

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

В І С Н И К

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

ВИПУСК №4 2017

**Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
выпуск №4, 2017,**

Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Фізика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету комп'ютерних наук та кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1222 від 07.10.2016), та реферується в Реферативному журналі, Zentralblatt MATH та базах даних ВИНІТИ, Росія, Москва.

Редакційна колегія:

Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор**;
Хусаїнов Денис Яхєвич, д.ф.-м.н., проф., **заступник головного редактора, відповідальний за видання**;
Arturs Medvids, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;
Miklós Rontó, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;
Milada Bartlova, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;
Nickolai Kukhtarev, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;
Sergei Gorlatch, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;
Sergey Trofimchuk, Prof., Universidad de Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;
Stefan Hudak, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;
Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;
Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;
Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Буй Дмитро Борисович, д.ф.-м.н., проф.;
Булавін Леонід Анатолійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;
Гарашенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;
Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;
Жук Ярослав Олександрович, д.ф.-м.н., проф.;
Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., проф.;
Кириченко Володимир Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Козаченко Юрій Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;
Львов Віктор Анатолійович, д.ф.-м.н., проф.;
Макара Володимир Арсенійович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;
Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Погорілий Сергій Дем'янович, д.т.н., проф.;
Савенков Сергій Миколайович, д.ф.-м.н., доц.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.

Редакційний відділ:

Анісімова Тетяна Харитонівна, **відповідальний секретар**;
Безущак Оксана Омелянівна, bezusch@univ.kiev.ua;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
П'ятецька Олена Василівна, visnyk_phys-math@ukr.net;
Сільвейструк Людмила Миколаївна, **технічний редактор**, slm-klm@ukr.net.

Адреса редакційної колегії:

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49
ISBN 978-966-2142
ISSN 1812-5409

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Борисенко О.Д., Борисенко Д.О. Неавтономне стохастичне логістичне диференціальне рівняння з нецентрованою мірою Пуассона	9
Мішура Ю.С., Железняк Г.С. Екстремальні міри для ентропійних функціоналів	15

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Батюк Л.В., Кізілова Н. М. Моделювання ламінарних течій суспензій еритроцитів крові як бінгамівських мікрорідин	23
Беспалова О.І., Яремченко Н.П. Визначення напружено-деформованого стану спряжених гнучких оболонок обертання при докритичних навантаженнях	29
Кізілова Н. М., Коробов А.М. Моделювання мікроциркуляції крові та тепломасопереносу в тканинах людини	37
Мартинюк А.А., Хорошун А.С. До теорії одноланкового маніпулятора із пружним зчленуванням	43
Петрищев О. М., Романюк М. І. Математичне моделювання перетворювачів електромагнітного типу в режимі збудження ультразвукових хвиль	47
Хорошун А.С. Про стабілізацію руху TORA	53

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Fabunmi Sunmade Семантика деяких атомарних операторів у IPCL	59
Волошин О.Ф., Супрун О.О., Ковальов Д.І. Методи адаптивного оцінювання у тестувально-методичних системах електронного навчання	63
Деревянченко О.В., Сакевич Р.Д. Застосування системи ПАРКС-Java та Google Cloud Platform для хмарних обчислень	69
Завадський І.О., Кабан В.О. Удосконалення обчислення зсуву вікна пошуку для пошукових алгоритмів MAWP	75
Завадський І.О., Козоріз Н.В. Оптимізація багатовимірних алгоритмів пошуку рядка в тексті	79
Іванов С.М. Виявлення екстремальних властивостей локально дифеоморфних систем	83
Івохін Є.В., Чижикова Є.В. Про деякі моделі процесів розповсюдження інформації на основі гібридного дифузійного рівняння	87
Король В.О. Аналіз проблем доповненої реальності та шляхи їх вирішення	91
Коцур Д.В. Алгоритм побудови діаграми Вороного на двовимірній сітці з L_p нормою	95
Кузьмич О.І., Мекуш О.Г., Пех П.А., Багнюк Н.В. Проблема керування стійкою поставою людини при наявності проблем ЦНС	99
Кулян В.Р., Юнькова О.О., Петрович В.М. Оптимізація портфеля при обмеженнях	107
Мисник Б.В., Волошин О.Ф., Снитюк В.Є. Відновлення пропусків даних в базах знань підприємств галузі як мультиагентної системи	111
Насіров Еміл М. Блочно-діагональний підхід до невід'ємної факторизації розріджених лінгвістичних матриць і тензорів надвеликої розмірності з використанням латентного розподілу Діріхле	117
Орлов Є.А. Архітектура системи пошуку відео інформації на основі вмісту	123
Панченко Т.В., Іванов Є.В., Fabunmi Sunmade, Скідоненко А.В., Трофименко Є.О. Розширений динамічний стан та модель породження екземплярів у IPCL	127
Побоченко В.Ю., Аткаєв С-А. Х. Прикладне застосування методу рівномірного розподілу для транспортної задачі оптимального розташування зарядних станцій для електромобілів	131
Таїрова М.С. Алгоритми побудови максимальної множини практичної стійкості лінійного дискретного включення	137

Шелуденко А.С. Гранична теорема для деяких статистик типу Колмогорова-Смирнова	143
Шишацька О.В. П'ятизначні логіки: побудова та інтерпретація	147
Яценко В.О. Гарантоване прогнозування Dst індексу	152

РАДІОФІЗИКА

Голуб М.О., Литвин П.М., Мельник П.В., Федорченко М.І. Фотоемісійні властивості плівки Si-Gd-O при енергії фотонів поблизу порогу фотоефекту	157
Григорук В.І., Павлюк С.П., Телега В.М., Петричук М.В., Іванчук А.В., Малишев В.Ю. Шнування струму в прямозміщених польових мікротранзисторах	165

СУЧАСНА ФІЗИКА

Азовський В.А., Ящук В.М. Деякі проблеми розробки люмінесцентних трансформторів для кремнієвих сонячних елементів	171
Аль-Омари М.АМ, Боровий М.О. Особливості генерації параметричного рентгенівського випромінення у порошках мікророзмірних частинок алмазу	175
Бардік В.Ю., Махлайчук В.М. Кінематична зсувна в'язкість чистих рідких металів Sn, Bi, Pb і їх бінарних розплавів.	179
Ніколаєнко Т.Ю. Квантово-хімічне дослідження нековалентної взаємодії молекул пентанової кислоти та D-глюкозаміну	183
Поперенко Л.В., Розуван С.Г., Шайкевич І.А., Розуван К.П. Оптичні властивості вуглецевих нанотрубок з дефектами кристалічної ґратки	189
Роговець А.В., Карленко Б.В, Макаренко О.В., Ямпольський А.Л. Автоматизація вимірювань: алгоритм візуального розпізнавання шкали приладу, реалізований у LabView	193
Хорольський О.В., Свечнікова О.С., Руденко О.П. Еволюція властивостей розчинів полівінілового спирту в диметилсульфоксиді	197

CONTENTS

ALGEBRA, GEOMETRY AND PROBABILITY THEORY

Borysenko O.D., Borysenko D.O. Non-autonomous stochastic logistic differential equation with non-centered Poisson measure	9
Mishura Y.S., Zhelezniak H.S. Extreme measures for entropy functionals	15

DIFFERENTIAL EQUATIONS, MATHEMATICAL PHYSICS AND MECHANICS

Batyuk L.V., Kizilova N.M. Modeling of laminar flows of erythrocyte suspensions as Bingham microfluids	23
Bespalova E.I., Yaremchenko N.P. Determining the stress-strain state of flexible conjugated shells of revolution under subcritical loading	29
Kizilova N.M., Korobov A.M. Modeling of blood microcirculation, heat and mass transfer in human tissues	37
Martynyuk A.A., Khoroshun A.S. To the theory of a single link manipulator with joint elasticity	43
Petrishchev O.N., Romanyuk M.I. Mathematical modeling of the electromagnetic type transducers in the excitation mode of the ultrasonic waves	47
Khoroshun A.S. On the stabilization of the TORA movement	53

COMPUTER SCIENCES AND INFORMATICS

Fabunmi Sunmade Some Atomic Operators Semantics in IPCL	59
Voloshyn O.F., Suprun O.O., Kovaliov D.I. Adaptive assessment methods in e-learning testing and methodological systems	63
Derevianchenko O.V., Sakevych R.D. The applying of PARCS-Java system and Google Cloud Platform for cloud computing	69
Zavadskyi I.O., Kaban V.O. Improvement of the search window shift calculation in MAWP search algorithms	75
Zavadskyi I.O., Kozoriz N.V. Optimization of multi-dimensional exact pattern matching algorithms	79
Ivanov S.M. Detecting extremal properties of localized diffeomorphic systems	83
Ivohin E.V., Chizhikova E.V. About some models of information distribution processes based on the hybrid diffusion equation	87
Korol V.O. Analysis of augmented reality problems and the ways of their solution	91
Kotsur D.V. An algorithm for Lp-Voronoi diagram construction on discrete grid in 2D	95
Kuzmych O.I., Mekush O.G., Pekh P.A., Bagnyuk N.V. The problem of control for human postural balance under CNS problems	99
Kulian V.R., Yunkova O.O., Petrovich V.M. Portfolio optimization with restrictions	107
Mysnyk B.V., Voloshyn O.F., Snytyuk V.Ye. Recovery of data gaps in the knowledge bases of enterprises industry as a multiagent system	111
Nasirov E.M. Blocks approach of non-negative huge linguistic sparse matrix and tensors factorization using Latent Dirichlet allocation	117
Orlov E.A. Architecture of a system for content based video information retrieval	123
Panchenko T.V., Ivanov Ie.V., Sunmade Fabunmi, Skidonenko A.V., Trofymenko Ie.O. Extended Dynamic State and Instances Spawning Model in IPCL	127
Pobochoenko V.Y., Atkaev Said-Abdulla H. Application of the normal distribution method for the transport problem of the charging stations' optimal location	131
Tairova M. Maximum set of practical stability of discrete inclusions constructing using numeric computing	137
Sheludenko A.S. Limit theorems for some statistics of the Kolmogorov-Smirnov type	143
Shyshatska O.V. The Five-Valued Logics: construction and interpretation	147
Yatsenko V.A. Guaranteed prediction of the Dst index	152

RADIOPHYSICS

Golub M.O., Lytvyn. P.M., Melnik P.V., Fedorchenko M.I. Photoemission properties of Si-Gd-O film at photon energy near the threshold of photoelectric effect	157
Grygoruk V.I., Pavlyuk S.P., Telega, V.M., Petrychuk M.V., Ivanchuk A.V. Malyshev V.Y. Cord currents in field-mounted field microtiter transistors	165

MODERN PHYSICS

Azovskyi V.A., Yashchuk V.M. Some problems in design of luminescent converter for Si solar cells	171
AL-Omari M.AM, Borovoy M.O. The generation features of parametric X-ray radiation in micro sized diamond powders	175
Bardik V.Yu., Makhlaichuk V.M. Kinematic shear viscosity of pure liquid metals Sn, Bi, Pb and their binary melts	179
Nikolaienko T.Yu. Quantum-chemical investigation of con-covalent interaction between the pentanoic acid and D-glucosamine molecules	183
Poperenko L.V., Rozouvan S.G., Shaykevich I.A., Rozouvan K.P. Optical properties of carbon nanotubes with crystal lattice defects	189
Rogovets A.V., Karlenko B.V., Makarenko O.V., Yampolskiy A.L. Measurements automation: the algorithm for visual scale recognition realized in LabView	193
Khorolskyi O.V., Svechnikova O.S., Rudenko O.P. Evolution of properties of polyvinyl alcohol in dimethyl sulfoxide solutions	197

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ ТА ТЕОРИЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 519.21

О.Д. Борисенко¹, к.ф.-м.н., доцент
Д.О. Борисенко¹, аспірант

**Неавтономне стохастичне логістичне
диференціальне рівняння з
нецентрованою мірою Пуассона**

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64.
e-mail: ¹odb@univ.kiev.ua

O.D. Borysenko¹, Ph.D., Associate Professor
D.O. Borysenko¹, Ph.D. student

**Non-autonomous stochastic logistic
differential equation with non-centered
Poisson measure**

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.
e-mail: ¹odb@univ.kiev.ua

У роботі одержано явний вигляд глобального додатного розв'язку неавтономного стохастичного логістичного диференціального рівняння популяційної динаміки із збуреннями типу "білого" та центрованого і нецентрованого Пуассонівських шумів. Доведена стохастична перманентність розв'язку. У випадку періодичних коефіцієнтів одержано явний вигляд розв'язку рівняння для математичного сподівання оберненої величини до чисельності популяції.

Ключові слова: глобальний розв'язок, неавтономне стохастичне логістичне диференціальне рівняння, міри Пуассона, стохастична перманентність.

The coefficients of considered non-autonomous stochastic logistic differential equation, which is models the number of a single species whose members compete among themselves for a limit amount of food and living space, do not satisfy the linear growth condition, but they are local Lipschitz continuous, so the local solution to equation exists. It is obtained the explicit form of global positive solution to this equation of population dynamics with perturbations of "white noise", non-centered and centered "Poisson noise" types. The property of permanence is desirable since it means the long time survival in a population dynamics. The stochastic permanence of solution is proved. In the case of periodical coefficients the explicit form of solution to the equation for expectation of inverse value to population size is deduced. For solution $N(t)$ to the considered equation with any initial random value $N(0) = N_0 > 0$, $E[1/N_0] < \infty$ we prove $\lim_{t \rightarrow +\infty} (E[1/N(t)] - E[1/N_p(t)]) = 0$, where $E[1/N_p(t)]$ is a T -periodic solution to the equation for expectation of inverse value to population size.

Key Words: global solution, non-autonomous stochastic logistic differential equation, Poisson measures, stochastic permanence.

Communicated by Prof. Kozachenko Yu.V.

1 Introduction

The construction of the logistic model and its properties are presented in M. Iannelli and A. Pugliese [1]. A deterministic nonautonomous logistic equation has a form

$$\begin{aligned} dN(t) &= N(t) (a(t) - b(t)N(t)) dt, \\ N(0) &= N_0 > 0, \end{aligned}$$

and models the number N of a single species whose members compete among themselves for a limit amount of food and living space. Here $a(t)$ is the rate of growth and $a(t)/b(t)$ is the carrying capacity at time t . The papers [2],[3] deal with differential equations of population dynamics perturbed by centered Poisson measure. In the papers [4], [5] it is studied, in particular, the problem of existence of global positive solution to the stochastic nonautonomous logistic differential equation of the form

stence of global positive solution to the stochastic nonautonomous logistic differential equation of the form

$$\begin{aligned} dN(t) &= N(t) \left[(a(t) - b(t)N(t))dt + \alpha(t)dw(t) + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t, z) \tilde{\nu}(dt, dz) \right], \quad N(0) = N_0, \end{aligned}$$

and its stochastic permanence, where $w(t)$ is the standard one-dimensional Wiener process, $\tilde{\nu}(t, A) = \nu(t, A) - t\Pi(A)$, $\nu(t, A)$ is the Poisson measure, which is independent on $w(t)$ and $N_0 > 0$, $E[\nu(t, A)] = t\Pi(A)$, $\Pi(A)$ is a finite measure on the Borel sets A in $\mathbb{R}$.

In this paper, we consider the stochastic nonautonomous logistic differential equation of the

form

$$dN(t) = N(t) \left[(a(t) - b(t)N(t))dt + \alpha(t)dw(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma_1(t, z)\tilde{\nu}_1(dt, dz) + \int_{\mathbb{R}} \gamma_2(t, z)\nu_2(dt, dz) \right],$$

$$N(0) = N_0, \quad (1)$$

where $w(t)$ is the standard one-dimensional Wiener process, $\tilde{\nu}_1(t, A) = \nu_1(t, A) - t\Pi_1(A)$, $\nu_1(t, A)$ and $\nu_2(t, A)$ are the independent Poisson measures, which are independent on $w(t)$ and $N_0 > 0$, $E[\nu_i(t, A)] = t\Pi_i(A)$, $i = 1, 2$, $\Pi_i(A)$, $i = 1, 2$ are the finite measures on the Borel sets A in $\mathbb{R}$.

The coefficients of equation (1) do not satisfy the linear growth condition, but they are local Lipschitz continuous, so (cf. [6]) the local solution to equation (1) exists. We will obtain the explicit form of global solution to equation (1) and deduce its stochastic permanence. In the case when coefficients $a(t)$, $b(t)$, $\alpha(t)$ and $\gamma_i(t, z)$, $i = 1, 2$ are continuous on t , T -periodic on t functions, $a(t) > 0$, $b(t) > 0$ and $\int_0^T [a(s) - \delta(s)]ds > 0$, where

$$\delta(s) = \alpha^2(s) + \int_{\mathbb{R}} \frac{\gamma_1^2(s, z)}{1 + \gamma_1(s, z)} \Pi_1(dz) - \int_{\mathbb{R}} \frac{\gamma_2(s, z)}{1 + \gamma_2(s, z)} \Pi_2(dz)$$

we will show, that the equation for function $E[1/N(t)]$ has a unique positive T -periodic solution.

The rest of this paper is organized as follows. In Section 2, we obtain the explicit representation of the unique global positive solution to equation (1), and we prove the stochastic permanence of the solution to equation (1). In Section 3, we derive the explicit form of unique positive T -periodic solution to the equation for $E[1/N(t)]$ in the case of periodical coefficients.

2 Global solution and stochastic permanence

Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space and $w(t)$, $t \geq 0$ is a standard one-dimensional Wiener process on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $N_0 > 0$ is a random variable on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, which is independent on $w(t)$. $\nu_1(t, A)$ and $\nu_2(t, A)$ are the independent Poisson measures defined on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, which are independent on $w(t)$ and $N_0 > 0$, $\tilde{\nu}_1(t, A) = \nu_1(t, A) - t\Pi_1(A)$, $E[\nu_i(t, A)] = t\Pi_i(A)$, $i = 1, 2$, $\Pi_i(A)$, $i = 1, 2$ are the finite measures on the Borel

sets A in $\mathbb{R}$. On the probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ we consider an increasing, right continuous family of complete sub- σ -algebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, where $\mathcal{F}_t = \sigma\{N_0, w(s), \nu_i(s, A), i = 1, 2, s \leq t\}$. The main result of this section is following

Theorem 2.1. *Let $a(t) > 0$, $b(t) > 0$ and $\alpha(t)$ be a bounded continuous functions defined on $[0, +\infty)$. Assume that $\Pi_i(\mathbb{R}) < \infty$, $i = 1, 2$ and $\gamma_i(t, z)$, $i = 1, 2$ is continuous on t functions and $|\ln(1 + \gamma_i(t, z))| \leq K$, $i = 1, 2$ for some constant $K > 0$. Then there exists a unique positive solution $N(t)$ to equation (1) for any initial value $N(0) = N_0 > 0$, which is global and has a representation*

$$N(t) = \frac{\exp\{\eta(t)\}}{1/N_0 + \int_0^t b(s) \exp\{\eta(s)\} ds}, \quad (2)$$

where

$$\eta(t) = \int_0^t [a(s) - \beta(s)] ds + \int_0^t \alpha(s) dw(s) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \ln(1 + \gamma_1(s, z)) \tilde{\nu}_1(ds, dz) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \ln(1 + \gamma_2(s, z)) \nu_2(ds, dz)$$

$$\beta(t) = \frac{\alpha^2(t)}{2} + \int_{\mathbb{R}} [\gamma_1(t, z) - \ln(1 + \gamma_1(t, z))] \Pi_1(dz), \quad t \geq 0.$$

Proof. The coefficients of the equation (1) are local Lipschitz continuous. Therefore for any initial random value $N_0 > 0$, which is independent on $w(t)$ and $\nu_i(t, A)$, $i = 1, 2$, there exists a unique local solution $N(t)$ on $[0, \tau_e)$, where $\sup_{t < \tau_e} |N(t)| = +\infty$ (cf. Theorem 6, p.246, [6]). We will derive the explicit form of this solution and we will see, that this solution is global.

Let

$$x(t) = e^{-\eta(t)} \left(1/N_0 + \int_0^t b(s) e^{\eta(s)} ds \right). \quad (3)$$

Using the Ito formula, we derive the stochastic differential equation for the process $x(t)$:

$$dx(t) = \left[b(t) - x(t) \left(a(t) - \alpha^2(t) - \int_{\mathbb{R}} \frac{\gamma_1^2(t, z)}{1 + \gamma_1(t, z)} \Pi_1(dz) \right) \right] dt - x(t) \left[\alpha(t) dw(t) + \int_{\mathbb{R}} \frac{\gamma_1(t, z)}{1 + \gamma_1(t, z)} \tilde{\nu}_1(dt, dz) + \int_{\mathbb{R}} \frac{\gamma_2(t, z)}{1 + \gamma_2(t, z)} \nu_2(dt, dz) \right], \quad x(0) = 1/N_0. \quad (4)$$

Let $N(t) = 1/x(t)$, then $N(t) > 0$ and $N(t)$ is stochastically continuous process with trajectories, which are right continuous and have a left limit

at every t almost surely. Under conditions of the theorem, $N(t)$ will not explode in a finite time.

By Ito formula, we obtain from (4):

$$dN(t) = N(t) \left[(a(t) - b(t)N(t))dt + \alpha(t)dw(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma_1(t, z) \tilde{\nu}_1(dt, dz) + \int_{\mathbb{R}} \gamma_2(t, z) \nu_2(dt, dz) \right],$$

$$N(0) = N_0.$$

Thus $N(t)$ is a unique positive solution to equation (1) and $N(t)$ is global on $t \in [0, +\infty)$, i.e. $\tau_e = +\infty$ almost surely. $\square$

The property of permanence is desirable since it means the long time survival in a population dynamics. Now we suppose, that initial value $N(0) = N_0$ is a positive number.

Definition 2.1. The solution $N(t)$ to equation (1) is said to be stochastically permanent if for any $\varepsilon > 0$, there exists positive constants $H = H(\varepsilon)$, $h = h(\varepsilon)$ such that

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} P\{N(t) \leq H\} \geq 1 - \varepsilon,$$

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} P\{N(t) \geq h\} \geq 1 - \varepsilon,$$

for any initial value $N(0) = N_0$.

If $f(t)$ is a continuous bounded function on $[0, +\infty)$, we define

$$f_* = \inf_{t \in [0, +\infty)} f(t), \quad f^* = \sup_{t \in [0, +\infty)} f(t).$$

From the Lemma on exponential martingales (p.465,[6]) we have the following result.

Lemma 2.1. Let $\Pi_i(\mathbb{R}) < \infty, i = 1, 2$, functions $\alpha(t)$, $\gamma_i(t, z), i = 1, 2$ be continuous on t and bounded, then

$$E \left[\exp \left\{ \int_{t_0}^t \alpha(s) dw(s) + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}} \gamma_1(s, z) \tilde{\nu}_1(ds, dz) + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}} \gamma_2(s, z) \nu_2(ds, dz) \right\} \right] = \exp \left\{ \int_{t_0}^t \sigma(s) ds \right\},$$

$0 \leq t_0 \leq t$, where

$$\sigma(t) = \frac{\alpha^2(t)}{2} + \int_{\mathbb{R}} [e^{\gamma_1(t, z)} - 1 - \gamma_1(t, z)] \Pi_1(dz) + \int_{\mathbb{R}} [e^{\gamma_2(t, z)} - 1] \Pi_2(dz).$$

Lemma 2.2. Let conditions of Theorem 3.1 be fulfilled and $a_* > \delta^*$, where

$$\delta(t) = \alpha^2(t) + \int_{\mathbb{R}} \frac{\gamma_1^2(t, z)}{1 + \gamma_1(t, z)} \Pi_1(dz) - \int_{\mathbb{R}} \frac{\gamma_2(t, z)}{1 + \gamma_2(t, z)} \Pi_2(dz).$$

Then

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} E \left[\frac{1}{N(t)} \right] \leq \frac{b^*}{p_*} := C,$$

where $N(t)$ is a solution to the equation (1) for an initial value $N(0) = N_0 > 0$, and $p(t) = a(t) - \delta(t)$.

Proof. From (3) we have

$$\begin{aligned} x(t) = & \exp \left\{ \int_0^t [\beta(s) - a(s)] ds \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ - \int_0^t \alpha(s) dw(s) - \right. \\ & - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \ln(1 + \gamma_1(s, z)) \tilde{\nu}_1(ds, dz) - \\ & \left. - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \ln(1 + \gamma_2(s, z)) \nu_2(ds, dz) \right\} \frac{1}{N_0} + \\ & + \int_0^t b(s) \exp \left\{ \int_s^t [\beta(\tau) - a(\tau)] d\tau \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ - \int_s^t \alpha(\tau) dw(\tau) - \right. \\ & - \int_s^t \int_{\mathbb{R}} \ln(1 + \gamma_1(\tau, z)) \tilde{\nu}_1(d\tau, dz) - \\ & \left. - \int_s^t \int_{\mathbb{R}} \ln(1 + \gamma_2(\tau, z)) \nu_2(d\tau, dz) \right\} ds. \end{aligned} \quad (5)$$

By Lemma 2.1 we have

$$\begin{aligned} E \left[\exp \left\{ - \int_{t_0}^t \alpha(\tau) dw(\tau) - \right. \right. \\ & - \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}} \ln(1 + \gamma_1(\tau, z)) \tilde{\nu}_1(d\tau, dz) - \\ & \left. \left. - \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}} \ln(1 + \gamma_2(\tau, z)) \nu_2(d\tau, dz) \right\} \right] = \\ = & \exp \left\{ \int_{t_0}^t \frac{\alpha^2(\tau)}{2} d\tau + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}} \left[\ln(1 + \gamma_1(\tau, z)) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\gamma_1(\tau, z)}{1 + \gamma_1(\tau, z)} \right] \Pi_1(dz) d\tau - \right. \\ & \left. - \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\gamma_2(\tau, z)}{1 + \gamma_2(\tau, z)} \Pi_2(dz) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Therefore we obtain

$$\begin{aligned} E[1/N(t)] &= E[x(t)] = \\ &= \frac{1}{N_0} \exp \left\{ \int_0^t [\delta(\tau) - a(\tau)] d\tau \right\} + \\ &+ \int_0^t b(s) \exp \left\{ \int_s^t [\delta(\tau) - a(\tau)] d\tau \right\} ds \leq \\ &\leq e^{-p_* t} / N_0 + b^* / p_*. \end{aligned}$$

This complete the proof of Lemma 2.2 $\square$

Lemma 2.3. *Let conditions of Theorem 3.1 be fulfilled and $N(t)$ be a solution to equation (1) with initial value $N(0) = N_0 > 0$, then*

$$\begin{aligned} E[N^\theta] &\leq [C(\theta)]^\theta := \\ &= \left[\frac{a^* + (\theta-1)(\alpha^2)^* / 2 + [(1 + (\gamma_1)^*)^\theta - 1 - \theta(\gamma_1)_*] \Pi_1(\mathbb{R}) / \theta}{b_*} \right]^\theta, \end{aligned}$$

for any $\theta \geq 1$, such that $0 < N_0 < C(\theta)$.

Proof. By Ito formula we have

$$\begin{aligned} N^\theta(t) - N_0^\theta &= \int_0^t N^\theta(s) \left[[\theta(a(s) - b(s)N(s)) + \right. \\ &+ \theta(\theta - 1)\alpha^2(s)/2 + \int_{\mathbb{R}} [(1 + \gamma_1(s, z))^\theta - 1 - \\ &- \theta\gamma_1(s, z)] \Pi_1(dz)] ds + \int_0^t \theta N^\theta(s) \alpha(s) dw(s) + \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} N^\theta(s) [(1 + \gamma_1(s, z))^\theta - 1] \tilde{\nu}_1(ds, dz) + \\ &+ \left. \int_0^t \int_{\mathbb{R}} N^\theta(s) [(1 + \gamma_2(s, z))^\theta - 1] \nu_2(ds, dz) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

From (2) we have for any $\theta > 0$

$$E[N^{2\theta}] \leq N_0^{2\theta} E[\exp\{2\theta\eta(t)\}].$$

Then by the Lemma 2.1 we obtain

$$\begin{aligned} E[N^{2\theta}(t)] &\leq N_0^{2\theta} \exp \left\{ 2\theta \int_0^t a(s) ds + \right. \\ &+ \theta(2\theta - 1) \int_0^t \alpha^2(s) ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} [(1 + \gamma_1(s, z))^{2\theta} - \\ &- 1 - 2\theta\gamma_1(s, z)] \Pi_1(dz) ds + \\ &+ \left. \int_0^t \int_{\mathbb{R}} [(1 + \gamma_2(s, z))^{2\theta} - 1] \Pi_2(dz) ds \right\}. \end{aligned}$$

Therefore under conditions of theorem we have $E[N^{2\theta}(t)] \leq N_0^{2\theta} e^{K(\theta)t}$, where $K(\theta)$ is a some constant depending on θ , and so we have

from (6)

$$\begin{aligned} E[N^\theta(t)] &= N_0^\theta + \int_0^t E[N^\theta(s)] [\theta a(s) + \\ &+ \theta(\theta - 1)\alpha^2(s)/2 + \int_{\mathbb{R}} [(1 + \gamma_1(s, z))^\theta - 1 - \\ &- \theta\gamma_1(s, z)] \Pi_1(dz)] ds - \theta \int_0^t b(s) E[N^{\theta+1}(t)] ds. \end{aligned}$$

Using the obtained estimate for $E[N^{2\theta}(t)]$, it is easy to check that function $E[N^q(t)]$ is continuous on t for any $q > 0$, so we have

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E[N^\theta(t)] &= E[N^\theta(t)] \left[\theta a(t) + \frac{\theta(\theta-1)}{2} \alpha^2(t) + \right. \\ &+ \int_{\mathbb{R}} [(1 + \gamma_1(t, z))^\theta - 1 - \theta\gamma_1(t, z)] \Pi_1(dz)] - \\ &- \theta b(t) E[N^{\theta+1}(t)] \leq E[N^\theta(t)] \left[\theta a^* + \frac{\theta(\theta-1)}{2} \times \right. \\ &\times (\alpha^2)^* + [(1 + (\gamma_1)^*)^\theta - 1 - \theta(\gamma_1)_*] \Pi_1(\mathbb{R}) - \\ &- \left. \theta b_* (E[N^\theta(t)])^{1/\theta} \right]. \end{aligned}$$

Therefore for function $z(t) = E[N^\theta(t)]$ we have inequalities

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} &\leq \theta b_* z(t) [C(\theta) - z^{1/\theta}(t)], \\ z(0) &= N_0^\theta < C^\theta(\theta) \end{aligned}$$

where $C(\theta)$ is defined in the statement of the Lemma 2.3. The constant function $y(t) = C^\theta(\theta)$ satisfies the problem

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= \theta b_* y(t) [C(\theta) - y^{1/\theta}(t)], \\ y(0) &= C^\theta(\theta), \end{aligned}$$

therefore by Chaplygin's comparison theorem we obtain $E[N^\theta(t)] \leq C^\theta(\theta)$. $\square$

Theorem 2.2. *Let conditions of the Lemma 2.2 be fulfilled. Then the solution $N(t)$ to equation (1) is stochastically permanent.*

Proof. Let $N(t)$ be an arbitrary solution to the equation (1) with initial value $N(0) = N_0 > 0$. By Lemma 2.3, we have $E[N^\theta(t)] \leq [C(\theta)]^\theta$.

So, for $H = C(\theta)/\varepsilon^{1/\theta}$, $\forall \varepsilon > 0$ by Chebyshev's inequality, we obtain $P\{N(t) > H\} \leq E[N^\theta(t)]/H^\theta \leq \varepsilon$. This implies

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} P\{N(t) \leq H\} \geq 1 - \varepsilon.$$

By Lemma 2.2, we know

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} E \left[\frac{1}{N(t)} \right] \leq C.$$

Let $h = \varepsilon/C, \forall \varepsilon > 0$, then

$$P\{N(t) < h\} = P\{1/N(t) > 1/h\} \leq hE \left[\frac{1}{N(t)} \right].$$

Hence, $\limsup_{t \rightarrow +\infty} P\{N(t) < h\} \leq hC = \varepsilon$. This implies

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} P\{N(t) \geq h\} \geq 1 - \varepsilon.$$

This complete the proof of Theorem 2.2. $\square$

3 Periodic solution

Let us consider equation (1) with T -periodic on t coefficients.

Theorem 3.1. *Let coefficients $a(t)$, $b(t)$, $\alpha(t)$, $\gamma_i(t, z)$, $i = 1, 2$ be continuous on t and T -periodic on t functions, $a(t) > 0, b(t) > 0$ and $\int_0^T [a(s) - \delta(s)] ds > 0$, where $\delta(t)$ was defined in Lemma 2.2, $\Pi_i(\mathbb{R}) < \infty, i = 1, 2$, $|\ln(1 + \gamma_i(t, z))| \leq K, i = 1, 2$ for some constant $K > 0$. Then the equation*

$$\frac{d}{dt} E[1/N(t)] = [\delta(t) - a(t)]E[1/N(t)] + b(t), \quad (7)$$

where $N(t)$ is a solution to equation (1), has a unique positive T -periodic solution

$$\begin{aligned} E[1/N_p(t)] &= \\ &= \frac{\int_t^{t+T} \exp \left\{ \int_t^s [a(\tau) - \delta(\tau)] d\tau \right\} b(s) ds}{\exp \left\{ \int_0^T [a(\tau) - \delta(\tau)] d\tau \right\} - 1}, \end{aligned} \quad (8)$$

and for solution $N(t)$ to equation (1) with any initial random value $N(0) = N_0 > 0$, $E[1/N_0] < \infty$ we have

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (E[1/N(t)] - E[1/N_p(t)]) = 0. \quad (9)$$

Proof. From (5) by Lemma 2.1, using the independence of N_0 , $w(t)$ and $\nu_i(t, A), i = 1, 2$ we have

$$\begin{aligned} E[x(t)] &= E[1/N(t)] = \\ &= \exp \left\{ \int_0^t (\delta(s) - a(s)) ds \right\} E[1/N_0] + \\ &+ \int_0^t b(s) \exp \left\{ \int_s^t (\delta(\tau) - a(\tau)) d\tau \right\} ds \end{aligned}$$

It is easy to see, that function $E[1/N(t)]$ satisfies equation (7). By the condition

$$\int_0^T [a(s) - \delta(s)] ds > 0 \quad (10)$$

the equation (7) has a unique positive T -periodic solution (8) (cf. p.280, [7]).

Let us denote

$$p(t) = a(t) - \delta(t), \quad \bar{p} = \exp \left\{ \int_0^T p(t) dt \right\}.$$

If $N(t)$ is the solution to equation (1) for any initial value $N(0) = N_0 > 0$, then

$$\begin{aligned} E[1/N(t)] - E[1/N_p(t)] &= \\ &= \exp \left\{ - \int_0^t p(s) ds \right\} E[1/N_0] + \\ &+ \int_0^t b(s) \exp \left\{ - \int_s^t p(\tau) d\tau \right\} ds - \\ &- \frac{1}{\bar{p} - 1} \int_t^{t+T} b(s) \exp \left\{ - \int_s^t p(\tau) d\tau \right\} ds. \end{aligned}$$

From (10) we have

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E[1/N_0] \exp \left\{ - \int_0^t p(s) ds \right\} = 0. \quad (11)$$

We can rewrite

$$\begin{aligned} &\int_0^t b(s) \exp \left\{ - \int_s^t p(\tau) d\tau \right\} ds - \\ &- \frac{1}{\bar{p} - 1} \int_t^{t+T} b(s) \exp \left\{ - \int_s^t p(\tau) d\tau \right\} ds = \\ &\exp \left\{ - \int_0^t p(\tau) d\tau \right\} \left[\int_0^t b(s) \exp \left\{ \int_0^s p(\tau) d\tau \right\} ds - \right. \\ &- \left. \frac{1}{\bar{p} - 1} \int_t^{t+T} b(s) \exp \left\{ \int_0^s p(\tau) d\tau \right\} ds \right] = \\ &= \exp \left\{ - \int_0^t p(\tau) d\tau \right\} F(t). \end{aligned} \quad (12)$$

For $F(t)$ we have

$$\begin{aligned} F'(t) &= b(t) \exp \left\{ \int_0^t p(\tau) d\tau \right\} - \frac{1}{\bar{p} - 1} \left[b(t+T) \times \right. \\ &\times \exp \left\{ \int_0^{t+T} p(\tau) d\tau \right\} - b(t) \exp \left\{ \int_0^t p(\tau) d\tau \right\} \Big] = \\ &b(t) \exp \left\{ \int_0^t p(\tau) d\tau \right\} \left[1 - \left(\exp \left\{ \int_t^{t+T} p(\tau) d\tau \right\} - \right. \right. \\ &- \left. \left. 1 \right) (\bar{p} - 1)^{-1} \right] = 0, \end{aligned}$$

because from T -periodicity of $p(t)$ we can derive, that

$$\frac{\exp \left\{ \int_t^{t+T} p(\tau) d\tau \right\} - 1}{\exp \left\{ \int_0^T p(\tau) d\tau \right\} - 1} = 1.$$

Hence $F(t)$ doesn't depend on t and from (11) and (12) we deduce (9). $\square$

Список використаних джерел

1. Iannelli M. An Introduction to Mathematical Population Dynamics / M.Iannelli, A. Pugliese // Springer. – 2014. – 338 p.
2. Wu R. Stochastic Logistic Systems with Jumps/ Ruihua Wu, Ke Wang // Hindawi Publishing Corporation, Journal of Applied Mathematics – 2014. – Article ID 927013 – C. 1 – 7.
3. Bao J. Stochastic population dynamics driven by Levy noise / Jianhai Bao, Chenggui Yuan // Journal of Mathematical Analysis and Applications – 2012. – 391 – C. 363 – 375.
4. Borysenko O. Explicit form of global solution to stochastic logistic differential equation and related topics / O. Borysenko, D. Borysenko // Statistics, Optimization and Information Computing – 2017. – vol.5, March – C. 58 – 64.
5. Sheng Wang, A Note on a Competitive Lotka-Volterra Model with Levy Noise / Wang Sheng, Wang Linshan, Wei Tengda // Filomat – 2017. – 31:12 – C. 3741–3748.
6. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения / И.И. Гихман, А.В. Скороход // Киев, Наукова Думка. – 1982. – 612 с.
7. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т.1 / Дж. Сансоне // М.: Иностранная Литература – 1953. – 346 с.

References

1. IANNELLI, M., and PUGLIESE, A. (2014), *An Introduction to Mathematical Population Dynamics*, Springer.
2. WU RUIHUA and WANG KE. (2014), "Stochastic Logistic Systems with Jumps", *Hindawi Publishing Corporation, Journal of Applied Mathematics*, Article ID 927013 – p. 1 – 7.
3. JIANHAI BAO, CHENGGUI YUAN (2012), "Stochastic population dynamics driven by Levy noise", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 391, p. 363 – 375.
4. BORYSENKO, O., and BORYSENKO, D. (2017), "Explicit form of global solution to stochastic logistic differential equation and related topics", *Statistics, Optimization and Information Computing*, vol.5, March, p. 58 – 64.
5. WANG, S., WANG, L., and WEI, T. (2017), "A Note on a Competitive Lotka-Volterra Model with Levy Noise", *Filomat*, 31:12, pp. 3741–3748.
6. GIKHMAN, I.I., and SKOROKHOD, A.V. (1982) *Stochastic Differential Equations and its Applications*, Kiev, Naukova Dumka.
7. SANSONE, G. (1953) *Ordinary Differential Equations*, v.1, Moscow, Inostrannaya Literatura.

Received: 20.06.2017

УДК 519.21

Ю. С. Мішура¹, *д.ф.-м.н., професор*
Г. С. Железняк², *магістр*

Екстремальні міри для ентропійних функціоналів

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володи-
мирська, 64.
e-mail: ¹myus@univ.kiev.ua
e-mail: ²hanna.zhelezniak@gmail.com

Y. S. Mishura¹, *Dr., Professor*

H. S. Zhelezniak², *Master-student*

Extreme measures for entropy functionals

Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.
e-mail: ¹myus@univ.kiev.ua
e-mail: ²hanna.zhelezniak@gmail.com

У статті розглядаються ентропійні функціонали, які побудовані для сукупності ймовірнісних мір. Основна задача полягає у знаходженні мінімумів ентропійних функціоналів та тих мір, на яких цей мінімум досягається.

Ключові слова: ентропія, ентропійний функціонал, мінімізація.

The article deals with entropy functionals that are constructed for a set of probability measures. More exactly, two independent Wiener processes with drift are considered, measures corresponding to the expansion of the drift into two components, and the corresponding entropy functionals are constructed. The main goal is to find that expansion of the drift which minimizes entropy functionals and the value of the minimums. The general problem of minimization is reduced to the non-standard problem of the variational calculus. In the paper a partial case is considered when the minimization problem is solved by dividing the drift in a certain but stable ratio. For the simplest entropy functionals, the minimum is achieved by dividing the drift at the equal parts. However, for more complicated entropy functionals, it turned out that the point of optimal expansion can be a solution of the transcendental equation, which we find numerically.

Key Words: relative entropy, entropy functional, minimization.

Communicated by Prof. Kozachenko Yu. V.

1 Introduction

Let $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}, \mathbb{P})$ be a probability space and assume that all random objects are defined on this space.

Fix $T > 0$ and let $\mathbb{P}_1$ be another probability measure on $\mathcal{F}_T$. We say that $\mathbb{P}_1$ is absolutely continuous and write $\mathbb{P}_1 \ll \mathbb{P}$ if

$$\mathbb{P}(K) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_1(K) = 0 \quad \text{for all } K \in \mathcal{F}_T.$$

According to the Radon-Nikodym theorem, this is the case if and only if there exists an $\mathcal{F}_T$ -measurable random variable $Z_T(\omega) \geq 0$ such that

$$d\mathbb{P}_1(\omega) = Z_T(\omega)d\mathbb{P}(\omega) \quad \text{on } \mathcal{F}_T.$$

In what follows we use one of the versions of the classical Girsanov theorem.

Theorem 1.1 ([2], pp. 164-171). *Let $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$ be a real-valued stochastic process of the form*

$$Y(t) = \int_0^t a(s)ds + W(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad Y_0 = 0,$$

where $T > 0$, $W = \{W_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ is a Wiener process and measurable function $a = a(t) \in L^2([0; T])$. Put

$$M_t = \exp \left(- \int_0^t a(s)dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t a^2(s)ds \right), \\ 0 \leq t \leq T.$$

Define the measure $\mathbb{P}_1$ on $\mathcal{F}_T$ by

$$d\mathbb{P}_1(\omega) = M_T(\omega)d\mathbb{P}(\omega).$$

Then $\mathbb{P}_1$ is a probability measure on $\mathcal{F}_T$ and Y is a Wiener process with respect to $\mathbb{P}_1$.

According to [1], pp. 121-130, the relative entropy of a probability measure $\mathbb{P}_1$ with respect to $\mathbb{P}$ is defined as

$$H(\mathbb{P}_1|\mathbb{P}) := \begin{cases} \mathbb{E} \left[\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}} \log \frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}} \right] & \text{if } \mathbb{P}_1 \ll \mathbb{P}, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Jensen's inequality applied to the strictly convex function $h(x) = x \log x$ yields

$$\mathbf{H}(\mathbb{P}_1|\mathbb{P}) = \mathbf{E} \left[h \left(\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}} \right) \right] \geq h \left(\mathbf{E} \left[\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}} \right] \right) \geq h(1) = 0$$

with equality if and only if $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}$.

Along with standard relative entropy let's move to another relative entropy functionals. More precisely, assume that we have two independent Wiener processes $\mathbf{W}_1 = \{\mathbf{W}_1(t), t \in [0, T]\}$ and $\mathbf{W}_2 = \{\mathbf{W}_2(t), t \in [0, T]\}$.

We would like to transform $\mathbf{W}_1(t) + \mathbf{W}_2(t) + \int_0^T f(t)dt$ ($f \in L_1([0, T], \lambda_1)$) into $\tilde{\mathbf{W}}_1(t) + \tilde{\mathbf{W}}_2(t)$, where $\tilde{\mathbf{W}}_1(t) = \mathbf{W}_1(t) + \int_0^t f_1(s)ds$ and $\tilde{\mathbf{W}}_2(t) = \mathbf{W}_2(t) + \int_0^t f_2(s)ds$ with $f_1(t) + f_2(t) = f(t)$.

Our goal is to choose functions $f_1(t)$ and $f_2(t)$ in order to minimize the entropy functionals described below.

One of them is the entropy distance, or the Kullback–Leibler divergence (also called relative entropy) that measures the distance of one probability measure to another one. This distance is written as

$$I(\mathbb{P}_1|\mathbb{P}_2) = \mathbf{H}(\mathbb{P}_1|\mathbb{P}_2) + \mathbf{H}(\mathbb{P}_2|\mathbb{P}_1).$$

Further, consider the following entropy functionals, depending on probability measures $\mathbb{P}, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$:

$$\mathbf{H}_1(\mathbb{P}, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2) = \mathbf{H}(\mathbb{P}_1|\mathbb{P}) + \mathbf{H}(\mathbb{P}_2|\mathbb{P});$$

$$\mathbf{H}_2(\mathbb{P}, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2) = \mathbf{I}(\mathbb{P}_1|\mathbb{P}) + \mathbf{I}(\mathbb{P}_2|\mathbb{P});$$

$$\mathbf{H}_3(\mathbb{P}, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2) = \mathbf{H}(\mathbb{P}_1|\mathbb{P}_2) + \mathbf{H}(\mathbb{P}_2|\mathbb{P}_1);$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_4(\mathbb{P}, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2) &= \mathbf{E} \left[\left(\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}} \right)^2 \left(-\log \frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}} \right) \right] \\ &+ \mathbf{E} \left[\left(\frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}} \right)^2 \left(-\log \frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}} \right) \right]. \end{aligned}$$

In what follows we restrict ourselves to the expansion of a function f into the sum of αf and $(1 - \alpha)f$, so that $f_1(t) = \alpha f(t)$ and $f_2(t) = (1 - \alpha)f(t)$. Our goal is to find such value of $\alpha \in [0, 1]$ that minimizes corresponding functional, constructed for the respective probability measures according to Girsanov theorem:

$$\frac{d\mathbb{P}_i}{d\mathbb{P}} = \exp \left\{ \int_0^T f_i(t) d\mathbf{W}_i(t) - \frac{1}{2} \int_0^T f_i^2(t) dt \right\},$$

$i = 1, 2.$

The above equality is equivalent to

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}_i} = \exp \left\{ - \int_0^T f_i(t) d\mathbf{W}_i(t) + \frac{1}{2} \int_0^T f_i^2(t) dt \right\},$$

$i = 1, 2.$ (1)

2 Minimization of entropy functionals

Now we establish results concerning extreme measures for entropy functionals.

Theorem 2.1. *Minimum of relative entropy functional $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ and $\mathbf{H}_3$ is achieved at the point $f_1(t) = f_2(t) = \frac{f(t)}{2}$.*

Доведення. 1) According to definition of entropy functional we have:

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{E} \left[\left(\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}} \log \frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}} \right) \right] + \mathbf{E} \left[\left(\frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}} \log \frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}} \right) \right].$$

Let's divide the expression above into two terms and deal with the first one (the second one can be considered similarly). Applying Girsanov theorem, we obtain the following expression:

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \left[\exp \left\{ \int_0^T f_1(t) d\mathbf{W}_1(t) - \frac{1}{2} \int_0^T f_1^2(t) dt \right\} \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ \int_0^T f_1(t) d\mathbf{W}_1(t) - \frac{1}{2} \int_0^T f_1^2(t) dt \right\} \right], \end{aligned}$$

and applying the Itô formula to the exponential function, we obtain:

$$\begin{aligned} &\exp \left\{ \int_0^T f_1(t) d\mathbf{W}_1(t) - \frac{1}{2} \int_0^T f_1^2(t) dt \right\} \\ &= 1 + \int_0^T \exp_t f_1(t) d\mathbf{W}_1(t), \end{aligned}$$

where

$$\exp_t = \exp \left\{ \int_0^t f_1(s) d\mathbf{W}_1(s) - \frac{1}{2} \int_0^t f_1^2(s) ds \right\},$$

and $\mathbf{E} \exp_t = 1$. As a result,

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \left[\left(1 + \int_0^T \exp_t f_1(t) d\mathbf{W}_1(t) \right) \times \int_0^T f_1(t) d\mathbf{W}_1(t) \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\int_0^T \exp_t f_1^2(t) dt \right] = \int_0^T f_1^2(t) dt. \end{aligned}$$

Consequently, we get the following expression for the functional $\mathbf{H}_1$:

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{2} \int_0^T f_1^2(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^T f_2^2(t) dt.$$

Hence, $H_1 = \frac{1}{2}\alpha^2c + \frac{1}{2}(1-\alpha)^2c$, where $c = \int_0^T f^2(t)dt$.

Denote $y(\alpha) = \alpha^2 + (1-\alpha)^2$ and find first derivative with respect to α : $y' = 2(2\alpha-1)$. This derivative has one root $\alpha = \frac{1}{2}$, where the minimum of functional H_1 is attained.

2) Recall that $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}_1} = \left(\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}}\right)^{-1}$. Introduce the notation $H_{-1} = H(\mathbb{P}|\mathbb{P}_1) + H(\mathbb{P}|\mathbb{P}_2)$. Then $H_2 = H_1 + H_{-1}$. According to the definition of entropy functional and the Girsanov theorem,

$$\begin{aligned} H_{-1} &= \mathbb{E} \left[\left(\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}} \right)^{-1} \log \left(\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}} \right)^{-1} \right] \\ &+ \mathbb{E} \left[\left(\frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}} \right)^{-1} \log \left(\frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}} \right)^{-1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T f_1^2(t)dt + \frac{1}{2} \int_0^T f_2^2(t)dt. \end{aligned}$$

Hence, $H_2 = \alpha^2c + (1-\alpha)^2c$, where $c = \int_0^T f^2(t)dt$. Now we can conclude the proof similarly to the first case.

3) To begin with, let's present the Radon-Nikodym derivative $\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}_2}$ as product of the following Radon-Nikodym derivatives: $\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}}$ and $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}_2}$. Then, according to the definition of relative entropy functional, we have:

$$\begin{aligned} H_3 &= \mathbb{E} \left[\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}_2} \frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}} \log \frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}} \right] + \mathbb{E} \left[\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}} \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}_2} \log \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}_2} \right] \\ &+ \mathbb{E} \left[\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}_1} \frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}} \log \frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}} \right] + \mathbb{E} \left[\frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}} \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}_1} \log \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}_1} \right]. \end{aligned}$$

Using Girsanov theorem and independence of the Wiener processes, we can rewrite each term of the above sum as

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}_2} \frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}} \log \frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}} \right] &= \mathbb{E} \left[\exp \left\{ \int_0^T f_1(t)dW_1(t) - \frac{1}{2} \int_0^T f_1^2(t)dt \right\} \left(\int_0^T f_1(t)dW_1(t) - \frac{1}{2} \int_0^T f_1^2(t)dt \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T f_1^2(t)dt. \end{aligned}$$

The same result was reached for term $\mathbb{E} \left[\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}_1} \frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}} \log \frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}} \right]$, which equals $\frac{1}{2} \int_0^T f_2^2(t)dt$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}} \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}_2} \log \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}_2} \right] &= \mathbb{E} \left[\exp \left\{ - \int_0^T f_2(t)dW_2(t) + \frac{1}{2} \int_0^T f_2^2(t)dt \right\} \left(- \int_0^T f_2(t)dW_2(t) + \frac{1}{2} \int_0^T f_2^2(t)dt \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T f_2^2(t)dt. \end{aligned}$$

The same result holds true for the term $\mathbb{E} \left[\frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}} \frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}} \log \frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}} \right]$ that equals $\frac{1}{2} \int_0^T f_1^2(t)dt$.

Hence, $H_3 = \alpha^2c + (1-\alpha)^2c$, where $c = \int_0^T f^2(t)dt$. Now we can conclude as in the previous case. $\square$

Next functional is defined as a sum of relative entropy functionals $\mathbb{E} \left[\left(\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}} \right)^2 \left(- \log \frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}} \right) \right]$ and $\mathbb{E} \left[\left(\frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}} \right)^2 \left(- \log \frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}} \right) \right]$. Notice that $\mathbb{E} \left[\left(\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}} \right)^2 \left(- \log \frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}} \right) \right] = \mathbb{E} \left[\left(\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}} \right)^2 \right] \left(- \mathbb{E} \log \frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}} \right)$. Since $\log x$ is a concave function we have that $\mathbb{E} \log \frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}} \leq \log \mathbb{E} \frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}} = \log 1 = 0$, consequently, $\mathbb{E} \left[\left(\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}} \right)^2 \left(- \log \frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}} \right) \right] \geq 0$.

Theorem 2.2. Minimum of relative entropy functional H_4 is achieved at the point $\alpha = \frac{1}{2}$ if $c \leq 2$ and in γ_1 and γ_2 if $c > 2$, where $c = \int_0^T f^2(t)dt$ and $\gamma_1 \in (0, \frac{1}{c})$, $\gamma_2 \in (1 - \frac{1}{c}, 1)$.

Доведення. Let us substitute the values of the densities into the formula for H_4 :

$$\begin{aligned} H_4 &= \mathbb{E} \left[\exp \left\{ 2 \int_0^T f_1(t)dW_1(t) - \int_0^T f_1^2(t)dt \right\} \right] \\ &\times \mathbb{E} \left[- \int_0^T f_2(t)dW_2(t) + \frac{1}{2} \int_0^T f_2^2(t)dt \right] \\ &+ \mathbb{E} \left[\exp \left\{ 2 \int_0^T f_2(t)dW_2(t) - \int_0^T f_2^2(t)dt \right\} \right] \\ &\times \mathbb{E} \left[- \int_0^T f_1(t)dW_1(t) + \frac{1}{2} \int_0^T f_1^2(t)dt \right] \\ &= \exp \left\{ \int_0^T f_1^2(t)dt \right\} \times \left(\frac{1}{2} \int_0^T f_2^2(t)dt \right) \\ &+ \exp \left\{ \int_0^T f_2^2(t)dt \right\} \times \left(\frac{1}{2} \int_0^T f_1^2(t)dt \right). \end{aligned} \quad (2)$$

After substitution f_1 and f_2 into (2) we obtain the value of H_4 in terms of c and α as follows:

$$y(\alpha) = \alpha^2 e^{c(1-\alpha)^2} + (1-\alpha)^2 e^{c\alpha^2}, \quad (3)$$

Note that a graph of function (3) is symmetric with respect to the axis $x = \frac{1}{2}$. Indeed, it could be proved using expression $y(-x + \frac{1}{2}) = y(x + \frac{1}{2})$. Further, the derivative equals:

$$\begin{aligned} y'(\alpha) &= 2\alpha e^{c(1-\alpha)^2} + \alpha^2 e^{c(1-\alpha)^2} 2c(\alpha-1) \\ &- 2(1-\alpha) e^{c\alpha^2} + (1-\alpha)^2 e^{c\alpha^2} 2\alpha c \\ &= e^{c\alpha^2} (1-\alpha c + \alpha^2 c) (\alpha e^{c-2\alpha c} + \alpha - 1). \end{aligned} \quad (4)$$

Next step is equating of the RHS of (4) to zero, or, that is equivalent, we consider the following equation:

$$(1 - \alpha c + \alpha^2 c)(\alpha e^{c-2\alpha c} + \alpha - 1) = 0. \quad (5)$$

The first multiplier is a quadratic function having two roots if and only if $c \geq 4$, and the roots equal

$$\beta_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4c}}{2c} = \frac{\sqrt{c} \pm \sqrt{c-4}}{2\sqrt{c}}.$$

The question is how many roots has equation $z(\alpha) = 0$ in $[0, 1]$, where $z(\alpha) = \alpha e^{c-2\alpha c} + \alpha - 1$? One evident root is $\alpha = 1/2$. The first and the second derivative of z with respect to α equal:

$$\begin{aligned} z'(\alpha) &= e^{c-2\alpha c}(1 - 2\alpha c) + 1, \\ z''(\alpha) &= 4c(\alpha c - 1)e^{c-2\alpha c}. \end{aligned}$$

We receive the unique root $\alpha = \frac{1}{c}$ of z'' if and only if $c > 1$.

1) Let $c \leq 1$. Then $z'' < 0$ for $\alpha \in [0, 1]$, therefore z' is nonincreasing. At the point $\alpha = 1$ we have:

$$z'(1) = (1 - 2c)e^{-c} + 1 > 1 - e^{-c} > 0,$$

therefore $z'(\alpha) > 0$ and z is nondecreasing. Taking into account that $\alpha = \frac{1}{2}$ is a root, we can state that this root is unique. Recall that quadratic polynomial does not have roots.

So, in the case $c \leq 1$ minimum of H_4 is achieved at the point $\alpha = \frac{1}{2}$.

2) Let $1 < c \leq 2$. Then quadratic polynomial, as before, does not have roots. Note that $z(0) < 0$ and $z'(0) = e^{-c} + 1 > 0$, $z'(1) = e^{-c}(1 - 2c) + 1$. To define the sign of $z'(1)$ in this case we have to find its first derivative with respect to c :

$$(z')|'_c = -e^{-c}(1 - 2c) - 2e^{-c} = e^{-c}(2c - 3),$$

hence $c = \frac{3}{2}$ is the point of minimum of $z'(1)$, and minimal value of $z'(1)$ at the point c equals $1 - 2e^{-\frac{3}{2}} > 0$. It follows from this fact that $z'(0) > 0$ and $z'(1) > 0$. Concerning the behaviour of the second derivative, note that $z''(\alpha) < 0$ for $\alpha \in [0, \frac{1}{c})$ and $z''(\alpha) \geq 0$ for $\alpha \in (\frac{1}{c}, 1]$. Hence, z' is nonincreasing on the interval $[0, \frac{1}{c})$ and is nondecreasing on the interval $(\frac{1}{c}, 1]$ with the point of minimum $\alpha = \frac{1}{c}$ and minimal value $1 - e^{c-2}$, which is nonnegative. As a result, $z' > 0$ and function $z(\alpha)$ is increasing and has one root $\alpha = \frac{1}{2}$.

So, in the case $1 \leq c \leq 2$ minimum of H_4 is achieved at the point $\alpha = \frac{1}{2}$. Plots of functions $y(\alpha)$ and $y'(\alpha)$ are presented in Figure 1.

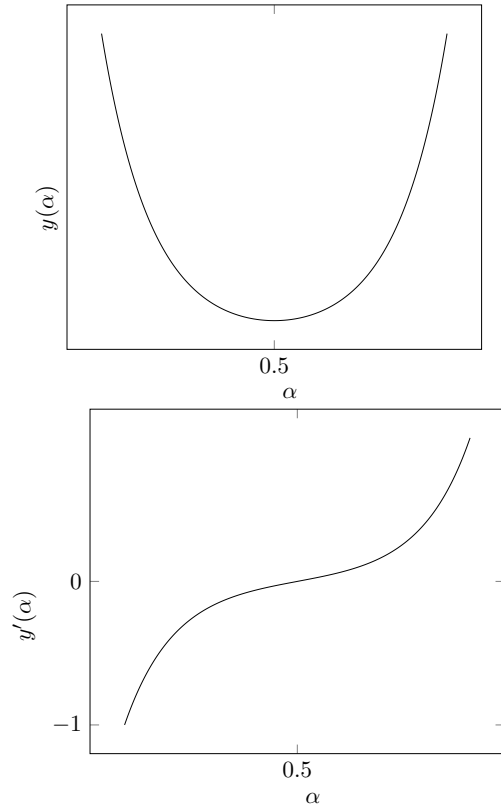


Рис. 1

3) Let $2 < c < 4$. Note that $z'(0) > 0$, $z'(\frac{1}{2c}) > 0$, $z'(\frac{1}{c}) = 1 - e^{c-2} < 0$, $z'(\frac{1}{2}) = 2 - c < 0$ and $z'(1) > 0$. As before, $z''(\alpha) < 0$ for $\alpha \in [0, \frac{1}{c})$ and $z''(\alpha) \geq 0$ for $\alpha \in (\frac{1}{c}, 1]$. For the sign of $z'(\alpha)$ now, we have the following cases:

$$z'(\alpha) > 0 \in [0, \alpha_1), \quad \text{where} \quad \alpha_1 \in \left(\frac{1}{2c}, \frac{1}{c}\right),$$

$$z'(\alpha) < 0 \in [\alpha_1, \alpha_2), \quad \text{where} \quad \alpha_2 \in \left(1 - \frac{1}{2}, 1\right),$$

$$z'(\alpha) > 0 \in [\alpha_2, 1].$$

Consequently, function $z(\alpha)$ is nondecreasing in the interval $[0, \alpha_1)$, then nonincreasing in the interval $[\alpha_1, \alpha_2)$ and nondecreasing in the interval $[\alpha_2, 1]$ again. Since $z(0) = -1 < 0$, $z(1/2) = 0$ and $z(1) = e^{-c} > 0$, we conclude that $z(\alpha)$ has three roots: $\gamma_1 \in (0, \alpha_1)$, $\gamma_2 = \frac{1}{2}$ and $\gamma_3 \in (1 - \alpha_1, 1)$. So, in the case $2 < c < 4$ minimum of H_4 is achieved at the points γ_1 and γ_3 . Plots of functions $y(\alpha)$ and $y'(\alpha)$ are presented in Figure 2.

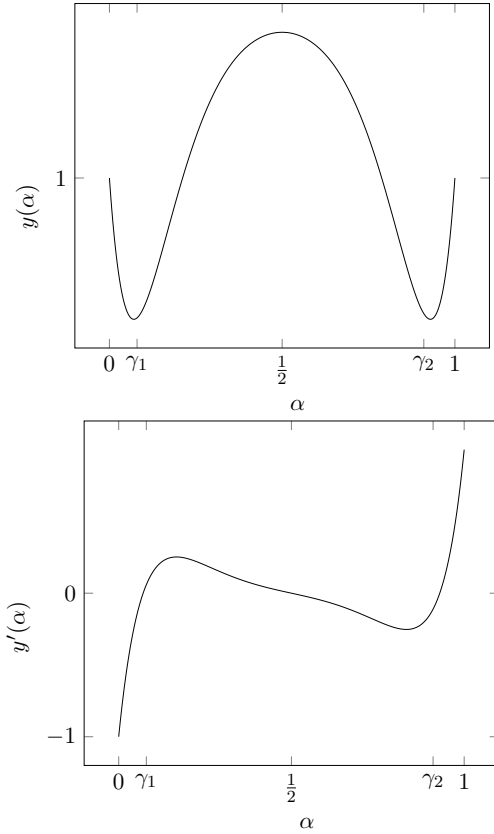


Рис. 2

4) Finally, let $c \geq 4$. Then the derivative y' has five roots: $\gamma_1, 1/2, \gamma_3$ and $\beta_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{c}}$. Determine what intervals contain roots β_1 and β_2 . Let us compare β_1 with $\frac{1}{c}$. It is evident that $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{c}} > \frac{1}{c}$ for $c \geq 4$. So, the root $\beta_1 \in (\frac{1}{c}, \frac{1}{2})$. Similarly, $\beta_2 \in (\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{c})$. Further, it is easy to see that, up to the positive multiplier $e^{\alpha c^2}$, $y'(0) = -1 < 0$, $y'(\frac{1}{c}) = \frac{1}{c^2}(e^{c-2} + 1 - c) > 0$. Taking into account that y' is antisymmetric with respect to the axis $x = \frac{1}{2}$, we get that y has local minimums at the points $\gamma_1, 1/2$ and γ_3 . The next step is to compare $y(\gamma_1)$ and $y(1/2)$. Evidently, $y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}e^{\frac{c}{4}}$ and $e^{c-2\gamma_1 c} = \frac{1-\gamma_1}{\gamma_1}$, therefore $y(\gamma_1) = e^{c\gamma_1^2(1-\gamma_1)}$. Consider the function $g(x) = e^{cx^2}(1-x)$, $x \in [0, 1]$. Its derivative equals $g'(x) = e^{cx^2}(2cx - 2cx^2 - 1)$, with two roots $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{2}{c}}$. Evidently, $x_1 < \frac{1}{2} < x_2$, and $g'(x) > 0$ for $x \in (x_1, x_2)$, $g'(x) < 0$ for $x \in (0, x_1) \cup (x_2, 1)$. Moreover, at the point x_1

$$z(x_1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{2}{c}}\right) \left(e^{c\sqrt{1 - \frac{2}{c}}} + 1\right) - 1 > 0$$

because this inequality is equivalent to the follo-

wing one :

$$e^{\sqrt{c^2-2c}} \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{c}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{2}{c}}} = c - 1 + \sqrt{c^2 - 2c},$$

and for $u = \sqrt{c^2 - 2c}$ we have that

$$\begin{aligned} e^u &> 1 + u + \frac{u^2}{2} \\ &= 1 + \sqrt{c^2 - 2c} + \frac{c^2}{2} - c > c - 1 + \sqrt{c^2 - 2c} \end{aligned}$$

for $c \geq 4$. It means that $x_1 > \gamma_1$. Notice that $g(1) = 1$ and before x_1 $g'(x) < 0$. Comparing values of $g'(x)$ at the points 0 and $\frac{1}{2}$ we obtain that $g'(0) < g'(\frac{1}{2})$. Furthermore, we have that $y(\gamma_1) < y(1/2)$. Plots of functions $y(\alpha)$ and $y'(\alpha)$ are presented in Figure 3.

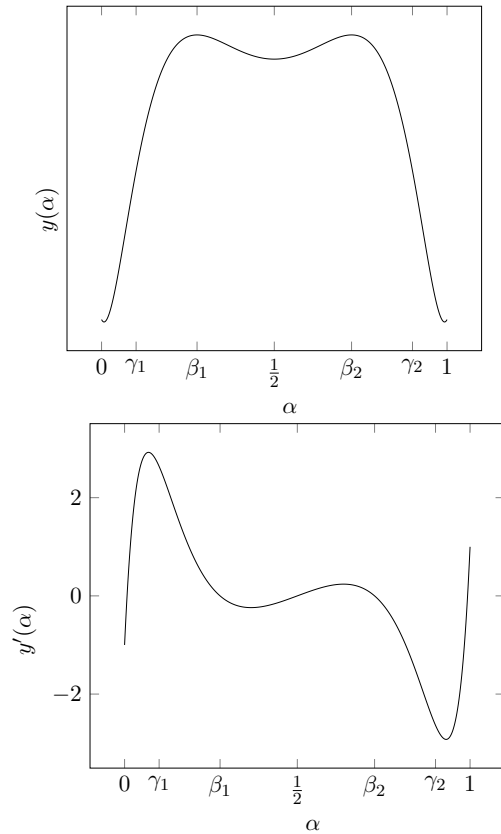


Рис. 3

□

The code below is used to find roots of equation $z(\alpha) = 0$ in $[0, 1]$, where $z(\alpha) = \alpha e^{c-2\alpha c} + \alpha - 1$, numerically by the Newton-Raphson method. The following programme is written in the R language.

Results of calculations are presented in the Table 1.

```
library(numDeriv)
m<-25
c<-1:m
funcFrmX<-mapply (function(c) {
eval(parse(text = paste(
'f<-function( ', "x", ' )_{return(
',paste("x*exp(",c,"-2*x*",c,")+x-1", a=x, b=x+1))}))
sep="") , ')}', sep=''))},c)
newtonRaphson <- function(f, a, b,
tol = 0.0001, n = 1000) {
x0 <- a
k <- n
fa <- f(a)
fb <- f(b)
if (fa == 0.0) {return(a)}
if (fb == 0.0) {return(b)}
for (i in 1:n) {
dx <- genD(func = f, x = x0)$D[1]
x1 <- x0 - (f(x0) / dx)
k[i] <- x1
if (abs(x1 - x0) < tol) {
```

```
res <- tail(k, n=1)
return(res)}
x0 <- x1}}
k<-seq(0,0.9,0.1)
rootVl<-cbind(c,sapply(k,function(x){
unlist(lapply(funcFrmX,newtonRaphson,
```

Табл. 1

c	γ_1	α_2	γ_2
1	0.5	0.5	0.5
2	0.5	0.5	0.5
3	7.072014e-02	0.5	0.9292798
4	2.124792e-02	0.5	0.9787520
5	7.188064e-03	0.5	0.9928119
6	2.549164e-03	0.5	0.9974508
7	9.228858e-04	0.5	0.9990771
8	3.371634e-04	0.5	0.9996628
9	1.236695e-04	0.5	0.9998763
10	4.539787e-05	0.5	0.9999546

Список використаних джерел

1. Follmer H., Schied A. Stochastic finance:an introduction in discrete time./ H. Follmer, A. Schied.– Berlin: Walter de Gruyter, 2002. – P. 121–130.
2. Friedman A. Stochastic differential equations and applications./ A.Friedman.– London: Academic Press, 1975. – P. 164–171.

References

1. FOLLMER, H., SCHIED, A. (2002) Stochastic finance: an introduction in discrete time. Berlin: Walter de Gruyter.
2. FRIEDMAN, A. (1975) Stochastic differential equations and applications. London: Academic Press.

Recieved: 15.03.2017

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ,
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА
ТА МЕХАНІКА**

УДК 532.5+577.346+612.117

Батюк Л. В.¹, к. ф.-м. н., доцент,
Кізілова Н. М.², д. ф.-м. н., проф.

Моделювання ламінарних течій суспензій еритроцитів крові як бінгамівських мікрорідин

¹ Харківський національний медичний
університет, 61022, м. Харків, пл. Свободи, 2,
² Харківський національний університет
ім. В.Н. Каразіна, 61022, м. Харків,
пл. Свободи, 4,
e-mail: n.kizilova@gmail.com
liliyabatyuk24@gmail.com

L. V. Batyuk¹, PhD, docent,
N. M. Kizilova², DSc, prof.

Modeling of laminar flows of erythrocyte suspensions as Bingham microfluids

¹ V.N. Karazin Kharkov National University,
61022, Kharkov, Svobody sq., 4,
² V.N. Karazin Kharkov National University,
61022, Kharkov, Svobody sq., 4,
e-mail: n.kizilova@gmail.com
liliyabatyuk24@gmail.com

Досліджуються ламінарні течії крові, суспензій еритроцитів крові або тіней еритроцитів у фізіологічному розчині по циліндричним трубкам кругового перерізу. За рахунок малого розміру еритроцитів (до 10 нм) такі рідини являють собою мікрорідини, для яких на стінках трубки виконуються умови прослизання першого роду. Наведено результати експериментальних вимірювань об'ємної витрати течії при різних зовнішніх температурах в широкому діапазоні значень і показано, що експериментальні величини суттєво відрізняються від теоретичних, обчислених за формулою Пуазейля. За рахунок наявності ефекту Фареуса-Линдквіста та прослизання на стінці об'ємна витрата рідини зростає, а за рахунок наявності ефекту Коплі-Скотт-Блера – зменшується. Крім того, з підвищенням температури поверхня клітин крові активується, підвищується її адгезивна здатність, що приводить до переходу рідини з псевдопластичного до в'язкопластичного стану. Отримано розв'язок задачі про ламінарний рух бінгамівської рідини за умовами наявності пристінних шарів Фареуса-Линдквіста та Коплі-Скотт-Блера. Чисельні розрахунки показали, що зі зростанням температури в'язкопластичні властивості домінують, за рахунок чого об'ємна витрата рідини суттєво зменшується практично до нуля, що цілком відповідає експериментальним даним.

Ключові слова: суспензія, мікрорідина, ламінарна течія, ефект Фареуса-Линдквіста, ефект Коплі-Скотт-Блера, бінгамівська рідина.

Laminar flows of blood, suspensions of red blood cells or their ghosts in the saline through cylindrical tubes of circular cross section are considered. Due to the small size of erythrocytes (up to 10 nm), such liquids are microfluids, for which the first order velocity slip boundary condition is valid at the wall of the tube. The results of experimental measurements of the volumetric flow rates at different external temperatures are presented, and the experimental values are substantially different from the theoretical ones, calculated by Poiseuille's formula. Due to the Fahraeus-Lindqvist effect and the velocity slip at the wall, the volume flow rate increases, while due to the Copley-Scott-Blair effect, it decreases. In addition, with the increase in temperature, the surfaces of the blood cells are activated and their adhesivity is increased, which result in the transition from pseudoplastic to the viscoplastic state. The solution of the problem of the axisymmetric laminar flow of the Bingham fluid in the presence of the Fahraeus-Lindqvist and Copley-Scott-Blair wall layers is obtained. Numerical computations have shown that at higher temperatures the viscoplastic properties dominate over the wall effects. Therefore, the volumetric flow rate significantly decreases to zero at high temperatures, which exactly corresponds to the experimental data.

Key Words: Suspension, Microfluid, Laminar flow, Fahraeus-Lindqvist effect, Copley-Scott Blair effect, Bingham fluid.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О

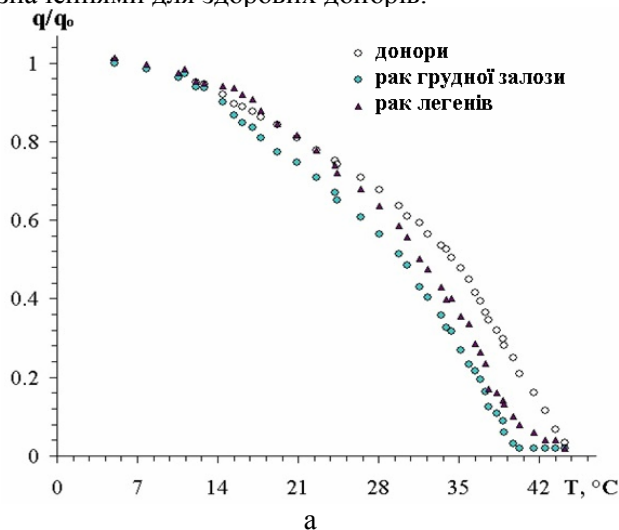
1. Вступ. Протягом останніх років мікрорідинні пристрої, такі як мікроелектромеханічні системи, лабораторії на чіпах, паливні елементи, мікродвигуни, мікронагрівачі/охолоджувачі та ін. все ширше використовуються в медицині для обробки крові, сепарації плазми, усунування пошкоджених або старих еритроцитів, які мають низьку гнучкість та високу щільність, та ін. [1-3]. Дія перелічених вище пристроїв основана на течіях рідини або рідин по складних системах трубок або каналів. Для обробки крові використовуються біомаркери, біохімічні або магнітні доданки, а методи сепарації ґрунтуються на різницях в механічних (щільність, еластичність та ін.), електричних (заряд, діелектрична проникність), акустичних, оптичних, магнітних та інших властивостей клітин та макромолекул.

Суспензії частинок з розмірами $1 < d < 100$ мкм називають мікрорідинами; до їх складу відносять суспензії клітин та макромолекул. В чисельних експериментах з течіями мікрорідин по трубках було показано, що вимірювані значення об'ємної витрати рідини значно вище, ніж відповідні теоретичні, що обчислені за формулою Пуазейля. Так, було показано, що при течіях рідин по сіліконовим мікроканалам з діаметрами $D = 5; 12; 25$ мкм коефіцієнт тертя на 5-30% вище, ніж коефіцієнт, розрахований на основі рівнянь Нав'є-Стокса [4]. Величина відхилення залежала від температури, розміру та концентрації частинок, діаметру трубки та режиму течії. Вимірювання швидкості течії води при числах Рейнольдса $Re = 100 - 2000$ по сталевих та сіліконових мікротрубках з діаметрами $D = 50 - 254$ мкм та відносною шорсткістю $\varepsilon/D = 0.69 - 3.5\%$, де ε - характерна висота шорсткості, також показало більш високі значення витрат на тертя, ніж передбачувані теорією Стокса [5]. Різниця між обчисленими та вимірними значеннями зростає зі зменшенням D та зростанням Re . В прямокутних металевих мікроканалах з шириною $W = 150 - 600$ мкм і висотою $H = 22.7 - 26.3$ мкм спостерігалось зростання коефіцієнта тертя на $\sim 20\%$ у порівнянні з розрахованим [6]. Зі зростанням відносної шорсткості ε/D стінки до 5% для підтримання заданої об'ємної витрати потрібен перепад тиску на 65% вище, ніж передбачений формулою Пуазейля. Як показали дослідження останніх років, головна причина розходжень пов'язана з наявністю прослизання частинок мікрорідин на стінках каналів, шорсткість яких порівняна з розмірами самих частинок. Оскільки в мікроканалах відношення поверхні до об'єму вище, ніж в макроскопічних системах, роль поверхневих ефектів, в тому числі тертя та

специфічної адгезії, суттєво зростає, що робить течії мікрорідин значно складнішими, ніж класичних макрорідин, як показано в [7].

2. Матеріали та методи. Проби крові донорів (25 осіб) та пацієнтів з раком легенів (32 особи), раком грудної залози (40 осіб), ішемічним (22 особи) та геморагічним (18 осіб) інсультом обробляли оксалатом натрію для стабілізації. Еритроцити вимивали у фізіологічному розчині (ФР) в центрифугі (32000 об/хв.) та готували суспензії відмитих еритроцитів у ФР зі стандартною концентрацією 35%. Зразок суспензії був розміщений в трубці, яка послідовно з'єднана з капіляром ($d = 1.15$ мм), розміщеними у термостаті. В експерименті вимірювалася об'ємна витрата q суспензії при її течії крізь капіляр. Для порівняння розраховувалися відповідні значення об'ємної витрати q_0 за формулою Пуазейля. В'язкість суспензій вимірювали за допомогою лабораторного капілярного віскозиметра Гесса. Вимірювання проводили в широкому діапазоні температур $T = 5 - 43^\circ C$, починаючи з $T = 5^\circ C$, з шагом $\Delta T = 1^\circ C$. Після кожного підвищення температури система приводилася до стану термодинамічної рівноваги протягом 10 хв. Результати залежностей безрозмірних витрат q/q_0 від температури наведені на рис. 1 а,б.

Як показали результати, у більшості пацієнтів зі серйозними захворюваннями (рак, геморагічний інсульт) значення витрати менше, ніж у здорових, і тільки у пацієнтів з легкою формою ішемічного інсульту ці значення підвищені при низьких температурах, але при температурі тіла майже співпадають зі значеннями для здорових донорів.



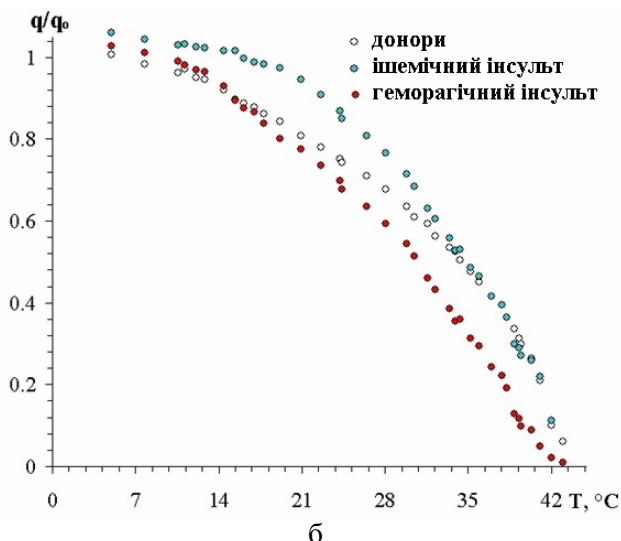


Рис.1. Залежності безрозмірної об'ємної витрати течії від температури для пацієнтів з онкологічними захворюваннями (а) та інсультом (б) у порівнянні зі здоровими донорами

Причиною таких змін може бути активація та специфічна адгезія мембран еритроцитів за рахунок зменшення товщини та порушень упорядкування їх гідратних оболонок [8]. Залежності $q/q_0(T)$ однакові для всіх проб та пов'язані з впливом температури на мембрани [9]. Розглянутий діапазон температур далекий від мінімальних значень $T = 52 - 53^\circ\text{C}$ (денатурація фібрину у ФР), але за рахунок температурних змін та активації мембран можливий перехід суспензії до в'язкопластичного стану [10].

3. Фізико-механічні аспекти течій суспензій.

3.1. Ефект Фареуса-Ліндквіста (ФЛ). Відомо, що при течіях суспензій мікрочастинок по вузьким трубкам та щілинам, спостерігається зростаюча залежність q від діаметру трубки D , яка пов'язана з ефектом ФЛ [11]. При цьому частинки суспензії концентруються в ядрі течії, а біля стінок утворюються тонкий шар рідини, вільної від частинок, який має нижчу в'язкість і, таким чином, грає роль мастильного шару. Аналіз сил, які діють на частинку суспензії біля стінки, показує, що відповідальною за цей ефект може бути сила Магнуса або електростатична взаємодія частинок суспензій. Оскільки еритроцити в нормі мають у ФР негативний поверхневий заряд, обидві сили можуть впливати на рух суспензії, за рахунок чого $q/q_0 > 1$.

3.2. Ефект Коплі-Скотт-Блера (КСБ). Цей ефект пов'язаний за специфічною взаємодією молекул та клітин біологічних суспензій з матеріалом стінки. При цьому за рахунок

адсорбції ефективний діаметр мікротрубки зменшується, утворюється подвійний електричний шар [12], що в цілому приводить до зменшення витрати ($q/q_0 < 1$) в залежності від матеріалу стінки.

3.3. В'язкопластичні властивості суспензій. За рахунок взаємодії частинок у концентрованих суспензіях можуть утворюватися агрегати складної форми, що веде до підвищення в'язкості (тобто $q/q_0 < 1$) в залежності від температури, концентрації та форми частинок та ін. Найпростішою моделлю є реологічна модель Бінгама

$$\dot{\gamma} = \begin{cases} (\tau - \tau_0) / \mu, & \tau \geq \tau_0, \\ 0, & \tau < \tau_0, \end{cases} \quad (1)$$

де $\tau, \tau_0, \dot{\gamma}$ - напруження, критичні напруження та швидкості деформацій зсуву.

3.4. Течії мікрорідин по мікроканалах. За рахунок прослизання на стінках виконуються граничні умови прослизання першого роду для швидкості [13]

$$\left(\bar{v} - \alpha \frac{\partial \bar{v}}{\partial n} \right) \Big|_{\partial \Omega} = \bar{v}_n \quad (2)$$

де $\bar{v}$ - швидкість, $\partial \Omega$ - границя області, $\bar{n}$ - нормаль до неї, α - коефіцієнт прослизання. За рахунок прослизання маємо для мікрорідин $q/q_0 > 1$.

Таким чином, різки фізико-механічні ефекти приводять до різноспрямованих змін q у порівнянні з q_0 . В даній роботі вивчається кількісний вплив кожного з ефектів на течію та витрату суспензії еритроцитів по трубці.

4. Математична модель. Розглянемо ламінарну стаціонарну радіально симетричну течію двох нестисливих рідин з різними в'язкостями та швидкостями по циліндричній трубці кругового перетину (Рис.2). Тут R - радіус трубки, h та δ - товщина шарів КСБ та ФЛ.

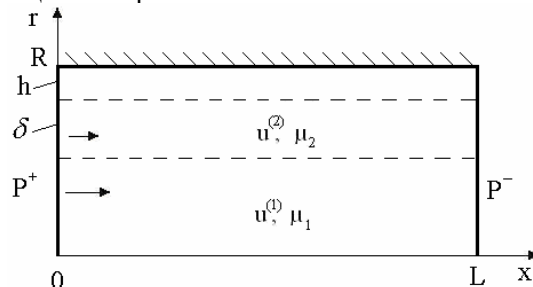


Рис.2. Схема задачі.

Тоді рівняння Нав'є-Стокса мають вигляд

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du^{(1,2)}}{dr} \right) = \frac{\delta p}{\mu_{1,2} L}, \quad (3)$$

де $\delta p = P^+ - P^-$, а граничні умови (2) суть

$$\begin{aligned} r=0: \quad \frac{du^{(1)}}{dr} &= 0, \\ r=R: \quad u^{(2)}(R-h) - \alpha \frac{du_2}{dr}(R-h) &= 0, \\ r=R-h-\delta: \quad u^{(1)} &= u^{(2)}, \quad \mu_1 \frac{du^{(1)}}{dr} = \mu_2 \frac{du^{(2)}}{dr}. \end{aligned} \quad (4)$$

Внутрішній шар утворений рідиною Бінгама (1), а зовнішній – ньютонівською рідиною. В рівняннях (1)-(4) $d\mu/dT < 0$, $d\delta/dT < 0$, $dh/dT > 0$, $d\tau_0/dT > 0$, $d\alpha/dT > 0$ [2, 3, 9, 13].

5. Чисельні розрахунки та аналіз результатів.

5.1. Вплив ефекту ФЛ на мікрорідини. Окремо цей вплив можна дослідити у випадку $\tau_0, h = 0$.

Тоді розв'язок (1)-(2) є

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1(\tilde{r}) &= \mu(1-2a) + (1-\mu)(1-\Delta)^2 - \tilde{r}^2, \\ \tilde{v}_2(\tilde{r}) &= \mu(1-2a) - \mu \tilde{r}^2, \end{aligned} \quad (5)$$

де $\tilde{u}_{1,2} = u^{(1,2)} / u^*$ – безрозмірні швидкості,
 $u^* = R^2 \delta p / (4\mu_1 L)$, $\mu = \mu_1 / \mu_2$, $\Delta = \delta / R$, $a = \alpha / R$,
 $a = C \cdot Kn$, $Kn = \lambda / R$ – число Кнудсена.

З (5) легко отримаємо для витрати

$$q = \int_0^{\tilde{\Delta}} \tilde{u}^{(1)} \tilde{r} d\tilde{r} + \int_{\tilde{\Delta}}^1 \tilde{u}^{(2)} \tilde{r} d\tilde{r} = \mu(1+4a) - (\mu-1)(1-\Delta)^4, \quad (6)$$

де $\tilde{r} = r/R$.

Чисельні розрахунки по (6) проводилися для значень параметрів, що відповідають ФР та суспензіям еритроцитів: $\Delta = 0.01 \div 0.4$, $\mu = 1 \div 3.5$, $Kn = 0.01 \pm 0.1$, $C = 1 \div 1.5$ [2, 13]. Деякі результати розрахунків наведені на Рис.3.

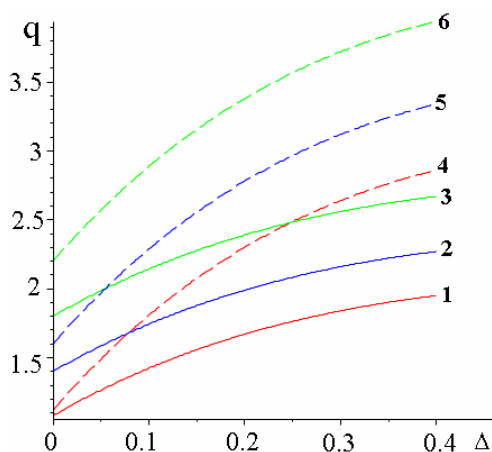


Рис.3. Залежності безрозмірної об'ємної витрати від Δ при різних значеннях a : $a = 0.01$ (криві 1,4),

$a = 0.05$ (криві 2,5), $a = 0.1$ (криві 3,6). Суцільні лінії відповідають $\mu = 2$, пунктирні – $\mu = 3$.

Таким чином, витрата течії збільшується за рахунок підвищення відносної товщини змащувального шару Δ , відносної в'язкості μ та коефіцієнту прослизання на стінці a , що є фізичним. Із (6) отримаємо, що $dq/dT < 0$, якщо для $\tilde{a}$ та $\tilde{\Delta}$ виконується нерівність

$$\frac{4\mu\tilde{a} + (1-\Delta)^4}{4(\mu-1)(1-\Delta)^3\tilde{\Delta} + (1+4a)} < 1,$$

де $\tilde{a} = |a'|/|\mu'|$, $\tilde{\Delta} = |\Delta'|/|\mu'|$.

5.2. Одночасний вплив ефектів ФЛ та КСБ на мікрорідини. В цьому випадку $h \neq 0$ і тоді замість (6) маємо

$$\begin{aligned} q &= (1-h)^4 + 4(\mu\Delta - \Delta + \mu a)(1-h)^3 + \\ &+ 6\Delta^2(1-\mu)(1-h)^2 + 4\Delta^3(\mu-1)(1-h) + (1-\mu)\Delta^4, \end{aligned} \quad (7)$$

де $H = h/R$.

Чисельні розрахунки по (7) проводилися при тих же значеннях параметрів; $H = 0 - 0.2$. Результати наведені на Рис. 4 а,б.

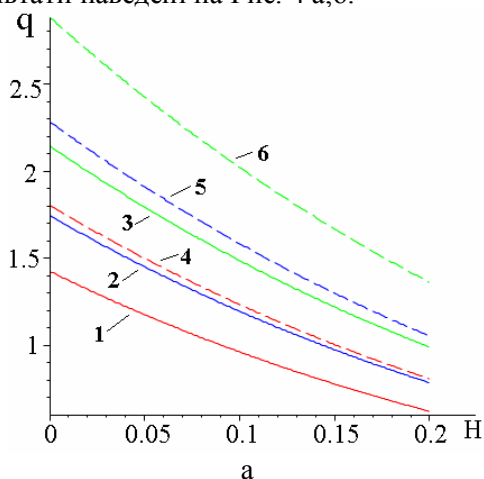
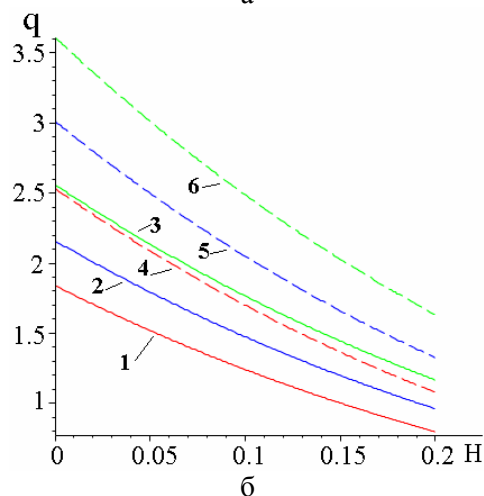


Рис. 4. Залежності $q(H)$ при $\Delta = 0.1$ (а) та $\Delta = 0.4$ (б). Позначення такі ж як на рис.3.

Таким чином, зменшення ефективного радіусу трубки за рахунок утворення нерухомого шару КСБ, приводить до суттєвого зменшення витрати рідини. Зростання шару КСБ від $h = 0$ до $h = 0.2$ приводить до зменшення q в два рази (Рис.4), тоді як зростання шару ФЛ – в 1.5 рази (Рис.4) при тих же значеннях μ, a . Ймовірно, що вплив ефекту КСБ значніший в нативній крові, ніж в суспензіях відмитих еритроцитів в ФР за рахунок відсутності вільних білків, ліпідів, мінералів та полісахаридів [7], тому ефект ФЛ превалює над КСБ. Відповідні термічні залежності аналогічні (7) стають більш складними за рахунок відсутності детальних даних о залежностях $\mu(T)$, $\delta(T)$, $h(T)$, $\alpha(T)$ в чисельному вигляді.

5.2. Вплив ефектів ФЛ та КСБ на течії бінгамівських рідин. Розглянемо випадок коли в ядрі течії знаходиться бінгамівська рідина, а біля стінки – ньютонівська. Тоді відповідно (1) замість (3) розглянемо рівняння у вигляді

$$\dot{\gamma}^{(1)}(\tau) = \frac{\tau_{R-\delta}}{R-h} \frac{du^{(1)}(\tau)}{d\tau} = \begin{cases} \frac{\tau - \tau_0}{\mu_1}, & \tau > \tau_0 \\ 0, & \tau < \tau_0 \end{cases}, \quad (8)$$

де $\tau_{R-\delta} = \tau(R-\delta)$. Після інтегрування (8) для $u^{(1)}$, (3) – для $u^{(2)}$ та знаходження постійних інтегрування з умов (4), отримаємо

$$u(r) = \begin{cases} u_2(r), & r \in [R-h-\delta, R-h], \\ u_1(r), & r \in [R^*, R-h-\delta], \\ u_1(R^*), & r \in [0, R^*], \end{cases} \quad (9)$$

де $R^* \in [0, R-h-\delta]$ - поверхня, вздовж якої $\tau = \tau_0$ і яка, таким чином, розділяє зони течії та квазітвердого руху бінгамівської рідини. Детальні вирази для швидкостей та витрати крізь переріз не наведені внаслідок їх громіздкості. Результати розрахунків залежності витрати від безрозмірного критичного напруження зсуву $\tilde{\tau} = \tau / \tau_0$ в широкому діапазоні значень τ_0 наведені на Рис.5а. Видно, що величина q залежить від $\tilde{\tau}$ значно сильніше, ніж від Δ та H . Збільшені залежності в більш вузькому діапазоні $\tilde{\tau}$ наведені на Рис.5б для уяви о вигляді залежностей $q(\tilde{\tau})$ при різних μ, a .

Таким чином, зі зростанням температури незначно змінюються μ, a, Δ , що може приводити до збільшення об'ємної витрати мікрорідини, але значно зростають h, τ_0 , що приводить до суттєвого зменшення q навіть при повній зупинці руху для великих τ_0 , що відповідає даним експериментальних вимірювань на

концентрованих суспензіях еритроцитів крові в ФР (Рис.1).

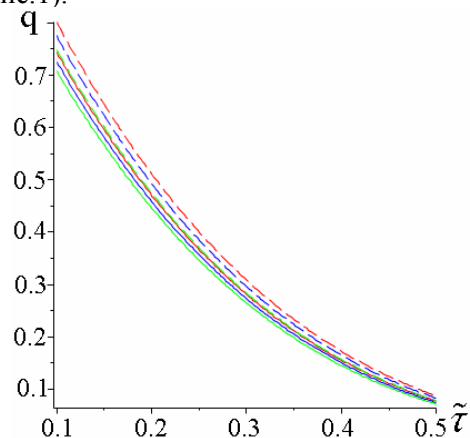
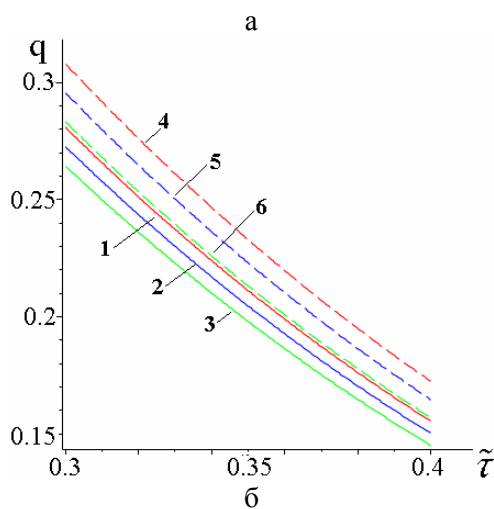


Рис. 5. Залежності $q(\tilde{\tau})$ для бінгамівської рідини для $\Delta = 0.1, H = 0.1$ при $\tilde{\tau} = 0.1 \div 0.5$ (а) та $\tilde{\tau} = 0.3 \div 0.4$ (б). Позначення такі ж як на рис.3.

6. Висновки. Рух концентрованих суспензій мікрочастинок по мікроканалам супроводжується утворенням вільного від частинок пристінного шару та ефекту прослизання на шорстких стінках, що веде до збільшення об'ємної витрати рідини у порівнянні з однорідною ньютонівською рідиною з тією ж в'язкістю. З іншого боку, в трубках з деяких матеріалів (скло, полімери) утворюється шар КСБ та має місце підвищення агрегація частинок, що приводить до зміни характері течії з псевдопластичного до в'язкопластичного. При низьких температурах дві групи ефектів зрівноважені, але зі зростанням температури динаміка другої групи превалює і в цілому залежність $q(T)$ стає спадаючою, впритул до $q = 0$ при високих температурах. Такого ефекту можна уникнути за рахунок спеціальної обробки поверхні трубки (для крові це - покриття шаром фібрину) [7].

Список використаних джерел

1. MEMS Microfluidics for Lab-on-a-Chip Applications, Microelectromechanical Systems and Devices, Islam N. (Ed.), InTech, 2012.
2. MEMS Materials and Processes Handbook, Ghodssi R., and Lin P. (Eds.), Springer, 2011.
3. Microfluidics and BioMEMS Applications, Tay F.E.H. (Ed.), Springer-Science, 2002.
4. Urbanek, W. An investigation of the temperature dependence of Poiseuille numbers in microchannel flow / W. Urbanek, J.N. Zemel, H. Bau // J. Micromech. Microeng. 3. - 1993. - P. 206–208.
5. Mala, G.M. Flow characteristics of water in microchannels / G.M. Mala, D.Q. Li // Int. J. Heat Fluid Flow. - 1999. - 20. - P.142–148.
6. Papautsky, I. Effects of rectangular microchannel aspect ratio on laminar friction constant / I. Papautsky, B.K. Gale, S. Mohanty, T.A. Ameel, A.B. Frazier // In: Proc. of the Society of Photo-optical Instrumentation Engineers (SPIE). - 1999. - 3877. - P.147–158.
7. Wang H. Influence of three-dimensional wall roughness on the laminar flow in microtube / H. Wang, Y. Wang. // Intern. J. Heat Fluid Flow. 2007. - v.28. - P.220–228.
8. Batyuk L. Influence of cancer disease on dielectric characteristics of structural-functional state of erythrocyte membranes. // ScienceRise. - 2015. - v.12, №7/4. - P.11-17.
9. Справочник химика (в 7 томах). / Никольский Б.П. (ред.). т.2, Л.: Химия. - 1971.
10. Kizilova N. Complex flows of cellular suspensions in microtubes at different temperatures / N. Kizilova, L. Batyuk. // Intern Conf "Experiments in Fluid Mechanics", 23-24 October, 2017.
11. Oiknine C. Scott Blair model and Fahraeus-Lindqvist effect / C. Oiknine, F. Azelvandre. // Rheol. Acta. - 1975. - v.14. - P.51-52.
12. Oka S. Copley-Scott Blair phenomenon and electric double layer. // Biorheology. - 1981. - v.18, N3/6. - P. 347-353.
13. Rapp B.E. Microfluidics: Modeling, Mechanics, and Mathematics, Elsevier. - 2017. - 770 p.

References

1. MEMS Microfluidics for Lab-on-a-Chip Applications, Microelectromechanical Systems and Devices, ISLAM, N. (Ed.), InTech, (2012).
2. MEMS Materials and Processes Handbook, GHODSSI, R., & LIN, P. (Eds.), Springer, (2011).
3. Microfluidics and BioMEMS Applications, TAY, F.E.H. (Ed.), Springer-Science, (2002).
4. URBANEK, W., ZEMEL, J.N., & BAU, H. (1993) An investigation of the temperature dependence of Poiseuille numbers in microchannel flow. *J. Micromech. Microeng.* 3. p. 206–208.
5. MALA, G.M. & LI D.Q. (1999) Flow characteristics of water in microchannels. *Int. J. Heat Fluid Flow.* 20. p.142–148.
6. PAPAUTSKY, I., GALE, S., et al. (1999) Effects of rectangular microchannel aspect ratio on laminar friction constant. *Proc. of the Society of Photooptical Instrumentation Engineers (SPIE).* 3877. p.147–158.
7. WANG, H. & WANG, Y. (2007) Influence of three-dimensional wall roughness on the laminar flow in microtube. *Intern. J. Heat Fluid Flow.* 28. p.220–228.
8. BATYUK, L. (2015) Influence of cancer disease on dielectric characteristics of structural-functional state of erythrocyte membranes. *ScienceRise.* 12. p.11-17.
9. Spravochnik Chimika (in 7 vol), NICKOLSKI, B.P. (ed.). v.2. (1971).
10. KIZILOVA, N. & BATUYK, L. (2017). Complex flows of cellular suspensions in microtubes at different temperatures. *Intern Conf "Experiments in Fluid Mechanics"*. (2017).
11. OIKNINE, C. & AZELVANDRE, F. (1975) Scott Blair model and Fahraeus-Lindqvist. *Rheol. Acta.* 14. p.51-52.
12. OKA, S. (1981) Copley-Scott Blair phenomenon and electric double layer. *Biorheology.* 18. p. 347-353.
13. RAPP B.E. (2017) *Microfluidics: Modeling, Mechanics, and Mathematics*, Elsevier.

Надійшла до редколегії 30.10.17

УДК 539.3

Беспалова¹ О. І., д.ф.-м.н.,
Яремченко¹ Н. П., к.ф.-м.н.

**Визначення напружено-деформованого
стану спряжених гнучких оболонок
обертання при докритичних
навантаженнях**

¹ Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН
України, 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3
e-mail: elena_bespalova@ukr.net
nataliya.petrivna@ukr.net

Bespalova¹ E. I., D.Sc.,
Yaremchenko¹ N. P., PhD.

**Determining the stress-strain state of flexible
conjugated shells of revolution under
subcritical loading**

¹ S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the
National Academy of Sciences of Ukraine,
03057, Kyiv, Nesterov str. 3
e-mail: elena_bespalova@ukr.net
nataliya.petrivna@ukr.net

Запропоновано підхід до визначення напружено-деформованого стану пружних систем, складених зі спряжених між собою гнучких оболонок обертання різної геометрії і структури. Підхід включає постановку задачі на основі геометрично нелінійної теорії середнього згину при припущеннях класичної моделі оболонок Кірхгофа – Лява і чисельно-аналітичну методику її розв'язання на основі поєднання процесу квазілінеаризації з методом ортогональної прогонки. Наведено результати аналізу напружено-деформованого стану пружної системи знакозмінної Гауссової кривизни типу елемента компенсуючого пристрою.

Ключові слова: гнучкі оболонкові системи, напружено-деформований стан, геометрично нелінійна теорія, метод квазілінеаризації, метод ортогональної прогонки, аналіз.

Many constructions of modern engineering are modeled by elastic systems, which consist of coaxial conjugated flexible shells of revolution of complex geometry and structure subjected to axisymmetrical loads of different nature. The models used describe constructions in various fields of modern engineering such ones as aircraft construction, shipbuilding, instrument-making industry, etc. One of the important factors of validation of strength and reliability of such objects is study of their stress-strain state in the wide range of acting loads. It should be noted that the known researches in this direction deal, in main, with of flexible simply shaped shells: plates, cylinders, cones or spherical segments. Herewith, development of the given class of problems consists in allowance for complicated physical-mechanical properties, types of boundary conditions and loads. Few studies are devoted to analysis of the stress-strain state of elastic systems composed of conjugated to one another intricately shaped shells of revolution of various configuration. From the most known ones are shell systems of zero or constant Gaussian curvature. At the same time, studies devoted to elastic systems with variable curvature are practically absent.

The present paper proposes an approach to analyze the stress-strain state of compound shells of revolution with variable Gaussian curvature. It includes the problem statement using the geometrically nonlinear mean bending theory with assumptions of the classical Kirchhoff-Love shell theory and numerical-analytical method of problem solving based on the combination of the quasilinearization process with the orthogonal-sweep method.

As an example, the results obtained in analyzing deformation of the elastic system with alternating-sign curvature in the form of the element of compensating device are presented. The essential dependence of the stress and displacement fields of the system as a whole on the variability of the geometrical parameters of single composing shells is established.

Key words: flexible shell systems, stress-strain state, geometrically nonlinear theory, quasilinearization method, orthogonal-sweep method, analysis.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Багато конструкцій сучасної техніки моделюються пружними системами, що складаються з співвісних спряжених між собою гнучких оболонок обертання різної геометрії і структури, і знаходяться в полі осесиметричних навантажень різної природи. Такими моделями описуються конструкції в різних галузях сучасної техніки, а саме: літакобудуванні (обшивка крила, фюзеляжу і оперення), судобудуванні (обшивка днища і настил палуби), приладобудуванні (плоскі і гофровані мембрани) тощо. Одним з важливих факторів оцінки міцності і надійності таких об'єктів є дослідження їх напружено-деформованого стану в полі діючих навантажень. Відповідні математичні моделі формулюються як крайові задачі для нелінійних систем диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами. Розв'язанню таких задач, що мають ряд труднощів математичного і реалізаційного плану, присвячено багато вітчизняної і зарубіжної літератури. Слід відзначити, що наявні аналітичні і чисельні розв'язки належать в основному до деформування оболонок простих геометричних форм: пластин, циліндрів, конусів або сферичних сегментів [1, 2]. В роботі [3] розглядаються великі деформації пластин і циліндричних оболонок, виготовлених з сучасних функціонально-градієнтних матеріалів. Нелінійне деформування відкритих і замкнених циліндрів еліптичного і колового поперечного перерізу при різних видах навантаження і різних граничних умовах описано в [4].

В роботі [5] розглянуто загальні питання чисельного розв'язання нелінійних крайових задач статички гнучких оболонок і систем з них.

Значно менше робіт присвячено аналізу напруженого стану пружних систем, складених зі спряжених між собою оболонок обертання різної конфігурації. Тут слід відмітити огляд [6], в якому в лінійній і нелінійній постановках розглядається напружено-деформований стан оболонкових структур, складених з комбінацій пластин, циліндрів, конусів або сферичних сегментів (співвісних або неспіввісних).

Дослідження вказаного класу задач проводиться на основі моделей різного роду складності: Кірхгофа – Лява, Тимошенка, Донелла – Муштарі – Власова. Для розв'язання відповідних нелінійних крайових задач теорії оболонок в загальному випадку

використовуються різні чисельні методи [1 – 6], а саме: метод скінченних елементів, метод скінченних різниць, методи пониження розмірності, варіаційні і асимптотичні методи і інші.

В даній статті запропоновано підхід до визначення напружено-деформованого стану пружних оболонкових систем, складених з гнучких оболонок обертання різної конфігурації в полі консервативних осесиметричних температурних та силових навантажень різного виду. Підхід включає постановку задачі на основі геометрично нелінійної теорії середнього згину при припущеннях класичної моделі оболонок Кірхгофа – Лява і чисельно-аналітичну методика її розв'язання на основі поєднання процесу квазілінеаризації [7] з методом ортогональної прогонки [8].

2. Постановка задачі.

Досліджується система, що складається в загальному випадку з J спряжених між собою співвісних оболонок обертання різної геометрії. Кожну окрему оболонку будемо розглядати як окремий j -й елемент ($j = \overline{1, J}$) єдиної оболонкової системи, координатна (або серединна) поверхня якої утворена обертанням деякої однозначної кусково-гладкої плоскої кривої навколо прямолінійної осі Oz (рис. 1). Положення довільної точки цієї поверхні визначається в ортогональній спряженій системі координат (α, θ) , де $\alpha = \{\alpha_j \in (\alpha_{0j}, \alpha_{1j})\}$ ($j = \overline{1, J}$) змінюється за твірною-меридіаном, а $\theta \in [0; 2\pi]$ є центральний кут в перерізі $z = const$. Координатна поверхня $\beta = 0$, як деяка вихідна поверхня відліку за товщиною оболонки, вибирається неформальним чином, а змінна β відраховується за нормаллю до неї.

Оболонки за товщиною β можуть бути одношаровими з неперервною неоднорідністю пружних властивостей або складатися з шарів сталої або змінної товщини (дискретно неоднорідні) при умові, що сусідні шари контактують між собою без відриву і проковзування. Приймається, що матеріали шарів працюють в пружній стадії деформування у всьому діапазоні діючих навантажень і можуть бути ізотропними або ортотропними.

На краях оболонкової системи $\alpha = \alpha_{01}$ і $\alpha = \alpha_{1J}$ приймаються будь-які фізично

несуперечливі граничні умови, а на лініях спряження $\alpha_{1j} = \alpha_{0j+1}$ ($j=1, J-1$) двох сусідніх j -го і $j+1$ -го елементів формулюються умови рівноваги статичних і умови нерозривності кінематичних характеристик напруженого стану оболонок в загальній системі координат $(r0z)$.

Оболонки знаходяться в полі консервативних осесиметричних температурних та силових навантажень різного виду: розподілених за твірною, зосереджених на торцевих контурах або в окремих перерізах $z = const$.

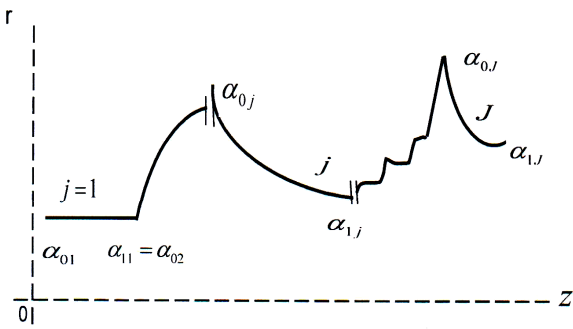


Рис. 1. Загальний вигляд твірної оболонкової системи

Напружено-деформований стан такої системи описується геометрично нелінійною теорією в квадратичному наближенні в рамках припущень класичної моделі Кірхгофа – Лява. Врахування температурних навантажень здійснюється в узагальненому законі Гука за гіпотезою Дюгамеля – Неймана. Задача чистого кручення виділяється як самостійна і далі не розглядається.

Для окремого елемента системи рівняння рівноваги приймаються у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (rN_\alpha) - \cos \varphi N_\theta + \frac{r}{R_\alpha} Q_\alpha + r q_\alpha &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} (r^2 S) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (\sin \varphi H) + \frac{\cos \varphi}{R_\alpha} H + \\ &+ \sin \varphi Q_\theta + r q_\theta = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (rQ_\alpha) - \frac{r}{R_\alpha} N_\alpha - \sin \varphi N_\theta + r q_\gamma &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (rM_\alpha) - \cos \varphi M_\theta - rQ_\alpha - rN_\alpha \vartheta_\alpha - rS \vartheta_\theta &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} (r^2 H) - rQ_\theta - rN_\theta \vartheta_\theta - rS \vartheta_\alpha &= 0, \\ (S = N_{\theta\alpha} - \frac{1}{R_\alpha} M_{\alpha\theta} = N_{\alpha\theta} - \frac{\sin \varphi}{r} M_{\theta\alpha}, \\ H = M_{\alpha\theta} = M_{\theta\alpha}); \end{aligned} \quad (1)$$

вирази деформацій через переміщення:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{w}{R_\alpha} + \frac{1}{2} \vartheta_\alpha^2, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w + \frac{1}{2} \vartheta_\theta^2, \\ \varepsilon_{\alpha\theta} &= r \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{r} \right) + \vartheta_\alpha \vartheta_\theta, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \kappa_\alpha &= \frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{1}{2R_\alpha} \vartheta_\theta^2, \quad \kappa_\theta = \frac{\cos \varphi}{r} \vartheta_\alpha - \frac{\sin \varphi}{2r} \vartheta_\alpha^2, \\ 2\kappa_{\alpha\theta} &= \frac{\partial \vartheta_\theta}{\partial s} - \frac{\cos \varphi}{r} \vartheta_\theta - \frac{1}{R_\alpha} \frac{\cos \varphi}{r} v + \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha}, \end{aligned}$$

$$\text{де } \vartheta_\alpha = -\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_\alpha}, \quad \vartheta_\theta = \frac{\sin \varphi}{r} v;$$

співвідношення пружності:

$$\begin{aligned} N_\alpha &= C_{11} \varepsilon_\alpha + C_{12} \varepsilon_\theta + K_{11} \kappa_\alpha + K_{12} \kappa_\theta - N_{\alpha T}, \\ N_\theta &= C_{12} \varepsilon_\alpha + C_{22} \varepsilon_\theta + K_{12} \kappa_\alpha + K_{22} \kappa_\theta - N_{\theta T}, \\ S &= C_{66} \varepsilon_{\alpha\theta} + 2K_{66} \kappa_{\alpha\theta}, \\ M_\alpha &= K_{11} \varepsilon_\alpha + K_{12} \varepsilon_\theta + D_{11} \kappa_\alpha + D_{12} \kappa_\theta - M_{\alpha T}, \\ M_\theta &= K_{12} \varepsilon_\alpha + K_{22} \varepsilon_\theta + D_{12} \kappa_\alpha + D_{22} \kappa_\theta - M_{\theta T}, \\ H &= K_{66} \varepsilon_{\alpha\theta} + 2D_{66} \kappa_{\alpha\theta}. \end{aligned} \quad (3)$$

В співвідношеннях (1) – (3) A – коефіцієнт Ляме по координаті α вибраної системи координат $(\alpha\theta\beta)$; $r = r(\alpha)$ – відстань точки координатної поверхні від осі обертання Oz ; R_α – радіус кривизни в перерізі $\alpha = const$; φ – кут між нормаллю до координатної поверхні і віссю обертання Oz ; $N_\alpha, Q_\alpha, M_\alpha$ – тангенціальне і перерізує зусилля та згинаючий момент в перерізі $\alpha = const$; $N_\theta, Q_\theta, M_\theta$ – колове і перерізує зусилля та згинаючий момент в перерізі $\theta = const$; H – крутний момент; $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{\alpha\theta}$ і $\kappa_\alpha, \kappa_\theta, \kappa_{\alpha\theta}$ – компоненти тангенціальної та згинної деформацій ($\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\theta$ – відносний розтяг (стиск) координатної поверхні за напрямками α, θ ; $\varepsilon_{\alpha\theta}$ – зсув; $\kappa_\alpha, \kappa_\theta, \kappa_{\alpha\theta}$ – параметри зміни кривизни і кручення); u, v, w – меридіональне, колове і нормальне переміщення; $\vartheta_\alpha, \vartheta_\theta$ – кути повороту нормалі в площинах $\theta = const$ і $\alpha = const$ відповідно; $q_\alpha = q_\alpha(\alpha)$, $q_\theta = q_\theta(\alpha)$, $q_\beta = q_\beta(\alpha)$ – компоненти поверхневого навантаження; $N_{\alpha T}, N_{\theta T}, M_{\alpha T}, M_{\theta T}$ – інтегральні характеристики температурного поля T . В загальному випадку коефіцієнти C_{mp}, K_{mp}, D_{mp} ($m, p=1,2; m, p=6$) визначаються за формулами, наведеними в [9]. Якщо оболонка

є одношаровою, ізотропною і однорідною за товщиною, то

$$C_{11} = C_{22} = \frac{Eh}{1-\mu^2}, \quad C_{12} = \mu C_{11}, \quad C_{66} = \frac{Eh}{2(1+\mu)},$$

$$D_{11} = D_{22} = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}, \quad D_{12} = \mu D_{11}, \quad (4)$$

$$D_{66} = \frac{Eh^3}{24(1+\mu)},$$

де E, μ – модуль пружності і коефіцієнт Пуассона ізотропного матеріалу, h – товщина оболонки.

На основі наведених співвідношень задача про напружено-деформований стан в полі діючих осесиметричних навантажень є одновимірною нелінійною крайовою задачею, що формулюється відносно вектор-функції $\vec{N} = \{N_\alpha, \hat{Q}_\alpha, M_\alpha, u, w, \vartheta_\alpha\}$ у вигляді:

$$\frac{d\vec{N}}{Ad\alpha} = L\vec{N} + \vec{G}(\alpha, \vec{N}, \dots) + \vec{q}, \quad (5)$$

$$\alpha = \{\alpha_j \in (\alpha_{0j}, \alpha_{1j}) \mid (j = \overline{1, J})\};$$

$$S_{1j}\vec{N} = S_{0j+1}\vec{N} + \vec{F}_j, \quad (6)$$

$$\alpha = \alpha_j \quad (j = \overline{1, J-1})$$

$$B_{01}\vec{N} = \vec{b}_{01}, \quad \alpha = \alpha_{01}; \quad (7)$$

$$B_{1J}\vec{N} = \vec{b}_{1J}, \quad \alpha = \alpha_{1J} \quad (8)$$

Тут $\hat{Q}_\alpha = Q_\alpha + \frac{\partial H}{r\partial\theta}$ – зведене перерізує

зусилля в перерізі $\alpha = const$; L – матричний оператор, побудований за основними співвідношеннями прийнятої моделі деформування; компоненти вектора $\vec{G}$ – квадратичні функції компонент вектора $\vec{N}$, що відповідають геометрично нелінійній теорії оболонок в квадратичному наближенні; S_{1j}, S_{0j+1} – матриці, які формулюють умови спряження в перерізі $\alpha = \alpha_j \quad (j = \overline{1, J-1})$ як умови рівноваги статичних і рівність кінематичних факторів напружено-деформованого стану в загальній системі координат (r, θ, z) ; B_{01}, B_{1J} – матриці граничних умов на контурах $\alpha = \alpha_{01}$ і $\alpha = \alpha_{1J}$ відповідно; $\vec{q}, \vec{F}_j, \vec{b}_{01}, \vec{b}_{1J}$ – вектори, що характеризують розподіл навантаження і температурного поля, зосереджені та контурні зусилля-моменти в перерізі $\alpha = \alpha_j \quad (j = \overline{1, J-1})$ та при $\alpha = \alpha_{01}, \alpha = \alpha_{1J}$.

Вирази для коефіцієнтів операторів і векторів задачі (5) – (8) наведені в [9].

3. Методика розв'язання задачі.

Для розв'язання одновимірної нелінійної крайової задачі (5) – (8) використовується процедура лінеаризації в формі Ньютона – Канторовича – Рафсона [7] в поєднанні з методом ортогональної прогонки, алгоритм якого викладено в [8].

Представимо задачу (5) – (8) в наступній скалярній формі відносно компонент вектор-функції $\vec{N} = \{N_n(\alpha, \lambda)\} \quad (n = \overline{1, 6})$

$$\frac{dN_n}{Ad\alpha} = \sum_{l=1,6} a_{nl}(\alpha)N_l + \sum_{l=1,6} \sum_{i=1,6} d_{nli}(\alpha)N_l N_i + q_n(\alpha) \equiv y_n(\alpha, N_1, N_2, \dots, N_6), \quad (9)$$

$$\alpha = \{\alpha_j \in (\alpha_{0j}, \alpha_{1j}) \mid (j = \overline{1, J}; n = \overline{1, 6})\};$$

$$\sum_{l=1,6} s_{nl}^{1j} N_l = \sum_{l=1,6} s_{nl}^{0j+1} N_l + f_n, \quad (10)$$

$$\alpha = \alpha_{1j} = \alpha_{0j+1} \quad (j = \overline{1, J}; n = \overline{1, 6});$$

$$\sum_{l=1,6} b_{nl}^{01} N_l = b_{01n}, \quad \alpha = \alpha_{01} \quad (n = \overline{1, 3}); \quad (11)$$

$$\sum_{l=1,6} b_{nl}^{1J} N_l = b_{1Jn}, \quad \alpha = \alpha_{01} \quad (n = \overline{1, 3}). \quad (12)$$

Тут $a_{nl}(\alpha)$ і $d_{nli}(\alpha)$ – складові лінійної і нелінійної частин рівняння (9), вирази для яких наведено в [9].

Стосовно задачі (9) – (12) вказана процедура лінеаризації зводиться до такого ітераційного процесу (параметр m):

$$\frac{dN_n^{(m)}}{Ad\alpha} = y_n(\alpha, N_1^{(m-1)}, N_2^{(m-1)}, \dots, N_6^{(m-1)}) + \sum_{l=1,6} \frac{\partial g_n}{\partial N_l} (N_l^{(m)} - N_l^{(m-1)}), \quad (13)$$

$$\alpha = \{\alpha_j \in (\alpha_{0j}, \alpha_{1j}) \mid (j = \overline{1, J}; n = \overline{1, 6})\};$$

$$\sum_{l=1,6} s_{nl}^{1j} N_l^{(m)} = \sum_{l=1,6} s_{nl}^{0j+1} N_l^{(m)} + f_n, \quad (14)$$

$$\alpha = \alpha_{1j} = \alpha_{0j+1} \quad (j = \overline{1, J-1}; n = \overline{1, 6});$$

$$\sum_{l=1,6} b_{nl}^{01} N_l^{(m)} = b_{01n}, \quad \alpha = \alpha_{01} \quad (n = \overline{1, 3}); \quad (15)$$

$$\sum_{l=1,6} b_{nl}^{1J} N_l^{(m)} = b_{1Jn}, \quad \alpha = \alpha_{1J} \quad (n = \overline{1, 3}) \quad (16)$$

$$(m = 1, 2, \dots),$$

де $\frac{\partial g_n}{\partial N_l}$ – елементи матриці Якобі, що обчислюються при $N_l = N_l^{(m-1)}$.

Для розв'язання лінійних крайових задач (13) – (16) на кожному кроці наближення m ($m=1, 2, \dots$) використовується метод ортогональної прогонки. Це стійкий чисельний метод для розв'язання лінійних одновимірних крайових задач, який гарно зарекомендував себе в стаціонарних задачах механіки деформівного твердого тіла [9, 10].

Щодо процесу квазілінеаризації, то він збігається в області опуклості оператора задачі. Ця область в даному класі задач, як показано в [9], співпадає з докритичною стадією деформування.

Представлений підхід, що базується на поєднанні методів квазілінеаризації і ортогональної прогонки, характеризується низкою факторів, які обумовлюють його ефективність. Це, зокрема, квадратична збіжність послідовних наближень, широта області збіжності, простота вибору початкового наближення, точність розв'язання і т.д.

4. Тестування методики.

При тестуванні представленої чисельно-аналітичної методики використовується звичайний прийом прикладної математики: порівняння з результатами розв'язання окремих задач, отриманими іншими чисельними методами, аналітично або експериментально. Деякі приклади тестування наведені в роботах [9, 10]. Тут додатково представлена тестова задача, запозичена з роботи [11], що ілюструє правомірність застосування запропонованої методики до зв'язаної оболонкової системи.

Розглядається спряжена оболонка обертання сталої товщини $h=0,025$ см, складена з трьох елементів: зрізаний конус (кут нахилу – 40° , довжина – 39,16 см), заповнений водою; циліндр (довжина – 8 см), заповнений водою; циліндр без води (довжина – 32 см). Радіус внутрішньої циліндричної частини становить 38,173 см. Менша основа зрізаного конуса жорстко закріплена, а торець циліндричного елемента – вільний. Матеріал оболонки – майлар: $E=502850$ Н/см², $\nu=0,33$. Такими конструкціями моделюються баки різного призначення.

Значення параметра граничного критичного навантаження, отримане за розробленою методикою, становить $q_{cr}^{lim*} = q_{cr}^{lim} / E = 0,935$, а за результатами роботи [11], де використовувався метод скінченних різниць, $q_{cr}^{lim*} = 0,993$.

Як видно з розрахунку, різниця значення граничного критичного навантаження для цієї складної оболонкової системи знаходиться в межах 5 %. Це свідчить про правомірність застосування запропонованої методики в даному класі задач.

5. Чисельні результати.

В докритичній стадії деформування досліджується пружна система знакозмінної Гауссової кривизни типу елемента компенсуючого пристрою. Розглядається гофрована циліндрична оболонка з приєднаними до неї по краях кільцевими пластинами. Циліндрична частина знаходиться під внутрішнім тиском інтенсивності q_0 , пластини жорстко закріплені по зовнішньому контуру. В силу симетрії даної конструкції розглядається її половина, що складається з двох оболонок: гофрованого циліндра синусоїдального профілю (R, L_{cor} і h_{cor} – радіус циліндра, довжина по осі Oz і товщина; a_α, l_α – амплітуда і довжина періоду синусоїди) і кільцевої пластини (R, L_{pl} і h_{pl} – внутрішній радіус, довжина за твірною і товщина пластини). Гофр і пластини виконані з різних ізотропних матеріалів з пружними характеристиками E_{cor}, μ_{cor} і E_{pl}, μ_{pl} відповідно. Амплітуду гофра будемо характеризувати параметром $\gamma = a_\alpha / R$.

Задача розв'язується при таких вихідних даних: $L_{cor} = L_{pl} = 0,05$ м, $R = 0,1$ м, $l_s = 0,02$ м, $E_{cor} = 1,0 \cdot 10^9$ Па, $\mu_{cor} = 0,4$, $E_{pl} = 2,2 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu_{pl} = 0,3$, $h_{cor} = 2 \cdot 10^{-3}$ м, $h_{pl} = 8 \cdot 10^{-3}$ м, $q_0 = 6 \cdot 10^5$ Па.

На рис. 2 представлено прогини вказаної оболонкової системи за лінійною та нелінійною теоріями при різних значеннях параметра гофра γ , при навантаженнях, близьких до його граничного критичного значення. Змінна α відраховується за довжиною циліндра ($\alpha \in [0; L_{cor}]$), а далі – за довжиною пластини ($\alpha \in (L_{cor}; L_{cor} + L_{pl}]$); лінія перерізу спряжених оболонок умовно нанесено штриховою лінією; тонкими лініями позначено результати за лінійною теорією, а товстими – за нелінійною.

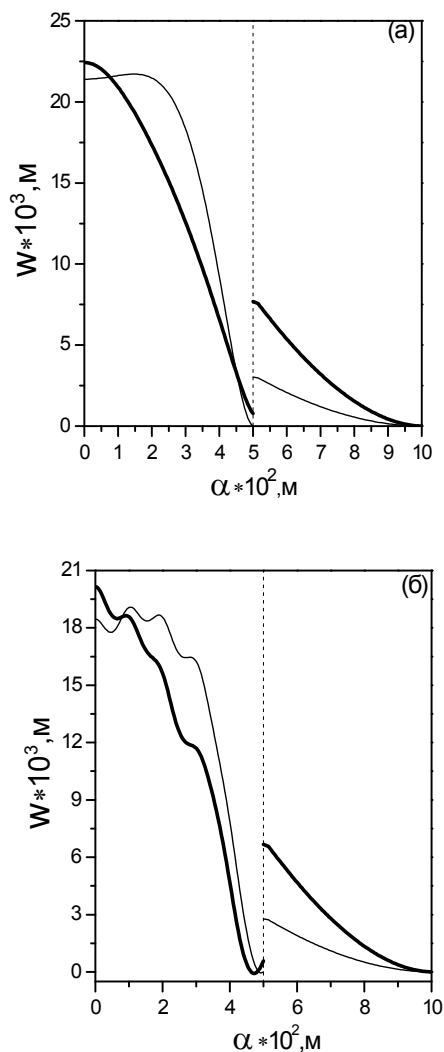


Рис. 2. Розподіл прогину для $\gamma = 0$ (а); $\gamma = 0,01$ (б) за лінійною і нелінійною теоріями

Відмітимо, що результати, отримані за лінійною і нелінійною теоріями, якісно співпадають, а кількісно можуть відрізнятися більш як вдвічі (зокрема на пластині). Тобто нелінійна теорія уточнює значення прогинів.

Вплив амплітуди гофра на напружено-деформований стан системи для різних значень параметра γ ілюструється графіками на рис. 3. Конфігурація гофра і лінія перерізу спряжених оболонок, як і на рис. 2, умовно нанесені штриховими лініями.

Тут наведено розподіл прогину $w = w(\alpha)$ (рис. 3а), меридіональних $\sigma_\alpha = \sigma_\alpha(\alpha)$ і колових $\sigma_\theta = \sigma_\theta(\alpha)$ напружень для $\gamma = 0$ (гладкий циліндр, рис. 3б), для $\gamma = 0,1$ (рис. 3с).

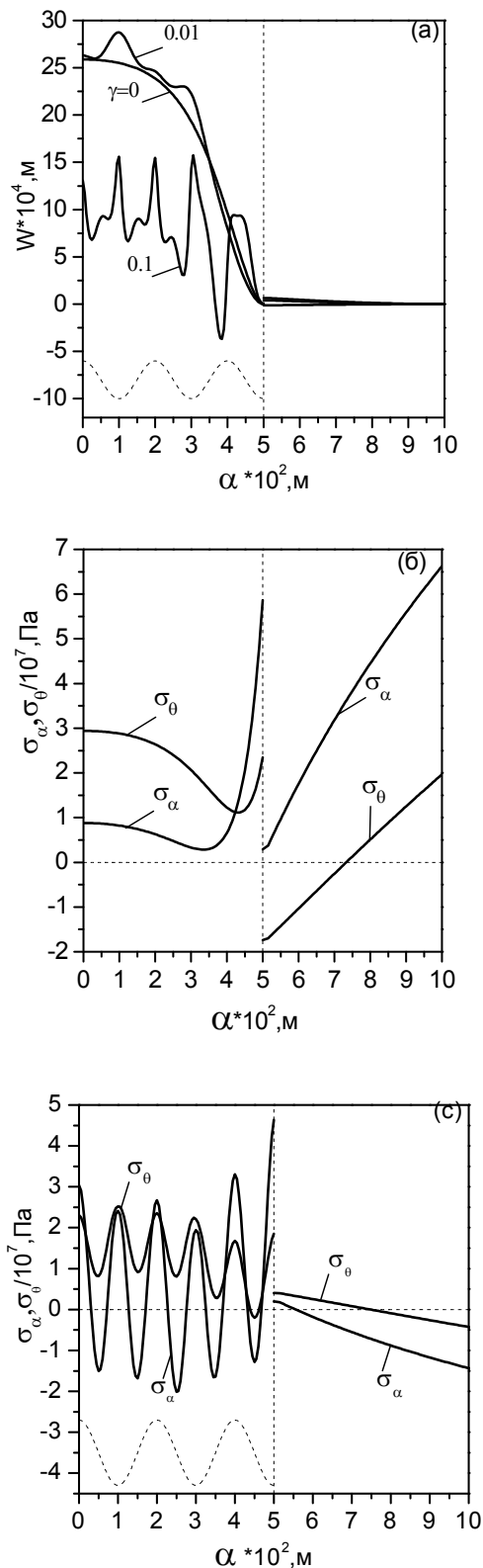


Рис. 3. Розподіл прогину для $\gamma = 0; 0,01; 0,1$ (а); розподіл меридіональних і колових напружень для $\gamma = 0$ (б), $\gamma = 0,1$ (с)

Аналіз отриманих результатів показав: наявність гофра суттєво впливає на напруження не тільки на гофрованому елементі (з'являються зони стискуючих меридіональних напружень в місцях найменшої кривизни гофра), що природно, але і на пластині (на відміну від гладкого циліндра напруження $\sigma_\alpha = \sigma_\alpha(\alpha)$ практично по всій довжині пластини стають стискуючими), хоча ці елементи суттєво відрізняються за жорсткостями. Вплив γ на розподіл прогину значно слабший і практично не позначається на пластині.

Таким чином, зміна геометричних параметрів на одному елементі системи може внести суттєві якісні і кількісні зміни в напружено-деформований стан інших елементів системи і, відтак, системи в цілому.

5. Висновки

В роботі представлено підхід до дослідження деформування пружних оболонкових систем, складених з гнучких оболонок обертання різної конфігурації в полі консервативних

осесиметричних навантажень. Він включає постановку задачі на основі геометрично нелінійної теорії середнього згину при припущеннях класичної моделі оболонок Кірхгофа – Лява і чисельно-аналітичну методику її розв'язання на основі поєднання процесу квазілінеаризації за методом Ньютона – Канторовича – Рафсона та методу ортогональної прогонки для розв'язання лінійних крайових задач.

Тестування методики підтверджує правомірність її використання в даному класі задач для спряжених систем.

Наведено результати аналізу напружено-деформованого стану оболонкової системи знакозмінної Гауссової кривизни типу елемента компенсуючого пристрою. Відмічена суттєва залежність полів напружень і переміщень системи в цілому від зміни геометричних параметрів окремих складових оболонки.

Список використаних джерел

1. Xu F. On the buckling and post-buckling of core-shell cylinders under thermal loading / Xu F., Abdelmoula R., Potier-Ferry M. // *Int. J. of Solids and Struct.* – 2017. – **126** – **127**. – P. 17-36.
2. Wu J. Study on the axial compression buckling behaviors of concentric multi-walled cylindrical shells filled with soft materials / Wu J., Cheng Q.H., Liu B., Zhang Y.W., Lu W.B., Hwang K.C. // *J. of the Mechanics and Physics of Solids*. – 2012. – **60**, Iss. 5. – P. 803-826.
3. Arciniega R.A. Large deformation analysis of functionally graded shells / Arciniega R.A., Reddy J.N. // *Int. J. of Solids and Struct.* – 2007. – **44**, № 6. – P. 2036-2052.
4. Obodan N. Nonlinear Behaviour and Stability of Thin-Walled Shells / Obodan N., Lebedeyev O., Gromov V. – Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer, 2013. – 178 p.
5. Григоренко Я.М. Численное решение задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами / Григоренко Я.М., Крюков Н.Н. – Киев: Наукова думка, 1988. – 264 с.
6. Pietraszkiewicz W. Junctions in shell structures: A review / Pietraszkiewicz W., Konopinska V. // *Thin-Walled Struct.* – 2015. – **95**. – P. 310-334.

References

1. XU, F., ABDELMOULA, R., POTIER-FERRY, M. (2017). On the buckling and post-buckling of core-shell cylinders under thermal loading. *Int. J. of Solids and Struct.*, 126 – 127, p. 17-36.
2. WU, J., CHENG, Q.H., LIU, B., ZHANG, Y.W., LU, W.B., HWANG, K.C. (2012). Study on the axial compression buckling behaviors of concentric multi-walled cylindrical shells filled with soft materials. *J. of the Mechanics and Physics of Solids*, 60 (5), p. 803-826.
3. ARCINIEGA, R.A., REDDY, J.N. (2007). Large deformation analysis of functionally graded shells. *Int. J. of Solids and Struct.*, 44, p. 2036-2052.
4. OBODAN, N., LEBEDEYEV, O., GROMOV, V. (2013). *Nonlinear Behaviour and Stability of Thin-Walled Shells*. Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer.
5. GRIGORENKO, Ya.M., KRYUKOV, N.N. (1988). *The numerical solution of the static problems of flexible layered shells with variable parameters*. Kiev: Naukova dumka.
6. PIETRASZKIEWICZ, W., KONOPINSKA, V. (2015). Junctions in shell structures: A review. *Thin-Walled Struct.*, 95, p. 310-334.

7. Беллман Р.Е. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи / Беллман Р.Е., Калаба Р.Е. – Москва: Мир, 1968. – 183 с.
8. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Годунов С.К. // Успехи мат. наук. – 1961. – **16**, № 3. – С. 171-174.
9. Григоренко Я.М. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций / Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И. – Киев: Наукова думка, 1986. – 172 с.
10. Беспалова Е.И. Устойчивость составных систем из оболочек вращения разной геометрии и структуры / Беспалова Е.И., Яремченко Н.П. // Прикл. механика. – 2017. – **53**, № 5. – С. 74-86.
11. Bushnell D. Buckling of Shells – Pitfall for Designers / Bushnell D. // AIAA J. – 1981. – **19**, № 9. – P. 1183-1226.
7. BELLMAN, R.E., KALABA, R.E. (1968). *Quasilinearization and nonlinear boundary-value problems*. Moscow: Mir.
8. GODUNOV, S.K. (1961). Numerical solution of boundary-value problems for systems of linear ordinary differential equations. *Uspekhi Mat. Nauk*, 16 (3), p. 171-174.
9. GRIGORENKO, Ya.M., BESPALOVA, E.I., KITAIGORODSKII, A.B. & SHINKAR, A.I. (1986). *Natural vibrations of members in shell structures*. Kiev: Naukova dumka.
10. BESPALOVA, E.I., YAREMCHENKO, N.P. (2017). Stability of Composed Sell Systems from Shells of Revolution. *Int. App. Mech.*, 53 (5), p. 74-86.
11. BUSHNELL, D. (1981). Buckling of Shells – Pitfall for Designers. *AIAA J.*, 19 (9), p. 1183-1226.

Надійшла до редколегії 07.11.17

УДК 536.2+612.1

Кізілова Н. М., д. ф.-м. н., проф.
Коробов А. М., к. ф.-м. н., доц.

**Моделювання мікроциркуляції
крові та тепломасопереносу в тканинах
людини**

Харківський національний університет
ім. В.Н. Каразіна,
61022, м. Харків, пл. Свободи, 4,
e-mail: n.kizilova@gmail.com,
amkorobov@i.ua

N. M. Kizilova, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.
A. M. Korobov, PhD (Phys.-Math.), Doc.

**Modeling of blood microcirculation, heat
and mass transfer in human tissues**

V.N. Karazin Kharkov National University,
61022, Kharkov, Svobody sq., 4,
e-mail: n.kizilova@gmail.com,
amkorobov@i.ua

Розглядається математична модель поверхневого нагрівання тканин тіла людини низькоінтенсивним червоним та інфрачервоним випромінюванням на основі рівняння Пеннеса з розподіленими джерелами тепла. Останні включають генерацію тепла за рахунок фотоіндукованих біохімічних реакцій, а також поглинання тепла за рахунок його відведення системою мікроциркуляції. Наведені дані експериментів з локального нагрівання тканин шкіри, м'язів та кісток на групі здорових волонтерів. Проаналізовано криві зростання поверхневої температури тіла та релаксації після припинення нагріву. Чисельні розрахунки за математичною моделлю виконувались методом скінченних різниць. Валідація методу проведена на основі даних з опублікованої літератури. Різні типи динаміки кривих температури $T(t)$ під час нагрівання та релаксації обчислено для різних термомеханічних параметрів моделі. Порівняльний аналіз експериментальних даних та результатів чисельних розрахунків показав, що знехтування позитивними джерелами тепла в рівнянні Пеннеса приводить до динаміки, яка не відповідає даним експериментальних вимірювань. Математична модель дозволяє проводити оцінку локальної інтенсивності мікроциркуляції в тканинах людини. Запропонована модель може використатися для індивідуального планування фізіотерапевтичних процедур.

Ключові слова: тепломасоперенос, математичне моделювання, рівняння Пеннеса, мікроциркуляція.

The mathematical model of surface heating of human body tissues by low intensity red and infrared radiation based on the Penns equation with distributed heat sources is considered. The latter include the generation of heat due to photoinduced biochemical reactions, as well as the absorption of heat due to its removal by the system of microcirculation. Data on experiments on local heating of skin, muscle and bone tissue in a group of healthy volunteers are presented. The curves of the growth of body surface temperature and relaxation after the termination of heating have been analyzed. Numerical calculations using a mathematical model were performed using the finite difference method. Validation of numerical method is based on data from published literature. Different types of dynamics of temperature curves $T(t)$ during heating and relaxation were calculated for various thermomechanical parameters of the model. A comparative analysis of experimental data and the results of numerical calculations showed that the neglect of positive heat sources in the Penns equation leads to a dynamics that does not correspond to the data of experimental measurements. The mathematical model allows estimating the local intensity of microcirculation in human tissues. The proposed model can be used for individual planning of physiotherapeutic procedures.

Key words: heat and mass transfer, mathematical modeling, Pennnes equation, microcirculation.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ. Терапевтичне нагрівання шкіри та поверхневих тканин людини інфрачервоним (ІЧ) випромінюванням в поєднанні з оптичним випромінюванням різної довжини хвиль широко

застосовується в медицині для лікування інфекційних захворювань, дерматологічних проблем, захворювань суглобів, органів дихання, порушень зростання та розвитку [1-3]. Такі

процедури приводять до поліпшення системи мікроциркуляції крові, нормалізують метаболічні процеси, зміцнюють захисні системи організму, забезпечують знеболюючу дію, стимулюють регенеративні та репаративні процеси і сприяють загоєнню ран. ІЧ випромінювання з $\lambda = 0,76-400$ мкм проникає в тканини на глибину 2-3 см, діє на терморецептори шкіри, а через 2-3 хвилини викликає в опроміненій частині тіла місцеву гіперемію, супроводжується підвищенням кровотоку і теплообміном, а також зменшенням вмісту води в тканинах.

Останнім часом значна увага приділялася лікувальному застосуванню низько інтенсивної лазерної терапії (НІЛТ) та світлодіодів (LED) [3,4]. Запропоновані різні методики НІЛТ He-Ne, Argon, Ga-Al-Ar diode лазерами з довжинами хвиль $\lambda = 630-980$ нм, а також LED ІЧ, червоного, зеленого та синього кольорів. Тут лікувальний ефект забезпечують незначні зміни температури ($\sim 0.1-0.3$ C) опроміненої ділянки нижче температурного діапазону шкірних терморецепторів, а механізм терапії полягає у фотохімічних та фотофізичних процесах [1, 4]. Це реакції хромофорів клітин, цитохром-с-оксидази з піками поглинання в ближньому ІЧ діапазоні, фотоактивних порфіринів та ряду інших біологічних макромолекул, за допомогою яких опромінення активізує синтез колагену та еластину клітинами, стимулює продукцію факторів зростання, утворення позаклітинної матриці та посилення інтенсивності мікроциркуляції (ІМ) [5,6]. Останній ефект пов'язаний з активацією дихальної системи мітохондрій клітин. Підвищення просвіту кровоносних судин після опромінення підтверджується даними МРТ, а збільшення швидкості кровотоку виявляється методом доплерівської флюометрії та капілярографії [7]. Активізація мікроциркуляції сприяє загоєнню ран та зменшенню болю, підвищенню тканинного обміну при хворобах шкіри та діабеті [6].

2. Експериментальні вимірювання.

Опромінення комбінованим червоним світлом ($\lambda = 690$ нм, ширина половини максимуму спектральної смуги пропускання $h=25$ нм) та ІЧ ($\lambda = 840$ нм, $h=30$ нм) LED на групі молодих здорових волонтерів (12 чоловіків, 10 жінок, середнім віком 23 ± 2 роки). LED вмонтований у камеру з об'єктивом $d = 15$ мм, що сприяло рівномірному розподілу випромінювання. Камера була зафіксована стійким тримачем, а об'єктив розташований на відстані 5 мм від ділянки передпліччя волонтера, який тримав руку на столі на покритті з медичної піни, щоб запобігти втрати тепла (Рис.1). Досліджувалися

внутрішня поверхня зап'ястя (I), області м'яза brachioradialis (II), та виступаюча частина кістки ulna bone на зап'ясті (III). Температура в центрі кожної області вимірювалась інфрачервоним термометром з чутливістю $\delta T = \pm 0.1$ °C кожні $\delta t = 1$ хв. протягом 20 хв. опромінювання, коли температура тіла досягала некомфортних значень ($T^* = 41.5$ °C), та ще 30 хв. релаксації після припинення опромінювання. За цей час поверхнева температура опроміненої ділянки поверталася майже до початкових значень (до опромінювання). Область I практично не має жирової тканини та характеризується великою кількістю середніх та малих вен та високими значеннями ІМ. В області II є розвинена підшкірна клітковина (гіподерма) та більш повільна ІМ при непрацюючих м'язах. Область III являє собою кісткову тканину, яка покрита шкірою практично без гіподермісу та зі слабозрозуміною системою капілярів. Типові результати вимірювань у однієї особи на різних ділянках верхньої кінцівки представлені на рис.2. На рис 3 наведені температурні криві, осереднені за групою випробуваних, які були виміряні в області I (Рис.3а), II (Рис.3б) та III (Рис.3в). Вертикальні риси відповідають статистичному розкиду відносно середніх значень.

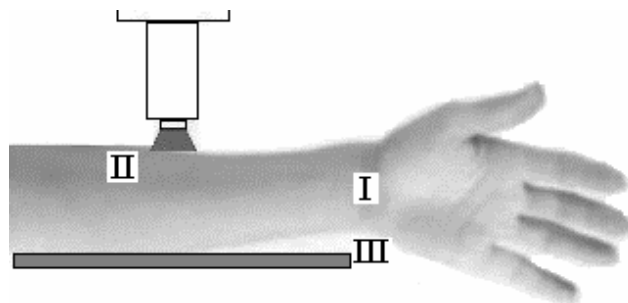


Рис. 1 Схема експерименту з опромінюванням верхньої кінцівки волонтера в областях I, II, III

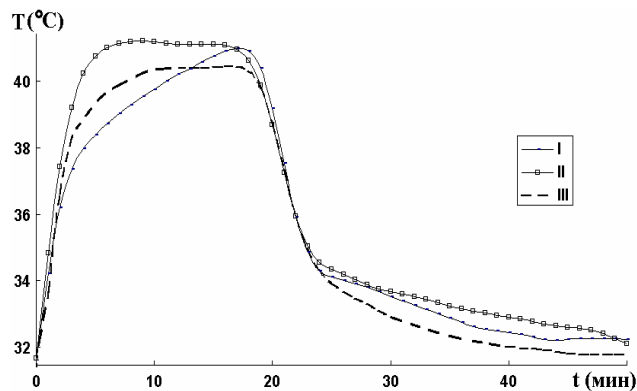


Рис. 2 Типові експериментальні криві $T(t)$, зареєстровані у волонтера в областях I, II, III

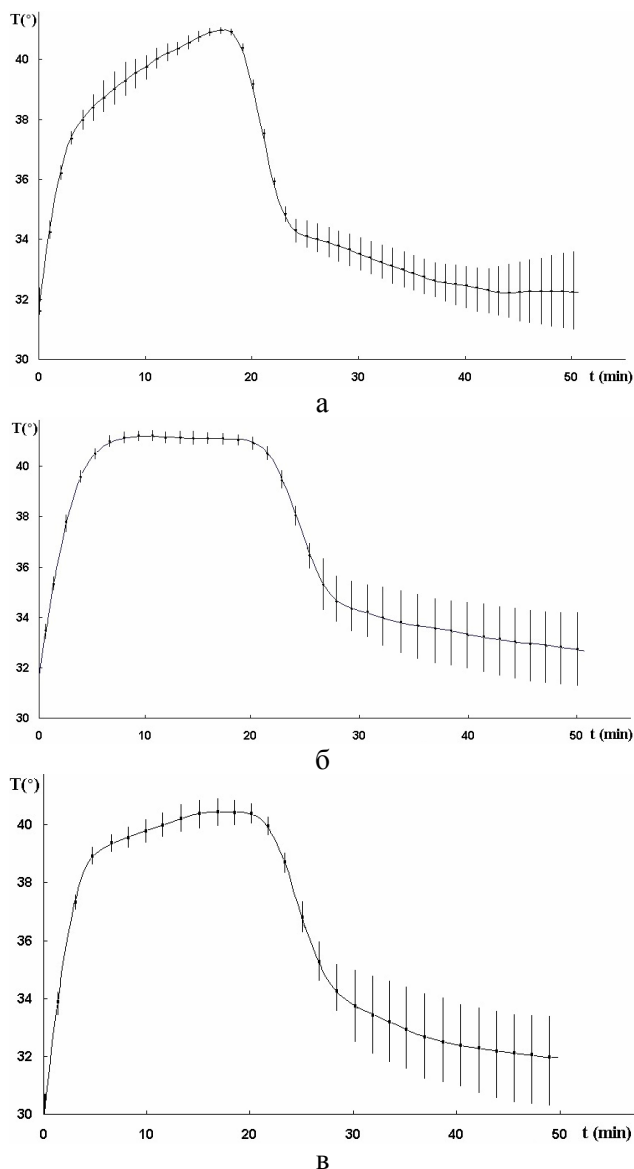


Рис.3 Осереднені за групою випробуваних експериментальні криві $T(t)$ в області І (а), ІІ (б), ІІІ (в). Вертикальні риси відповідають статистичному розкиду відносно середніх значень

Виявлена схожа динаміка кривих $T(t)$ як під час опромінювання, так і протягом релаксації у всіх випробуваних незалежно від маси тіла та наявності жирової тканини. Спостерігаються кількісні різниці в швидкостях зростання та зменшення температури (dT/dt) під час нагрівання та охолодження відповідно. Ці різниці зберігалися при повторних експериментах з тими ж випробуваними в інші дні. Значні відмінності виявлені для різних типів тканин та ІМ. Так, при високій ІМ зростання локальної температури повільне і досягає T^* в самому кінці встановленого часу нагрівання (крива І на Рис.1). При менш розвиненій системі мікроциркуляції температура зростає швидше та досягає T^* вже

на $t=12-16$ -й хв. (крива ІІІ на Рис.1). В непрацюючому м'язі, особливо при розвиненій гіподермі (0.5-1.5 см), температура дуже швидко підіймається до T^* , але потім утримується практично на постійному рівні за рахунок балансу поглинання та відводу тепла системою мікроциркуляції.

Розкид значень поверхневої температури тіла незначний під час опромінювання ($\Delta T \sim \pm 0.3^\circ C$), тоді як під час релаксації спостерігався значніший розкид ($\Delta T \sim \pm 1.2^\circ C$), так що наприкінці встановленого тривання релаксації (30 хв.) температура у більшості індивідів доходила до початкових значень, але в деяких випадках могла як бути трохи підвищеною (5 випадків), так і стати нижче за початкову (4 випадки), що можна віднести на вплив фото індукованих хімічних реакцій та впливу опромінювання на інтенсивність мікроциркуляції, які є індивідуальними параметрами випробуваного.

3. Математичні моделі. Для кількісних оцінок тепломасообміну в біологічних тканинах найчастіше використовується модель Пеннеса (Pennes bioheat transfer equation) [8]

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(\lambda \nabla T) + q + \rho_b c_b w_b (T_b - T) \quad (1)$$

де ρ, c, λ - щільність, удільна теплоємність та коефіцієнт теплопровідності тканини, q - інтенсивність розподілених джерел метаболічної теплопродукції, w_b, T_b - інтенсивність кровотоку та температура крові, яка дорівнює температурі тіла людини. Відповідно рівнянню (1) температура тканини зростає за рахунок біохімічних процесів метаболізму, які в сукупності є екзотермічними (окислювальні процеси). Фотоіндуковані біохімічні реакції сприяють підвищенню інтенсивності q . За рахунок останнього члену в (1) температура тканини спадає, якщо $T > T_b$ (при нагріванні) та підвищується при $T < T_b$ (охолодження), що складає основу системи терморегуляції.

Модель (1) використовувалась в численних дослідженнях нагріву на охолодження тканин та органів людини, в тому числі при фізіотерапевтичному нагріві та пре операційному охолодженні [9].

Використовується також модифікація моделі Пеннеса у вигляді single-phase lag (SPL) моделі [10], в якій можливе запізнення потоку тепла q

від градієнту температури ∇T на деякий час τ_q , а саме $q(t + \tau_q, \vec{r}) = -\lambda \nabla T(t, \vec{r})$. Тоді замість (1) можна отримати гіперболічне рівняння розповсюдження теплових хвиль зі скінченною швидкістю, але ця модель приводить до суперечностей і розходжень з даними вимірювань на тканинах. Була також запропонована модель з подвійним запізненням $q(t + \tau_q, \vec{r}) = -\lambda \nabla T(t + \tau_T, \vec{r})$ (dual-phase lag, DPL) [11], але ця модель не відповідає принципам термодинаміки [12].

Найбільш використаним з відмінних від закону Фур'є є закон теплопровідності Guyer-Krumhansl, особливо для швидких процесів з періодичним опроміненням на рівні мікро- та наноструктури матеріалу або тканини [12], з якого замість (1) маємо

$$\tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\rho_b c_b}{\rho c} w_b T = q + \tau \frac{\partial q}{\partial t} + \alpha \left(\nabla^2 T + \beta \frac{\partial(\nabla^2 T)}{\partial t} \right) + \frac{\rho_b c_b}{\rho c} w_b T_b, \quad (2)$$

де τ - час релаксації температури, $\alpha = \lambda / \rho c$ - коефіцієнт температуропровідності, β - коефіцієнт Крумхансла.

Було показано, що без урахування метаболічних процесів моделі (1) і (2) дають динамічні залежності $T(t)$ (Рис.2), які суттєво відрізняються від даних вимірювань (Рис.4) [4]. З урахуванням q можна отримати залежності вигляду (Рис.1), але відповідне моделювання проводилось на основі некоректної DFL моделі [13].

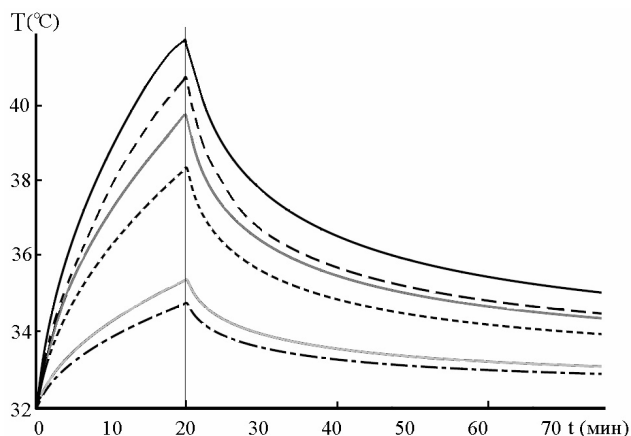


Рис. 4 Теоретичні залежності $T(t)$, розраховані за моделями (1)-(2) без урахування метаболічної теплопродукції при різних наборах параметрів (за даними [4])

4. Чисельні розрахунки. Для проведення чисельних розрахунків була використана модель поверхневих тканин людини у вигляді циліндру $\{r \in [0, R], x \in [0, H]\}$, який складається з трьох шарів тканин: дермісу $x \in [0, h_1]$ (1), гіподермісу $x \in [h_1, h_1 + h_2]$ (2), та іншої тканини (м'яз або кістка) $x \in [h_1 + h_2, H]$ (3), де $H = h_1 + h_2 + h_3$. Тепломасопереніс в кожному шарі відповідав рівнянню (2), яке при $\tau = 0, a = 0$ переходить в (1). Граничні умови для температур $T_{1,2,3}$:

$$\begin{aligned} x = h_1 : T_1(t, r, x) &= T_2(t, r, x), \\ &- \lambda_1 \vec{n} \nabla T_1(t, r, x) = -\lambda_2 \vec{n} \nabla T_2(t, r, x), \\ x = h_1 + h_2 : T_2(t, r, x) &= T_3(t, r, x), \\ &- \lambda_2 \vec{n} \nabla T_1(t, r, x) = -\lambda_3 \vec{n} \nabla T_2(t, r, x), \\ x = H : \lambda_3 \vec{n} \nabla T_2(t, r, x) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

де $\vec{n}$ - нормаль до відповідної поверхні.

Вважалось, що циліндр достатньо великий, так що переніс тепла крізь поверхню за рахунок теплопровідності відсутній:

$$r = R : \begin{cases} \lambda_1 \vec{n} \nabla T_1(t, r, x) = 0, & x \in [0, h_1], \\ \lambda_2 \vec{n} \nabla T_2(t, r, x) = 0 & x \in [0, h_1 + h_2], \\ \lambda_3 \vec{n} \nabla T_3(t, r, x) = 0 & x \in [0, H]. \end{cases} \quad (4)$$

На зовнішній поверхні був заданий потік тепла у вигляді функції Гауса:

$$x = 0 : \begin{cases} J_T = A \exp(-r^2 / d^2), & t \in [0, t^*] \\ 0, & t > t^* \end{cases} \quad (5)$$

де A - коефіцієнт, який обумовлені міцністю LED, d - радіус лінзи, t^* - час нагрівання.

Початкові умови:

$$t = 0 : T_{1,2,3}(t, r, x) = T_b, \partial T_{1,2,3}(t, r, x) / \partial t = 0 \quad (6)$$

де T_b - температура тіла.

Рішення задачі (2)-(6) проводилось методом скінченних різниць, який детально описано в [13] для рівнянь DPL, з яких (2) можна отримати знехтуванням доданків з другим часом запізнення. На відміну від сталих значень $q_{1,2,3}$ [13] враховувалася теплопродукція за рахунок фотоіндукованих реакцій $q_j(t) = \kappa_j(1 + kt)$ при $t \in [0, t^*]$ та $q_j(t) = \kappa_j(1 + k_j t^*)$ при $t > t^*$, де k_j - коефіцієнт, специфічний для тканини при заданій довжини хвилі опромінювання.

Для чисельних розрахунків обрано наступні параметри моделі: $\rho_1 = 1.1 \text{ г/см}^3$, $\rho_2 = 1.06 \text{ г/см}^3$, $\rho_3 = 1.04 \text{ г/см}^3$ (м'яз) або $\rho_3 = 1.04 \text{ г/см}^3$ (кістка), $\rho_b = 1.05 \text{ г/см}^3$, $c_1 = 3561 \text{ Дж/(кг·К)}$, $c_2 = 2975 \text{ Дж/(кг·К)}$, $c_3 = 3350 \text{ Дж/(кг·К)}$ (м'яз) або $c_3 = 1257 \text{ Дж/(кг·К)}$ (кістка), $c_b = 3645 \text{ Дж/(кг·К)}$, $\lambda_1 = 0.209 \text{ Вт/(м·К)}$, $\lambda_2 = 0.335 \text{ Вт/(м·К)}$, $\lambda_3 = 0.532 \text{ Вт/(м·К)}$ (м'яз) або $\lambda_3 = 0.45 \text{ Вт/(м·К)}$ (кістка), $\lambda_b = 1.456 \text{ Вт/(м·К)}$, $q_1 = 0$, $q_2 = 150 - 250 \text{ Вт/м}^3$, $q_3 = 200 - 300 \text{ Вт/м}^3$, $w_b = 0.07 - 0.24 \text{ мл/(см}^3\text{·мин)}$, які відповідають тканинам людини, $h_1 = 2 \text{ мм}$, $h_2 = 2 - 10 \text{ мм}$, $h_3 = 30 \text{ мм}$, $R = 25 \text{ мм}$.

5. Аналіз результатів. Результати розрахунків безрозмірних залежностей $T^\circ(t^\circ)$, де $T^\circ = T/T_b$, $t^\circ = t/t^*$, наведені на Рис.5а,б, $T_b = 36.6^\circ$.

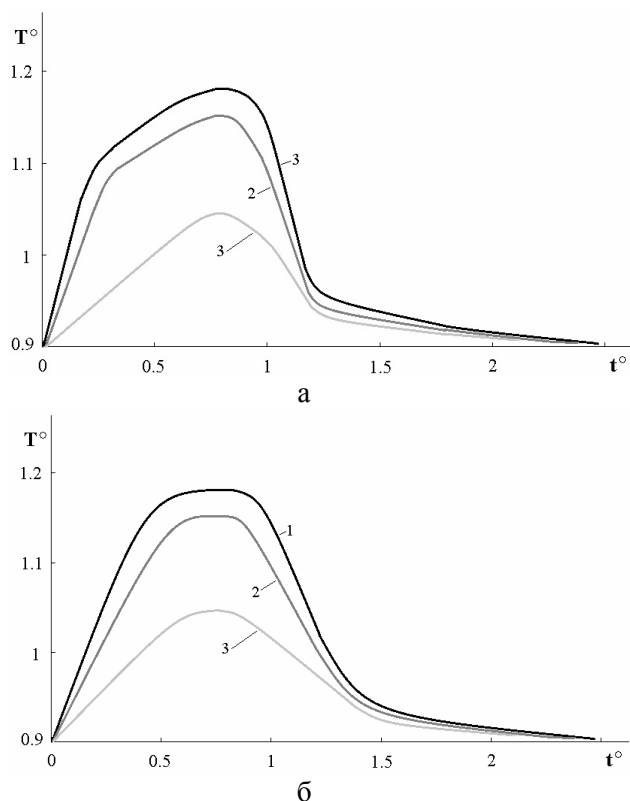


Рис.5. Залежності $T^\circ(t^\circ)$ для кістки (а) і м'язу (б) при $r = 0$, $x = 0$ (1), $x = h_1$ (2), $x = h_1 + h_2$ (3).

Таким чином, вигляд кривих $T^\circ(t^\circ)$, розрахованих для тканин з різними термічними провідностями (Рис.5) відповідає результатам вимірювань (Рис.2,3). В області I терморегуляція

відбувається за рахунок середніх та малих він, але не системи мікроциркуляції, тому під час опромінювання температура швидко зростає до некомфортних значень, після чого експеримент переходив до стадії релаксації (Рис.2, Рис.3а). В області II за рахунок розвиненої системи мікроциркуляції в м'язах процес нагрівання швидко встановлюється, тобто все тепло фототермічних екзотермічних реакцій виноситься з кровотоком, так що температура може підтримуватися на постійному високому значенні досить довго (Рис.2, Рис.3б, Рис.5б). В області III температура зростає повільніше, ніж в м'язі і досягає максимальних значень тільки наприкінці часу опромінювання (Рис.2, Рис.3в, Рис.5а).

Урахування несталих значень джерел температури $q_{1,2,3}(t)$ дозволяє вірно описати характер зростання температури під час опромінювання з виходом на плато в м'язах, а саме – повільним зростанням при підвищеній ІМ (w_b) та проміжною динамікою – в кістках, без використання термодинамічно некоректної моделі DPL. Оскільки значення $\alpha_j, \tau_j, \kappa_j, k_j$ для біологічних тканин *in vivo* в літературі майже відсутні, їх індивідуальні величини можна обчислити шляхом порівняння розрахованих кривих $T(t)$ з виміряними та кількісно оцінити ці параметри методом найменших квадратів, тобто шляхом розв'язання зворотної задачі термомеханіки.

6. Висновки. Побудована модель розповсюдження тепла в 3-шаровій моделі поверхневих тканин тіла людини дозволяє отримати динамічні залежності $T(t)$, які якісно відповідають даним експериментальних вимірювань. Двохфазна динаміка релаксації температури в тканинах – швидка спочатку ($t \in [20, 25]$ хв.) та більш повільна наприкінці $t > 25$ хв. – відповідає не двома часам релаксації (DFL модель), а закону теплопровідності Guyer-Krumhansl з єдиним часом релаксації температури та наявністю змінних за часом джерел температури $q_{1,2,3}(t)$ за рахунок фотоіндукованих реакцій. За відсутності прямих вимірювань теплового ефекту таких реакцій запропонована модель дозволяє провести оцінки параметрів κ_j, k_j шляхом порівняння розрахованих кривих з експериментальними, що буде зроблено в наступних роботах.

Список використаних джерел

References

1. Conlan M.J., Rapley J.W., Cobb C.M. Biostimulation of wound healing by low-energy laser irradiation. A review. // *J. Clin. Periodontol.* – 1996. – v.23. – P.492–496.
2. Geronemus R., Weiss R.A., Weiss M.A., et al. Non-ablative LED photomodulation—light activated fibroblast stimulation clinical trial. // *Lasers Surg. Med.* – 2003. – v.32. – P.22.
3. Karu T. Photobiology of low-power laser effects. // *Health Phys.* – 1989. – v.56. – P.691–704.
4. Kizilova N., Korobov A. Mechanisms of influence of low-level optical radiation on the microcirculatory system. A review. // *Photobiol. Photomed.* – 2016. – v.1. – P.79–93.
5. Karu T. Primary and secondary mechanisms of action of visible to near-IR radiation on cells. // *J. Photochem. Photobiol. B.* – 1999. – v.49. – P.1–17.
6. Whelan H.T., Buchman E.V., Dhokalia A., et al. Effect of NASA light-emitting diode irradiation on molecular changes for wound healing in diabetic mice. // *J. Clin. Laser. Med. Surg.* – 2003. – v.21. – P.67–74.
7. Schaffer M., Bonel H., Sroka R. Effects of 780 nm diode laser irradiation on blood microcirculation: preliminary findings on time-dependent T1-weighted contrast-enhanced magnetic resonance imaging (MRI). // *J. Photochem. Photobiol. B.* – 2000. – v.54. – P. 55–60.
8. Pennes H.H. Analysis of tissue and arterial blood temperatures in the resting forearm. // *J. Appl. Physiol.* – 1948. – v.1. – P.93–122.
9. Xu F., Lu T.J., Seffen K.A. Biothermomechanics of skin tissues. // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2008. – v.56. – P.1852–1884.
10. Tzou D.Y. Macro- to Microscale Heat Transfer: The Lagging Behavior. New York, Taylor and Francis. - 1997. – 278 p.
11. Tzou D.Y. A unified field approach for heat conduction from macro- to microscale. // *J. Heat Transfer.* – 1995. – v.117. – P. 8–16.
12. Rukolaine S.A. Unphysical effects of the dual-phase-lag model of heat conduction. // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* – 2014. – v.78. – P.58–63.
13. Majchrzak E., Turchan L., Dziatkiewicz J. Modeling of skin tissue heating using the generalized dual phase-lag equation. // *Arch. Mech.* - 2015. – v.67. – P.417–437.
1. CONLAN, M.J., RAPLEY, J.W., COBB, C.M. (1996) Biostimulation of wound healing by low-energy laser irradiation. A review. *J. Clin. Periodontol.* 23. 492–496.
2. GERONEMUS, R., WEISS, R.A., WEISS, M.A., et al. (2003) Non-ablative LED photomodulation—light activated fibroblast stimulation clinical trial. *Lasers Surg. Med.* 32. P.22.
3. KARU, T. (1989) Photobiology of low-power laser effects. *Health Phys.* 56. 691–704.
4. KIZILOVA, N., KOROBV, A. Mechanisms of influence of low-level optical radiation on the microcirculatory system. A review. *Photobiol. Photomed.* – 2016. – v.1. – P.79–93.
5. KARU, T. (1999) Primary and secondary mechanisms of action of visible to near-IR radiation on cells. *J. Photochem. Photobiol. B.* 49. 1–17.
6. WHELAN, H.T., BUCHMAN, E.V., DHOKALIA, A., et al. (2003) Effect of NASA light-emitting diode irradiation on molecular changes for wound healing in diabetic mice. *J. Clin. Laser. Med. Surg.* 21. 67–74.
7. SCHAFFER, M., BONEL, H., SROKA, R. (2000) Effects of 780 nm diode laser irradiation on blood microcirculation: preliminary findings on time-dependent T1-weighted contrast-enhanced magnetic resonance imaging (MRI). *J. Photochem. Photobiol. B.* 54. 55–60.
8. PENNES H.H. Analysis of tissue and arterial blood temperatures in the resting forearm. *J. Appl. Physiol.* – 1948. – v.1. – P.93–122.
9. XU, F., LU, T.J., SEFFEN, K.A. (2008) Biothermomechanics of skin tissues. *J. Mech. Phys. Solids.* 56. P.1852–1884.
10. TZOU, D.Y. (1997) *Macro- to Microscale Heat Transfer: The Lagging Behavior*. New York: Taylor and Francis.
11. TZOU, D.Y. (1995) A unified field approach for heat conduction from macro- to microscale. *J. Heat Transfer.* 117. 8–16.
12. RUKOLAINE, S.A. (2014) Unphysical effects of the dual-phase-lag model of heat conduction. *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 78. 58–63.
13. MAJCHRZAK, E., TURCHAN, L., DZIATKIEWICZ, J. (2015) Modeling of skin tissue heating using the generalized dual phase-lag equation. *Arch. Mech.* 67. 417–437.

Надійшла до редколегії 09.11.17

УДК 517.36

Мартинюк А. А.¹, д.ф.-м.н., академік НАНУ,
Хорошун А. С.¹, к.ф.-м.н., докторант

До теорії одноланкового маніпулятора із пружним зчленуванням

¹ Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка
НАНУ, 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3,
e-mail:center@inmech.kiev.ua

A. A. Martynyuk¹, D.Sc., member of NASU,
A. S. Khoroshun¹, Ph.D., doctorant

To the theory of a single link manipulator with joint elasticity

¹ S.P.Timoshenko Institute of Mechanics NAS of
Ukraine, 03057, Kyiv, Nesterova st. 3,
e-mail:center@inmech.kiev.ua

В статті запропоновано керування обертанням електромотора, яке забезпечує глобальну асимптотичну стійкість положення рівноваги одноланкового маніпулятора із пружним зчленуванням. Пружність зчленування моделюється торсіонною пружиною. Враховано ефект затухання коливань і нелінійних характер сили, що виникає внаслідок деформації пружини. В цьому випадку звести відповідну математичну модель до лінійного вигляду неможливо і задача побудови керування залишається відкритою. Показано робастність такого керування і запропоновано спосіб оцінки області робастності у просторі параметрів механічної системи.

Ключові слова: одноланковий маніпулятор, пружне зчленування, малоприводна механічна система, швидко-повільна динамічна система.

In the article we propose the control of the rotation of an electric motor, which provides the global asymptotic stability of the equilibrium position of a single link manipulator with joint elasticity. The elasticity of the joint is modeled by a torsion spring. The effect of damping of oscillations and the nonlinear character of the force that arises as a result of spring deformation is taken into account. In this case, it is impossible to bring the corresponding mathematical model into a linear form, and the task of constructing the control remains open. When the joint elasticity is taken into account, the position of the control actuator does not coincide with the position of the controlled link. The number of degrees of freedom in this model is greater than the number of control inputs. This fact allows us to attribute it to the class of the so-called underactuated mechanical systems. To construct control, the DSC method was used. In conjunction with the Lyapunov function method it allows to obtain the desired control and prove its global asymptotic stability. In addition, the application of the Lyapunov function method gives us an ability to investigate the stability of the system of differential equations which describes the behavior of the considered mechanical system and is in the two-time scale (slow-fast) form, without division of movement into fast and slow ones. It gives a possibility to obtain the estimates for the control parameters which provide the desired character of the movement of the mechanical system. The robustness of such control is shown and a method for estimating the area of robustness in the space of parameters of a mechanical system is proposed.

Key Words: single link manipulator, joint elasticity, underactuated mechanical system, dynamic surface control, low-pass filter, slow-fast dynamical system.

Статтю представив д.ф.-м.н. Жук Я.О.

Розглянемо конструкцію моделі одноланкового маніпулятора із пружним зчленуванням, див. [1,2,3], що зображено на Рис.1. Маніпулятор може здійснювати обертання у вертикальній площині навколо вісі OX у ту чи іншу сторону. Обертання задається електродвигуном і передається до маніпулятора через трансмісію, пружність якої моделюється торсіонною пружиною. Вісь ротора

електродвигуна співпадає з віссю OX . Позначимо через q_1 кут відхилення маніпулятора від вертикалі і через q_2 – кут відхилення від вертикалі валу електродвигуна. Зауважимо, що через пружність трансмісії ці кути співпадають лише в окремих станах моделі.

Введемо позначення: m – маса ланки маніпулятора, l – відстань від точки O до

центру мас ланки маніпулятора, g – прискорення вільного падіння, b_1 та b_2 – коефіцієнти демпфування при обертанні ланки маніпулятора та валу електродвигуна відповідно, J_1 – момент інерції ланки маніпулятора відносно вісі OX , J_2 – момент інерції валу електродвигуна, Δ – момент електромагнітних сил, прикладених до ротора електродвигуна зі сторони статора. Жорсткість K пружини вважаємо нелінійно залежною від зміщення: $K = K_1(q_1 - q_2) + K_2(q_1 - q_2)^3$, де K_1 і K_2 – коефіцієнти жорсткості.

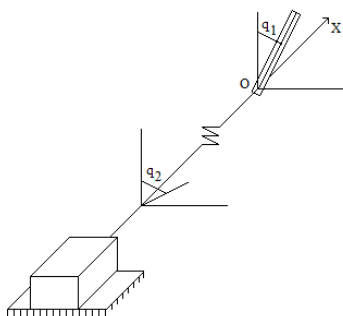


Рис.1

Використовуючи метод Лагранжа, рівняння руху моделі одноланкового маніпулятора із пружним зчленуванням отримаємо у вигляді (див. [3])

$$\begin{cases} J_1 \ddot{q}_1 + b_1 \dot{q}_1 + mgl \sin(q_1) + \\ + K_1(q_1 - q_2) + K_2(q_1 - q_2)^3 = 0, \\ J_2 \ddot{q}_2 + b_2 \dot{q}_2 - K_1(q_1 - q_2) - \\ - K_2(q_1 - q_2)^3 = \Delta. \end{cases} \quad (1)$$

Вважаємо, що деякі або, можливо, всі параметри моделі задані неточно, тобто вони неперервно залежать від чисельного векторного параметра, який належить замкненій множині. В такому випадку, систему диференціальних рівнянь (1) будемо розглядати у вигляді

$$\begin{cases} J_1(p) \ddot{q}_1 + b_1(p) \dot{q}_1 + m(p)gl(p) \sin(q_1) + \\ + K_1(p)(q_1 - q_2) + K_2(p)(q_1 - q_2)^3 = 0, \\ J_2(p) \ddot{q}_2 + b_2(p) \dot{q}_2 - K_1(p)(q_1 - q_2) - \\ - K_2(p)(q_1 - q_2)^3 = \Delta, \end{cases} \quad (2)$$

де $p \in P \subset R^n$, $n \in N$. Вважаємо, що область P містить тільки допустимі значення параметрів. Допустимими вважаємо ті значення параметрів, при яких не виникає протиріч із фізичною природою величин, що входять до складу моделі, тобто з невідемністю мас, довжин, осьових моментів інерції, коефіцієнтів жорсткості та демпфування, тощо.

Нехай $\tau = \sqrt{\frac{K_1(p)}{J_2(p)}} t$ – узагальнений час. Тоді,

позначивши

$$\begin{aligned} v &= \frac{\Delta}{K_1(p)}, \quad B_1(p) = \frac{b_1}{\sqrt{K_1(p)J_2(p)}}, \\ B_2(p) &= \frac{b_2}{\sqrt{K_1(p)J_2(p)}}, \quad K(p) = \frac{K_2(p)}{K_1(p)}, \\ J(p) &= \frac{J_2(p)}{J_1(p)}, \quad \varepsilon(p) = \frac{m(p)gl(p)}{K_1(p)}, \end{aligned}$$

отримаємо безрозмірну систему диференціальних рівнянь, де диференціювання відбувається по узагальненому часу τ , яка еквівалентна системі диференціальних рівнянь (2):

$$\begin{cases} J^{-1}(p) \ddot{q}_1 + B_1(p) \dot{q}_1 + \varepsilon(p) \sin(q_1) + \\ + (q_1 - q_2) + K(p)(q_1 - q_2)^3 = 0, \\ \ddot{q}_2 + B_2(p) \dot{q}_2 - (q_1 - q_2) - \\ - K(p)(q_1 - q_2)^3 = v. \end{cases} \quad (3)$$

Перетворимо керування та координати за такими правилами:

$$\begin{cases} v = u + B_2(p) \dot{q}_2 - (q_1 - q_2) - \\ - K(p)(q_1 - q_2)^3, \\ \eta_1 = q_1, \\ \eta_2 = \dot{q}_1, \\ \eta_3 = q_2, \\ \eta_4 = \dot{q}_2. \end{cases} \quad (4)$$

Тоді система диференціальних рівнянь (3) матиме наступний вигляд:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = -B_1(p)J(p)\eta_2 - J(p)(\eta_1 - \eta_3) - \\ - K(p)J(p)(\eta_1 - \eta_3)^3 - \varepsilon(p)J(p)\sin(\eta_1), \\ \dot{\eta}_3 = \eta_4, \\ \dot{\eta}_4 = u. \end{cases} \quad (5)$$

Очевидно, що задача стабілізації стану рівноваги $q_1 = 0$, $\dot{q}_1 = 0$, $q_2 = 0$, $\dot{q}_2 = 0$ керуванням Δ незалежно від величини початкових відхилень змінних від їх рівноважних значень еквівалентна задачі побудови керування u , яке забезпечить глобальну асимптотичну стійкість нульового стану рівноваги η_1 , η_2 , η_3 , η_4 системи диференціальних рівнянь (5).

Застосуємо для побудови керування метод Dynamic Surface Control, див. [4]. Нехай $\tilde{\eta}_3$ – бажана траєкторія, до якої прямує змінна η_3 при керуванні u . Позначимо величину S_1 наступним чином:

$$S_1 = \eta_3 - \bar{\eta}_3, \quad (6)$$

де $\bar{\eta}_3$ – результат застосування фільтра до $\tilde{\eta}_3$, тобто

$$\tau_1 \dot{\bar{\eta}}_3 + \bar{\eta}_3 = \tilde{\eta}_3, \bar{\eta}_3(0) = \tilde{\eta}_3(0), \quad (7)$$

де τ_1 – довільна додатня як завгодно мала константа. Продиференціювавши (6) по часу отримаємо, враховуючи (5), що

$$\dot{S}_1 = \dot{\eta}_3 - \dot{\bar{\eta}}_3 = \eta_4 - \dot{\bar{\eta}}_3,$$

звідки слідує, що якщо змінна η_4 асимптотично прямує до

$$\tilde{\eta}_4 = -c_1 S_1 + \dot{\bar{\eta}}_3, \quad (8)$$

де $c_1 > 0$ деяка константа, то величина S_1 асимптотично прямує до 0 незалежно від свого початкового значення.

Діючи аналогічно, позначимо величину S_2 наступним чином:

$$S_2 = \eta_4 - \bar{\eta}_4, \quad (9)$$

де $\bar{\eta}_4$ – результат застосування фільтра до $\tilde{\eta}_4$, тобто

$$\tau_2 \dot{\bar{\eta}}_4 + \bar{\eta}_4 = \tilde{\eta}_4, \bar{\eta}_4(0) = \tilde{\eta}_4(0), \quad (10)$$

де τ_2 – довільна додатня як завгодно мала константа. Продиференціювавши (9) по часу отримаємо, враховуючи (5), що

$$\dot{S}_2 = \dot{\eta}_4 - \dot{\bar{\eta}}_4 = u - \dot{\bar{\eta}}_4.$$

Обравши керування

$$u = -c_2 S_2 + \dot{\bar{\eta}}_4, \quad (11)$$

де $c_2 > 0$ – деяка константа, забезпечимо асимптотичне прямування до нуля величини S_2 при довільному її початковому значенні.

Нехай

$$z_1 = \bar{\eta}_3 - \tilde{\eta}_3 \quad (12)$$

та

$$z_2 = \bar{\eta}_4 - \tilde{\eta}_4 \quad (13)$$

– похибки фільтрів. Тоді з (6) та (12) отримаємо, що

$$S_1 + z_1 = \eta_3 - \bar{\eta}_3 + \bar{\eta}_3 - \tilde{\eta}_3 = \eta_3 - \tilde{\eta}_3. \quad (14)$$

Аналогічно, з (9) та (13) отримаємо, що

$$S_2 + z_2 = \eta_4 - \bar{\eta}_4 + \bar{\eta}_4 - \tilde{\eta}_4 = \eta_4 - \tilde{\eta}_4. \quad (15)$$

Враховуючи співвідношення (7), (8), (12) та (14) і вибираючи $c_1 = \frac{1}{\tau_1}$, перетворимо (15) наступним чином:

$$\begin{aligned} S_2 + z_2 &= \eta_4 - \tilde{\eta}_4 = \eta_4 + c_1 S_1 - \dot{\bar{\eta}}_3 = \\ &= \eta_4 + \frac{S_1}{\tau_1} + \frac{z_1}{\tau_1} = \eta_4 + \frac{1}{\tau_1} (\eta_3 - \tilde{\eta}_3). \end{aligned} \quad (16)$$

Тоді, вибираючи $c_2 = \frac{1}{\tau_2}$ і враховуючи (10), (13), (16), з (11) отримаємо вираз для керування:

$$\begin{aligned} u &= -c_2 S_2 + \dot{\bar{\eta}}_4 = -c_2 S_2 - \frac{z_2}{\tau_2} = \\ &= -\frac{1}{\tau_2} (S_2 + z_2) = -\frac{\eta_4}{\tau_2} - \frac{\eta_3}{\tau_1 \tau_2} + \frac{\tilde{\eta}_3}{\tau_1 \tau_2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Нехай $\tilde{\eta}_3 = -\tau_1 \tau_2 \eta_2$. Тоді керування (17) має вигляд

$$u = -\frac{\eta_4}{\tau_2} - \frac{\eta_3}{\tau_1 \tau_2} - \eta_2, \quad (19)$$

Таким чином, оскільки τ_1 і τ_2 можуть бути довільними додатніми як завгодно малими константами, то система диференціальних рівнянь (5) при керуванні (19) є швидкоповільною і має наступний вигляд:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = -B_1(p)J(p)\eta_2 - J(p)(\eta_1 - \eta_3) - \\ - K(p)J(p)(\eta_1 - \eta_3)^3 - \varepsilon(p)J(p)\sin(\eta_1), \\ \dot{\eta}_3 = \eta_4, \\ \tau_2 \dot{\eta}_4 = -\eta_4 - \frac{\eta_3}{\tau_1} - \tau_2 \eta_2. \end{cases} \quad (20)$$

Використовуючи скалярну функцію

$$V(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, p) : R^4 \times R^n \rightarrow R,$$

$$V(0, 0, 0, 0, p) = 0, \text{ наступного вигляду:}$$

$$\begin{aligned} V(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, p) &= \frac{K(p)J(p)}{4} (\eta_1 - \eta_3)^4 + \\ &+ \frac{1}{2} (\eta_1 - \eta_3, \eta_2, \eta_3, \eta_4) M(p, \tau_1, \tau_2) (\eta_1 - \eta_3, \eta_2, \eta_3, \eta_4)^T, \end{aligned}$$

де

$$M(p, \tau_1, \tau_2) = \begin{pmatrix} J(p)(1 + B_1(p)) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \Psi(\tau_1, \tau_2) & \tau_2 \\ 0 & -1 & \tau_2 & \frac{1}{\tau_2} \end{pmatrix},$$

$$\Psi(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{\tau_1 \tau_2^2} - \frac{1}{\tau_1 \tau_2} + 1,$$

за допомогою методу функцій Ляпунова доведено наступну теорему:

Теорема. Для всіх значень параметра p з області P_1 , $P_1 \subseteq P$, які задовольняють співвідношення

$$\varepsilon(p) < 1, \quad B_1(p)J(p) - \frac{\varepsilon(p)^2 J(p)}{2(1 - \varepsilon(p))} - 2 > 0,$$

існують такі константи фільтрів $\tau_1 > 0$ і $\tau_2 > 0$, що керування вигляду (19) глобально асимптотично стабілізує нульовий стан рівноваги системи диференціальних рівнянь (5).

Зауваження 1. Якщо для деякого значення параметра p^* з P_1 побудоване керування вигляду (19), яке глобально асимптотично стабілізує нульовий стан рівноваги системи диференціальних рівнянь (5), тобто вибрані константи фільтрів $\hat{\tau}_1$, $\hat{\tau}_2$, то враховуючи (4) та переходячи до розмірних величин, керування Δ , яке глобально асимптотично стабілізує нульовий стан рівноваги системи диференціальних рівнянь (2), отримаємо у вигляді

$$\Delta = K_1(p^*) \left[-\sqrt{\frac{K_1(p^*)}{J_2(p^*)}} \dot{q}_2 - \frac{q_2}{\hat{\tau}_1 \hat{\tau}_2} - \sqrt{\frac{K_1(p^*)}{J_2(p^*)}} \dot{q}_1 + \frac{b_2}{J_2(p^*)} \dot{q}_2 - (q_1 - q_2) - \frac{K_2(p^*)}{K_1(p^*)} (q_1 - q_2)^3 \right]. \quad (21)$$

Зауваження 2. Доведена теорема для всіх значень p з P_1 постулює існування керування вигляду (19), яке забезпечує глобальну асимптотичну стійкість нульового стану рівноваги системи диференціальних рівнянь (5). Нехай для деякого значення параметра p^* з P_1 таке керування побудоване, тобто вибрані

константи фільтрів $\hat{\tau}_1$, $\hat{\tau}_2$. При виконанні нерівностей

$$\begin{aligned} \max_{p \in P_2} (\varepsilon(p)) < 1, \quad 0 < \min_{p \in P_2} (A(p)), \\ \hat{\tau}_1 < \frac{1}{\max_{p \in P_2} (B(p))}, \quad \hat{\tau}_2 < \min \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{\max_{p \in P_2} (C(p)^{1/2})} \right\}, \quad (22) \\ A(p) &= B_1(p)J(p) - \frac{\varepsilon^2(p)J(p)}{2(1-\varepsilon(p))} - 2, \\ B(p) &= \frac{4\varepsilon^2(p)J(p)}{1-\varepsilon(p)} + \frac{(1+\varepsilon(p)J(p))^2}{B_1(p)J(p) - \frac{\varepsilon^2(p)J(p)}{2(1-\varepsilon(p))} - 2}, \\ C(p) &= 1 + \frac{\varepsilon^2(p)J^2(p)}{2} + \frac{J(p)(B_1(p) + \varepsilon(p))^2}{1-\varepsilon(p)} + \\ &\quad + \frac{(B_1(p)J(p) - 1)^2}{B_1(p)J(p) - \frac{\varepsilon^2(p)J(p)}{2(1-\varepsilon(p))} - 2}, \end{aligned}$$

побудоване керування, очевидно, буде глобально стабілізувати нульовий стан рівноваги системи диференціальних рівнянь (5) для всіх значень параметра p з P_2 , де $P_2 \subseteq P_1$, $p^* \in P_2$. Таким чином, нерівності (22) можна використовувати для визначення області робастності керування (19) або, що те саме, керування (21).

Список використаних джерел

1. De Luca A. Dynamic control of robots with joint elasticity / A. De Luca // Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Robotics and Automation, Philadelphia, PA, USA. – 1988. – P. 152-158.
2. Tomei P. A Simple PD Controller for Robots with Elastic Joints / P. Tomei // IEEE Trans. of Automatic Control. – 1991. – vol. 36, №10. – P. 1208-1213.
3. Doelman R.B. Feedback linearization control of a single link manipulator with joint elasticity / R.B. Doelman // DCT rapporten. – Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, 1991. – 47 p.
4. Swaroop D. Dynamic surface control for a class of nonlinear systems / D. Swaroop, J.K. Hedrick, P.P. Yip, J.C. Gerdes // IEEE Trans. of Automatic Control. – 2000. – vol. 45, №11. – P. 1893-1899.

References

1. DE LUCA, A. (1988) Dynamic control of robots with joint elasticity. In *IEEE Conference on Robotics and Automation*, 24th to 29th April 1988. Philadelphia: IEEE. pp. 152-158.
2. TOMEI, P. (1991) A simple PD controller for robots with elastic joints. *IEEE Trans. of Automatic Control*. 36 (10). p. 1208-1213.
3. DOELMAN, R. (1991) *Feedback linearization control of a single link manipulator with joint elasticity*. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven.
4. SWAROOP, D. & Hedrick, J. & YIP, P. & GERDES, J. (2000) Dynamic surface control for a class of nonlinear systems. *IEEE Trans. of Automatic Control*. 45 (11). p. 1893-1899.

Надійшла до редколегії 07.11.2017

УДК 534.143 – 16:534.232.082.74

Петрищев О. М.¹, д.т.н., проф.,
Романюк М. І.¹, к.т.н.

**Математичне моделювання
перетворювачів електромагнітного типу
в режимі збудження ультразвукових
хвиль**

¹ Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря
Сікорського», 03056, м. Київ, вул.
Політехнічна, 16
e-mail: petrishchev@ukr.net, romanyuk_rita@ukr.net

O. N. Petrishchev¹, Dr. Sci. (Tech), Prof.,
M. I. Romanyuk¹, PhD (Tech)

**Mathematical modeling of the
electromagnetic type transducers in the
excitation mode of the ultrasonic waves**

¹ National Technical University of Ukraine " Igor
Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", 03056, Kyiv,
str. Polytechnique 16,
e-mail: petrishchev@ukr.net, romanyuk_rita@ukr.net

Дано визначення математичної моделі електроакустичного перетворювача електромагнітного типу в режимі збудження (випромінювання) ультразвукових хвиль в металах. Сформульовано граничну задачу динамічної магнітопружності, при записі якої врахована як пондеромоторна дія електромагнітного поля на металевий зразок, так і існування магнітострикційних ефектів в металах ферромагнітної групи. Для вирішення вказаної задачі запропоновано метод послідовних наближень, який у своїй основі має припущення про малість ΔE -ефекту (менше 20%). Показано, що вже нульове наближення до точного значення компонентів вектора зміщення матеріальних часток ферромагнетика, дозволяє зберегти у рішеннях інформацію про конструкцію та геометричні параметри джерела змінного магнітного поля.

Ключові слова: електроакустичний перетворювач електромагнітного типу, комплексна частотна характеристика, режим збудження, метод послідовних наближень, ΔE -ефект.

The mathematical model of an electromagnetic type electroacoustic transducer is determined in the excitation (radiation) mode of ultrasonic waves in metals. The boundary-value problem of dynamic magnetoelasticity is formulated, with the recording of that takes into account not only the ponderomotive effect of the electromagnetic field on the metal sample, but also the existence of magnetostriction effects in metals of the ferromagnetic group. The solution of this problem makes it possible to preserve the coupling effect of elastic and magnetic fields in the volume of a deformable ferromagnet, that manifests itself in an increase of the metal elastic moduli (ΔE -effect).

To solve the dynamic magnetoelastic problem, the method of successive approximations is proposed, which basically has the assumption that the ΔE -effect is small (less than 20%). It is shown that zero approximation to the exact value of the displacement vector components of the ferromagnet material particles allows to preserve in the solutions information about the design and geometric parameters of the alternating magnetic field source. The first approximation gives corrections, that somewhat decrease the amplitude values of the displacement vector components of the metal material particles. This is equivalent to taking into account the ΔE -effect. Moreover, the error in determining the displacement vector components does not exceed the fourth degree of the magnetomechanical coupling coefficient, that is, one - a maximum two percent.

Key words: electroacoustic transducer of electromagnetic type, complex frequency characteristic, excitation mode, method of successive approximations, ΔE -effect.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Електроакустичні перетворювачі електромагнітного типу застосовуються для безконтактного збудження та реєстрації ультразвукових хвиль з

метою неруйнівного контролю та технічної діагностики металовиробів. Розробка конкурентоспроможних приладів неруйнівного контролю та технічної діагностики металовиробів прак-

тично неможлива без ясного розуміння впливу різних параметрів компонентів перетворювача на його передавальні характеристики – комплексну частотну характеристику та імпульсну характеристику, яка фактично є Фур'є-перетворенням комплексної частотної характеристики. Таким чином, комплексна частотна характеристика в режимі випромінювання або приймання (реєстрації) ультразвукових хвиль є первинним (фундаментальним) математичним описом перетворювача електромагнітного типу у вказаних режимах його роботи. При такому визначенні стає зрозумілим, що терміни «математична модель» та «комплексна частотна характеристика» перетворювача є еквівалентними поняттями.

Наскільки можна судити за доступними публікаціями [4 – 8] у світовій практиці теоретичне дослідження перетворювачів електромагнітного типу, питання про комплексну частотну характеристику перетворювача не те, що не розроблене – воно навіть не поставлено у порядок денний.

У даній статті викладаються теоретичні основи розрахунку комплексної частотної характеристики перетворювача електромагнітного типу в режимі збудження ультразвукових хвиль в металах.

Математична модель процесу збудження ультразвукових хвиль в металах електромагнітним способом

Типова конструкція електроакустичного перетворювача електромагнітного типу, який працює в режимі випромінювання ультразвукових хвиль, складається з трьох основних елементів. Елемент №1 – це джерело постійного магнітного поля, що створює в об'ємі металевого зразка незмінне у часі магнітне поле з напруженістю $\vec{H}^0(x_k)$ (x_k – координати точки в правосторонній декартовій системі координат). Другий елемент – джерело змінного магнітного поля. Це, як правило, система провідників, яка може розташовуватися на феромагнітному сердечнику, та по яких протікає змінний електричний струм $I(t) = I^* e^{i\omega t}$ (t – час; I^* – амплітуда електричного струму; $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця; ω – кругова частота зміни знака). Ця система провідників створює в об'ємі металу змінне у часі магнітне поле з напруженістю $\vec{H}(x_k, \omega) e^{i\omega t}$, де $\vec{H}(x_k, \omega)$ – просторово розвинена амплітуда вектора напруженості

змінного магнітного поля, що залежить від частоти ω та координат точки спостереження x_k за характеристиками поля.

Третій обов'язковий елемент перетворювача – це деякий об'єм металу, який розташований в безпосередній близькості від джерела змінного магнітного поля, та в якому власне і відбувається перетворення енергії змінного магнітного поля у зміщення матеріальних часток металу. Ці зміщення будемо описувати вектором $\vec{u}(x_k) e^{i\omega t}$, вважаючи при цьому, що в присутності сильного поля підмагнічування, коли виконується сильна нерівність $|\vec{H}^0(x_k)| \gg |\vec{H}^*(x_k, \omega)|$, процес перетворення $\vec{H}^*(x_k, \omega) \Rightarrow \vec{u}(x_k)$ є лінійним.

З урахуванням усього сказаного вище, можна записати алгоритм перетворення сигналів, який реалізується під час електромагнітного збудження електромагнітних хвиль в металах:

$$U_z \Rightarrow I^* \Rightarrow \vec{H}^*(x_k, \omega) \Rightarrow \left(\begin{matrix} \rho_0, c_{ijkl}^H, r, \\ \mu_{nm}^e, m_{pqij} \end{matrix} \right) \Rightarrow \vec{u}(x_k) \quad (1)$$

$\Uparrow$
 $\vec{H}^0(x_k)$

де U_z – різниця електричних потенціалів на виході генератора електричних сигналів. У круглих дужках записані символи фізичних параметрів металів: ρ_0 – щільність; c_{ijkl}^H – модулі пружності в розмагніченому стані; r – питома електрична провідність; μ_{nm}^e – компонент тензора магнітної проникності, що експериментально визначається в режимі сталості пружних деформацій (ϵ); m_{pqij} – компонент тензора магнітострикційних констант.

Оскільки точка, в якій визначається результат дії перетворювача, тобто амплітуда зміщення $\vec{u}(x_k)$, може обиратися довільним чином в об'ємі металу, остільки випромінювач електромагнітного типу є фізичною системою з фіксованим електричним входом та з розподіленим у просторі механічним виходом. Так як перетворення $U_z \Rightarrow \vec{u}(x_k)$ є лінійним, то можливий наступний запис

$$\vec{u}(x_k) = U_z \vec{W}(x_k, \omega, \Pi), \quad (2)$$

де $\vec{W}(x_k, \omega, \Pi)$ – векторна передавальна характеристика випромінюючого перетворювача

електромагнітного типу (П у списку аргументів – набір параметрів фізичної системи); компоненти $W_j(x_k, \omega, \Pi)$ векторної функції $\vec{W}(x_k, \omega, \Pi)$ – це комплексні частотні характеристики перетворювача в режимі випромінювання j -го компонента вектора зміщення $\vec{u}(x_k)$ матеріальних часток металу.

Розглянемо методику визначення компонентів функції $\vec{W}(x_k, \omega, \Pi)$. Компоненти $u_j(x_k)$ вектора зміщення матеріальних часток металу задовольняють другому закону Ньютона в диференціальній формі, що в термінах змінних у часі за законом $e^{i\omega t}$ амплітуд фізичних полів має вигляд

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho_0 \omega^2 u_j - L_j = 0 \quad \forall x_k \in V, \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (3)$$

де σ_{ij} – амплітудне значення компонента тензора механічних напружень в об'ємі деформованого змінним магнітним полем металу; L_j – j -ий компонент вектора об'ємної щільності сил Лоренца, причому $L_j = \varepsilon_{jmn} J_m (\mu_{ns}^e H_s^0)$; ε_{jmn} – компонент тензора Леві-Чивіті; J_m – m -ий компонент вектора щільності вихрового струму провідності. V у співвідношенні (3) – об'єм металу.

Електромагнітний стан деформованого металу визначається рівняннями Максвелла, які в нехтуванні струмами зміщення, записуються наступним чином

$$\varepsilon_{msj} \frac{\partial H_j}{\partial x_s} = r E_m, \quad \varepsilon_{prm} \frac{\partial E_m}{\partial x_r} = -i \omega B_p, \quad (4)$$

$$(j, m, p, r, s=1, 2, 3)$$

де $\vec{H}$ та $\vec{E}$ – вектори напруженості магнітного та електричного полів; $\vec{B}$ – вектор магнітної індукції. Виключаючи з рівнянь (4) компонент E_m , можна записати

$$\varepsilon_{prm} \varepsilon_{msj} \frac{\partial^2 H_j}{\partial x_s \partial x_r} + i \omega r B_p = 0 \quad \forall x_k \in V, \quad (5)$$

Сполучною ланкою між фундаментальними рівняннями механіки (3) і електродинаміки (5) є рівняння фізичного стану деформованого ферромагнетика. Лінеаризована версія [1]

загальних співвідношень феноменологічної теорії магнітострикційних явищ К. Б. Власова [2] має вигляд

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}^H \frac{\partial u_k}{\partial x_\ell} - m_{pqij} H_p^0 H_q, \quad (6)$$

$$(i, j, k, \ell, p, q=1, 2, 3)$$

$$B_p = m_{pmns} H_p^0 \frac{\partial u_s}{\partial x_n} + \mu_{pr}^e H_r. \quad (7)$$

Підставляючи співвідношення (6) в рівняння (3), а вирази (7) – в рівняння (5), отримуємо

$$c_{ijkl}^H \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_\ell} + \rho_0 \omega^2 u_j - m_{pqij} \frac{\partial (H_p^0 H_q)}{\partial x_i} - L_j = 0 \quad \forall x_k \in V, \quad (8)$$

$$\varepsilon_{prm} \varepsilon_{msj} \frac{\partial^2 H_j}{\partial x_s \partial x_r} + i \omega r m_{pmns} H_p^0 \frac{\partial u_s}{\partial x_n} + i \omega r \mu_{pr}^e H_r = 0 \quad \forall x_k \in V. \quad (9)$$

Вектор $\vec{H} = \vec{H}^* + \vec{h}$, де $\vec{H}^*$ – напруженість магнітного поля, яке створюється в об'ємі металу перетворювачем електромагнітного типу, $\vec{h}$ – вектор напруженості внутрішнього магнітного поля, яке виникає в ферромагнетикі, що деформується, через обертання магнітних доменів. Вектор $\vec{H}^*$ за своїм визначенням задовольняє рівнянням Максвелла, тобто

$$\varepsilon_{prm} \varepsilon_{msj} \frac{\partial^2 H_j^*}{\partial x_s \partial x_r} + i \omega r \mu_{pr}^e H_r^* = 0 \quad \forall x_k \in V.$$

Беручи до уваги останні зауваження, запишемо рівняння (8) і (9) в наступному вигляді:

$$c_{ijkl}^H \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_\ell} + \rho_0 \omega^2 u_j - m_{pqij} \frac{\partial (H_p^0 h_q)}{\partial x_i} - L_j^* = 0 \quad \forall x_k \in V, \quad (10)$$

$$\varepsilon_{prm} \varepsilon_{msj} \frac{\partial^2 h_j}{\partial x_s \partial x_r} + i \omega r m_{pmns} H_p^0 \frac{\partial u_s}{\partial x_n} + i \omega r \mu_{pr}^e h_r = 0 \quad \forall x_k \in V, \quad (11)$$

де $f_j^* = L_j + m_{pqij} \partial (H_p^0 H_q^*) / \partial x_i$ – об'ємна щільність зовнішніх навантажень, тобто сил Лоренца та сил Джоуля або магнітострикційних сил (другий доданок).

В оточуючому металевий об'єкт просторі існує електромагнітне поле розсіювання,

магнітна складова якого має напруженість $\tilde{H}(x_k)e^{i\omega t}$. Вважаючи, що магнітні та діелектричні властивості навоколишнього простору визначаються постійними $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ та $\chi_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$, тобто $\tilde{B} = \mu_0 \tilde{H}$ та $\tilde{D} = \chi_0 \tilde{E}$, де $\tilde{D}$ і $\tilde{E}$ – вектори електричної індукції та напруженості поля електричної складової електромагнітного поля розсіювання, приходимо до системи рівнянь:

$$\varepsilon_{prm} \varepsilon_{msj} \frac{\partial^2 \tilde{H}_j}{\partial x_s \partial x_r} - k_0^2 \tilde{H}_p = 0 \quad \forall x_k \notin V, \quad (12)$$

де $k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \chi_0 = \omega^2 / c^2$; $c = 1/\sqrt{\mu_0 \chi_0}$ – швидкість поширення електромагнітного випромінювання у вакуумі. Рішення системи рівнянь (12) повинні задовольняти умовам фізичної реалізованості джерела поля, тобто граничним умовам

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\tilde{H}_j(x_k), \frac{\partial \tilde{H}_j(x_k)}{\partial x_p} \right] = 0, \quad (13)$$

де R – відстань від поверхні S металевого виробу до точки з координатами x_k , в якій визначаються компоненти $\tilde{H}_j(x_k)$.

Єдність розв'язку систем рівнянь (10) – (12) забезпечується безумовним виконанням граничного співвідношення (13) та умов на поверхні S деформованого металу:

$$n_p \left(c_{pqk\ell}^H \frac{\partial u_k}{\partial x_\ell} - m_{ijpq} H_i^0 h_j - \sigma_{pq}^* \right) = 0 \quad \forall x_k \in S, \quad (14)$$

$$\varepsilon_{kpm} n_p (h_m - \tilde{H}_m) = 0 \quad \forall x_k \in S, \quad (15)$$

$$n_p \left(m_{pmns} H_p^0 \frac{\partial u_s}{\partial x_n} + \mu_{pr}^e h_r - \mu_0 \tilde{H}_p \right) = 0 \quad \forall x_k \in S, \quad (16)$$

де n_p – проекції вектора одиничної зовнішньої нормалі у точці з координатами x_k на поверхні S на координатні осі декартової системи координат; $\sigma_{pq}^* = M_{pq}^* + m_{ijpq} H_i^0 H_j^*$ – поверхнева щільність зовнішніх навантажень – пондеромоторної дії електромагнітного поля (компонент тензора натягу поля Максвелла M_{pq}^*) та сил Джоуля – другий доданок.

Природно, що розв'язок граничної задачі динамічної теорії магнітопружності, яка в загальному випадку складається з дев'яти

диференціальних рівнянь (10) – (12) другого порядку в частних похідних та дев'яти основних граничних умов (14) – (16), пов'язан зі значними обчислювальними труднощами. Подолавши ці труднощі, можна зберегти в отриманих рішеннях специфічні ефекти зв'язності, що полягають у збільшенні модулів пружності металу (так званий ΔE -ефект). Крім цього, кількісні зміни зазнають магнітна проникність, магнітострикційні константи та електрична провідність. Це принциповий момент, який своїм наслідком має те, що пружні властивості полікристалічного металу набувають незначну анізотропію. Разом з тим, спираючись на кількісні оцінки, які можна сформулювати на основі точних рішень найпростіших модельних задач, можна стверджувати, що максимальні зміни модулів пружності металу ніколи не перевищують 20% від їх початкового значення в розмагніченому стані. У металах феромагнітної групи при їх динамічному деформуванні змінним магнітним полем зміни модулів пружності не перевищують 10% від їх первісного значення. Це дозволяє уникнути спільного рішення систем рівнянь (10) – (12) та реалізувати метод послідовних наближень до точних значень векторів $\vec{u}(x_k)$, $\vec{h}(x_k)$ та $\vec{\tilde{H}}(x_k)$.

Подамо точні рішення $\vec{u}(x_k)$ та $\vec{h}(x_k)$ граничної задачі (10) – (16) у вигляді рядів:

$$\vec{u}(x_k) = \vec{u}^{(0)}(x_k) + \sum_{m=1}^{\infty} \Delta \vec{u}^{(m)}(x_k), \quad (17)$$

$$\vec{h}(x_k) = \vec{h}^{(1)}(x_k) + \sum_{m=2}^{\infty} \Delta \vec{h}^{(m)}(x_k),$$

де $\vec{u}^{(0)}(x_k)$ та $\vec{h}^{(1)}(x_k)$ – нульове та перше ($\vec{h}^{(0)}(x_k) = 0$) наближення до точних значень векторів $\vec{u}(x_k)$ та $\vec{h}(x_k)$; $\Delta \vec{u}^{(m)}(x_k)$ та $\Delta \vec{h}^{(m)}(x_k)$ – поправки до первинних наближень на наступних ітераційних кроках. Магнітне поле розсіювання $\vec{\tilde{H}}(x_k)$ визначається так само, як і внутрішнє магнітне поле $\vec{h}(x_k)$.

У нульовому наближенні гранична задача динамічної магнітопружності «стискається» до граничної задачі про збудження гармонійних коливань у ізотропному твердому тілі системою об'ємних та поверхневих навантажень:

$$c_{ijk\ell}^H \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_\ell} + \rho_0 \omega^2 u_j - f_j^* = 0 \quad \forall x_k \in V, \quad (18)$$

$$n_p \left(c_{pqk\ell}^H \frac{\partial u_k}{\partial x_\ell} - \sigma_{pq}^* \right) = 0 \quad \forall x_k \in S, \quad (19)$$

Рішення (18) – (19) для осесиметричних хвиль Лемба, що поширюються, приведено в роботі [9]. Задані за умовою задачі зовнішні навантаження f_j^* та σ_{pq}^* формують амплітудні множники збуджуваних ультразвукових хвиль. Так як розподіл у просторі об'ємних та поверхневих щільностей зовнішніх сил в основному визначається характером розподілу у просторі змінного магнітного поля, що обумовлений конструкцією і розмірами джерела змінного магнітного поля у складі випромінювача електромагнітного типу, то можна стверджувати, що у розрахункових формулах для амплітудних множників ультразвукових хвиль зберігається інформація про конструкцію та параметри перетворювача. Отже, розв'язок граничної задачі (18), (19) дозволяє сформувати оцінки комплексної частотної характеристики випромінювача з похибкою, яка не перевищує 10%, тобто рівнів прояву ΔE -ефекту, які прямо пропорційні числовим значенням квадрата коефіцієнта магніто механічного зв'язку $K_{(ijk\ell)}^2$, при цьому $\Delta c_{ijk\ell} = c_{ijk\ell}^H K_{(ijk\ell)}^2$.

Після визначення нульового наближення $\bar{u}^{(0)}(x_k)$ до точного значення $\bar{u}(x_k)$ визначається перше наближення для внутрішнього магнітного поля та вектора напруженості магнітного поля розсіювання. При цьому вирішується наступна гранична задача:

$$\varepsilon_{prm} \varepsilon_{msj} \frac{\partial^2 h_j^{(1)}}{\partial x_s \partial x_r} + i\omega r \mu_{pr}^\varepsilon h_r^{(1)} + i\omega r m_{pmns} H_p^0 \frac{\partial u_s^{(0)}}{\partial x_n} = 0 \quad \forall x_k \in V, \quad (20)$$

$$\varepsilon_{prm} \varepsilon_{msj} \frac{\partial^2 \tilde{H}_j^{(1)}}{\partial x_s \partial x_r} - k_0^2 \tilde{H}_p^{(1)} = 0 \quad \forall x_k \notin V, \quad (21)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\tilde{H}_j^{(1)}(x_k), \frac{\partial \tilde{H}_j^{(1)}(x_k)}{\partial x_p} \right] = 0, \quad (22)$$

$$\varepsilon_{kpm} n_p \left(h_m^{(1)} - \tilde{H}_m^{(1)} \right) = 0 \quad \forall x_k \in S, \quad (23)$$

$$n_p \left(m_{pmns} H_p^0 \frac{\partial u_s^{(0)}}{\partial x_n} + \mu_{pr}^\varepsilon h_r^{(1)} - \mu_0 \tilde{H}_p^{(1)} \right) = 0 \quad \forall x_k \in S, \quad (24)$$

де компоненти вектора $\bar{u}^{(0)}(x_k)$ вважаються відомими величинами.

Після визначення перших наближень $\bar{h}^{(1)}(x_k)$ та $\tilde{\bar{H}}^{(1)}(x_k)$ визначається поправка $\Delta \bar{u}^{(1)}(x_k)$ першого наближення. Підставляючи значення $\bar{u}^{(1)}(x_k) = \bar{u}^{(0)}(x_k) + \Delta \bar{u}^{(1)}(x_k)$ у рівняння (10), отримуємо наступний результат

$$c_{ijk\ell}^H \frac{\partial^2 \Delta u_k^{(1)}}{\partial x_i \partial x_\ell} + \rho_0 \omega^2 \Delta u_j^{(1)} - m_{pqij} \frac{\partial (H_p^0 h_q^{(1)})}{\partial x_i} = 0 \quad \forall x_k \in V, \quad (25)$$

Єдність розв'язку системи рівнянь (25) забезпечується граничними умовами

$$n_p \left(c_{pqk\ell}^H \frac{\partial \Delta u_k^{(1)}}{\partial x_\ell} - m_{ijpq} H_i^0 h_j^{(1)} \right) = 0 \quad \forall x_k \in S, \quad (26)$$

при записі яких не враховується збурення числових значень компонентів тензора натягу Максвелла, обумовлених внутрішнім магнітним полем.

Після визначення поправки $\Delta \bar{u}^{(1)}(x_k)$ перше наближення $\bar{u}^{(1)}(x_k) = \bar{u}^{(0)}(x_k) + \Delta \bar{u}^{(1)}(x_k)$ до точного рішення $\bar{u}(x_k)$ має похибку, яка не перевищує $K_{(ijk\ell)}^4$, тобто близько одного відсотка.

Підставлення першого наближення $\bar{u}^{(1)}(x_k)$ у рівняння (11) та граничні умови (16) дозволяє визначити поправки $\Delta \bar{h}^{(2)}(x_k)$ та $\Delta \tilde{\bar{H}}^{(2)}(x_k)$ за значеннями компонентів поправки $\Delta \bar{u}^{(1)}(x_k)$. Похибка другого наближення до точних значень векторів $\bar{h}(x_k)$ та $\tilde{\bar{H}}(x_k)$ також не повинна перевищувати значення $K_{(ijk\ell)}^4$. На цьому кроці можна припиняти ітераційний процес. Компоненти векторної передавальної характеристики визначені з похибкою, яка не перевищує значень $K_{(ijk\ell)}^4$.

Висновки

Пропонується послідовність обчислювальних процедур, виконання яких дозволяє побудувати математичну модель електроакустичного перетворювача електромагнітного типу в режимі випромінювання ультразвукових хвиль, яка в своїй основі містить фундаментальні положення механіки деформованого твердого тіла та класичної електродинаміки, і враховує основні закономірності динамічної магнітопружності.

Список використаних джерел

1. Петрищев О. Н. Гармонические колебания пьезокерамических элементов. Часть 1. Гармонические колебания пьезокерамических элементов в вакууме и метод резонанса-антирезонанса / О. Н. Петрищев. – Киев: Аверс, 2012. – 300 с.
2. Власов К. Б. Некоторые вопросы теории упругих ферромагнитных (магнитострикционных) сред / К. Б. Власов // Изв. АН СССР. Сер. физическая. – 1957. – Т. 21. – № 8. – С. 1140-1148.
3. Петрищев О. Н., Трушко Н. С. Моделирование процесса излучения ультразвуковых волн единичным источником акустической эмиссии / О. Н. Петрищев, Н. С. Трушко // Прикладная механика. – 2015. – 51, №2. – С.102-121.
4. Ribichini R., Experimental and numerical evaluation of electromagnetic acoustic transducer performance on steel materials / R. Ribichini, F. Cegla, P. B. Nagy, P. Cawley // NDT & E International. – 2012. – 45, №. 1. – P. 32-38.
5. Ma Q. Excitation and detection of shear horizontal waves with electromagnetic acoustic transducers for nondestructive testing of plates / Q. Ma, J. Ji, P. Hu, Xi. Zhong, B. Wu, C. He // Chinese Journal of Mechanical Engineering. – 2014. – 27, № 2. – P. 428-436.
6. Kojima F. Impact model and control of ultrasonic excitation using electromagnetic acoustic transducer / F. Kojima, A. Furusawa, T. Ito // Control Conference (ASCC), 2015 10th Asian. – IEEE, 2015. – P. 1-6.
7. Xin P. Mechanism and application of EMAT technology based on NDT / P. Xin, L. Yang, Y. Li // Electricity Distribution (CICED), 2014 China International Conference on IEEE, 2014. – P. 100-102.
8. Fromme P. Noncontact excitation of guided waves (A0 mode) using an electromagnetic acoustic transducer (EMAT) / P. Fromme // AIP Conference Proceedings. – AIP Publishing, 2016. – 1706, №. 1. – P. 030007(1-8).

References

1. PETRISCHEV, O. (2012) *Garmonicheskie kolebaniya pezokeramicheskikh elementov. Chast 1. Garmonicheskie kolebaniya pezokeramicheskikh elementov v vakuume i metod rezonansa-antirezona. Kiev: Avers.*
2. VLASOV, K. (1957) Nekotoryie voprosy teorii uprugih ferromagnitnyih (magnitostriksionnyih) sred. *Izv. AN SSSR Ser. fizicheskaya.* 21 (8). p. 1140–1148.
3. PETRISCHEV, O. & TRUSHKO, N. (2015) Modelirovanie protsessa izlucheniya ultrazvukovyih voln edinichnym istochnikom akusticheskoy emissii *Prikladnaya mehanika.* (2). p.102 – 121.
4. RIBICHINI, R., CEGLA, F., NAGY, P. & CAWLEY, P. (2012) Experimental and numerical evaluation of electromagnetic acoustic transducer performance on steel materials // *NDT & E International.* 45 (1). p. 32-38.
5. MA, Q., JIAO, J, HU, P., ZHONG, XI., WU, B. & HE, C. (2014) Excitation and detection of shear horizontal waves with electromagnetic acoustic transducers for nondestructive testing of plates // *Chinese Journal of Mechanical Engineering.* 27. (2). p. 428-436.
6. KOJIMA, F., FURUSAWA, A., ITO, T. (2015) Impact model and control of ultrasonic excitation using electromagnetic acoustic transducer. In *Control Conference (ASCC), 2015 10th Asian.* IEEE. p 1-6.
7. XIN, P., YANG, L., LI, Y. (2014) Mechanism and application of EMAT technology based on NDT. In *Electricity Distribution (CICED), 2014 China International Conference on IEEE.* – p. 100-102.
8. FROMME, P. (2016) Noncontact excitation of guided waves (A0 mode) using an electromagnetic acoustic transducer (EMAT). In *AIP Conference Proceedings.* 1706 (1). p. 030007(1-8).

Надійшла до редколегії 07.11.17

УДК 517.36

Хорошун А. С., к.ф.-м.н., докторант

Про стабілізацію руху TORA

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3,
e-mail:center@inmech.kiev.ua

A. S. Khoroshun, Ph.D., doctorant

On the stabilization of the TORA movement

S.P.Timoshenko Institute of Mechanics NAS of
Ukraine, 03057, Kyiv, Nesterova st. 3,
e-mail:center@inmech.kiev.ua

В статті розглядається модель для дослідження поведінки супутника із подвійним обертанням, яка має назву TORA. Побудовано керування обертанням ексцентрикового маховика, яке забезпечує глобальну асимптотичну стійкість положення рівноваги TORA. Показано робастність такого керування і запропоновано спосіб оцінки області робастності у просторі параметрів механічної системи. Отримане керування має значно простіший вигляд, ніж варіанти, які запропоновані в інших роботах, що є важливим для практичного застосування.

Ключові слова: супутник із подвійним обертанням, метод функцій Ляпунова, малоприводна механічна система, швидко-повільна динамічна система.

In the article the model which is called TORA for the study of the behavior of a dual-spin space craft is investigated. The mathematical model of this object is obtained with such assumption that it can be used for the active vibration damping. TORA can be attributed to the so-called. underactuated mechanical systems, which are characterized by the fact that the number of control inputs in them is less than the number of variables describing the behavior of the system. The rotation of the eccentric flywheel, which provides the global asymptotic stability of the TORA equilibrium position, is constructed. The proof of stability is carried out using the Lyapunov function method, which makes it possible not to separate the original system of differential equations, which has the slow- fast form, into a "fast" and "slow" subsystems. Although this system allows such a separation, it is quite difficult to establish the stability of the equilibrium state of the "slow" subsystem, since it is essentially nonlinear, and its linearization, in the context of the required global stability, does not make sense. The robustness of such control is shown and a method for estimating the area of robustness in the space of parameters of a mechanical system is proposed. This is of considerable interest, since real mechanical systems are always depended from uncertain parameters whose changes can greatly affect its functioning. The resulting control is simpler than such offered in other works, which is important for practical application.

Key Words: dual-spin space craft, active vibration damping, Lyapunov function method, underactuated mechanical system, dynamic surface control, low-pass filter, slow-fast dynamical system.

Статтю представив д.ф.-м.н. Жук Я.О.

Розглянемо конструкцію моделі, яка запропонована в [1] для дослідження поведінки супутника із подвійним обертанням і має назву TORA (Translational Oscillator with Rotating Actuator). Основою його є прикріплений до стіни за допомогою пружини возик, центр мас якого може рухатись у вертикальній площині вздовж горизонтальної осі. На возику розташований симетричний відносно центру маховик, що несе точкову масу. Вісь його обертання, навколо якої він може повертатися в ту чи іншу сторону, перпендикулярна площині руху возика. Маховик приводиться до руху електродвигуном, статор

якого жорстко зкріплений з возиком, а вісь ротора жорстко зкріплена з віссю маховика.

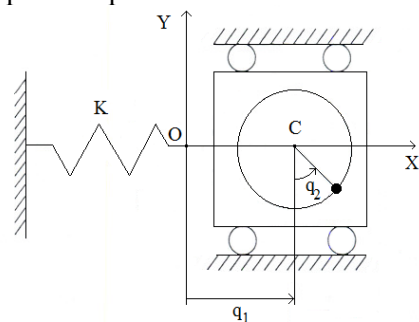


Рис. 1

Нехай q_1 – горизонтальне зміщення центру маховика від його положення рівноваги, q_2 – кут відхилення точкової маси від вертикалі, див. Рис.1. Керування TORA відбувається за допомогою обертання ексцентрикового маховика, яке задається електродвигуном, тому керуючим параметром в системі вважаємо момент електромагнітних сил, що прикладені до ротора зі сторони статора. Задача керування полягає в стабілізації TORA в його положенні рівноваги $q_1 = 0$, $\dot{q}_1 = 0$, $q_2 = 0$, $\dot{q}_2 = 0$.

Введемо позначення: m – точкова маса, M – маса возика, мотора і маховика, r – відстань між центром маховика і точковою масою, I – момент інерції маховика, K – жорсткість пружини, Δ – момент електромагнітних сил, що прикладені до ротора електродвигуна зі сторони статора.

Застосовуючи метод Лагранжа і припускаючи, що деякі або, можливо, всі параметри моделі задані неточно, тобто вони неперервно залежать від чисельного векторного параметра, який належить замкненій множині, рівняння руху TORA отримаємо у вигляді (див. [2])

$$\begin{cases} (M(p) + m(p))\ddot{q}_1 + m(p)r(p)(\ddot{q}_2 \cos(q_2) - \dot{q}_2^2 \sin(q_2)) + K(p)q_1 = 0, \\ (I(p) + m(p)r^2(p))\ddot{q}_2 + m(p)r(p) \cos(q_2)\ddot{q}_1 + m(p)gr(p) \sin(q_2) = \Delta, \end{cases} \quad (1)$$

де $p \in P \subset R^n$, $n \in N$. Вважаємо, що область P містить тільки допустимі значення параметрів. Допустимими вважаємо ті значення параметрів, при яких не виникає протиріч із фізичною природою величин, що входять до складу моделі, тобто з невід'ємністю мас, довжин, осьових моментів інерції, тощо.

Ввівши безрозмірні змінні, див. [3],

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1 &= q_1 \sqrt{\frac{M(p) + m(p)}{I(p) + m(p)r^2(p)}}, \\ v &= \frac{M(p) + m(p)}{K(p)(I(p) + m(p)r^2(p))} \Delta, \\ \tau &= t \sqrt{\frac{K(p)}{M(p) + m(p)}} \end{aligned}$$

і позначивши

$$\varepsilon(p) = \frac{m(p)r(p)}{\sqrt{(I(p) + m(p)r^2(p))(M(p) + m(p))}},$$

отримаємо безрозмірну систему диференціальних рівнянь еквівалентну системі диференціальних рівнянь (1), де диференціювання відбувається по узагальненому часу τ :

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{q}}_1 + \tilde{q}_1 - \varepsilon(p)(\dot{q}_2^2 \sin(q_2) - \ddot{q}_2 \cos(q_2)) = 0, \\ \ddot{\tilde{q}}_2 + \varepsilon(p) \cos(q_2) \ddot{\tilde{q}}_1 + \\ + \frac{m(p)gr(p)(M(p) + m(p))}{K(p)(I(p) + m(p)r^2(p))} \sin(q_2) = v. \end{cases} \quad (2)$$

Згідно [2] скористаємося перетворенням керування і координат по таким правилам:

$$\begin{cases} v = \alpha(p, q_2)u + \beta(p, \tilde{q}_1, q_2, \dot{q}_2), \\ \eta_1 = \tilde{q}_1 + \varepsilon(p) \sin(q_2), \\ \eta_2 = \tilde{q}_2 + \varepsilon(p) \dot{q}_2 \cos(q_2), \\ \eta_3 = q_2, \\ \eta_4 = \dot{q}_2, \end{cases} \quad (3)$$

де $\alpha(p, q_2) = 1 - \varepsilon^2(p) \cos^2(q_2)$,

$$\begin{aligned} \beta(p, \tilde{q}_1, q_2, \dot{q}_2) &= \varepsilon^2(p) \dot{q}_2^2 \sin(q_2) \cos(q_2) - \\ &- \varepsilon(p) \cos(q_2) \tilde{q}_1 + \frac{m(p)gr(p)(M(p) + m(p))}{K(p)(I(p) + m(p)r^2(p))} \sin(q_2). \end{aligned}$$

Тоді система диференціальних рівнянь (2) матиме наступний вигляд:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = -\eta_1 + \varepsilon(p) \sin(\eta_3), \\ \dot{\eta}_3 = \eta_4, \\ \dot{\eta}_4 = u. \end{cases} \quad (4)$$

Очевидно, що задача стабілізації стану рівноваги $q_1 = 0$, $\dot{q}_1 = 0$, $q_2 = 0$, $\dot{q}_2 = 0$ керуванням Δ незалежно від величини початкових відхилень змінних від їх рівноважних значень еквівалентна задачі побудови керування u , яке забезпечить глобальну асимптотичну стійкість нульового стану рівноваги η_1 , η_2 , η_3 , η_4 системи диференціальних рівнянь (4).

Застосовуючи т.зв. Dynamic Surface Control, див. [4], отримаємо, що керування

$$u = -c_2 x_4 - \frac{y_2}{\tau_2}, \quad (5)$$

де змінні $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)^T$ і $(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2)^T$ пов'язані співвідношеннями

$$\begin{cases} \eta_1 = x_1, \\ \eta_2 = x_2, \\ \eta_3 = x_3 + y_1 - \arctan\left(\frac{x_2}{\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}}\right), \\ \eta_4 = x_4 + y_2 - c_1 x_3 - \frac{y_1}{\tau_1}, \end{cases} \quad (6)$$

стабілізує стан рівноваги системи диференціальних рівнянь (4), незалежно від початкових значень змінних, якщо нульовий стан рівноваги системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \\ + \varepsilon(p) \sin \left(x_3 + y_1 - \arctan \left(\frac{x_2}{\sqrt{G(x_1, x_2, p)}} \right) \right), \\ \dot{x}_3 = -c_1 x_3 + x_4 + y_2, \\ \dot{x}_4 = -c_2 x_4, \\ \dot{y}_1 = -\frac{y_1}{\tau_1} + F_1(x_1, x_2, x_3, y_1, p), \\ \dot{y}_2 = -\frac{y_2}{\tau_2} + F_2(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, p), \end{cases} \quad (7)$$

де $G(x_1, x_2, p) = 1 + x_1^2 + x_2^2$,

$$F_1(x_1, x_2, x_3, y_1, p) = \frac{G(x_1, x_2, p)}{G(x_1, x_2, p) + x_2^2} \times$$

$$\times \left[\frac{-x_1 + \varepsilon(p) \sin \left(x_3 + y_1 - \arctan \left(\frac{x_2}{\sqrt{G(x_1, x_2, p)}} \right) \right)}{\sqrt{G(x_1, x_2, p)}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\varepsilon(p) x_2^2 \sin \left(x_3 + y_1 - \arctan \left(\frac{x_2}{\sqrt{G(x_1, x_2, p)}} \right) \right)}{\left(\sqrt{G(x_1, x_2, p)} \right)^3} \right]$$

$F_2(x, y, p) =$

$$= c_1 x_4 + c_1 y_2 - c_1^2 x_3 - \frac{y_1}{\tau_1^2} + \frac{1}{\tau_1} F_1(x_1, x_2, x_3, y_1, p),$$

глобально асимптотично стійкий.

Використовуючи скалярну функцію $V(x, y, p): R^4 \times R^2 \times R^n \rightarrow R$, $V(0, 0, p) = 0$, вигляду

$$V(x, y, p) = 2\sqrt{1 + V_1(x_1, x_2, p)} -$$

$$- 2 + \frac{1}{2}(x_3^2 + x_4^2 + y_1^2 + y_2^2),$$

$$\text{де } V_1(x_1, x_2, p) = \frac{\Psi(p)}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{x_1 x_2}{\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}},$$

$$\Psi(p) = \frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon(p)} + \frac{\varepsilon(p)}{\sqrt{2}}, \quad \text{за допомогою методу}$$

функцій Ляпунова доведено наступну теорему:

Теорема. Для всіх значень параметра p з області P існують такі константи керування $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ і такі константи фільтрів $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$, що керування вигляду (5) глобально

асимптотично стабілізує положення рівноваги системи диференціальних рівнянь (4).

Зауваження 1. Якщо для деякого значення параметра p з P побудоване керування вигляду (5), яке глобально асимптотично стабілізує нульовий стан рівноваги системи диференціальних рівнянь (4), тобто вибрані константи керування $\hat{c}_1$, $\hat{c}_2$ і константи фільтрів

$$\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \hat{c}_1 = \frac{1}{\hat{\tau}_1}, \hat{c}_2 = \frac{1}{\hat{\tau}_2}, \text{ то враховуючи (3), (6) та}$$

переходячи до розмірних величин, керування Δ , яке глобально асимптотично стабілізує нульовий стан рівноваги системи диференціальних рівнянь (1), отримаємо у вигляді

$$\Delta = \frac{K(p)(I(p) + m(p)r^2(p))}{M(p) + m(p)} \times$$

$$\times \left[(1 - \varepsilon^2(p) \cos^2(q_2)) \left(-\frac{1}{\hat{\tau}_1 \hat{\tau}_2} q_2 - \sqrt{\frac{M(p) + m(p)}{K(p)}} \frac{\dot{q}_2}{\hat{\tau}_2} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\hat{\tau}_1 \hat{\tau}_2} \arctan(\Lambda(p, q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)) \right) +$$

$$+ \varepsilon(p) \frac{M(p) + m(p)}{K(p)} \sin(q_2) \cos(q_2) \dot{q}_2^2 -$$

$$- \varepsilon(p) \sqrt{\frac{M(p) + m(p)}{I(p) + m(p)r^2(p)}} \cos(q_2) q_1 +$$

$$+ \frac{m(p)gr(p)(M(p) + m(p)) \sin(q_2)}{K(p)(I(p) + m(p)r^2(p))} \Big], \quad (8)$$

де $\Lambda(p, q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) =$

$$= \frac{\phi(p, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)}{\sqrt{1 + (\phi(p, q_1, q_2))^2 + (\chi(p, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2))^2}}$$

$$\phi(p, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{M(p) + m(p)}{\sqrt{K(p)(I(p) + m(p)r^2(p))}} \dot{q}_1 +$$

$$+ \varepsilon(p) \sqrt{\frac{M(p) + m(p)}{K(p)}} \cos(q_2) \dot{q}_2,$$

$$\phi(p, q_1, q_2) = \sqrt{\frac{M(p) + m(p)}{I(p) + m(p)r^2(p)}} q_1 + \varepsilon(p) \sin(q_2),$$

$$\chi(p, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{M(p) + m(p)}{\sqrt{K(p)(I(p) + m(p)r^2(p))}} \dot{q}_1 +$$

$$+ \varepsilon(p) \sqrt{\frac{M(p) + m(p)}{K(p)}} \cos(q_2) \dot{q}_2$$

Зауваження 2. Доведена теорема для всіх значень параметра p з області P постулює існування керування вигляду (5), яке забезпечує глобальну асимптотичну стійкість нульового стану рівноваги системи диференціальних рівнянь (4). Нехай для деякого значення параметра p^* з області P таке керування побудовано, тобто вибрані константи $c_1^* > 0$, $c_2^* > 0$, $\tau_1^* > 0$, $\tau_2^* > 0$, $c_1^* = \frac{1}{\tau_1^*}$, $c_2^* = \frac{1}{\tau_2^*}$.

Якщо виконуються нерівності

$$c_1^* > \max_{p \in P_1} (B(p)), c_2^* > \frac{1}{2 \left(c_1^* - \max_{p \in P_1} (B(p)) \right)},$$

$$\tau_1^* < \frac{1}{\max_{p \in P_1} (D(p, c_1^*))}, \tau_2^* < \frac{1}{\max_{p \in P_1} (E(p, c_1^*, \tau_1^*))}, \quad (9)$$

де

$$B(p) = \frac{\varepsilon^2(p) \Psi^2(p)}{2} + \varepsilon^2(p),$$

$$D(p, c_1) = \varepsilon(p) + 2\varepsilon^2(p) + 4\sqrt{\frac{\Psi(p)+1}{2}} +$$

$$+ \varepsilon^2(p)(1 + \Psi(p) + \Psi^2(p)) + \frac{2\varepsilon^2(p)}{c_1 - B(p)},$$

Список використаних джерел

1. Yee R. K. Spinup dynamics of a rotating system with limiting torque/ R.K. Yee. – Master's Thesis, UCLA, 1981.
2. Reza O.-S. Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles / O.-S. Reza. – Ph.D. thesis, Department of Electrical Engineering and Computer Science, MIT, USA, 2001.
3. Kinsey R. J. Spinup Through Resonance of Rotating Unbalanced Systems with Limited Torque / R. J. Kinsey, D. L. Mingori, R. H. Rand. – Proceedings of the AIAA/AAS Astrodynamics Conference, Portland, OR, USA. – 1990. – P. 805-813.
4. Swaroop D. Dynamic surface control for a class of nonlinear systems / D. Swaroop, J.K. Hedrick, P.P. Yip, J.C. Gerdes // IEEE Trans. of Automatic Control. – 2000. – vol. 45, №11. – P. 1893-1899.

$$E(p, c_1, \tau_1) = c_1 + \frac{8}{\tau_1^2} \sqrt{\frac{\Psi(p)+1}{2}} +$$

$$+ \frac{2\varepsilon^2(p)}{\tau_1^2} (1 + \Psi(p)) + \frac{\left(1 + c_1^2 + \frac{\varepsilon(p)}{\tau_1}\right)^2}{c_1 - B(p)} +,$$

$$+ \frac{c_1^2}{2 \left(c_2 - \frac{1}{2(c_1 - B(p))} \right)} + \frac{\left(\frac{1}{\tau_1^2} + \frac{\varepsilon(p)}{\tau_1} \right)^2}{2 \left(\frac{1}{\tau_1} - D(p, c_1) \right)}$$

то побудоване керування буде глобально асимптотично стабілізувати нульовий стан рівноваги системи диференціальних рівнянь (5) для всіх значень параметра p з області P_1 , $P_1 \subseteq P$, $p^* \in P_1$, тобто керування (5) робастно відносно області P_1 . Слід зазначити, що внаслідок неперервної залежності від p відповідних функцій і виконання нерівностей (9) для значення параметра p^* , така область завжди може бути встановлена. Таким чином, нерівності (9) можна використовувати для визначення області робастності керування (5) або, що те саме, керування (8).

References

1. YEE, R. (1981) *Spinup dynamics of a rotating system with limiting torque* (Master's Thesis)
2. REZA O.-S. (2001) *Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles* (Ph.D. thesis)
3. KINSEY, R. & MINGORI, D. & Rand, R. (1990) Spinup Through Resonance of Rotating Unbalanced Systems with Limited Torque. In *AIAA/AAS Astrodynamics Conference*. Portland, 20th to 22th August 1990. Washington: AIAA. pp. 805-813.
4. SWAROOP, D. & Hedrick, J. & YIP, P. & GERDES, J. (2000) Dynamic surface control for a class of nonlinear systems. *IEEE Trans. of Automatic Control*. 45 (11). p. 1893-1899.

Надійшла до редколегії 07.11.2017

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 004.415.52, 681.3

Fabunmi Sunmade, стажист

Fabunmi Sunmade, intern

Семантика деяких атомарних операторів у IPCL

Some Atomic Operators Semantics in IPCL

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, Україна, 01601, м.Київ,
вул. Володимирська, 64/13
e-mail: sunmadefabunmi@yahoo.com

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
64/13, Volodymyrska Street, Kyiv, Ukraine, 01601

e-mail: sunmadefabunmi@yahoo.com

Розглянуто розширену модель стану паралельної програми в мовах Interleaving Parallel Compositional Languages (IPCL). Середовище виконання IPCL – паралельне з почерговим переключенням зі спільною пам'яттю. Багатопотоковість та суперкомп'ютери є прикладами цієї моделі. Модифікація моделі IPCL з динамічним станом взята за основу в цій роботі. Тут вона розширена новими функціями. Задано семантику атомарних операцій test_and_set, swap та atomic у розширеній транзитивній моделі для IPCL. Семантична модель включає стани всіх паралельно виконуваних програм, глобальне дане та локальні дані кожної з них. Кількість екземплярів може змінюватись в ході виконання програми. Локальні та глобальні дані подаються номінативними структурами. Введення атомарних операцій є важливим розширенням мови, оскільки дозволяє моделювати роботу з критичними ресурсами та організовувати взаємне виключення та синхронізацію. Атомарні операції в цілому широко застосовуються у операційних системах. Таке розширення мов IPCL важливе для ширшого охоплення реальних програм і моделювання їх поведінки. Також розширюється область практичного застосування методу.

Ключові слова: коректність програм, паралельна програма, interleaving, IPCL, композиційно-номінативні мови, атомарні операції, транзитивна система, стан, модель.

The extended model of the state for parallel programs in Interleaving Parallel Compositional Languages (IPCL) is considered. The IPCL runtime environment is interleaving concurrency with shared memory interactions. Multithreading and supercomputers are the examples of this model. IPCL model modification with the dynamic state is the background for this paper. Here we extend it with new functions. The semantics of atomic operations “test_and_set”, “swap” and “atomic” is specified in the extended transition model for IPCL. The semantic model includes the states of all parallel executed programs, global data as well as local data of each of them. The number of instances may vary during the program execution. Local and global data has the nominative structure. The introduction of atomic operations is an important extension of the language, since it allows to simulate work with critical resources and to organize mutual exclusion and synchronization. Atomic operations in general are widely used in operating systems. Such an extension of IPCL languages is important for wider coverage of real applications and their behavior modeling. Also, we expand the area of the method's practical applications.

Key Words: software correctness, concurrent program, interleaving, IPCL, composition-nominative languages, atomic operations, transition system, state, model.

Статтю представив член-кореспондент НАН України, д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

Семантика мов IPCL [1-3] подається у вигляді транзитивних систем, де станами є сукупності:

- набір міток для кожної з паралельно виконуваних програм,
- глобальне дане, спільне для всіх паралельних програм,

- локальні дані кожної з них.

Модифікований стан з динамічною кількістю компонент для реалізації можливості породження нових екземплярів паралельних програм під час виконання, тобто *runtime*, наведено у [4,5].

Таке розширення спричинене тим, що у реальних програмах часто використовується породження – завершення паралельних підпрограм [4,5]. Приклад – *multithreading* модель програмування.

Отже, спираючись на розширену модель [4,5], уточнимо семантику атомарних операцій, зокрема – *test_and_set* та *swap*, які важливі для моделювання роботи з критичними ресурсами та організації взаємного виключення та синхронізації [6], наприклад, в операційних системах.

Стан будемо подавати у наступному вигляді [4,5]:

$$S = \left(\left(\begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ \vdots \\ m_{1n_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m_{21} \\ m_{22} \\ \vdots \\ m_{2n_2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} m_{k1} \\ m_{k2} \\ \vdots \\ m_{kn_k} \end{pmatrix} \right), \right. \\ \left. \left(d, \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ \vdots \\ d_{1n_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_{21} \\ d_{22} \\ \vdots \\ d_{2n_2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} d_{k1} \\ d_{k2} \\ \vdots \\ d_{kn_k} \end{pmatrix} \right) \right)$$

де

- k – кількість різних видів паралельних програм,
- $n_1, n_2, \dots, n_k$ – кількості паралельних програм кожного з видів,
- m_{ij} – мітка, в якій перебуває (паралельна) підпрограма номер j , яка є екземпляром деякої P_i – для моделі виконання $P_1^{n_1} || P_2^{n_2} || \dots || P_k^{n_k}$, тобто $m_{ij} \in M_i$ – множина міток P_i [1-5],
- d_{ij} – відповідне локальне дане цієї підпрограми – P_{ij} ,
- d – глобальне (спільне, загальнодоступне всім підпрограмам) дане,

кожне дане має номінативну структуру – набір пар «ім'я – значення».

Нагадаємо, що в цій моделі кожний крок виконання має вигляд: $(m_{ij}, d, d_{ij}) \rightarrow (m'_{ij}, d', d'_{ij})$, тобто програма P_{ij} , знаходячись у

мітці m_{ij} , після виконання чергової інструкції перейде у мітку m'_{ij} та перетворить (можливо, змінить) глобальне дане d на d' , а локальне d_{ij} – на d'_{ij} . Таким чином, в стані S за один крок може змінитись три компоненти.

Множину всіх станів можна задати для певної фіксованої кількості різновидів підпрограм k як

$$States = \bigcup_{n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}} \{s \in ((M_1^{n_1}, M_2^{n_2}, \dots, M_k^{n_k}), (d, d^{n_1}, d^{n_2}, \dots, d^{n_k}))\}$$

тобто – як об'єднання множин станів для всіх можливих кількостей екземплярів паралельних підпрограм $P_i, i \in \{1, \dots, k\}$, тобто всіх комбінацій натуральних степенів відповідних множин міток M_i та даних D .

Семантика атомарних операцій

В модифікованій транзиційній моделі з динамічним станом задамо семантику операції *test_and_set* [6] та *swap* [6]. Вони відіграють важливу роль для організації коректної взаємодії паралельних процесів і, в першу чергу, для синхронізації дій (обчислень).

Нагадаємо, $r := test_and_set(v)$ виконує дві дії одночасно (атомарно):

- $v := 1$
- повертає попереднє значення v як результат функції

(або ця функція є булевою і працює над доменом значень $\{true, false\}$).

Так, розмічена операція $[m_b] r := test_and_set(v) [m_a]$, виконана у підпрограмі P_{ij} , перетворює стан S у наступний ($i \in \{1, \dots, k\}, j \in \{1, \dots, n_i\}$):

$$S' = \left(\left(\begin{pmatrix} m'_{11} \\ m'_{12} \\ \vdots \\ m'_{1n_1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} m'_{i1} \\ m'_{i2} \\ \vdots \\ m'_{in_i} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} m'_{k1} \\ m'_{k2} \\ \vdots \\ m'_{kn_k} \end{pmatrix} \right), \right. \\ \left. \left(d', \begin{pmatrix} d'_{11} \\ d'_{12} \\ \vdots \\ d'_{1n_1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} d'_{i1} \\ d'_{i2} \\ \vdots \\ d'_{in_i} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} d'_{k1} \\ d'_{k2} \\ \vdots \\ d'_{kn_k} \end{pmatrix} \right) \right)$$

де

- $m'_{ij} = m_a$, якщо $m_{ij} = m_b$,
- $d'_{ij} = d_{ij} \nabla [r \mapsto v \Rightarrow (d_{ij}), v \mapsto 1]$ і $d' = d$, якщо r та v – імена в локальному даному d_{ij} або ж $d'_{ij} = d_{ij}$ і $d' = d \nabla [r \mapsto v \Rightarrow (d), v \mapsto 1]$, якщо r та v – імена в глобальному даному d ,
- $m'_{yz} = m_{yz}, d'_{yz} = d_{yz}$ для решти компонент стану,

де $v \Rightarrow (d)$ – стандартне розіменування змінної v над даним d (знаходження значення w змінної v у номінативному даному d , або пари ім'я-значення $v \mapsto w$ у вхідному даному d), тобто:

$$v \Rightarrow (d) = w \Leftrightarrow [v \mapsto w] \in d$$

В цій же моделі задамо семантику *swap*. Нагадаємо, $\text{swap}(a, b)$ міняє місцями значення змінних a і b у даному d .

Так, розмічена операція $[m_b] \text{swap}(a, b) [m_a]$, виконана у підпрограмі P_{ij} , перетворює стан S у наступний ($i \in \{1, \dots, k\}, j \in \{1, \dots, n_i\}$):

$$S' = \left(\left(\left(\begin{pmatrix} m'_{11} \\ m'_{12} \\ \vdots \\ m'_{1n_1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} m'_{i1} \\ m'_{i2} \\ \vdots \\ m'_{in_i} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} m'_{k1} \\ m'_{k2} \\ \vdots \\ m'_{kn_k} \end{pmatrix} \right), \right. \\ \left. \left(d', \begin{pmatrix} d'_{11} \\ d'_{12} \\ \vdots \\ d'_{1n_1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} d'_{i1} \\ d'_{i2} \\ \vdots \\ d'_{in_i} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} d'_{k1} \\ d'_{k2} \\ \vdots \\ d'_{kn_k} \end{pmatrix} \right) \right)$$

де

- $m'_{ij} = m_a$, якщо $m_{ij} = m_b$,
- $d'_{ij} = d_{ij} \nabla [a \mapsto b \Rightarrow (d_{ij}), b \mapsto a \Rightarrow (d_{ij})]$ і $d' = d$, якщо a та b – імена в локальному даному d_{ij} або ж $d'_{ij} = d_{ij}$ і $d' = d \nabla [a \mapsto b \Rightarrow (d), b \mapsto a \Rightarrow (d)]$, якщо a та b – імена в глобальному даному d ,
- $m'_{yz} = m_{yz}, d'_{yz} = d_{yz}$ для решти компонент стану,

Задамо тепер семантику довільного атомарного обчислення операторів. Нехай P – деяка програма, тоді $\text{atomic}(P)$ – позначення

атомарного (послідовного та нерозривного, тобто *sequential*, або ж *serialized*) виконання операторів програми P , без переключення (від старту і до завершення), тобто без передачі управління іншим паралельним програмам. Так, розмічена операція $[m_b] \text{atomic}(P) [m_a]$, виконана у підпрограмі P_{ij} , перетворює стан S у наступний ($i \in \{1, \dots, k\}, j \in \{1, \dots, n_i\}$):

$$S' = \left(\left(\left(\begin{pmatrix} m'_{11} \\ m'_{12} \\ \vdots \\ m'_{1n_1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} m'_{i1} \\ m'_{i2} \\ \vdots \\ m'_{in_i} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} m'_{k1} \\ m'_{k2} \\ \vdots \\ m'_{kn_k} \end{pmatrix} \right), \right. \\ \left. \left(d', \begin{pmatrix} d'_{11} \\ d'_{12} \\ \vdots \\ d'_{1n_1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} d'_{i1} \\ d'_{i2} \\ \vdots \\ d'_{in_i} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} d'_{k1} \\ d'_{k2} \\ \vdots \\ d'_{kn_k} \end{pmatrix} \right) \right)$$

де

- $m'_{ij} = m_a$, якщо $m_{ij} = m_b$,
- $d'_{ij} = d_{ij}$ і $d' = d \nabla \text{sem}(P)(d)$, тобто P виконується атомарно (нерозривно) над глобальним даним d , і результат обчислення накладається на початкове дане d ,
- $m'_{yz} = m_{yz}, d'_{yz} = d_{yz}$ для решти компонент стану,

при цьому не змінюється розмірність векторів в складі стану (стан не переходить до іншої компоненти з об'єднання *States*).

Висновки

В роботі подано семантику атомарних операцій *test_and_set*, *swap* та узагальненої – *atomic*, вказано як саме перетворюється стан у транзиційній моделі [1-5], зокрема – залежно від локальності чи глобальності імен у даному. Ці операції є важливими як для організації взаємодії паралельних процесів і підпрограм, так і для розширення мов *IPCL* в цілому.

Наведені результати також дозволять розширити застосування методу до інших практичних задач, наприклад [7].

Список використаних джерел

References

1. Панченко Т.В. Композиційні методи специфікації та верифікації програмних систем. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук.: 01.05.03 / Т.В. Панченко. - Київ, 2006. - 177 с.
2. Панченко Т.В. Метод доведення властивостей програм в композиційно-номінативних мовах IPCL / Т.В. Панченко // Проблеми програмування. – 2008. – №1. – С. 3–16.
3. Панченко Т.В. Методологія доведення властивостей програм в композиційних мовах IPCL / Т.В. Панченко // Доповіді Міжнародної конференції “Теоретичні та прикладні аспекти побудови програмних систем” (TAAPSD’2004). – К., 2004. – С. 62–67.
4. Іванов Є. Модель паралелізму в IPCL з породженням екземплярів / Є. Іванов, Т. Панченко, Fabunmi Sunmade // Праці Міжнар. конф. “Теоретичні та прикладні аспекти побудови програмних систем” (TAAPSD’2017). – Київ. – 2017. – С. 131–133.
5. Tanenbaum A.S. Modern operating systems, 3Ed. / A.S. Tanenbaum. – Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, 2008. – 1104 p.
6. Panchenko T.V. Application of the Method for Concurrent Programs Properties Proof to Real-World Industrial Software Systems / T.V. Panchenko // Proceedings of the 12th International Conference on ICT in Education, Research and Industrial Applications. Integration, Harmonization and Knowledge Transfer (ICTERI 2016), edited by Vadim Ermolayev et al. – Kyiv. – 2016. – pp. 119–128 (CEUR-WS. – Vol. 1614. – ISSN:1613-0073, available online: <http://ceur-ws.org/Vol-1614/>).
1. PANCHENKO, T. (2006) *Compositional Methods for Software Systems Specification and Verification* (PhD Thesis) [in Ukrainian]. Kyiv.
2. PANCHENKO, T. (2008) The Method for Program Properties Proof in Compositional Nominative Languages IPCL [in Ukrainian]. *Problems of Programming*. 1. pp. 3–16.
3. PANCHENKO, T. (2004) The Methodology for Program Properties Proof in Compositional Languages IPCL [in Ukrainian]. In *Proceedings of the International Conference "Theoretical and Applied Aspects of Program Systems Development"* (TAAPSD'2004). Kyiv. pp. 62–67.
4. IVANOV, IE., PANCHENKO, T. and FABUNMI, S. (2017) Parallelism Model with Instances Generation in IPCL [in Ukrainian]. In *Proceedings of the International Conference "Theoretical and Applied Aspects of Program Systems Development"* (TAAPSD'2017). Kyiv. pp. 131–133.
5. TANENBAUM, A.S. (2008) *Modern operating systems*, 3Ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall.
6. PANCHENKO, T. (2016) Application of the Method for Concurrent Programs Properties Proof to Real-World Industrial Software Systems. In *Proceedings of the 12th International Conference on ICT in Education, Research and Industrial Applications. Integration, Harmonization and Knowledge Transfer (ICTERI 2016)*, edited by Vadim Ermolayev et al., Kyiv, pp.119–128 (CEUR-WS. – Vol. 1614. – ISSN:1613-0073, available online: <http://ceur-ws.org/Vol-1614/>).

Надійшла до редколегії 30.10.2017

Волошин О.Ф., д.т.н., проф.
Супрун О.О., асистент
Ковальов Д.І., здобувач

Методи адаптивного оцінювання у тестувально-методичних системах електронного навчання

Київський національний університет імені Т.
Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: olvoloshyn@ukr.net,
oleh.o.suprun@gmail.com,
daniil.kovaliov@gmail.com

O.F. Voloshyn, Professor
O.O. Suprun, Assistant Professor
D.I. Kovaliov, Post-graduate

Adaptive assessment methods in e-learning testing and methodological systems

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: olvoloshyn@ukr.net,
oleh.o.suprun@gmail.com,
daniil.kovaliov@gmail.com

У статті розглядаються типи систем електронної освіти та алгоритми методів регулювання і адаптації рівня складності, що використовуються для семи типів питань: бінарні питання ("так-ні"); одна правильна відповідь з багатьох варіантів; декілька відповідей з багатьох варіантів; номер як відповідь; інтервал як відповідь; масив як відповідь; одне або кілька слів як відповідь. Ці алгоритми допомагають визначити правильність оцінок в реальному часі під час оцінювання знань в університетах чи школах. Описано програмне забезпечення, розроблене на основі згаданих алгоритмів, особливості процесу його створення, тестування, впровадження в навчальний процес та використання.

Ключові слова: електронне навчання, адаптивні моделі, нечітке оцінювання.

This article reviews types of e-learning systems and algorithms of adjustment and adaptation methods of complexity level used for seven types of questions: binary questions ("yes-no"); one correct answer out of many options; many answers out of many options; number as an answer; range as an answer; array as an answer; one or few words as an answer. These algorithms help to determine the correctness of estimates in real time during knowledge evaluation in universities or schools. Also, a detailed example of software developed with mentioned algorithms is described. It's using .NET as a developing framework and have a few different modules that have different purposes (demonstration, calculation, testing). It was created by a team of students and was implemented into educational process as an experiment.

Keywords: e-learning, fuzzy evaluation, the adaptive model

Статтю представив д.т.н. Кудін В.І.

Вступ

Освітні технології згідно з визначенням Асоціації Освітніх Комунікацій та Технологій – це “дослідження і етичні практики щодо сприяння навчальному процесу та підвищення його продуктивності шляхом створення, використання і управління відповідними технологічними процесами і ресурсами” [1].

Освітні технології відносяться як до фізичних компонентів, так і до освітніх теорій. Вони включають у себе декілька доменів, у тому числі теорію навчання, комп'ютерне навчання, навчання в режимі онлайн, а також мобільне-навчання (з використанням мобільних технологій).

Відповідно, існує декілька дискретних аспектів опису інтелектуального і технічного розвитку освітніх технологій:

- освітні технології в теорії і практиці освітніх підходів до навчання;
- освітні технології в якості технічних засобів і засобів масової інформації, які допомагають у передачі знань, а також їх розвитку і обміну;
- освітні технології для систем управління навчанням (LMS), такі як інструменти для студентів або системи управління навчальними програмами, а також інформаційні системи управління освітою (ICYO);

- освітні технології як тематика навчального предмету; такі курси можуть бути названі "Комп'ютерні дослідження" або "Інформаційні та комунікаційні технології (ІКТ)".

У цій статті розглянуто засоби електронного навчання, їх типи, напрямки та приклади застосування на практиці.

Засоби електронного навчання – це програмні інструменти або онлайн-сервіси, які дозволяють користувачам створювати курси, симуляції та інші освітні ресурси. Ці інструменти, як правило, підтримують традиційні, подібні до презентацій, курси, і також можуть включати записи екрану, мультимедіа файли, інтерактивну взаємодію зі слухачами, тестування, нелінійні або адаптивні підходи [2]. Далі розглянемо декілька типів таких систем.

Система управління навчанням (LMS) – це засіб електронного навчання, що є програмним забезпеченням, яке використовується для доставки, відстеження та управління тренінгами та освітою. Наприклад, LMS відстежує відвідуваність, час, витрачений на завдання, і успішність учнів. Педагоги можуть розміщувати оголошення, перевіряти завдання, спостерігати за діяльністю всього курсу, а також брати участь в обговореннях у класі. Студенти можуть представляти свої роботи, читати і відповідати на питання для обговорення, а також проходити тестування [3]. LMS варіюються від систем управління навчальними записами до програмного забезпечення для поширення курсів через Інтернет і пропонують можливості для спільної роботи в мережі. Створення та підтримка комплексного змісту навчання вимагає значних початкових і поточних інвестицій людської праці. Ефективний переклад на інші мови і культурні контексти вимагає ще більшого обсягу інвестицій з боку підготовленого персоналу [4].

Системи управління навчанням на базі Інтернету включають Canvas, Blackboard Inc. і Moodle. Ці типи LMS дозволяють викладачам запуснути систему навчання частково або повністю онлайн, асинхронно або синхронно. Blackboard може бути використано для K-12 освіти, вищої освіти, бізнесу і співпраці урядів. Moodle є безкоштовною для завантаження системою управління курсами з відкритим програмним кодом, який надає змішані можливості для навчання, а також є платформою для дистанцій-

ного навчання [5,6]. Eliademy, на відміну від попереднього рішення, є вільним хмарним програмним продуктом.

Автоматизоване оцінювання (електронна оцінка, складова деяких LMS) варіюється від автоматизованих тестів множинного вибору до більш складних систем. У деяких системах зворотний зв'язок може бути орієнтований на конкретні помилки студента або комп'ютер може видавати студенту ряд питань, пристосовуючись до того, що студент знає або не знає. Разом зі сформованою оцінкою студента викладач та студент отримують список питань, що мають бути вивчені заново. Згодом проводиться повторне оцінювання, що включає в себе унікальний набір питань згідно зі списком вивченого нещодавно матеріалу.

Електронні системи підтримки продуктивності (EPSS) – це "системи на основі комп'ютерів, що підвищують продуктивність праці, забезпечуючи на робочому місці доступ до інтегрованої інформації, рекомендацій і досвіду навчання". Також їх визначають як інтегроване електронне середовище, яке легко доступне кожному співробітнику і структуроване для забезпечення негайного, індивідуалізованого онлайн доступу до повного спектру інформації, програмного забезпечення, управління, порад та допомоги, даних, зображень, інструментів, і систем оцінки та моніторингу для забезпечення виконання роботи з мінімальною підтримкою і втручання з боку інших.

Особливості застосування засобів електронної освіти

Засоби електронної освіти використовуються у багатьох сферах діяльності людини. Прикладом є дошкільне навчання за допомогою мобільних пристроїв та ресурсів ЗМІ (що вже використовуються у всьому світі, але ще недостатньо оцінене спеціалістами).

Дуже хорошим прикладом є державна система K-12 для шкільного навчання, що поширена у США. Крім того, у ряді інших країн шкільне навчання передбачає, крім традиційного відвідування класів, підтримку можливості підключитись до уроку дистанційно з будь-якого місця, де є задовільне покриття Інтернет. Існує кілька держав, які використовують віртуальні

шкільні платформи для електронного навчання по всій країні, і їх кількість продовжує зростати.

Електронне навчання все частіше використовується школярами, які, можливо, не хочуть перебувати в традиційних школах через важку алергію або інші медичні проблеми, страх насильства в школах і шкільних знущань [8]. Інтернет-школи створили притулок для учнів, що бажають отримати якісну освіту, при цьому повністю уникнути цих проблем. Онлайн приватні школи часто не обмежуються місцем розташування, рівнем доходу відвідувачів або розмірами класів, на відміну від звичайних шкіл.

У вищій школі кількість реєстрацій на онлайн курси зросла на 29% і досягла майже однієї третини всіх студентів вищих навчальних закладів, що за оцінками складає 6,7 мільйона студентів.

Не зважаючи на те, що більша частина некомерційних вищих навчальних закладів в даний час уже пропонують онлайн-курси, тільки близько половини приватних, некомерційних університетів зробили це. Приватні установи можуть брати активнішу участь в онлайн-презентації, щоб знизити витрати. Правильно навчений персонал повинен також бути найнятий для роботи зі студентами в Інтернеті. Ці співробітники повинні розуміти зміст курсу, а також мати високу кваліфікацію у використанні комп'ютера та Інтернету. Інтернет освіта стрімко зростає і в провідних науково-дослідницьких університетах розробили навіть докторські програми, що можна закінчити онлайн.

Масові відкриті онлайн-курси (MOOCs) можуть мати обмеження, які не дозволяють їм повною мірою замінити вищу освіту. MIT, Stanford і Принстонський університети пропонують курси для глобальної аудиторії, але не для комерційних коледжів. Програми університетського рівня, такі як EDX, засновані у Массачусетському технологічному інституті і Гарвардському університеті, пропонують широкий спектр дисциплін на безоплатній основі, в той час як інші дозволяють студентам проглянути весь вміст курсів на безоплатній основі, але вимагають невелику плату за акредитацію. MOOC курси, попри очікування, не зробили істотного впливу на вищу освіту і припинили зростання після первинного розширення, але вони залишаються в тій чи іншій формі.

Курси також пропонують приватні організації, такі як Udacity, з безкоштовним навчанням за напрямком IT, і Khan Academy, з більш ніж 3,900 безкоштовними мікро-лекціями, що є доступними онлайн. Розподілені відкриті спільні курси (DOCC) бачать себе як елементи контртуру до MOOC, підкреслюючи децентралізацію навчання. Народний університет, що є некомерційним онлайн університетом з акредитацією Coursera, в свою чергу, пропонує безкоштовні онлайн-курси, які, за даними журналу Фортунa, пройшло більше мільйона людей у всьому світі.

Використання систем електронної освіти

У 2006 році командою студентів Київського національного університету імені Тараса Шевченка факультету кібернетики (з 2017 р. факультет комп'ютерних наук та кібернетики) було започатковано проект під назвою SMPR (системи та методи прийняття рішень). Його основною метою було надання методичних даних з предмету «Теорія прийняття рішень» студентам, проведення тестування по деяких модулях предмету та розв'язування задач.

На початку 2014 року було прийнято рішення "розширити" проект. У новому проекті передбачалось створення та проведення тестування з будь-якому предмету. Для створення модуля використовувались засоби розробки програмного забезпечення Visual Studio 2015. У якості бази для збереження даних було використано Microsoft SQL DB. Основною технологією було вибрано ASP.Net MVC 5 [7] з платформою генерації веб-сторінок Razor, та платформа Entity Framework для роботи з базою даних (це дозволило використати підхід «Спочатку Код», за яким всі таблиці та залежності в базі генеруються автоматично згідно до сутностей у коді).

Причиною такого вибору полягала у необхідності задоволення потреби у максимальній доступності програмного забезпечення та незалежності його від платформи. Зазначені вище технології мають такі властивості та дозволяють створити веб-сайт, що має простий та зрозумілий інтерфейс і складні алгоритми та обчислення на стороні сервера.

Команда у складі 6 студентів працювала за методологією командної розробки програмного забезпечення відомої як scrum [8] (частина методології agile). За цією методологією менедж-

ром команди з усіх задач, що необхідно виконати для створення всього проекту, вибираються ті, що потрібно виконати за короткий проміжок часу (наприклад, два тижні) для створення працюючого прототипу. Ці задачі розподіляються між членами команди відповідно до їх навичок. Цей процес повторюється, поки весь проект не буде готовий. Важливою частиною scrum є визначення продуктивності команди та складності завдань.

Для зберігання та розповсюдження коду між студентами-розробниками та для контролю процесу розробки використовувався веб-ресурс GitHub. Серед переваг цього ресурсу для даного типу робіт можна виділити наступні:

- Студенти-розробники мали змогу створювати запити на зміну коду, що розглядалися викладачем перед внесенням до основного сховища коду;
- Студенти-тестувальники мали змогу створювати запити на зміни у веб-додатку, що стосувалися неправильного функціонування програми;
- Всі запити доступні для перегляду та коментування всіма учасниками процесу розробки.

Веб-сайт дозволяє викладачам створювати серії питань різного типу, об'єднанні в тести. Оцінка за кожне питання буде розраховується алгоритмічно, про що згадувалися вище, після того як група студентів, визначена викладачем, завершить проходження тесту – це є сесія у термінах програми. Викладач може власноруч виставляти початкову оцінку по кожному питанню, або дочекатись результатів першої сесії, щоб почав працювати алгоритм вибору наступного питання відповідно до середньої оцінки студента та його відповіді на попереднє питання.

Цей проект розвивався та доповнювався декілька років силами студентів факультету кібернетики у форматі лабораторних робіт, та мав на меті перетворення на платформу для забезпечення всього навчального процесу через мережу Інтернет. У планах створення нового функціоналу на веб-сайті: спілкування з викладачами, домашні завдання, відео-лекції та проміжне оцінювання знань [9].

Протягом 2014-2017 навчальних років веб-сайт був введений у тестову експлуатацію за уч-

астю студентів 3 курсу факультету кібернетики. Тоді у тестуванні взяло участь близько 90 студентів. У результаті цього було значно скорочено час перевірки знань та, значною мірою, допомогло викладачам визначити обсяг знань кожного окремого студента за темами. Про результати використання системи у навчальному процесі КНУ імені Тараса Шевченка доповідалось на Міжнародній конференції [10, 11].

Алгоритми адаптації та корегування складності завдань

Складність завдання $p \in (0,1]$ будемо вважати низькою при $p \in (0,0.33]$ середньою при $p \in (0.33,0.66]$ і високою при $p > 0.66$. Максимальна оцінка, яку може отримати студент за проходження блоку завдань – 1, тобто 100%. Далі, за бажанням викладача, ця оцінка може бути автоматично перерахована в одну з систем оцінювання знань (болонська, п'ятибальна).

Якщо викладач виставив деяку початкову складність усіх завдань блоку $(p_i^0, i=1, m)$, то системі необхідно врахувати деякі евристики під час вибору наступного питання:

складність першого питання система вибирає відповідно до середнього рівня знань студента ($y_j \in [0,1]$);

якщо студент дає правильну відповідь, то складність питання зменшується, і навпаки;

динаміка значень рівня складності завдань залежить від кількості студентів, що проходять завдання та від середнього рівня знань кожного;

якщо студент з відносно високим рівнем підготовки дає вірну відповідь, складність питання зменшується на менше значення, ніж для студента з низьким рівнем знань;

значення мінімальної складності має бути більше нуля;

значення максимальної складності не більше одиниці;

при великій кількості студентів складність питання зійдеться до деякої постійної величини.

Після проведення тестування система перераховує складність питань і зберігає нові значення у базі. Якщо в оцінюванні знань брало участь n студентів і було m питань, то корекція складності буде розрахована за формулою:

$$p_i^j = p_i^{j-1} + f_i(p_i^0, m, d^{j-1}, Z),$$

$i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, де p_i^j – складність i -го завдання при проходженні контролю знань j -им студентом; f_i – функція, згідно якої відбувається коригування оцінки; d^{j-1} – сумарна оцінка $(j-1)$ -го студента; Z – деяка величина, що залежить від відхилення даної відповіді від правильної.

У залежності від типу питання ця формула зазнає деяких змін, але її сутність не зміниться. Загалом виділяють 8 типів питань.

Типи питань та специфіка роботи з ними

Питання з бінарними відповідями («так» чи «ні»). При цьому $Z = 0 \vee 1$ відповідно до того, чи дана правильна відповідь.

Питання, де правильна відповідь вибирається з декількох, а правильність кожного варіанту відповіді оцінюється балом. При цьому в такого питання є вектор балів $v = (v_1, v_2, \dots, v_k)$. Тоді $Z = (\max_{l=1, k} v_l^{j-1} - a_i^{j-1})$, де $\max_{l=1, k} v_l^{j-1}$ – максимальний бал за відповідь, a_i^{j-1} – бал, отриманий студентом.

Питання, де декілька правильних відповідей, вибираються із багатьох варіантів:

$$p_i^j = p_i^{j-1} + f_i^3(p_i^0, m, d^{j-1}, \sum_l v_l^{j-1}, h^n, h^n, k_3^{j-1}),$$

де $\sum_l v_l^{j-1}$ – сума балів за вибрані варіанти відповіді, h^n – кількість правильних відповідей, h^n – кількість неправильних відповідей.

Питання, де відповідь є числом. У цьому випадку до бази даних необхідно додати інформацію щодо правильної відповіді та відрізка, на якому може знаходитись відповідь студента. При цьому формула набуде виду:

$$p_i^j = p_i^{j-1} + f_i^4(p_i^0, m, d^{j-1}, \chi(z \in [z_b, z_e])),$$

$$|z - z^*|, k_4^{j-1}),$$

У даному випадку z^* – значення правильної відповіді, $[z_b, z_e]$ – інтервал, на якому має знаходитись відповідь студента.

Питання, де відповіддю є інтервал.

$$p_i^j = p_i^{j-1} + f_i^5(p_i^0, m, d^{j-1}, \chi(\min\{z^2, z_e\} \geq \max\{z^1, z_b\})),$$

$$|z - z^*|, (\min\{z^2, z_e\} - \max\{z^1, z_b\}), k_5^{j-1}),$$

Тут $[z^1, z^2]$ – це відрізок, вказаний студентом як відповідь.

Питання, відповіддю на які є нечіткі величини, що визначаються функцією належності, мають свій підхід, що зводить їх до питань четвертого типу (відповідь є числом).

Питання, відповіддю на які є слово або словосполучення. Через те, що відповідь може бути сформульована студентом правильно, але словами-синонімами до тих, що використовував викладач, виникає неузгодженість. Для обробки такого типу питань необхідно використовувати словники з синонімічними рядами та алгоритми пошуку спорідненості текстів.

Оскільки під час роботи зі студентами можливі випадки «саботування» системи, то для отримання кращих результатів мають реєструватись усі можливі зміни перед їх застосуванням та здійснюватись порівняння з попередніми записами. У випадку викидів (значної різниці між результатами попередніх проходжень тестового блоку та поточного проходження) викладач має провести експертний аналіз результатів та (або) відхилити всі зміни (застосувати попередні значення складності та оцінювання) або видалити викиди і підтвердити внесення змін.

Висновок. У статті розглянуто типи систем електронної освіти та технології застосування методів адаптаційної корекції складності завдань під час проведення оцінювання студентів з використанням тестувально-оцінюючих електронних систем (на прикладі системи SMPR та відповідного веб-сайту) [10, 11]. Розробники системи планують продовжити удосконалення наведених алгоритмів для системи та поширити експеримент на інші дисципліни, зокрема, на «Чисельні методи» та «Дослідження операцій» з охопленням більш широкого кола студентів для тестування.

Список використаних джерел

1. Robinson R. Facilitating Learning/ R. Robinson, M. Molenda, L. Rezabek// Association for Educational Communications and Tech., 2016.
2. Ganci J. Toolkit: eLearning Tools Year in Review. Реж. дост.: learningsolutionsmag.com.
3. Courts, B. Using Technology To Create A Dynamic Classroom Experience / B. Courts, J. Tucker, // Journal of College Teaching & Learning. – 2012. – Vol. 9(2). – P. 121-128.
4. Снитюк В.Е. Интеллектуальное управление оцениванием знаний / В.Е. Снитюк, К.М. Юрченко // Черкассы: Маклаут, 2013. – 224 с.
5. Voloshyn O.F. Educational system support to decision making theory / O.F. Voloshyn, D.I. Kovaliov // Computer Science And Information, Tech. Conference, Yerevan 2013. – P. 433-434 c.
6. Voloshyn O. SMPR Knowledge-monitoring system for support the training courses on decision-making theory / O. Voloshyn, D. Kovalyov // International journal “International Technologies & Knowledge”. – 2014. – Vol. 8, №3. – P. 264-270.
7. Freeman A. Pro ASP.NET 4.5 in C# [5th Edition] / A. Freeman, M. MacDonald, M. Szpuszta //Apress, 2013.
8. Kniberg H. Scrum and XP from the Trenches (Enterprise Software Development)”. Режим доступа: www.lulu.com/2007.
9. Ковальов Д.І. Сервіс Дистанційного навчання у форматі соціальної мережі / Д.І. Ковальов // Вісник КНУ, Серія фіз-мат науки, 2015.
10. Волошин О.Ф. Використання новітніх інформаційних технологій у навчальному процесі / О.Ф. Волошин, Д.І. Ковальов // Праці VIII Міжнародної школи-семінару “Теорія прийняття рішень”/ – Ужгород, 2016. – С. 68-69.
11. Волошин О.Ф. Використання новітніх навчальних технологій у Київському національному університеті ім. Т. Шевченка // Волошин О.Ф., Кудін В.І. // Класичний університет у контексті викликів епохи: матеріали українсько-польської міжн. наук. конф., м. Київ, 2016 р. / К.: КНУ ім. Т. Шевченка, 2016. -167 с.

References

1. ROBINSON, R., MOLEND, M., and REZABEK, L. (2016). Facilitating Learning. Association for Educational Communications and Tech.
2. GANCI, J. Toolkit: eLearning Tools Year in Review. learningsolutionsmag.com.
3. COURTS, B., TUCKER, J. (2012). Using Technology To Create A Dynamic Classroom Experience. Journal of College Teaching & Learning (TLC), 9(2), p. 121-128.
4. SNYTYUK, V., YURCHENKO, K. (2013). Intellectu-al'noe upravlenie ozenivaniem znaniy. Mclaut, Cherkasy.
5. VOLOSHYN, O.F., KOVALYOV, D.I. (2013). Educa-tional system support to decision making theory”. Computer Science and Information, Tech. Conference, Yerevan, 433-434 p.
6. VOLOSHYN, O., KOVALYOV, D. (2014). SMPR – Knowledge-monitoring system for support the training courses on decision-making theory //International journal “International Tech. & Knowledge”, vol. 8, №3, p. 264-270.
7. FREEMAN, A., MACDONALD, M., SZPUSZTA, M. (2013). Pro ASP.NET 4.5 in C# [5th Edition]. Apress.
8. KNIBERG, H. (2007). Scrum and XP from the Trenches (Enterprise Software Development). www.lulu.com
9. KOVALYOV, D.I. (2015) Servis distanziynogo nav-channya u formati sozial'noi meregi. Visnyk KNU, Seriya fiziko-matematichni nauki,
10. VOLOSHYN, O.F., KOVALYOV, D.I. (2016). Viko-ristannya novitnich technolohiy u navchal'nomy prozessi // Prazi VIII Mignarodnoi shkoli-seminaru “Teoriya priynyattya rishen'”, Uzgorod, p. 68-69.
11. VOLOSHYN, O. F., KUDIN, V.I. (2016). Usage of modern educational technologies in Kiev national university T. Schevchenko // Classic university in context of epoch challenges: articles of Ukraine-Poland international scientific conference, Kiev.

Стаття надійшла до редколегії 10.10. 2017

УДК 004.41

Деревянченко О. В., к.ф.-м. н., доц.,
Сакевич Р.Д., студент

Застосування системи ПАРКС-Java та Google Cloud Platform для хмарних обчислень

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,

e-mail: olexandrder@gmail.com

e-mail: xlionell@gmail.com

O.V. Derevianchenko, PhD, Associate Professor
R.D. Sakevych, student

The applying of PARCS-Java system and Google Cloud Platform for cloud computing

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,

e-mail: olexandrder@gmail.com

e-mail: xlionell@gmail.com

В статті запропоновано застосування системи для паралельних розподілених обчислень ПАРКС-Java (ПАРКС - Паралельні Асинхронні Рекурсивні Керуючі Системи) та хмарних обчислень. У якості технології для хмарних обчислень було використано Google Cloud Platform(GCP).

В роботі надано опис роботи системи ПАРКС-Java та можливості її налаштування для роботи з технологією Google Cloud Platform. Наведено результати тестування систем для вирішення задачі моделювання системи збірки програми. Розглянуто можливості цих систем при вирішенні практичних задач паралельного програмування.

Ключові слова: хмарні обчислення, паралельні розподілені обчислення, система ПАРКС, Java, Google Cloud Platform.

In the article provides the use of the system for parallel distributed computing PARCS-Java (PARCS - Parallel Asynchronous Recursive Control System) and cloud computing. As the technology for cloud computing was used Google Cloud Platform (GCP).

The paper provided a description of the systems PARCS-Java and its possible settings for the technology Google Cloud Platform.

The basic terms of the PARCS-technology are point, programming channel and algorithmic module. Pattern of control space is a graph. Top is a point of control space and edge is programming channels. The points are connected per programming channels. Each point of control space is assigned with the algorithmic module. The algorithmic module is a procedure PARCS and extension of the basic programming languages. Algorithmic modules are executed in parallel. In practice this means that in a computer network one major computer (Server) is selected. This computer is accessible to all others (Clients). It generates a queue of all tasks. Tasks from the queue are sent for computing. Each computer obtains a task from the queue and executes it. After finishing computing the active task it sends the results to the server and selects the new task. The model is designed for distributed network. Description of these systems is provided

The results of testing systems for solving the problem of build system are presented. Capabilities of these systems in solving practical problems of parallel programming were considered.

Keywords: cloud computing, parallel distributed computing, PARCS system, Java, Google Cloud Platform.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

В даній статті розглядається застосування технології для паралельних розподілених обчислень ПАРКС (Паралельні Асинхронні Рекурсивні Керуючі Системи) [1], а саме системи ПАРКС-JAVA [2-5] та хмарних обчислень. У якості технології для хмарних обчислень було

використано Google Cloud Platform (GCP) та Google Compute Engine (GCE) [7]. Ця робота присвячена розширенню можливостей використання технології ПАРКС для хмарних обчислень [5-6] на GCP, що є дуже актуальним для створення різноманітних застосунків та сучасних віртуальних сервісів.

Технологія ПАРКС

ПАРКС (паралельні асинхронні рекурсивні керовані системи) - технологія програмування, що являє собою деяку сукупність програмних засобів, які забезпечують процес розробки і реалізації алгоритмів паралельної обробки інформації. Вона базується на концепції *керуючого простору* (КП) [1] – динамічний граф, який використовується для опису логічної та комунікаційної структури досліджуваної задачі.

Основні терміни ПАРКС-технології:

- 1) точка;
- 2) програмний канал (ПК);
- 3) алгоритмічний модуль (АМ).

Структура КП – граф, вершини якого – точки КП, ребра – ПК. До кожної точки КП приписаний АМ, який є процедурою ПАРКС-розширення базової мови. В нашому випадку ми застосовуємо базову мову програмування C#.

Програмні засоби розширення базових алгоритмічних мов програмування[1]:

1. Програмні засоби, що забезпечують побудову і модифікацію КП.
2. Програмні засоби, що забезпечують зберігання та передачу інформації за допомогою КП.
3. Програмні засоби, що забезпечують роботу з АМ.
4. Програмні засоби, що забезпечують процедурно – об'єктно-орієнтоване програмування.

Система ПАРКС-Java

Архітектура системи складається з наступних частин [2-5]:

1. *Parcs* – основна бібліотека класів системи. Містить всі основні класи, що будуть використовуватись для моделювання паралельних обчислень.
2. *Daemon* – клієнт. Являє собою програму, за допомогою якої будуть проводитись обчислення.
3. *HostServer* – сервер. Має список доступних клієнтів, а також інформацію про поточні задачі та точки. При запуску модуль починає роздавати завдання клієнтам в залежності від кількості ядер процесорів (потужності) та їх завантаженості.
4. АМ – окремий проект, що використовує бібліотеку *Parcs*.

На всіх машинах, що призначені для обчислень, запускається програма *Daemon*, а

початковий АМ та *HostServer* можуть запускатися або на тих же, або на інших машинах. В окремому випадку навіть всі три елементи системи можуть бути запущені в одному місці.

У створеній реалізації клієнта та сервера зв'язок проходить у такій послідовності:

1. При запуску модуля сервер перевіряє всі зазначені у файлі *hosts.txt*.

2. Сервер розподіляє точки, що створюються в алгоритмічному модулі, по комп'ютерах, на яких виконується програма *Daemon*.

3. Після цього на комп'ютері, де буде створена нова точка, початковий АМ передає *jar*-файл, в якому міститься вся інформація для виконання поточної задачі. Таким чином запускаються необхідні обчислення.

4. Після завершення обчислень *Daemon* відсилає результат назад на початковий АМ. Після того, як завершилися обчислення на всіх машинах, початковий АМ оброблює всі результати, виводить загальний результат.

Google Cloud Platform (GCP)

Google Cloud Platform (GCP) - веб-сервіс [7], який надає хмарні обчислювальні потужності.

Простий веб-інтерфейс сервісу дозволяє отримати доступ до обчислювальних потужностей і налаштувати ресурси з мінімальними витратами. Він надає користувачам повний контроль над обчислювальними ресурсами, а також доступне середовище для роботи. Служба скорочує час, необхідний для отримання і завантаження нового сервера.

За допомогою GCP можливо створювати хмарні віртуальні машини, використовуючи всі потужності Google. Користувачу надається вибір операційної системи: Windows Server або різні версії Linux. Також можна вибрати характеристики віртуальної машини.

Серед інших особливостей GCP варто відзначити можливість створення образів віртуальних машин із застосуванням інфраструктури *Google Compute Engine (GCE)*, а також їх зберігання. Надається можливість встановлювати програми, бібліотеки, дані та налаштовувати пов'язані з ними параметри. За допомогою образів віртуальних машин можна створювати нові машини на основі існуючих (фактично копіювати віртуальні машини).

Також важливою особливістю є можливість налаштування безпеки та мережевого доступу. Це дозволяє відкрити доступ до віртуальної машини

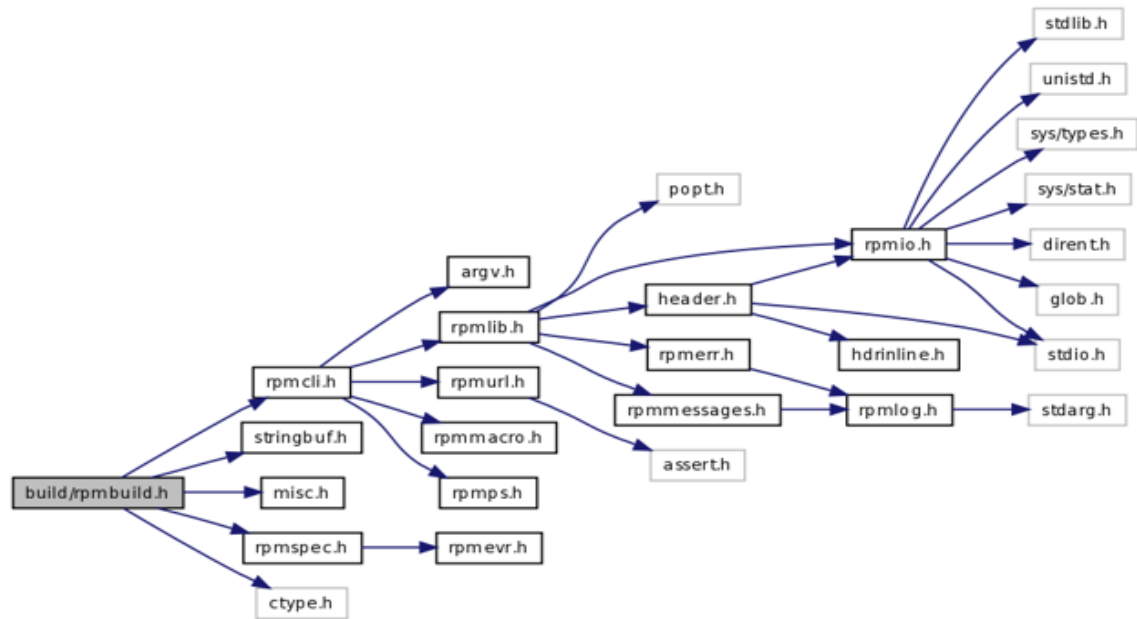


Рис. 1. Приклад графу збірки для пакетного менеджера RPM

для зовнішнього світу, а також дозволити комунікацію між віртуальними машинами.

Веб-інтерфейс GCP легко дозволяє запускати і зупиняти віртуальні машини, а також робити всі вищеписані дії.

Постановка тестової задачі

Як тестовий алгоритм пропонується імітація системи збірки. Сучасні системи збірки працюють оперуючи поняттям графа залежностей. На граф накладаються певні обмеження: орієнтованість та ациклічність. Завдяки цьому система визначає з чого починати процес збірки і коли його закінчити (Рис.1). В нашому випадку ми не будемо запускати компіляцію/компонування, але замість цього змодельуємо цей процес за допомогою затримки.

Тобто процес збірки задається графом в кожній вершині якого записано скільки часу потрібно для збірки(компіляції, компонентування, інше). Перед тим як ми можемо опрацювати вершину графу нам щоб всі вершини на які вона залежить були опрацьовані. Таким чином можна визначити алгоритм роботи нашої системи збірки:

```
algo Build(v):
    for d in v.deps do
        Build(d)
    Sleep(v.time) //process current node
```

Фрагмент коду, який реалізує даний алгоритм та використовує ПАРКС-Java виглядає наступним чином:

```
public class DFS implements AM {
    public void run(AMInfo info) {
        Node n = (Node)info.parent.readObject();

        List<point> points = new ArrayList<>();
        List<channel> chans = new ArrayList<>();
        for (Node d: n.getDeps()) {
            point p = info.createPoint();
            channel c = p.createChannel();
            p.execute("DFS");
            c.write(d);
            points.add(p);
            chans.add(c);
        }
        long sum = n.getTime();
        for (channel c: chans) {
            sum += c.readLong();
        }
        Thread.sleep(n.getTime());
        //process current node
        info.parent.write(sum);
    }
}
```

Розгортання ПАРКС-Java на Google Compute Engine

Розглянемо приклад використання системи ПАРКС-Java на Google Compute Engine. Тестовий алгоритм імітує роботу розподіленої системи збірки. Для того щоб запустити його на платформі необхідно мати акаунт GCE [7] та виконати наступні кроки:

1. Для зручності, встановити параметри GCE за замовчуванням.

```
$ gcloud config set project moggio-165703  
$ gcloud config set compute/zone us-central1-c
```

2. Створити кілька віртуальних машин(daemon-1 та daemon-2) на яких буде працювати *Daemon*, одну віртуальну машину(hosts-server) для роботи *HostsServer* та одну машину(app) з якої ми будемо запускати обрахунки.

```
$ gcloud compute instances create hosts-server daemon-1 daemon-2 app  
NAME      ZONE      MACHINE_TYPE  INTERNAL_IP  EXTERNAL_IP  hosts-server  us-central1-c  n1-  
standard-1 10.128.0.2 35.192.221.94  
daemon-1   us-central1-c n1-standard-1 10.128.0.5 35.188.57.169  
daemon-2   us-central1-c n1-standard-1 10.128.0.4 35.192.8.28  
app        us-central1-c n1-standard-1 10.128.0.3 35.192.150.94
```

3. Налаштувати віртуальні машини(daemon-1 та daemon-2) на яких ми будемо запускати *Daemon*.

```
$ gcloud compute ssh daemon-1  
$ sudo apt-get update  
$ sudo apt-get install -y openjdk-8-jdk  
$ wget https://github.com/lionell/labs/raw/master/parcs/Daemon/Daemon.jar  
$ java -jar Daemon.jar&
```

```
$ gcloud compute ssh daemon-2  
$ sudo apt-get update  
$ sudo apt-get install -y openjdk-8-jdk  
$ wget https://github.com/lionell/labs/raw/master/parcs/Daemon/Daemon.jar  
$ java -jar Daemon.jar&
```

4. Завантажити *HostsServer* на віртуальну машину hosts-server.

```
$ gcloud compute ssh hosts-server  
$ sudo apt-get update && sudo apt-get install -y openjdk-8-jdk  
$ wget https://github.com/lionell/labs/raw/master/parcs/HostsServer/TCPHostsServer.jar
```

5. Вказати *HostsServer* де в локальній мережі знаходяться *Daemon*-и. Після виконання кроку 2 ми бачимо що daemon-1 має внутрішню ip-адресу 10.128.0.5, тоді як daemon-2 має адресу 10.128.0.4.

```
$ touch hosts.list  
$ echo 10.128.0.4 >> hosts.list  
$ echo 10.128.0.5 >> hosts.list
```

6. Запустити *HostsServer* за допомогою команди java -jar TCPHostsServer.jar&

7. Завантажити тестовий алгоритм на віртуальну машину app.

```
$ gcloud compute ssh app  
$ sudo apt-get update && sudo apt-get install -y openjdk-8-jdk git make  
$ git clone https://github.com/lionell/labs.git  
$ mv labs/parcs/Bluck . && rm -rf labs && cd Bluck
```

8. Вказати де в мережі знаходиться *HostsServer*. Як ми вже з'ясували на кроці 2, віртуальна машина hosts-server має внутрішню адресу 10.128.0.2.

```
$ echo 10.128.0.2 > out/server  
$ make
```

9. Зачекати поки алгоритм закінчить свою роботу.

10. Зупинити запущені віртуальні машини daemon-1, daemon-2, hosts-server та app.

```
$ gcloud compute instances delete daemon-1 daemon-2 hosts-server app
```

Таблиця 1.

Тестовий приклад (час в секундах)

Глибина Машини	3	4	5	6	7	8
1	7.3	15.2	31.1	63.1	132.5	282.2
2	4.2	8.3	16.4	33.5	70.4	154.9
4	2.4	5.1	10.2	21.7	46.7	99.7
8	1.5	3.2	6.4	14.5	30.7	66.1

Результати тестування

Наведемо результати тестування систем для вирішення задачі моделювання системи збірки програми.

Тестування відбувалося на бінарних деревах різної висоти та для різної кількості віртуальних машин. Результати наведені в Таблиці 1, колонки відповідають за висоту дерева, тоді як рядки вказують на кількість віртуальних процесорів що використовувалися при обрахунку. В комірках таблиці записаний реальний час виконання (wall-time заміряний за допомогою утиліти time) в секундах.

Для тестування використовувалися віртуальні машини типу *n1-standard-1* що відповідають наступній конфігурації: 2.6GHz Intel Xeon E5 v3 (Haswell) with 3.75 Gb RAM.

Висновки

В даній роботі була запропонована нова можливість використання система для паралельних розподілених обчислень ПАРКС-Java для хмарних обчислень. Було показано, як налаштовувати систему ПАРКС-Java для хмарних обчислень із застосуванням сервісу Google Cloud Platform та проведено тестування системи на задачі імітації системи збірки. При виконанні обчислень на Google Compute Engine із застосуванням 8 віртуальних машин було досягнуто покращення в часі в 3.5 рази. При

збільшенні розмірності обчислень маємо збільшення ефективності застосування системи ПАРКС-Java, що на практиці дає досить непоганий результат.

Результати роботи можуть бути використані при створенні різноманітних хмарних обчислювальних сервісів. Поєднання даних технологій може застосовуватися для розв'язування широкого класу задач, що потребують паралельної розподіленої обробки. На цьому робота над вдосконаленням системи не завершується. Як варіант, пропонується безкоштовне використання хмарних обчислень у тестовому варіанті, можливо використати підключення до *Google Cloud Platform* для багатьох користувачів та застосування системи ПАРКС-Java для керування розподіленими паралельними обчисленнями при навчанні студентів.

Список використаних джерел

1. Анисимов А.В. Особенности ПАРУС-технологии /Анисимов А.В., Кулябко П.П. // Кибернетика и системный анализ. – 1993. – №3. – С.128-137.
2. Анисимов А.В. Система ПАРУС-JAVA для параллельных вычислений на компьютерных сетях / Анисимов А.В., Деревянченко А.В. // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – №1. – С.25-36
3. Деревянченко О.В. Моделювання паралельних програм за допомогою системи ПАРКС-JAVA // Наукові записки НаУКМА, Комп'ютерні науки. – 2005. – С.47-58.
4. Анисимов А.В. Паралельне програмування із застосуванням технології ПАРКС-JAVA / Анисимов А.В., Деревянченко О.В. // К.: ТОВ «Компанія ВАІТЕ». – 2013. – 78с.
5. Деревянченко О.В. Системи паралельних обчислень на комп'ютерній мережі на базі технології ПАРКС // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки. – 2014. – №2. – С. 124-127.
6. Деревянченко О.В. Застосування системи ПАРКС.NET та Amazon EC2 для хмарних обчислень / Деревянченко О.В., Хавро А.Ю. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки. – 2015. – №4. – С. 111-118.
7. Google Cloud Platform веб-сервіс // Ел. ресурс, режим доступу: <https://cloud.google.com>

References

1. ANISIMOV A.V., KULYABKO P.P. (1993) Features PARCS-technology, Cybernetics and Systems Analysis # 3, pp. 128-137.
2. ANISIMOV A.V., DEREVIANCHENKO A.V. (2005) The System PARCS-JAVA for Parallel Computations on Computer Networks, Cybernetics and Systems Analysis # 1, pp. 25-36.
3. DEREVIANCHENKO O.V. (2005) Simulation of parallel programs using the system PARCS-JAVA, Scientific notes Kyiv-Mohyla Academy, Computer Science, pp.47 -58.
4. ANISIMOV A.V., DEREVIANCHENKO O.V. (2013) Parallel programming applying the technology PARCS-JAVA, Company VAITE, 78p.
5. DEREVIANCHENKO O.V. (2014) Systems of parallel computing in computer network based on PARCS-technology, Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series Physics & Mathematics # 2, pp. 124-127.
6. DEREVIANCHENKO O.V., KHAVRO A.U. (2015) The applying of PARCS.NET system and Amazon EC2 for cloud computing, Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series Physics & Mathematics # 4, pp. 111-118.
7. Google Cloud Platform: <https://cloud.google.com>

Надійшла до редколегії 15.12.17

УДК 519.72

І.О. Завадський, к. ф.-м. н., доцент
В.О. Кабан, студент

Удосконалення обчислення зсуву вікна пошуку для пошукових алгоритмів MAWP

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д, e-mail: zava@ukr.net,
vitalkaban@yahoo.com

Igor O. Zavadskyi, Associate Professor, Ph. D.
Vitalii O. Kaban, student

Improvement of the search window shift calculation in MAWP search algorithms

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova av., 4d

Дана стаття присвячена проблемі пошуку рядка в тексті, яка полягає у знаходженні всіх вхідних даних заданого шаблону P у тексті T . Реалізовано оптимізацію алгоритму точного пошуку рядка MAW22P із сімейства MAW. Зроблено порівняння ефективності цього алгоритму з іншими із сімейства MAW. Також зроблено порівняння часу роботи наведеного алгоритму з найшвидшими алгоритмами в даній області. Розглянуті алгоритми є ефективними для довгих шуканих рядків (від 19 до 65 символів) і алфавітів великого розміру. Для деяких значень пар значень (довжина шуканого рядка, розмір алфавіту) запропоновані алгоритми є ефективнішими в середньому за всі відомі на сьогодні алгоритми точного пошуку підрядка. Алгоритм MAWP22M виявився найшвидшим на алфавіті довжини 32 та патернах довжини 19-65.

Ключові слова: пошук рядка в тексті, алгоритм Бойєра-Мура, швидкий пошук, багатовіконний.

Article addresses the online exact string matching problem which consists in finding all occurrences of a given pattern P in a text T . The comparison-based exact pattern matching algorithm MAW22P from MAW family was optimized. Namely, the dynamic choice of the shift calculation operator was introduced. For this purpose we use the assembler language to manipulate the values in command register BP. A comparison of effectiveness of all MAW family algorithms is provided. In addition, a comparison of the operating time of these algorithms with the fastest pattern matching algorithms is made. The algorithms of this family perform well for middle size and long patterns (from 19 to 65 characters) and alphabets of large size. For some values of the pairs (length of the desired string, size of the alphabet), the proposed algorithms are more effective on the average among all known algorithms for exact substring search today. Namely, MAWP22M performs best when alphabet size is 32 and pattern length is about 19-65.

Key words: pattern matching, Boyer-Moore, fast search, text search, multi-window.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

1 Вступ

Представлене в даній статті дослідження присвячено пошуку ефективних розв'язань однієї з фундаментальних задач кібернетики: знаходження всіх точних входжень заданого рядка у більшому тексті. Надалі використовуються такі позначення:

T – вхідний текст

P – шуканий рядок (патерн)

n – довжина вхідного тексту

m – довжина патерна

Σ – алфавіт вхідного тексту і патерна

$|\Sigma|$ – розмір алфавіту Σ

$|\Sigma_P|$ – кількість різних символів у патерні

Ефективність алгоритмів пошуку доцільно оцінювати для певної комбінації значень $(|\Sigma|, m)$.

У даній статті розглядається випадок, коли $m \leq 65$ та $4 \leq |\Sigma| \leq 36$. У цій області довгий час вважались найкращими дві модифікації алгоритму BM: алгоритм Boyer-Moore-Horspool (BMH) [1] та алгоритм "Quick Search" (QS) Сандея [2]. Згодом з'явилися більш ефективні методи. Згідно з [3], це: SA для $m < 8$ and $|\Sigma| \leq 8$, HASHq для $m > 4$ і $|\Sigma| \leq 8$, TVSBS для $m = 2$ та $4 < |\Sigma| \leq 32$, EBOM для $4 \leq m \leq 64$ та $4 < |\Sigma| \leq 32$, SBNDM для $8 \leq m \leq 16$ і $2 \leq |\Sigma| < 16$.

У [4] було представлено сімейство багатовіконних алгоритмів пошуку рядка у великому текстовому масиві MAW (Multiple Adjacent Windows), яке можна віднести до класу алгоритмів пошуку за суфіксом типу Бойєра-Мура. Основною ідеєю алгоритмів MAW є

використання багатовимірних масивів як таблиць зсуву. Індексом цих масивів є суфікси кількох послідовних вікон пошуку, а значеннями – величини зсуву. Через MAWqr позначатимемо алгоритм, на кожній ітерації якого обробляються суфікси довжини p у q послідовних вікнах пошуку.

У [4] детально було описано лише алгоритми MAW2 і MAW22, а також розглянуто алгоритм MAWP22. В алгоритмі MAWP22 вирішується проблема надмірного обсягу таблиці зсувів алгоритму MAW22 завдяки її поділу на 4 таблиці, остання з яких містить значення зсувів, а перші три таблиці – вказівники на ділянки пам'яті, які займає кожна наступна таблиця.

У розглядуваному тестовому середовищі (процесор Intel Core(TM) i7-3610QM, ОС Windows 8.1) алгоритм MAW22 виявився найшвидшим серед усіх відомих алгоритмів для $19 \leq m \leq 65$, $|\Sigma|=4$, а алгоритм MAWP22, як зазначається в [4], є найшвидшим для пошуку рядків довжиною 10–22 в англійському тексті. А отже, постало питання оптимізації зазначених алгоритмів, яке вирішується в цій статті.

2 Модифікований алгоритм MAWP

У статті [4] описано головну проблему пошукового алгоритму MAW22. Його пошукова матриця M22 для великих $|\Sigma|$ завелика і не вміщуватиметься в кеш-пам'ять, що робить препроцесинг надто довгим, а отже, впливає і на сумарний час роботи алгоритму.

Ці проблеми з кешем роблять алгоритми MAWqr непрактичними, якщо розмір алфавіту більший за 20–25. Але оскільки матриця M22 містить не більше $2m$ різних значень, можна запропонувати більш компактний вигляд цієї матриці, який майже не впливає на швидкість доступу до інформації. Для цього використовується 4 одновимірні масиви $V_0 \dots V_3$. Масив V_3 містить довжину зсуву, а для $i < 3$ масив V_i містить вказівники на елементи масиву V_{i+1} .

$$\begin{aligned} V_0[i] &= |\Sigma| \cdot \min(\{0 \leq t < m-1 \mid P[m-2-t] = i\} \cup \{m-1\}) \\ V_1[|\Sigma|i+j] &= |\Sigma| \cdot \min(\{0 \leq t < m-2 \mid P[m-2-t] = i \text{ AND } P[m-1-t] = j\} \cup \\ &\quad \{P[0] = j \Rightarrow m-1\} \cup \{m\}) \\ V_2[|\Sigma|i+j] &= |\Sigma| \cdot \min(\{i < m-1 \Rightarrow i\} \cup \{m \leq t < 2m-1 \mid P[2m-2-t] = j\} \cup \\ &\quad \{i = m-1 \text{ AND } P[m-1] = j \Rightarrow m-1\} \cup \{2m-1\}) \\ V_3[|\Sigma|i+j] &= \min(\{i < m \Rightarrow i\} \cup \{P[0] = j \Rightarrow 2m-1\} \cup \{2m\} \cup \\ &\quad \{m \leq t < 2m-1 \mid P[2m-2-t] = i \text{ AND } P[2m-1-t] = j\}) \end{aligned}$$

Рисунок 1. Формули для обчислення значень із масивів $V_0 \dots V_3$ в алгоритмі MAWP22

Формальний опис масивів $V_0 \dots V_3$ подано на рис. 1. Пошуковий алгоритм, що базується на використанні цих масивів, називається MAWP. Пошукові фази для MAWP2 та MAWP22 ті самі, що і для MAW2 та MAW22, за винятком обчислення зсуву r , який виконується за допомогою двох (MAWP2) або чотирьох (MAWP22) присвоєнь замість одного. Обчислення зсуву для MAWP22 зображено на рис. 2.

Зауважимо, що алгоритм MAWP22 можна оптимізувати, адже інколи для визначення довжини зсуву достатньо двох, а не чотирьох операцій. А саме, це трапляється, коли зсув за значеннями $T[pos]$ і $T[pos+1]$ менший за $m-1$, тобто коли вказівник $p2$ вказує на зсув, що є не більшим за $m-2$. У цій ситуації можна відразу обчислити зсув, не виконуючи двох останніх операцій із числа зображених на рис. 2.

Для реалізації вищевказаної модифікації на стадії препроцесингу було створено додаткові масиви, які визначають, чи достатньо видобути елементи лише з двох пошукових масивів. Це дозволило звести перевірки до мінімуму, оскільки власне в частині обробки тексту не проводяться ніякі перевірки, а просто використовується статична таблиця результатів. За допомогою команд мови Assembler відбувається перехід до однієї із адресних міток в коді. Перша з них вказує на обчислення $p3$ із V_2 , а потім — власне зсуву із V_3 , а друга — відразу на операцію застосування обчисленого зсуву. Ці зміни зображено на рис. 3.

Якщо $r=0$, то підрядок може розташовуватися в поточному вікні пошуку, тому перевіряємо, чи цей збіг має місце. Інакше зсуваємо пошукове вікно на r символів.

Для зменшення кількості базових операцій на кожній ітерації досягнення кінця тексту перевіряється лише якщо $r=0$. А щоб при цьому не пропустити кінець файлу, до нього дописується патерн. Крім того, усі фіксовані в основному пошуковому циклі величини визначаються на стадії передобчислень.


```
int *** V0[],** V1[],* V2[],V3[];
int *** p1,** p2,* p3;
```

Довжину зсуву r можна отримати за допомогою таких операцій:

```
p1 = V0[T[pos]];
p2 = p1[T[pos + 1]];
p3 = p2[T[pos + m]];
r = p3[T[pos + m + 1]];
```

Рисунок 2. Обчислення зсуву в алгоритмі MAWP22

```
int *** V0[],** V1[],* V2[],V3[];
int *** p1,** p2,* p3;
p1 = V0[T[pos]];
p2 = p1[T[pos + 1]];
k = p1 - V1 + y[pos + 1];
asm("jmp *%0": "r"(SW[k]):) //переходимо до мітки a за необхідності обчислення p3 та
    зсуву у V3[ ], інакше переходимо відразу до мітки b, оскільки зсув уже обчислено
a:
p3 = p2[T[pos + m]];
r = p3[T[pos + m + 1]];
b:
```

Рисунок 3. Обчислення зсуву в алгоритмі MAWP22M

3 Стадія передобчислень

На етапі препроцесингу заповнення масивів $V_0 \dots V_3$ – це найбільш затратна за часом операція. Заповнення даних масивів було реалізовано мовою C. Дана реалізація використовує модифіковані пошукові таблиці BMH та BR (алгоритм Бері-Равіндрана [5]). Звісно, розмір пошукової таблиці BR береться до уваги, що збільшує складність по пам'яті до $O(|\Sigma|m^2 + |\Sigma|^2)$. Але це менше розміру таблиці M2q, що робить алгоритм MAWP2q прийнятним для алфавітів розміру 32 і більше.

В модифікації алгоритму MAWP22 в передобчислення також винесено обрахування необхідності проводити 4 операції пошуку в масивах $V_0 \dots V_3$. Для цього створено матрицю SW, яка містить в собі 1 якщо потрібно проводити обчислення зсуву враховуючи V_2 та V_3 , 0 в іншому випадку. Для цього потрібно провести всього $m \cdot |\Sigma|$ перевірок того, чи вказує p_2 на зсув, що є не більшим за $m-2$, що незначно збільшує час виконання препроцесингу. Після обчислення даної матриці її можна використовувати у подальшій роботі алгоритму, адже патерн є незмінним і для довільної комбінації символів на позиціях x_0 та x_1 , уже обчислено зсув за цими двома елементами і визначено необхідність обчислення зсуву за елементами x_2 та x_3 . Це дає змогу не проводити

перевірки власне на стадії пошуку патерну в тексті, що значно скорочує час роботи алгоритму для текстів великого розміру.

4 Результати

Для порівняння швидкодії модифікованого алгоритму MAWP22 було взято ті самі алгоритми, які були використані для тестування MAW22 у статті [4]. Деякі з обраних алгоритмів вважаються найшвидшими для пар $(|\Sigma|, m)$, що розглядаються в даній статті. Більшість з них взято з ресурсу SMART tool [6].

Було використано компілятор Visual Studio 2017, Release конфігурацію для платформи Win64. Тестову програму було запущено на процесорі Intel Core(TM) i7-3610QM з 2.30GHz, кеш-пам'яттю 8 МБ, 8 ГБ оперативної пам'яті, ОС Windows 8.1.

Тестування проводилось на випадково згенерованих текстах довжиною 10 МБ. Патерни випадковим чином взяті з тексту. Всі алгоритми тестувалися на однакових текстах і патернах.

Для більшої точності результатів було заміряно час 100 запусків на кожному тексті зі 100 різними патернами. Час роботи алгоритмів враховує препроцесинг.

Результати тестування наведені в таблиці 1.

Як видно, MAWP22M виявився найкращим для $|\Sigma|=32$ та патернів довжини 19–65.

Таблиця 1. Час виконання пошукових алгоритмів на $|\Sigma|=32$, в секундах

m	17	19	21	23	25	30	35	40	45	55	65
MAWP22	1.587	1.436	1.317	1.212	1.115	0.949	0.829	0.758	0.699	0.615	0.569
MAWP22M	1.52	1.384	1.272	1.176	1.089	0.916	0.78	0.749	0.69	0.61	0.557
QLQS	1.714	1.646	1.629	1.56	1.528	1.414	1.421	1.442	1.408	1.355	1.298
HASH3	7.017	11.031	14.637	17.946	20.962	22.2	23.279	24.243	25.118	26.69	28.122
EBOM	1.411	2.313	3.171	4.026	4.808	5.164	5.496	5.835	6.124	6.812	7.44
TVSBS	4.5	7.149	9.574	11.837	13.913	14.78	15.538	16.223	16.859	18.033	19.192
SBNDMq2	1.884	3.041	4.118	5.176	6.129	6.549	6.945	7.352	7.757	8.554	9.335
SBNDMq4	3.07	4.822	6.402	7.895	9.188	9.715	10.148	10.598	11.063	12.007	12.951
GSBNDMq2	1.447	2.373	3.246	4.12	4.924	5.289	5.648	6.01	6.366	7.067	7.751
FSBNDM31	2.389	3.782	5.066	6.286	7.377	7.836	8.252	8.656	9.045	9.793	10.514
FSBNDM41	2.99	4.703	6.273	7.74	9.03	9.558	10.021	10.458	10.87	11.659	12.406
FSBNDM51	2.996	4.727	6.31	7.781	9.074	9.603	10.07	10.51	10.927	11.722	12.471
BSDM	2.106	3.371	4.53	5.649	6.661	7.091	7.494	7.882	8.261	8.999	9.741

Висновки

Як було показано, MAWP22M випереджає за часом усі існуючі алгоритми точного пошуку на алфавіті довжини 32 та патернах довжини 19-65.

При подальшому збільшенні довжини патерну суттєво збільшується час виконання препроцесингу алгоритму MAWP22M, через що

часові показники алгоритму MAWP22 та його модифікації стають близькими.

Отже, вибір кількості команд для обчислення зсуву в багатовіконних алгоритмах пошуку із вказівниками є доцільним, однак лише для патернів певної довжини.

Список використаних джерел

1. Horspool R. N. Practical fast searching in strings. / R. N. Horspool // Softw. Pract. Exp. – 1980. – V. 10 (6). – P. 501–506.
2. Sunday D. M. A very fast substring search algorithm. / D. M. Sunday // Commun. ACM. – 1990. – V. 33 (8). – P. 132–142.
3. Faro S. The Exact Online String Matching Problem: a Review of the Most Recent Results. / S. Faro, T. Lecroq // ACM Computing Surveys (CSUR) Surveys Homepage archive. – 2013. – V. 45 (2), February 2013, Article No. 13.
4. Zavadskyi I. O. A family of exact pattern matching algorithms with multiple adjacent search windows / I. O. Zavadskyi // Proceedings of the Prague Stringology Conference. – 2017, pp. 152–166.
5. Berry T. A fast string matching algorithm and experimental results. / T. Berry, S. Ravindran // In Proceedings of the Prague Stringology Club Workshop '99. – 1999. – P. 16–28.
6. Faro S. The string matching algorithms research tool. / S. Faro, Lecroq T., Borzi S., Mauro S. D., Maggio A // In Proceedings of the Prague Stringology Conference – 2016, pp. 99–111.

References

1. HORSPOOL R. N. (1980) *Practical fast search in strings*, Softw.Pract. Exp. 10, 6, 501–506.
2. SUNDAY D. M. (1990) *A very fast substring search algorithm*, Commun. ACM 33, 8, pp. 132–142.
3. FARO S., LECROQ T. *The Exact Online String Matching Problem: a Review of the Most Recent Results* (2013), ACM Computing Surveys (CSUR) Surveys Homepage archive. Volume 45 Issue 2, Article No. 13.
4. Zavadskyi I. O. (2017) *A family of exact pattern matching algorithms with multiple adjacent search windows*, Proceedings of the Prague Stringology Conference. pp. 152–166.
5. BERRY T., RAVINDRAN S. (1999) *A fast string matching algorithm and experimental results*, In Proceedings of the Prague Stringology Club Workshop '99, pp. 16–28.
6. FARO S., LECROQ T., BORZI S., MAURO S. D., MAGGIO A. (2016) *The string matching algorithms research tool*, In Proceedings of the Prague Stringology Conference, pp. 99–111.

Надійшла до редколегії 25 грудня 2017

УДК 519.72

І.О. Завадський, к. ф.-м. н., доцент
Н.В. Козоріз, студент

Оптимізація багатовимірних алгоритмів пошуку рядка в тексті

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д, e-mail: zava@ukr.net,
kozoriz.nataliia@gmail.com

Igor O. Zavadskyi, Associate Professor, Ph. D.
Nataliia V. Kozoriz, student

Optimization of multi-dimensional exact pattern matching algorithms

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova av., 4d

Реалізовано декілька алгоритмів точного пошуку рядка сімейства MAW, а саме MAW23, MAW24, MAW32, MAW33 та MAW42, а також оптимізовано MAW22. Зроблено порівняння ефективності усіх шести алгоритмів сімейства MAW. Також зроблено порівняння часу роботи наведених алгоритмів з найшвидшими алгоритмами в даній області. Розглянуті алгоритми є ефективними для коротких шуканих рядків (від 3 до 16 символів) і алфавітів малого розміру. Для деяких пар значень (довжина шуканого рядка, розмір алфавіту) запропоновані алгоритми є ефективнішими в середньому за всі відомі на сьогодні алгоритми точного пошуку підрядка. MAW23 найшвидший на алфавіті довжини 4 та патернах довжини 3-7.

Ключові слова: пошук рядка в тексті, алгоритм Бойєра-Мура, швидкий пошук, багатовіконний.

Some of comparison-based exact pattern matching algorithms with multiple adjacent search windows (MAW family), namely MAW23, MAW24, MAW32, MAW33 and MAW42, are implemented and MAW22 is optimized. A comparison of efficiency of all five MAW family algorithms is provided. In addition, a comparison of the operating time of these algorithms with the fastest known exact pattern matching algorithms is made. The algorithms of the MAW family perform well for short patterns (from 2 to 15 characters) and alphabets of small size (from 4 to 8 characters). We established 2 different testing environments where tested algorithms behave differently. However, for some values of the pairs (the length of the searched substring, the size of the alphabet), some of the proposed algorithms outperform in average all known algorithms for exact string matching in both environments. Namely, MAW23 performs best when alphabet size is 4 and pattern length is about 3-7.

Key words: pattern matching, Boyer-Moore, fast search, text search, multi-window.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

1 Вступ

У даній роботі досліджується одна з найважливіших задач кібернетики: пошук усіх точних входжень заданого рядка у великий текст. Надалі використовуються такі позначення:

T – вхідний текст

P – шуканий рядок (патерн)

n – довжина вхідного тексту

m – довжина патерна

Σ – алфавіт вхідного тексту і патерна

$|\Sigma|$ – розмір алфавіту Σ

$|\Sigma_P|$ – кількість різних символів у патерні

Як правило, ефективність алгоритмів пошуку оцінюють на площині $(|\Sigma|, m)$. Ми розглядаємо на ній область $m \leq 64$ та $4 \leq |\Sigma| \leq 8$. У цій області

довгий час вважались найкращими дві модифікації алгоритму BM: алгоритм Boyer-Moore-Horspool (BMH) [4] та Sunday's "Quick Search" (QS) [5]. Згодом з'явилися більш ефективні методи. Згідно з [6], це SA для $m < 8$ and $|\Sigma| \leq 8$, HASHq для $m > 4$ і $|\Sigma| \leq 8$, TVSBS для $m = 2$ та $4 < |\Sigma| \leq 32$, EBOM для $4 \leq m \leq 16$ та $4 < |\Sigma| \leq 32$, SBNDM для $8 \leq m \leq 16$ і $2 \leq |\Sigma| < 16$.

Сімейство багатовимірних алгоритмів пошуку рядка у великому текстовому масиві MAW (Multiple Adjacent Windows) було представлено в [1]. Його можна віднести до класу алгоритмів пошуку за суфіксом типу Бойєра-Мура. Основною ідеєю багатовіконних алгоритмів є використання як таблиць зсуву багатовимірних масивів, де індексами є суфікси

кількох послідовних вікон пошуку, а значеннями – величини зсуву. Через MAWqr позначатимемо алгоритм, на кожній ітерації якого обробляються суфікси довжини p у q послідовних вікнах пошуку.

У [1] детально було описано лише алгоритми MAW2 і MAW22. У розглядуваному тестовому середовищі (процесор Intel Celeron BYT-M Core2 2840, ОС Windows 10) алгоритм MAW22 виявився найшвидшим серед усіх відомих алгоритмів для $3 \leq m \leq 12$, $|\Sigma|=4$ та $3 \leq m \leq 72$, $|\Sigma|=8$. А отже, постало питання про дослідження ефективності алгоритмів MAW23, MAW32, MAW33 тощо, яке вирішується в цій статті.

Крім того, у запропоновані в [1] алгоритми можна внести удосконалення, що зменшують загальну кількість операцій до 3–5%.

2 Алгоритми MAW

Дані, що потрібні для роботи алгоритму MAWqr, зберігаються у $q \times p$ -вимірній таблиці Mqr і визначаються на стадії передобчислень. $Mqr[i_{11}] \dots [i_{1p}] \dots [i_{q1}] \dots [i_{qp}]$ – це найлівіша можлива позиція першого символу патерна в тексті за припущення, що $T[m-p]=i_{11}$, ..., $T[m-1]=i_{1p}$, ..., $T[qm-p]=i_{q1}$, ..., $T[qm-1]=i_{qp}$.

Псевдокод пошукового циклу алгоритму MAWqr подано на рис. 1. Ітератор pos вказує на

перший для порівняння символ у першому пошуковому вікні. Із $q \times p$ -вимірної таблиці Mqr визначаємо максимальний безпечний зсув пошукового вікна і присвоюємо його змінній r . Ця величина змінюється в межах від 0 до $q \times p$. Якщо $r=0$, то патерн може розташовуватися в поточному вікні пошуку, тому перевіряємо, чи цей збіг має місце. Інакше зсуваємо пошукове вікно на r символів.

Для зменшення кількості базових операцій на кожній ітерації досягнення кінця тексту перевіряється лише якщо $r=0$. А щоб не пропустити кінець файлу, до нього дописується патерн. Усі фіксовані в основному пошуковому циклі величини, такі як $m-p$ або qm , визначаються на стадії передобчислень.

Порівняно із описаним в [1] алгоритмом у версію з рис. 1 внесено вдосконалення в рядку 6: використовується умова завершення циклу $j < m-p$ замість $j < m-1$, адже p останніх символів вікна пошуку у разі виконання умови з рядка 5 напевно збігаються з суфіксом патерна. Крім того, для зсуву в рядку 12 доцільно використовувати запропонований у [5] «forward-масив», який дає в середньому довші зсуви, а не таблицю зсувів алгоритму BMH [4], як запропоновано в [1]. А отже, індексом цього масиву зсувів має бути $pos+1$, а не pos .

```

1.   pos ← m - p
2.   while true
3.       r ← Mqr[T[pos]] [T[pos+1]] ... [T[pos+p]] [T[pos+m]] [T[pos+1+m]] ...
           [T[pos+p+m]] ... [T[pos+m*q]] [T[pos+1+m*q]] ... [T[pos+p+m*q]];
4.       if r=0
5.           j ← 0;
6.           while j < m-p AND T[pos-(m-p)+j]=P[j]
7.               j ← j+1;
8.           if k=m-p
9.               output pos-(m-p);
10.          if pos ≥ n
11.              break;
12.          pos ← pos+D[T[pos+1]];
13.       else
14.          pos ← pos+r;
```

Рисунок 1. Основний цикл пошуку алгоритму MAWqr

```

1.   Усім елементам Mqr присвоїти значення  $q \times m$ 
2.   for t ← 1 to p-1
3.       Замінити всі елементи Mqr[i11] ... [iqp-t] [P[0]] ... [P[t]], де i1, ..., iqp-t –
           будь-які символи, значенням  $q \times m - t$ 
4.   for t ← q downto 1
5.       for k ← 0 to m-p+1
6.           Замінити всі елементи Mqr[i11] ... [itp-(p-1)] ... [itp] ... [iqp], де
               підрядок itp-(p-1) ... itp належить патерну, починаючи з індексу
               k, значенням  $t \times m - p - k$ 
7.   if t > 1
```

```

8.         for k ← 1 to p-1
9.             Замінити всі елементи  $M_{qp}[i_1] \dots [P[0]] \dots [P[k-1]]$ 
                $[P[m-(p-k)]] \dots [P[m-1]] [i_{tp}] \dots [i_{qp}]$  значенням
                $(t-1) * m - k$ 

```

Рисунок 2. Побудова пошукової таблиці MAWqp

3 Стадія передобчислень

На етапі препроцесингу заповнення таблиці M_{qp} – це найбільш затратна по часу операція.

Спочатку вся матриця заповнюється значенням максимального зсуву, тобто $q * m$. Далі просуваємо патерн від позиції, де перший символ патерну збігається з останнім символом останнього пошукового вікна, до позиції, коли патерн починається з першого символу першого вікна. І на кожному такому кроці в матрицю M_{qp} записуємо позицію першого символу патерну відносно першого пошукового вікна. Коли патерн повністю буде належати першому пошуковому вікну і p останніх символів вікна пошуку та патерна збігаються, у матрицю M_{qp} будуть записані нулі, тобто за таких символів тексту перше пошукове вікно може містити патерн.

Для реалізації цього алгоритму було використано спеціальну функцію копіювання блоків пам'яті memscr з бібліотеки C memory.h. Матриця M_{qp} доволі велика і за деяких q, p та $|\Sigma|$ вона не буде вміщуватися в кеш-пам'ять, що зробить препроцесинг надто довгим.

4 Результати

Для тестування шести алгоритмів MAW було взято ті ж алгоритми, які були використані для тестування MAW22 у статті [1], але з описаними в розділі 2 модифікаціями. Обрані алгоритми вважаються найшвидшими для пар $(|\Sigma|, m)$, що розглядаються в даній статті. Більшість з них взято з ресурсу SMART tool [7].

Було використано компілятор Visual Studio 2013, Release конфігурацію для платформи Win32 для генерації .exe файлу тестування, який був запущений на процесорі Intel Pentium CPU B950 з 2.10GHz, кеш-пам'яттю 2 MB L3, 4 GB оперативної пам'яті, Windows 7.

Тестування проводилось на випадково згенерованих текстах (5 MB) та файлі геному E.Coli (4.4 MB). Патерни випадково взяті з тексту. Всі алгоритми тестуються на однакових текстах і патернах. Для більшої точності результатів було заміряно час 100 запусків на кожному тексті з 100 різними патернами. Час роботи алгоритмів враховує препроцесинг.

Таблиця 1. Час виконання пошукових алгоритмів на $|\Sigma|=4$, в секундах

m	2	3	4	5	6	8	10	20	30	40	50	60	70	80
MAW22	3.49	2.27	1.73	1.49	1.37	1.13	0.94	0.76	0.77	0.75	0.52	0.66	0.65	0.61
MAW23		1.87	1.33	1.10	0.90	0.71	0.58	0.35	0.28	0.25	0.22	0.21	0.22	0.21
MAW24			1.63	1.31	1.10	0.83	0.68	0.38	0.34	0.24	0.21	0.19	0.19	0.17
MAW32	3.26	2.02	1.60	1.41	1.28	1.12	0.94	0.90	0.86	0.83	0.60	0.75	0.73	0.69
MAW33		2.24	1.67	1.39	1.22	0.99	0.84	0.63	0.50	0.46	0.41	0.41	0.46	0.44
MAW42	3.36	5.65	7.49	9.11	10.61	13.35	15.67	16.75	17.90	19.02	19.81	20.82	21.82	22.77
QLQS	6.24	4.90	4.55	4.01	4.14	3.90	3.43	3.93	3.90	3.77	3.49	4.10	2.86	2.27
HASH3		11.01	5.11	3.48	2.63	1.84	1.45	0.77	0.69	0.66	0.61	0.55	0.46	0.48
EBOW	2.44	2.11	1.82	1.71	1.68	1.78	1.47	0.97	0.72	0.56	0.45	0.42	0.38	0.34
TVSBS	6.03	4.60	4.08	3.45	3.13	2.74	2.26	1.77	1.76	1.45	1.04	1.49	1.15	1.11
FSBNM	5.23	3.52	2.91	2.33	2.12	1.66	1.32	0.68	0.47	0.46	0.43	0.38	0.35	0.33
SA	3.22	1.98	1.64	1.58	1.54	1.53	1.53	1.53	1.59	1.53	1.53	1.54	1.53	1.53
SBNDMq2	3.80	2.65	2.15	1.93	1.80	1.74	1.40	0.74	0.48	0.46	0.42	0.37	0.34	0.34
SBNDMq4			3.76	1.91	1.31	0.82	0.61	0.30	0.22	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21
GSBNMq2			2.07	1.94	1.84	1.90	1.55	0.81	0.52	0.46	0.43	0.37	0.35	0.33
FSBNM31	3.54	2.14	1.48	1.20	1.00	0.83	0.71	0.51	0.40	0.43	0.40	0.35	0.33	0.35
FSBNM41		3.03	1.61	1.11	0.92	0.60	0.50	0.27	0.20	0.28	0.36	0.33	0.30	0.30
FSBNM51			1.63	1.11	0.85	0.60	0.47	0.27	0.20	0.29	0.38	0.35	0.32	0.31
BSDM			2.31	1.28	0.92	0.62	0.50	0.31	0.28	0.25	0.26	0.27	0.23	0.23

Результати тестування наведені в таблиці 1.

Як видно, MAW23 виявився найкращим на $|\Sigma|=4$ та патернах довжини 3-5, а MAW24 – на $|\Sigma|=4$ та патернах довжини 50 і більше. На геномі результати такі ж, тобто ті ж алгоритми найшвидші на певних довжинах патернів.

На алфавіті довжини 6 в описаному тестовому середовищі сімейство MAW уже не випереджає інші алгоритми, що не відповідає результатам [1], наведеним для іншого середовища. Також, результати не схожі на ті, що наведені в [6]. Тому можна зробити висновок, що в різних середовищах (платформа, процесор тощо) пошукові алгоритми працюють неоднаково.

Однак для $|\Sigma|=6$ алгоритм MAW23 працює швидше за MAW22 для патернів довжини 11 і більше, що дає змогу припускати, що в інших

тестових середовищах цей алгоритм виявиться найкращим.

На алфавітах довжини 8 MAW22 випереджає всі інші алгоритми сімейства MAW.

Також інші алгоритми MAW недоцільно розглядати, аже вони дуже затратні по пам'яті, а відповідно і по часу.

Висновки

Як було показано, MAW23 випереджає за часом усі існуючі алгоритми точного пошуку на алфавіті довжини 4 та патернах довжини 3–5, а MAW24 – для $|\Sigma|=4$ та патернів довжини 50 і більше.

MAW23 випереджає MAW22 на алфавіті довжини 6 та патернах довжини більше 11, тому в інших середовищах він може виявитись найшвидшим.

Список використаних джерел

1. Zavadskyi I. O. A family of exact pattern matching algorithms with multiple adjacent search windows / I. O. Zavadskyi // Proceedings of the Prague Stringology Conference. – 2017, pp. 152–166.
2. Knuth D. E. Fast pattern matching in strings / D. E. Knuth, J. G. Morris, V. R. Pratt // SIAM J. Comput. – 1977. – V. 6 (1) – P. 323–350.
3. Boyer R. S. A fast string searching algorithm. / R. S. Boyer, J. S. Moore // Commun. ACM. – 1977. – V. 20 (10) – P. 762–772.
4. Horspool R. N. Practical fast searching in strings. / R. N. Horspool // Softw. Pract. Exp. – 1980. – V. 10 (6). – P. 501–506.
5. Sunday D. M. A very fast substring search algorithm. / D. M. Sunday // Commun. ACM. – 1990. – V. 33 (8). – P. 132–142.
6. Faro S. The Exact Online String Matching Problem: a Review of the Most Recent Results. / S. Faro, T. Lecroq // ACM Computing Surveys (CSUR) Surveys Homepage archive. – 2013. – V. 45 (2), February 2013, Article No. 13.
7. S. Faro, T. Lecroq, S. Borzi, S. D. Mauro, and A. Maggio: The string matching algorithms research tool, in Proceedings of the Prague Stringology Conference, J. Holub and J. Zdarek, Eds. Czech Technical University in Prague, Czech Republic, 2016, pp. 99–111.
8. Н.В. Козоріз. Реалізація алгоритмів сімейства MAW мовою C. <https://github.com/nkfox/MAWqp>.

References

1. Zavadskyi I. O. A family of exact pattern matching algorithms with multiple adjacent search windows / I. O. Zavadskyi // Proceedings of the Prague Stringology Conference. – 2017, pp. 152–166.
2. KNUTH D. E., MORRIS J. H., and PRATT V. R. (1977) *Fast pattern matching in strings*, SIAM J. Comput. 6 (1), pp. 323–350.
3. BOYER R. S. and MOORE J. S. (1977) *A fast string searching algorithm*, Commun. ACM 20, 10, pp. 762–772.
4. HORSPOOL R. N. (1980) *Practical fast search in strings*, Softw. Pract. Exp. 10, 6, 501–506.
5. SUNDAY D. M. (1990) *A very fast substring search algorithm*, Commun. ACM 33, 8, pp. 132–142.
6. FARO S., LECROQ T. *The Exact Online String Matching Problem: a Review of the Most Recent Results* (2013), ACM Computing Surveys (CSUR) Surveys Homepage archive. Volume 45 Issue 2, Article No. 13.
7. S. Faro, T. Lecroq, S. Borzi, S. D. Mauro, and A. Maggio: The string matching algorithms research tool, in Proceedings of the Prague Stringology Conference, J. Holub and J. Zdarek, Eds. Czech Technical University in Prague, Czech Republic, 2016, pp. 99–111.
8. N.V. Kozoriz MAW algorithms in C language. <https://github.com/nkfox/MAWqp>.

Надійшла до редколегії 01.12.2017

УДК 517

С.М. Іванов, аспірант

S.M. Ivanov, postgraduate student

Виявлення екстремальних властивостей локально дифеоморфних систем

Detecting extremal properties of localized diffeomorphic systems

Інститут космічних досліджень НАНУ та ДКАУ,
03680, м. Київ, проспект Академіка Глушкова,
40, корп. 4/1,
e-mail: formula87@icloud.com

Space Research Institute of NASU-SSAU, 03680,
Kyiv, Akademika Glushkova str., 40, build. 4/1,
e-mail: formula87@icloud.com

Стаття присвячена проблемі виявлення локальних екстремальних властивостей дифеоморфних систем. Представлена ентропія розподілу норм дотичних векторів для систем звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР). Спектр характеристичних показників Ляпунова виводиться з екстремального функціоналу. Доведено необхідну та достатню умову рівності цих функцій розподілу для локально дифеоморфних систем.

Ключові слова: звичайні диференціальні рівняння, експоненти Ляпунова, дифеоморфізм, ентропія, локально дифеоморфні системи

The article deals with the problem of detecting extremal properties of localized diffeomorphic systems. Detecting properties of localized diffeomorphic systems is the important problem for structural stability and the theory of shadowing. The entropy of the distribution of the norms of tangent vectors for systems of ordinary differential equations (ODEs) with dimension more or equal then two is presented. The extremal functional of the entropy is described. The presented functional is the analog of second law of thermodynamics. The spectrum of Lyapunov characteristic exponents is derived from the extremal functional. The exponential divergence or convergence of nearby trajectories (Lyapunov exponents) is the most basic indicator of the system stability and deterministic chaos. The distribution of the norms of the tangent vectors is proved. The topological equivalence of diffeomorphic systems is discussed. A diffeomorphism of smooth manifolds (a differentiable one-to-one mapping, the inverse of which is also differentiable) is considered. The necessary and sufficient condition of equality of the distribution of the norms of tangent vectors for the localized diffeomorphic systems is proved. These results are useful for the reconstruction of dynamical systems from a time series.

Key Words: ordinary differential equations, Lyapunov exponents, diffeomorphism, entropy, localized diffeomorphic systems

Статтю представив д.т.н., проф. Волошин О.Ф.

Вступ. При використанні реконструйованих систем звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) однією з актуальних є проблема відповідності її поведінки дійсності [1-3]. Оскільки найменші зміни векторного поля, що задає диференціальні рівняння, можуть вплинути на зміну властивостей цієї системи [4-5]. Така проблема також стосується реконструкції системи диференціальних рівнянь за наявними експериментальним рядами. Можливі негативні явища при поширенні таких результатів на реальний процес є небажаними, особливо в задачах прогнозування, управління [6] і т.д. Ця проблема вперше була описана в [5] та отримала назву грубості або структурної стійкості систем. Таким чином, виявлення тих властивостей

динамічної системи, які мало чутливі до невеликої зміни векторного поля, є необхідним, щоб вони сприймалися як властивості реального процесу. Оскільки при побудові системи часто проводиться деяка ідеалізація і параметри визначаються лише наближено [1-2]. А сучасні обчислювальні методи не позбавлені похибок і заокруглень, що відображається на результаті й отриманні не точної траєкторії, а деякого її наближення. Слід також зазначити, що існують такі системи, з розмірністю фазового простору більше двох, в околі яких немає жодної структурно стійкої системи за Смейлом [1-2]. Особливе місце в теорії структурної стійкості, теорії відстеження [7], а також реконструкції d - вимірних відображень, які є вкладеннями,

описаними в теоремах в [8], займає поняття дифеоморфних систем. Однак питання виявлення локально дифеоморфних систем вимагає подальшого розгляду. Оскільки необхідність реконструкції диференціальних рівнянь за наявним експериментальним часовим рядом, наприклад, за допомогою теорем в [8], вимагає знаходження властивостей локально дифеоморфних систем. Тому дана задача є актуальною і затребуваною при виявленні локально дифеоморфних систем ЗДР, які описують процеси різної природи.

Постановка задачі. Нехай M - компактний гладкий многовид з фрактальною розмірністю m . Для пари (φ, y) , де $\varphi: M \rightarrow M$ - гладкий дифеоморфізм і $y = M \rightarrow \mathbb{R}$ - гладка функція, існує відображення $F_{(\varphi, y)}: M \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ [8].

Розглянемо деяку автономну динамічну систему ЗДР, яка є реконструкцією для F та $t \in \mathbb{R}$:

$$\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

де f - визначена в області $G \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, f і $\partial f / \partial x$ - неперервні в G [1]. А також припустимо, що система має нульовий розв'язок $x(t) \equiv 0$. Накладені обмеження гарантують існування і єдиність розв'язку $x(t)$ задачі Коші при будь-яких початкових умовах. Нехай f є поліноміальна вектор-функція гладкості C^2 . Ставиться задача опису ентропії розподілу норм дотичних векторів для лінеаризованої поліноміальної системи ЗДР і складання екстремального функціоналу для виведення функції розподілу цих норм дотичних векторів, щоб виявити необхідну і достатню умову локально дифеоморфних систем ЗДР.

Екстремальний функціонал лінеаризації. Пропонується скористатися поняттям граничної ентропії, введеному в [9] переважно для лінеаризованої поліноміальної системи ЗДР, щоб вивести функцію розподілу норм дотичних векторів. А також розглянути знайдені взаємозв'язки цієї ентропії в локально дифеоморфних системах ЗДР для їх виявлення. В [9] наводиться, що для деякої нелінійної автономної системи ЗДР, норми дотичних векторів мають розподіл, який відповідає деякому принципу максимуму ентропії (аналог другого закону термодинаміки) при певних обмеженнях, а також показано взаємозв'язок з експонентами Ляпунова і їх декомпозиція.

Розглянемо наступні траєкторії в d - вимірному фазовому просторі, почавши з двох

сусідніх початкових умов x_0 та $\tilde{x}_0 = x_0 + \delta x_0$, які еволюціонують у часі за наступними векторами $x(t)$ та $\tilde{x}(t) = x(t) + \delta x(t)$ з Евклідовою нормою $\|r(x_0, t)\| = \|\delta x(x_0, t)\| = (\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \dots + \delta x_d^2)^{1/2}$.

Якщо f - поліноміальна вектор-функція гладкості C^2 , то (1) можна розкласти в ряд Маклорена в деякому околі початку координат та записати в матричному вигляді:

$$\dot{X} = JX + V(X), \quad (2)$$

де $J = \partial f / \partial x|_{x=x_0}$ - матриця Якобі для f , а складові $V(X)$ - описують члени від другого і більш високого порядку малості. Еволюція дотичного вектора r в просторі дотичних на $x(t)$ представляється лінеаризацією рівняння (1):

$$\dot{r} = Jr. \quad (3)$$

Крім того, є d ортонормальних векторів e_i на r , $i = \overline{1, d}$. Тобто є d норм дотичних векторів $\|r_i(t)\|$, $i = \overline{1, d}$.

Означення 1. Ентропією називається величина $E_p = -\sum_i p_i(*, t) \ln p_i(*, t)$, $i = \overline{1, d}$, де $*$ - це позначення норми дотичних векторів в початковий момент часу $\|r_i(0)\|$, $i = \overline{1, d}$. А $p_i(*, t)$, $i = \overline{1, d}$ - ймовірнісний розподіл цієї норми для будь-якого часу t , який також будемо позначати як p_i .

Лема 1. Якщо J є ненульовою матрицею Якобі та $d \geq 2$, то $\|r_i(t)\|$, $i = \overline{1, d}$ має розподіл, який максимізує наступний функціонал:

$$\Phi_p = E_p + \beta R_p + \mu Con_p + \gamma Nor_p \rightarrow \max, \quad (4)$$

де β, μ, γ - множники Ейлера - Лагранжа, E_p - ентропія, R_p - експоненціальна дивергенція (конвергенція), Con_p - початкові умови, Nor_p - умова нормування.

Доведення. Перепишемо функціонал (4) розширено:

$$\Phi_p = -\sum_i p_i(*, t) \ln p_i(*, t) + \beta \sum_i p_i(*, t) \tilde{l}_i t + \mu \sum_i p_i(*, t) \ln \|r_i(0)\| + \gamma \sum_i p_i(*, t) \rightarrow \max, \quad (5)$$

Вибір будь-якого дійсного числа як константи нормування в теорії ймовірностей є довільним. Умовою нормування встановлюється $\sum_i p_i = 1$, $p_i \geq 0$. З умови існування екстремуму знаходимо:

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial p} = -\ln p_i - 1 + \beta \tilde{l}_i t + \mu \ln \|r_i(0)\| + \gamma = 0;$$

$$\ln p_i = \beta \tilde{l}_i t + \mu \ln \|r_i(0)\| + \gamma - 1;$$

$$p_i = e^{\beta \tilde{l}_i t} e^{\mu \ln \|r_i(0)\|} e^{\gamma - 1} = e^{\beta \tilde{l}_i t} \|r_i(0)\|^\mu e^{\gamma - 1}.$$

Крім того, з умови $\sum_i p_i = 1$ отримуємо

$$\sum_i p_i = \sum_i e^{\beta \tilde{l}_i t} \|r_i(0)\|^\mu e^{\gamma - 1} = 1;$$

$$e^{\gamma - 1} = 1 / \sum_i \|r_i(0)\|^\mu e^{\beta \tilde{l}_i t};$$

$$p_i = \frac{\|r_i(0)\|^\mu \exp(\beta \tilde{l}_i t)}{\sum_i \|r_i(0)\|^\mu \exp(\beta \tilde{l}_i t)}. \quad (6)$$

Позначимо $\|r_i(0)\|^\mu = dv_i^t$, та нехай $\mu = 1$.

Тоді

$$dv_i^t = dv_i^0 \exp(\beta \tilde{l}_i t), \quad (7)$$

$$\lambda_i = \beta \tilde{l}_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{p_i \sum_{i=1}^d dv_i^t}{p_i \sum_{i=1}^d dv_i^0} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|r_i(t)\|}{\|r_i(0)\|}. \quad (8)$$

Виведення з функціоналу спектра Ляпунова, який показує середній експоненціальний темп дивергенції (конвергенції) сусідніх орбіт в фазовому просторі, означає, що, дійсно, вони (експоненти Ляпунова) задають найхарактерніший розподіл p_i , $i = 1, d$, разом з іншими описаними умовами, при яких досягається максимум функціоналу (4).

Лему 1 доведено.

Означення 2. Дві системи (M_1, f_1) і (M_2, f_2) називаються дифеоморфними, якщо існує дифеоморфізм (диференційоване взаємно однозначне відображення, зворотнє до якого також диференційоване) $h: M_1 \rightarrow M_2$, який переводить векторне поле f_1 в векторне поле f_2 [1,11]. M_1, M_2 – компактні гладкі многовиди класу принаймні C^2 (якщо M має край, то нехай f не дотикається краю).

Дифеоморфні або орбітально еквівалентні системи є топологічно еквівалентними, однак зворотнє невірне [12].

Означення 3. Дві системи (M_1, f_1) і (M_2, f_2) називаються локально дифеоморфними в нулі, якщо існує такий дифеоморфізм, який переводить лінеаризоване векторне поле f_1 в лінеаризоване векторне поле f_2 в околі початку

координат.

Теорема 1. У локально дифеоморфних системах в нулі рівність функції розподілу (6) є необхідною та достатньою умовою.

Доведення. Необхідність. Переведення особливої точки дифеоморфізмом одного векторного поля в особливу точку іншого векторного поля означає, що похідна цього дифеоморфізму переводить оператор лінійної частини першого поля в особливий точці в оператор лінійної частини другого поля в його особливий точці. Тоді одна система з іншої виходить за допомогою зворотної заміни координат: нехай для всіх точок $m^1 \in M_1$:

$$f_1(m^1) = J_h^{-1}(m^1) f_2(h(m^1)), \quad (9)$$

де $J_h(m^1)$ – матриця Якобі функції $h(m^1)$, обчислена в точці m^1 .

Нехай $m_0^1 \in M_1$ та $m_0^2 \in M_2$ такі точки положення рівноваги цих систем (з лінеаризації в околі початку координат), і нехай $A(m_0^1)$ та $B(m_0^2)$ – відповідні їм матриці Якобі. Продиференціювавши рівність (9), отримаємо:

$$A(m_0^1) = J_h^{-1}(m_0^1) B(m_0^2) J_h(m_0^1). \quad (10)$$

Отже, співпадають характеристичні поліноми матриць $A(m_0^1)$ та $B(m_0^2)$. Тому збігаються розподіли (6) у локально дифеоморфних системах. А рівність розподілів забезпечує також рівність ентропії (означення 1) для цих двох систем.

Достатність. Припустимо, що розподіл (6) співпадає, а системи не дифеоморфні. Тоді рівність (10) не виконується. Нехай для $\forall t$: $A(m_0^1) = Q_1 R_1$, $B(m_0^2) = Q_2 R_2$, де Q – квадратна унітарна матриця, R – верхньо-трикутна матриця. Якщо розподіли (6) для обох систем рівні, то $R_1 = R_2 = R$, тому характеристичні поліноми матриць $A(m_0^1)$ та $B(m_0^2)$ повинні співпадати і виконуватися (10). Отримана суперечність, тому рівність розподілів (6) є достатньою, щоб системи були локально дифеоморфними в нулі.

Теорему 1 доведено.

Висновки. Описується поняття ентропії для лінеаризованих поліноміальних систем ЗДР та виводиться функція розподілу норм дотичних векторів. Доводяться необхідні та достатні умови локально дифеоморфних систем. Ця задача є важливою при реконструкції систем ЗДР, які описують динаміку різної природи.

Список використаних джерел

1. Arnold V.I. Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations / V.I. Arnold. – New York: Springer, 2011. – pp. 351.
2. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В.И. Арнольд. – Москва: Наука, 1978. – 304 с.
3. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд, Ю.С. Ильяшенко // Итоги науки и техн. Сер.: Соврем. пробл. мат. – 1985. – №1. – С. 7–140.
4. Анищенко В.С. Лекции по нелинейной динамике / В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова. – Москва: Регулярная и хаотическая динамика, 2011. – 516 с.
5. Андронов А.А. Грубые системы / А.А. Андронов, Л.С. Понтрягин // Докл. АН СССР. – 1937. – № 5. – С. 247–250.
6. Никульчев Е.В. Геометрический метод реконструкции систем по экспериментальным данным / Е.В. Никульчев // Письма в жур. техн. физики. – 2007. – Т.33. – № 6. – С. 83–89.
7. Пилюгин С.Ю. Теорема Мане и теория отслеживания псевдотраекторий / С.Ю. Пилюгин // Дифф. уравн. и процессы управления. – 2014. – №4. – С. 1–11.
8. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence / F. Takens // Dynamical Systems and Turbulence. Lecture Notes in Mathematics. – 1981. – № 989. pp. 366–381.
9. Иванов С.М. Декомпозиція експонент Ляпунова хаотичних динамічних систем / С.М. Иванов // Dynam. syst. model. and stab. investig.: inter. conf., 24–26 May 2017, Kyiv, Ukraine: abstracts. – Kyiv. – 2017. – P. 87.
10. Sano M. Measurement of Lyapunov spectrum from a chaotic time series / Sano M. and Sawada Y. // Phys. Rev. Lett. – 1985. – №55, P. 1082–1085.
11. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. 1: [изд. 2-е, испр. и доп.] / В.А. Зорич. – Москва: ФАЗИС, 1997. – 554 с.
12. Гукенхеймер Дж. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей / Дж. Гукенхеймер, Холмс Ф. – Москва: ИКИ, 2002. – 560 с.

References

1. ARNOLD, V.I. (2011) *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*. New York: Springer.
2. ARNOLD, V.I. (1978) *Dopolnitel'nyye glavy teorii obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy*. Moskva: Nauka.
3. ARNOLD, V.I. & IL'YASHENKO, Yu.S. (1985) *Obyknovennyye differentsial'nyye uravneniya Itogi nauki i tekhn. Ser.: Sovrem. probl. mat.* 1. p. 7–140.
4. ANISHCHENKO, V.S. and VADIVASOVA, T.Ye. (2011) *Leksii po nelineynoy dinamike*. Moskva: Regul'yarnaya i khaoticheskaya dinamika.
5. ANDRONOV, A.A. & PONTRYAGIN, L.S. (1937) *Grubyye sistemy. Dokl. AN SSSR*. 5. p. 247–250.
6. NIKULCHEV, Ye.V. (2007) *Geometricheskiy metod rekonstruktsii sistem po eksperimental'nym dannym. Pis'ma v zhur. tekhn. fiziki*. 33(6). p. 83–89.
7. PILYUGIN, S.Yu. (2014) *Teorema Mane i teoriya otslezhivaniya psevdotrayektoriy. Diff. uravn. i protsessy upravleniya*. 4. p.1–11.
8. TAKENS, F. (1981) *Detecting strange attractors in turbulence. Dynamical Systems and Turbulence. Lecture Notes in Mathematics*. 989. p.366–381.
9. IVANOV, S.M. (2017) *Dekompozitsiya eksponent Lyapunova khaotichnykh dynamichnykh system. In Dynam. syst. model. and stab. investig.: inter. conf., Wednesday 24th to Friday 26th May 2017. Kyiv: DP Inform-analit. agenstvo*. pp. 87.
10. SANO, M. & SAWADA, Y. (1985) *Measurement of Lyapunov spectrum from a chaotic time series. Phys. Rev. Lett.* 55(10), p. 1082–1085.
11. ZORICH, V.A. (1997) *Matematicheskii analiz*. Moskva: FAZIS.
12. GUKENKHEYMER, Dzh. and KHOLMS, F. (2002) *Nelineynyye kolebaniya, dinamicheskiye sistemy i bifurkatsii vektornykh poley*. Moskva: IKI.

Надійшла до редколегії 12.09.2017

УДК 517.9

Івохін Є.В., д.ф.-м.н, професор,
Чижигова Є.В., магістр

**Про деякі моделі процесів
розповсюдження інформації на основі
гібридного дифузійного рівняння**

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, м.Київ, пр-т Глушкова,
4д, e-mail: ivohin@univ.kiev.ua

Ivohin E.V., Dr.Sci., professor,
Chizhikova E.V., magistr

**About some models of information
distribution processes based on the hybrid
diffusion equation**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: ivohin@univ.kiev.ua

В даній роботі запропоновано підхід до побудови гібридних математичних моделей динаміки розповсюдження інформаційних процесів в деякій соціальній або регіональній групі населення. В основу формалізації покладено використання гібридних моделей дифузії (проникнення) і динамічних моделей, що описують інфекційні процеси.

Запропонована методика дозволяє описувати рівні впливу і запам'ятовування інформації на основі рішення дифузійного рівняння, зміни інтервалів розповсюдження в яких моделюється за допомогою додаткових у вигляді диференціальних рівнянь. Розглянуто скалярне рішення для одновимірного подання контингенту, а також рішення у вигляді скалярної функції двох змінних, елементи якої описують рівні інформаційного впливу в різних підгрупах споживачів.

Наведені приклади використання даного підходу, проаналізовані результати чисельних експериментів.

In this paper we proposed an approach for constructing hybrid mathematical models of the dynamics of the distribution of information processes in some social or regional group of the population. The basis of formalization is the use of hybrid models of diffusion (penetration) and dynamic models, describing intragroup processes based on SIR-models of the spread of infectious diseases of Kermack and Mackendrick.

The models of propagation processes in the form of systems differential equations without delay and with delay are considered. Within the framework of the model it is assumed that individuals of an arbitrary group can be in one of three different states: susceptible to the disease, those who are affected and have immunity. It is considered in full mixed model at which each member interacts group with all the others. It is assumed that the group is closed and has constant number.

The above technique allows us to describe the levels of propagation, influence and storage of information in a group on the basis of the solution of the diffusion equation, the variation of the propagation intervals in which in time is modeled with the aid of additional relations in the form of differential equations. We consider a scalar solution for a one-dimensional representation of a contingent, as well as a solution in the form of a scalar function of two variables whose values describe the levels of information influence in various groups of consumers.

Key words: information, mechanistic approach, dynamic model, diffusion equation, hybrid system, modeling of information influence.

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Сучасні інформаційні потоки представляють собою процеси, що генерують інформацію, яка розрахована на конкретного споживача, має, як правило, чітко задану предметну або цільову направленість, що визначається областю інтересів людини. При цьому ступінь сприйняття (впливу) інформації формується на основі рівнів запам'ятовування конкретно обраного варіанту з декількох можливих і рівноправних [1].

При цьому потрібно відмітити, що в інформаційних процесах часто підкреслюється наявність хаотичного перемішування шарів

подання інформації [2]. Таке перемішування утворюється, коли в процесі, що знаходиться в певному впорядкованому режимі, виникає хаотичний режим, який потім знову змінюється впорядкованим режимом, який є відмінним від вихідного, і який містить більший обсяг інформації. Наявність шарів, що перемішуються, є необхідною умовою розвитку інформаційного впливу на споживачів. Тому він має місце у всіх процесах виникнення і передачі інформації: біологічної еволюції, розвитку організму, та, зрозуміло, еволюції людського суспільства.

З іншого боку, кількість отриманої інформації суттєво перевищує наші споживчі можливості. Різні варіанти ідей та думок повинні конкурувати за обмежену увагу споживача, враховуючи складні зміни в споживчій середі. І, як наслідок, особливий інтерес отримують методи, що досліджують та використовують моделі динаміки для опису процесів розповсюдження інформації.

Очевидно, що для формалізації та дослідження процесів розвитку в часі інформаційного впливу на соціум необхідно використовувати принципово новий інструментарій, який дозволить адекватно відображати стан динамічної складової процесу розповсюдження інформації [3]. При цьому, розробка нових підходів не скасовує методики використання класичних способів аналізу та обробки інформаційних процесів, що постулюється у вигляді так званого механістичного підходу.

Зупинимось на одному з способів формалізації інформаційних процесів, в основу якого покладемо використання гібридних моделей дифузії (проникнення) і розповсюдження інформації в деякій соціальній або регіональній групі. Для опису розповсюдження інформаційного впливу в соціумі використаємо математичні моделі динаміки інфекційних захворювань.

Моделі поширення інфекційних захворювань

У 1927 році Кермаком та Макендріком [4] запропоновано SIR модель розповсюдження епідемій, відповідно до якої особи довільної популяції можуть перебувати в одному з трьох різних станів: сприйнятливі до захворювання, заражені, та ті, що отримали імунітет або загинули. Здоровий індивід може заразитися вірусом при контакті з одним із інфікованих сусідів. В результаті захворювання він або отримує імунітет, або вмирає. В даному випадку пропонується розглядати повністю змішану модель, при якій відбувається взаємодія кожного члена популяції з усіма іншими. Крім того, передбачається, що популяція замкнута і має постійну чисельність.

Незважаючи на настільки спрощений опис реального процесу, SIR модель містить параметри, від яких істотно залежить поведінка моделі: швидкість інфікування і швидкість одужання, що дозволяє ефективно передбачати наявність критичних факторів, що зумовлюють виникнення епідемії або згасання хвороби.

Існує декілька варіацій даної моделі [5]. Будемо розглядати модель, у рамках якої можна описати процеси, що допускають багатократне захворювання і одужання членів популяції. Крім

того, передбачається, що індивід, який переніс захворювання і отримав імунітет, з часом його втрачає і може бути заражений знову.

Математична модель розповсюдження захворювання може бути записана у вигляді системи диференціальних рівнянь [6]:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t) &= -y_1(t)y_2(t), \\ \dot{y}_2(t) &= y_1(t)y_2(t) - y_2(t), \\ \dot{y}_3(t) &= y_2(t),\end{aligned}\quad (1)$$

з початковими умовами $y_1(0)=1; y_2(0)=0; y_3(0)=0$. Тут $y_1(t)$ - частка населення, яке є сприйнятливим до захворювання, $y_2(t)$ - частка вже хворих, та $y_3(t)$ - частка несприйнятливих до хвороби (наприклад, ті, що мають імунітет), $t \geq 0$. Опис змінних моделі (1) в частках від заданого обсягу не вимагає визначення кількості популяції, встановлюється лише вимога виду $y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) = 1$.

Якщо припустити, що придбаний імунітет через визначений час τ_1 втрачається і особини знову стають сприйнятливими до захворювання, то з'являються періодичні спалахи хвороби. Якщо, крім того, враховувати інкубаційний період τ_2 хвороби, то замість (1) отримуємо модель у вигляді системи диференціальних рівнянь з запізненням:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t) &= -y_1(t)y_2(t - \tau_2) + y_2(t - \tau_1), \\ \dot{y}_2(t) &= y_1(t)y_2(t - \tau_2) - y_2(t), \\ \dot{y}_3(t) &= y_2(t) - y_2(t - \tau_1).\end{aligned}\quad (2)$$

Очевидно, що моделі процесів розповсюдження інфекційних захворювань можна з успіхом використовувати для моделювання змін інформаційного впливу в суспільстві, враховуючи його дифузний характер.

Гібридна модель дифузійного розповсюдження інформації на основі SIR-моделі

З великою ймовірністю можна припустити, що розповсюдження інформації в популяції, думок в соціальних мережах, рекламування продукції та інші інформаційні процеси багато в чому аналогічні розповсюдженню інфекційних захворювань. При цьому SIR-модель є достатньо ефективною для опису станів різних підгруп в соціальній або регіональній групі людей, що знаходяться під впливом інформаційного потоку.

Позначимо через $u(x, t)$, $0 \leq u(x, t) \leq 1$, $t \geq 0$, функцію рівня розповсюдження інформації в межах частини x , $0 \leq x \leq 1$, що розглянута групою населення, величина якої не перевищує наперед заданого значення A .

Змоделюємо зміну рівня (концентрації)

інформації в групі населення за допомогою рівняння дифузії [7], припускаючи, що цей процес аналогічний розповсюдженню деякого захворювання протягом конкретного часового інтервалу $t \in [0, T]$ і може бути описаний скалярним рівнянням:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -k(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3)$$

з початковою умовою $u(x, 0) = 0$, $0 \leq x \leq 1$, та крайовою умовою $u(0, t) = 0$, $t \in [0, T]$, де $k(t)$ – коефіцієнт, що характеризує швидкість проникнення інформації (аналог коефіцієнта дифузії), який пропорційний швидкості змін частини населення, що вважаються сприйнятливими до впливу зовнішньої інформації, тобто $k(t) = \mu \dot{x}(t)$.

Розглянемо склад населення, що складається з 3-х підгруп по відношенню до сприйняття інформації. Виділяємо, як вже було зазначено вище, частину населення, сприйнятливою до впливу інформації $y_1(t)$, частина тих, що вже знаходяться під впливом інформації $y_2(t)$, і частина байдужих до інформаційного впливу $y_3(t)$. Тоді за допомогою моделей (1) та (2) можна записати систему диференціальних рівнянь, які описують процес розповсюдження інформації в загальній групі населення. Її рішення, відповідно, визначають динаміку величин окремих підгруп.

При таких припущеннях максимальне граничне значення частини населення, що відчуває вплив інформації, x_Γ , $0 \leq x_\Gamma(t) \leq 1$, буде залежати від часу, тобто маємо $0 \leq x(t) \leq x_\Gamma(t)$, $x_\Gamma(t) = y_1(t) + y_2(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$ – компоненти рішення систем (1) або (2).

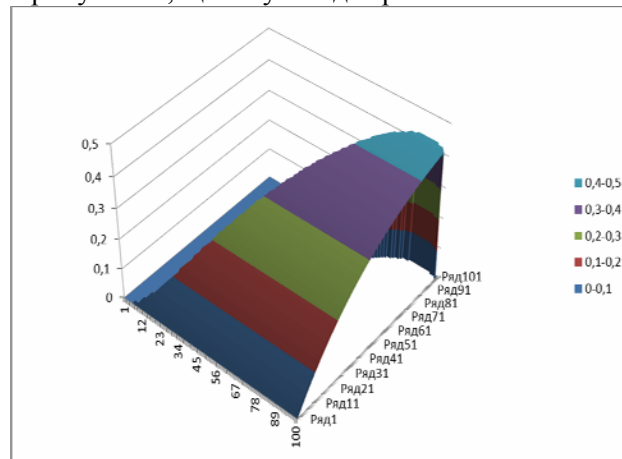
Будемо шукати функцію $u(x, t)$ у вигляді $u(x, t) = X(x(t))$. Тоді для довільного моменту часу $t \in [0, T]$ отримаємо розв'язок рівняння (3) $u(x, t) = \mu(1 - e^{-x(t)/\mu})$, який визначає рівень розподілу інформації в межах підгрупи, об'єм котрої становить $x_\Gamma(t)$ від загальної кількості A , $0 \leq x(t) \leq x_\Gamma(t)$.

Цей розв'язок може бути узагальнений за умови, що частина населення, яка має імунітет до впливу інформації, може через деякий час його втратити. Частина населення при цьому стає сприйнятливою до впливу інформації, збільшуючи підгрупу $y_1(t)$, і цей процес періодично повторюється.

На мал.1 наведений приклад просторово-часового розподілу рівнів сприйняття інформації у групі населення, який розраховано на основі

гібридної моделі вигляду (3), (1). Розрахунок отримано на базі рівняння дифузії і використання системи диференціальних рівнянь Кермака-Макендріка без запізнення.

Розглянемо процес розповсюдження інформації на базі дифузійного підходу з двовимірним (площинним) поданням групового контингенту. Припустимо, що існують два різні типи спожива-



Мал.1. Розподіл рівнів сприйняття інформації в групі з плином часу (коефіцієнт пропорційності $\mu = 0.5$)

чів інформації, що відрізняються сприйняттям зовнішнього інформаційного впливу та своїм ставленням до змісту інформаційних потоків. Подібне припущення абсолютно коректно вписується в рамки викладеного вище підходу, який базується на представленні контингенту споживачів у формі трьох окремих за ставленням до інформаційного впливу підгруп.

У цьому випадку просторові координати x_1, x_2 будуть використовуватися для позначення частин споживачів інформації, які є чутливими до впливу зовнішньої інформації. Сформулюємо модель на основі рівняння дифузії (3), описуючи за допомогою функції $u(x_1, x_2, t)$, $t \geq 0$, рівні розповсюдження і сприйняття інформації в межах двох підгруп, що сприймають її вплив. Будемо шукати функцію $u(x_1, x_2, t)$ у вигляді $u(x_1, x_2, t) = (X_1(x_1(t)) + X_2(x_2(t))) / 2$. Граничні величини $x_1^\Gamma(t)$, $x_2^\Gamma(t)$ часток населення, в межах яких враховується розповсюдження інформації, визначатимемо на основі компонент $y_1(t)$, $y_2(t)$ розв'язку системи (1): $0 \leq x_1(t) \leq x_1^\Gamma(t)$, $0 \leq x_2(t) \leq x_2^\Gamma(t)$, $x_1^\Gamma(t) = y_1(t)$, $x_2^\Gamma(t) = y_2(t)$, а коефіцієнт, що характеризує швидкість проникнення інформації, вважаємо однорідно пропорційним швидкостям змін обсягів підгруп, тобто $k(t) = \mu \dot{x}_1(t) = \mu \dot{x}_2(t)$.

Тоді для довільного моменту часу $t \in [0, T]$

отримаємо розв'язок дифузійного рівняння (3):

$$u(x_1, x_2, t) = 0.5\mu((1 - e^{-x_1(t)/\mu}) + (1 - e^{-x_2(t)/\mu})), \quad (4)$$

яке дозволяє визначити рівень проникнення інформації в межах чутливих до впливу підгруп, чисельність яких задається величинами часток $x_1^1(t)$, $x_1^2(t)$ від загальної кількості населення A .

Висновок.

Моделі на основі рівняння дифузії для дослідження розповсюдження інформації були використані в процесах вивчення і оптимізації потоків рекламної інформації. Дифузійна модель

впливу реклами розглядалась також з урахуванням показників динаміки товарів, одержуваних на основі статистичних звітів за результатами діяльності торгових підприємств [8]. Аналіз процесів впливу рекламної інформації на основі запропонованого походу і проведених чисельних експериментів дозволив зробити висновок про адекватність отриманих розрахунків параметрам реальних процесів зміни сприйняття інформації в межах конкретно заданих груп населення, що мають місце внаслідок зовнішнього інформаційного впливу.

Список використаних джерел

1. Кастлер Г. Виникнення біологічної організації. – М.: Мир., 1967.
2. Чернавський Д.С. Синергетика та інформація: Динамічна теорія інформації. – М.: Наука, 2001.
3. Брайчевський С.М. Сучасні інформаційні потоки: актуальна проблематика /С.М. Брайчевський, Д.В. Ланде //Науково-технічна інформація. – Сер.1. – Вип.11. – 2005. – С. 21-33.
4. Kermack W. O. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics / W. O. Kermack, A. G. McKendrick // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, 1927. – Vol. 115. – Iss.772. – P.700-721.
5. Smith R. Modelling Disease Ecology with Mathematics. – Ottawa: American Institute of Mathematical Sciences. – 2008. – 189 p.
6. Хайпер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.Хайпер, С. Нерсетт, Г.Ваннер. –М: Мир, 1990.-512 с.
7. Араманович И.Г. Уравнения математической физики / И.Г.Араманович, В.И. Левин. – М.: Наука, 1969. - 288 с.
8. Івохін Є. В. Про окремі математичні моделі процесу розповсюдження реклами в соціумі / Є.В. Івохін, Ю. О. Науменко //Вісник КНУ імені Тараса Шевченка. Серія ФМН. -2017. - №1. – С. 55-58.

References

1. KASTLER G. (1967) *The emergence of biological organization*. – M.: Mir. - 165 p.
2. CHERNAVSKY D.S. (2001) *Synergetics and Information: Dynamic Information Theory*. – M.:Nauka. - 195 p.
3. BRAICHEVSKY S. and LANDE D. (2005) *Modern information flows: current issues* // Scientific and Technical Information. – Ser.1 – Iss.11 – P. 21-33.
4. KERMACK W.O. and McKENDRICK A. G. (1927) *A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics* // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. – Vol. 115. – Iss.772. – P.700-721.
5. SMITH R. (2008) *Modelling Disease Ecology with Mathematics*. – Ottawa: American Institute of Mathematical Sciences. – 189 p.
6. HAIRER E., NORSETT S. and WANNER G. (1990) *Reshenie obyknovennykh differentsialnykh uravneniy*. M: Mir. - 512 p.
7. ARAMANOVICH I. and LEVIN V. (1969) *Equations of mathematical physics*. – Moscow: Nauka. - 288 p.
8. IVOKHIN E. and NAUMENKO Yu. (2017) *About some mathematical models of the advertising distribution in socium* // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Phys.&Math. - №1. - P. 55-58.

Надійшла до редколегії 28.12.2017

УДК 004.93

Король В.О., студент

Аналіз проблем доповненої реальності та шляхи їх вирішення

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Академіка Глушкова 4д,
e-mail: vetaloff95@gmail.com

V.O. Korol, student

Analysis of augmented reality problems and the ways of their solution

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: vetaloff95@gmail.com

Об'єктом роботи є доповнена реальність. Дано визначення терміну доповненої реальності, надано порівняння з віртуальною реальністю. Представлено основну класифікацію систем доповненої реальності. Зазначено основні проблеми реалізації програмних продуктів з використанням даних технологій та можливі шляхи їх вирішення.

Ключові слова: доповнена реальність, віртуальна реальність, розпізнавання образів.

This work is devoted to Augmented Reality(AR) technologies, relevance of usage, prospects of development and maintenance. This article contains definition of augmented reality term, its place in Reality-Virtuality Continuum, main properties which augmented reality technologies must have. The comparison with the virtual reality and fundamental differences are also given. There are basic classifications of augmented reality systems: by type of information representation, by type of sensors, by degree of interaction with user, by degree of mobility; advantages and disadvantages of each type of them. Indicated general issues of implementation of software products such as head tracking for audio systems, pattern recognition and setting standards for visual systems, compactness and performance collisions for mobile systems, fundamental AR problems regardless of system type. Provided possible ways of solving some part of them by using specialized highly productive web-services for objects identification, finding corresponding virtual objects, transformation them and adding to real scene.

Key Words: augmented reality, virtual reality, pattern recognition.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Хусаїнов Д.Я.

1. Вступ та постановка задачі

Стрімкий розвиток інтерактивних мультимедійних технологій вимагає появи новітніх інтерфейсів людино-машинного взаємодії. Однією з таких технологій є доповнена реальність. В широкому розумінні це новітня технологія, що дозволяє додавати віртуальні об'єкти до реального світу.

Для широкого застосування розроблено тільки порівняно невелику кількість пілотних проектів, оскільки реалізація вкрай трудомістка і індивідуальна для кожної області застосування. Проте розробка програм з використанням доповненої реальності є надзвичайно перспективною.

Досягнення в цій сфері можуть бути використані практично в будь-якій галузі, чи то комерції та науці, чи то культурі та розвагах.

Дана робота має на меті дати короткий огляд технологій доповненої реальності, висвітлити основні проблеми застосування та показати можливі шляхи їх вирішення.

2. Термін доповненої реальності

Доповнена реальність (англ. augmented reality, AR), — термін, що відноситься до всіх проектів, спрямованих на розширення навколишнього світу будь-якими віртуальними елементами.[1]

Доповненою реальністю також

називаються технології, що дозволяють доповнювати зображення реальних об'єктів різноманітними об'єктами комп'ютерної графіки, а також поєднувати зображення, отримані з різних джерел: відеокамер, тепловізорів, спектрометрів тощо.

Вважається, сам термін був запропонований працюючим на корпорацію Boeing дослідником Томасом Коделом у 1990 р.

Доповнена реальність є частиною змішаної реальності (англ. mixed reality), до якої також відноситься доповнена віртуальність. У широкому сенсі доповнена реальність являє собою процес перегляду реального світу і віртуальних об'єктів одночасно, де віртуальна інформація накладається, вирівнюється і інтегрується в фізичному світі.

У 1994 році Пол Мілграм (англ. Paul Milgram) і Фуміо Кісіно (англ. Fumio Kishino) описали Континуум Віртуальність-Реальність (англ. Milgram's Reality-Virtuality Continuum)[2] – простір між реальністю та віртуальністю, в якому знаходяться доповнена реальність (ближче до реальності) та доповнена віртуальність (ближче до віртуальності), як показано на рисунку 1.

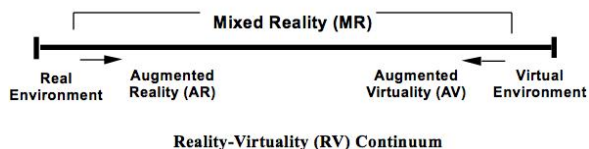


Рисунок 1

Дослідник Рональд Азума (англ. Ronald Azuma) в 1997 році виділив ряд властивостей [3], які повинна мати доповнена реальність:

- а) комбінування реального й віртуального світу;
- б) інтерактивність;
- в) тривимірне представлення об'єктів.

3. Відмінність від віртуальної реальності

Істотною відмінністю доповненої реальності від віртуальної є збереження фізичного світу як контексту, в якому представлені віртуальні об'єкти і з яким вони взаємодіють. Віртуальна реальність цілковито абстрагується від фізичного світу, щоб помістити користувача повністю у

віртуальний світ. Віртуальна реальність використовує спеціальні позиційні трекери з дисплеями (окуляри віртуальної реальності), які динамічно оновлюють видимий користувачем простір у віртуальному середовищі. Важливо розуміти, що доповнена реальність повністю змінює цю парадигму, і в підсумку віртуальні об'єкти розміщуються в реальному оточенні користувача (рисунк 2).

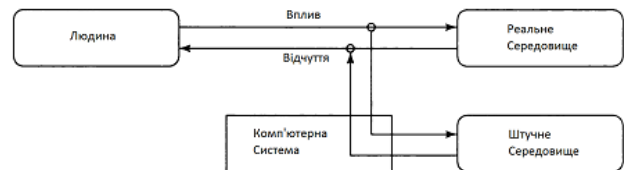


Рисунок 2

4. Класифікація систем доповненої реальності

За типом подання інформації системи доповненої реальності бувають:

а) візуальні. В їх основі лежить зорове сприйняття людини. Завдання таких систем – створити зображення, яке буде використано людиною. Ї найбільш поширеними;

б) аудіо. Такі системи орієнтовані на слухове сприйняття. Найчастіше такі системи використовуються в навігації. Прикладом є Hear & There;[4]

в) аудіовізуальні. Це комбінація двох попередніх типів, однак, аудіоінформація в них має лише допоміжний характер.

За типом сенсорів можна виділити наступні системи:

а) геопозиційні. Орієнтуються, перш за все, на сигнали систем позиціонування GPS або ГЛОНАСС. На додаток до приймачів таких сигналів геопозиційні системи можуть використовувати компас і акселерометр для визначення кута повороту відносно вертикалі і азимута;

б) оптичні. Обробляють зображення, отримане з камери, яка переміщується разом з системою або незалежно від неї;

За ступенем взаємодії з користувачем системи поділяться на:

а) автономні. Вони не вимагають втручання користувача. Завдання таких

систем зводиться до надання інформації про об'єкти;

б) інтерактивні. Такі системи базуються на взаємодії з користувачем. У подібних системах необхідно мати пристрій введення інформації. В якості такого пристрою може застосовуватися сенсорний екран мобільного телефону, планшет або спеціальний маніпулятор.

За ступенем мобільності системи доповненої реальності можна класифікувати як:

а) стаціонарні. Системи цього типу призначені для роботи в фіксованому місці; переміщення таких систем означає часткове або повне припинення їх працездатності;

б) мобільні. Системи цього типу можуть без зусиль переміщатися; часто таке переміщення і лежить в основі виконуваної ними функції.

5. Проблеми розробки та використання

Для кожного типу систем доповненої реальності існує свій набір проблем.

Для аудіо систем основною проблемою є трекінг голови людини, оскільки саме від того як повернута чи нахилена голова буде залежати відтворюваний звук. Існує кілька підходів щодо визначення положення голови:

- а) відносно фіксованої платформи;
- б) відносно обертання Землі;
- в) відносно довільної рухомої платформи.

Для кожного з цих випадків вводяться системи координат та описуються рівняння для їх визначення. Але яку б систему координат ми не використовували, на голові людини необхідно закріпити датчики, на основі показань яких координати і будуть вираховуватися.

Для візуальних систем головною проблемою є розпізнавання образів на зображенні. Процес ідентифікації зводиться до таких етапів:

- а) побудова контуру об'єкта;
- б) побудова одновимірної функції за двовимірною формою об'єкта;
- в) порівняння отриманої функції з еталоном для її ідентифікації.

Однак виникає ще одна проблема – класифікація об'єктів для задання еталонів.

Наприклад, розглянемо таких об'єкт як будинок. До цієї категорії може відноситися як невеликий одноповерховий склад, так і багатоповерховий хмарочос. При цьому еталони таких об'єктів будуть значно відрізнятися.

При розробці мобільних систем також виникають специфічні проблеми. Існує дві тенденції: прагнення до компактності та забезпечення обчислювальної потужності, що необхідна для забезпечення роботи системи в реальному часі. Причому ці тенденції є взаємно суперечливими. Тому для мобільних систем використовуються менш ресурсоємкі алгоритми, навіть якщо це призводить до пониження точності.

Також існує ряд проблем, характерних для усіх систем доповненої реальності. Вони пов'язані з побудовою віртуальних об'єктів:

а) організація місця знаходження віртуальних об'єктів і засобів доступу до них;

б) забезпечення необхідного ступеня реалістичності віртуальних об'єктів;

в) взаємодія віртуальних об'єктів зі сценою.

Яким би не був реалістичним віртуальний об'єкт, він повинен вписуватися в сцену. Для графічних об'єктів це означає підбір правильної перспективи, масштабу, яскравості; для звукових – підбір гучності, синхронність з іншими звуками. Однак сцена не змінюється в залежності від дій користувача. Тому система доповненої реальності повинна забезпечувати відстеження положення реальних об'єктів на сцені й переміщувати зв'язані з ними віртуальні. В результаті виникає ще одна проблема – трекінг елементів зображення. При цьому може виникнути потреба відстежувати не один, а одразу декілька об'єктів, які можуть переміщуватися не тільки відносно користувача, а й один одного.

6. Шляхи вирішення проблем

Для вирішення багатьох з цих проблем можна використати системи високої продуктивності. Але вони не мобільні й доступні не кожному, тобто їх не можна використовувати напряму. Однак на базі

високопродуктивних систем можна створити сервіс, який би розв'язував такі задачі, як :

а) ідентифікація об'єктів по фрагменту зображення;

б) пошук необхідних віртуальних об'єктів і підгонка їх параметрів;

в) злиття віртуальних об'єктів з фрагментами сцени;

г) зміна представлення об'єкта для забезпечення меншої ресурсоемкості при його відтворенні на конкретному кінцевому пристрої.

При такому використанні систем з високою продуктивністю до задач мобільних пристроїв будуть входити фіксація навколишнього середовища і відтворення доповненої реальності для користувача. Робота системи в цілому буде складатися з таких етапів:

1) визначення контурів об'єктів у потрібній користувачу області зображення на мобільному пристрої. Кожному з таких

контурів буде присвоєно мітку, положення якої пристрій буде відслідковувати;

2) відправлення контурів та їх вмісту на сервер для обробки;

3) обробка сервером отриманих даних, ідентифікація реальних об'єктів й побудова віртуальних;

4) відправлення готових об'єктів, що супроводжуються ідентифікатором мітки на початковому зображенні;

5) відтворення віртуальних об'єктів.

7. Висновки

Незважаючи на стрімкий прогрес у галузі обчислювальної техніки, системи доповненої реальності переважно можна бачити лише в стінах лабораторій та на виставках з рекламною метою. Але в перспективі очікується їх широке розповсюдження та застосування в галузях освіти, медицини, комерції, розваг тощо. Саме тому дана робота є актуальною.

Список використаних джерел

1. П.А.Грицан. "Перспективи і сучасне використання технологій доповненої реальності". Міжвузівський збірник "Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво" - Луцьк, 2011. Випуск №6. – 87ст.
2. Paul Milgram. Virtuality Continuum. / P.Milgram, F.Kishino// [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://erealityhome.wordpress.com/2008/10/18/paul-milgram-and-fumio-kishino-virtuality-continuum>.
3. Azuma, Ronald T. "A Survey of Augmented Reality". Presence: Teleoperators and Virtual Environments 6, 4 (August 1997), pp. 355 – 385.
4. Miikka Tikander. "Development and evaluation of augmented reality audio systems". Abstract of dissertation for the degree of Doctor of Science in Technology. – Helsinki, 2009. – 70 p.

References

1. GRITSAN P.A. (2011) "Perspectives and modern use of technologies of augmented reality". Intercollegiate collection "Computer-integrated technologies: education, science, production" - Lutsk. Issue number 6. -87p. [Accessed: 22th May 2018].
2. PAUL MILGRAM, FUMIO KISHINO (2008): Virtuality Continuum. [Online] Available from: <https://erealityhome.wordpress.com/2008/10/18/paul-milgram-and-fumio-kishino-virtuality-continuum>. [Accessed: 22th May 2018].
3. RONALD AZUMA (1997) "A Survey of Augmented Reality". Presence: Teleoperators and Virtual Environments 6, 4 pp. 355 – 385 [Accessed: 22th May 2018].
4. MIIKKA TIKANDER (2009) "Development and evaluation of augmented reality audio systems". Abstract of dissertation for the degree of Doctor of Science in Technology. – Helsinki, 2009. – 70 p [Accessed: 22th May 2018].

Надійшла до редакції 14.12.2017

УДК 519.21

Коцур Д.В., аспірант

Алгоритм побудови діаграми Вороного на двовимірній сітці з L_p нормою

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-
т. Академіка Глушкова 4д,

e-mail: dkotsur@gmail.com

D.V. Kotsur, postgraduate

An algorithm for L_p -Voronoi diagram construction on discrete grid in 2D

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,

e-mail: dkotsur@gmail.com

Стаття присвячена алгоритму побудови апроксимації діаграми Вороного на двовимірній решітці з L_p нормою. Ініціалізація алгоритму відбувається шляхом відображення вхідного набору точок на двовимірну решітку. В основі алгоритму побудови діаграми Вороного лежить процес еволюції кіл з центрами, що відповідають координатам вхідних точок, на двовимірній сітці з L_p нормою. На першому кроці радіуси кіл дорівнюють 0, тобто кола співпадають з вхідним набором точок. Далі відбувається рівномірне збільшення радіусів кіл, перетини яких в процесі еволюції визначають ребра і вершини діаграми Вороного. Аналіз складності алгоритму показав, що діаграма Вороного може бути побудована за час $O(N)$, де N – це розмір двовимірної сітки. В статті також проводяться чисельні експерименти з побудови апроксимованої діаграми Вороного в L_p для значень p рівних 1 (манхеттенська метрика), 1.5, 2.0 (евклідова метрика), 5.0, ∞ . Модифікація представленого алгоритму знаходить застосування в задачах обробки зображень. Наприклад, врахування контурів зображення в процесі еволюції діаграми Вороного дає сегментацію вхідного зображення шляхом розбиття на суперпікселі.

Ключові слова: діаграма Вороного, многокутник Вороного, L_p -норма, двовимірна сітка, обробка зображень, сегментація зображень

In this paper we present a new algorithm for the fast approximate Voronoi diagram calculation on 2D discrete grid equipped with L_p norm. Initially the algorithm maps an input point set onto the 2D discrete grid of pixels. The key concept of this algorithm is the process of the input point set evolution into L_p -circles with the centers at these points. In the first step, the radii of the L_p -circles equal to 0, which means that circles coincide with the input point set. Then there is a gradual increase in the radii of the circles, whose intersections in the process of evolution determine the edges and vertices of the Voronoi diagram. The analysis of the complexity of the algorithm showed that the Voronoi diagram can be constructed in $O(N)$, where N is the size of the two-dimensional grid. We have also demonstrated the examples of the approximated Voronoi diagram construction in L_p for the values of p equal to 1 (Manhattan metric), 1.5, 2.0 (Euclidean metric), 5.0, ∞ . The modification of the presented algorithm finds its application in the problems of image processing. For example, consideration of the image contours during the evolution process gives superpixel segmentation of the input image.

Key Words: Voronoi diagram, Voronoi cell, L_p -norm, 2D discrete grid, image processing, image segmentation

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Анісімов А. В.

1. Introduction

Computational geometry deals with algorithms and data structures for solving geometrical problems. The main aim of the field is to develop efficient algorithms and data structures which solve a broad class of interconnected problems.

Voronoi diagrams [1] can serve as a good example of such data structures. They can be efficiently applied to solve the problem of all nearest neighbor, Delaunay triangulation or for convex hull construction.

Voronoi diagrams separate the 2D space into the regions associated with input points. Such regions are called Voronoi cells and they have a major feature: only closest points to the input point associated with the region are belonging to this region. The most efficient algorithms for Voronoi diagrams construction so far are Fortune's algorithm [2] and "divide and conquer" algorithm [3]. However, at the same time, their main drawback is the difficulty of their extension to other metric spaces than L_2 [4].

In this paper we present the algorithm for approximate Voronoi diagram construction on 2-dimensional grid equipped with L_p -norm [4]. The key difference of the algorithm in comparison to other [4], [5], [6], [7] is the process of Voronoi cells evolution. Initially the Voronoi cells are represented just by the input point set. Then L_p -circles with the centers at these points start growing (from radius 0). Their intersections are tracing the edges of the Voronoi cells. The main advantage of the algorithm is that it can be easily applied for image segmentation [8]. The evolution process can be stopped in advance in order to produce the constrained Voronoi cells (by a fixed distance). Furthermore, the resulting constrained regions represent segments (superpixels) of the image.

2. Definitions and properties

Definition 1. L_p -norm [4] ($1 \leq p \leq \infty$) for 2D-point $\bar{p} = (x, y)$ is defined as follows: $\|\bar{p}\|_p = \sqrt[p]{|x|^p + |y|^p}$.

The special case is L_∞ : $\|\bar{p}\|_\infty = \max(|x|, |y|)$. The L_p -circle with center at the point p_c and radius $r \in \mathbb{R}$ is defined as follows: $\|\bar{p} - \bar{p}_c\|_p = r$

Let $P = \{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_M\}$ be a set of input points, which we call generator points of Voronoi diagram [6]. Here $\bar{p}_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$.

Definition 2. Voronoi cell in L_p ($1 \leq p \leq \infty$). The following set of points:

$V(\bar{p}_i) = \{x \mid \|x - \bar{p}_i\|_p \leq \|x - \bar{p}_j\|_p \forall j = \overline{1, M} (i \neq j)\}$ is called L_p -Voronoi cell associated with generator point $\bar{p}_i$.

Definition 3. Voronoi diagram in L_p .

The set of all Voronoi cells associated with each point from generator set P is called Voronoi diagram in L_p :

$$VD(P) = \{V(\bar{p}_1), V(\bar{p}_2), \dots, V(\bar{p}_M)\}$$

In the case $p = 2$ we get "classical" Voronoi diagram with Euclidian norm.

Definition 4. Distance constrained Voronoi cell.

Let's define distance constrained Voronoi cell as a subset of points of Voronoi cell, which contains all the points laying no farther than at the distance t :

$$V_t(\bar{p}_i) = \{x \in V(\bar{p}_i) \mid \|x - \bar{p}_i\|_p \leq t\}$$

Definition 5. Distance constrained Voronoi diagram.

The set of all constrained Voronoi cells will be

$$VD_t(P) = \{V_t(\bar{p}_1), V_t(\bar{p}_2), \dots, V_t(\bar{p}_M)\}$$

Property 1: Constraining $VD_t(P)$ by distance $t = 0$ gives initial generator point set P :

$$P = \lim_{t \rightarrow 0} VD_t(P) = VD_0(P)$$

Property 2: In case $t \rightarrow \infty$ constant Voronoi diagram $VD_t(P)$ naturally becomes "normal" Voronoi diagram for a set of generator points P :

$$VD(P) = \lim_{t \rightarrow \infty} VD_t(P) = VD_\infty(P)$$

Property 3 (Embedding): For any $t, s \in \mathbb{R}$ such that $t \leq s$ the following embedding takes place:

$$VD_t(P) \subseteq VD_s(P)$$

meaning $V_t(\bar{p}_i) \subseteq V_s(\bar{p}_i) \forall i = \overline{1, M}$.

3. Algorithm description

The input of the algorithm is a set of generator points $P = \lim_{t \rightarrow 0} VD_t(P)$. From the properties (1)-(3) of the previous section it follows that for any Δt there exists a sequence of embeddings:

$$P = VD_0(P) \subseteq VD_{\Delta t}(P) \subseteq \dots \subseteq VD_{K\Delta t}(P)$$

Thus, the main idea of the algorithm is to construct this sequence by iteratively evolving $VD_{j\Delta t}(P)$ to $VD_{(j+1)\Delta t}(P)$ for a chosen Δt . This can be performed by discretizing spatial domain into $H \times W$ discrete grid. For the sake of simplicity let's assume that grid consist of uniform squared pixels $\Delta x = \Delta y = a$ and $\Delta t = a$.

Initially spatially discretized constrained Voronoi diagram $\widetilde{VD}_0(P)$ comprises only the pixels containing generator points P . The transition from

$\widetilde{VD}_{j\Delta t}(P)$ to $\widetilde{VD}_{(j+1)\Delta t}(P)$ can be done by extending each of the discrete constrained Voronoi cells $V_{j\Delta t}(\bar{p}_i)$ by the neighboring pixels such that distance from them to generator $\bar{p}_i$ won't exceed $(j+1)\Delta t$ and associate the each pixel only with closest generator point.

The easiest way to construct $\widetilde{VD}_{(j+1)\Delta t}(P)$ from $\widetilde{VD}_{j\Delta t}(P)$ is to use a queue data structure for each set $\widetilde{VD}_{j\Delta t}(P)$ in the similar way as in the "classical" breadth-first search algorithm (BFS).

The pseudo code describing the aforementioned ideas is provided at the following listing below.

Algorithm 1 Construction of L_p -Voronoi diagram on 2D pixel grid

```

Input:  $H$  – Height of the grid or number of rows;
 $W$  – Width of the grid or number of columns;
 $P \leftarrow \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_M, y_M)\}$ ; /*
Coordinates of Voronoi vertices

Initialize:
1:  $N \leftarrow H \cdot W$ ; /* Total number of pixels
2:  $Mask \leftarrow$  Matrix  $[H \times W]$  of 0;
3:  $Distance \leftarrow$  Matrix  $[H \times W]$  of  $\infty$ ;
/* Neighbors in 8 – connectivity:
4:  $NN_r \leftarrow \{0 \ -1 \ -1 \ -1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1\}$ ;
5:  $NN_c \leftarrow \{1 \ 1 \ 0 \ -1 \ -1 \ -1 \ 0 \ 1\}$ ;
/* Initialize number of processed pixels on the grid
6:  $proc\_n \leftarrow 0$ ;
/* Initialize pointers of 2 queues
7:  $q_1 \leftarrow$  pointer to new Queue of tuples;
8:  $q_2 \leftarrow$  pointer to new Queue of tuples;
/* Initialize grid
9: for each  $(x_i, y_i) \in P$  do
10:  $(r_i, c_i) \leftarrow Integer(x_i, y_i)$ ;
11:  $Mask[r_i, c_i] \leftarrow i$ ;
12:  $Distance[r_i, c_i] \leftarrow 0$ ;
13:  $Push(q_1, (r_i, c_i, i))$ ;
14: end

Evolve:
15: while  $processed\_pixels\_n < N$  or not  $Empty(q_1)$ 
16: or not  $Empty(q_2)$  do
17: while not  $Empty(q_1)$  do
18:  $(r, c, i) \leftarrow Pop(q_1)$ ;
19: for each  $k = 1 \dots 8$  do
20:  $r_n \leftarrow r + NN_r[k]$ ;
21:  $c_n \leftarrow c + NN_c[k]$ ;
22: if  $r_n < 0$  or  $c_n < 0$  or  $r_n \geq H$  or
23:  $c_n \geq W$  then
24: continue;
25: end
26:  $d \leftarrow \|(r - r_n, c - c_n)\|_p$ ;
27: if  $d \leq Distance[r_n, c_n]$  then
28: if  $Mask[r_n, c_n] = 0$  then
29:  $proc\_n \leftarrow proc\_n + 1$ ;
30: end
31:  $Mask[r_n, c_n] \leftarrow i$ ;
32:  $Distance[r_n, c_n] \leftarrow d$ ;
33:  $Push(q_2, (r_n, c_n, i))$ ;
34: end
35: end
36: if  $Empty(q_2)$  then
37: swap pointers  $q_1$  and  $q_2$ 
38: end

```

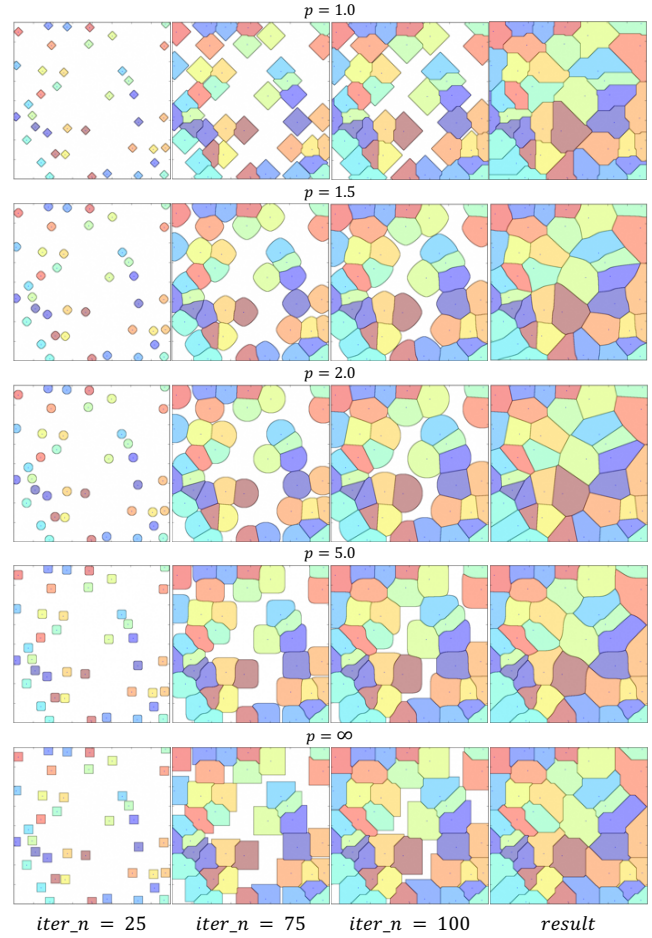


Figure 1. Voronoi diagram evolution process for different L_p -norms. For the following values of p : 1, 1.5, 2.0, 5.0, ∞ was final and intermediate results were shown for 25, 75, 100 iterations.

4. Complexity analysis

The upper bound of the algorithm is $O(NM)$ since in the worst case we should calculate distance from all N pixels of the grid to all M input vertices. In the next theorems it will be shown that the complexity of the algorithm can be reduced to $O(N)$.

Theorem 1. The complexity of "initialization" step of the algorithm is $O(M)$, where M – number of input points.

Proof. The initialization procedure (steps 1-14) contains only one loop iterating though M input points and setting initial values of the $Mask$ and $Distance$ grids (complexity is $O(1)$) and also pushing initial positions into queue (complexity $O(1)$). Thus, the resulting complexity is $O(M)$. ■

Theorem 2. The complexity of "evolution" step is $O(N)$, where N is a number of pixels on a grid.

Proof. The algorithm performs in the similar way as layered breadth-first search on the grid. Thus, each pixel of the grid can be considered only

one time, except the pixels on the border. The total number of pixels is N . Thus “evolution” step complexity is proportional to $O(N)$. ■

Theorem 3. The total complexity of the algorithm is $O(N)$, where N is a number of the pixels on a grid.

Proof. It follows from Theorem 1 and Theorem 2 and the fact that $M \ll N$. ■

5. Experimental results

Figure 1 shows the example of approximate L_p -Voronoi diagram construction on the grid of 800×800 pixels using the algorithms described in section 3. The values of p were chosen to be equal to

1, 1.5, 2.0, 5.0, ∞ . The figure also shows transitional states of evolution process for 25, 75, 100 iterations. By color we mark individual Voronoi cells.

6. Conclusions and outlooks

In this work we have presented the approximate algorithm for L_p -Voronoi diagram construction on the 2D discrete grid. The key idea of this algorithm is evolution of L_p -circles with the centers at the input points. During the evolution process, the intersections of the circles trace the edges of the Voronoi diagram. The algorithm can be extended and applied for image segmentation problems. It can be used for splitting an image into superpixels.

Список використаних джерел

1. Computational geometry: Algorithms and Applications / M. Berg, O. Cheong, M. Kreveld, M. Overmars. – Berlin: Springer-Verlag, 2008. – 386 P.
2. Fortune S. A Sweepline Algorithm for Voronoi Diagrams / Steven Fortune. // Algorithmica. – 1987. – №2. – P. 153–174.
3. Preparata F. P. Computational Geometry: An Introduction / F. P. Preparata, M. Shamos. – New York: Springer-Verlag, 1985. – 398 P.
4. Lee D. T. Two-dimensional Voronoi diagrams in the L_p -metric / D. T. Lee. // Journal of the ACM (JACM). – 1980. – №27 (4). – P. 604–618.
5. Sud A. Interactive computation of discrete generalized voronoi diagrams using range culling / A. Sud, N. Govindaraju, D. Manocha. // In Proc. International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering. – 2005. – №23. – P. 557–566
6. Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams / A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara, S. N. Chiu., 2000. – 696 P.
7. Fast computation of generalized Voronoi diagrams using graphics hardware / [K. E. Hoff III, T. Culver, J. Keyser et al.]. // In Proc. 26th annual conference on Computer graphics and interactive techniques. – 1999. – P. 277–286.
8. Ushizima D. M. Segmentation of subcellular compartments combining superpixel representation with Voronoi diagrams / D. M. Ushizima, A. G. Bianchi, C. M. Carneiro. // Ernest Orlando Lawrence Berkeley National Laboratory. – 2015.

References

1. BERG, M. (2008). Computational geometry. Berlin: Springer-Verlag.
2. FORTUNE, S., (1987). A sweepline algorithm for Voronoi diagrams. Algorithmica, 2(1-4), pp. 153-174.
3. PREPARATA, F. and SHAMOS, M. (1985). Computational Geometry. New York, NY: Springer New York.
4. LEE, D.T., (1980). Two-dimensional Voronoi diagrams in the L_p -metric. Journal of the ACM (JACM), 27(4), pp. 604-618.
5. SUD, A., GOVINDARAJU, N. and MANOCHA, D., (2005). Interactive computation of discrete generalized voronoi diagrams using range culling. In Proc. International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering, 23.
6. OKABE, A., BOOTS, B., SUGIHARA, K. and CHIU, S. (2000). Spatial tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagram: J. Wiley & Sons.
7. HOFF III, K.E., KEYSER, J., LIN, M., MANOCHA, D. and CULVER, T., (1999). Fast computation of generalized Voronoi diagrams using graphics hardware. In Proc. 26th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, pp. 277-286.
8. USHIZIMA, D.M., BIANCHI, A.G. and CARNEIRO, C.M., (2015). Segmentation of subcellular compartments combining superpixel representation with Voronoi diagrams (No. LBNL-6892E). Ernest Orlando Lawrence Berkeley National Laboratory, Berkeley, CA (US).

Надійшла до редакції 05.12.2017

УДК 519.7

Кузьмич О.І.,¹ к.ф.-м.н., доц.
Мекуш О.Г.,¹ к.ф.-м.н., ст.викладач
Пех П.А.,² к.т.н. доцент
Багнюк Н.В.,² к.т.н. доцент

Проблема керування стійкою поставою людини при наявності проблем ЦНС

¹ Східноєвропейський національний
університет імені Лесі Українки, 43000,
м.Луцьк, просп. Волі, 13.

² Луцький національний технічний
університет, 43018, м.Луцьк, вул.Львівська, 75.
e-mail: kuzmych79@gmail.com
mekush77@gmail.com
ki@lntu.edu.ua
bagnyuknata@gmail.com

O. I. Kuzmych¹, PhD, Associate professor
O.G. Mekush¹, PhD, Lecturer
P.A. Pekh², PhD, Associate professor
N.V. Bagnyuk², PhD, Associate professor

The problem of control for human postural balance under CNS problems

¹ Lesya Ukrainka Eastern European National
University, Ukraine, 43000, Lutsk, Voli ave., 13.

² Lutsk National Technical University, Ukraine,
43018, Lutsk, Lvivs'ka str., 75.
e-mail: kuzmych79@gmail.com
mekush77@gmail.com
ki@lntu.edu.ua
bagnyuknata@gmail.com

У даній роботі розроблено оптимальний контролер динамічної моделі, що описує систему стійкого вертикального балансу людини у відповідь на малі збурення. Метою роботи є аналіз проблеми імітації роботи центральної нервової системи (ЦНС) в сенсі розуміння способів її функціонування, а також застосування цих знань для рішення актуальних питань біомеханіки та мехатроніки. В статті розглянуті проблеми адаптації методів аналізу систем керування для вибору стратегії управління стійкою поставою людини, яка проектується максимально наближеною до функціонування ЦНС людини. Запропонований закон керування мінімізовує нервові зусилля ЦНС, а також реалізовує стабілізацію центру мас та голови людини при наявності малих відхилень тіла від положення рівноваги. Для вирішення даної проблеми розглянуто модель запропоновану А.Кіо [1]. Використані актуальні значення операційних точок були отримані в [2] на базі програмної платформи відстеження руху Opti Track Flex 13, що моделює процес руху людини.

Ключові слова: оптимальне управління, управління системою балансу людини, моделювання.

In this paper, an optimal controller of dynamic model describing a system of stable vertical balance of a human in response to small perturbations is developed. The purpose is to analyze the problem of simulating the work of central nervous system (CNS) in terms of understanding the ways of its functioning, and application of these knowledge for solving topical and actual issues in biomechanics and mechatronics. The problems of adaptation of control systems methods analysis for the choice of a strategy of control of human postural balance in a presence of CNS problems are considered. In addition, a control strategy is developed to describe as close as possible the functioning of the human central nervous system. The proposed control law minimizes the nervous efforts of the central nervous system, as well as implements the stabilization of the center of mass and head of a human in the presence of small state perturbations of the body from the position of equilibrium. In order to solve this problem, the model proposed by A.Kuo [1] is used. The actual values of the operating points were taken in [2] with the use of Opti Track Flex 13 motion tracking software, which simulates the human movement process.

Key words: optimal control, human postural balance, simulation and modeling.

Статтю представив чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

1. Аналіз проблеми керування стійкою поставою людини

Завдяки підвищеним вимогам до задоволення потреб людей з проблемами ЦНС в останні роки задачі моделювання, аналізу та

управління для біомеханічних систем є одними з найбільш складних та актуальних наукових проблем. Значна частина поточних методів моделювання мають обмежену придатність до вивчення задач контролю біомеханіки людини.

Крім того, динамічна модель керування в просторі станів є ключовим інструментом, який може бути застосований також до сучасних проблем мехатроніки. Біомеханічні моделі різної складності були широко використані в дослідженні координації рухів у ссавців, наприклад [3,4,5].

Дана стаття присвячена актуальним питанням стосовно того, як ці моделі можуть бути адаптовані та використані для вирішення конкретних проблем, що виникають в системах нейрофізіології людини та мехатроніки. Динамічні моделі в просторі станів контролю балансу вертикального положення людини особливо добре підходить для моделювання, це є популярна експериментальна платформа [6]. Вона служить ідеальною відправною точкою для застосування методів моделювання до різноманітних спеціальних проблем контролю ЦНС. На базі вищезгаданих сучасних наукових досліджень виявлено, що стоячі людиноподібні суб'єкти та об'єкти, при збуренні шляхом зміщення назад рухомої опорної поверхні при умові нерухомих ніг, як правило, реагують переміщуючись в сагітальній площині та використовуючи одну або комбінацію двох стратегій. Для невеликих зміщень [7] вони, як правило, тримають коліна, стегна, шию досить прямо, при цьому рухаються переважно гомілковостопні суглоби ("гомілковостопна стратегія" - ГС). А для координатних зміщень, які тримають їх центр мас в межах периметра опори стопи, вони як правило, використовують рух, що координує згин або розширення м'язів стегна з меншим одночасним подовженням або згинанням гомілкових суглобів ("стегова стратегія" - СС), зберігаючи інші суглоби відносно нерухомо. В даній статті аналіз цих стратегій обмежений визначенням кінематичних величин, на протипагу результатам, викладеним у [6,7,8], де також описані ці стратегії з використанням наземних реакційних сил та електроміограм, але з деякими неоднозначностями визначень. Моделювання таких зміщень положення в сагітальній площині особливо має сенс, так як динаміка сенсомоторної системи може бути лінеаризована без істотного впливу на точність моделі і рух є двомірним. Наприклад, Хемамі та інші [9,10,11] розробили одно- та дволанкові моделі інвертованого маятника з використанням зворотнього зв'язку з метою стабілізації положення рівноваги. Вони виявили, що інтелектуальні прогнози поведінки таких систем можуть бути зроблені за допомогою

лінеаризованої динаміки. Вони також обчислили мінімальні набори керувань зворотнього зв'язку та запропонували системний метод ідентифікації та пошуку цих результатів. У роботі [12] розроблено складну модель кістково-нейро-м'язової системи на основі оптимального лінійно-квадратичного керування (LQR-control). Вони використовують цю модель зворотного зв'язку для аналізу різних схем управління, на базі даних про положення, довжини м'язів, м'язову жорсткість. Однак залишається суттєвий розрив між цими моделями та можливостями їх застосування до проблем управління нервової системи. Наприклад, ці моделі не пояснюють і не передбачають вибір стратегій управління гомілковостопного суглоба та гомілки, описаної в [6]. Лінійні моделі передбачають лише масштабовані результати, які варіюються залежно від розміру збурень. Втім, реакція людини на великі пертурбації посилює реакції на малі збурення [7].

У даній роботі ми зосереджені на розробці управління поставою людини у відповідь на малі збурення в сагітальній площині. Дана стаття є продовженням роботи [1]. У цьому контексті ми використовуємо реалістичні набори прискорень та метод розроблений Куо і Заяцем [13,14] для характеристики всього комплексу кутових прискорень, що досягаються суглобами. Використовуються припущення, що біомеханічні і контрольні обмеження відіграють певну роль у примусовому виборі стратегій. Розглянута модель, запропонована [3, 11] включає в себе мінімальні набори станів для стабілізації тіла. Очевидно, що дана модель зворотного зв'язку найкращим чином узгоджується також і з експериментальними результатами [15]. Якщо величина збурення збільшується в розмірах, спостерігається більша залежність від стратегії СС. Вона виявляється більш ефективною для стабілізації центру маси тіла, ніж стратегія ГС, навіть при відсутності обмежень, що впливає на вибір моделі управління.

Актуальною є проблема адаптації методів аналізу систем керування для вдосконалення існуючих моделей, а також врахування важливих обмежень для пояснення вибору стратегій ГС і СС у застосуванні до опису функціонування ЦНС. Таке пояснення, природньо, залежить від гіпотез, що стосуються цілей ЦНС. Завдання даної роботи, таким чином, полягає у розробці вдосконаленої стратегії керування для моделі, запропонованої Куо, яка сумісна з результатами моделювання інших дослідників, і може пояснити обмеження, описані в [13, 14]. У даній

роботі розглядається модель зворотного зв'язку на основі такого обмеження. Тут стратегії керування можуть бути включені в цільову функцію, її ефективність визначається придатністю задовольнити різні цілі керування.

Розглядувані в даній статті цілі управління включають мінімізацію “нервових зусиль”, а також стабілізацію центру мас та голови. Ця модель ідеально підходить для вивчення питань, що виникають в експериментальному дослідженні постави людини.

2. Опис моделі в просторі станів

Розглянута модель була запропонована [1], вона має три 3 координати фазового вектора станів: суглобові кути, швидкості та прискорення (вектори x , $\dot{x}$, $\ddot{x}$ відповідно), як показано на Рис. 1.

Ці координати фазового вектора стану описують основну динаміку і найбільш важливі характеристики системи. Суглобові крутильні моменти, що виробляються м'язами та зовнішніми силами зумовлюються збуреннями, що діють на тіло, внаслідок чого рух описується компонентами цього станового вектора. Оскільки ці кінематичні характеристики x , $\dot{x}$, $\ddot{x}$ та моменти є змінними, які підлягають вимірюванню або оцінці, то вони будуть служити ідеальними входами та виходами для моделі контролера ЦНС.

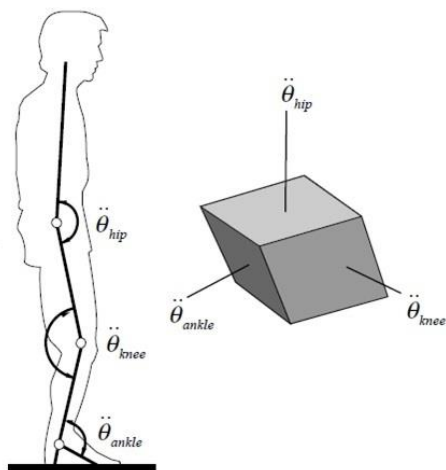


Рис.1. Координати фазового вектора станів системи

Передбачається, що дана модель системи керування отримує вектор цільових значень x з вищих рівнів ЦНС, порівнює його з вимірюваним станом і генерує управляючу команду u .

Перша вимога до моделі полягає в тому, щоб вона адекватно відображала поведінку систем вводу-виводу ЦНС людини, що складається з датчиків, контролера та виконавчих елементів. Передбачається, що ЦНС, хоча і складається з багатьох нелінійних елементів, буде діяти лінійно в околі операційної точки, що відповідає вертикальному статичному стоянню.

Розглянута модель включає в себе мінімальні набори станів. Для того, щоб виявляти різницю між тими збуреннями, на які можна протистояти стратегією гомілковостопного суглоба, і тих, що використовують стратегію стегна, ЦНС повинна мати інформацію від нижніх і верхніх датчиків тіла для оцінки руху центру маси. Експериментальні дані свідчать про те, що інформація про повний стан також може бути доступна і використовується для вибору стратегії управління. Датчики верхньої частини тіла є достатніми для диференціювання двох типів збурень. Передбачається також, що існує шлях зворотного зв'язку від датчиків верхнього тіла до м'язів ніг. Пацієнти з вестибулярними порушеннями, з іншого боку, також здатні частково протистояти збуренням, що вказує на те, що використання гомілковостопного суглоба або соматосенсорної стопи є достатньою для стабілізації тіла [16]. Тому враховується умова, що всі механічні стани ЦНС в довільній реалізації доступні або оцінені для використання у формуванні контролюючих сигналів.

Обмеження, накладені на систему механіки людського тіла та конфігурацію опорно-рухового апарату достатньо сильно можуть впливати на доступні варіанти контролю. Ці обмеження включають:

- 1) Тримання колін прямо (як експериментально спостерігалось в реакціях людини на зворотні збурення опорної поверхні, які штовхають тіло вперед);
- 2) Утримування стоп на опорній поверхні;
- 3) Існують обмеження на максимальні м'язові зусилля. Деталі цих обмежень узагальнено тут (див. [13], [17]).

Для ідентифікації системи керування в просторі станів ми використовуємо набір допустимого прискорення (НДП), розроблений Куо [1]. Це сукупність всіх суглобових кутових

прискорень (зібраних у вектор $\ddot{x}$), які можуть бути отримані будь-якою комбінацією можливих активацій м'язів (тобто, з нормованими активаційними коефіцієнтами в діапазоні $0 \leq a_i \leq 1$ для $i=1,2,\dots,t$ м'язів). НДП можна знайти за допомогою даних, отриманих з рівнянь

руху, геометрії опорно-рухового апарату та м'язових властивостей, припускаючи, що м'язи повільно скорочуються, а динаміка збудження-скорочення швидко зростає відносно руху. Для сагітальної плоскої опорної поверхні, яка дозволяє рух гомілковостопного, колінного та стегнового суглобів, цей набір є багатогранником в об'єднаному просторі кутових прискорень, представлених на Рис.2 (див. [18] для деталей).

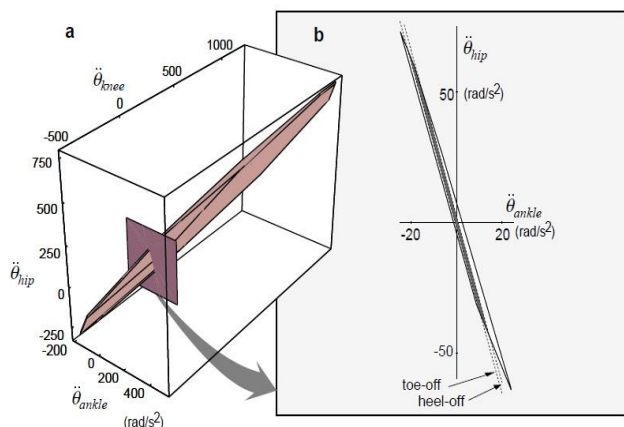


Рис.2. Набір допустимих прискорень (НДП)

Таким чином, НДП може бути використана як міра прискорення, яке можна досягти в будь-якому напрямку в місцях прикладення сил на бедрі, гомілці, в колінах для заданого рівня нервового зусилля. Це зручний спосіб опису сукупного внеску даної комбінації кутових прискорень суглобів з урахуванням необхідних моментів сил (як у моделі [3]), а також м'язових сил, необхідних для досягнення цих моментів. З огляду на припущення, наведене вище, нервові зусилля еквівалентні кількості м'язової сили, нормалізованої до максимально можливої прикладеної сили.

Візуалізація засобів НДП при побудові станово-просторової моделі та наявність обмежень відносяться до конкретної пози людини. Коліна тримаються відносно прямо, у протистоянні з порушеннями, які нахиляють тіло вперед [6], [15]. Це призводить до накладення

умови $\ddot{x}_{knee} = 0$. Отриманий багатокутник представляє собою набір усіх можливих прискорень щиколотки та стегон під час тримання колін прямо [14]. Окрім обмежень моделювання та нервових зусиль, пов'язаних з рухом, можливі набори прискорення також можуть бути використані для зменшення кількості ступенів свободи в системі. Обмеження положення тіла характеризують горизонтальне

розташування центру мас тіла, який не повинен виходити за межі базової частини поверхні опори для забезпечення стійкості.

3. Розробка закону керування

3.1. Постановка задачі та ціль керування

Щоб забезпечити коректний закон управління, головний центр вибору керування використовує механічні стани, щоб вибрати кількість управляючих сигналів, необхідних для протидії збуренню. Цей центр оцінює різницю між оціненим і бажаним станами, обирає відповідну траєкторію і подає зворотній зв'язок. Оскільки динаміка тіла розглядається близькою до лінійної в розглядуваному околі, то для обмеженого збурення контролер може бути також лінійним. Відповідно до цього контролюючий центр обирає відповідну матрицю коефіцієнтів контролера.

На основі аналізу НДП на Рис.2, модель системи керування має вигляд:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{ankl} \\ \ddot{x}_{ankl} \\ \ddot{x}_{kne} \\ \ddot{x}_{hip} \end{bmatrix} = b \cdot \begin{bmatrix} u_{ank} \\ u_{hip} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -7.7 \\ 0 & 0 \\ 0 & 24.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ank} \\ u_{hip} \end{bmatrix} \quad (1),$$

де u_{ank} і u_{hip} контролюючі сигнали ЦНС, а саме - стратегія гомілки (ГС) та стегна (СС) відповідно.

Визначаючи керування як сукупність гомілковостопної та стегнової стратегій, базова основа b використовується для визначення суглобових кутових прискорень. Перша колонка b (стратегія гомілки) визначається шляхом вимірювання ширини полігону НДП (див. Рис.2) вздовж осі, що відповідає впливу щиколоткових суглобів, тоді як другий стовпець (стратегія стегон) виявляється шляхом вимірювання НДП вздовж його довгої осі [13]. Рівняння лінійного обмеження має вигляд:

$$c_{cm0} \leq c_{cm}^T x \leq c_{cm1} \quad (2),$$

де x - вектор суглобових кутів.

Прагнення тримати ноги рівно на землі, відображається у вигляді обмежень:

$$\begin{aligned} c_{heel}^T \ddot{x} &\leq c_{heel0} \\ c_{toe}^T \ddot{x} &\leq c_{toe0} \end{aligned} \quad (3)$$

При відображенні в просторі стратегій гомілки та стегна (тобто, коліна зберігаються фіксованими), границі обмеження приблизно співпадають з довгою віссю полігону НДП. Форма НДП в просторі стратегій гомілки та стегна корисна для визначення правил для

моделювання динаміки суглобів, заснованих виключно на кінематиці.

Стратегія стегна може бути визначена як рух уздовж обмежень (3), тоді як стратегія гомілки ґрунтується на прискореннях вздовж осі щиколотки. Ця стратегія гомілки є ідеальною, оскільки експерименти показали, що суб'єкти фактично реагують кривою траєкторією в області гомілковостопного суглоба, що означає, що рух стегнового суглоба не рівний нулю. Ці дві стратегії, описані фазовими векторами в просторі суглобових стратегій гомілки та стегна, можуть послужити основною базою для всіх можливих рухів суглобів. Таким чином, будь-який рух (в якому коліна тримаються рівно) можна виразити як комбінацію стратегій стегна та гомілковостопного суглоба. Зазначивши величину кожного базового фазового вектора, що відповідає максимально можливим прискоренням у цьому напрямку, ця базова основа може також враховувати нервові зусилля, пов'язані зі стратегіями.

Ціль проектування керування полягає у наступному. Необхідно скерувати стани фазового вектора $x(t)$ до їх відповідно встановлених цільових значень $\bar{x}(t)$, визначених з експериментальних даних. Ці дані отримані з біомеханічних експериментальних вимірювань [2], проведених за допомогою програмного забезпечення для відстеження руху OptiTrackFlex13 із відповідним програмним забезпеченням (описано нижче). Статичні картографічні значення цільових контрольних значень формуються на основі таких, які встановлені у комфортельних для людини умовах.

Вибираючи елементи керування в просторі станів u_{ank} та u_{hip} , а не простору станів суглобів та продуктованих моментів обертання, доцільно лише розглядати дві стратегії замість трьох елементів фазового простору (моментів обертання суглобів). Тоді наявні обмеження на коліна, кількість станів, що підлягають керуванню зменшується на два (оскільки $x_{knee} = 0$, $\dot{x}_{knee} = 0$). Таким чином, зменшується кількість необхідних зворотних зв'язків.

Оптимальні цілі керування досягаються з допомогою застосування лінійного квадратичного регулятора (LQR). При цьому необхідною умовою є отримання інформації про стан зворотного зв'язку, яка виконується з допомогою оцінки або відповідними датчиками.

Припустимо, що ЦНС веде себе як контролер LQR. Якщо ЦНС має аналогічні цілі та аналогічні критерії ефективності, то система керування LQR продукуватиме гладку, стабільну траєкторію реалізації станів, подібно до того, як це спостерігається у людей у відповідь на збурення.

У даній статті інформація, важлива для управління положенням рівноваги людини (наприклад, цільові значення для керування), такими як кут відхилення тулуба, отримується з картографічної таблиці даних, побудованої на основі проведених експериментів [2].

3.2. Методологія управління

У даній роботі ми використовуємо лінійно-квадратичний контролер для отримання траєкторій, які мінімізують цільову функцію, що оцінює відхилення контролю та стану фазового вектора від номінального. Цей регулятор забезпечує зручний засіб отримання зворотного зв'язку, що забезпечує плавність і стабільність траєкторії.

Розглядається проблема визначення оптимального керування зворотного зв'язку $u(x)$ для лінійної системи зменшеного порядку у наступному вигляді

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4),$$

де вектор стану і управління мають вигляд відповідно:

$$x \equiv \begin{bmatrix} x_{ank} \\ x_{hip} \\ \vdots \\ x_{ank} \\ \vdots \\ x_{hip} \end{bmatrix}, \quad u \equiv \begin{bmatrix} u_{ank} \\ u_{hip} \end{bmatrix}.$$

Матриці системи A , B враховують як механіку тіла, так і динаміку датчиків, залежно від бажаної складності моделі. Вони мають вигляд

$$A \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -7.7 \\ 0 & 24.5 \end{bmatrix}.$$

Запропонований контролер регулює стан системи (4) до цільових заданих значень, визначених за допомогою статичних експериментальних даних. Отже, необхідно знайти невідому матрицю K для отримання зворотного зв'язку,

$$u = \bar{u} - K(x - \bar{x}) \quad (5)$$

таку, щоб система (4) зворотнього зв'язку мала наступні властивості:

- $u(x)$ досягає асимптотичної стійкості рівноваги;

- $u(x)$ мінімізує функціонал якості

$$J = \int_0^{\infty} [(x - \bar{x})^T Q (x - \bar{x}) + (u - \bar{u})^T R (u - \bar{u})] dt \quad (6),$$

де Q та R - вагові матриці відхилень станів x та керувань u від номінальних значень $\bar{x}$ та $\bar{u}$ відповідно.

Оптимальна траєкторія стану $x(t) = x_{opt}(t)$, продукована контролером мінімізує набір цілей, відображених у функціоналі (6).

Закон управління $u(x)$ скеровує систему асимптотично до цільового значення фазового вектора $x(t)$. Матриці Q та R довільно вибираються так, щоб забезпечити умову позитивної визначеності.

Розглянемо тепер квадратичну форму $V = (x - \bar{x})^T P (x - \bar{x})$, де P - це стала симетрична позитивно визначена матриця. Поверхні рівня функції Ляпунова V - еліпсоїди в просторі станів $x(t)$. Якщо $V < 0$ уздовж усіх траєкторій (за винятком $x = \bar{x}$, де $V = 0$), тоді всі траєкторії асимптотично наближаються до $\bar{x}$ під дією керування (5), оскільки V - функція, яка має єдиний глобальний мінімум в точці $\bar{x}$. Траєкторії фазового вектора з часом наближатимуться до $\bar{x}$. На базі відомої теоретичної бази, розв'язуємо алгебраїчне рівняння Ріккати

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P = -Q \quad (7)$$

і отримуємо матрицю коефіцієнтів $K = R^{-1}B^T P$.

Для розв'язання цих рівнянь використовуємо чисельні методи MatLab. Розроблений контролер, забезпечує глобально асимптотично стійке положення рівноваги. Надійність оптимального керування впливає з рівняння Гамільтона-Якобі-Беллмана. Можна досягти оптимальності та асимптотичної стійкості з будь-якою бажаною областю атракції.

4. Результати обчислень та моделювання

При моделюванні збурень у сагітальній площині та повернення у пряме положення отримувались цільові значення швидкостей та координат, при цьому людина знаходилася в зручному і комфортному стані. Для проведення аналізу виконано експериментальні дослідження для здорового чоловіка (вага тіла 70 кг та 183 см висота тіла), реалізовано серію різнотипних збурень. Необхідні біомеханічні експериментальні випробування були проведені дослідницькою лабораторією університету в Лодзі [2]. При цьому для отримання

кінематичних даних для дослідження руху було використано систему захоплення руху Opti Track Flex 13 з відповідним програмним забезпеченням. Високоякісна камера Flex13 із функцією захоплення руху та об'ємною зйомкою має високу точність, 1,3 мільйона пікселів, високочастотний 120 FPS, а також великий набір (56 видів) способів перегляду. Завдяки такому ефективному професійному технічному рішення вона забезпечує ефективне захоплення руху. У поєднанні із власними алгоритмами обробки в реальному часі камера може відстежувати рухи в межах допустимих значень менш ніж 0,5 мм, ідеально підходить для детального та комплексного відстеження рухів. Дана система використовувалась для отримання високоточних, релевантних даних за допомогою спеціальних наборів біомеханічних маркерів. Кілька маркерів захоплення руху були розміщені на тілі моделі в місцях відстеження руху відповідних суглобів в режимі реального часу для подальшого аналізу в середовищі MatLab.

Обчислення закону управління для системи (1) будемо виконувати за допомогою інструменту Control System Toolbox програмної платформи MatLab. Для обчислення відповідних матриць, які визначають закон керування системи використаємо команду *care*, що вирішує матричне рівняння Ріккати.

Для цільових значень суглобових кутів та кінцевих швидкостей рівних нулю (відповідно положенню рівноваги) та вагових матриць

$$Q = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1.3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

отримаємо матрицю

$$P = \begin{bmatrix} 1.96 & 0.20 & 1.05 & 0.32 \\ 0.20 & 2.63 & 0.38 & 0.17 \\ 1.05 & 0.38 & 2.33 & 0.71 \\ 0.32 & 0.17 & 0.71 & 0.29 \end{bmatrix}$$

та матрицю коефіцієнтів контролера

$$K = \begin{bmatrix} 0.80 & 0.29 & 1.79 & 0.55 \\ -0.21 & 1.40 & -0.34 & 1.71 \end{bmatrix}.$$

Нова стабілізована матриця системи має вигляд:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2.49 & 10.56 & -4.42 & 12.68 \\ 5.37 & -34.54 & 8.36 & -42.13 \end{bmatrix}.$$

Набір власних значень нової матриці наступні:
 $e_1 = \{-43.93; -0.76; -0.92; -0.92\}$,

що підтверджує стійкість отриманої матриці системи. Проведемо моделювання стабілізованої системи в MatLab на базі використання солвера розв'язання систем диференціальних рівнянь *ode45*. На Рис. 3 подано результати моделювання та стабілізовані траєкторії системи. Часові залежності суглобових кутів та швидкостей демонструють стійку поведінку.

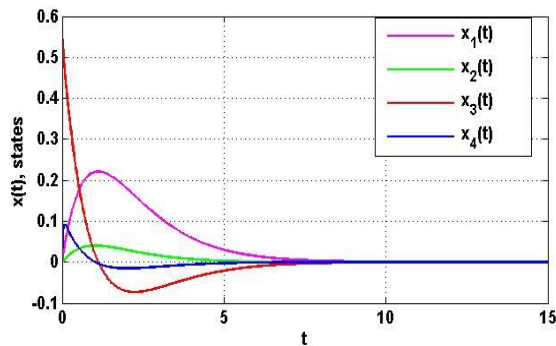


Рис.3. Стабілізовані траєкторії вектора стану

У загальному випадку цільові значення можуть бути отримані з ряду датчиків (наприклад, пропріоцепторів бедра, вестибулярних органів), які можуть забезпечувати такі дані, як позиція та швидкість. У цьому контексті представлена модель може бути інтегрована з аналогічними моделями оцінки стану для створення повної моделі сенсомоторного керування положенням рівноваги людини, яка включає в себе вектор виходів і вектор станів.

Список використаних джерел

1. Kuo A.D. An Optimal control model for analyzing human postural balance // *IEEE Transactions on biomedical engineering*.-1995.-Vol.42.-№ 1.-P.87-101.
2. Wojnicz W. Approach for determination of functioning of lower limb muscles / Zagrodny B., Ludwicki M., Syczewska M., Mrozowsky J., Awrejcewicz J. // *14th International Conference on Dynamical Systems - Theory and Application*, Lodz, 11-14 Dec.- 2017.-P. 45-49.
3. Golliday C. L. J Postural stability of the two-degree-of-freedom biped by general linear feedback / Hemami H.// *IEEE Trans. Automat. Control*.-1976.-Vol. AC-21.- P. 74-79.
4. Pandy M. G. An optimal control model for maximum-height human jumping / Zajac F. E., Sim E., Levine W.S. // *J. Biomech.*-1990.- Vol. 23.- P.1185-1198.
5. Bobbert M. F. Coordination in vertical jumping / Van Ingen Schenau G. J. // *J. Biomech.*-1988.-Vol.21.- P. 249-262.
6. Nashner L. M. The Organization of human postural movements: a formal basis and experimental

Висновки

У даній роботі розроблено оптимальний контролер динамічної моделі, що описує систему людського стійкого вертикального балансу у відповідь на малі збурення. Було вибрано оптимальну стратегію управління, яка задовольняє умові мінімізації функціоналу якості та є максимально наближена до функціонування центральної нервової системи людини.

Проведені дослідження та експерименти підтверджують гіпотезу, що ЦНС веде себе як лінійно-квадратичний контролер LQR. Це підтверджується також наступними міркуваннями. По-перше, можна очікувати, що ЦНС поводить себе як оптимізатор, оскільки вона використовує всі можливі резервні набори даних як виконавчих елементів, так і датчиків. Якщо оптимізація, яку виконує ЦНС, може бути адекватно описана квадратичною функцією станів та елементів управління, то LQR є природним вибором для моделювання поведінки ЦНС. Важливо зазначити, що моделювання системи регулювання постурального балансу людини як контролера LQR не передбачає, що ЦНС виконує такі функції. Швидше за все, система LQR являє собою ідеальну лінійну систему, яка найкраще описує даних процес, мінімізуючи квадратичну функцію якості, яка залежить від станів і управлінь, одночасно задовольняючи описані вище умови.

References

1. KUO A.D. (1995) An Optimal control model for analyzing human postural balance. *IEEE Transactions on biomedical engineering*, vol.42, №1, pp. 87-101.
2. WOJNICZ W., ZAGODNY B., LUDWICKI M., SYCZEWSKA M., MROZOWSKY J., AWREJCEWICZ J. (2017) Approach for determination of functioning of lower limb muscles. *14th International Conference on Dynamical Systems – Theory and Application*, Lodz, 11-14 Dec.
3. GOLLIDAY C. L. J., HEMAMI H. (1976) Postural stability of the two-degree-of-freedom biped by general linear feedback. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-21, pp. 74-79.
4. PANDY M.G., ZAJAC F.E., SIM E., LEVINE W.S. (1990) An optimal control model for maximum-height human jumping. *J. Biomech.*, vol. 23, pp. 1185-1198.
5. M. F. BOBBERT M.F., VAN INGEN SCHENAU G.J. (1988) Coordination in vertical jumping. *J. Biomech.*, vol. 21, pp. 249-262.
6. NASHNER L. M., MCCOLLUM G. (1985) The organization of human postural movements: a formal

- synthesis / Mccollum G // *Behav. Brain Sci.*-1985.- Vol. 8.- P. 135-172.
7. Horak F. B. Central programming of postural movements: adaptation to altered support-surface configurations / Nashner L. M. // *J. Neurophys.*-1986.- Vol. 55.- P. 1369-1381.
8. Allum J. H. J. The role of stretch and vestibula-spinal reflexes in the generation of human equilibrating reactions / Honegger F., Pfaltz C. R. // in *Afferent Control of Posture and Locomotion, Progress in Brain Research*, Eds. Amsterdam: Elsevier.- 1989.-P. 81-88.
9. Hemami H. Biped stability considerations with vestibular models / F. C. Weimer F.C., Robinson C.S., Stockwell C.W., Cvetkovic V. S. // *IEEE Trans. Automat. Contr.*-1978.- Vol. AC-23.- P.1074-1079.
10. Hemami H. Constrained inverted pendulum model of evaluating upright postural stability / Katbab A // *Dyn. Sys. Meas. Cont.*-1982.- Vol. 104.- P. 343-349.
11. Camana P.C. Determination of feedback for human posture control without physical intervention/ Hemami H., Stockwell C. W.// *J. Cyber.*- 1977.- Vol.7.- P. 199-225.
12. He J. Feedback gains for correcting Small perturbations to standing posture / W. S. Levine, And G. E. Loeb// *IEEE Trans. Automat. Control.*-1991.-Vol. 36.- P. 322-332.
13. Kuo A. D. A Biomechanical analysis of muscle strength as a limiting factor in standing posture/ Zajac F. E. // *J. Biomech.*-1993.- Vol. 26.- suppl. 1.- P. 137-150.
14. Kuo A. D. Human standing posture: multijoint movement strategies based on biomechanical constraints / Zajac F. E.// in *Progress in Brain Research*, Eds. Amsterdam: Elsevier .- 1993.- Vol.97.- P. 349-358.
15. Barin K. Evaluation of a generalized model of human postural dynamics and control in the sagittal plane // *Biol. Cyber.*-1989.- Vol 61.- P. 37-50.
16. Horak F. B. Postural strategies associated with somatosensory and vestibular loss / Nashner L. M., Diener H. C. // *Exp. Brain Res.*-1990.- Vol. 82.- P. 167-177.
17. Kuo A. D. What is the nature of the feedforward component in motor Control?/ Zajac F. E.// *Behav. Brain Sci.*-1992.-Vol. 15.- P. 767.
18. Zajac F. E. Muscle and tendon: properties, models, scaling, and application to biomechanics and motor control //in *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, G. L. Gottlieb, Ed. Boca Raton, FL: CRC Press.- 1989.- P. 359-411.
- basis and experimental synthesis. *Behav. Brain Sci.*, vol. 8, pp. 135-172.
7. HORAK F. B. NASHNER L.M. (1986) Central programming of postural movements: Adaptation to altered support-surface configurations. *J. Neurophys.*, vol. 55, pp. 1369-1381.
8. ALLUM J. H. J., HONEGGER H, PFALTZ C. R. (1989) The role of stretch and vestibula-spinal reflexes in the generation of human equilibrating reactions, in *Afferent Control of Posture and Locomotion, Progress in Brain Research*, Eds. Amsterdam: Elsevier, pp.81-88.
9. HEMAMI H., WEIMER F. C., ROBINSON C. S., STOCKWELL C. W., CVETKOVIC V. S. (1978) Biped stability considerations with vestibular models. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-23, pp. 1074-1079.
10. HEMAMI H., KATBAB A. (1982) Constrained inverted pendulum model of evaluating upright postural stability. *J. Dyn. Sys. Meas. Cont.*, vol. 104, pp. 343-349.
11. CAMANA P. C., HEMAMI H., STOCKWELL C.W. (1977) Determination of feedback for human posture control without physical intervention. *J. Cyber.*, vol. 7, pp. 199-225.
12. HE J., LEVINE W.S., LOEB G.E. (1991) Feedback gains for correcting Small perturbations to standing posture. *IEEE Trans Automat Contr.*, vol.6, pp. 322-332.
13. KUO A.D., ZAJAC F. E. (1993) A biomechanical analysis of muscle strength as a limiting factor in standing posture. *J. Biomech.*, vol. 26, suppl. 1, pp. 137-150.
14. KUO A.D., ZAJAC F. E. (1993) Human standing posture: multijoint movement strategies based on biomechanical constraints, in *Progress in Brain Research*, Eds. Amsterdam: Elsevier, vol. 97, pp. 349-358.
15. BARIN K.(1989) Evaluation of a generalized model of human postural dynamics and control in the sagittal plane. *Biol. Cyber.*, vol. 61, pp. 37-50.
16. HORAK F. B., NASHNER L.M., DIENER H.C. (1990) Postural strategies associated with somatosensory and vestibular loss. *Exp. Brain Res.*, vol. 82, pp. 167-177.
17. KUO A.D., ZAJAC F. E. (1992) What is the nature of the feedforward component in motor control?" *Behav. Brain Sci.*, vol. 15, p. 767.
18. ZAJAC F. E. (1989) Muscle and tendon: properties, models, scaling, and application to biomechanics and motor control, in *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, G. L. Gottlieb, Ed. Boca Raton, FL: CRC Press, Inc., pp. 359-411.

УДК 519.925.51

Кулян В.Р.¹, к.т.н.
Юнькова О.О.², к.ф.-м.н.
Петрович В.М.¹, к.т.н.

Оптимізація портфеля при обмеженнях

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03127, м. Київ, пр-т
Глушкова, 4д

e-mail: v.kulyan@gmail.com

²Київський національний економічний
університет імені Вадима Гетьмана, м. Київ,
03680, пр-т Перемоги, 54/1

Victor R. Kulian¹, Ph.D.
Olena O. Yunkova², Ph.D.
Valentina M. Petrovich¹, Ph.D.

Portfolio optimization with restrictions

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03068, Kyiv, Glushkova ave., 4d

e-mail: v.kulyan@gmail.com

²Vadym Getman National Economics University of
Kyiv, 03680, Kyiv, Peremogy ave., 54/1

Розглядається математична задача оптимальної диверсифікації портфеля акцій на основі розв'язання двокритеріальної оптимізаційної задачі.

Ключові слова: математична модель, оптимальне інвестування, портфель акцій.

The problem of optimal diversification of the portfolio is considered. Based on mathematical models of the dynamics of the formation of the market value of one share and optimal stock portfolio is determined the structure of optimal portfolio. Such models built in a class of ordinary differential equations. Another problem is the choice of the stock portfolio expected of the same return, but the risk is less. For this purpose we use a set of acceptable and effective portfolios. This sequence of steps of the algorithm allows consistently solve two optimization problems. In solving the problem of diversification of the portfolio of shares is a problem determining the moments of time, necessary to perform such diversification. In the article we constructed an algorithm for determining these points in time, based on the solution of the problem of optimal control. The use of this algorithm enables selection of optimal risk portfolio at a certain level it expected profitability. It uses efficient and acceptable set of investment portfolios.

Key words: mathematical model, optimal investment, stock portfolio

Статтю представив д.т.н., професор Гаращенко Ф.Г.

INTRODUCTION

For solving and analyzing applied portfolio investment problems there are a wide range of approaches [1], [3]. A significant part of them involves the active use of methods of technical analysis, which make it possible to determine the market value of the stock in the future. Such rules for constructing the forecast, due to the well-developed mathematical formalizations and approaches and relatively not complicated practical implementation, are actively developing and effectively applied not only in the stock market. The use of analytical methods of fundamental analysis allows us to answer the question: why the market value of a stock in the

future will be just such? At present, due to the complexity of mathematical models in the study of the market pricing processes of stock market assets, the methods of fundamental analysis have not yet found effective development and constructive application. Principles for analyzing processes based on the development and application of mathematical modeling methods [2], [3] are obviously the most promising and devote much attention to the research.

In this paper an attempt is made to construct new fundamental approaches for solving portfolio investment problems, based on the application of methods of mathematical

modeling of dynamic systems and the admissible and effective set of portfolio

The purpose of the work is to develop analytical methods and computational procedures for solving the problem of two-criterion optimization of a portfolio of risky securities. The problems are presented in the formulation of G. Markovitz in the presence of quantitative and qualitative instrumental market constraints on the structure of the portfolio.

MATHEMATICAL FORMULATION OF THE PROBLEM

The mathematical problem of constructing the optimal dynamics of the portfolio of shares in the most general formulation of G. Markovitz has the form [1]

$$\left\{ \begin{array}{l} r^T x = \max_x \\ x^T V x \rightarrow \min_x \\ I^T x = 1 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1, n} \end{array} \right\}. \quad (1)$$

Here T – is the sign of transposition.

The content of this two-criterion task is to determine the optimal investment strategy, which involves maximizing the expected profitability and minimizing the risk at the same time. According to G. Markovitz, the criteria in the task are controversial, that is, improving the outcome of one of them leads to deterioration beyond others. In practice, this means that increasing the profitability of a portfolio corresponds to an increase in its riskiness. There are different approaches to solving the problem (1), but they are more academic in nature and difficult to apply to real investment in securities. A step that can bring the problem formulation (1) closer to the practical investment needs to divide this two-criterion problem into two one-criterion ones. The first of them involves risk

optimization at a predetermined level of expected profitability at the chosen time point, and the second is the optimization of the expected profitability for the investor-defined "optimal" portfolio risk level. In some cases, such mathematical statements of nonlinear programming problems allow for analytical solutions [2], but do not consider the essential features. They consist in the fact that at each step the solution of the problem of diversification of the portfolio of portfolios must be taken into account as budgetary and instrumental constraints. The constraints make possible to analyze the availability of the required quantity and quality of financial instruments on the market

$$x_i(t) \in X(t), i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Here $X(t)$ – a limited set of admissible portfolios. The mathematical formulation of the problem of optimizing the risk of an investment portfolio at a time point determined by the level of its expected profitability is such

$$\left\{ \begin{array}{l} r^T(T)x(T) = r_p(T) \\ x^T(T)Vx(T) \rightarrow \min_x \\ I^T x(T) = 1 \\ x_i(t) \geq 0, i = \overline{1, n}, t \in [t_0, T] \\ x_i(t) \in X(t), i = \overline{1, n}, t \in [t_0, T] \end{array} \right\}. \quad (3)$$

On an example of investing in a stock, we consider the problem of optimizing portfolio risk for a given level of its expected return, while taking into account the constraints (2).

THE PROBLEM OF OPTIMAL DIVERSIFICATION OF THE PORTFOLIO

The general task of G. Markovitz of risky assets portfolio optimization (1) involves consideration of another criterion - riskiness.

Let's use this in the future by the set of admissible and effective portfolios. At the same time, one of the main tasks of portfolio investment is the problem of optimal diversification of such portfolio.

The risk optimization procedure for optimal portfolio profitability is to select at each step the permissible portfolios that lie on the line EF . This line connects the point E , that corresponds to the optimal market value of the portfolio with the point, F belonging to the effective set. This line is parallel to the axis of riskiness of portfolios. The feature of this choice of optimal portfolio is that in this line, according to the definition, each of the portfolios corresponds to the same expected profitability, but the risk decreases in the direction of the axis. This property of the admissible set of investment portfolios allows from one side to take into account the limitations (2) and on the other - to determine the portfolio of "optimal" expected returns with less risk.

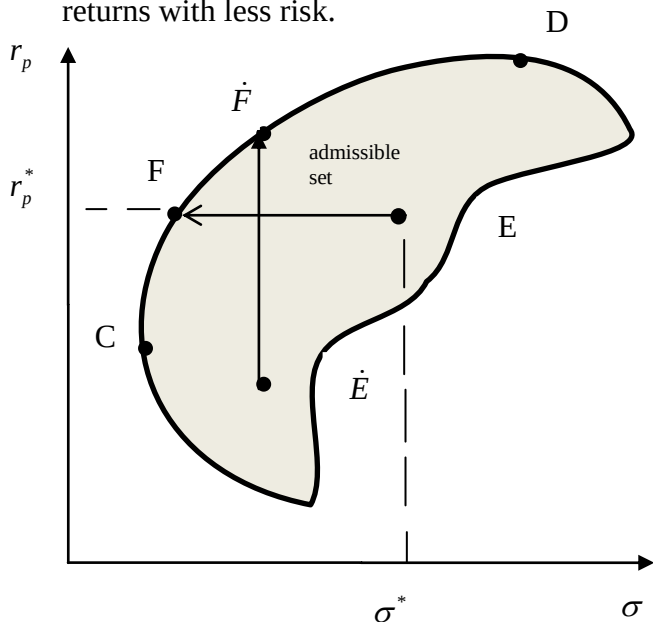


Fig. 1. Solving the problem of optimizing the stock portfolio risk.

Let's turn to the second task in the general statement of G. Markovitz about optimization of risk optimal for the expected profitability of the

portfolio of shares. To do this, we use the sets of admissible and effective portfolios that correspond to the selected set of shares [1, 2].

If a certain portfolio is at a point $\dot{E}$, that is, for which there is no risk of reducing risk according to the above rule, then we define the "optimal portfolio" by moving it from point $\dot{E}$ to point $\dot{F}$ that is an element of an effective portfolio of portfolios. In fact, this means the definition of a portfolio of stocks with a higher expected return. At the same time, such a procedure allows constructively to take into account the existing limitations when diversifying the portfolio.

Another mathematical statement of the problem of optimizing the expected return on the investment portfolio at a time point determined by the level of its risk, is such

$$\left\{ \begin{array}{l} r^T(T)x(T) \rightarrow \max_x \\ x^T(T)Vx(T) = \tau \\ I^T x(T) = 1 \\ x_i(t) \geq 0, i = \overline{1, n}, t \in [t_0, T] \\ x_i(t) \in X(t), i = \overline{1, n}, t \in [t_0, T] \end{array} \right\}. \quad (4)$$

The procedure for optimizing the expected return on a portfolio for a certain level of its risk is to select a procedure for optimizing the expected return on a portfolio for a certain level of its risk is to select at each step the admissible portfolios that lie on the straight line EF (Fig. 1). The line connects the points E that corresponds to the optimal expected return on the calculated portfolio and the point F belonging to the effective set. This line is parallel to the axis of market value. The feature of this choice of optimal portfolio is that in this line, according to the definition, each of the portfolios is responsible for the same risk, but the market value increases.

This property of the admissible set of investment portfolios, as in the previous case, allows one to take into account the restrictions (2), on the other hand, to define a portfolio with "optimal" risk and higher expected returns.

As defined above, portfolio is at a point $\tilde{E}$, that is, for which there is no possibility to increase the expected yield, according to the above rule, then we determine the "optimal portfolio" by moving it from point E to point F that is an element of an effective portfolio of portfolios. In fact, this means reducing the risk profile of the stock portfolio. Effective set or set of effective portfolios in fig. 1 is on the arc CD . It is a set of Pareto [1] for an existing set of

shares on the market.

CONCLUSION

In this study, new mathematical statements of optimization of stock portfolio structure are presented and methods of their solution are developed. Mathematical problems formulated on the basis of models of the dynamics of market value of one share and portfolio of shares. That gives an opportunity to solve the problem of optimal diversification of the portfolio of investments, taking into account of quantitative and qualitative market restrictions on the structure of the portfolio.

Список використаних джерел

1. Шарп У. Инвестиции / Уильям Ф. Шарп, Гордон Дж. Александер, Джеффри В. Бэйли. – Москва: Инфра-М, 1999. – с.1027.
2. Гаращенко Ф.Г. Качественный анализ математических моделей инвестиционного менеджмента / Кулян В.Р., Рутицкая В.В. // Кибернетика и вычислительная техника. – 2005. – № 148. – с. 3-10.
3. Гаращенко Ф.Г. Моделирование динамики и диверсификация портфеля акций / Кулян В.Р., Петрович В.Н., Юнькова Е.А. // Проблемы управления и информатики. - 2016. - № 4.- с. 124-132.

REFERENCE

1. SHARPE, W., ALEXANDER, G. and BAILEY, J. (1995) *Investments*. New Jersey: Prentice Hall.
2. GARASHCHENKO, F., KULYAN, V. and RUTITSKAYA, V. (2005) Quality analysis of mathematical models of investment management: *Cybernetics and computing engineering*. 148. p. 3-10.
3. GARASHCHENKO FEDIR G., KULIAN VICTOR R., PETROVICH VALENTINA M., YUN'KOVA OLENA O. Simulation of the Dynamics and Diversification of Stock Portfolio *Journal of Automation and Information Sciences*. - New York, Connecticut. - 2016. - v. 48, issue 7. - P. 28-40.

The article has been edited 14.12.2017

УДК 004.8:005.4

Мисник Б.В.¹, ст. викл.,
Волошин О.Ф.², д.т.н., проф.,
Снитюк В.Є.³, д.т.н., проф.

B.V. Mysnyk¹, Senior Lecturer,
O.F. Voloshyn², Dr. Sci., Prof.,
V.Ye. Snytyuk³, Dr. Sci., Prof.

Відновлення пропусків даних в базах знань підприємств галузі як мультиагентної системи

Recovery of data gaps in the knowledge bases of enterprises industry as a multiagent system

¹Черкаський державний технологічний університет, 18000, м. Черкаси, бул. Шевченка 460, e-mail: setne1985@gmail.com

¹Cherkasy State Technological University, 18000, Cherkasy, Shevchenko Ave., 460, e-mail: setne1985@gmail.com

^{2,3}Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул. Володимирська 64/13

^{2,3}Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, Volodymyrska st., 64/13,

e-mail: ²olvoloshyn@ukr.net,

e-mail: ²olvoloshyn@ukr.net,

³snytyuk@univ.kiev.ua

³snytyuk@univ.kiev.ua

Запропоновано застосування теорії мультиагентних систем як базису процесів моделювання та підтримки прийняття рішень на підприємствах галузі. Показано, що ідентифікація та прогнозування законів функціонування підприємств відбувається в умовах інформаційної невизначеності, викликаної інсайдерським характером даних. Розроблено метод відновлення відсутніх та пропущених даних на основі технологій обчислювального інтелекту.

Виконано верифікацію та проведено порівняльний аналіз результатів розроблених методів відновлення пропущених даних з використанням трьох наборів даних: штучно згенерованих, які є функціонально залежними; статистичних та даних із відкритих друкованих джерел.

Ключові слова: підприємства галузі, мультиагентні системи, відновлення пропусків в даних, обчислювальний інтелект

The growing amount of general information, on the one hand, and the encapsulation of special kind information on the other hand, point to the need for enterprise managers to use new technologies when making decisions. One of them is multi-agent systems. The use of multi-agent technologies makes it possible to reduce the decisions uncertainty. However, in a homogeneous environment of industry enterprises, a significant amount of data is inaccessible and the quality of decisions is deteriorating, and the decisions themselves are biased.

The actual suggestion is to use methods to restore missing or lost data. Methods for recovering such data are developed on the basis of the evolutionary methods use: genetic algorithms and evolutionary strategies.

In this paper proposed a method for data recovery based on a genetic algorithm, where a cross-cutting technology is proposed, which includes the formation of general and selective populations, the structure of potential solutions, the criteria for neural network training and the target function. For a data recovery method based on an evolution strategy, implementation features are described.

These methods present minimal requirements to data and objective functions. The obtained results of simulation testify to the high accuracy of the reconstructed data in comparison with the use of methods based on the statistical correlation-regression paradigm.

Key words: industry enterprises, multi-agent systems, recovery of data gaps, computational intelligence

Статтю представив д.т.н., с.н.с. Кудін В.І.

Вступ

Динаміка і складність сучасного світу здійснює значний вплив на процеси прийняття рішень. Особливо це позначається на процесах функціонування невеликих підприємств, керівники яких

неминуче стикаються з необхідністю кооперації, роботою в умовах невизначеності, передумовами ліквідації або модернізації. Такі рішення обумовлені значною конкуренцією. Очевидно, що процеси функціонування підприємств вимагають

аналітичної підтримки. У роботах авторів розглядалися проблеми моделювання таких систем [1,2]. Було показано, що використання елементів мультиагентної парадигми є не тільки доцільним, але і необхідним. Які причини спонукають до такого висновку?

По-перше, і виробничі підприємства, і мультиагентні системи мають архітектуру і функціонують за заданими програмами, що вказує на їх дуальність [3].

По-друге, і ті, й інші допускають модульну декомпозицію, що дозволяє здійснювати їх аналіз, а при необхідності і синтез, адже, як відомо, працююча складна система є результатом роботи простих систем.

І, по-третє, наявність загальної властивості системності [4] визначає присутність як конкуренції, так і кооперації при існуванні у відносно замкнутому середовищі і розв'язання однотипних завдань.

На користь застосування мультиагентних систем як деякої парадигми моделювання свідчить той факт, що кожне підприємство в економіці можна представити окремим агентом, а підприємство галузі – ще й агентом з однаковою архітектурою і програмами. Зауважимо, що теорія мультиагентних систем на сьогоднішній день достатньо розвинена, а математичний апарат і програмно-алгоритмічне забезпечення визначаються, зокрема, і специфікою вирішуваних завдань [5].

Особливістю моделювання процесів функціонування підприємств галузі є значна інкапсуляція інсайдерської інформації [6], яка могла б стати базисом для прийняття рішень керівниками підприємств. Така невизначеність призводить до зміщених висновків відповідальних осіб і невірних рішень.

Виходячи із значення інформації про функціонування підприємств галузі, необхідності використання прогнозованих значень, одержуваних в процесі моделювання мультиагентних систем, актуальним є розробка нових та удосконалення відомих методів відновлення пропусків у даних.

Аналіз методів відновлення пропусків у даних виконаний в піонерській роботі R. Little і D. Rubin [7]. Розглянуті методи мають «механістичний» або статистичний характер з відповідними перевагами та недоліками. До таких методів належать: видалення некомплектного рядка з множини даних, заміна пропусків середніми значеннями у відповідних стовпчиках, заповнення пропусків за критерієм подібності, заповнення пропусків з використанням ймовірно-статистичних методів. Відомими є методи, розроблені Но-

восибірською школою аналізу даних та Красноярьською школою нейроматематики.

Аналіз існуючих методів відновлення пропусків у даних свідчить про низьку точність більшості методів, необхідність врахування значної кількості обмежень і перевірки статистичних гіпотез, перевірки припущення про вид статистичної залежності. Далі розглянемо метод, що є вільним від більшості зазначених недоліків і дозволяє отримати такі результати, що, в більшості випадків, задовольняють дослідника.

Мультиагентна система як модель функціонування підприємств галузі

Розглянемо непорожню множину S підприємств галузі, $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$. Підприємства функціонують в деякому середовищі, з якого вони отримують ресурси, енергію та інформацію, і в яке вони віддають продукцію. Процеси життєвого циклу підприємства можуть бути промодельовані з використанням інтелектуальних агентів. Інтелектуальність розуміємо як здатність вирішувати слабко структуровані задачі, тому інтелектуальне моделювання функціонування підприємства – це не тільки обчислення модельних значень, а й вироблення практичних рекомендацій у залежності від їх комбінації.

Будемо припускати, що дії виконуються в інтересах одного підприємства S^* . Час його життєвого циклу вважаємо дискретним $T = \{t_0, t_1, \dots, t_p, \dots, t_q, \dots, t_m\}$. Моменти часу t_i ,

$i \in \{0, 1, \dots, m\}$ визначаються транзакціями в системі на будь-якому з підприємств галузі. Під транзакціями розуміємо будь-яку взаємодію підприємства з середовищем, наслідком чого є зміна кількісних характеристик хоча б одного з підприємств.

Особливістю процесів прийняття рішень на підприємстві галузі є невизначеність вихідної інформації про функціонування підприємств-конкурентів або підприємств-партнерів. Вихідною інформацією для функціонування агента є дані із загальної бази транзакцій, а отримані агентом результати використовуються для прийняття рішень в оперативному, тактичному і стратегічному планах. Відзначимо, що в основі прийняття рішень можуть лежати як чіткі, так і нечіткі продукційні правила типу

$$\text{Если } \bigwedge_{j=1}^J x_j \in A_j, \text{ то } \begin{cases} \bigwedge_{j=1}^J y_j \in B_j \vee \\ \bigvee_{i=1}^I \bigwedge_{j=1}^J y_{ij} \in C_{ij}, \end{cases} \quad (1)$$

де $X = \{x_1, x_2, \dots, x_J\}$ – множина вхідних факторів, $Y^1 = \{y_1, y_2, \dots, y_J\}$ і $Y^2 = \{y_{11}, y_{12}, \dots, y_{JJ}\}$ – множина результуючих характеристик функціонування підприємства, A_j, B_j, C_{ij} – у загальному випадку нечіткі множини зі своїми функціями належності, $i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}$.

Правила (1) необхідні для того, щоб визначити спектр задач, які необхідно розв'язувати керівництву на підприємстві; сформулювати структуру виробництва і здійснювати певну стратегію управління. При цьому необхідні дані, які можуть з'явитися тільки у віддаленій перспективі. Позначимо t_p – поточний момент часу, t_q – час, коли можуть з'явитися відсутні дані, $p \ll q$. Побудуємо модель

$$R(t_p) = H(R(t_p-), In(t_p), Out(t_p)), \quad (2)$$

де $R(t_p)$ – деяка характеристика або показник в момент часу t_p , $R(t_p-)$ – показник інтегрованої динаміки характеристики до моменту часу t_p , $In(t_p)$ і $Out(t_p)$ – значення внутрішніх і зовнішніх для підприємства S^* факторів, відповідно.

Проблема отримання залежності (2) полягає в тому, що значення зовнішніх факторів для підприємства часто невідомі і їх необхідно відновлювати, використовуючи аналітичні методи або експертні процедури. Задача ця не є новою, але технології її розв'язання є проблемноорієнтованими і малоточними.

Метод відновлення пропусків у даних на основі генетичного алгоритму

Оскільки в основу дослідження покладено мультиагентні системи, моделювання та прийняття рішень в інтересах одного з підприємств, припустимо наявність однієї вихідної характеристики Y і пропуски (*) тільки серед значень вхідних факторів $X = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ (табл. 1).

Таблиця 1
Структура вихідних даних

	X_1	X_2	X_3	...	X_{m-1}	X_m	Y
1	a_{11}	a_{12}	*	...	a_{1m-1}	a_{1m}	y_1
2	*	a_{22}	a_{23}	...	a_{2m-1}	a_{2m}	y_2
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	...	a_{3m-1}	a_{3m}	y_3
...	...	...	...	...	...	...	...
$p-1$	a_{p-11}	a_{p-12}	a_{p-13}	...	a_{p-1m-1}	*	y_{p-1}
p	a_{p1}	a_{p2}	*	...	*	a_{pm}	y_p

Таким чином, $Y = f(X) = F(X_1, X_2, \dots, X_m)$ і задача відновлення пропусків полягає в пошуку елементів вектора G , що є розв'язком задачі

$$\arg \min_g \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (y_i - \hat{Y}_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

де g – k -мірний вектор, що містить потенційні значення пропусків, $g = (g_1, g_2, \dots, g_k)$, y_i – табличне значення, $\hat{Y}_i$ – значення, розраховані за ідентифікованою залежністю, що є апроксиматором для $f(X)$, $i = \overline{1, k}$.

Розв'язування задачі (3) буде складатись з двох етапів. На першому з них необхідно отримати апроксимуючу функцію $\hat{Y} = \hat{f}(X) = \hat{f}(X_1, X_2, \dots, X_m)$. Другий етап полягає в пошуку пропущених значень. Оскільки про вид і характеристики функції $\hat{Y}$ нічого не відомо, то будемо використовувати багатосарову прямо-зв'язну нейронну мережу як модель, а генетичний алгоритм або еволюційну стратегію як метод оптимізації.

Потенційний розв'язок має таку структуру:

$$g = (g_1, g_2, \dots, g_k) = \langle \text{пропуск}1, \text{пропуск}2, \dots, \text{пропуск}k \rangle.$$

Значення кожного пропуску $g_i \in \Xi_i = [a_i, b_i]$, $i = \overline{1, k}$. Оскільки вектор g є бінарним, то необхідно визначити кількість генів (розрядів), що відповідають одному пропуску. Для цього використовуємо вектор заданих точностей розв'язку $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_d)$, де ε_i – точність розв'язку за i -м фактором, d – кількість факторів, серед значень яких є пропуски, причому

$$|X_i^{opt} - X_i^*| < \varepsilon_i. \quad (4)$$

У (4) X_i^{opt} – оптимальне значення фактора, X_i^* – прийнятне значення фактора. Далі, для $\forall i \in \{1, 2, \dots, d\}$ знаходимо кількість точок $n_i = (X_i^{\max} - X_i^{\min}) / \varepsilon_i + 1$ розбиття Ξ_i , необхідних для забезпечення необхідної точності. Зауважимо, що $\exists i, j$, такі, що $i \neq j$, але $[a_i, b_i] = [a_j, b_j]$.

Далі нормуємо значення кожного фактора без урахування пропусків; отримаємо, що $a'_{ij} \in [0, 1]$, $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Знайдемо значення $d = \max\{n_1, n_2, \dots, n_d\}$, яке є максимальним значенням кількості елементів розбиття факторів. Після нормування значень факторів $\forall i \in \{1, 2, \dots, d\}$ $\Xi_i = [0, 1]$ розіб'ємо цей одиничний відрізок на d точок, чим тільки посилимо

умови задачі. Таким чином, отримаємо одиничний гіперкуб, кожне ребро якого буде розбите на d точок. Кожна точка на перетині відповідних відрізків буде точкою генеральної популяції і визначатиме потенційний розв'язок.

Оскільки методом розв'язання задачі (3) є генетичний алгоритм, то необхідно визначити потужності генеральної і вибіркової популяцій, а також довжину бінарного представлення значення одного пропуску. Очевидно, що така довжина дорівнюватиме $l = \lceil \log_2 d \rceil + 1$. Таким чином, довжина всього потенційного розв'язку задачі (3) $L = l \cdot k$, а потужність множини потенційних розв'язків $M = 2^L$. Велике значення L вказує на необхідність роботи з вибірковою популяцією потенційних розв'язків. Зазвичай їх кількість в такій популяції – 20-50.

Всі рядки з пропусками будуть елементами навчальної вибірки. Відповідно, рядки без пропусків потрапляють у контрольну вибірку. Такий принцип поділу обумовлений тим, що верифікація результатів розв'язання задачі (3) має здійснюватись на достовірних даних.

Метод відновлення пропусків у даних буде складатися з таких кроків:

1. Виконати препроцесінг даних і підготовчі операції, описані вище. Областю потенційних розв'язків буде одиничний гіперкуб Ξ . Відомі значення k, l, d . $K = 1$.

2. Генеруємо K -у популяцію ініціальних потенційних рішень

$$\{g^1, g^2, \dots, g^{20}\} = \{g_1^1, g_2^1, \dots, g_k^1, g_1^2, g_2^2, \dots, g_k^2, \dots, g_1^{20}, g_2^{20}, \dots, g_k^{20}\}, \quad \text{де}$$

$$g_i^j \in \{0, 1, 2, \dots, d\},$$

$i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $j \in \{1, 2, \dots, 20\}$. Зауважимо, що значення g_i^j рівномірно розподілені.

3. $j = 1$ – номер потенційного розв'язку з вибіркової популяції.

4. Виконуємо навчання нейронної мережі, що має m входів і один вихід. Кількість прихованих шарів і нейронів у них визначається відомими оціночними співвідношеннями і кваліфікацією дослідника. Навчання мережі виконується шляхом вирішення завдання пошуку

$$E_M^j = \min_W \frac{1}{2} \sum_{i=1}^H (y_i - \hat{Y}_i)^2, \quad (5)$$

де H – кількість рядків, в яких були пропуски значень, W – матриця вагових коефіцієнтів нейронної мережі, $y_i, \hat{Y}_i$ – табличні і розраховані значення вихідної характеристики, у відповідних рядках яких були пропуски.

5. Обчислюємо значення цільової функції генетичного алгоритму

$$E_A^j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^V (y_i - \hat{Y}_i)^2, \quad (6)$$

де V – кількість рядків у контрольній вибірці, $y_i, \hat{Y}_i$ – табличні і розраховані значення результуючої характеристики.

6. $j = j + 1$. Якщо $j > 20$, то перейти на крок 7, інакше – на крок 4.

7. Якщо не виконано умови завершення процесу пошуку, то $K = K + 1$ і, використовуючи генетичні оператори, формуємо K -у популяцію потенційних рішень і переходимо на крок 3, інакше серед потенційних рішень K -ї популяції знаходимо

$$g^* = \arg \min_j E_A^j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^V (y_i - \hat{Y}_i)^2, \quad (7)$$

що і буде розв'язком нашої задачі.

Подібний метод розроблено і на основі еволюційної стратегії.

Елементи методу відновлення пропусків у даних на основі еволюційної стратегії

Задачу відновлення пропусків у даних можна розв'язати також з використанням еволюційної стратегії. І генетичні алгоритми, і еволюційні стратегії є популяційними алгоритмами, що мають як спільні, так і різні характеристики. Опишемо відмінності між ними.

Генеральною сукупністю в цьому випадку буде вся множина визначення цільової функції або задана множина Ξ . Для того, щоб зменшити кількість параметрів еволюційної стратегії, вважатимемо, що дані знаходяться в одиничному гіперкубі. Оскільки кількість пропусків дорівнює k , то генеруємо λ векторів,

$$\{g_1^p, g_2^p, \dots, g_\lambda^p\} = \{g_{11}^p, g_{12}^p, \dots, g_{1k}^p, g_{21}^p, g_{22}^p, \dots, g_{2k}^p, \dots, g_{\lambda 1}^p, g_{\lambda 2}^p, \dots, g_{\lambda k}^p\},$$

що мають k компонент, значення, значення кожної з яких рівномірно розподілені на $[0, 1]$.

Для кожного потенційного розв'язку, заповнюючи ним пропуски, навчаємо нейронну мережу і якість навчання перевіряємо на контрольній вибірці. Таким чином, кожному g_j^p ставимо у відповідність значення цільової функції E_A^j , $j = \overline{1, \lambda}$, λ – кількість потенційних розв'язків у батьківської популяції. На наступному кроці генеруємо популяцію розв'язків-нащадків. Спосіб такої генерації може бути багато, зупинимось на тому, що

$$g_{ijl}^o = g_{ij}^p + \xi(N(0, \sigma_{ij})), \quad (8)$$

де індекс o – позначає нащадків, кількість нащадків у кожного батьківського розв'язку μ , тобто $l = \overline{1, \mu}$. Потужність множини батьківських розв'язків відноситься до потужності множини розв'язків-нащадків як 1:7. Звичайно, для кожної задачі таке співвідношення необхідно уточнювати. Значення σ_{ij} залежать від конкретних значень потенційних розв'язків, але, з огляду на початкові припущення і перетворення, будемо вважати, що $\sigma_{ij} = \sigma \quad \forall i, j$. Будемо визначати параметр σ , виходячи з відомого в теорії ймовірностей правила 3-х сигма і евристики, згідно з якою відрізки можливої генерації розв'язків-нащадків, що відповідають інтервалу $(g^p - 3\sigma, g^p + 3\sigma)$, можуть мати мінімальний перетин. Визначення мінімального перетину здійснює дослідник.

Таким чином здійснюється генерація $\lambda \cdot \mu$ розв'язків-нащадків. Аналогічно, для кожного потенційного розв'язку-нащадка, заповнюючи ним пропуски, здійснюється навчання нейронної мережі і розраховуються значення E_A^{jl} на контрольній вибірці. Серед значень E_A^j і E_A^{jl} визначаємо λ мінімальних і відповідні їм μ розв'язки складають батьківську популяцію наступної епохи, $j = \overline{1, \lambda}, l = \overline{1, \mu}$. Процес триває до тих пір, поки не буде виконана умова зупинки.

Головною відмінністю методів є те, що різноманітність розв'язків, які генеруються генетичним алгоритмом, визначається точністю, заданою дослідником; а в еволюційній стратегії таке різноманіття визначається розрядністю комп'ютера. У першому випадку розв'язки генеруються дискретно, у другому, можна вважати, неперервно. Відзначимо, що для ймовірнісної збіжності розроблених алгоритмів необхідно, щоб в генерації популяції рішень наступної епохи брали участь розв'язки як попередньої епохи (батьки), так і поточної (нащадки).

Експериментальна верифікація отриманих результатів

Для підтвердження ефективності розроблених методів відновлення пропусків у даних були проведені експерименти з трьома наборами даних, де пропуски генерувалися штучно. Такими наборами даних були:

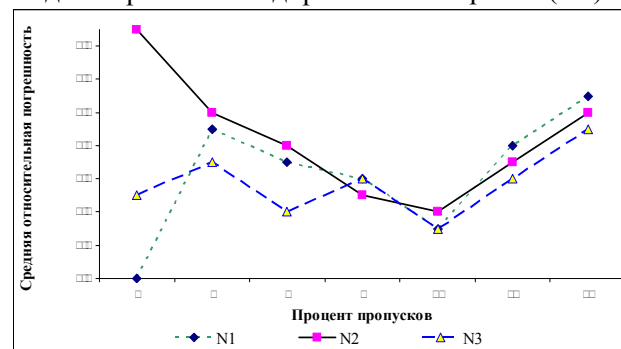
1. Дані, згенеровані за залежністю $Y = (\sin(X_1) + c \cos(X_2)) \cdot \frac{X_1 \cdot X_2}{X_3}$. Значення змін-

них X_1, X_2, X_3 мають рівномірний розподіл на відрізка $[0, 100]$. Кількість наборів даних – 50.

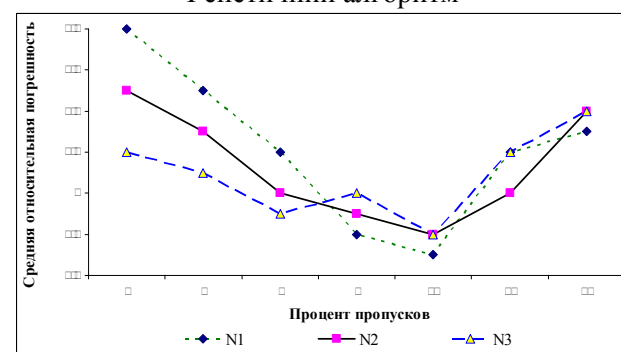
2. Статистичні дані з сайту Державної служби статистики України. Вхідні фактори: кількість працюючих в 1-4 кварталах 2017 року по регіонах і в Україні (X_1, X_2, X_3, X_4). Результируюча характеристика Y – середньомісячна заробітна плата. Кількість наборів даних – 26.

3. Дані, отримані з відкритих джерел діяльності підприємств з виготовлення вікон в місті Черкаси в Україні. Враховувалися такі фактори: X_1 – ідентифікатор підприємства, X_2 – кількість робітників, X_3 – витрати на рекламу; результируюча характеристика Y – ціна виробу (двостулкове, двокамерне вікно з профілю Rehau). Кількість наборів даних – 50, для деяких підприємств записів було кілька.

Здійснюючи вибір даних для моделювання, ми прагнули перевірити потужність методу (рис. 1) на наборі даних, які є жорстко пов'язаними аналітично (N1), на статистичному наборі (N2) і на даних реальних підприємств м Черкаси (N3).



Генетичний алгоритм



Еволюційна стратегія

Рис. 1. Динаміка середнього відносного відхилення при відновленні пропусків

Кількість пропусків генерувалась згідно із рівномірним розподілом (але, виходячи з кількості вхідних факторів, не більше одного пропуску в одному рядку даних) від 1% до 20%. Точність методу оцінювалася, виходячи з

формули середнього відносного відхилення $\varepsilon = \frac{1}{100} \sum_{j=1}^{100} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{g_i - a_i}{a_i} \right)^2 \cdot 100\% \right)$, де g_i – значення пропуску, отримане шляхом моделювання, a_i – реальне значення, 100 – кількість експериментів для фіксованої кількості пропусків.

На рис. 1 показана динаміка середнього відносного відхилення в залежність від відсотка пропусків для методу відновлення даних, що базується на генетичному алгоритмі і на еволюційній стратегії типу $(\lambda + \mu)$. Критерієм зупинки пошуку рішення було мале відхилення (0,001) середніх значень цільових функцій сусідніх епох.

Відзначимо, що при кількості пропусків більше 20% середнє відносне відхилення мало експоненціальне зростання. Проводився також порівняльний аналіз для інших методів відновлення пропусків, перерахованих в п. 1.

Середнє відносне відхилення становило для тих самих пропусків (при їх відносній кількості від 1% до 20%) від 3% для методу різноманіт до 44% при заповненні пропусків середніми значеннями.

Висновки

Результати проведених досліджень вказують на доцільність використання еволюційних методів при відновленні пропусків у даних, оскільки демонструють високу точність результатів при мінімальних обмеженнях.

Тип даних, як і еволюційні методи відновлення пропусків у даних, надають мінімальний вплив на точність результату і в окремих випадках визначаються типом задачі і відносною кількістю відсутніх даних.

Список використаних джерел

1. Мисник Б.В. Мультиагентные технологии анализа и оптимизации функционирования предприятий отрасли / Б.В. Мисник, В.Е. Снитюк // Математичні машини і системи. – 2015. – № 2. – С. 139–146.
2. Voloshyn O. Intellectual information support of branch enterprise executives' decision making processes / O. Voloshyn, B. Mysnyk, V. Snytyuk // Information Theories and Applications. – 2014. – Vol. 21, N. 4. – P. 303–313.
3. Niazi M. Agent-based Computing from Multi-agent Systems to Agent-Based Models: A Visual Survey / M. Niazi, A. Hussain // Scientometrics. – 2011. – 89 (2). – 479–499.
4. Panait L. Cooperative Multi-Agent Learning: The State of the Art / L. Panait, S. Luke // Autonomous Agents and Multi-Agent Systems. – 2005. – № 11(3). – P. 387–434.
5. Lopez B.A. Multiagent System for Coordinating Ambulances for Emergency Medical Services / B. Lopez, B. Innocenti, D. Busquets // IEEE Intelligent Systems. – 2008. – Vol. 23. – P. 50–57. – P. 65–70.
6. Lakkaraju K. et al. Research Directions for Service-Oriented Multiagent Systems / K. Lakkaraju et al. // IEEE Internet Computing. – 2005. – Vol. 9. – P. 65–70.
7. Little R.J.A. Statistical Analysis with Missing Data / R.J.A. Little, D. Rubin // John Wiley and Sons, 2002.

References

1. MYSNYK, B. V., SNYTYUK, V. E. (2015). Multiagentnie technologiiy analisa i optimizatsii funkcionirovaniya predpriyatiy otrasli. *Matematychni mashini i sistemi*, 2, p. 139–146.
2. VOLOSHYN, O., MYSNYK, B., and SNYTYUK V. (2014). Intellectual information support of branch enterprise executives' decision making processes. *Information Theories and Applications*, 21–4, p. 303–313.
3. NIAZI M., HUSSAIN A. (2011). Agent-based Computing from Multi-agent Systems to Agent-Based Models: A Visual Survey. *Scientometrics*, 89 (2), p. 479–499.
4. PANAIT L. (2005). Cooperative Multi-Agent Learning: The State of the Art. *Autonomous Agents and Multi-Agent Systems*, 11(3), p. 387–434.
5. LOPEZ B. A., INNOCENTI, B., and BUSQUETS, D. (2008). Multiagent System for Coordinating Ambulances for Emergency Medical Services. *IEEE Intelligent Systems*, 23, p. 50–57.
6. LAKKARAJU K. et al. (2005). Research Directions for Service-Oriented Multiagent Systems. *IEEE Internet Computing*, 9, p. 65–70.
7. LITTLE R.J.A., RUBIN D. (2002). Statistical Analysis with Missing Data. John Wiley and Sons, 1987.

Надійшла до редколегії 30.12.2017

УДК 681.3.062

Еміл М. Насіров, здобувач

Emil M. Nasirov, Postgraduate Student

**Блочно-діагональний підхід до невід'ємної
факторизації розріджених лінгвістичних
матриць і тензорів надвеликої розмірності з
використанням латентного розподілу
Діріхле**

**Blocks approach of non-negative huge linguistic
sparse matrix and tensors factorization using
Latent Dirichlet allocation**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д, e-mail: enasirov@gmail.com

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova ave., 4d,
e-mail: enasirov@gmail.com

В роботі описано алгоритми невід'ємної факторизації розріджених матриць та тензорів, популярну технологію в штучному інтелекті взагалі, та в комп'ютерній лінгвістиці зокрема. Наведено існуючі підходи до факторизації матриць та тензорів. Запропоновано використання латентного розподілу Діріхле для приведення матриць та тензорів до блочно-діагональної форми для паралелізації та пришвидшення невід'ємної факторизації лінгвістичних матриць та тензорів надвеликої розмірності. Використання пам'яті та мережових операцій було проаналізовано та оптимізовано.

Ключові слова: штучний інтелект, комп'ютерна лінгвістика, паралельні обчислення

This paper proposes parallel method of non-negative large sparse matrix factorization - very popular technique in computational linguistics. The initial matrix contains frequency estimations of using terms in Wikipedia articles.

The main purpose of the paper is developing of a parallel method of factorization. Proposed blocks factorization approach using Latent Dirichlet allocation, for speedup of non-negative sparse extra-large linguistic matrix and tensor factorization. Memory usage and data transmitting necessity of factorization algorithm was analysed and optimized. Presented method pretends to become a good basis for developing new effective tools for non-negative huge sparse matrix and tensors factorization. It can be used to perform the tasks of industrial scale to factorize sparse matrices of large dimension with an acceptable time using available computing resources from the point of computational linguistics. The proposed method also supports the scalability of the model. This perspective proves theoretical and practical value of the proposed algorithm.

Keywords: artificial intelligence, computational linguistics, parallel computations

Статтю представив чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Анісімов А. В.

Сьогодні невід'ємна факторизація матриць та тензорів є дуже популярною технологією в штучному інтелекті взагалі, та в комп'ютерній лінгвістиці зокрема. Використовуючи невід'ємну факторизацію в рамках парадигми латентно-семантичного аналізу, комп'ютерні лінгвісти застосовують даний підхід для розв'язання таких

прикладних задач, як класифікація, кластеризація текстів та термінів[1, 2], побудова мір семантичної близькості[3], автоматичне виділення лінгвістичних структур та відношень (*Selectional Preferences* [4] та *Verb Sub-Categorization Frames* [5]) і багато інших.

© Е. М. Насіров, 2017

Дана робота описує побудову моделі паралелізації обчислення невід'ємної факторизації розріджених матриць надвеликої розмірності, що представляє особливий інтерес та актуальність з точки зору її застосування у великих NLP системах загального тематичного призначення, не обмежених використанням лише для вузьких предметних областей.

Задача невід'ємної факторизації розріджених матриць та тензорів надвеликої розмірності постала в процесі розробки системи визначення міри семантичної близькості-зв'язності за технологією Латентного Семантичного Аналізу[6]. Для побудови системи був оброблений великий текстовий корпус статей англomовної Вікіпедії..

Алгоритм невід'ємної матричної факторизації

Алгоритм невід'ємної матричної факторизації виконує декомпозицію невід'ємної матриці V на невід'ємні матриці W та H таким чином, щоб

$$V \approx WH$$

В якості функції оцінки може бути використана функція виміру відстані між двома невід'ємними матрицями. Однією з таких мір є квадрат Евклідової метрики:

$$\mu = \|A - B\|^2 = \sum_{ij} (A_{ij} - B_{ij})^2$$

Така цільова функція обмежена знизу. Нижня границя 0 досягається тоді і тільки тоді коли $A = B$.

Отже, при використанні Евклідової метрики, факторизація матриці полягає в мінімізації $\|V - WH\|^2$ при умові невід'ємності W та H .

Така цільова функція не зростаюча при наступних правилах:

$$H_{ij} \leftarrow H_{ij} \frac{(W^T V)_{ij}}{(W^T W H)_{ij}} \quad (1)$$

$$W_{ij} \leftarrow W_{ij} \frac{(V H^T)_{ij}}{(W H H^T)_{ij}} \quad (2)$$

Виконання ітерацій алгоритму продовжується до тих пір, поки не буде досягнута стаціонарна точка, або не буде виконана максимальна кількість ітерацій[7].

Застосування моделі до факторизації тензорів

Для того, щоб обчислити невід'ємні матриці-компоненти $\{A, B, C\}$ зазвичай застосовується обмежений оптимізаційний підхід для мінімізації підходящої функції оцінки. Зазвичай мінімізують наступну функцію:

$$D_F(Y \| [A, B, C]) = \|Y - [A, B, C]\|_F^2 + \alpha_A \|A\|_F^2 + \alpha_B \|B\|_F^2 + \alpha_C \|C\|_F^2$$

, де $\alpha_A, \alpha_B, \alpha_C$ – невід'ємні регуляційні параметри.

Існує щонайменше три різні підходи до розв'язання такої оптимізаційної задачі. Перший підхід полягає у використанні векторної форми функції оцінки: $J(X) = \text{vec}(Y - [A, B, C]) = 0$. Для розв'язання використовується метод найменших квадратів. Цей метод для факторизації тензорів вперше використав Паатеро [7]. Якобіан такої функції може мати розмір $ITQJ \times (I + T + Q)$, а отже такий підхід потребує значних розрахункових витрат.

У другому підході Акар, Колда та Дунлаві запропонували штучно оптимізувати функцію оцінки використовуючи техніку нелінійної зв'язної градієнтної оптимізації.[1]

Третім, і найпоширенішим підходом є використання техніки ALS. В цьому підході підраховується градієнт функції оцінки для кожної матриці окремо.

$$\nabla_A D_F = -Y_{(1)}(C \odot B) + A[(C^T C) \odot (B^T B) + \alpha_A I],$$

$$\nabla_B D_F = -Y_{(2)}(C \odot A) + B[(C^T C) \odot (A^T A) + \alpha_B I],$$

$$\nabla_C D_F = -Y_{(3)}(B \odot A) + C[(B^T B) \odot (A^T A) + \alpha_C I].$$

Прирівнюючи кожен компоненту градієнта до 0 та накладаючи умову невід'ємності можна отримати ефективні та прості правила оновлення матриць:

$$A \leftarrow [Y_{(1)}(C \odot B) + [(C^T C) \odot (B^T B) + \alpha_A I]^{-1}]_+,$$

$$B \leftarrow [Y_{(2)}(C \odot A) + [(C^T C) \odot (A^T A) + \alpha_B I]^{-1}]_+,$$

$$C \leftarrow [Y_{(3)}(B \odot A) + [(B^T B) \odot (A^T A) + \alpha_C I]^{-1}]_+.$$

Основними перевагами такого підходу є висока швидкість збіжності та можливість розподілення для задач великої розмірності.

Блочно-діагональний підхід до факторизації матриць та тензорів

Суть методу полягає у переході від необхідності факторизувати надвеликий розріджений лінгвістичний тензор або матрицю до невід'ємної факторизації набору лінгвістичних тензорів та матриць значно зменшеного розміру.

Розрідженість матриць та тензорів дозволяє привести їх до блочно-діагональної форми за допомогою перестановок шарів в тензорах або рядків та стовпчиків в матриці, змінюючи базис факторизації. У випадку, коли слово може належати декільком блокам, слово може бути розділене на дві копії, що відповідатимуть одному слову.

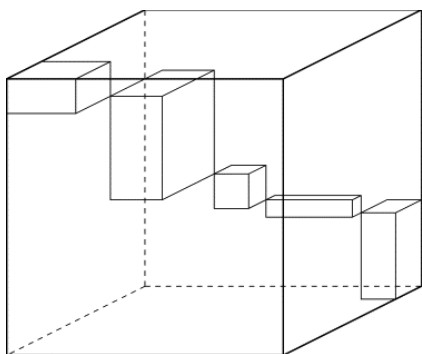
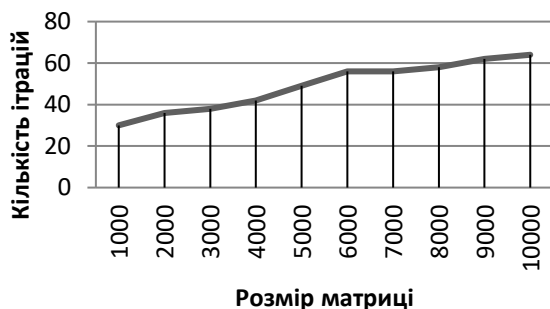


Рисунок 1. Графічне представлення тензору блочно-діагонального виду.

Розміри блоків найкраще обирати такими, що можуть бути повністю завантаженні в пам'ять. В результаті буде отримано N блоків.

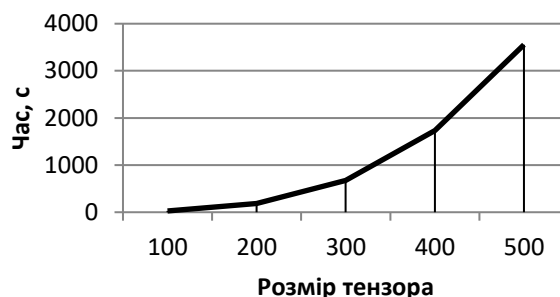
Переваги такого підходу:

1. Не потрібно мережевих операцій на кожній ітерації. Необхідно лише початкове розподілення блоків матриці або тензора між вузлами.



Графік 1.

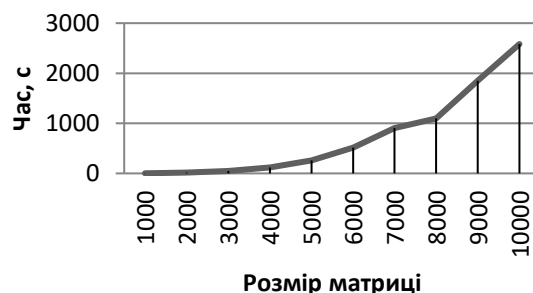
2. Швидша збіжність. На графіку 1 та графіку 2 показано час необхідний для факторизації квадратних тензорів різних розмірів відповідно, в один потік без використання GPU. На графіку 3 показано необхідну кількість ітерацій для невід'ємної факторизації квадратних матриць різних розмірів.



Графік 2.

3. Зменшення k , а отже і зменшення розмірів результатів та об'ємів необхідних даних для зберігання в пам'яті під час ітерацій.

4. Швидший підрахунок функції оцінки μ . Швидший підрахунок добутку $W \cdot H$ так як менше k . Кількість елементів для підрахунку функції оцінки менша в N разів (для матриці), кількість необхідних перевірок менша так як зменшується загальна кількість ітерацій.



Графік 3.

5. При цьому також гарантовано ефективно підтримується масштабованість моделі. Тобто для її розширення та збагачення новими даними з додаткових текстових корпусів немає необхідності виконувати невід'ємну факторизацію всього надвеликого тензора заново з самого початку. Обчислення виконуються лише на окремих блоках лінгвістичного тензора з

подальшою модифікацією тільки відповідних фрагментів векторів моделі.

6. Швидке відновлення значень після факторизації. Всі ненульові значення розподілені тільки по діагональним блокам, тому всі значення що знаходяться поза діагональними блоками не можуть бути відмінні від 0. Для отримання значення достатньо відновлення значення лише в блоках входження слів. У випадку зведеної до блочно-діагональної матриці, в результаті факторизації окремих блоків для кожного слова буде отримано один або декілька рядків та ідентифікатор блоку в якому це слово знаходиться. При відновленні, якщо слово та стаття знаходяться в різних блоках – результатом буде 0, інакше результатом буде добуток відповідних рядка та стовпчика.

Недоліком запропонованого методу є те, що створення копій слів при групуванні необхідних ненульових комірок матриці чи тензору в блоки відбувається випадковим чином та може призвести до створення багатьох копій одного слова.

Використання латентного розподілу Діріхле для приведення матриць та тензорів до блочно-діагонального форми

Для побудови блочно-діагональної структури всередині єдиного надвеликого лінгвістичного тензору методом формування тематичних діагональних блоків.

Таким чином система може не відразу опрацьовувати мільйони текстів різних тематик та складати тензор надвеликої розмірності, а обробляти та аналізувати весь вхідний текстовий корпус по тематичних розділах – в результаті утворюється набір незалежних лінгвістичних тензорів прийнятної розмірності для кожної тематики окремо.

Для розділення вже існуючого тензору на тематичні блоки може бути використаний Латентний розподіл Діріхле (LDA)[8] - це генеративна імовірнісна модель корпусу. LDA - трирівнева ієрархічна байєсівська модель, в якій кожен елемент колекції моделюється як кінцева суміш над основним набором тем. Кожна тема, в

свою чергу, моделюється як нескінченна суміш над основним набором тематичних ймовірностей.

Основна ідея полягає в тому, що документи представлені як випадкові суміші над латентними темами, де кожна тема характеризується розподілом за словами. В LDA кожний документ може розглядатись як набір різних тематик.

Метод LDA складається з наступних кроків для кожного документа w в корпусі D :

- Для кожного слова з кожного документа присвоїти випадково одну тему (t) з K можливих;
- Для кожного слова з кожного документа підрахувати:
 - $p(t|d)$ — відсоток слів в документі d , які належать темі t ;
 - $p(w|t)$ — відсоток слова w у всіх документах, які належать до теми t ;
 - присвоїти слову w нову тему t з вірогідністю $p(t|d) \times p(w|t)$.
- Повторити другий пункт необхідну кількість ітерацій.

Метод LDA оснований на імовірнісній моделі

$$p(d, w) = \sum_{t \in T} p(d) \cdot p(w|z) \cdot p(z|d),$$

де d — документ;

z — тема;

w — слово;

T — множина тем;

$p(d)$ — розподіл на множині документів;

$p(w|z)$ — умовний розподіл слова w в темі z ;

$p(z|d)$ — умовний розподіл теми z в документі d .

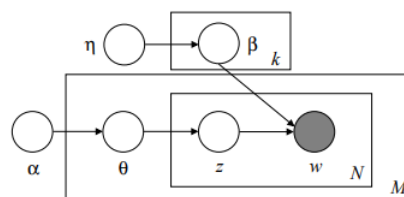


Рисунок 2. Графічне представлення методу LDA

Графічне представлення методу показано на Рисунку 2, де M – колекція документів, N –

довжина документу в словах, Θ – розподіл тем в документі, α – апіорний розподіл Діріхле на параметри Θ .

Використовуючи визначення вірогідності належності слів до тем методом LDA, можна привести тензор до блочно-діагонального виду з T блоків, де T – кількість тем.

Для цього необхідно після виконання методу LDA та отримання вірогідностей приналежності слів тематикам виконати наступні кроки:

1. Початково, для кожного слова обирається тема z_{w_i} максимальною отриманою вірогідністю.
2. Значень для слів з однієї тематики одразу переміщуються до відповідного блоку
3. Для значень з двох слів однієї тематики z_i – для третього слова створюється копія в тематиці z_i
4. Для всіх інших значень тензору обирається тематика слова з найбільшою вірогідністю серед слів. Для інших слів створюється копія в обраній тематиці, якщо не було створено на попередньому кроці.

Після того як всі значення тензора будуть розділені між блоками необхідно провести переіндексацію слів та зсув. В результаті у лівому-верхньому ближньому блоці тензору утворився тензор-підпростір i -тої тематики. Всі його значення переносяться в окремий тензор T_i . При переносі всі відповідні ненульові значення в тензорі T у діапазоні $[1..n_i] \times [1..m_i] \times [1..k_i]$ обнуляються. Після переносу тензор i -тої тематики T_i може бути факторизований окремо.

При такому підході копії слів створюються тільки за потреби та обмеженої кількості, що не перевищить кількість тем, а отже і блоків.

Для порівняння швидкодії запропонованого підходу був зібраний тривимірний тензор суб'єкт-об'єкт-предикат по статтям англomовної Вікіпедії з трьох тематик розмірами 427x363x528 слів. Використовуючи запропонований підхід, тензор було приведено до блочно-діагонального виду з трьома блоками, що відповідають трьом тематикам. Були отримані 3

тензори розмірами: 115x92x171, 126x111x149, 186x160x208.

Для порівняння часу факторизація тензорів виконувалась в 1 потік без використання паралелізації та GPU. В таблиці 1 показано час виконання 10 факторизацій кожного тензору для уникнення випадкових впливів. Таким чином, навіть на не великому тензорі та розділенні на 3 діагональні блоки, вдалось очікувано зменшити час факторизації на 28,7%.

Тензор	Час, с	Повний час, с
Повний тензор	24.489837	24.489837
Блок 1	5.734838	17,461373
Блок 2	6.894228	
Блок 3	4.832307	

Таблиця 1. Час необхідний для факторизації повного тензору та діагональних блоків.

Висновки

В роботі описано алгоритм невід'ємної факторизації матриць та алгоритм невід'ємної факторизації тензорів. Запропоновано блочно-діагональний підхід до невід'ємної факторизації матриць та тензорів. Наведено переваги блочно-діагонального підходу щодо швидкодії та зменшення необхідних мережевих операцій.

Було запропоновано новий метод блочної діагоналізації та невід'ємної факторизації лінгвістичних тензорів, що полягає у попередньому перетворенні тензору до блочно-діагонального виду за допомогою методу LDA, щоб звести невід'ємну факторизацію тензору надвеликого розміру до виконання обчислень невід'ємної факторизації тензорних діагональних блоків – набору тензорів набагато меншого розміру, що вимагає меншого часу. Результати використання блочно-діагонального підходу на тестовому тензорі підтвердили його ефективність та показали значну перевагу нового алгоритму за часом виконання. При збільшенні розміру тензору та кількості блоків, отримана перевага буде зростати.

Список використаних джерел

1. Xu W. Document-clustering based on n -negative matrix factorization / Xu W., Liu X., Gong Y. // In Proceedings of SIGIR'2003.–2003.– p. 267–273.
2. Document clustering using nonnegative matrix factorization / [F.Shahnaz and other] // Information Processing and Management.–2006. – vol. 42. –p. 373 – 386
3. Ukrainian WordNet: Creation and Filling / [A. Anisimov and other] // FQAS-2013. –2013. – p. 649-660
4. T. Van de Cruys A Non-negative Tensor Factorization Model for Selectional Preference Induction / Tim Van de Cruys // Journal of Natural Language Engineering. –2010.– vol.16(4).– p. 417–437.
5. T. Van de Cruys. Multi-way Tensor Factorization for Unsupervised Lexical Acquisition / T. Van de Cruys [and other] // Proceedings of COLING-2012. –2012. –p. 2703–2720.
6. Indexing by Latent Semantic Analysis / [Scott Deerwester and other] // Journal of the American Society for Information Science – 1990 – vol.41 (6) – p. 391–407.
7. D. D. Lee. Algorithms for non-negative matrix factorization / D.D. Lee and H. S. Seung // In NIPS. –2000. –p. 556-562.
8. David M. Blei, Andrew Y. Ng, Jordan M.I. Latent Dirichlet Allocation/ David M. Blei, Andrew Y. Ng, Jordan M.I. //Journal of Machine Learning Research 3, 2003, 993-1022

References

1. XU W., LIU X., GONG Y. (2003) *Document-clustering based on n -negative matrix factorization*. In Proceedings of SIGIR'2003. pp. 267–273.
2. SHAHNAZ F. et al. (2006) *Document clustering using nonnegative matrix factorization*. Information Processing and Management. Vol 42, pp. 649-660.
3. ANISIMOV A. et al. (2013) *Ukrainian WordNet: Creation and Filling*. FQAS-2013. pp. 649-660.
4. VAN DE CRUYS T. (2010) *A Non-negative Tensor Factorization Model for Selectional Preference Induction*. Journal of Natural Language Engineering, Vol. 16(4), pp. 417–437.
5. VAN DE CRUYS T. et al. (2012) *Multi-way Tensor Factorization for Unsupervised Lexical Acquisition*. Proceedings of COLING-2012. pp. 2703–2720.
6. DEERWESTER S. et al. (1990) *Indexing by Latent Semantic Analysis*. Journal of the American Society for Information Science. Vol. 41 (6), pp. 391–407.
7. LEE D.D., SEUNG H. S. (2000) *Algorithms for non-negative matrix factorization*. In NIPS, MIT Press. pp. 556-562.
8. BLEI D.M., ANDREW Y. NG, JORDAN M.I. *Latent Dirichlet Allocation* //Journal of Machine Learning Research 3, 2003, 993-1022

Надійшла до редколегії 27.12.17

УДК 004.415.52, 681.3

Орлов Є.А., студент.

Архітектура системи пошуку відео інформації на основі вмісту

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, Україна, 01601, місто Київ,
вул. Володимирська, 64/13
e-mail: evgenyorlov1@gmail.com

E.A. Orlov, student.

Architecture of a system for content based video information retrieval

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
64/13, Volodymyrska Street, City of Kyiv, Ukraine,
01601
e-mail: evgenyorlov1@gmail.com

Отримання відео інформації є предметом інтересу для ряду науковців через різноманіття і кількість доступної відео інформації. Ціль цієї статті – представити архітектуру для системи швидкого і точного пошуку інформації на основі відео вмісту. Система для отримання відео інформації має широкий спектр перспективних застосувань, таких як: отримання інформації з відео, анотація відео, індексація відео, аналіз подій з новин, інтелектуальне керування веб відео (корисний пошук та відео та вилучення шкідливих відео). Така система фокусується на вилученні ключових елементів таких як виявлення та розпізнавання людей, виявлення та розпізнавання сцен, хешивання зображень та відео, виявлення ключових кадрів, виявлення та розпізнавання тексту тощо, а також способу отримання та керування цією інформацією. Система працює в два етапи: 1) етап отримання первинної інформації (часові рамки події); 2) етап обробки первинної інформації або пост обробки (розпізнавання та анотація). Метою такої системи є розробка пошукової системи для відео інформації.

Ключові слова: вилучення ключових елементів, аналіз відео, аналіз структури відео.

Video information retrieval is area of high interest for a number of researchers because of diversity and amount of video information available. The aim of this paper is to introduce researchers an architecture of the system for fast and robust content based video information retrieval. System for video indexing and retrieval has a wide spectrum of promising applications like: video information retrieval, video annotation, video indexing, news event analysis, intelligent management of web videos (useful video search and harmful video tracing). This system focuses on key features that help to index, classify and retrieve desired and relevant videos and filter out undesired ones like human detection and recognition, scene detection and recognition, image and video hashing, key-frame extraction, text detection and recognition etc. and the way this information is retrieved and managed. Such systems have two phases: 1) raw information retrieval (timing); 2) information post processing (recognition and annotation). Purpose of this system is to develop search engine for video processing and querying information.

Key Words: Feature extraction, Video retrieval, Video structure analysis.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Буй Д.Б.

Introduction

The challenges behind the design and implementation of the content based video information retrieval and browsing system attracts researchers from different areas. The structure of video and its characteristics: richer content than individual images, huge amount of raw data and very little prior structure makes it very difficult for

analysis and querying. However, this data needs to be retrieved, indexed and annotated. In the past, video databases were relatively small, indexing had been based on manual annotation [6], but now video databases become much larger and video annotation must be done with minimum of human participation in an automatic or semiautomatic manner [8, 11]. Hopefully, computer science introduced methods for human detection, face recognition, scene detection [9] etc. this allowed to generate video

indexing and annotation automatically. Here, we propose an architecture of the system for content based video retrieval, where all this methods are composed together. This system gathers information in two phases: during first phase, low-level features like face detection timing and scene color information, this information is inserted into a database, usually rational for further post processing; during second phase, low-level features are post processed to form high-level scene descriptions [7] like actors timing and recognition, actions, mood recognition and scene change detection and timing etc. So, during first phase we extract low-level information from each frame, and during second phase we use this low-level information to form scene representation [2]. Also, in sake of search robustness we can generate textual description for each scene with multiple synonyms, a mind map [1] or semantic web [4].

Video Structure

The video consists of frames, each frame is a still image. It is the smallest logical unit in video hierarchy. Frames are organized into shots. Shot is a sequence of frames, temporally adjacent, that have been recorded continuously, within the same session and location, by the same single camera. Scene is a collection of logically related shots. Scenes are recorded within the same session, location and time from different cameras or points of view. Segment is a group of logically related scenes that share specific semantic context. This video sequence hierarchy is represented in the Figure 1.

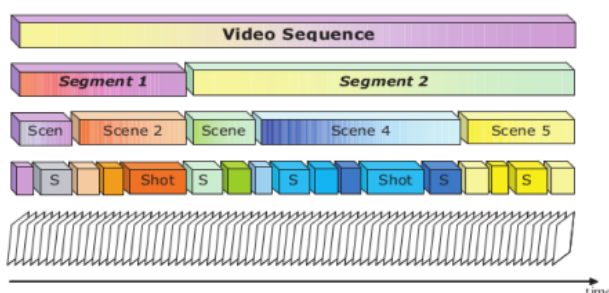


Figure 1: Illustration of video structure.

Although presented video structure may look simple and definite, real picture can be much more complicated: segments may overlap or contain gradual scene transition, scene may contain point of view change or interruptions [3, 10]. However, there

is no way to present better illustration of video structure because each video file has its own structure and properties [5].

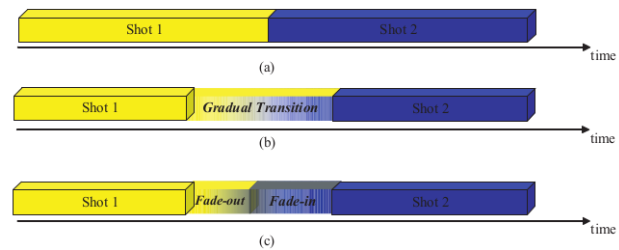


Figure 2: Illustration of different shot transition.

Figure 2 illustrates different types of shot transition: type a) illustrates shot transition via abrupt cut, where two shots are recorded from different locations and contexts; type b) illustrates gradual transition, where first shot disappears by fading and is gradually replaced by second shot; type c) illustrates shot transition where first shot gradually turns to a single color, usually black, and second shot gradually becomes color.

Low-level features

Extraction of low-level features is the first and crucial step of each content-based video retrieval system. This step requires direct processing of video information frame by frame, mostly in off-line manner. Here we define low-level features both as timing of human detection, scene color histogram, action and other events, scenes etc. Low-level features are extracted from frames, which are source of raw data and stored into database. Generally, low-level features are data used for further post processing and building video representation.

The process of extraction low-level features and building indexes involves the following steps:

- human detection
- face detection
- frame color histogram extraction
- text detection
- object detection

Additionally, this phase may contain filtering before running detectors. Finally, after each of the steps record with object name (text, face, body and color), boundaries, timing, histogram are inserted into a database for further post processing.

High-level features

High-level features are the result of processing and analysis of raw data, in our case, analysis of low-level features. Here we define high-level features as face recognition and timing, motion classification, scene recognition and time boundaries. High-level features are extracted from low-level features, which are considered for them as a raw data. During raw data processing, low-level features like color histograms are processed to obtain scene boundaries face and human detections processed to obtain face recognition timing and boundaries with motion type and boundaries. Also, sometimes features like emotions, sentiment and key frame are extracted from raw data. Processed information is stored into a database for generating conceptual video representation.



Figure 3: Illustration of low-level to high-level transformation.

Figure 3 illustrates how face detection boundaries and timing low-level features are processed to retrieve face recognition, high-level feature.

Architecture of a system for contextual information retrieval

With rapid growth of video information amount the need of content-based access to image and video information from media archives creates the demand on system that can satisfy this demand. Simple detections and classifications of frames doesn't satisfy demand on short video annotation and textual search. For this purpose, we introduce architecture of the systems for content-based information retrieval.

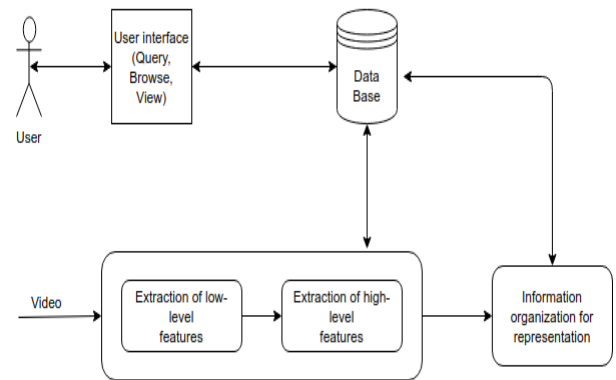


Figure 4: Illustration of content-based video retrieval system schema.

In Figure 4 we illustrated an architecture that combines extraction of low-level features via different techniques and further post processing of extracted data for generating high-level representations like mind maps, textual descriptions and web semantics regardless of algorithms and methods used. In the heart of each system is a database which stores timing information, boundaries and detections relevant to frames and scenes. Such systems provide user interfaces for data browsing, view and querying information.

Conclusion

Video data is now available in large volumes. This puts high demand for efficient search in this data which is difficult due to variety of forms and lack of structure. Here we have presented a review of the architecture for content based video retrieval system based on video indexing and shot processing. This work focuses mainly on architecture of the system which will process video stream and gathers information for analysis and representation. This system collects low-level video features like scene change detection, human detection and recognition, key-frame extraction and many more after that post process this information into mind maps or any other representation through which information can be retrieved via query or short video annotation build.

Presented system can have extra features like genre classification, motion classification and separate channel for audio stream processing in future, but these are the questions for further work.

References

Список використаних джерел

1. WINN, W. (1991). Learning from Maps and Diagrams. *Educational Psychology Review*. Vol. 3, No. 3, pp. 211-247.
2. TURAGA, P., VEERARAGHAVAN A., AND CHELLAPPA R. (2007) From videos to verbs: Mining videos for activities using a cascade of dynamical systems. *Conf. Comput. Vis. Pattern Recogn.* pp. 1–8.
3. HU, W., XIE, N., LI, L., ZENG, X. AND MAYBANK, S. (2011) A survey on visual content-based video indexing and retrieval. *Transactions on systems, man, and cybernetics*. Vol. 41, No. 6, pp. 797-819.
4. SEBASTINE, S., THURASINGHAM, B., PRABHAKARAN, B. (2009) Semantic Web for Content Based Video Retrieval. *International Conference on Semantic Computing*. pp. 103-108.
5. PATEL, D. (2015) Content based Video Retrieval using Enhance Feature Extraction. *International Journal of Computer Applications*. Vol. 119, No. 19, pp. 4-8.
6. GITTE, M., BAWASKAR, H., SETHI, S., SHINDE, A. (2014) Content Based Video Retrieval System. *International Journal of Research in Engineering and Technology*. Vol. 3, No. 06, pp. 430-435.
7. VINYALS, O., TOSHEV, A., BENGIO, S., ERHAN, D. (2015) Show and Tell: A Neural Image Caption Generator. In arXiv: 1411.4555.
8. GULRUKH, A., LITTLE, T. (1996) A survey of technologies for parsing and indexing digital video. *Journal of visual communications and image representation*. Vol. 7. No. 1, pp. 28-43.
9. FEGADE, A., DALAL, V. (2014) A Survey on Content Based Video Retrieval. *International Journal Of Engineering And Computer Science*. Vol. 3, No. 7, pp. 7271-7279.
10. LIENHART, R. (2000) A system for effortless content annotation to unfold the semantics in videos. *IEEE Workshop Content-Based Access Image Video Libraries*. pp. 45–49.
11. LEW, M., SEBE, N. (2006) Content-based multimedia information retrieval: State of the art and challenges. *ACM Trans. Multimedia Comput., Commun. Appl.* Vol. 2, No. 1, pp. 1–19.
1. Winn, W. Learning from Maps and Diagrams / W. Winn // *Educational Psychology Review*. – 1991. – Vol. 3, № 3. – P. 211-247.
2. Turaga, P. From videos to verbs: Mining videos for activities using a cascade of dynamical systems / P. Turaga, A. Veeraraghavan, R. Chellappa // *Conf. Comput. Vis. Pattern Recogn.* – 2007. – P. 1–8.
3. Hu, W. A survey on visual content-based video indexing and retrieval / W. Hu, N. Xie, L. Li, X. Zeng, S. Maybank // *Transactions on systems, man, and cybernetics*. – 2011. – Vol. 41, № 6. – P. 797-819.
4. Sebastine, S. Semantic Web for Content Based Video Retrieval / S. Sebastine, B. Thuraisingham, B. Prabhakaran // *International Conference on Semantic Computing*. – 2009. – P. 103-108.
5. Patel, D. Content based Video Retrieval using Enhance Feature Extraction / D. Patel // *International Journal of Computer Applications*. – 2015. – Vol. 119, № 19. – P. 4-8.
6. Gitte, M. Content Based Video Retrieval System / M. Gitte, H. Bawaskar, S. Sethi, A. Shinde // *International Journal of Research in Engineering and Technology*. – 2014. – Vol. 3, № 06. – P. 430-435.
7. Vinyals, O. Show and Tell: A Neural Image Caption Generator / O. Vinyals, A. Toshev, S. Bengio, D. Erhan // In arXiv: 1411.4555.
8. Gulrukh, A. A survey of technologies for parsing and indexing digital video / A. Gulrukh, T. Little // *Journal of visual communications and image representation*. – 1996. – Vol. 7, № 1. – P. 28-43.
9. Fegade, A. A Survey on Content Based Video Retrieval / A. Fegade, V. Dalal // *International Journal Of Engineering And Computer Science*. – 2014. – Vol. 3, № 7. – P. 7271-7279.
10. Lienhart, R. A system for effortless content annotation to unfold the semantics in videos / R. Lienhart // *IEEE Workshop Content-Based Access Image Video Libraries*. – 2000. – P. 45–49.
11. Lew, M. Content-based multimedia information retrieval: State of the art and challenges / M. Lew, N. Sebe // *ACM Trans. Multimedia Comput., Commun. Appl.* – 2006. – Vol. 2, № 1. – P. 1–19.

Reseived: 12.12.2017

УДК 004.415.52, 681.3

Панченко Т.В., к.ф.-м.н., доцент,
Іванов Є.В., к.ф.-м.н., асистент,
Fabunmi Sunmade, стажист,
Скідоненко А.В., студентка,
Трофименко Є.О., студент

Розширений динамічний стан та модель породження екземплярів у IPCL

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, Україна, 01601, м.Київ,
вул. Володимирська, 64/13
e-mail: tp@infosoft.ua

T.V. Panchenko, PhD, assoc.prof.,
Ie.V. Ivanov, PhD, assist.prof.,
Sunmade Fabunmi, intern,
Skidonenko A.V., student,
Trofymenko Ie.O., student

Extended Dynamic State and Instances Spawning Model in IPCL

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
64/13, Volodymyrska Street, Kyiv, Ukraine, 01601

e-mail: tp@infosoft.ua

Досліджується середовище паралельного виконання з переключенням і взаємодією через спільну пам'ять. В роботі введено модель паралелізму з динамічним станом транзиторної системи для породження екземплярів паралельних підпрограм та приєднання їх після завершення виконання. У введеній моделі динамічного стану визначено семантику функцій start та join. Судження проведено в рамках методу доведення властивостей програм (у тому числі – коректності) у Interleaving Parallel Compositional Languages (IPCL). Мови класу IPCL є адекватною моделлю суперкомп'ютерів з архітектурою спільної пам'яті (UMA та NUMA, апаратних архітектур симетричної багатопроцесорної обробки, операційних систем, систем управління базами даних, централізованих сховищ даних, серверної частини програмного забезпечення клієнт-серверних комплексів тощо). Це розширення є важливим, адже дозволяє моделювати роботу multithreading програм. Також залишається важливим питання щодо еквівалентності (або взаємовиразності) двох моделей – з фіксованою параметричною кількістю паралельних програм та з породженням нових екземплярів програм і, відповідно, динамічним станом, семантику якого введено у даній роботі.

Ключові слова: коректність програм, паралельна програма, interleaving, IPCL, композиційно-номінативні мови, атомарні операції, транзиторна система, стан, модель.

Runtime environment considered is interleaving concurrency with shared memory. The model of parallel execution with the dynamic state of the transition system was introduced in the work for generating new instances of parallel programs and joining them upon completion of the execution. The semantics of the start and join functions are defined in the terms of introduced model of the dynamic state. The reasoning is carried out in the framework of the Method for software properties proof (including safety and correctness) in Interleaving Parallel Compositional Languages (IPCL). IPCL class languages are an adequate model for supercomputers with shared memory architecture (UMA and NUMA, hardware architectures of symmetric multiprocessor processing, operating systems, database management systems, centralized databases and data warehousing, server part of client-server software systems, etc.). This extension is important, since it allows one to simulate the work of multithreading programs. Also, the question of the equivalence (or mutually expressiveness) of two models, namely – with a fixed parametric number of parallel programs and the generation of new instances of programs and, accordingly, a dynamic state, the semantics of which is introduced in this paper – remains.

Key Words: software correctness, concurrent program, interleaving, IPCL, composition-nominative languages, atomic operations, transition system, state, model.

Статтю представив член-кореспондент НАН України, д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

Композиційні мови *IPCL* з почерговим паралелізмом через передачу управління (shared memory interleaving concurrency, системи зі спільною пам'яттю та паралелізмом із почерговим переключенням) спираються на модель виконання $A^n \parallel B^m \parallel \dots \parallel C^k$ [1-3]. У роботах [1-3] та інших, де досліджується метод доведення властивостей програм у композиційних мовах *IPCL*, задається модель з фіксованими (проте – параметричними) степенями – кількостями паралельних підпрограм, тобто є певна сукупність однотипних підпрограм, запущених паралельно у режимі покрокового виконання (тобто задається операційна семантика) з поперемінною передачею управління між окремими екземплярами цих підпрограмами. Вказані кількості ($n, m, \dots, k$) є параметрами моделі, що розглядається, і всі судження проводяться для довільних їх значень одночасно, тобто – незалежно від кількості паралельно виконуваних екземплярів підпрограм. Крайнім випадком такого виконання підпрограм може бути їх строго послідовне виконання, одна за однією, але в загальному випадку матиме місце деяка траса комбінованого покрокового виконання.

Разом з тим, у реальних програмах часто застосовується техніка породження – завершення паралельних підпрограм. Тобто, вводиться деяка специфічна функція $start(P)$, яка породжує екземпляр підпрограми P (тобто додає +1 екземпляр до таких же, виконуваних паралельно), зі стартом у точці входу, порожнім початковим даним (або переданими локальними даними в якості параметра ініціалізації, якщо передбачено механізмом породження) та доступом до спільного даного, і повертає код ID щойно породженої підпрограми (ID процесу в термінах операційних систем, для внутрішнього обліку та можливості подальших звернень до нього), а також – функція $join(ID)$, яка чекає на завершення підпрограми за кодом ID (тобто, раніше породженого екземпляру програми P), та після цього продовжує (призупинене) власне виконання.

Тут буде розглянуто систему паралельного виконання програм, що реалізує модель “породження” ($start$) та “приєднання” – після зупинки – ($join$) паралельних програм, яка часто називається *multithreading*. У *IPCL* [1-3] введемо відповідні дві базові функції та задамо їх семантику.

У [4] наведено гіпотезу щодо взаємної виразності двох підходів до паралельного виконання програм – з фіксованими кількостями програм та з породженням нових екземплярів. Факт еквівалентності є важливим, оскільки дозволить звести роботу в більш складній за побудовою системі з динамічним породженням екземплярів паралельних підпрограм до більш простої для доведення системи з параметричною (але довільною, не фіксованою) кількістю однакових програм, виконуваних паралельно в режимі почергового переключення.

Модель динамічного стану транзиційної моделі

Уточнимо семантику операцій $start$ і $join$ в транзиційній моделі виконання [1-3].

По-перше, дещо модифікуємо подання самої моделі відносно [1-3] для зручності, дана зміна не впливає на потужність моделі або виразну силу – лише додає можливість «масштабування» надалі.

Отже, стан будемо подавати у вигляді

$$S = \left(\left(\begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ \vdots \\ m_{1n_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m_{21} \\ m_{22} \\ \vdots \\ m_{2n_2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} m_{k1} \\ m_{k2} \\ \vdots \\ m_{kn_k} \end{pmatrix} \right), \right. \\ \left. \left(d, \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ \vdots \\ d_{1n_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_{21} \\ d_{22} \\ \vdots \\ d_{2n_2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} d_{k1} \\ d_{k2} \\ \vdots \\ d_{kn_k} \end{pmatrix} \right) \right)$$

де

- k – кількість різних видів паралельних програм,
 - $n_1, n_2, \dots, n_k$ – кількості паралельних програм кожного з видів,
 - m_{ij} – мітка, в якій перебуває (паралельна) підпрограма номер j , яка є екземпляром деякої P_i – для моделі виконання $P_1^{n_1} \parallel P_2^{n_2} \parallel \dots \parallel P_k^{n_k}$, тобто $m_{ij} \in M_i$ – множина міток P_i [1-4],
 - d_{ij} – відповідне локальне дане цієї підпрограми – P_{ij} ,
 - d – глобальне (спільне, загальнодоступне всім підпрограмам) дане,
- кожне дане має номінативну структуру – набір пар “ім’я – значення”.

В цій моделі кожний крок виконання має вигляд: $(m_{ij}, d, d_{ij}) \rightarrow (m'_{ij}, d', d'_{ij})$, тобто програма P_{ij} , знаходячись у мітці m_{ij} , після виконання чергової інструкції перейде у мітку m'_{ij} та перетворить (можливо, змінить) глобальне дане d на d' , а локальне d_{ij} – на d'_{ij} . Таким чином, в стані S за один крок може змінитись три компоненти. Виключення становитимуть дві нові операції, що розглянуто далі.

Множину всіх станів можна задати для певної фіксованої кількості різновидів підпрограм k як

$$States = \bigcup_{n_1, n_2, \dots, n_k \in N} \{s \in ((M_1^{n_1}, M_2^{n_2}, \dots, M_k^{n_k}), (D, D^{n_1}, D^{n_2}, \dots, D^{n_k}))\}$$

тобто – як об'єднання множин станів для всіх можливих кількостей екземплярів $P_i, i \in \{1, \dots, k\}$, тобто всіх комбінацій натуральних степенів множин міток M_i та даних D .

Семантика базових функцій та композицій спадкується з [1] без змін, причому кожне перетворення залишає стан в тій же компоненті об'єднання (стосовно набору $n_1, n_2, \dots, n_k \in N$).

Семантика *start* і *join*

В модифікованій моделі зручно задавати семантику нових двох операцій. Так, розмічена операція $[m_b] id := start(P_x) [m_a]$, виконана у підпрограмі P_{ij} , перетворює стан S у наступний $(x, i \in \{1, \dots, k\}, j \in \{1, \dots, n_i\})$:

$$S' = \left(\left(\begin{pmatrix} m'_{11} \\ m'_{12} \\ \vdots \\ m'_{1n_1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} m'_{x1} \\ m'_{x2} \\ \vdots \\ m'_{xn_x} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} m'_{k1} \\ m'_{k2} \\ \vdots \\ m'_{kn_k} \end{pmatrix} \right), \left(d', \begin{pmatrix} d'_{11} \\ d'_{12} \\ \vdots \\ d'_{1n_1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} d'_{x1} \\ d'_{x2} \\ \vdots \\ d'_{xn_x} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} d'_{k1} \\ d'_{k2} \\ \vdots \\ d'_{kn_k} \end{pmatrix} \right) \right)$$

де

- $m'_{ij} = m_a$, якщо $m_{ij} = m_b$,
- $d'_{ij} = d_{ij} \nabla [id \mapsto Id]$ і $d' = d$, якщо id – ім'я в локальному даному d_{ij} або ж $d'_{ij} = d_{ij}$ і $d' = d \nabla [id \mapsto Id]$, якщо id – ім'я в глобальному даному d , Id – значення

функції $start(P_x)$, тобто код щойно породженого нового процесу P_{xn_x+1} ,

- $m'_{xn_x+1} = m_{x[start]}$ – має значення початкової мітки підпрограми P_x ,
- $d'_{xn_x+1} = \emptyset$ (початкове дане нового екземпляру P_x – порожнє),
- $m'_{yz} = m_{yz}, d'_{yz} = d_{yz}$ для решти компонент стану,

при цьому змінюється розмірність двох векторів в складі стану (стан переходить до іншої компоненти з об'єднання *States*) – додається по одній компоненті стану підпрограм (m'_{xn_x+1}) та даного (d'_{xn_x+1}) для нового, щойно створеного та запущеного на виконання, екземпляру P_x .

Семантика розміченої операції приєднання $[m_b] join(Id) [m_a]$, виконаної у підпрограмі P_{ij} , де Id – ідентифікатор екземпляру номер q підпрограми P_x ($q \in \{1, \dots, n_x\}$) – тобто P_{xq} , перетворює стан S у наступний $(x, i \in \{1, \dots, k\}, j \in \{1, \dots, n_i\})$:

$$S' = \left(\left(\begin{pmatrix} m'_{11} \\ m'_{12} \\ \vdots \\ m'_{1n_1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} m'_{x1} \\ m'_{x2} \\ \vdots \\ m'_{xn_x} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} m'_{k1} \\ m'_{k2} \\ \vdots \\ m'_{kn_k} \end{pmatrix} \right), \left(d', \begin{pmatrix} d'_{11} \\ d'_{12} \\ \vdots \\ d'_{1n_1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} d'_{x1} \\ d'_{x2} \\ \vdots \\ d'_{xn_x} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} d'_{k1} \\ d'_{k2} \\ \vdots \\ d'_{kn_k} \end{pmatrix} \right) \right)$$

де

- $m'_{ij} = m_a$, якщо $m_{ij} = m_b$ та $m_{xq} = m_{x[final]}$ – фінальна мітка підпрограми P_x (тобто програма P_{xq} завершилась),
- $m'_{yz} = m_{yz}, d'_{yz} = d_{yz}$ для всіх решти компонент стану,

інакше – стан не змінюється (якщо наведена щойно умова « P_{xq} завершилась» не виконується), $S' = S$ – тобто підпрограма P_{ij} не зрушує з місця і буде, фактично, чекати, поки P_{xq} завершиться.

Висновки

В роботі введено модель паралелізму в *IPCL* з динамічним станом транзитивної системи, для породження екземплярів паралельних підпрограм та приєднання їх після завершення виконання

(очікування завершення / фіналізації). У новій моделі динамічного стану визначено семантику нових функцій *start* та *join* (у розширеній транзитивній системі з [1-3]).

Це розширення важливе, адже дозволяє моделювати роботу *multithreading* програм та

розширити сферу застосування методу до ширшого кола практичних задач [5]. Також залишається важливим питання щодо еквівалентності чи взаємовиразності двох моделей, наведене у [4].

Список використаних джерел

References

1. Панченко Т.В. Композиційні методи специфікації та верифікації програмних систем. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук.: 01.05.03 / Т.В. Панченко. - Київ, 2006. - 177 с.
2. Панченко Т.В. Метод доведення властивостей програм в композиційно-номінативних мовах IPCL / Т.В. Панченко // Проблеми програмування. - 2008. - №1. - С. 3-16.
3. Панченко Т.В. Методологія доведення властивостей програм в композиційних мовах IPCL / Т.В. Панченко // Доповіді Міжнародної конференції "Теоретичні та прикладні аспекти побудови програмних систем" (TAAPSD'2004). - К., 2004. - С. 62-67.
4. Іванов Є. Модель паралелізму в IPCL з породженням екземплярів / Є. Іванов, Т. Панченко, Fabunmi Sunmade // Праці Міжнар. конф. "Теоретичні та прикладні аспекти побудови програмних систем" (TAAPSD'2017). - Київ. - 2017. - С. 131-133.
5. Panchenko T.V. Application of the Method for Concurrent Programs Properties Proof to Real-World Industrial Software Systems / T.V. Panchenko // Proceedings of the 12th International Conference on ICT in Education, Research and Industrial Applications. Integration, Harmonization and Knowledge Transfer (ICTERI 2016), edited by Vadim Ermolayev et al. - Kyiv. - 2016. - pp. 119-128 (CEUR-WS. - Vol. 1614. - ISSN:1613-0073, available online: <http://ceur-ws.org/Vol-1614/>).
1. PANCHENKO, T. (2006) *Compositional Methods for Software Systems Specification and Verification* (PhD Thesis) [in Ukrainian]. Kyiv. 177 p.
2. PANCHENKO, T. (2008) The Method for Program Properties Proof in Compositional Nominative Languages IPCL [in Ukrainian]. *Problems of Programming*. 1. pp. 3-16.
3. PANCHENKO, T. (2004) The Methodology for Program Properties Proof in Compositional Languages IPCL [in Ukrainian]. In *Proceedings of the International Conference "Theoretical and Applied Aspects of Program Systems Development"* (TAAPSD'2004). Kyiv. pp. 62-67.
4. IVANOV, IE., PANCHENKO, T. and FABUNMI, S. (2017) Parallelism Model with Instances Generation in IPCL [in Ukrainian]. In *Proceedings of the International Conference "Theoretical and Applied Aspects of Program Systems Development"* (TAAPSD'2017). Kyiv. pp. 131-133.
5. PANCHENKO, T. (2016) Application of the Method for Concurrent Programs Properties Proof to Real-World Industrial Software Systems. In *Proceedings of the 12th International Conference on ICT in Education, Research and Industrial Applications. Integration, Harmonization and Knowledge Transfer (ICTERI 2016)*, edited by Vadim Ermolayev et al., Kyiv, pp.119-128 (CEUR-WS. - Vol. 1614. - ISSN:1613-0073, available online: <http://ceur-ws.org/Vol-1614/>).

Надійшла до редколегії 20.10.2017

УДК 004.942

В.Ю. Побоченко, студент
С-А. Х. Аткаєв, студент

**Прикладне застосування методу рівномірного
розподілу для транспортної задачі
оптимального розташування зарядних
станцій для електромобілів**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д, e-mail: vladpobochenko@gmail.com

Vladyslav Y. Pobochenko, student
Said-Abdulla H. Atkaev, student

**Application of the normal distribution
method for the transport problem of the
charging stations' optimal location**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: vladpobochenko@gmail.com

В Україні починає інтенсивно розвиватися інфраструктура для електромобільного транспорту як найбільш заощадливого та екологічно чистого продукту. У даній статті запропоновано прикладне застосування методу рівномірного розподілу для розв'язку транспортної задачі оптимального розташування електрзарядних станцій для електромобілів в окремо взятому регіоні. Проводиться аналіз статистики продажу електромобілів, їх технічних властивостей для розрахунку певних обмежень для транспортної задачі. Проектується мережа створення зарядних станцій з візуальним зображенням на карті міста Києва.

Ключові слова: метод рівномірного розподілу, електромобіль, оптимальне розташування електрзарядних станцій.

In Ukraine, the infrastructure for electric vehicles is developing intensively as the most economical and environmentally friendly product. Because of the economic crisis, rising prices for gasoline and oil, a lot of people began thinking about whether it is worth buying a car for us, and save some money in the future. Moreover, a lot of European countries are very strict in juridical sphere about this question, so that they implement laws, under which, almost all the population of the European countries will have to change cars with internal combustion engine on the electric one in the near future. In this article an application of the normal distribution method is proposed for solving the transport problem of the charging stations' optimal location in a separate region. The analysis of sales statistics of electric cars, their technical properties for calculating certain restrictions for the transport task is carried out. A network of charging stations with a visual image on the map of Kyiv is being designed.

Keywords: method of normal distribution, electric car, optimal location of electric charge stations.

Статтю представив представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

1. Вступ

Мегаліси - це живий організм, в якому транспорт відіграє роль кровоносної системи. Він циркулює по артеріях-дорогах, швидко доставляючи пасажирів і вантажі на будь-які відстані. У ХХІ столітті висока мобільність сприймається нами як належне, і ми не готові відмовлятися від свободи пересування. Однак у комфорту є своя ціна - розвинена транспортна інфраструктура і надлишок особистого автотранспорту призводять до погіршення екологічної ситуації в місті. Уже сьогодні

можливим компромісом між збереженням мобільності і зниженням шкідливого впливу на навколишнє середовище можуть стати електромобілі.

Темп розвитку задають європейські країни: вони впроваджують державні програми підтримки і не бояться вдаватися до заходів, які можуть здатися радикальними. Наприклад, Німеччина, Норвегія та Нідерланди планують на національному рівні відмовитися від автомобілів з двигунами внутрішнього згорання [8]. Азія не відстає: в Японії число зарядних

станцій недавно перевершило число заправних станцій, а Китай лідирує за зростанням продажів електромобілів [5].

Крім екологічної переваги, у електромобілів є ще й економічний фактор. Відмова від бензину або дизеля може виявитися вигідною перспективою для водіїв. За підрахунками українських аналітиків, проїжджаючи на електромобілі 20 000 км на рік, водій витрачає на його зарядку всього 10 гривень на добу [5]. Для порівняння, власник традиційного автомобіля, за приблизними підрахунками, витрачає на паливо 47 гривень на добу, що в сумі за рік може скласти близько 16% від середньої заробітної плати [5].

В Україні бум електромобілів. За темпами зростання кількості електромобілів країна на п'ятому місці в світі [5].

Із цього випливає, що для того, щоб забезпечити комфортне та ефективне впровадження та зростання темпів продажу та використання електромобілів в Україні, треба, насамперед, створити архітектуру мережі електростанцій. У свою чергу, її треба спроектувати та оптимізувати так, щоб за певним обмеженням, таким як капітал, можна було забезпечити якнайбільшу кількість електромобілів енергією. У даній статті буде вирішено цю проблему за допомогою застосування певного інструментарію математичного апарату.

2. Аналіз задачі оптимізації розміщення електростанцій

Для аналізу та вирішення задачі оптимізації розміщення електростанцій ми використаємо транспортні моделі розподілу обладнання.

Транспортні моделі - спеціальний клас задач лінійного програмування. Ці моделі часто описують переміщення будь-якого товару з пункту відправлення (вихідний пункт, наприклад місце виробництва) в пункт призначення (склад, магазин). Призначення транспортної задачі - визначення обсягів перевезень з пунктів відправлення в пункти призначення з мінімальною сумарною вартістю перевезень [1].

У загальному випадку транспортну модель можна застосувати для опису ситуацій, пов'язаних з управлінням запасами, управлінням рухом капіталів, складанням розкладів, призначенням персоналу та ін. [1].

Використання транспортної моделі не обмежується завданням про транспортування чого-небудь між географічними пунктами відправлення та призначення. Також можливе застосування транспортної моделі до задачі управління запасами і завдань розподілу обладнання, що як раз може бути застосовано до задачі про оптимізацію розміщення електростанцій.

Суть задачі цієї статті полягає в проектуванні загальної мережі електростанцій, знаходження оптимальної кількості самих зарядних станцій та ефективного розташування цієї мережі.

Саму задачу можна поділити на 3 етапи:

- аналіз статистик (продажу електромобілів, запасу ходу та ін.) ;
- вирішення транспортної задачі та знаходження оптимальної кількості електростанцій ;
- проектування та створення транспортної мережі для ефективного розташування електростанцій.

2.1. Аналіз статистики

Найперший крок до вирішення поставленої задачі - це розуміння теоретичних відомостей щодо електростанцій та самого процесу в цілому.

На даний момент існує два види станцій: повільного заряду та швидкого. Різниця в часі заряджання автомобіля з нинішніми акумуляторами та технологіями зарядки між повільною і швидкою станцією, приблизно в 4 рази [7]. Тобто, якщо повільна станція заряджає авто повністю за 6 годин, то швидка зробить це за 1,5 години. Звісно, це велика перевага на користь швидкої станції, але і вартість у швидкої станції вища у 5 - 6 разів [7]. Також для використання швидкої станції, саме авто повинно мати батарею, яка налаштована на таку зарядку, а в повільній станції такого аспекту немає. Тобто, ми бачимо, що кожна станція має свої переваги та недоліки. І суть транспортної задачі, це знаходження балансу і кількості між повільними та швидкими станціями.

Надалі треба проаналізувати безліч статистик, серед яких можна виділити 4 основні: продаж електромобілів, дистанція, яку долають українці кожен день, запас ходу автомобілів та час заряджання авто. Як результат, ми отримаємо середнє значення по

кожній статистиці, що знадобиться на наступному етапі.

2.2. Знаходження оптимальної кількості електрозарядних станцій

Коли ми отримали середні значення по всім статистикам, ми можемо переходити до наступного кроку – побудови транспортної моделі та вирішення задачі розподілу обладнання. При побудові моделі вибираємо цільову функції – максимізувати прибуток від мережі електрозарядних станцій і також враховуємо певний обсяг обмежень ціни станцій, їх кількість та пропускну здатність.

Розв'язавши цю задачу, як результат, ми отримаємо оптимальний план кількості електрозарядних станцій, що задовольняє наші обмеження та цільову функцію.

2.3. Створення транспортної мережі

На попередньому етапі було отримано оптимальний план кількості електрозарядних станцій. Наступним кроком є розміщення електрозарядних станцій на певній території. Тут також є декілька методів розміщення: охопити рівномірно всю територію або розмістити з розрахунком трафіку та завантаженості шляхів на цій території.

3. Побудова та розв'язання транспортної задачі на реальній статистиці

Для практичного застосування ми візьмемо реальну статистику електромобілів, зарядних станцій та ін. [5]. А територіально ми візьмемо місто Київ.

Кількість електрокарів ~ (м.) / Рік	2015	2016	2017
Світ	210 000	500 000	1.1 млн.
Україна	59	470	1602
Київ	22	219	747

Таблиця 1. Загальна статистика продажу авто в усьому світі, Україні та Києві

Як ми бачимо з табл.1, темп зросту продажу авто на світовому ринку та України досить позитивний, кожен рік кількість авто збільшується більше ніж вдвічі.

Відсоток водіїв	Км./День
19 %	< 20
33 %	20 - 50
32 %	50 - 100
16 %	> 100

Таблиця 2. Загальна статистика середньоденного пробігу (пробіг по категоріях)

Авто (скільки процентів від ринку)	Запас ходу (км.)	Час зарядки батареї (г.)
Nissan Leaf (80%)	250	7
Ford Focus E (6.1%)	120	4
Tesla (5.5%)	590	9
BMW i3 (3.6%)	200	4
Hyundai Ioniq (3.4%)	200	4
Renault Fluence E (1.4%)	185	8

Таблиця 3. Загальна статистика запасу ходу та часу заряду батареї електромобілів (в т. ч. відсоткове представлення кожної моделі електромобілів)

За рахунок табл.2 та табл.3, ми зможемо підрахувати кількість кожної моделі, а потім середній пробіг, середній час зарядки авто та середню періодичність заправки електромобіля. Як результат, у нас буде достатньо даних, щоб створити певні обмеження для транспортної задачі. Це ми і зробимо далі.

- I. Знаходження кількості авто по пробігу - a_i
 $< 20\text{км./день} = 747 \times 0.19 = 142\text{авт.}$
 $50 - 50\text{км./день} = 747 \times 0.33 = 247\text{авт.}$
 $50 - 100\text{км./день} = 747 \times 0.32 = 239\text{авт.}$
 $> 100\text{км./день} = 747 \times 0.16 = 119\text{авт.}$

- II. Знаходження середньоочікуваного максимального пробігу від одного заряду:
 $\text{Leaf} = 747 \times 0.8 = 598\text{авт.}$
 $\text{Focus} = 747 \times 0.061 = 46\text{авт.}$
 $\text{Tesla} = 747 \times 0.055 = 41\text{авт.}$
 $\text{i3} = 747 \times 0.036 = 27\text{авт.}$
 $\text{Ioniq} = 747 \times 0.034 = 25\text{авт.}$
 $\text{Fluence} = 747 \times 0.014 = 10\text{авт.}$
Знаходимо середню відстань на одному заряді (множимо кількість моделі на її запас ходу, сумуємо по всім моделям і ділимо на загальну кількість електромобілів)

$$\overline{\text{distance}} = \frac{\sum_{i=1}^r x_i p_i}{n},$$

де x_i – кількість певної моделі,

p_i – запас ходу певної моделі, n – кількість всіх електромобілів, r – кількість певної моделі.

Розрахуємо нашу статистику за даною формулою і отримаємо:

$distance = 256 \text{ км./один заряд}$ (середній очікуваний запас ходу по всім авто).

III. Знаходження середньої періодичності заправки електромобіля:

$$t = \sum_{i=1}^r \frac{y_i c_i}{n}$$

де $y_i = (\overline{distance} \div \text{сер. пр. по катег.}) \times a_i$

Використаємо формулу і знайдемо середню періодичність заправки електромобіля:

$$t = 7 \text{ днів,}$$

тобто, в середньому власник електромобіля заправляє свій автомобіль раз в 7 днів. Також із цього слідує, якщо рівномірно розподілити заправку всіх авто на тиждень, то в середньому мережа повинна мати змогу обслуговувати ≈ 107 машин на добу.

IV. Знаходження середньої тривалості зарядки електромобіля:

$$\bar{T} = \frac{\sum_{i=1}^r x_i q_i}{n},$$

де x_i – кількість певної моделі,

q_i – час повної зарядки певної моделі,

n – кількість всіх електромобілів.

Отримаємо:

$$\bar{T} = 6 \text{ годин (середній час зарядки)}$$

Як результат усіх попередніх етапів, ми отримали всі середні значення, що необхідні для побудови транспортної задачі. Що і буде нашим наступним кроком.

Вирішимо пряму задачу лінійного програмування симплексним методом, з використанням симплексного таблиці. Визначимо **максимальне** значення цільової функції:

$$F(X) = p(x_1 \times n_1 + x_2 \times n_2), \text{ де}$$

x_1 – кількість повільних станцій,

x_2 – кількість швидких станцій,

p – вартість зарядки одного авто,

n_1 – кількість авто, яку можна

зарядити за один день повільною станцією,

n_2 – кількість авто, яку можна

зарядити за один день швидкою станцією

Маємо наступні обмеження:

$$x_1 \times q_1 + x_2 \times q_2 \leq K$$

$$x_1 + x_2 \geq K/w$$

$$x_1 \times n_1 + x_2 \times n_2 \geq 107$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 1$$

, де

q_1 – вартість повільної станції,

q_2 – вартість швидкої станції,

K – капітал на побудову мережі,

w – мінімальна ціна швидкої зарядки.

Для побудови першого опорного плану систему нерівностей приведемо до системи рівнянь шляхом введення додаткових змінних (перехід до канонічної форми).

$$22400x_1 + 140000x_2 + x_3 = 800000$$

$$x_1 + x_2 - x_4 = 7$$

$$4x_1 + 16x_2 - x_5 = 107$$

$$x_2 - x_6 = 1$$

Матриця коефіцієнтів $A = a(ij)$ цієї системи рівнянь має вигляд:

$$\begin{pmatrix} 22400 & 140000 & 1 & 0 & 0 & 0 & 800000 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 7 \\ 4 & 16 & 0 & 0 & -1 & 0 & 107 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

З цієї матрицею ми будемо базис та робимо наступний алгоритм на кожній ітерації, поки наш план не буде оптимальним.

Ітерація(i):

1. Перевірка критерію оптимальності.

2. Визначення нової базисної змінної.

3. Визначення нової вільної змінної.

4. Перерахунок симплекс-таблиці.

Використовуючи даний алгоритм на прикладі, на останній ітерації ми отримаємо фінальний базис:

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_5	$\frac{188}{7}$	0	0	$\frac{1}{5600}$	0	1	9
x_4	$\frac{657}{28}$	0	0	$\frac{1}{22400}$	1	0	$\frac{21}{4}$
x_1	$\frac{825}{28}$	1	0	$\frac{1}{22400}$	0	0	$\frac{25}{4}$
x_2	1	0	1	0	0	0	-1
F(X0)	$\frac{33840}{7}$	0	0	$\frac{9}{280}$	0	0	1620

Серед значень індексного рядка немає невід'ємних. Тому ця таблиця визначає оптимальний план завдання.

$$x_1 = \frac{825}{28} \approx 29 \text{ (кількість повільних станцій)}$$

$$x_2 = 1 \text{ (кількість швидких станцій)}$$

$$F(x) = 720 \times 29 + 2880 \times 1 \approx 24094 \text{ (грн./д.)}$$

Після даного етапу, ми отримали кількість всіх станцій, що задовольняють нашу транспортну задачу, а також кількість станцій певного типу. Самий останній етап, це розташування всієї мережі електростанцій. Задача полягає в рівномірному розташуванні всіх електростанцій по всій території Києва.

Для цього робимо деякі розрахунки. Ширина Києва – 21 кілометр, а висота – 15 кілометрів.

$$S_K = 21 \times 15 = 315 \text{ км.}^2$$

Так як ми знайшли кількість зарядних станцій, то ділимо площу Києва на 30 зон.

$$S_p = \frac{S}{30} = 10.5 \text{ км.}^2$$

S_p – площа зони кожної станції.

Також знаходимо відношення ширини до висоти площі Києва $= \frac{21}{15} = 1.4$

І рахуємо фінальну ширину і висоту кожної зони зарядної станції.

Width = 3.8 км.

Height = 2.7 км.

Отримаємо наступне розбиття території.

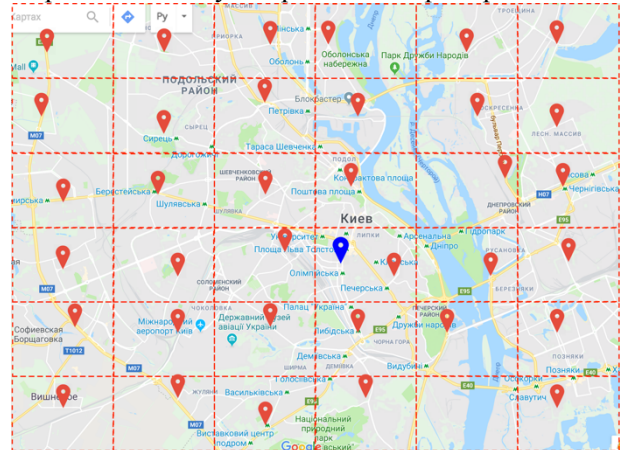


Рисунок 1. Загальне розташування мережі електростанцій в місті Києві

Як ми бачимо на рис.1, вся мережа розповсюджена по всій території Києва. Там де можливо, точки розташовані по середині своєї площі, але є випадки, коли зарядні станції розміщені не по центру, а в позиціях, де матимуть змогу збільшити кількість потоку електромобілів – це Кільцева дорога та квартали, де зосереджені бізнес центри та спальні райони.

Також одна швидка станція розташована в центрі Києва (синього кольору), де максимально зосереджена кількість бізнес центрів, магазинів і де потрібна мобільна, швидка станція для максимізації трафіку зарядки електромобілів.

Висновок

В наш час іде сурова боротьба країн світу з автовиробниками з питання зменшення екологічного забруднення навколишнього середовища. Ця проблема постає ще з часів Генрі Форда, коли на конвеєр були поставлені автомобілі з великими двигунами, а технології зменшення викидів шкідливих газів знаходилася на стадії створення. На сьогоднішній день, автоіндустрія йде далі і запроваджує нові заходи по боротьбі з шкідливими газами. Цими заходами і є електромобілі. Як вже зазначалося раніше, Україна займає 5 місце по темпам зросту кількості електромобілів в світі. В свою чергу, для підтримання та розвитку електромобілів надалі, треба проектувати та створювати мережу салонів з продажу таких авто, ремонтних станцій та, насамперед, мережу

електрозарядних станцій, для створення всіх комфортних умов для власників електромобілів. В слід чого, можна сказати, що тема статі є актуальною і потребує детального розгляду.

У даній роботі було проаналізовано статистику продажу електромобілів, їх властивостей. Потім проектування та розв'язання транспортної задачі, щодо знаходження оптимальної кількості зарядних станцій. На прикладі було показано, що за

реальною статистикою і за обмеженням по стартовому капіталу, для обслуговування електромобілів в Києві, в середньому, достатньо 29 повільних станцій зарядки та одна швидка. Фінальним етапом було розташування мережі електрозарядних станцій на території Києва, що було візуально зображено на карті Києва.

Список використаних джерел

1. Таха Х. Введение в исследование операций / Хемді Таха. // Издательский дом "Вильямс". – 2001. – С. 179–223.
2. Мур Д. Х. Экономическое моделирование в Microsoft Excel / Д. Х. Мур, Л. Р. Уэдерфорд. // М.: Вильямс. – 2004. – С. 119–125.
3. Осипов В. С. Актуальные проблемы институциональной экономики : Теория и практика: учебное пособие / В. С. Осипов, И. И. Смотрицкая. // Юнити-Дана. – 2015. – С. 68–75.
4. Bowersox D. Logistical Management: The Integrated Supply Chain Process / D. Bowersox, D. Closs., 1996. – (McGraw-Hill Companies).
5. Аналітика: Динаміка розвитку електрозаправочних станцій в Україні [Електронний ресурс]. – 2016. – Режим доступу до ресурсу: <https://autogeek.com.ua/analitika-dinamika-razvitiya-elektro-zapravochnyih-stantsiy-v-ukraine-2016/>.
6. Plug Share [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <https://www.plugshare.com/>.
7. Калькулятор расчета времени зарядки аккумулятора автомобиля [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <https://etlib.ru/calc/battery-charging>.
8. В мире электромобилей станет больше 2 млн к концу 2016 [Електронний ресурс]. – 2016. – Режим доступу до ресурсу: <https://ecotechnica.com.ua/transport/1167-v-mire-elektromobilej-stanet-bolshe-2-mln-k-kontsu-2016.html>.

References

1. HAMDY A.T. (2001). Operations Research: An Introduction, pp.179-223.
2. MOOR D.H. (2004) Economic modeling in Microsoft Excel
3. OSIPOV V.S. Actual problems of institutional economics: Theory and practice: textbook / V.S. Osipov, II I. Smotritskaya. // Unity-Dana. - 2015. - P. 68-75.
4. BOWERSOX D. Logistical Management: The Integrated Supply Chain Process / D. Bowersox, D. Closs., 1996. - (McGraw-Hill Companies).
5. Analytics: Dynamics of development of electro-filling stations in Ukraine [Electronic resource]. - 2016. - Access to the resource: <https://autogeek.com.ua/analitika-dinamika-razvitiya-elektro-zapravochnyih-stantsiy-v-ukraine-2016/>.
6. Plug Share [Electronic resource] - Mode of access to the resource: <https://www.plugshare.com/>.
7. Calculator calculating the time of charging the car battery [Electronic resource] - Mode access to the resource: <https://etlib.ru/calc/battery-charging>.
8. In the world of electric vehicles will be more than 2 million by the end of 2016 [Electronic resource]. - 2016. - Access to the resource: <https://ecotechnica.com.ua/transport/1167-v-mire-elektromobilej-stanet-bolshe-2-mln-k-kontsu-2016.html>.

Received: 01.12.2017

УДК 517.929.4

Таїрова М. С., к. ф.-м. н..

**Алгоритми побудови максимальної
множини практичної стійкості лінійного
дискретного включення**

Одеський національний університет імені
І. І. Мечникова, 65082, м. Одеса, вул.
Дворянська, 2,
e-mail: masonmas@gmail.com

Mariia Tairova, Ph. D.

**Maximum set of practical stability of discrete
inclusions constructing using numeric
computing**

Odessa I. I. Mechnikov National University, 65082,
Odessa, Dvoryanska str., 2,
e-mail: masonmas@gmail.com

У статті розглянуті алгоритми побудови максимальної множини практичної стійкості для лінійних дискретних включень. Отримані алгоритми для побудови функції Мінковського, оберненої функції Мінковського та опорної функції для лінійних дискретних включень.

Ключові слова: практична стійкість, дискретні включення, оптимальна множина.

Discrete inclusions allow us to describe the behavior of systems at fixed moments of time, provided that there are constant perturbations or uncertain deterministic parameters on the righthand part of the system. When we investigate discrete systems, one of the central issue is stability of equilibrium. However, for various classes of systems, along with the classical concept of stability, the problem arises of studying the behavior of the system on a finite interval for the existing constraints on the state of the system. Such a problem relates to the field of practical stability.

The paper presents algorithms designed to construct a maximum set of practical stability for the case of linear discrete inclusion. In this case, the mathematical technique of convex analysis, some properties of support function, function of deformation, and Minkowski function are applied. Algorithms both for the case of strong practical stability, and in the case of weak practical stability are presented. In the first case, the maximal set is a set of initial conditions for which the corresponding arbitrary discrete inclusion solution remains the phase constraints on a given interval of time. In the case of weak practical stability, the condition of belonging to phase constraints is sufficient for at least one solution of discrete inclusion. The algorithms are tested using a series of computational experiments.

Key words: practical stability, discrete inclusions, optimal set.

Статтю представив д. т. н., проф. Гаращенко Ф. Г.

Вступ.

Дискретні включення дозволяють описувати поведінку систем у фіксовані моменти часу за умови, що в правій частині системи наявні постійні збурення або невизначені детерміновані параметри. При дослідженні дискретних систем однією з центральних є проблема стійкості. Проте для різних класів систем поруч з класичним поняттям стійкості виникає задача дослідження поведінки системи на скінченному інтервалі за наявних обмежень на стан системи. Така задача відноситься до галузі практичної стійкості [1, 2].

Задача практичної стійкості дискретних включень досліджені в роботах [3-5].

В статті представлені алгоритми, що розроблені з метою побудови максимальної множини практичної стійкості для випадку лінійного дискретного включення. При цьому застосовано математичний апарат опуклого аналізу, властивості опорних функції, функції диформації та функції Мінковського. Алгоритми представлені, як для випадку сильної практичної стійкості, так і у випадку слабкої практичної стійкості. В першому випадку максимальна множина є такою сукупністю початкових умов,

для яких відповідний довільний розв'язок дискретного включення залишається фазових обмеженнях на заданому інтервалі часу. У випадку слабкої практичної стійкості умова належності до фазових обмежень достатня хоча б для одного розв'язку дискретного включення. Алгоритми апробовано за допомогою серії обчислювальних експериментів.

В статті будемо використовувати такі позначення: R^n – евклідовий n - вимірний простір, $\|\cdot\|$ – евклідова норма, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярний добуток, що породжує евклідову норму в R^n , $int A$ – множина внутрішніх точок, ∂A – границя, $[0, N] = \{0, 1, \dots, N\}$ – множина індексів, $c(A, \psi) = \sup_{a \in A} \langle a, \psi \rangle$, $\psi \in R^n$ – опорна функція множини $A \subset R^n$, $S \subset R^n$ – одинична сфера, $K_r(a)$ – замкнена куля радіусу r з центром в точці $a \in R^n$, $comp(R^n)$ ($conv(R^n)$) – множина непорожніх (опуклих) компактів з R^n , $A^\sigma = A + \sigma K_1(0)$ – σ -розширення множини $A \subset R^n$, $A^{<\sigma>} = \{a : a + K_\sigma(0) \subset A\}$ – σ -звуження множини $A \subset R^n$.

1. Знаходження максимальної за включенням множини сильної практичної стійкості

Розглянемо дискретне включення вигляду

$$x(k+1) \in f_k(x(k)), k \in [0, N], \quad (1)$$

де $f_k : D \rightarrow comp(D)$ багатозначне відображення, яке визначене в області $D \subset R^n$. Позначимо $X(k, X_0)$ множину досяжності (1) за умови, що $x(0) \in X_0$. Дискретне рівняння вигляду

$$X(k+1) = f_k(X(k)), k \in [0, N] \quad (2)$$

описує динаміку множини досяжності за умови, що $X(0) = X_0$. Нехай $G_0 \in comp(R^n)$ – деяка множина, $\Phi(k) \in comp(R^n)$ – множина фазових обмежень, $0 \in int \Phi(k)$, $0 \in G_0$, $k \in [0, N]$.

Означення 1. Нульовий розв'язок дискретного включення (1) називається $\{G_0, \Phi(k), 0, N\}$ -стійким, якщо для будь якого розв'язку $x(k, x_0)$, $k \in [0, N]$ включення (1) виконується $x(k, x_0) \in \Phi(k)$ для всіх $k \in [0, N]$ і $x_0 \in G_0$.

Позначимо G_* – максимальну за включенням множину всіх початкових умов, для яких виконується означення. Тобто, G_* є множиною всіх точок $x_0 \in D$ таких, що має місце $X(k, x_0) \subseteq \Phi(k)$ для всіх $k \in [0, N]$. Припустимо, що відображення f_k є неперервним і відкритим, $k \in [0, N-1]$.

Розглянемо лінійне дискретне включення

$$x(k+1) \in A_k x(k) + U(k) \quad (3)$$

де $x \in R^n$, A_k – невідроджена матриця розмірності $n \times n$, $U(k) \in conv(R^n)$, $k \in [0, N-1]$, $\Phi(k) \in conv(R^n)$ – множина фазових обмежень, $k \in [0, N]$, $0 \in int G_*$. З включення (3) маємо, що множина досяжності задовольняє рівняння

$$X(k+1) = A_k X(k) + U(k), X(0) = X_0,$$

де $X_0 \in conv(R^n)$. Запишемо множину досяжності у вигляді

$$X(k, X_0) = \Theta(k) X_0 + \Omega(k),$$

де

$$\begin{aligned} \Theta(k) &= A_0 A_1 \cdots A_{k-1} \\ \Omega(k) &= U(k-1) + A_{k-1} U(k-2) + \cdots \\ &\quad \cdots + A_{k-1} A_{k-2} \cdots A_1 U(0). \end{aligned} \quad (4)$$

1.1. Знаходження максимальної за включенням множини сильної практичної стійкості. за допомогою опорної функції. У випадку $G_* \subset R^2$.

Позначимо

$$\zeta(\xi) = \min_{k \in [0, N]} \left(c(\Phi(k), (\Theta(k)^T)^{-1} \xi) - c(\Omega(k), (\Theta(k)^T)^{-1} \xi) \right).$$

де $\xi = \Theta(k)^T \psi$.

Отже,

$$\langle x_0, \xi \rangle \leq \zeta(\xi).$$

Так як $\langle x_0, \xi \rangle \leq c(G_*, \xi) \leq \zeta(\xi)$, то множина G_* має вигляд

$$G_* = \{x : \langle x, \xi \rangle \leq \zeta(\xi)\},$$

та $c(G_*, \xi) = \overline{c\zeta}(\xi)$.

Алгоритм 1.1.

1) Побудуємо сітку по $\xi_i \in S, i = \overline{0, m}$, де

$$\xi_i = \begin{pmatrix} \cos \gamma_i \\ \sin \gamma_i \end{pmatrix}, \text{ де } \gamma_i = \frac{2i\pi}{m}, i = \overline{0, m-1},$$

причому $\gamma_m = \gamma_0$.

2) Для всіх $\xi_i \in S, i = \overline{0, m}$ знайдемо значення опорної функції $c(G_*, \xi_i)$.

Позначимо $\hat{\xi}_i = \xi_j$, де

$$j = \operatorname{argmin}_{j=0, m-1} \|\xi_j - (\Theta^*(k))^{-1} \xi_i\|,$$

тоді

$$c(G_*, \xi_i) \approx \overline{co} \min_{k=0, N} \left\| (\Theta^*(k))^{-1} \xi_i \right\| \left(c(\Phi(k), \hat{\xi}_i) - c(\Omega(k), \hat{\xi}_i) \right).$$

3) Знайдемо точки x_i перетину опорних гіперплощин до множини G_* в напрямках векторів ξ_i і ξ_{i+1} . Для цього m раз розв'яжемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} \langle x_i, \xi_i \rangle = c(G_*, \xi_i) \\ \langle x_i, \xi_{i+1} \rangle = c(G_*, \xi_{i+1}) \end{cases}.$$

Детермінант цієї системи

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \cos \gamma_i & \sin \gamma_i \\ \cos \gamma_{i+1} & \sin \gamma_{i+1} \end{vmatrix} = \\ &= \cos \gamma_i \sin \gamma_{i+1} - \cos \gamma_{i+1} \sin \gamma_i = \\ &= \sin(\gamma_{i+1} - \gamma_i) = \sin \frac{2\pi}{m} \neq 0. \end{aligned}$$

4) Побудуємо багатокутник з вершинами в точках x_i , $i = \overline{0, m}$, який утворює внутрішню апроксимацію множини G_* .

Опис алгоритму закінчено.

1.2. Знаходження максимальної за включенням множини сильної практичної стійкості за допомогою функції Мінковського.

За означенням функції Мінковського

$$m_*(x) = \inf \{ \lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in G_* \}.$$

Функціонал Мінковського для множини G_* має вигляд

$$m_*(x) = \max_{k \in [0, N]} \max_{\psi \in S} \frac{\langle \Theta(k)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(k), \psi) - c(\Omega(k), \psi)}.$$

Алгоритм 1.2.

1) Задамо сітку $\hat{S}$ на одиничній сфері S та сітку $\hat{\Phi}$ на множині $\Phi(0)$.

2) Для кожного $x_0 \in \hat{\Phi}$ обчислимо

$$m_*(x_0) = \max_{k=0, N} \max_{i=0, m} \frac{\langle \Theta(k)x_0, \psi_i \rangle}{c(\Phi(k), \psi_i) - c(\Omega(k), \psi_i)},$$

де $\psi_i \in \hat{S}$. У випадку, коли вимірність фазового простору дорівнює 2, точки ψ_i можна вибрати так:

$$\psi_i = \begin{pmatrix} \cos \gamma_i \\ \sin \gamma_i \end{pmatrix}, \text{ де } \gamma_i = \frac{2i\pi}{m}, i = \overline{0, m}.$$

3) Тоді множина $\bar{G} = \{x_0 \in \hat{\Phi} : m_*(x_0) \leq 1\}$ є апроксимацією множини G_* .

Опис алгоритму закінчено.

1.3. Знаходження максимальної за включенням множини сильної практичної стійкості за допомогою функції деформації.

За означенням функції деформації

$$d_*(\ell) = \sup \{ \lambda > 0 : \lambda \ell \in G_* \},$$

де $\ell \in S$.

Тоді функція деформації множини G_* має вигляд

$$d_*(\ell) = \min_{k \in [0, N], \psi \in P(k)} \frac{c(\Phi(k), \psi) - c(\Omega(k), \psi)}{\langle \Theta(k)\ell, \psi \rangle},$$

де $P(k, \ell) = \{ \psi \in S : \langle \Theta(k)\ell, \psi \rangle > 0 \}$.

Алгоритм 1.3.

1) Задаємо сітку $\hat{S}$ на S . У випадку, коли $S \in \mathbb{R}^2$, сітку можна задати таким способом: $\ell_k \in S$, $k = \overline{0, p}$, де

$$\ell_k = \begin{pmatrix} \cos \gamma_k \\ \sin \gamma_k \end{pmatrix}, \gamma_k = \frac{2k\pi}{p}, k = \overline{0, p}.$$

2) Для кожного ℓ_k обчислимо

$$d_*(\ell_k) = \min_{k=0, N, \psi_i \in Z(k, \ell)} \frac{c(\Phi(k), \psi_i) - c(\Omega(k), \psi_i)}{\langle \Theta(k)\ell_k, \psi_i \rangle},$$

де $\psi_i \in \hat{S}$. У випадку $\psi_i \in \mathbb{R}^2$, ψ_i можна вибрати так

$$\psi_i = \begin{pmatrix} \cos \gamma_i \\ \sin \gamma_i \end{pmatrix}, \text{ де } \gamma_i = \frac{2i\pi}{m}, i = \overline{0, m},$$

$$Z(k, \ell) = \bigcup_{i=0, m} \{ \psi_i : \langle \Theta(k)\ell, \psi_i \rangle > 0 \}.$$

3) Тоді границя максимальної за включенням множини сильної практичної стійкості апроксимується множиною точок

$$\partial \hat{G} = \{ \ell_k d_*(\ell_k) : k = 0, 1, \dots, p \}.$$

Опис алгоритму закінчено.

2. Знаходження максимальної за включенням множини слабкої практичної стійкості

Розглянемо дискретне включення вигляду

$$x(k+1) \in f_k(x(k)), k \in [0, N], \quad (5)$$

де $f_k : D \rightarrow \text{comp}(D)$ – напівнеперервне зверху багатозначне відображення, яке визначене в області $D \subset R^n$. Позначимо $x(k, x_0)$ розв'язок (5), який задовільняє початковій умові $x(0) = x_0$, $X(k, X_0)$ множини досяжності (5) за умови, що $x(0) \in X_0$, $X_0 \subset D$. Дискретне рівняння вигляду

$$X(k+1) = f_k(X(k)), k \in [0, N] \quad (6)$$

описує динаміку множини досяжності $X(k, X_0)$ за умови $X(0) = X_0$.

Нехай $G_0 \in \text{comp}(R^n)$ – деяка множина, $\Phi(k) \in \text{comp}(R^n)$ – множина фазових обмежень, $0 \in \text{int}\Phi(k)$, $0 \in G_0$, $k \in [0, N]$.

Означення 2. Нульовий розв'язок дискретного включення (5) називається $\{G_0, \Phi(k), 0, N\}$ – слабко стійким, якщо яким би не було $x_0 \in G_0$ існує розв'язок $x(k, x_0)$ включення (5) такий, що виконується $x(k, x_0) \in \Phi(k)$ для всіх $k \in [0, N]$.

Позначимо $I_* \subseteq \Phi(t_0)$ максимальну за включенням множину всіх початкових умов, для яких має місце означення 2. Для всіх точок $x_0 \in I_*$ і для довільного $k \in [0, N]$ виконується співвідношення $X(k, x_0) \cap \Phi(k) \neq \emptyset$. Має місце таке твердження.

Розглянемо лінійне дискретне включення вигляду

$$x(k+1) \in A_k x(k) + U(k), \quad (7)$$

де $x \in R^n$, A_k – невироджена матриця розмірності $n \times n$, $U(k) \in \text{conv}(R^n)$, $k \in [0, N-1]$, $\Phi(k) \in \text{conv}(R^n)$ – множина фазових обмежень, $k \in [0, N]$, $0 \in \text{int}I_*$.

З включення (7) маємо, що множина досяжності задовільняє рівняння

$$X(k+1) = A_k X(k) + U(k), X(0) = X_0,$$

$X_0 \in \text{conv}(R^n)$. Запишемо множину досяжності у вигляді

$$X(k, X_0) = \Theta(k)X_0 + \Omega(k),$$

де

$$\Theta(k) = A_{k-1} \cdots A_1 A_0, \Omega(k) = \sum_{i=1}^k P(i, k-1)U(i-1). \quad (8)$$

Тут $P(i, k) = A_k \cdots A_{i+1} A_i$, $i \leq k$, $P(k+1, k) = E$, E – одинична матриця розмірності $n \times n$.

Селектором багатозначної функції $U : [0, N-1] \rightarrow \text{conv}(R^n)$ є однозначна функція $u : [0, N-1] \rightarrow R^n$ така, що $u(i) \in U(i)$ для всіх $i \in [0, N-1]$.

Позначимо $\Sigma(U)$ множину селекторів відображення $U : [0, N-1] \rightarrow \text{conv}(R^n)$.

Теорема 1 [5]. Опорна функція множини I_* виражається співвідношенням

$$c(I_*, \eta) = \overline{co} \min_{k \in [0, N]} c(\Phi(k) + (-1)\Omega(k), (\Theta^*(k))^{-1}\eta),$$

де $\eta \in R^n$.

Знайдемо функціонал Мінковського для множини I_* . За означенням функції Мінковського

$$m_*(x_0) = \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{x_0}{\lambda} \in I_* \right\},$$

де $x_0 \in R^n$. Нехай $\frac{x_0}{\lambda} \in I_*$. Тоді маємо

$$\left\langle \Theta(k) \frac{x_0}{\lambda}, \psi \right\rangle \leq \min_{k \in [0, N]} c(\Phi(k) + (-1)\Omega(k), \psi),$$

де $k \in [0, N]$, $\psi \in R^n$. Звідси

$$\max_{k \in [0, N]} \frac{\langle \Theta(k)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(k) + (-1)\Omega(k), \psi)} \leq \lambda, \psi \in R^n.$$

За означенням функції Мінковського

$$m_*(x_0) = \max_{\psi \in S} \max_{k \in [0, N]} \frac{\langle \Theta(k)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(k) + (-1)\Omega(k), \psi)}.$$

Запишемо функцію деформації множини I_* .

За означенням функції деформації

$$d_*(x_0) = \sup \{ \lambda > 0 : \lambda x_0 \in I_* \},$$

де $x_0 \in R^n$. Нехай $\lambda x_0 \in I_*$, тоді

$$\langle \lambda \Theta(k)x_0, \psi \rangle \leq \min_{k \in [0, N]} c(\Phi(k) + (-1)\Omega(k), \psi),$$

де $k \in [0, N]$, $\psi \in R^n$. Звідси

$$\lambda \leq \min_{k \in [0, N]} \frac{c(\Phi(k) + (-1)\Omega(k), \psi)}{\langle \Theta(k)x_0, \psi \rangle}, \psi \in R^n.$$

За означенням

$$d_*(x_0) = \min_{\psi \in P} \min_{k \in [0, N]} \frac{c(\Phi(k) + (-1)\Omega(k), \psi)}{\langle \Theta(k)x_0, \psi \rangle},$$

де множина $P \subset S$ складається з точок $\psi \in S$, для яких $\langle \Theta(k)x_0, \psi \rangle > 0$.

2.1. Знаходження максимальної за включенням множини $I_* \subset R^2$ слабкої практичної стійкості за допомогою опорної функції.

Алгоритм 2.1.

1) Побудуємо сітку за $\xi_i \in S$, $i = \overline{0, m}$, де

$$\xi_i = \begin{pmatrix} \cos \gamma_i \\ \sin \gamma_i \end{pmatrix}, \gamma_i = \frac{2i\pi}{m}, i = \overline{0, m-1}, \text{ причому}$$

$$\gamma_m = \gamma_0.$$

2) Для всіх $\xi_i \in S, i = \overline{0, m}$ обчислимо значення опорної функції $c(I_*, \xi_i)$. Позначимо $\hat{\xi}_i = \xi_j$, де $j = \underset{j=\overline{0, m-1}}{\operatorname{argmin}} \|\xi_j - (\Theta^*(k))^{-1} \xi_i\|$.

Тоді

$$c(I_*, \xi_i) \approx$$

$$\approx \overline{co} \min_{k=\overline{0, N}} \left\| (\Theta^*(k))^{-1} \xi_i \right\| \left(c(\Phi(k), \hat{\xi}_i) + c((-1)\Omega(k), \hat{\xi}_i) \right).$$

3) Знайдемо точки x_i перетину опорних гіперплощин до множини I_* в напрямках векторів ξ_i і ξ_{i+1} . Для цього m раз розв'яжемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} \langle x_i, \xi_i \rangle = c(I_*, \xi_i) \\ \langle x_i, \xi_{i+1} \rangle = c(I_*, \xi_{i+1}) \end{cases}.$$

Визначник системи

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \cos \gamma_i & \sin \gamma_i \\ \cos \gamma_{i+1} & \sin \gamma_{i+1} \end{vmatrix} = \\ &= \cos \gamma_i \sin \gamma_{i+1} - \cos \gamma_{i+1} \sin \gamma_i = \\ &= \sin(\gamma_{i+1} - \gamma_i) = \sin \frac{2\pi}{m} \neq 0. \end{aligned}$$

4) Побудуємо багатокутник з вершинами в точках x_i , $i = \overline{0, m}$, який утворює внутрішню апроксимацію множини I_* .

2.2. Знаходження максимальної за включенням множини слабкої практичної стійкості за допомогою функції Мінковського.

Алгоритм 2.2.

1) Задамо сітку $\hat{S}$ на одиничній сфері S та сітку $\hat{\Phi}$ на множині $\Phi(0)$.

2) Для кожного $x_0 \in \hat{\Phi}$ обчислимо

$$m_*(x_0) = \max_{k=\overline{0, N}} \max_{i=\overline{0, m}} \frac{\langle \Theta(k)x_0, \psi_i \rangle}{c(\Phi(k), \psi_i) + c((-1)\Omega(k), \psi_i)},$$

де $\psi_i \in \hat{S}$. У випадку, коли коли вимірність фазового простору дорівнює 2, точки ψ_i можна вибрати так:

$$\psi_i = \begin{pmatrix} \cos \gamma_i \\ \sin \gamma_i \end{pmatrix}, \text{ де } \gamma_i = \frac{2i\pi}{m}, i = \overline{0, m}.$$

3) Тоді множина

$$\bar{I} = \{x_0 \in \hat{\Phi} : m_*(x_0) \leq 1\},$$

є апроксимацією множини I_* .

Опис алгоритму закінчено.

2.3. Знаходження максимальної за включенням множини слабкої практичної стійкості за допомогою функції деформації.

Алгоритм 2.3.

1) Задаємо сітку $\hat{S}$ на S . У випадку, коли $S \subset R^2$, сітку можна задати так: $\ell_k \in S, k = \overline{0, p}$, де

$$\ell_k = \begin{pmatrix} \cos \gamma_k \\ \sin \gamma_k \end{pmatrix}, \gamma_k = \frac{2k\pi}{p}, k = \overline{0, p}.$$

2) Для кожного ℓ_k обчислимо

$$d_*(\ell_k) = \min_{k=\overline{0, N}, \psi_i \in Z(k, \ell)} \frac{c(\Phi(k), \psi_i) + c((-1)\Omega(k), \psi_i)}{\langle \Theta(k)\ell_k, \psi_i \rangle},$$

де $\psi_i \in \hat{S}$. У випадку $\psi_i \in R^2$, точку ψ_i можна вибрати так:

$$\psi_i = \begin{pmatrix} \cos \gamma_i \\ \sin \gamma_i \end{pmatrix}, \text{ де } \gamma_i = \frac{2i\pi}{m}, i = \overline{0, m},$$

$$Z(k, \ell) = \bigcup_{i=\overline{0, m}} \{\psi_i : \langle \Theta(k)\ell, \psi_i \rangle > 0\}.$$

3) Тоді границя максимальної за включенням множини слабкої практичної стійкості апроксимується точками

$$\partial \hat{I} = \{x = d^*(\ell_k)\ell_k : k = \overline{0, p}\}.$$

Приклад.

Нехай в дискретному включенні вигляду (3)

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$U(0) = K_2(0), U(1) = K_1(0).$$

Задані такі фазові обмеження

$$\Phi(0) = K_3(0), \Phi(1) = K_3(0), \Phi(1) = K_4(0).$$

Тоді, використовуючи вищеописані алгоритми, будемо множини G_* , I_* . На рисунках 1 і 2 наведено ілюстрацію результатів обчислювального експерименту.

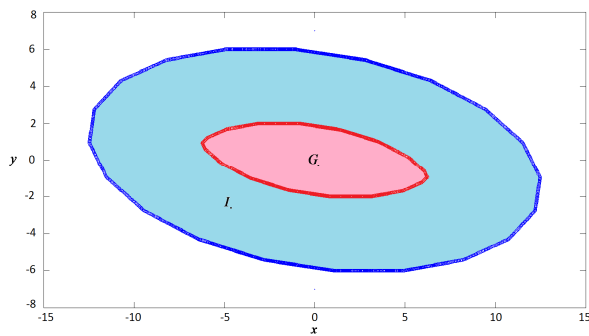


Рис.1 Множини I_* і G_* , побудовані за допомогою функції деформації

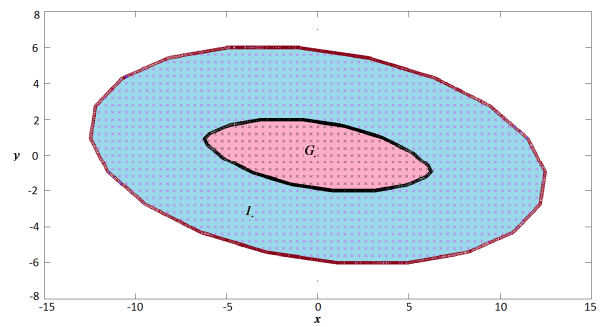


Рис. 2 Множини I_* і G_* , побудовані за допомогою функції Мінковського

Список використаних джерел

1. Башняков О.М. Практична стійкість, оцінки та оптимізація. / Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. – К.: Київський університет, 2008. – 383 с.
2. Башняков А.Н. О максимальном множестве начальных условий в задачах практической устойчивости дискретной системы. / Башняков А.Н., Пичкур В.В., Хитко И.В. //Проблемы управления и информатики. -2011. -№2. – С.5-11.
3. Пичкур В.В. Оптимальные множества начальных условий в задаче практической устойчивости дискретных включений / Пичкур В.В., Сасонкина М.С. // «Mathematical analysis, differential equations and their applications» (september 15-20, 2010). – Sunny Beach, Bulgaria -2011. - С.291-300.
4. Пічкур В.В. Апроксимація максимальної множини початкових умов в задачі практичної стійкості систем з багатозначною правою частиною / Пічкур В.В., Сасонкіна М.С.// Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. -2012. – Т. 17, вип. 1-2(13-14). – С. 121-128.
5. Пічкур В.В. максимальна множина початкових умов у задачі слабкої практичної стійкості дискретного включення / Пічкур В.В., Сасонкіна М.С.// Нелінійні коливання, 2012, т. 15, № 4, с. 504-514.

References

1. BASHNYAKOV O.M., GARASHHENKO F.G., PICHKUR V.V (2008) *Praktichna stijkist, ocinki ta optimizaciya*. Kiivskij universitet.
2. BASHNYAKOV A.N., PICHKUR V.V., HITKO I.V. (2011) *O maksimalnom mnozhestve nachal'nyx uslovij v zadachax prakticheskoy ustojchivosti diskretnoj sistemy*. Problemy upravleniya i informatiki. -№2. – P.5-11.
3. PICHKUR V.V., SASONKINA M.S (2011) *Optimalnye mnozhestva nachal'nyx uslovij v zadache prakticheskoy ustojchivosti diskretnyx vklyuchenij* // «Mathematical analysis, differential equations and their applications» (september 15-20, 2010). – Sunny Beach, Bulgaria P. 291-300.
4. PICHKUR V.V., SASONKINA M.S (2012) *Aproksimaciya maksimalnoї mnozhini pochatkovix umov v zadachi praktichnoї stijkosti sistem z bagatoznachnoyu pravoyu chastinoyu* Visnik Odesk. Nac. Un-tu. Matem. i mex. – T. 17, vip. 1-2(13-14). – S. 121-128.
5. PICHKUR V.V., SASONKINA M.S (2012) *maksimalna mnozhina pochatkovix umov u zadachi slabkoї praktichnoї stijkosti diskretnogo vklyuchennya* Nelinijni kolivannya, t. 15, № 4, ss. 504-514.

Надійшла до редколегії 12.12.2017

Шелуденко А.С., аспірант

Гранична теорема для деяких статистик типу Колмогорова-Смирнова

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м.Київ, пр-т.Глушкова, 4д,
e-mail: annasheludenko@gmail.com

Sheludenko A. S., postgraduate

Limit theorems for some statistics of the Kolmogorov-Smirnov type

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Glushkova st.,4d,
e-mail: annasheludenko@gmail.com

У статті досліджується слабка збіжність максимуму сум незалежних випадкових процесів у просторі $D[0,1]$. При цьому ми обмежуємося важливим випадком функціоналів, які являються деяким узагальненням статистик типу Колмогорова-Смирнова.

Ключові слова: гранична теорема, випадкова величина, слабка збіжність, статистики Колмогорова.

In the article, the weak convergence of the maximum of sums of independent random processes in the space $D[0,1]$ is researched. Herewith we confine ourselves to an important case of functionals, which are some generalization of Kolmogorov-Smirnov type and that

$$\overline{D}_n \sqrt{n} = \sup_{0 \leq s \leq 1} \sup_{1 \leq k \leq n} \sqrt{k/n} |\beta_k(s)|,$$

$$\overline{D}_n^+ \sqrt{n} = \sup_{0 \leq s \leq 1} \sup_{1 \leq k \leq n} \sqrt{k/n} \beta_k(s).$$

where $\beta_k(s)$ - is equable empirical process.

It proves that they are weakly matched according to

$$\sup_{0 \leq t, s \leq 1} W(t, s) \text{ and } \sup_{0 \leq t, s \leq 1} |W(t, s)|,$$

$W(t, \cdot)$ some process of Brownian movement with values in space.

Key words: Limit theorem, random variable, weak convergence, statistics of Kolmogorov.

Статтю представив д.т.н., проф. Козаченко Ю.В.

Нехай $X = \{X(s), s \in [0, 1]\}$ - деякий випадковий процес(в.п.), а $\Gamma = \{\Gamma(s), s \in [0, 1]\}$ - гаусівський в.п. із значеннями в R^1 . Припустимо, що

Припустимо, що X та Γ належать в м.н. та введемо випадкову функцію:

$$\forall s \in [0, 1], \mathbf{E}X(s) = \mathbf{E}\Gamma(s) = 0, \forall s_1, s_2 \in [0, 1],$$

$$\mathbf{E}X(s_1)X(s_2) = \mathbf{E}\Gamma(s_1)\Gamma(s_2) = R(s_1, s_2). \quad (1)$$

Розглянемо (X_n) , (Γ_n) послідовності незалежних копій процесів X та Γ відповідно. І нехай B сепарабельний функціональний банахів простір, $B = (x = \{x(s), s \in [0, 1]\})$. Будемо казати, що деякий в.п. належить B майже напевне (м.н.), якщо його вибіркові функції належать B м.н.

де (Γ_n) - послідовність незалежних копій процесу Γ , а $F_n(t)$ - пікоподібні функції Фабера-Шаудера (які є інтегралами відповідних функцій Гаара $H_n(u)$, точніше $F_n(t) = \int_0^t H_{n-1}(u)du$). У роботах [1, 2] встановлено, що ряд (2) збігається як для будь-якого $s \in [0, 1]$ так і за нормою простору B рівномірно по $t \in [0, 1]$ м.н. Процес $W(\cdot, t)$ називається процесом броунівського руху зі значеннями в B .

Покладемо $S_n(s) = \sum_{k=1}^n X_k(s)$, $S_0 = 0$,

$$\bar{S}_n(s) = \max_{0 \leq k \leq n} S_k(s).$$

Має місце наступна

Лема 1. *Скінченновимірні розподіли в.п. $\frac{\bar{S}_n(s)}{\sqrt{n}}$ збігаються до скінченновимірних розподілів процесу*

$$\bar{W}(s) = \max_{t \in [0,1]} W(t, s)$$

(див. [1], [2], Лема 3).

Якщо в.п. $\frac{\bar{S}_n(s)}{\sqrt{n}}$ та $\bar{W}(s)$ належать В м.н., то природно поставити задачу дослідження умов, при яких має місце слабка збіжність у просторі В : при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\bar{S}_n(\cdot)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \bar{W}(\cdot) \quad (3)$$

У роботах [2] та [3] ця задача вивчалася для просторів $B = L_p = L_p[0, 1]$ та $B = C[0, 1]$.

У даній роботі фактично досліджується слабка збіжність (3) у просторі $D[0, 1]$. При цьому ми обмежуємося важливим випадком функціоналів, які являються деяким узагальненням статистик типу Колмогорова-Смирнова.

Простір $D[0, 1]$ - простір дійсних функцій на $[0, 1]$, які не мають розривів другого роду.

Для рівномірно розподілених в.в. $u_1, \dots, u_n$ в R^1 з функцією розподілу $F(t) = t$, $0 \leq t \leq 1$ розглянемо емпіричну функцію розподілу

$$F_n^*(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{I}(u_i < t) - t.$$

Величини

$$D_n = \sup_{t \in [0,1]} |F_n^*(t) - t|,$$

$$D_n^+ = \sup_{t \in [0,1]} (F_n^*(t) - t).$$

називаються статистиками Колмогорова та Смирнова. Вони відіграють фундаментальну роль в математичній статистиці. Введемо деякі узагальнення статистик D_n , D_n^+ (див. [2]). Покладемо $X_i(t) = I(u_i < t) - t$, а

$$\beta_n(s) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i(s) = \frac{S_n(s)}{\sqrt{n}}.$$

Тоді неважко перевірити, що

$$\mathbf{E}X_i(s) = 0, \mathbf{E}X_i(t)X_i(s) = \min(t, s) - ts,$$

$$\mathbf{E}\beta_n(t) = 0,$$

$$\mathbf{E}\beta_n(t)\beta_n(s) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}X_i(t)X_i(s) = \min(t, s) - ts.$$

Позначимо через

$$\bar{D}_n \sqrt{n} = \sup_{0 \leq s \leq 1} \sup_{1 \leq k \leq n} \sqrt{k/n} |\beta_k(s)|,$$

$$\bar{D}_n^+ \sqrt{n} = \sup_{0 \leq s \leq 1} \sup_{1 \leq k \leq n} \sqrt{k/n} \beta_k(s).$$

Основний результат роботи містить

Теорема 1. *Нехай в означенні $W(s, t)$ процес $\Gamma(s)$ має кореляційну функцію $R(s, t) = \min(s, t) - st$. Тоді при $n \rightarrow \infty$*

$$\bar{D}_n^+ \sqrt{n} \xrightarrow{D} \sup_{t,s} W(t, s),$$

$$\bar{D}_n \sqrt{n} \xrightarrow{D} \sup_{t,s} |W(t, s)|. \quad (4)$$

Доведення. Установимо лише перше співвідношення в (4). Друге доводиться аналогічно.

Для доведення нам знадобиться один відомий результат із [5, с. 16].

Введемо поняття ρ - збіжності. Розглянемо будь-яку метрику або псевдометрику ρ (функція $\rho(x, y)$ є псевдометрикою, якщо для неї справджуються всі властивості метрики, крім однієї, в силу якої $\rho(x, y) = 0$ означає $x = y$).

Вважаємо, що процеси $\zeta_n(t)$ та $\zeta(t)$ лежать в деякому функціональному просторі $B = B[0, v]$ з метрикою ρ . Кажуть, що послідовність розподілів P_{ζ_n} процесів ζ_n ρ - збігається до розподілу P_ζ процесу ζ , якщо для будь-якого вимірного і ρ - неперервного функціоналу f , визначеного на B

$$\mathbf{P}(f(\zeta_n) < t) \Rightarrow \mathbf{P}(f(\zeta) < t)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Лема 2. Нехай $\zeta_n(t)$ ($n=1,2,\dots$) і $\zeta(t)$ довільні сепарабельні процеси задані в B . $P(\zeta(\cdot) \in C[0, v]) = 1$. Для ρ_C - збіжності P_{ζ_n} до P_ζ при $n \rightarrow \infty$ достатньо, щоб

1. Скінченновимірні розподіли процесів $\zeta_n(t)$ збігалися до скінченновимірних розподілів процесу $\zeta(t)$ на $[0, v]$.

2. Для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P(d_\delta^c(\zeta_n) > \varepsilon) = 0,$$

$$де d_\delta^c(x) = \sup_{|t-s| \leq \delta} |x(t) - x(s)|.$$

Покладемо

$$\gamma_n(s) = \sup_{1 \leq k \leq n} \sqrt{k/n} \beta_k(s).$$

Оскільки $\sup_s x(s)$ вимірний і неперервний функціонал відносно рівномірної метрики, то згідно лем 1, 2 залишається довести наступне твердження.

Лема 3. Для довільного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \sup_{T_\delta} |\gamma_n(t) - \gamma_n(s)| > \varepsilon \right\} = 0, \quad (5)$$

де

$$T_\delta = \{(t, s) \in [0, 1]^2 : |t - s| \leq \delta\}, \quad \delta > 0.$$

Доведення. Використовуючи елементарну нерівність

$$\left| \max_{1 \leq k \leq n} a_k - \max_{1 \leq k \leq n} b_k \right| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |a_k - b_k|$$

отримаємо

$$\begin{aligned} & \sup_{T_\delta} |\gamma_n(t) - \gamma_n(s)| \leq \\ & \leq \sup_{T_\delta} \left| \sup_{1 \leq k \leq n} \sqrt{\frac{k}{n}} \beta_k(t) - \sup_{1 \leq k \leq n} \sqrt{\frac{k}{n}} \beta_k(s) \right| \leq \\ & \leq \sup_{T_\delta} \sup_{1 \leq k \leq n} \sqrt{\frac{k}{n}} |\beta_k(t) - \beta_k(s)|. \end{aligned} \quad (6)$$

Із (6) зрозуміло, що достатньо довести

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \sup_{T_\delta} \sup_{1 \leq k \leq n} \sqrt{k/n} |\beta_k(t) - \beta_k(s)| > \varepsilon \right\} = 0. \quad (7)$$

Нехай $L = \{r/2^N : N > 1, 0 \leq r \leq 2^N\}$ - сукупність двійково-раціональних чисел на $[0, 1]$. Візьмемо довільні $b_1, b_2 \in L$, $b_1 = \frac{r_1}{2^m}$, $b_2 = \frac{r_2}{2^m}$, $|b_1 - b_2| < \delta$, а $m(\delta) = \min(r : \delta 2^r \geq 1)$. Зафіксуємо $\delta > 0$ та виберемо m досить великим, щоб $\delta 2^{m-1} \geq 1$. Нехай $0 \leq s < t \leq 1$, $|t - s| < \delta$, тоді знайдуться r_1, r_2 такі, що $\frac{r_1}{2^m} \leq s \leq \frac{r_2+1}{2^m}$ та $\frac{r_1}{2^m} \leq t \leq \frac{r_1+1}{2^m}$. У роботі [4, с.152], встановлена оцінка:

$$\begin{aligned} & \sup_{|t-s| < \delta} |\beta_k(t) - \beta_k(s)| \leq \frac{2\sqrt{k}}{2^m} + \\ & + 2 \sup_{|r_1-r_2| < \delta 2^{m+1}} \left| \beta_k\left(\frac{r_1}{2^m}\right) - \beta_k\left(\frac{r_2}{2^m}\right) \right|. \end{aligned}$$

Звідси вже просто випливає нерівність

$$\begin{aligned} & \sup_{|t-s| < \delta} \sup_{1 \leq k \leq n} \sqrt{\frac{k}{n}} |\beta_k(t) - \beta_k(s)| \leq \frac{2\sqrt{n}}{2^m} + \\ & + 2 \sup_{|r_1-r_2| < \delta 2^{m+1}} \sup_{1 \leq k \leq n} \sqrt{\frac{k}{n}} \left| \beta_k\left(\frac{r_1}{2^m}\right) - \beta_k\left(\frac{r_2}{2^m}\right) \right|. \end{aligned} \quad (8)$$

Далі, так само як і в [4] підбираємо $m = m_n$, таким чином, щоб виконувались умови

$$\frac{\sqrt{n}}{2^{m_n}} \rightarrow 0, \quad \frac{n}{2^{m_n}} \geq 1. \quad (9)$$

Позначимо через

$$\begin{aligned} \xi_k &= \sup_{|r_1-r_2| \leq \delta 2^{m_n}} \sqrt{\frac{k}{n}} \left| \beta_k\left(\frac{r_1}{2^{m_n}}\right) - \beta_k\left(\frac{r_2}{2^{m_n}}\right) \right|, \\ \Delta_n &= \sup_{1 \leq k \leq n} \xi_k. \end{aligned}$$

Тоді, враховуючи (8) та (9), залишається встановити рівність: для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ \Delta_n > \varepsilon \} = 0. \quad (10)$$

Послідовність (ξ_n) утворює субмартингал. Справді, при $k < n$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_k \xi_n &= \mathbf{E}_k \sup_{|r_1 - r_2| \leq \delta 2^{m_n}} \left| \frac{S_n(\frac{r_1}{2^{m_n}})}{\sqrt{n}} - \frac{S_n(\frac{r_2}{2^{m_n}})}{\sqrt{n}} \right| \geq \\ &\geq \sup_{|r_1 - r_2| \leq \delta 2^{m_n}} \left| \mathbf{E}_k \frac{S_n(\frac{r_1}{2^{m_n}})}{\sqrt{n}} - \mathbf{E}_k \frac{S_n(\frac{r_2}{2^{m_n}})}{\sqrt{n}} \right| = \\ &= \sup_{|r_1 - r_2| \leq \delta 2^{m_n}} \sqrt{\frac{k}{n}} \left| \frac{S_k(\frac{r_1}{2^{m_n}})}{\sqrt{k}} - \frac{S_k(\frac{r_2}{2^{m_n}})}{\sqrt{k}} \right| = \xi_k. \end{aligned}$$

Тут через $\mathbf{E}_k \eta$ позначаємо умовне математичне сподівання в.в. ξ при фіксованих $X_i, i \leq k$.

Для субмартингала ξ_k відома нерівність із [6], с. 78)

$$\mathbf{P} \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} \xi_k^+ \geq \varepsilon \right\} \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{E} \xi_n^+. \quad (11)$$

Із (12) та означення Δ_n одразу випливає, що

$$P(\Delta_n > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{E} \xi_n.$$

В ([4], с. 153) знайдена оцінка для останньої величини:

$$\mathbf{E} \xi_n \leq 2 \sum_{r=m(\delta)}^{m_n} (2^r \frac{4}{2^{2r}})^{\frac{1}{4}} \leq 2\sqrt{2} \sum_{r \geq m(\delta)} 2^{\frac{-r}{4}} \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0.$$

Таким чином лема 3, а разом з нею і теорема 1, доведені. $\square$

$\square$

Список використаних джерел

- [1] Ламперти Дж. Вероятность. - Москва: Наука, 1973. - 184 с.
- [2] Мацак. И.К. Деякі граничні теореми для максимуму сум незалежних випадкових процесів. // Укр.мат.журн. 2008. - **60**. - № 12. - С. 1664 - 1674.
- [3] Мацак. І.К., Плічко А.М., Шелуденко А.С. Граничні теореми для максимуму сум незалежних випадкових процесів. // Укр.мат.журн. 2017. (у друці).
- [4] Мацак. И.К. Елементи теорії екстремальних значень. // Монографія - К.: "ЦП "КОМПРИНТ" 2014. - 209 с.
- [5] Боровков А. А., Сходимость распределений функционалов от случайных процессов, УМН, 1972, том 27, выпуск 1(163), 3–41
- [6] Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов, т.1- Москва: Наука, 1971. - 664 с.

References

1. LAMPERTI J. (1973) Probability . - Moscow: Science,. - 184 P.
2. MATSAK I. K.(2008) Some limit theorems for the maximum of sums of independent random processes. // Ukrainian.Math. Journal. - **60**. - 12. - P. 1664 - 1674.
3. MATSAK I. K., PLICHKO A.M., SHELUDENKO A.S. Limit theorems for the maximum of sums of independent random processes. // Ukrainian.Math. Journal.
4. MATSAK I. K.(2014) Elementsof extreme value theory. // Monograph - K.: "CPU "COMPRI-NT". - 209 P.
5. BOROVKOV A.A.(1972) Convergence of distributions of functionals of random processes, UMJ, V.27, 1(163),P. 3–41.
6. GIHMAN I.I. SKOROKHOD A.B.(1971) The Theory of Stochastic Processes, V.1- Moscow: Science - 664 P.

Надійшла до редколегії 15.12.2017

УДК 004.415.52, 681.3

Шишацька О.В.

O.V.Shyshatska

**П'ятизначні логіки:
побудова та інтерпретація**

**The Five-Valued Logics:
construction and interpretation**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, Україна, вул. Володимирська,
64/13, м. Київ, Україна, 01601
e-mail: oshyshatska@gmail.com

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
64/13, Volodymyrska Street, City of Kyiv, Ukraine,
01601
e-mail: oshyshatska@gmail.com

Стаття присвячена побудові багатозначних логік. Такі логіки використовуються зокрема для моделювання та специфікації різноманітних систем при розв'язанні задач інформатики, штучного інтелекту, лінгвістики тощо. Запропоновано алгоритм побудови п'ятизначних логік, який складається з двох кроків. Перший крок – розширення базової логіки шляхом застосування загальнозначущої конструкції розповсюдження операцій з елементів на множини в термінах повного образу. В якості розширюваної логіки використовується сильна логіка Кліні. При цьому властивості комутативності та асоціативності розширень кон'юнкції і диз'юнкції успадковуються. В якості істиннісних значень виступають елементи булеану множини значень сильної логіки Кліні. Другий крок – звуження отриманої семизначної логіки до п'ятизначної. Множинами істиннісних значень побудованих п'ятизначних логік виступають підмножини множини істиннісних значень звуженої логіки. Виокремлені три п'ятизначні логіки, множини істиннісних значень, яких замкнені відносно сигнатурних операцій відповідних алгебр. На множинах істиннісних значень цих логік розглянуто часткові порядки.

Ключові слова: багатозначні логіки, п'ятизначна логіка, п'ятизначна алгебра, істиннісне значення, множина істиннісних значень, сильна логіка Кліні, частковий порядок.

The article is devoted to construction of multivalued logic. Such logics are used in particular for modelling and specification of various systems for solving tasks of informatics, artificial intelligence linguistics, etc. Proposed an algorithm for constructing five-valued logic, consisting of two steps. First step is extending the basic logic by application of generally valid construction of extension operations from elements on the sets of elements in terms of full image is shown. As the extended logic is used the strong Kleene logic. At the same time, the properties of commutativity and associativity of extending of conjunction and disjunction are inherited. As true values are used elements of the boolean set of values of strong Kleene logic. The second step is narrowing the resulting seven-valued logic to five-valued. The set of true values of constructed five-valued logic acts as a subset of the set of true values of narrowed logic. Attention focused on three five-valued logics, sets of true values, which are locked in relation to the signature operations of the corresponding algebras. On the sets of true values of these logics are considered partial orders.

Key Words: multivalued logic, five-valued algebra, true value, set of true values, strong Kleene logic, partial orders.

Статтю представив, д.ф.-м.н., проф. Буй Д.Б.

Вступ

Важливим класом задач інформатики, штучного інтелекту, лінгвістики є побудова нових логік, орієнтованих на потреби моделювання та специфікації систем різного типу. Існують різні підходи до побудови таких логік [1-2]. Найбільш дослідженими є тризначні

логіки, певна увага приділена чотиризначним логікам, але п'ятизначні логіки досліджені слабо [3]. Онтологічне обґрунтування п'ятизначних логік та їх приклади наведені у [4, 5]. Їх побудова відбувається наступним чином: визначаються (вводяться) додаткові істиннісні значення та означаються логічні операції згідно з онтологічними тлумаченнями цих значень.

Іншим способом є формальний. Як приклад – побудова нових логік з булевої множини (декартів добуток булевої множини, що лежить в основі побудови чотиризначної модальної логіки Лукасевича, або множина усіх підмножин булевої множини, що першопочатково пов'язаний з чотиризначною логікою Белнапа) чи метод перетворення логічних матриць. При такому утворенні надзвичайно важливою є подальша інтерпретація істиннісних значень.

В роботі запропоновано спосіб побудови багатозначних логік, що полягає в застосуванні до базової логіки загальнозначущої конструкції розповсюдження операцій з елементів на множини елементів в термінах повного образу (саме така конструкція застосовувалася в [6, підрозділ 1.3, с. 23-24] при дослідженні операцій табличних алгебр, побудованих на основі відомих реляційних алгебр Кодда та при дослідженні тризначних логік Кліні [7]; загальним властивостям повного образу присвячена робота [8]). В якості розширюваної логіки вибрано сильну логіку Кліні [8].

Розширення сигнатурних операцій сильної логіки Кліні

Повний образ дозволяє природно поширювати унарні (бінарні) операції на універсумі на булеан універсуму. Через $[f]$ позначимо унарну тотальну операцію на булеані $P(D)$ універсуму D , яка індукується частковою операцією f на

універсумі і задається рівністю $[f](X) = f[X]$;

тут і далі $f[X] = \{y \mid \exists x(x \in X \wedge y \simeq f(x))\}$ – повний образ множини X відносно операції f , де, з огляду на частковість функції, $\simeq$ – узагальнена рівність.

Аналогічно, нехай F – бінарна часткова операція на D ; вона також породжує бінарну тотальну операцію $[F]$ на булеані універсуму D , яка задається рівністю $[F](X, Y) = F[X \times Y]$.

Застосуємо вказану схему розширення до сигнатурних операцій алгебри сильної логіки Кліні $\langle \{T, F, \omega\}; \wedge_k, \vee_k, \neg_k \rangle$, де $\{T, F, \omega\}$ – логічні значення істини, хибі та невизначеності відповідно. В роботі [7] продемонстровано, як дану алгебру отримати шляхом застосування до алгебри класичної булевої логіки конструкції розширення (в термінах повного образу) її сигнатурних операцій.

Результат розширення операції кон'юнкції $\wedge_k$ і заперечення $\neg_k$ на булеан $P(\{T, F, \omega\})$ приведені в таблицях 1, 2 (розширення диз'юнкції будуватиметься аналогічно).

В таблиці 1 першому аргументу відповідають стовпці, другому аргументу – рядки.

Таблиця 1. Операція $[\wedge_k]$ на булеані $P(\{T, F, \omega\})$

	$\emptyset$	$\{T\}$	$\{F\}$	$\{\omega\}$	$\{T, F\}$	$\{T, \omega\}$	$\{F, \omega\}$	$\{T, F, \omega\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{T\}$	$\emptyset$	$\{T\}$	$\{F\}$	$\{\omega\}$	$\{T, F\}$	$\{T, \omega\}$	$\{F, \omega\}$	$\{T, F, \omega\}$
$\{F\}$	$\emptyset$	$\{F\}$	$\{F\}$	$\{F\}$	$\{F\}$	$\{F\}$	$\{F\}$	$\{F\}$
$\{\omega\}$	$\emptyset$	$\{\omega\}$	$\{F\}$	$\{\omega\}$	$\{F, \omega\}$	$\{\omega\}$	$\{F, \omega\}$	$\{F, \omega\}$
$\{T, F\}$	$\emptyset$	$\{T, F\}$	$\{F\}$	$\{F, \omega\}$	$\{T, F\}$	$\{T, F, \omega\}$	$\{F, \omega\}$	$\{T, F, \omega\}$
$\{T, \omega\}$	$\emptyset$	$\{T, \omega\}$	$\{F\}$	$\{\omega\}$	$\{T, F, \omega\}$	$\{T, \omega\}$	$\{F, \omega\}$	$\{T, F, \omega\}$
$\{F, \omega\}$	$\emptyset$	$\{F, \omega\}$	$\{F\}$	$\{F, \omega\}$	$\{F, \omega\}$	$\{F, \omega\}$	$\{F, \omega\}$	$\{F, \omega\}$
$\{T, F, \omega\}$	$\emptyset$	$\{T, F, \omega\}$	$\{F\}$	$\{F, \omega\}$	$\{T, F, \omega\}$	$\{T, F, \omega\}$	$\{F, \omega\}$	$\{T, F, \omega\}$

Таблиця 2. Операція $[\neg_k]$ на булеані $P(\{T, F, \omega\})$

аргумент	$\emptyset$	$\{T\}$	$\{F\}$	$\{\omega\}$	$\{T, F\}$	$\{T, \omega\}$	$\{F, \omega\}$	$\{T, F, \omega\}$
значення	$\emptyset$	$\{F\}$	$\{T\}$	$\{\omega\}$	$\{T, F\}$	$\{F, \omega\}$	$\{T, \omega\}$	$\{T, F, \omega\}$

Зазначимо, що розширення бінарних операцій комутативні; тому таблиця 1 “симетрична” (відносно головної діагоналі), і зіставлення аргументам стовпців або рядків насправді неістотно.

Зауважимо також, що властивості комутативності та асоціативності розширень кон'юнкції і диз'юнкції успадковуються; цей факт впливає із загальних результатів ([6, підрозділ 1.3, твердження 1.3.1, п. 8, с. 24; 19, твердження 5]).

Оскільки декартів добуток та повний образ зберігають порожню множину, то і операції $[\wedge_k]$, $[\vee_k]$, $[\neg_k]$ зберігають порожню множину. Саме тому в таблиці 1, наприклад, присутні константні рядок та стовпець, заповнені $\emptyset$.

Розглянемо відображення $\xi: \{T, F, \omega, u1, u2, u3, u4\} \rightarrow P(\{T, F, \omega\})$, де $T, F, \omega, u1, u2, u3, u4$ – логічні значення: $\xi: (T) \rightarrow \{T\}$, $\xi(F) = \{F\}$, $\xi(\omega) = \{\omega\}$, $\xi(u1) = \{T, F\}$, $\xi(u2) = \{T, \omega\}$, $\xi(u3) = \{F, \omega\}$, $\xi(u4) = \{T, F, \omega\}$. Очевидно, це відображення ін'єктивно, але не сюр'єктивно (порожня множина не входить в область значень відображення ξ).

За операціями алгебри $\mathfrak{Z}$ залишимо позначення, прийняті для операцій алгебри сильної логіки Кліні, замінивши нижній індекс k на $*$; домовимося про однойменні операції: операціям $\wedge_*$, $\vee_*$ та $\neg_*$ співставляються відповідно операції $[\wedge_k]$, $[\vee_k]$ та $[\neg_k]$.

Твердження 1. Відображення ξ – однозначний гомоморфізм алгебри логіки $\mathfrak{Z} = \langle \{T, F, \omega, u1, u2, u3, u4\}; \wedge_*, \vee_*, \neg_* \rangle$ в алгебру $\langle P(\{T, F, \omega\}); \wedge_k, \vee_k, \neg_k \rangle$, тобто це відображення є вкладенням алгебри $\mathfrak{Z}$ в алгебру $\langle P(\{T, F, \omega\}); \wedge_k, \vee_k, \neg_k \rangle$.

Замінюючи в таблицях 1-2 значення $\{T\}$, $\{F\}$, $\{\omega\}$, $\{T, F\}$, $\{T, \omega\}$, $\{F, \omega\}$, $\{T, F, \omega\}$ на T , F , ω , $u1$, $u2$, $u3$, $u4$ відповідно (згідно відображення ξ) і видаляючи константні стовпець і рядок, заповнені значенням $\emptyset$, приходимо до табличного задання операцій кон'юнкції ($\wedge_*$) та заперечення ($\neg_*$) алгебри $\mathfrak{Z}$ (таблиці 3,4). Диз'юнкція ($\vee_*$) задається аналогічно на основі розширення операції диз'юнкції ($\vee_k$).

Таблиця 3. Операція $\wedge_*$ алгебри $\mathfrak{Z}$

	T	F	ω	$u1$	$u2$	$u3$	$u4$
T	T	F	ω	$u1$	$u2$	$u3$	$u4$
F	F	F	F	F	F	F	F
ω	ω	F	ω	$u3$	ω	$u3$	$u3$
$u1$	$u1$	F	$u3$	$u1$	$u4$	$u3$	$u4$
$u2$	$u2$	F	ω	$u4$	$u2$	$u3$	$u4$
$u3$	$u3$	F	$u3$	$u3$	$u3$	$u3$	$u3$
$u4$	$u4$	F	$u3$	$u4$	$u4$	$u3$	$u4$

Таблиця 4. Операція $\neg_*$ алгебри $\mathfrak{Z}$

аргумент	T	F	ω	$u1$	$u2$	$u3$	$u4$
значення	F	T	ω	$u1$	$u3$	$u2$	$u4$

Очевидно, множина істиннісних значень $\{T, F, \omega, u1, u2, u3, u4\}$ замкнена відносно $\wedge_*, \vee_*, \neg_*$.

Впорядкування множини істиннісних значень задамо стандартно, поклавши $x \leq_* y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x = x \wedge_* y$ (або в еквівалентній формі $x \leq_* y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} y = x \vee_* y$), можна перейти до структури, точні грані двохелементних множин якої знаходяться за формулами: $\inf\{x, y\} = x \wedge_* y$, $\sup\{x, y\} = x \vee_* y$ (див., наприклад [10, гл. II, § 8, теорема 3, с. 154]).

Часткові порядки на множині $\{T, F, \omega, u1, u2, u3, u4\}$ щодо кон'юнкції та диз'юнкції показано на рисунку 1.

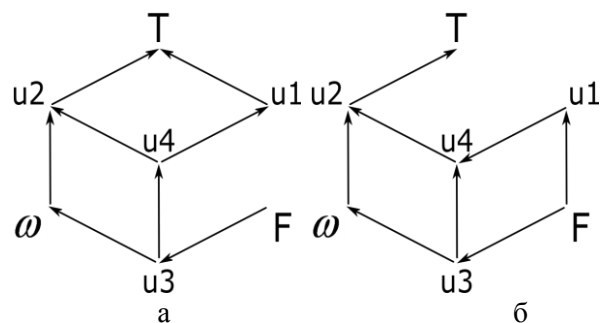


Рис. 1. Часткові порядки на множині $\{T, F, \omega, u1, u2, u3, u4\}$

а – щодо кон'юнкції; б – щодо диз'юнкції.

Очевидно, що множина $\{T, F, \omega, u1, u2, u3, u4\}$ не утворює ґратку істиннісних значень.

Причиною цього є специфічна поведінка елементів $u1, u4$ щодо операцій $\wedge_*, \vee_*$.

Таблиця 5. Операції $\wedge_*, \vee_*$ на $\{u1, u4\}$

$\wedge_*$	$u1$	$u4$
$u1$	$u1$	$u4$
$u4$	$u4$	$u4$

$\vee_*$	$u1$	$u4$
$u1$	$u1$	$u4$
$u4$	$u4$	$u4$

Це означає, що операції $\wedge_*, \vee_*$ на $\{u1, u4\}$ невідмінні. Отже, $\neg_*(u1 \wedge_* u4) = \neg_*(u1 \vee_* u4) = \neg_* u1 \wedge_* \neg_* u4 = \neg_* u1 \vee_* \neg_* u4 = u1 \vee_* u4 = u1 \wedge_* u4$.

Зазначимо, що аналогічна алгебра розглядається в [9]. Дослідження алгебри $\mathfrak{Z}$ – не є метою даної роботи. Вона використовується, як базова алгебра для утворення п'ятизначних алгебр – її підалгебр.

П'ятизначні алгебри (підалгебри алгебри $\mathfrak{Z}$) та порядки

Розглянемо п'ятизначні підалгебри алгебри $\mathfrak{Z}$. Необхідною умовою є замкненість підмножин множини істиннісних значень $\{T, F, \omega, u1, u2, u3, u4\}$ відносно операцій $\wedge_*, \vee_*, \neg_*$.

Замкненість щодо $\neg_*$ вимагає для носія алгебри істиннісних значень одночасної наявності чи відсутності пари T, F та пари $u2, u3$. Тому для утворення 5-елементних підалгебр в $\{T, F, \omega, u1, u2, u3, u4\}$ необхідно видаляти: два з елементів $\omega, u1, u4$; або пару T, F ; або пару $u2, u3$.

Отже, маємо п'ять варіантів п'ятиелементних підалгебр.

Підмножина $\{T, F, u1, u2, u3\}$ незамкнена щодо $\wedge_*$ ($u1 \wedge_* u2 = u4$) і $\vee_*$ ($u1 \vee_* u2 = u4$).

Підмножина $\{T, F, \omega, u1, u4\}$ незамкнена щодо $\wedge_*$ ($u1 \wedge_* \omega = u3, u4 \wedge_* u1 = u4$) і $\vee_*$ ($u1 \vee_* \omega = u4 \vee_* \omega = u2$).

Залишаються три п'ятиелементні підмножини $\{T, F, \omega, u1, u2, u3, u4\}$, які замкнені щодо $\wedge_*$ та $\vee_*$: $\{T, F, \omega, u2, u3\}$, $\{T, F, u2, u3, u4\}$, $\{\omega, u1, u2, u3, u4\}$. Часткові порядки на множинах наведено на рисунках 2-4.

Зауважимо, що множина $\{T, F, \omega, u2, u3\}$ є множиною істиннісних значень сильної логіки Кліні, поповненою двома невизначеними значеннями.

На множинах $\{T, F, \omega, u2, u3\}$ та $\{T, F, u2, u3, u4\}$ порядки лінійні, до того ж збігаються щодо диз'юнкції та кон'юнкції.

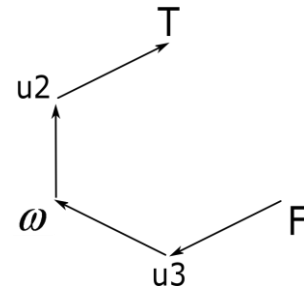


Рис. 2. Порядок на множині $\{T, F, \omega, u2, u3\}$ щодо кон'юнкції та диз'юнкції.

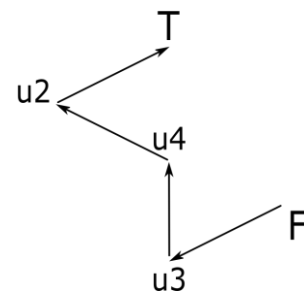


Рис. 3. Порядок на множині $\{T, F, u2, u3, u4\}$ щодо кон'юнкції та диз'юнкції.
а – щодо кон'юнкції; б – щодо диз'юнкції.

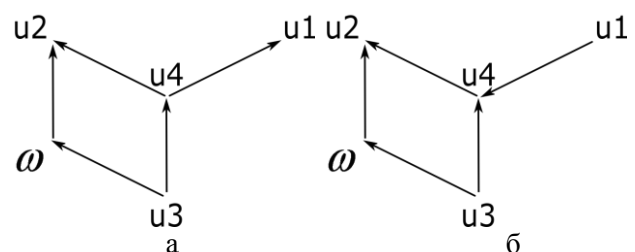


Рис. 4. Часткові порядки на множині $\{\omega, u1, u2, u3, u4\}$

а – щодо кон'юнкції; б – щодо диз'юнкції.

Висновки

В роботі побудовані п'ятизначні логіки. Механізм побудови наступний: 1. До алгебри сильної логіки Кліні застосовуємо загальнозначущу конструкцію розповсюдження операцій з елементів на множини елементів в термінах повного образу. Отримуємо базову алгебру семизначної логіки, операції якої є розширеними операціями сильної логіки Кліні. 2. Розглядаємо підалгебри базової алгебри семизначної логіки, носіями яких є п'ятиелементні множини істиннісних значень.

Виокремлено п'ятизначні логіки, множини істиннісних значень яких замкнені відносно сигнатурних операцій відповідних алгебр. Розглянуто часткові порядки на множинах істиннісних значень цих логік.

Вивчення та аксіоматизація побудованих п'ятизначних логік є завданням подальшого дослідження.

Список використаних джерел

1. Hähnle R. Many-Valued Logic, Partiality, and Abstraction in Formal Specification Languages / R. Hähnle // *Logic Journal of the IGPL*. – 2006 – N.13 (4). – P. 415–433.
2. Jones C. Reasoning about partial functions in the formal development of programs / Jones C. // *AVoCS'05. Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, Elsevier. – 2006. – Vol. 145. – P. 3–25. [online]. Available from: <http://dx.doi.org/10.1016/j.entcs.2005.10.002>
3. Карпенко А.С. Развитие многозначной логики. – М.: Издательство ЛКИ, 2010. – 448 с.
4. Ben-Jacob M. G. The Need for a Five-Valued Logic / M. G. Ben-Jacob // *GSTF Journal on Computing (JoC)*. – 2013. – Vol.3. – No.1. – pp.143-146.
5. Ferreira U. A Five-Valued Logic and a System / U. Ferreira // *Journal of Computer Science and Technology (JCS&T)*. – 2004. – Vol.4. – No.3. – pp.134-140.
6. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови / [Редько В. Н., Брона Ю. Й., Буй Д. Б., Поляков С. А.] – Київ: Видавничий дім “Академперіодика”, 2001. – 198 с.
7. Шишацька О. В. Виникнення та інтерпретація тризначних логік Кліні / О.В.Шишацька // Проблеми програмування. Матеріали сьомої міжнародної науково-практичної конференції з програмування УкрПРОГ'2010 (25-27 травня 2010 р., Київ). – С.72-79.
8. Буй Д. Б. Властивості теоретико-множинних конструкцій повного образу та обмеження / Д. Б. Буй, Н. Д. Кахута // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2005. – Вип. 2. – С. 232-240.
9. Нікітченко М. С. Алгебри загальних недетермінованих предикатів / М. С. Нікітченко, О. С. Шкільняк, С. С. Шкільняк // Проблеми програмування. – 2018. – № 1. – С.5-21.
10. Скорняков Л. А. Элементы алгебры / Л. А. Скорняков – Москва: Наука, 1986. – 240 с.

References

1. HÄHNLE, R. (2006). Many-Valued Logic, Partiality, and Abstraction in Formal Specification Languages. In *Logic Journal of the IGPL*. N.13 (4). P. 415–433.
2. JONES, C. (2006) Reasoning about partial functions in the formal development of programs. In *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, AVoCS'05, Elsevier. Vol. 145. P. 3–25. [online]. Available from: <http://dx.doi.org/10.1016/j.entcs.2005.10.002>
3. KARPENKO, A. (2010). The Development of Many-Valued Logics [in Russian]. M.: LKI. 448 p.
4. BEN-JACOB, M. (2013). The Need for a Five-Valued Logic. In *GSTF Journal on Computing (JoC)*. Vol.3. No.1. P.143-146.
5. FERREIRA, U. (2004) Five-Valued Logic and a System. In *Journal of Computer Science and Technology (JCS&T)*. Vol.4. No.3. pp.134-140.
6. REDKO, V. BRONA, YU. BUI, D. and POLIAKOV, S. (2001) The Relational databases: table algebras and SQL-like languages [in Ukrainian]. Kyiv: Vydavnychiy dim “Akademperiodyka”. 198 pp.
7. SHYSHATSKA, O. (2010) The Emergence and Interpretation of the Three-valued Kleene logic [in Ukrainian]. *Problems of Programming. Materials of the seventh international scientific and practical conference on programming UkrPROG'2010 (May 25-27, 2010, Kyiv)*. pp. 72–79.
8. BUI, B., KAKHUTA, N. (2005) The Properties of plural theoretical constructs of full image and constraints [in Ukrainian]. In *Bulletin of the University of Kiev. Phys.-Math. Science*. №1. pp. 232-240.
9. NIKITCHENKO, M., SHKILNIAK, O. and SHKILNIAK, S. (2018). The Algebras of general non-deterministic predicates [in Ukrainian]. In *Problems in programming*. № 1. pp.5-21.
10. SKORNIIAKOV, L. (1986) The Elements of Algebra [in Russian]. M: Science. 240 p.

Надійшла до редакції 20.11.2017

УДК 519.9

В. О. Яценко, д.т.н., проф.

V.A. Yatsenko, Doctor of science, prof.

Гарантоване прогнозування *Dst* індексу

Інститут космічних досліджень НАН України,
03680, м. Київ, пр-т Глушкова 40
e-mail: vyatsenko@gmail.com

Guaranteed prediction of the *Dst* index

Space Research Institute of National Academy of
Sciences, 03680, Kyiv, Glushkova st., 40
e-mail: vyatsenko@gmail.com

*Розглянуто гарантовану модель прогнозування *Dst* індексу. Запропоновано новий ідентифікаційний підхід моделі прогнозування на основі експериментальних даних та еволюційного алгоритму. Усі моделі, засновані на наборі даних дистанційних спостережень, що складаються з добутку VB_s , параметрів сонячного вітру, як вхідного сигналу *Dst*-індексу як вихідного для моделі. Ключові слова: гарантоване прогнозування, космічна погода, динаміко-інформаційний підхід, ідентифікація, *Dst* індекс.*

*Theoretical analysis of the guaranteed prediction model of the *Dst* index has been completed. A new identification approach for the *Dst* index prediction model using an experimental data and an evolutionary algorithm has been proposed. All models based on an observational data set consisting of VB_s , the solar wind parameter, as the input and the *Dst* index as the output. This method showed a number of advantages over the earlier proposed methods of space weather forecasting. First, using the dynamical-information approach, it is possible to automatically select the most significant regressors from the history of the experimental data. Secondly, it makes possible to automatically reconstruct a mathematical model and search of optimal model parameters.*

*Key words: guaranteed prediction, space weather, dynamical-information approach, identification, *Dst* index.*

Статтю представив д.т.н., проф. Волошин О.Ф.

During our research we used a polynomial discrete model of the *Dst* index [1], which allows to represent of the output signal through the system:

$$y(k) = F[y(k-1), \dots, y(k-n_y), \dots, u(k-1), \dots, u(k-n_u), \xi(k), \dots, \xi(k-n_\xi)], \quad (1)$$

where $F[\bullet]$ - polynomial of variables $u(k)$, $y(k)$

and $\xi(k)$ of order l ; $u(k)$ - an input signal; $y(k)$ - output signal; $\xi(k)$ - a variable that simulates the possible noise.

To select a specific polynomial F , we will apply the procedures of structural-parametric identification of the model, the essence of which is to add such non-linear terms to improve the

predictability and stability. The process of selecting nonlinear terms is usually considered complete when the prediction error satisfies a certain test for the accuracy of the model, which confirms the impossibility of a subsequent error reduction on new observational data.

To simplify the prediction problem of the *Dst* index, we consider the magnetosphere as a system with one input and one output. The description of nonlinear processes can also be improved by introducing free parameters and noise into the model. As shown by numerical calculations, the choice of a parameter VB_s as an input allows us to develop a model that is adequate for the forecast.

Obviously, it is more natural to predict not a consequence, i.e. y_{k+n} , the causes of their causes, i.e. $u_{k-(m-l)+1}, u_{k-(m-l)+2}, \dots, y_{k+n-1}, y_{k+n-2}, \dots$ and further on the basis of the mathematical model of the process (1) determine the predictive estimates $\tilde{y}_{k+n}$ of the quantities y_{k+n} .

Let us first consider the definition of the forecast estimate $\tilde{y}_{k+n}$ for $n = 1$. To do this, we need to estimate $\tilde{u}_{k-(m-l)+1}$ of the value $u_{k-(m-l)+1}$. Consider the class of processes (1) for which there is a priori estimate of the change rate u_k in the form $u_k \Delta u_k \in \delta u = \{\Delta u_k : |\Delta u_k = u_{k-1} - u_k| \leq \delta = \text{const.}\}$ (2)

We note that in this case it is not assumed the quantity δ .

From (2) follows the estimate $\tilde{u}_{k+1}$ the values u_{k+1} in the form

$$\tilde{u}_{k+1} \in \tilde{u}_{k+1} = \{u_{k+1} : u_k - \delta \leq u_{k+1} \leq u_k + \delta\}. \quad (3)$$

We rewrite equation (1) for $(k+1)$ step

$$y_{k+1} = f(y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-m+1}, u_{k-(m-l)+1}, u_{k-(m-l)}, \dots, u_{k-m+1}). \quad (4)$$

Substituting in (4) instead of the unknown at the k -th step his estimate u_{k+1} (3), we obtain

$$y_{k+1} = f(y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-m+1}, u_{k-(m-l)} + \Delta u_k, \dots, u_{k-m+1}). \quad (5)$$

From (5) we find an interval estimate [2] $\tilde{y}_{k+1}$ of the quantity y_{k+1} in the form

$$\tilde{y}_{k+1} \in \tilde{y}_{k+1} = \{\tilde{y}_{k+1} : \underline{y}_{k+1} \leq \tilde{y}_{k+1} \leq \bar{y}_{k+1}\}, \quad (6)$$

where

$$\underline{y}_{k+1} = \min_{\Delta u_k \in \delta u} f(y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-m+1}, u_{k-(m-l)} + \Delta u_k, \dots, u_{k-m+1}), \quad (7)$$

$$\bar{y}_{k+1} = \max_{\Delta u_k \in \delta u} f(y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-m+1}, u_{k-(m-l)} + \Delta u_k, \dots, u_{k-m+1}).$$

If $f(\dots, u_{k-(m-l)} + \Delta u_k, \dots)$ is a monotonic function, then its minimum and maximum belong to the boundaries of the interval δu . If, however, $f(\dots, u_{k-(m-l)} + \Delta u_k, \dots)$ is a multiextremal function, then replacing the interval $\{-\delta; \delta\}$ by a set of discrete values $\Delta u^{(i)}$, where $i = 1; K$, we reduce the problem (7), (8) to the combinatorial problem that are solved by a simple listing.

We now find an estimate $\tilde{y}_{k+2}$ of the quantity y_{k+2} . To do this, we rewrite equation (7) for the step $(k+2)$

$$y_{k+2} = f(y_{k+1}, y_k, \dots, y_{k-m+2}, u_{k-(m-l)+2}, \dots, u_{k-m+2}). \quad (9)$$

The value $u_{k-(m-l)+2}$ is

$$u_{k-(m-l)+2} = u_{k-(m-l)} + \Delta u_{k+1} + \Delta u_k. \quad (10)$$

Since the estimate (2) of the quantity Δu_k is valid for any k , we obtain from (10) and (9) an estimate $\tilde{u}_{k-(m-l)+2}$ of the quantity $u_{k-(m-l)+2}$

$$\tilde{u}_{k-(m-l)+2} \in \tilde{u}_{k-(m-l)+2}, \quad (11)$$

where

$$\tilde{u}_{k-(m-l)+2} = \{u : u_{k-(m-l)+1} - \delta \leq u_{k-(m-l)+2} \leq u_{k-(m-l)+1} + \delta\}. \quad (12)$$

From (7), (11) and (2) follows the estimate $\tilde{y}_{k+2}$ in the form

$$\tilde{y}_{k+2} \in \tilde{y}_{k+2}, \quad (13)$$

where

$$\underline{y}_{k+2} \leq \tilde{y}_{k+2} \leq \bar{y}_{k+2}, \quad \tilde{y}_{k+1} \in \tilde{y}_{k+1} = \{\tilde{y}_{k+1} : \underline{y}_{k+1} \leq \tilde{y}_{k+1} \leq \bar{y}_{k+1}\} \quad (14)$$

$$\underline{y}_{k+1} = \min_{\Delta u_k \in \delta u} F^L(y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-m+1}, u_{k-(m-l)} + \Delta u_k, \dots, u_{k-m+1}). \quad (15)$$

From (14), (15) follows that the interval set $\tilde{y}_{k+2}$ depends only from three indeterminate quantities y_{k+2} , $u_{k-(m-l)+1}$ and Δu_k for which their corresponding multiple estimates are given. Therefore, the value of the interval $\{\underline{y}_{k+2}; \bar{y}_{k+2}\}$ is greater than the interval $\{\underline{y}_{k+1}; \bar{y}_{k+1}\}$. All that is said about the solution of problems (7), (8), remains valid for problems (14), (15), with the only difference that these optimization problems are solved in three-dimensional space. The determination of the estimates $\tilde{y}_{k+n}$ of the value y_{k+n} , where $n \geq 3$, is carried out in a similar way, and these estimates become more rough with increasing value.

To make predictive estimates of the Dst index using the approach described above, we used two models for reconstructing from experimental data: linear and nonlinear. Using expression (16) and the genetic algorithm for searching for unknown parameters, the following model was obtained (time interval 2000 hours)

$$\bar{y}_{k+1} = \max_{\Delta u_k \in \delta u} F^L(y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-m+1}, u_{k-(m-l)} + \Delta u_k, \dots, u_{k-m+1}), \quad (16)$$

where y – Dst index, u – value of $Bz \cdot v$, k – discrete time, and $\theta_1, \dots, \theta_{11}$ – unknown parameters. The quality of the simulation was tested using the root-mean-square error and the correlation coefficient between the actual experimental data and

the simulation result. As the result, the following values of the model parameters were obtained (Fig. 1) for (16): $\theta_1 = 1.255$, $\theta_2 = -0.355$, $\theta_3 = 0.053$, $\theta_4 = 0.013$, $\theta_5 = -0.416$, $\theta_6 = -1.741$, $\theta_7 = 0.951$, $\theta_8 = 0.437$, $\theta_9 = -0.202$, $\theta_{10} = 0.04$, $\theta_{11} = -0.352$, when $mse = 8.31$ and correlation coefficient – 0.981.

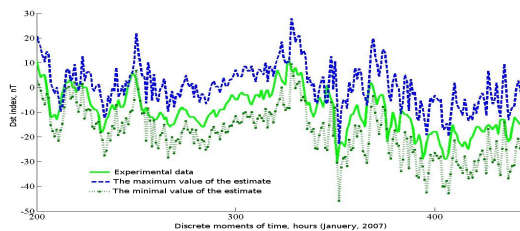


Figure 1 – Results of calculations of predictive estimates of the *Dst* index value for two hours

Список використаних джерел

1. **Chen S. and Billings, S. A.** Representations of non-linear systems: the NARMAX model / *Chen S. and Billings, S. A.* // *Int. J. Control.*-1989. - 49(3). - P.1013 - 1032.
2. **Kunzevich V.M.** Control in uncertainty conditions: guaranteed results in control and identification // *Kiev, Naukova Dumka.* - 2006. – 260 p.

Theoretical analysis of the guaranteed prediction model of the *Dst* index has been completed. A new identification approach for the *Dst* index prediction models using an experimental data and an evolutionary algorithm has been proposed. All models based on an observational data set consisting of VB_s , the solar wind parameter, as the input and the *Dst* index as the output. This method showed a number of advantages over the earlier proposed methods of space weather forecasting. First, using the dynamical-information approach, it is possible to automatically select the most significant regressors from the history of the experimental data. Secondly, it makes it possible to automatically reconstruct a mathematical model and search of optimal model parameters. A numerical algorithm based on the dynamical-information approach, searching for a nonlinear discrete dynamic black box type model to predict the behavior of the *Dst* index has been developed. A software for retrospective forecasting using OMNI data as input has been developed. Forecasts of the *Dst* index are then computed based on our models. The results of the forecast (one, two, three, six and nine hours ahead) were analyzed in comparison with the experimental data, which showed that the forecast quality significantly reduced the forecast quality.

References

1. CHEN, S. AND BILLINGS, S. A. (1989) *Representations of non-linear systems: the NARMAX model* // *Int. J. Control.* - 49(3). - P.1013 - 1032.
2. KUNZEVICH V.M. (2006) *Control in uncertainty conditions: guaranteed results in control and identification* // *Kiev, Naukova Dumka.* – 260 p.

Надійшла до редколегії 01.12.2017

РАДІОФІЗИКА

УДК 621.385.833

Голуб М.О.¹ студент
Литвин П.М.², к.ф.-м.н., с.н.с.,
Мельник П.В.¹, к.ф.-м.н., проф.,
Федорченко М.І.¹, к.ф.-м.н., с.н.с.

Фотоемісійні властивості плівки Si-Gd-O при енергії фотонів поблизу порогу фотоефекту

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03022, м. Київ, пр.-т.
Глушкова, 4г,
e-mail: mifedorchenko@gmail.com

² Інститут фізики напівпровідників ім. В.Є.
Лашкарьова, 01028, м. Київ, пр.-т Науки, 41,
e-mail: plyt2007@gmail.com

M.O. Golub¹, Student,
P.M. Lytvyn², Ph.D.,
P.V. Melnik¹, Ph.D., prof.,
M.I. Fedorchenko¹, Ph.D.,

Photoemission properties of Si-Gd-O film at photon energy near the threshold of photoelectric effect

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03022, Kyiv, Glushkova str., 4g,
e-mail: mifedorchenko@gmail.com

² V. Lashkaryov Institute of Semiconductor Physics,
03028, Kyiv, 41, Prospect Nauky,
e-mail: plyt2007@gmail.com

Проведено детальне дослідження фотоемісійних властивостей та рельєфу плівки Si-Gd-O з роботою виходу $\approx 1\text{eV}$ після додаткового нанесення на її поверхню моношарового покриття атомів Gd. Встановлено, що фотоелектронні спектри системи Si-Gd-O/Gd при енергії фотонів поблизу порогу фотоефекту є згортою енергетичного розподілу електронів в забороненій зоні нижче рівня Фермі та енергетичного розподілу можливих для заповнення вільних поверхневих електронних станів, з яких електрони виходять у вакуум. Поверхневі електронні стани, в які потрапляють фотоелектрони перед виходом у вакуум, можуть відігравати роль пасток фотоелектронів, для виходу із яких необхідно прикладати додаткове прискорююче електричне поле.

Ключові слова: Si(100), Gd, O, робота виходу, фотоемісія.

A detailed study of the photoemission properties and the relief of the Si-Gd-O film with the work function $\approx 1\text{eV}$ after additional deposition of the one monolayer coating of Gd atoms on its surface was carried out. It was established that the photoelectron spectra of the Si-Gd-O/Gd system at photon energy near the photoelectric threshold were the convolution of the energy distribution of electrons in the band gap below the Fermi level and the energy distribution of the possible for filling free surface electron states from which electrons escape into vacuum. Surface electronic states, in which photoelectrons get before emission, can behave as traps. Electrons require applying an additional accelerating electric field in order to leave these states. The phenomenon of nonmonotonic change in the photoemission current at relatively small extraction electric fields ($\approx 2\text{V/cm}$) can be explained by periodic deviations from the Schottky effect, which are due to the interference of the photoelectron flux on the surface-vacuum energetic barrier. The researches by means of the atomic force microscopy technique showed that the film surface consisted of salient clusters with heights up to 20 nm and radii of curvatures of $\approx 5\text{ nm}$. In accordance with these cluster parameters, the calculated effective electric fields on the clusters do not exceed $\approx 8\text{ V/cm}$.

Key Words: Si(100), Gd, O, work function, photoemission.

Статтю представив д.ф.-м.н. Скришевський В.А.

Вступ

Поверхні з низькою роботою виходу та негативною електронною спорідненістю є ефективними електронними емітерами. Вони знаходять широке застосування в якості

холодних польових катодів, високоінтенсивних джерел поляризованих електронів, детекторів широкого спектру випромінювання – від інфрачервоного до ультрафіолетового. Основою таких емітерів є поверхні металів та напівпровідників, активовані цезієм та киснем

[1]. Але завдяки високій хімічній активності Cs такі поверхні є нестабільними з часом і потребують періодичного відновлення. Тому триває пошук більш стабільних систем. Зокрема було знайдено, що сполуки рідкоземельних металів мають досить малу роботу виходу, можуть бути ефективними електронними емітерами і є надійними у режимах довготривалої роботи [4].

При дослідженні адсорбції атомів Gd та O на Si(113) та Si(100) були отримані поверхні з роботою виходу $\phi \approx 1$ еВ, які були стабільними в умовах вакуума [5-6]. Мала робота виходу таких поверхонь обумовлена утворенням на поверхні Si окисної плівки (надалі Si-Gd-O), зі складною структурою диполів. Поріг фотоэффекту для плівки Si-Gd-O становив ≈ 2.7 еВ. Для пояснення емісійних властивостей плівки Si-Gd-O в залежності від її роботи виходу, енергії фотонів та штучно створюваних дефектів структури був запропонований попередній варіант її енергетичної схеми [6] (рис.1). В ній до складу емітера входить тонка плівка оксиду гадолінію, ймовірно Gd_2O_3 , розташована на кремнієвій підкладці. В приповерхневій частині цієї плівки знаходиться шар диполів O-Gd, який і зменшує роботу виходу поверхні. Ширина забороненої зони Gd_2O_3 становить $E_g \approx 5.3$ еВ. Було припущено, що відстань від рівня Фермі (E_F) до дна зони провідності плівки Gd_2O_3 дорівнює ≈ 2.7 еВ ($\approx E_g/2$). Дефекти структури Gd_2O_3 обумовлюють наявність в забороненій зоні нижче E_F локалізованих електронних станів. Якщо робота виходу плівки стає меншою за 2.7 еВ, то рівень вакууму розташовується нижче дна зони провідності і електронна спорідненість стає негативною.

У відповідність із запропонованою моделлю фотони з енергією $h\nu$ в інтервалі $E_g > h\nu > (E_g/2)$ можуть збуджувати фотоелектрони в зону провідності лише з рівнів, розташованих у забороненій зоні між E_F та верхом валентної зони. Ці електрони переходять із зони провідності на поверхневі стани, розташовані вище рівня вакууму, а потім у вакуум крізь поверхневий бар'єр. При $h\nu > E_g$ фотоелектрони можуть збуджуватись в зону провідності як із станів, розташованих між стелею валентної зони і E_F , так і з валентної зони Gd_2O_3 . Фотоелектрони збуджені з валентної зони в зону провідності на рівні близькі до дна зони провідності та більш високоенергетичні фотоелектрони, які втратили свою енергію під час дрейфу до поверхні і опустилися на дно зони провідності

(термалізовані фотоелектрони), будуть виходити у вакуум також через поверхневі стани, які розташовані в районі поверхневого бар'єру. Тобто, фотоелектронні спектри, отримані при $E_g > h\nu > (E_g/2)$ несуть інформацію про електронні

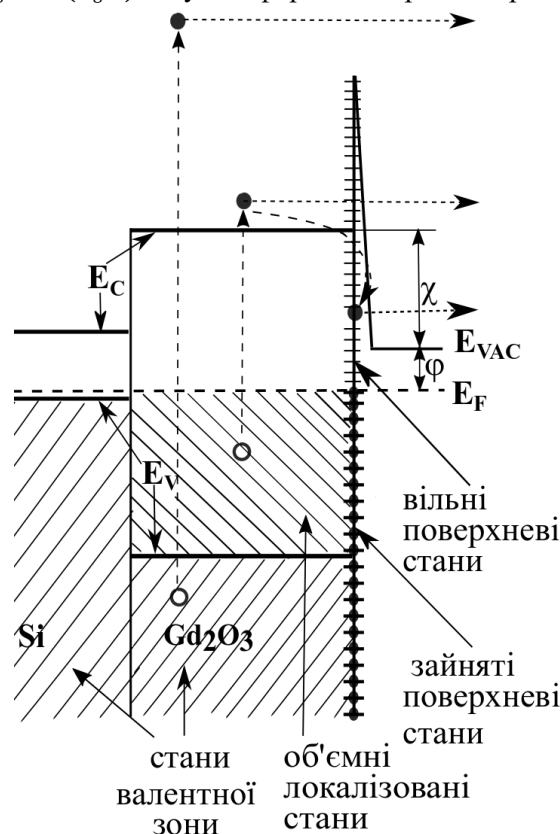


Рис. 1 Енергетична схема структури Si-Gd-O

стани, розташовані в забороненій зоні окисленого Gd нижче E_F і вільні стани фази окисленого Gd, розташовані вище рівня вакууму поблизу дна зони провідності. А низькоенергетичні частини фотоелектронних спектрів отриманих при $h\nu > E_g$, несуть інформацію про вільні електронні стани фази окисленого Gd, розташовані вище рівня вакууму в районі дна зони провідності та про зайняті електронні стани з валентної зони. Такий механізм емісії електронів у вакуум є оригінальним і потребує додаткової перевірки.

В роботі [6] була зроблена спроба керувати властивостями утвореної системи за допомогою збільшення концентрації дефектів структури плівки Si-Gd-O. Зокрема це робилося за допомогою нанесення додаткових моношарів атомів гадолінію на стабільну систему Si-Gd-O та бомбардування плівки іонами Ag. Після таких дій відбувалось значне збільшення фотоемісії (приблизно на два порядки) при опроміненні плівки фотонами з енергіями близькими до

значення порогу фотоэффекту (2.8–3.1 eV). Був зроблений висновок про значне збільшення концентрації локалізованих електронних станів в забороненій зоні Gd_2O_3 між E_F та верхом валентної зони. Але детального дослідження фотоemisійних властивостей плівки Si-Gd-O з великою кількістю дефектів структури при опроміненні фотонами низьких енергій не проводилось. Зокрема не було зрозумілим, чи будуть описуватись особливості фотоэффекту системи Si-Gd-O в низькоенергетичному діапазоні енергій фотонів, раніш запропонованою її енергетичною схемою. Тому метою цієї роботи було детальне дослідження фотоemisії плівки Si-Gd-O та факторів, що впливають на неї при опроміненні її фотонами з енергіями в інтервалі $E_g > h\nu > (E_g/2)$.

Методика експерименту

Дослідження проводилися у вакуумній камері з базовим тиском $\approx 1 \times 10^{-10}$ торр, оснащений методиками фотоелектронної та оже-електронної спектроскопії. Для отримання фотоелектронних спектрів використовувались фотони з енергією $h\nu \approx 3.1$ eV та ≈ 7.7 eV. Фотони з енергією ≈ 3.1 eV створювались за допомогою лазерного діоду, а з енергією ≈ 7.7 eV – із використанням розряду у водні та вакуумного ультрафіолетового монохроматора [5]. Кількість фотонів, що випромінювалась за секунду лазерним діодом ($h\nu \approx 3.1$ eV) з вихідною потужністю 10-100 мВт, становила $\approx 10^{16}$ - 10^{17} s^{-1} і близько 10^{10} s^{-1} для монохроматизованої лінії водню ($h\nu \approx 7.7$ eV). Фотоелектронні спектри реєструвались за допомогою сферичного аналізатора гальмівного типу, подібного до описаного в роботі [7] (аналізатор Лукірьського). Вимірювання проводились за допомогою методу модульованого змінним струмом затримуючого потенціалу [8]. При використанні аналізатора такого типу (на противагу аналізаторам дисперсійного типу) не виникає проблем, пов'язаних з контактною різницею потенціалів (КРП) між матеріалом зразка та аналізатора. Використання модуляції затримуючого потенціалу дозволяло працювати з підсилювачами змінного сигналу на частоті модуляції і отримувати спектри у вигляді першої похідної від струму затримки аналізатора. Ці спектри дозволяли отримувати інформацію про енергетичний розподіл фотоелектронів.

Сфера аналізатора мала діаметр ≈ 90 мм і була виготовлена з μ -металу, щоб зменшити магнітні

поля в об'ємі сфери до мінімального рівня. Внутрішня поверхня сфери аналізатора була покрита діоксидом олова, який характеризується стабільною роботою виходу ϕ .

Фотоелектронні спектри представлені відносно значень затримуючого потенціалу U_R . Для кожної енергії фотонів визначалось значення U_R , яке відповідало рівню Фермі (E_F) – U_F . Для будь якої досліджуваної поверхні емітера значення U_F було однаковим при використанні однієї і тієї ж енергії фотонів та незмінній роботі виходу колектора фотоелектронів. Для енергії фотонів 7.7 eV потенціал затримки U_F , що відповідає E_F , експериментально визначали з фотоелектронних спектрів, отриманих для металічних емітерів, що характеризуються значною щільністю станів біля E_F [2] і він дорівнював ≈ -3.6 В. Для лазерного джерела світла ($h\nu \approx 3.1$ eV) було неможливо знайти металеву поверхню зі стійким значенням роботи виходу з якої можна було б вибити фотоелектрони. Тому ми розраховували величину U_F , яка відповідала E_F у фотоелектронних спектрах, отриманих при лазерному опромінуванні. Ми припустили, що зменшення енергії фотонів на ΔE (наприклад при переході від джерела з $h\nu = 7.7$ eV до джерела з $h\nu = 3.1$ eV) супроводжується зменшенням енергії для електронів, що збуджуються з рівня Фермі, на одне й те саме значення ΔE . Для фотоелектронного спектру, викликаного фотонами з $h\nu \approx 3.1$ eV, затримуючий потенціал U_F , який відповідав E_F був оцінений рівним $\approx +1$ В. Робота виходу ϕ визначалася з фотоелектронного спектру за співвідношенням $\phi = h\nu - L$, де L - ширина спектру, виміряна від E_F (U_F) до низькоенергетичного краю спектру [2].

Початковим зразком слугувала плівка Si-Gd-O з роботою виходу близькою до 1 eV, виготовлена за допомогою декількох циклів, що складались з етапів: осадження атомів Gd на поверхні Si(100), адсорбції атомарного кисню та відпалу при $T \approx 600$ С. Для зміни концентрації дефектів в приповерхневій області плівки на її поверхню наносився додатковий моношар атомів Gd [6].

Нанорельєф плівок досліджувався методом скануючої зондової мікроскопії з використанням мікроскопу NanoScope IIIa Dimension 3000™ після переносу зразка з вакуума в атмосферу. Для мінімізації впливу форми зонду на результат вимірювань геометричних параметрів деталей рельєфу, карти висот поверхні знімались методом атомно-силової мікроскопії (АСМ) в режимі періодичного контакту (Tapping Mode)

[9] з використанням кремнієвих зондів із номінальним радіусом вістря меншим 10 нм.

Результати вимірювань та їх інтерпретація

Фотоелектронні спектри плівки Si-Gd-O до нанесення додаткового шару атомів Gd, виміряні при енергіях фотонів 7.7 eV та 3.1 eV, представлені на кривих а і б рис. 2. Для визначення роботи виходу поверхні плівки окрім встановлених значень U_F , які відповідають E_F , з отриманих спектрів необхідно було визначити значення U_R , які відповідають фотоелектронам з нульовою кінетичною енергією. Але на обох спектрах їх низькоенергетичні краї є затягнутими і дуже складно точно визначити значення U_R , при якому фотоелектрони, що вилетіли з поверхні з енергією близькою до нульової потрапляють на колектор. Ці значення U_R можна екстраполювати лінійними функціями до значення $U_R \approx +3V$, як це показано на рис.2. Якщо робота виходу є однорідною по поверхні, то при такій напрузі зміщення емітер – колектор (+3V) контактна різниця потенціалів (КРП), яка виникла між емітером і колектором внаслідок відмінностей їх робіт виходу, повністю компенсується і всі емітовані зі зразка електрони можуть потрапити на колектор. Робота виходу плівки, оцінена за допомогою фотоелектронних спектрів, виміряних при обох енергіях фотонів, при ігноруванні існуючих затягнутих низькоенергетичних хвостів дорівнювала ≈ 1.1 eV.

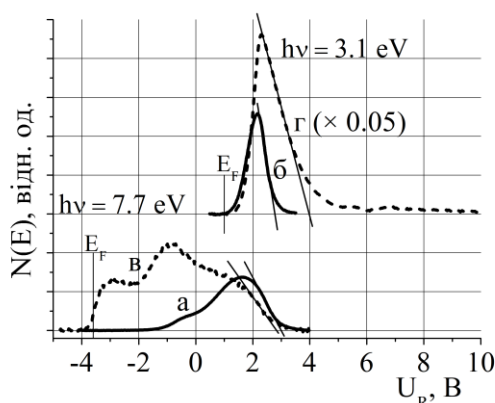


Рис. 2 Фотоелектронні спектри структури Si-Gd-O при $h\nu \approx 7.7$ eV та 3.1 eV: а, б – після декількох циклів нанесення атомів Gd на Si(100), окислення та прогріву (стабільна поверхня з роботою виходу ≈ 1.1 eV); в, г – після додаткового нанесення ≈ 1 ML атомів Gd на стабільну поверхню

Для спектру виміряного при $h\nu = 7.7$ eV рівень Фермі для використаного матеріалу сфери аналізатора відповідав затримуючому потенціалу $U_F = -3.6$ V. При зміні U_R від -3.6 V до ≈ -1.5 V інтенсивність фотоелектронного спектру не перевищувала рівня шумів використаного обладнання. Це зумовлено порівняно невеликою густиною електронних станів в забороненій зоні Gd_2O_3 в порівнянні з його валентною зоною. Нижче E_F на ≈ 2.9 eV ($U_R \approx -0.7$ V) реєструвалась особливість спектру обумовлена структурою валентної зони Gd_2O_3 [4]. Розмитий пік, розташований нижче E_F на ≈ 5.2 eV ($U_R \approx +1.6$ V), відповідає суперпозиції фотоелектронів із станів $O2p$ валентної зони оксиду гадолінію та термалізованих більш енергетичних фотоелектронів [6].

Фотоелектронний спектр, виміряний при $h\nu \approx 3.1$ eV (крива б на рис. 2), простягається від значення $U_F \approx +1$ V до $U_R \approx +3$ V. Той факт, що на відміну від спектру виміряного при $h\nu \approx 7.7$ eV, при даній енергії фотонів інтенсивність спектру в цьому діапазоні енергій є достатньою для реєстрації, пояснюється набагато більшою кількістю фотонів з $h\nu \approx 3.1$ eV (більшою в 10^6 – 10^7 разів). У відповідність із запропонованою енергетичною схемою при $h\nu \approx 3.1$ eV ($E_g > h\nu > (E_g/2)$) збуджені фотоелектрони можуть потрапляти із забороненої зони Gd_2O_3 до зони провідності з полоси електронних станів розташованих в забороненій зоні нижче E_F на ≈ 0.4 eV. Енергетична ширина отриманого фотоелектронного спектра (≈ 2 eV) може бути обумовленою тим, що цей спектр є згортою енергетичного розподілу електронів в забороненій зоні нижче E_F та енергетичного розподілу можливих для заповнення вільних поверхневих електронних станів (рис.1), з яких електрони виходять у вакуум.

Після додаткового нанесення приблизно одного моношару атомів Gd на поверхню плівки Si-Gd-O та витримки системи в умовах надвисокого вакууму декілька днів фотоелектронні спектри значно змінювались (криві в ($h\nu \approx 7.7$ eV) та г ($h\nu \approx 3.1$ eV) на рис.2).

При $h\nu \approx 7.7$ eV екстрапольований низькоенергетичний край фотоелектронного спектру зсувався в напрямку до E_F на ≈ 0.1 eV, що вказує на збільшення роботи виходу поверхні на цю ж величину. Значно зростала інтенсивність спектру в діапазоні U_R , що відповідає діапазону енергій 0–3.5 eV нижче E_F . Квантовий вихід зростав приблизно втричі (відповідне збільшення площі під кривою в). Це може бути обумовленим

появою станів $5d6s$ електронів Gd біля E_F , а також значним збільшенням дефектів структури і відповідно локалізованих об'ємних станів в забороненій зоні Gd_2O_3 [6].

Зміна спектру при $h\nu \approx 3.1$ eV вказує на значне збільшення квантового виходу ($\approx$ в 60 разів). Це можна пояснити збільшенням концентрації локалізованих об'ємних станів в забороненій зоні Gd_2O_3 , зміною густини і характеристик вільних поверхневих станів, через посередництво яких збуджені електрони виходять у вакуум. Поведінка низькоенергетичного краю цього спектру відрізняється від поведінки низькоенергетичного краю спектру при $h\nu \approx 7.7$ eV. При $h\nu \approx 3.1$ eV низькоенергетичний край зтягується до значень зміщення емітер-колектор рівних принаймні $+8$ – $+10$ В. Цілком можливо, що таке зтягування не реєструється при $h\nu \approx 7.7$ eV тільки тому, що потік фотонів є набагато меншим (на 6-7 порядків) і відповідно кількість фотоелектронів є набагато меншою, ніж при $h\nu \approx 3.1$ eV. Зтягування низькоенергетичного краю фотоелектронного спектру до значень більших за $U_R \approx +4.1$ В формально означає, що робота виходу стає від'ємною. Оскільки це неможливо, то потрібно шукати пояснення такої поведінки низькоенергетичного краю спектру.

В роботі [6] було встановлено, що нанесення додаткового покриття атомів Gd на поверхню стабільної плівки Si-Gd-O викликає збільшення роботи виходу поверхні а також збільшення дефектів структури і відповідно локалізованих об'ємних станів в забороненій зоні Gd_2O_3 , зміну густини і характеристик як зайнятих поверхневих станів, так і вільних. Це відбувається внаслідок дифузії на поверхню неокислених атомів Si. Виходячи з цього припущення можливо стверджувати, що при взаємодії фотонів з енергіями як 7.7 eV так і 3.1 eV з модифікованою поверхнею Si-Gd-O/Gd значно зростає кількість фотоелектронів збуджених із заповнених електронних станів, розташованих в забороненій зоні впритул до E_F . Фотоелектрони, збуджені з цих станів фотонами з $h\nu \approx 7.7$ eV, можуть вийти у вакуум маючи енергії, які значно перевищують висоту поверхневого бар'єру. Фотоелектрони, збуджені зі станів розташованих впритул до E_F , фотонами з $h\nu \approx 3.1$ eV, потрапляють в район дна зони провідності, а потім відповідно до моделі [6] переходять на поверхневі стани і далі через бар'єр у вакуум. Але частина поверхневих електронних станів, які утворюються або модифікуються при нанесенні додаткового шару атомів Gd може виступати в ролі своєрідних

пасток для електронів. Для звільнення (витягування) електронів з цих пасток і необхідно прикладення значного позитивного зміщення між емітером і колектором. Також можуть потрапляти в ці пастки при виході у вакуум і фотоелектрони, збуджені більш енергетичними фотонами в електронні стани поблизу дна зони провідності та термалізовані під час дрейфу до поверхні фотоелектрони більш високих енергій. Внаслідок цього за рахунок появи низькоенергетичних хвостів будуть розширюватись виміряні енергетичні ширини фотоелектронних спектрів. Цей факт жодним чином не пов'язаний зі зміною енергетичного розподілу зайнятих електронних станів і значно впливає на точність визначення роботи виходу.

Іншим поясненням таких хвостів розподілу електронів за енергіями може бути ефект Шоткі. Зазвичай цей ефект спостерігається при полях 10^2 – 10^6 В/см [3]. Такі поля характерні для систем, де робота виходу емітера становить 3–5 eV. Але коли робота виходу має значення ≈ 1 eV, ситуація може бути іншою. Напруженість електричного поля, при якій буде значно змінюватись форма бар'єру, що заважає виходу фотоелектронів у вакуум, може залежати і від початкової форми бар'єру, яка поки що точно нам невідома. Якщо вважати, що поверхня плівки Si-Gd-O є плоскою, то для геометрії нашого експерименту напруженість поля поблизу цієї поверхні при зміні U_R в діапазоні від $+4$ до $+10$ В дорівнює ≈ 0.2 – 2 В/см. Якщо на поверхні плівки будуть нерівності, або виступаючі елементи з досить малим радіусом, то відповідні значення напруженостей електричного поля поблизу цих елементів будуть більшими.

На рис. 3 показані фотоелектронні спектри виміряні при $h\nu = 3.1$ eV в масштабі, який дозволяє більш детально розглянути поведінку спектрів в діапазоні значень U_R від $+4$ до $+10$ В. Крива а є спектром від плівки Si-Gd-O на яку було додатково нанесено ≈ 1 МШ атомів Gd і яка відповідає кривій г на рисунку 2. Крива б була виміряна після наступного ≈ 5 -ти годинного опромінення поверхні зразка фотонами з $h\nu \approx 3.1$ eV ($\approx 10^{17}$ квантів за секунду). Зміна особливостей значень $N(E)$ після кількох годинного опромінення поверхні плівки квантами світла може бути поясненою стимуляцією процесу окислення додатково нанесених атомів Gd з раніш окисленого шару атомів Gd. Як на кривій а так і на кривій б в діапазоні значень U_R від $+4$ до $+10$ В спостерігається немонотонне зменшення значень

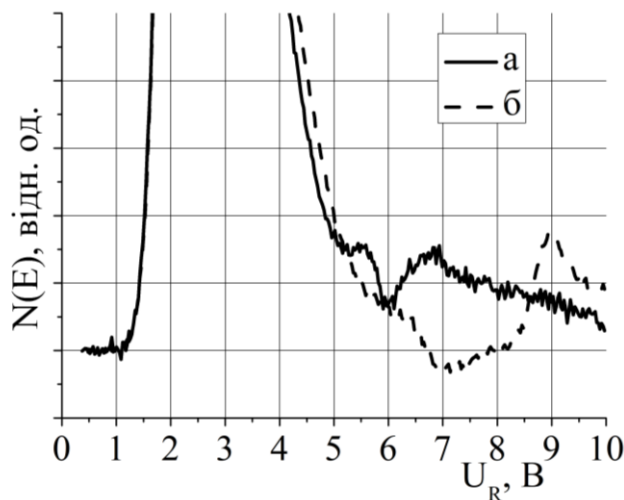


Рис. 3 Спектри фотоемісії системи Si-Gd-O при $h\nu=3.1$ eV після додаткового нанесення ≈ 1 МШ Gd і витримки у вакуумі протягом двох діб (а) та після 5-годинного наступного опромінення поверхні зразка фотонами з $h\nu \approx 3.1$ eV ($\approx 10^{17}$ c $^{-1}$) (б)

$N(E)$ зі збільшенням позитивного зміщення. Але навіть при $U_R = 10$ В значення $N(E)$ не зменшується до нуля. На кожній з цих кривих можна спостерігати локальні особливості і максимуми. На кривій б спостерігається навіть від'ємна густина станів при $U_R=7.5$ В. Очевидно, що особливості кривих фотоелектронних спектрів не мають однозначного зв'язку з розподілом зайнятих електронних станів. Представлені залежності $N(E)$ від U_R були отримані при диференціюванні залежності струму фотоелектронів від потенціалу затримки в колі зразок – колектор [8]. На рис. 4 показані залежності електронного струму I_{el} від U_R . Криві а і б на рис.4 були отримані в результаті інтегрування відповідних кривих а і б на рис.3. На вставці до рис.4 показана залежність I_{el} від U_R в діапазоні від +3.5 до +10 В. З рисунка видно, що на обох кривих значення I_{el} при збільшенні U_R зростають немонотонно. А на кривій б, яка була отримана від поверхні плівки Si-Gd-O після тривалого опромінення фотонами, в діапазоні значень U_R від ≈ 7 В до ≈ 9 В спостерігається локальне зменшення I_{el} . Звідси стає зрозумілим поява від'ємних значень $N(E)$ на кривій б рис.3, що обумовлено зміною знаку відповідної похідної.

Таку поведінку немонотонної зміни I_{el} в залежності від U_R можна пояснити зміною форми бар'єру при збільшенні U_R . Окрім цього, можна

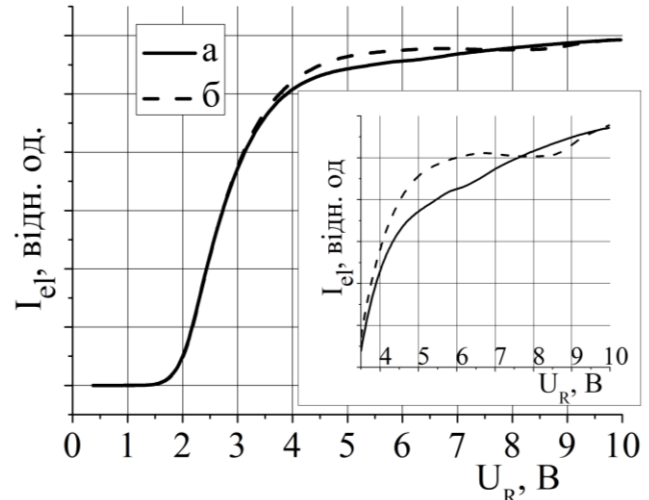


Рис. 4 Вольт-амперні характеристики зразка, отримані інтегруванням кривих розподілу електронів за енергіями на рис.3: після додаткового нанесення ≈ 1 МШ Gd (а) та після опромінення поверхні зразка фотонами (б)

припустити, що така поведінка I_{el} може мати періодичний характер, якщо зняти спектр у більшому діапазоні значень U_R . Подібна поведінка I_{el} була описана в роботі [10]. При певних значеннях прикладеного зовнішнього поля ($\sim 10^4$ В/см) з'являлися періодичні коливання емісійного струму. Автори пояснювали такі коливання тим, що при прикладанні зовнішнього поля потенціальний поріг перетворюється на потенціальний бар'єр. У відповідності з рівняннями квантової механіки, електронні хвилі, які відповідають фотоелекtronom, що виходять у вакуум повинні частково відбиватися від такого бар'єру, але оскільки має місце інтерференція хвиль, то коефіцієнт проходження електронами цього потенціального бар'єру буде періодичною функцією прикладеного поля. Суттєва відмінність між результатами цих авторів та нашими полягає у значеннях напруженостей електричних полів. Проте подібну відмінність можна пояснити тим, що для плівки Si-Gd-O з роботою виходу ≈ 1 eV потенціальний поріг вже перетворений в потенціальний бар'єр навіть без прикладання зовнішнього поля.

Оцінка можливого впливу рельєфу поверхні плівок Si-Gd-O на їх емісійні властивості була зроблена на основі досліджень проведених за допомогою атомно-силового мікроскопу після переміщення стабільної плівки Si-Gd-O з вакууму в атмосферу. На рис. 5 наведено 3D ACM

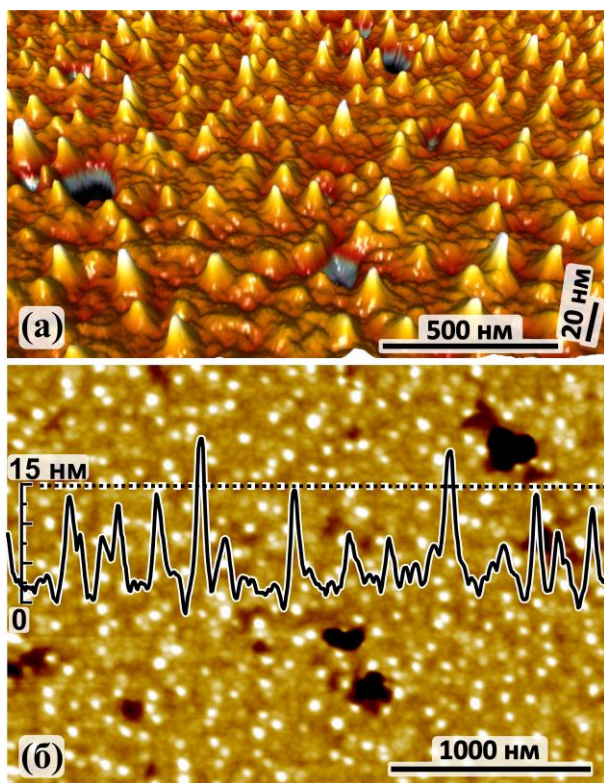


Рис. 5 3D ACM зображення фрагменту поверхні плівки Si-Gd-O (а). ACM карта рельєфу поверхні та профіль рельєфу вздовж виділеної штрихової лінії (б)

зображення фрагменту поверхні плівки Si-Gd-O (а), ACM карта рельєфу поверхні та профіль рельєфу вздовж виділеної штрихової лінії (б). Виявилось, що зразок має розвинену поверхню, яка утворена нанорозмірними виступаючими кластерами діаметром 20-70 нм. Характерною особливістю поверхні є наявність кратерів субмікронних розмірів неправильної форми (темні ділянки на 3D зображенні). Типовою глибиною для них є 15-40 нм, хоча в окремих випадках значення глибини може сягати 90 нм. З карти рельєфу поверхні видно, що перепад висот на вибраному фрагменті поверхні між основами і вершинами кластерів становить приблизно 20 нм. Утворення такої системи піків та кратерів може бути спричинено високою активністю атомів Gd по відношенню до створення силіциду та зернограничною дифузією атомів Si з кремнієвої підкладки на острівці Gd [11]. Острівці силіциду гадолінію внаслідок наступної адсорбції атомарного кисню та прогріву можуть перетворюватись в напружені загострені кластери Gd_2O_3 . Наявність загострених кластерів може суттєво збільшувати електричне поле біля поверхні. Підсилення поля розраховується

відповідно до формули: $K = h/r$, де h - це висота загостреного кластеру, r - радіус його вістря [11].

Для оцінки підсилення було обрано один з піків висотою приблизно 20 нм (рис. 5б). Радіус вістря цього піку був визначений ≈ 5 нм. Отриманий коефіцієнт підсилення поля (≈ 4) свідчить про те, що ефективне поле поблизу вістря ≈ 8 В/см, що набагато менше відомих в літературі систем [12]. Проте виміри на атомно-силовому мікроскопі проводилися у атмосфері, тому достовірно сказати, яким був рельєф поверхні у вакуумі не можна. Так що повністю виключати можливість посилення напруженості електричного поля не можна.

Висновки

Проведено детальне дослідження фотоemisійних властивостей плівки Si-Gd-O з роботою виходу ≈ 1 еВ після додаткового нанесення на її поверхню моношарового покриття атомів Gd та генерації великої кількості дефектів структури і відповідно великої концентрації зайнятих електронних станів в забороненій зоні плівки та вільних поверхневих станів.

Встановлено, що фотоелектронні спектри системи Si-Gd-O/Gd при енергії фотонів поблизу порогу фотоэффекту є згортою енергетичного розподілу електронів в забороненій зоні нижче рівня Фермі та енергетичного розподілу можливих для заповнення вільних поверхневих електронних станів, з яких електрони виходять у вакуум.

В процесі виходу фотоелектронів із плівки Si-Gd-O у вакуум значну роль відіграють вільні поверхневі електронні стани поблизу дна зони провідності в які потрапляють фотоелектрони перед виходом у вакуум. Поверхневі електронні стани можуть відігравати роль пасток фотоелектронів, для виходу із яких необхідно прикладати додаткове прискорююче електричне поле.

Явище немонотонної зміни фотоemisійного струму при відносно невеликих витягуючих електричних полях (≈ 2 В/см) може бути пояснено відхиленнями від ефекту Шоттки, які обумовлені інтерференцією потоку фотоелектронів на енергетичному бар'єрі поверхня-вакуум. Існування цих відхилень при малих електричних полях пояснюється тим, що для плівки Si-Gd-O з роботою виходу ≈ 1 еВ потенціальний поріг вже перетворений в потенціальний бар'єр без прикладання зовнішнього поля.

Результати АСМ вимірювань показали, що поверхня досліджуваної системи є сильно розвиненою – наявні загострені кластери з висотами 5-20 нм та радіусами загострень ≈ 5 нм.

Відповідно до цих параметрів кластерів розраховані ефективні електричні поля на загостреннях кластерів, які не перевищують значень ≈ 8 В/см.

Список використаних джерел

1. Bell R.L. Negative Electron Affinity Devices / R. L. Bell. – Oxford: Clarendon Press, 1973. – 190 p.
2. Ertl G. Low Energy Electrons and Surface Chemistry / G. Ertl, J. Kupperts. – Weinheim: VCH, 1985. – 386 p
3. Добрецов А.Н. Эмиссионная электроника / А.Н. Добрецов, М.В. Гомоюнова. – Москва: Наука, 1966. – 564 с.
4. Cahay M. Review Article: Rare-earth monosulfides as durable and efficient cold cathodes / M. Cahay, P. Boolchand, S.B. Fairchild, L. Grazulis, P.T. Murray, T.C. Back, V. Semet, V.T. Binh, X. Wu, D. Poitras // J. Vac. Sci. Technol. B. – 2011. – **29** (6). – P. 06F602-1-06F602-14.
5. Nakhodkin M.G. Interaction of Oxygen and Gadolinium with Si(100)-2x1 Surface. Formation of a System with 1-eV Work Function / M.G. Nakhodkin, M.I. Fedorchenko // Ukr. J. Phys. – 2015. – **60**. – P. 97-103.
6. Melnik P.V. Influence of changes in defect states on the properties of Si-Gd-O / P.V. Melnik, M.G. Nakhodkin, M.I. Fedorchenko // Ukr. J. Phys. – 2017. – **62**. – P. 692-698.
7. Lukirsky P. Uber weiche Rontgenstrahlen / P. Lukirsky // Z. Phys. – 1924. – **22**. – P. 351-361.
8. Eden R.C. Techniques for the Measurement of Photoemission Energy Distribution Curves by the ac Method / R.C. Eden // Rev. Sci. Instrum. – 1970. – **41**. – P. 252-258.
9. Binning G. Atomic Force Microscope / G. Binning, C.F. Quate // Phys. Rev. Lett. – 1986. – **56** – P. 930-934.
10. Turnbull D. Evidence of a Periodic Deviation from the Schottky Line. II / D. Turnbull, T.E. Phipps // Phys. Rev. – 1939. – **56**. – P. 663-667.
11. Molnar G. The oxidation of Gd_{0.95} Si_{0.05} layers G. Molnar, G. Peto, E. Kotai, L. Guczi // Vacuum. – 1990. – **41**. – P. 1640-1642.
12. Rinzler A. G. Unraveling Nanotubes: Field Emission from an Atomic Wire / Rinzler A. G. Hafner J.H., Nikolaev P., Nordlander P // Science. – 1995. – **269**. – P. 1550-1553.

References

1. BELL R.L. (1973) *Negative Electron Affinity Devices*. Oxford: Clarendon Press.
2. ERTL G. and KUPPERS J. (1985) *Low Energy Electrons and Surface Chemistry*. Weinheim: VCH.
3. DOBRETISOV L.N. and GOMOIUNOVA M.V. Emissionnaia elektronika. Moscow: Nauka 1966.
4. CAHAY M., P. BOOLCHAND, S.B. FAIRCHILD, L. GRAZULIS, P.T. MURRAY, T.C. BACK, V. SEMET, V.T. BINCH, X. WU, D. POITRAS (2011) Review Article: Rare-earth monosulfides as durable and efficient cold cathodes. *J. Vac. Sci. Technol. B.* 29 (6). P. 06F602-1-06F602-14.
5. NAKHODKIN M.G. & FEDORCHENKO M.I. (2015) Interaction of Oxygen and Gadolinium with Si(100)-2x1 Surface. Formation of a System with 1-eV Work Function. *Ukr. J. Phys.* 60. p. 97-103.
6. MELNIK P.V., NAKHODKIN M.G., & FEDORCHENKO M.I. (2017) Influence of changes in defect states on the properties of Si-Gd-O. *Ukr. J. Phys.* 62. p. 692-698.
7. LUKIRSKY P. (1924) Uber weiche Rontgenstrahlen. *Z. Phys.* 22. p. 351-361.
8. EDEN R.C. (1970) Techniques for the Measurement of Photoemission Energy Distribution Curves by the ac Method. *Rev. Sci. Instrum.* 41. p. 252-258.
9. BINNING G., QUATE C.F. & GERBER CH. (1986) Atomic Force Microscope. *Phys. Rev. Lett.* 56. p. 930-934.
10. TURNBULL D. & PHIPPS T.E. (1939) Evidence of a Periodic Deviation from the Schottky Line. II. *Phys. Rev.* 56. p. 663-667.
11. MOLNAR G., PETO G, KOTAI E. & GUCZI L. (1990) The oxidation of Gd_{0.95} Si_{0.05} layers. *Vacuum.* 41. – p. 1640-1642.
12. RINZLER A.G., HAFNER J.H., NIKOLAEV P. & NORDLANDER P. (1995) Unraveling Nanotubes: Field Emission from an Atomic Wire. *Science.* 269. p. 1550-1553.

Надійшла до редколегії 06.10.17

УДК 537.311.33

Григорук В.І., д.ф.-м.н., проф.,
Павлюк С.П., к.ф.-м.н., с.н.с.,
Телега В.М., к.ф.-м.н., с.н.с.,
Петричук М.В., д.ф.-м.н., с.н.с.,
Іванчук А.В., інж.,
Малишев В.Ю., ас.

Шнурування струму в прямозміщених польових мікротранзисторах

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4г,
e-mail: pps@univ.kiev.ua

V. I. Grygoruk, Dr.Sci., Prof.,
S. P. Pavlyuk, Ph.D.,
V. M. Telega, Ph.D.,
M.V. Petrychuk, Dr.Sci.,
A.V. Ivanchuk, Eng.,
V.Y. Malyshev, As.Prof.

Cord currents in field-mounted field microtiter transistors

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Glushkova st., 4g,
e-mail: pps@univ.kiev.ua

У роботі досліджено протікання імпульсу струму з густиною до 10^5 А/см² крізь прямозміщений p-n перехід КНІ польового транзистора. Отримані осцилограми дозволили побудувати вольт-амперну характеристику, з S-подібною областю. Показано, що ця область пов'язана з утворенням шнура струму. Візуальні спостереження підтвердили появу одного повного шнура та декілька його зародків.

Ключові слова: польовий транзистор, вольт-амперна характеристика, шнур струма.

By means of the method of volt-ampere characteristics, we have investigated the flow of a current pulse with a density of 10^5 A / cm² through a directly biased p-n junction of the SOI field effect transistor. Using a special current generator through the SOI, a transistor in the forward direction relative to the p-n junction was subjected to a single rectangular current pulse. The duration of the pulse was adjusted in the range from 10 μ s to 1 sec. In the study of the kinetics of the change in voltage drop at the beginning of the current pulse, its duration varied from 20 μ s to 200 μ s. At maximum and minimum values of the voltage drop, the volt-ampere characteristics for different moments of time were constructed. Simultaneously studying the passage of the current pulse with the help of a microscope, it was possible to observe the transistor on the SOI. In this case, the duration of the current pulse was long to visualize the glow of its cord. This duration was 10 ms - 100 msec. The obtained oscillograms allowed to construct a volt-ampere characteristic, with an S-shaped region. It is shown that this region is connected with the formation of a current cord. Visual observations confirmed the appearance of one full cord and a nucleation of several more ones.

Key Words: field transistor, volt-ampere characteristic, cord current.

Статтю представив д.ф.-м.н. Скришевський В.А.

Вступ

З подальшою мікромініатюризацією напівпровідникових приладів та великих інтегральних схем із застосуванням мікро та нанотехнологій виникає проблема, яка пов'язана зі зростанням густини протікаючого струму при збереженні його абсолютних значень. Зменшення розмірів робочих елементів мікросхем призводить до суттєвого збільшення густини протікаючого струму до величини порядку 10^5 А/см². Це стимулює виникнення нових

ефектів у напівпровідниках, які обмежують їх робочий діапазон. Дослідження таких ефектів є актуальними та становлять інтерес як для розробників сучасних напівпровідникових приладів, так і для фізиків.

Останнім часом досліджувалось протікання струму великої густини ($\geq 10^5$ А/см²) у структурах “кремній на ізоляторі” (КНІ). Використані структури відрізняло те, що в них виконувалось співвідношення $d_{Si} < L_{Si}$ між товщинами робочого шару кремнію d_{Si} і шару збіднення в ньому L_{Si} . Саме завдяки виконанню

умови $d_{Si} < L_{Si}$ і наявності в КНІ структурах так званого “тильного затвору” (“back gate”) опір робочого шару кремнію при протіканні струму ставав суттєво неоднорідним. У цих умовах у структурах спостерігались різноманітні ефекти: коливання напруги й струму [1], його регулярне розшарування [2], випромінювання світла [3] та виникнення термодифузійних автосолітонів.

Як було показано в [1] при живленні КНІ транзистора від генератора струму в електричному колі виникали коливання напруги та струму.

Було виявлено, що на початку S-подібної ділянки ВАХ коливання напруги мали релаксаційний характер. При збільшенні струму вони плавно змінювали свою форму від релаксаційних до квазісинусоїдальних і знову – до релаксаційних, але з іншою шпаруватістю [2].

Параметри таких процесів та фізичну модель, яка пояснює ефекти, що спостерігаються, наведено в роботах [1-3].

Експерименти показали, що коливання струму та напруги виникають у польових КНІ транзисторах та кремнієвих дифузійних резисторах тільки в $p^+ - n - p^+$ структурах [4]. На структурах із дірковою провідністю ніяких коливань не спостерігалось. Дослідження особливостей перехідних процесів при протіканні імпульсу струму в p^+-p-p^+ КНІ польових транзисторах дало пояснення відсутності коливань струму та напруги в цих структурах [5].

Спостерігалися ефекти в структурах, у яких реалізоване співвідношення $d_{Si} > L_{Si}$. Для цього досліджувалися кремнієві дифузійні резистори (КДР), виготовлені за технологією “кремній із діелектричною ізоляцією” (КЗДІ).

Зі збільшенням струму напруга на кремнієвих дифузійних резисторах (КДР) стрибкоподібно зростає. При цьому в КДР виникає смуга, що світиться. Вона розташована перпендикулярно до напрямку протікання струму. Подальше зростання струму призводить до появи між контактами замість смуги поздовжнього шнура, що також світиться, і нарешті, викликає катастрофічне руйнування структури завдяки її перегріву [4].

Ці ефекти можна пояснити формуванням у кремнії ТГД домену високого поля, “розігрівом” в цьому полі електронів і дірок та їхньою наступною випромінювальною рекомбінацією.

Усі вище зазначені ефекти спостерігалися на запірному контакті при зворотному зміщенні відносно $p-n$ переходу.

Вивчення протікання екстремального струму в прямому напрямку відносно $p-n$ переходу не проводилось. А такий вплив зазначеного струму може мати суттєве значення. Це підтверджується тим фактом, що при проходженні екстремальних струмів у прямому напрямку крізь кристал напівпровідникового діода в забороненій зоні виникали додаткові рекомбінаційні центри, які суттєво впливали на параметри діодів.

Відомо, що наявність глибоких рекомбінаційних центрів та їхня концентрація істотно визначають час життя неосновних носіїв заряду в напівпровідниках. Звичайно, такі центри вводять у напівпровідник, впливаючи на нього іонізуючим випромінюванням чи легуючи його відповідними домішками (наприклад, кремній - золотом). При цьому в напівпровіднику виникають різні структурні дефекти, що призводять до появи в його забороненій зоні системи електрично активних центрів, у тому числі глибоких. Різні структурні дефекти й пов'язані з ними електрично активні центри в забороненій зоні напівпровідника можуть виникати й закріплюватися в ньому під дією сильного неоднорідного розігріву кристала. Було досліджено зміну ефективного часу життя неосновних носіїв заряду τ_p^* у базі силового кремнієвого p^+-n діода марки КД-209 при його короткочасному неоднорідному розігріві внаслідок дії імпульсу прямого струму регульованої амплітуди й тривалості. При цьому густина струму в кристалі досягала 10^5 A/cm^2 , питома потужність, що підводилась до діода, сягала $\approx 10^6 \text{ Вт}\cdot\text{см}^3$. У досліджених діодах величина τ_p^* зменшувалась таким чином до 10 разів.

Метою даної роботи є вивчення протікання імпульсу струму екстремальної густини при прямому зміщенні $p-n$ переходу КНІ транзистора.

Результати експериментів

На рис. 1 наведено схематичне зображення досліджуваних КНІ транзисторів (затвор не зображено). У них довжина a плівки кремнію n -типу складала 2, 3, 10, 45 мкм, ширина цієї плівки w була 100 мкм, а товщина d - 0,4 мкм. Товщини вбудованого оксиду, кремнієвої підкладки, полікремнієвого затвору та підзатворного окислу складали відповідно 1, 400, 1 та 0,1 мкм.

Частина використаних транзисторів не мала затвору. У них шар фосфоросилікатного скла товщиною 1 мкм захищав верхню поверхню плівки кремнію. Під час вимірів затвор залишали

під плаваючим потенціалом, а підкладинку з'єднували з виток, причому могли прикладати між ними напругу зміщення V .

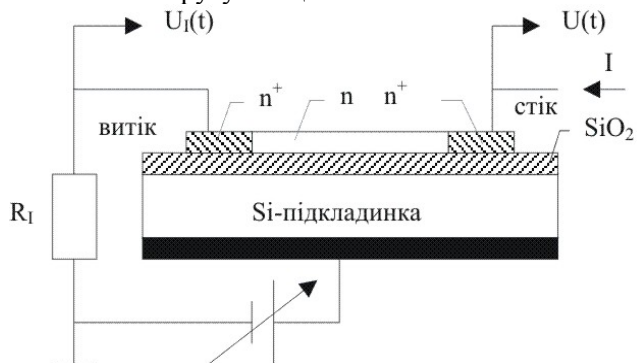


Рис. 1. Схематичне зображення КНІ транзистора та його живлення.

У деяких транзисторах плівки кремнію мали два бічні зонди для вимірів у них е.р.с. Хола. Концентрація електронів та їхня рухомість у цих плівках становили $5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ і $1400 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ відповідно.

Методика досліджень

Від спеціального генератора струму крізь КНІ транзистор у прямому відносно р-п переходу напрямку пропускався одиничний прямокутний імпульс струму. Тривалість імпульсу регулювалась в межах від 10 мкс до 1 с. При дослідженні кінетики зміни падіння напруги на початку імпульсу струму його тривалість змінювалась від 20 мкс до 200 мкс.

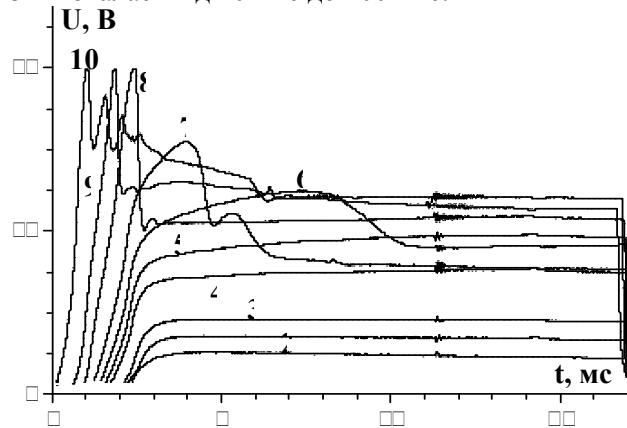


Рис.2. Осцилограми падіння напруги на КНІ транзисторі.

За максимальним та мінімальним значеннями падіння напруги будувалися вольт-амперні характеристики для різних моментів часу. Одночасно із проходженням імпульсу струму за допомогою мікроскопа можна було спостерігати КНІ транзистор. У цьому випадку тривалість імпульсу струму встановлювалась такою, щоб можна було зафіксувати світіння

його шнура. Ця тривалість складала 10 мс – 100 мс.

Як видно з осцилограм рис. 2, при невеликих струмах падіння напруги повторювало прямокутну форму імпульсу струму (осц.1-3). Збільшення амплітуди імпульсу струму призводило до збільшення падіння напруги в кінці імпульсу (осц.4,5), подальшого формування піка напруги, зміщення піка до початку імпульсу (осц.6-10). На осцилограмах 8-10 спостерігається поява додаткових перехідних процесів. Між піком струму та його стаціонарним значенням з'являються додаткові мінімуми напруги. Після формування піка напруги значення її падіння в кінці імпульсу стабілізується й стає незмінним у часі. У деяких структурах при збільшенні амплітуди імпульсу струму відбувалась також і стабілізація значення падіння напруги.

Вольт-амперні характеристики

Як видно з рис.3, ВАХ має декілька областей. Поки пік напруги не спостерігається, ВАХ має стандартний вид (ділянка А кривої 1 та 2). Після появи піка напруги на ВАХ з'являється S-подібна область (ділянка Б кривої 1). Далі вона переходить у область зі зростаючим значенням напруги (ділянка В кривої 1), а за нею - у другу S-подібну область (ділянку Г кривої 1).

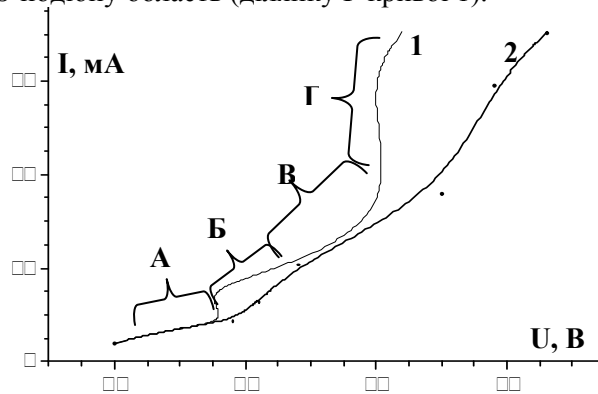


Рис.3. Вольт-амперні характеристики КНІ транзистора.

Вольт-амперна характеристика, яка показана кривою 2, побудована для максимальних значень падіння напруги, тобто для піка напруги. На ній ніяких S-подібних ділянок не спостерігається.

Обговорення результатів.

З літератури [6] відомо, що в системі з S-подібною характеристикою повинен виникати шнур струму. Цей шнур починає шунтувати частину базової області, що призводить до падіння напруги на ній. Збільшення струму в певних межах не змінює величину падіння

напруги. Це, можливо, пояснюється тим, що при збільшенні струму збільшується діаметр шнура.

Другий стрибок напруги пов'язаний із появою другого шнура струму, який розташований на певній відстані від першого. Відповідно до [6], у таких системах повинно відбуватися розшарування струму на шнури. Можна припустити, що в широкому та короткому зразку може виникати значно більше шнурів.

Опосередкованим доказом правильності пояснення може бути той факт, що в мікроскопі візуально спостерігався один шнур, який проходить від одного контакту до іншого і появи, залежно від величини струму, декількох зародків

інших шнурів у вигляді ділянок, що світяться, біля позитивного контакту р-п переходу.

Висновки

Проведені дослідження проходження імпульсу струму з великою густиною показали виникнення S-подібної ділянки на ВАХ КНІ транзистора.

Після виникнення S-подібної ділянки візуально спостерігається поява одного повного шнура струму й зародків ще декількох шнурів.

Наукові результати отримані при виконанні в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка фундаментальної бюджетної теми 16БФ052-04 реєстраційний №0116U002564

Список використаних джерел

1. Dobrovolsky V.N. High-Amplitude High-Frequency Oscillations of Temperature, Electron-Hole Pair Concentration and Current in the Silicon-on-Insulator Structures / V.N. Dobrovolsky, G.K. Ninidze, M. Balucani, A. Ferrari, G. Lamedica // Journal of Applied Physics. – 2000. – **88**. – 11. – P. 6554-6559.
2. Dobrovolsky V.N. High-Amplitude and High-Frequency Oscillations of Temperature and Current in SOI Structure / V.N. Dobrovolsky, G.K. Ninidze, M. Balucani, A. Ferrari // Microelectronic Engineering. – 1999. – **48**. – 1-4. – P. 343-346.
3. Dobrovolsky V.N. Self-organization in SOI FET / V.N. Dobrovolsky, G.K. Ninidze, L.V. Ishchuk, S.P. Pavljuk, Y.O. Plichko // Microelectronic Engineering. – 2004. – **72**. – 1-4. – P. 383-387.
4. Кушніренко В.В. Исследование кремниевых диффузионных резисторов при протекании импульса тока большой плотности / В.В. Кушніренко, Г.К. Нинидзе, С.П. Павлюк, Л.Д. Коноваленко // ТКЕА. – 2005. – **59**. – 5. – С. 23-26.
5. Кушніренко В.В. Особливості перехідних процесів у р⁺-р-р⁺ польових транзисторів, виготовлених за технологією “кремній на ізоляторі” / В.В. Кушніренко, С.П. Павлюк // Вісник КУ, серія “Радіофізика та електроніка”. – 2007. – 10. – С.31-33.
6. Зи С. Физика полупроводниковых приборов / С. Зи. – Москва: “МИР”, 1984. – 462 с.

References

1. DOBROVOLSKY, V.N. et al. (2000) High-Amplitude High-Frequency Oscillations of Temperature, Electron-Hole Pair Concentration and Current in the Silicon-on-Insulator Structures *Journal of Applied Physics*. **88** (11).p.6554-6559.
2. DOBROVOLSKY, V.N. et al. (1999) High-Amplitude and High-Frequency Oscillations of Temperature and Current in SOI Structure *Microelectronic Engineering*. **48** (1-4). p.343-346.
3. DOBROVOLSKY, V.N. et al. (2004) Self-organization in SOI FET *Microelectronic Engineering*. **72** (1-4). p.383-387.
4. KUSHNIRENKO, V.V. et al. (2005) Issledovanie kremniyevykh diffuzionnykh rezistorov pri protekanii impul'sa toka bol'shoy plotnosti. *ТКЕА*. 59 (5). p.23-26.
5. KUSHNIRENKO, V.V. & PAVLYUK, S.P. (2007) Osoblivosti perekhidnykh protsesiv u p⁺-p-p⁺ pol'ovnykh tranzystoriv, vygotovlenykh za tekhnologiiyu "kremniy na izolyatori" *Visnyk KU, seriya "Radiofizyka ta elektronika"*. 10. p.31-33.
6. ZI, S. (1984) *Fizika poluprovodnikoviyh priborov*. Moskva: MIR.

Надійшла до редколегії 29.09.17

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 535.37

Азовський В.А.¹, асп.,
Ящук В.М.², д.ф.-м.н, проф.

V. A. Azovskiy¹, PhD stud.,
V. M. Yashchuk², Dr. Sci, Prof.

Деякі проблеми розробки люмінесцентних трансформторів для кремнієвих сонячних елементів

Some problems in design of luminescent converter for Si solar cells

^{1,2}Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13,
e-mail: ¹vladimirazovskij@gmail.com
²yashchukvaleriy@gmail.com

^{1,2}Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: ¹vladimirazovskij@gmail.com,
²yashchukvaleriy@gmail.com

Напівпровідникові сонячні елементи (вироблені з кремнію) мають різкий спад спектральної чутливості як в короткохвильовому так і в довгохвильовому діапазонах. Ефективне фотовольтаїчне перетворення з УФ і ближнього ІЧ діапазонів до видимої ділянки спектра є досить перспективним. В данній статті провадиться огляд основних можливостей створення такого люмінесцентного трансформтора. В спеціальному композиті екситони Френкеля утворюються при поглинанні світла та переносять енергію до молекулярних пасток, які випромінюють світло в області максимальної спектральної чутливості сонячного елемента.

Ключові слова: сонячний елемент, люмінесцентний трансформатор, спектральна чутливість.

Semiconductor solar cells (eg, silicon) have both rapid shortwave and longwave decrease in sensitive characteristics. Spectral response of mono-Si solar cell increases with wavelength in the range of 400-890 nm with maximum at 890 nm, beyond this maximum decreased rapidly and found minimum at the wavelengths less then 400 nm and more then 1100 nm.[3] That is why the realization of efficient UV-to-Vis and NIR-to-Vis conversion has a huge potential in photovoltaics. In practice, even 400 nm radiation does not allow efficient photovoltaic conversion. In order to fix this, it proposed to use luminescent converter. The possibilities of such converter design, based on dyes sensitized polymers are examined in this paper. For down conversion it is possible to make optically passive luminescent layer on the solar cell front surface. For the up-conversion the triplet-triplet annihilation process is possible at the back surface. Frenkel excitons, which are generated by the absorbed Solar light, transport excitation energy to molecular traps emitting light in the maximum spectral sensitivity of the solar cell in proposed luminescent converters or transformers. The introduction of the luminescent converter does not change the design of the solar cell, but it increases its spectral sensitivity, which makes this technology a promising direction for commercial application.

Key Words: solar cell, luminescent converter, spectral sensitivity.

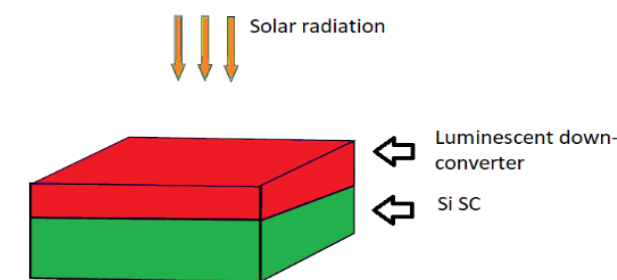
Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

Introduction

The solar cells efficiency highly depends on the band-gap of reactive semiconductor (for Si ~1.12 eV at room temperature). The Shockley–Queisser model states that semiconductor can't absorb photons of lower energy than band-gape. After absorption of high energy photons charges undergo thermalization.[1] For Si the Solar radiation with wavelength less than 400 nm is

absorbed mostly in near surface layers. Due to the presence of the significant quantity of defects here the majority of charge carriers is captured by these defects and do not contribute in photocurrent.

Remaining 67% of incident solar energy at Earth surface (under AM1.5-G) not undergo photovoltaic conversion in Si SC. Solar spectrum with Si sensitive edges could be found on Fig.1.[2] This spectrum includes 39% in VIS, 52% NIR and 9% in UV range.



annihilation-based upconversion (sTTA-UC) is the most perspective among UC mechanisms.[1]

Review of methods

As Si has two different edges of spectral sensitivity there are two groups of methods for it increasing. Down-conversion for high energy photons and up-conversion for low energy edge.

To improve efficiency of Si SC down-conversion is a feasible way. Ideal down-converter is a 3-energy level system in which one photon with high energy is converted into few low energy photons. On practice some of high energy photons undergo intercombination transitions and do not give any contribution in sensitivity enhancement. Down-converter is a passive optical devise with linear optical processing, so it is possible to enhance efficiency using unconcentrated light and SC without modifications (Fig.3)[2].

There are 3 types of down-conversion devices, based on: organic luminescent dyes, semiconductor quantum dots (inorganic) and rare-earth ions (inorganic or organic complex).



It was proposed to use a multi-component composite in transparent matrix – Polystyrene (PS) or polyepoxypropylcarbazol (PEPC)[10]. F.Weigar found that in the anthracene crystal with an impurity of tetracene approximately 0.1-0.001% makes the spectrum of the fluorescence crystal coincides with that of tetracene, although all the exciting radiation absorbs anthracene[5]. For this reason it was decided to use anthracene and tetracene as a filler for the matrix with dyes such as Dicyanomethylene (DCM), Coumarin, Rhodamine6g, etc. Some authors propose to use polymethylmetacrylate (PMMA) as a matrix with the same dyes.[2].

1.2 Semiconductor quantum dots (QDs)

It have been successfully employed zinc-oxide and TiO_2 nanoparticles as luminescent down-shifting-layer (with possibility to use Fe_2O_3 , ZrO_2 , Nb_2O_5 ,

Al_2O_3 , and CeO_2)[6]. Changing size of nanoparticles and using of multilayer system it is possible to get needed optical properties. Another material for down-converter is PbS, PbSe. For this QDs it is possible to tune emitted wavelength from 800 to 1800 nm, varying it size. They have extremely high quantum efficiency. QDs is very stable with excellent optical quality but they are very expensive. ZnO is a semiconductor with direct wide band-gap ($E_g = 3.4$ eV). Binding energy for exciton of ~ 60 meV makes it excellent candidate for stable luminescent conversion at room temperature.[2].

1.3 Rare-earth ions

It is used trivalent lanthanide ions in down-converter, but the width of it excitation band is not enough for commercial application. Some authors propose to use Er/Yb embedded Te Glass, Other propose heterostructure of Y_2O_3 : $[(\text{Tb}^{3+}\text{-Yb}^{3+}), \text{Li}^+]$

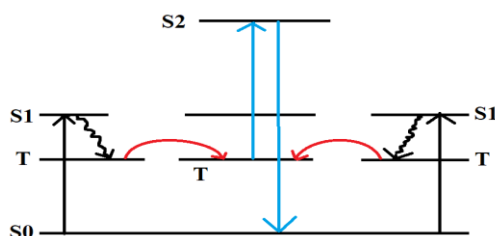


Fig.4. Energy diagram of sTTA-UC. Here describe process of light absorption with excitation of singlet states S_1 of donor molecule, further intercombination transition to triplet state T with ET (red line) to acceptor in which undergo TTA.

quantum cutting with ZnSe that absorb incident light with energy higher than band-gap with further transfer to $\text{Tb}^{3+}\text{-Yb}^{3+}$. The result – conversion from a wide spectral range of 250-550 nm. Down-conversion is maximized by the energy match between ZnSe band-gap and Tb^{3+} absorption of $7 F_6 \rightarrow 5 D_4$. [1],[2],[7] The only one problem is a high price of such converter.

2 Up-conversion

Among various ways of up-conversion of noncoherent solar radiation in photocatalytic devices the most recent and promising is the Sensitized Triplet-Triplet Annihilation-Based Upconversion (sTTA-UC). TTA is a promising approach with low requirement to excitation light density with rather high quantum yield and tunability.

For STTA-UC energy transfer between donor (sensitizer) and an acceptor molecule (annihilator) is essential. STTA-UC is a multistep process involving energy transfer (ET) through metastable optically dark electronic states. Extra energy is given by

ET from other ions or molecules (sensitizers) by annihilation after biexcitonic collisions. High energy photons emanates in radiative transfer from higher energy levels to the ground state.

One type of ions or molecules couldn't provide us with all needed energy levels and one excite ion or molecule couldn't absorb more than one photon which bring losses to intensity. Which is why EEET is frequently used. The energy-levels diagram of sTTA-UC is presented at Fig.4: Here sensitizer absorbing (α_{sens}) photons and excites into S_s , undergoes through intersystem crossing (ISC) into the triplet state (ST). Then competes with back energy transfer (BET) to ET. ET can spontaneously decay (with a rate constant k_{SD}) or undergo TTA to an excited singlet state of the emitter (ES)[2], [10].

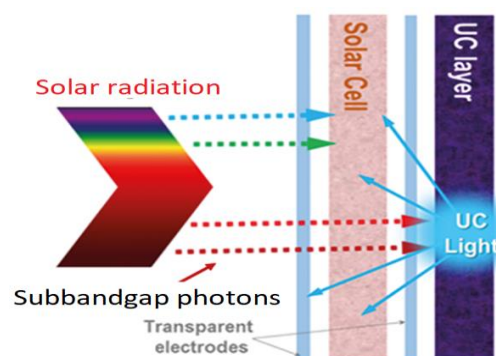


Fig.5. Deployment scheme of UC layer at the back of SC [2]

Si possesses IR transparent gap so sTTA-UC layer should be deployed on the back of SC and could be provided with reflector to enhance efficiency. [7],[8],[9]. With different materials UC efficiency is varied from $1.2 \times 0\text{--}3\%$ to 12% (with C60). The scheme of UC deployment is described on Fig.5.

Conclusion

At one hand down-converter is a passive optical device and Si is transparent in IR, so it is possible to put down-converter on the front of SC with UC at the back side. Such deployment may significantly increase efficiency of photovoltaic conversion. At another hand efficiency of light conversion and limited list of materials for conversion is an actually problem for commercial use of this technology. The most novel and advanced problems are searching for new NIR-to-vis material, reducing of reflection losses and enhancing of efficiency of UC mechanisms. Obtained results indicate that the application of TTA-UC to commercial devices demands the realization of stable integrated materials

e.g. by embedding the upconverter structure in transparent matrices. Results of this review will lead to luminescent converter design at Faculty of Physics, T.Shevchenko National University of Kyiv in cooperate with V.Ye. Lashkaryov Institute of

Semiconductor Physics (ISP), NAS of Ukraine, Institute of organic chemistry NAS of Ukraine.

Список використаних джерел

1. Pedrini J. Recent advances in the application triplet–triplet annihilation-based photon upconversion systems to solar technologies / J. Pedrini, A. Monguzzi. // Photon. Energy. – 2017. – №8
2. Naeem M. Exploring Possibilities to Enhance Silicon Solar Cell Efficiency by Downconversion of Sunlight / Naeem Muddassar – School of Chemistry and Physycs, The University of, 2015.
3. Spectral Response and External Quantum Efficiency of Mono-Crystalline Silicon Solar Cell / [S. Chander, A. Purohit, A. Nehra та ін.]. // International Journal of Renewable Energy Research-IJRER. – 2015. – C. 41–44.
4. Bryce R. Up- and Down-Conversion Materials for Photovoltaic Devices / R. Bryce, I. MacDougall, K. W. Sean. // Proceedings of SPIE. – 2012
5. Vladimirov Y. A. Physico chemical basis of photobiological processes / Y. A. Vladimirov, A. Y. Potapenko. – Moskva: Vysshaya Shkola, 1989. – 72 p.
6. Zinc oxide nanoparticles as luminescent down-shifting layer for solar cells [Електронний ресурс] / Y.Zhu, A. Apostoluk, B. Masenelli, P. Melinon // SPIE Newsroom. – 2013. – Режим доступу до ресурсу: <http://spie.org/newsroom/4585-zinc-oxide-nanoparticles-as-luminescent-down-shifting-layer-for-solar-cells>.
7. Zhao,* J. Triplet–triplet annihilation based upconversion: from triplet sensitizers and triplet acceptors to upconversion quantumyields. [Електронний ресурс] / J. Zhao,*, S. Ji, H. Guo. – 2011. – Режим доступу до ресурсу: pubs.rsc.org.
8. Lau W. S. Infrared Characterization for Microelectronics / W. S. Lau. // World Scientific. – 1999. – C. 16–18.
9. Silicon - a Material Transparent to Infrared [Електронний ресурс] // Department of Physics and Astronomy, Arizona State University – Режим доступу до ресурсу: <https://www.asu.edu/courses/phs208/patternsbb/PiN/rdg/silicon/index.html>.
10. Yashchuk V. M. Photonics of polymers / V. M. Yashchuk. – Kyiv: T.Shevchenko National University of Kyiv, 2004. – 40 –47с.

References

1. PEDRINI, J., MONGUZZI, A. (2017) *Recent advances in the application triplet–triplet annihilation-based photon upconversion systems to solar technologies*. Photon. Energy, vol.8.
2. NAEM. M. (2015) *Exploring Possibilities to Enhance Silicon Solar Cell Efficiency by Downconversion of Sunlight* / Naeem Muddassar. School of Chemistry and Physycs, The University of Adelaide.
3. CHANDER S. & PUROHIT A. & NEHRA. A. et al. (2015) Spectral Response and External Quantum Efficiency of Mono-Crystalline Silicon Solar Cell. International Journal of Renewable Energy Research-IJRER. Vol 5, No 1. p.41–44.
4. Bryce, R. & MACDOUGALL, I. & SEAN, K. W. (2012) Up- and Down-Conversion Materials for Photovoltaic Devices. Proceedings of SPIE. Vol 8438.
5. VLADIMIROV Y. A., POTAPENKO A.Y. (1989) Physico chemical basis of photobiological processesA. Y. Potapenko. – Moskva: Vysshaya Shkola. p.72 p.
6. ZHU, Y. et al. Zinc oxide nanoparticles as luminescent down-shifting layer for solar cells. SPIE Newsroom. DOI: 10.1117/2.1201212.004585 Available from:<http://spie.org/newsroom/4585-zinc-oxide-nanoparticles-as-luminescent-down-shifting-layer-for-solar-cells> [Accessed:7 January 2013].
7. ZHAO,* J. JI, S., GUO, H. Triplet–triplet annihilation based upconversion: from triplet sensitizers and triplet acceptors to upconversion quantumyields [2011] Available from:<http://pubs.rsc.org>.
8. LAU, W.S. (1999) *Infrared Characterization for Microelectronics* World Scientific. p.16–18.
9. Silicon - a Material Transparent to Infrared. [Online] Department of Physics and Astronomy, Arizona State University, Tempe, AZ 85287-1504 [Copyright © 1995-2000 Arizona Board of Regents] Available from: <https://www.asu.edu/courses/phs208/patternsbb/PiN/rdg/silicon/index.htm>
10. YASHCHUK V. M. (2004) *Photonics of polymers*. T.Shevchenko National University of Kyiv. p.40 -47

Надійшла до редколегії 19.12.2017

УДК 536.413.2

Аль-Омари М.АМ, стаж.-дослд.,
Боровий М.О., д.ф.-м.н., доц.

**Особенности генерации параметричного
рентгеновского излучения в порошках
микроразмерных частинок алмаза**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13
e-mail: d.alomari13@gmail.com

AL-Omari M.AM, Res.,
M.O. Borovoy, Dr. Sci., Assoc. Prof.

**The generation features of parametric X-ray
radiation in micro sized diamond powders**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13
e-mail: d.alomari13@gmail.com

Розроблено та відпрацьовано методику експериментального дослідження інтенсивності та форми максимумів параметричного рентгеновського випромінювання (ПРВ) у зворотній геометрії реєстрації при розповсюдженні пучка електронів з енергією 7 Мев у полікристалічних зразках алмазу. Встановлено, що відношення інтенсивностей максимумів ПРВ від кристалографічних площин (111) та (200) $N(111)/N(200)$ зменшується у 2 рази при зростанні розмірів кристалітів від 0,3 мкм до 6 мкм, тоді як ширина максимумів на половині висоти залишається незмінною. Чутливість відношення інтенсивностей ліній ПРВ до розмірів кристалітів може бути покладена в основу нового методу оцінки розмірів частинок мікро- та наночастинок.

Ключові слова: Параметричне рентгеновське випромінювання (ПРИ), ширина максимуму ПРВ на половині висоти (ШПВ), відношення інтенсивностей ліній ПРВ

The method of experimental study of the intensity and shape of the maxima of parametric X-ray radiation (PXR) in the inverse registration geometry with the propagation of 7 MeV electron beam in polycrystalline diamond samples was developed. The experiment uses powder samples of diamond with three grain sizes: 0.3 μm , 6 μm , 42 μm . It was established that the ratio of the intensities of PXR maxima from the crystallographic planes (111) and (200) decreases with diamond microcrystal's size increase, while the width of the maxima at half height remains unchanged. At the same time, the ratio of the intensities of X-ray diffraction maxima from these planes remained unchanged, although their width increased with decreasing grain sizes. To explain the result obtained, it is necessary to further development of the kinematic theory of PXR diffraction by introducing parameters that take into account the sizes of the coherent scattering blocks. The sensitivity of the ratio of the intensities of the PXR lines to the size of the crystallites can be basis of a new method for evaluating the size of the micro- and nanoparticles.

Key words: Parametric X-ray radiation (PXR), width of the PXR maxima at half height (FWHM), the ratio of the intensities of PXR

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Макарець М.В.

Вступ

Параметричне рентгеновське випромінювання (ПРВ) є когерентною складовою поляризаційного гальмівного випромінювання, що генерується при динамічній поляризації атомів середовища електромагнітним полем високоенергетичної зарядженої частинки. ПРВ збуджується в упорядкованих середовищах, зокрема, кристалах, і процес випромінювання розглядається як дифракція віртуальних фотонів, що оточують заряджену частинку, на періодичній атомній структурі кристалічної ґратки [1,2]. Важливо, що

спектральний та кутовий розподіл ПРВ визначається як параметрами пучка заряджених частинок та геометрією спостереження, так і характеристиками зразка, а саме, типом і параметрами кристалічної ґратки, її структурною досконалістю, а також розмірами і орієнтацією блоків когерентного розсіювання (БКР). У зв'язку з цим існує принципова можливість використання ПРВ для діагностики особливостей кристалічної структури твердих тіл, яка б доповнювала методи дифракції рентгеновських променів. Так, було показано, що сукупність максимумів ПРВ, які експериментально спостерігаються при

розповсюдженні високоенергетичних електронів у полікристалічних мішенях Cu, Al, Ni, W при різних кутах спостереження, добре описується у кінематичній моделі генерації та дифракції ПРВ [3]. Встановлено, що спектрально-кутовий розподіл ПРВ чутливий до переважного упорядкування БКР (текстури) полікристалів Cu та зменшення БКР Ni від мікро- до нанорозмірів (300 нм) [4,5]. Однак, кількісні залежності параметрів ПРВ від розмірів БКР експериментально не досліджувалися. Тому у представленій роботі експериментально визначено спектральні характеристики ПРВ при розповсюдженні пучка електронів з енергією 7 Мев у порошкових зразках алмазу з різними розмірами мікрокристалів.

Методика експерименту

Схема експериментальної установки, яка використовувалася для генерації та реєстрації ПРВ при розповсюдженні електронного пучка з енергією 7 Мев, наведена на рис. 1.

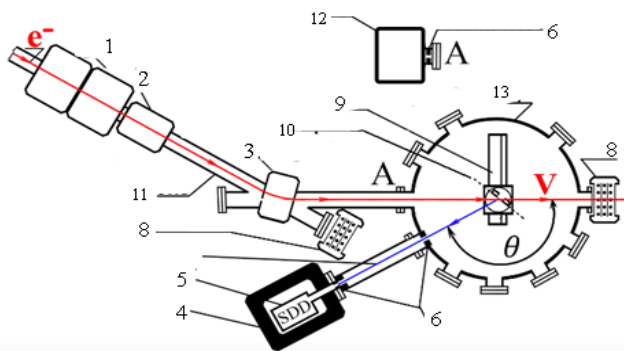


Рис. 1. Схема експериментальної установки : 1 - квадрупольні лінзи; 2 - коректор; 3 - поворотний магніт; 4 – захист; 5 – детектор; 6 - коліматири; 8 - пропорційний лічильник; 9 - мішень; 10 - гоніометр; 11 - канал руху електронів; 12 - рентгенівська трубка; 13 - камера мішені

Для збільшення кількості мікрокристалів порошкового зразку, в яких генерується ПРВ, магнітооптична система була налаштована таким чином, щоб забезпечувався максимально можливий діаметр електронного пучка (до 10 мм), який пронизував порошковий зразок. Розбіжність пучка віртуальних фотонів за умов експерименту складала 8° , тоді як розбіжність електронного пучка була майже на порядок меншою.

Як мішені використовувалися алмазні порошки з різним діаметром зерен: а) $d = (0,3 \pm 0,1)$ мкм; б) $d = (6 \pm 1)$ мкм; в) $d = (42 \pm 7)$ мкм. Кожен з порошків був рівномірно розподілений на

майларовій плівці розміром (10x24) мм та товщиною 40 мкм. Товщина шару порошку складала 200 мкм, порошки оброблялися ціанакриловим клеєм до утворення міцного шару. Для збільшення поверхні взаємодії кут між нормаллю до поверхні зразка та вектором швидкості електронів пучка складав 40° . Реєстрація ПРВ по відношенню до напрямку електронного пучка здійснювалася під кутом $\theta = 151^\circ$. Вибір зворотної геометрії реєстрації зумовлений тим, що при наближенні кута θ до 180° , по-перше, зменшується ширина піків ПРВ, по-друге, зростає інтенсивність піків ПРВ від кристалографічних площин з малими індексами Міллера, наприклад, (111) и (220), що суттєво покращує відношення сигнал/фон для таких максимумів [6].

Експериментальні параметри піків ПРВ, які відповідають дифракції віртуальних фотонів на площинах (111) и (220), порівнювалися з дифрагованим рентгенівським випромінюванням (ДРВ) від вказаних площин, отриманим з використанням рентгенівського випромінювання трубки Oxford apogee 5000 W. Напруга та сила струму складала 25 кВ та 200 мА відповідно, геометрія дифракції зберігалася такою ж, як і у випадку ПРВ.

Обговорення результатів

Типові спектри ПРВ, отримані при розповсюдженні електронного пучка з енергією 7 Мев у зразках алмазу з різним середнім розміром кристалітів, наведено на рис. 2 (верхній ряд). Там же представлені спектри рентгенівської дифракції поліхроматичного випромінювання W аноду на цих же зразках (рис. 2, нижній ряд). На суцільному фоні помітно виділяються піки ПРВ, утворені при дифракції віртуальних фотонів на кристалографічних площинах (111) та (220). Енергії таких піків – 3,116 кеВ та 5,089 кеВ, з точністю до 1% збігаються з теоретичним розрахунком у кінематичному наближенні для вказаної енергії електронів пучка та геометрії зйомки [3]. Відзначимо, що спектри ПРВ містять характеристичні рентгенівські лінії атомів елементів, які входять до складу зразків як неконтрольовані домішки. На рис. 3 представлено значення відношень інтегральних інтенсивностей максимумів ПРВ від площин (111) та (220) для зразків з різними розмірами зерен. Як видно, відношення інтенсивностей цих максимумів $N(111)/N(200)$ максимальне у випадку зразків з найменшими розмірами кристалітів 0,3 мкм. При зростанні

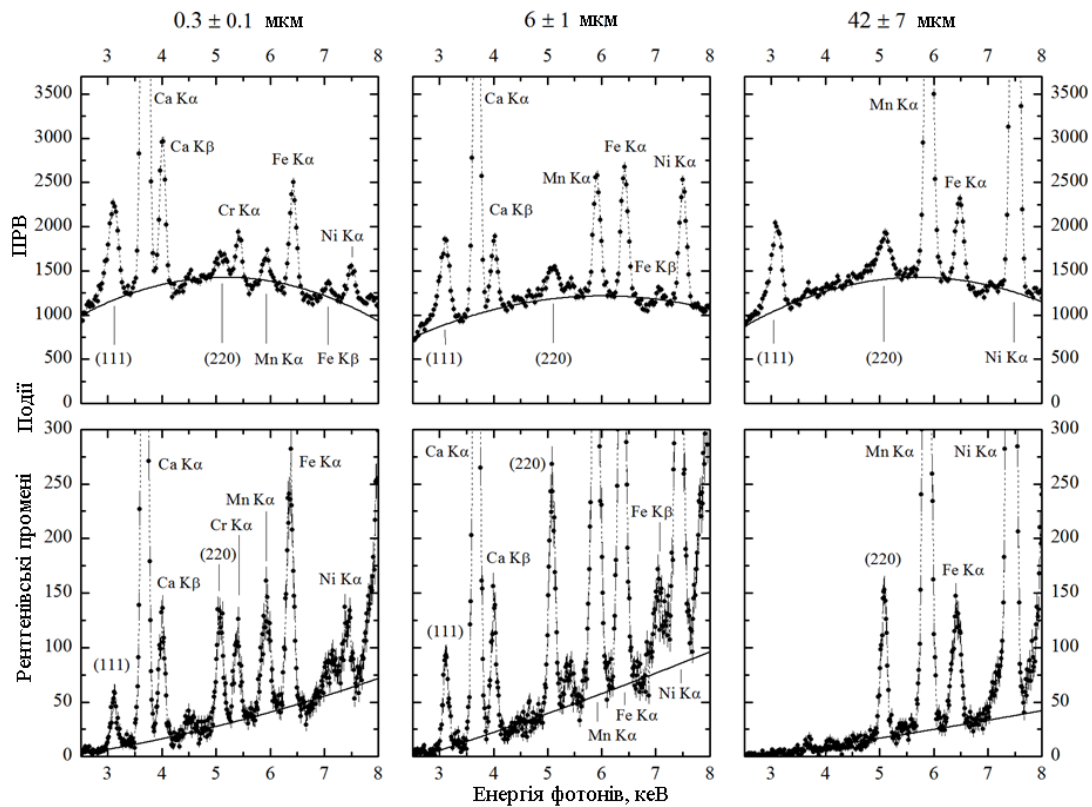


Рис. 2. Спектри ПРВ та рентгенівської дифракції на порошкових зразках алмазу з різними середніми розмірами мікрокристалів

розмірів кристалітів відношення $N(111)/N(200)$ спадає більш ніж у 2 рази. Відзначимо, що найбільша чутливість величини $N(111)/N(200)$ до розмірів БКР проявляється в області 0,3 мкм –

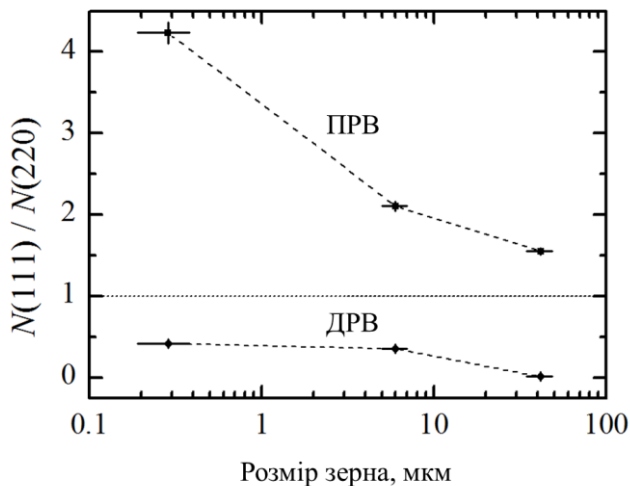


Рис. 3. Залежність відносної інтенсивності максимумів ПРВ та ДРВ від розмірів зерен алмазу

6 мкм, а при подальшому зростанні розмірів ефект стає менш помітним. Для порівняння на цьому ж рисунку наведено залежність відносної інтенсивності $N(111)/N(200)$ максимумів ДРВ. Як і очікувалося, таке відношення практично

не виявляє залежності від розмірів БКР, що відповідає як кінематичній, так і динамічній теорії рентгенівської дифракції. Таким чином, встановлено, що при проходженні пучка високоенергетичних електронів у полікристалах відношення інтенсивностей максимумів генерованого ПРВ дозволяє оцінювати середні розміри БКР. Важливість цього результату зумовлена тим, що генерація ПРВ відбувається практично в усьому об'ємі зразка, на відміну від ДРВ, для якого товщина шару дифракції обмежується екстинційною довжиною.

Окрім відносної інтенсивності (111) та (220) максимумів ПРВ та ДРВ було визначено їх ширину на половині висоти (ШПВ, або FWHM – full width at half maximum). Ці дані представлено у табл. 1. З таблиці випливає, що залежність параметру ШПВ від розміру кристалітів не спостерігається, на відміну від ДРВ, де у відповідності з рівнянням Шеррера зменшення діаметру зерна супроводжується зростанням величини ШПВ. Відзначимо, що для зразків з діаметром зерен 42 мкм максимум ПРВ (111) не спостерігався, що може бути зумовлено особливістю фотопоглинання у таких зразках. Для кількісного пояснення залежності відношення інтенсивності максимумів ПРВ від діаметру кристалітів, а фактично, від розміру БКР, необхідний подальший розвиток кінематичній моделі

Таблиця 1. Величина ШПВ максимумів (111) та (220) ПРВ і ДРВ для зразків алмазу з різним діаметром зерен

Розмір зерна, мкм	Параметр	ПРВ (111)	ДРВ (111)	ПРВ (220)	ДРВ (220)
0,3 ±0,1	ШПВ (еВ)	216 ± 12	127 ±8	291 ±93	146 ±9
6 ± 1	ШПВ (еВ)	211 ± 11	116 ±4	252 ± 32	135 ±4
42 ± 7	ШПВ (еВ)	218 ± 16	-	281 ±40	130 ±4

генерації та дифракції ПРВ через введення у розгляд відповідних розмірних факторів середовища.

Висновки

Розроблено та відпрацьовано методику експериментального дослідження характеристик ПРВ у зворотній геометрії реєстрації при розповсюдженні пучка високоенергетичних електронів у порошкових зразках алмазу. Встановлено, що відношення інтенсивностей максимумів ПРВ $N(111)/N(200)$ зменшується при зростанні діаметру кристалітів алмазу. Чутливість відношення інтенсивностей ліній ПРВ до розмірів кристалітів може бути покладена в основу нового методу оцінки розмірів мікро- та наночастинок.

Список використаних джерел

1. Baryshevsky V.G. Parametric X-rays from ultrarelativistic electrons in a crystal: theory and possibilities of practical utilization / Baryshevsky V.G., Feranchuk I.D. // Journal Physic France. – 1983. – V.44. – P. 913 – 922.
2. Shchagin V.A. Fresnel coefficients for parametric parametric X-ray (Cherenkov) radiation / Shchagin V.A. // Physics-Uspekhi. – 2015. – V.58. – P. 819 – 827.
3. Astapenko V. A. Measurement of the polarization bremsstrahlung of relativistic electrons in polycrystalline targets / Astapenko V. A., Kubankin A.S. // JETP Letters. – 2006. – V.84. – №6. – P. 281 – 284.
4. Alekseev V.I. X-ray studies of the distribution function of crystalline grains over orientation angles in mosaic crystals / Alekseev V.I., Zhukova P.N. //

Nuovo Cimento C. – 2011. – V. 34. – №.4. – P. 349 – 357.

5. Gostishchev V. I. Features of the transition radiation generated by weakly-relativistic electrons in the regime of grazing escape from a flat target. / Gostishchev V. I., Kubankin A. S. // Technical Physics Letters. – 2008. – V.34. – №11. – P. 927 – 929. |

6. V. I. Alekseev. Measuring coherent peaks of polarization bremsstrahlung from relativistic electrons in polycrystalline targets in backscattering geometry / Alekseev V. I., Vokhmyanina K. A. // Technical Physics Letters. – 2012. – V.38. – №3. – P. 294 – 296. |

References

1. BARYSHEVSKY V.G. and FERANCHUK I.D (1983) Parametric X-rays from ultrarelativistic electrons in a crystal: theory and possibilities of practical utilization. *Journal Physic France*. 44, p. 913 – 922.
2. SHCHAGIN V.A.(2015) Fresnel coefficients for parametric parametric X-ray (Cherenkov) radiation. *Physics-Uspekhi*. 58. p. 819 – 827.
3. ASTAPENKO V. A.and KUBANKIN A.S. (2006) Measurement of the polarization bremsstrahlung of relativistic electrons in polycrystalline targets. *JETP Letters*. 84(6). p. 281 – 284.
4. ALEKSEEV V.I. ZHUKOVA P.N. (2011) X-ray studies of the distribution function of crystalline grains over orientation angles in mosaic crystals. *Nuovo Cimento C*. 34, p. 349 – 357.
5. GOSTISHCHEV V. I. and KUBANKIN A. S. (2008) Features of the transition radiation generated by weakly-relativistic electrons in the regime of grazing escape from a flat target. *Technical Physics Letters*. 34. p. 927 – 929. |
6. ALEKSEEV V. I. and VOKHMYANINA K. A (2012) Measuring coherent peaks of polarization bremsstrahlung from relativistic electrons in polycrystalline targets in backscattering geometry. *Technical Physics Letters*. 38, p. 294 – 296. |

Надійшла до редакції 09.12.2017.

УДК 538.9

¹Бардік В.Ю., к.ф.-м.н., ст.н.с.

²Махлайчук В. М., к.ф.-м.н., н.с.

Кінематична зсувна в'язкість чистих рідких металів Sn, Bi, Pb і їх бінарних розплавів

¹Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, 01601, м.

Київ, вул. Володимирська 64/13,

e-mail: vital@univ.kiev.ua

²Одеський національний університет імені
І. І. Мечникова, 65082, м. Одеса, вул. Пастера, 42
e-mail: interaktiv@ukr.net

¹V.Yu.Bardik, Sen. Sci. Res.

²V. M. Makhlaichuk, PhD, Sci. Res.

Kinematic shear viscosity of pure liquid metals Sn, Bi, Pb and their binary melts.

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,

e-mail: vital@univ.kiev.ua

²Odessa I. I. Mechnikov National University, 65028,
42 Pastera st., Odessa

e-mail: interaktiv@ukr.net

Вивчається природа зсувної в'язкості постперехідних рідких металів та їх бінарних розплавів. Запропоновано нове трактування природи кінематичної зсувної в'язкості, яка не носить активаційний характер. Зсувна в'язкість виникає як результат наявності «тертя» між шарами іонів, що рухаються один відносно одного. Кількісна згода теоретичних і експериментальних значень спостерігається у всій області температур.

Ключові слова: рідкі постперехідні метали, зсувна в'язкість.

The kinematic shear viscosity of liquid post-transition metals and their alloys is considered. We show that the shear viscosity formation mechanism is not activation, and the shear viscosity arises as a result of the presence of "friction" between ionic layers moving relative to each other. The thermal motion of ions in liquid metals is largely analogous to the thermal motion of "particles" in atomic fluids. In fact, and in other cases, the depths of effective interaction potentials are close to the energy of the thermal motion. It follows that the thermal motion in liquid metals will have a non-activation character, as in atomic fluids, and the kinematic shear viscosity of liquid metals will be determined by the formula of the same type as for atomic liquids. This statement remains valid for binary melts of liquid metals. The quantitative agreement between the theoretical and experimental values is observed in the entire temperature range for which there are reliable experimental data on the shear viscosity of the metals under consideration. A generalization to binary alloys of Bi-Pb is carried out. The formula for the kinematic shear viscosity of binary melts contains parameters characteristic only of pure components.

Key Words: liquid post-transition metals, kinematic shear viscosity.

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

Вступ

Аналіз процесів в'язкості в атомарних рідинах дозволив зробити висновок, що їх кінематична зсувна в'язкість описується формулою [1,2]:

$$\tilde{\nu}(\tilde{\nu}, t) \approx \frac{\zeta_0}{(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0)^{1/3}}, \quad (1)$$

де $\tilde{\nu} = \nu / \nu_R$, де ν_R - регуляризоване значення кінематичної зсувної в'язкості в околі критичної точки, нормований питомий об'єм на одну «частинку» $\tilde{\nu} = \nu / \nu_R$, ν_R - регуляризоване

значення питомого об'єму, $\tilde{\nu}_0$ - нормований власний об'єм частинки [3,4].

Близько 100 років тому подібна формула для динамічної зсувної в'язкості була запропонована Бачинським [5]:

$$\eta = c / (\nu - \nu_0),$$

де ν - питомий об'єм на одну молекулу, ν_0 - виключений об'єм, а c - константа. Однак, у всьому інтервалі існування рідких станів від T_{tr} до T_c формула Бачинського непридатна. Її

збігання з експериментальними даними пояснюється лише тим, що вона застосовується для опису зсувної в'язкості в вузьких температурних інтервалах. У той же час, формула (1) успішно описує поведінку в'язкості у всьому інтервалі рідких станів [2].

Тепловий рух іонів в рідких металах багато в чому аналогічний тепловому руху «частинок» в атомарних рідинах. І в тому, і в іншому випадку глибини ефективних потенціалів взаємодії близькі до енергії теплового руху [6]. Звідси випливає, що тепловий рух в рідких металах матиме безактиваційний характер, як і в атомарних рідинах, а кінематична зсувна в'язкість рідких металів буде визначатися формулою того ж типу, як і для атомарних рідин. Це твердження залишається в силі і для бінарних розплавів рідких металів. У рідких металах межчастична відстань набагато менше розмірів частинок. Дійсно, для рідкого Na об'єм, що припадає на один іон при температурі плавлення $v_m = 41.14 \text{ Å}^3$, а виключений об'єм - $v_0 = 38.22 \text{ Å}^3$ [6]. Таким чином відносний рух частинок, подібне до того, що відбувається у газах, виявляється неможливим. В'язкість виникає завдяки «тертю» між молекулярними шарами, що рухаються один щодо одного, подібно до того, як вона виникає між двома жорсткими поверхнями. По суті це положення і покладено в основу формули (1) [2].

На жаль, при опису в'язкості рідких металів найчастіше використовують вираз, що дається активаційною теорією [7-9]:

$$\eta = \eta_0 \exp(E_a / k_B T),$$

де E_a називають енергією активації в'язкої течії. При цьому близькість значень E_a і $k_B T$ ігнорується. Додамо, що значення E_a має визначатися на ізохорах [10]. Однак цієї вимоги не дотримуються.

Дана робота присвячена опису температурної залежності кінематичної зсувної в'язкості на ізобарах для 1) рідких металів типу Bi, Pb, Sn, 2) їх бінарних розплавів. У разі бінарних розплавів проводиться узагальнення формули (1). Подібний підхід, застосований до рідких лужних металів [6], виявився вельми успішним. Точність відтворення чисельних значень різних параметрів теорії така, що можна говорити не тільки про якісну, а й кількісну згоду теоретичних передбачень і експериментальних даних.

Температурна залежність кінематичної зсувної в'язкості рідких металів

Відповідно до міркувань, які були наведені у Вступі, кінематичну зсувну в'язкість рідких металів та їх бінарних розплавів представимо у вигляді:

$$\tilde{\nu}(\tilde{v}, t, x) \approx \frac{\zeta_0(x)}{(\tilde{v} - \tilde{v}_0(x))^{1/3}} \quad (6)$$

де $\tilde{v}$ - нормований питомий об'єм на одну «частинку» в однокомпонентному розплаві (хвиля означає нормування на відповідне значення при $T = T_m$), а в бінарному розплаві - середнє значення питомого об'єму на одну «частинку». $\tilde{v}_0(x)$ - має поняття виключеного об'єму. Тому його концентраційна залежність, як і в рівнянні стану Ван-дер-Ваальса, може бути апроксимована аддитивним виразом

$$\tilde{v}_0 = x_1 \tilde{v}_1 + (1 - x_1) \tilde{v}_2.$$

Тут $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2$ - виключені об'єми компонент 1, 2.

Що стосується $\zeta_0(x)$, то в цьому випадку не можна звертатися до умови її аддитивності. Однак в граничних випадках $x_1 \rightarrow 0$ і $x_1 \rightarrow 1$, $\zeta_0(x_1) \rightarrow \zeta_2$ і $\zeta_0(x_1) \rightarrow \zeta_1$ відповідно. Тому і в цьому випадку будемо користуватися наближенням $\zeta_0(x_1) = x_1 \zeta_1 + (1 - x_1) \zeta_2$. Тоді формула (6) набуває вигляду:

$$\tilde{\nu}_{\text{розплав}}(x_1, \tilde{v}, t) \approx \frac{x_1 \zeta_1 + (1 - x_1) \zeta_2}{(\tilde{v} - x_1 \tilde{v}_1 - (1 - x_1) \tilde{v}_2)^{1/3}} \quad (7)$$

Розглянемо застосування формул (1) і (7) для опису кінематичної зсувної в'язкості рідких металів і їх бінарних сплавів. На рис. 1 наведені результати розрахунків в порівнянні з експериментальними даними. У табл. 1 наведені значення параметрів $\tilde{v}_0$ і $\tilde{v}_m$ для чистих рідких металів.

Таблиця 1. Значення $\tilde{v}_0$ і ζ_0 для деяких чистих рідких металів.

	$\tilde{v}_0$	ζ_0
Sn	0.9928	0.2106
Bi	0.9596	0.3417
Pb	0.9836	0.3085
Ga	0.9969	0.1508

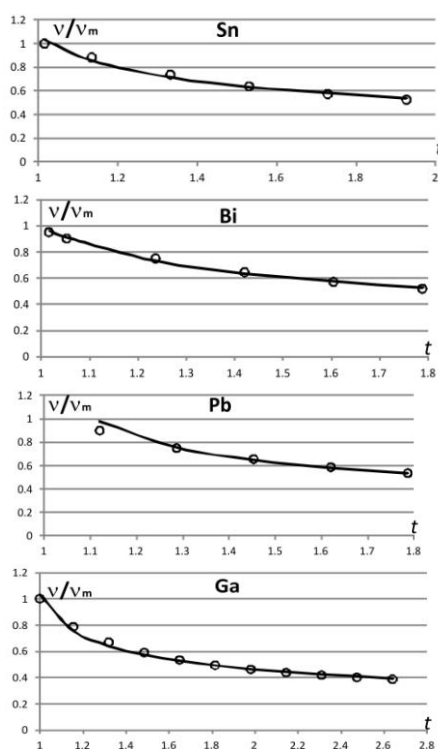


Рис.1. Нормована кінематична зсувна в'язкість рідких Sn, Bi, Pb, Ga як функції $t = T/T_m$. Кружки – експеримент [11-14], суцільна лінія – теорія за формулою (6).

Параметр $\tilde{v}_0$ практично збігається зі значенням питомого об'єму $\tilde{v}_m = 1$ (питомий об'єм, що припадає на один іон, при $T = T_m$). Спостерігається деякий розброс значень параметра ζ_0 , у порівнянні з лужними металами [6].

Параметр ζ_0 рідких лужних металів практично однаковий і застосування принципу подібності призводить до підтвердження факту належності рідких лужних металів до одного класу. Для розглянутих металів Sn, Bi, Pb, Ga, Zn відсутність достовірних значень критичних параметрів не дозволяє в повній мірі вивчити їх з точки зору теорії подібності. При опису формулою (3) кінематичної зсувної в'язкості чистих рідких металів досягається дуже гарна згода з експериментальними значеннями. Відмінності від експерименту не перевищують 1-2% для всіх чистих металів Sn, Bi, Pb, Ga, Zn. Розглянемо бінарні сплави Bi-Pb. На рис. 2 наведено порівняння кінематичної зсувної

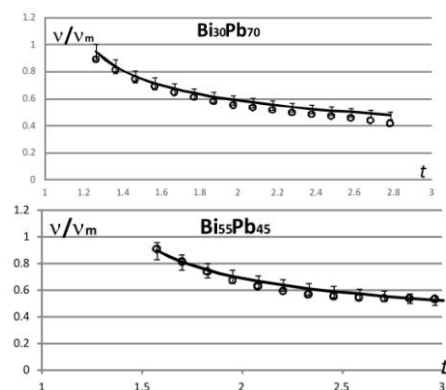


Рис. 2. Кінематична зсувна в'язкість рідких розплавів 30% Bi + 70% Pb і 55,5% Bi + 45,5% Pb як функції $t = T/T_m$. Кружки - експеримент [15], суцільна лінія - за формулою (5).

в'язкості розплавів 30% Bi + 70% Pb і 55,5% Bi + 45,5% Pb по (7) з експериментальними значеннями.

Відхилення теоретичних значень від експериментальних не перевищує 7%. На графіках це відхилення відзначено вертикальними лініями.

Висновки

В роботі розглянута кінематична зсувна в'язкість рідких постперехідних металів та їх сплавів. Показано, що механізм формування зсувної в'язкості не є активаційним, а зсувна в'язкість виникає як результат наявності «тертя» між іонними шарами, що рухаються один щодо одного. Кількісна згода теоретичних і експериментальних значень спостерігається у всій області температур, для якої існують достовірні експериментальні дані зсувної в'язкості розглянутих металів. Проведено узагальнення формул на бінарні сплави Bi-Pb. Формула для кінематичної зсувної в'язкості бінарних розплавів містить параметри, характерні тільки для чистих компонентів.

Автори щиро дякують акад. Леоніду Булавіну за всебічну підтримку досліджень і проф. Миколі Маломужу за корисні обговорення деталей на всіх етапах виконання даної роботи.

Список використаних джерел

1. Malomuzh N. P. Nature of the kinematic shear viscosity of water / N. P. Malomuzh, V. P. Olevnik. // *J. Struct. Chem. (Russia)*. – 2008. – №49. – С. 1055-1063. DOI: 10.1007/s10947-008-0178-1.
2. Makhlaichuk P. V. Nature of the kinematic shear viscosity of low-molecular liquids with averaged potential of Lennard-Jones type. / P. V. Makhlaichuk, V. N. Makhlaichuk, N. P. Malomuzh. // *Journal of Molecular Liquids*. – 2017. – №225. – С. 577-584.
3. Kulinskii V. L. Dipole fluid as a basic model for the equation of state of ionic liquids in the vicinity of their critical point. / V. L. Kulinskii, N. P. Malomuzh. // *Phys.Rev.E*. – 2003. – №67. – С. 011501-8. DOI: 10.1103/PhysRevE.67.011501.
4. Nishio M. The CH/ π hydrogen bond in chemistry. Conformation, supramolecules, optical resolution and interactions involving carbohydrates. / M. Nishio. // *Phys. Chem. Chem. Phys.* – 2011. – №13. – С. 13873-8.
5. Batchinski A. Untersuchungen über die innere Reibung der Flüssigkeiten / A. Batchinski. // *Z.Phys.Chem.* – 1913. – №84. – С. 643–706.
6. Махлайчук. В. М. . Кінематична зчувна в'язкість рідких лужних металів. / В. М. Махлайчук.. // *Укр. фіз. журн.* – 2017. – №62. – С. 668–674.
7. Levesque D. Pair Interaction from Structural Data for Dense Classical Liquids. / D. Levesque, J. J. Weis, L. Reatto. // *Phys. Rev. Lett.* – 1985. – №54. – С. 451-454.
8. Prakash S. G. Corresponding states theory and transport coefficients of liquid metals / S. G. Prakash, R. Ravi, R. P. Chhabra. // *Chemical Physics*. – 2004. – №302. – С. 149-159. doi:10.1016/i.chemphys.2004.04.001
9. Echendu O. K. Theoretical investigation of the viscosity of some liquid metals and alloys / O. K. Echendu, E. C. Mbamala. // *Physics and Chemistry of Liquids: An International Journal*. – 2011. – №49. – С. 247-258. DOI: 10.1080/00319100903539520
10. Френкель / Я. И. Френкель. – М.; Л.: Изд-во АН СССР. 1945. – 425 с.
11. Варгафтик. Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. / Н. Б. Варгафтик.. – М.: Наука, 1972. – 721 с. – (2-е изд., доп. и перераб.).
12. Sobolev V. Database of thermophysical properties of liquid metal coolants for GEN-IV. [Електронний ресурс] / V. Sobolev // *SCK•CEN-BLG-1069*. – 2010. – Режим доступу до ресурсу: <http://www.sckcen.be>.
13. Vollmann J. The viscosity of liquid Bi–Ga alloys. / J. Vollmann, D. Riedel. // *J. Phys.: Condens. Matter*. – 1996. – №8. – С. 6175–6184.
14. Reference Data for the Density and Viscosity of Liquid Cadmium, Cobalt, Gallium, Indium, Mercury, Silicon, Thallium, and Zinc / [.. J. Assael, I. J. Armyra, J. Brillo та ін.]. // *JPRD*. – 2012. – № 41(3).
15. Температурные зависимости кинематической вязкости жидких висмута, свинца и их взаимных растворов / М. А.Гузачев, Н. Ю. Константинова, П. С. Попель, А. Г. Мозговой. // *Теплофизика и аэромеханика*. – 2011. – №18. – С. 485–491.

References

1. MALOMUZH N.P., OLEJNIK. V.P. (2008) *Nature of the kinematic shear viscosity of water* *J. Struct. Chem. (Russia)*. 49(6), p. 1055-1063, DOI: 10.1007/s10947-008-0178-1.
2. MAKHLAICHUK P. V., MAKHLAICHUK V. N., MALOMUZH N. P.. (2017) Nature of the kinematic shear viscosity of low-molecular liquids with averaged potential of Lennard-Jones type. *Journal of Molecular Liquids*. 225. p. 577-584.
3. KULINSKII V.L., MALOMUZH N.P.(2003) Dipole fluid as a basic model for the equation of state of ionic liquids in the vicinity of their critical point. *Phys.Rev.E* . 67. p. 011501-8.
4. NISHIO M.. (2011)The CH/ π hydrogen bond in chemistry. Conformation, supramolecules, optical resolution and interactions involving carbohydrates. *Phys. Chem. Chem. Phys.* 13. p. 13873-8.
5. BATCHINSKI A. (1913) Untersuchungen über die innere Reibung der Flüssigkeiten. *Z.Phys.Chem.* 84. p. 643-706.
6. MAKHLAICHUK V.N. (2017) Kinematic shear viscosity of liquid alkaline metals. *Ukr.J.Phys.* 62(8). p. 668- 674.
7. LEVESQUE D., WEIS J. J. AND REATTO L. (1985) Pair Interaction from Structural Data for Dense Classical Liquids. *Phys. Rev. Lett.* 54. p. 451.
8. PRAKASH S. GANESH, RAVI R., CHHABRA R.P. (2004). Corresponding states theory and transport coefficients of liquid metals. *Chemical Physics*.302. p. 149-159.
9. ECHENDU O.K., MBAMALA E.C. (2011) Theoretical investigation of the viscosity of some liquid metals and alloys. *Physics and Chemistry of Liquids: An International Journal*, 49(2). p. 247-258.
10. J. FRENKEL. (1955)*Kinetic Theory of Liquids*; Dover Publ., New York, USA.
11. N.B. VARGAFTIK. (1975)*Handbook of Physical Properties of Liquids and Gases*. 2nd Edition. Hemisphere Publishing Corp., Washington.
12. V. SOBOLEV.(2010) *Database of thermophysical properties of liquid metal coolants for GEN-IV. SCIENTIFIC REPORT. SCK•CEN-BLG-1069*, [Online] Available from: <http://www.sckcen.be>.
13. VOLLMANN J. AND RIEDEL D. (1996) The viscosity of liquid Bi–Ga alloys. *J. Phys.: Condens. Matter*. 8. p. 6175–6184.
14. ASSAEL MARC J., ARMYRA IVI J., BRILLO J., STANKUS S.V., WU J. AND WAKEHAM W.A. (2012) *Reference Data for the Density and Viscosity of Liquid Cadmium, Cobalt, Gallium, Indium, Mercury, Silicon, Thallium, and Zinc. JPRD*, 41(3).
15. GUSACHEV M.A., KONSTANTINOVA N.YU., POPEL P.S., MOZGOVOY A.G. (2011) Temperature dependences of kinematic viscosity of liquid bismuth, lead and their mutual solutions. *Thermophysics and Aeromechanics*. 18. 3. p. 485-491.

Надійшла до редколегії 20.12.2017

УДК 539.21

Ніколаєнко Т. Ю.¹, к.ф.-м.н.

**Квантово-хімічне дослідження
нековалентної взаємодії молекул
пентанової кислоти та D-глюкозаміну**

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13,
e-mail: ¹tim_mail@ukr.net

T. Yu. Nikolaienko¹, Ph.D.

**Quantum-chemical investigation of con-
covalent interaction between the pentanoic
acid and D-glucosamine molecules**

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: ¹tim_mail@ukr.net

Квантово-механічними методами теорії функціоналу густини (DFT) з поправками на дисперсійну взаємодію, теорії збурень М'юллера-Плессета 2-го порядку та методом Хартрі-Фока досліджено міжмолекулярну взаємодію у нековалентно зв'язаному комплексі з молекул пентанової кислоти та D-глюкозаміну. Визначено окремі компоненти енергії взаємодії складових комплексу у вакуумі та за наявності діелектричного оточення, властивості якого моделюють наявність води. Проаналізовано фізичні властивості нековалентних взаємодій (а саме - водневих зв'язків) між складовими комплексу. Одержані дані щодо енергії водневих зв'язків співставлено зі значеннями, оціненими за величинами червоного зсуву валентних коливань груп донорів протона.

Ключові слова: нековалентні взаємодії, водневі зв'язки, олеїнова кислота, хітозан.

Intermolecular interactions in non-covalently bound complex of pentanoic (valeric) acid (C₅H₁₀O₂) and D-glucosamine (C₆H₁₃NO₅) molecules were investigated using quantum-chemical methods of the density functional theory (DFT), both with and without dispersion corrections, second-order Moller-Plesset perturbation theory, and the Hartree-Fock method. The studied molecules were selected as the model compounds of oleic acid and chitosan monomer respectively, which, in turn, are important compounds for development of organic coatings for nano-particles used for targeted drug delivery. The optimized geometries of the bound complex and of its isolated components were obtained. Different components of the interaction energy were evaluated for the studied complex in vacuum and in dielectric environment (simulated by the COSMO solvation model) with the properties set close to those of water. Using the obtained spatial distributions of the electron density the physical properties of non-covalent interactions (namely, hydrogen bonds) between the components of the complexes under study were investigated with the quantum theory of atoms-in-molecules (QTAIM). The obtained data on the bonding energy were compared against the values obtained from red-shift of the proton donor valence vibration frequencies.

Key Words: non-covalent interactions, hydrogen bonds, oleic acid, chitosan.

Статтю представив акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

Вступ

Підвищення ефективності ліків та зменшення їхніх побічних ефектів є актуальною міждисциплінарною задачею, однією зі стратегій, розв'язання якої є застосування методів спрямованого ("адресного") транспортування ліків у живому організмі [1]. Реалізація спрямованого транспорту ліків на практиці потребує приєднання молекули лікарського препарату до частинки-носія. У багатьох випадках наночастинка-носії має магнітний момент та вкрита біосумісним [2, 3] органічним (наприклад, полімерним) покриттям, саме до

якого і мають оборотним чином приєднуватися молекули лікарської речовини.

Існуючі дослідження [4, 5] показують, що олеат натрію і хітозан є перспективними покриттями, що відповідають як вимогам біосумісності [6], так і здатності утримувати на собі молекули лікарських засобів (зокрема, доксорубіцину). При цьому особливістю природного полісахариду хітозану є істотний вміст у ньому аміно- і гідроксильних груп, що уможливорює великий спектр різних схем зв'язування молекул лікарських засобів із хітозановим покриттям поверхні частинки. Окрім того, хітозан характеризується високою біосумісністю, високою адгезією до поверхні та є

стабільним в широкому діапазоні рН [4]. Перевагами ж органічних покриттів на основі олеату натрію є простота та дешевизна необхідних процедур синтезу.

В даній роботі з використанням спрощених молекулярних моделей досліджено взаємодію між карбоксильними та аміногрупами молекул, що входять до складу покриття наночастинок синтезованих рідинних систем [7]. Використання таких моделей уможливило застосування сучасних методів неемпіричної квантової механіки (квантової хімії) для дослідження міжмолекулярних взаємодій між компонентами органічного покриття магнітних наночастинок.

Матеріали і методи

Для дослідження було створено наступні молекулярні моделі: молекули пентанової кислоти (рис. 1, а) – як модель молекули олеїнової (відмінність між ними полягає лише у кількості $-\text{CH}_2-$ ланок гідрофобного «хвоста» молекули), та молекулу D-глюкозаміну – як модель мономерної ланки хітозану (рис. 1, б).

Дослідження міжмолекулярної взаємодії між молекулами пентанової кислоти та D-глюкозаміну, – молекулярними моделями компонентів органічного покриття синтезованих наночастинок, – виконували наступним чином.

Спочатку за допомогою квантово-хімічного методу функціоналу густини (DFT) з використанням обмінно-кореляційного функціоналу B3LYP [8] та набору базисних функцій cc-pVDZ [9] у пакеті програм ORCA версії 3.0.2 [10] знаходили рівноважну

(«оптимізовану») геометрію молекул пентанової кислоти та D-глюкозаміну (саме знайдені геометрії наведено на рис. 1). Далі виконували розрахунок коливального спектру для перевірки того, що знайдені геометрії відповідають саме локальним мінімумам гіперповерхні потенціальної енергії молекул.

Після цього молекули пентанової кислоти та D-глюкозаміну розміщували поряд одна з одною за допомогою молекулярного редактора Avogadro так, щоб гідроксильна група молекули пентанової кислоти знаходилася поблизу аміногрупи молекули D-глюкозаміну. Створений комплекс використовували як стартову структуру для процесу оптимізації геометрії, який проводили за методу DFT з використанням обмінно-кореляційного функціоналу B3LYP та набору базисних функцій cc-pVDZ у пакеті ORCA 3.0.2. Оптимізовану структуру комплексу наведено на рис. 2. Для цієї структури з використанням того ж самого квантово-хімічного методу було знайдено просторовий розподіл об'ємної густини електронного заряду («електронної густини») комплексу, який аналізували за методом квантової теорії атомів-в-молекулах Р.Бейдера QTAİM [11] за допомогою програмного пакету AimAll версії 15.09.27. В результаті аналізу було виявлено нековалентні взаємодії, що існують між компонентами комплексу. Виявлені взаємодії зображено на рис. 2 пунктирними лініями.

Енергію взаємодії ΔE_{int} складових частин комплексу представляли як суму

$$\Delta E_{int} = \Delta E_{frozen} + \Delta E_{relax} = \Delta E_{direct} + \Delta E_{BSSE} \quad (1)$$

наступних внесків:

$$\Delta E_{relax} = \sum_i (E_i^{MCBS, cg} - E_i^{MCBS, og}) \quad (2)$$

$$\Delta E_{frozen} = E^{DCBS} - \sum_i E_i^{DCBS, cg} \quad (3)$$

$$\Delta E_{BSSE} = \sum_i (E_i^{MCBS, cg} - E_i^{DCBS, cg}) \quad (4)$$

$$\Delta E_{direct} = E^{DCBS} - \sum_i E_i^{MCBS, og} \quad (5)$$

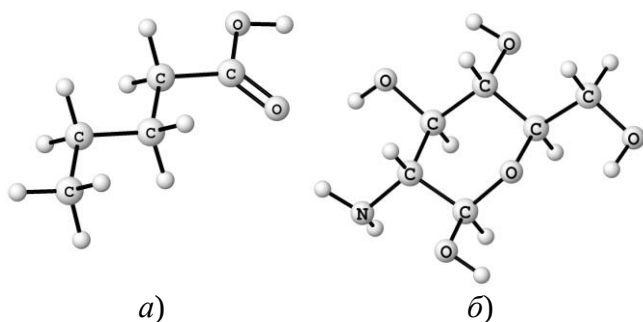


Рис. 1. Просторова структура молекул масляної кислоти (а) та D-глюкозаміну (б). Кульками без літери позначено атоми водню.

де індекс i нумерує компоненти комплексу (приймає значення 1 або 2), E^{DCBS} – енергія комплексу, $E_i^{DCBS,x}$ – енергія i -го компонента комплексу, розрахована з використанням того ж самого набору базисних функцій (і тієї ж їхньої кількості!), що використовувався при розрахунку енергії усього комплексу, $E_i^{MCBS,x}$ – енергія i -го компонента комплексу, розрахована з використанням набору базисних функцій, що локалізовані лише на атомах даного компонента, причому якщо в індексі замість x вказано sg , то відповідна енергія розраховувалася при тій же геометрії молекула, яку вона має в складі комплексу, а якщо вказано og – то при оптимізованій геометрії. Енергії було обчислено чотирма методами: Хартрі-Фока, теорії функціоналу густини без додаткової поправки на дисперсійну взаємодію, теорії функціоналу густини з поправкою на дисперсійну взаємодію (DFT-D3 [12, 13]) та теорії збурень М'юллера-Плессета 2-го порядку (MP2). В усіх випадках використовували геометрії, одержані методом B3LYP/cc-pVDZ; при остаточному розрахунку енергії методами теорії функціоналу густини використовували базисний набір cc-pVTZ, а для методів Хартрі-Фока та теорії збурень М'юллера-Плессета 2-го порядку – aug-cc-pVTZ.

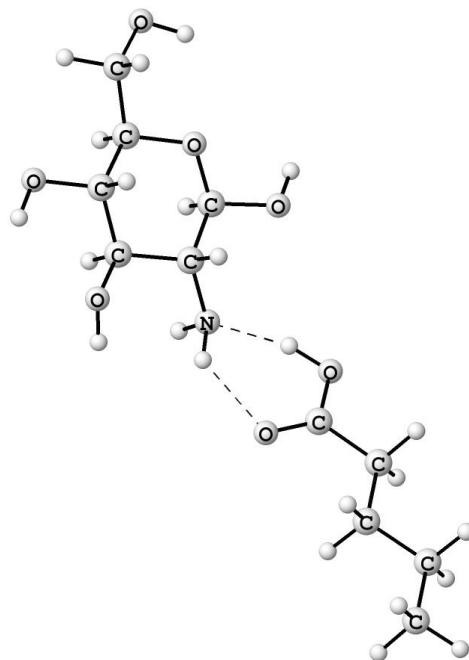


Рис. 2. Одержана просторова структура комплексу молекули масляної кислоти та мономерною ланкою хітозану – молекулою D-глюкозаміну. Пунктирними лініями позначено водневі зв'язки. Кульками без літери позначено атоми водню.

Таблиця 1

Внески до енергії взаємодії складових частин комплексу з молекул масляної кислоти та D-глюкозаміну, визначені різними методами у вакуумі. В дужках вказано відповідні значення за наявності діелектричного оточення, властивості якого моделюють наявність води.

Внесок до енергії взаємодії	Метод DFT без поправки на дисперсійну взаємодію	Метод DFT з поправкою на дисперсійну взаємодію	Метод Хартрі-Фока	Теорія збурень М'юллера-Плессета 2-го порядку
	кДж/моль	кДж/моль	кДж/моль	кДж/моль
ΔE_{frozen}	-47,4 (-40,3)	-60,4 (-53,3)	-36,0 (-27,3)	-55,9 (-49,5)
ΔE_{BSSE}	7,5 (-11,5)	7,5 (-11,5)	-8,0 (-30,7)	-2,6 (-23,3)
ΔE_{relax}	6,6 (4,6)	6,8 (4,7)	10,2 (7,5)	6,5 (4,4)
ΔE_{direct}	-48,3 (-24,2)	-61,1 (-37,1)	-17,8 (10,9)	-46,8 (-21,9)
ΔE_{int}	-40,8 (-35,7)	-53,6 (-48,5)	-25,9 (-19,7)	-49,4 (-45,1)

Результати та обговорення

Одержані результати, обчислені за формулами (1)–(5), наведені в табл. 1. Із отриманих даних випливає, що енергії взаємодії складових частин комплексу, визначені методом DFT з поправкою на дисперсійну взаємодію та методом MP2 добре узгоджуються між собою і лежать в межах від -53 до -49 кДж/моль. При цьому необхідно відзначити, що внесок дисперсійних взаємодій, оцінений як різниця енергій взаємодії, розрахованих методами MP2

та Хартрі-Фока, складає -23,6 ккал/моль, що відповідає майже 50% від усієї енергії взаємодії. Приблизно половина від цієї величини походить від далекодіючих взаємодій, адже звичайний варіант теорії функціоналу густини з квазілокальним функціоналом B3LYP здатен враховувати дисперсійну взаємодію лише частково і при цьому передбачає значення енергії взаємодії, яке за абсолютною величиною на 12,8 кДж/моль менше за варіант теорії функціоналу густини, який коректно враховує

дисперсійну взаємодію за допомогою поправки Грімме.

Окрім моделювання взаємодії складових частин комплексу з молекул пентанової кислоти та D-глюкозаміну у вакуумі, було досліджено вплив розчинника, а саме – води, на взаємодію названих складових частин. Для цього дослідження було використано модель COSMO [14], відповідно до якої розчинник моделюється неперервним діелектриком, у порожнину в якому і розміщено систему, що досліджується, а вплив розчинника на цю систему моделюється системою зарядів, що неперервно розподілені по внутрішній поверхні порожнини. Необхідні для цього обчислення виконували аналогічно до випадку взаємодії складових частин комплексу у вакуумі. Одержані за наявності впливу розчинника складові енергії взаємодії наведено в табл. 1 у дужках.

Із отриманих даних випливає, що енергії взаємодії складових частин комплексу з молекул пентанової кислоти та D-глюкозаміну, визначені з урахуванням оточуючого розчинника методами теорії функціоналу густини з поправкою на дисперсійну взаємодію та теорії збурень М'юллера-Плессета 2-го порядку добре узгоджуються між собою і лежать в межах від -45 до -49 кДж/моль. Розчинник знижує енергію взаємодії складових частин комплексу на ~ 4 кДж/моль, що складає близько 10% від величини енергії взаємодії і не є надто істотним. Тому можна вважати, що подальше моделювання взаємодії складових частин комплексу можна проводити у вакуумній моделі.

Результати аналізу фізичних властивостей нековалентних взаємодій (які вилися водневими зв'язками А-Н...В) між складовими частинами комплексу з молекул пентанової кислоти та D-глюкозаміну, визначені за квантовою теорією атомів-в-молекулах QTAİM на основі просторового розподілу об'ємної густини електронного заряду, розрахованого для комплексу у вакуумі, наведені в табл. 2.

Доцільно порівняти сумарну енергію зазначених зв'язків із енергією взаємодії складових частин комплексу з молекул

пентанової кислоти та D-глюкозаміну у вакуумі.

Для цього можна використати формулу Йогансена [15], яка пов'язує енергію E_{HB} водневого зв'язку А-Н...В з зсувом $\Delta\nu$ частоти ν валентного коливання зв'язку А-Н в червону область

$$E_{HB} = 0,33 \cdot E_0 \cdot \sqrt{\frac{\Delta\nu}{\nu_0} - 40} \quad (6)$$

де величини E_0 і ν_0 є коефіцієнтами перетворення до належної розмірності (а саме: $E_0 = 4,184$ кДж/моль, $\nu_0 = 1$ см⁻¹). З використанням цієї формули, для зв'язку О-Н...N (у якого зсув частоти коливання, розрахованої в гармонійному наближенні, складає $\Delta\nu = 3702 - 3049 = 653$ см⁻¹) отримуємо $E_{HB} = 34,1$ кДж/моль, а зв'язку N-Н...О (у якого $\Delta\nu = 3498 - 3455 = 43$ см⁻¹) – 2,4 кДж/моль. Сумарна енергія зв'язку, оцінена у такий спосіб, виходить дещо меншою від загальної енергії взаємодії складових частин комплексу з молекул пентанової кислоти та D-глюкозаміну у вакуумі, знайдену вище (~51 кДж/моль).

Альтернативний спосіб оцінки сумарної енергії водневих зв'язків у досліджуваному комплексі – використання даних табл. 2, визначених за квантовою теорією атомів-в-молекулах QTAİM на основі просторового розподілу об'ємної густини електронного заряду.

Для цього можна використати емпіричну розрахункову формулу [16] для енергії водневого зв'язку

$$E_{HB} = A \cdot \rho_{cp} + B \quad (7)$$

де ρ_{cp} – густина електронного заряду в критичній точці типу (3,-1) на лінії зв'язку, а A і B – числові коефіцієнти, що залежать від типу зв'язку.

Одержані за формулою (7) енергії складають О-Н...N 34,6 кДж/моль, а зв'язку N-Н...О – 12,2 кДж/моль. Сума цих енергій складає 46,8 кДж/моль, що лише на ~ 4 кДж/моль менше за сумарну енергію взаємодії складових частин комплексу з молекул пентанової кислоти та D-глюкозаміну у вакуумі, знайдену вище (~51 кДж/моль).

Таблиця 2

Фізичні властивості нековалентних взаємодій (водневих зв'язків А-Н...В) між складовими частинами комплексу з молекул масляної кислоти та D-глюкозаміну, визначені за квантовою теорією атомів-в-молекулах QTAİM

Зв'язок	Відстань L_{AB}	Відстань L_{AH}	Кут $\angle ANB$	ρ_{cp}	$\Delta\rho_{cp}$
	Å	Å	Град.		
О-Н...N	2,743	1,009	161,5	0,0463	0,116
N-Н...О	2,895	1,027	133,7	0,0220	0,062

Висновки

Таким чином, в даній роботі з використанням сучасних неемпіричних методів квантової механіки (квантової хімії) було досліджено взаємодію молекул пентанової кислоти та D-глюкозаміну, які є модельними складовими частинами, відповідно, олеїнової кислоти та хітозану, що застосовуються для створення органічного покриття наночастинок, перспективних для використання в системах спрямованого транспорту біологічно активних речовин. Встановлено, що енергія зв'язування дослідженого комплексу складає близько 50 кДж/моль, а її значення, отримані методом теорії функціоналу густини з поправкою на

дисперсійну взаємодію (53,6 кДж/моль) та методом теорії збурень Мьоллера-Плессета (49,4 кДж/моль) відрізняються неістотно. Оточення взаємодіючих молекул діелектричним континуумом, що моделює наявність водного розчинника, знижує абсолютну величину енергії взаємодії приблизно на 5 кДж/моль. З використанням квантової теорії атомів-в-молекулах Р.Бейдера (QTAIM) визначено, що основним чинником стабілізації дослідженого комплексу є водневі зв'язки типів O-H...N та N-H...O із сумарною енергією 46,8 кДж/моль, що лише на ~4 кДж/моль менше за загальну енергію зв'язування комплексу.

Список використаних джерел

1. Rösler A. Advanced drug delivery devices via self-assembly of amphiphilic block copolymers / A. Rösler, G. W. Vandermeulen, H. A. Klok. // *Advanced drug delivery reviews*. – 2012. – V. 64. – P. 270–279.
2. Pylypchuk I.V. Biomimetic Hydroxyapatite Growth on Functionalized Surfaces of Ti-6Al-4V and Ti-Zr-Nb Alloys / I. V. Pylypchuk, A. L. Petranovskaya, P. P. Gorbyk, A. M. Korduban [et al.] // *Nanoscale research letters*. – 2015. – V. 10. – P. 1-8.
3. Habibi N. Functional biocompatible magnetite-cellulose nanocomposite fibrous networks: Characterization by fourier transformed infrared spectroscopy, X-ray powder diffraction and field emission scanning electron microscopy analysis / N. Habibi // *Spectrochimica Acta Part A: Molecular and Biomolecular Spectroscopy*. – 2015. – V. 136. – P. 1450–1453.
4. Budnyak T.M. Synthesis and adsorption properties of chitosan-silica nanocomposite prepared by sol-gel method / T. M. Budnyak, I. V. Pylypchuk, V. A. Tertykh // *Nanoscale research letters*. – 2015. – V. 10. – P. 87.
5. Avdeev M. V. Structure of water-based ferrofluids with sodium oleate and polyethylene glycol stabilization by small-angle neutron scattering: contrast-variation experiments / M. V. Avdeev, A. V. Feoktystov, P. Kopcansky // *Journal of Applied Crystallography*. – 2010. – V.43. – P. 959–969.
6. Bhattarai N. Chitosan-based hydrogels for controlled, localized drug delivery / N. Bhattarai, J. Gunn, M. Zhang // *Advanced drug delivery reviews*. – 2010. – V. 62. – P. 83–99.

References

1. RÖSLER, A., VANDERMEULEN, G. W., & KLOK, H.A. (2001) Advanced drug delivery devices via self-assembly of amphiphilic block copolymers. *Advanced drug delivery reviews*, 53(1), 95-108.
2. PYLYPCHUK, I. V., PETRANOVSKAYA, A. L., GORBYK, P. P., KORDUBAN, A. M., MARKOVSKY, P. E., & IVASISHIN, O. M. (2015). Biomimetic hydroxyapatite growth on functionalized surfaces of Ti-6Al-4V and Ti-Zr-Nb Alloys. *Nanoscale research letters*, 10(1), 338.
3. HABIBI, N. (2015). Functional biocompatible magnetite–cellulose nanocomposite fibrous networks: Characterization by fourier transformed infrared spectroscopy, X-ray powder diffraction and field emission scanning electron microscopy analysis. *Spectrochimica Acta Part A: Molecular and Biomolecular Spectroscopy*, 136, 1450-1453.
4. BUDNYAK, T. M., PYLYPCHUK, I. V., TERTYKH, V. A., YANOVSKA, E. S., & KOLODYNSKA, D. (2015). Synthesis and adsorption properties of chitosan-silica nanocomposite prepared by sol-gel method. *Nanoscale research letters*, 10(1), 87.
5. AVDEEV, M. V., FEOKTYSTOV, A. V., KOPCANSKY, P., LANCZ, G., GARAMUS, V. M., WILLUMEIT, R., TIMKO, M., KONERACKA, M., et al (2010). Structure of water-based ferrofluids with sodium oleate and polyethylene glycol stabilization by small-angle neutron scattering: contrast-variation experiments. *Journal of Applied Crystallography*, 43(5), 959-969.
6. BHATTARAI, N., GUNN, J., & ZHANG, M. (2010). Chitosan-based hydrogels for controlled, localized drug delivery. *Advanced drug delivery reviews*, 62(1), 83-99.

7. Петренко В.І. Просторова структура рідинних систем на основі наночастинок магнетиту з органічним покриттям / В.І. Петренко, О.І. Іваньков, М.В. Авдєєв, Т. Ю. Ніколаєнко // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Серія фізико-математичні науки. – 2015. – № 3. – С. 203 – 206.
8. Stephens P.J. Ab Initio Calculation of Vibrational Absorption and Circular Dichroism Spectra Using Density Functional Force Fields / P. J. Stephens, F. J. Devlin, C. F. Chabalowski, M. J. Frisch. // J. Phys. Chem. – 1994. – V. 98. – P. 11623–11627
9. Dunning T.H. Gaussian basis sets for use in correlated molecular calculations. I. The atoms boron through neon and hydrogen / T. H. Dunning // The Journal of chemical physics. – 1989. – V. 90. – P. 1007–1023.
10. Neese F. The ORCA program system / F. Neese // Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Molecular Science. – 2012. – V. 2. – P. 73–78.
11. Бэйдер Р. Атомы в молекулах. Квантовая теория / Р. Бэйдер. – Москва: Мир, 2001. – 532 с.
12. Grimme S. Effect of the damping function in dispersion corrected density functional theory / S. Grimme, S. Ehrlich, L. Goerigk // Journal of computational chemistry. – 2011. – V. 32. – P. 1456–1465.
13. Grimme S. A consistent and accurate ab initio parametrization of density functional dispersion correction (DFT-D) for the 94 elements H-Pu / S. Grimme, J. Antony, S. Ehrlich, H. Krieg // The Journal of chemical physics. – 2010. – V. 132. – P. 154104-1–154104-19.
14. Klamt A. COSMO: a new approach to dielectric screening in solvents with explicit expressions for the screening energy and its gradient / A. Klamt, G. Schüürmann // Journal of the Chemical Society, Perkin Transactions 2. – 1993. – V. 5. – P. 799-805.
15. Iogansen A.V. Direct proportionality of the hydrogen bonding energy and the intensification of the stretching $\nu(\text{XH})$ vibration in infrared spectra / A. V. Iogansen // Spectrochimica Acta Part A: Molecular and Biomolecular Spectroscopy. – 1999. – V. 55. – P. 1585-1612.
16. Nikolaienko T.Y. Bridging QTAIM with vibrational spectroscopy: The energy of intramolecular hydrogen bonds in DNA-related biomolecules / T. Y. Nikolaienko, L. A. Bulavin, D. M. Hovorun // Physical Chemistry Chemical Physics. – 2012. – V. 14. – p. 7441-7447.
7. PETRENKO, V.I., IVANKOV, O.I., AVDEEV, M.V., & NIKOLAIENKO, T. YU. (2015) Spatial structure of liquid systems with organic-coated magnetite nanoparticles. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics*, 3, 203 – 206.
8. STEPHENS, P. J., DEVLIN, F. J., CHABALOWSKI, C. F. N., & FRISCH, M. J. (1994). Ab initio calculation of vibrational absorption and circular dichroism spectra using density functional force fields. *The Journal of Physical Chemistry*, 98(45), 11623-11627.
9. DUNNING JR, T. H. (1989). Gaussian basis sets for use in correlated molecular calculations. I. The atoms boron through neon and hydrogen. *The Journal of chemical physics*, 90(2), 1007-1023.
10. Neese, F. (2012). The ORCA program system. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Molecular Science*, 2(1), 73-78.
11. BADER, R.F.W. (1990) *Atoms in Molecules: A Quantum Theory*, Oxford University Press.
12. GRIMME, S., EHRLICH, S., & GOERIGK, L. (2011). Effect of the damping function in dispersion corrected density functional theory. *Journal of computational chemistry*, 32(7), 1456-1465.
13. GRIMME, S., ANTONY, J., EHRLICH, S., & KRIEG, H. (2010). A consistent and accurate ab initio parametrization of density functional dispersion correction (DFT-D) for the 94 elements H-Pu. *The Journal of chemical physics*, 132(15), 154104.
14. KLAMT, A., & SCHÜÜRMAN, G. J. G. J. (1993). COSMO: a new approach to dielectric screening in solvents with explicit expressions for the screening energy and its gradient. *Journal of the Chemical Society, Perkin Transactions 2*, (5), 799-805.
15. IOGANSEN, A. V. (1999). Direct proportionality of the hydrogen bonding energy and the intensification of the stretching $\nu(\text{XH})$ vibration in infrared spectra. *Spectrochimica Acta Part A: Molecular and Biomolecular Spectroscopy*, 55(7-8), 1585-1612.
16. NIKOLAIENKO, T. Y., BULAVIN, L. A., & HOVORUN, D. M. (2012). Bridging QTAIM with vibrational spectroscopy: The energy of intramolecular hydrogen bonds in DNA-related biomolecules. *Physical Chemistry Chemical Physics*, 14(20), 7441-7447.

Надійшла до редколегії 01.12.17

УДК 539.194

Поперенко Л.В.¹, д.ф.-м.н, проф.,
Розуван С.Г.¹, к.ф.-м.н, н.с.,
Шайкевич І.А.¹, д.ф.-м.н, проф.,
Розуван К.П.¹, інж.

L.V. Poperenko¹, Dr.Sc., Prof.,
S.G. Rozouvan¹, Ph.D., Sci. Res.,
I.A. Shaykevich¹, Dr.Sc., Prof.,
K.P. Rozouvan¹, Eng.

Оптичні властивості вуглецевих нанотрубок з дефектами кристалічної ґратки.

Optical properties of carbon nanotubes with crystal lattice defects.

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13, e-mail: sgr@univ.kiev.ua

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: sgr@univ.kiev.ua

Вуглецеві нанотрубки після тривалого (понад 1 рік) зберігання в повітряній атмосфері в умовах темряви вивчалися за допомогою скануючої тунельної мікроскопії та спектральної еліпсометрії. Проведеними вимірами з високою просторовою роздільною здатністю зареєструвано джгути нанотрубок, а також виявлено дефекти їх кристалічної будови. Отримані дисперсійні залежності оптичної провідності вуглецевих нанотрубок проаналізовано з урахуванням наявності дислокацій в їхній кристалічній структурі. Проведені також квантово-механічні розрахунки вуглецевих нанотрубок з 64 та 61 атомами у їхньому складі для пояснення отриманих результатів.

Ключові слова: вуглецеві нанотрубки, скануюча тунельна мікроскопія, джгути нанотрубок.

Carbon nanotubes after long-time air storage in a dark place were studied by scanning tunneling microscopy and spectral ellipsometry. The measurements with high spatial resolution registered the bundles of nanotubes as well as defects of its crystal structure. Obtained optical conductivity spectral curves were analyzed based on irregularities of its crystal lattice. The curves revealed more smooth shape comparing to the three years earlier experimental dependencies. The shape was interpreted as a result of additional spectral lines inhomogenous broadening due to defects of the nanotube lattice. Also quantum mechanical numerical simulation of carbon nanotubes with 64 and 61 atoms illustrated the obtained results. Electron density spatial distribution was found to be localized near the nanotubes defects and not to be dependent on the nanotube symmetry anymore. The calculations results explain the predominantly metallic electric conductivity of the observed by scanning tunneling microscopy nanotubes as well as impossibility to resolve the atomic structure of the nanotubes.

Key Words: carbon nanotubes, scanning tunneling microscopy, nanotubes bundles.

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

Вступ

Вуглецеві нанотрубки розглядаються як одні з ключових елементів для побудови пристроїв нанорозмірної електроніки. За останнє десятиліття підхід до опису структури вуглецевої нанотрубки, як до ідеального одновимірного кристалу, змінився. Так, наприклад, в детальному огляді [1] проаналізовано сучасний стан досліджень вуглецевих нанотрубок з дефектами. При цьому на густину електронних станів впливають не тільки точкові дислокації, а й взаємне розташування цих дислокацій [2]. В той же час специфічна для нанотрубки реалізація кристалічної ґратки у вигляді джгута нанотрубок

розглядається в основному з точки зору їх практичного отримання [3], або як ще один фактор, який подібно до хіральності нанотрубок, може впливати на їх дисперсійні властивості [4]. Базовою методикою дослідження нанотрубок залишається електронна мікроскопія. Скануюча тунельна мікроскопія (СТМ) відіграє меншу роль, оскільки лише 25% атомів є досяжними для зонда мікроскопа. Однак такий підхід не дозволяє в повному обсязі використовувати сильну сторону СТМ- атомарну роздільну здатність та можливість аналізувати просторовий розподіл густини електронних станів.

Задачею даної роботи є вивчення природи дефектів структури вуглецевої нанотрубки та їх вплив на оптичні властивості наносистеми з використанням для цього методик спектральної еліпсометрії та скануючої тунельної мікроскопії.

Експериментальна частина.

Для експериментів були взяті зразки нанотрубок, які раніше досліджувались в [4]. Нанотрубки зберігались в негерметичних кюветах при кімнатній температурі в умовах темряви. Експерименти проводились після року та трьох років зберігання нанотрубок в повітряному середовищі.

Спектральна еліпсометрія дозволила отримувати дисперсійні залежності оптичної провідності вуглецевих нанотрубок. Результати

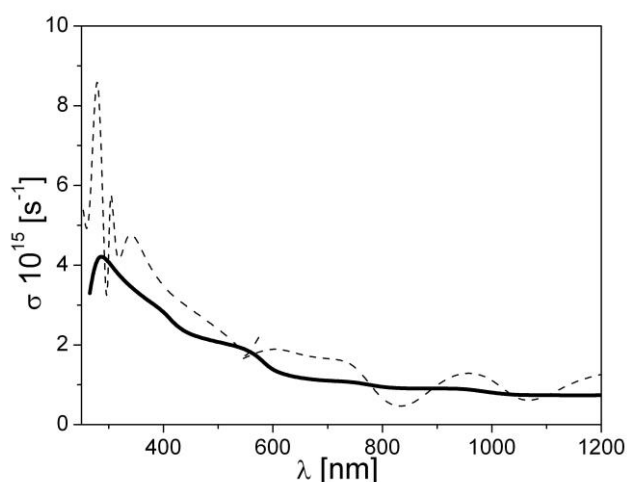


Рис. 1. Оптична провідність вуглецевих нанотрубок в полімерній матриці. Штрихова лінія- дисперсійна залежність взята з [4].

таких вимірів зі зразками вуглецевих нанотрубок після трьох років зберігання, які безпосередньо перед вимірами були внесені в поліхлорвінілову матрицю, представлені на рис.1. На рисунку для порівняння також представлена дисперсійна крива у вигляді штрихової лінії для еліпсометричних вимірів нанотрубок в поліхлорвінілі трирічної давності [5]. Видно, що типові для спектральних характеристик вуглецевих нанотрубок [5] смуги поглинання в спектральних інтервалах 1.2 eV та 4 eV вже не є так чітко вираженими. В області 4eV інтенсивність смуги зменшена, і сама смуга не є структурованою. Саме наявність широких смуг свідчить про неоднорідний характер нанотрубок зразка (різна хіральність, товщина стінок, довжина, тощо). В той же час згладжена в цілому

дисперсійна крива оптичної провідності вказує на суттєве зростання неоднорідності структури зразка, а саме, наведення дислокацій в кристалічній ґратці нанотрубок. Одним із механізмів наведення таких дислокацій може бути поступове поатомне окислення вуглецю і, як результат, утворення вакансій в кристалічній ґратці нанотрубки.

Експериментально просторова структура вуглецевих нанотрубок вивчалась за допомогою методики скануючої тунельної мікроскопії (СТМ). Методика реалізовувалася на атомно-силовому мікроскопі- зондовій нанолaboratorії ІНТЕГРА виробництва NT-MDT, що дозволяло реєструвати топологію поверхні з просторовою роздільною здатністю, що сягала 0,4 нм. Гостру голку для СТМ виготовлено з дроту діаметром

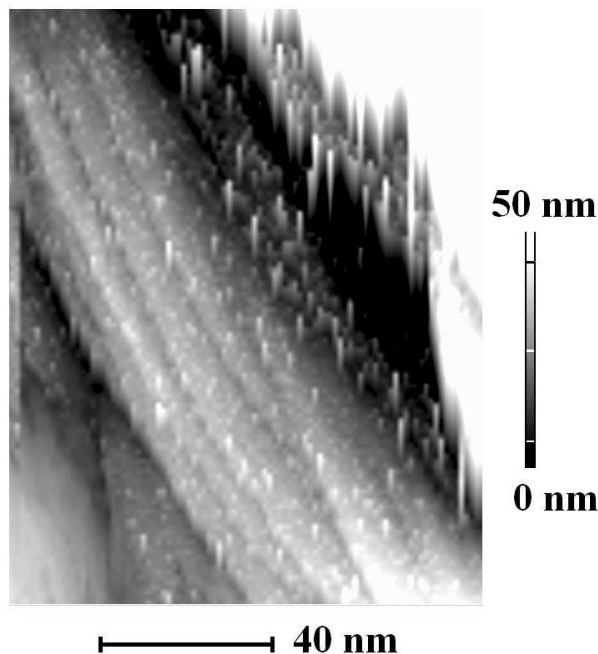


Рис. 2. Скануюча тунельна мікроскопія джгута вуглецевих нанотрубок з металевим типом провідності на мідній підкладці. Роздільна просторова здатність вимірів – 0.4нм.

0,5 мм, зі сплаву Pt_{0.8}Ir_{0.2}, шляхом механічного відрізання його кінця.

На рис.2 представлено результати скануючої тунельної мікроскопії вуглецевих нанотрубок, після року зберігання в повітряній атмосфері в умовах темряви, нанесених на поліровану мідь безпосередньо перед вимірами. Із рис. 2 видно, що джгут має діаметр 40 нанометрів і складається із приблизно 20 нанотрубок. Нанотрубки в джгуті мають діаметр до 10 нанометрів. Помітною є ненульова хіральність упаковки нанотрубок у джгуті внаслідок їх взаємної скрученості. Незважаючи на досить високу просторову

роздільну здатність вимірів (рис.2), кристалічна ґратка нанотрубок на їх поверхні не розрізняється. Як зазначено в роботі [6] джгут має металеву провідність.

На рис.3 представлені результати скануючої

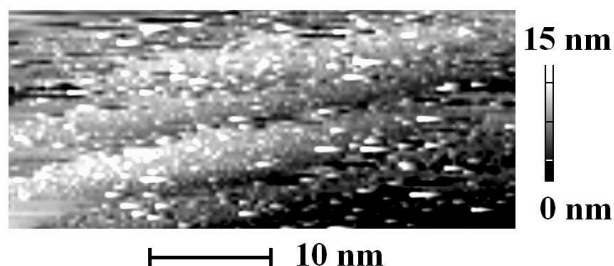


Рис. 3. Скануюча тунельна мікроскопія джгута вуглецевих нанотрубок з металевим типом провідності на мідній підкладці. Роздільна просторова здатність вимірів – 0.4нм.

тунельної мікроскопії вуглецевих нанотрубок після трьох років зберігання в повітряній атмосфері в умовах темряви, нанесених на поліровану мідь, безпосередньо перед вимірами. Із рис. 3 видно, що структура нанотрубок нагадує джгут із декількох нанотрубок з розмитими краями. Результати рис.2,3 можна пояснити тим, що в кристалічній ґратці вуглецевих нанотрубок з часом під впливом кисню повітря утворюються дефекти. Інший безперечний факт, що впливає з отриманих результатів – це пряме спостереження формування джгутів вуглецевих нанотрубок.

Нами були також проведені квантово-механічні чисельні розрахунки (5,3) вуглецевої нанотрубки з 64-ма атомами та нанотрубки з вакансіями в кристалічній ґратці (61 атом), аналогічно до проведених розрахунків в роботі [5]. На рис.4 зображені просторові розподіли густин електронних станів верхніх заселених молекулярних рівнів для відповідних нанотрубок. Як видно з рис. 4, форма просторового розподілу густин електронних станів бездефектної нанотрубки є близькою до тієї, що притаманна класичному диполу. В той же час максимум густини електронних станів нанотрубки з дефектами кристалічної ґратки є локалізованим біля вакансій в її структурі і більше не відображає симетрію бездефектної нанотрубки. Це може пояснювати особливості вимірів (рис.2, 3), а саме відсутність періодичної структури на поверхнях нанотрубок. Якщо мати вуглецеву нанотрубку з великою кількістю точкових дефектів, то експериментально вже не можна розрізнити її кристалічну структуру, оскільки молекулярні

хвильові функції, які реєструються при скануючій тунельній мікроскопії високої роздільної здатності, є локалізованими біля дефектів кристалічної ґратки нанотрубки. і вже не відображають симетрію її будови.

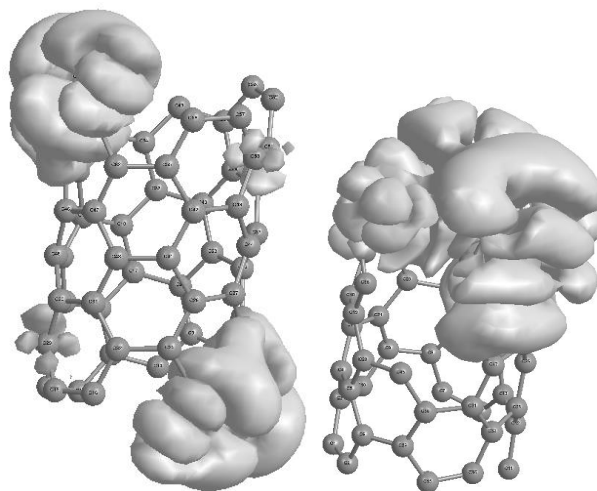


Рис. 4. Квантовомеханічні розрахунки електронної густини верхнього заселеного (зліва) та нижнього незаселеного молекулярних рівнів (5,3) вуглецевої нанотрубки з 64 атомів (зліва) та з 61 атома (справа). Значення модуля густини на побудованих ізоповерхнях- 0.01.

Розраховані енергетичні щілини між самим верхнім заселеним і нижнім незаселеними рівнями для нанотрубок з 64 та 61 атомами складають 2.6 eV та 0.8 eV відповідно. Це корелює з формалізмом теорії твердого тіла, де дефекти кристалічної ґратки зумовлюють утворення додаткових рівнів в забороненій зоні, зменшуючи тим самим енергетичний проміжок між верхніми заселеними і нижніми незаселеними енергетичними рівнями. З цієї точки зору частка нанотрубок з напівпровідниковим типом провідності має зменшуватись з часом: наведені за рахунок дефектів кристалічної ґратки рівні збільшують електричну провідність такої нанотрубки. Певна річ, в наших експериментах зразок був сумішшю нанотрубок різної довжини, діаметру та хіральності, що призводило до неоднорідного уширення дисперсійних кривих на (рис.1). Зазначена дисперсійна залежність оптичної провідності є більш гладкою в порівнянні з кривою трирічної давності, оскільки в зразку додається додаткове недорідне уширення по різним типам дефектів кристалічної ґратки.

Висновки

Скануюча тунельна мікроскопія напівпровідникових вуглецевих нанотрубок на

протязі довгих проміжків часу виявила прогресуючу кількість дефектів їх кристалічної ґратки, в тому числі джгути нанотрубок. Упаковка нанотрубок в джгуті має ненульову хіральність. Прогресуючі з часом дефекти кристалічної структури можуть бути пояснені властивістю вуглецю легко утворювати гібридизовані орбіталі різної конфігурації, змінювати тип гібридизації з часом, що потенційно призводить до утворення точкового дефекту ґратки. Одним із наслідків великої кількості дислокацій може бути збільшення в зразку з часом питомої концентрації вуглецевих

нанотрубок з металевою провідністю на противагу нанотрубкам з напівпровідниковою провідністю. Дані спектральної еліпсометрії, які вказують на згладжений характер залежностей оптичної провідності нанотрубок після довготривалого зберігання добре узгоджуються з результатами СТМ. З часом додатково до неоднорідного уширення по довжині, діаметру та хіральності нанотрубок додається уширення по типу наведених дефектів їх кристалічної ґратки. Це приводить до згладженої дисперсійної кривої оптичної провідності.

Список використаних джерел

1. Collins P. G. Defects and disorder in carbon nanotubes in Oxford Handbook of Nanoscience and Technology, v. 2 / -Oxford. University Press, 2010. - 582 p.
2. Nakanishi T. Conductance quantization in the presence of huge and short-range potential in carbon nanotubes / T. Nakanishi, M. Igami, T. Ando // Physica E. -2000. -v.6, -P. 872-875.
3. Colomer J.-F. Electron diffraction and microscopy of single-wall carbon nanotube bundles produced by different methods / J.-F. Colomer, L. Henrard, Ph. Lambin, and G. Van Tendeloo // Eur. Phys. J. B - 2002. -27. -P.111-118.
4. Dumlich H. Bundle and chirality influences on properties of carbon nanotubes studied with van der Waals density functional theory/ H. Dumlich, Michael Gegg, F. H. Reich // Phys. Status Solidi B. - 2011. -248. -No. 11. P. 2589–2592.
5. Розуван К.П. Скануюча тунельна мікроскопія вуглецевих нанотрубок. / К.П. Розуван, С.Г. Розуван, І.А. Шайкевич // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. -2014. - №1. -С.293-296.
6. Rozouvan T. Spatial resolution of scanning tunneling microscopy/ T.Rozouvan, L.Poperenko, I.Shaykevich, S.Rozouvan // Functional Materials. - 2015. -22. - №3. -P. 365-369.

References

1. COLLINS, P. G. (2010). *Defects and disorder in carbon nanotubes in Oxford Handbook of Nanoscience and Technology*, v. 2. Oxford: University Press.
2. T. NAKANISHI, M. IGAMI, T. ANDO (2000) Conductance quantization in the presence of huge and short-range potential in carbon nanotubes *Physica E*. 6. p. 872-875.
3. J.-F. COLOMER, L. HENRAD, Ph. LAMBIN, and G. VAN TENDELOO (2002) Electron diffraction and microscopy of single-wall carbon nanotube bundles produced by different methods *Eur. Phys. J. B*. 27. p.111-118.
4. DUMLICH H., GEGG M., REICH F. H. (2011) Bundle and chirality influences on properties of carbon nanotubes studied with van der Waals density functional theory *Phys. Status Solidi*. B 248. No. 11. p. 2589–2592.
5. ROZOUVAN, K.P., ROZOUVAN, S.G. & SHAIKEVICH, I.A. (2014) Scanning tunneling microscopy of carbon nanotubes. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics*. 1. p.293-296.
6. ROZOUVAN, T. POPERENKO, L., SHAIKEVICH, I., ROZOUVAN, S. (2015) Spatial resolution of scanning tunneling microscopy *Functional Materials*. 22. No.3. p.365-369.

Надійшла до редколегії 19.12.2017

УДК 628.98

Роговець А.В.¹, студ.,
Карленко Б.В.¹, асп.
Макаренко О.В.¹, к.ф.-м.н., доц.,
Ямпольський А.Л.¹, асп.

Автоматизація вимірювань: алгоритм візуального розпізнавання шкали приладу, реалізований у LabView

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, фізичний факультет 03127, м. Київ, пр. акад. Глушкова 4, e-mail: almakar@univ.kiev.ua

A. V. Rogovets¹, stud.,
B.V. Karlenko¹, PhD stud.,
O.V. Makarenko¹, PhD.,
A.L. Yampolskiy¹, PhD stud.

Measurements automation: the algorithm for visual scale recognition realized in LabView

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, Faculty of Physics, 03127, Kyiv, Glushkova prosp., 4, e-mail: almakar@univ.kiev.ua

У статті розглядається автоматизація процесу визначення кута зі шкали гоніометра Г-5. Особливістю при цьому є збереження візуальної системи реєстрації у незмінному вигляді. Поставлена задача вирішувалася в два етапи: заміна людського ока як приймача зображення веб-камерою; обробка отриманих фотографій у програмному середовищі LabView з використанням методів розпізнавання образів. Досягнуто похибки алгоритму у визначенні показів шкали 2,5" (за паспортом приладу, точність вимірювання кутів складає 5"), при цьому середній час визначення показів шкали становить 1 с.

In this paper, the automation of the process of determining the angle of the goniometer G-5 is considered. A feature of this is the preservation of the visual registration system in the unaltered form, which is necessary to maintain the accuracy of the device and simplifies the technical implementation of the task. The task was solved in two stages: firstly, the replacement of the human eye as a receiver with a webcam, and second, the processing of received photos in the LabView software environment using image recognition methods. The authors consider the method of rake with different methods of selection of boundary points and the method of Hough transform. The error in the recognition of the angle of 2.5" has been achieved (5" is stated in the instrument's passport), while the average time for determining the scale displays is 1 s. The described approach can be applied to a number of other devices with visual angle detection systems.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Макарець М. В.

Вступ

Існує багато пристроїв, у процесі роботи яких однією з основних величин, що реєструються, є кут. До них можна віднести еліпсометри, рефлектометри, поляриметри, гоніометри та багато інших. На сьогодні для контролю кута повороту доступні різні компоненти, датчики та енкодери, що дозволяють надавати оператору установки дані у цифровому вигляді. Однак, деякі прилади, що розроблені в минулому, добре себе зарекомендували, мають високу точність, але обладнані лише візуальними системами визначення кутів. Зазвичай, перевагами цих пристроїв є доступність та простота обслуговування.

Такі прилади, безумовно, можуть бути модернізовані шляхом встановлення енкодерів, однак, часто це виявляється технічно складним завданням, що може мати наслідком значне зниження точності роботи приладу.

Усе це робить актуальною задачу модернізації застарілих систем реєстрації кута повороту, як для спрощення експлуатації приладу, так і з метою автоматизації процесів вимірювання. Важливою умовою при цьому є збереження візуальної системи реєстрації у незмінному вигляді.

Питанням зчитування показань графічних шкал присвячена велика кількість літератури [1]. Створено безліч алгоритмів і програмного забезпечення, яке успішно використовується при удосконаленні обладнання, для контролю якості

роботи і вирішення ряду практичних завдань в науці та на виробництві.

Однак, на даний момент цей набір алгоритмів і програмних продуктів не охоплює усього різноманіття існуючих шкал.

Постановка задачі

Система визначення кута повороту в гоніометрі Г-5 складається з шкали, представленої на рис.1, яку візуально спостерігають через зорову трубу. Шкала приладу є унікальною і цей факт не дає можливості застосувати вже створені алгоритми розпізнавання. Важливим фактором є й те, що процедура вимірювання кута передбачає обертання маховика, розташованого на алідаді гоніометра.

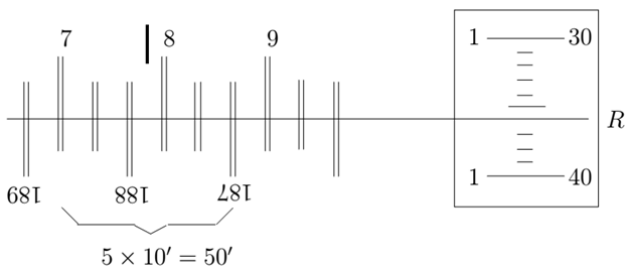


Рис.1. Зображення поля зору відлікового мікроскопа гоніометра Г-5.

Для визначення кута повороту спостерігач, дивлячись на шкалу і обертаючи маховик оптичного мікрометра, має поєднати верхні та нижні подвійні штрихи. При обертанні маховика відбувається зміщення зображень на обох шкалах. Число градусів кута повороту дорівнюватиме найближчому зліва від репера числу верхньої шкали (7° на Рис.1). Число десятків кутових хвилин буде дорівнювати кількості інтервалів між подвійним штрихом, який відповідає числу градусів, і оцифрованим штрихом нижньої шкали, що відрізняється від показань верхнього штриха на 180° ($50'$ на Рис.1). Числа одиниць хвилин і секунд зчитуються з правої малої шкали ($1'36''$ на рис.1).

При автоматизації визначення кута виділялося два етапи: перший - створення оптичної системи, спроможної дати якісне зображення шкали і збереження цього зображення в одному з поширених графічних форматів; другий - створення програми розпізнавання, яка за отриманим зображенням визначає кут з точністю, не нижчою, аніж заявлена в паспорті приладу.

Найпростішою та найдешевшою реалізацією системи захоплення зображень є використання веб-камери. Основна складність при цьому - поєднання вхідної зіниці веб-камери та вихідної зіниці оптичної системи. Отримані зображення мають задовільну якість для подальшого розпізнавання, незважаючи на відчутну дисторсію і обмежене поле.

При розробці алгоритму визначення кута автори вирішили відмовитися від використання меншої шкали (визначення одиниць хвилин і секунд), оскільки її використання передбачає механічне обертання маховика. Критерієм справедливості цього підходу є результуюча точність, з якою визначається кут.

Для спрощення процесу реалізації і полегшення сприйняття алгоритм розділений на наступні етапи.

- Отримання зображення і проведення його первинної обробки - перехід до чорно-білої колірної схеми і виділення інформативної області отриманого зображення. Фотографія, отримана безпосередньо з камери наведена на рис.2.

- Визначення характерних елементів зображення. На цьому етапі програма визначає лінійні розміри зображення, положення центральної лінії і верхньої межі робочої області (1 і 2 на рис.3).

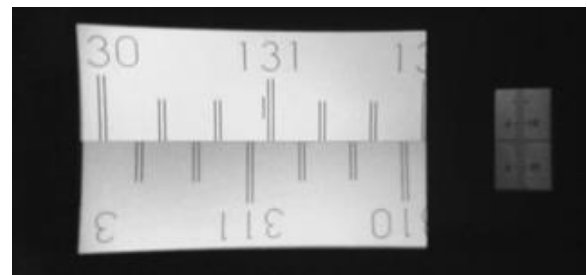


Рис.2. Зображення, отримане з веб-камери.

Визначення краю робочої області, а також меж розділу двох шкал (центральна лінія) було виконано методом rake (граблі) виявлення прямої на зображенні [2].

- Визначення положення центрів подвійних штрихів. У позиціях, заданих відносно отриманих раніше центральної і граничної ліній, виділяється 4 відрізка для одержання розподілу яскравості. Перші два - для пошуку положення подвійних штрихів, два останні - для пошуку положення лише довгих подвійних штрихів. Зображення зазначених елементів наведено на рис.3.

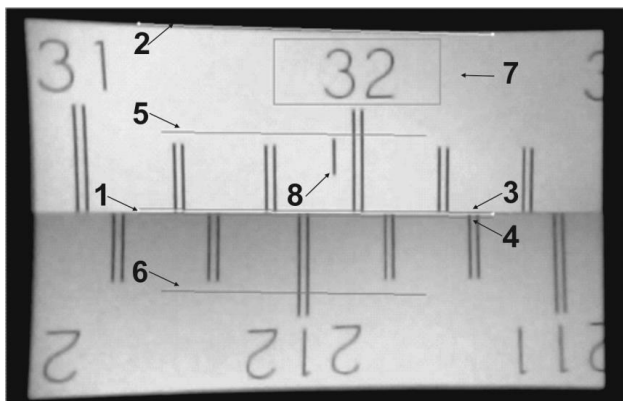


Рис.3. Характерні графічні елементи алгоритму розпізнавання.

1 – центральна лінія, 2 – верхня межа робочої області, 3 і 4 – відрізки для пошуку положення всіх подвійних штрихів, 5 і 6 – лише довгих подвійних штрихів, 7 – область розпізнавання числа, 8 – репер.

Для зменшення впливу дисторсії зображення положення елементів 3 і 4 вибираються максимально близькими до межі розділу 1 (зміщення становить 3 пікселя). Характерні розподіли яскравості вздовж відрізка 3 показані на рис.4.

За характерними перепадами яскравості, що відповідає подвійним штрихам, визначається положення їх центра. Використовуючи перші і другі похідні, визначається положення екстремуму в заданій області, а також його тип (мінімум чи максимум). Шляхом підбору параметрів, що відповідають за шукану ширину піку і поріг пошуку, можна домогтися необхідної точності визначення центрів подвійних штрихів.

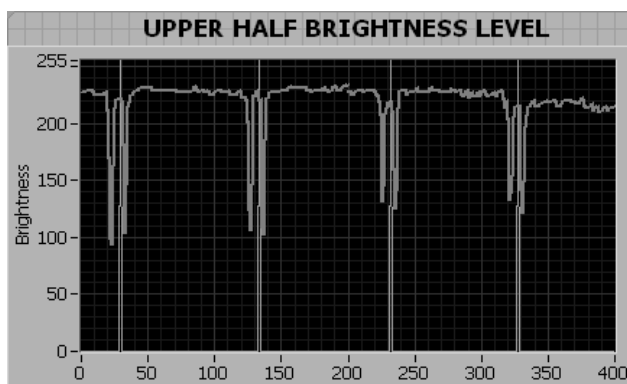


Рис.4. Залежність яскравості пікселя від координати вздовж відрізка 3. Гострі вертикальні піки – визначені програмою положення центрів подвійних штрихів.

• Перевірка наявності зайвих або пропущених подвійних штрихів, центри яких визначені програмно.

• Апроксимація положень центрів подвійних штрихів лінійною залежністю для компенсації впливу дисторсії.

• Визначення дробової частини кута шляхом використання зсувів центрів подвійних штрихів на відрізках 5 і 6 відносно репера 8.

• Розпізнавання цілої частини кута:

а. визначення області пошуку числа на шкалі за положенням довгого подвійного штриха на відрізка 5 і репера 8.

б. виділення фрагмента зображення 7, що містить символну інформацію, на шкалі у вигляді прямокутної області. (див. Рис.5).

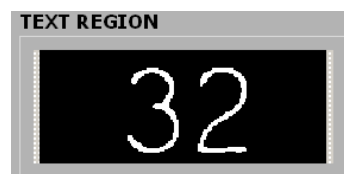


Рис.5. Виділений фрагмент зображення з числовою інформацією про цілу частину кута.

с. Розпізнавання отриманого фрагмента з використанням створеної заздалегідь бази зображень цифр. Використаний стандартний алгоритм оптичного розпізнавання символів (OCR) [5] з накопиченням зображень для порівняння (т.зв. навчанням).

Результати

Описаний вище алгоритм був реалізований в середовищі візуального програмування LabView 2010 року видання, з додатковим програмним пакетом Vision & Motion. З метою отримання точних результатів було вирішено проводити не поодинокі вимірювання, а серії вимірювань, результати яких усереднюються.

Довжина серії визначається алгоритмом досягнення заздалегідь заданої точності. Лицьова панель програми показана на рис.6.

Для тестування алгоритму алідада гоніометра оберталась за допомогою крокового двигуна. У правій частині Рис.6 показаний графік залежності кута повороту від кількості кроків двигуна. Можемо бачити, що отримана залежність (III) не є лінійною, що свідчить про нерівномірність обертання. Останнє можна пояснити пружністю пасової передачі та іншими особливостями механічної частини установки.

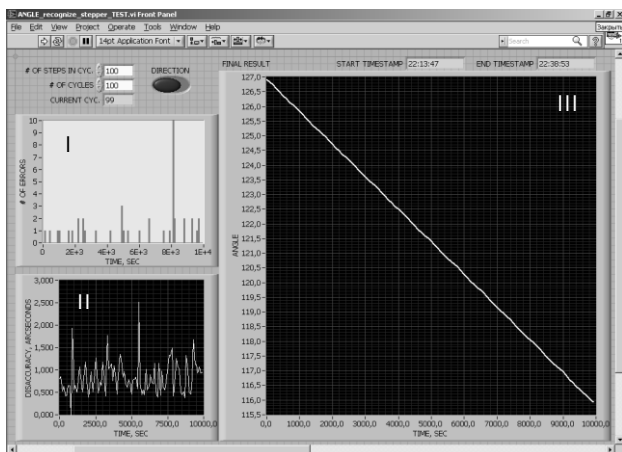


Рис.6. Ілюстрація лицьової панелі програми розпізнавання кута.

Гістограма I показує кількість «невдалих» сесій при розпізнаванні відповідного кута. Із наведеної гістограми можна судити про стійкість алгоритму до збоїв. На графіку II представлена абсолютна похибка у вимірі кута при довірчій ймовірності 0,95. Значення по осі ординат наведені в кутових секундах. Легко бачити, що максимальне значення похибки становить 2,5", що явно менше заявлених в паспорті приладу 5".

Часовий аналіз показує, що всього було проведено визначення 100 положень аліади. Для

кожного положення було отримано і проаналізовано про 10 зображень з веб-камери. Також, через недоліки розпізнавання були проведені 43 додаткових сесії по 10 зображень в кожній. В сумі це становить 1430 розпізнавань за 25 хв. На аналіз одного зображення, в середньому, пішла 1 секунда, що є хорошим показником швидкодії.

Висновки

Виконано узгодження оптичних систем зорової труби гоніометра Г-5 для спостереження шкали з веб-камерою.

Запропоновано алгоритм розпізнавання основної шкали, який визначає кут повороту аліади. На основі запропонованого алгоритму була створена програма в пакеті графічного програмування LabView з додатковим пакетом Vision & Motion, яка дозволяє визначити кут повороту із заданою точністю.

Досягнута похибка у визначенні орієнтації аліади не перевищує заявлених в паспорті приладу 5". Середній час визначення показань шкали з похибкою ністю 2,5" становить 1 с.

Запропонований алгоритм зі змінами в розрахунку дробової частини значення кута і вибором області розпізнавання може бути застосований до інших візуальних приладів.

References

1. Andersen, M. (2005) *Matrix-based analysis of digital images: application to goniophotometric measurements with variable referential* // Optics and Lasers in Engineering, 2005 43(3-5), 419–435.
2. Burns, J. B., Hanson, A. R., Riseman, E. M. Extracting Straight Lines // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, PAMI-8(4), 1986. 425–455.
3. Sutthiwan, P., Shi, Y. Q., Su, W., & Ng, T.-T. Rake transform and edge statistics for image forgery detection // 2010 IEEE International Conference on Multimedia and Expo, 2010. IEEE.
4. Mithe, R., Indalkar, S., Divekar, N. Optical Character Recognition // International Journal of Recent Technology and Engineering (IJRTE), 2013, 72–75.
1. ANDERSEN, M. (2005) *Matrix-based analysis of digital images: application to goniophotometric measurements with variable referential*. // Optics and Lasers in Engineering.- 43(3-5), P.419–435.
2. BURNS, J. B., HANSON, A. R., RISEMAN, E. M. (1986) *Extracting Straight Lines* // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, PAMI-8(4), P.425–455.
3. SUTTHIWAN, P., SHI, Y. Q., SU, W., & NG, T.-T. (2010) *Rake transform and edge statistics for image forgery detection* // 2010 IEEE International Conference on Multimedia and Expo. IEEE.
4. MITHE, R., INDALKAR, S., DIVEKAR, N. (2013) *Optical Character Recognition* // International Journal of Recent Technology and Engineering (IJRTE), P. 72–75.

Надійшла до редколегії 14.12.17

УДК 541.64:536.7

О.В. Хорольський¹, ст. викл.,
О.С. Свечнікова², к.ф.-м.н., с.н.с.,
О.П. Руденко¹, д.ф.-м.н., проф.

O.V. Khorolskyi¹, Sen. Lecturer,
O.S. Svechnikova², PhD, Sen. Sci. Res.,
O.P. Rudenko¹, Dr. Sci., Prof.

Еволюція властивостей розчинів полівінілового спирту в диметилсульфоксиді

Evolution of properties of polyvinyl alcohol in dimethyl sulfoxide solutions

¹Полтавський національний педагогічний
університет імені В.Г. Короленка, 36000,
Полтава, вул. Остроградського, 2, e-mail:
khorolskiy.alexey@gmail.com

¹Poltava V.G. Korolenko National Pedagogical
University, 36000, Poltava, Ostrogradskogo St., 2,
e-mail: khorolskiy.alexey@gmail.com

^{2,3}Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13

²Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,

Робота присвячена обґрунтуванню припущення, що часова еволюція діелектричної проникності у розчинах низькомолекулярного полівінілового спирту в диметилсульфоксиді відповідає процесам встановлення в них рівноважного стану. Останні належать до фази гомогенного розчину ПВС у ДМСО. Досліджена діелектрична проникність розчинів ПВС у ДМСО з концентраціями 5, 10 і 15 мас.%. в частотному інтервалі (0,5 ÷ 200) кГц при температурі (290±1) К

Ключові слова: розчини полівінілового спирту, диметилсульфоксид, фазова діаграма, термодинамічна рівновага.

The paper is devoted to the substantiation of the assumption that the time evolution of dielectric permittivity of polyvinyl alcohol (PVA) in dimethyl sulfoxide (DMSO) solutions corresponds to the process of equilibrium establishing in the polymer solution. PVA in DMSO solutions are in the phase of a homogeneous solution. Dielectric permittivity of PVA in DMSO solutions with concentrations of 5, 10 and 15 wt.% in the frequency range (0,5 ÷ 200) kHz at a temperature of (290 ± 1) K were investigated.

Key words: polyvinyl alcohol solutions, dimethyl sulfoxide, phase diagram, thermodynamic equilibrium.

Статтю представив академік НАНУ, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

Вступ

Дослідження динаміки розчинів полівінілового спирту (ПВС) у залежності від концентрації, температури та природи розчинника покликане з'ясувати молекулярні механізми контрольованої доставки лікарських форм у тканини людини. Фізичні властивості розчинів ПВС не є стаціонарними, а зазнають змін у часі, що може бути обумовленим як процесами гелеутворення та/або спінодального розпаду, так і процесом встановлення рівноваги у розчині. Тому метою роботи було дослідження

особливостей зміни у часі фізичних властивостей розчинів ПВС.

Результати та обговорення

Раніше у концентрованих розчинах полівінілового спирту (Mowiol 4-98 (Kuraray), ступінь полімеризації $\bar{P} = 600$, ступінь гідролізу 98,4±0,4 мол.%) в диметилсульфоксиді ((CH₃)₂SO, ДМСО) з концентраціями 5, 10 і 15 мас.% нами експериментально виявлено довготривалі коливання діелектричної проникності на частотах (0,5-200) кГц при

сталій температурі (290 ± 1) К, що свідчать про періодичні зміни структури полімерного розчину.

Було висунуто припущення, що осциляції діелектричної проникності концентрованих розчинів полівінілового спирту у диметилсульфоксиді мають флуктуаційну природу та пов'язані з процесами формування та зникнення у розчинах мікронеоднорідної структури [1]. Обґрунтуємо це припущення.

Для цього розглянемо фазову діаграму водних розчинів ПВС. Згідно робіт [2, 3], крива золь-гель переходу та спінодаль поділяють фазову діаграму водних розчинів ПВС на чотири області (рис. 1). Область I відповідає гомогенному розчину. В області II відбувається розділення фаз шляхом спінодального розпаду (spinodal decomposition), але розчин не зазнає гелеутворення. В області III гелеутворення супроводжується фазовим переходом рідина-рідина (liquid-liquid phase separation) за механізмом спінодального розпаду. Область IV притаманне гелеутворення без фазового переходу рідина-рідина.

Під спінодальним розпадом розуміють механізм фазового переходу від гомогенної фази до фаз із розділенням компонентів, який відбувається в усьому об'ємі рідинної системи. Спінодальний розпад визначається дифузійними процесами і відбувається в області фазової діаграми за спінодаллю, де флуктуація системи призводить до фазового переходу.

Як правило, на початкових етапах спінодального розпаду виникають дрібнодисперсні структури, які з часом еволюціонують до масштабніших неоднорідностей – зародків нової фази. Важливою особливістю спінодального розпаду є виникнення складних дисипативних утворень, у тому числі – періодичних, які не притаманні стану термодинамічної рівноваги [4].

Наявність області II на рис. 1 передбачає, що фазовий перехід рідина-рідина за механізмом спінодального розпаду не завжди викликає гелеутворення. Існування області IV означає, що спінодальний розпад не є необхідною умовою для гелеутворення. Проте існує область, в якій гелеутворення супроводжує спінодальний розпад. Навіть у цьому випадку необхідно більше інформації, щоб стверджувати, що основою гелеутворення є

еволюція тримірної структури фази, багатої на полімер.

Як відомо, за нормальних умов ПВС виявляється малорозчинним у більшості розчинників, тому для розчинення потрібне нагрівання та постійне перемішування. Після охолодження до кімнатної температури розчини можуть опинитися у метастабільному стані – спостерігається тенденція до розпаду на фази. Розчин знаходиться на межі рівноваги, а внаслідок широкого молекулярно-масового розподілу ($\overline{M}_w/\overline{M}_n \approx 2$ [5]), якому завдячує метод виготовлення ПВС, відносно низькомолекулярні фракції можуть опинитися за межами термодинамічної сумісності.

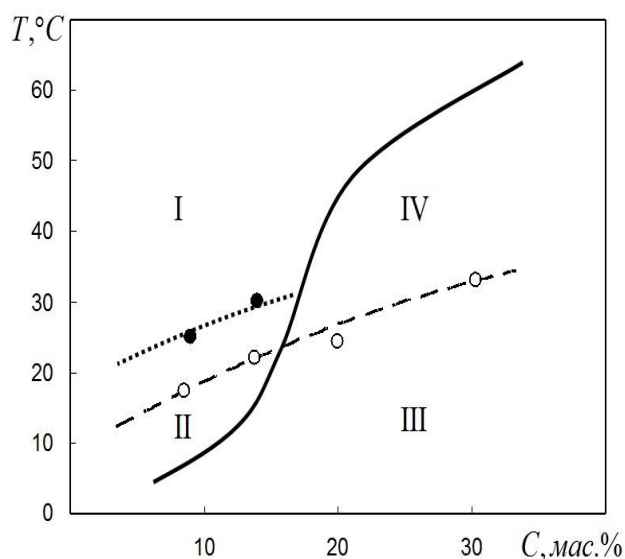


Рис. 1. Фазова діаграма водних розчинів полівінілового спирту (повністю омилений, середній ступінь полімеризації $\bar{p} = 500$).

Суцільна лінія – крива золь-гель переходу, пунктирна лінія – бінодаль, штрихована лінія – спінодаль [2].

У роботі [6] розглянутий вплив води на процес гелеутворення у водно-диметилсульфоксидних розчинах ПВС (ступінь полімеризації $\bar{p} = 2000 \pm 50$, ступінь гідролізу $\geq 99\%$). Зроблені висновки, що вода підсилює здатність розчинів ПВС до гелеутворення та робить рідинну систему полідисперсною під час гелеутворення.

За допомогою методу Вінтера показано [6], що додавання 20% води до розчину ПВС у ДМСО сприяє різкому зростанню температури гелеутворення (T_g) розчину ПВС: так, для системи ПВС-ДМСО отримано $T_g = 6,0^\circ\text{C}$ (279 K), а для системи ПВС-0,8 ДМСО-0,2 вода – $T_g = 17,1^\circ\text{C}$ (290,1 K).

Отримані у цій роботі значення температур гелеутворення добре узгоджуються з фазовою діаграмою для водних розчинів ПВС з роботи [2]. Ми вважаємо, що фазова діаграма для розчинів ПВС у ДМСО є подібною до фазової діаграми водних розчинів ПВС. Більш низька температура гелеутворення для системи ПВС-ДМСО може свідчити, що спінодаль на фазовій діаграмі розчинів ПВС у ДМСО має розміщуватися нижче спінодалі на рис. 1, і при температурі довготривалого діелектричного експерименту $T = (290 \pm 1)$ K розчин ПВС у ДМСО знаходився в області гомогенного розчину.

На користь міркувань про гомогенність розчину ПВС у ДМСО (у сенсі області I на фазовій діаграмі) також свідчать і відсутність помутніння розчинів за час дослідження (близько 3 років), і відсутність візуально помітної зміни їх в'язкості. Очікуваними були однонаправлені процеси зміни з часом діелектричної проникності концентрованих розчинів ПВС у ДМСО.

Зростання діелектричної проникності концентрованого розчину полімеру з часом відповідало б диспергуванню макромолекул у розчиннику, коли макромолекули оточені зв'язаними молекулами ДМСО. Зменшення діелектричної проникності концентрованого розчину полімеру з часом свідчило б про зростання кількості міжмолекулярних зачеплень, що відповідало б процесові формування гелю або іншим часовим змінам полімерного розчину («старіння», фотохімічні процеси тощо).

Що ж є причиною коливань діелектричної проникності з часом, якщо розчини ПВС у ДМСО – гомогенні?

На нашу думку, причиною цього є процес встановлення рівноваги у локально-неоднорідному розчині, який є візуально прозорим. Часи релаксації можуть сягати $(10^{-5} \div 10^{-2})$ с [7]. Під час розчинення макромолекули ПВС повільно дифундують в розчинник –

спостерігається тенденція до переходу до гомогенного однофазного розчину. Але ентропія такої однофазної системи є відносно низькою, тому система буде намагатися перейти до шаруватої структури з різною концентрацією розчиненого компонента.

Із подібною ситуацією ми стикаємось у водних розчинах низькомолекулярних спиртів, зокрема метанолового ряду [7], проте для них є характерним формування сферичних зародків. За рахунок флуктуацій відбувається постійний перехід до гомогенного розчину та його подальше розшарування.

Згідно уявлень, сформульованих у роботах [1, 7], встановлення рівноваги у розчині супроводжується виникненням в ньому мікронеоднорідної структури, яка реалізується у вигляді компактних областей (шарів або краплин) з різною концентрацією ПВС. Причому шарувата структура розчину відповідає максимуму ентропії рідинної системи. Внаслідок флуктуацій спостерігається постійний перехід одних шарів у другі і навпаки. Це означає, що характер релаксації не залежить від конкретної молекулярної структури розчинника і розчиненої речовини. У роботі [1] показано, що характер встановлення рівноваги у розчині ПВС-ДМСО багато у чому є подібним до того, що має місце у водних розчинах спиртів метанолового ряду і гліцерині.

Висновки

Таким чином, концентровані розчини ПВС у ДМСО знаходяться у фазі гомогенного розчину та схильні до утворення нерівноважних шаруватих систем. Ми вважаємо, що довготривалі осциляції діелектричної проникності розчинів полівінілового спирту у диметилсульфоксиді, скоріш за все, не пов'язані ні з гелеутворенням, ні зі спінодальним розпадом, а відбуваються внаслідок процесу встановлення рівноважного стану в розчині полівінілового спирту.

Список використаних джерел

1. Khorolskyi O.V. Peculiarities of Changes in Time of Electrical Properties of Polyvinyl Alcohol in Dimethyl Sulfoxide Solutions / O.V. Khorolskyi, O.P. Rudenko, O.M. Zaymack // *Ukrainian Journal of Physics*. – 2017. – Vol. 62, № 3. – P. 240-248.
2. Komatsu M. Light-Scattering Studies on the Sol-Gel Transition in Aqueous Solutions of Poly(vinyl alcohol) / Motoko Komatsu, Takashi Inoue, and Keizo Miyasaka // *Journal of Polymer Science: Polymer Physics Edition*. – 1986. – Vol. 24, Iss. 2. – P. 303-311.
3. Auriemma F. Time-Resolving Analysis of Cryotropic Gelation of Water/Poly(vinyl alcohol) Solutions via Small-Angle Neutron Scattering / Finizia Auriemma, Claudio De Rosa, Rosa Ricciardi, Fabrizio Lo Celso, Roberto Triolo, and Vitaly Pipich // *J. Phys. Chem. B*. – 2008. – Vol. 112. – P. 816-823.
4. Скрипов В.П. Спинодальный распад (фазовый переход с участием неустойчивых состояний) / В.П. Скрипов, А.В. Скрипов // *УФН* – 1979. – Т. 128. – С. 193-231.
5. Matsumoto M. Viscosity–Molecular Weight Relationship for Polyvinyl Acetate / M. Matsumoto and Y. Ōtanagi // *J. Polym. Sci. Part A*. – 1960. – Vol. 46, Iss. 148. – P. 441-454.
6. Jia E. Influence of Water on Polyvinyl Alcohol Sol-Gel Transition and Gel Spinning / E. Jia, C. Wang, L. Su, P. Liu, J. Xu // *J. Polym. Res.* – 2015. – Vol. 22. – P. 69 (7).
7. Булавин Л.А. Релаксационные и равновесные свойства разбавленных водных растворов спиртов / Л.А. Булавин, В.Я. Гоцульский, Н.П. Маломуж, В.Е. Чечко // *Известия Академии наук. Серия химическая*. – 2016. – Т. 4. – С. 851-876.

References

1. KHOROLSKYI, O.V., RUDENKO, O.P. & ZAYMACK, O.M. (2017). Peculiarities of Changes in Time of Electrical Properties of Polyvinyl Alcohol in Dimethyl Sulfoxide Solutions. *Ukrainian Journal of Physics*. 62, № 3. p. 240-248.
2. KOMATSU, M., INOUE, T. & MIYASAKA, K. (1986). Light-Scattering Studies on the Sol-Gel Transition in Aqueous Solutions of Poly(vinyl alcohol). *Journal of Polymer Science: Polymer Physics Edition*. 24, Iss. 2. p. 303-311.
3. AURIEMMA F., DE ROSA, C., RICCIARDI, R., LO CELSO, F., TRIOLO, R. & VITALY PIPICH (2008). Time-Resolving Analysis of Cryotropic Gelation of Water/Poly(vinyl alcohol) Solutions via Small-Angle Neutron Scattering. *J. Phys. Chem. B*. 112. p. 816-823.
4. SKRIPOV, V.P. & SKRIPOV, A.V. (1979). Spinodal decay (phase transition involving unstable states) *UFN*. 128. p. 193-231.
5. MATSUMOTO, M. & ŌTANAGI, Y. (1960) Viscosity–Molecular Weight Relationship for Polyvinyl Acetate *J. Polym. Sci. Part A*. 46, Iss. 148. p. 441-454.
6. JIA, E., WANG, C., SU, L., LIU, P. & XU, J. (2015). Influence of Water on Polyvinyl Alcohol Sol-Gel Transition and Gel Spinning. *J. Polym. Res.* 22. p 69 (7).
7. BULAVIN, L.A., GOTSULSKY, V.YA. MALOMUZH, N.P. & CHECHKO, V.E. (2016). Relaxation and equilibrium properties of dilute aqueous solutions of alcohols. *Proceedings of the Academy of Sciences. A series of chemical*. 4. p. 851-876.

Надійшла до редколегії 23.11.17

Підписано до друку _____. Формат _____. Друк. офс.
Папір офс. № _____. Друк. арк. _____. Тираж _____. Зам. _____.
Друкарня _____.