А. Радіальні хвильові іона Tl^+ ($5d^9 6s^2 6p$). // Вісник Київського Унів. Сер. Фіз. 1971. № 12. С. 20-25.
18. Бете Г. Квантовая механика. М.: Мир, 1965. 328 с.

Надійшла до редакції 21.10.2005.

УДК 535.21.9 + 535.341.08

Поперенко Л.В., Лоза Є.А.

ПРО МОЖЛИВІСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ ПЛАЗМОВОЇ ЧАСТОТИ АМОРФНИХ СПЛАВІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ПЕРЕТВОРЕННЯ КРАМЕРСА-КРОНІГА

В роботі проаналізовано можливість визначення оптичних параметрів аморфних сплавів за допомогою методу, заснованого на Крамерс-Кроніг аналізі. Для цього розглянуто можливу точність визначення величини фази за межами експериментального діапазону. Введено узагальнену екстраполяцію для збільшення точності розрахунків. Результати роботи було використані для аналізу двох зразків аморфних сплавів.

Ключові слова: перетворення Крамерса-Кроніга, екстраполяція відбивання, плазмова частота, аморфні сплави.

E-mail: LozaE@ukr.net

Poperenko L.V., Loza E.A.

THE POSSIBILITY OF DETERMINATION OF PLASMA FREQUENCY OF AMORPHOUS ALLOYS BY KRAMERS-KRONIG TRANSFORM METHOD

The present paper considers possibility of determination of optical parameters of amorphous alloys with the aid of Kramers-Kronig analysis. The possible accuracy of determination of phase value is considered. The generalized extrapolation is introduced to increase the calculation accuracy. The results are used to analyze two amorphous alloy specimens.

Keywords: Kramers-Kronig transform, reflectivity extrapolation, plasma frequency, amorphous alloys.

Вступ

Крамерс-Кроніг аналіз є дешевою методикою для визначення оптичних параметрів зразків. Недоліком цього методу є низька точність визначення кінцевих величин [1]. Додаткову незручність вносить потреба введення екстраполяцій за межами експериментального діапазону. З іншого боку, вдале введення екстраполяції пропонує привабливу можливість для визначення оптичних параметрів зразка в області, де немає наявних експериментальних даних. В даній роботі розглядається питання – чи можливе взагалі визначення оптичних параметрів зразка за межами експериментального діапазону в умовах низької точності методики та роботи з екстрапольованими даними.

Перетворення Крамерса-Кроніга від спектра відбивання $R(w)$ може бути записане в наступному вигляді [2]:

$$\theta(w_0) = -\frac{w_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln[R(w)/R(w_0)]}{w^2 - w_0^2} dw, \quad (1)$$

де w та w_0 – величини пропорційні частоті, $\pi = 3.14...$ Інтеграл (1) береться у розумінні головного значення Коші. Тоді значення оптичних сталих n та k (показника

заломлення та показника поглинання, відповідно) будуть визначатися наступним чином [1, 2]:

$$n(w) = \frac{1 - R(w)}{1 + R(w) - 2\sqrt{R(w) \cos \theta(w)}}; \quad (2)$$

$$k(w) = \sqrt{\frac{R(w) \cdot (1 - n(w))^2 - (n(w) - i)^2}{1 - R(w)}}. \quad (3)$$

Для опису ширини спектрального інтервалу введемо величину $Sw = |\lg(w_{\max}/w_{\min})|$, де $w_{\max}$ та $w_{\min}$ – відповідно верхня та нижня межа експериментального спектрального інтервалу, виражена в одиницях, пропорційних частоті.

Похибки у значення (1) вносяться експериментальними похибками величини R . Якщо подати R у вигляді $R(w) = R_m(w) + \delta R(w)$, де $R_m(w)$ – значення коефіцієнта відбивання для якого перетворення Крамерса-Кроніга виконується точно, а $\delta R(w)$ – похибка величини R , то для похибки величини θ отримаємо наступне наближене співвідношення [1]:

$$\Delta \theta(w_0) \sim \delta R(w_0) / R_m(w_0). \quad (4)$$

Узагальнена екстраполяція

Розглянемо однорідну суміш невзаємодіючих атомів. В такому випадку спектр відбивання такого абстрактного зразка буде визначатися наступним чином:

$$R_0(w) = \sum_i s_i R_i(w), \quad (5)$$

де s_i – нормована концентрація елементів у складі суміші, $R_i(w)$ – спектр відбивання відповідної компоненти аморфного сплаву. Якщо прийняти, що $R_0(w)$ – нульове наближення для спектра відбивання реального зразка, тоді істинний спектр відбивання може бути визначеним наступним чином:

$$R(w) = R_0(w) \cdot \delta(w), \quad (6)$$

де $\delta(w)$ – коректуюча функція, яка враховує взаємодію між елементами в сплаві; ця величина „нормалізує” розрахований спектр відносно вихідного. Ця функція є дуже важливою для визначення екстраполяції. Детальний аналіз цієї величини може дати важливу інформацію про взаємодію між елементами в аморфному сплаві. В даній роботі ми розглядаємо лінійну залежність для $\delta(w)$ на краю діапазону, що в загальному випадку є невірним, однак дозволяє уникнути стрибків спектра відбивання між екстраполяцією та експериментальними даними, зменшуючи ймовірність виникнення „хибних” смуг пропускання [1]. Зазначимо, що у випадку лінійної $\delta(w)$ стрибка зазнає перша похідна.

Про можливість визначення оптичних параметрів зразків за межами експериментального діапазону

Тепер потрібно розглянути принципове питання – чи можливе визначення оптичних сталих зразка за межами експериментального діапазону, тобто в області, де спектр відбивання описується екстраполяцією. Для визначеності розглянемо ситуа-

цію, коли $w_0 > w_{\max}$ і проведемо оцінку похибки величини θ . Для того, щоб отримати верхню оцінку межі похибки, що вноситься невідповідністю екстраполяції та реального спектра відбивання, будемо вважати, що екстраполяція визначена абсолютно неправильно, що призведе до того, що значення частини інтегралу (1) за межами спектрального діапазону є хибним. Тоді оцінка похибки буде наступною:

$$\Delta\theta \leq \int_{w_{\max}}^{\infty} \frac{\ln[R(w)/R(w_0)]}{w^2 - w_0^2} dw / \int_{w_{\max}}^{\infty} \frac{\ln[R(w)/R(w_0)]}{w^2 - w_0^2} dw, w_0 > w_{\max} \quad (7)$$

Очевидно, що інтеграл у чисельнику відповідає за похибку екстраполяції, а інтеграл у знаменнику вважається точним. Оцінимо величини цих інтегралів, розпочавши з інтегралу від екстраполяції:

$$\begin{aligned} \int_{w_{\max}}^{\infty} \frac{\ln[R(w)/R(w_0)]}{w^2 - w_0^2} dw &\approx \int_{w_0-a}^{w_0+a} \frac{\ln[R(w)/R(w_0)]}{w^2 - w_0^2} dw = \left\langle \frac{\ln[R(w)/R(w_0)]}{w^2 - w_0^2} \right\rangle 2a \approx \\ &\approx \frac{1}{2} \left\langle \ln[R(w)/R(w_0)] \right\rangle \frac{1}{w^2 - w_0^2} \Big|_{w_0-a}^{w_0+a} \approx \frac{1}{w_0} \left\langle \ln[R(w)/R(w_0)] \right\rangle \end{aligned} \quad (8)$$

де $\langle \dots \rangle$ відповідає усередненню по діапазону інтегрування, a – за умови гостроти функції $(w^2 - w_0^2)^{-1}$ малий параметр. Таким саме чином буде визначатися і інтеграл у чисельнику:

$$\begin{aligned} \int_{w_{\min}}^{w_{\max}} \frac{\ln[R(w)/R(w_0)]}{w^2 - w_0^2} dw &\approx \left\langle \frac{\ln[R(w)/R(w_0)]}{w^2 - w_0^2} \right\rangle' (w_{\max} - w_{\min}) \approx \left\langle \ln[R(w)/R(w_0)] \right\rangle' \frac{w_{\max} - w_{\min}}{w_{\max}^2 - w_0^2} = \\ &\approx \left\langle \ln[R(w)/R(w_0)] \right\rangle' \frac{w_{\max} - w_{\min}}{w_{\max} - w_0} \frac{1}{w_{\max} + w_0} \end{aligned} \quad (9)$$

де $\langle \dots \rangle'$ – усереднення по діапазону інтегрування, який відрізняється від (8). Тоді оцінка помилки визначення величини θ буде наступною:

$$\Delta\theta \leq \frac{w_{\max} + w_0}{w_0} \frac{w_{\max} - w_0}{w_{\max} - w_{\min}} \approx 2 \frac{w_{\max} - w_0}{w_{\max} - w_{\min}}, w_0 > w_{\max} \quad (10)$$

де було зроблено наближення, що $\langle \ln[R(w)/R(w_0)] \rangle' \approx \langle \ln[R(w)/R(w_0)] \rangle$. Важливо зауважити, що вираз (10) не залежить від величини a . Аналізуючи отриманий вираз можна зробити висновок, що похибка тим менше, чим більше ширина експериментального діапазону, або, що те саме, чим більше наявних точних даних. Зі збільшенням відстані від w_0 до верхньої межі експериментального діапазону $w_{\max}$ похибка зростає. Це дає змогу вважати, що у випадку, коли частота w_0 знаходиться не дуже далеко від експериментального діапазону, похибка буде більше (4) однак все ж залишатися невеликою. Також потрібно зробити зауваження, що більш точна оцінка похибки буде з непоганою точністю пропорційна виразу (10).

Результати та обговорення

За методикою, описаною в даній роботі було проаналізовано зразки $\text{Fe}_{80}\text{Cr}_5\text{V}_{15}$ та $\text{Fe}_{67}\text{Cr}_{18}\text{V}_{15}$ обидва з $S_w \sim 1$. Застосовуючи оригінальну чисельну методику [1] та узагальнену екстраполяцію, описану в даній роботі, в межах експериментального

діапазону було отримано оптичні сталі з похибкою що не перевищувала 10% для показника заломлення, 4% для показника поглинання і 20% для оптичної провідності.

Було зроблено спробу визначити плазмову частоту проаналізованих зразків, яка знаходилася досить далеко за межами експериментального діапазону. Плазмова частота в даному випадку визначається, як точка перетину n та k [4]. При цьому похибка, розрахована за (10) є дуже велика. Відповідно, результати визначення плазмової частоти за екстраполяцією потрібно округлити. Для обох зразків $\text{Fe}_{80}\text{Cr}_{15}\text{B}_{15}$ та $\text{Fe}_{67}\text{Cr}_{18}\text{B}_{15}$ ця величина складала приблизно 10eV.

Важливо застосувати незалежний метод [5] для оцінки плазмової частоти з метою порівняння результатів, який полягає в розв'язанні системи рівнянь

$$\begin{aligned} F_1(w^2) &= \frac{1}{1-\varepsilon_1} = \frac{w^2}{w_p^2} + \frac{\gamma^2}{w_p^2}; \\ F_2(\lambda) &= \frac{\varepsilon_2}{1-\varepsilon_1} = \frac{\lambda}{2\pi c} \gamma; \end{aligned} \quad (13)$$

$$F_3(\lambda) = \sqrt{((1-\varepsilon_1)^2 + \varepsilon_2^2)/(1-\varepsilon_1)} = \frac{\lambda}{2\pi c} w_p,$$

відносно невідомих параметрів γ та w_p , де ε_1 та ε_2 – дійсна та уявна частина діелектричної константи; w_p – плазмова частота; c – швидкість світла; λ – довжина хвилі.

Визначенні величини є наступними:

$$\text{Fe}_{80}\text{Cr}_{15}\text{B}_{15}: w_p = 9,0\text{E}+15\text{Hz} \pm 2,1\text{E}+15\text{Hz} = 37.3\text{eV} \pm 8.7\text{eV}$$

$$\text{Fe}_{67}\text{Cr}_{18}\text{B}_{15}: w_p = 3,7\text{E}+14\text{Hz} \pm 1,3\text{E}+14\text{Hz} = 1.5\text{eV} \pm 0.5\text{eV}$$

З одного боку така велика різниця пов'язана з принципово різними підходами до аналізу. По друге – з вагомою похибкою метода, заснованого на перетворенні Крамерса-Кроніга. По третє – система (13) отримана для моделі ідеального металу, а аналізу підлягали аморфні металеві сплави.

Висновки

Для визначення оптичних параметрів зразків за межами спектрального діапазону потрібно досягти значного збільшення точності виконання перетворення Крамерса-Кроніга, що в даній роботі досягається за оригінальним чисельним методом, що дозволяє збільшити точність майже на порядок порівняно з класичним методом Маклорена.

Також необхідно збільшувати точність екстраполяції. Для аморфних сплавів в даній роботі пропонується вдосконалена екстраполяція, яка дає можливість збільшити точність отримання оптичних сталих на декілька порядків. Одночасно це призведе до того, що значно збільшиться точність визначення оптичних сталих зразка за межами експериментального діапазону. Більше того, такий підхід дозволяє отримувати досить точні величини оптичних сталих у випадку $Sw < 1$.

Показано принципову можливість визначення величин оптичних сталих за межами спектрального діапазону, причому похибка є прямо пропорційна відстані

від поточної частоти до верхньої межі експериментального діапазону і обернено пропорційна до ширини експериментального діапазону.

За допомогою описаної методики була оцінена величина плазмової частоти аморфних сплавів $\text{Fe}_{80}\text{Cr}_5\text{V}_{15}$ та $\text{Fe}_{67}\text{Cr}_{18}\text{V}_{15}$ і була наближено рівна 10eV. Отримані величини були порівняні з іншим методом визначення плазмової частоти.

Перелік посилань

1. Лоза Є.А. Обчислення оптичних сталих за допомогою перетворення Крамерса-Кроніга. // Вісник Київського університету, серія: фізико-математичні науки. - 2005 - №1 - С.358-362.
2. D.L. Greenaway, G. Harbeke Optical properties and band structure of semiconductors. Pergamon press, 1968.
3. David Windt's IDL Software, <ftp://cletus.phys.columbia.edu/pub/idl/ind.zip>
4. F.Wooten Optical properties of solids // Academic press, New York and London, 1972 – 260p.
5. Поперенко Л.В. Оптические свойства и электронная структура аморфных сплавов на основе элементов группы железа // Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук Киев, 1992 – 538с

УДК 535:530.182

Любомир Й. Робур, Вадим М.
Прокопець¹, Ігор В. Захарченко

**Генерація другої гармоніки
при відбиванні р-
поляризованого світла від
поверхні металів**

Теоретично і експериментально досліджений процес генерації другої гармоніки при відбиванні р-поляризованого оптичного випромінювання від дзеркальної поверхні металів. Показана роль просторової дисперсії в формуванні нормальних до поверхні нелінійних граничних струмів. Результати розрахунків та експериментальні дані добре узгоджуються.

Ключові слова: кераміка, поверхнева генерація другої гармоніки.

Lubomyr Y. Robur, Vadym M.
Prokopets¹, Igor V. Zaharchenko

**Second harmonic generation in
reflection of p-polarized light from
metal surface**

The experimental and theoretical investigations of surface second harmonic generation in reflection from metals are presented. It was shown that the spatial dispersion had to take into consideration on calculation of nonlinear surface current. The comparisons of experimental and theoretical second harmonic generation data allow us conclude that taking proper account of the normal component of nonlinear surface current resulted not only quality but also quantitative agreement.

Key Words: metal, surface harmonic generation.

¹ E-mail: vadym_pr@univ.kiev.ua

1. Вступ

Перші роботи по теорії генерації другої гармоніки (ГДГ) при відбиванні лазерного випромінювання від поверхні металу були виконані досить давно [1], але однозначної відповідності між результатами теоретичних розрахунків та експериментальними даними не вдалося досягти. Зокрема, в роботі [2] автори вказують, що експериментально виміряна кутова залежність ГДГ (залежність інтенсивності другої гармоніки від кута падіння хвилі накачки) при відбиванні випромінювання рубінового лазера з довжиною хвилі $\lambda=0,694$ мкм від поверхні срібла має навіть якісну суттєву розбіжність із результатами розрахунків, виконаних в рамках моделі вільних електронів [3] і навіть врахування міжзонного поглинання [4] не усуває цю розбіжність. Пізніше, в роботі [5] на основі

моделі вільних електронів було показано, що важливе значення для ГДГ при відбиванні p -поляризованого випромінювання має нормальна компонента нелінійних поверхневих струмів. Також там було відмічено, що в загальному випадку розрахунок нормальної складової поверхневих струмів пов'язаний із значними труднощами.

Такий розрахунок був проведений в роботі [6] для випадку „товстого” перехідного шару, коли $\omega L/V_F \gg 1$ та $L \ll \lambda$, де L – товщина перехідного шару, V_F – швидкість Фермі, ω та λ частота і довжина хвилі накачки відповідно. При цьому просторовою дисперсією можна знехтувати. Для плазми металів, очевидно, такий підхід не можна застосовувати, оскільки товщина перехідного шару не перевищує декількох ангстрем. В даному випадку суттєвими виявляються ефекти просторової дисперсії і для визначення вкладу нормальної компоненти нелінійних поверхневих струмів в ГДГ необхідний якісно новий підхід.

В роботах [7, 8] було зроблено спробу провести більш детальний розгляд явища ГДГ при відбиванні випромінювання від металу із врахуванням просторової дисперсії. Але, оскільки в цих роботах вирази для густини струмів на частоті другої гармоніки не задані у явному вигляді, застосування отриманих результатів для порівняння із експериментом викликає значні труднощі. Більше того, отримані в [7, 8] за допомогою граничного переходу значення констант в нелінійному матеріальному рівнянні, які були феноменологічно введені раніше в гідродинамічній теорії ГДГ [9], не задовольняють співвідношенням, які необхідні для виконання закону збереження енергії поля [10].

Предметом цієї роботи є теоретичне та експериментальне дослідження процесу ГДГ на границі метал-вакуум. Теорія розвивається в наближенні „тонкого” перехідного шару ($\omega L/V_F \ll 1$). Показана роль просторової дисперсії в формуванні нормальних до поверхні нелінійних

граничних струмів і їх вплив на процес ГДГ. Експериментальні дослідження кутових залежностей ГДГ при відбиванні випромінювання АГ: Nd^{+3} – лазера ($\lambda=1,064$ мкм) від поверхні срібла, золота та міді підтвердило правильність теоретичних положень.

2. Розрахунок інтенсивності другої гармоніки із врахуванням ефектів просторової дисперсії на частоті падаючої хвилі.

Розташуємо Декартову систему координат таким чином, щоб метал займав напівпростір $z>0$. Нехай на межу поділу метал-вакуум під кутом θ падає p -поляризована світлова хвиля із амплітудою E_p та частотою ω , площина падіння співпадає із площиною xz . Будемо вважати, що наближенням, яке задовільно описує оптичні властивості металу, є модель виродженої електронної плазми, а процедуру знаходження нелінійних струмів можна значно спростити, якщо знехтувати процесом зворотної перекачки енергії із гармоніки в хвилю накачки і припустити дзеркальне відбивання електронів від межі поділу метал-вакуум. Тоді амплітуду хвилі, яка пройшла в плазму, можна обчислити виходячи із таких формул [11, 12], в яких для спрощення запису опущений множник $e^{(ik_x x)}$:

$$E^x = \frac{i\omega H^y}{\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{q^2 + k_x^2} \left[\frac{k_x^2}{k_0^2 \epsilon_l(\omega, k)} - \frac{q^2}{q^2 + k_x^2 - k_0^2 \epsilon_t(\omega, k)} \right] \quad (1a)$$

$$E^z = \frac{i\omega H^y}{\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q k_x dq}{q^2 + k_x^2} \left[\frac{1}{k_0^2 \epsilon_l(\omega, k)} - \frac{1}{q^2 + k_x^2 - k_0^2 \epsilon_t(\omega, k)} \right], \quad (1b)$$

де $k_0 = \frac{\omega}{c}$, $k_x = k_0 \sin \theta$, $\epsilon_l(\omega, k)$ і $\epsilon_t(\omega, k)$ – повздовжні та поперечні компоненти діелектричної проникності, які для виродженої плазми визначаються за формулами [12]:

$$\varepsilon_l(\omega, k) = 1 + 3 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\alpha - \text{Arth} \alpha}{\alpha^3} \quad (2a)$$

$$\varepsilon_t(\omega, k) = 1 + 3 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\alpha - (1 - \alpha^2) \text{Arth} \alpha}{2\alpha^3}, \quad (2b)$$

де $\alpha = kv_F/\omega$. Оскільки нас цікавить область частот, яка знаходиться далеко від резонансної і області аномального скін-ефекту, то плазму можна вважати такою в якій відсутні зіткнення. Для того, щоб обчислити інтеграли в (1), необхідно знайти корені дисперсійних рівнянь $\varepsilon_l(\omega, k) = 0$ та $F(\omega, k) = k^2 - k_0^2 \varepsilon_t(\omega, k) = 0$, що можна зробити чисельними методами. Нехай ці корені рівні k_l та k_t відповідно. Тоді розкладаючи знаменники в (1) в ряд Тейлора, за теорією вилучень можна знайти поле в плазмі на основній частоті

$$E = E_l e^{ip_l z} + E_t e^{ip_t z}, \quad (3)$$

де проекції амплітуд полів і хвильових векторів на вісі системи координат рівні:

$$E_l^x = -\frac{2ik_0 p_t}{k_l F'(\omega, k_l)} H^y, \quad E_t^x = -\frac{2ik_x^2}{k_0 p_t k_t \varepsilon'(\omega, k_t)} H^y$$

$$E_l^z = -\frac{2ik_0 k_x}{k_l F'(\omega, k_l)} H^y, \quad E_t^z = -\frac{2ik_x}{k_0 p_t k_t \varepsilon'(\omega, k_t)} H^y \quad (3a)$$

$$p_t = (k_l^2 - k_x^2)^{1/2}, \quad p_l = (k_t^2 - k_x^2)^{1/2}, \quad (3b)$$

а амплітуда магнітного поля H^y виражається через поверхневий імпеданс

$$H^y = \frac{2E_p \cos \theta}{Z_p + \cos \theta}, \quad Z_p = 2k_0 \left[\frac{p_t}{k_l F'(\omega, k_l)} - \frac{k_x^2}{k_0^2 p_t k_t \varepsilon'(\omega, k_t)} \right], \quad (4)$$

Прямим розрахунком із врахуванням (2) можна показати, що функції $k_l F'(\omega, k_l)$ та $k_t \varepsilon'(\omega, k_t)$ визначаються співвідношенням:

$$k_l F'(\omega, k_l) = [k_l^2 (5 - 3\alpha_l^2) + k_0^2 (\alpha_0^2 - 3\varepsilon_0)] / (1 - \alpha_l^2) \quad (5a)$$

$$k_l \epsilon'(\omega, k_l) = 3(\epsilon_0 - \alpha_l^2) / (1 - \alpha_l^2), \quad (56)$$

де $\alpha_l = k_l V_F / \omega$, $\alpha_t = k_l V_F / \omega$, $\epsilon_0 = 1 - (\omega_p / \omega)^2$. Знаючи розв'язки дисперсійних рівнянь, за формулами (3) – (5) неважко визначити амплітуди повздовжньої E_l та поперечної E_t складових поля. У випадку резонансу $\omega = \omega_p$ в плазмі збуджується як поперечна, так і повздовжня хвилі. Якщо частота падаючої хвилі задовольняє умову $0 < \omega < \omega_p$, то як випливає з (2а) та (3б), $k_x^2 < 0$, тобто величина p_l буде уявною. Таким чином, повздовжня компонента поля приводить до плазмового екранування і є тим самим „перехідним” шаром, який обумовлює появу нелінійних поверхневих струмів. Область частот $\omega > \omega_p$ потребує окремого розгляду, який не буде тут проводитись.

Розрахунок полів в (3) значно полегшується, якщо вимагати виконання загальної умови відсутності струму по нормалі до границі, тобто прийняти $J_z = 0$ при $z=0$ [13]. Тоді із матеріальних співвідношень лінійної електродинаміки отримаємо вираз

$$E_l^z = (\epsilon_l - 1)E_t^z \quad (6)$$

прямим наслідком якого є однозначний зв'язок між коренями функцій $\epsilon_l(\omega, k)$ та $F(\omega, k)$. Враховуючи рівність (6) амплітуди полів будуть мати вигляд

$$\begin{aligned} E_l^x &= \frac{cp_l}{\omega \epsilon_l} H^y & E_l^y &= -\frac{(\epsilon_l - 1)k_x \sin \theta}{\epsilon_l p_l} H^x \\ E_l^z &= -\frac{\sin \theta}{\epsilon_l} H^y & E_l^x &= \frac{(\epsilon_l - 1) \sin \theta}{\epsilon_l} H^y, \end{aligned} \quad (7)$$

а поверхневий імпеданс визначається за формулою

$$Z_p = \frac{c}{\omega} \left[\frac{p_l}{\epsilon_l} + \frac{(1 - \epsilon_l k_x^2)}{\epsilon_l p_l} \right]. \quad (8)$$

В подальших розрахунках ми будемо вважати, що амплітуди полів в (3) відомі.

Розглянемо тепер функцію розподілу (ФР) електронів в плазмі $f(r, V, t)$, яка задовольняє кінетичне рівняння

$$\frac{\partial f}{\partial t} + V \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{e}{m} \left(E + \frac{1}{c} [V \times H] \right) \frac{\partial f}{\partial V} = 0. \quad (9)$$

ФР будемо шукати у вигляді розкладу в ряд

$$f(r, V, t) = f_0(V) + f_1 e^{i(k_x x - \omega t)} + f_2 e^{2i(k_x x - \omega t)}, \quad (10)$$

де рівноважна ФР $f_0(V)$ для виродженої плазми має вигляд:

$$f_0(V) = \begin{cases} \frac{3N}{4\pi V_F^3}, & \text{при } V < V_F \\ 0, & \text{при } V > V_F \end{cases}, \quad (11)$$

N – концентрація електронів. Підставивши (10) в (9), знайдемо лінійну по полю частину ФР

$$f_1(r, V) = -A \frac{\delta(V - V_F)}{V} \left[\frac{VE_1 e^{ip_1 z}}{\Omega - p_1 V_1} + \frac{VE_1 e^{ip_1 z}}{\Omega - p_1 V_1} \right] \quad (12)$$

$\Omega = \omega - k_x V_x$, а $A = \frac{3eN}{4\pi m V_F^3}$. Як видно із (12) лінійна частина ФР, так само

як і поле, складається із повздовжньої та поперечної частини. Під час знаходження (12) ми використали вже відомий розв'язок для електричного поля (3), хоча насправді необхідно було б розв'язувати самоузгоджену задачу. Про те, як було показано в [12], ці методи є еквівалентними.

Знаючи $f_1(r, V)$, в наступному наближенні визначимо квадратичну по полю частину ФР, яка складається із трьох доданків, які відрізняються величинами в степенях експонент:

$$f_2(r, V) = f_{II}(r, V) e^{2ip_1 z} + f_{III}(r, V) e^{2ip_1 z} + f_{IV}(r, V) e^{(ip_1 z + ip_1 z)}, \quad (13)$$

де

$$f_n(r, V) = -A \frac{eA}{2im(\Omega - p_z V_z)^2} \left\{ \left[E_t^2 - \frac{V}{c} [E_t \times H] - \frac{1}{c} \frac{(V \cdot E_t)(V[k_t \times H])}{\Omega - p_z V_z} \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{\delta(V - V_F)}{V} + (VE_t)^2 \frac{L}{V} \right\}, \quad (13a)$$

$$f_u(r, V) = -A \frac{eA}{2im(\Omega - p_z V_z)^2} \left\{ \left[E_t^2 - \frac{(V \cdot E_t)(k_t \cdot E_t)}{\Omega - p_z V_z} \right] \frac{\delta(V - V_F)}{V} + (VE_t)^2 \frac{L}{V} \right\}, \quad (13b)$$

$$f_u(r, V) = -A \frac{eA}{2im(2\Omega - (p_t + p_l)V_z)^2} \left\{ (E_t \cdot E_l)Q + \frac{(V \cdot E_t)(k_t \cdot E_l)}{(\Omega - p_z V_z)^2} + \right. \\ \left. + \frac{(V \cdot E_l)(k_t \cdot E_t)}{(\Omega - p_z V_z)^2} - \frac{1}{c} \frac{(V \cdot E_t)(V[k_t \times H])}{(\Omega - p_z V_z)^2} - \frac{1}{c} \frac{(V[E_t \times H])}{\Omega - p_z V_z} \right] \frac{\delta(V - V_F)}{V} + \\ + (V \cdot E_t)(V \cdot E_l) \frac{QL}{V} \Bigg\}, \quad (13b)$$

$$L = \frac{d}{dV} \frac{\delta(V - V_F)}{V}, \quad Q = \frac{1}{\Omega - p_z V_z} + \frac{1}{\Omega - p_l V_z}.$$

За допомогою (13) можна знайти струми на частоті 2ω

$$j_2(z) = e \int V f_2(z, V) dV. \quad (14)$$

Необхідно відмітити, що якщо в (13) підставити $\omega = \omega + i\gamma$, то ми зможемо розрахувати нелінійні струми в довільній області частот. Обмежимося частотами меншими за плазмову і далекими від аномального скін-ефекту. В цьому випадку в знаменниках формул (13а-в) можна знехтувати доданками $k_x V_x$ та $p_z V_z$ в порівнянні із ω . В цьому випадку обчислення густини струмів приводить до виразу, який, як і в $f_2(z, V)$, складається із трьох доданків. Для „поперечної“ частини (l, t) струмів після інтегрування в сферичній системі координат з полярною віссю, яка паралельна до вектора k_t , отримаємо вираз:

$$j_n = -\frac{e^3 N}{2m^2 \omega^3 c} [E_i \times H] e^{2ip_z z}, \quad (15)$$

який представляє „об'ємну” частину нелінійних струмів [1].

Тепер визначимо складову нелінійних струмів із просторовою залежністю $\sim e^{(ip_z z + ip_l z)}$. Оскільки p_l - уявна величина, то густина струму j_n експоненційно зменшується вже відстані багато меншій за довжину хвилі, такий струм можна вважати поверхневим. Опускаючи проміжні громіздкі викладки запишемо співвідношення для x - компоненти поверхневих струмів з індексом (l, t) , яке отримуємо шляхом інтегрування по z та V у вигляді

$$j_n^x = \frac{3ie^3 N}{m^2 \omega^3} E_i^x E_l^z \frac{\alpha - \text{Arth} \alpha}{\alpha^3}, \quad (16)$$

де $\alpha = \frac{p_l V_F}{\omega}$. В розрахунках ми знехтували доданками пропорційними до $V_F/c \ll 1$, а також вважали, що вектор $k_l + k_i$ приблизно паралельним до осі z , оскільки $|p_l| \gg k_x$. Врахуємо тепер, що $\alpha = \alpha_l$ і в цьому випадку справджується рівність $(\text{Arth} \alpha - \alpha)/\alpha^3 = \omega^2/3\omega_p^2$, яка впливає із дисперсійного співвідношення повздовжніх хвиль. Підставивши в (16) амплітуду повздовжньої хвилі із (6), отримаємо кінцеву формулу

$$j_n^x = \frac{e^3 N}{im^2 \omega \omega_p^2} (\epsilon_l - 1) E_i^x E_l^z, \quad (17)$$

що співпадає із виразом для тангенціальної компоненти поверхневих струмів, який отриманий в [1, 5].

Обчислюючи таким же методом z - компоненту поверхневих струмів із індексом (l, t) , отримуємо співвідношення

$$j_n^z = \frac{6e^3 N}{im^2 \omega^3} (\epsilon_l - 1) (E_i^z)^2 \frac{\text{Arth} \alpha - 2\text{Arth}(\alpha/2)}{\alpha^3}. \quad (18)$$

Повздовжня частина (l, l) поверхневих струмів в нашому наближенні має тільки z – компоненту

$$j_{||}^z = \frac{3}{4} \frac{e^3 N}{m^2 \omega^3} \frac{(\epsilon_r - 1)^2}{(\alpha^2 - 1)^2} (E_r^z)^2 \quad (19)$$

Повна величина нормальної складової нелінійних поверхневих струмів, яка визначає розрив тангенціальної компоненти електричного поля ДГ, рівна сумі (18) та (19). Параметр α в цих формулах визначається так само, як і в (16) із розв'язку дисперсійного рівняння:

$$\frac{\alpha - \text{Arth} \alpha}{\alpha^3} = -\frac{1}{3} \frac{\omega^2}{\omega_p^2}.$$

Знаючи густину поверхневих струмів, із рівнянь Максвела з „об'ємним” джерелом (15) і відповідними граничними умовами можна визначити інтенсивність відбитої другої гармоніки. Магнітне поле на частоті 2ω задовольняє рівнянням

$$\nabla \times \nabla \times H + \frac{1}{c^2} \ddot{H} = 0 \quad (20)$$

в вакуумі і

$$\nabla \times \nabla \times H + \frac{\epsilon_r(2\omega)}{c^2} \ddot{H} = 0 \quad (21)$$

в металі, а електричне – відповідно рівнянням

$$\dot{E} = c \nabla \times H \quad (22)$$

та

$$\dot{E} = \frac{c}{\epsilon_r(2\omega)} \nabla \times H - \frac{4\pi}{\epsilon_r(2\omega)} j_{||}. \quad (23)$$

Граничні умови, які відображають існування подвійного шару на поверхні метал-вакуум, мають вигляд [14]:

$$\begin{aligned} E^x(z=+0) - E^x(z=-0) &= 4\pi \frac{\partial}{\partial x} P^z \\ H^y(z=+0) - H^y(z=-0) &= -\frac{4\pi}{c} j_{\text{ш}}^x, \end{aligned} \quad (24)$$

де $2i\omega P^z = -(j_{\text{ш}}^z + j_{\text{ш}}^z) e^{(2ik_x x - 2i\alpha x)}$,

Умови (24) дають розв'язок для амплітуди магнітного поля ДГ, яка відбивається під кутом θ

$$H_R = \frac{4\pi}{c} \frac{e^3 N}{m^2 \omega^3} E_p^2 F(\theta, \alpha, \omega_p), \quad (25)$$

де

$$\begin{aligned} F(\theta, \alpha, \omega_p) &= \frac{\epsilon_i - 1}{\epsilon_i^2} \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{(Z_p + \cos \theta)[G_2 + \epsilon_i(2\omega) \cos \theta]} \left\{ \frac{\epsilon_i(\omega)}{\epsilon_i(\omega) - 1} - 4 \frac{\omega^2}{\omega_p^2} G_1 G_2 + \right. \\ &\quad \left. + 6\epsilon_i(2\omega) \left[\frac{4}{\alpha^3} \left(\text{Arth} \alpha - 2 \text{Arth} \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{\epsilon_i(\omega) - 1}{2(\alpha^2 - 1)^2} \right] \sin^2 \theta \right\}, \end{aligned} \quad (26)$$

$G_1 = (\epsilon_i(\omega) - \sin^2 \theta)^{1/2}$, $G_2 = (\epsilon_i(2\omega) - \sin^2 \theta)^{1/2}$. Якщо перейти до інтенсивності випромінювання, то для коефіцієнта нелінійного відбивання $R = I(2\omega)/I(\omega)$ отримаємо такий вираз

$$R = \left(\frac{4\pi}{c} \frac{e^3 N}{m^2 \omega^3} E_p \right)^2 |F(\theta, \alpha, \omega_p)|^2, \quad (27)$$

в якому множник $|F(\theta, \alpha, \omega_p)|^2$ визначає вигляд кутової залежності ГДГ.

Зауважимо, що в граничному випадку $\alpha \rightarrow 0$, коли ефекти просторової дисперсії на основній частоті несуттєві, функція (26) співпадає із отриманою раніше в наближенні „товстого” перехідного шару [6]. Тому при $\omega/\omega_p \ll 1$, що справедливо при відбиванні випромінювання з довжиною хвилі $\lambda \geq 1$ мкм від поверхні благородних металів, слід очікувати якісного узгодження кутових залежностей ГДГ, розрахованих в

наближенні „товстого” та „тонкого” перехідних шарів. Подальший аналіз отриманих співвідношень проводиться в третьому розділі цієї статті. Але попередньо необхідно відмітити наступне. У випадку резонансу на частоті ДГ ($2\omega = \omega$) знайдені вирази для густини нелінійних поверхневих струмів (17) – (19) залишаються справедливими, але при обчисленні поля гармоніки необхідно враховувати збудження не тільки поперечної, але й повздовжньої хвилі в плазмі. В усіх інших випадках врахування просторової дисперсії на частоті 2ω не відіграє значної ролі і повздовжньою частиною поля можна знехтувати.

3. Експериментальні дослідження ГДГ при відбиванні світла від поверхні металу та порівняння із теорією

Окрім теоретичного аналізу процесу ГДГ при відбиванні p -поляризованого лазерного випромінювання, нами були проведені експериментальні дослідження кутових залежностей ГДГ для срібла, золота та міді.

Експериментальна установка та методика вимірювання детально описані в роботах [15] та [16]. При проведенні досліджень був застосований АГ: Nd^{3+} лазер з довжиною хвилі $\lambda=1,06$ мкм. Кут падіння випромінювання на зразок змінювався від 30° до 85° . Випромінювання лазера и відбита гармоніка були поляризовані в площині падіння.

В експериментах були використані оптично товсті плівки срібла та золота, які отримані термічним напиленням в високому вакуумі (тиск $P < 10^{-4}$ Па) металів на гладко поліровані скляні основи, а також механічно поліроване мідне дзеркало. Чистота використаних матеріалів була не нижче 99,99%.

На рис. 1 наведені експериментальні кутові залежності ГДГ для срібла, золота та міді нормовані на максимальну інтенсивність відбитої від срібла гармоніки (досягається при $\theta=77,5^\circ$). Таким чином по осі ординат на

рис. 1 відкладено відношення $R(\theta)/R_{Ag}^{\max}$. Така форма представлення результатів дозволяє провести порівняльний аналіз ефективності ГДГ для різних металів по відношенню до срібла, для якого, при $\theta=45^\circ$, відома абсолютна величина [4]:

$$[I(2\omega)/I^2(\omega)]^{1/2} = 1,3 \times 10^{-9} \text{ од.СГСЕ.} \quad (28)$$

Для порівняння експериментальних та теоретичних кутових залежностей ГДГ необхідно знати комплексну діелектричну проникність металів на частотах накачки і гармоніки. Як правило, ці дані беруть із літературних джерел [2, 17], хоча відомо, що оптичні сталі металевих зразків в значною мірою визначаються технологією отримання та станом дзеркальної поверхні. Тому нами проводились на одних в тих самих

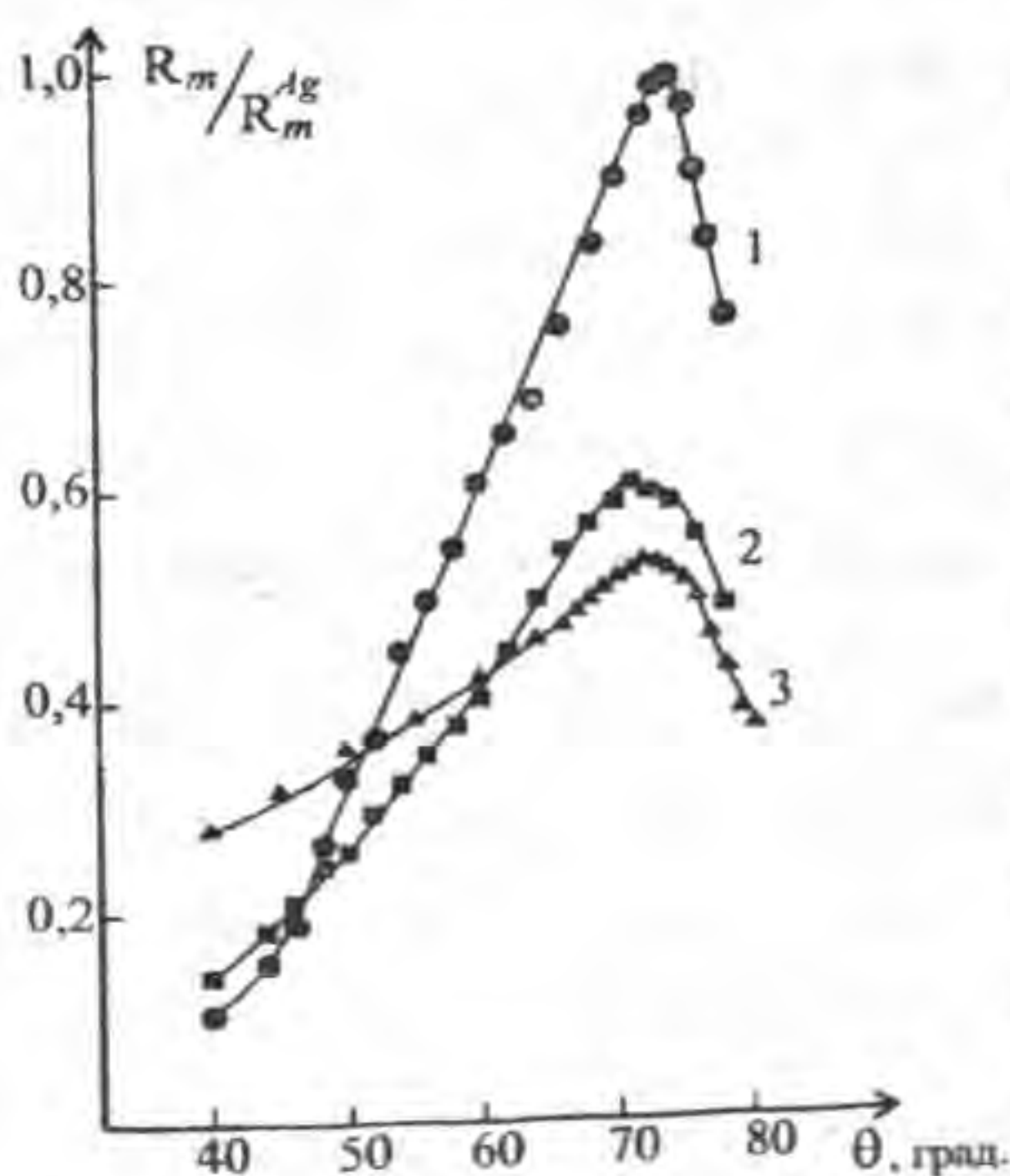


Рис. 1. Кутові залежності коефіцієнтів нелінійного відбивання металів: 1 – срібло; 2 – мідь; 3 – золото.

зразках як нелінійно-оптичні дослідження, так і еліпсометричні вимірювання оптичних констант на частотах ω та 2ω . Результати цих досліджень наведені в таблиці 1. Окрім того, еліпсометричні дослідження дозволяють в подальшому, при проведенні аналізу, ефективно враховувати мікроскопічні особливості поверхонь зразків.

Порівняння експериментально отриманої кутової залежності ГДГ із результатами розрахунків із використанням різних теоретичних

моделей наведені на рис. 2. Кружечками позначені відношення усередненої за результатами 100 вимірів інтенсивності ДГ $I_{2\omega}(\theta)$ та

максимальної для даного металу величини $I_{2\omega}^{\max}$. Результати розрахунків відносного коефіцієнта нелінійного відбивання $\rho(\theta) = I_{2\omega} / I_{2\omega}^{\max} = R(\theta) / R^{\max}$, ($\rho^{\max} = 1$), виконаних за формулами (8), (26), (27) із використанням даних із таб. 1, наведені на рис. 2 суцільними лініями. Залежність $\rho(\theta)$, розрахована в наближенні „товстого” перехідного шару (формула (11) в роботі [6]), як було відмічено в другому розділі, практично співпадає із розрахованою за моделлю „тонкого” перехідного шару. Пунктиром на рис. 2 зображені результати обчислень проведених без врахування нормальної компоненти нелінійних поверхневих струмів, виконані аналогічно в роботі [3].

Таблиця 1.

Діелектрична проникність $\epsilon_i = \epsilon' + i\epsilon''$ металів на довжинах хвиль 1,06 та 0,53 мкм.

Метал	Перша гармоніка $\lambda=1,06$ мкм		Друга гармоніка $\lambda=0,53$ мкм	
	$\epsilon'(\omega)$	$\epsilon''(\omega)$	$\epsilon'(2\omega)$	$\epsilon''(2\omega)$
Срібло	$-45,9 \pm 0,5$	$1,21 \pm 0,03$	$-10,2 \pm 0,2$	$0,291 \pm 0,02$
Золото	$-35,3 \pm 0,4$	$2,63 \pm 0,06$	$-3,59 \pm 0,08$	$1,42 \pm 0,04$
Мідь	$-26,9 \pm 0,3$	$5,31 \pm 0,08$	$-2,94 \pm 0,05$	$2,59 \pm 0,06$

Порівнюючи теоретичні кутові залежності із експериментальними, неважко переконатися, що врахування нормальної складової нелінійних поверхневих струмів дає якісно найбільш правильний опис процесів ГДГ, особливо це стосується тієї області кутів падіння в якій коефіцієнт ρ близький до одиниці. При малих θ наші розрахунки приводять до занижених, в порівнянні із експериментальними, значеннями $\rho(\theta)$, що сильніше проявляється при відбиванні від срібної та золотої плівки, ніж при відбиванні від масивного мідного дзеркала. Очевидно, така розбіжність пояснюється тепловою дією лазерного випромінювання, оскільки енергія, яка падає на одиницю площі дзеркала пропорційна $\cos \theta$.

а температурні ефекти сильніше проявляються в плівках ніж в масивних зразках.

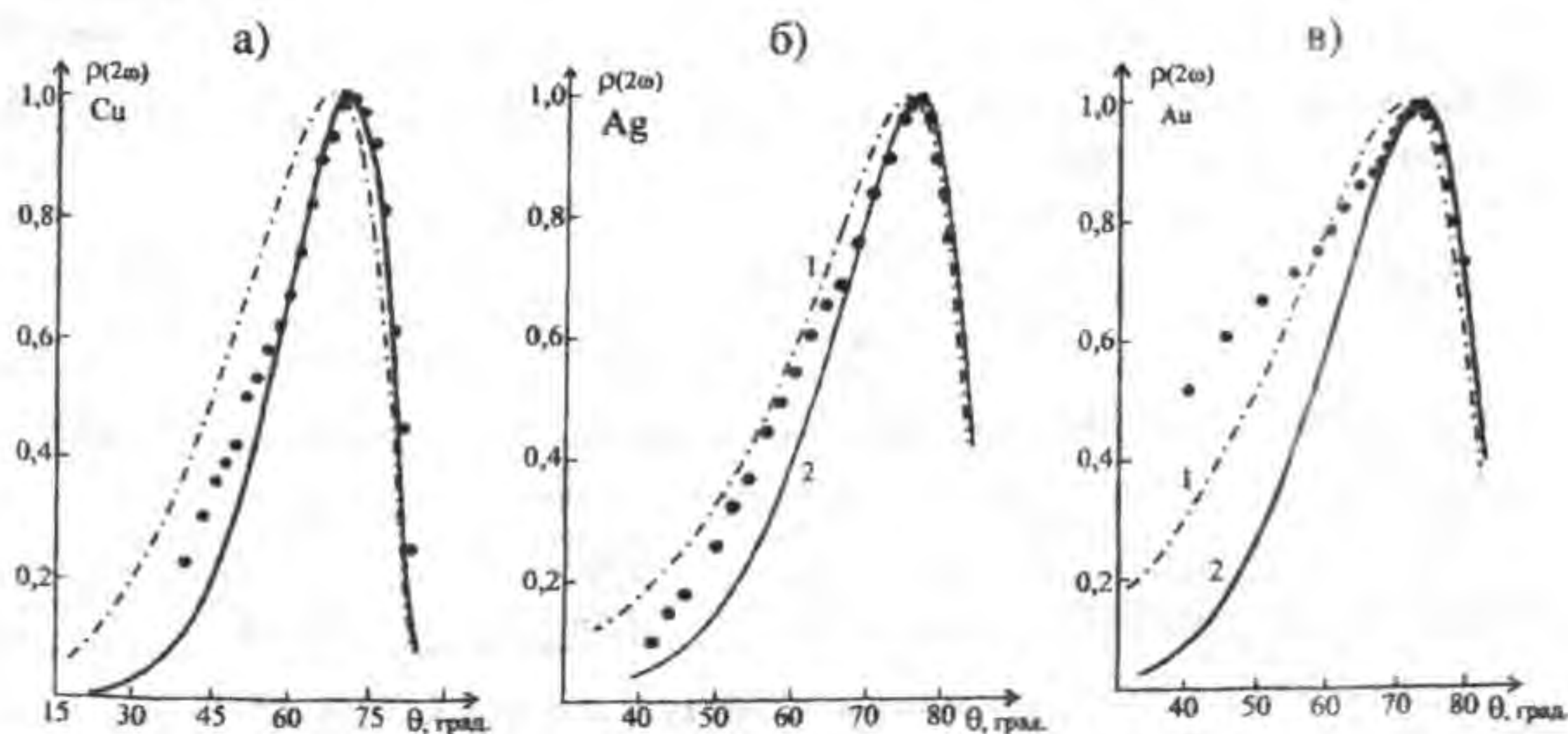


Рис. 2. Порівняння експериментальних (•) та теоретичних (— • — без врахування та — з врахуванням нормальної компоненти нелінійної граничної поляризації) кутових залежностей ГДГ для міді (а), срібла (б), золота (в).

Додаткові дані на користь моделі „тонкого” перехідного шару можна отримати, якщо порівняти розраховані за різними теоріями абсолютні значення коефіцієнтів $R(\theta)$ із експериментальними. В таб. 2 наведені отримані експериментально та розраховані за різними теоріями максимальні значення коефіцієнтів нелінійного відбивання золота та міді по відношенню до срібла, а також відповідні величини кутів падіння $\theta_{\max}$. Із даних, які наведені в таб. 2, випливає, що для металів першої групи наближення „тонкого” перехідного шару дозволяє отримувати не тільки якісну, але й кількісну найбільш точну відповідність між коефіцієнтами нелінійного відбивання, а результати розрахунків, які виконані із використанням інших підходів відрізняються від експериментальних в декілька разів. Оскільки для срібла на довжині хвилі $\lambda=1,06$ мкм при $\theta=45^\circ$ відоме абсолютне значення коефіцієнта нелінійного відбивання, то є нагода порівняти величину $R_{Ag}^{\max}$, розраховану в рамках різних теорій із її

експериментальним значенням, яке може бути отримане із (28) за допомогою співвідношення $R_{Ag}(\theta = 45^\circ) / R_{Ag}^{\max} = 0,17$ (рис. 1).

Таблиця 2

Порівняння експериментальних та теоретичних кутових залежностей ГДГ в металах (відносно срібла)

Метал	Експеримент	Теорія „тонкого шару”	Теорія „товстого шару” [6]	Теорія „вільних електронів” без врахування нормальної компоненти нелінійних поверхневих струмів [3]
Максимальні значення коефіцієнтів нелінійного відбивання (відносно срібла) $R^{\max} / R_{Ag}^{\max}$				
Срібло	1	1	1	1
Золото	$0,539 \pm 0,01$	0,691	0,935	2,63
Мідь	$0,612 \pm 0,02$	0,759	1,46	3,15
Значення кутів, які відповідають максимуму кутової залежності ГДГ $\theta^{\max}$, град.				
Срібло	75,5	76	76	74,5
Золото	72,0	72,5	72,5	70,5
Мідь	71,5	72	72	69,0
Порівняння абсолютних експериментальних та теоретичних значень ефективності ГДГ при відбиванні від срібла $I^{\max}(2\omega) / I^2(\omega) \times 10^{18}$, см ² /Вт				
Срібло	5,8	5,4	5,2	1,8

Відповідне порівняння, наведене в таб. 2, показує, що експериментальному значенню $R_{Ag}^{\max}$ найкраще відповідає результат обчислень за моделлю „тонкого” перехідного шару.

4. Висновки

Результати роботи показали, що процес ГДГ при відбиванні *p*-поляризованого світла від дзеркальної поверхні благородних металів і міді добре описується моделлю виродженої плазми в якій немає зіткнень. Суттєву роль в генерації другої гармоніки при відбиванні відіграє нормальна складова нелінійних поверхневих струмів, при розрахунках якої необхідно враховувати ефекти просторової дисперсії. Порівняння результатів розрахунків із експериментальними даними дозволяє стверджувати, що врахування вкладу нормальних граничних струмів в ГДГ

приводить не тільки до правильної якісної, але і до кількісної відповідності.

Автори висловлюють щирі подяки Н. Ахмедієву та І. Мельникову за неоцінену допомогу у виконанні даної роботи.

Література

1. S.S. Jha // Phys. Review, 140, A2020 (1965).
2. H.Sonnenberg, H. Heffner // JOSA, 58, 209 (1968).
3. N. Blombegen R. K. Chang, C.H. Lee // Phys. Rev. Letters 16, 986 (1966).
4. N. Blombegen R. K. Chang, C.H. Lee, S.S. Jha // Phys. Rev. 174, 813 (1968)
5. T. Rudnick, E.A.Stern // Phys. Rev. B4, 4274, (1971).
6. Ахмедієв Н.Н. // ЖТФ – 1975, т. 45, 2109.
7. O. Keller. // JOSA, B2, 367 (1985).
8. O. Keller // Phys. Rev., B31, 5028 (1985).
9. Поверхносные поляритоны. Под ред. Аграновича В.М. и Миллса Д.Л. М., Наука, 1985.
10. Агранович В.М., Дарманян С. А. // Письма в ЖЭТФ, 35, 68, (1982).
11. Силин В.П., Фетисов Е.П. // ЖЭТФ, 41, 159, (1961).
12. K.L. Kliewer, R. Fuchs. // Phys. Rev. 172, 607, (1968).
13. Абрикосов А.А. Основы физики металлов. М.: Наука, 1111 с., 1987.
14. Дж. Страттон. Теория электромагнетизма. М.: ОГИЗ, с. 174, 1948.
15. Белий М.У., Робур Л.Й., Храпко А.В., Шайкевич И.А. Установка для исследования линейных и нелинейных оптических свойств полупроводников и металлов. // Квантовая электроника – 1986 – Вып. 31, с.100.
16. Прокопеч В.М. Двохканальний аналогово-цифровий перетворювач одночасної дії.// Вісник Київського Університету. Сер. Фізика, №3 2003 р. с. 362
17. G.T. Bound, T. Rasing, J. R.R. Leite, Y.R. Shen // Phys. Rev., B30, 519 (1984).

Метою цієї роботи є теоретичне вивчення особливостей критичної опалесценції нейтронів, котрі пов'язані з проходженням та пружним когерентним розсіянням нейтронів у просторово обмежених рідинах поблизу критичної точки.

1. Наближення нейтронної оптики в задачі проходження і розсіяння нейтронів в обмежених рідинах

Задача проходження та пружного розсіяння нейтронів у просторово обмеженій рідині поблизу критичної точки може бути зведена в наближенні нейтронної оптики з використанням псевдопотенціалу Фермі $U(\vec{r}) \sim b_{\text{ког}} \rho(\vec{r})$ до розв'язку рівняння Шредінгера, котре набуває вигляду електродинамічного хвильового рівняння [11]

$$\Delta \psi + k_0^2 n^2 \psi = 4\pi b_{\text{ког}} \rho' \psi, \quad (1)$$

в якому використані такі позначення: ψ - хвильова функція нейтрона, $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ - хвильовий вектор, λ_0 - довжина хвилі де Бройля для нейтрона у вакуумі, n - нейтронний показник заломлення, $b_{\text{ког}}$ - когерентна довжина (амплітуда) розсіяння, $\rho = \rho_0 + \rho'$ - густина ядер (ρ_0 - середнє значення густини, а ρ' - флуктуація густини ядер).

Просторова залежність нейтронного показника заломлення $n(\vec{r})$ визначається профілем густини ядер $\Delta\rho(\vec{r})$ у відповідності до формули

$$n = n_c - s\Delta\rho/2, \quad (2)$$

де $n_c = 1 - b_{\text{ког}} \rho_c \lambda_0^2 N_A (2\pi M)^{-1}$ - значення показника заломлення в критичній точці, $s = 2(1 - n_c)$ - безрозмірний малий параметр. В свою чергу, профіль густини визначається, по-перше, впливом обмежуючих поверхонь у відповідності з наступним виразом [1, 12]:

$$\Delta\rho = \Delta\rho_b \left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta x - \lambda_e}{\xi}\right) \right], \quad (3)$$

по-друге, ефектами просторової обмеженості, які враховуються за допомогою скейлінговою гіпотези [6-10] для рідин, котрі за своїми термодинамічними параметрами знаходяться в околі критичної точки:

$$\Delta\rho_b = L^{-\beta/\nu} F(x, y). \quad (4)$$

У виразах (3) і (4) Δx - відстань від стінки; λ_e - так звана екстраполяційна довжина (практично, в розрахунках часто покладають $\lambda_e = 0$); ξ - радіус кореляції флуктуацій густини, яка виступає параметром порядку для рідини в критичній області; L - лінійний розмір рідинної системи в

напрямку просторової обмеженості (наприклад, товщина щілиноподібної пори або радіус циліндричної пори); $F(x, y)$ - масштабна функція аргументів $x = a\tau L^{1/\nu}$, $y = bhL^{35/\nu}$, де $\tau = (T - T_c)/T_c$ - температурна змінна, а h - польова змінна, спряжена параметру порядку.

Використовуючи ітераційну процедуру розв'язку хвильового рівняння (1), задамо хвильову функцію нейтрона у вигляді $\psi = \psi_0 + \psi_1$. Тут, як зазвичай (див., наприклад, огляд [13]), ψ_0 - хвильова функція нейтрона в пучку, що проходить через досліджуване середовище без розсіювання, тобто функція ψ_0 є розв'язком рівняння (1) без врахування флуктуацій густини ядер, а саме:

$$\Delta\psi_0 + k_0^2 n^2 \psi_0 = 0, \quad (5)$$

тоді як хвильова функція ψ_1 однократно розсіяного нейтронного пучка задовольняє наступному диференціальному рівнянню:

$$\Delta\psi_1 + k_0^2 n^2 \psi_1 = 4\pi b_{\text{ког}} \rho' \psi_0.$$

Будемо вважати надалі, що розсіюванням нейтронів вищих порядків, починаючи з двократного, можна знехтувати незважаючи на те, що рідинна система перебуває в близькому околі критичною точки, де інтегральний за всіма напрямками коефіцієнт розсіювання нейтронів досягає досить великих значень. Безпосередньою підставою для розгляду лише однократного розсіювання є малі значення об'ємів, в яких відбувається критична опалесценція нейтронів.

2. Проходження нейтронів через просторово обмежену рідину в критичній області

Розглянемо геометрію обмеженої неоднорідної рідини, яка представлена на рис. 1. Будемо вважати, що зразок у вигляді щілиноподібної або циліндричної пори, заповненої рідиною, є обмеженим в напрямку вісі x , а неоднорідність, котра зумовлена дією зовнішнього (наприклад, гравітаційного) поля, спрямована вздовж вісі z . Знизу на границю $z = -L_0$ рідинної системи падає монохроматичний нейтронний пучок, який характеризується хвильовою функцією $\psi = C_0 e^{ik_0 z}$, де k_0 - хвильовий вектор в зовнішньому середовищі, яке для визначеності нехай будемо вакуумом. Нейтронний пучок, відбитий від нижньої границі $z = -L_0$ досліджуваної системи будемо описувати хвильовою функцією $\psi = D e^{-ik_0 z}$, тоді як нейтронний пучок, що пройшов у вакуум через неоднорідну рідину, перетнувши її верхню границю $z = L_0$, характеризується хвильовою функцією $\psi = F e^{ik_0 z}$.

Розв'язок диференціального рівняння (5), яке описує процес розповсюдження нейтронів через просторово обмежену і неоднорідну рідину в критичній області, описується наступною формулою:

$$\psi_0(z) = \sqrt{\frac{n_c}{n(z)}} \left\{ A \exp \left[ik_0 \int_{-L_0}^z n(h) dh \right] + B \exp \left[-ik_0 \int_{-L_0}^z n(h) dh \right] \right\}. \quad (6)$$

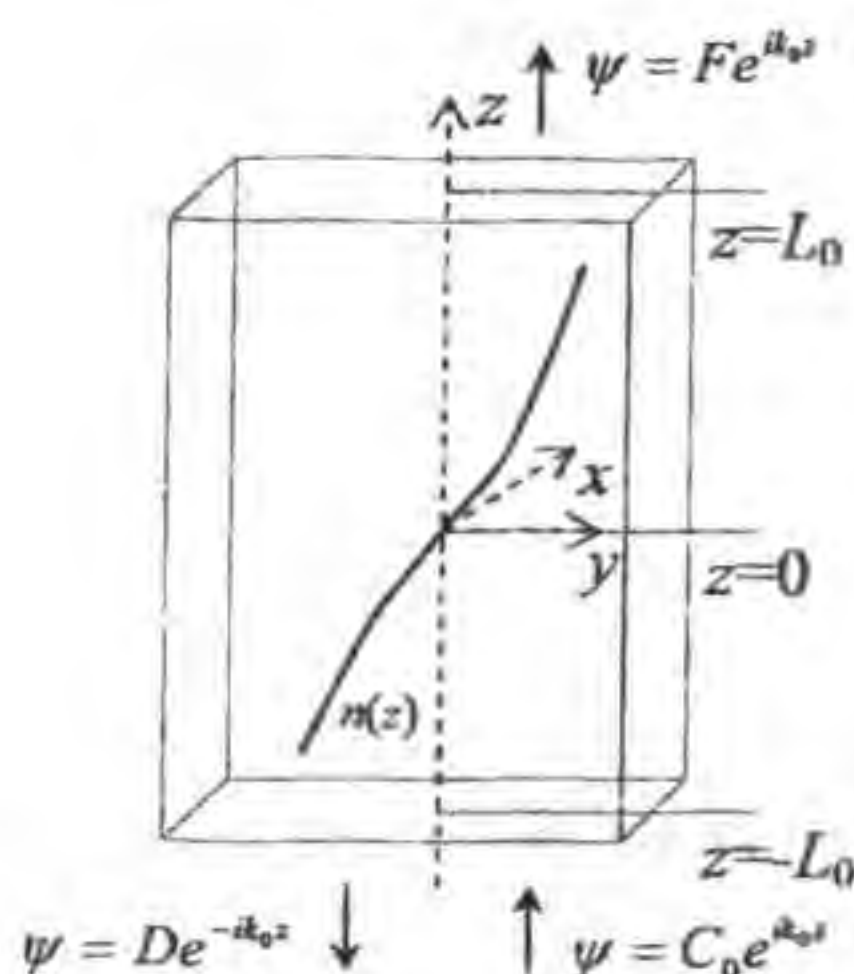


Рис. 1. Геометрія задачі проходження нейтронів в просторово обмеженій рідині поблизу критичної точки.

Тут A і B – амплітуди, котрі характеризують прямий і зворотний нейтронні пучки, що розповсюджуються всередині неоднорідної рідини. При цьому зворотний пучок (другий доданок у формулі (6)) можна трактувати як хвилю, відбиту від своєрідного бар'єру, котрий створений за рахунок неоднорідного розподілу (профілю) $\rho_0(z)$ густини ядер рідини, яка знаходиться у термодинамічному стані, близькому до критичного. Амплітуди A і B визначаються з умов неперервності хвильової функції ψ_0 та її похідної по z на границях $z = -L_0$ та $z = L_0$.

Для отримання формули (6) було взято до уваги відоме наближення Вентцеля-Крамерса-Брюллюена (ВКБ), яке фізично відповідає досить плавній зміні нейтронного показника заломлення на відстані де-бройльової довжини хвилі нейтронів λ_0 згідно з критерієм: $|\nabla n/n_c| \ll k_0$. При використанні явного вигляду нейтронного показника заломлення (3) та результатів комп'ютерного моделювання профілю густини поблизу стінки [1, 12] вищезазначений критерій методу ВКБ зводиться до такої нерівності:

$$\frac{\lambda_0}{2\pi} \frac{\partial \Delta \rho}{\partial \Delta x} \approx 10^{-4} \ll 1. \quad (7)$$

З метою отримання (7) було враховано, що довжина хвилі холодних нейтронів має порядок $\lambda_0 \approx 9 \cdot 10^{-10}$ м (відповідно хвильовий вектор $k_0 \approx 7 \cdot 10^9$ м⁻¹), а також той факт [1], що для щілиноподібної пори завширшки 3 нм, заповненої водою в критичній області, густина рідини практично досягає свого об'ємного значення на відстані трьох радіусів кореляції ξ від стінки. Крім того, взято до уваги, що градієнт густини має порядок $\partial \Delta \rho / \partial \Delta x = (\Delta \rho_s / \xi) \partial \Delta \rho^* / \partial \xi \approx 10^6$ м⁻¹, безрозмірне значення

відхилення густини $\Delta\rho_{\max}^* = \Delta\rho/\Delta\rho_b \approx 0,2$, радіус кореляції $\xi = \xi_0\tau^{-\nu}$ з амплітудою $\xi_0 = 0,08$ нм та фактором зростання радіусу кореляції $\tau^{-\nu} \approx 10^3$, а також значення екстраполяційної довжини $\lambda_e \approx 0,022$ нм.

Що стосується умов, за якими наближення ВКБ може виконуватися в напрямку дії зовнішнього поля, тобто паралельно вісі z , то це питання розглядалося раніше (див., наприклад, [14-16]). Основний результат полягає в тому, що нерівності для температурної τ і польової h змінних, при виконанні яких критерій методу ВКБ є справедливим, мають наступний вигляд: $|\tau| \gg 10^{-(7+8)}$ на критичній ізохорі, $|h| \gg 10^{-(12+13)}$ на критичній ізотермі ($h = \rho_c gz / P_c$; g – прискорення вільного падіння, P_c – критичний тиск рідини), тобто ці нерівності виконуються практично для всієї експериментальної області дослідження просторово обмежених рідинних систем.

Монохроматичні коефіцієнти пропускання T

$$T = \frac{|F|^2}{|C_0|^2} = \frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2} \left\{ 1 + \left[\frac{(1-n_1n_2)^2}{(n_1+n_2)^2} - 1 \right] \sin^2 \alpha \right\}^{-1}, \quad (8)$$

та відбивання R

$$R = \frac{|D|^2}{|C_0|^2} = \frac{(n_1-n_2)^2}{(n_1+n_2)^2} \frac{\left\{ 1 + \left[\frac{(1-n_1n_2)^2}{(n_1+n_2)^2} - 1 \right] \sin^2 \alpha \right\}}{\left\{ 1 + \left[\frac{(1+n_1n_2)^2}{(n_1+n_2)^2} - 1 \right] \sin^2 \alpha \right\}}, \quad (9)$$

обчислення яких проведене в такий же спосіб, як і для рідин у великих об'ємах [11], демонструють ефект Рамзауера, тобто періодичний характер залежності цих коефіцієнтів від товщини зразка $d=2L_0$ в напрямку розповсюдження нейтронного пучка. Точніше кажучи, монохроматичні коефіцієнти пропускання T і відбивання R нейтронів періодично залежать від величини

$$\alpha = k_0 \int_{-L_0}^{L_0} n(h) dh = 2k_0 n_c L_0 - \frac{k_0 s}{2} \int_{-L_0}^{L_0} \Delta\rho(\tau, h) dh, \quad (10)$$

яка є нейтронним аналогом оптичної довжини шляху пучка в досліджуваному середовищі. У формулах (8) і (9) через n_1 і n_2 позначені нейтронні показники заломлення відповідно на границях $z=-L_0$ та $z=L_0$. Так, для щілоноподібної пори, яка заповнена азотом, значення нейтронних показників заломлення поблизу границь $z=-2$ см та $z=2$ см дорівнюють відповідно $n_1=1-1,45 \cdot 10^{-5}$ та $n_2=1-1,65 \cdot 10^{-5}$ з врахуванням гравітаційного ефекту вздовж критичної ізотерми.

Проаналізуємо другий доданок в (10) для різних граничних напрямків підходу до критичного стану рідини. На критичній ізотермі параметр порядку рідини $\Delta\rho \sim h^{1/\delta}$, що в результаті інтегрування дає

$$\alpha = 2k_0 L_0 \left(n_c - \frac{s \delta L_0^{1/\delta}}{2(\delta + 1)} \right), \quad (11)$$

тоді як в околі критичної ізохори $\Delta\rho \sim h/\tau^\gamma$ і відповідно маємо

$$\alpha = 2k_0 L_0 \left(n_c - \frac{s L_0}{4\tau^\gamma} \right). \quad (12)$$

Таким чином, окрім основного внеску $\alpha_0 = 2k_0 n_c L_0$ для аргументу тригонометричної функції $\sin^2 \alpha$, існують додаткові, суттєво менші внески $\Delta\alpha \approx 10^{-5} \alpha_0$ (див. числові оцінки в [17]), котрі визначаються другими доданками у виразах (10)-(12).

Слід зазначити ще одну важливу, на наш погляд, обставину, яка є наслідком проведених розрахунків. Мова йде про додатковий показник обмеженості, який з'являється в задачах проходження і розсіювання електромагнітних хвиль і частинок (зокрема, нейтронів) в просторово обмежених середовищах, а саме: відношення лінійного розміру системи L в напрямку просторової обмеженості до довжини хвилі λ випромінювання (в даному випадку – довжини хвилі де Бройля λ_n для нейтронів). Дійсно, цей показник (позначимо його через $S_2 = L/\lambda$) є додатковим до іншого показника обмеженості $S_1 = L/\xi$, який вводиться зазвичай (див., наприклад, [6-10]) для характеристики відношення лінійного розміру обмеженого середовища до радіуса кореляції флуктуацій параметра порядку досліджуваної системи. Для систем у великих об'ємах, для яких $L \gg \xi$, роль параметра S_2 відіграє звичайно величина ξ/λ . З показником S_1 безпосередньо зв'язаний схожий геометричний параметр $S_1^* = L/\xi_0$ (ξ_0 – амплітуда радіуса кореляції), котрий визначає кількість моношарів, які вкладаються в напрямку просторової обмеженості зразка (товщини щільності, радіуса циліндричної пори тощо). За визначенням просторово обмеженої системи поблизу критичної точки (див., наприклад, [9], її лінійний розмір L має бути менше або порядку радіуса кореляції ξ , тобто для просторово обмеженої системи показник обмеженості $S_1 = L/\xi \leq 1$. Оскільки температурний фактор зростання радіуса кореляції досягає в реальних експериментах з класичними рідинами поблизу критичної точки максимальних значень порядку $(\tau^{-\gamma})_{\max} \approx 10^3$, то з врахуванням типових амплітуд радіуса кореляції в таких об'єктах $\xi_0 \approx 0,1 \div 1$ нм, рідинну систему з лінійним розміром $L \approx 0,1 \div 1$ мкм слід вважати просторово обмеженою.

Для такої системи геометричний параметр $S_1^* = L/\xi_0 \approx 10^3$. Цікаво відзначити, що для холодних нейтронів з $\lambda_n = 9 \cdot 10^{-10}$ м додатковий показник обмеженості $S_2 = L/\lambda_n$ має той же порядок, що й геометричний параметр $S_1^* = L/\xi_0$.

Періодична залежність основного внеску до коефіцієнтів T і R від величини $\alpha_0 = 2k_0 n_c L_0$ містить саме показник обмеженості S_2 , оскільки $\alpha_0 = 2\pi S_2$, де $S_2 = 2L_0/\lambda_c$, а довжина хвилі де Бройля для рідини поблизу критичної точки дорівнює $\lambda_c = \lambda_n/n_c$, причому критичне значення нейтронного показника заломлення $n_c \approx 1$. Додаткові внески $\Delta\alpha$ від других доданків у виразах (10)-(12) мають своїм наслідком своєрідну «модуляцію» коефіцієнтів пропускання і відбивання, яка характеризується значно більшою довжиною хвилі λ^* , ніж λ_c , а саме: $\lambda^* = \lambda_c (s\Delta\rho)^{-1} \approx 10^6 \lambda_c$. Іншими словами, можна стверджувати, що ця додаткова модуляція коефіцієнтів пропускання T і відбивання R (додатковий ефект Рамзауера) відбувається в просторово обмеженій рідині поблизу критичної точки з довжиною хвилі, притаманній ультрахолодним нейтронам.

3. Пружне розсіяння нейтронів в обмежених рідинах

Розглянемо дві типові геометрії обмеженої рідинної системи поблизу критичної точки: 1) щілиноподібна пора, для якої лінійні розміри у напрямках осей x і y значно перевищують радіус кореляції флуктуацій густини в об'ємній фазі рідини ($L_x \approx L_y \gg \xi$), тоді як в напрямку z пора має ширину $d = 2L_z$, котра порядку або менша за радіус кореляції ($L_z \leq \xi$); 2) циліндрична пора, яка в напрямку вісі z має великі розміри ($L_z \gg \xi$), а вздовж радіусу a_{cyl} циліндру є суттєво обмеженою, тобто $a_{cyl} \leq \xi$.

Розглянемо середнє по статистиці критичних флуктуацій значення диференціального (за тілесним кутом Ω) перерізу σ пружного розсіяння нейтронів, для якого справедливий наступний результат [18, 19]:

$$\left\langle \frac{d\sigma}{d\Omega} \right\rangle = |\psi_1(r)r|^2 = \\ = b_{\text{коз}}^2 \iint_V G_2(r_1, r_2) \psi_0(r_1) \psi_0^*(r_2) \exp \left[ik_0 \left(n_c - \frac{s\Delta\rho}{2} \right) (\vec{n}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1) \right] dr_1 dr_2. \quad (13)$$

У виразі (13) через n_1 позначений одиничний вектор в напрямку розсіяння нейтронного пучка, а через G_2 - парна кореляційна функція флуктуацій густини для зазначених вище геометрій рідинної системи в формі щілиноподібної та циліндричної пори.

В результаті інтегрування формули (13) для диференціального перерізу пружного розсіяння нейтронів з використанням кореляційних функцій G_2 в явному вигляді та з врахуванням того, що основний внесок в

інтеграл по відносній просторовій змінній $r=r_1-r_2$ дають хвильові вектора $k_{xy} = (4\pi/\lambda)(n_c - s\Delta\rho/2)\sin(\theta_{xy}/2)$ і $k_z = (4\pi/\lambda)(n_c - s\Delta\rho/2)\sin(\theta_z/2)$, отримуємо такі остаточні вирази:

1) для щілиноподібної пори

$$\left\langle \frac{d\sigma}{d\Omega} \right\rangle^P \sim \left[(\kappa_0^2 \tau^{2\nu} + \pi^2/4L_0^2) + k_{xy}^2 \right]^{-1} \left[(\pi^2/4L_0^2) + k_z^2 \right]^{-1}, \quad (14)$$

2) для циліндричної пори

$$\left\langle \frac{d\sigma}{d\Omega} \right\rangle^C \sim \left\{ 1 + \frac{a^2}{2} \left[(1 - 4/\mu_1^2) k_{xy}^2 + 2a^2 (\kappa_0^2 \tau^{2\nu} + \mu_1^2/a^2) k_z^2 \right] \right\}^{-1}. \quad (15)$$

Отримані в (14) і (15) результати підтверджують основні наслідки гіпотези скейлінгу для просторово обмежених систем [6-10], а саме:

1. У відповідності до цієї гіпотези слід очікувати, що довільна сингулярна фізична властивість A (наприклад, теплоємність, сприйнятливості або переріз пружного розсіяння нейтронів) повинна мати таку критичну поведінку в залежності від співвідношення лінійного розміру L системи в напрямку її просторової обмеженості та радіуса кореляції ξ : (а) $A(L/\xi) \sim \xi^n$ при $L \gg \xi$, тобто фізична властивість демонструє критичні аномалії, притаманні просторово необмеженим системам; (б) $A(L/\xi) \sim L^n$ при $L \leq \xi$, тобто аномалії фізичних властивостей зникають, оскільки радіус кореляції в цьому випадку має бути скінченим.

Дійсно, з формул (14) і (15) видно, що для напрямків просторової обмеженості рідинної системи (вісь z для щілиноподібної пори або вісі x, y для циліндричної пори) внески в диференціальний переріз пружного розсіяння нейтронів містять лише розмірні ефекти, тоді як в інших напрямках, для котрих $L \gg \xi$, виникає залежність від термодинамічних властивостей (точніше кажучи, від квадрату оберненого радіуса кореляції $\kappa^2 = \kappa_0^2 \tau^{2\nu}$). Зауважимо, що у формулах (14) і (15) наведена лише залежність $\kappa(\tau)$ на критичній ізохорі. В протилежному граничному випадку підходу до критичної точки, тобто на критичній ізотермі, замість множника $\Delta\rho^{2\nu/\beta}$, що залежить від температурної змінної, слід було б записати множники $\Delta\rho^{2\nu/\beta}$ або $h^{2\nu/\beta\delta}$, котрі задають залежність квадрату оберненого радіуса кореляції від параметра порядку рідини $\Delta\rho$ або її польової змінної h .

2. Другий висновок стосується екстремальних властивостей диференціального перерізу пружного розсіяння нейтронів по відношенню до змінних τ , $\Delta\rho$ і h . Як відомо [20], для рідини у великих об'ємах з лінійними розмірами $L \gg \xi$ явище критичної опалесценції нейтронів, тобто максимум величини $\langle d\sigma/d\Omega \rangle$ для нульових кутів розсіяння ($k_{xy}=k_z \rightarrow 0$), повинно спостерігатися в експерименті для нульових значень цих змінних,

тобто в самій критичній точці рідинної системи, де $T=T_c$, $\rho=\rho_c$, $h=h_c$. Для просторово обмежених рідинних систем ситуація радикально змінюється: суттєво менш різкий максимум для диференціального перерізу пружного розсіяння нейтронів повинен спостерігатися в експерименті при температурі T_m , густині ρ_m та критичному полі h_m , які є менші за критичні параметри об'ємної рідинної фази, тобто при $T_m < T_c$, $\rho_m < \rho_c$, $h_m < h_c$. Зазначимо, що параметри T_m , ρ_m та h_m не можуть вважатися критичними, оскільки для просторово обмеженої рідини не існує критичних аномалій, котрі притаманні системам з практично необмеженим зростанням радіусу кореляції флуктуацій параметра порядку.

Числові значення величин T_m , ρ_m та h_m , які лише можуть нагадувати у зазначеному вище сенсі критичні параметри об'ємної фази T_c , ρ_c , h_c обчислюються за такими формулами:

$$T_m = T_c [1 + f(S_1^*)^{1/\nu}]^{-1}, \quad \rho_m = \rho_c [1 + f(S_1^*)^{\beta/\nu}]^{-1}, \quad h_m = h_c [1 + f(S_1^*)^{\beta\delta/\nu}]^{-1}.$$

В залежності від геометрії рідинної системи функція $f(S_1^*)$ приймає наступні значення: (а) $f^p(S_1^*) = \pi\xi_0^2/2L_0$ для щілиноподібної пори; (б) $f^c(S_1^*) = \mu_1\xi_0/a_{cl}$ для циліндричної пори.

Існує велика кількість експериментальних підтверджень (див. посилання в огляді [1], а також в [17]) щодо зсуву точок екстремумів різних фізичних властивостей просторово обмежених систем по відношенню до критичних параметрів їх об'ємних фаз (перш за все, це стосується співвідношення між температурами T_m і T_c).

Література

1. I. Brovchenko, A. Oleinikova. Molecular organization of gases and liquids at solid surfaces // Handbook Theor. Comput. Nanotechnology, 2005, 62, P. 1-98.
2. Y.B. Melnichenko, G.D. Wignall, D.R. Core, and H. Frielinghaus. Density fluctuations near the liquid-gas critical point of a confined fluid // Phys. Rev. E69, 2004, P. 057102.
3. Y.B. Melnichenko, G.D. Wignall, D.R. Core, H. Frielinghaus, L.A. Bulavin. Liquid-gas critical phenomena under confinement: small-angle neutron scattering studies of CO₂ in aerogel // J. Mol. Liquids, 2005, 120, #1-3, P. 7-9.
4. D. Woywod, S. Schemmel, G. Rother, G.H. Findenegg, M. Schoen. Phase behavior and local structure of a binary mixture in pores: mean-field lattice model calculations for analyzing neutron scattering data // J. Chem. Phys., 2005, 122, P. 124510.

5. M. Stieger, W. Richtering, J.S. Pedersen, P. Lindner. Small-angle neutron scattering study of structural changes in temperature sensitive microgel colloids // *J. Chem. Phys.*, 2004, 120, P. 6197-206.
6. M.E.Fisher. Critical Phenomena. Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", ed. M.S. Green. 51. -New York: Academic, 1971.
7. Finite Size Scaling and Numerical Simulation of Statistical Systems, ed. V. Privman. -Singapore: World Scientific, 1990.
8. K. Binder. Phase Transitions in Reduced Geometry // *Annu. Rev. Phys. Chem.*, 1992, 43, P. 33-59.
9. K.A. Chalyy. Scaling transformation hypothesis for spatially bounded two-component liquid mixtures // *Ukr. Jour. Phys.*, 2004, 49, № 7, P. 648-654.
10. К.О. Чалий, Л.А. Булавін, О.В. Чалий. Динамічний скейлінг та ширина центральної компоненти спектра критичної опалесценції в рідинах з обмеженою геометрією // *Жур. Фіз. Досл.*, 2005, 9, №1, С. 66-70.
11. В.И. Сугаков, А.В. Чалый, Л.М. Черненко. Критическая опалесценция нейтронов в неоднородной жидкости в гравитационном поле. 1. Показатель преломления и рефракция нейтронов в критической области // *УФЖ*, 1990, 35, №7, С. 1036-1041.
12. K. Binder. In "Phase Transitions and Critical Phenomena", eds. C.Domb and J.L.Lebowitz, 8, - London, Academic Press, 1983.
13. A.V. Chalyi. Non-homogeneous liquids near the critical point and the boundary of stability // *Sov. Sci. Rev. A. Phys.* (ed. I.M. Khalatnikov), 1992, 16, P. 1-103.
14. Е.Л. Лакоза, А.В. Чалый. Многократное рассеяние света вблизи критической точки // *УФН*, 1983, 140, №3, С. 393-428.
15. В.Л. Гинзбург. Распространение электромагнитных волн в плазме. - Москва, ГИФМЛ, 1960.
16. Н.Л. Цыганов, А.В. Чалый // *ЖЭТФ*, 1971, 61, №4, С. 1605-1611.
17. К.О. Чалий, Нейтронний показник заломлення обмежених рідин в критичній області // *УФЖ*, 2005, 50, №12, (в друку).
18. В.И. Сугаков, А.В. Чалый, Л.М. Черненко. Критическая опалесценция нейтронов в неоднородной жидкости в гравитационном поле. 2. Упругое когерентное рассеяние // *УФЖ*, 1991, 36, №9, С. 1355-1362.
19. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика. -Москва, Наука, 1974.
20. Л.А. Булавин, Т.В. Кармазина, В.В. Клепко, В.І. Слісенко. Нейтронна спектроскопія конденсованих середовищ. -К.: Академперіодика, 2005.

Надійшла до редакції 28.10.2005

УДК 618.785.556

Вашенко В.М.^{*}, Лоза Є.А.[∞],
Патлашенко Ж.І., Банніков О.О.,
Черниш О.Є.

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД АБЕРАЦІЙНОГО РОЗРАХУН- КУ МОНОХРОМАТОРІВ Ч.1

В роботі запропоновано більш точ-
ний та універсальний, порівняно з класи-
чним, метод чисельного абераційного
розрахунку дифракційних монохромато-
рів на прикладі схеми одинарного моно-
хроматора. Метод дозволяє будувати
більш точне абераційне спектральне зо-
браження вхідної щілини та проводити
мінімізацію аберацій монохроматора.

Ключові слова: дифракційний
монохроматор, абераційний розрахунок,
спектральне зображення, мінімізація
аберацій.

^{*}E-mail: Daniilko@mail.ru

Vaschenko V.M.^{*}, Loza E.A.[∞],
Patlashenko Jh.I., Bannikov O.O.,
Chernysh O.E.

THE NUMERICAL METHOD OF MONOCHROMATOR ABER- RATIONS CALCULATION P.1

A more accurate and universal com-
paring to classical method of numerical ab-
errations of diffraction monochromators
calculation is proposed in this work by a
single monochromator scheme example.
The method allows plotting aberration im-
age of entrance slit and minimizing mono-
chromator aberrations.

Key Words: diffraction monochromator,
aberrations calculation, spectral image,
aberrations minimization.

[∞]E-mail: LozaE@ukr.net

1. Вступ

Абераційний розрахунок та мінімізація аберацій є теоретичною ос-
новою при розробці та створенні дифракційних монохроматорів. Широко
застосовувана для цього класична наближена абераційна теорія зручна
тим, що дає можливість в явному вигляді отримати робочі розрахункові
формули та застосувати їх для абераційного аналізу оптичних схем. Однак,
в нових задачах розрахунку малогабаритних дифракційних спектрометрів
на нових оптичних елементах виникає потреба в більш точних та більш
універсальних абераційних методах. Проте, найбільш загальний алгоритм
дифракційних розрахунків схем монохроматорів в рамках електромагніт-
ної теорії світла, в загальному вигляді вимагає недосяжних на сьогодні по-
тужностей комп'ютерів.

Основою класичних уявлень про дифракцію електромагнітних
хвиль оптичного діапазону є теорія Максвела. Однак, для довжин хвиль
порівняних з розмірами об'єкта, класичні методи опису дифракції дещо
змінюються, в наслідок чого точність класичної формули дифракційної
гратки стає незадовільною – у різних дифракційних порядках виникає пе-
рерозподіл інтенсивності та зміна форми дифракційного максимуму і, від-
повідно, змінюється роздільна здатність.

В характеристики розроблюваного нового приладу завжди вкладаються вихідні дані про спектральні параметри досліджуваного об'єкта, як часто отримуються шляхом наближеного моделювання.

При збільшенні частоти випромінювання (енергії світлових квантів) на якість спектрального зображення починає помітно впливати квантовий характер взаємодії світла з матеріалом та структурою оптичних поверхонь. Процеси взаємодії випромінювання з матеріалом оптичних поверхонь на сьогодні ще не мають завершеного теоретичного опису. Відомо [1], що при взаємодії випромінювання з штрихами ґратки виникає його поляризація, величина якої залежить від матеріалу ґратки та співвідношення довжини хвилі до ширини штриха. Крім того вхідна та вихідна щілини і усі інші оптичні елементи спектрометра також вносять вклад в поляризацію випромінювання. Кожна неоднорідність структури поверхні працює, як об'єкт на якому відбувається складний комплекс фізичних явищ із випадковими статистичними характеристиками – розсіювання, поглинання, дзеркальне відбивання, дифракція, інтерференція, люмінесценція, зміна поляризації випромінювання та багато інших явищ що в решті решт породжує додаткове, невраховане розсіяне випромінювання. Крім цього квантовий характер потоку фотонів призводить до статистичних флуктуацій величини вимірюваної інтенсивності, породжуючи додатковий "дробовий" шум. Тому важливо забезпечити максимально можливу якість обробки всіх оптичних поверхонь. Як відомо, технологічна неоднорідність кроку нарізки пов'язана з інтенсивністю "духів", що призводить до зменшення відношення сигнал/шум. Погіршення якості обробки оптичних поверхонь та елементів особливо яскраво спостерігається на краях робочих оптичних частин оптичних деталей, поверхонь і об'єктів. Багато залежить також і від якості обробки кожного окремого штриха ґратки, оскільки при його відхиленні від ідеальної форми виникає зайве паразитно-розсіяне світло та спотворення зображення. Збільшення розсіяного випромінювання та зменшення світлосили монохроматора також виникає внаслідок місцевого чи загального забруднення оптичних деталей за рахунок ефектів, пов'язаних з інтерференцією у тонких плівках забруднювача та дифракцією на маленьких частинках пилу. Для зменшення розсіяного на оптичних елементах випромінювання застосовують просвітлюючі покриття, але слід брати до уваги, що будь-яке просвітлююче покриття є селективним елементом.

Монохроматор, особливо дифракційний, в цілому є поляризаційно-селективною системою, тому для усунення інструментального поляризаційного шуму потрібно робити монохроматор нечутливим до поляризації, що вимагає деполаризації випромінювання на вхідній щілині або врахування поляризаційної дії монохроматора. Поляризація випромінювання на вихідній площині також є небажана, оскільки відгук будь-якого приймача світла залежить від поляризації випромінювання, що на нього потрапляє.

Для усунення цього ефекту перед приймачем встановлюється деполаризатор.

Компенсацію інструментальної поляризації можна здійснювати, застосовуючи подполяризційні елементи, такі, як класичні фазозміщуючі пластинки або деполаризатори. При використанні деполаризатора, на вихідній площині буде втрачено інформацію про попередню поляризацію випромінювання. Також можна застосовувати фазові пристрої на електрооптичних, магнітооптичних чи акустооптичних ефектах. Цей підхід дозволяє зменшити кількість відбиваючих поверхонь, оскільки як магнітооптичний фазовий модулятор на ефекті Кера можна використовувати додатково застосовуване поворотне дзеркало. При цьому відкривається можливість корегувати фазове зміщення в залежності від довжини хвилі і тим самим значно збільшити ефективність компенсації інструментальної поляризації.

Виходячи зі складності фізичних процесів у оптичному каналі монохроматора на сьогоднішній день не існує завершеної абераційної теорії монохроматорів. Тому в даній роботі пропонується новий більш загальний і більш точний чисельний метод розв'язання задачі абераційних розрахунків, яким може з успіхом застосовуватися для оптимізації схем одинарних і кратних монохроматорів.

2. Постановка задачі

Суть задачі абераційних розрахунків оптичної схеми дифракційного монохроматора полягає у розрахунках дифракції променя на дифракційній ґратці. Розрахунки виконаємо для одинарного монохроматора, оптична схема якого складається із сферичної дифракційної ґратки з постійним кроком нарізки та вхідної і вихідної щілин виключно з метою отримання конкретних формул.

Для розрахунків введемо прямокутну декартову систему координат з початком відліку, розташованому у вершині дифракційної ґратки. Вісь x спрямована до центру вхідної щілини а вісь y спрямована вздовж центрального штриха ґратки. Штрихи на сферичній поверхні утворюються сукупністю площин, паралельних площині XOZ , відстають між якими дорівнює e_0 і задовольняє умові $\lambda \ll e_0 \ll R$, де R – радіус кривини сферичної поверхні, λ – довжина хвилі.

Для знаходження напрямів розповсюдження променів після їх дифракції на ґратці з метою виведення уточненого рівняння дифракційної ґратки, в межах нашої задачі найперше потрібно визначити площину дифракції і врахувати той факт, що рівновіддалені паралельні площини нарізають на сферичній поверхні нерівновіддалені штрихи.

Дифракційне зображення щілини визначається як точка перетину променя і вихідної площини.

3. Визначення площини дифракції і напрямку штриха

Для визначення площини дифракції потрібно розглянути симетрійні властивості сферичної дифракційної ґратки. В меридіональній площині круг Роуланда проходить через точку падіння променя на ґратку та центр кривини ґратки. Це вже є деяким узагальненням, порівняно з класичним підходом, оскільки кожній точці на ґратці в меридіональній площині відповідає сукупність кругів Роуланда. Значно складніше площина дифракції визначається у випадку, коли точка падіння променя на ґратку лежить поза меридіональною площиною. Розглянемо досить малу ділянку ґратки в околі точки падіння променя на неї. За визначенням, площина дифракції повинна містити центр кривини ґратки. Якщо уявити, що існує лише ця частина ґратки, то ми отримаємо ситуацію майже ідентичну до звичайної сферичної ґратки, зміщеної з центру системи координат та із дещо зміненими параметрами. Відповідно, площина дифракції є перпендикулярною до напрямку штрихів ґратки, як це було в меридіональній площині.

Згідно вищесказаного, можна дати *узагальнене визначення площини дифракції, як площини, що проходить через точку падіння променя на ґратку, містить нормаль $\vec{r}$ до її поверхні в точці падіння променя на ґратку і є перпендикулярною до напрямку штриха $\vec{\tau}$ в цій точці* (напрямок $\vec{\tau}$ визначається як дотична до просторової лінії штриха в точці падіння). Круг Роуланда в такому випадку буде визначатися, як коло, діаметром якого є відрізок, що з'єднує точку падіння променя на ґратку і центр кривини сферичної поверхні. Варто ще раз зауважити, що в даному випадку ми отримуємо сукупність кругів Роуланда різних для кожної точки на дифракційній ґратці. Для лаконічності формул вектори $\vec{r}$ і $\vec{\tau}$ повинні задовольняти умовам нормування

$$|\vec{r}| = 1, \quad |\vec{\tau}| = 1. \quad (3.1)$$

Для сферичної поверхні дифракційної ґратки з радіусом кривини R напрям $\vec{r}$ буде визначатися за формулою

$$\vec{r} = \frac{\{R - x, -y, -z\}}{R}, \quad (3.2)$$

де точка (x, y, z) – є точкою падіння променя на сферичну поверхню, рівняння якої в обраній нами системі координат записується наступним чином:

$$(x - x_c)^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad (3.3)$$

де $x_c = R$. Далі за допомогою (3.3) отримаємо

$$x = R - \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}. \quad (3.4)$$

Дотична до поверхні є перпендикулярна нормалі $\vec{r}$, і тому

$$\vec{r} \cdot \vec{\tau} = 0. \quad (3.5)$$

Оскільки штрихи лежить у площинах, паралельних XOZ , вектор $\vec{\tau}$ не матиме складової вздовж осі Oy , тобто

$$\vec{\tau} = \{\tau_x; 0; \tau_z\} \quad (3.6)$$

У випадку не сферичної поверхні або складної форми штрихів, вираз для компонентів вектора $\vec{\tau}$ буде більш складний.

Умови (3.1) та (3.5) дають змогу визначити невідомі τ_x та τ_z . За цих умов напрям $\vec{\tau}$ має два варіанти визначення: $\tau_z > 0$ або $\tau_z < 0$. Зручнішою є остання умова, оскільки ці напрями задають сталий тип системи координат, незалежно від положення точки $(x; y; z)$ – лише ліву або лише праву трійку векторів разом із їх векторним добутком. Тоді для невідомих величин можна записати

$$\tau_z = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_z^2}{r_x^2}}} ; \quad \tau_x = -\frac{r_z}{r_x} \tau_z \quad (3.7)$$

Далі, перше ніж записати узагальнене рівняння ґратки потрібно розглянути зміну її параметрів в залежності від положення точки падіння $(x; y; z)$ на її поверхні.

4. Визначення ширини штриха

Оскільки штрихи на ґратці утворюються паралельними площинами, то крок штриха на сферичній поверхні ґратки не є постійним. Якщо розглядати падіння променя на ґратку в точці $(x; y; z)$ з центра кривини поверхні, з нанесеними на неї штрихами (рис. 1), отримаємо вираз для ширини поточної штриха e_x .

$$\frac{e_0}{e_x} = \cos \theta, \quad (4.1)$$

де θ – кут між напрямом, перпендикулярним до осі ou в площині дифракції і напрямом на точку $(x; y; z)$ визначається наступним чином:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{\sqrt{(R-x)^2 + z^2}}. \quad (4.2)$$

Оскільки $e_0 \ll R$, e_x для двох сусідніх штрихів можна вважати майже незмінною, отже поточне значення e_x можна вважати неперервним і заданим в кожній точці на поверхні.

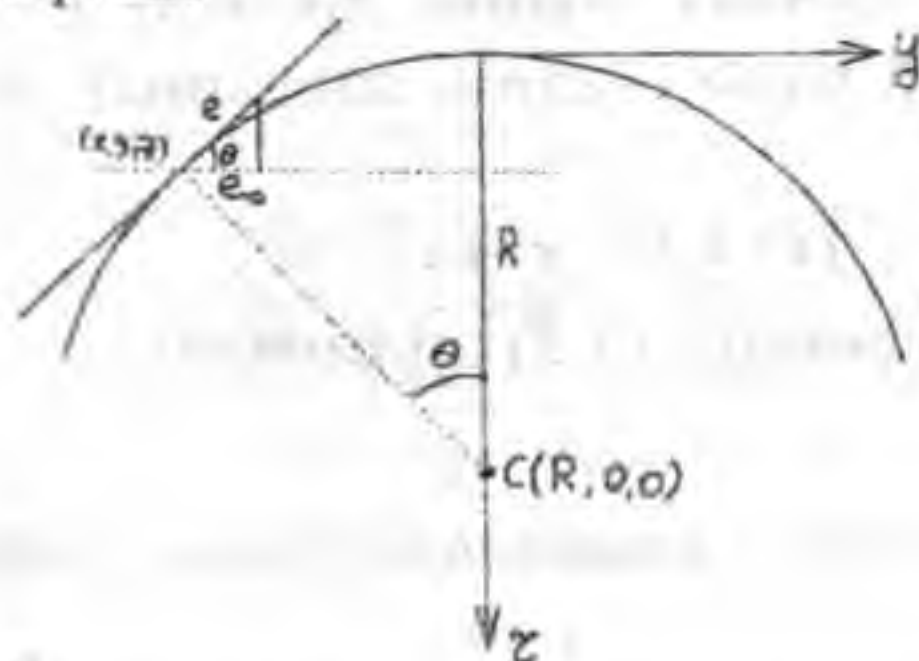


Рис. 1. Співвідношення ширини штриха з кроком ґратки.

Для того, щоб уникнути чисельного обчислення тригонометричних функцій, а, отже, і похибок, що з цим пов'язані, варто використати відому формулу

$$\cos \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + (\operatorname{tg} \theta)^2}}, \quad (4.3)$$

де для кутів $|\theta| < 90^\circ$ косинус є додатною величиною, що має місце в нашому випадку. Остаточно:

$$e_z = e_0 \sqrt{1 + \frac{y^2}{(R-x)^2 + z^2}}, \quad (4.3)$$

Маючи напрям та ширину птриха в точці падіння можна перейти до аналізу дифракції на ґратці.

5. Рівняння дифракційної ґратки

Напрямок падіння будь-якого променя, який потрапляє на ґратку через вхідну щілину визначається вектором

$$\vec{k} = \frac{\{x - l_x; y - l_y; z - l_z\}}{\sqrt{(x - l_x)^2 + (y - l_y)^2 + (z - l_z)^2}}, \quad (5.1)$$

де вектор $\vec{k}$ є нормованим, а $(l_x; l_y; l_z)$ – точка з якої промінь падає на сферичну поверхню ґратки. На відміну від класичного розгляду, точка $(l_x; l_y; l_z)$ обмежується лише умовою, щоб з неї було видно робочу поверхню ґратки. Внаслідок дифракції ґратка змінює напрям $\vec{k}$ на $\vec{k}'$. Причому дифракції зазнає лише та компонента вектора $\vec{k}$, яка лежить в площині дифракції.

В площині дифракції за умови $e_z \ll R$ рівняння дифракційної ґратки має дещо відмінний від класичного [1] вид:

$$\sin \psi + \sin \varphi = \frac{n\lambda}{e_x}, \quad (5.2)$$

де ψ – кут падіння променя у площині дифракції на ґратку відносно нормалі до поверхні в точці падіння, φ – кут дифракції цього ж променя за тих же умов, n – порядок дифракції. Якщо розглядати тривимірний випадок (рис.2), то дифракції зазнає лише компонента вектора, що лежить у площині дифракції, отже

$$(\vec{k}_1)_{[\vec{r} \times \vec{r}]} + (\vec{k}_1')_{[\vec{r} \times \vec{r}]} = \frac{n\lambda}{e_x}, \quad (5.3)$$

де індекс $[\vec{r} \times \vec{r}]$ відповідає проекції на напрямок $[\vec{r} \times \vec{r}]$, який при класичному розгляді співпадає з напрямком oy ; $\vec{k}_1$ і $\vec{k}_1'$ – проекції, відповідно, напрямів $\vec{k}$ і $\vec{k}'$ на площину дифракції. Виходячи з того, що $|\vec{k}| = |\vec{k}'| = 1$ та з умови збереження перпендикулярної складової $\vec{k}$, що відповідає закону збереження імпульсу $\hbar \vec{k}_\perp = \hbar \vec{k}_\perp'$, де $\hbar$ – стала планка, можна легко показати, що $|\vec{k}_1| = |\vec{k}_1'|$. Тоді рівняння (5.3) набуде вигляду:

$$\sin \psi + \sin \varphi = \frac{n\lambda}{e_x |\vec{k}_\parallel|}, \quad (5.4)$$

що співпадає з (5.2) з точністю до e_x ; для вхідних щілин достатньо малої висоти $|\bar{k}_y| \approx 1$. Величини φ і ψ мають той самий зміст, що і у рівнянні (5.2).

В нашому випадку (рис.2) невідомий кут ψ визначається за допомогою скалярного добутку

$$(-\vec{k}_1) \cdot \vec{r} = |\vec{k}_1| |\vec{r}| \cos \psi' . \quad (5.5)$$

Оскільки $|\vec{r}|=1$, виходячи із (5.5) отримаємо

$$\cos \psi = \frac{\bar{k}_{\parallel} \cdot \bar{r}}{|\bar{k}_{\parallel}|}, \quad (5.6)$$

де, якщо $y > 0$, величина ψ є від'ємна, в протилежному випадку вона є додатна.

Далі зі співвідношення (5.4) визначається кут φ .

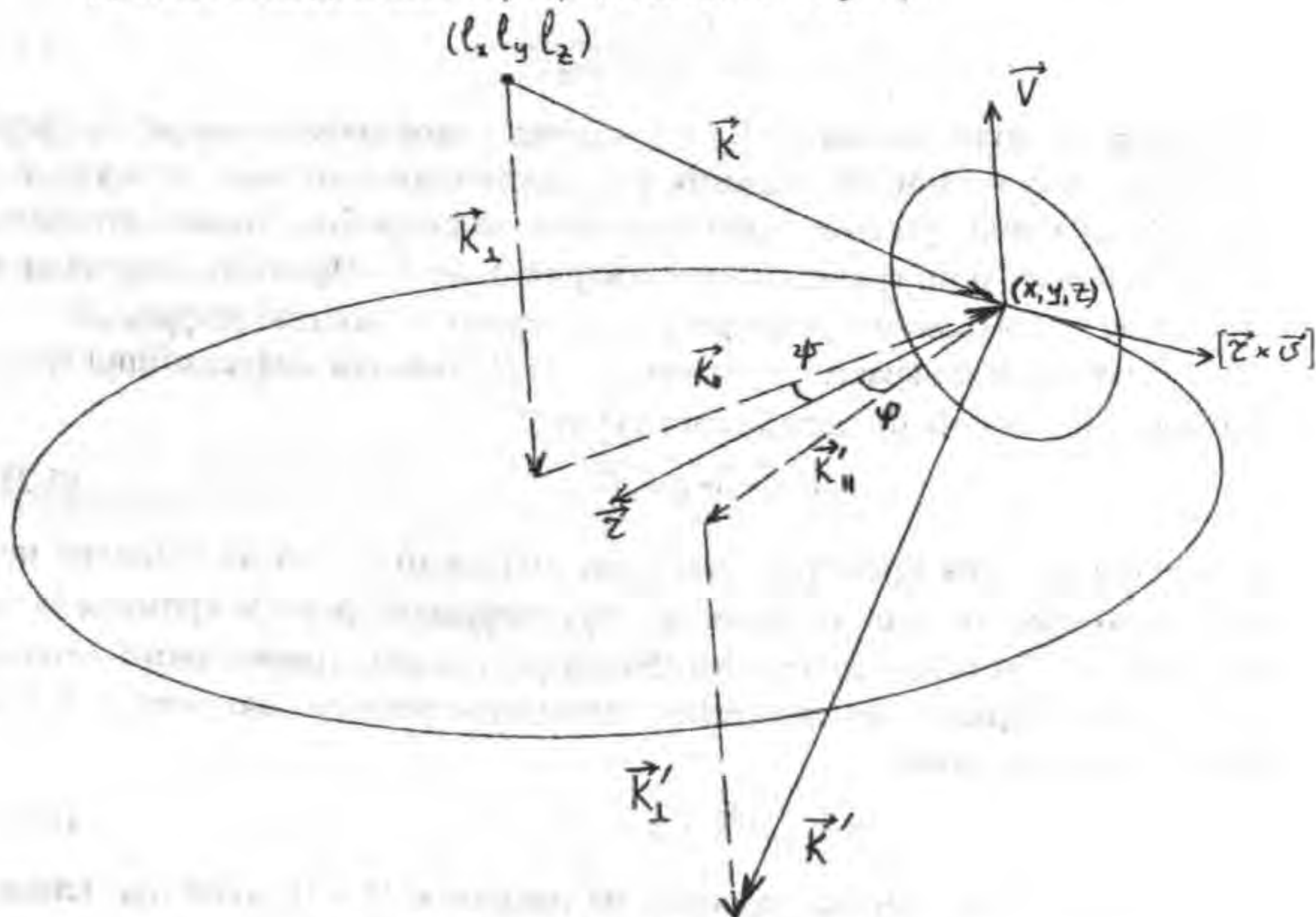


Рис.2. Дифракція променя на ґратці

6. Визначення напрямку дифрагованого променя

Як вже було зазначено, дифракції зазнає компонента променя, яка знаходиться у площині дифракції ґратки. Для перпендикулярної до площини дифракції складової променя можна записати [1] закон збереження імпульсу в узагальненій векторній формі

$$\hbar \vec{k}_\perp = \hbar \vec{k}_\perp', \quad (6.1)$$

Напрямок перпендикулярної до площини дифракції складової $\vec{k}$ задається вектором $\vec{\tau}$. За умови (3.1) згідно якої $|\vec{\tau}|=1$ можна визначити модуль перпендикулярної складової $\vec{k}$ за формулою $|\vec{k}_\perp| = \vec{k} \cdot \vec{\tau}$. Вектор $\vec{k}_\perp$ визначається з виразу

$$\vec{k}_\perp = (\vec{k} \cdot \vec{\tau}) \vec{\tau}, \quad (6.2)$$

а складову $\vec{k}_\parallel$, що лежить в площині дифракції можна визначити з очевидного співвідношення

$$\vec{k}_\parallel = \vec{k} - \vec{k}_\perp. \quad (6.3)$$

Далі, для визначення кута φ згідно (5.6) та (5.4) запишемо модуль вектора $\vec{k}_\parallel$ у вигляді

$$|\vec{k}_\parallel| = \sqrt{1 - |\vec{k}_\perp|^2} = \sqrt{1 - (\vec{k} \cdot \vec{\tau})^2}. \quad (6.4)$$

У площині дифракції відбувається поворот променя $\vec{k}_\parallel$ на кут $\varphi - \psi$ з урахуванням правила знаків [2] навколо вектора $\vec{\tau}$. Цей поворот задається через матрицю повороту $C_{\varphi-\psi}^\tau$ наступним чином:

$$\vec{k}_\parallel' = C_{\varphi-\psi}^\tau \vec{k}_\parallel, \quad (6.5)$$

де значок τ біля матриці повороту визначає те, що поворот відбувається навколо $\vec{\tau}$.

Для того, щоб правильно записати оператор повороту, потрібно спочатку повернути систему координат для того, щоб напрям $\vec{\tau}$ співпадав з однією з її координатних осей. Другою дією буде поворот вектора $\vec{k}_\parallel$ в новій системі координат навколо цієї осі. І остаточно слід повернути систему координат в попереднє положення. Оскільки в нашому випадку вектор $\vec{\tau}$ не має у-складової то, з урахуванням сказаного вище, матриця повороту набуде вигляду

$$C_{\varphi-\psi}^\tau = C_{\tilde{\theta}}^y \cdot C_{\varphi-\psi}^z \cdot C_{\tilde{\theta}}^y, \quad (6.6)$$

де значки y і z відповідають повороту навколо координатних осей oy і oz , $\tilde{\theta}$ - кут повороту вектора $\vec{\tau}$ відносно осі oz і визначається з виразів

$$\cos \tilde{\theta} = \tau_z; \quad \sin \tilde{\theta} = \tau_x. \quad (6.7)$$

Матриці поворотів навколо осей координат мають вид [3]:

$$C_{\tilde{\theta}}^y = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\theta} & 0 & \sin \tilde{\theta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \tilde{\theta} & 0 & \cos \tilde{\theta} \end{pmatrix};$$

$$C_{-\tilde{\theta}}^y = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\theta} & 0 & -\sin \tilde{\theta} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \tilde{\theta} & 0 & \cos \tilde{\theta} \end{pmatrix}; \quad (6.8)$$

$$C_{\varphi-\psi}^z = \begin{pmatrix} \cos(\varphi-\psi) & \sin(\varphi-\psi) & 0 \\ -\sin(\varphi-\psi) & \cos(\varphi-\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Підставляючи (6.8) у (6.6) отримаємо

$$C_{\varphi-\psi}^x = \begin{pmatrix} 1 + \cos^2 \tilde{\theta} (\cos(\varphi-\psi) - 1) & \cos \tilde{\theta} \sin(\varphi-\psi) & -\cos \tilde{\theta} \sin \tilde{\theta} (\cos(\varphi-\psi) - 1) \\ -\cos \tilde{\theta} \sin(\varphi-\psi) & \cos(\varphi-\psi) & \sin \tilde{\theta} \sin(\varphi-\psi) \\ -\cos \tilde{\theta} \sin \tilde{\theta} (\cos(\varphi-\psi) - 1) & \sin \tilde{\theta} \sin(\varphi-\psi) & 1 + \sin^2 \tilde{\theta} (\cos(\varphi-\psi) - 1) \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

Отже, тепер можна остаточно визначити напрям дифрагованого променя

$$\vec{k}' = \vec{k}_1' + \vec{k}_2'. \quad (6.10)$$

Маючи процедуру переходу від $\vec{k}$ до $\vec{k}'$ ми отримуємо унікальну можливість аналізувати просторовий хід променя до точки його перетину з ґраткою та після дифрагування на ній. Це створює можливість аналізувати утворюване ґраткою зображення, а також аналізувати форму поверхні найкращого фокусування і контролювано змінювати її положення і форму, варіюючи параметри схеми. Вектор $\vec{k}'$ містить інформацію про всі аберації оптичної схеми в придатній формі для конструкторського аналізу.

Для того, щоб надати наглядності виразу (6.10), розглянемо випадок сферичного дзеркала. При цьому також визначимо площину дифракції; напрям $\vec{\tau}$, очевидно, є довільним. Найцікавішим є те, що усі наведені вище формули будуть вірними якщо $n = 0$, тобто $\varphi = -\psi$, що підтверджує їх правильність. Зауважимо, що при переході до $n \neq 0$ ніяких змін в умові (6.1) не відбувається. Отже $\vec{k}_1$ у (6.10) відповідає виключно за геометричні аберації, притаманні сферичній поверхні. Матриця (6.9) містить як геометричну абераційну складову так і складову, пов'язану зі спектральними абераціями образу вхідної щілини. Причому, вклад геометричних аберацій (6.9) є нульовий для точок, розташованих у сагітальній площині. Варто також зауважити, що кривина спектрального зображення щілини визначається виключно складовою $\vec{k}_1$.

7. Зображення у площині вихідної щілини

Для побудови спектрального зображення вхідної щілини потрібно знайти точку перетину променя $\vec{k}'$ з площиною вихідної щілини. Як відомо, при класичному наближеному розгляді зображення вхідної щілини утворюється на крузі Роуланда, діаметр якого дорівнює радіусу кривини ґратки. Очевидно, що поверхня найбільш якісного фокусування зображення вхідної щілини відмінна від площини. Для того, щоб забезпечити мак-

$$b = \frac{\rho(1 + \cos \phi) - x \cos \phi + y \sin \phi}{k_x' \cos \phi - k_y' \sin \phi}. \quad (7.5)$$

Для побудови спектрального зображення щілини на площині вихідної щілини введемо двовимірну прямокутну декартову систему координат з початком координат розташованим відносно нашої тривимірної системи координат, пов'язаної з ґраткою, у точці $\{x_0; y_0; z_0\}$, координати якої визначаються

$$x_0 = \rho(1 + \cos \phi), \quad y_0 = \rho \cos \phi, \quad z_0 = 0. \quad (7.6)$$

В новій системі координат введемо осі ξ , яка співпадає з віссю OZ , та η . Тоді координати на площині будуть задаватися виразами

$$\xi = z' - z_0 = z';$$
$$\eta = \pm \sqrt{(x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2} = \pm \sqrt{(x' + \rho \sin \phi)^2 + (x' - \rho(1 + \cos \phi))^2}, \quad (7.7)$$

де $\text{sgn } \eta = \text{sgn}(x' - \rho(1 + \cos \phi))$.

Координати ξ та η визначають точку перетину дифрагованого променя і вихідної площини формуючи спектральне зображення в наглядному і зручному для аналізу вигляді.

8. Висновки

1. Запропонований чисельний метод дозволяє виконувати більш точні абераційні розрахунки завдяки використанню сучасних комп'ютерних технологій. Збільшення точності досягається за рахунок мінімізації кількості наближень, які застосовуються для отримання кінцевих формул. Велика складність кінцевих формул навіть для простих схем одинарних монохроматорів вимагає виключно чисельної реалізації алгоритму.

2. Запропонований метод дає значно більш універсальний підхід до схеми монохроматора в порівнянні з класичним, що створює можливість абераційних розрахунків схем з некласичними оптичними елементами (дифракційна ґратка зі змінним кроком нарізки, асферична форма оптичних поверхонь, нестандартні щілини та ін.).

3. Принципові обмеження розглянутого методу пов'язані із застосуванням променевої оптики та узагальненою формули для дифракційної ґратки, яка не зважаючи на суттєве уточнення все ж залишається наближеною.

Перелік посилань

1. А.Н.Зайдель, Г.В.Островская, Ю.И.Островский "Техника и практика спектроскопии" // Москва, Наука, 1976, 375с.
2. Одарич В. А. Основы теории та методів розрахунку оптичних систем. ч.І. // Київ, видавничо-поліграфічний центр Київський університет, 2001, 220 с.
3. Н.Н.Бронштейн, К.А.Семендяев. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ // Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1953г – 608с.

Надійшла до редакції 27.10.2005

Отпечатано в типографии ЧП Гой О.В.
01042, г. Киев ул. П.Лумумбы, 4/6 корпус А

