

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

ВИПУСК №3 2017

**Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
выпуск №3, 2017,**

Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Фізика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету комп'ютерних наук та кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1222 від 07.10.2016), та реферується в Реферативному журналі, Zentralblatt MATH та базах даних ВИНІТИ, Росія, Москва.

Редакційна колегія:

Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор**;
Хусаїнов Денис Яхєвич, д.ф.-м.н., проф., **заступник головного редактора, відповідальний за видання**;
Arturs Medvids, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;
Miklós Rontó, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;
Milada Bartlova, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;
Nickolai Kukhtarev, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;
Sergei Gorlatch, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;
Sergey Trofimchuk, Prof., Universidad de Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;
Stefan Hudak, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;
Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;
Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;
Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Буй Дмитро Борисович, д.ф.-м.н., проф.;
Булавін Леонід Анатолійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;
Гарашенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;
Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;
Жук Ярослав Олександрович, д.ф.-м.н., проф.;
Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., проф.;
Кириченко Володимир Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Козаченко Юрій Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;
Львов Віктор Анатолійович, д.ф.-м.н., проф.;
Макара Володимир Арсенійович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;
Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Погорілий Сергій Дем'янович, д.т.н., проф.;
Савенков Сергій Миколайович, д.ф.-м.н., доц.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.

Редакційний відділ:

Анісімова Тетяна Харитонівна, **відповідальний секретар**;
Безущак Оксана Омелянівна, bezusch@univ.kiev.ua;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtnv@univ.kiev.ua;
П'ятецька Олена Василівна, visnyk_phys-math@ukr.net
Сільвейструк Людмила Миколаївна, **технічний редактор**, slm-klm@ukr.net.

Адреса редакційної колегії:

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49
ISBN 978-966-2142
ISSN 1812-5409

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Борисенко О.Д., Борисенко О.В. Дослідження неавтономної випадкової коливної системи четвертого порядку у випадку комплексних коренів характеристичного рівняння	9
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА	
Альфаїцька С.О., Николишин М.М., Опанасович В.К., Білаш О.В. Двовісний згин пластини з двома тріщинами за наявності лінійчастих пластичних зон з урахуванням контакту їх берегів та зміцнення матеріалу	15
Балабанов В.О., Кізілова Н.М. Математичне моделювання стаціонарної та хвильової провідності артеріальних систем як бінарних дерев	19
Богданова О.С. Про вплив двовісності навантаження на початкові етапи руйнування ортотропної в'язкопружної пластини з тріщиною	23
Борисейко О.В., Денисенко В.І., Діденко Ю.Ф. Коливання циліндричної п'єзооболонки, заповненої рідиною	27
Вайсфельд Н. Д., Мойсеєнок О. П., Фесенко Г. О. Хвильове поле пружного шару з абсолютно жорстким циліндричним включенням	31
Вайсфельд Н.Д., Плюснов Д.С. Новый подход к решению динамической задачи для упругого слоя	35
Годес А.Ю., Лобода В.В. Дугова тріщина в електрострикційному композиті	39
Горошко І.О. Підхід до розв'язання задачі параметричної ідентифікації моделі згинних коливань лопаті вітрової турбіни	43
Грінченко В.Т., Вовк І.В., Маципура В.Т. Про моделювання випромінювання звуку надзвуковим струменем	47
Дудик М.В., Решітник Ю.В., Феньків В.М. Модель пластичної зони в адгезійному шарі біля вершини міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки ламаної межі поділу	51
Жук О.П., Жук Я.О. Дія радіаційної сили в звуковому полі на тверду сферичну частинку в околі вільної поверхні рідини	55
Журавльова З.Ю., Нерух Д.О., Реут В.В., Козачков Д.Г., Вайсфельд Н.Д. Про напружений стан вірусу PCV2	59
Зражевський Г.М., Зражевська В.Ф. Оптимізаційний підхід до розрахунку гармонічних коливань круглої пластини	63
Калиняк Б.М. Нестационарне температурне поле у неоднорідному за товщиною довгому порожнистому циліндрі, яке забезпечує відсутність напружень	67
Кирилова О.І., Попов В.Г. Напружений стан у нескінченному циліндрі довільного перерізу з тунельною тріщиною при коливаннях в умовах плоскої деформації	71
Киричок І.Ф., Круць С.Ю., Жук Я.О. Постановка задачі про резонансні коливання і вібророзігрів гнучких непружних пластин з урахуванням деформацій зсуву	75
Кіт Г.С., Андрійчук Р.М. Термонапружений стан півпростору з вільною межею за теплоізоляції у паралельній до неї круговій області	79
Кіт Г.С., Івасько Н.М. Двовимірна задача термопружності для півпростору з вільною, жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею за тепловиділення у перпендикулярній до неї стрічковій області	83
Козачок О.П., Слободян Б.С. Вплив реального газу у міжконтактних просвітах на взаємодію пружного тіла і текстурованої квазіеліптичними виїмками жорсткої основи	87
Колодій Ю. О., Турчин І. М., Хома В. В. Змішана нестационарна задача теплопровідності для півбезмежного циліндра з покриттям	91
Кривий О. Ф., Архипенко К. М. Деякі крайові задачі для анізотропної чверть площини	95
Кундрат М. М., Заблотська Ю. В. Періодична система гнучких співдотичних підсилень для півбезмежної пластини	99
Курилко О.В. Перемішування в'язкої рідини всередині прямокутної порожнини уявними стержнями	103
Куценко О.Г., Харитонов О.М., Куценко А.Г., Дикий П.В. Осесиметричне кручення тонких кілець під дією різних силових факторів	107
Кушнір Р.М., Калиняк Б.М., Горошко В.О. Визначення термопружного стану тришарової термочутливої порожнистої кулі за складного теплообміну	111
Лебедева І.В., Борисейко О.В., Ящук В.М. Коливання металевих та напівпровідникових наночастинок	115
Лежоев Р.С. Вимірювальний перетворювач геометричних і механічних величин з багатоелектродним ємнісним давачем	119
Лежоев Р.С. Вимірювання та контроль енергії живлення електронних приладів з мікро- і нано-амперним струмом споживання	123
Лубков М.В. Застосування в'язкопружної моделі Кельвіна-Фойгта для моделювання геотектонічних процесів	127
Маковійчук М.В., Шацький І.П., Щербій А.Б. Оцінка міцності циліндричної оболонки з поперечними колінарними тріщинами, підсиленої гнучким покриттям	131
Маланчук Н.І., Чумак К.А. Вплив ідеального газу на часткове термічне проковзування тіл з регулярним рельєфом поверхонь	135
Мартиненко М.А., Лебедева І.В. Збурення осесиметричного гармонічного поля параболоїдним включенням	139
Мартиняк Р.М., Маланчук Н.І., Слободян Б.С. Часткове проковзування пружних тіл за наявності періодичної системи кругових підповерхневих включень	143
Мішарін А.С., Попов В.Г. Дослідження напруженого стану біля тріщини і включення, що виходять з однієї точки, при дії силою поздовжнього зсуву	147

Можаровский В.В., Кузьменков Д.С., Голубева О.А. Методика розрахунку напружено-деформованого стану шаруватих труб з урахуванням явищ повзучості і релаксації	151
Мусій Р.С., Мельник Н.Б., Андрусак І.В. Побудова розв'язків динамічних задач термомеханіки двошарових електропровідних циліндричних тіл за нестационарної електромагнітної дії	157
Николишин М.М., Опанасович В.К., Куротчин Л.Р., Слободян М.С. Двовісний розтяг кусково-однорідної пластини з прямолінійною межею поділу матеріалів та двома поверхневими тріщинами в ній з урахуванням пластичних зон біля їх вершин	161
Онишкевич В.М., Сулим Г.Т. Задача про термопружний контакт півплощини з прямокутним штампом за теплоутворення від тертя	165
Остос О.Х., Жук Я.О., П'ятецька О.В. Постановка задачі про коливання і дисипативний розігрів еластомерного в'язкопружного кільця при попередньому деформуванні	169
Павлюк Я.В., Фернаті П.В., Рагуліна В.С. Повзучість ізотропних однорідних і нестаріючих лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану	173
Перепічка В.В., Шацький І.П. Нестационарна взаємодія пружного стержня з недеформівною основою через жорсткопластичний прошарок із зміцненням	177
Попов С.А., Андрущенко Т.В., Краснікова О.О. Визначення пружних характеристик зразків гірських порід циліндричної форми методом резонансів	181
П'ятецька О.В. Вплив дисипативного розігріву на показники п'єзоелектричного сенсора	185
Рево С.Л., Мельниченко М.М., Силенко П.М., Іваненко К.О., Андрущенко В.О., Шевченко І.П. Визначення напруження початку пластичної течії нанокompозитних матеріалів методом мікроіндентування	189
Реут О.В., Реут А.В. Антиплоска задача для чверть площини, що послаблена довільно орієнтованою тріщиною	193
Савельєва К.В., Сінчило С.В., Симчук Я.В. Поперечні плоскі хвилі в нанокompозитних матеріалах	197
Самойленко В.Г., Вовк В.С. Двосолітонні розв'язки рівняння Кортевега-де Фріза та їх асимптотичні і чисельні наближення	201
Семенович К.О. Вплив рівномірного витікання на динаміку кутового руху резервуару з рідиною	205
Семенюк М.П., Трач В.М., Подворний А.В. Стійкість циліндричних анізотропних оболонок під дією зсувного навантаження в тривимірній постановці	209
Середницька Х.І., Мартиняк Р.М. Теплові потоки на берегах заповненої теплопровідним середовищем міжфазної тріщини	213
Слободян М.С., Матулка М.І., Білаш О.В. Двосторонній розтяг пластини з круговим отвором та радіальною тріщиною з урахуванням пластичних зон поблизу її вершин	217
Соловійова О.М., Кізілова Н.М. Дисперсія хвиль у заповнених рідиною в'язкопружних трубках із закріпленою стінкою	221
Тимоха О.М., Райновський І.А. Резонансні усталені хлюпання у вертикальних баках, що рухаються періодично в тривимірному просторі	225
Троценко Я.П. Автоколивальні процеси в циліндричному каналі зі стенозами	229
Федорченко Л.М. Вплив стороннього струму на напружено-деформівний стан ортотропної циліндричної оболонки	233
Хашемі М., Жук Я.О. Вплив об'ємного вмісту нановолокон на вібророзігрів і руйнування елемента конструкції при статичному і циклічному навантаженні	237
Хома І.Ю., Дашко О.Г., Проценко Т.М. Третя крайова задача деформування транстропної пластини з круговим отвором при чистому зсуві на нескінченності	241
Хотенко О.О., Хотенко І.М. Двовимірна динамічна задача теорії гіперпружності	245
Хурденко М.І., Жук Я.О. Постановка задачі про параметричні коливання непружних прямокутних пластин з п'єзоелектричними сенсорами і актуаторами з врахуванням деформації зсуву	249
Шакери Мобаракє П., Гринченко В.Т., Андрущенко В.О., Никитенко В.Н. Амплитудно-частотные характеристики пьезокерамических пластин в зависимости от формы границ	253
Ярема Є.Б., Опанасович В.К., Слободян М.С., Роцот В.В. Двовісний розтяг пластини з жорсткою криволінійною шайбою та прямолінійною наскрізною тріщиною	257
Яровой Л.К. Проблеми застосування трихвильового лазерного віброметра для підвищення чутливості до механічних коливань з надмалими амплітудами	261
Яцків О.І. Обернена задача термопружності з ідентифікації набору теплофізичних параметрів та визначення термонапруженого стану циліндра з тонким приповерхневим шаром	265
КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА	
Федорус О.М. Моделювання засобами ПАРКС операцій реляційної алгебри вибору	271
РАДІОФІЗИКА	
Находкін М.Г., Родіонова Т.В. Вплив відпалювання на зернограничну енергію кремнієвих плівок з дендритною структурою	277
Сачковський Б.В., Агафонов О.М., Грязнов Д.Б., Бойко Ю.В. Нова void модель побудована з використанням штучних нейромереж	281
СУЧАСНА ФІЗИКА	
Кравець В.Г., Кудрявцев Ю.В., Ляшенко І.О., Поперенко Л.В., Щербakov А.О. Оптичні властивості метало-діелектричних структур з поверхневим шаром графену	287

CONTENTS

ALGEBRA, GEOMETRY AND PROBABILITY THEORY

Borysenko O.D., Borysenko O.V. Investigation of non-autonomous fourth order random oscillating systems in the case of complex roots of characteristic equation	9
--	---

DIFFERENTIAL EQUATIONS, MATHEMATICAL PHYSICS AND MECHANICS

Alfavit'ska S.O., Nykolyshyn M.M., Opanasovich V.K., Bilash O.V. Biaxial bending the plate with two cracks in the presence of linear plastic zones with the width of the contact area their faces and strengthening of the material	15
Balabanov V.O., Kizilova N.M. Mathematical modeling of steady and wave conductivity of arterial systems as binary trees	19
Bogdanova O.S. On the influence of the biaxial loading on the initial stages of the fracture of an orthotropic viscoelastic plate with a crack	23
Boriseiko O.V., Denisenko V.I., Didenko Yu.F. Vibrations of cylindrical piezoceramic shells filled with liquid	27
Vaysfel'd N. D., Moysyeyenok A. P., Fesenko A. A. Wave field of a layer with an absolutely rigid cylindrical inclusion	31
Vaysfeld N.D., Pliusnov D.S. A new approach to the dynamic problem for the elastic layer	35
Hodes A.Yu., Loboda V.V. An arc crack in the electrostrictive composite	39
Goroshko I.O. An approach to solving the problem of parameter identification for the model of bending vibrations of the wind turbine blade	43
Grinchenko V.T., Vovk I.V., Matsypura V.T. On the modelling of sound radiation by a supersonic jet	47
Dudyk M.V., Reshitnyk Yu.V., Fen'kiv V.M. Model of the plastic zone in adhesive layer near the tip of the interfacial crack outcoming from angular point of the broken interface	51
Zhuk O.P., Zhuk Y.A. Acoustic radiation force effect on a rigid spherical particle placed in the vicinity of a liquid free surface	55
Zhuravlova Z.Yu., Nerukh D.A., Reut V.V., Kozachkov D.G., Vaysfel'd N.D. On stress state of the PCV2 virus	59
Zrazhevsky G.M., Zrazhev'ska V.F. Optimization approach to the calculation of harmonic vibrations of a circular plate	63
Kalynyak B.M. Non-steady temperature field in an inhomogeneous through thickness long hollow cylinder ensuring the absence of stresses	67
Kyrylova O.I., Popov V.G. State of stress in cylinder of arbitrary cross-section with a tunnel crack under oscillations of plane strain condition	71
Kirichok I.F., Kruts S.Y., Zhuk Y.A. Statement of the problem on resonant vibrations and dissipative heating of flexible inelastic plates accounting for shear strain	75
Kit H.S., Andriychuk R.M. Thermoelastic state of half-space with free boundary with heat-insulation in a parallel to it circular domain	79
Kit H.S., Ivas'ko N.M. Two-dimensional problem of thermoelasticity for a half-space with a free, rigidly, smoothly or flexibly clamped boundary with heat release on a perpendicular to it ribbon-like domain	83
Kozachok O.P., Slobodyan B.S. The effect of a real gas in intercontact gaps on interaction between an elastic body and a rigid base textured with quasielliptic grooves	87
Kolodij Yu.O., Turchyn I.M., Khoma V.V. The mixed unsteady heat conduction problem for a half-infinite cylinder with coatings	91
Kryvyyi O.F., Arkhynenko K.M. Some boundary value problems for anisotropic quarter-plane	95
Kundrat M.M., Zablotska Yu.V. Periodic system of the flexible contacting reinforcements for semi-infinite plate	99
Kurylko O.B. Stirring of viscous fluid inside a rectangular cavity with ghost rods	103
Kutsenko O.G., Kharytonov O.M., Kutsenko A.G., Dykyi P.V. Axisymmetric torsion of thin ring under different kind of loads	107
Kushnir R.M., Kalynyak B.M., Horoshko V.O. Determination of the thermo-elastic state of the three-layer hollow sphere at completed heat exchange	111
Lebedyeva I.V., Boriseiko O.V., Yashchuk V.M. Oscillations of metal and semiconductor nanoparticles	115
Lezhoyev R.S. Measuring transducer of geometrical and mechanical quantities with capacity sensors	119
Lezhoyev R.S. Measurement and control of power supply of electronic devices with micro and nano-ampere consumption current	123
Lubkov M.V. Using of the visco-elastic Kelvin-Voigt model for modeling of geotectonic processes	127
Makoviichuk M.V., Shatskyi I. P., Shcherbii A. B. Estimation of strength of cylindrical shell with a circumferential collinear cracks and reinforced by flexible coating	131
Malanchuk N.I., Chumak K.A. Influence of an ideal gas on partial thermal slip of bodies with regular surface relief	135
Martynenko M.A., Lebedyeva I.V. Effect of paraboloidal inclusion on the axisymmetric harmonic field	139
Martynyak R.M., Malanchuk N.I., Slobodyan B.S. Partial slip of solids with a periodic system of circular subsurface inclusions	143
Misharin A.S., Popov V.G. The research of the stress state near the crack and inclusion coming from one point, under the action of the longitudinal shear force	147
Mozharovsky V.V., Kuzmenkov D.S., Golubeva E.A. A technique for calculating the stress-strain state of a layered tube with allowance for creep and relaxation phenomena	151
Musij R.S., Melnyk N.B., Andrusyak I.V. Solutions building for dynamic problems of thermomechanic for dual-layer conductive cylindrical bodies under non-stationary electromagnetic action	157

Nykolysyn M.M., Opanasovych V.K., Kurotchyn L.R., Slobodyan M.S. Biaxial tension of piecewise-homogeneous isotropic plate with a straight boundary between material and two surface cracks in it, taking into account the plastic zone at its edges	161
Onyshkevych V.M., Sulym G.T. The problem about thermoelastic contact of half-plane and rectangular punch with heat generation account of friction	165
Ostos O.J., Zhuk Y.O., Pyatetska O.V. Statement of problem on vibration and dissipative heating of a prestrained elastomeric viscoelastic ring	169
Pavlyuk Y.V., Fernati P.V., Ragulina R.V. Creep of isotropic homogeneous and non-aging of linear-viscoelastic materials under the complex stress state	173
Perepichka V.V., Shatskyi I.P. Nonstationary interaction of an elastic rod with nondeformable foundation through a rigid-plastic layer with hardening	177
Popov S.A., Andrushchenko T.V., Krasnikova O.O. Determination of elastic characteristics of cylindrical rocks samples by the resonances method	181
Pyatetska O.V. Influence of dissipative heating on piezoelectric sensors work	185
Revo S.L., Melnichenko M.M., Sylenko P.M., Ivanenko K.O., Andruschenko V.O., Shevchenko I.P. Determination of the stress of the beginning of the plastic flow of nanocomposite materials by microindentation	189
Reut A.V., Reut O.V. The anti-plane problem for a quarter plane which is weakened by the arbitrary oriented crack	193
Savelieva E.V., Sinchilo S.V., Simchyk Y.V. Transverse plane waves in nano-composite materials	197
Samoilenko V.H., Vovk V.S. Two-soliton solutions of the Korteweg-de Vries equation and their asymptotical and numerical approximations	201
Semenovych K.O. Influence of uniform outflowing on dynamics of angular motion of reservoir with liquid	205
Semenuk M.P., Trach V.M., Podvornyi A.V. Stability of cylindrical anisotropic shells under the influence of the shear tension in three-dimensional statement	209
Serednytska Kh.I., Martynyak R.M. The heat flows on the faces of interfacial crack, which filled thermo-conducting medium	213
Slobodyan M.C., Matulka M.I., Bilash O.V. Biaxial tension of plate with circular hole and radial crack considering plastic zones near its tips	217
Solovjova H.N., Kizilova N.N. Wave dispersion in the fluid-filled viscoelastic tubes with fixed walls	221
Tymokha O.N., Raynovskyy I.A. Resonant steady-state sloshing in upright tanks performing a three-dimensional periodic motion	225
Trotsenko Y.P. Self-sustained oscillations in a cylindrical duct with stenoses	229
Fedorchenko L.N. Influence of extraneous current on the stress-strain state of orthotropic cylindrical shell	233
Hashemi M., Zhuk Y.A. The effects of volume fraction of nanofibers on self-heating and failure of composite structure elements under static and cyclic loading	237
Khoma I.Yu., Dashko O.G., Proshchenko T.M. The third boundary problem of deformation transtropic plate with a circular hole in pure shear at infinity	241
Khotenko O.O., Khotenko I.M. Two-dimensional dynamical problem of the theory of hyperelasticity	245
Khurdenko M.I., Zhuk Y.A. Problem statement on parametric oscillations of inelastic rectangular plates with piezoelectric sensors and actuators with account for shear strain	249
Pouyan Shakeri Mobarakeh, Grinchenko V.T., Andruschenko V.A., Nikitenko V.N. The amplitude-frequency characteristics of piezoceramic plates depending on the shape of the boundaries	253
Yarema Y.B., Opanasovich V.K., Slobodyan M.S., Roshchot V.V. Biaxial stretching of the plate with rigid curved washer and straight-through crack	257
Yarovoi L.K. Application of the laser Doppler vibrometer with three-wave interference for measurement of small amplitude mechanical vibrations: the problem of use	261
Yatskiv O.I. Inverse thermoelastic problem of thermophysical parameters identification and determination the thermoelastic state of the cylinder with undersurface thin layer	265
COMPUTER SCIENCES AND INFORMATICS	
Fedorus O. Modeling operations of relational algebra by PARCS	271
RADIOPHYSICS	
Nakhodkin N.G., Rodionova T.V. Effect of annealing on grain-boundary energy of silicon films with dendritic structure	277
Sachkovskiy B.V., Agafonov O.M., Gryaznov D.B. Boyko Y.V. New artificial life boid model based on neural networks	281
MODERN PHYSICS	
Kravets V.G., Kudriavtsev Yu.V., Liashenko I.O., Poperenko L.V., Shcherbakov A.O. Optical properties of metal-dielectric structures with surface graphene layer	287

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ ТА ТЕОРИЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 519.21

О.Д. Борисенко¹, к.ф.-м.н., доцент
О.В. Борисенко², к.ф.-м.н., доцент

**Дослідження неавтономної випадкової
коливної системи четвертого порядку у
випадку комплексних коренів
характеристичного рівняння**

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64.

² Національний технічний університет України "КПІ" 03056, г.Київ-56, проспект Перемоги, 37

e-mail: ¹odb@univ.kiev.ua

O.D. Borysenko¹, Ph.D.
O.V. Borysenko², Ph.D.

**Investigation of non-autonomous fourth
order random oscillating systems in the
case of complex roots of characteristic
equation**

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.,

²National Technical University of Ukraine "KPI", 37 Prospect Peremogy, Kyiv 03056

e-mail: ¹odb@univ.kiev.ua

У роботі вивчається асимптотична поведінка неавтономної коливної системи, яка описується диференціальним рівнянням четвертого порядку з малими нелінійними періодичними зовнішніми збуреннями типу "білого" та центрованого і нецентрованого Пуассонівських шумів. Розглядаються нерезонансний і резонансний випадки при умові, що характеристичне рівняння має два спряжені комплексні корені і пару спряжених чисто уявних коренів.

Ключові слова: асимптотична поведінка, неавтономна коливна система, стохастичне диференціальне рівняння, нерезонансний випадок, резонанс, періодичні збурення.

The asymptotic behavior of non-autonomous oscillating system describing by differential equation of fourth order with small non-linear periodical external perturbations of "white noise", non-centered and centered "Poisson noise" types is studied. Every term of external perturbations has own order of small parameter ε . If small parameter is equal to zero, then general solution of obtained non-stochastic fourth order differential equation has an oscillating part. We consider given differential equation with external stochastic perturbations as the system of stochastic differential equations and study the limit behavior of its solution at the time moment t/ε^k , as $\varepsilon \rightarrow 0$. The system of averaging stochastic differential equations is derived and its dependence on the order of small parameter in every term of external perturbations is studied. The non-resonance and resonance cases under the conditions that characteristic equation has two conjugate complex roots and two conjugate pure imaginary roots are considered.

Key Words: asymptotic behavior, non-autonomous oscillating system, stochastic differential equation, non-resonance case, resonance, periodical disturbances. under the conditions that characteristic equation has two non-equal real roots and two conjugate pure imaginary roots

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Козаченко Ю.В.

Introduction. The non-autonomous oscillating systems of fourth order under the action of "white noise", centered and non-centered Poisson type noises perturbations are studied in [1]. In this paper we will consider the behavior, as $\varepsilon \rightarrow 0$, of the oscillating system driven by stochastic differential equation

$$x^{IV}(t) + b_1 x'''(t) + b_2 x''(t) + b_3 x'(t) + b_4 x(t) = \varepsilon^{k_0} f_0(\mu_0 t, x(t), x'(t), x''(t), x'''(t)) + f_\varepsilon(t, x(t), x'(t), x''(t), x'''(t))$$

(1) with non-random initial conditions $x(0) = x_0^{(1)}$,

$x'(0) = x_0^{(2)}, x''(0) = x_0^{(3)}, x'''(0) = x_0^{(4)}$, where $\varepsilon > 0$ is a small parameter, $f_\varepsilon(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x, x', x'', x''')$ is a random function such that

$$\begin{aligned} \int_0^t f_\varepsilon(s, \mathbf{x}(s)) ds &= \sum_{i=1}^m \varepsilon^{k_i} \int_0^t f_i(\mu_i s, \mathbf{x}(s)) dw_i(s) \\ &+ \varepsilon^{k_{m+1}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f_{m+1}(\mu_{m+1} s, \mathbf{x}(s), z) \tilde{\nu}_1(ds, dz) + \\ &+ \varepsilon^{k_{m+2}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f_{m+2}(\mu_{m+2} s, \mathbf{x}(s), z) \nu_2(ds, dz), \end{aligned}$$

$k_i > 0, i = \overline{0, m+2}$; $f_i, i = \overline{0, m+2}$ are non-random functions periodic on $\mu_i t, i = \overline{0, m+2}$

with period 2π ; $w_i(t)$, $i = \overline{1, m}$ are independent one-dimensional Wiener processes; $\tilde{\nu}_i(dt, dy) = \nu_i(dt, dy) - \Pi_i(dy)dt$, $E\nu_i(dt, dy) = \Pi_i(dy)dt$, $i = 1, 2$; $\nu_i(dt, dy)$, $i = 1, 2$ are the independent Poisson measures independent on $w_i(t)$, $i = \overline{1, m}$; $\Pi_i(A)$, $i = 1, 2$ are a finite measures on Borel sets in $\mathbb{R}$.

We will study the asymptotic behavior of given oscillating system, as $\varepsilon \rightarrow 0$, in the case when there exists stable harmonic oscillations at the system under condition $\varepsilon = 0$. Under this condition corresponding characteristic equation has a form

$$\lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda + b_4 = 0.$$

We will consider the equation (1) as the system of stochastic differential equations

$$\begin{aligned} dy_i(t) &= y_{i+1}(t)dt, \quad i = \overline{1, 3} \\ dy_4(t) &= \left[- (b \cdot y(t)) + \varepsilon^{k_0} f_0(\mu_0 t, y(t)) + \right. \\ &\quad \left. \varepsilon^{k_{m+2}} \int_{\mathbb{R}} f_{m+2}(\mu_{m+2} t, y(t), z) \Pi_2(dz) \right] dt + \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \varepsilon^{k_i} f_i(\mu_i t, y(t)) dw_i(t) + \\ &\quad + \varepsilon^{k_{m+1}} \int_{\mathbb{R}} f_{m+1}(\mu_{m+1} t, y(t), z) \tilde{\nu}_1(dt, dz) + \\ &\quad + \varepsilon^{k_{m+2}} \int_{\mathbb{R}} f_{m+2}(\mu_{m+2} t, y(t), z) \tilde{\nu}_2(dt, dz), \end{aligned} \quad (2)$$

$y(t) = (y_1(t), \dots, y_4(t))$, $b = (b_4, b_3, b_2, b_1)$, $y_i(0) = x_0^{(i)}$, $i = \overline{1, 4}$, $(b \cdot y(t))$ – is a scalar product of vectors b and $y(t)$.

In what follows we will use the constant $K > 0$ for the notation of different constants, which are not depend on ε .

Main result. This paper deals with the following case:

$b_1 > 0$, $b_3 > 0$, $b_4 > b_1 b_3 / 4$, $b_1^2 b_4 = b_3(b_1 b_2 - b_3)$. Characteristic equation has a roots

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\eta + i\nu, \quad \lambda_2 = -\eta - i\nu, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\omega, \quad \text{where} \\ \eta &= \frac{b_1}{2}, \quad \nu = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b_1(4b_4 - b_1 b_3)}{b_3}}, \quad \omega^2 = \frac{b_3}{b_1}. \end{aligned}$$

At first we will study the non-resonance case: $\mu_i \neq \frac{p_i}{q_i} \omega$, $i = \overline{0, m+2}$, where p_i and q_i are any

relatively prime integers. If $\varepsilon = 0$ then the equation (1) has general solution in the form

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\eta t} (C_1 \cos \nu t + C_2 \sin \nu t) + \\ &\quad + A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t \end{aligned}$$

Let us denote

$$\begin{aligned} C(t) &= (C_1(t), C_2(t), A_1(t), A_2(t)), \\ \Phi(t) &= (e^{-\eta t} \cos \nu t, e^{-\eta t} \sin \nu t, \cos \omega t, \sin \omega t), \end{aligned}$$

and let us consider the following representation of the solution $y(t)$ to the system (2):

$$y_i(t) = \left(C(t) \cdot \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} \Phi(t) \right), \quad i = \overline{1, 4}. \quad (3)$$

We can solve the system of linear equations (3) with respect to $(N_1(t), N_2(t), A_1(t), A_2(t))$, where $N_i(t) = C_i(t)e^{-\eta t}$, $i = 1, 2$ and using the Ito formula we derive the system of stochastic differential equations:

$$\begin{aligned} dN_1(t) &= -\eta N_1(t) dt + \\ &\quad + \frac{2\eta\nu \cos \nu t - (\nu^2 - \omega^2 - \eta^2) \sin \nu t}{\nu[(\eta^2 + \nu^2)^2 + 2(\eta^2 - \nu^2)\omega^2 + \omega^4]} dH(t), \\ dN_2(t) &= -\eta N_2(t) dt + \\ &\quad + \frac{2\eta\nu \sin \nu t - (\nu^2 - \omega^2 - \eta^2) \cos \nu t}{\nu[(\eta^2 + \nu^2)^2 + 2(\eta^2 - \nu^2)\omega^2 + \omega^4]} dH(t), \\ dA_1(t) &= -\frac{2\eta\omega \cos \omega t + (\eta^2 + \nu^2 - \omega^2) \sin \omega t}{\omega[(\eta^2 + \nu^2)^2 + 2(\eta^2 - \nu^2)\omega^2 + \omega^4]} dH(t), \\ dA_2(t) &= -\frac{2\eta\omega \sin \omega t + (\eta^2 + \nu^2 - \omega^2) \cos \omega t}{\omega[(\eta^2 + \nu^2)^2 + 2(\eta^2 - \nu^2)\omega^2 + \omega^4]} dH(t), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} dH(t) &= [\varepsilon^{k_0} \tilde{f}_0(\mu_0 t, N(t), A(t), \omega t) + \\ &\quad + \varepsilon^{k_{m+2}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_{m+2}(\mu_{m+2} t, N(t), A(t), \omega t, z) \Pi_2(dz)] dt + \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \varepsilon^{k_i} \tilde{f}_i(\mu_i t, N(t), A(t), \omega t) dw_i(t) + \\ &\quad + \varepsilon^{k_{m+1}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_{m+1}(\mu_{m+1} t, N(t), A(t), \omega t, z) \tilde{\nu}_1(dt, dz) + \\ &\quad + \varepsilon^{k_{m+2}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_{m+2}(\mu_{m+2} t, N(t), A(t), \omega t, z) \tilde{\nu}_2(dt, dz), \end{aligned}$$

where $N(t) = (N_1(t), N_2(t))$, $A(t) = (A_1(t), A_2(t))$; $\tilde{f}_i(\mu_i t, N(t), A(t), \omega t)$, $i = \overline{0, m}$ are obtained from $f_i(\mu_i t, y(t))$, $i = \overline{0, m}$ and $\tilde{f}_i(\mu_i t, N(t), A(t), \omega t, z)$, $i = m+1, m+2$ are obtained from $f_i(\mu_i t, y(t), z)$, $i = m+1, m+2$ using (3).

Theorem 1. Let $\Pi_i(\mathbb{R}) < \infty$, $i = 1, 2$, $t \in [0, t_0]$, $k = \min(k_0, 2k_1, \dots, 2k_{m+1}, k_{m+2})$. Let us suppose, that functions f_j , $j = \overline{0, m+2}$ bounded and satisfy Lipschitz condition on y_i , $i = \overline{1, 4}$. If

given below matrix $\bar{\sigma}^2(A_1, A_2)$ is non-negative definite, then:

1. If $k_0 = 2k_i = k_{m+2}, i = \overline{1, m+1}$, then the stochastic process $\xi_\varepsilon(t) = (N_1(t/\varepsilon^k), N_2(t/\varepsilon^k), A_1(t/\varepsilon^k), A_2(t/\varepsilon^k))$ weakly converges, as $\varepsilon \rightarrow 0$, to the stochastic process $\bar{\xi}(t) = (0, 0, \bar{A}_1(t), \bar{A}_2(t))$, where $\bar{A}(t) = (\bar{A}_1(t), \bar{A}_2(t))$ is the solution to the system of stochastic differential equations

$$d\bar{A}(t) = \bar{\alpha}(\bar{A}(t))dt + \bar{\sigma}(\bar{A}(t))d\bar{w}(t), \quad (5)$$

$$\bar{A}(0) = (A_1(0), A_2(0)),$$

where

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(A_1, A_2) &= \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}_{(1)}(\psi, A_1, A_2, \phi) \Psi(\phi) d\phi d\psi, \\ \bar{\sigma}(A_1, A_2) &= \{\bar{B}(A_1, A_2)\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi} \times \\ &\times \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}_{(2)}(\psi, A_1, A_2, \phi) \Psi(\phi) \Psi^T(\phi) d\phi d\psi \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \Psi(\phi) &= \frac{1}{\omega[(\eta^2 + \nu^2)^2 + 2(\eta^2 - \nu^2)\omega^2 + \omega^4]} \times \\ &\times \begin{pmatrix} -2\eta\omega \cos \phi - (\eta^2 + \nu^2 - \omega^2) \sin \phi \\ -2\eta\omega \sin \phi + (\eta^2 + \nu^2 - \omega^2) \cos \phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_{(1)}(\psi, A_1, A_2, \phi) &= \tilde{f}_0(\psi, 0, 0, A_1, A_2, \phi) + \\ &+ \int_R \tilde{f}_{m+2}(\psi, 0, 0, A_1, A_2, \phi, z) \Pi_2(dz), \\ \hat{f}_{(2)}(\psi, A_1, A_2, \phi) &= \sum_{i=1}^m \tilde{f}_i^2(\psi, 0, 0, A_1, A_2, \phi) + \\ &+ \int_R \tilde{f}_{m+1}^2(\psi, 0, 0, A_1, A_2, \phi, z) \Pi_1(dz), \end{aligned}$$

$\Psi^T(\phi)$ is the vector transpose to vector $\Psi(\phi)$, $\bar{w}(t) = (\bar{w}_i(t), i = 1, 2)$, $\bar{w}_i(t), i = 1, 2$ are independent one-dimensional Wiener processes.

2. If $k < k_0$ then in the averaging equation (5) we must put $\tilde{f}_0 \equiv 0$; if $k < 2k_i$ for some $i = \overline{1, m}$, then in the averaging equation (5) we must put $\tilde{f}_i \equiv 0$ for such i ; if $k < 2k_{m+1}$ then in the averaging equation (5) we must put $\tilde{f}_{m+1} \equiv 0$; if $k < k_{m+2}$ then in the averaging equation (5) we must put $\tilde{f}_{m+2} \equiv 0$.

Proof. Let us make a change of variable $t \rightarrow t/\varepsilon^k$ at the system (4) and obtain for the process $\xi_\varepsilon(t) = (N_1^\varepsilon(t), N_2^\varepsilon(t), A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t)) =$

$(N_1(t/\varepsilon^k), N_2(t/\varepsilon^k), A_1(t/\varepsilon^k), A_2(t/\varepsilon^k))$ the system of stochastic differential equations

$$\begin{aligned} dN_1^\varepsilon(t) &= -\frac{\eta}{\varepsilon^k} N_1^\varepsilon(t) dt + \\ &+ \frac{2\eta\nu \cos(\nu t/\varepsilon^k) + (\nu^2 - \omega^2 - \eta^2) \sin(\nu t/\varepsilon^k)}{\nu[(\eta^2 + \nu^2)^2 + 2(\eta^2 - \nu^2)\omega^2 + \omega^4]} dH_\varepsilon(t), \\ dN_2^\varepsilon(t) &= -\frac{\eta}{\varepsilon^k} N_2^\varepsilon(t) dt + \\ &+ \frac{2\eta\nu \sin(\nu t/\varepsilon^k) - (\nu^2 - \omega^2 - \eta^2) \cos(\nu t/\varepsilon^k)}{\nu[(\eta^2 + \nu^2)^2 + 2(\eta^2 - \nu^2)\omega^2 + \omega^4]} dH_\varepsilon(t), \\ dA_1^\varepsilon(t) &= \Psi_1(\omega t/\varepsilon^k) dH_\varepsilon(t), \\ dA_2^\varepsilon(t) &= \Psi_2(\omega t/\varepsilon^k) dH_\varepsilon(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dH_\varepsilon(t) &= \left[\varepsilon^{k_0-k} \tilde{f}_0\left(\frac{\mu_0 t}{\varepsilon^k}, \xi_\varepsilon(t), \frac{\omega t}{\varepsilon^k}\right) + \varepsilon^{k_{m+2}-k} \times \right. \\ &\times \left. \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_{m+2}\left(\frac{\mu_{m+2} t}{\varepsilon^k}, \xi_\varepsilon(t), \frac{\omega t}{\varepsilon^k}, z\right) \Pi_2(dz) \right] dt + \\ &+ \sum_{i=1}^m \varepsilon^{k_i-k/2} \tilde{f}_i\left(\frac{\mu_i t}{\varepsilon^k}, \xi_\varepsilon(t), \frac{\omega t}{\varepsilon^k}\right) dw_i^\varepsilon(t) + \\ &+ \varepsilon^{k_{m+1}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_{m+1}\left(\frac{\mu_{m+1} t}{\varepsilon^k}, \xi_\varepsilon(t), \frac{\omega t}{\varepsilon^k}, z\right) \tilde{\nu}_1^\varepsilon(dt, dz) + \\ &+ \varepsilon^{k_{m+2}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_{m+2}\left(\frac{\mu_{m+2} t}{\varepsilon^k}, \xi_\varepsilon(t), \frac{\omega t}{\varepsilon^k}, z\right) \tilde{\nu}_2^\varepsilon(dt, dz), \end{aligned}$$

where $\Psi_i(\phi), i = 1, 2$ is a components of vector $\Psi(\phi)$, $w_i^\varepsilon(t) = \varepsilon^{k/2} w_i(t/\varepsilon^k), i = \overline{1, m}$, $\tilde{\nu}_i^\varepsilon(t, A) = \nu_i(t/\varepsilon^k, A) - \Pi_i(A)t/\varepsilon^k, i = 1, 2$, here A is a Borel set in $\mathbb{R}$. For each $\varepsilon > 0$ the process $w_i^\varepsilon(t), i = \overline{1, m}$ are independent one-dimensional Wiener processes, and $\tilde{\nu}_i^\varepsilon(t, A), i = 1, 2$ is the independent centered Poisson measure independent on $w_i^\varepsilon(t), i = \overline{1, m}$.

We have $N_i^\varepsilon(t) = \exp\{-\eta t/\varepsilon^k\} C_i(t/\varepsilon^k), i = 1, 2$ and processes $C_i^\varepsilon(t) = C_i(t/\varepsilon^k)$ satisfy the stochastic differential equations

$$dC_i^\varepsilon(t) = e^{\eta t/\varepsilon^k} m_i^\varepsilon(t) dH_\varepsilon(t), \quad i = 1, 2,$$

where

$$\begin{aligned} m_1^\varepsilon(t) &= \frac{2\eta\nu \cos(\nu t/\varepsilon^k) + (\nu^2 - \omega^2 - \eta^2) \sin(\nu t/\varepsilon^k)}{\nu[(\eta^2 + \nu^2)^2 + 2(\eta^2 - \nu^2)\omega^2 + \omega^4]}, \\ m_2^\varepsilon(t) &= \frac{2\eta\nu \sin(\nu t/\varepsilon^k) - (\nu^2 - \omega^2 - \eta^2) \cos(\nu t/\varepsilon^k)}{\nu[(\eta^2 + \nu^2)^2 + 2(\eta^2 - \nu^2)\omega^2 + \omega^4]}, \end{aligned}$$

$$|C_i^\varepsilon(0)| \leq K, i = 1, 2.$$

From boundedness of functions $f_i, i = \overline{0, m+2}$ and condition $\Pi_i(\mathbb{R}) < \infty, i = 1, 2$ we can obtain the estimate $\mathbb{E}|N_i^\varepsilon(t)|^2 \leq K[e^{-2\eta t/\varepsilon^k} + \varepsilon^k(1 - e^{-2\eta t/\varepsilon^k})(t(\varepsilon^{2(k_0-k)} + \varepsilon^{2(k_{m+2}-k)} + \sum_{i=1}^{m+2} \varepsilon^{2k_i-k}))], i = 1, 2$. Therefore

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}|N_i^\varepsilon(t)|^2 = 0, i = 1, 2$ and it is sufficient to study the behavior, as $\varepsilon \rightarrow 0$, of solution to the system of stochastic differential equations

$dA_i^\varepsilon(t) = \Psi_i(\omega t/\varepsilon^k) d\hat{H}_\varepsilon(t)$, $i = 1, 2$ with initial conditions $A_1^\varepsilon(0) = A_1(0)$, $A_2^\varepsilon(0) = A_2(0)$, where

$$\begin{aligned} d\hat{H}_\varepsilon(t) = & \left[\varepsilon^{k_0-k} \hat{f}_0\left(\frac{\mu_0 t}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), \frac{\omega t}{\varepsilon^k}\right) + \right. \\ & + \varepsilon^{k_{m+2}-k} \times \\ & \times \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_{m+2}\left(\frac{\mu_{m+2} t}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), \frac{\omega t}{\varepsilon^k}, z\right) \Pi_2(dz) \Big] dt + \\ & + \sum_{i=1}^m \varepsilon^{k_i-k/2} \hat{f}_i\left(\frac{\mu_i t}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), \frac{\omega t}{\varepsilon^k}\right) dw_i^\varepsilon(t) + \\ & + \varepsilon^{k_{m+1}} \times \\ & \times \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_{m+1}\left(\frac{\mu_{m+1} t}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), \frac{\omega t}{\varepsilon^k}, z\right) \tilde{\nu}_1^\varepsilon(dt, dz) \\ & + \varepsilon^{k_{m+2}} \times \\ & \times \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_{m+2}\left(\frac{\mu_{m+2} t}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), \frac{\omega t}{\varepsilon^k}, z\right) \tilde{\nu}_2^\varepsilon(dt, dz), \\ \hat{f}_j(\psi, A_1, A_2, \phi) = & \tilde{f}_j(\psi, 0, 0, A_1, A_2, \phi), \quad j = \overline{0, m}, \\ \hat{f}_i(\psi, A_1, A_2, \phi, z) = & \tilde{f}_i(\psi, 0, 0, A_1, A_2, \phi, z), \quad i = \\ & m+1, m+2. \end{aligned}$$

The rest of the proof is similar to the proof of Theorem 2.1 [1]. $\square$

In the resonance case $\mu_i = \frac{p_i}{q_i} \omega$ for some $i = \overline{0, m+2}$, where p_i and q_i are relatively prime integers, we have following result.

Theorem 2. Let $\Pi_i(\mathbb{R}) < \infty$, $i = 1, 2$, $t \in [0, t_0]$, $k = \min(k_0, 2k_1, \dots, 2k_{m+1}, k_{m+2})$. Let us suppose, that functions f_j , $j = \overline{0, m+2}$ bounded and satisfy Lipschitz condition on y_i , $i = \overline{1, 4}$. If given below matrix $\bar{\sigma}^2(A_1, A_2)$ is non-negative definite, then:

1. Let $\mu_i = \frac{p_i}{q_i} \omega$ for all $i = \overline{0, m+2}$, where p_i and q_i are some relatively prime integers. If $k_0 = 2k_i = k_{m+2}$, $i = \overline{1, m+1}$, then the stochastic process $\xi_\varepsilon(t) = (N_1(t/\varepsilon^k), N_2(t/\varepsilon^k), A_1(t/\varepsilon^k), A_2(t/\varepsilon^k))$ weakly converges, as $\varepsilon \rightarrow 0$, to the stochastic process $\bar{\xi}(t) = (0, 0, \bar{A}_1(t), \bar{A}_2(t))$, where $\bar{A}(t) = (\bar{A}_1(t), \bar{A}_2(t))$ is the solution to the system of stochastic differential equations

$$d\bar{A}(t) = \bar{\alpha}(\bar{A}(t))dt + \bar{\sigma}(\bar{A}(t))d\bar{w}(t), \quad (6)$$

Список використаних джерел

1. Борисенко О.Д., Борисенко О.В. Неавтономні випадкові коливні системи четвертого порядку під дією зовнішніх періодичних збурень / О.Д. Борисенко, О.В. Борисенко // Вісник Київського університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки – 2016. – №4. – С. 9 – 14

$\bar{A}(0) = (A_1(0), A_2(0))$, where $\bar{\alpha}(A_1, A_2) =$

$$\begin{aligned} = & \\ = & \frac{1}{4\pi^2} \left[\sum_{p_0 n + q_0 l = 0} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}_0(\psi, A_1, A_2, \phi) \times \right. \\ & \times \Psi(\phi) e^{-i(n\psi + l\phi)} d\phi d\psi + \\ & + \sum_{p_{m+2} n + q_{m+2} l = 0} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}_{m+2}(\psi, A_1, A_2, \phi, z) \times \\ & \times \Psi(\phi) e^{-i(n\psi + l\phi)} \Pi_2(dz) d\phi d\psi \Big] , \\ \bar{\sigma}(A_1, A_2) = & \left\{ \bar{B}(A_1, A_2) \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi} \times \\ & \times \left\{ \sum_{j=1}^m \sum_{p_j n + q_j l = 0} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}_j^2(\psi, A_1, A_2, \phi) \times \right. \\ & \times \Psi(\phi) \Psi^T(\phi) e^{-i(n\psi + l\phi)} d\phi d\psi + \\ & + \sum_{p_{m+1} n + q_{m+1} l = 0} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}_{m+1}^2(\psi, A_1, A_2, \phi, z) \times \\ & \times \Psi(\phi) \Psi^T(\phi) e^{-i(n\psi + l\phi)} \Pi_1(dz) d\phi d\psi \Big\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$\Psi^T(\phi)$ is the vector transpose to vector $\Psi(\phi)$, $\bar{w}(t) = (\bar{w}_i(t), i = 1, 2)$, $\bar{w}_i(t)$, $i = 1, 2$ are independent one-dimensional Wiener processes.

2. If $k < k_0$ then in the averaging equation (6) we must put $\tilde{f}_0 \equiv 0$; if $k < 2k_i$ for some $i = \overline{1, m}$, then in the averaging equation (6) we must put $\tilde{f}_i \equiv 0$ for such i ; if $k < 2k_{m+1}$ then in the averaging equation (6) we must put $\tilde{f}_{m+1} \equiv 0$; if $k < k_{m+2}$ then in the averaging equation (6) we must put $\tilde{f}_{m+2} \equiv 0$.

3. If $\mu_j \neq \frac{p_j}{q_j} \omega$ for some $j = \overline{0, m+2}$ and any relatively prime integers p_j and q_j , then in averaging coefficients in (6) we must put $l = n = 0$ in corresponding sums containing f_j .

References

1. BORYSENKO, O.D. and BORYSENKO, O.V. (2016) Non-autonomous fourth order random oscillating systems under the action of external periodical disturbances, *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*, 4. pp. 9 – 14.

Надійшла до редколегії 23.11.2017

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ,
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА
ТА МЕХАНІКА**

УДК 539.3

Альфавіцька С. О.¹, аспірант,
Николишин М. М.¹, д.ф.-м.н., проф.,
Опанасович В. К.², д.ф.-м.н., проф.,
Білаш О. В.³, к.е.н., викладач.

**Двовісний згин пластини з двома
тріщинами за наявності лінійчастих
пластичних зон з урахуванням контакту
їх берегів та зміцнення матеріалу**

¹Інститут прикладних проблем механіки і
математики ім. Я. С. Підстригача НАН
України, 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3б,
e-mail: alfavitska_solomiya@i.ua

²Львівський національний університет імені
Івана Франка, вул. Університетська, 1,
м. Львів, 79000, Україна,
e-mail: kafmech@franko.lviv.ua

³Національна академія сухопутних військ імені
гетьмана Петра Сагайдачного, вул. Героїв
Майдану, 32, м. Львів, 79012, Україна

S. O. Alfavitska¹, Postgraduate Student,
M. M. Nykolyshyn¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
V. K. Opanasovich², Dr. Sci. (Phys.-Math.),
O. V. Bilash³, Ph.D.

**Biaxial bending the plate with two cracks in
the presence of linear plastic zones with the
width of the contact area their faces and
strengthening of the material**

¹Pidstrygach Institute for Applied Problems of
Mechanics and Mathematics, National Academy of
Sciences of Ukraine, 79060, Lviv, 3b Naukova str.,
Ukraine,
e-mail: alfavitska_solomiya@i.ua

²Ivan Franko National University of Lviv, 79000
Lviv, 1, Universytetska st., Ukraine,
e-mail: kafmech@franko.lviv.ua

³Hetman Petro Sahaidachnyi National Army
Academy, 79012, Lviv, 32 Heroes of Maidan str.,
Ukraine

У роботі досліджено двовісний згин розподіленими на нескінченості моментами ізотропної пластини з двома рівними співвісними тріщинами, береги яких під дією зовнішнього навантаження контактують по області сталої ширини, а у їх вершинах утворилися пластичні зони з урахуванням зміцнення матеріалу за лінійного закону та виконання умов пластичності Треска у вигляді поверхневого шару. Із використанням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів розв'язок задачі зведено до задач лінійного спряження, на основі яких отримано систему трансцендентних рівнянь відносно шуканих параметрів, яка чисельно розв'язана за допомогою методу Ньютона. Проведено числовий аналіз контактної зусилля між берегами тріщин, довжини пластичних зон і розкриття берегів тріщин поблизу їх вершин.

Ключові слова: тріщини, згин, ізотропна пластинка, комплексні потенціали, контактне зусилля, зміцнення матеріалу, пластичні зони.

The problem is formulated and solved about a biaxial bending of isotropic plate with two cracks. The plate is bent at the infinity by distributed bending moments. The faces of the cracks is contacted along the width of the contact area, and near-by their tops will appear plastic zones taking into account strengthening of the material at the linear distributing of tension for them and by implementation of terms of plasticity of Treska as a superficial layer. Through the contact of banks of crack of upshots of task will give as superpozicii of two tasks: flat task and task of bend (classic theory). With the use of the theory of function of complex variable and complex potentials of the plane problem and of the classical theory of bend plate the solution of the problem is reduced to the problems of conjugate. There is received the system of six equations which is solved by the Newton's method. We had written the formulas for determining the length of plastic zones in the tops of cracks and opening the banks of the cracks, also had conducted their numerical analysis for the different parameters of the problem, which is showed graphically. A numerical analysis of contact force between the faces of crack, of length of the plastic zones and opening of faces of crack near their tops is conducted. In partial cases we obtained known in scientific literature results.

Key words: cracks, bending, isotropic plate, complex potentials, contact force, strengthening of the material, plastic zones.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

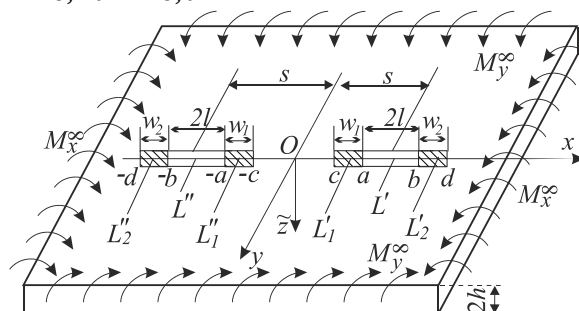
Пластинчасті елементи конструкцій широко використовуються у авіаційній, машинобудівній, будівельній, суднобудівній та інших галузях техніки. Під час експлуатації можуть утворитися тріщино-подібні дефекти, що значно знижують діапазон допустимого навантаження, яке може витримати конструкція. Одним із основних завдань при оцінці міцності конструкційного елементу з тріщинами є визначення напружено-деформованого стану в околі їх вершин.

У даній роботі досліджується двовісний згин розподіленими на нескінченності згинальними моментами ізотропної пластини з двома рівними наскрізними співвісними тріщинами з урахуванням ширини області контакту їх берегів за наявності вузьких пластичних зон поблизу їх вершин з урахуванням зміцнення матеріалу та з використанням умови пластичності Треска у вигляді поверхневого шару [1]. Із застосуванням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів розв'язок задачі зведений до системи трансцендентних рівнянь відносно шуканих величин, яка розв'язана чисельно за допомогою методу Ньютона. Проведено чисельний аналіз задачі, на основі якого побудовано графічні залежності довжини пластичних зон і розкриття берегів тріщин поблизу їх вершин.

2. Формулювання задачі

Нехай нескінченна ізотропна пластина товщиною $2h$ містить дві рівні співвісні наскрізні тріщини завдовжки $2l$, які вільні від зовнішнього навантаження і яка знаходиться під дією рівномірно розподілених на нескінченності згинальних моментів, завдяки яким у вершинах тріщин утворилися вузькі пластичні зони з урахуванням зміцнення матеріалу. У серединній площині пластини виберемо декартову систему координат $Ox\tilde{z}$ з початком посередині між центрами тріщин, направивши вісь Ox вздовж тріщин, а вісь $O\tilde{z}$ перпендикулярно до неї. Лінію, де розміщені тріщини позначимо через L , пластичні зони – через L_j , ($j=1,2$); відстань між центрами тріщин – через $2s$ (див. рис. 1). Пластина на нескінченності згинається рівномірно розподіленими моментами M_x^∞ і M_y^∞ , під дією яких береги тріщини приходять у гладкий контакт по області сталої ширини h_1 біля верхньої основи пластини [2], наявні

пластичні зони завдовжки w_j ($j=1,2$), вершини тріщин позначимо $-a, -b$ та a, b , а пластичних зон $-c, -d$ та c, d .



$$L = L' \cup L''; L_1 = L'_1 \cup L''_1; L_2 = L'_2 \cup L''_2.$$

Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщин

Оскільки береги тріщини контактують, то розв'язок задачі подамо у вигляді суперпозиції двох задач: плоскої задачі та задачі згину пластини (класична теорія), за таких крайових умов:

$$\sigma_{yy}^\pm = \sigma_0^{(j)} \sigma_j^*(x), M_y^\pm = M_0^{(j)} \sigma_j^*(x), x \in L_j, j=1,2, (1)$$

$$\sigma_{yy}^\pm = -\frac{N}{2h}, M_y^\pm = \beta h N, [\nu] + \alpha h [\partial_y w] = 0, x \in L, (2)$$

$$\sigma_{xy}^\pm = 0, P_y^\pm = 0, x \in \tilde{\gamma}, \tilde{\gamma} = L + L_1 + L_2, (3)$$

де

$$\sigma_j^*(x) = a_j |x| + b_j, (j=1,2),$$

$$a_1 = -\frac{1-m^*}{a-c}, b_1 = m^* + \frac{(1-m^*)a}{a-c},$$

$$a_2 = \frac{1-m^*}{d-b}, b_2 = m^* - \frac{(1-m^*)b}{d-b}, m^* = \sigma_B / \sigma_Y.$$

σ_{yy} і σ_{xy} та u і v – компоненти тензора напружень та компоненти вектора переміщення по осях Ox і Oy у плоскій задачі; $\sigma_0^{(j)}$ і $M_0^{(j)}$ – невідомі нормальні напруження та згинальні моменти у пластичних зонах [1], для яких виконуються умови пластичності Треска у вигляді поверхневого шару [1]; N – контактне зусилля ($N > 0$); w – прогин пластини; M_y і P_y – згинальний момент та перерізуювальна сила у сенсі Кірхгофа; σ_B і σ_Y – межі міцності та текучості матеріалу; $[f] = f^+ - f^-$, де значками “+” і “-” позначено граничне значення відповідної величини при $y \rightarrow \pm 0$; $\partial_u f = \partial f / \partial u$, константи α і β мають вигляд [3]

$$\alpha = 0.5\{1 + (1 - \gamma^2)\}, \quad \beta = 1 - \frac{\gamma}{3}, \quad \gamma = \frac{h_1}{h}. \quad (4)$$

3. Розв'язування задачі

Для визначення напружено-деформованого стану пластини введемо комплексні потенціали плоскої задачі $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$ та класичної теорії згину пластини $\Phi_3(z)$ і $\Omega_3(z)$ [4, 5]

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (5)$$

$$2\mu\partial_x(u + iv) = \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (6)$$

$$\partial_x g = \Phi_3(z) - \Omega_3(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'_3(z)}, \quad (7)$$

$$f = \tilde{\kappa}\Phi_3(z) + \Omega_3(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'_3(z)}, \quad (8)$$

де $\mu = 0.5E / (1 + \nu)$ – модуль зсуву, E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини

$$f(x) = (M_y + ic' + i \int_0^x P(\varepsilon) d\varepsilon) / m, \quad (9)$$

$$z = x + iy, \quad i^2 = -1, \quad \kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu),$$

$$\tilde{\kappa} = (3 + \nu) / (1 - \nu), \quad m = -D(1 - \nu), \quad g = \partial_x w + i\partial_y w,$$

c'_k – невідомі сталі, $D = 2Eh^3 / 3(1 - \nu^2)$ – циліндрична жорсткість пластини.

Введені комплексні потенціали при великих $|z|$ можна подати у вигляді [4, 5]

$$\Phi(z) = O(1/z^2), \quad \Omega(z) = O(1/z^2),$$

$$\Phi_3(z) = \tilde{\Gamma} + O(1/z^2), \quad \Omega_3(z) = -\tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}' + O(1/z^2), \quad (10)$$

$$\tilde{\Gamma} = -\frac{(M_x^\infty + M_y^\infty)}{(4D(1 + \nu))}, \quad \tilde{\Gamma}' = \frac{(M_x^\infty - M_y^\infty)}{2m}.$$

На основі залежностей (5) і (8) та крайових умов отримаємо задачі лінійного спряження, розв'язавши які, матимемо

$$\Omega(z) = \Phi(z), \quad \Omega_3(z) = \tilde{\kappa}\Phi_3(z) - \alpha_1, \quad (11)$$

$$\alpha_1 = (\tilde{\kappa} + 1)\tilde{\Gamma} + \tilde{\Gamma}'.$$

$$\Phi(z) = d_2 + q_3(z), \quad \Phi_3(z) = d_5 + q_4(z), \quad (12)$$

$$q_1(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \sum_{j=1}^2 \int_{L_j} \frac{\tilde{A}_j(t) dt}{X_0^+(t)(t - z)},$$

$$X_0(z) = \sqrt{(z^2 - d^2)(z^2 - c^2)(z^2 - b^2)(z^2 - a^2)},$$

$$q_2(z) = -\frac{X_1(z)}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{\tilde{f}(t) dt}{X_1^+(t)(t - z)},$$

$$X_1(z) = \sqrt{(z^2 - d^2)(z^2 - c^2)},$$

$$q_3(z) = (m\tilde{\kappa}q_1(z) - 2q_2(z)) / \Delta, \quad d_1 = 0.5m\alpha_1,$$

$$q_4(z) = (\delta q_2(z) - 2\beta h^2 q_1(z)) / \Delta, \quad \Delta = m\tilde{\kappa}\delta - 4\beta h^2,$$

$$d_2 = (m\tilde{\kappa}/2G - 2d_1) / \Delta, \quad d_5 = (\delta d_1 - \beta h^2 / G) / \Delta.$$

Скориставшись умовою пластичності Треска у вигляді поверхневого шару [1] та умовою однозначності переміщень при обході контура тріщини, а також (12) та розвиненням (10), отримаємо систему трансцендентних рівнянь для знаходження шуканих невідомих $M_0^{(j)}$ і w_j , ($j=1,2$), яку розв'язуємо чисельно за допомогою методу Ньютона. В силу обмеженості об'єму статті її не наводимо.

Розкриття берегів тріщини у її вершинах на нижній основі пластини визначається за формулами

$$\delta = \int_{L_j} \operatorname{Im} \left(\frac{1 + \kappa}{2\mu} [\Phi(x)] - h(1 + \tilde{\kappa}) [\Phi_3(x)] \right) dx.$$

4. Чисельний аналіз та висновки

Був проведений чисельний аналіз задачі при $\nu = 0.3$, $m^* = 1.2$, результати якого подані на рис. 2 та рис. 3, де суцільні лінії побудовані для внутрішньої відносної довжини зони пластичності $\tilde{w} = w_1/l$ та зведеного розкриття у вершині a – $\tilde{\delta} = \delta_a E / (l\sigma_Y)$, штрихові лінії – для зовнішньої відносної довжини зони пластичності $\tilde{w} = w_2/l$ та зведеного розкриття у вершині b – $\tilde{\delta} = \delta_b E / (l\sigma_Y)$.

На рис. 2 та рис. 3 зображено графічні залежності для відповідних безрозмірних довжин пластичних зон $\tilde{w}$ та безрозмірних величин розкриття у вершинах тріщини $\tilde{\delta}$ від відносної відстані між центрами тріщин $\tilde{s} = s/l$.

На рис. 2 крива 1 побудована при навантаженні $\tilde{\sigma} = 0.5$, крива 2 – при $\tilde{\sigma} = 0.6$, крива 3 – при $\tilde{\sigma} = 0.7$, а на рис. 3 крива 1 – при $\tilde{\sigma} = 0.45$, крива 2 – при $\tilde{\sigma} = 0.55$, крива 3 – при $\tilde{\sigma} = 0.65$, де $\tilde{\sigma} = 3M_y^\infty / 2h^2\sigma_Y$.

З рисунків видно, що при збільшенні відстані між центрами тріщини $\tilde{s}$ довжини пластичних зон та розходження берегів тріщин у їх вершинах зменшуються, прямуючи до відповідної величини для однієї ізольованої тріщини [2], а при збільшенні навантаження $\tilde{\sigma}$ ці величини збільшуються поблизу обох вершин тріщини. Крім того, для внутрішніх вершин тріщин зони

пластичності та розходження їх берегів більші ніж для зовнішніх.

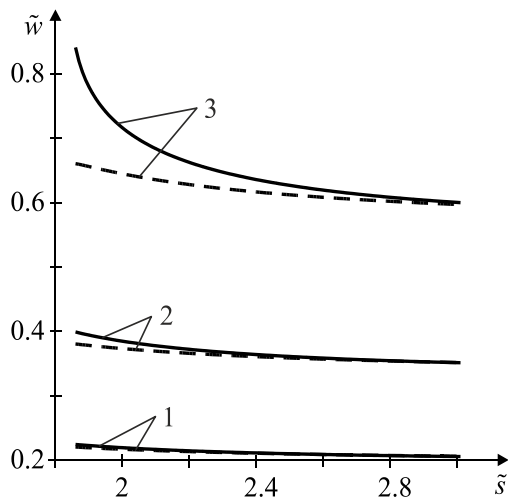


Рис. 2. Графічна залежність зведеної довжини пластичної зони

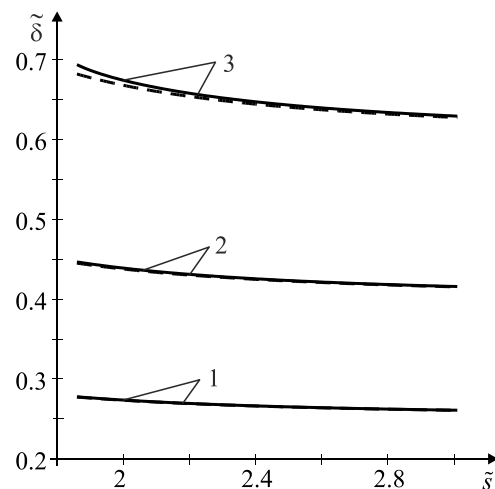


Рис. 3. Графічна залежність зведеного розкриття у вершині тріщини

Список використаних джерел

1. Кир'ян В. І. Механіка руйнування зварних з'єднань металоконструкцій / В. І. Кир'ян, В. А. Осадчук, М. М. Николишин // Львів: СПОЛОМ, 2007. – 320 с.
2. Альфавіцька С. О. Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною за наявності пластичних зон у її вершинах з урахуванням контакту її берегів та зміцнення матеріалу / С. О. Альфавіцька, М. М. Николишин, В. К. Опанасович, М. С. Слободян // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2015, спецвипуск. – С. 21-27.
3. Опанасович В. К. Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь / В. К. Опанасович // Наук. нот. Луцьк. техн. ун-ту ("Інженерна механіка"). – 2007. – Вип. 20 (2). – С. 123-127.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили – М.: Наука, 1966. – 707 с.
5. Прусов И. А. Метод сопряжения в теории плит / И. А. Прусов. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975. – 256 с.

References

1. KYR'YAN, V., OSADCHUK, V. and NYKOLYSHYN, M. (2007) Mekhanika ruynuvannya zvarnykh z'yednan' metalokonstruktsiy. Lviv: SPOLOM.
2. ALFAVITSKA, S., NYKOLYSHYN, M., OPANASOVYCH, V. & SLOBODYAN, M. (2015) Zhyn plastyny z naskriznoyu pryamoliniynoyu trishchynoyu za nayavnosti plastychnykh zon u yiyi vershynakh z urakhuvannyam kontaktu yiyi berehiv ta zmitsnennya materialu. Visnyk Kyivskoho natsionalnoho universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Seriya: fizyko-matematychni nauky. Spetsvypusk. p. 21-27.
3. OPANASOVYCH, V. (2007) Zhyn plastyny z naskriznoyu pryamoliniynoyu trishchynoyu z urakhuvannyam shyryny oblasti kontaktu yiyi poverkhon'. Naukovi notatki Luts'kogo tekhichnogo universitetu (Inzhenerna mehanika). 20 (2). p. 123–127.
4. MUSKHELISHVILI, N. (1966) Nekotoryie osnovnyie zadachi matematicheskoi teorii uprugosti. Moscow: Nauka.
5. PRUSOV Y. A. (1975) Metod sopryazheniya v teorii plit. Minsk: Izdatelstvo Belorusskogo universitetu.

Надійшла до редколегії 15.09.2017

УДК 531/532+581.14

Балабанов В. О.¹, аспірант,
Кізілова Н. М.², д.ф.-м. н., проф.

**Математичне моделювання
стаціонарної та хвильової провідності
артеріальних систем як бінарних дерев**

¹ Харківський національний університет
ім. В.Н. Каразіна, 61022, м. Харків,
пл. Свободи, 4,
e-mail: lekarsenten@gmail.com

² Харківський національний університет
ім. В.Н. Каразіна, 61022, м. Харків,
пл. Свободи, 4,
e-mail: n.kizilova@gmail.com

V. O. Balabanov¹, Ph.D. student,
N. M. Kizilova², D.Sci. (Phys.-Math.)

**Mathematical modeling of steady and wave
conductivity of arterial systems as binary trees**

¹ V.N. Karazin Kharkov National University, 61022,
Kharkov, Svobody sq., 4,
e-mail: lekarsenten@gmail.com

² V.N. Karazin Kharkov National University, 61022,
Kharkov, Svobody sq., 4,
e-mail: n.kizilova@gmail.com

Артеріальні системи розглядаються як бінарні дерева трубок з в'язкопружного матеріалу. На основі даних детальних вимірювань на системах артерій in situ був розроблений алгоритм генерації моделей артеріальних систем як бінарних дерев, які заповнюють заданий об'єм простору та відповідають артеріям внутрішніх органів людини. Обчислені величини гідравлічної провідності моделей для стаціонарної течії крові як в'язкої рідини, а також комплексної хвильової провідності для розповсюдження пульсових хвиль. Раніше аналогічні розрахунки проводились на моделях артеріальних дерев легень та серця. Досліджені ефекти зростання імпедансу і хвильової провідності моделі та негативного відбиття хвиль за рахунок послідовних розгалужень, що відповідає даним вимірювань та попередніх обчислень. Таким чином, запропонований алгоритм дозволяє будувати моделі артеріальних систем внутрішніх органів, що мають ті ж самі гідравлічні та хвильові властивості, як реальні артеріальні системи.

Ключові слова: артеріальні системи, пульсові хвилі, бінарні дерева, гідравлічна провідність, хвильова провідність.

Arterial systems are considered as binary trees of tubes from a viscoelastic material. Based on the detailed in situ measurement data on arterial systems the branched systems as binary trees which are filling predetermined space volume and corresponds to visceral arteries of human body generation algorithm has been developed. Hydraulic conductivity of the tree for the steady flow of blood as viscous liquid as well as complex wave admittance for the pulse wave propagation are computed as functions of the coordinate inside the tree along the longest way from the inlet of the tree to its terminal segments. Previously the same computations were made for lungs and heart arterial system models. The effects of the increase in the impedance and wave admittance as well as the negative wave reflections due to the consequent bifurcations, which are in agreement with measurement data and previous computations, are studied. The proposed algorithm is able to build arterial systems models of viscerals which have the same hydraulic and pulse properties as real arterial systems.

Key Words: arterial systems, pulse waves, binary trees, hydraulic conductivity, wave admittance.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ. Рух крові по артеріях обумовлений періодичними скороченнями серця, яке забезпечує високий тиск на вході в систему, а також спрямовує в аорту ~60–80 мл крові та задає на вході в артеріальну систему мали збурення тиску, які розповсюджуються зі

швидкістю звуку в заповнених рідиною деформівних трубках (~5–8 м/с в крупних та ~10–20 м/с – в малих артеріях) [1]. Було показано, що завдяки своїй будові артерії являють собою оптимальні хвилеводи [2,3], які забезпечують відсутність відбиття хвиль в

крупних артеріях та навіть негативне відбиття – в системах малих артерій. Крім того, відповідність діаметрів артерій в розгалуженнях забезпечує постійні за цикл серцевого скорочення напруження тертя на стінках артерій, що приводить до оптимального розподілу крові між внутрішніми органами [3]. На основі даних детальних вимірювань на системах артерій *in situ* [4] був розроблений алгоритм генерації моделей артеріальних систем як бінарних дерев, які заповнюють заданий об'єм простору [5]. Моделі відповідають артеріальним системам внутрішніх органів людини, які займають об'єм відповідного органа (або м'яза) і забезпечують постачання та рівномірний розподіл крові між тканинами та клітинами органа [6]. В даній роботі наведені результати розрахунків розподілів стаціонарного гідрравлічного опору (імпедансу) Z , комплексної хвильової провідності Y та комплексного коефіцієнту відбиття хвиль на розгалуженнях. Раніше аналогічні розрахунки проводились на моделях артеріальних дерев легенів та серця [7].

Гідрравлічний (Пуазейлівський) опір був розрахований для кожної судини як $Z_j = 128\mu_{bl}(d_j)L_j / (\pi d_j^4)$, де d_j та L_j – діаметр та довжина судини, $\mu_{bl}(d_j) = 14.754d_j^{1/6} - 0.175$ – в'язкість крові, яка зростає з діаметром трубки за рахунок масштабного ефекту [8]. Для розрахунків імпедансу русла імпеданси паралельно розташованих трубок складаються, а у послідовно розташованих трубок складаються зворотні величини Z^{-1} . Під час розрахунків були отримані залежності $Z(X)$, де X – координата точок від входу до кінця найдовшого шляху вздовж артеріального дерева.

Приймалося, що течія крові в кожній трубці відповідає моделі Womersley [1,7], а хвильова провідність розрахована для кожної трубки відповідно моделі Дж. Лайтхілла як $Y_j = (\pi d_j^2) / (4\rho_{bl}c_j)$, де ρ_{bl} – в'язкість крові, d_j – діаметр трубки, c_j – швидкість звуку в j -й трубці. Величини c_j були обчислені відповідно моделі Womersley з урахуванням в'язкопружності стінки за формулою [1,7]

$$c_i = \left(\frac{E_i h_i (1 - F_{01})}{\rho_{bl} d_i (1 - \sigma_i^2)} e^{I\theta_i} \right)^{1/2},$$

де $I = \sqrt{-1}$, $F_i = 2J_1(\beta_i) / (\beta_i J_0(\beta_i))$ – функція Womersley, $\beta_i = \alpha_i (-1)^{3/4}$, $\alpha_i = R_i \sqrt{\omega \rho / \mu}$ – число Womersley, h_i , E_i , θ_i – товщина, модуль Юнга та в'язкість матеріалу стінки.

Крім того, були розраховані локальний (^{0}) та глобальний ($^\Sigma$) коефіцієнти відбиття хвиль

$$\Gamma^{0,\Sigma} = \frac{Y_0^0 - Y_1^{0,\Sigma} - Y_2^{0,\Sigma}}{Y_0^0 + Y_1^{0,\Sigma} + Y_2^{0,\Sigma}}, \quad (1)$$

де індекси $k = 0, 1, 2$ відповідають трьом трубкам в розгалуженні [1,7]. Таким чином, Γ^0 та Γ^Σ – комплексні числа, дійсна частина яких відповідає локальному та глобальному (з урахуванням дерева артерій нижче за течією крові) опору системі проходженню пульсової хвилі, а уявна частина – локальний та глобальний податливості артерій, тобто їх здатності за рахунок розширення прийняти додаткову порцію рідини, що переноситься з хвилею [3].

2. Алгоритм генерації моделей. Моделі артеріальних систем у вигляді бінарних дерев генерувалися за алгоритмом from-top-to-bottom, тобто починаючи з заданого діаметру вхідної (живлючої) артерії системи. У зв'язку з відомими закономірностями біфуркації артеріальних судин їх діаметри $d_{0,1,2}$ зв'язані між собою законом Мюрея [3-7]

$$d_0^3 = d_1^3 + d_2^3, \quad (2)$$

Кути розгалужень в біфуркаціях пов'язані з діаметрами $d_{0,1,2}$ наступними співвідношеннями [3-7]:

$$\alpha_1 = \arccos \left(((1 + \xi^3)^{4/3} + 1 - \xi^4) / (1 + \xi^3)^{2/3} / 2 \right), \quad (3)$$

$$\alpha_2 = \arccos \left(((1 + \xi^3)^{4/3} \xi^4 - 1) / (1 + \xi^3)^{2/3} / \xi^2 / 2 \right),$$

де $\xi = d_2/d_1$ – коефіцієнт асиметрії біфуркації, $d_2 = \max\{d_1, d_2\}$, $d_1 = \min\{d_1, d_2\}$.

Для довжин сегментів виконуються апроксимаційні співвідношення [6]:

$$L_j^\Sigma = ad_j^\beta \quad \text{або} \quad L_j^\Sigma = a + \beta d_j, \quad (4)$$

коефіцієнти до яких наведені в [3].

Алгоритм генерації моделей має наступний вигляд:

- 1) задаємо d_0 вхідної артерії та параметри α, β, ξ відповідної моделі;
- 2) із (2) розраховуємо діаметри дочірніх артерій з поки що невідомими довжинами; генерацію закінчуємо коли $d_1 < 0.1$ мм;
- 3) починаючи з самих малих артерій, обчислюємо їх довжини з (4), поступово переходячи вздовж кожної гілки дерева до більш

крупних артерій поки не дійдемо до вхідної артерії [9];

4) із (3) по відомим діаметрам в кожній біфуркації розраховуємо кути розгалужень;

5) використовуючи алгоритм повороту площини кожної наступної біфуркації (або двох дочірніх судин) відносно осі материнської судини, який запропонований в [5,6], будемо дерево без самопересічень, геометрія якого відповідає артеріальній системі обраного внутрішнього органа або м'яза.

Для генерації значень діаметрів і довжин трубок та чисельних розрахунків стаціонарної та хвильової провідностей дерева – власне програмне забезпечення VesselView.

3. Результати розрахунків. Генерація моделей проводилася для всіх типів внутрішніх органів для однакових значень $d_0 = 5$ мм діаметра початкової артерії. Результати розрахунків Z , $\text{Re}(Y)$ і $\text{Re}(\Gamma^0)$ наведені на рис.1а,б,в відповідно. По мірі просування вздовж системи от вхідного перетину гідравлічна провідність (рис. 1а) зменшується за рахунок додавання більшої кількості резистивних елементів (трубок), що відповідає попереднім розрахункам на морфо метричних даних коронарних артерій [7]. При цьому можна виділити ділянки постійного опору довжиною ~ 1 см, що відповідає фізіологічним даним [1,3]. Хвильова провідність вздовж шляху зростає (рис.1б) за рахунок більшої кількості шляхів для розповсюдження хвиль по мірі додавання піддерев, що теж відповідає нашим попереднім результатам, отриманим на даних вимірювань [3].

Коефіцієнт відбиття хвиль на кінцевих трубках був покладений достатньо високим ($\Gamma_t = 0.6$), однак за рахунок додавання нових піддерев цей коефіцієнт поступово зменшується до нуля і потім стає від'ємним (рис.1 в), що забезпечує негативне відбиття хвиль і приводить до так званого «ефекту підсмоктування», який був раніше виявлений в артеріальних руслах легенів і серця.

При менших значеннях коефіцієнту відбиття хвиль на кінцевих трубках ефект підсмоктування стає ще більш виразнішим, тобто коефіцієнт відбиття поступово зменшується, а хвильова провідність підвищується по мірі наближення до кореня дерева. Слід зауважити, що при стаціонарних течіях рідини по бінарних деревах трубок імпеданс зростає по мірі додавання нових трубок та гілок дерева. Таким чином, хвильове розповсюдження рідини по дереву забезпечує можливість постачання рідини по все більш складних деревах (з більшим числом генерацій) при зменшенні їх хвильового імпедансу.

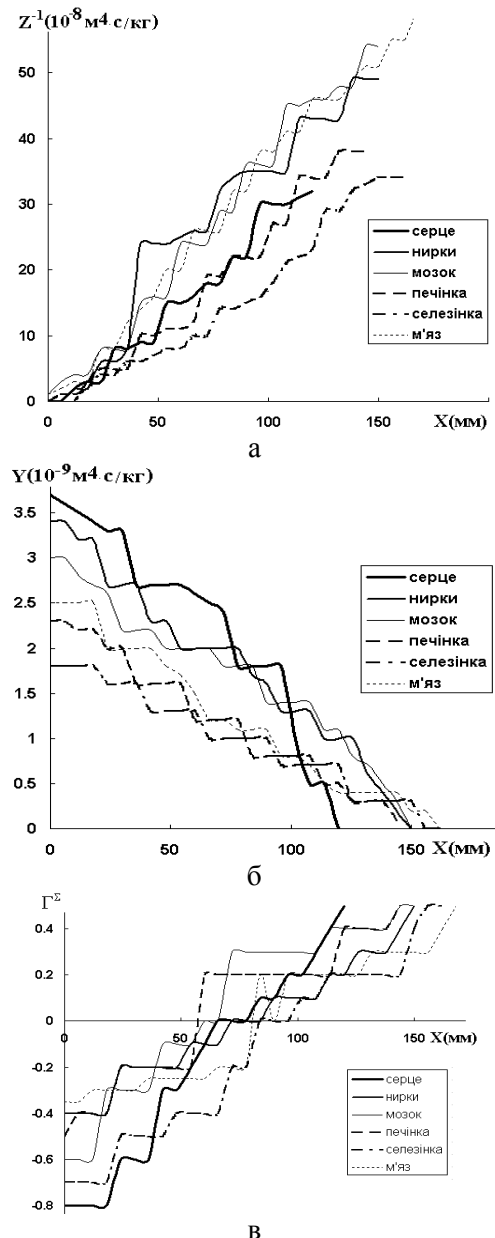


Рис. 1 Розподіли $Z(X)$ (а), $\text{Re}(Y)$ (б) і $\text{Re}(\Gamma^0)$ (в) для моделей різних внутрішніх органів

4. Висновки. Запропоновано алгоритм, який дозволяє будувати моделі артеріальних систем внутрішніх органів, що мають ті ж самі гідравлічні та хвильові властивості, як і реальні артеріальні системи. В таких системах має місце ефект негативного відбиття хвиль, тобто при навіть позитивних коефіцієнтах відбиття хвиль тиску на термінальних розгалуженнях завдяки збільшенню шляхів розповсюдження хвиль та переміщенню крові на певних ділянках системи коефіцієнт відбиття досягає нуля, а потім стає від'ємним, що приводить до розповсюдження відбитих хвиль швидкості не проти течії, а за нею і, таким чином, прискоренню переносу маси (підсмоктуєчий ефект).

Список використаних джерел

1. Vlachopoulos Ch. McDonald's Blood Flow in Arteries: Theoretical, Experimental and Clinical Principles. / Ch. Vlachopoulos, M. O'Rourke, W.W. Nichols. – CRC Press, 2011. – 768 p.
2. Formaggia L. A Cardiovascular Mathematics: Modeling and simulation of the circulatory system. / L. Formaggia, A. Quarteroni, A. Veneziani. Springer Science & Business Media, 2010. – 522 p.
3. Kizilova N. A realistic model of human arterial system: blood flow distribution, pulse wave propagation and modeling of pathology / N. Kizilova, H. Philippova, O. Zenin // *Mechanics in Medicine*. – 2010. – 10. – P.103–118.
4. Зенин О.К. Артериальная система человека в цифрах и формулах. / О.К. Зенин, В.К. Гусак, Г.С. Кирьякулов и др. – Донецк: ООО «Апекс», 2002. – 176 с.
5. Балабанов В.А. Новый алгоритм построения оптимальных транспортных систем, заполняющих заданную область. / В.А. Балабанов, Н.Н. Кизилова // *Механика Исследования и инновации*. – 2016. – 9. – С.18-26.
6. Балабанов В.О. Математичне моделювання артеріальних систем як бінарних дерев, які заповнюють об'єм простору / В.О. Балабанов, Н.М. Кизилова // *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки*. – 2015. – Спец-випуск. – С.27–32.
7. Зенин О.К. Исследование закономерностей строения русла коронарных артерий человека / О.К. Зенин, Н.Н. Кизилова, Е.Н. Филиппова // *Биофизика*. – 2007. – Т.52, №5. – С.924-930.
8. Левтов В.А. Реология крови. / В.А. Левтов, С.А. Регирер, Н.Х. Шадрина. – Москва: Медицина, 1982. – 272с.
9. Chvala A. Computer generated models of intraorgan arterial beds: hydraulic conductivity and input admittance. / A. Chvala, I. Karabash, N. Kizilova, O. Nikitin, Zenin O. ICCSA Conference, 2005. – P.102.

References

1. VLACHOPOULOS, CH., O'ROURKE M. & NICHOLS W.W. (2011) *Blood Flow in Arteries: Theoretical, Experimental and Clinical Principles*. CRC Press.
2. FORMAGGIA, L., QUARTERONI, A. & VENEZIANI, A. (2010) *Cardiovascular Mathematics: Modeling and simulation of the circulatory system*. Springer Science & Business Media.
3. KIZILOVA, N., PHILIPPOVA, H. & ZENIN, O. (2010) A realistic model of human arterial system: blood flow distribution, pulse wave propagation and modeling of pathology. *Mechanics in Medicine*. 10. p.103–118.
4. ZENIN, O. K., GUSAK V.K., & KIRYAKULOV G.S. (2002) *Arterialnaya sistema cheloveka v tsyfrakh i formulakh*. Donetsk: ООО Апекс.
5. BALABANOV, V. & KIZILOVA N. (2016) Novyi algoritm postroienia optimalnykh transportnykh sistem, zapolniaiushchih zadannuiu oblast. *Mehanika. Issledovaniia I innovatsii*. 9. p.18-26.
6. BALABANOV, V. & KIZILOVA N. (2015) Matematychni modeliuvannia arterialnykh system yak binarnykh derev, yaki zapovniuiut obiem prostoru. *Visnyk Kyivskogo natsionalnogo universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Serii: Fyzyko-matematychni nauky*. Spetsvypusk. p.27-37.
7. ZENIN, O., KIZILOVA, N. & FILIPPOVA, E. (2007) Issledovaniie zakonomernostei stroieniia rusla koronarnykh arterii cheloveka. *Biofizika*. 52 (5).p.924-930.
8. LEVTOV, V., REGIRER, S. & SHADRINA, N. (1982) *Reologiya krovi*. Moskva: Meditsyna.
9. CHVALA, A., KARABASH I., KIZILOVA, N, et al. (2005) Computer generated models of intraorgan arterial beds: hydraulic conductivity and input admittance. *In ICCSA Conference*. p. 102.

Надійшла до редколегії 31.08.17

УДК 539.375

Богданова О.С.¹, к.ф.-м.н., ст.наук.співр.

**Про вплив двовісності навантаження на
початкові етапи руйнування
ортотропної в'язкопружної пластини з
тріщиною**

¹ Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН
України, 03057, Київ, вул. Нестерова, 3,
e-mail: o.bogdanova@i.ua

Bogdanova O.S.¹, Ph.D. (Phys.-Math.)

**On the influence of the biaxial loading on the
initial stages of the fracture of an orthotropic
viscoelastic plate with a crack**

¹ The S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the
National Academy of Sciences of Ukraine, 03057,
Kyiv, Nesterov str, 3,
e-mail: o.bogdanova@i.ua

На основі запропонованої модифікованої моделі тріщини Леонова – Панасюка - Дагдейла досліджено початкові етапи докритичного росту тріщини нормального відриву в ортотропній в'язкопружній пластині, матеріал якої задовольняє умові міцності довільного вигляду, під дією постійного в часі двовісного зовнішнього навантаження. Для визначення реологічних характеристик матеріалу застосовано метод ланцюгових дробів. На підставі принципу Вольтерра та отриманого раніше розв'язку відповідної пружної задачі теорії тріщин отримано співвідношення для визначення в'язкопружного розкриття у вершині тріщини, рівня безпечних навантажень, а також тривалості інкубаційного та перехідного періодів докритичного росту тріщини. В рамках δ_c -критерію руйнування досліджено вплив двовісності зовнішнього навантаження на безпечне навантаження пластини з тріщиною та докритичний розвиток тріщини в пластині, матеріал якої задовольняє умові міцності Мізеса – Хілла.

Ключові слова: тріщина, двовісність навантаження, в'язкопружність, ортотропний матеріал.

The subcritical propagation of the mode I crack in orthotropic viscoelastic plate under time-constant biaxial external loading is investigated on the basis of the proposed generalization of Leonov – Panasyuk - Dagdale crack model for the case of orthotropic materials, which satisfy a strength condition of arbitrary form. The crack is directed along one of the anisotropy axes with external loads being applied in parallelly and perpendicularly to it. For finding of rheological characteristics of material the method of operator continued fractions is applied. The relationships for determining of viscoelastic crack opening displacement, safe loading of cracked plate and duration of incubational and transitional periods of crack propagation are determined on the base of Volterra principle and solution of corresponding elastic problem of crack theory. The influence of the biaxiality of external loading on the safe loading of a cracked plate and the subcritical crack growth is analyzed within the framework of the critical crack opening criterion by the example of the Mises-Hill strength condition.

Key Words: crack, biaxial loading, viscoelasticity, orthotropic material.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Consider a thin orthotropic plate with a crack of length $2l(t)$ oriented along the Ox -orthotropy axis and acted upon by the normal time-independent loads $\sigma_x^\infty = q$, $\sigma_y^\infty = p > 0$ applied at infinity.

Fracture of the plate material is described by the strength criterion in the general form

$$F(\sigma_1, \sigma_2, C_i) = 0, \quad (1)$$

where σ_1 , σ_2 are the principal stresses, C_i is the material constants.

As an example the Mises-Hill criterion as the strength condition (1) is considered. This criterion in the case of a plane stress state is described by

$$\frac{\sigma_x^2}{(\sigma_1^0)^2} + \frac{\sigma_y^2}{(\sigma_2^0)^2} - \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_1^0 \sigma_2^0} = 1, \quad (2)$$

where σ_1^0, σ_2^0 are the ultimate strengths in the x- and y-axis directions, respectively. Numerical calculations are made for $\sigma_1^0/\sigma_2^0 = 0,8$.

To investigate long-term crack propagation by means of the theory of subcritical crack growth in orthotropic viscoelastic material the modified Dugdale's model [2] is applied.

The solution of viscoelastic problem is obtained as a result of application the Volterra principle to the known analytical solution [1]. The viscoelastic displacement of crack faces on the interval $[l(t), L(t)]$ are expressed as

$$\delta(x, t) = T^* \cdot \delta_0(x, t), \quad (3)$$

where $\delta_0(x, t)$ and T^* are defined from corresponding elastic solution [2].

For investigation of crack growth the function of integral operator T^* is presented in the form which allow using the method of integral continued fraction

$$T^* = T_0 \left[1 + \sum_{j=1}^7 \mu_j R^*(\gamma_j) \right], \quad (4)$$

$$\text{where } T_0 = \frac{1}{\sqrt{E_1^0 E_2^0}} \sqrt{2 \left(\sqrt{\frac{E_1^0}{E_2^0}} - \nu_{21}^0 \right) + \frac{E_1^0}{G_{12}^0}};$$

$$\gamma_i = \beta_i - 0,25\lambda_i, i=1,2; \quad \gamma_i = \beta_{i-2}^0, i=3,7;$$

$$\mu_1 = 0,5\lambda_1 \left(1 + \frac{0,5\lambda_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \right) \left(1 + 0,5 \sum_{j=1}^5 \frac{\lambda_j^0}{\gamma_1 - \beta_j^0} \right);$$

$$\mu_2 = 0,5\lambda_2 \left(1 + \frac{0,5\lambda_1}{\gamma_2 - \gamma_1} \right) \left(1 + 0,5 \sum_{j=1}^5 \frac{\lambda_j^0}{\gamma_2 - \beta_j^0} \right); \quad (5)$$

$$\mu_i = 0,5\lambda_{j-2}^0 \left(1 + \frac{0,5\lambda_1}{\beta_{i-2}^0 - \gamma_1} \right) \left(1 + \frac{0,5\lambda_2}{\beta_{i-2}^0 - \gamma_2} \right), i=3,7;$$

$\beta_j^0 (j=1,5)$ are roots of the equation

$$\left(1 - 0,25 \sum_{i=1}^5 \frac{\lambda_i'}{\beta_i' - \beta^0} = 0 \right);$$

$\lambda_j^0 (j=1,5)$ are solutions of equation system

$$\left(1 - \sum_{j=1}^5 \frac{\lambda_j^0}{\beta_i' - \beta_j^0} = 0; i=1,5 \right);$$

$$\lambda_1' = -\frac{\sqrt{E_1^0/E_2^0}}{\kappa} \lambda_1 \left(1 + \frac{0,5\lambda_2}{\beta_1' - \beta_2'} \right);$$

$$\lambda_2' = -\frac{\sqrt{E_1^0/E_2^0}}{\kappa} \lambda_2 \left(1 + \frac{0,5\lambda_1}{\beta_1' - \beta_2'} \right);$$

$$\lambda_3' = -\frac{E_{11}^0/G_{12}^0}{\kappa} \lambda_1 \left(1 - \frac{\lambda_G}{\beta_5' - \beta_3'} \right); \quad \lambda_4' = -2 \frac{\nu_{21}^0}{\kappa} \lambda_\nu;$$

$$\lambda_5' = \frac{E_{11}^0/G_{12}^0}{\kappa} \lambda_G \left(1 - \frac{\lambda_1}{\beta_5' - \beta_3'} \right);$$

$$\beta_i' = \beta_i - 0,75\lambda_i, i=1,2; \quad \beta_3' = \beta_1 - \lambda_1; \quad \beta_4' = \beta_\nu;$$

$$\beta_5' = \beta_G; \quad \kappa = 2 \left(\sqrt{\frac{E_1^0}{E_2^0}} - \nu_{21}^0 \right) + \frac{E_1^0}{G_{12}^0}.$$

Consider as the kernels of integral operators in (4) the Rabotnov function. As a numerical example composite with quartz material and polyethylene matrix is investigated [1].

For viscoelastic bodies of deformation are described by a bounded operator there is a safe level of external loading when crack growth does not occur for an arbitrarily large time [1]. The safe loading P_s is given by

$$\frac{\delta_c}{\delta(l, P_s)} = \frac{T_\infty}{T_0}, \quad (6)$$

$$\text{where } T_\infty = T_0 \left\{ 1 + \sum_{i=1}^7 \frac{\mu_i}{|\gamma_i|} \right\} \quad T_0 = T^* \cdot 1|_{t=0}.$$

In considered case the safe loading is determining by

$$\begin{aligned} \sigma_y^0(p_s, q_s) \ln \cos \frac{\pi p_s}{2\sigma_y^0(p_s, q_s)} = \\ = \frac{T_0}{T_\infty} \sigma_y^0(p_*^{(0)}, 0) \ln \cos \frac{\pi p_*^{(0)}}{2\sigma_y^0(p_*^{(0)}, 0)} \end{aligned} \quad (7)$$

where $p_*^{(0)}$ is the ultimate load in uniaxial tension.

Fig.1 shows the safe loading fields obtained on the base of (7) for various loads $p_*^{(0)}/\sigma_2^0$. Dash-dotted line corresponds to Mises-Hill strength condition (2), solid lines correspond to the safe loads (p_s, q_s) , dashed lines correspond to ultimate loads (p_*, q_*) defined by according to the δ_c -criterion [2]

$$\begin{aligned} \sigma_y^0(p_*, q_*) \ln \cos \frac{\pi p_*}{2\sigma_y^0(p_*, q_*)} = \\ = \sigma_y^0(p_*^{(0)}, 0) \ln \cos \frac{\pi p_*^{(0)}}{2\sigma_y^0(p_*^{(0)}, 0)} \end{aligned} \quad (8)$$

It should be noted that growth of crack in viscoelastic body with limited creep will take place only if the load are ranged by curves defined in (7) and (8).

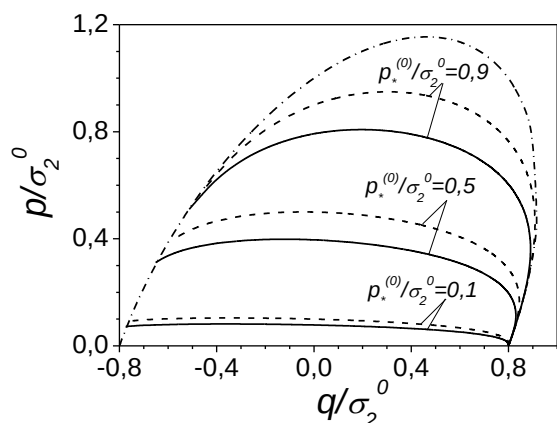


Fig.1. The safe loading fields

During the *incubation period* ($0 < t \leq t_*$) there is opening of crack without its growth. When the external loading is not changed over time, the duration of the incubation period t_* is determined by [1]

$$\begin{aligned} t_*^{1-\alpha} \sum_{j=1}^7 \mu_j \Phi_2(\alpha, \gamma_j t_*^{1-\alpha}) = \\ = \frac{\sigma_y^0(p_*^{(0)}, 0) \ln \cos \frac{\pi p_*^{(0)}}{2\sigma_y^0(p_*^{(0)}, 0)}}{\sigma_y^0(p, q) \ln \cos \frac{\pi p}{2\sigma_y^0(p, q)}} - 1 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{where } \Phi_2(\alpha, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma[(n+1)(1-\alpha)+1]}.$$

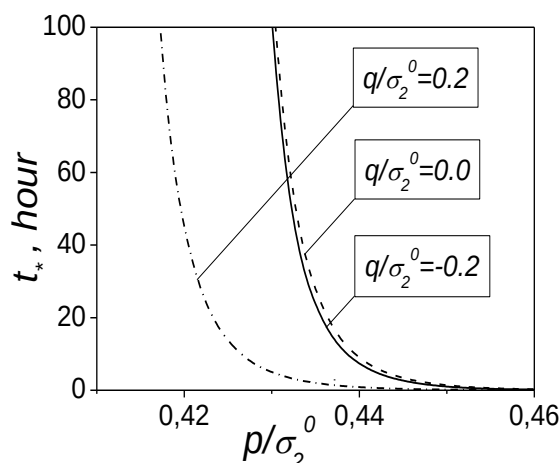


Fig. 2a. The incubational period durability t_* related to external loading p/σ_2^0

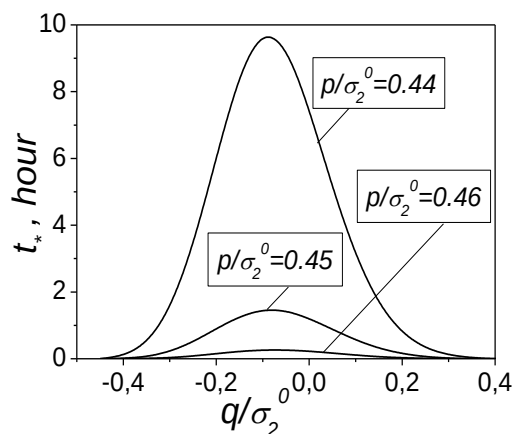


Fig.2b. The incubational period durability t_* related to external loading q/σ_2^0

Fig.2 shows the durability of incubational period which obtained on base of equation (9) for $p_*^{(0)}/\sigma_2^0 = 0.5$.

During the *transition period* ($t_* < t \leq t_l$), the crack begins its motion and travels a distance equal to the initial size of the process zone. This period begins with $t = t_*$ and continues until t_l when the crack length reaches a value $l_l = l_0 + d$. In considered case the durability of transitional period Δt_l is defined by

$$k(\alpha)(\Delta t_I)^{1-\alpha} \sum_{j=1}^7 \mu_j \Phi_2(\alpha, \gamma_j (\Delta t_I)^{1-\alpha}) = \frac{\sigma_y^0(p^*(0), 0) \ln \cos \frac{\pi p^*(0)}{2\sigma_y^0(p^*(0), 0)}}{\sigma_y^0(p, q) \ln \cos \frac{\pi p}{2\sigma_y^0(p, q)}} - 1, \quad (10)$$

$$\text{where } k(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(2-\alpha)}{2(2-\alpha) \Gamma(2,5-\alpha)}.$$

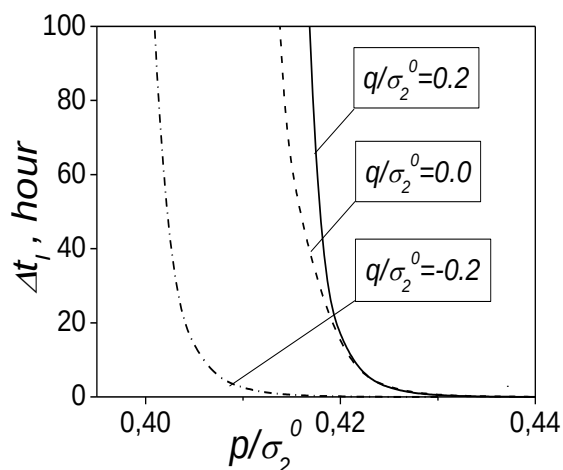


Fig.4a. The incubational period durability Δt_I related to external loading p/σ_2^0

Fig.4 shows the durability of transitional period Δt_I for $p^*(0)/\sigma_2^0 = 0,5$.

Список використаних джерел

1. Каминский А. А. Механика разрушения вязкоупругих тел с трещинами / А.А.Каминский. — Київ: Наук. думка, 1990. — 310 с.
2. Kaminsky A. A. On modeling cracks in orthotropic plates under biaxial loading: synthesis and summary / A. A. Kaminsky, O. S. Bogdanova, V. N. Bastun // *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. — 2011. — 34, № 5. — P.345–355.

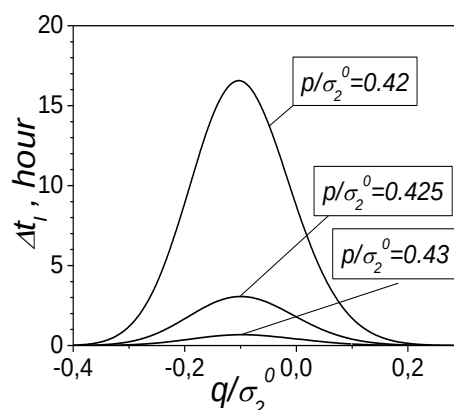


Fig.4b. The incubational period durability Δt_I related to external loading q/σ_2^0 .

As can be seen from the results, a component of the external loading acting along the crack has a significant influence on the level of safe loading and the duration of different periods of subcritical crack growth in a viscoelastic body.

Thus, the proposed generalization of the Dugdale crack model on the case of orthotropic materials can efficiently solve not only problems of fracture mechanics of elastic bodies, but the problem of long-term fracture of bodies with cracks too.

References

1. KAMINSKY, A.A. (1990) *Mechnika razrusheniya vyazkouprugih tel s treschinmi*. Kiev: Naukova dumka.
2. KAMINSKY, A.A., BOGDANOVA, O.S. and BASTUN, V.N. (2011) On modeling cracks in orthotropic plates under biaxial loading: synthesis and summary. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 34 (5). p.345–355.

Надійшла до редколегії 29.08.2017

УДК 539.:534.1

Борисейко О. В.¹, к. ф.-м. н., доц.,
Денисенко В. І.², к. ф.-м. н., доц.,
Діденко Ю.Ф.², к. ф.-м. н., доц.

Коливання циліндричної п'єзооболонки, заповненої рідиною

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4е,

² Київський національний торговельно-
економічний університет, 02156, м. Київ, вул.
Киото, 19,
e-mail: ¹b12313@ukr.net, ² d0212@ukr.net

O.V. Boryseiko¹, Ph.D. (Phys.-Math.),
V.I. Denysenko², Ph.D. (Phys.-Math.),
Yu.F. Didenko², Ph.D. (Phys.-Math.).

Vibrations of cylindrical piezoceramic shells filled with liquid

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Acad. Glushkova pr., 4-e,

²Kyiv National University of Trade and Economics,
02156, Kyiv, Kioto str., 19,
e-mail: ¹b12313@ukr.net, ²d0212@ukr.net

Розглядаються стаціонарні коливання п'єзокерамічної циліндричної оболонки з товщиною поляризацією під дією гармонічного за часом зовнішнього механічного навантаження. Оболонка скінченної довжини закрита з торців жорсткими пластинами і заповнена невязкою стисливою рідиною. Циліндричні поверхні оболонки повністю покриті електродами, які вважаються розімкненими. Записані рівняння осесиметричних коливань п'єзокерамічної оболонки та рівняння малих коливань рідини. Наведено розподіл напруженості електричного поля, яке виникає внаслідок розтягу елемента оболонки, в залежності від частоти коливань.

Ключові слова: п'єзооболонка, осесиметричні коливання, зовнішній тиск, жорстка пластина, малі коливання рідини.

The stationary vibrations of a piezoceramic cylindrical shell with a thick polarization under the influence of external mechanical load harmonic in time are considered. The shell has a finite length and is closed on the ends with absolutely rigid heavy plates. It filled with a nonviscous compressible liquid. The cylindrical surfaces of the shell are full of electrodes, which are considered open. The investigation of oscillations of the described piezoceramic shell was carried out on the basis of the applied theory of deformation of piezoceramic elements, similar to the Kirchhoff-Love hypothesis. The equations of axisymmetric vibrations of the piezoceramic shell and the equation of small vibrations of the liquid are obtained. The distribution of the radial component of electric field intensity, which arises due to the stress-strain of the shell element along the generatrix of shell, is given, depending on the frequency of vibrations. The distribution of the electric field intensity is practically the same for all considered values of the relative thickness of the end plates, ranging from statics to the resonance frequency of purely longitudinal fluid fluctuations.

Key Words: a piezoceramic shell, axisymmetric vibration, external pressure, rigid plate, small vibrations of liquid.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ. У більшості модельних задач дослідження зв'язаних електромеханічних полів, що виникають у п'єзокерамічних елементах, розглядаються зразки канонічної ідеалізованої форми. Також у більшості таких задач не враховується вплив зовнішнього середовища та конструкційні особливості умов закріплення елементів. Наприклад, у класичних модельних задачах про радіальні коливання як тонкостінних, так і товстостін-

них циліндричних п'єзоболонки розглядаються оболонки нескінченної довжини. Результати, отримані у такій постановці у багатьох випадках вимагають уточнення для відповідних конкретних конструкційних елементів. Для оболонок скінченної довжини важливим є не тільки врахування умов закріплення п'єзокерамічного елемента, а й кінематичної складеності руху частинок матеріалу, а також можливої відмінності

механічних характеристик зовнішнього та внутрішнього середовищ оболонки, що призводить до значного ускладнення задачі.

У роботі розглядаються коливання кругової циліндричної п'єзокерамічної оболонки з товщиною поляризацією під дією гармонічного у часі зовнішнього механічного навантаження. Оболонка скінченної довжини, закрита на торцях абсолютно жорсткими важкими пластинами, заповнена ідеальною стисливою рідиною, коливання частинок якої теж вносять свій внесок у розподіл компонентів електричного поля в матеріалі оболонки. Метою досліджень є визначення радіальної складової напруженості електричного поля, що виникає внаслідок деформацій розтягу-стиску у напрямку твірної оболонки та впливу на вказану характеристику розмірів торцевих пластин.

2. Постановка задачі

Розглядається задача про усталені коливання кругової циліндричної оболонки товщини h та довжини $2l$, поляризованої у радіальному напрямку. З торців оболонка щільно закрита круглими абсолютно жорсткими пластинами товщини h_1 . Циліндричні поверхні оболонки $r = r_1, r_2$ суцільним чином покриті тонкими поверхневими електродами, які у даній задачі вважаються розімкненими. Оболонка заповнена нев'язкою стисливою рідиною. Коливання оболонки відбуваються під дією гармонічного у часі зовнішнього тиску сталої амплітуди $p_0 \cos \omega t$ (рис. 1).

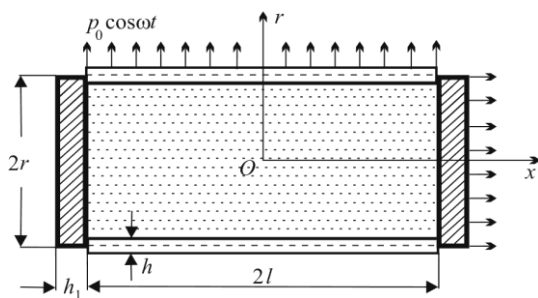


Рис. 1 П'єзокерамічна оболонка, заповнена рідиною, під дією зовнішнього тиску

Дослідження коливань п'єзокерамічної оболонки проводиться на основі положень прикладної теорії деформування п'єзокерамічних елементів, аналогічній гіпотезам Кірхгофа-Лява [2]. Оскільки розглядаються усталені коливання, то всі наступні позначення величин вважаються позначеннями відповідних амплітуд.

Деформації в точках оболонки обчислюються за формулами [3]:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^{(0)} + z\chi_x; \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\varphi^{(0)} + z\chi_\varphi. \quad (1)$$

Тут z – товщинна координата оболонки, направлена всередину перпендикулярно до її серединної поверхні.

Деформації розтягу серединної поверхні $\varepsilon_x^{(0)}$, $\varepsilon_\varphi^{(0)}$ та зміни головних кривизн χ_x , χ_φ зв'язані з меридіональними переміщеннями u та прогином w в точках серединної поверхні наступними співвідношеннями (осесиметрична деформація):

$$\varepsilon_x^{(0)} = \frac{du}{dx}; \quad \varepsilon_\varphi^{(0)} = \frac{w}{r_0}; \quad \chi_x = -\frac{d^2 w}{dx^2}; \quad \chi_\varphi = 0. \quad (2)$$

У тонких п'єзокерамічних оболонках з товщиною поляризацією нормальні компоненти векторів напруженості електричного поля E_z та індукції D_z наближено можна подати у вигляді [2]:

$$E_z = E_z^{(0)}(x) + zE_z^{(1)}(x); \quad D_z = D_z^{(0)}(x), \quad (3)$$

$$\text{де } E_z^{(1)}(x) = -\frac{1}{d_{31}} \cdot \frac{k_p^2}{1+k_p^2} (\chi_x + \chi_\varphi) \quad (4)$$

внутрішнє електричне поле, яке виникає внаслідок чистого згину елемента оболонки; d_{31} – п'єзоелектрична стала; k_p – статичний планарний коефіцієнт електромеханічного зв'язку; $E_z^{(0)}$ – електричне поле, яке виникає внаслідок розтягу елемента оболонки.

Рівняння руху тонких п'єзокерамічних оболонок з товщиною поляризацією отримані у роботі [2]. У даному випадку осесиметричних коливань циліндричної оболонки вирази для інтегральних характеристик механічного поля – зусиль N_x , N_φ та моментів M_x , M_φ , – а також для електричної індукції $D_z^{(0)}$ мають вигляд:

$$N_x = D_N [\varepsilon_x^{(0)} + \nu \varepsilon_\varphi^{(0)} - d_{31}(1+\nu)E_z^{(0)}];$$

$$N_\varphi = D_N [\nu \varepsilon_x^{(0)} + \varepsilon_\varphi^{(0)} - d_{31}(1+\nu)E_z^{(0)}]; \quad (5)$$

$$M_x = \bar{D}_M [\chi_x + \bar{\nu} \chi_\varphi]; \quad M_\varphi = \bar{D}_M [\bar{\nu} \chi_x + \chi_\varphi];$$

$$D_z^{(0)} = \varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2) \left[E_z^{(0)} + \frac{1}{2d_{31}} \cdot \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} (\varepsilon_x^{(0)} + \varepsilon_\varphi^{(0)}) \right]. \quad (6)$$

Тут жорсткості оболонки на розтяг D_N , згин $\bar{D}_M$ та приведений коефіцієнт Пуассона $\bar{\nu}$ знаходяться за формулами:

$$D_N = \frac{h}{s_{11}^E(1-\nu^2)}; \bar{D}_M = \frac{h}{12s_{11}^E(1-\nu^2)} \left(1 + \frac{1+\nu}{2} \cdot \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \right);$$

$$\bar{\nu} = \frac{\nu + \frac{1+\nu}{2} \cdot \frac{k_p^2}{1-k_p^2}}{1 + \frac{1+\nu}{2} \cdot \frac{k_p^2}{1-k_p^2}}. \quad (7)$$

де $\nu = -\frac{s_{12}^E}{s_{11}^E}$ – коефіцієнт Пуассона, s_{11}^E , s_{12}^E – пружні піддатливості кераміки, виміряні при сталому (нульовому) електричному полі; ε_{33}^T – діелектрична проникність кераміки, виміряна при сталих (нульових) механічних напруженнях.

Рівняння осесиметричних коливань п'єзоке-
рамичної циліндричної оболонки з товщиною
поляризацією отримаємо у вигляді:

$$\alpha h^2 \frac{d^4 w}{dx^4} + \left(\frac{1}{r_0^2} - \lambda^2 \right) w + \frac{\nu}{r_0} \frac{dw}{dx} = \frac{p+p_0}{D_N} + \frac{1+\nu}{r_0} d_{31} E_z^{(0)}$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \lambda^2 w + \frac{\nu}{r_0} \frac{dw}{dx} = 0, \quad (8)$$

де $\alpha = \frac{1}{12} \left(1 + \frac{1+\nu}{2} \cdot \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \right)$; $\lambda = \frac{\omega}{c_k}$; c_k – швидкість звуку в кераміці; ρ – густина кераміки. Систему диференціальних рівнянь (8) слід доповнити наступними граничними умовами на контурі оболонки $x=l$:

$$\frac{dw}{dx} \Big|_{x=l} = 0; \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{x=l} = 0; u \Big|_{x=l} = u_0, \quad (9)$$

де u_0 – амплітуда переміщень торцевої пластини.

Рівняння малих акустичних коливань нев'язкої стисливої рідини, яка наповнює оболонку, має вигляд [4]:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \kappa^2 \Phi = 0, \quad (10)$$

де $\kappa = \frac{\omega}{c_*}$, c_* – швидкість звуку в рідині. Для амплітуди потенціалу швидкостей Φ , амплітуди швидкості частинок рідини $\bar{\nu}$ та тиску в рідині p мають місце наступні співвідношення:

$$\bar{\nu} = -\text{grad } \Phi; p = \omega \rho_* \Phi, \quad (11)$$

де ρ_* – густина рідини.

Граничні умови, які характеризують взаємодію рідини з оболонкою і торцевими пластинами, є рівностями швидкостей частинок рідини і точок поверхонь, до яких вона дотикається:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \omega w(x); \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=l} = \omega u_0. \quad (12)$$

3. Розв'язання крайової задачі

Розв'язок рівняння (10), який задовольняє граничні умови (12), знаходимо, застосувавши інтегральне перетворення Фур'є:

$$\Phi(r, x) = -\omega \left[u_0 \frac{\cos(\kappa x)}{\kappa \sin(\kappa l)} + A_0 \frac{J_0(\kappa r)}{\kappa J_1(\kappa r_0)} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{J_0(\beta_n r)}{\kappa J_1(\beta_n r_0)} \cos \frac{n\pi x}{l} \right], \quad (13)$$

$$\text{де } \beta_n^2 = \kappa^2 - \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2.$$

Тиск у рідині обчислюється за формулою:

$$p(r, x) = -E_* \left[\frac{u_0}{l} \frac{\cos(\kappa x)}{\kappa \sin(\kappa l)} + \frac{A_0}{r_0} \frac{J_0(\kappa r)}{J_1(\kappa r_0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{r_0} \frac{J_0(\beta_n r)}{J_1(\beta_n r_0)} \cos \frac{n\pi x}{l} \right], \quad (14)$$

де $E_* = \rho_* c_*$ – модуль пружності рідини.

Розв'язок системи рівнянь (8), який задовольняє граничним умовам (9), знаходимо у вигляді рядів:

$$w(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l}; u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (15)$$

Тут A_0 , A_n і B_n – коефіцієнти розкладу нормальних w та меридіональних u переміщень точок серединної поверхні оболонки в ряд Фур'є на проміжку $[0; l]$.

Умова розімкнутості електродів, які повністю покривають циліндричні поверхні оболонки, при осесиметричній деформації має вигляд [5]:

$$\frac{1}{l} \int_0^l D_z^{(0)} dx = 0. \quad (16)$$

Звідси, враховуючи співвідношення (6), (2) та граничні умови (9), отримуємо:

$$E_z^{(0)} = -\frac{1}{2d_{31}} \cdot \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \left(\frac{u_0}{l} + \frac{A_0}{r_0} \right). \quad (17)$$

Із системи рівнянь (8) методом Стокса-Грінберга отримуємо рівняння для визначення невідомих A_0 , A_n та B_n з врахуванням співвідношень (9), (14) і (17).

Умову для визначення u_0 формулюємо за допомогою рівняння руху круглої абсолютно жорст

кої торцевої пластини радіуса r_0 і товщини h_1 :

$$\frac{2}{r_0} N_x - \rho_M h_1 \omega^2 u_0 = p_0 + p_{cp}, \quad x=l, \quad (21)$$

де $p_{cp} = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} p(r,l) r dr$ – середній тиск рідини на

пластину; ρ_M – густина матеріалу пластини.

Чисельні розрахунки виконані для п'єзокераміки PZT-4[1] при наступній геометрії оболонки: $r_0 = l$; $h/r_0 = 0,1$. Акустичним середовищем, що наповнює оболонку, вибрана вода; швидкість звуку $c_* = 1500$ м/с, густина $\rho_* = 1000$ кг/м³. Матеріал торцевих пластин – сталь, $\rho_M = 7800$ кг/м³.

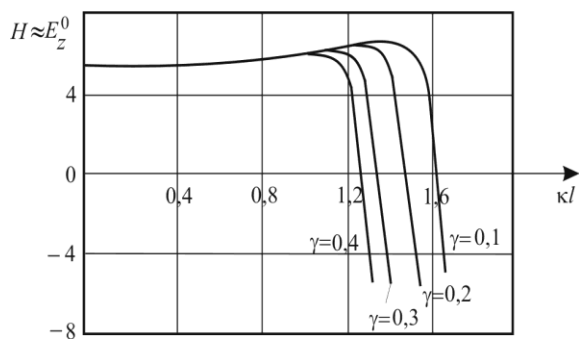


Рис. 2. Напруженість електричного поля.

Список використаних джерел

1. Берлинкур Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе / Физическая акустика. 1 / Под ред. У. Мэзона. – Москва: Мир. – 1966. – С. 204–326.
2. Борисейко В. А. Соотношения электроупругости для пьезокерамических оболочек вращения / В. А. Борисейко, В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко // Прикл. Механика. – 1976. – 12, № 2. – С. 26–33.
3. Гринченко В. Т. Электроупругость / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга / Механика связанных полей в элементах конструкций. 5 / Отв. ред. А. Н. Гузь. – Киев: Наук. Думка. – 1989. – 280 с.
4. Релей Д. Теория звука / Д. Релей. – М.: ГИТТЛ, 1955. – Т. 2. – 474 с.
5. Улитко А. Ф. К теории колебаний пьезокерамических тел / Улитко А. Ф. // Тепл. напряжения в элементах констр. – 1975. – 15. – с. 90–99.

На рис.2. наведено розподіл напруженості електричного поля $E_z^{(0)}$ у залежності від частоти коливань. Розподіл показано для оболонок з відносною товщиною торцевих пластин 0,1; 0,2; 0,3; 0,4.

Видно, що розподіл напруженості електричного поля практично однаковий для всіх чотирьох випадків, починаючи від статички до частоти резонансу чисто поздовжніх коливань рідини. У цьому діапазоні значення напруженості електричного поля майже не залежить від частоти коливань. Зі збільшенням маси торцевих пластин дана область звужується.

4. Висновки

Таким чином, в роботі розглянуто вимушені коливання п'єзокерамічної оболонки, заповненої ідеальною стисливою рідиною, закритої з торців жорсткими пластинами, під дією зовнішнього механічного навантаження. Отримано розподіл напруженості електричного поля $E_z^{(0)}$, яке виникає внаслідок розтягу елемента оболонки, в залежності від частоти коливань та відносної товщини торцевих пластин.

References

1. BERLINKUR, D., CURRAN, D. and JAFFE, G. *Piezoelectricheskye i Piezomagnitniye materialy I ih primeneniye v preobrazovatelyah*. Moskva: Mir.
2. BORISEIKO, V. A., GRINCENKO, V. T. and ULITKO A. F. (1976) *Sootnosheniya elektrouprugosti dlia piezokeramicheskikh obolochek vrashcheniia*. *Prikl.mechanika*. 12 (2). p. 26-33.
3. GRINCENKO V. T., ULITKO A. F. and SCHUL'GA N. A. (1989) *Electroelasticity // Mechanics of conjugated fields in the elements of constructions*. 5 / Edt. A.N. Guz', Ac.Sci. Ukrainian SSR, Inst. Mechanics. Kyiv: Naukova Dumka.
4. RAYLEIGH J. W. (1955) *The Theory of Sound*. Vol.2. Moskva: GITTL.
5. ULITKO A.F. (1975) К теории колебаний piezokeramicheskikh tel. *Teplovyie napriazheniya v elementah konstruktsiy*. 15. p.90-99.

Надійшла до редколегії 19.09.2017

УДК 539.3

Вайсфельд Н. Д., д. ф.-м. н., проф.,
Мойсеєнок О. П., к. ф.-м. н., доц.,
Фесенко Г. О., к. ф.-м. н., доц.

Хвильове поле шару з абсолютно жорстким циліндричним включенням

Одеський національний університет імені
І. І. Мечникова, 65082, м. Одеса, вул.
Дворянська, 2,
e-mail: 81anna81@gmail.com

N. D. Vaysfel'd, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
A. P. Moysyeyenok, Ph.D. (Phys.-Math.),
A. A. Fesenko, Ph.D. (Phys.-Math.).

Wave field of a layer with an absolutely rigid cylindrical inclusion

Odessa I. I. Mechnikov National University, 65082,
Odessa, Dvoryanskaya str., 2,
e-mail: 81anna81@gmail.com

У роботі побудовано наближений розв'язок задачі для нескінченного пружного шару з циліндричним жорстким включенням, зчепленим з ним. На одній з граней шару задано нормальне осесиметричне динамічне стискаюче навантаження, інша грань знаходиться в умовах зчеплення з абсолютно жорсткою основою. Для побудови поля переміщень та напружень у шарі до осесиметричних рівнянь руху задачі застосовано послідовно інтегральні перетворення Лапласа та Вебера, що приводить до одновимірної векторної неоднорідної крайової задачі відносно невідомих трансформант переміщень. Задачу зведено до одновимірного сингулярного інтегрального рівняння на скінченному інтервалі відносно невідомої похідної нормального переміщення. Інтегральне рівняння розв'язано наближено з використанням методу ортогоналізації.

Ключові слова: нескінчений шар, жорстке циліндричне включення, динамічне навантаження, інтегральне перетворення Вебера.

An approximate solution of the problem for an infinite elastic layer with a cylindrical rigid inclusion, coupled with a layer, is constructed in this paper. On one of the faces of the layer a normal axisymmetric dynamic compression load is given, the other face is fixed with an absolutely rigid foundation. To construct a field of the displacements and stresses in a layer to axisymmetric equations motions the integral Laplace and Weber transformation are applied. It leads to a one-dimensional vector inhomogeneous boundary value problem with respect to the unknown transformants displacements. This problem is solved using the matrix differential calculus. The Green function-matrix, the fundamental matrix, and the basis matrices are constructed. The problem is reduced to a one-dimensional singular integral equation on a finite interval of the unknown normal displacement derivative. The integral equation is solved approximately with the use of the orthogonalization method. The solution is concretized for the case of steady oscillations. Normal stresses on the cylindrical surface of the inclusion and on the lower edge of the layer are investigated in order to identify the zones of tensile stresses. The proposed approach allows solving the problem in the case of harmonic loading for various cases of boundary conditions both on the surface of the defect and on the boundaries of the layer.

Key Words: infinite layer, rigid cylinder inclusion, dynamic load, weber integral transformation.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Задачі теорії пружності для нескінченного шару, послабленого різноманітними дефектами канонічної форми, в тому числі циліндричними, розглядалися багатьма авторами в статичній постановці. Складність вказаних задач визначається типом граничних умов на циліндричному дефекті. Найбільш складним вважається випадок, коли на дефекті задано

умови першої основної задачі. В такій постановці наближене розв'язання задач запропоновано у роботах [1,2,3]. Більш простим виявився випадок, коли на циліндричній поверхні задано умови гладкого контакту. Тоді вдається отримати точний розв'язок. Такий розв'язок для півпростору отримано у [8]. Ключовим моментом в його побудові є використання інтегрального перетворення типу Вебера. Найбільш загальний вид таких перетворень отримано в [4]. У роботі

[5] побудовано розв'язок задачі для шару з циліндричним включенням та запропоновано метод, що базується на застосуванні векторного інтегрального перетворення типу Вебера без використання уявлень Папковича - Нейбера, що суттєво спростило розв'язання задачі.

У запропонованій роботі розглянуто динамічну задачу теорії пружності для нескінченного шару за наявності жорстко закріпленого циліндричного включення.

2. Постановка задачі та її розв'язання

Пружний шар з модулем зсуву G , коефіцієнтом Пуассона μ та густиною ρ , в циліндричній системі координат описується співвідношеннями $a \leq r \leq \infty$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq z \leq h$ (рис. 1).

На грані $z = h$ діє осесиметричне нормальне динамічне стискаюче навантаження

$$\sigma_z(r, h, t) = -p(r, t), \tau_{zr}(r, h, t) = 0.$$

На грані $z = 0$ задано умови жорсткого закріплення

$$u_z(r, 0, t) = 0, u_r(r, 0, t) = 0.$$

В області контакту жорсткого включення з шаром задано умови другої основної задачі теорії пружності

$$u_z(a, z, t) = 0, u_r(a, z, t) = 0.$$

Необхідно побудувати поле переміщень точок пружного шару $u_r(r, z, t) \equiv u(r, z, t)$,

$u_z(r, z, t) \equiv w(r, z, t)$, що задовольняють осесиметричним рівнянням руху

$$\begin{aligned} r^{-1}[ru']' - r^{-2}u + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}u'' + \frac{2}{\kappa+1}w' &= \\ &= \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(r, z, t)}{\partial t^2} \\ r^{-1}[rw']' + \frac{\kappa+1}{\kappa-1}w'' + \frac{2}{\kappa-1}r^{-1}[ru']' &= \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w(r, z, t)}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

де штрих означає похідну за змінною r , а крапка – за змінною z , $c = \sqrt{G/\rho}$ – швидкість розповсюдження поперечної хвилі, $\kappa = 3 - 4\mu$.

Використаємо безрозмірні координати

$$\rho = a^{-1}r, \xi = h^{-1}z, \tau = c^{-1}at,$$

$$u(r, z, t) = U(\rho, \xi, \tau), w(r, z, t) = W(\rho, \xi, \tau).$$

Використаємо перетворення Лапласа за змінною τ та перетворення Вебера по λ [4,5].

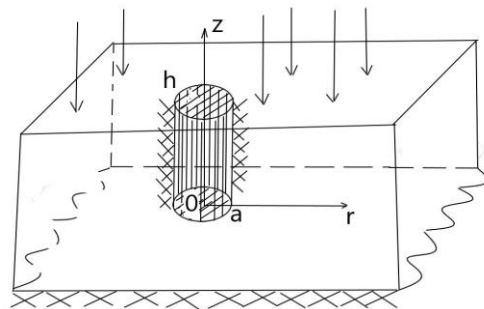


Рис.1. Геометрична схема задачі

Введемо до розгляду наступні вектори

$$\mathbf{y}(z) = \begin{pmatrix} U_{p\lambda}(\xi) \\ W_{p\lambda}(\xi) \end{pmatrix}, \mathbf{f}(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi(\xi)\alpha^{-2} \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \chi_0(1, \lambda) \end{pmatrix}$$

та постійні матриці $\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \mathbf{T}, \mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}$.

Запишемо граничні функціонали

$$U_0[\mathbf{y}(\xi)] = \mathbf{I} \cdot \mathbf{y}(0),$$

$$U_1[\mathbf{y}(\xi)] = \lambda_* \mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{y}(1) + \mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{y}'(1)$$

та диференціальний оператор

$$\begin{aligned} L_2 \mathbf{y}(\xi) &\equiv \mathbf{I} \cdot \mathbf{y}''(\xi) + 2\lambda_* \mathbf{Q} \cdot \mathbf{y}'(\xi) - \\ &- \lambda_*^2 \mathbf{P} \cdot \mathbf{y}(\xi) - \gamma^2 \sigma^2 \mathbf{T} \cdot \mathbf{y}(\xi), \quad \gamma = p/\alpha. \end{aligned}$$

Враховуючи це, можемо записати задачу у векторній формі

$$\begin{cases} L_2 \mathbf{y}(\xi) = \mathbf{f}(\xi), & 0 < \xi < 1 \\ U_i[\mathbf{y}(\xi)] = \gamma_i, & i = 0, 1 \end{cases} \quad (1)$$

де $\gamma_0 = (0, 0)^T$, $\gamma_1 = (-A_* p_{p\lambda}, 0)^T$.

Розв'язок задачі (1) має вигляд [7]

$$\mathbf{y}(\xi) = \int_0^1 \mathbf{G}(\xi, \eta) \mathbf{f}(\eta) d\eta + \Psi_0(\xi) \cdot \gamma_0 + \Psi_1(\xi) \cdot \gamma_1,$$

де функцію-матрицю Гріна побудовано за формулою

$\mathbf{G}(\xi, \eta) = \Phi(\xi, \eta) - \Psi_0(\xi) \cdot U_0[\Phi] - \Psi_1(\xi) \cdot U_1[\Phi]$,
 $\Phi(\xi, \eta)$ – фундаментальна функція-матриця,
 $\Psi_0(\xi), \Psi_1(\xi)$ – базисні матриці.

Спочатку отримаємо загальний розв'язок однорідного рівняння з (1), для чого розв'яжемо відповідне однорідне матричне рівняння

$$L_2 \mathbf{Y}(\xi) = 0, \quad 0 < \xi < 1.$$

Після використання теореми про лишки, отримано

$$\mathbf{Y}_{\mp}(\xi) = \pm \frac{e^{\mp \lambda_* \xi}}{\lambda_* \gamma} \begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa+1} \lambda_*^2 - \gamma^2 \sigma^2 \frac{1}{2} \frac{\kappa-1}{\kappa+1} & \mp \frac{1}{\kappa-1} \lambda_*^2 \\ \pm \frac{1}{\kappa+1} \lambda_*^2 & \frac{1}{\kappa+1} \lambda_*^2 - \gamma^2 \sigma^2 \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Базисні матриці розшукуємо у формі

$$\Psi_i(\xi) = \mathbf{Y}_-(\xi) \mathbf{C}_i^0 + \mathbf{Y}_+(\xi) \mathbf{C}_i^1, \quad i = 0, 1,$$

із задач

$$\begin{cases} L_2 \Psi_i(\xi) = 0, \\ U_j[\Psi_i(\xi)] = \delta_{ij}, i, j = 0, 1, \end{cases}$$

де δ_{ij} – символ Кронекера, $C_i^0, C_i^1, i = 0, 1$ – постійні матриці 2×2 .

Фундаментальну функцію-матрицю $\Phi(\xi, \eta)$ побудовано з використанням інтегрального перетворення Фур'є та теореми про лишки.

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{M}_1(i\zeta)}{\det \mathbf{M}_1} e^{-i\zeta(\xi-\eta)} d\zeta,$$

де визначник матриці

$$\det \mathbf{M}_1 = (\zeta^2 + \lambda_*^2)(\zeta^2 + (\lambda_*^2 + \tilde{\gamma})).$$

Після знаходження вектору трансформант переміщень, використаємо обернені інтегральні перетворення і отримаємо поле вихідних переміщень.

Розглянемо випадок сталих коливань. Тоді параметр Лапласа $p = i\omega$, $p^2 = -\omega^2$, ω – кругова частота коливань. Переміщення мають вигляд

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U(\rho, \xi; \omega) \\ W(\rho, \xi; \omega) \end{pmatrix} &= \int_0^1 \chi(\eta) \int_0^\infty \frac{\lambda \chi_0(1, \lambda)}{\alpha^2 (J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda))} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \chi_1(\rho, \lambda) F_*(\xi, \eta, \lambda; \omega) \\ \chi_0(\rho, \lambda) F(\xi, \eta, \lambda; \omega) \end{pmatrix} d\lambda d\eta + \\ &+ \frac{a}{2G\mu_0} \int_0^\infty \frac{1}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)} \frac{p_\lambda}{\det \psi} \cdot \begin{pmatrix} \chi_1(\rho, \lambda) \psi_{11}(\lambda, \xi) \\ \chi_0(\rho, \lambda) \psi_{12}(\lambda, \xi) \end{pmatrix} d\lambda, \end{aligned} \quad (2)$$

де $F_*(\xi, \eta, \lambda; \omega)$, $F(\xi, \eta, \lambda; \omega)$ – відомі функції, $\psi_{11}(\lambda, \xi)$, $\psi_{12}(\lambda, \xi)$ – відомі компоненти базисної матриці $\Psi_1(\xi)$, $\chi(\eta) = W'(1, \eta)$ – невідома функція, $\chi_i(\rho, \lambda) = J_i(\rho\lambda)N_1(\lambda) - N_i(\rho\lambda)J_1(\lambda)$, $J_i(\lambda)$ – функція Бесселя, $N_i(\lambda)$ – функція Неймана ($i = 0, 1$).

Для відшукування невідомої функції $\chi(\eta) = W'(1, \eta)$ задовольним залишеній крайовій умові $W(1, \xi) = 0$ на циліндричній поверхні $\rho = 1$, $0 < \xi < 1$. Отримаємо інтегральне рівняння у вигляді

$$\begin{aligned} \int_0^1 \chi(\eta) \int_0^\infty \frac{\lambda \chi_0^2(1, \lambda) F(\xi, \eta, \lambda; \omega)}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda)} d\lambda d\eta = \\ = A \int_0^\infty \frac{\chi_0(1, \lambda) \cdot p_\lambda}{J_1^2(\lambda) + N_1^2(\lambda) \det \psi} \psi_{12} d\lambda. \quad (3) \end{aligned}$$

Розглянемо характер особливості невідомої функції на границях проміжку інтегрування. На циліндричній поверхні та на нижній границі шару задано умови жорсткого закріплення, тому при $\xi = 0$ маємо випадок «закріплення /

закріплення». Для $\xi = 1$ отримаємо ситуацію «напруження / закріплення», порядок особливості позначимо β .

Розв'язок інтегрального рівняння (3) будемо у формі [7]

$$\chi(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta^\gamma (1-\eta)^\beta P_n^{\gamma, \beta} (1-2\eta^2) x_n = \sum_{n=0}^{\infty} q_n^{\gamma, \beta} x_n, \quad (4)$$

x_n – невідомі, $P_n^{\gamma, \beta}$ – поліноми Якобі.

Після підстановки ряду (4) в рівняння (3) та використання методу ортогоналізації, отримаємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь 1-го роду

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_{mn} \cdot x_n = f_m, \quad m = \overline{0, \infty}. \quad (5)$$

Систему (5) розв'язано за допомогою методу редукції. Після знаходження невідомих x_n , подання (4) підставляється у вираз для переміщень (2).

На основі побудованих переміщень знайдемо нормальні напруження $\sigma_r(\rho, \xi)$, $\sigma_z(\rho, \xi)$.

3. Результати розрахунків та їх аналіз

Чисельні розрахунки проводилися для сталого шару, радіус включення якого дорівнює половині товщини шару ($a = h/2$, $\alpha = 1/2$), під дією нормального до поверхні шару гармонічного навантаження, пропорційного модулю зсуву $p(r, t) = Gp(r)e^{i\omega t}$, $p(r) = (r^2 + C^2)^{-1}$, $C = \text{const}$. Кругову частоту розглянуто з кроком $\omega = 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 3$. Відношення радіуса включення до швидкості розповсюдження хвилі $a/c = 1/3$, відношення товщини шару до швидкості $h/c = 2/3$. Для значень коефіцієнта Пуассона $\mu = 1/4$ та $\mu = 1/3$ особливість розв'язку при $\xi = 0$ не виникає, тому $\gamma = 0$, а для $\xi = 1$ особливості $\beta = -0.25525$ і $\beta = -0.31001$ відповідно. Досліджені нормальні напруження на циліндричній поверхні включення $\sigma_r(\rho = 1, \xi)$ та на нижній грані шару $\sigma_z(\rho, \xi = 0)$ з метою виявлення зон розтягувальних напружень.

4. Висновки

- Отримано наближений розв'язок задачі для пружного нескінченного шару з циліндричним жорстким включенням під дією нестационарного осесиметричного навантаження.
- Розв'язок конкретизовано для випадку сталих коливань.

- Досліджено нормальні напруження на циліндричній поверхні включення та на нижній грані шару.

- Запропонований підхід дозволяє розв'язати задачу у випадку гармонічного навантаження для різних випадків крайових умов як на поверхні дефекту, так і на границях шару.

Список використаних джерел

1. Атуф Е. И. Первая основная задача для слоя с круговым отверстием / Е. И. Атуф, В. З. Васильев // Наука и техника транспорта. – 1980. – № 4. – С. 68-77.
2. Гринченко В. Г. Точное решение задачи о распределении напряжений около кругового отверстия в упругом слое / В. Г. Гринченко, А. Ф. Улитко // Прикл. механика. – 1968. – Т.4, вып.10. – С. 38-45.
3. Малиц П. Я. Применение преобразований типа Вебера к решению задач теории упругости для слоистых сред с цилиндрическим отверстием / П. Я. Малиц, А. К. Приварников // Вопросы прочности и пластичности. – Днепропетровск, 1971.
4. Малиц П. Я. Об одном разложении произвольной функции в интеграл по цилиндрическим функциям и его применение в теории упругости / П. Я. Малиц // Устойчивость и прочность конструкций. – Днепропетровск: Изд-во Днепропетровского университета, 1978. – С. 93-99.
5. Попов Г. Я. Осесимметричная задача теории упругости для бесконечной плиты с цилиндрическим включением при учете ее удельного веса / Г. Я. Попов, Н. Д. Вайсфельд // Прикл. механика. – 2014. – Т. 50, № 6. – С. 27-38.
6. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – М.: Наука, 1982. – 344 с.
7. Попов Г. Я. Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач / Г. Я. Попов, С. А. Абдыманапов, В. В. Ефимов. – Алматы: Изд. Рауан, 1999. – 133 с.
8. Youngdahl C. K. Three-Dimensional stress concentration around a cylindrical hole in a semi-infinite elastic body / C. K. Youngdahl, E. Sternberg // Trans. ASME Journ. of Applied Mech. – 1966. – V.33, № 4. – P. 855-865.

References

1. ATUF, E. I. and VASILYEV, V. Z. (1980) Pervaya osnovnaya zadacha dlya sloya s crugovim otverstiem. *Nauka i Tekhnika Transporta*. (4). p. 68-77.
2. GRINCHENKO, V. G. and ULITKO A. F. (1968) Tochnoye resheniye zadachi o raspredelenii napryazhenii okolo krugovogo otverstiya v uprugom sloye. *Prikladnaya Mekhanika*. 4 (10). p. 38-45.
3. MALITZ, P.YA. and PRIVARNIKOV A. K. (1971) Primeneniye preobrazovaniy tipa Webera k resheniyu zadach teorii uprugosti dlya sloistih sred s cilindricheskimi otvertiyami. *Voprosi prochnosti i plastichnosti*.
4. MALITZ, P.YA. (1978) Ob odnom razlozhenii proizvolnoi funkzii v integral po cilindricheskimi funkciyam i ego primeneniye v teorii uprugosti. *Ustoychivost i Prochnost Konstruzii*. p. 93-99.
5. POPOV, G. YA. & VAYSFEL'D N. D. (2014) Osesimetrichnaya zadacha teorii uprugosti dlya beskonechnoi pliti s cilindricheskimi vklucheniyami pri uchte udelnogo vesa. *Prikladnaya Mekhanika*. 50 (6). p. 27-37.
6. POPOV, G. YA. (1982) *Konzentraziya uprugih napryazhenii voze shtampov, razrezov, tonkih vkluchenii i podkreplenii*. Moskva: Nauka.
7. POPOV, G. YA., ABDIMANOPOV, S. A. and EFIMOV, V. V. (1999) *Funkzii i matrizi Grina odnomernih kraevih zadach*. Almati: Rauan.
8. YOUNGDAHL, C. K. (1966) Three-Dimensional stress concentration around a cylindrical hole in a semi-infinite elastic body. *Trans. ASME Journ. of Applied Mech*. 33 (4). p. 855-865.

Надійшла до редколегії 14.09.17

УДК 539.3

Вайсфельд Н. Д., д. ф.-м. н., проф.,
Плюснгов Д.С., студент.

Новий підхід до розв'язання динамічної задачі для пружного шару

Одеський національний університет імені
І. І. Мечникова, 65082, м. Одеса, вул.
Дворянська, 2
e-mail: plusnovdmitrii@gmail.com

N. D. Vaysfel'd, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
D. S. Plusnov, Student.

A new approach to the dynamic problem for the elastic layer

Odessa I. I. Mechnikov National University, 65082,
Odessa, Dvoryanskaya str., 2
e-mail: plusnovdmitrii@gmail.com

Розглянуто просторову динамічну задачу теорії пружності для шару. До верхньої грані шару додане нормальне навантаження. Нижня грань шару може бути як зчепленою з жорсткою основою, так і бути в умовах ідеального контакту. Метод розв'язання базується на побудові матриць – впливу (термін запропоновано у працях Г.Я. Попова), що надає можливість зобразити розв'язок вихідної задачі у вигляді розв'язків двох відповідних плоских і однієї антиплоскої задачі шляхом встановлення зв'язку між матрицями впливу, що описують поставлену задачу. Розв'язки плоских задач побудовано методами інтегральних перетворень, що зводять у просторі трансформант до розв'язання одновимірної крайової задачі. Її переформульовано у термінах векторної крайової задачі. Остання розв'язується точно за допомогою апарату матричного диференціального числення. Обернення отриманого розв'язку та підстановка його до матриць впливу завершує побудову точного розв'язку.

Ключові слова: просторова динамічна задача, пружний шар, матриці впливу.

The spatial dynamic problem of the elasticity theory for a layer is considered. A normal load influences at the upper face of the layer. The lower edge of the layer can be both fixed with a rigid base, and be in an ideal contact with it. The method of solution is based on the construction of matrices-influence (the term is proposed in the works of G.Ya. Popov), which provides an opportunity to construct the solution of the original problem in the form of solutions of two corresponding plane and one anti-plane problems by establishing a connection between the matrices influences that describe the stated problem. Solutions of plane problems are constructed by methods of integral transformations, which reduce in a transformation space to the solution of a one-dimensional boundary value problem. It is reformulated in terms of the vector boundary value problem. The last one is solved exactly with the help of the apparatus of the matrix differential calculus. The inverse transformation of the resulting solution and its substitution into matrices of influence complete the construction of the exact solution.

Key Words: three-dimensional dynamic problem, elastic layer, influence matrices.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я. О.

1. Вступ

Відомо, що для розв'язання просторових динамічних задач, в основному, застосовуються методи введення допоміжних гармонічних та бігармонічних функцій [1,2] або апарату матриць функцій Гріна [3, 4]. Підхід, що описано у праці, вперше запропоновано Г.Я. Поповим [5], та дозволяє використати безпосередньо рівняння руху, що спрощує розв'язок поставленої задачі.

2. Постановка задачі

Розглянуто пружний шар (μ - коефіцієнт Пуассона, G - модуль зсуву), що у декартовій системі координат представлено

співвідношеннями $-\infty < x, y < +\infty; 0 < z < h$, до верхньої грані якого $z = h$ додане нормальне динамічне навантаження $P(x, y)D(t)$. На нижній грані шару або виконано умови ідеального контакту, або умови зчеплення. Переміщення пружного середовища задовольняють рівняння руху

$$\begin{cases} G\Delta u + (\lambda + G)\theta' = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ G\Delta v + (\lambda + G)\theta'' = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ G\Delta w + (\lambda + G)\theta' = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases} \quad (1)$$

де ρ – густина середовища. Ставиться за мету відшукати хвильове поле усередині шару.

3. Підхід до розв'язання

Основна ідея – це відновлення розв'язку просторової задачі за допомогою розв'язків відповідних плоских та антиплоскої задач. З цією метою введено означення матриць впливу – матриць, що містять компоненти переміщень середовища від зосередженого навантаження, яке спрямоване паралельно до вісі координат, а саме i -та стрічка матриці $R = \|R_{jk}\|_1^3$ містить компоненти переміщення від навантаження

$$P_i(x, y, t) = \delta(x - \xi) \delta(y - \eta) D(t).$$

Аналогічним чином введено плоску матрицю впливу.

Покажемо, що якщо середовище таке, що зосереджені навантаження викликають переміщення, що залежать лише від відносного розташування точок навантаження та середовища $R(x, y, \xi, \eta, z, t) = K(x - \xi, y - \eta, z, t)$, та розв'язок може бути розшукано за допомогою методу інтегральних перетворень (наприклад, за допомогою інтегрального перетворення Фур'є)

$$K(x, y, z, t) = F^{-1}(H(\alpha, \beta, z, t)),$$

де

$$4\pi^2 F^{-1}(f(\alpha, \beta)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta$$

є обернене інтегральне перетворення Фур'є, то з плоскої матриці впливу можна відновити просторову матрицю.

Для цього помітимо, що розв'язок задачі для довільного навантаження можна представити за допомогою зображення:

$$u_i = \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{kj} F_k(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2)$$

Необхідною умовою для можливості формулювання плоских задач є незалежність інтегралів у рівнянні (2) від y , звідки випливає діагональна властивість плоскої матриці впливу

$$R_{12}^\pi = R_{21}^\pi = R_{23}^\pi = R_{32}^\pi = 0. \quad (3)$$

Тоді з інтегрального зображення дельта-функції випливає

$$K_{jk}^\pi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{jk}(\alpha, 0, z, t) e^{-i\alpha y} d\alpha \quad (4)$$

Властивості (3) та (4) можна перетворити на систему лінійних алгебраїчних рівнянь шляхом розвинення у ряд Фур'є за полярним кутот:

$$H_{jk}(N, \omega, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-in\omega} h_{jk}^{(N)}(l, z, t).$$

Отримана система рівнянь розв'язується відносно функцій $h_{jk}^{(N)}$, що дає нам зв'язок між плоскими та просторовими матрицями впливу [5].

4. Застосування методики до задачі для шару

Плоскі задачі характеризуються загальною системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} G\Delta u + (\lambda + G)\theta' = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ G\Delta w + (\lambda + G)\theta' = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases} \quad (5)$$

з урахуванням різних крайових умов. До даних рівнянь застосуємо інтегральне перетворення Фур'є за змінною x та перетворення Лапласа за часом

$$f_{\alpha p} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty f(x, t) e^{pt + i\alpha x} dp d\alpha. \text{ Рівняння, що}$$

отримано у результаті перетворень, у сукупності з відповідними крайовими умовами утворюють векторну крайову задачу з диференціальним рівнянням

$$L_2[\vec{y}] = I\vec{y}'' - i\alpha\mu_0 Q\vec{y}' + P\vec{y} = 0.$$

Розв'язком відповідної матричної задачі $L_2[Y] = 0 \in [6]$

$$Y = \frac{1}{2\pi i} \oint_C M^{-1}(s) e^{sz} ds, \quad (6)$$

де $L_2[e^{sz}I] = M(s)e^{sz}I$, а зв'язок між розв'язками векторної та матричної задач представлено співвідношенням

$$y = \sum_{k=1}^2 Y_k(z) C_k. \text{ Останній вираз у сукупності з}$$

формулою (6) та крайовими умовами дозволяє отримати розв'язок плоских задач у просторі трансформант. Вираз не приводиться у зв'язку з обмеженістю розміру статті.

Користуючись розв'язком плоскої задачі, встановимо зв'язок між матрицями впливу на рівні простору трансформант. Обернення інтегрального перетворення Фур'є можна провести, якщо застосувати відому формулу зв'язку між перетвореннями Фур'є та Ганкеля [7]. Таким чином, вихідні переміщення можна подати через трансформанти переміщень плоскої задачі наступними формулами:

$$\begin{cases} w = L^{-1} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty w_{\alpha p}^\pi J_0(Nr) dN \right] \\ u = L^{-1} \left[\frac{x}{2\pi r} \int_0^\infty u_{\alpha p}^\pi J_1(Nr) dN \right], \\ v = L^{-1} \left[\frac{y}{2\pi r} \int_0^\infty u_{\alpha p}^\pi J_1(Nr) dN \right] \end{cases}$$

$$\text{де } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

5. Деталізація для випадку $D(t) = e^{i\omega t}$

Помітимо, що в цьому випадку можна взяти $p = i\omega$, що дозволяє записати переміщення у вигляді

$$w = \frac{\mu_*}{2\pi^2} e^{i\omega t} \int_0^\infty R(l, h, r) \frac{l\sqrt{l^2 + r^2}}{e^{z\sqrt{l^2 + \chi_2^2}}} J_{l,P} \times \\ \times \frac{dl}{q(l, \gamma_1, \gamma_2)} \\ J_{l,P} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\xi, \eta) J_0(lr) d\xi d\eta,$$

$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$. Як приклад виберемо навантаження у формі

$$P(x, y) = \left((x^2 + 1)(y^2 + 1) \right)^{-1}.$$

До інтегралу $J_{l,P}$ застосуємо відому формулу Соніна, що приводить до інтегралу

$$J = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(lx \cos \psi) \cos(ly \sin \psi) S_l d\psi,$$

де $S_l = e^{-|l \cos \psi| - |l \sin \psi|}$. Останній інтеграл підраховано числовим методом.

Розрахунки було проведено для сталі ($\mu = 0.28, G = 7.93 \cdot 10^9$). Було підраховано нормальні напруження на нижній грані шару для випадків ідеального контакту та зчеплення.

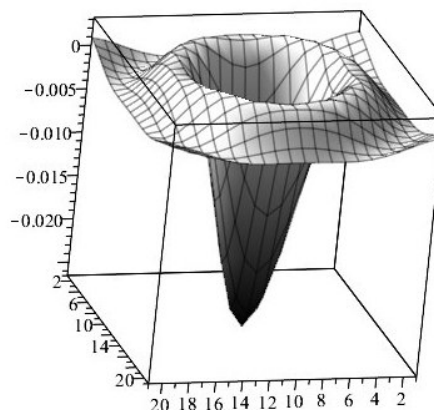


Рис. 1 а) Розподіл нормальних напружень на нижній грані шару для випадку ідеального контакту

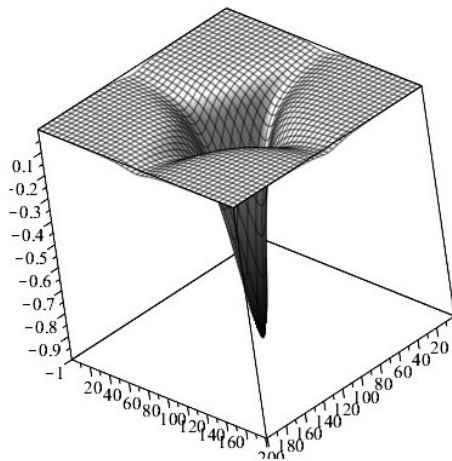


Рис. 1 б) Розподіл нормальних напружень на нижній грані шару для випадку зчеплення

6. Висновки

1. Запропоновано новий метод розв'язання просторової задачі для шару, що базується на розщепленні рівнянь руху.

2. Досліджено умови виникнення розтягуючих напружень на нижній грані при виконанні умов ідеального контакту.

3. Цей підхід можна застосовувати до деяких випадків просторових задач для шаруватих середовищ.

Список використаних джерел

1. Georgiadis H.G. The Boussinesq problem in dipolar gradient elasticity / H.G. Georgiadis, P.A. Gourgiotis, D.S. Anagnostou // *Archive of Applied Mechanics*. – 2014. – Vol.84 (9-11). – P. 1373-1391.
2. Selvadurai A.P.S. On the Surface Displacement of an Isotropic Elastic Halfspace Containing an Membrane Reinforcement / A.P.S. Selvadurai // *Mathematics and Mechanics of Solids*. – 2009. – 14. – P.123-134.
3. Pan E. Static Green's functions in multilayered halfspaces / E. Pan // *Applied Mathematical Modelling*. – 1997. – Vol.21. – № 8. P.509-521.
4. Tewary V.K. Elastostatic Green's function for advanced materials subject to surface loading / V. K. Tewary // *Journal of Engineering Mathematics*. – 2004. – Vol.49. – №3. – P. 289-304.
5. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – Москва: Наука, 1982. – 344 с.
6. Попов Г.Я. Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач / Г. Я. Попов, С. А. Абдыманапов, В. В. Ефимов. – Алматы: Рауан, 1999. – 133 с.
7. Sneddon I. Fourier Transforms / I. Sneddon. – New York: Dover publications inc., 1955. – 560 p.

References

1. GEORGIADIS, H.G., Gourgiotis, P.A. and Anagnostou, D.S. (2014) The Boussinesq problem in dipolar gradient elasticity, *Archive of Applied Mechanics*. 84(9-11). p.1373-1391.
2. SELVADURAI, A.P.S. (2009) On the Surface Displacement of an Isotropic Elastic Halfspace Containing an Membrane Reinforcement. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 14. p.123-134.
3. PAN, E. (1997) Static Green's functions in multilayered halfspaces. *Applied Mathematical Modelling*. 21(8). p.509-521.
4. TEWARY, V. K. (2004) Elastostatic Green's function for advanced materials subject to surface loading. *Journal of Engineering Mathematics*. 49(3). p.289-304.
5. POPOV, G. Ya. (1982) *Koncentraciya Uprugih Napryazheniy Vozle Shtampov, Razrezov, Tonkih Vklucheniye i Podkrepleniye*. Moskva: Nauka.
6. POPOV, G. Ya, Abdimanapov, S.A. and Efimov, V.V. (1999) *Funkcii i matrici Greena odnomernih kraevih zadach*. Almati: Rauan.
7. SNEDDON, I. (1955) *Fourier Transforms*. New York: Dover publications inc.

Надійшла до редколегії 15.09.17

УДК 539.3

Годес А. Ю., аспірант,
Лобода В. В., д. ф.-м. н., проф.

Дугова тріщина в електрострикційному композиті

Дніпровський національний університет імені
О. Гончара, 49050, м. Дніпро, пр. Гагаріна, 72,
e-mail: alinej@rambler.ru, lobvv@ua.fm

A. Yu. Hodes, Postgraduate Student,
V. V. Loboda, Dr. Sci. (Phys.-Math.).

An arc crack in the electrostrictive composite

Oles Honchar National University of Dnipro, 49050,
Dnipro, Gagarina av., 72,
e-mail: alinej@rambler.ru, lobvv@ua.fm

Розглядається задача визначення напружено-деформованого стану електрострикційної матриці з включенням з іншого матеріалу і дуговою тріщиною на межі розділу середовищ під дією на нескінченності механічного навантаження та електричного поля. Проведено порівняння результатів, отриманих в рамках контактної і безконтактної моделей тріщини.

Ключові слова: електрострикція, дугова тріщина, контактна задача.

A problem on determining of stress-strain state of an electrostrictive plane with a circular inclusion made of another material and an arc crack at the interface under the action of arbitrary mechanical and electrical loadings applied at infinity is considered. The problem is resolved within the confines of two crack models: non-contact one, when the crack faces cannot interact with each other, and the contact model, for which the possibility of appearance of contact macrozones of crack faces is considered. An exact analytical solution of the non-contact problem is found from the problem of linear relationship. The contact problem is reduced to the singular integral equation which is resolved approximately expanding the unknown function in series using Jacobi polynomials; unknown bounds of the contact zone are defined from the condition of stresses finiteness at inner points of the crack. It is shown that non-contact crack model can be used for preliminary qualitative analysis of the configuration of crack faces contact zones in some cases.

Key Words: electrostriction, arc crack, contact problem.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

У роботах [1–3] розглянуто контактну модель дугової тріщини у пружному композиті. Подібні задачі для електрострикційних матеріалів залишаються практично невивченими, однак з аналізу розв'язку безконтактної задачі [4] випливає, що наявність контактних зон необхідно враховувати у багатьох випадках. Оскільки це вимагає розв'язання значно складнішої задачі, ніж викладено у [4], важливим є порівняння результатів, отриманих в рамках контактної та безконтактної моделей тріщини, та окреслення меж застосування останньої.

Постановка задачі

Розглядається лінійно пружна ізотропна електрострикційна площа, яка містить кругове включення радіусу R , що скріплено з площиною уздовж всієї межі за винятком дуги $r = R$, $|\theta| < \beta$, де r , θ – полярні координати, β – кут

піврозхилу тріщини. Береги тріщини є гладкими та проникними для електричного поля. Відомі головні напруження на нескінченності N_1 та N_2 , кут α_N між напрямом N_1 та віссю абсцис, величина E_0 та напрям α вектора напруженості електричного поля на нескінченності.

У випадку малих деформацій поставлена задача розглядається як незв'язана, тобто потенціали електричного поля у включенні, матриці та тріщині є розв'язком відповідної граничної задачі електростатики. Для незв'язаної задачі електропружності для електрострикційних матеріалів можна застосувати рівняння плоскої задачі [5], подібні співвідношення Колосова–Мусхелішвілі [6], і звести її до визначення чотирьох невідомих комплексних потенціалів.

Механічні граничні умови мають наступний вигляд:

$$\sigma_{rr}^{(2)} + i\sigma_{r\theta}^{(2)} = \frac{N_1 + N_2}{2} + \frac{N_1 - N_2}{2} e^{2i(\alpha_N - \theta)} \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad (1)$$

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{(1)} + i\tilde{\sigma}_{r\theta}^{(1)} = \tilde{\sigma}_{rr}^{(2)} + i\tilde{\sigma}_{r\theta}^{(2)}, u_r^{(1)} + iu_\theta^{(1)} = u_r^{(2)} + iu_\theta^{(2)} \text{ при } r = R, \beta < |\theta| \leq \pi, \quad (2)$$

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{(1)} + i\tilde{\sigma}_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{rr}^{(c)} + i\sigma_{r\theta}^{(c)}, \tilde{\sigma}_{rr}^{(2)} + i\tilde{\sigma}_{r\theta}^{(2)} = \sigma_{rr}^{(c)} + i\sigma_{r\theta}^{(c)} \text{ при } r = R, |\theta| < \beta, \theta \notin \Omega, \quad (3)$$

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{(1)} + i\tilde{\sigma}_{r\theta}^{(1)} = \tilde{\sigma}_{rr}^{(2)} + i\tilde{\sigma}_{r\theta}^{(2)}, \sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(2)} = 0 \text{ при } r = R, |\theta| < \beta, \theta \in \Omega, \quad (4)$$

де Ω – множина всіх точок тріщини, у яких її береги взаємодіють один з одним, $\hat{\tilde{\sigma}} = \hat{\sigma} + \hat{\sigma}^M$, $\hat{\sigma}^M$ – тензор, який визначається електричним полем, індекс 1 відповідає включенню, 2 – матриці, c – тріщині.

З урахуванням граничних умов на межі розділу середовищ (2) задача визначення чотирьох потенціалів зводиться до пошуку двох функцій комплексної змінної $\omega'(z)$ та $F'(z)$. Комплексний потенціал $F'(z)$ є аналітичним у комплексній площині з розрізом уздовж дуги $r = R$, $|\theta| < \beta$ за винятком початку координат, де він має полюс другого порядку, потенціал $\omega'(z)$ задається виразом

$$\omega'(z) = Y_0 + \frac{Y_1}{z} + \frac{Y_2}{z^2}, \quad (5)$$

де Y_0 , Y_1 , Y_2 – невідомі комплексні постійні.

Безконтактна модель тріщини

У випадку, коли береги тріщини не взаємодіють між собою, тобто $\Omega \in \emptyset$, можна отримати повністю аналітичний розв'язок поставленої задачі. З виразів напружень через функції $\omega'(z)$ та $F'(z)$ і з граничної умови (3) випливає, що функція $F'(z)$ задовольняє на тріщині задачі лінійного спряження

$$F'^+(z) + \lambda F'^-(z) = f(z) \text{ при } r = R, |\theta| \leq \beta, \quad (6)$$

де $f(z)$ визначається електростатичними потенціалами матриці, включення і тріщини, λ – дійсна постійна.

Загальний розв'язок задачі лінійного спряження (6) має вигляд

$$F'(z) = \frac{f(z)}{1+\lambda} + (z - Re^{-i\beta})^{-1/2+i\gamma} (z - Re^{i\beta})^{-1/2-i\gamma} \times \\ \times \left(B_3 z^3 + B_2 z^2 + B_1 z + B_0 + \frac{D_1}{z} + \frac{D_2}{z^2} \right), \gamma = \frac{\ln \lambda}{2\pi}. \quad (7)$$

Невідомі постійні, які входять до виразів (5) і (7), знаходяться з системи лінійних алгебраїчних рівнянь, до якої входять умови обмеженості напружень та переміщень у початку координат, граничні умови на нескінченності (1) та умова однозначності зміщень. Таким чином, для комплексних потенціалів $\omega'(z)$ та $F'(z)$ знайдено повністю аналітичні вирази, що дозволяє визначити напруження у будь-якій точці, розкриття тріщини $\Delta = u_r^{(2)} - u_r^{(1)}$ та коефіцієнти інтенсивності напружень.

Контактна модель тріщини

У випадку, коли береги тріщини взаємодіють один з одним, вводиться нова невідома функція, яка представляє собою розкриття тріщини:

$$D(z) = u_x^{(2)} - u_x^{(1)} + i(u_y^{(2)} - u_y^{(1)}), r = R, |\theta| < \beta. \quad (8)$$

З виразів переміщень через невідомі потенціали $\omega'(z)$ та $F'(z)$ випливає, що

$$F'^+(z) - F'^-(z) = -2\mu_1\mu_2 D'(z) \text{ при } r = R, |\theta| < \beta, \quad (9)$$

де μ_1 та μ_2 – модулі зсуву включення та матриці відповідно. Загальний розв'язок задачі лінійного спряження (9) має вигляд

$$F'(z) = -\frac{\mu_1\mu_2}{\pi i} \int_L \frac{D'(t)}{t-z} dt + B_0 + \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2}, \quad (10)$$

де B_0 , B_1 та B_2 – невідомі комплексні постійні, L – дуга тріщини $r = R$, $|\theta| \leq \beta$, інтегрування за якою ведеться проти годинникової стрілки.

Невідомі постійні, що входять до виразів комплексних потенціалів (5) та (10), знаходяться з такої ж системи рівнянь, як і для безконтактної задачі; комплексні потенціали $\omega'(z)$ та $F'(z)$ виражаються за допомогою похідної від розкриття тріщини, яка далі розшукується у вигляді $D'(z) = -i\tau(\theta)/\mu_1$ при $z = Re^{i\theta}$, $|\theta| < \beta$.

За допомогою крайових умов (3) – (4) задача пошуку невідомої функції $\tau(\theta)$ зводиться до

сингулярного інтегрального рівняння другого роду з ядром типу Коші

$$C_1 \tau(\zeta) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\tau(\xi)}{\xi - \zeta} d\xi + \int_{-1}^1 K_1(\xi) \tau(\xi) d\xi + \\ + \int_{-1}^1 \overline{K_2(\xi) \tau(\xi)} d\xi + C_2 \tilde{p}(\zeta) = f(\zeta), \quad (12)$$

де $|\zeta| < 1$, C_k – комплексні постійні, $K_1(\xi)$ та $K_2(\xi)$ – регулярні ядра, $f(\zeta)$ – комплексна функція, яка визначається зовнішніми навантаженнями, $\tilde{p}(\zeta)$ – комплексна функція, яка визначає фіктивні напруження на берегах тріщини, тобто є невідомою у контактній зоні, а поза її межами визначається електричним полем.

Сингулярне інтегральне рівняння (12) доповнюється умовою однозначності зміщень при обході навколо тріщини, яке має вигляд

$$\int_{-1}^1 K_3(\xi) \tau(\xi) d\xi = 0, \quad (13)$$

де $K_3(\xi)$ – регулярне ядро.

Для наближеного розв'язання системи рівнянь (12) – (13) розроблено нову методику, яка заснована на методі розкладання невідомої функції до поліноміальних рядів та на методі колокацій. Оскільки функцію $\tilde{p}(\zeta)$ і внаслідок цього праву частину сингулярного інтегрального рівняння (12) задано на тріщині кусково, використовуються різні представлення невідомої функції у зоні контакту та поза її межами. Це дозволяє врахувати одночасно як можливість існування зон контакту берегів тріщини і осцилюючі особливості напружень і переміщень у околі “відкритої” вершини тріщини:

$$\tau(\zeta) = u_s(\zeta) \sum_{k=0}^n A_{sk} P_k^{(a_s, b_s)}(\zeta^{(s)}), \quad x_{s-1} \leq \zeta \leq x_s,$$

$$u_s(\zeta) = (x_s - \zeta)^{a_s} (\zeta - x_{s-1})^{b_s}, \quad s = \overline{1, s_0}, \quad (14)$$

де $\zeta^{(s)} = -1 + 2(\zeta - x_{s-1})/(x_s - x_{s-1})$; s_0 – кількість відрізків гладкості функції $\tilde{p}(\zeta)$; x_s , $s = \overline{0, s_0}$ – границі цих відрізків, $P_k^{(a_s, b_s)}(\zeta)$ – ортогональні многочлени Якобі; A_{sk} , $s = \overline{1, s_0}$, $k = \overline{0, n}$ – невідомі постійні.

Показники особливостей розв'язку в околі вершин тріщини визначаються так: якщо контактна зона не прилягає до відповідної вершини, $a_{s_0} = -1/2 - i\gamma$ або $b_1 = -1/2 + i\gamma$, у

іншому випадку $a_{s_0} = -1/2$ або $b_1 = -1/2$. У внутрішніх точках тріщини особливості розв'язку відсутні: $a_s = 0$, $s = \overline{1, s_0 - 1}$ та $b_s = 0$, $s = \overline{2, s_0}$.

Система рівнянь (12) – (13) після підстановки до неї виразу (14) та вибору n точок колокації на кожному відрізку $x_{s-1} \leq \zeta \leq x_s$, $s = \overline{1, s_0}$ перетворюється до системи $s_0(n+1)$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих постійних A_{sk} . Вираз для функції $\tilde{p}(\zeta)$ у зоні контакту берегів тріщини містить невідому дійсну функцію $N^{(1)}(\zeta)$, яка визначає контактні напруження на границі включення і розшукується у вигляді

$$N^{(1)}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{(x_q - \zeta)(\zeta - x_{q-1})}} \sum_{j=1}^m N_j \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \frac{\zeta - y_l}{y_j - y_l}, \quad (15)$$

де $y_j \in \Omega$, $N_j = N^{(1)}(y_j)$, $j = \overline{1, m}$, $\zeta \in \Omega$,

$\Omega = \{\zeta: x_q \leq \zeta \leq x_q\}$. Для визначення невідомих постійних N_j рівнянь відносно невідомих A_{sk}

доповнюється умовами рівності нулю розкриття тріщини у межах контактної зони

$$\operatorname{Re} \left(e^{-2i \arctg(y_j \eta)} \int_{-1}^{y_j} K_3(\xi) \tau(\xi) d\xi \right) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (16)$$

де $\eta = \operatorname{tg}(\beta/2)$. Таким чином, поставлена задача зводиться до замкнутої системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно комплексних невідомих A_{sk} та дійсних невідомих N_j .

Невідомі границі контактної зони x_s , $s = \overline{1, s_0 - 1}$ розшуковуються з умови обмеженості контактних напружень у внутрішніх точках тріщини

$$\sum_{j=1}^m N_j \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \frac{x_s - y_l}{y_j - y_l} = 0, \quad s = \overline{1, s_0 - 1}. \quad (17)$$

На рис. 1 – 2 наведено порівняння розкриття тріщини, отриманого в рамках контактної (суцільна лінія) та безконтактної (штрихова лінія) моделей тріщини, для плоского напруженого стану при $N_2/N_1 = 0$, $N_1 > 0$, коефіцієнтах Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = 0,26$, діелектричних проникностей $\varepsilon_c/\varepsilon_1 = 10^{-4}$, $\varepsilon_2/\varepsilon_1 = 0,5$, електрострикційних постійних включення $a_1^{(1)}/\varepsilon_1 = 400$, $a_2^{(1)}/\varepsilon_1 = -75$. На рис. 1 наведено розкриття для $\beta = 90^\circ$, $\alpha = -30^\circ$, $\alpha_N = 60^\circ$, $\varepsilon_1 E_0^2/N_1 = 10^{-4}$, $\mu_2/\mu_1 = 0,1$,

$a_1^{(2)}/\varepsilon_1 = 200$, $a_2^{(2)}/\varepsilon_1 = -45$, на рис. 2 – для
 $\beta = 60^\circ$, $\alpha_N = 45^\circ$, $\alpha = -45^\circ$, $\varepsilon_1 E_0^2/N_1 = 2 \cdot 10^{-4}$,
 $\mu_2/\mu_1 = 0,5$, $a_1^{(2)} = a_1^{(1)}$, $a_2^{(2)} = a_2^{(1)}$.

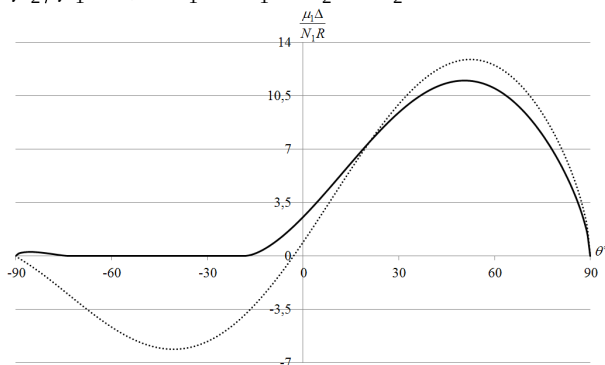


Рис. 1 Порівняння розкриття тріщини при
 $\beta = 90^\circ$, $\alpha = -30^\circ$, $\alpha_N = 60^\circ$, $\varepsilon_1 E_0^2/N_1 = 10^{-4}$,
 $\mu_2/\mu_1 = 0,1$, $a_1^{(2)}/\varepsilon_1 = 200$, $a_2^{(2)}/\varepsilon_1 = -45$

Очевидно, що для наведеного на рис. 1
випадку безконтактна модель тріщини не дає
достатньо точного наближення розташування
контактної зони, а для випадку, наведеного на
рис. 2, за допомогою безконтактної моделі можна
знайти достатньо вірне її наближення.

Список використаних джерел

1. Chao R. The fiber-matrix interface crack / R. Chao, N. Laws // Trans. ASME. Journal of Appl. Mech. – 1997. – Vol. 64. – P. 992–999.
2. Улітко А. Ф.: Міжфазна тріщина на межі розділу кругового включення і матриці / А. Ф. Улітко, В. І. Острик // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2006. – Т. 3. – С. 138–149.
3. Годес А. Ю. Контактная задача для межфазной дуговой трещины / А. Ю. Годес, В. В. Лобода // Вісник Дніпропетровського університету: Серія Механіка. – 2015. – Т. 19 (2). – С. 3–17.
4. Hodes A. Yu. An arc crack at the interface between two electrostrictive materials / A. Yu. Hodes, V. V. Loboda // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2017. – № 1. – С. 81–94.
5. Jiang Q. Stress analysis in two dimensional electrostrictive material with an elliptic rigid conductor / Q. Jiang, Z.-B. Kuang // European Journal of Mechanics A/Solids. – 2004. – Vol. 23. – P. 945–956.
6. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Изд-во АН СССР, 1949. – 635 с.

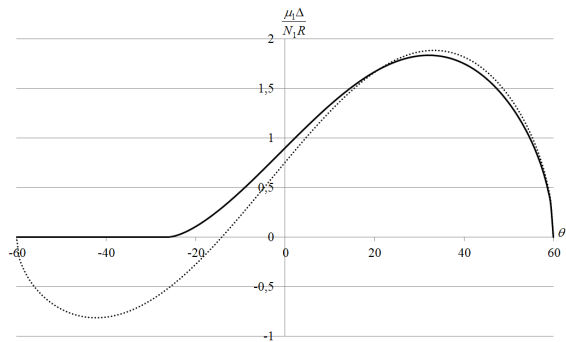


Рис. 2 Порівняння розкриття тріщини при
 $\beta = 60^\circ$, $\alpha_N = 45^\circ$, $\alpha = -45^\circ$, $\varepsilon_1 E_0^2/N_1 = 2 \cdot 10^{-4}$,
 $\mu_2/\mu_1 = 0,5$, $a_1^{(2)} = a_1^{(1)}$, $a_2^{(2)} = a_2^{(1)}$

Висновки

Розв'язано задачу визначення напружено-деформованого стану електрострикційного композиту з міжфазною дуговою тріщиною в рамках безконтактної та контактної моделей тріщини. Проведено порівняння результатів, отриманих в рамках цих моделей, окреслено межі застосування безконтактної моделі тріщини для визначення конфігурації контактних зон.

References

1. CHAO, R. and LAWS, N. (1997) The fiber-matrix interface crack. *Trans. ASME. Journal of Appl. Mech.* 64. p. 992–999.
2. ULITKO, A. F. and OSTRYK, V. I. (2006) An interfacial crack at the bound of a circular inclusion and a matrix. *Modeling in Physics and Mathematics and Information Technologies*. 3. p. 138–149.
3. HODES, A. YU. and LOBODA, V. V. (2015) A contact problem for an arc interfacial crack. *Bulletin of Dnepropetrovsk University: Mechanics*. 19 (2). p. 3–17.
4. HODES, A. YU. and LOBODA, V. V. (2017) An arc crack at the interface between two electrostrictive materials. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Sciences*. 1. p. 81–94.
5. JIANG, Q. and KUANG Z.-B. (2004) Stress analysis in two dimensional electrostrictive material with an elliptic rigid conductor. *European Journal of Mechanics A/Solids*. 23. p. 945–956.
6. MUSKHELISHVILI, N. I. (1949) *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Moskva: Izdatel'stvo AN USSR.

Надійшла до редколегії 15.08.17

УДК 539.3

Горошко І. О.¹, к.ф.-м.н.

**Підхід до розв'язання задачі
параметричної ідентифікації моделі
згинних коливань лопаті вітрової турбіни**

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова, 4е,
e-mail: igoroshko@ukr.net

I. O. Goroshko¹, Ph.D. (Phys.-Math.)

**An approach to solving the problem of
parameter identification for the model of
bending vibrations of the wind turbine blade**

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova ave., 4e,
e-mail: igoroshko@ukr.net

В роботі пропонується підхід до побудови спрощеної моделі балкового типу для композитної лопаті вітрової турбіни на основі результатів скінченно-елементного моделювання. Модель дає змогу ефективно і з достатньою точністю описувати нижчі форми згинних коливань враховуючи ефект зв'язаності між рухами поперек площини та у площині турбіни, що виникає завдяки закрученню лопаті вздовж її довжини. Ідентифікація параметрів моделі здійснюється на основі даних про власні моди коливань, отримані за допомогою більш детальної скінченно-елементної моделі, з використанням оптимізаційного алгоритму 'DIRECT'. Стабільні результати отримані при використанні у цільовій функції абсолютних відхилень власних частот та переміщень власних форм, а також додаткової апіорної інформації (обмеженості і монотонності) про властивості розв'язку.

Ключові слова: лопать вітрової турбіни, згинні коливання, спрощена модель балкового типу, ідентифікація, скінченно-елементне моделювання, цільова функція, апіорна інформація.

An approach to construction of a beam-type simplified model of a horizontal axis wind turbine composite blade based on the finite element method simulation results is proposed. The model allows effective and accurate description of low vibration bending modes taking into account the effects of coupling between flapwise and lead-lag modes of vibration due to the twisting in the blade geometry along its length. The identification of model parameters is carried out on the basis of modal data obtained by more detailed finite element simulations and subsequent adoption of the 'DIRECT' optimisation algorithm. Carried out numerical experiments showed that better identification results are obtained when in the objective function, which describes differences between results of modal simulation obtained by simplified model and by more detailed finite element method results, absolute deviations in frequencies and in modal displacements instead quadratic norms are used. Additional positive effect is obtained using logarithmic scaling of identifying bending stiffnesses. Stable identification results were obtained using additional a priori information (boundedness and monotony) on the solution properties.

Key words: wind turbine blade, bending vibrations, beam-type simplified model, identification, finite element method simulation, objective function, a priori information.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Сучасна наукова й інженерна практика ґрунтується на моделюванні явищ і процесів у системах різної природи. При цьому у багатьох випадках бажано, щоб математичні моделі описували явища в досліджуваних системах з потрібною точністю, однак мали по можливості невисоку обчислювальну складність. Одним з сучасних підходів до побудови таких моделей є застосування методів структурної і параметричної ідентифікації на основі даних, отриманих з натурних експериментів або з обчислень за моделями більш високої складності і детальності. Параметрична ідентифікація ґрунтується на розв'язанні обернених

задач, які зазвичай є математично некоректними за Адамаром і для забезпечення достатньої точності і стійкості розв'язків потребують застосування спеціальних методів [1]. Багато з цих методів ґрунтуються на мінімізації певних функцій якості, а також на застосуванні штучних нейронних мереж.

У даній роботі на прикладі побудови спрощеної одновимірної моделі низької розмірності балочного типу, що описує низькочастотні згинні коливання композитної лопаті вітрової турбіни з горизонтальною віссю обертання, за модальними даними, отриманими із скінченно-елементних розрахунків з використанням більш детальної моделі оболонко-

вого типу, запропоновано підхід до розв'язання задачі параметричної ідентифікації, який показав хорошу точність і стійкість результатів. Особливістю конструкції лопатей сучасних вітрових турбін [2] є їхня істотна неоднорідність – має місце значне утоншення таких лопатей у напрямку до кінця і закручення по довжині. Останнє призводить до зв'язаності форм коливань у напрямках поперек та у площині ротора, і до необхідності ускладнення математичної моделі, яка має враховувати цей ефект.

Низькорозмірна балочна модель лопаті вітрової турбіни

Для побудови низькорозмірної балочної моделі за даними, отриманими з більш детальних скінченно-елементних розрахунків, реальна лопать апроксимується кусково-однорідною консольною балкою з N секцій довжиною L_k із зосередженими масами $m_k, k=1, N$ у точках з'єднання секцій та у кінцевій точці. Вісь z орієнтована вздовж балки, тоді як вісь x напрямлена у площині ротора турбіни, а вісь y – у поперечному до неї напрямку. Для опису деформацій тут застосовується модель балки Ейлера-Бернуллі, оскільки лопать є довгою і тонкою у поперечному напрямку y , і головним чином розглядаються коливання у цьому напрямку.

Аналіз графіків форм коливань, отриманих методом скінченних елементів, показав досить сильний зв'язок рухів у поперечному напрямку y і площинному напрямку x для другої і третьої форм через закручення структури лопаті вздовж її довжини, що також має бути враховано при побудові спрощеної балочної моделі. Для цього ми будемо модель, у якій кожна k -та однорідна безмасова балочна секція, головні осі якої орієнтовані вздовж локальної системи координат, повернена на кут α_k навколо осі z . У локальних координатах її деформація описується стандартними балочними рівняннями

$$(EI_y)_k \frac{\partial^4 u_k}{\partial z^4} = 0 \quad \text{і} \quad (EI_x)_k \frac{\partial^4 v_k}{\partial z^4} = 0, \quad (1)$$

де u_k, v_k – переміщення по x і y , $(EI_y)_k$ і $(EI_x)_k$ – згинні жорсткості. Оскільки балочні секції з'єднані з масами і є частинами динамічної системи, $u_k = u_k(z, t)$, $v_k = v_k(z, t)$.

Загальні розв'язки рівнянь (1) є поліномами третього порядку. У локальних координатах ξ_k (відстань від початку секції у напрямку осі z) вони мають вигляд:

$$\begin{aligned} u_k &= a_0^{(k)} + a_1^{(k)} \xi_k + a_2^{(k)} \xi_k^2 + a_3^{(k)} \xi_k^3, \\ v_k &= b_0^{(k)} + b_1^{(k)} \xi_k + b_2^{(k)} \xi_k^2 + b_3^{(k)} \xi_k^3. \end{aligned} \quad (2)$$

Коефіцієнти $a_j^{(k)}$ і $b_j^{(k)}$ в (2) є функціями часу.

Локальні компоненти згинаючих моментів мають вигляд

$$M_{xk} = -(EI_x)_k \frac{\partial^2 v_k}{\partial z^2}, \quad M_{yk} = (EI_y)_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2}, \quad (3)$$

тоді як для пререрізуючих сил ми маємо

$$Q_{yk} = -(EI_x)_k \frac{\partial^3 v}{\partial z^3}, \quad Q_{xk} = -(EI_y)_k \frac{\partial^3 u}{\partial z^3}. \quad (4)$$

При жорсткому защемленні балки у початковій точці $z=0$ умови неперервності між першою та другою балочними секціями у проекціях на осі глобальної системи координат дають наступні рівняння:

$$\begin{aligned} &-(L_1^2 a_2^{(1)} + L_1^3 a_3^{(1)}) \cos \alpha_1 + a_0^{(2)} \cos \alpha_2 + \\ &+(L_1^2 b_2^{(1)} + L_1^3 b_3^{(1)}) \sin \alpha_1 - b_0^{(2)} \sin \alpha_2 = 0, \\ &-(L_1^2 a_2^{(1)} + L_1^3 a_3^{(1)}) \sin \alpha_1 + a_0^{(2)} \sin \alpha_2 - \\ &-(L_1^2 b_2^{(1)} + L_1^3 b_3^{(1)}) \cos \alpha_1 + b_0^{(2)} \cos \alpha_2 = 0, \\ &-(2L_1 a_2^{(1)} + 3L_1^2 a_3^{(1)}) \cos \alpha_1 + a_1^{(2)} \cos \alpha_2 + \\ &+(2L_1 b_2^{(1)} + 3L_1^2 b_3^{(1)}) \sin \alpha_1 - b_1^{(2)} \sin \alpha_2 = 0, \\ &-(2L_1 a_2^{(1)} + 3L_1^2 a_3^{(1)}) \sin \alpha_1 + a_1^{(2)} \sin \alpha_2 - \\ &-(2L_1 b_2^{(1)} + 3L_1^2 b_3^{(1)}) \cos \alpha_1 + b_1^{(2)} \cos \alpha_2 = 0, \\ &-(2a_2^{(1)} + 6L_1 a_3^{(1)})(EI_y)_1 \cos \alpha_1 + 2a_2^{(2)}(EI_y)_2 \cos \alpha_2 + \\ &+(2b_2^{(1)} + 6L_1 b_3^{(1)})(EI_x)_1 \sin \alpha_1 - 2b_2^{(2)}(EI_x)_2 \sin \alpha_2 = 0, \\ &(2a_2^{(1)} + 6L_1 a_3^{(1)})(EI_y)_1 \sin \alpha_1 - 2a_2^{(2)}(EI_y)_2 \sin \alpha_2 + \\ &+(2b_2^{(1)} + 6L_1 b_3^{(1)})(EI_x)_1 \cos \alpha_1 - 2b_2^{(2)}(EI_x)_2 \cos \alpha_2 = 0, \\ &6a_3^{(1)}(EI_y)_1 \cos \alpha_1 - 6a_3^{(2)}(EI_y)_2 \cos \alpha_2 - 6b_3^{(1)}(EI_x)_1 \sin \alpha_1 + \\ &+ 6b_3^{(2)}(EI_x)_2 \sin \alpha_2 = m_1(\ddot{a}_0^{(2)} \cos \alpha_2 - \ddot{b}_0^{(2)} \sin \alpha_2), \\ &6a_3^{(1)}(EI_y)_1 \sin \alpha_1 - 6a_3^{(2)}(EI_y)_2 \sin \alpha_2 + 6b_3^{(1)}(EI_x)_1 \cos \alpha_1 - \\ &- 6b_3^{(2)}(EI_x)_2 \cos \alpha_2 = m_1(\ddot{a}_0^{(2)} \sin \alpha_2 + \ddot{b}_0^{(2)} \cos \alpha_2). \end{aligned} \quad (5)$$

Далі, з умов неперервності в точках з'єднання між рештою балочних сегментів маємо

$$\begin{aligned} &-(a_0^{(k)} + L_k a_1^{(k)} + L_k^2 a_2^{(k)} + L_k^3 a_3^{(k)}) \cos \alpha_k + \\ &+ a_0^{(k+1)} \cos \alpha_{k+1} + (b_0^{(k)} + L_k b_1^{(k)} + L_k^2 b_2^{(k)} + \\ &+ L_k^3 b_3^{(k)}) \sin \alpha_k - b_0^{(k+1)} \sin \alpha_{k+1} = 0, \\ &-(a_0^{(k)} + L_k a_1^{(k)} + L_k^2 a_2^{(k)} + L_k^3 a_3^{(k)}) \sin \alpha_k + \\ &+ a_0^{(k+1)} \sin \alpha_{k+1} - (b_0^{(k)} + L_k b_1^{(k)} + L_k^2 b_2^{(k)} + \\ &+ L_k^3 b_3^{(k)}) \cos \alpha_k + b_0^{(k+1)} \cos \alpha_{k+1} = 0, \\ &-(a_1^{(k)} + 2L_k a_2^{(k)} + 3L_k^2 a_3^{(k)}) \cos \alpha_k + \\ &+ a_1^{(k+1)} \cos \alpha_{k+1} + (b_1^{(k)} + 2L_k b_2^{(k)} + \\ &+ 3L_k^2 b_3^{(k)}) \sin \alpha_k - b_1^{(k+1)} \sin \alpha_{k+1} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -(a_1^{(k)} + 2L_k a_2^{(k)} + 3L_k^3 a_3^{(k)}) \sin \alpha_k + \\
 & + a_1^{(k+1)} \sin \alpha_{k+1} - (b_1^{(k)} + 2L_k b_2^{(k)} + \\
 & + 3L_k^2 b_3^{(k)}) \cos \alpha_k + b_1^{(k+1)} \cos \alpha_{k+1} = 0, \\
 & -(2a_2^{(k)} + 6L_k a_3^{(k)})(EI_y)_k \cos \alpha_k + \\
 & + 2a_2^{(k+1)}(EI_y)_{k+1} \cos \alpha_{k+1} + (2b_2^{(k)} + \\
 & + 6L_k b_3^{(k)})(EI_x)_k \sin \alpha_k - 2b_2^{(k+1)}(EI_x)_{k+1} \sin \alpha_{k+1} = 0, \\
 & (2a_2^{(k)} + 6L_k a_3^{(k)})(EI_y)_k \sin \alpha_k - \\
 & - 2a_2^{(k+1)}(EI_y)_{k+1} \sin \alpha_{k+1} + (2b_2^{(k)} + \\
 & + 6L_k b_3^{(k)})(EI_x)_k \cos \alpha_k - 2b_2^{(k+1)}(EI_x)_{k+1} \cos \alpha_{k+1} = 0, \\
 & 6a_3^{(k)}(EI_y)_k \cos \alpha_k - 6a_3^{(k+1)}(EI_y)_{k+1} \cos \alpha_{k+1} - \\
 & - 6b_3^{(k)}(EI_x)_k \sin \alpha_k + 6b_3^{(k+1)}(EI_x)_{k+1} \sin \alpha_{k+1} = \\
 & = m_k (\ddot{a}_0^{(k+1)} \cos \alpha_{k+1} - \ddot{b}_0^{(k+1)} \sin \alpha_{k+1}), \\
 & 6a_3^{(k)}(EI_y)_k \sin \alpha_k - 6a_3^{(k+1)}(EI_y)_{k+1} \sin \alpha_{k+1} + \\
 & + 6b_3^{(k)}(EI_x)_k \cos \alpha_k - 6b_3^{(k+1)}(EI_x)_{k+1} \cos \alpha_{k+1} = \\
 & = m_k (\ddot{a}_0^{(k+1)} \sin \alpha_{k+1} + \ddot{b}_0^{(k+1)} \cos \alpha_{k+1}).
 \end{aligned} \tag{6}$$

І наостанок, умови відсутності моменту і сили у кінцевій точці дають рівняння

$$\begin{aligned}
 & -(2a_2^{(N)} + 6L_N a_3^{(N)})(EI_y)_N \cos \alpha_N + \\
 & + (2b_2^{(N)} + 6L_N b_3^{(N)})(EI_x)_N \sin \alpha_N = 0, \\
 & (2a_2^{(N)} + 6L_N a_3^{(N)})(EI_y)_N \sin \alpha_N + \\
 & + (2b_2^{(N)} + 6L_N b_3^{(N)})(EI_x)_N \cos \alpha_N = 0, \\
 & 6a_3^{(N)}(EI_y)_N \cos \alpha_N - 6b_3^{(N)}(EI_x)_N \sin \alpha_N = m_N \ddot{u}_{END}, \\
 & 6a_3^{(N)}(EI_y)_N \sin \alpha_N + 6b_3^{(N)}(EI_x)_N \cos \alpha_N = m_N \ddot{v}_{END}, \\
 & (a_0^{(N)} + L_N a_1^{(N)} + L_N^2 a_2^{(N)} + L_N^3 a_3^{(N)}) \cos \alpha_N - \\
 & - (b_0^{(N)} + L_N b_1^{(N)} + L_N^2 b_2^{(N)} + L_N^3 b_3^{(N)}) \sin \alpha_N - u_{END} = 0, \\
 & (a_0^{(N)} + L_N a_1^{(N)} + L_N^2 a_2^{(N)} + L_N^3 a_3^{(N)}) \sin \alpha_N + \\
 & + (b_0^{(N)} + L_N b_1^{(N)} + L_N^2 b_2^{(N)} + L_N^3 b_3^{(N)}) \cos \alpha_N - v_{END} = 0,
 \end{aligned} \tag{7}$$

де u_{END}, v_{END} – компоненти переміщення кінцевої точки в глобальній системі координат.

Система диференціально-алгебраїчних рівнянь з постійними коефіцієнтами (5)–(7) описує вільні коливання балочно-масової моделі, що розглядається. Вона може бути представлена у компактній матричній формі

$$Ac = B\ddot{c}, \tag{8}$$

де $c = \{\{a_j^k\}_{k=0}^N, \{b_j^k\}_{k=0}^N, u_{END}, v_{END}\}$, а матриці A і B складаються відповідно з коефіцієнтів лівих і правих частин рівнянь (5)–(7).

Щоб знайти власні частоти і форми коливань, розв'язок рівняння (8) представляється в експоненційній формі

$$c(t) = \bar{c} e^{\lambda t}. \tag{9}$$

Підстановка (9) в рівняння (8) призводить до узагальненої задачі на власні значення, що має вигляд

$$Ac = \lambda^2 Bc. \tag{10}$$

Її розв'язання дає спектр власних значень λ_k^2 і відповідні власні вектори c_k . Циклічні частоти власних коливань обчислюються за формулою $f_k = \sqrt{-\lambda_k^2} / (2\pi)$, а складові c_k використовуються для представлення за (2) власних форм коливань N -секційної балково-масової моделі зі структурним закручуванням, що розглядається.

Розв'язання задачі параметричної ідентифікації

Фізичні параметри наближеної балково-масової моделі мають бути визначені (ідентифіковані) на основі відомої інформації про поведінку реальної конструкції. У даній роботі реалізується підхід, коли ідентифікація здійснюється за власними частотами та формами згинних коливань лопаті турбіни, отриманих шляхом скінченно-елементних розрахунків, доповнених даними про вузлові маси, оцінка яких виконується за розподілом мас у скінченно-елементній моделі.

У даному підході ідентифікація параметрів моделі здійснюється за допомогою мінімізації функції якості, яка враховує відхилення як резонансних частот, так і відповідних форм коливань. При цьому використовується алгоритм глобальної оптимізації DIRECT [3], який базується на розбитті гіперкуба з прямим пошуком мінімуму. Стабільні результати ідентифікації були отримані при використанні у функції якості абсолютних відхилень частот і модальних переміщень виду

$$F = q \sum_{m=1}^{N_f} \left| \frac{f_m}{f_m^{ref}} - 1 \right| + \sum_{k=1}^{N_d} \left(\int_0^{z_{END}} |u_k - u_k^{ref}| dz + \int_0^{z_{END}} |v_k - v_k^{ref}| dz \right), \tag{11}$$

де f_m і f_m^{ref} – розраховані за моделлю, що ідентифікується, та отримані з більш детального скінченно-елементного моделювання значення власних частот, u_k, v_k і u_k^{ref}, v_k^{ref} – відповідні компоненти переміщень власних форм (інтеграли обчислюються наближено за правилом трапецій), q – ваговий коефіцієнт, а N_f і N_d – кількість використаних частот і форм переміщень. Хороші результати були отримані при $N_f = 5$, $N_d = 4$, $q = 15$. Також було застосоване логарифмічне масштабування значень згинних жорсткостей, які ідентифікуються, та для стабілізації розв'язку оберненої задачі була використана додаткова

апріорна інформації про обмеженість і монотонність жорсткостей (розв'язання на компакт) [1].

Результати ідентифікації для шестисегментної балочної моделі наведені на рис. 1.

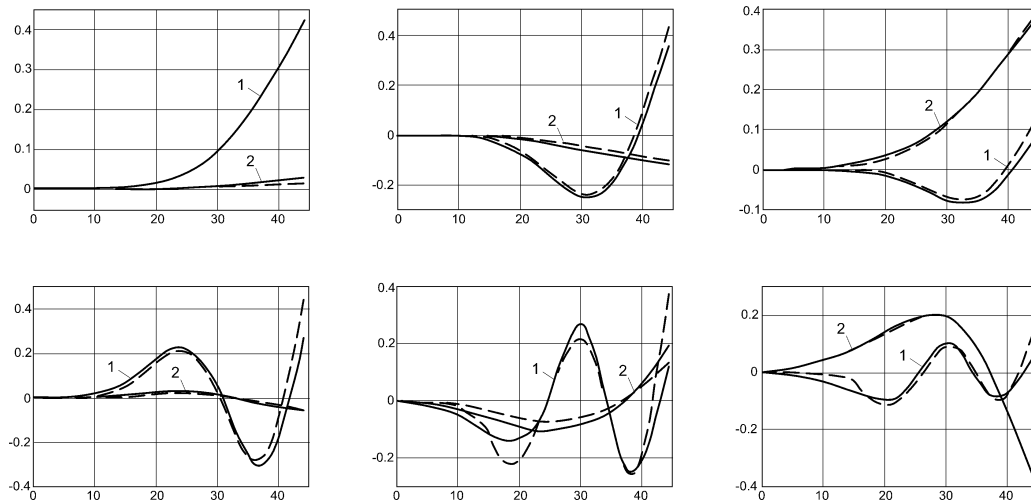


Рис. 1. Ідентифіковані (суцільні лінії) та обчислені за методом скінченних елементів (пунктир) переміщення власних форм: перпендикулярні (1) та у площині ротора турбіни (2).

Висновки

У статті запропоновано модифікований підхід до побудови спрощених динамічних моделей балкового типу для згинних коливань лопатей вітрових турбін на основі процедури ідентифікації, використовуючи результати більш детального моделювання із застосуванням методу скінченних елементів. Побудована багатосегментна балкова модель дозволяє враховувати закручення структури лопаті вздовж її довжини, що не дозволяє розділити рухи у площині ротора турбіни і перпендикулярно до неї.

Проведені обчислювальні експерименти показали, що кращі результати ідентифікації отримуються тоді, коли в цільовій функції, що описує різницю між результатами визначення

власних частот і форм за спрощеною балковою моделлю і за більш детальною скінченно-елементною моделлю, використовуються модулярні, а не квадратичні норми. Додатковий позитивний ефект був отриманий шляхом використання логарифмічного масштабування згинних жорсткостей, що ідентифікуються.

Процедура ідентифікації виконується з використанням алгоритму глобальної мінімізації 'DIRECT' з обмеженнями, що базуються на апріорній інформації (розв'язок на компакт), що забезпечує стабільні результати розв'язання погано зумовленої оберненої задачі.

Список використаних джерел

1. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела / А.О. Ватульян. – М.: Физматлит, 2007. – 224 с.
2. Chen K. N. Structural Optimization of 3 MW Wind Turbine Blades Using a Two-Step Procedure / K.N. Chen, P.Y. Chen // Int. J. Simul. Multidisci. Des. Optim. – 2010. – 4, No. 3-4. – P. 159-165.
3. Finkel D. E. DIRECT Optimization Algorithm User Guide [Електронний ресурс] / D.E. Finkel. – 2003 – 14 р. – Режим доступу: http://www4.ncsu.edu/~ctk/Finkel_Direct/DirectUserGuide_pdf.pdf.

References

1. VATULYAN, A. (2007) *Obratnyie zadachi v mehanike deformiruemogo tverdogo tela*. Moskva: Fizmatlit.
2. CHEN, K.N. and CHEN, P.Y. (2010) Structural optimization of 3 MW wind turbine blades using a two-step procedure. *Int. J. Simul. Multidisci. Des. Optim.* 4(3-4). p. 159-165.
3. FINKEL, D.E. (2003) DIRECT optimization algorithm user guide. [Online] – Available from: http://www4.ncsu.edu/~ctk/Finkel_Direct/DirectUserGuide_pdf.pdf

Надійшла до редколегії 27.08.17

УДК 534

Грінченко В. Т.¹, д. ф.-м. н., проф.,
Вовк І. В.¹, д. ф.-м. н., проф., пров. н. с.,
Маципура В. Т.², д. ф.-м. н., проф.

V. T. Grinchenko¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
I. V. Vovk¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
V. T. Matsypura², Dr. Sci. (Phys.-Math.).

Про моделювання випромінювання звуку надзвуковим струменем

On the modelling of sound radiation by a supersonic jet

¹ Інститут гідромеханіки НАН України, 03057,
м. Київ, вул. Желябова, 8/4,

² Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Акад.
Глушкова 4-е,
e-mail: mnivtt@gmail.com

¹ Institute of Hydromechanics NAS of Ukraine,
03057, Kyiv, Zhelyabova str., 8/4,

² Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e,
e-mail: mnivtt@gmail.com

При запуску штучних супутників Землі за допомогою ракети-носія виникає проблема, пов'язана з дією шуму на супутник, який розташований в головній частині ракети. Шум генерується газовим струменем, що виходить з сопла ракети. Строга теоретична постановка задачі про випромінювання звуку надзвуковим струменем, з описом механізму утворення шуму в турбулентному струмені і з урахуванням впливу руху середовища на ефективність акустичного випромінювання, є дуже складною. Велика кількість робіт присвячена експериментальному дослідженню структури поля в зоні змішення турбулентного струменя. Виникає природне питання: чи можна провести наближенні теоретичні розрахунки характеристик шуму турбулентного струменя, спираючись саме на експериментальні дослідження струменя? У зв'язку з цим питанням представляє інтерес розробка простих алгоритмів розрахунку рівня шуму струменя, котрі базуються на аналізі доступних експериментальних досліджень шумового поля струменя ракети на старті.

У роботі запропонований напівемпіричний алгоритм розрахунку шуму ракети на старті з урахуванням максимально можливого використання накопичених експериментальних даних. Такий підхід відкриває можливість провести оцінку акустичного навантаження на головні частини ракети і дозволяє отримувати оцінки рівнів акустичного тиску в заданих точках спостереження.

Ключові слова: модель, шум, ракета.

There is a problem associated with an effect of noise on the satellite, which is located at the head of the rocket, at the start of satellites by a rocket-transmitter. The noise is generated by a gas jet streaming out of the rocket nozzle. A strict theoretical formulation of the problem of sound radiation by a supersonic jet including a description of the mechanism of noise formation in the turbulent jet and the influence of the motion of the medium on the efficiency of acoustic radiation is very complicated. Plenty of papers are devoted to the experimental study of the field structure in the turbulent jet mixing zone. A natural question arises: is it possible to conduct approximate theoretical calculations of the characteristics of the turbulent jet noise based on experimental studies of the jet? The development of simple algorithms for calculating the jet noise level, which are based on the analysis of available experimental studies of the noise field of the rocket jet at the start, is of interest in connection with this issue.

In this paper, a semi-empirical algorithm for calculating the rocket noise at the start of a rocket with the highest possible use of accumulated experimental data is proposed. This approach opens up the opportunity to assess the acoustic load on the head parts of the rocket and makes it possible to get estimates of levels of the acoustic pressure at the given points of observation.

Key Words: model, noise, rocket.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Формування математичних моделей, які дозволяють одержати достовірні кількісні оцінки характеристик звукових полів, що генеруються потоками рідини чи газу є актуальною фундаментальною проблемою сучасної аерогідромеханіки. Використання таких моделей дає можливість вирішувати широке коло інженерних проблем [1, 2]. Однією із таких проблем є проблема оцінки і контролю рівня шуму, що генерується потоком газів ракетних двигунів.

Практично в усіх цікавих випадках математичний опис механізмів генерації звуків потоками призводить до нелінійних диференціальних рівнянь. Труднощі формування алгоритмів розв'язання таких рівнянь з використанням потужної обчислювальної техніки є прямим наслідком складності механізмів перекачування енергії потоку в енергію хвильових рухів. Оскільки в більшості випадків лише незначна частина енергії потоку трансформується в енергію звукового поля кількісні оцінки динамічних характеристик потоку мають обраховуватися з високою точністю. Тому типовою є ситуація, коли реалізація алгоритму оцінки звукового поля ракетного двигуна, навіть з використанням суперкомп'ютерів, триває місяцями [3].

Систематизація спостережень за конкретними пусками ракет різних типів дала можливість виявити спільні риси в поведінці ракет різних масштабів, що відкриває шлях до створення напівемпіричних моделей для одержання кількісних характеристик акустичних полів відносно простими розрахунками. Як це часто буває, існує можливість різних модифікацій таких моделей. В роботі пропонується певна гібридна модель оцінки звукового випромінювання стартуючої ракети, характерною особливістю якої є акцент на врахування відомих апріорі коефіцієнтів трансформації кінетичної енергії потоку в енергію звуку.

2. Деякі відомі емпіричні факти

Пропонована методика базується на наступних емпіричних фактах, достовірність яких неодноразово була підтверджена багатьма науково-технічними колективами, котрі розробляють ракетну техніку впродовж останніх 50 років.

1. Величина акустичної потужності, що випромінюється реактивним струменем ракети $P_{ak} = (0,005 \pm 0,002) P_{kin}$, тут P_{kin} кінетична енергія струменя [4].

2. Типова залежність нормованого (до максимального значення) спектру потужності звуку $\Psi(f)$, випромінюваного реальним струменем, показана на рис. 1 [4, 5].

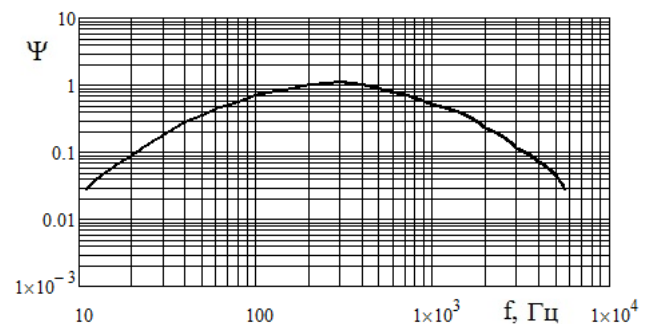


Рис. 1. Частотна залежність нормованого спектру потужності звуку $\Psi(f)$, випромінюваного реальним струменем

3. Довжина активної (з точки зору випромінювання звуку) частини струменя $L = (10 \dots 12) D$, де D – діаметр сопла реактивного двигуна.

4. Положення джерел звуку в струмені, залежно від частоти випромінюваного ними звуку. Установлено, що ділянки струмені, розташовані поблизу сопла, випромінюють більш високі частоти, а ділянки струменя розташовані далі від сопла випромінюють нижчі частоти [6].

5. Величина нахилу звукового хвильового фронту відносно осі надзвукового струменя становить приблизно 150° [1, 4, 5, 7].

3. Математична модель джерела струму

Замінімо струмінь, як джерело звуку, лінійною антеною з точкових джерел (монополів), що знаходяться у вільному повітряному просторі з густиною ρ і швидкістю звуку c (рис. 2). Антена містить $N+1$ джерел звуку, які розташовані один від одного на відстані d . Початок сферичної системи координат (r, θ, z) поєднаний з положенням точкового джерела з номером $n=0$. Нехай M – довільна точка, в якій необхідно оцінити звуковий тиск.

Приймемо, згідно з літературними даними [1], нормований розподіл коливальної швидкості уздовж антени у вигляді, показаному на рис. 3.

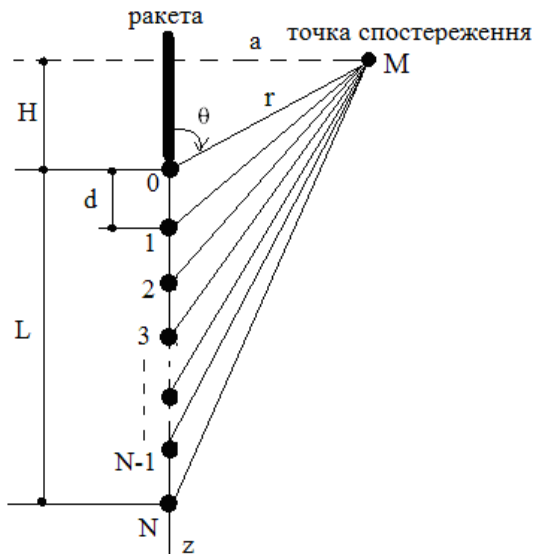


Рис. 2. Положення моделі джерела звуку відносно тіла ракети

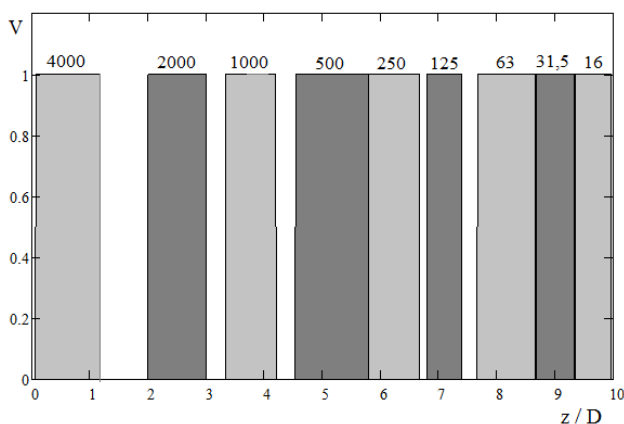


Рис. 3. Розподіл нормованої коливальної швидкості уздовж антени; (числа вказують середню геометричну частоту октавних смуг)

4. Спектр потужності модельного джерела звуку

Оцінимо спектр потужності лінійної групи точкових джерел (рис. 2). Кожне джерело випромінює сферичну гармонічну хвилю. Продуктивність окремого джерела залежить від частоти і положення в групі. Розрахунок спектру потужності можна провести в далекій зоні лінійної антени.

Тиск в далекому полі $p(\theta, f)$, як функція частоти f і кутової координати θ , визначаємо як суперпозицію хвиль від кожного монополя, які приходять в точку спостереження:

Щоб визначити спектр потужності слід інтегрувати квадрат амплітуди звукового тиску $p(\theta, f)$ по сферичній поверхні радіусу r . В результаті знаходимо спектр потужності $S(f)$

нашого модельного джерела звуку. Кількість точкових джерел була вибрана $N = 1000$.

5. Оцінка статистичних характеристик шуму струменя

Обчислення статистичних характеристик реального шумового сигналу на основі побудованої вище моделі базується на наступних двох твердженнях.

1. Побудована модель є лінійною.

2. Шум реальної ракети вважатимемо стаціонарним ергодичним процесом з нульовим математичним очікуванням. Вважаючи, що частотні складові шумового сигналу некогерентні, можна дії від них в точці спостереження складати квадратично. Тому середня потужність шумового сигналу дорівнює площі під кривою спектральної густини $S(\omega)$.

Оскільки функція $\Psi(f)$, показана на рис. 1, визначає частотну залежність нормованого спектру потужності шуму реального струменя, то інтеграл від функції $\Psi(f)$, в деякому діапазоні частот $[f_{\min}, f_{\max}]$, дорівнює відповідній потужності $\tilde{W}$.

Потужність шуму досліджуваної реальної ракети W_1 є заданою. Тоді між величинами W_1 і $\tilde{W}$, можна встановити рівність за допомогою коефіцієнта η , а саме $W_1 = \eta \tilde{W}$. Звідси $\eta = W_1 / \tilde{W}$. Знання коефіцієнта η дозволяє визначити спектр потужності шуму $S_1(f)$ досліджуваної реальної ракети, спираючись на базову частотну залежність $\Psi(f)$, котра показана на рис. 1. Таким чином, $S_1(f) = \eta \Psi(f)$.

Згідно з графіком на рис. 1, обмежимо діапазон спектру частотами $f_{\min} = 11$ Гц і $f_{\max} = 5600$ Гц.

6. Приклад розрахунку шуму стартуючої ракети

Нехай потужність шуму досліджуваної ракети складає: $W_1 = 1,4 \cdot 10^7$ Вт. Знаходимо величину $\tilde{W} = 1,366 \cdot 10^3$. Тоді $\eta = 1,0 \cdot 10^4$ Вт.

Таким чином, спектр потужності шуму досліджуваної реальної ракети $S_1(f)$ визначений. Знання частотних характеристик $S_1(f)$ і $S(f)$ дає можливість визначити поправочний коефіцієнт $K(f) = S_1(f) / S(f)$.

Квадрат амплітуди тиску в точці спостереження M визначається таким виразом:

$$|p(M, f)|^2 = K(f).$$

$$\left| -\frac{i\omega\rho}{4\pi} \sum_{n=0}^N \frac{v_n(f)}{r_n} \exp\left(i\frac{\omega}{c}r_n\right) \exp\left(-i\frac{\omega}{c}dn\cos\theta_0\right) \right|^2,$$

де $r_n = \sqrt{a^2 + (H + nd)^2}$, $v_n(f)$ – амплітуда коливань точкового джерела, $\theta_0 = 150^\circ$ – кут компенсації, $H = 19$ м, $a = 3$ м.

Визначимо величину $p_\Sigma^2(M; f_1, f_2)$ як результат квадратичного підсумовування в точці спостереження M усіх частотних компонент спектру шуму, що створюється струменем в заданій октавній смузі частот $f_1 \dots f_2$.

На рис. 4 приведені розрахункові значення рівня шуму в точці спостереження M в дев'яти октавних смугах. Аналіз результатів, показує, що розрахункові дані, що отримані за допомогою запропонованої методики цілком задовільно узгоджуються з результатами експерименту.

Список використаних джерел

1. Schulze J. Adjoint based jet-noise minimization / J. Schulze. – Berlin: TU Berlin, 2013. – 293 p.
2. Вовк І.В. Звук, рожденный потоком / І.В. Вовк, В.Т. Гринченко. – Киев: Наукова думка, 2010. – 221 с.
3. Tsutsumi S. Study on acoustic prediction and reduction of Epsilon launch vehicle at liftoff / S. Tsutsumi, T. Ishii, K. Ui, S. Tukuradome, K. Wada // Journ. Spacecraft and Rocket. – 2015. – 52, No. 2. – pp. 350-361
4. Varnier J. Experimental study and simulation of rocket engine free jet noise / J. Varnier // AIAA J. – 2001. – 39, No. 10. – P. 1851-1859.
5. Разработка методики оценки акустических нагрузок на приборы СУ верхней ступени при старте РКН. Итоговый отчет по НИР. – К.: Ин-т гидромеханики НАН Украины, 2016. – 92 с.
6. Крашенинников С. Ю. О свойствах течения в турбулентной струе и экспериментальное определение положения источников звука / С. Ю. Крашенинников, А. К. Миронов. – Ученые записки ЦАГИ. – 2012. – 43, № 4. – С. 3-19.
7. Голдстейн М. Е. Аэроакустика / М. Е. Голдстейн. – М.: Машиностроение, 1981. – 294 с.

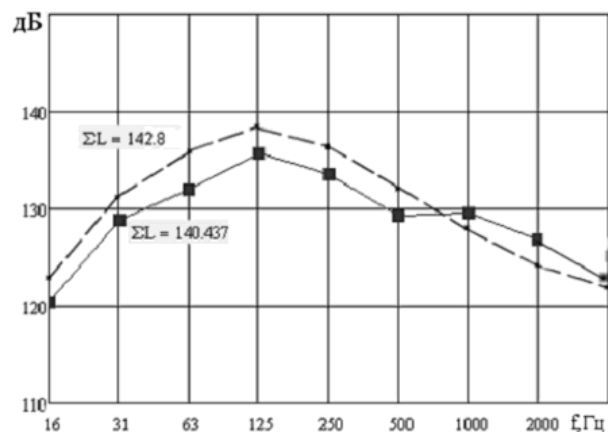


Рис. 4. Розрахункові значення рівня шуму в точці спостереження M в дев'яти октавних смугах (данні приведені на середніх геометричних частотах октавних смуг); пунктирна лінія відповідає експериментальним даним; на малюнку біля кожної кривої приведені сумарний рівень шуму в діапазоні частот від $f_{\min} = 11$ Гц до $f_{\max} = 5600$ Гц

References

1. SCHULZE, J. (2013) *Adjoint based jet-noise minimization*. Berlin: TU Berlin.
2. VOVK, I. and GRINCHENKO, V. (2010) *Zvuk, rozhdennyiy potokom*. Kiev: Naukova dumka.
3. TSUTSUMI, S., ISHII, T., UI, K., TUKUDOME, S. & WADA, K. (2015) Study on acoustic prediction and reduction of Epsilon launch vehicle at liftoff. *Journ. Spacecraft and Rocket*. 52 (2). p. 350-361.
4. VARNIER, J. (2001) Experimental study and simulation of rocket engine free jet noise. *AIAA J.* 39 (10). p. 1851-1859.
5. INSTITUTE OF HYDROMECHANICS NAS OF UKRAINE. (2016) *Razrabotka metodiki otsenki akusticheskikh nagruzok na priboryi SU verkhnej stupeni pri starte RKN. Itogoviy otchet po NIR*. Kiev: Institute of Hydromechanics NAS of Ukraine.
6. KRASHENNIKOV, S & MIRONOV, A. (2012) O svoystvakh techeniya v turbulentnoy struye i eksperimental'noye opredeleniye polozheniya istochnikov zvuka. *Uchenyye zapiski CAGI*. 43 (4). p. 3-19.
7. GOLDSTEIN, M. (1981) *Aeroakustika*. Moskva: Mashinostroyeniye.

Надійшла до редколегії 29.08.17

УДК 539.375

Дудик М. В.¹, к.ф.-м. н., доц.,
Решітник Ю. В.¹, к.ф.-м. н., ст. викл.,
Феньків В. М.¹, аспірант.

**Модель пластичної зони в адгезійному
шарі біля вершини міжфазної тріщини,
що виходить з кутової точки ламаної
межі поділу**

¹ Уманський державний педагогічний універси-
тет імені Павла Тичини, 20300, Черкаська обл.,
м. Умань, вул. Садова, 2,
e-mail: dudik_m@hotmail.com

M. V. Dudyk¹, Ph.D. (Phys.-Math.),
Yu.V. Reshitnyk¹, Ph.D. (Phys.-Math.),
V. M. Fen'kiv¹, Postgraduate student.

**Model of the plastic zone in adhesive layer
near the tip of the interfacial crack outcoming
from angular point of the broken interface**

¹ Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University,
20300, Cherkassy region, Uman, Sadova str., 2,
e-mail: dudik_m@hotmail.com

Досліджено модель маломасштабної пластичної зони із зоною деструкції, що розвиваються у з'єднувальному матеріалі кусково-однорідного тіла з вершини міжфазної тріщини, яка в умовах плоскої деформації виходить з кутової точки ламаної межі поділу двох різних однорідних ізотропних пружних матеріалів. За допомогою методу Вінера-Гопфа отримано розв'язок задачі про розрахунок довжини зони деструкції і розкриття тріщини у вершині. Виконано чисельний аналіз параметрів пластичної зони.

Ключові слова: ламана межа поділу, міжфазна тріщина, пластична зона, зона деструкції.

The model of the small-scale plastic zone with the destruction zone, which propagates under the plane strain conditions in the joining layer of the piece-homogenous body from the tip of interfacial crack outcoming from the angular point of broken interface of two different homogeneous isotropic elastic materials was investigated. The plastic zone is given by located on the interface a rupture line of displacement consisting of two parts. The destruction zone adjoining to the crack tip is simulated by the segment of normal and tangential displacements rupture, on which the normal and tangential stresses are equal to the tensile strength and shear resistance correspondingly. The other part of prefracture zone is modelled by the segment of the tangential displacement rupture, on which the tangential stress is equal to the shear resistance. Assuming that the length of destruction zone is much smaller than the length of the whole plastic zone the solution of the problem about the computation of the destruction zone parameters and stress-strain state near the crack tip by the Wiener - Hopf method was found. The numerical analysis of the destruction zone parameters is executed. Their substantial dependence on the elastic parameters of the joined materials, loading configuration and on the interface angle is revealed.

Keywords: broken interface, interfacial crack, plastic zone, destruction zone.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Згідно з висновками експериментальних досліджень [1] при навантаженні твердого тіла з тріщиною від її вершини розвивається пластична зона, що містить у привершинній частині область деструкції матеріалу. Їх врахування привело до розвитку моделі, яка подає пластичну зону лінією розриву переміщення, що складається з двох частин – зони деструкції, в якій має місце стрибок нормального і дотичного переміщень, та решти пластичної зони, в якій стрибка зазнає лише дотичне переміщення [2].

Метою даної роботи є визначення параметрів

пластичної зони із зоною деструкції у з'єднувальному матеріалі кусково-однорідного тіла в околі вершини міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки ламаної межі поділу двох різних середовищ, при умові відривного характеру переміщень берегів тріщини, що забезпечує відсутність контакту берегів. Вважаючи розміри зони деструкції значно меншими порівняно з розмірами пластичної зони, приходимо до задачі про розрахунок розмірів зони деструкції при відомих параметрах пластичної зони, визначених раніше в [3], та дослідження впливу зони деструкції на розкриття тріщини в околі її вершини.

2. Постановка задачі

В умовах плоскої деформації розглядається задача про розрахунок розмірів зони деструкції, що виникає у частині маломасштабної пластичної зони, прилеглої до вершини міжфазної тріщини довжиною L з вільними від навантаження берегами, яка виходить з кутової точки ламаної межі поділу двох однорідних ізотропних матеріалів з модулями Юнга E_1 , E_2 і коефіцієнтами Пуассона ν_1 , ν_2 . Вважаючи, що пластична зона утворюється у тонкому з'єднувальному шарі досліджуваного композитного тіла, подаємо її лінійю розриву переміщення, що складається з двох частин (рис. 1). Прилегла до вершини тріщини зона деструкції моделюється відрізком, на якому зазнають розриву нормальне і дотичне переміщення, а нормальне і дотичне напруження дорівнюють опору відриву σ_0 і опору зсуву τ_0 з'єднувального матеріалу відповідно [2]. Інша частина пластичної зони моделюється лінійю розриву дотичного переміщення, на якому дотичне напруження дорівнює опору зсуву.

У відповідності з експериментальними даними [1] довжину зони деструкції d вважаємо значно меншою порівняно із довжиною l всієї пластичної зони. Це дозволяє розглядати тіло як кусково-однорідну площину з межею поділу у формі прямолінійних сторін кута, з вершини якого вздовж однієї зі сторін поширюється півнескінчена тріщина, вздовж іншої – півнескінчена лінія розриву дотичного переміщення зі сталим дотичним напруженням $\tau_{r\theta}(r, 0) = \tau_0$, яка містить у прилеглої до вершини тріщини відрізок скінченної довжини d , де зазнає розриву також і нормальне переміщення, а нормальне напруження дорівнює $\sigma_\theta(r, 0) = \sigma_0$. При цьому на нескінченості розшукуваний розв'язок повинен збігатись з відомим асимптотичний розв'язком біля вершини тріщини аналогічної задачі про маломасштабну пластичну зону скінченної довжини без зони деструкції [3].

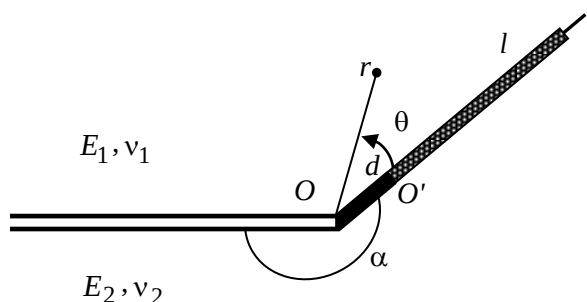


Рис. 1 Розрахункова модель пластичної зони із зоною деструкції

Таким чином, приходимо до статичної задачі теорії пружності з крайовими умовами:

$$\theta = -\alpha \cup \theta = 2\pi - \alpha: \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0;$$

$$\theta = 0: \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0; \quad \theta = 0: \tau_{r\theta} = \tau_0;$$

$$\theta = 0, r < d: \sigma_\theta = \sigma_0;$$

$$\theta = 0, r > d: \langle u_\theta \rangle = 0;$$

$$\theta = 0, r \rightarrow \infty: \sigma_\theta = \tau_0 [\tilde{C}_0 + \sum_s \tilde{C}_s \left(\frac{r}{L}\right)^{\lambda'_s} + o\left(\frac{1}{r}\right)];$$

$\langle f \rangle$ – стрибок величини f ; $\tilde{C}_0$, $\tilde{C}_s$ – сталі, що визначаються конфігурацією тіла і зовнішнім навантаженням і вважаються заданими за умовою задачі; λ'_s – корені характеристичного рівняння аналогічної задачі без зони деструкції ($\text{Re } \lambda'_s > -1$) [3]:

$$D_1(-1 - \lambda'_s) = 0,$$

$$D_1(p) = e(1 + \kappa_2)\Delta_1(p)\Delta_2(p) - (1 + \kappa_1)\Delta_3(p)\Delta_4(p),$$

$$\Delta_1(p) = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p(2\pi - \alpha),$$

$$\Delta_2(p) = p \sin 2\alpha + \sin 2p\alpha,$$

$$\Delta_3(p) = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha,$$

$$\Delta_4(p) = p \sin 2\alpha - \sin 2p(2\pi - \alpha);$$

$$e = \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1} \cdot \frac{E_1}{E_2}, \quad \kappa_{1(2)} = 3 - 4\nu_{1(2)}.$$

3. Визначення параметрів зони деструкції

Враховуючи, що кінець зони деструкції O' є концентратором напружень з кореневою особливістю, розв'язок сформульованої крайової задачі знайшли за допомогою методу Вінера-Гопфа, як і подібної задачі про зону деструкції у бічній пластичній зоні в кінці міжфазної тріщини, що лежить на плоскій межі поділу [2]. У результаті одержали трансцендентне рівняння для визначення довжини d зони деструкції

$$\tau_0 \sum_s \frac{\tilde{C}_s (d/L)^{\lambda'_s} K^+(-\lambda'_s - 1)}{(\lambda'_s + 1) H^+(-\lambda'_s - 1)} = \frac{(\sigma_0 - \tau_0 \tilde{C}_0) K^+(-1)}{H^+(-1)},$$

$$\text{де } K^+(p) = \frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(0,5-p)} \quad (\Gamma(z) - \text{гамма-функція}),$$

$$H^+(p) = \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln H(z)}{z-p} dz \right] \quad (\text{Re } p < 0),$$

$$H(p) = \frac{2[1 + \kappa_1 + e(1 + \kappa_2)] \cos p\pi \Delta_1(p) \Delta_3(p)}{\sin p\pi D_1(p)}.$$

Знайшли також нормальне розкриття берегів зони деструкції у вершині тріщини:

$$\delta u_n(0,0) = -\frac{4(1-\nu_1^2)}{E_1} \tau_0 d \frac{1+\kappa_1+e(1+\kappa_2)}{2(1+\kappa_1)\sqrt{\pi H(0)}} \times \\ \times \sum_s \frac{\tilde{C}_s (d/L)^{\lambda'_s} \lambda'_s K^+(-1-\lambda'_s)}{(\lambda'_s+1)^2 H^+(-1-\lambda'_s)}.$$

Враховуючи визначене у [3] зсувне зміщення берегів пластичної зони у її початку $\delta u_r(0,0)$, визначили повне розкриття тріщини у її вершині $\delta = \sqrt{(\delta u_n(0,0))^2 + (\delta u_r(0,0))^2}$.

4. Аналіз отриманих результатів

При виконанні числових розрахунків зовнішнє навантаження задавали як у [3] безрозмірною величиною τ і параметрами конфігурації n_i для дійсних або n для комплексних показників сингулярності λ_i локального поля напружень біля вершини тріщини при відсутності пластичної зони. При цьому $\tilde{C}_0 = 2T'(-1)/D_1'(-1)$, а сталі $\tilde{C}_s$ у випадку дійсних λ_i дорівнювали

$$\tilde{C}_s = \tau \frac{2T(-1-\lambda'_s)}{D_1'(-1-\lambda'_s)N(\lambda'_s)} \times \\ \times \sum_i n_i F(\lambda_i) N(\lambda_i) x^{\lambda_i-\lambda'_s} m(\lambda_i, \lambda'_s),$$

а для комплексно спряжених $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \lambda_r + i\lambda_m$ -

$$\tilde{C}_s = \tau \frac{2T(-1-\lambda'_s)}{D_1'(-1-\lambda'_s)N(\lambda'_s)} x^{-\lambda'_s} \times \\ \times 2\text{Re} \left[F(\lambda_1) N(\lambda_1) m(\lambda_1, \lambda'_s) e^{i\psi} x^{\lambda_1} \right].$$

Тут $F(\lambda_i)$, $N(\lambda)$, $m(\lambda_i, \lambda'_s)$ - визначені в [3] функції; $x = l/L$ - відносна довжина всієї пластичної зони, яка розраховується згідно з [3]; штрихи при функціях $T(p)$ і $D_1(p)$ позначають похідні по їх аргументу; $\psi = \arctg n$;

$$T(p) = (1+\kappa_1)\Delta_3(p)\Delta_5(p) - \\ - e(1+\kappa_2)\Delta_1(p)\Delta_6(p) + 2(e-1)\Delta_1(p)\Delta_3(p), \\ \Delta_5(p) = p \sin^2 \alpha - \sin^2 p(2\pi - \alpha), \\ \Delta_6(p) = p \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha.$$

На рис. 2-4 показано залежність відносних довжин всієї пластичної зони $x = l/L$ (суцільні лінії), зони деструкції $y = d/L$ (штриховані лінії) та нормованого розкриття тріщини

$\delta' = \frac{\delta}{L} \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)\tau_0}$ (пунктирні лінії) від параметрів навантаження і кута зламу межі поділу для $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ і $n_3 = 0$. Графіки та рисунки, позначені як *a*, відповідають дійсним, а як *b* - комплексним показникам сингулярності.

Згідно з рис. 2, розміри пластичної зони і зони деструкції та розкриття тріщини синхронно зростають при збільшенні модуля зовнішнього навантаження, заданого безрозмірним параметром τ . Однак такої ж кореляції немає в їх залежності від конфігурації навантаження, визначеної значеннями n_2 і n (рис. 3), та від кута зламу межі поділу (рис. 4). Відмінності у поведінці розмірів пластичної зони і зони деструкції при зміні параметрів тіла і навантаження пов'язані з тим, що перші визначаються тангенціальними зусиллями на межі поділу, а другі - нормальними. Тому при тих конфігураціях тіла або навантажень, для яких тангенціальні напруження на межі поділу максимальні, відповідно й довжина пластичної зони буде максимальною, але при цьому нормальне напруження і відповідно й довжина зони деструкції будуть мінімальними. Навпаки, коли нормальна складова напруження на межі поділу досягає максимуму, довжина зони деструкції зростає настільки, що порушується вихідне припущення розглянутої моделі про малість її розмірів порівняно з розмірами всієї зони: згідно з рис. 3.b, для $n \geq 0,5$ довжина зони деструкції стає більшою за довжину пластичної зони, що свідчить про некоректність моделі для відповідних n .

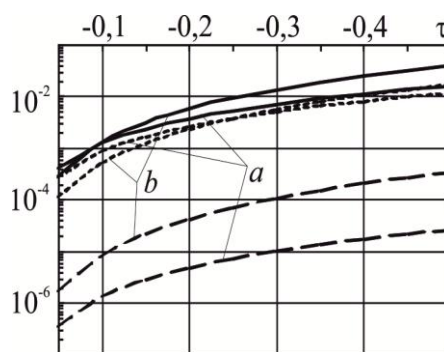


Рис. 2. Залежність відносних довжин всієї пластичної зони x і зони деструкції y та нормованого розкриття тріщини δ' від параметра навантаження для $E_1/E_2=0,25$ та а) $\alpha = 50^\circ$, $n_2 = -1$ і б) $\alpha = 210^\circ$, $n = -1$.

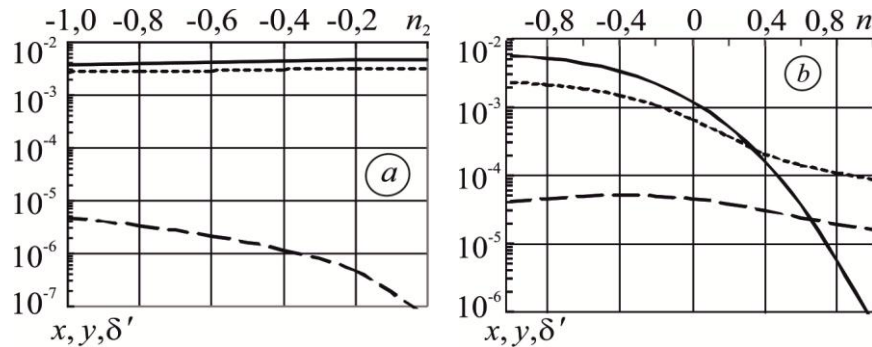


Рис. 3. Залежність відносних довжин всієї пластичної зони x і зони деструкції y та нормованого розкриття δ' від конфігурації навантаження для $E_1/E_2=0,25$, $\tau=-0,2$ та а) $\alpha=50^\circ$ і б) $\alpha=210^\circ$.

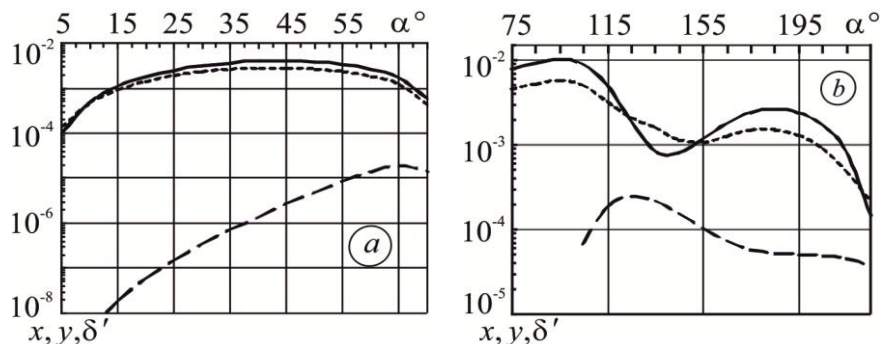


Рис. 4. Залежність відносних довжин всієї пластичної зони x і зони деструкції y та нормованого розкриття δ' від кута зламу межі поділу матеріалів для $E_1/E_2=0,25$, $\tau=-0,2$ та а) $n_2=-1$ і б) $n=0$.

Висновки. Розвинуто модель пластичної зони у з'єднувальному матеріалі кусково-однорідного тіла біля вершини міжфазної тріщини, яка виходить з кутової точки ламаної межі поділу двох різних однорідних ізотропних пружних середовищ. Отримано рівняння для визначення дов-

жини зони деструкції і розкриття тріщини в її вершині. Виконано числовий аналіз параметрів зони деструкції, який виявив суттєву залежність її розмірів та розкриття тріщини від зовнішнього навантаження, пружних характеристик і кута зламу межі поділу з'єднаних матеріалів.

Список використаних джерел

1. Каминский А.А. Экспериментальное исследование распределения пластических деформаций в окрестности вершины трещины при статическом нагружении / А.А. Каминский, Г.И. Усикова, Е.А. Дмитриева // Прикл. механика. – 1994. – Т. 30, № 11. – С. 69–75.
2. Кіпніс Л. А. Особливості структури пластичної зони біля вершини міжфазної тріщини при переважаннях розтягувальних навантажень / Л.А. Кіпніс, М.В. Дудик, В.М. Дякон // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2015. – Спецвипуск. – С.111-114.
3. Дудик М.В. Вплив пластичності з'єднувального матеріалу на поворот міжфазної тріщини у кутовій точці межі поділу середовищ / М.В. Дудик, Ю.В. Діхтяренко, В.М. Дякон // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2014. – №1. – С.45-52.

References

1. KAMINSKII, A.A., USIKOVA, G.I. and DMITRIEVA, E.A. (1994) Experimental study of the distribution of plastic strains near a crack tip during static loading. *Int. Appl. Mech.* 30 (11). p. 892–897.
2. KIPNIS, L.A., DUDYK, M.V. and DYAKON, V.M. (2015) Osoblyvosti struktury plastychnoi zony bilia vershyny mizhfaznoi trishchyny pry perevazhaiuchykh roztyahuvalnykh navantazhenniakh. *Visn. Kyiv. Nats. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauk. - Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. (Special Issue).* p.111-114.
3. DUDYK, M.V., DIKHTYARENKO, Yu. V. and DYAKON, V.M. (2014) Influence of the Plasticity of a Joining Material on the Kink of an Interface Crack at the Corner Point of the Interface of Media. *Mater. Sci.* 50 (1). p. 46-54.

Надійшла до редколегії 29.08.17

УДК 532.59: 534.29

Жук О.П.¹, д.ф.-м.н., пров.н.с.
Жук Я.О.², д.ф.-м.н., проф.

Дія радіаційної сили в звуковому полі на тверду сферичну частинку в околі віль- ної поверхні рідини

¹Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН
України, 03057, м. Київ, вул. Петра Нестерова, 3,
e-mail: zhuk@inmech.kiev.ua

²Київський національний університет імені Тара-
са Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова, 4е,
e-mail: y.zhuk@i.ua

O.P. Zhuk¹, Dr.Sci. (Phys.-Math.),
Y.A. Zhuk², Dr.Sci. (Phys.-Math.).

Acoustic radiation force effect on a rigid spherical particle placed in the vicinity of a liquid free surface

¹Timoshenko Institute of Mechanics, NAS of Ukraine,
3, Petr Nesterov str., Kyiv 03057,
e-mail: zhuk@inmech.kiev.ua

²Taras Shevchenko National University of Kyiv, 4e,
Glushkov ave., Kyiv 03680,
e-mail: y.zhuk@i.ua

Розроблено метод для дослідження дії радіаційної сили в акустичному полі на тверду сферичну частинку, яка знаходиться в околі вільної поверхні ідеальної рідини. Одержано формули для обчислення величини і напрямку її дії.

Ключові слова: ідеальна рідина, плоска акустична хвиля, тверда частинка, гідродинамічна сила, радіаційна сила.

Acoustic radiation force effect on a rigid spherical particle placed in the vicinity of a liquid free surface is investigated. It is well known, the problems of determination of the radiation forces acting on the obstacles in an ideal liquid is formulated with respect to the Lagrange coordinate system. Thus, the radiation pressure is defined as time-averaged value of the acoustic pressure over the obstacle surface. This approach proves to be adequate if, at determining of the acoustic pressure in a fluid, the deviation of the pressure from the harmonic law in time domain is taken into account in the obstacle vicinity. Linear approximation for the radiation pressure evaluation is insufficient because having the sound pressure as periodic function of time and averaging it over the wave field oscillation period leads to zero value of the force. According to the approach developed earlier, solution of the specified problem is performed in three basic steps. The first step comprises the examination of regularities of interaction between incident harmonic sound wave and obstacle: the sphere, i.e. the solution of the problem of an incident wave scattering. With making use of the results obtained, the second step encompasses determining of hydrodynamic forces acting on the rigid spherical particle with their subsequent averaging over the suitable time interval at the third step. The formulae for radiation force calculation as well as determination of the direction of it are derived.

Key Words: ideal liquid, plane acoustic wave, rigid particle, hydrodynamic force, radiation force.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Перестюк М.О.

1. Вступ

В акустичному полі окрім змінних величин: тиску, переміщення і швидкості, виникають сталі в часі сили. До таких сил відноситься радіаційний тиск, який також називають тиском звукового випромінювання [1]. Радіаційна сила є стала складова сили, яка діє на перешкоду в акустичному полі. Її походження пов'язане із зміною в деякому об'ємі (наприклад, в околі перешкоди) середнього в часі імпульсу, який переносить хвиля. В лагранжових координатах радіаційний тиск визначається середнім в часі значенням звукового тиску p на поверхню перешкоди. При цьому

тиск p у рідині визначають з врахуванням величин другого порядку малості по акустичному полю, які зумовлені його нелінійністю в околі перешкоди, і, отже, не перетворюються на нуль після осереднення в часі. Зазначимо, що визначення тиску в рідині з врахуванням величин другого порядку малості по параметрах акустичного поля можливе в лінійному наближенні [2,3]. У зв'язку з розв'язування задачі обчислення радіаційної сили, яка діє в звуковому полі на перешкоду, можна розбити на декілька етапів. На першому з них визначається хвиля, що розсіюється або відбивається перешкодою. Для цього необхідно скористатись розв'язком лінійної задачі дифрак-

ції про розсіювання акустичної хвилі на перешкоді. На другому етапі на основі результатів розв'язання цієї задачі визначається результуюча сила впливу рідини на перешкоду. На третьому етапі осередненням в часі останньої відфільтровується її стала за часом складова, яку й називають радіаційною силою. Результати досліджень випадків поодиноких твердих частинок і систем таких частинок наведені в статтях [4,5].

2. Постановка задачі дифракції та її розв'язування

Розглядається ідеальна стислива рідина, в якій на відстані ℓ від її вільної поверхні розташована тверда сферична частинка радіуса R (рис.1). Рідина характеризується густиною ρ і швидкістю звуку в ній a_0 . В напрямі, перпендикулярному до поверхні рідини ($z = 0$) поширюється плоска звукова хвиля, потенціал Φ_i якої в системі координат $Oxyz$ (рис.1) має такий вигляд

$$\Phi_i = A \exp[i(kz - \omega t)], \quad (1)$$

де A – амплітуда; $k = \omega/a_0$ – хвильове число; ω – кутова частота.

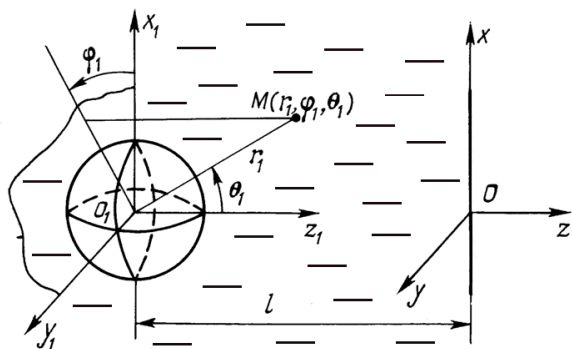


Рис. 1. Сферична тверда частинка в околі вільної поверхні рідини.

Радіаційна сила, яка діє на сферичну тверду частинку, визначається звуковим полем, утвореним інтерференцією первинної хвилі Φ_i , первинної хвилі, відбитої від вільної поверхні $z = 0$, хвилі, розсіяної на сферичній частинці, а також частиною останньої хвилі, відбитої від вільної поверхні $z = 0$ рідини. Потенціали трьох останніх із вказаних хвиль позначимо відповідно Φ_s , $\Phi_d^{(1)}$, і $\Phi_s^{(1)}$. Для їх визначення необхідно, як вказано вище, розв'язати лінійну задачу дифракції хвилі з потенціалом Φ_i на сферичній частинці і на вільній поверхні рідини. В такому випадку потенціали швидкостей Φ повинні задовольняти рівнянню

$$\Delta \Phi - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

В рамках постановки задачі дифракції вільну поверхню рідини $z = 0$ вважаємо ідеальною [6], тому відбита від неї хвиля (1) буде мати потенціал

$$\Phi_s = -A \exp[-i(kz + \omega t)], \quad (3)$$

Отже можемо потенціал $\Phi_0 = \Phi_i + \Phi_s$ розглядати як потенціал первинної (падаючої) хвилі.

Введемо зв'язану із частинкою сферичну систему координат $O_1 r_1 \varphi_1 \theta_1$. Потенціал $\Phi_d^{(1)}$ розсіяної на сфері (відбитої від неї) хвилі представимо узагальненим рядом Фур'є по сферичних хвильових функціях

$$\Phi_d^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} h_n^{(1)}(kr_1) P_n(\cos \theta_1) \exp(-i\omega t). \quad (4)$$

де $h_n^{(1)}(kr_1)$ – сферична функція Ганкеля першого роду, $P_n(\cos \theta_1)$ – поліноми Лежандра.

У випадку лінійної постановки задачі дифракції тиск p і швидкість $\vec{v}$ рідини визначаються через потенціали Φ поля швидкостей формулами

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \vec{v} = \text{grad } \Phi. \quad (5)$$

Вважаємо тверду сферичну частинку нерухомою. Тоді граничні умови на її поверхні S_1 мають такий вигляд:

$$\vec{v}|_{S_1} = 0. \quad (6)$$

Для визначення потенціалу $\Phi_s^{(1)}$ відбитої від вільної поверхні $z = 0$ частини розсіяної на сфері хвилі $\Phi_d^{(1)}$ скористаємось методом уявних зображень [6]. Для цього задачу про акустичне поле у півпросторі з твердою частинкою N_1 , обмеженому абсолютно м'якою поверхнею, замінимо задачею про акустичне поле в необмеженому просторі, в якому симетрично відносно вільної поверхні розміщена уявна сферична частинка N_2 . Розсіяне на уявній сферичній частинці акустичне поле $\Phi_d^{(2)}$ повинно створювати в точках абсолютно м'якої поверхні тиск, рівний за величиною і протилежний по знаку тиску, викликаному хвилею з потенціалом $\Phi_d^{(1)}$. Таким чином, відбита від вільної поверхні частина хвилі $\Phi_d^{(1)}$ (тобто

хвиля-луна, яка визначається потенціалом $\Phi_s^{(1)}$ – це акустичне поле, яке створюється у актуальному півпросторі розсіяною на уявній сферичній частинці N_2 хвилею Φ_0 .

Зв'яжемо з уявною частинкою сферичну систему координат $O_2 r_2 \varphi_2 \theta_2$, а потенціал $\Phi_s^{(1)}$ запишемо в такому вигляді:

$$\Phi_s^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(2)} h_n^{(1)}(kr_2) P_n(\cos \theta_2) \exp(-i\omega t), \quad (7)$$

який задовольняє умови випромінювання на нескінченності.

Із граничної умови на вільній поверхні ($p = 0$, при $z = 0$) встановлюється зв'язок між коефіцієнтами $A_n^{(1)}$ і $A_n^{(2)}$

$$A_n^{(2)} = (-1)^{n+1} A_n^{(1)}. \quad (8)$$

Для визначення коефіцієнтів $A_n^{(1)}$ використовується гранична умова (6) на поверхні S_1 сферичної частинки. При цьому швидкість в рідині зумовлюється потенціалами звукового поля

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_d^{(1)} + \Phi_s^{(1)}. \quad (9)$$

При цьому потенціали Φ_0 і $\Phi_s^{(1)}$ необхідно записати в сферичній системі координат, зв'язаній з частинкою N_1 . В результаті отримаємо

$$\Phi(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} [(2n+1) A b_n j_n(kr_1) + A_n^{(1)} h_n^{(1)}(kr_1) + S_n^{(2)} j_n(kr_1)] P_n(\cos \theta_1) e^{-i\omega t}, \quad (10)$$

де $j_n(kr_1)$ – сферичні функції Бесселя,

$$b_n = -2i \sin(k\ell - n\pi/2),$$

$$S_n^{(2)} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+1} A_p^{(1)} Q_{0n0p}^{(1,2)}(2k\ell, \pi),$$

$$Q_{0n0p}^{(1,2)}(2k\ell, \pi) = 2i^{p-n} \sum_{\sigma=|p-n|}^{p+n} (-1)^{\sigma} b_{\sigma}^{(n0p0)} h_{\sigma}^{(1)}(2k\ell),$$

$$b_{\sigma}^{(p0n0)} = \sqrt{\frac{(2n+1)(2n+3)}{2(2\sigma+1)}} (pn00|\sigma0)^2,$$

$$(pn00|\sigma0) = (-1)^{\sigma+\frac{3}{2}} \frac{\left(\frac{s}{2}\right)!}{\left(\frac{s}{2}-n\right)! \left(\frac{s}{2}-p\right)! \left(\frac{s}{2}-\sigma\right)!} \times \\ \times [(2\sigma+s)!(s-2n)!(s-2p)!(s-2\sigma)!]^{\frac{1}{2}},$$

якщо s парне і $(pn00|\sigma0) = 0$, якщо s непарне.

Задовольнивши граничні умови на поверхні S_1 сферичної частинки, одержуємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів, яка має такий вигляд:

$$h_n^{(1)'}(kR) A_n^{(1)} + j_n'(kR) S_n^{(2)} = -A(2n+1) i^n b_n j_n'(kR). \quad (7)$$

Вона розв'язується методом редукції.

Визначенням потенціалу (10) закінчується розв'язання задачі дифракції.

3. Обчислення радіаційної сили, що діє на тверду сферичну частинку

Радіаційну силу обчислимо, осереднюючи по часу гідродинамічну силу, яка діє в звуковому полі з боку рідини на тверду сферичну частинку. Внаслідок осьової симетрії хвильового поля з потенціалом (10) відносно осі Oz гідродинамічна сила, з якою звукове поле діє на сферичну частинку, напрямлена вздовж цієї осі та за величиною дорівнюватиме

$$F_z = -2\pi R^2 \int_0^{\pi} p \sin \theta_1 \cos \theta_1 d\theta_1. \quad (12)$$

Оскільки метод дослідження передбачає наступне осереднення (12) по періоду падаючої хвилі, звуковий тиск p в рідині необхідно визначити в квадратичному наближенні. Для цього використаємо підхід [2,4], який передбачає обчислення тиску p з точністю до доданків другого порядку по числу Маха

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho (\text{grad} \Phi)^2 + \frac{1}{2} \frac{\rho}{a_0^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2. \quad (13)$$

При цьому можна використати потенціал Φ поля швидкостей (9), визначений при розв'язуванні лінійної задачі дифракції на попередньому етапі. Зауважимо, що структура виразу (13) для тиску в рідині передбачає при обчисленні тиску p використання дійсної частини потенціалу Φ (9). Запишемо її в такому вигляді

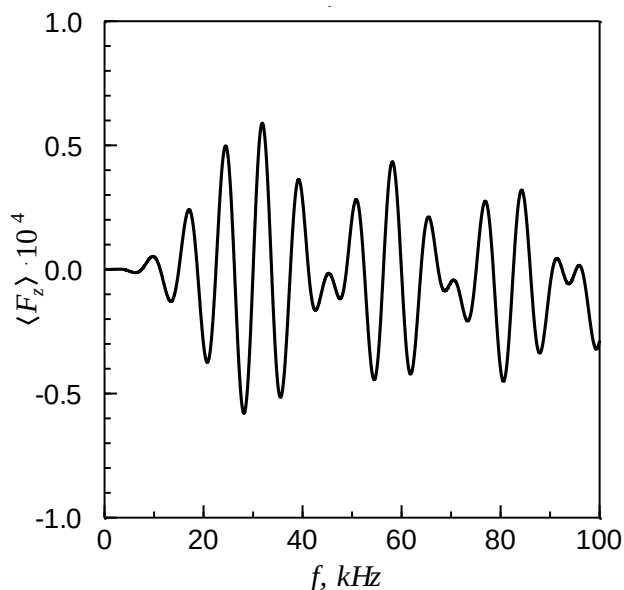


Рис. 2. Залежність радіаційної хвилі від частоти первинної акустичної хвилі.

$$\operatorname{Re} \Phi(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} (K_n \cos \alpha t + L_n \sin \alpha t) \times P_n(\cos \theta_1), \quad (14)$$

$$K_n = B_n y_n(\alpha) + C_n j_n(\alpha) - 2(2n+1) A_j(\alpha) \times \sin\left(kl - n \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{Im} S_n^{(2)} j_n(\alpha),$$

Список використаних джерел

1. Зарембо Л.К. Введение в нелинейную акустику / Л.К. Зарембо, В.А. Красильников. – Москва: Наука, 1966. – 520 с.
2. King L. V. On the acoustic radiation pressure on spheres / L. V. King // Proc. Roy. Soc., Ser. A. – 1934. – Vol. 147, No. 861. – P. 246–265.
3. Красильников В.А. Введение в физическую акустику / В.А. Красильников, В.В. Крылов. – Москва: Наука, 1984. – 400 с.
4. Guz A.N. Motion of solid particles in a liquid under the action of an acoustic field: the mechanism of radiation pressure / A.N. Guz, A.P. Zhuk // International Applied Mechanics. – Vol. 40, No. 3. – P. 246–265.
5. Zhuk A.P. Acoustic radiation force on a spherical particle in a fluid-filled cavity / A.P. Zhuk, V.D. Kubenko, Y.A. Zhuk // Journal of the Acoustical Society of America (JASA). – 2012. – Vol. 132, No. 4. – P. 2189–2197.
6. Исакович М.А. Общая акустика / М.А. Исакович. – Москва: Наука, 1973. – 496 с.

$$L_n = B_n j_n(\alpha) - C_n y_n(\alpha) + \operatorname{Re} S_n^{(2)} j_n(\alpha),$$

$$A_n^{(1)} = B_n + iC_n; \quad \alpha = kR,$$

а $y_n(kR)$ – сферична функція Неймана.

Отже потенціал (14), записаний на поверхні сферичної частинки. Беручи до уваги, що частинка є нерухомою та використовуючи в (12) співвідношення (13) і (14), після осереднення (12) в часі одержимо формулу для обчислення радіаційної сили, яка діє в акустичному полі з потенціалом (10) на тверду сферичну частинку в околі вільної поверхні рідини

$$\langle F_z \rangle = 2\pi\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} (K_n K_{n+1} + L_n L_{n+1}) \times [n(n+2) - \alpha^2] \quad (15)$$

Оскільки хвильове поле симетричне відносно осі Oz, радіаційна сила напрямлена вздовж цієї осі. Формула (15) – її проекція на дану вісь.

На рис. 2 подано типовий результат розрахунку залежності радіаційної сили від частоти первинної хвилі. Відзначимо, що радіаційна сила, яка діє на тверду сферу в околі вільної поверхні рідини, на відміну від випадку твердої сфери в необмеженому середовищі, може мати як напрямок, що співпадає з напрямком поширення хвилі, так і протилежний напрямок.

References

1. ZAREMBO L.K. and KRASILNIKOV V.A. (1966) *Vvedenie v nelinejnyu akustiku*. Moskva: Nauka.
2. KING L.V. (1934) On the acoustic radiation pressure on spheres. *Proc. Roy. Soc., Ser. A*. 147(861). p. 246–265.
3. KRASILNIKOV V.A. and KRYLOV V.V. (1984) *Vvedenie v fizicheskuyu akustiku*. Moskva: Nauka.
4. GUZ A.N. and ZHUK A.P. Motion of solid particles in a liquid under the action of an acoustic field: the mechanism of radiation pressure. *International Applied Mechanics*. 40(3). p. 246–265.
5. ZHUK A.P., KUBENKO V.D. and ZHUK Y.A. (2012) Acoustic radiation force on a spherical particle in a fluid-filled cavity. *Journal of the Acoustical Society of America*. 132(4). p. 2189–2197.
6. ISAKOVICH M. A. (1973) *Obshchaya akustika*. Moskva: Nauka.

Надійшла до редколегії 06.09.2017

УДК 539.3

Журавльова З. Ю., аспірант,
Нерух Д. О., д. х. н., ст. викл.,
Реут В. В., к. ф.-м. н., доцент,
Козачков Д. Г., магістр,
Вайсфельд Н. Д., д. ф.-м. н., проф.

Про напружений стан вірусу PCV2

Астонський університет, Бірмінгем B4 7ET,
Астон Тріангл
Одеський національний університет імені
І. І. Мечникова, 65082, м. Одеса, вул.
Дворянська, 2
e-mail: zhuravleva@te.net.ua

Z. Yu. Zhuravlova, Postgraduate Student,
D. A. Nerukh, Dr. Sci. (Chem.), Senior Lecturer,
V. V. Reut, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
D. G. Kozachkov, Master Student,
N. D. Vaysfel'd, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof

On stress state of the PCV2 virus

Aston University, Birmingham B4 7ET, Aston
Triangle
Odessa I. I. Mechnikov National University, 65082,
Odessa, Dvoryanskaya str., 2
e-mail: zhuravleva@te.net.ua

Вірус капсид PCV2 досліджується за допомогою побудови ідеалізованої моделі вірусу. Вона описується тривимірною динамічною задачею теорії пружності, що сформульована у сферичній системі координат для випадку стаціонарних коливань. Крайова задача розв'язується за допомогою методу інтегральних перетворень та методу розривних розв'язків. У результаті отриманий точний розв'язок задачі. Отримано числові розрахунки пружних характеристик вірусу.

Ключові слова: вірус капсид PCV2, порожня сфера, акустичне середовище, інтегральне перетворення, розривні розв'язки.

The virus capsid PCV2 is investigated by the construction of the idealized virus model. It is described by the 3-D dynamical elasticity problem formulated in the spherical coordinate system for the steady-state oscillation process. The virus is modeled as the hollow elastic sphere, which is surrounded and fulfilled with the two different acoustic mediums. The integral Fourier and Legendre transformations were applied to the stated initial-boundary value problem. With the help of the discontinuous solutions' method the expressions for the displacements and acoustic potentials were derived in the exact form depending on the unknown jumps of the displacements and stresses. The conditions at the virus surfaces allowed to express the displacement and stress jumps via jumps of the acoustic potentials, which were obtained after solving of the two linear equations system. As a result, the exact solution of the problem is derived. The numerical calculations of the virus's elastic characteristics are conducted. This problem is the first step in the virus simulation with the help of the elasticity equations. It was established that more complicated statement of the problem in the frame of the anisotropic elastic problem should be used for the more adequate virus modeling.

Key Words: virus capsid PCV2, hollow sphere, acoustic environment, integral transformation, discontinuous solutions.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Для моделювання вірусів за допомогою математичних моделей використовувались наступні підходи: 1) підхід, що базується на гідродинамічній теорії [1]-[3]; 2) підхід, що використовує обчислювальні методи для розв'язання гідродинамічних задач та задач нелінійної теорії пружності [4]-[9]; 3) підхід, що базується на лінійних пружних моделях [8]-[11].

Зазначені роботи дозволили отримати багато важливих характеристик вірусу, але вони не

дозволяють повністю розв'язати задачу для дослідження вірусу як тривимірного об'єкту.

У даній роботі для моделювання вірусу вперше застосована лінійна динамічна тривимірна теорія пружності. Це дозволило розглянути вірус як тривимірний об'єкт та отримати його важливі характеристики.

2. Постановка задачі та її розв'язання

Вірус PCV2 моделюється пружною порожньою сферою, що описується у сферичній системі координат співвідношеннями:

$R_1 < r < R_2, 0 < \theta < 2\pi, -\pi < \varphi < \pi$. Функції

переміщень $u_r(r, \theta, \varphi, t), u_\theta(r, \theta, \varphi, t),$

$u_\varphi(r, \theta, \varphi, t)$ задовольняють рівняння руху [12].

Усередині та ззовні сфери розташовані два різномірні акустичні середовища. Акустичні потенціали $\Phi_i(r, \theta, \varphi, t)$ на внутрішній ($i=1$) та зовнішній ($i=2$) поверхнях задовольняють хвильові рівняння [13]

$$\Delta \Phi_i = \frac{1}{c_i^2} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t^2}, t > 0, i = 1, 2,$$

де $c_i, i = 1, 2$ - хвильові швидкості. На внутрішній та зовнішній поверхнях сфери задано тиск оточуючих акустичних середовищ

$$\sigma_r(R_1 + 0, \theta, \varphi, t) = \rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}(R_1 - 0, \theta, \varphi, t), \quad (1)$$

$$\sigma_r(R_2 - 0, \theta, \varphi, t) = \rho_2 \frac{\partial(\Phi_2 + \Phi_2^0)}{\partial t}(R_2 + 0, \theta, \varphi, t)$$

$$\tau_{r\theta}|_{r=R_1} = \tau_{r\theta}|_{r=R_2} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

та умови рівності швидкостей

$$\frac{\partial u_r}{\partial t}(R_1 + 0, \theta, \varphi, t) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial r}(R_1 - 0, \theta, \varphi, t) \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t}(R_2 - 0, \theta, \varphi, t) = \frac{\partial(\Phi_2 + \Phi_2^0)}{\partial r}(R_2 + 0, \theta, \varphi, t)$$

Потрібно визначити поле переміщень та напружень на поверхнях та усередині сфери.

Розглядаються стаціонарні коливання.

До крайової задачі застосовується скінчене перетворення Фур'є за змінною φ .

Трансформанти функцій переміщень подаються у вигляді суперпозиції [14] $u_n = u_n^1 + u_n^2, v_n = v_n^1 + v_n^2, w_n = w_n^1 + w_n^2$, де верхній індекс 1 позначає механічні характеристики, неперервні на зовнішній поверхні сфери та розривні на внутрішній, а індекс 2 позначає механічні характеристики, неперервні на внутрішній поверхні сфери та розривні на зовнішній, тобто

$$\langle f_n \rangle|_{r=R_1} = \langle f_n^1 \rangle|_{r=R_1} + \langle f_n^2 \rangle|_{r=R_1} = \langle f_n^1 \rangle|_{r=R_1} = -f_n^1(R_1 + 0, \theta),$$

$$\langle f_n \rangle|_{r=R_2} = \langle f_n^1 \rangle|_{r=R_2} + \langle f_n^2 \rangle|_{r=R_2} = \langle f_n^2 \rangle|_{r=R_2} = f_n^2(R_2 - 0, \theta),$$

де $\langle f_n \rangle|_{r=R_i} = f_n(R_i - 0, \theta) - f_n(R_i + 0, \theta)$,

$$f \in \{u, v, w, \sigma_r, \tau_{r\theta}, \tau_{r\varphi}\}.$$

Для акустичних потенціалів справедливі наступні формули

$$\langle \Phi_{1n} \rangle|_{r=R_1} = \Phi_{1n}(R_1 - 0, \theta),$$

$$\langle \Phi_{2n} \rangle|_{r=R_2} = -\Phi_{2n}(R_2 + 0, \theta) + \Phi_{0n}(R_2, \theta).$$

так як акустичні середовища розташовані лише усередині та ззовні сфери.

До крайової задачі застосовується інтегральне перетворення Лежандра за змінною θ [15].

У результаті отримуємо вирази для акустичних потенціалів

$$\Phi_{ink}(r) = R_i^2 \langle \Phi_{ink}(R_i) \rangle \left[g_{ik}(R_i) - \frac{\partial}{\partial R_i} \Gamma_{ik}(r, R_i) \right], i = 1, 2$$

де

$$g_{ik}(R_i) = \frac{\partial}{\partial R_i} \Gamma_{ik}(R_i + (-1)^{i+1} 0, R_i) / \Gamma_{ik}(R_i + (-1)^{i+1} 0, R_i),$$

$$\Gamma_{i,k}(r, R_j) = \frac{\pi i}{2\sqrt{rR_j}} \begin{cases} I_\nu(R_j q_i) K_\nu(r q_i), r > R_j, \nu = k + 1/2 \\ I_\nu(r q_i) K_\nu(R_j q_i), r < R_j, k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$q_j^2 = -\frac{\omega_j^2}{c_j^2}, j = 1, 2.$$

Вирази для функцій переміщень та напружень отримано у явному вигляді через невідомі стрибки переміщень $\langle u_{nk}^i(R_i) \rangle$ та напружень

$\langle \sigma_{rnk}^i(R_i) \rangle, i = 1, 2$. Використовуючи умови (1), (3) можна виразити стрибки переміщень та напружень через стрибки акустичних потенціалів наступним чином

$$\langle \sigma_{rnk}^i(R_i) \rangle = (-1)^i \rho_i s_i \left(\Phi_{0nk}^i + R_i^2 \langle \Phi_{ink}(R_i) \rangle \left[g_{ik}(R_i) - \frac{\partial}{\partial R_i} \Gamma_{ik}(r, R_i) \right] \right) \Big|_{r=R_i+(-1)^i 0},$$

$$\langle u_{rnk}^i(R_i) \rangle = (-1)^i \left\{ \frac{1}{s} \frac{d\Phi_{0nk}^i}{dr}(R_i + (-1)^i 0) + \frac{R_i^2}{s} \langle \Phi_{ink}(R_i) \rangle \left[g_{ik}(R_i) - \frac{\partial^2}{\partial r \partial R_i} \Gamma_{ik}(r, R_i) \right] \right\} \Big|_{r=R_i+(-1)^i 0},$$

$i = 1, 2$

Для визначення стрибків акустичних потенціалів

$$\langle \Phi_{1nk}(R_1) \rangle, \langle \Phi_{2nk}(R_2) \rangle$$

використовується друга умова у (2).

В результаті отримано точний розв'язок крайової задачі для порожньої сфери, що оточена двома акустичними середовищами.

Числові розрахунки проведено для пружної сфери з параметрами $E = 0.25 \cdot 10^9$ Па, $\mu = 0.4$, $R_1 = 10.4$ нм, $R_2 = 13.2$ нм, $\rho = 750$ а.о./нм³,

частоти коливань сфери, внутрішнього та зовнішнього акустичних середовищ відповідно $\omega_0 = \omega_1 = 0.1, \omega_2 = 0.2$, $c_1 = 1400$ м/с, $c_2 = 1560$ м/с. На внутрішній поверхні вірусу відсутня падаюча хвиля, а на зовнішній поверхні вона задана у наступному вигляді

$$\Phi_{02}(R_2, \theta, \varphi, t) = \begin{cases} e^{i(kR_2 - \omega_2 t)} / R_2 10^{-42}, & \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & 0 < \theta < \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \end{cases}$$

$k = \omega_2 / c_2$ [16].

На графіках (Рис. 1-2) представлені переміщення на внутрішній та зовнішній поверхнях вірусу.

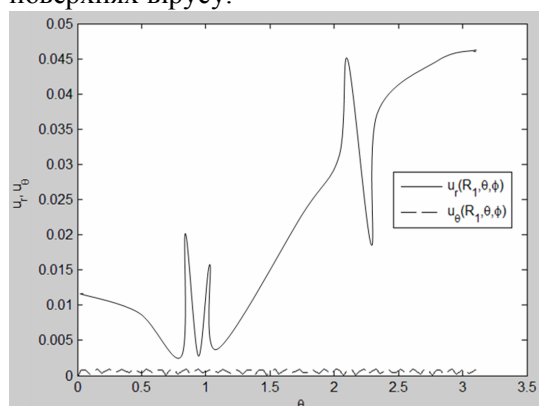


Рис. 1. Переміщення $u_r(r, \theta, \varphi)$, $u_\theta(r, \theta, \varphi)$ на внутрішній поверхні сфери ($r=R_1$)

З аналізу переміщень на поверхнях та усередині сфери встановлено, що зміна кута φ слабо впливає на значення переміщень, тобто його зміною можна знехтувати та розглядати вісесимет-

Список використаних джерел

1. Markesteijn A. Concurrent multiscale modelling of atomistic and hydrodynamic processes in liquids / A. Markesteijn, S. Karabasov, A. Scukins, D. Nerukh, V. Glotov, V. Goloviznin // *Phil. Trans. R. Soc.* – 2014. – Vol. 372. – P. 2021.
2. Korotkin I. Two-phase flow analogy as an effective boundary condition for modelling liquids at atomistic resolution / I. Korotkin, D. Nerukh, E. Tarasova, V. Farafonov, S. Karabasov // *Journal of Computational Science*. – 2016.
3. Scukins A. Multiscale molecular dynamics/hydrodynamics implementation of two dimensional “Mercedes Benz” water model / A. Scukins, D. Nerukh, E. Pavlov, S. Karabasov, A. Markesteijn // *European Physical Journal*. – 2015. – Vol. 224, № 12. – P. 2217-2238.
4. Polles G. Mechanical and Assembly Units of Viral Capsids Identified via Quasi-Rigid Domain

ричну задачу. Переміщення $u_\varphi(r, \theta, \varphi)$ значно менше за переміщення $u_r(r, \theta, \varphi)$, $u_\theta(r, \theta, \varphi)$.

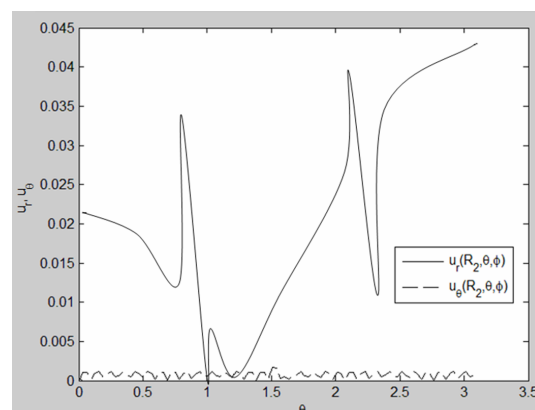


Рис. 2. Переміщення $u_r(r, \theta, \varphi)$, $u_\theta(r, \theta, \varphi)$ на зовнішній поверхні сфери ($r=R_2$)

3. Висновки

1. Побудована тривимірна модель для модулювання вірусу PCV2 з використанням рівнянь динамічної теорії пружності.
2. Встановлено деякі залежності механічних характеристик пружної моделі вірусу в залежності від заданого навантаження.
3. Отримані результати свідчать, що для більш реального моделювання вірусу потрібно враховувати його геометрію (ікосаедральність структури) та анізотропні властивості, для чого необхідно суттєво ускладнити існуючу модель.

Робота виконана у рамках держбюджетної теми 0115U003211.

References

1. MARKESTEIJN, G. V., Karabasov, S., Scukins, A., Nerukh, D., Glotov, V. & Goloviznin, V. (2014) Concurrent multiscale modelling of atomistic and hydrodynamic processes in liquids. *Phil. Trans. R. Soc.* 372. p. 2021.
2. KOROTKIN, N. I., Nerukh, D., Tarasova, E., Farafonov, V. & Karabasov, S. (2016) Two-phase flow analogy as an effective boundary condition for modelling liquids at atomistic resolution. *Journal of Computational Science*.
3. SCUKINS, A., Nerukh, D., Pavlov, E., Karabasov, S. & Markesteijn, A. (2015) Multiscale molecular dynamics/hydrodynamics implementation of two dimensional “Mercedes Benz” water model. *European Physical Journal*. 224, 12. p. 2217-2238.
4. POLLES, G., Indelicato, G., Potestio, R., Cermelli, P., Twarock, R. & Micheletti, C. (2013)

- Decomposition / G. Polles, G. Indelicato, R. Potestio, P. Cermelli, R. Twarock, C. Micheletti // *PLoS Comput Biol.* – 2013. – Vol. 9, № 11.
5. Roos, W.H. Squeezing Protein Shells: How Continuum Elastic Models, Molecular Dynamics Simulations, and Experiments Coalesce at the Nanoscale / W.H. Roos, M.M. Gibbons, A. Arkhipov, C. Uetrecht, N.R. Watts, P.T. Wingfield, A.C. Steven, A.J.R. Heck, K. Schulten, W.S. Klug, G.J.L. Wuite // *Biophysical Journal.* – 2010. – Vol. 99, № 4. – P. 1175–1181.
6. Gibbons M.M. Nonlinear finite-element analysis of nanoindentation of viral capsids / M.M. Gibbons, W.S. Klug // *PhysRevE.* 75.031901. – 2007.
7. Buenemann M. Mechanical limits of viral capsids / M. Buenemann, P. Lenz // *PNAS.* – 2007. – Vol. 104, № 24. – P. 9925–9930.
8. Zink M. Mechanical Properties of the Icosahedral Shell of Southern Bean Mosaic Virus: A Molecular Dynamics Study / M. Zink, H. Grubmüller // *Biophysical Journal.* – 2009. – Vol. 96, № 4. – P. 1350–1363.
9. May E.R. On the Morphology of Viral Capsids: Elastic Properties and Buckling Transitions / E.R. May, C.L. Brooks // *J. Phys. Chem.* – 2012. – Vol. 116. – P. 8604–8609.
10. Buenemann M. Elastic properties and mechanical stability of chiral and filled viral capsids / M. Buenemann, P. Lenz // *PhysRevE.* 78.051924 PACS. – 2008.
11. Zandi R. Mechanical properties of viral capsids / R. Zandi, D. Reguera // *Phys. Rev.* – 2005. – Vol. E 72, 021917.
12. Nowacki W. Theory of elasticity / W. Nowacki. - Warszawa, 1970.
13. Guz, A.N. Theory of non-stationary aero-hydro-elasticity of shells / A.N. Guz, V.D. Kubenko. - Naukova dumka: Kyiv, 1982.
14. Vaisfel'd N. D. Nonstationary dynamic problems of elastic stress concentration near a spherical imperfection / N. D. Vaisfel'd, G. Ya. Popov // *Mechanics of Solids.* – 2002. – Vol. 37, № 3. – P. 77–88.
15. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – Москва: Наука, 1982. – 344 с.
16. Исакович М. А. Общая акустика / М. А. Исакович. – Москва: Наука, 1973. – 502 с.
- Mechanical and Assembly Units of Viral Capsids Identified via Quasi-Rigid Domain Decomposition. *PLoS Comput Biol.* 9, 11.
5. ROOS, W.H., Gibbons, M.M., Arkhipov, A., Uetrecht, C., Watts, N.R., Wingfield, P.T., Steven, A.C., Heck, A.J.R., Schulten, K., Klug, W.S. & Wuite, G.J.L. (2010) Squeezing Protein Shells: How Continuum Elastic Models, Molecular Dynamics Simulations, and Experiments Coalesce at the Nanoscale. *Biophysical Journal.* 99, 4, p. 1175–1181.
6. GIBBONS, M.M. & Klug, W.S. (2007) Nonlinear finite-element analysis of nanoindentation of viral capsids. *PhysRevE.* 75.031901.
7. BUENEMANN, M. & Lenz, P. (2007) Mechanical limits of viral capsids. *PNAS*, 104, 24, p. 9925–9930.
8. ZINK, M. & Grubmüller, H. (2009) Mechanical Properties of the Icosahedral Shell of Southern Bean Mosaic Virus: A Molecular Dynamics Study. *Biophysical Journal*, 96, 4, p. 1350–1363.
9. MAY, E.R. & Brooks, C.L. (2012) On the Morphology of Viral Capsids: Elastic Properties and Buckling Transitions. *J. Phys. Chem. B*, 116, p. 8604–8609.
10. BUENEMANN, M. & Lenz, P. (2008) Elastic properties and mechanical stability of chiral and filled viral capsids. *PhysRevE.* 78.051924 PACS.
11. ZANDI, R. & Reguera, D. (2005) Mechanical properties of viral capsids, *Phys. Rev. E* 72, 021917.
12. NOWACKI, W. (1970) *Theory of elasticity.* Warszawa.
13. GUZ, A.N. & Kubenko, V.D. (1982) *Theory of non-stationary aero-hydro-elasticity of shells.* Kyiv: Naukova dumka.
14. VAISFEL'D, N. D. & Popov G. Ya. (2002) Non-stationary dynamic problems of elastic stress concentration near a spherical imperfection. *Mechanics of Solids.* 37, 3, p. 77–88.
15. POPOV, G. Ya. (1982) *Koncentraciya Uprugih Napryazheniy Vozle Shtampov, Razrezov, Tonkih Vklucheniye i Podkrepleniye.* Moskva: Nauka.
16. ISAKOVICH, M. A. (1973) *Obshchaya Akustika.* Moskva: Nauka.

Надійшла до редколегії 13.09.17

УДК 519.9

Зражевський Г.М.¹, к.ф.-м.н., доц.,
Зражевська В.Ф.², к.ф.-м.н., доц.

Оптимізаційний підхід до розрахунку гармонічних коливань круглої пластини

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова, 4д,

e-mail: zgrig@univ.kiev.ua

² Національний університет України "КПІ
імені Ігоря Сікорського", 03056, м. Київ, пр-т.
Перемоги, 37,

e-mail: vera.zrazhevskaya@gmail.com

G.M. Zrazhevsky¹, Ph.D. (Phys.-Math.),
V.F. Zrazhevskaya², Ph.D. (Phys.-Math.).

Optimization approach to the calculation of harmonic vibrations of a circular plate

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: zgrig@univ.kiev.ua

² National Technical University of Ukraine "Igor
Sikorsky Kiev Polytechnic Institute", 03056, Kyiv,
Peremogi st., 37,
e-mail: vera.zrazhevskaya@gmail.com

Застосування оптимізаційних методів в задачах конструювання механічних пристроїв із заданими оптимальними характеристиками дозволяє істотно поліпшити їх функціональні характеристики, але часто викликає певні труднощі. У роботі розглянута задача про визначення оптимальної кількості та характеристики сил, що діють на шарнірно закріплену пластину (місця прикладання сил, амплітуди і фази коливань, які забезпечують із заданою точністю наближення заданих форми і фази коливань пластини в заданому частотному діапазоні). Пряма задача визначення коливань при відомих характеристиках збудження розв'язується методом функції Гріна. Для оберненої оптимізаційної задачі за критерій оптимальності взято метод найменших квадратів інтегральних відхилень амплітуди і фази коливань від заданих. Проведено аналіз поставленої умовної задачі мінімізації багато екстремального функціоналу, побудовано дискретний еквівалент, сформульовано чисельний алгоритм розв'язання. Ефективність запропонованого підходу продемонстровано на чисельних прикладах визначення оптимальних характеристик збудження заданих коливань.

Ключові слова: оптимізація, коливання, пружна пластина.

The use of optimization methods in the design of mechanical instruments with specified optimal characteristics makes it possible to significantly improve their functional characteristics, but often causes certain difficulties. In the article the problem of determination of the optimal number and characteristics of forces that act on an articulated plate (the place of application of forces, the amplitude and phase of oscillations, which ensure, with a specified accuracy, the approximation of the given shape and phase of oscillations of the plate in a given frequency range) is considered. The direct problem of determination of the vibrations with known excitation characteristics is solved by the Green's function method. For the inverse optimization problem, the method of least squares of the integral deviations of the amplitude and phase of the oscillations from the given ones is taken as the criterion of optimality. The analysis of the conditional minimization problem for a multi-extremal functional is made, a discrete equivalent is constructed, a numerical algorithm for solving is formulated. The efficiency of the proposed approach is demonstrated on the basis of numerical examples of determination of the optimal characteristics of excitation of the given oscillations.

Key Words: optimization, oscillations, elastic plate.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Застосування оптимізаційних методів у задачах розрахунку механічних пристроїв із заданими оптимальними характеристиками дозволяє істотно поліпшити їх функціональні

характеристики. Методи оптимізації також активно застосовуються в задачах оптимального керування механічними пристроями. В той же час при математичному обґрунтуванні і реалізації даного підходу часто виникають певні труднощі.

Загальний огляд питань, пов'язаних із застосуванням методів оптимізації в теорії пружності, проведено в роботах [1], [2], [3]. Так у роботі [1] пропонується огляд деяких результатів в області розв'язання обернених задач лінійної пружності для тривимірного випадку, сформульованих у вигляді оптимізаційних задач. Особлива увага приділена методам, що найкращим чином адаптуються з методами скінчених і граничних елементів.

Роботи [4] - [8] розглядають застосування метода нев'язки в рівняннях стану (ЕСЕ). У роботі [4] обернена проблема сформульована у вигляді оптимізаційної задачі, головний функціонал якої визначає похибку виконання рівнянь стану, (зв'язок кінематично допустимих деформацій з динамічно допустимими напруженнями). У роботі [5] метод ЕСЕ застосовано до задачі виявлення дефектів датчиків. Можливості метода проілюстровано на структурі подвійної системи запуску SYLDA5 Європейської космічної пускової установки Ariane5. У роботі [6] автори пропонують дві стратегії вибору вагового коефіцієнту модифікованої нев'язки: принцип невідповідності Морозова і підхід, в якому параметр ваги визначається як мінімізатор деякого функціоналу, що включає модифіковану помилку і невідповідність даних. В роботах [7]- [10] пропонується варіаційний метод, що базується на мінімізації опуклого функціоналу і дозволяє визначити тензор пружності і поле напружень для двовимірних задач. Застосування методу продемонстровано чисельними прикладами з врахуванням експериментальних досліджень.

При знаходженні чисельного розв'язку у даній роботі був використаний багатофункціональний пакет PSG (Matlab Interface), наданий American Optimal Decision, USA.

Постановка та дослідження задачі

Вихідна задача полягає в мінімізації функціоналу:

$$\min_{\bar{a}, \bar{\xi}, I} \int_0^{2\pi} \int_0^R (w(r, \varphi, t) - \bar{W}(r, \varphi, t))^2 r dr d\varphi + \gamma I, i = \overline{1, I} \quad (1)$$

де

$$\begin{aligned} \bar{W}(r, \varphi, t) &= \bar{W}_s(r, \varphi) + \bar{W}_c(r, \varphi) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{A}_{cn}(r) \cos n\varphi + \bar{A}_{sn}(r) \sin n\varphi) \sin \omega t + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{B}_{cn}(r) \cos n\varphi + \bar{B}_{sn}(r) \sin n\varphi) \cos \omega t \end{aligned} \quad (2)$$

– заданий цільовий прогин круглої платівки радіусу R та циліндричної жорсткості D , I – кількість розподілених на концентричних колах з невизначеними радіусами, амплітудами та фазами неосесиметричних керуючих сил, γ – коефіцієнт штрафу, $w(r, \varphi, t) = w_a(r, \varphi) \sin \omega t + w_b(r, \varphi) \cos \omega t$ – прогин платівки, що визначається через розв'язок граничних задач, відповідно до моделі Кірхгофа, для рівнянь:

$$\begin{aligned} \Delta^2 w_{\xi} + k^2 w_{\xi} &= \sum_{i=1}^I \Phi_i(\xi, \varphi) \Delta(r, \xi_i), \\ i &= \overline{1, I}, \xi_i, r \in (0, R), \varphi \in (0, 2\pi) \\ \Delta(r, \xi_i) &= \begin{cases} \delta(r - \xi_i), & \xi_i \neq 0 \\ \delta(r) / r, & \xi_i = 0 \end{cases}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Phi_i(\xi, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta_{cin} \cos n\varphi + \zeta_{sin} \sin n\varphi), \\ \zeta &= a \vee b \end{aligned}$$

де $\delta(\cdot)$ – дельта функція Дірака, $\Phi_i(\xi, \varphi)$ – силові функції збурення, що підлягають визначенню, $k^2 = \rho h \omega^2 / D$ – хвильове число.

Граничні умови, відповідають умовам шарнірного опирання:

$$\begin{cases} w(R, \varphi) = 0 \\ M_r(R, \varphi) = 0, \varphi \in [0, 2\pi) \end{cases} \quad (4)$$

Розв'язання задач (3)-(4) зводиться до знаходження відповідних Фур'є компонент по кутовій координаті:

$$\begin{aligned} w_{\xi}(r, \varphi, \bar{\xi}) &= w_{\xi 0}(r) + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} (w_{\xi cn}(r, \bar{\xi}) \cos n\varphi + w_{\xi sn}(r, \bar{\xi}) \sin n\varphi) = \\ &+ \mathcal{G}_0 \tilde{G}(r) + \\ &+ \sum_{i=1}^I \sum_{n=0}^{\infty} (\mathcal{G}_{cin} G_n(r, \xi_i) \cos n\varphi + \mathcal{G}_{sin} G_n(r, \xi_i) \sin n\varphi), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\mathcal{G} = \begin{cases} c, \zeta = a \\ d, \zeta = b \end{cases}$$

де $G_n(r, \xi_i)$ – Фур'є компоненти функції Гріна з розташуванням джерела $r = \xi_i$, що є розв'язками граничних задач:

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2 G_n(r, \xi_i)}{dr^2} + r \frac{dG_n(r, \xi_i)}{dr} - \\ (n^2 \pm (rk)^2) G_n(r, \xi_i) = 0, r \in (0, R) \\ \begin{cases} G_n(R, \xi_i) = 0 \\ M_r G_n(R, \xi_i) = 0 \end{cases}, n = 0, \infty \\ LG_n = 0, r \in (0, R), G_n|_{r=R} = 0 \wedge M_r G_n|_{r=R} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

з диференціальним стрибком:

$$\begin{cases} [G_n(r, \xi_i)]_{\xi_i} = 0 \\ \left[\frac{\partial G_n(r, \xi_i)}{\partial r} \right] = 0 \\ [MG_r]_{\xi_i} = 0 \\ [QG_r]_{\xi_i} = 1/D \end{cases} \quad (7)$$

В (7) M, Q - осесиметричні оператори згинаючого моменту та перерізуючої сили. (6) - (7) розв'язується стандартним чином шляхом використання суперпозиції фундаментального розв'язку та загального розв'язку однорідної задачі.

Шляхом редукції рядів Фур'є до скінченних сум, (1) зводиться до задачі мінімізації

$$\begin{aligned} \min_Z I_N^s(Z) + \lambda I_N^c(Z) + \gamma I, i = \overline{1, I} \\ \begin{cases} I_N^c(Z) = \int_0^R \int_0^R (w_b(r, \varphi; \xi) - \bar{W}_c(r, \varphi))^2 r dr \\ I_N^s(Z) = \int_0^R \int_0^R (w_a(r, \varphi; \xi) - \bar{W}_s(r, \varphi))^2 r dr \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

де $Z = \{I, \xi_i, c_{cin}, d_{cin}, c_{sin}, d_{sin}\}, i = \overline{1, I}, n = \overline{1, N}$

- повний набір керуючих змінних ($c_{cin}, d_{cin}, c_{sin}, d_{sin}$ - відповідні коефіцієнти Фур'є розкладів).

Доведені наступні твердження.

Твердження 1. Функціонал задачі (8) - (9) не є опуклим, а при фіксованому I неперервним чином залежить від інших керуючих змінних. При фіксованих значеннях $I, \{\xi_i\}_{i=1}^N$ функціонал є опуклим та (8) - (9) має єдиний розв'язок, що може бути знайдений з необхідної умови екстремуму.

Неопуклість функціоналу легко перевіряється (при фіксованому I) безпосередньою перевіркою. Неперервність доводиться за теоремою Лагранжа з врахуванням можливості дифе-

ренціювання (без відмови від збіжності) рядів Фур'є по коефіцієнтам та неперервності залежності розв'язку (6) - (7) від змінної ξ_i . При фіксованих значеннях $I, \{\xi_i\}_{i=1}^N$, функціонал (8) - (9) є стандартним середньо квадратичним функціоналом.

Твердження 2. При фіксованих значеннях $I, \{\xi_i\}_{i=1}^N$, задача (8) - (9) еквівалентна наступній задачі:

$$\min_Z \hat{I}_N^s(Z) + \lambda \hat{I}_N^c(Z) + \gamma I, i = \overline{1, I} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \hat{I}_N^c(Z) = \sum_{n=0}^N \left\{ \int_0^R \left((w_{dcn}(r, \xi) - \bar{A}_{cn}(r))^2 + \right. \right. \\ \left. \left. (w_{dsn}(r, \xi) - \bar{A}_{sn}(r))^2 \right) r dr \right\} \\ + \int_0^R (w_{d0}(r) - \bar{A}_{c0}(r))^2 r dr \\ \hat{I}_N^s(Z) = \sum_{n=0}^N \left\{ \int_0^R \left((w_{ccn}(r, \xi) - \bar{B}_{cn}(r))^2 + \right. \right. \\ \left. \left. (w_{csn}(r, \xi) - \bar{B}_{sn}(r))^2 \right) r dr \right\} \\ + \int_0^R (w_{d0}(r) - \bar{B}_{c0}(r))^2 r dr \end{aligned} \quad (11)$$

де $\hat{Z}$ - відповідно редукований набір керуючих змінних. Доведення твердження достатньо громіздке та ґрунтується на еквівалентності прямого отримання коефіцієнтів Фур'є та методу мінімізації середньоквадратичної нев'язки функції та її ряду Фур'є за методом зважених нев'язок.

Твердження 3. При фіксованих $I, \{\xi_i\}_{i=1}^N$, розв'язок (10) - (11) має вигляд:

$$\begin{aligned} \hat{I}_{opt}(I, \xi) = \lambda C + (1 - \lambda) S - \\ \lambda \bar{f}^{cT}(\xi) K^{-1}(\xi) \bar{f}^c(\xi) - \\ (1 - \lambda) \bar{f}^{sT}(\xi) K^{-1}(\xi) \bar{f}^s(\xi) \end{aligned} \quad (12)$$

Твердження 4. Задача (10) - (11) еквівалентна задачі:

$$\begin{aligned} \min_{I, \bar{a}^c, \bar{a}^s} \lambda C + (1 - \lambda) S - \lambda \bar{f}^{cT} \bar{a}^c - (1 - \lambda) \bar{f}^{sT} \bar{a}^s \\ \begin{cases} -A(\bar{1} - \bar{r}) \leq K_d \bar{a}_d^c - \bar{f}_d^c \leq A(\bar{1} - \bar{r}) \\ -A(\bar{1} - \bar{r}) \leq K_d \bar{a}_d^s - \bar{f}_d^s \leq A(\bar{1} - \bar{r}) \\ -B\bar{r} \leq \bar{a}_d^c \leq B\bar{r} \wedge -B\bar{r} \leq \bar{a}_d^s \leq B\bar{r} \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{cases} -A(\bar{1} - \bar{r}) \leq K_d \bar{a}_d^c - \bar{f}_d^c \leq A(\bar{1} - \bar{r}) \\ -A(\bar{1} - \bar{r}) \leq K_d \bar{a}_d^s - \bar{f}_d^s \leq A(\bar{1} - \bar{r}) \\ -B\bar{r} \leq \bar{a}_d^c \leq B\bar{r} \wedge -B\bar{r} \leq \bar{a}_d^s \leq B\bar{r} \end{cases} \quad (14)$$

Список використаних джерел

1. Bonnet M. Inverse problems in elasticity / M. Bonnet, A. Constantinescu. – *Inverse Probl.* 21, 2005. – №21 – p. 1-50.
2. Nocedal J. Numerical Optimization / J. Nocedal, S.J. Wright. – SIAM, Springer, 2000. – p. 67-68.
3. Banichuk N.V. Introduction to Optimization of Structures / N.V. Banichuk. – NY: Springer-Verlag, 1990.
4. Banerjee B. Large scale parameter estimation problems in frequency-domain elastodynamics using an error in constitutive equation functional / B. Banerjee, T.F. Walsh, W. Aquino, M. Bonnet. – *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2013. – №253. – p. 60-72.
5. Barthe D. Validation and updating of industrial models based on the constitutive relation error / D. Barthe, A. Deraemaeker, P. Ladeveze, S. Le Loch. – *AIAA journal*, 2005. – №42. – p. 1427-1434.
6. Warne J. E. Inverse Material Identification in Coupled Acoustic-Structure Interaction using a Modified Error in Constitutive Equation Functional / J.E. Warne, M.I. Diaz, W. Aquino, M. Bonnet. – *Comput. Mech.*, 2014. – №54(3). – p. 645-659.
7. Geymonat G. Identification of mechanical properties by displacement field measurement: a variational approach / G. Geymonat, S. Pagano. – *Meccanica*, 2003. – №38. – p. 535- 545.
8. Allix O. Identification strategy in the presence of corrupted measurements / O. Allix, P. Feissel, H.M. Nguyen. – *Engrg. Comput.*, 2005. – №22. – p. 487-504.
9. Kouri D.P. Risk-Averse PDE-Constrained Optimization Using the Conditional Value-At-Risk / D.P. Kouri, T.M. Surowiec. – Preprint, 2015.
10. Babuška I. A stochastic collocation method for elliptic partial differential equations with random input data / I. Babuška, F. Nobile, R. Tempone. – *SIAM Rev.*, 2010 – №52, – p. 317-355

References

1. BONNET, M. & CONSTANTINESCU, A. (2005) Inverse problems in elasticity. *Inverse Probl.* 21. p.1-50.
2. NOCEDAL, J. & WRIGHT, S.J. (2000) *Numerical Optimization*. SIAM, Springer.
3. BANICHUK, N.V. (1990) *Introduction to Optimization of Structures*. NY: Springer-Verlag.
4. BANERJEE, B., WALSH, T.F., AQUINO, W. and BONNET, M. (2013) Large scale parameter estimation problems in frequency-domain elastodynamics using an error in constitutive equation functional. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 253. pp. 60-72
5. BARTHE, D., DERAEMAEKER, A., LADEVEZE, P. and Le Loch, S. (2005) Validation and updating of industrial models based on the constitutive relation error. *AIAA J.* 42. p. 1427-1434.
6. WARNE, J.E., DIAZ, M.I., AQUINO, W. and BONNET, M. (2014) Inverse Material Identification in Coupled Acoustic-Structure Interaction using a Modified Error in Constitutive Equation Functional. *Comput. Mech.* 54(3). pp. 645-659.
7. GEYMONAT, G. & PAGANO, S. (2003) Identification of mechanical properties by displacement field measurement: a variational approach. *Meccanica*. 38. pp. 535-545.
8. ALLIX, O., FEISSEL, P. and NGUEN, H.M. (2005) Identification strategy in the presence of corrupted measurements. *Engrg. Comput.* 22. pp. 487-504.
9. KOURI, D.P. & SUROWIEC, T.M. (2015) *Risk-Averse PDE-Constrained Optimization Using the Conditional Value-At-Risk*. Preprint.
10. BABUŠKA, I., NOBILE F., and TEMPONE, R. (2010) A stochastic collocation method for elliptic partial differential equations with random input data. *SIAM Rev.* 52. pp. 317–355.

Надійшла до редколегії 13.09.17

УДК 539.3

Калиняк Б. М.¹, к.ф.-м.н, с.н.с.

**Нестационарное температурное поле у
неоднородному за товщиною довгому
порожнистому циліндрі, яке забезпечує
відсутність напружень**

¹ Інститут прикладних проблем механіки і
математики ім. Я.С.Підстригача НАН України,
79060, м. Львів, вул. Наукова, 3Б,
e-mail: b-kalynyak@litech.net

В. М. Kalynyak¹, Ph.D. (Phys.-Math.)

**Non steady temperature field inducing the
absence of stresses in the long hollow
inhomogeneous through thickness cylinder**

¹ Pidstryhach Institute of Applied Problems of
Mechanics and Mathematics of National Academy of
Sciences of Ukraine, 79060, L'viv, Naukova str., 3b,
e-mail: : b-kalynyak@litech.net

Отримано умову відсутності напружень у довгому порожнистому неоднородному вздовж радіуса циліндрі, який пов'язує нестационарне температурне поле, інтенсивність теплових джерел та термомеханічні характеристики матеріалу. Розраховано початковий розподіл температури, зміну температури на поверхнях, інтенсивності теплових джерел, які дозволяють створити відповідне температурне поле у функціонально-градієнтному матеріалі з реальними характеристиками.

Ключові слова: порожнистий циліндр, функціонально-градієнтний матеріал, нульові напруження, нестационарне температурне поле, термопружність, обернена задача.

The condition of absence of stresses in a long hollow inhomogeneous cylinder connecting a non-steady temperature field, heat source intensity and thermo-mechanical material characteristics, depending only on radial coordinates have been obtained. Because this condition contains one arbitrary function, depending on time, it is necessary to agree a initial temperature distribution, depending only on radial coordinate and boundary loadings, depending only on time. In the sense of mathematic the problem was reduced to solving the classical heat transfer problem with known dependence of the temperature on characteristics of material. This dependence is at the same time the condition of the absence of stresses. The corresponding condition of agreement was obtained for the temperature change with time on cylinder surfaces. The initial temperature distribution, temperature change on surfaces, heat source intensity creating the temperature field, which induce the zero stresses in functionally graded material with real characteristics have been calculated.

Key words: hollow cylinder, functionally graded material, zero stresses, non-steady temperature field, thermo-elasticity, inverse thermo-elasticity problem.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Композити та функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ) зі заданими неперервними розподілами характеристик збільшують термін експлуатації виготовлених з них виробів в умовах теплових та силових навантажень.

Тому важливо оцінити можливості застосування матеріалів зі заданим розподілом характеристик у середовищах в певних умовах теплообміну із довкіллям.

Варто згадати праці, які спонукали досліджувати цю задачу: умови відсутності термонапружень в однорідних оболонках [5], визначення температурних полів, які не викликають напружень в однорідних тілах [6]. Нижче отримано умови відсутності напружень за заданих нестационарних теплових навантажень. В

межах незв'язаної квазістатичної моделі термопружності одержано умову забезпечення нульових значень компонент тензора напружень, яка зв'язує нестационарне температурне поле, характеристики матеріалу та інтенсивність теплових джерел. Таку ж задачу для стаціонарного температурного поля розглядали в працях [1,2].

Формулювання задачі. Розглянемо довгий неоднорідний уздовж радіальної змінної r порожнистий циліндр з внутрішнім радіусом R_1 та зовнішнім R_2 . У циліндрі з нульовими навантаженнями на обмежувальних поверхнях та сталою відносно координат осью деформацією ($\epsilon_z = \epsilon_z(t)$) і тепловими джерелами $\bar{q}_v(r, t)$ наявне залежне від радіальної координати r

температурне поле $\bar{T}(r, t)$, яке описано нестационарним рівнянням теплопровідності [4]

$$\frac{1}{\rho c(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \lambda(\rho) \frac{\partial T(\rho, t)}{\partial \rho} \right) - \frac{\partial T(\rho, t)}{\partial t} = \frac{q_v(\rho, t)}{c(\rho)}, \quad (1)$$

умов на поверхнях $\rho = \rho_1 = R_1 / R_2$ і $\rho = R_2 / R_2 = 1$

$$T(\rho_1, t) = \psi_1(t), \quad T(1, t) = \psi_2(t) \quad (2)$$

та початкової умови

$$T(\rho, 0) = \varphi(\rho). \quad (3)$$

Тут t – час; $\rho = r / R_2$ – радіальна координата в одиницях R_2 ; $q_v(\rho, t) = R_2^2 \bar{q}_v(\rho R_2, t)$ – інтенсивність теплових джерел; $T(\rho, t) = \bar{T}(\rho R_2, t)$; $\lambda(\rho)$ – коефіцієнт теплопровідності; $\bar{c}(r)$ – об'ємна теплоємність; $c(\rho) = R_2^2 \bar{c}(\rho R_2)$; $\psi_1(t), \psi_2(t)$ – відомі функції від часу.

Оскільки в межах квазістатичної незв'язаної моделі термопружності час є параметром у рівняннях, що описують термонапружений стан, то використані умови відсутності радіальних напружень з праць [2,3] для незв'язаної стаціонарної задачі термопружності. Для нестационарних теплових навантажень, коли масові сили не діють умова відсутності напружень має вигляд

$$T(\rho, t) = \bar{C}(t) \frac{1}{\alpha(\rho)[V(1) + W(1)]} - p(t) \frac{W(1) - V(1)v(\rho)}{\alpha(\rho)[V^2(1) - W^2(1)](1 + v(\rho))} + T_0, \quad (4)$$

де $\bar{C}(t)$ – довільна функція від часу; T_0 – відлікова температура, за якої відсутні напруження і переміщення (надалі вважатимемо її початком відліку температури – «нульовою» температурою, $T_0 = 0$); $p(t)$ залежне від часу осьове навантаження; $v(\rho)$ – коефіцієнт Пуассона; $\alpha(\rho)$ – тепловий коефіцієнт лінійного розширення,

$$V(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{\eta E(\eta)}{1 - v^2(\eta)} d\eta, \quad W(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{\eta E(\eta) v(\eta)}{1 - v^2(\eta)} d\eta,$$

$E(\rho)$ – модуль пружності. Зв'язок (4), отриманий раніше [1] зі запропонованого інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду [3] для радіального напруження, до розв'язування якого зведено відповідну класичну задачу незв'язної термопружності. За відсутності силових навантажень уз-

довж осі циліндра ($p(t) = 0$) або сталого коефіцієнта Пуассона ($v(\rho) = \text{const}$) вираз (4) набуває простішого вигляду:

$$T(\rho, t) = \frac{C(t)}{\alpha(\rho)}, \quad (5)$$

де $C(t) = \bar{C}(t) / [V(1) + W(1)]$. Отже нульові напруження у циліндрі є тоді, коли температурне поле вигляду (4) або (5) задовольняє рівняння теплопровідності (1), умови на межах (2) або інші умови теплообміну зі зовнішнім середовищем та початковий розподіл температури (3). Ці вимоги до температурного поля (4) або (5) накладають, взагалі кажучи, певні обмеження на початкові та межові умови, характеристики матеріалів, а також на теплові джерела. Покажемо, що їх можна задовольнити.

Визначення нестационарних температурних полів, які призводять до відсутності радіальних напружень. Вважатимемо, що масові сили та осьові навантаження відсутні, а на поверхнях циліндра задані закони зміни температури з часом (2). Тоді з урахуванням (5) умови (2), (3) мають вигляд

$$T(\rho, 0) = \varphi(\rho) = \frac{C(0)}{\alpha(\rho)}, \quad \frac{C(t)}{\alpha(\rho_1)} = \psi_1(t), \quad \frac{C(t)}{\alpha(1)} = \psi_2(t), \quad (6)$$

звідки після виключення $C(t)$ отримаємо залежність між значеннями температури на обмежувальних: поверхнях

$$\psi_2(t) = \frac{\alpha(\rho_1)}{\alpha(1)} \psi_1(t). \quad (7)$$

Вираз (5) для температури повинен бути розв'язком задачі (1) – (3). Якщо вираз (5) підставити у диференціальне рівняння (1), то останнє при відсутності теплових джерел

$$\frac{C(t)}{c(\rho)} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \lambda(\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\alpha(\rho)} \right) \right] - \frac{1}{\alpha(\rho)} \frac{\partial C(t)}{\partial t} = 0. \quad (8)$$

можна трактувати як умову на характеристики матеріалу, а рівняння (1) застосувати для визначення теплових джерел $q_v(\rho, t)$ при заданих характеристиках матеріалу. Застосування методу відокремлення змінних до однорідного рівняння (8) дозволяє отримати розв'язок відносно $C(t)$

$$C(t) = C_1 \exp(Qt), \quad (9)$$

де

$$Q = \frac{\alpha(\rho)}{c(\rho)} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \lambda(\rho) \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\alpha(\rho)} \right) \right] = \text{const}, \quad (10)$$

а C_1 і Q – сталі, які потрібно визначити.
Тоді з формул (5) та (9) отримаємо такий
розв'язок рівняння теплопровідності (1):

$$T(\rho, t) = \frac{C_1}{\alpha(\rho)} \exp(Qt). \quad (11)$$

Сталу C_1 визначили з початкового розподілу
температури (3) $\varphi(\rho) = C_1 / \alpha(\rho)$ на одній з
циліндричних поверхонь.

$$C_1 = \alpha(\rho_1) \varphi(\rho_1). \quad (12)$$

Отже для забезпечення відсутності радіаль-
них напружень початкова умова згідно з (3)
повинна мати вигляд

$$\varphi(\rho) = \frac{\alpha(\rho_1)}{\alpha(\rho)} \varphi(\rho_1) \quad (13)$$

або при значенні початкового розподілу на
зовнішній поверхні циліндра відповідно

$$C_1 = \alpha(\rho_2) \varphi(\rho_2), \quad \varphi(\rho) = \frac{\alpha(\rho_2) \varphi(\rho_2)}{\alpha(\rho)}. \quad (14)$$

Тоді умови на межах з використанням (2) та
(5) матимуть вигляд

$$T(\rho_1, t) = \psi_1(t) = \varphi(\rho_1) \exp(Qt),$$

$$T(1, t) = \psi_2(t) = \frac{\alpha(\rho_1)}{\alpha(1)} \varphi(\rho_1) \exp(Qt). \quad (15)$$

Сталу Q задаємо (див. (10)) з врахуванням
технологічних можливостей виготовлення мате-
ріалів, забезпечення інтенсивності теплових
джерел та зміни температури на поверхнях.

Температурне поле вигляду (11) забезпечує
нульові радіальні напруження, якщо відсутні
масові сили та осьові навантаження і є роз-
в'язком нестационарного рівняння теплопровід-
ності. У випадку межових умов першого роду (2)
та початкових (3) Стала C_1 та початкова умова
мають вигляд (12), (13) або (14), а межові умови
(2), між якими є залежність (7), виражені
формулами (15).

Формула (10) є диференціальним або
алгебричним рівнянням стосовно коефіцієнта
теплопровідності або об'ємної теплоємності
матеріалу відповідно з такими точними
аналітичними розв'язками для об'ємної
теплоємності та коефіцієнта теплопровідності:

$$c(\rho) = \frac{\alpha(\rho)}{Q} \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \rho \lambda(\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\alpha(\rho)} \right) \right],$$

$$\lambda(\rho) = \frac{\rho_1}{\rho} \frac{\int \eta c(\eta) \frac{Q}{\alpha(\eta)} d\eta}{\frac{d(\alpha^{-1}(\rho))}{d\rho}} + \frac{C_0}{\rho} \frac{d(\alpha^{-1}(\rho))}{d\rho}, \quad (16)$$

де C_0 – довільна стала.

На відміну від стаціонарного теплового
режиму [1] точний аналітичний розв'язок
рівняння (10) (нелінійного щодо $\alpha(\rho)$) для
теплового коефіцієнта лінійного розширення
визначити не вдалося.

Приклад. Для підтвердження існування
розв'язків поставленої задачі забезпечення
нульових напружень, яка полягає у визначенні
розв'язку вигляду (5) задачі нестационарної

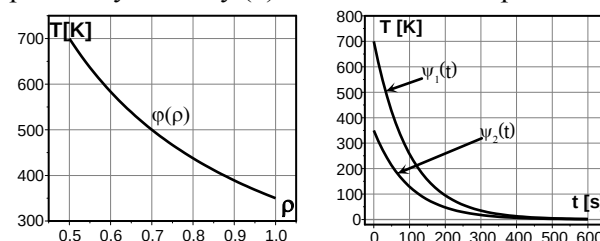


Рис.1. Початковий розподіл температури $\varphi(\rho)$ та
залежність температури на обмежувальних
поверхнях циліндра від часу

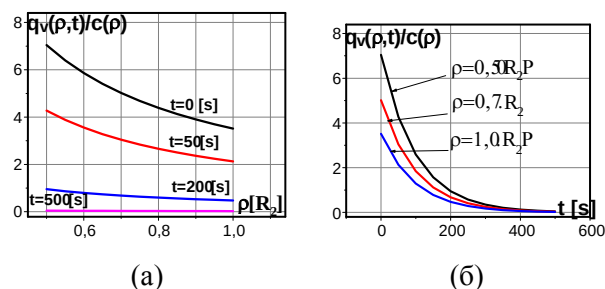


Рис.2. Залежність інтенсивності теплових
джерел від координати (а) та часу (б)
теплопровідності (1) – (3) та відповідних зв'язків
між характеристиками матеріалу, інтенсивністю
теплових джерел, початковою та межовими
умовами розглянемо порожнистий циліндр,
виготовлений з двокомпонентного ФГМ в якому
питома теплоємність та коефіцієнт лінійного
теплового розширення змінюються за законом

$$P(\rho) = P_1 \frac{\rho - \rho_1}{1 - \rho_1} + P_2 \frac{1 - \rho}{1 - \rho_1},$$

де $P(\rho)$ – характеристика ФГМ, залежна від раді-
альної координати, P_i – характеристики його

складників. Нехай $\lambda_1 = 1,7 \text{ J} / (\text{m} \cdot \text{K})$, $Q = -0,01 \text{ s}^{-1}$,
 $\lambda_2 = 13 \text{ J} / (\text{m} \cdot \text{K})$, $c_1 = 200 \cdot 3500 \text{ J} \cdot \text{m}^2 / (\text{kg} \cdot \text{K})$,
 $c_2 = 300 \cdot 2500 \text{ J} / (\text{kg} \cdot \text{K})$, $R_2 = 1 \text{ m}$, радіуси повер-
хонь, $\rho_1 = 0,5$, $\rho_2 = 1$, $\alpha_2 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$,
 $\alpha_1 = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$, $\varphi(\rho_1) = 1000 \text{ K}$. З виразів (12),
(15) отримали $C_1 = 0,0042$, $\varphi(1) = 350 \text{ K}$
 $\psi_1(t) = 700 \exp(-0,01t)$, $\psi_2(t) = 350 \exp(-0,01t)$. Від-
повідні характеристики матеріалу (відповідають
оксиду цирконію та нітриду кремнію) взяті з [7].

Початковий розподіл температури, залежно-
сті умов на межі від часу та інтенсивності
теплових джерел від координат та часу, які забез-
печують відсутність радіальних напружень у
неоднорідному порожнистому циліндрі,
зображені на рис. 1–2.

Висновки. Отримані умови забезпечення
нульових радіальних напружень за відсутності

масових сил та осьових навантажень у довгому
неоднорідному циліндрі є одночасно і умовами
відсутності колових та осьових напружень, що
безпосередньо впливає з рівнянь рівноваги та
зв'язків між деформаціями та напруженнями,
якщо радіальні напруження дорівнюють нулю.
Тоді $C(t)$ має зміст осьової деформації.

Умови рівності нулю напружень в умовах
нестационарної задачі термoprужності можна
досягнути тільки під час охолодження ($Q < 0$)
теплообміном з зовнішнім середовищем, тому що
температура експоненціально залежить від часу.
Початкові та межові умови у задачі
теплопровідності у початковий момент часу, а
також характеристики матеріалу і об'ємних
теплових джерел потрібно узгодити.

Список використаних джерел

1. Калиняк Б. М. Забезпечення нульових
радіальних напружень у неоднорідному
довгому порожнистому циліндрі стаціо-
нарним температурним полем
/ Б.М. Калиняк // Фіз.-хім. механіка
матеріалів. – 2016. – 52, №1. – С. 98–104.
2. Калиняк Б. М. Забезпечення нульових
радіальних напружень у неоднорідному
довгому порожнистому циліндрі неоднорі-
дністю матеріалу / Б.М. Калиняк // Фіз.-
хім. механіка матеріалів. – 2016. – 52, №2. –
С. 104–110.
3. Калиняк Б. М. Рівняння Фредгольма 2-го
роду відносно радіальних напружень для
визначення термoprужного стану
неоднорідного порожнистого довгого
циліндра / Б.М. Калиняк // Мат. методи та
фіз.-мех. поля. – 2013. – 56, № 3. – С. 141–
147.
4. Лыков А.В. Теория теплопроводности.
/ А.В. Лыков – М.: Высшая школа, 1967. –
600 с.
5. Підстригач Я. С. Вибрані праці.
/ Підстригач Я. С. – К.: Наук. думка, 1995.
– 460 с.
6. Melan H., Parkus H. Wärmespannungen
infolge stationärer Temperaturfelder.
/ H. Melan, H. Parkus – Wien: Springer-
Verlag, 1953. – 114 p.
7. Shen H.-S. Functionally graded materials:
Nonlinear analysis of plates and shells. / H.-
S. Shen – CRC Press, 2009. – 280 p.

References

1. KALYNYAK, B. (2016) Zabezpechennya
nulyovych radialnych napruzhen' u
neonoridnomu dovhomu porozhnystomu
cylindri stacionarnym temperaturnym polem.
Phiz-Chim. Mechanica Materialiv. 52(1).
p. 98-104.
2. KALYNYAK, B. (2016) Zabezpechennya
nulyovych radialnych napruzhen' u
neonoridnomu dovhomu porozhnystomu
cylindri neodnoridnistyu materialu. *Phiz-
Chim. Mechanica Materialiv.* 52(2). p. 104-
110.
3. KALYNYAK, B. (2013) Rivnyannya
Fredholma 2-ho rodu vidnosno radialnych
napruzhen' dla vyznachennya
termoprzhnogo stanu neodnoridnoho
porozhnystoho dovhoho cylindra.
Mat.Metody i Phiz.-Mech. Polya. 56(3).
p. 141-147.
4. LYKOV, A. (1967) *Teoriya
teploprovodnosti.* Moskva: Vysshaya
shkola.
5. PIDSTRYHACH, Ya. (1995) *Vybrani praci.*
Kyiv: Naukova Dumka.
6. MELAN, H., PARKUS, H. (1953)
*Wärmespannungen infolge stationärer
Temperaturfelder.* Wien: Springer-Verlag.
7. SHEN H.-S. (2009) *Functionally graded
materials: Nonlinear analysis of plates and
shells.* CRC Press.

Надійшла до редколегії 27.08.17

УДК 539.3

Кирилова О. І., к. ф.-м. н.,
Попов В.Г., д. ф.-м. н., проф.

**Напружений стан у нескінченному
циліндрі довільного перерізу з
тунельною тріщиною при коливаннях в
умовах плоскої деформації**

Національний університет «Одеська морська
академія» 65029, м. Одеса, вул. Дідріхсона, 8,
e-mail: olga.i.kyrylova@gmail.com

O. I. Kyrylova, Ph. D. (Phys.-Math.),
V.G. Popov, Dr. Sci. (Phys.-Math.).

**State of stress in cylinder of arbitrary cross-
section with a tunnel crack under oscillations
of plane strain condition**

National university «Odesa maritime academy»,
65029, Odessa, Didrikhson str., 8,
e-mail: olga.i.kyrylova@gmail.com

Розв'язано задачу про визначення напруженого стану поблизу тріщини в нескінченному циліндрі довільного перерізу при коливаннях в умовах плоскої деформації. Отримано наближені формули для розрахунку коефіцієнтів інтенсивності напружень, за допомогою яких досліджено вплив на їхні значення частоти коливань, геометричних розмірів циліндра а також розташування тріщини.

Ключові слова: циліндр довільного перерізу, плоска деформація, тріщина, КІН.

To solve the problem an approach that allows to individually satisfy conditions at the surface of the crack and on the border of the cylinder is proposed. It consists in the presentation of displacement as a sum of discontinuous solutions of Lamé equations built for the crack, and some unknown functions that are the solutions of Lamé equations and through which the conditions on the surface of the cylinder are satisfied. These functions are presented through the wave potentials, which, in its turn, are founded as a linear combination of particular solutions of the Helmholtz equations, which forming complete closed systems of functions. As a result, the problem is reduced to solving a sequence of integral equations on the crack. For their solving the method of mechanical quadratures, choosing roots of the second-kind Chebyshev polynomial as collocation points, was used. After solving the systems the coefficients of linear combination are determined from the boundary conditions on the surface of the cylinder. The approximate formulae for calculation of stress intensity factors with the help of which the influence on the frequency of oscillations, geometric dimensions of the cylinder and location of the crack was researched were received.

Key Words: the cylinder of arbitrary cross-section, plane deformation, crack, stress intensity factors

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Попередні результати у напрямку дослідження напруженого стану обмежених тіл з дефектами переважно стосувались необмежених та напівобмежених тіл з тріщинами або тонкими включеннями [1-3]. Вони є актуальним як для встановлення умов руйнування тіл через оцінку коефіцієнтів інтенсивності динамічних напружень в околі включень, так і діагностики таких дефектів, виходячи з інформації про їхній вплив на резонансні частоти [4]. Випадків, коли тіла займають обмежену область, розглянуто значно менше. Це пов'язано з тим, що при застосуванні методу граничних інтегральних рівнянь вихідні задачі зводяться до зв'язаних систем інтегральних рівнянь, заданих і на поверхні дефектів, і на межі тіла [5-6]. Далі запропоновано підхід, що дозволяє окремо розв'язувати

інтегральні рівняння на поверхні включення та задовольняти умови навантаження на межі тіла.

2. Постановка задачі

Розглядається нескінченний пружний циліндр довільного перерізу з твірними, паралельними осі Oz (Рис.1), що перебуває у стані плоскої деформації.

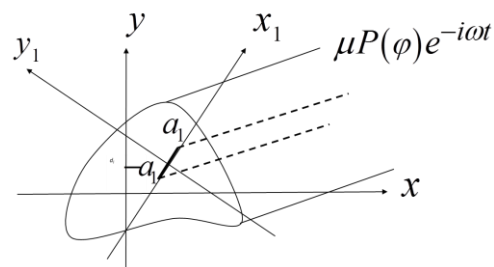


Рис.1 Нескінченний циліндр довільного перерізу з наскрізною тріщиною.

Перетин циліндра площиною xOy являє собою довільну замкнену гладку криву, що в полярній системі координат визначається рівнянням $r = r_0 \psi(\varphi)$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. У циліндрі міститься наскрізна тріщина, яка не виходить за межі перерізу. Циліндр перебуває під дією самоврівноваженого нормального до його поверхні гармонічного навантаження $\mu P(\varphi)e^{-i\omega t}$. Множник, що визначає залежність від часу, надалі опущений. За таких умов у циліндрі реалізовано стан плоскої деформації, і визначення потребують тільки переміщення u_r, u_φ , які задовольняють рівняння Ламе для гармонічних коливань. Граничні умови на поверхні циліндра мають вигляд:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} \cos(\bar{n}, x) + \sigma_{xy} \cos(\bar{n}, y) &= P(\varphi) \cos(\bar{n}, x), \\ \sigma_{xy} \cos(\bar{n}, x) + \sigma_{yy} \cos(\bar{n}, y) &= P(\varphi) \cos(\bar{n}, y),\end{aligned}\quad (1)$$

$(x, y) \in L$, L - контур перерізу, $\bar{n}$ - вектор нормалі до поверхні.

$$\begin{aligned}u_1^d(x_1, y_1) &= \int_{-a}^a \chi_3(\eta) G_{43}(\eta - x_1, y_1) d\eta + \int_{-a}^a \chi_4(\eta) G_{44}(\eta - x_1, y_1) d\eta, \\ v_1^d(x_1, y_1) &= \int_{-a}^a \chi_3(\eta) G_{33}(\eta - x_1, y_1) d\eta + \int_{-a}^a \chi_4(\eta) G_{34}(\eta - x_1, y_1) d\eta,\end{aligned}\quad (4)$$

Далі в полярній системі координат переміщення подаються у вигляді суперпозиції двох складових:

$$\begin{aligned}u_r(r, \varphi) &= u_r^d(r, \varphi) + u_r^0(r, \varphi), \\ u_\varphi(r, \varphi) &= u_\varphi^d(r, \varphi) + u_\varphi^0(r, \varphi)\end{aligned}\quad (5)$$

де $u_r^d(r, \varphi)$, $u_\varphi^d(r, \varphi)$ - розривні розв'язки (4) після переходу до полярних координат, а $u_r^0(r, \varphi)$, $u_\varphi^0(r, \varphi)$ - розв'язки рівнянь Ламе, якими забезпечується у подальшому виконання крайових умов (1). Ці невідомі функції подаються через хвильові потенціали

$$u_r^0 = \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi}, \quad u_\varphi^0 = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial \psi_2}{\partial r}.\quad (6)$$

У свою чергу, хвильові потенціали розшукуються у вигляді лінійної комбінації M частинних розв'язків рівнянь Гельмгольца, які в області перерізу є лінійно незалежними і утворюють повну замкнену систему функцій [7]:

Умови тріщини формулюються у системі $x_1 O_1 y_1$, яка пов'язана безпосередньо з нею (Рис.1). Поверхня тріщини вважається вільною від навантажень:

$$\sigma_{y_1 y_1}(x_1, 0) = 0; \quad \sigma_{x_1 y_1}(x_1, 0) = 0.\quad (2)$$

Також на тріщині мають розрив переміщення зі стрибками:

$$\begin{aligned}\langle v_1 \rangle &= v_1(x_1, +0) - v_1(x_1, -0) = \chi_3(x_1); \\ \langle u_1 \rangle &= u_1(x_1, +0) - u_1(x_1, -0) = \chi_4(x_1).\end{aligned}\quad (3)$$

Отже, аналіз усталеного за часом напруженого стану тіла з тріщиною зводиться до розв'язування рівнянь Ламе з умовами (1)-(3).

3. Розв'язання задачі

Спершу у локальній системі координат, пов'язаній з тріщиною, розглядаються розривні розв'язки рівнянь Ламе [1]:

$$\psi_1 = r_0^2 \sum_{s=1}^M A_s g_s^{(1)}(r, \varphi); \quad \psi_2 = r_0^2 \sum_{s=1}^M B_s g_s^{(2)}(r, \varphi),\quad (7)$$

$g_{2m-1}^{(i)}(r, \varphi) = J_{m-1}(\kappa_i r) \cos(m-1)\varphi$, $g_{2m}^{(i)}(r, \varphi) = J_m(\kappa_i r) \sin m\varphi$. У (8) A_s, B_s - невідомі коефіцієнти, J_m - циліндричні функції.

З метою реалізації крайових умов (2) на тріщині у поданні (5) здійснюється перехід до системи $x_1 O_1 y_1$. Задоволення крайових умов (2) приводить до двох інтегро-диференціальних рівнянь відносно стрибків переміщень на тріщині χ_k , $k=3, 4$, які після видалення сингулярних складових з ядер інтегральних операторів та використання позначень

$\varphi_k(\tau) = \chi_k(a\tau)/a$; $\eta = a\tau$, $x_1 = a\varsigma$, $\kappa_0 = \kappa_2 r_0$, $a/r_0 = \gamma$ приводяться до вигляду:

$$\frac{1}{2\pi} \left[\int_{-a}^a \varphi_k'(\tau) \left(\frac{2(1-\zeta^2)}{\tau-\zeta} + R_k(\tau-\zeta) \right) d\tau - \int_{-a}^a \varphi_k(\tau) (\kappa_0^2 \gamma^2 \ln|\tau-\zeta| + V_k(\tau-\zeta)) d\tau \right] = \sum_{s=1}^M (A_s F_{ks}^{(1)}(\zeta) + B_s F_{ks}^{(2)}(\zeta)), \quad (8)$$

$k=3,4$, де R_k, V_k – відомі регулярні ядра, $F_{ks}^{(i)}(\zeta)$, $i=1,2$ виражаються через функції $g_s^{(i)}$ та їхні похідні. Внаслідок лінійності (8) та вигляду правих частин, їхні розв'язки можна розшукувати через нові невідомі функції:

$$\Phi(\tau) = \sum_{s=1}^M A_s \Phi_s^{(1)}(\tau) + \sum_{s=1}^M B_s \Phi_s^{(2)}(\tau), \quad (9)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left(2(1-\zeta^2) \frac{E}{\tau-\zeta} + R(\tau-\zeta) \right) (\Phi_s^{(i)}(\tau))' d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (-\kappa_0^2 \gamma^2 E \ln|\tau-\zeta| + V(\tau-\zeta)) \Phi_s^{(i)}(\tau) d\tau = F_s^{(i)}(\zeta), \quad (10)$$

$$\text{де } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{22} \end{pmatrix}, F_s^{(i)} = \begin{pmatrix} F_{3s}^{(i)} \\ F_{4s}^{(i)} \end{pmatrix},$$

До цих рівнянь також необхідно долучити рівності, що випливають з умов змикання поверхні тріщини в її кінцях.

$$\Phi(\tau) = \begin{pmatrix} \varphi_3(\tau) \\ \varphi_4(\tau) \end{pmatrix}; \Phi_s^{(i)}(\tau) = \begin{pmatrix} \varphi_{3s}^{(i)}(\tau) \\ \varphi_{4s}^{(i)}(\tau) \end{pmatrix}, i=1,2$$

Після підстановки (9) рівняння (8) трансформуються до сукупності $2M$ рівнянь відносно функцій $\varphi_{3s}^{(i)}(\tau)$ та $\varphi_{4s}^{(i)}(\tau)$ $i=1,2$, які відрізняються тільки правими частинами, а саме:

Побудова наближених розв'язків (10) здійснюється методом механічних квадратур [8]. Невідомі коефіцієнти A_k, B_k , які входять у подання (8), визначаються з умов (2) на границі циліндра. Після підстановки граничних значень умови (2) набувають вигляду:

$$\sum_{s=1}^M A_s \left(\int_{-1}^1 \left((\varphi_{3s}^{(1)}(\tau))' F_1(\tau, \varphi) + (\varphi_{4s}^{(1)}(\tau))' F_2(\tau, \varphi) + \varphi_{3s}^{(1)}(\tau) E_3(\tau, \varphi) + \varphi_{4s}^{(1)}(\tau) E_4(\tau, \varphi) \right) d\tau + U_s(\varphi) \right) +$$

$$+ \sum_{s=1}^M B_s \left(\int_{-1}^1 \left((\varphi_{3s}^{(2)}(\tau))' F_1(\tau, \varphi) + (\varphi_{4s}^{(2)}(\tau))' F_2(\tau, \varphi) + \varphi_{3s}^{(2)}(\tau) E_3(\tau, \varphi) + \varphi_{4s}^{(2)}(\tau) E_4(\tau, \varphi) \right) d\tau + V_s(\varphi) \right) = lP(\varphi), \quad (12)$$

$$F_i(\tau, \varphi) = \begin{pmatrix} F_i^1(\tau, \varphi) \\ F_i^2(\tau, \varphi) \end{pmatrix}; E_i(\tau, \varphi) = \begin{pmatrix} E_i^1(\tau, \varphi) \\ E_i^2(\tau, \varphi) \end{pmatrix}; i=3,4; U_s(\varphi) = \begin{pmatrix} U_s^1(\varphi) \\ U_s^2(\varphi) \end{pmatrix}; V_s(\varphi) = \begin{pmatrix} V_s^1(\varphi) \\ V_s^2(\varphi) \end{pmatrix}; l = \begin{pmatrix} \cos(\bar{n}, x) \\ \cos(\bar{n}, y) \end{pmatrix}.$$

Тут функції $F_i(\tau, \varphi)$, $i=3,4$ подаються через значення функцій $r_i(\eta-x, y)$ та її похідних на границі перерізу, $E_i(\tau, \varphi)$ отримано з функцій $G_{ij}(\eta-x_1, y_1)$ після граничного переходу, а $V_s(\varphi)$, $U_s(\varphi)$ – через граничні значення функцій $g_s^{(i)}$ та їхніх похідних з подань (7). Застосування квадратурних формул Гауса-Чебишева та методу колокації у вузлах $u_s = 2\pi S/M$, $S=1, \dots, M$ зводить (12) до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно A_s, B_s . Для оцінки напруженого стану отримано формули:

$$k_i^{\pm} = \frac{(\pm 1)^n \sqrt{\pi} (1-\zeta^2)}{n} \sum_{m=1}^n (-1)^m \Psi_m \left(\operatorname{ctg} \frac{\beta_m}{2} \right)^{\pm 1};$$

$$\Psi_m = \sum_{s=1}^M A_s \Psi_{sm}^{(1)} + \sum_{s=1}^M B_s \Psi_{sm}^{(2)}; \Psi_{sm}^{(i)} = \begin{pmatrix} \psi_{sm}^{3i} \\ \psi_{sm}^{4i} \end{pmatrix}, i=1,2.$$

4. Результати чисельних досліджень

Для чисельної реалізації методу розглядався еліптичний циліндр з ексцентриситетом $\varepsilon=0,5$ та тріщиною у початку координат, який перебуває під дією самоврівноважуючого навантаження $P(\varphi)=1$. Криві 1,2,3,4 на Рис.2

відповідають кутам нахилу $\alpha = 0^0, 45^0, 60^0, 90^0$ тріщини з фіксованою відносною довжиною $\gamma = a/r_0 = 0,4$. Графіки наведено для нормальних напружень кінця тріщини, що наближається до границі. Особливістю поведінки КІН є наявність локальних максимумів на частотах, менших за частоту першого резонансу, положення і величина яких залежить від кута нахилу тріщини. Можна бачити, що на частотах $3 < \kappa_0 < 4$, де для інших кутів нахилу спостерігається резонанс, при $\alpha = 0^0$ є локальний максимум. Найбільші значення КІН у початковому частотному діапазоні досягаються при $\alpha = 90^0$. Для дотичних напружень спостерігається аналогічна поведінка КІН

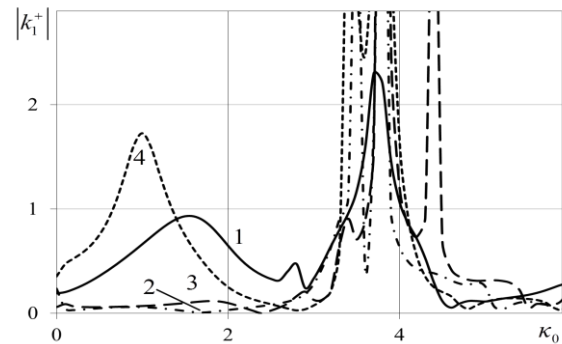


Рис.2 Залежність поведінки КІН від безрозмірного хвильового числа κ_0 при зміні кута нахилу.

Список використаних джерел

1. Попов В.Г. Сравнительный анализ дифракционных полей при прохождении упругих волн через дефекты различной природы / В. Г. Попов, А.Э. Улановский // Изв. РАН Механика твердого тела. – 1995. – № 4. – С. 99-109.
2. Ang D.D. Diffraction of scalar elastic waves by a finite strip / D.D. Ang, L. Knopoff // Proc. Math. Sci. USA. – 1964. – 51. – № 4. – P. 593-598.
3. Mykhas'kiv V. Elastodynamic analysis of multiple crack problem in 3-D bi-materials by a BEM / V. Mykhas'kiv, I. Zhabdynskiy, Ch. Zhang // Int. J. Num. Meth. Biomed. Eng. – 2010. – 26. – № 12. – P. 1934-1946.
4. Назарчук З. Т. Акустико-емісійне діагностування елементів конструкцій: Наук.-техн. посібник / З. Т. Назарчук, В. Р. Скальський. – Київ: Наук. думка, 2009. – 877 с.
5. Chirino F. Dynamic analysis of cracks using boundary element method / F. Chirino, J. Domingues // Eng. Fracture Mechanics. – 1989. – 34. – № 5-6. – P. 1051-1061.
6. Бобылев А.А.. Применение метода граничных элементов к расчету вынужденных колебаний упругих тел конечных размеров с трещинами / А.А. Бобылев, Ю.А. Доброва // Вестник Харк. нац. ун-та. – 2003. – 590. – Вып. 1. – С. 49-54.
7. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений / И. Н. Векуа. – Москва: ОГИЗ, 1948. – 296с.
8. Белоцерковский С. М. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях / С. М. Белоцерковский, И. К. Лифанов. – Москва: Наука, 1985. – 253 с.

References

1. POPOV, V. G. and ULANOVSKIY, A. E. (1995) Sravnitel'nyj analiz difraktsionnykh polej pri prohozhdenii uprugih voln cherez defekti razlichnoj prirodi. *Izv.RAN Mehanika tverdogo tela*. 4. p. 99-109.
2. ANG D.D. and KNOPOFF L. (1964) Diffraction of scalar elastic waves by a finite strip. *Proc. Math. Sci. USA*. 51 (4). p. 593-598.
3. MYKHAS'KIV, V., ZHBADYNSKIY I. and ZHANG CH. (2010) Elastodynamic analysis of multiple crack problem in 3-D bi-materials by a BEM. *Int. J. Num. Meth. Biomed. Eng.* 26 (12). p. 1934-1946.
4. NAZARCHUK, Z.T. and SKALSKIY, V.R. (2009) *Akustiko-emisijne diagnostuvannja elementiv konstrukcij: Nauk.-Tehn.posibnyk*. Kyiv: Naukova dumka.
5. CHIRINO, F. and DOMINGUES, J. (1989) Dynamic analysis of cracks using boundary element method. *Engineering Fracture Mechanics*. 34 (5-6). p. 1051-1061.
6. BOBIL'OV, A.A. and DOBROVA, J.A. (2003) Primenenie metoda granichnih elementov v k rastchetu vinugdenih kolebanij uprugih tel konechnih razmerov s treshinami. *Vestnik Hark.nats.univ*. 590 (1). p. 49-54.
7. VEKUA, I. N. (1948) *Novije metody rechenija ellipticheskikh uravnenij*. Moskva: OGIZ.
8. BELOTSEKOVSKIY, S.M. and LIFANOV, I.K. (1985) *Chislennije metody v syngularnih integralnih uravnenijah*. Moskva: Nauka.

Надійшла до редколегії 07.09.17

УДК 539.3

Киричок І.Ф.¹, д.ф.-м.н., пров. наук. співр.,
Круць С.Ю.², аспірант,
Жук Я.О.², д.ф.-м.н., проф.

**Постановка задачі про резонансні
коливання і вібророзігрів гнучких
непружних пластин з врахуванням
деформацій зсуву**

¹Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН
України, 03057, м. Київ, вул. П. Нестерова, 3,
²Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова
4е,
e-mail: sofiya1402@ukr.net, y.zhuk@i.ua

I. F. Kirichok¹, Dr.Sci. (Phys.-Math.),
S.Y. Kruts², Ph.D. Student,
Y.A. Zhuk², Dr.Sci. (Phys.-Math.).

**Statement of the problem on resonant vibrations
and dissipative heating of flexible inelastic plates
accounting for shear strain**

¹S.P.Timoshenko Institute of Mechanics National
Academy of Sciences of Ukraine, 3, P. Nesterov str.,
Kyiv 03057,
²Taras Shevchenko National University of Kyiv, 4e,
Glushkov ave., Kyiv 03680,
e-mail: sofiya1402@ukr.net, y.zhuk@i.ua

Розвивається уточнена модель зв'язаної термоелектромеханічної поведінки шаруватих елементів конструкцій, що містять п'єзоактивні шари, в якій враховуються деформації поперечного зсуву, інерція повороту і геометрична нелінійність. Сформульовано постановку задачі про осесиметричні коливання і дисипативний розігрів тришарової круглої пластини, середній шар якої є електрично пасивним, а зовнішні шари виготовлені з п'єзоелектричного матеріалу. Розглянуто випадки як ізотропного, так і трансверсально ізотропного в'язкопружного матеріалу середнього шару. Шари-актуатори вважаються виготовленими з п'єзокераміки з однаковими властивостями і товщиною поляризацією протилежних напрямків. Виведено фізичні, геометричні рівняння та рівняння руху. Отримано розв'язувальну систему рівнянь і розроблено методичку чисельного розв'язування задачі

Ключові слова: резонансні коливання, дисипативний розігрів, активне демпфування, п'єзоактивний матеріал.

The problem on the forced resonant vibration and dissipative heating of layered element of structure containing both piezoelectric and electrically passive layers is under investigation. The improved problem statement taking account of both shear strain and rotatory inertia as well as geometrical nonlinearity is developed. Particular statement of the problem of axisymmetric vibration and dissipative heating of three layer circular plate is formulated. It is assumed that the core layer of the plate is composed of the electrically passive material while the outer layers are manufactured from the piezoceramics. Theory of coupled thermo-electro-viscoelasticity is used to derive the problem statement in the case of monoharmonic loading. Within this theory, the concept of complex-value modulae is applied to formulate the relations between main field characteristics. The outer layers are supposed to function as either sensors that provide information on the mechanical state of the plate or actuators to which the corresponding amplitudes and phases of the electric voltage are supplied. It is also supposed that the piezo-active material characteristics do not depend on the temperature. Then the coupled problem is reduced to the problem of mechanics on the forced nonlinear vibrations and dissipative heating of the layered plate. Complete set of complex analogs of motion equations, geometric equations and constitutive relations was used to derive the resolving system of equations. Numerical method to attack this nonlinear system of ordinary differential equations supplemented with necessary boundary conditions is developed.

Key Words: resonant vibrations, dissipative heating, active damping, piezoactive material.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Перестюк М.О.

1. Вступ

Для зниження рівня амплітуд коливань конструкцій широко використовують розподілені тонкостінних елементів (балок, пластин і актуатори і сенсори. Як правило їх виготовляють

оболонки) у сучасних функціональних елементах конструкцій широко використовують розподілені тонкостінних елементів (балок, пластин і актуатори і сенсори. Як правило їх виготовляють

з п'єзоактивних матеріалів. Одним з найпоширеніших способів активного гасіння вимушених коливань є нанесення на зовнішні поверхні тонкостінного елемента п'єзоелектричних шарів, до електродів яких подається різниця електричних потенціалів відповідної амплітуди і фази, для нейтралізації дії механічного збудження. У багатьох випадках тонкостінні елементи з п'єзоелектричними включеннями знаходяться під дією інтенсивних циклічних навантажень, які зумовлюють високий рівень механічних напружень, прогинів та дисипативного розігріву. При цьому необхідно враховувати ефекти фізичної і геометричної нелінійностей, а також їх вплив на термомеханічний стан конструкції.

Повне врахування факторів, які можуть суттєво вплинути на термомеханічний стан шаруватих елементів конструкцій, вимагає розробки уточнених теорій термоелектромеханічної поведінки конструкцій, в яких беруться до уваги деформації зсувів, інерція поворотів поперечних перетинів та геометрична нелінійність деформації. У даній статті розвивається така уточнена модель зв'язаної термоелектромеханіки для шаруватих тіл, і, як приклад, формулюється відповідна постановка задачі про осесиметричні коливання та вібророзігрів тришарової круглої пластинки, середній шар якої виготовлений з електрично пасивного матеріалу (наприклад полімеру), а зовнішні шари – з п'єзокераміки.

2. Постановка задачі та її розв'язання

Розглядаються вимушені осесиметричні коливання тришарової пластинки, середній шар якої складається з пасивного (без п'єзоефекту) ізотропного шару товщини h_3 , а зовнішні – з п'єзоелектричних шарів товщини h_1 і h_2 відповідно. П'єзошари виготовлені із поляризованої по товщині в'язкопружної п'єзокераміки. Напрямки поляризації верхнього і нижнього шару протилежні. Пластика віднесена до ортогональної циліндричної системи координат $Orz\theta$, де r – радіус ($0 \leq r \leq R$), θ – центральний кут, z – нормальна до серединної площини координата, початок якої відраховується від серединної площини пасивного шару. П'єзошари мажуть виконувати як роль сенсора, так і роль актуатора.

Пластика навантажена осесиметричним поперечним навантаженням

$$q_z = q_z(r) \cos \omega t,$$

який змінюється за гармонічним законом у часі з круговою частотою ω (близькою до резонансної).

Електричні потенціали V визначені на електродах поверхнях п'єзоактивних шарів. До електродів актуатора підведена різниця електричних потенціалів

$$V\left(-\frac{h_3}{2}\right) - V\left(-\frac{h_3}{2} - h_1\right) = \operatorname{Re}(V_A e^{i\omega t}),$$

яка змінюється з тією ж частотою, що і механічне навантаження. Таким чином дія механічного збудження або компенсується, або підсилюється в залежності від фази підведеної різниці потенціалів.

При моделюванні механічної поведінки тришарової гнучкої пластинки приймаємо, що для всього пакету шарів є справедливими гіпотези плоских перерізів, а зсуви враховуються в рамках теорії балок Тимошенка. Відносно електричних змінних допускаємо, що складовими D_r і D_θ , а також E_r і E_θ векторів індукції і напруженості електричного поля в площині п'єзошару можна знехтувати. При цьому нормальна складова вектора індукції є сталою величиною по товщині п'єзошару.

У випадку стаціонарних коливань круглої пластини із застосуванням концепції комплексних модулів постановка задачі складається з комплексних аналогів рівнянь коливань (руху)

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(N_r + N_\theta) - \rho \tilde{h} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial Q_r^*}{\partial r} + \frac{1}{r}Q_r^* - \rho \tilde{h} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q_z &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(M_r + M_\theta) - Q_r^* - N_r \mathcal{G}_r - \frac{\rho \tilde{h}^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial t^2} = 0,$$

співвідношень Коші

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2}g_r^2, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}; \\ \chi_r &= \frac{\partial \psi_r}{\partial r}, \quad \chi_\theta = \frac{\psi_r}{r}; \\ \mathcal{G}_r &= -\frac{\partial w}{\partial r}, \quad \gamma_r = \varepsilon_{rz} = \psi_r - \mathcal{G}_r, \end{aligned} \quad (2)$$

і визначальних співвідношень, отриманих шляхом осереднення по всьому пакету шарів відповідних співвідношень для кожного електрично пасивного або п'єзоактивного шару

$$\begin{aligned} N_r &= C_{11}\varepsilon_r + C_{12}\varepsilon_\theta + N_E, \\ N_\theta &= C_{12}\varepsilon_r + C_{11}\varepsilon_\theta + N_E, \\ M_r &= D_{11}\chi_r + D_{12}\chi_\theta + M_E, \\ M_\theta &= D_{12}\chi_r + D_{11}\chi_\theta + M_E, \\ Q_r &= k_1 c_{44} \gamma_r = k_1 c_{44} (\psi_r + \mathcal{G}_r). \end{aligned} \quad (3)$$

Зазначимо, що у співвідношеннях (1)–(3) використано позначення зі статті [3], які є

загальноприйнятими в електромеханіці тонкостінних шаруватих елементів конструкції. Додатково введено величини ψ_r – повний кут повороту нормалі (згідно теорії Тимошенка), $Q_r^* = Q_r - N_r \vartheta_r$. Геометричну нелінійність враховано шляхом використання моделі фон Кармана (враховано квадрати кутів повороту поперечних перерізів ϑ_r).

Розв'язувальні рівняння електров'язкопружності формулюються відносно шуканих величин $u, w, \psi_r, N_r, M_r, Q_r^*$.

Використовуючи концепцію комплексних модулів для наведених вище рівнянь і шуканих величин, розв'язок будемо у вигляді

$$\begin{aligned} w &= w^0 + w^1 \cos \omega t - w'' \sin \omega t, \\ \psi_r &= \psi_r^0 + \psi_r^1 \cos \omega t - \psi_r'' \sin \omega t, \\ u &= u^0 + u^1 \cos \omega t - u'' \sin \omega t + \\ &\quad + u^2 \cos 2\omega t - u'' \sin 2\omega t, \\ N_r &= N_r^0 + N_r^1 \cos \omega t - N_r'' \sin \omega t + \\ &\quad + N_r^2 \cos 2\omega t - N_r'' \sin 2\omega t, \\ M_r &= M_r^0 + M_r^1 \cos \omega t - M_r'' \sin \omega t, \\ Q_r^* &= Q_r^0 + Q_r^{*1} \cos \omega t - Q_r^{*''} \sin \omega t. \end{aligned} \quad (4)$$

Підставляючи (4) в розв'язувальну систему рівнянь, використовуючи комплексні податливості та вводячи позначення $y_1 = u^1, y_2 = u'', \dots, y_{22} = \psi_r^1$, розв'язувальну систему звичайних диференціальних рівнянь отримаємо у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{dy_2}{dr} &= -\frac{\bar{v}_{11}''}{r} y_1 - \frac{\bar{v}_{11}'}{r} y_2 - J_B^1 y_9 + J_B^1 y_{10} - \\ &\quad - J_{SD}^1 y_7 y_{19} + J_{SD}^1 y_8 y_{19} - J_B'' N_E' - J_B' N_E'', \\ \frac{dy_3}{dr} &= -\frac{\bar{v}_{11}'}{r} y_3 + \frac{\bar{v}_{11}''}{r} y_4 + J_B^2 y_{11} + J_B^2 y_{12} - \\ &\quad - \frac{1}{4} (y_7^2 - y_8^2) + J_{SD}^2 y_7 y_{19} + J_{SD}^2 y_8 y_{19}; \\ \frac{dy_4}{dr} &= -\frac{\bar{v}_{11}''}{r} y_3 - \frac{\bar{v}_{11}'}{r} y_4 - J_B^2 y_{11} + J_B^2 y_{12} - \\ &\quad - \frac{1}{2} y_7 y_8 - J_{SD}^2 y_7 y_{19} + J_{SD}^2 y_8 y_{19}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_5}{dr} &= -y_7 + J_{SD}^1 y_{13} + J_{SD}^1 y_{14} + \\ &\quad + J_{SD}^1 \left(y_7 y_{18} + \frac{1}{2} y_7 y_{11} + \frac{1}{2} y_8 y_{12} \right) + \\ &\quad + J_{SD}^1 \left(y_8 y_{18} + \frac{1}{2} y_7 y_{12} - \frac{1}{2} y_8 y_{11} \right); \\ \frac{dy_6}{dr} &= -y_8 - J_{SD}^1 y_{13} + J_{SD}^1 y_{14} - \\ &\quad - J_{SD}^1 \left(y_7 y_{18} + \frac{1}{2} y_7 y_{11} + \frac{1}{2} y_8 y_{12} \right) + \\ &\quad + J_{SD}^1 \left(y_8 y_{18} + \frac{1}{2} y_7 y_{12} - \frac{1}{2} y_8 y_{11} \right); \\ \frac{dy_7}{dr} &= \frac{\bar{v}_{11}'}{r} y_7 - \frac{\bar{v}_{11}''}{r} y_8 + J_D^1 y_{15} + J_D^1 y_{16} - \\ &\quad - J_D^1 M_E' - J_D^1 M_E''; \\ \frac{dy_8}{dr} &= \frac{\bar{v}_{11}''}{r} y_7 + \frac{\bar{v}_{11}'}{r} y_8 - J_D^1 y_{15} + J_D^1 y_{16} + \\ &\quad + J_D^1 M_E' - J_D^1 M_E''; \\ \frac{dy_9}{dr} &= \left(\frac{\bar{B}_{22}'}{r^2} - \rho \tilde{h} \omega^2 \right) y_1 - \frac{\bar{B}_{22}''}{r^2} y_2 - \\ &\quad - \frac{1 - \bar{v}_{11}'}{r} y_9 - \frac{\bar{v}_{11}''}{r} y_{10} + \frac{1 - \bar{v}_{11}'}{r} N_E' + \frac{\bar{v}_{11}''}{r} N_E''; \\ \frac{dy_{10}}{dr} &= \frac{\bar{B}_{22}''}{r^2} y_1 + \left(\frac{\bar{B}_{22}'}{r^2} - \rho \tilde{h} \omega^2 \right) y_2 + \\ &\quad + \frac{\bar{v}_{11}''}{r} y_9 - \frac{1 - \bar{v}_{11}'}{r} y_{10} - \frac{\bar{v}_{11}''}{r} N_E' + \frac{1 - \bar{v}_{11}'}{r} N_E''; \\ \frac{dy_{11}}{dr} &= \left(\frac{\bar{B}_{22}'}{r^2} - 4 \rho \tilde{h} \omega^2 \right) y_3 - \frac{\bar{B}_{22}''}{r^2} y_4 - \\ &\quad - \frac{1 - \bar{v}_{11}'}{r} y_{11} - \frac{\bar{v}_{11}''}{r} y_{12E}; \\ \frac{dy_{12}}{dr} &= \frac{\bar{B}_{22}''}{r^2} y_3 + \left(\frac{\bar{B}_{22}'}{r^2} - 4 \rho \tilde{h} \omega^2 \right) y_4 + \\ &\quad + \frac{\bar{v}_{11}''}{r} y_{11} - \frac{1 - \bar{v}_{11}'}{r} y_{12}; \\ \frac{dy_{13}}{dr} &= -\frac{1}{r} y_{13} - \rho \tilde{h} \omega^2 y_5 - q_z'; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy_{14}}{dr} &= -\frac{1}{r}y_{14} - \tilde{\rho}\tilde{h}\omega^2y_6 - q_z''; \\ \frac{dy_{15}}{dr} &= \frac{\tilde{D}_{11}'}{r^2}y_7 - \frac{\tilde{D}_{11}''}{r^2}y_8 - \frac{1+\tilde{v}_{11}'}{r}y_{15} + \\ &+ \frac{1}{r}\tilde{v}_{11}''y_{16} + y_{13} + y_7y_{18} + \frac{1}{2}y_7y_{11} + \frac{1}{2}y_8y_{12} - \\ &- J_{SD}'(y_9y_{19} + y_{13}y_{18} + \frac{1}{2}y_{13}y_{11} + \frac{1}{2}y_{14}y_{12}) - \\ &- J_{SD}''(y_{10}y_{19} + y_{14}y_{18} + \frac{1}{2}y_{13}y_{12} - \frac{1}{2}y_{14}y_{11}) - \\ &- \frac{\tilde{\rho}\tilde{h}^3\omega^2}{12}y_7 + \frac{1+\tilde{v}_{11}'}{r}M_E' - \frac{\tilde{v}_{11}''}{r}M_E''; \\ \frac{dy_{16}}{dr} &= \frac{\tilde{D}_{11}''}{r^2}y_7 + \frac{\tilde{D}_{11}'}{r^2}y_8 - \frac{1}{r}\tilde{v}_{11}'y_{15} - \\ &- \frac{1+\tilde{v}_{11}'}{r}y_{16} + y_{14} + y_8y_{18} + \frac{1}{2}y_7y_{12} - \frac{1}{2}y_8y_{11} - \\ &+ J_{SD}''(y_9y_{19} + y_{13}y_{18} + \frac{1}{2}y_{13}y_{11} + \frac{1}{2}y_{14}y_{12}) - \\ &- J_{SD}'(y_{10}y_{19} + y_{14}y_{18} + \frac{1}{2}y_{13}y_{12} - \frac{1}{2}y_{14}y_{11}) - \\ &- \frac{\tilde{\rho}\tilde{h}^3\omega^2}{12}y_8 + \frac{\tilde{v}_{11}''}{r}M_E' + \frac{1+\tilde{v}_{11}'}{r}M_E''; \\ \frac{dy_{17}}{dr} &= J_B^0y_{18} - \frac{\tilde{v}_{11}}{r}y_{17} - \frac{1}{2}(y_7^2 + y_8^2) + \\ &+ \frac{1}{2}J_{SD}^0(y_7y_{13} + y_8y_{14}); \\ \frac{dy_{18}}{dr} &= -\frac{1-\tilde{v}_{11}}{r}y_{18} - \frac{\tilde{B}_{22}^0}{r^2}y_{17};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy_{19}}{dr} &= -\frac{1}{r}y_{19} - q_z^0; \\ \frac{dy_{20}}{dr} &= -\frac{1+\tilde{v}_{11}^0}{r}y_{20} + y_{19} + \\ &+ \frac{1}{r}\tilde{D}_{11}^0y_{22} + \frac{1}{2}(y_7y_9 + y_8y_{10}) + \\ &- J_{SD}^0\left(y_{18}y_{19} + \frac{1}{2}y_9y_{13} + \frac{1}{2}y_{10}y_{14}\right);\end{aligned}$$

$$\frac{dy_{21}}{dr} = J_{SD}^0y_{19} + \frac{1}{2}J_{SD}^0(y_7y_9 + y_8y_{10}) - y_{22};$$

$$\frac{dy_{22}}{dr} = J_D^0y_{20} + \frac{\tilde{v}_{11}^0}{r}y_{22}.$$

Додаючи до цієї системи рівняння теплопровідності, відповідні механічні та електричні граничні умови, а також, початкову по температурі умову, отримуємо постановку крайової задачі про резонансні коливання і вібророзігрів гнучких непружних пластин з врахуванням деформацій зсуву.

4. Висновки.

Сформульовано постановку задачі про осесиметричні коливання тришарової круглої пластини, середній шар якої є електрично пасивним, а зовнішні шари виготовлені з п'єзоелектричного матеріалу. Розглянуто випадки як ізотропного, так і трансверсально ізотропного в'язкопружного матеріалу середнього шару. Шари-актуатори вважаються виготовленими з п'єзокераміки з однаковими властивостями і товщиною поляризацією протилежних напрямків. Виведено фізичні, геометричні рівняння та рівняння руху. Отримано розв'язувальну систему рівнянь і розроблено методику чисельного розв'язування задачі.

Список використаних джерел

1. Zhuk Y. A. Modelling the Stationary Vibrations and Dissipative Heating of Thin-Walled Inelastic Elements with Piezoactive Layers / Y.A. Zhuk, I. K. Senchenkov // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – Vol. 40, № 5. – P. 546–556.
2. Kirichok I. F. Resonans vibration and heating of ring plates with piezoactuators under electromechanical loading and shear deformation / I. F. Kirichok // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – 45, № 2. – P. 215–222.

References

1. ZHUK Y.A. and SENCHENKOV I.K. (2004) Modeling the stationary vibrations and dissipative heating of thin-walled inelastic elements with piezoactive layers. *Int. Appl. Mech.* 40(5). p. 546–556.
2. KIRICHOK I. F. (2009) Resonant vibration and heating of ring plates with piezoactuators under electromechanical loading and shear deformation. *Int. Appl. Mech.* 45(2). p. 215–222.

Надійшла до редколегії 27.08.17

УДК 519.9

Кіт Г. С., чл.-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф.,
Андрійчук Р. М., аспірант.

**Термонапружений стан півпростору з
вільною межею за теплоізоляції у
паралельній до неї круговій області**

Інститут прикладних проблем механіки і
математики ім. Я.С.Підстригача НАН України,
79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б,
e-mail: andriychukroman@gmail.com,
hkit@iapmm.lviv.ua

H. S. Kit, Dr. Sci., (Phys.-Math.),
R. M. Andriychuk, Postgraduate Student.

**Thermoelastic state of half-space with free
boundary with heat-insulation in a parallel
to it circular domain**

Pidstryhach Institute for Applied Problems of
Mechanics and Mathematics, National Academy of
Sciences of Ukraine, 79060, Lviv, Naukova st., 3-b,
e-mail: andriychukroman@gmail.com,
hkit@iapmm.lviv.ua

З використанням термопружного потенціалу переміщень і бігармонічної функції Лява визначені зумовлені диполем тепла температура, переміщення і напруження у півбезмежному тілі, межа якого вільна за нульової температури на ній або теплоізоляції. Наведено явні вирази для температури, переміщень і напружень, які є відповідними функціями Гріна. Вони можуть бути використані при визначенні у розглянутому півпросторі термопружного стану, зумовленого збуренням заданого теплового потоку теплонепроникним круговим включенням.

Ключові слова: півпростір, тепловий диполь, задача термопружності, функції Гріна.

Under the action of a thermal dipole, Green's functions of the stationary heat conduction and thermoelasticity problems for half-space with a free boundary, on which zero temperature or thermal insulation is given, are constructed. The harmonic potentials of the double layer and the potentials of thermoelastic displacements in an infinite space with two mirror-like thermal dipoles relative to the half-space boundary, the axes of which are directed in the same direction along the axis Oz (at zero temperature of the boundary with flexible clamping) or in the opposite directions (for thermal insulation of the boundary with smoothly clamping) are used in solving the heat conduction problem. Biharmonic Love functions for the satisfaction of the free boundary conditions are constructed. Expressions for temperature, displacements and stresses that can be used in determining of the thermoelastic state of a half-space due to perturbation of a given heat flow parallel to the boundary of heat-proof thin inclusion are given.

Key words: half-space, thermal dipole, thermoelasticity problem, Green's functions.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Важливим є вивчення розподілу температури та напружень в околі теплонепроникних тонких включень. Таке включення є тепловим екраном, ідеальність теплового контакту порушується, його поверхні прогріваються нерівномірно, внаслідок чого виникають дотичні напруження.

Задачі теплопровідності та термопружності для безмежного тіла з теплонепроникним круговим включенням розв'язані у працях [1-5]. Для півбезмежних тіл при розв'язуванні задач термопружності вигідно використовувати функції Гріна. Такі функції для півпростору з джерелом тепла, на вільній від навантаження межі якого задана нульова температура або теплоізоляція, побудовані з використанням бігармонічних функцій Лява [6]. Функції Гріна

для півпростору з жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею наведені у праці [7]. З використанням термопружних потенціалів переміщень і функцій Буссінеска побудовано функції Гріна задач термопружності для півпростору із жорстко закріпленою межею і досліджено його напружено-деформований стан за тепловиділення у паралельній до межі круговій області [8].

2. Постановка задачі

Розглянемо півпростір з вільною межею, на якій задана нульова температура або теплоізоляція. Введемо циліндричну систему координат з початком на межі півпростору і віссю Oz , перпендикулярною до неї. На віддалі h від межі знаходиться у паралельній до неї області S тонке теплонепроникне включення.

Температурне поле подаємо у вигляді

$$T(r, z) = t_0(r, z) + t(r, z),$$

де $t_0(r, z)$ – температурне поле у тілі без включення, $t(r, z)$ – температурне поле, зумовлене збуренням температури $t_0(r, z)$ включенням. Граничну умову теплоізоляції на включенні запишемо так:

$$\frac{\partial T(t, z)}{\partial z} = 0, \text{ або } \frac{\partial t(r, z)}{\partial z} = -\frac{\partial t_0(r, z)}{\partial z}, (r, z) \in S.$$

Температуру $t(r, z)$ шукаємо у вигляді гармонічного потенціалу подвійного шару з густиною диполів $\gamma(\rho)$.

Крайові умови на межі при $z=0$ мають вигляд:

$$1) t(r, 0) = 0, 2) \left. \frac{\partial t(r, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0; \\ \sigma_{zz}(r, 0) = 0, \quad \sigma_{rz}(r, 0) = 0. \quad (1)$$

Компоненти вектора переміщень і тензора напружень шукаємо у вигляді

$$u(r, z) = \bar{u}(r, z) + \bar{\bar{u}}(r, z), \\ \sigma(r, z) = \bar{\sigma}(r, z) + \bar{\bar{\sigma}}(r, z), \quad (2)$$

де перші доданки характеризують напружено-деформований стан безмежного тіла, а другі – переміщення і напруження у півпросторі $z \geq 0$, які забезпечують виконання умов (1).

3. Напружено-деформований стан безмежного тіла

Розглянемо безмежний простір з двома дзеркально розташованими відносно площини $z=0$ тепловими диполями сталої потужності γ , осі яких спрямовані в одну сторону по осі Oz (за нульової температури при $z=0$) або в протилежні сторони (площина $z=0$ теплоізолювана).

Температурне поле запишемо у вигляді

$$t(r, z) = \frac{\gamma}{4\pi\lambda} \left(\frac{z-h}{R_1^3(r, z)} + (-1)^k \frac{z+h}{R_2^3(r, z)} \right), \\ R_{1,2}(r, z) = \sqrt{r^2 + (z \mp h)^2},$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності, $k=1$ відповідає теплоізоляції, а $k=2$ – нульовій

температурі межі тіла.

Зумовлені тепловими диполями напруження і переміщення у безмежному тілі знаходять за допомогою термопружного потенціалу переміщень $\Phi(r, z)$, який задовольняє рівняння Пуассона

$$\Delta \Phi(r, z) = m t(r, z), \quad m = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_t,$$

де α_t і ν – коефіцієнти лінійного теплового розширення і Пуассона відповідно. Частинним розв'язком цього рівняння є функція

$$\Phi(r, z) = -A \int_0^\infty J_0(\alpha r) \left[(z-h) e^{-\alpha|z-h|} + \right. \\ \left. + (-1)^k (z+h) e^{-\alpha|z+h|} \right] d\alpha = -A \left(\frac{z-h}{R_1(r, z)} + \right. \\ \left. + (-1)^k \frac{z+h}{R_2(r, z)} \right),$$

де $A = m\gamma/8\pi\lambda$, $J_0(x)$ – функція Бесселя. Тоді переміщення і напруження визначаються за відомими формулами [6]

Після відповідних обчислень маємо:

$$\bar{u}_r = \frac{mtr}{2}, \quad \bar{u}_z = -Ar^2 \left(\frac{1}{R_1^3} + (-1)^k \frac{1}{R_2^3} \right); \\ \bar{\sigma}_{rr} = -2G \left\{ \frac{mt}{2} + 3Ar^2 \left[\frac{z-h}{R_1^5} + \frac{(-1)^k (z+h)}{R_2^5} \right] \right\}, \\ \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} = -mGt, \\ \bar{\sigma}_{zz} = 2G \left\{ 2mt + 3Ar^2 \left[\frac{z-h}{R_1^5} + \frac{(-1)^k (z+h)}{R_2^5} \right] \right\}, \\ \bar{\sigma}_{rz} = -2GA r \left[\frac{2}{R_1^3} - \frac{3r^2}{R_1^5} + (-1)^k \left(\frac{2}{R_2^3} - \frac{3r^2}{R_2^5} \right) \right]. \quad (3)$$

Із аналізу цих формул випливає, що ними описується також напружено-деформований стан півпростору з диполем тепла, межа якого теплоізолювана і гладко закріплена ($k=1$, $u_z=0$, $\sigma_{rz}=0$) або закріплена гнучкою нерозтяжною плівкою за нульової температури на ній ($k=2$, $u_r=0$, $\sigma_{zz}=0$, $\sigma_{rr}=0$, $\sigma_{\varphi\varphi}=0$).

4. Визначення переміщень і напружень через функцію Лява

Переміщення $\bar{u}(r, z)$ і напруження $\bar{\sigma}(r, z)$

визначимо за допомогою бігармонічної функції
Лява φ [6], яку подамо у вигляді інтеграла
Ганкеля

$$\varphi(r, z) = \int_0^\infty e^{-\alpha z} (C + D\alpha z) J_0(\alpha r) d\alpha.$$

Тут $C(\alpha)$ і $D(\alpha)$ – невідомі функції.

Нульова температура на межі. Використовуючи умову (2), подання для переміщень і напружень [6] та прирівнюючи підінтегральні вирази до нуля, знаходимо

$$\begin{aligned} C &= -(1-2\nu)D, \\ D &= \frac{2A(1-2\nu)(1-\alpha h)e^{-\alpha h}}{\alpha^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Підставивши вирази (4) у формули для переміщень і напружень, поклавши $\zeta = z + h$, маємо

$$\begin{aligned} u_r &= -2Ar \left[\frac{2(1-\nu)}{R_2(R_2+\zeta)} - \frac{z+2(1-\nu)h}{R_2^3} + \frac{3zh\zeta}{R_2^5} \right], \\ u_z &= 2A \left\{ \frac{1-2\nu}{R_2} + \frac{[z-(1-2\nu)h]\zeta + zh}{R_2^3} - \frac{3zh\zeta^2}{R_2^5} \right\}; \\ \sigma_{rr} &= 4AG \left[\frac{2(1-\nu)}{R_2(R_2+\zeta)} - 2\frac{2\zeta+(1-\nu)h}{R_2^3} + \right. \\ &\quad \left. + 3\zeta \frac{(\zeta+h)\zeta + 4zh}{R_2^5} - \frac{15zh\zeta^3}{R_2^7} \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -4AG \left[\frac{2(1-\nu)}{R_2(R_2+\zeta)} - \frac{(\zeta+h)(1-2\nu) - 2vh}{R_2^3} - \right. \\ &\quad \left. - 3h\zeta \frac{2\nu\zeta - z}{R_2^5} \right], \\ \sigma_{zz} &= 4AGz \left[\frac{1}{R_2^3} - \frac{3(\zeta+3h)\zeta}{R_2^5} + \frac{15h\zeta^3}{R_2^7} \right], \\ \sigma_{rz} &= 4AGr \left(\frac{1}{R_2^3} - 3\frac{\zeta^2 + zh}{R_2^5} + \frac{15zh\zeta^2}{R_2^7} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Напружено-деформівний стан півпростору визначаємо за формулами (2), (3) і (5).

Теплоізолювана межа. Тоді

$$C = 2\nu D, \quad D = -\frac{2A(1-2\nu)he^{-\alpha h}}{\alpha};$$

$$\begin{aligned} u_r &= 2Ahr \left(\frac{1-2\nu}{R_2^3} - \frac{3z\zeta}{R_2^5} \right), \\ u_z &= 2Ah \left[\frac{z-2(1-\nu)\zeta}{R_2^3} - \frac{3z\zeta^2}{R_2^5} \right]; \\ \sigma_{rr} &= -4AGh \left[\frac{2(1-\nu)}{R_2^3} - \frac{3(\zeta+4z)\zeta}{R_2^5} + \frac{15z\zeta^3}{R_2^7} \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= 4AGh \left[\frac{1-4\nu}{R_2^3} + 3\zeta \frac{2\nu\zeta - z}{R_2^5} \right], \\ \sigma_{zz} &= -4AGh \left[\frac{1}{R_2^3} - \frac{3(\zeta-3z)\zeta}{R_2^5} - \frac{15z\zeta^3}{R_2^7} \right], \\ \sigma_{rz} &= -12AGhrz \left(\frac{1}{R_2^5} - \frac{5\zeta^2}{R_2^7} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Напружено-деформований стан півпростору визначаємо за формулами (2), (3) і (6).

Теплоізоляція у паралельній до межі півпростору області.

Наведені співвідношення для переміщень і напружень є відповідними функціями Гріна і можуть бути використані при визначенні у півпросторі термopружного стану, зумовленого нагрівом тепловими диполями, розподіленими по області S , обмеженій гладким контуром. Для цього необхідно перенести тепловий диполь в точку $(\xi_1, \xi_2, 0)$ декартової системи координат з початком в області S . У прямокутній системі координат $Ox_1x_2x_3$ напруження виражаються формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{rr} \cos^2 \varphi + \sigma_{\varphi\varphi} \sin^2 \varphi, \\ \sigma_{22} &= \sigma_{rr} \sin^2 \varphi + \sigma_{\varphi\varphi} \cos^2 \varphi, \quad \sigma_{33} = \sigma_{zz}, \\ \sigma_{12} &= \frac{1}{2}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) \sin 2\varphi, \quad \sigma_{13} = \sigma_{rz} \cos \varphi, \\ \sigma_{23} &= \sigma_{rz} \sin \varphi, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{x_1 - \xi_1}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{x_2 - \xi_2}{r}, \\ r &= \left[(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

У формули для температури, переміщень і напружень у циліндричній системі координат слід підставити

$$R_1(r, z) = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad R_2(r, z) = \sqrt{r^2 + (z + 2h)^2}.$$

За відомою функцією Гріна визначаємо

температуру і напруження, викликані розподіленими в області S тепловими диполями з густиною $\gamma(\xi_1, \xi_2)$, за формулами

$$t^*(x_1, x_2, z) = \iint_S \gamma(\xi_1, \xi_2) t(x_1, x_2, z; \xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

$$\sigma_{ij}^*(x_1, x_2, z) = \iint_S \gamma(\xi_1, \xi_2) \sigma_{ij}(x_1, x_2, z; \xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2.$$

Густину теплових диполів $\gamma(\xi_1, \xi_2)$ визначаємо із гіперсингулярного інтегрального рівняння [3].

Список використаних джерел

1. Kim Г. С. Задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з теплопроникним дисковим включенням (тріщиною) / Г. С. Кіт, О. П. Сушко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, №4. – С. 150-159.
2. Kim Г. С. Осесиметричні задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з теплоактивним або теплоізованим включенням (тріщиною) / Г. С. Кіт, О. П. Сушко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53, №1. – С. 58-70.
3. Kim Г. С. Стаціонарне температурне поле у півбезмежному тілі з теплоактивним або теплоізованим дисковим включенням / Г. С. Кіт, О. П. Сушко // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. – 2011. – Вип. 13. – С. 67-80.
4. Галазюк В. А. Осесиметричний напружено-деформований стан у тілі з плоскою пеленою теплових джерел або диполів / В. А. Галазюк, Г. С. Кіт // Доповіді НАН України. – 2011. – №10. – С. 54-60.
5. Kim Г. С. Осесиметричний напружено-деформований стан тіла з тонким жорстким дисковим теплопроникним включенням / Г. С. Кіт, В. А. Галазюк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – 56, №3. – С. 95-109.
6. Новацкий В. Теория упругости. / В. Новацкий. – Москва: Мир, 1975. – 872 с.
7. Kim Г. С. Вплив стаціонарного джерела тепла на напружений стан півпростору з жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею / Г. С. Кіт, Р. М. Андрійчук // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – 58, № 4. – С. 78-86.
8. Kim Г. С. Термопружний стан півпростору із закріпленою межею за тепловиділення у паралельній до неї круговій області / Г. С. Кіт, Р. М. Андрійчук // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2017. – 53, №3. – С. 98-104.

5. Висновки

Отримано замкнений розв'язок тривимірної задачі термопружності для півпростору з тепловим диполем і вільною межею за нульової температури на ній або теплоізоляції. Співвідношення для переміщень і напружень є відповідними функціями Гріна і їх можна використати для визначення термопружного стану, зумовленого збуренням заданого у півпросторі теплового потоку паралельним до межі теплопроникним тонким включенням.

References

1. KIT, H. and SUSHKO, O. (2011) Problems of stationary heat conduction and thermoelasticity for a body with a heat permeable disk-shaped inclusion (crack). *J. Math. Sci.* 174 (3). p. 309-321.
2. KIT, H. and SUSHKO, O. (2011) Axially symmetric problems of stationary heat conduction and thermoelasticity for a body with thermally active or thermally insulated disk inclusion (crack). *J. Math. Sci.* 176 (4). p. 578-589.
3. KIT, H. and SUSHKO, O. (2011) Stacionarne temperaturne pole u pivbezmeznomu tili z teploaktyvnym або teploizoliovanyim diskovym vkluchennyam. *Fiz.-mat. modelyuvannia ta informaciyi tekhnologii.* 13. p. 67-80.
4. HALAZYUK, V. and KIT, H. (2011) Osesyetrychi napruzhenno-deformovanyi stan u tili z ploskoyu pelenoyu teplovykh dzherel або dypoliv. *Dopovidi NAN Ukrainy.* 10. p. 54-60.
5. KIT, H. and HALAZYUK, V. (2015) Axisymmetric stress-strain state of a body with thin rigid disk-shaped heat-resistant inclusion. *J. Math. Sci.* 205 (4). p. 602-620.
6. NOWACKI, W. (1962) *Thermoelasticity*. London: Pergamon Press.
7. KIT, H. and ANDRIYCHUK, R. (2015) Vplyv stacionarnoho dzherela tepla na naprugenyi stan pivprostoru z zhortska, hladko або hnuchko zakriplenoyu mezheyu. *Mat. metody ta fiz.-mekh. polya.* 58 (4). p. 78-86.
8. KIT, H. and ANDRIYCHUK, R. (2017) Thermoelastic state of half-space with clamped boundary at heat-generation in circular domain parallel to it. *Physicochemical Mechanics of Materials.* 53 (3). p. 98-104.

Надійшла до редколегії 15.09.17

УДК 539.3

Кіт Г. С., чл. кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф.,
Івасько Н. М., к.ф.-м.н.

**Двовимірна задача термопружності для
півпростору з вільною, жорстко, гладко
або гнучко закріпленою межею за
тепловиділення у перпендикулярній до
неї стрічковій області**

Інститут прикладних проблем механіки і ма-
тематики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
79060, м. Львів, вул. Наукова 3-б,
e-mail: natalya_ivasko@ukr.net

H. S. Kit, Dr. Sci., (Phys.-Math.),
N. M. Ivas'ko, Ph. D. (Phys.-Math.).

**Two-dimensional problem of thermoelasticity
for a half-space with a free, rigidly, smoothly
or flexibly clamped boundary with heat
release on a perpendicular to it ribbon-like
domain**

Pidstryhach Institute for Applied Problems of
Mechanics and Mathematics, 79060, L'viv, Naukova
str., 3-b,
e-mail: natalya_ivasko@ukr.net

За дії джерела тепла побудовано функції Гріна задач стаціонарної теплопровідності й термопружності при плоскій деформації півбезмежного тіла з вільною, жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею, на якій підтримується нульова температура. При цьому використано логарифмічний потенціал простого шару для розв'язання задачі теплопровідності, а для задачі термопружності - термопружний потенціал переміщень у безмежному тілі із дзеркально розташованими відносно межі півпростору джерелом і стоком тепла. Для задоволення крайових умов на межі тіла побудовано функції Буссінеска. Наведено вирази для температури, переміщень і напружень, за допомогою яких визначено термопружний стан півпростору за тепловиділення у перпендикулярній до межі стрічковій області при заданих в ній джерелах тепла сталої інтенсивності.

Ключові слова: півплощина, термопружність, теплове джерело, функції Гріна.

Under the influence of a heat source, the Green's functions of the problems of stationary heat conductivity and thermoelasticity are constructed for plane deformation of a semi-infinite body with a free, rigidly, smoothly or flexibly clamped boundary on which zero temperature is maintained. In this case, the logarithmic potential of a simple layer is used to solve the heat conduction problem, and the thermoelastic displacement potential in an infinite body with a heat source and sink that are mirror-like relative to the boundary of the half-space is used to solve the thermoelasticity problem. To satisfy the boundary conditions on the boundary of the body the Boussinesq's functions are constructed. Expressions are given for the temperature, displacements and stresses by means of which the thermoelastic state of the half-space is determined upon heat release in a perpendicular to the boundary ribbon-like domain under given in it the heat sources of constant intensity.

Key Words: half-plane, thermoelasticity, heat source, Boussinesq's functions, Green's functions.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Двовимірні задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності за плоскої деформації півбезмежного тіла з перпендикулярною до його вільної межі теплоактивною тріщиною розв'язана в [2] з використанням логарифмічного потенціалу простого шару, термопружного потенціалу переміщень та функції напружень Ері, а в [3] – за тепловиділення у паралельній до його вільної межі стрічковій області за допомогою функції напружень Ері та функції Буссінеска. Термопружний стан, зумовлений джерелом тепла у півпросторі з вільною або жорстко закріпленою межею, визначено у [4] за допомогою функції Буссінеска.

Дана стаття присвячена визначенню двовимірного стаціонарного температурного поля і зумовленої ним плоскої деформації тіла з вільною, жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею при тепловиділенні у перпендикулярній до неї стрічковій області за нульової температури на межі. При формулюванні задачі теплопровідності постулюється наявність джерел тепла на місці тепловиділення, густина яких за заданої температури визначається з інтегрального рівняння з логарифмічним ядром. Для визначення термонапруженого стану побудовані термопружний потенціал переміщень і функції Буссінеска.

Постановка задачі та її розв'язання

Розглядається півбезмежне ізотропне тіло з вільною, жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею за тепловиділення у перпендикулярній до його межі стрічковій області L . В декартовій системі координат xOy (рис. 1) визначимо спочатку розподіл температури у півплощині $x \geq 0$,

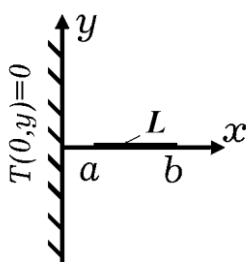


Рис. 1. Схема задачі

якщо в точці $x = \xi$, $y = 0$ знаходиться джерело тепла сталої інтенсивності w . Межа $x = 0$ має нульову температуру. Для цього доповнимо півплощину до повної площини і в точці $x = -\xi$, $y = 0$ помістимо стік тепла такої ж інтенсивності. Тоді

$$T(x, y) = W \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad W = \frac{w}{2\pi\lambda}, \quad (1)$$

де $r_1 = \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x + \xi)^2 + y^2}$, λ – коефіцієнт теплопровідності.

Якщо в області L задана температура $T(x)$, то для визначення густини теплових джерел $w(\xi)$ із (1) при $y = 0$ маємо інтегральне рівняння

$$T(x) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_a^b w(\xi) \ln \left| \frac{x + \xi}{x - \xi} \right| d\xi, \quad a \leq x \leq b. \quad (2)$$

Розв'язок рівняння (2) має вигляд [2]

$$w(x) = \frac{1}{\pi X(x)} \left[C - 2\lambda \int_a^b \frac{\xi T'(\xi) X(\xi)}{\xi^2 - x^2} d\xi \right],$$

$$\text{де } C = b^2 \int_a^b \left[\frac{E(k')}{K(k')} - 1 + \frac{\xi^2}{b^2} \right] \frac{T(\xi)}{X(\xi)} d\xi, \quad k' = \frac{a}{b},$$

$X(x) = \sqrt{(b^2 - x^2)(x^2 - a^2)}$, K , E – повні еліптичні інтеграли першого і другого роду.

Для розв'язання задачі термопружності компоненти вектора переміщень і тензора напружень шукаємо у вигляді $u(x, y) = \bar{u}(x, y) + \bar{\bar{u}}(x, y)$, $\sigma(x, y) = \bar{\sigma}(x, y) + \bar{\bar{\sigma}}(x, y)$, де перші доданки характеризують напружено-деформований стан безмежного тіла, зумовлений дзеркально розташованими відносно осі Oy джерелами і стоками тепла, а другі – переміщення і напруження у півплощині $x \geq 0$, які забезпечують виконання умов на межі.

Для визначення напружено-деформованого стану безмежного тіла використовуємо термопружний потенціал переміщень, який задовольняє рівняння Пуассона [1]

$$\Delta \Psi(x, y) = mT(x, y). \quad (3)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx} &= -2G \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}, \quad \bar{\sigma}_{yy} = -2G \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \\ \bar{\sigma}_{xy} &= 2G \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}, \quad \bar{u}_x = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \bar{u}_y = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \end{aligned} \quad (4)$$

де $m = (1 + \nu)\alpha/(1 - \nu)$, ν – коефіцієнт Пуассона, α – коефіцієнт лінійного теплового розширення, G – модуль зсуву.

Розв'язок рівняння (3) має вигляд

$$\Psi(x, y) = \frac{mW}{4} [r_2^2 \ln r_2 - r_1^2 \ln r_1 - 4\xi x]. \quad (5)$$

За формулами (4), (5) знайдемо

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx}(x, y) &= -Gm [T(x, y) + Wy^2 (1/r_2^2 - 1/r_1^2)], \\ \bar{\sigma}_{yy}(x, y) &= -Gm [T(x, y) - Wy^2 (1/r_2^2 - 1/r_1^2)], \\ \bar{\sigma}_{xy}(x, y) &= GmWy [(x + \xi)/r_2^2 - (x - \xi)/r_1^2], \\ \bar{u}_x(x, y) &= m [xT(x, y) + W\xi (\ln r_2 r_1 - 1)]/2, \\ \bar{u}_y(x, y) &= myT(x, y)/2. \end{aligned} \quad (6)$$

На межі при $x = 0$ маємо

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx}(0, y) &= \bar{\sigma}_{yy}(0, y) = 0, \quad \bar{u}_y(0, y) = 0, \\ \bar{\sigma}_{xy}(0, y) &= 2GmW\xi [y/(\xi^2 + y^2)], \\ \bar{u}_x(0, y) &= mW\xi [\ln(\xi^2 + y^2) - 1]/2. \end{aligned} \quad (7)$$

Для задоволення крайових умов на межі використаємо функцію Буссінеска, яку подамо у вигляді суми двох гармонічних функцій $\Phi(x, y) = \phi(x, y) + x\psi(x, y)$. Тоді [1]

$$\begin{aligned} \bar{\bar{u}}_x(x, y) &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} - 4(1 - \nu)\psi, \quad \bar{\bar{u}}_y(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ \bar{\bar{\sigma}}_{xx}(x, y) &= 2G \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2(2 - \nu) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \\ \bar{\bar{\sigma}}_{yy}(x, y) &= 2G \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 2\nu \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xy}(x, y) = 2G \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - 2(1 - \nu) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right). \quad (8)$$

Побудуємо функції Буссінеска та знайдемо переміщення і напруження для різних крайових умов закріплення межі.

Вільна від навантажень межа:

$$\sigma_{xx}(0, y) = 0, \quad \sigma_{xy}(0, y) = 0.$$

Враховавши (7) і (8), знайдемо [4]

$$\varphi(x, y) = -2mW\xi(1 - \nu) \times \\ \times [(x + \xi)(\ln r_2 - 1) - y \operatorname{arctg}(y/(x + \xi))],$$

$$\psi(x, y) = -mW\xi \ln r_2.$$

Тоді

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xx}(x, y) = 2GmW\xi x ((x + \xi)^2 - y^2)/r_2^4,$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{yy}(x, y) = 2GmW\xi ((x + 2\xi)r_2^2 + 2xy^2)/r_2^4,$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xy}(x, y) = -2GmW\xi y (\xi^2 - x^2 + y^2)/r_2^4,$$

$$\bar{u}_x(x, y) = mW\xi [(1 - 2\nu) \ln r_2 - x(x + \xi)/r_2^2],$$

$$\bar{u}_y(x, y) = mW\xi [2(1 - \nu) \operatorname{arctg}(y/(x + \xi)) - \\ - xy/r_2^2]. \quad (9)$$

Напруження з (9) збігаються з наведеними у праці [2], де для зняття дотичних напружень використана функція напружень Ері. Але через цю функцію не визначаються безпосередньо переміщення, тому вигідніше використовувати функцію Буссінеска.

Жорстко закріплена межа:

$$u_x(0, y) = 0, \quad u_y(0, y) = 0.$$

У цьому випадку

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = \frac{mW}{3 - 4\nu} \xi \left[\ln r_2 - \frac{1}{2} \right];$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xx}(x, y) = \frac{2GmW}{3 - 4\nu} \xi \left[\frac{2xy^2}{r_2^4} - \frac{x + 2(1 - \nu)(x + \xi)}{r_2^2} \right],$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{yy}(x, y) = \frac{2GmW}{3 - 4\nu} \xi \frac{(x - 2\nu(x + \xi))r_2^2 - 2xy^2}{r_2^4},$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xy}(x, y) = -\frac{2GmW}{3 - 4\nu} \xi y \frac{2x(x + \xi) + (1 - 2\nu)r_2^2}{r_2^4},$$

$$\bar{u}_x(x, y) = mW\xi \left[\frac{x(x + \xi)}{(3 - 4\nu)r_2^2} - \left(\ln r_2 - \frac{1}{2} \right) \right],$$

$$\bar{u}_y(x, y) = \frac{mW\xi}{3 - 4\nu} \frac{xy}{r_2^2}. \quad (10)$$

Гладко закріплена межа:

$$u_x(0, y) = 0, \quad \sigma_{xy}(0, y) = 0.$$

Тоді

$$\varphi(x, y) = -mW\xi [(x + \xi)(\ln r_2 - 1 + \\ + (1 - 2\nu)/(4(1 - \nu)) - y \operatorname{arctg}(y/(x + \xi))],$$

$$\psi(x, y) = -mW\xi/(4(1 - \nu));$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xx}(x, y) = -\bar{\bar{\sigma}}_{yy}(x, y) = -2GmW\xi(x + \xi)/r_2^2,$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xy}(x, y) = -2GmW\xi y/r_2^2,$$

$$\bar{u}_x(x, y) = -mW\xi(2 \ln r_2 - 1)/2,$$

$$\bar{u}_y(x, y) = mW\xi \operatorname{arctg}(y/(x + \xi)). \quad (11)$$

Гнучко закріплена межа:

$$u_y(0, y) = 0, \quad \sigma_{xx}(0, y) = 0.$$

Як видно з (7), ці крайові умови виконуються автоматично.

Результати розрахунків та їх аналіз

Нехай в області тепловиділення L задані джерела тепла сталої інтенсивності $w(x) = w_0$, тоді з (2), (6), (9)-(11) отримаємо аналітичні вирази для визначення температури, переміщень і напружень. Наведемо вирази для температури і нормальних напружень в області тепловиділення:

$$T(x) = \frac{w_0}{2\pi\lambda} \left[b \ln \left| \frac{x+b}{x-b} \right| - a \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| - x \ln \left| \frac{x^2 - a^2}{x^2 - b^2} \right| \right],$$

— вільна від навантажень межа

$$\sigma_{yy}(x, 0) = Gm \left[-T(x) + \frac{w_0}{\pi\lambda} (2(b - a) - \right. \\ \left. - 3x \ln \frac{x+b}{x+a} + x^2 \frac{b-a}{(x+a)(x+b)}) \right],$$

— жорстко закріплена межа

$$\sigma_{yy}(x, 0) = -Gm \left[T(x) + \frac{w_0}{\pi\lambda} \frac{1}{3 - 4\nu} (2\nu(b - a) - \right. \\ \left. - (1 + 2\nu)x \ln \frac{x+b}{x+a} + x^2 \frac{b-a}{(x+a)(x+b)}) \right],$$

— гладко закріплена межа

$$\sigma_{yy}(x, 0) = Gm \left[-T(x) + \frac{w_0}{\pi\lambda} \left((b-a) - x \ln \frac{x+b}{x+a} \right) \right],$$

— гнучко закріплена межа $\sigma_{yy}(x, 0) = -GmT(x)$.

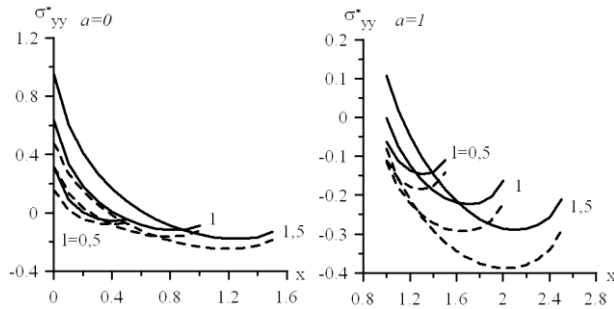


Рис.2 Розподіл нормальних напружень при віддаленні області тепловиділення від межі

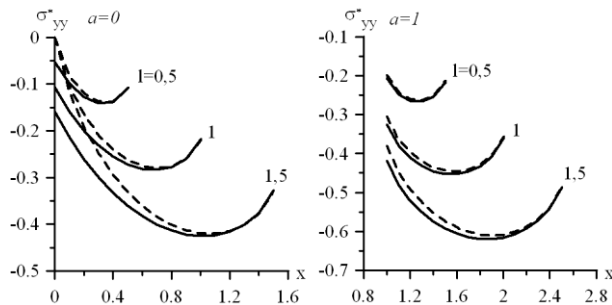


Рис.3 Розподіл нормальних напружень при віддаленні області тепловиділення від межі

На рис. 2, рис. 3 наведено розподіл нормальних напружень $\sigma_{yy}^* = \lambda \sigma_{yy} / (Gmw_0)$ в області тепловиділення ($a \leq x \leq b$) при її віддаленні від межі ($a = 0; 1$), коли довжина області тепловиділення l рівна 0,5; 1; 1,5.

На рис. 2 суцільними лініями зображено значення нормальних напружень, коли межа тіла вільна від навантажень, а штриховими – гладко закріплена. Коли область тепловиділення близько розміщена до межі, то напруження спочатку розтягальні, а потім стискальні, а при віддаленні від межі стають повністю стискальні.

На рис. 3 суцільними лініями зображено значення нормальних напружень, коли межа тіла жорстко закріплена ($\nu = 0,3$), а штриховими – гнучко закріплена. Напруження всюди стискальні. При віддаленні від межі тіла температура та нормальні напруження зростають.

Висновки

Отримано замкнутий розв'язок двовимірної задачі термопружності для півбезмежного тіла, що нагрівається стаціонарним джерелом тепла, з вільною, жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею за нульової температури на ній.

Співвідношення для переміщень і напружень, які є відповідними функціями Гріна, використані для визначення термопружного стану, зумовленого нагрівом тіла джерелами тепла, розподіленими по перпендикулярній до межі стрічковій області.

Список використаних джерел

1. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий. – М.: Изд-во "Мир", 1975. – 872 с.
2. Кит Г.С. Плоская деформация полубесконечного тела с перпендикулярной к его границе теплоактивной трещиной / Г.С. Кит, Н.М. Ивасько // Теоретическая и прикладная механика. – 2013. – Вып. 7 (53). – С. 30-37.
3. Kim Г.С. Двовимірна задача термопружності для півпростору за тепловиділення у паралельній до його межі стрічковій області / Г.С. Кит, Н.М. Івасько // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – 59, № 3. – С. 147-155.
4. Wang M.Z. Thermoelastic problems in the half space – An application of the general solution in elasticity / M.Z. Wang, K.F. Huang // Appl. Math. and Mech. – 1991. – Vol. 12, № 9. – P. 849–862.

References

1. NOWACKI W. (1962) *Thermoelasticity*. London: Pergamon Press.
2. KIT H.S., IVAS'KO N.M. (2013) Ploskaya deformatsyya polubeskonechnogo tela s perpendykulyarnoy k eho granitse teploaktivnoy treshchinoy. *Teoreticheskaya i prykladnaya mekhanika*. 7 (53). p. 30-37.
3. KIT H.S., IVAS'KO N.M. (2016) Dvovymirna zadacha termoprzhnosti dlya pivprostoru za teplovydilennya u paralel'niy do yoho mezhi strichkoviy oblasti. *Mat. metody ta fiz.-mekh. polya*. 59 (3). S. 147-155.
4. WANG M.Z., HUANG K.F. (1991) Thermoelastic problems in the half space – An application of the general solution in elasticity. *Appl. Math. and Mech.* Vol. 12, № 9. P. 849-862.

Надійшла до редколегії 29.08.17

УДК 539.3

Козачок О. П., к. ф.-м. н.,
Слободян Б. С., к. ф.-м. н., с. н. с.

**Вплив реального газу у міжконтактних
просвітах на взаємодію пружного тіла і
текстурованої квазіеліптичними
виїмками жорсткої основи**

Інститут прикладних проблем механіки і мате-
матики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б,
e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

O. P. Kozachok, Ph. D. (Phys.-Math.),
B. S. Slobodyan, Ph. D. (Phys.-Math.).

**The effect of a real gas in interfacial gaps on
the interaction between an elastic body and
textured quasielliptic grooves the rigid base**

Pidstryhach Institute of Applied Problems of Me-
chanics and Mathematics of NAS of Ukraine, 79060,
Lviv, Naukova str., 3-b,
e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

Розглянуто взаємодію пружного тіла та жорсткої основи за наявності в ній періодично розташованих виїмок квазіеліптичної форми, які заповнені реальним газом. Його стан описує рівняння Ван дер Ваальса, яке дає можливість враховувати фазовий перехід газу в рідину. Відповідна контактна задача зведена до системи двох рівнянь – сингулярного інтегрального рівняння з ядром Гільберта відносно висоти зазорів і трансцендентного рівняння для визначення тиску газу. Проаналізовано залежності контактного тиску, тиску газу, форми зазорів, контактного зближення та контактної податливості тіл від прикладеного навантаження і температури.

Ключові слова: контактна взаємодія, реальний газ, періодичний рельєф, виїмки, міжповерхневі просвіти, сингулярне інтегральне рівняння.

The interaction between an elastic body and a rigid base having periodically arranged quasielliptic grooves filled with a real gas is considered. The state of the gas is described by the van der Waals equation, which makes it possible to take into account the phase transition of gas to liquid. The corresponding contact problem is reduced to a system of two equations. One of them is a singular integral equation with the Hilbert kernel for a height of the gaps. It is transformed to a singular integral equation with a Cauchy kernel, which is solved analytically. The other is a transcendental equation for a gas pressure. On the basis of the obtained solution of this system, the dependences of the contact pressure, the gas pressure, the height of the gaps, the contact approach and the contact compliance of the bodies on the applied load and the absolute temperature of the real gas are analyzed. It is revealed that the contact approach and the gas pressure have a break and the contact compliance has a jump at the point of the phase transition start.

Key Words: contact interaction, real gas, periodic relief, grooves, interfacial gaps, singular integral equation.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

На контактну поведінку реальних тіл суттєво впливають їхня поверхнева структура та середовище в області розмежування. При контакті текстурованих тіл між ними виникають періодично розташовані міжконтактні просвіти, які у реальних умовах можуть заповнюватися рідиною чи газом, які чинять додатковий тиск на спряжені поверхні. Взаємодію тіл з поодинокими або періодично розташованими просвітами між ними, повністю заповненими стисливою або нестисливою рідиною, вивчали у працях [1-5]. Проте модель ідеального газу не завжди адекватно відтворює поведінку газоподібного заповнювача, зокрема за

великих тисків і низьких температур. Тому для дослідження впливу міжконтактного газу на взаємодію тіл в широкому діапазоні зміни зовнішніх чинників використали [6, 7] загальнішу модель реального газу Ван дер Ваальса. Вивчали [7] контакт тіл, локальний просвіт між якими заповнений реальним газом, тиск якого не перевищує тиску насиченої пари. Досліджено взаємодію тіл, одне з яких має локальну виїмку [6] гладкої форми, та тіл, межа одного з яких має періодичну систему гладких виїмок [8], коли під навантаженням у заповнювачі міжповерхневого просвіту відбувається фазовий перехід “газ–рідина”.

У цій статті досліджено взаємодію пружного

тіла з жорсткою основою за наявності в ній періодично розташованих квазіеліптичних виїмок, заповнених реальним газом.

2. Формулювання задачі

Розглянемо безфрикційний контакт пружного ізотропного півпростору з жорсткою основою, межа якої має періодичну систему розташованих з періодом d плитких тунельних виїмок ширини $2a$, форма яких описується парною функцією

$$r(x) = -A(1 - \operatorname{tg}^2(\pi x/d) / \operatorname{tg}^2(\pi a/d))^{1/2}, \quad (1)$$

такою, що $A \ll 2a$. Пружний півпростір притискається до основи під дією рівномірно розподіленого на нескінченності навантаження P^∞ і в ньому реалізується стан плоскої деформації. Внаслідок нерівності основи між тілами виникають просвіти висоти $h(x)$ (рис. 1). Вважаємо, що вони заповнені реальним газом, який залежно від навантаження і температури системи перебуває у газоподібному або рідкому стані. Кількість речовини у кожному просвіті є однаковою.

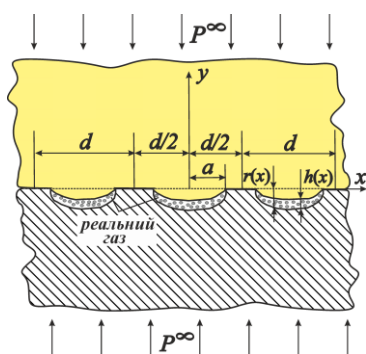


Рис. 1. Схема контакту тіл

Контактно-крайові умови сформульованої задачі мають вигляд:

- вздовж просвітів $|x - kd| < a$

$$\tau_{xy} = 0, \quad (2)$$

$$\sigma_{yy} = -P; \quad (3)$$

- на ділянках контакту $a \leq |x - kd| \leq d/2$

$$\tau_{xy} = 0, \quad \nu = 0; \quad (4)$$

- на нескінченності ($y \rightarrow \pm\infty$)

$$\sigma_{yy} = -P^\infty, \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (5)$$

Тут $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} – компоненти тензора напружень; ν – складова вектору переміщення вздовж осі Oy ; P – тиск газу.

Тиск реального газу P будемо описувати модифікованим рівнянням Ван дер Ваальса [8]:

$$P = \begin{cases} nRT / (V - nb_g) - n^2 a_g / V^2, & V < V_5 \cup V > V_2, \\ P_H, & V_5 \leq V \leq V_2, \end{cases} \quad (6)$$

де T – абсолютна температура; V і n – об'єм і кількість газу (в молях), які припадають на одиницю довжини зазору в поздовжньому напрямку, перпендикулярному до площини рис. 1; a_g , b_g – константи Ван дер Ваальса, що мають різні значення для різних газів; P_H – тиск насиченої пари; V_2 і V_5 – об'єм газу на початку та в кінці фазового переходу.

3. Методика розв'язування задачі

Використовуючи метод функцій між контактних зазорів [1], розв'язок сформульованої задачі подамо через висоту просвітів $h(x)$.

Для визначення $h(x)$ отримаємо [4] сингулярне інтегральне рівняння (СІР) з ядром Гільберта, яке після заміни змінних $\xi = \operatorname{tg}(\pi x/d)$, $\eta = \operatorname{tg}(\pi t/d)$, $\alpha = \operatorname{tg}(\pi a/d)$ трансформується у СІР з ядром Коші

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'(\eta) - r'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = \frac{dK(P^\infty - P)}{2(1 + \xi^2)}, \quad |\xi| \leq \alpha, \quad (7)$$

де $K = 2(1 - \nu)/G$; G , ν – модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона матеріалу пружного тіла.

У крайніх точках просвітів повинні виконуватися умови рівності нулю висоти просвітів, які запишемо в еквівалентному вигляді так:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} h'(\eta) d\eta = 0, \quad h(-\alpha) = 0. \quad (8)$$

Запишемо форму виїмок (1) у нових змінних:

$$r(\xi) = -A\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}/\alpha. \quad (9)$$

Бачимо, що у нових змінних виїмки мають еліптичну форму. Тому виїмки, що описуються функцією (1), називатимемо квазіеліптичними.

Після врахування функції (9) в СІР (7) воно набуде вигляду:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = \frac{d}{2(1 + \xi^2)} K(P^\infty - P) - \frac{A\pi}{\alpha}, \quad |\xi| \leq \alpha. \quad (10)$$

У зв'язку з наявністю на межі основи кутових точок шукатимемо необмежений у точках $\xi = \pm\alpha$ розв'язок рівняння (10), який з урахуванням першої з умов (8) має вигляд:

$$h'(\xi) = \frac{Kd(P^\infty - P)\xi\sqrt{\alpha^2 + 1}}{2\pi(1 + \xi^2)\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}} - \frac{A}{\alpha} \frac{\xi}{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}. \quad (11)$$

Проінтегрувавши функцію (11) з використан-

ням другої з умов (8), визначаємо висоту зазору $h(\xi)$. Підставивши її у вираз для об'єму зазорів $(V = l \int_{-a}^a h(x) dx = \frac{ld}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h(\xi)}{1 + \xi^2} d\xi, \text{ де } l = 1 \text{ м}),$ отримаємо:

$$V = -\frac{Kld^2(P^\infty - P_1)}{4\pi} \ln(\alpha^2 + 1) + \frac{Ald}{\alpha} (\sqrt{\alpha^2 + 1} - 1).$$

Підставляючи V у модифіковане рівняння Ван дер Ваальса (6), отримаємо рівняння для визначення тиску заповнювача зазорів P .

Через висоту міжконтактних зазорів визначаємо важливі для інженерних розрахунків контактної взаємодії тіл з регулярним рельєфом ефективні контактні параметри – контактне зближення тіл [5] Δv^∞ та контактну податливість [4] k^* .

У нашому випадку контактне зближення тіл матиме вигляд

$$\Delta v^\infty = Kd(P^\infty - P_1) \ln(\alpha^2 + 1) / [4\pi], \quad (12)$$

а контактну податливість k^* тіл визначатимемо як похідну контактного зближення за зовнішнім навантаженням $k^* = d(\Delta v^\infty) / dP^\infty$.

4. Результати розрахунків та їх аналіз

Розрахунки проведені для наступних даних: $v = 0.47$; $E = 8 \text{ МПа}$; $A = 0.01 \text{ м}$; $d = 1 \text{ м}$; $a_g = 0.555 \text{ Дж} \cdot \text{м}^3 / \text{моль}$; $b_g = 3.05 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 / \text{моль}$; $n = 1.2 \cdot 10^{-3} \text{ моль}$; $2a = 0.5 \text{ м}$ (суцільні криві) і $2a = 0.6 \text{ м}$ (штрихові криві) та для трьох різних температур T . На рис. 3-5 точки S_1 на кривих відповідають початку процесу фазового переходу газ-рідина при температурі $T = 290 \text{ К}$.

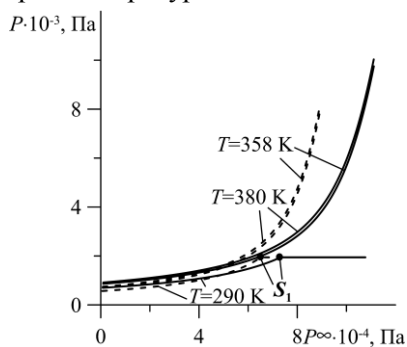


Рис. 2. Тиск газу

Розглянуто діапазон зовнішнього навантаження $P_0^\infty < P^\infty < P_N^\infty$, де P_0^∞ – навантаження, за якого тіла починають контактувати; P_N^∞ – навантаження, за якого починається контакт поверхонь тіл в центрі зазорів (тобто $h(x) = 0$ при $x = kd$).

На рис. 2 проілюстровано залежність тиску заповнювача зазорів P від навантаження P^∞ для різної температури T . Зі збільшенням навантаження і температури тиск газу збільшується. При навантаженні $P_0^\infty < P^\infty < 5 \cdot 10^4 \text{ Па}$ тиск газу є більшим для вузьких виїмок, а при $P^\infty > 5 \cdot 10^4 \text{ Па}$ – для ширших виїмок. До початку контакту поверхонь тіл посередині зазорів спостерігається початок фазового переходу газ-рідина лише при $T = 290 \text{ К}$ в точках S_1 .

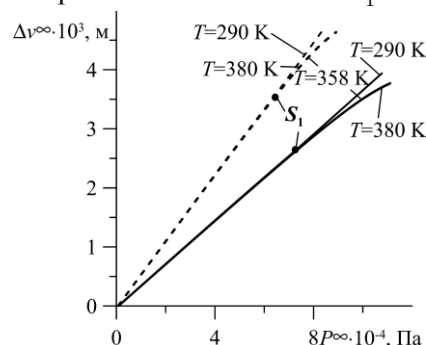


Рис. 3. Контактне зближення тіл

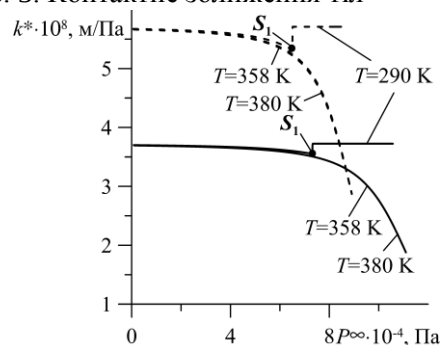


Рис. 4. Контактна податливість тіл

Залежність контактного зближення Δv^∞ та контактної податливості k^* тіл від зовнішнього навантаження P^∞ за різних температур T зображено на рис. 3 та рис. 4 відповідно. При збільшенні температури контактне зближення та контактна податливість тіл зменшуються. При збільшенні навантаження контактне зближення збільшується, а контактна податливість зменшується. Чим більша ширина виїмок, тим контактне зближення і контактна податливість є більшими. На рис. 3 у точках S_1 є злом, проте він малопомітний, а на рис. 4 контактна податливість у цих точках має стрибок. За навантаження $P^\infty = 8.5 \cdot 10^4 \text{ Па}$ у випадку виїмок ширини $2a = 0.6 \text{ м}$ при збільшенні температури від $T = 290 \text{ К}$ (коли зазори містять насичену пару) до $T = 358 \text{ К}$ (коли зазори містять газ) контактна податливість тіл зменшується на 58%.

5. Висновки

Досліджено контактну взаємодію пружного тіла та жорсткої основи, межа якої має періодичну систему квазіеліптичних плитких виїмок, коли міжконтактні зазори заповнені реальним газом, стан якого описується рівнянням Ван дер Ваальса, що дає можливість врахувати фазовий перехід газу в рідину. Сформульовану контактну задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння з ядром Гільберта відносно похідної від

висоти міжконтактних просвітів, яке було трансформовано у СІР з ядром Коші, та трансцендентного рівняння відносно тиску газу в просвітах. На основі отриманого розв'язку досліджено залежності контактних параметрів від прикладеного навантаження і температури. Виявлено, що на початку фазового переходу графіки залежності тиску газу та контактного зближення від навантаження мають зломи, а контактної податливості – стрибки.

Список використаних джерел

1. Martinyak R. M. Contact interaction between two half-spaces in the presence of a surface recess partially filled with an incompressible liquid / R. M. Martinyak // *Sov. Mater. Sci.* – 1990. – 26, №2. – P. 205–208.
2. Martynyak R. M. Contact of elastic half-spaces in the presence of an elliptic gap filled with liquid / R. M. Martynyak, B. S. Slobodyan // *Mater. Sci.* – 2009. – Vol. 45, № 1. – P. 66–71.
3. Kuznetsov Ye. A. Effect of fluid lubricant on the contact characteristics of rough elastic bodies in compression / Ye. A. Kuznetsov // *Wear.* – 1985. – Vol. 102, № 3. – P. 177–194.
4. Козачок О. П. Взаимодействие упругих тел с периодическим рельефом при наличии жидкостных мостиков в межконтактных зазорах / О. П. Козачок, Б. С. Слободян, Р. М. Мартыняк // *Теоретическая и прикладная механика.* – 2013. – Т. 7, № 53. – С. 45–52.
5. Kozachok O. P. Contact of elastic bodies in the presence of gas and incompressible liquid in periodic interface gaps / O. P. Kozachok, R. M. Martynyak, B. S. Slobodyan // *Mater. Sci.* – 2016. – Vol. 51, No. 6. – P. 804–813.
6. Кит Г. С. Влияние газожидкостного заполнителя меоконтактного пространства на напряженное состояние сопряженных тел / Г. С. Кит, Р. М. Мартыняк, И. М. Мачишин // *Прикл. мех.* – 2003. – 39, № 3. – С. 52–60.
7. Мачишин И. М. Контакт пружного півпростору і жорсткої основи з виїмкою, заповненою газом / И. М. Мачишин, Р. М. Мартыняк // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2000. – 43, № 4. – С. 103–107.
8. Kozachok O. P. Interaction of two elastic bodies in the presence of periodically located gaps filled with a real gas / O. P. Kozachok, R. M. Martynyak, B. S. Slobodian // *J. Math. Sci.* – 2017. – 222, No. 2. – P. 131–142.

References

1. MARTINYAK, R. M. (1990) Contact interaction between two half-spaces in the presence of a surface recess partially filled with an incompressible liquid. *Sov. Mater. Sci.* 26 (2). p. 205–208.
2. MARTYNYAK, R. M. & SLOBODYAN, B. S. (2009) Contact of elastic half-spaces in the presence of an elliptic gap filled with liquid. *Mater. Sci.* 45 (1). p. 66–71.
3. KUZNETSOV, Ye. A. (1985) Effect of fluid lubricant on the contact characteristics of rough elastic bodies in compression. *Wear.* 102 (3). p. 177–194.
4. KOZACHOK, O. P., SLOBODYAN, B. S. & MARTYNYAK, R. M. (2013) Vzaimodeystvie uprugikh tel s periodicheskim relefom pri nalichii zhidkostnykh mostikov v mezhkontaktnykh zazorakh. *Teoreticheskaya i Prikladnaya Mekhanika.* 7 (53). p. 45–52.
5. KOZACHOK, O. P., SLOBODYAN, B. S. & MARTYNYAK, R. M. (2016) Contact of elastic bodies in the presence of gas and incompressible liquid in periodic interface gaps. *Mater. Sci.* 51 (6). p. 804–813.
6. KIT, G. S., MARTYNYAK, R. M. & MACHISHIN, I. M. (2003) Vlyyanye hazozhydkostnoho zapolnyatelya mekontaktneho prostranstva na napryazhennoe sostoyanye sopryazhennikh tel. *Prykl. mekh.* 39 (3). p. 52–60.
7. MACHISHIN, I. M. & MARTYNYAK, R. M. (2000) Kontakt pruzhnoho pivprostoru i zhorstkoyi osnovy z vyyimkoyu, zapovnenoyu hazom. *Mat. metody ta fiz.-mekh. polya.* 43 (4). p. 103–107
8. KOZACHOK, O. P., SLOBODYAN, B. S. & MARTYNYAK, R. M. (2017) Interaction of two elastic bodies in the presence of periodically located gaps filled with a real gas. *J. Math. Sci.* 222 (2). p. 131–142.

Надійшла до редколегії 17.08.17

УДК 519.9

Колодій Ю.О., м.н.с.,
Турчин І.М., д.ф.-м.н., доц.,
Хома В.В., аспірант.

**Змішана нестационарна задача
теплопроводності для півбесконечного
циліндра з покриттям**

Львівський національний університет імені
Івана Франка, 79000, м. Львів, вул. Універси-
тетська, 1,
e-mail: ihorturchyn@gmail.com

Yu.O. Kolodij,
I.M. Turchyn, Dr. Sci., (Phys.-Math.),
V.V. Khoma, PhD student.

**The mixed unsteady heat conduction problem
for a half-infinite cylinder with coatings**

Ivan Franko National University of L'viv, 79000,
L'viv, Universytetska str., 1,
e-mail: ihorturchyn@gmail.com

Побудовано розв'язок нестационарної задачі теплопроводності для півбесконечного циліндричного тіла, що складається із теплоізованого суцільного циліндра та теплопроводного покриття, яке моделюється порожнистим циліндром. Задача розглядається за змішаних умов нагрівання: на частині покриття та на його торці задано розподіл температури, а на іншій частині покриття теплообмін за законом Ньютона. Розв'язок одержано із використанням інтегрального перетворення Лагерра за часовою змінною та перетворення Фур'є за просторовою змінною. Змішані умови задовольняються шляхом зведення задачі до послідовності парних інтегральних рівнянь, розв'язок яких будується методом рядів Неймана. Обґрунтовується збіжність методу та числових процедур його реалізації.

Ключові слова: нестационарна теплопроводність, змішані крайові умови, поліноми Лагерра, парні інтегральні рівняння.

Analysis of temperature fields in bodies with coatings is important for many engineering applications. The account of actual operating conditions of these structures frequently leads to mixed heating condition. The authors of this paper developed a new effective method of solutions derivation for mixed boundary-value unsteady heat conduction problems. This paper considers the cylinder with coating at the part of surface of which and in the end of cylinder the temperature distribution is known. Outside this area the heat transfer by Newton's law is performed.

To the heat conductivity problem it is applied the Laguerre integral transformation in time variables and integral Fourier transformation in spatial variable. As a result the triangular sequence of ordinary differential equations is obtained. The general solution of these sequences is obtained in the form of algebraic convolution. Taking into account the mixed boundary conditions leads to dual integral equations. For solution of this problem it is proposed the method of Neumann's series. By this method the problem is reduced to the infinite system of algebraic equations, for which the convergence of reduction procedure is proved. Finally, the unknown temperature is submitted as a series of Laguerre polynomials. The coefficient of these series is Fourier integrals.

Key Words: unsteady heat conduction problem; mixed boundary conditions; Laguerre polynomials; dual integral equations.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Тонкі покриття в сучасних інженерних об'єктах використовуються в якості захисних, теплоізолюючих елементів чи, навпаки, теплопроводних [1, 2]. Математичне моделювання процесу перенесення тепла в тонкостінних елементах часто використовує певні спрощення,

пов'язані із малою відносною товщиною покриття та однотипністю крайових умов на всій граничній поверхні покриття. У випадку, коли математичне моделювання процесу нагрівання чи взаємодії елемента конструкції із зовнішнім середовищем вимагає виконання на поверхні покриття крайових умов різного роду вказаний підхід зреалізувати вкрай важко.

При розв'язуванні нестационарних задач теплопровідності зі змішаними крайовими умовами з використанням методу інтегрального перетворення Лапласа дослідників чекають значні труднощі, пов'язані із розглядом так званих парних (дуальних) інтегральних рівнянь [3], які містять як незалежну змінну параметр перетворення за Лапласом.

Поряд із традиційними підходами до розв'язування квазістатичних задач термопружності неоднорідних тіл останнім часом одержав розвиток новий – метод поліномів Лагерра [4,5], який використовується в даній праці.

2. Постановка задачі та її розв'язання

Розглянемо півбесмежний неоднорідний циліндр, що складається з суцільного циліндра радіуса R_1 та нанесеного покриття у формі порожнистого циліндра із зовнішнім радіусом R_2 . З моменту часу $t = 0$ циліндр миттєво занурюється на глибину L в середовище, що має сталу температуру T^* . Нехтуючи процесом теплопровідності в середовищі та приповерхневими явищами біля границі циліндра будемо вважати, що в результаті цього занурення на торцевих поверхнях циліндра та покриття, а також на частині бічної поверхні зовнішнього циліндра вважається заданим часовий розподіл температури $T_c(t) = T^*(1 - \exp(-t_0 t))$, де t_0 – величина розмірності $[1/\text{sec}]$, яка визначає час стабілізації температури на поверхнях циліндра. Зовні ділянки $0 \leq z \leq L$ на поверхні покриття відбувається теплообмін за законом Ньютона із середовищем нульової температури. Вважатимемо, що коефіцієнт теплопровідності внутрішнього циліндра значно менший за коефіцієнт теплопровідності покриття і процесом

теплопровідності у внутрішньому циліндрі можна знехтувати. Зважаючи на це, задачу теплопровідності сформулюємо наступним чином:

$$\partial_{\rho\rho}^2 T + \rho^{-1} \partial_{\rho} T + \partial_{\gamma\gamma}^2 T = \partial_{\tau} T; \quad (1)$$

$$T(\rho, \gamma, 0) = 0; \quad (2)$$

$$T(\rho, 0, \tau) = T_c(\tau); \quad (3)$$

$$T(\rho_2, \gamma, \tau) = T_c(\tau), \quad 0 \leq \gamma \leq 1; \quad (4)$$

$$\partial_{\rho} T(\rho_2, \gamma, \tau) + Bi T(\rho_2, \gamma, \tau) = 0, \quad \gamma > 1; \quad (5)$$

$$\partial_{\rho} T(\rho_1, \gamma, \tau) = 0. \quad (6)$$

Тут $\rho = r/L$, $\gamma = z/L$ – безрозмірні змінні циліндричної системи координат, $\tau = a_T t / L^2$,

$Bi = \kappa d / \lambda_T$, $\rho_1 = R_1 / L$, $\rho_2 = R_2 / L$, λ_T, a_T – відповідно, коефіцієнт теплопровідності та температуропровідності зовнішнього циліндра (покриття); κ – коефіцієнт тепловіддачі з його поверхні.

До рівняння (1) застосуємо інтегральне перетворення Лагерра за змінною τ [4] та $\sin$ -перетворення Фур'є за змінною γ [6]. В результаті, враховуючи нульові початкові умови (2) та умови на торці (3) одержимо трикутну послідовність звичайних диференціальних рівнянь

$$\rho^{-1} d_{\rho} (\rho d_{\rho} \bar{T}_n) - \omega^2 \bar{T}_n = \lambda \sum_{m=0}^{n-1} \bar{T}_m - \xi T_{cn}, \quad (7)$$

У цих послідовностях $\omega^2 = \xi^2 + \lambda$, $\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = \int_0^{\infty} \exp(-\lambda \tau) \left[\int_0^{\infty} T_n^{(i)}(\rho, \gamma, \tau) \sin(\xi \gamma) d\gamma \right] L_n(\lambda \tau) d\tau$.

Аналогічно до результатів, одержаних в роботі [5], загальний розв'язок послідовностей (7) запишемо у вигляді

$$\bar{T}_n(\xi, \rho) = \sum_{j=0}^n [A_{n-j}(\xi) G_j(\xi, \rho) + B_{n-j}(\xi) W_j(\xi, \rho)] + Q_n, \quad (8)$$

де

$$Q_n = \frac{\xi}{\omega^2} \left\{ T_{cn} - \frac{\lambda}{\omega^2} \sum_{k=0}^{n-1} T_{ck} \left(\frac{\xi^2}{\omega^2} \right)^{n-1-k} \right\}, \quad (9)$$

а $G_j(\xi, \gamma)$, $W_j(\xi, \gamma)$ – лінійно незалежні фундаментальні розв'язки, які мають вигляд

$$G_j(\xi, \rho) = \sum_{k=0}^j a_{j,k} \rho^k I_k(\omega \rho)$$

$$W_j(\xi, \rho) = \sum_{k=0}^j a_{j,k} (-\rho^k) K_k(\omega \rho). \quad (10)$$

Коефіцієнти $a_{j,k}$ одержуються із рекурентних рівнянь:

$$a_{j,k+1} = \frac{\lambda}{2\omega(k+1)} \sum_{m=k}^{j-1} a_{m,k} \quad (11)$$

при довільних $a_{j,0}^{(i)}$ і $a_{j,k}^{(i)} \equiv 0$ при $k > j$. В подальших розрахунках покладемо $a_{0,0} = 1$, $a_{j,0}^{(i)} = 0, j \geq 1$.

Невідомі $A_n(\xi), B_n(\xi)$ знайдемо з умов (4)-(6). Розглянемо спочатку змішані умови (4),(5), які після застосування інтегрального перетворення Лагерра набудуть вигляду

$$T_n = T_{cn}, \gamma \leq 1; \partial_\gamma T_n + \text{Bi} T_n = 0, \gamma > 1. \quad (12)$$

Безпосереднє застосування $\sin$ -перетворення Фур'є до цих умов є неможливим, внаслідок їх різноманітності, тому поступимо традиційно для випадку змішаних умов - продовжимо другу умову (12) на всю вісь, увівши при цьому в розгляд невідому функцію $g_n(\gamma)$:

$$\partial_\rho T_n + \text{Bi} T_n = \begin{cases} g_n(\gamma), & \gamma \leq 1; \\ 0, & \gamma > 1. \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} b_{1,1} &= \omega I_1(\omega \rho_2) + \text{Bi} I_0(\omega \rho_2), \quad b_{1,2} = -\omega K_1(\omega \rho_2) + \text{Bi} K_0(\omega \rho_2), \quad b_{2,1} = \omega I_1(\omega \rho_1), \quad b_{2,2} = -\omega K_1(\omega \rho_1) \\ c_{1,n} &= \bar{g}_n(\xi) - \text{Bi} Q_n - \sum_{j=1}^n \left[A_{n-j}(\xi) (G'_j(\xi, \rho_2) + \text{Bi} G_j(\xi, \rho_2)) + B_{n-j}(\xi) (W'_j(\xi, \rho_2) + \text{Bi} W_j(\xi, \rho_2)) \right] \\ c_{2,n} &= - \sum_{j=1}^n \left[A_{n-j}(\xi) G'_j(\xi, \rho_1) + B_{n-j}(\xi) W'_j(\xi, \rho_1) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

Одержано рекурентний розв'язок систем (16), який містить функції $\bar{g}_n(\xi)$, які визначимо із змішаних умов (12). Із урахуванням формули

$$\int_0^\infty \xi^{-1} \bar{g}_n(\xi) [1 + f(\xi)] \sin(\xi \gamma) d\xi = -\frac{\pi}{2} T_{cn} + \int_0^\infty F_n(\xi) \sin(\xi \gamma) d\xi, \quad 0 \leq \gamma \leq 1 \quad (18)$$

$$\int_0^\infty \bar{g}_n(\xi) \sin(\xi \gamma) d\xi = 0, \quad \gamma > 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (19)$$

де $\bar{g}_n(\xi)$ - шукана функція, $f(\xi)$ та $F_n(\xi)$ - відомі.

Для побудови розв'язку послідовностей парних інтегральних рівнянь (18), (19) подамо шукану функцію $\bar{g}_n(\xi)$ у вигляді ряду Неймана [5]

$$\bar{g}_n(\xi) = \sum_{k=0}^\infty a_{n,k} J_{2k+1}(\xi). \quad (20)$$

Безпосередньою підстановкою легко пересвідчитись, що рівняння (19) задовольняється тотожно при довільних коефіцієнтах $a_{n,k}$, а з рівняння (20) одержуємо послідовності безмежних систем лінійних алгебричних рівнянь

Після застосування до (13) $\sin$ -перетворення Фур'є одержимо

$$\partial_\rho \bar{T}_n + \text{Bi} \bar{T}_n = \bar{g}_n(\xi), \quad \rho = \rho_2. \quad (14)$$

Застосування інтегральних перетворень Лагерра та Фур'є до умови (6) приводить до умови

$$\partial_\rho \bar{T}_n = 0, \quad \rho = \rho_1. \quad (15)$$

Безпосередня підстановка розв'язків (9) в умови (14)-(15) після виділення в лівій частині лише невідомих з нижнім індексом n приводить до систем алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} b_{1,1} A_n + b_{1,2} B_n = c_{1,n} \\ b_{2,1} A_n + b_{2,2} B_n = c_{2,n} \end{cases} \quad (16)$$

де

обернення для перетворення Фур'є одержано послідовності парних інтегральних рівнянь

$$\tilde{a}_{n,k} + \sum_{m=0}^\infty \tilde{a}_{n,m} b_{m,k} = c_{n,k} \quad (21)$$

де:

$$\tilde{a}_{n,k} = a_{n,k} (2k+1)^{-1/2};$$

$$b_{m,k} = 2\sqrt{2m+1}\sqrt{2k+1} \int_0^\infty \frac{f(\xi)}{\xi} J_{2m+1}(\xi) J_{2k+1}(\xi) d\xi$$

$$c_{n,k} = 2\sqrt{2k+1} \int_0^\infty \left[-\frac{\bar{T}_n^*(\xi)}{\sqrt{\xi}} + \frac{F_n(\xi)}{\xi} \right] J_{2k+1}(\xi) d\xi;$$

Використовуючи властивості рядів Неймана та розривних інтегралів Вебера-Шафхейтліна можна встановити, що

$$\sum_{m,k=0}^{\infty} (b_{m,k})^2 < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (c_{n,k})^2 < \infty. \quad (22)$$

Виконання умов (22) свідчить про квазі-регулярність систем (21) і забезпечує збіжність числової процедури їх редукції.

Знаходження невідомих $\tilde{a}_{n,k}$ з систем (21) завершує побудову розв'язку вихідної задачі теплопровідності.

Як відомо, при числовому розрахунку обернення $\sin$ -перетворення Фур'є для малих γ виникають труднощі обчислювального характеру, пов'язані із нерегулярною збіжністю відповідних інтегралів.

Для усунення цієї проблеми проведено їх регуляризацию, а розв'язок остаточно подається у вигляді

$$T^{(i)}(\rho, \gamma, \tau) = T^*(\tau)S_+(1-\gamma) + \lambda \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\lambda \tau) \int_0^{\infty} \left[T_n^{(i)}(\xi, \rho) - T_n^* \frac{1-\cos \xi}{\xi} \right] \sin(\xi \gamma) d\xi. \quad (23)$$

Як свідчать проведені числові експерименти, таке подання значно покращує практичну збіжність інтегралів, особливо на границі покриття $\rho = \rho_2$ та при малих значеннях γ .

3. Висновки.

Розглянуто нестационарну задачу теплопровідності для півбесмежного неоднорідного тіла, що складається з двох циліндрів – внутрішнього суцільного теплоізолизованого циліндра та зовнішнього теплопровідного. На торцевій поверхні тіла та на частинах поверхні зовнішнього циліндра задана температура, а на решті поверхні покриття – теплообмін за законом Ньютона. Розв'язок

задачі будується із використанням інтегрального перетворення Лагерра за часовою змінною та перетворення Фур'є за просторовою змінною. У вигляді алгебричної згортки знайдено загальний розв'язок послідовностей диференціальних рівнянь, одержаних після застосування перетворень. Після задовольнення змішаних крайових умов одержано послідовності парних інтегральних рівнянь, розв'язок яких будується методом рядів Неймана. Остаточно розв'язок має вигляд рядів за поліномами Лагерра із коефіцієнтами у вигляді інтегралів Фур'є.

Список використаних джерел

1. Springer Handbook of Nanomaterials / Ed. R. Vajtai - Springer Science & Business Media, 2013 - 1221 p.
2. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю.М. Коляно – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
3. Sneddon I. Mixed Boundary-Value Problems in Potential Theory / I. Sneddon - North-Holl. Publ. Comp., Amsterdam, 1966. – 282 p.
4. Galazyuk V.A. Quasistatic thermal stress state of a layer with mixed heating conditions / V.A. Galazyuk, I.M. Turchin // Int. Appl. Mech. – 1998. – V.34, No 9. – P. 886-893.
5. Turchin I.M. Nonstationary end heating of a multilayer semiinfinite plate / I.M. Turchin // Journ. of Eng. Physics and Thermoph. – 2012. – Vol. 85, Iss. 6. – P. 1453-1462.
6. Sneddon I. Fourier transforms / I. Sneddon. – McCraw-Hill Book Company, New York, 1951. – 542 p.

References

1. VAJTAI, R. (Ed.) (2013) *Springer Handbook of Nanomaterials*. Springer Science & Business Media.
2. KOLYANO, Yu. M. (1992) *Metody teploprovodnosti i termouprugosti neodnorodnogo tela*. Kiev: Naukova Dumka.
3. SNEDDON, I. (1966) *Mixed Boundary-Value Problems in Potential Theory*. Amsterdam: North-Holland Publishers Company.
4. GALAZYUK, V. A. & TURCHIN, I. M. (1998) Quasistatic thermal stress state of a layer with mixed heating conditions. *Int. Appl. Mech.*, 34 (9), pp. 886-893.
5. TURCHIN, I.M. (2012) Nonstationary end heating of a multilayer semiinfinite plate. *Journ. of Eng. Physics and Thermoph.* 85 (6), pp. 1453-1462.
6. SNEDDON, I. (1951) *Fourie transforms*. New York: McCraw-Hill Book Company.

Надійшла до редколегії 15.09.17

УДК 539.3

Кривий О. Ф., д.ф.-м.н., проф.,
Архипенко К.М., к.ф.-м.н., доц.

Деякі крайові задачі для анізотропної чверть площини

Національний університет «Одеська морська
академія», 65029, м. Одеса, вул. Дідріхсона, 8,
e-mail: krivoy-odessa@ukr.net,
k_arkhipenko@ukr.net

O. F. Kryvyi, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
K. M. Arkhipenko, Ph.D. (Phys.-Math.).

Some boundary value problems for anisotropic quarter-plane

National University «Odessa Maritime Academy»,
65029, Odessa, Didrikhsona str., 8,
e-mail: krivoy-odessa@ukr.net,
k_arkhipenko@ukr.net

До розв'язання крайових задач анізотропної пружності для чверть площини розвинуто підхід, який базується на використанні властивостей простору узагальнених функцій повільного зростання. У зазначеному просторі за допомогою двомірного інтегрального перетворення Фур'є побудована система фундаментальних розв'язків. За допомогою останньої отримана система восьми граничних інтегральних співвідношень, які зв'язують граничні значення напружень та переміщень на гранях анізотропної чверть площини та дозволяють крайові задачі зводити безпосередньо до систем сингулярних інтегральних рівнянь з нерухомими особливостями. Зокрема, отримані системи сингулярних інтегральних рівнянь з нерухомими особливостями для першої основної і змішаної задачі для анізотропної чверть площини. Точні розв'язки цих систем отримані за допомогою інтегрального перетворення Мелліна. Досліджена асимптотика розв'язків у вершині чверть площини для різних анізотропних матеріалів.

Ключові слова: крайова задача, анізотропна чверть площини, узагальнені функції, точний розв'язок, асимптотика.

To solve the boundary value problems of anisotropic elasticity for anisotropic quarter-plane has developed the method, which has based on using the properties of the space of generalized functions with slowly growth. Using two-dimensional integral Fourier transform the system of fundamental solutions has constructed in the indicated space. With the help of the latter, has received the system of eight boundary integral relations that connects the boundary values of stresses and displacements on the faces of the anisotropic quarter-plane and allows the boundary value problems for the anisotropic quarter-plane to be reduced directly to systems of singular integral equations with fixed singularities. In particular, the systems of singular integral equations with fixed singularities have obtained for the first fundamental and mixed problems for the anisotropic quarter-plane. The exact solutions of these systems had found by integral Mellin transform. The asymptotic behavior of solutions has investigated in the vertex of quarter-plane for different anisotropic materials. It is established that the solutions of systems for both boundary value problems have integrated singularities in the vertex of the anisotropic quarter-plane. To determine the solutions singularity's indices the transcendental equations has received and the behavior of their roots is investigated.

Key Words: boundary value problem, anisotropic quarter-plane, generalized functions, exact solution, asymptotic behavior.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Плоскі задачі теорії пружності для ізотропних та анізотропних клина і чверть площини розглядалися багатьма авторами. Тут слід відзначити роботу [1], в якій за допомогою інтегрального перетворення Мелліна розв'язана змішана задача для ізотропного клина. Задача для

пружного квадранта розв'язана у роботі [2] шляхом зведення до систем сингулярних інтегральних рівнянь. У роботі [3] за допомогою інтегрального перетворення Мелліна розв'язана перша основна задача для анізотропного клина. У даній роботі до розв'язання крайових задач теорії пружності для анізотропної чверть площини застосовано підхід, запропонований у роботах [4-

10] до розв'язання задач для кусково-однорідних анізотропних необмежених тіл.

2. Постановка задачі та побудова фундаментальної системи розв'язків

Напружено деформований стан анізотропної чверть площини $(x, y) \in R_+^2 = L_+ \times L_+$, $L_+ = (0; +\infty)$ описується вектором $v = \{v_p(x, y)\}_{p=1,5} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, u, v\}$, граничні значення компонент якого на гранях чверть площини позначимо так:

$$\chi_k(x) = v_{k+1}(x, +0), k = \overline{1, 4}, x \in L_+, \quad (1)$$

$$\mu_1(y) = v_1(+0, y), \mu_k(y) = v_{k+1}(+0, y), k = \overline{2, 4}, y \in L_+.$$

Компоненти вектора v задовольняють рівнянням рівноваги та узагальненого закону Гука, які за відсутності об'ємних сил запишемо у вигляді ($\partial_1 = \partial / \partial x, \partial_2 = \partial / \partial y$):

$$M(\partial_1, \partial_2)v = 0, (x, y) \in R_+^2, \quad (2)$$

$$M(\partial_1, \partial_2) \equiv \begin{pmatrix} D & O \\ A & D^T \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & \partial_2 \\ 0 & \partial_2 & \partial_1 \end{pmatrix},$$

де $A = \{a_{ij}\}^3, a_{ij}$ – пружні сталі анізотропного матеріалу [11], O – нульова матриця 2×2 .

При постановці задачі анізотропної пружності на кожній грані чверть площини повинні бути відомі по дві функції з (1). Інші функції належить визначити при розв'язанні задачі. Відповідно до робіт [4-6] побудуємо систему фундаментальних розв'язків для анізотропної чверть площини.

Для реалізації зазначеного підходу перейдемо у простір узагальнених функцій повільного зростання: $\tilde{v} = \{\tilde{v}_j\}^5, \tilde{v}_j \in \mathfrak{Z}'(R_+^2)$. Використавши формули зв'язку між звичайними похідними $\partial_k (k=1, 2)$ й узагальненими $\tilde{\partial}_k (k=1, 2)$, а також граничні умови (1) отримаємо замість матричного диференціального рівняння (2) наступне матричне рівняння у просторі $\mathfrak{Z}'(R_+^2)$:

$$(M(\tilde{\partial}_1, \tilde{\partial}_2)\tilde{v}, \zeta) = (f, \zeta), \quad \zeta \in \mathfrak{Z}(R_+^2), f = \{f_j\}^5, \quad (3)$$

$$f_1 = \chi_2(x)\delta(L_1) + \mu_1(y)\delta(L_2), f_3 = \mu_3(y)\delta(L_2),$$

$$f_2 = \chi_1(x)\delta(L_1) + \mu_2(y)\delta(L_2), f_4 = \chi_4(x)\delta(L_1),$$

$$f_5 = \chi_3(x)\delta(L_1) + \mu_4(y)\delta(L_2),$$

де $\delta(L_k) \in \mathfrak{Z}'(L_k)$ – узагальнена функція, зосереджена на півосі L_k , $L_1 = \{y = 0, x \in [0; +\infty)\}$, $L_2 = \{x = 0, y \in [0; +\infty)\}$.

Відповідно до робіт [4-10] розв'язок рівняння (3) отримаємо за допомогою системи фундаментальних розв'язків, під якою будемо розуміти систему векторів $v_j^0 = \{v_{kj}^0\}_1^5, j = \overline{1, 8}$, $v_{kj}^0 \in \mathfrak{Z}'(R_+^2)$, які задовольняють наступним матричним диференціальним рівнянням:

$$(M(\tilde{\partial}_1, \tilde{\partial}_2)v_j^0, \zeta) = (f_j^0, \zeta), \quad \zeta \in \mathfrak{Z}(R_+^2), (j = \overline{1, 8}), \quad (4)$$

$$f^0 = \{f_j^0\}^5, f_1^0 = \delta_{2j}\delta(x - x_0, y) + \delta_{5j}\delta(x, y - y_0),$$

$$f_2^0 = \delta_{1j}\delta(x - x_0, y) + \delta_{6j}\delta(x, y - y_0),$$

$$f_3^0 = \delta_{7j}\delta(x, y - y_0), f_4^0 = \delta_{4j}\delta(x - x_0, y),$$

$$f_5^0 = \delta_{3j}\delta(x - x_0, y) + \delta_{8j}\delta(x, y - y_0),$$

де δ_{kj} – символ Кронекера. Носієм узагальнених функцій $\tilde{v}_j, v_{kj}^0$ є область R_+^2 , тобто $\text{supp}(\tilde{v}_j, v_{kj}^0) = R_+^2$. Останнє дає можливість за допомогою двовимірного перетворення Фур'є отримати явні вирази для компонент векторів v_j^0 . При цьому вирази для напружень і переміщень у просторі $\mathfrak{Z}'(R_+^2)$ подамо у вигляді згортки:

$$\tilde{v}_k = \sum_{j=1}^4 [\chi_j(x) * v_{kj}^0(x, y) + \mu_j(y) * v_{k,4+j}^0(x, y)]. \quad (5)$$

Реалізація за допомогою подань (5) умов (1), приведе до інтегральних співвідношень на гранях анізотропної чверть площини:

$$\sum_{j=1}^2 \{A_{pj}^1 \chi_j(x) + B_{pj}^1 K_x[\chi_j] + A_{p,2+j}^1 \chi'_{2+j}(x) + \quad (6)$$

$$+ B_{p,2+j}^1 K_x[\chi'_{2+j}] + \text{Im} \sum_{k=1}^2 (C_{pj}^1(z_k) \Gamma_x^k[\mu_j] +$$

$$+ C_{p,2+j}^1(z_k) \Gamma_x^k[\mu'_{2+j}])\} = 0, p = \overline{1, 4}, x \in L_1;$$

$$\sum_{j=1}^2 \{A_{pj}^2 \mu_j(y) + B_{pj}^2 K_y[\mu_j] + A_{p,2+j}^2 \mu'_{2+j}(y) +$$

$$+ B_{p,2+j}^2 K_y[\mu'_{2+j}] + \text{Im} \sum_{k=1}^2 (C_{pj}^2(z_k) \Gamma_y^k[\chi_j] +$$

$$+ C_{p,2+j}^2(z_k) \Gamma_y^k[\chi'_{2+j}])\} = 0, p = \overline{1, 4}, y \in L_2;$$

$$\text{де } K_x[f] = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(t)dt}{t-x}, \quad \Gamma_x^k[f] = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(t)dt}{x-z_k t},$$

$\Gamma_y^k[f] = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(t)dt}{t-z_k y}$, $A_{pj}^l, B_{pj}^l, C_{pj}^l$ – сталі, які залежать від пружних сталих анізотропного

матеріалу [11].

3. Розв'язок першої основної та змішаної крайових задач

Інтегральні співвідношення (6) дозволяють крайові задачі для пружної анізотропної чверть площини зводити безпосередньо до систем СІР.

Зокрема, для першої основної задачі, тобто якщо на кожній грані чверть площини відомі напруження: $P_k(x)$, $Q_k(y)$, $k=1,2$, (Задача 1), відносно невідомих переміщень $\chi_k(x)$, $x \in L_1$, $\mu_k(y)$, $y \in L_2$, $k=3,4$, отримаємо систему СІР з нерухомими особливостями:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=3}^4 \{A_{mj}^1 \chi'_j(x) + B_{mj}^1 K_x[\chi'_j]\} + \\ & + \operatorname{Im} \sum_{k=1}^2 C_{mj}^1 \Gamma_x^k[\mu'_j] = F_m(x), m=1,2, \\ & \sum_{j=3}^4 \{A_{mj}^2 \mu'_j(y) + B_{mj}^2 K_y[\mu'_j]\} + \\ & + \operatorname{Im} \sum_{k=1}^2 C_{mj}^2 \Gamma_y^k[\chi'_j] = F_m(y), m=1,2. \end{aligned} \quad (8)$$

Розв'язок системи (8) отримано за допомогою перетворення Мелліна ($0 < \sigma < 1$)

$$\tilde{\chi}_j(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=1}^4 \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\sin \pi s \cdot M_{jl}(s) F_l(s)}{\det(M(s))} \cdot t^{-s} ds, \quad (9)$$

$$\tilde{\chi}_j(t) = \chi'_{j+2}(t), j=1,2; \tilde{\chi}_j(t) = \mu'_j(t), j=3,4;$$

$$\omega_{jl} = A_{j-2,l}^2 + iB_{j-2,l}^2, j,l=3,4;$$

$$M(s) = \{M_{jl}(s)\}^4; \omega_{jl} = A_{jl+2}^1 + iB_{jl+2}^1, j,l=1,2;$$

$$M_{jl}(s) = \operatorname{Im}(\omega_{jl} e^{i\pi s}); j,l=1,2; j,l=3,4;$$

$$M_{jl}(s) = \operatorname{Im} \sum_{k=1}^2 C_{jl}^1(z_k) (-z_k)^{s-1}; j=1,2; l=3,4;$$

$$M_{jl}(s) = \operatorname{Im} \sum_{k=1}^2 C_{j-2,l}^2(z_k) (-z_k)^{-s}; j=3,4; l=1,2;$$

де $F_j(s)$, $j=1,4$ – трансформанти Мелліна від правих частин системи (8).

При $t \rightarrow +0$ розв'язки системи (8) мають асимптотику: $\tilde{\chi}_j(t) \approx k_j t^{-\operatorname{Res}_1}$, де s_1 корінь з найбільшою дійсною частиною, при $\operatorname{Res} < 1$, трансцендентного рівняння

$$\det(M(s)) = 0, \operatorname{Res} < 1 \quad (10)$$

Аналогічний вигляд має система СІР для

змішаної крайової задачі (Задача2), коли на одній грані реалізовані умови повного зчеплення $\chi_k(x) = 0$, $x \in L_1$, $k=3,4$, а на іншій відомі напруження: $\mu_k(y) = P_k(y)$, $y \in L_2$, $k=1,2$.

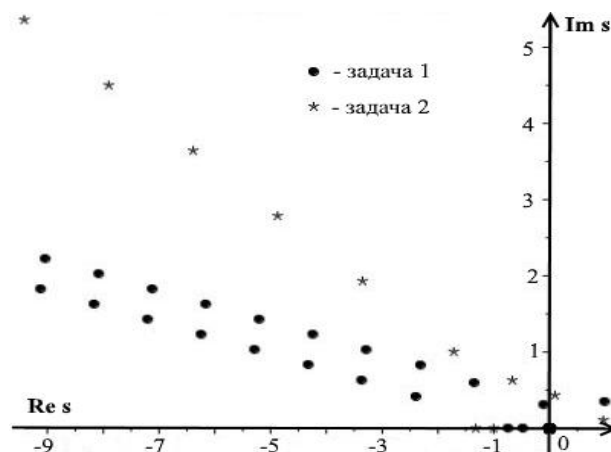


Рис. 1 Корені трансцендентного рівняння

4. Числовий аналіз результатів

Для обох розглянутих задач чисельний аналіз встановив, що для будь-якого анізотропного матеріалу рівняння (10) має принаймні один корінь, дійсна частина якого належить інтервалу $(0;1)$. Зокрема, для задачі 1 $s_1 = 0.9887 \pm 0.3482i$, для задачі 2 $s_1 = 0.964 \pm 0.1071i$. Отже ці задачі мають єдиний розв'язок у класі функцій з інтегрованою особливістю у нулі. Крім того, встановлено поведінку коренів трансцендентного рівняння (10) на нескінченості. А саме, для кожного анізотропного матеріалу можна знайти таке число s_* , що всі дійсні корені трансцендентного рівняння (10) належать інтервалу $(-s_*;1)$ та їх кількість n_* є обмеженою. Усі інші корені є комплексними та розташовані вздовж прямих, симетричних відносно дійсної осі. На рисунку 1 зображено розташування коренів для склопластику ортогонально-армованого [11] для обох задач.

Для задачі 1 всі корені при $\operatorname{Res} < 0$ розташовані з кроком $h_1 = 1.5137$ вздовж прямих: $z_1 = \operatorname{Res} \pm (0.0556 - 0.5553 \cdot \operatorname{Res})i$; i з кроком $h_2 = 0.6345$ вздовж прямої $z_2 = \operatorname{Res} \pm (0.0111 - 0.2324 \operatorname{Res})i$. Для задачі 2 всі корені при $\operatorname{Res} < -s_* = -1.34$ розташовані вздовж прямих $z = \operatorname{Res} \pm (0.0349 - 0.5655 \cdot \operatorname{Res})i$ з кроком $h = 1.5137$.

Запропонована методика може бути застосована і до інших крайових задач для анізотропної чверть площини.

Список використаних джерел

1. Уфлянд Я. С. Смешанная задача теории упругости для клина / Я.С. Уфлянд // Изв. АН СССР, ОТН, сер. мех. и маш. – 1959. – № 2. – С. 156-158.
2. Hanson M. T. Stress analysis and contact problems for an elastic quarter-plane / M.T. Hanson, L.M. Keer // J. Mechanics Appl. Math. – 1989 – Vol. 42, №3. – P. 364-383.
3. Алексанян Р.К. К первой основной задаче плоской теории упругости для анизотропного клина / Р.К. Алексанян, С.Х. Геворкян // Изв. АН Армении. Мех. – 2000. – Т. 53, № 2. – С. 10-15
4. Кривой А.Ф. Особенности поля напряжений возле включений в составной анизотропной плоскости / А.Ф. Кривой, М.В. Радиолло // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1984. – №3. – С.84-92.
5. Кривой А.Ф. Произвольно ориентированные дефекты в составной анизотропной плоскости / А.Ф. Кривой // Вісн. Одеськ. держ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2001. – Т. 6, № 3. – С. 108-115.
6. Кривой А.Ф. Фундаментальное решение для четырех составной анизотропной плоскости / А.Ф. Кривой // Вісн. Одеськ. держ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2003. – Т. 8, № 2. – С. 140-149.
7. Krivoi A.F. Interface tunnel cracks in a composite anisotropic space. / A.F. Krivoi, G.Ya. Popov // Journal of App. Math. and Mechanics. – 2008. – Vol. 72, Issue 4. – P. 499-507.
8. Krivoi A.F. Features of the stress field near tunnel inclusions in an inhomogeneous anisotropic space / A.F. Krivoi, G.Ya. Popov // International Applied Mechanics. – 2008. – Vol. 44, Issue 6. – P. 626-634.
9. Kryvyi O.F. Tunnel internal crack in a piecewise homogeneous anisotropic space / O.F. Kryvyi // Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – Vol. 198, Issue 1. – P. 62-74.
10. Kryvyi O.F. Mutual influence of an interface tunnel crack and an interface tunnel inclusion in a piecewise homogeneous anisotropic space / O.F. Kryvyi // Journal of Mathematical Sciences. – 2015. – Vol. 208, Issue 4 – P.409-416.
11. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – Москва: Наука, 1977. – 415с.

References

1. UFLYAND, Ya. S. (1959) Smeshannaya zadacha teoryy uprugosti dlya klyna. *Izvestiya AN SSSR, OTN, Ser. Mech. and Mash.* 2. p. 156-158.
2. HANSON, M. T. and KEER, L. M. (1989) Stress analysis and contact problems for an elastic quarter-plane. *J. Mechanics Appl. Math.* 42 (3). p. 364-383.
3. ALEKSANYAN, R. K. and GEVORKYAN, S. Kh. (2000) K pervoy osnovnoy zadache ploskoy teoryy uprugosti dlya anyzotropnoho klyna. *Izvestiya AN Armenii. Mech.* 53 (2). p. 10-15.
4. KRYVYI, O. F. and RADIOLO, M. V. (1984) Osobennosti polya napryazhenyy vozle vkluychenyy v sostavnoy anyzotropnoy ploskosti. *Proc. AS USSR. Mechanics of solid.* 3. p. 84-92.
5. KRYVYI, O. F. (2001) Proyzvol'no oryentyrovannyye defekty v sostavnoy anyzotropnoy ploskosti. *Vest. Odessa State Univ. Ser. Phys. and Math. Science.* 6 (3). p. 108-115.
6. KRYVYI, O. F. (2003) Fundamental'noye resheniye dlya chetyreh sostavnoy anyzotropnoy ploskosti. *Vest. Odessa State Univ. Ser. Phys. and Math. Science.* 8 (2). p. 140-149.
7. KRIVOI, A. F. and POPOV, G. Ya. (2008) Interface tunnel cracks in a composite anisotropic space. *J. of Appl. Math. and Mech.* 72 (4). p. 499-507.
8. KRIVOI, A. F. and POPOV, G. Ya. (2008) Features of the stress field near tunnel inclusions in an inhomogeneous anisotropic space. *International Applied Mechanics.* 44 (6). p. 626-634.
9. KRYVYY, O. F. (2014) Tunnel internal crack in a piecewise homogeneous anisotropic space *J. of Mathematical Sciences.* 198 (1). p. 62-74.
10. KRYVYI, O. F. (2015) Mutual influence of an interface tunnel crack and an interface tunnel inclusion in a piecewise homogeneous anisotropic space. *J. of Mathematical Sciences.* 208 (4). p. 409-416.
11. LEHNITSKY, S. G. (1977) *Teoryya uprugosti anyzotropnoho tela.* Moscow: Nauka.

Надійшла до редколегії 27.08.17

УДК 539.4:624.012

Кундрат М. М.¹, д. т. н., проф.,
Заблотська Ю. В.¹

**Періодична система гнучких
співдотичних підсилень для
півбезмежної пластини**

¹ Національний університет водного господарства та природокористування, 33028, м. Рівне, вул. Соборна, 11
e-mail: kundrat@i.ua

M. M. Kundrat¹, Dr. Sci. (Tech.), Prof.,
Yu. V. Zablotska¹

**Periodic system of the flexible
contacting reinforcements for
semi-infinite plate**

¹ National University of Water Management and Natural Resources Use, 33028, Rivne, Soborna str., 11
e-mail: kundrat@i.ua

За умов плоскої задачі теорії пружності досліджується гранична рівновага та умови відшарування півбезмежної пластини з періодичною системою співдотичних нерозтягливих гнучких підсилень за дії розтягуючого навантаження на пластину. Локалізовані зони передруйнування (ослабленого контакту) розвиваються уздовж межі пластина-підсилення в околах їх кінців, просуваючись від кожного краю до центральної частини підсилення. Обчислено розміри зон передруйнування, розподіли контактних напружень під підсиленнями, розривні осьові зусилля у підсиленнях.

Ключові слова: півбезмежна пластина, підсилення, зона передруйнування, контактні напруження.

The limiting equilibrium of the semi-infinite plate with the system of periodic contacting flexible reinforcements has been investigated according to conditions the plane problem elasticity theory. Stretching stresses are applied to the plate parallel to the edge. Mathematical model foresees the two-phase zone of prefracture. Localized zones of prefracture (weakened contact) are developed along the plate-reinforcements boundaries in the vicinity of their ends and moving from the each tips to centers of reinforcements. They can correspond to regions of damages, plastic deformation, partial break of connection and another. On area outside of zones of prefracture the perfect mechanical contact is remaining. Analytical solution of the problem is obtained through complex potentials and reduced to the problem of conjugation with piecewise continuous coefficients. Physically correct limited stresses and deformations are received in all points of a composition. Tangents stresses also satisfy to relationship of pair law. The dimensions of eventual zones of prefracture, distribution of contact tensions under the reinforcements and breaking axial forces in the reinforcements are calculated. Basic part of loading from reinforcements to plate is transfer in neighbourhood of reinforcements ends. Load for possible exfoliation of reinforcements or their rupture are obtained.

Key Words: semi-infinite plate, reinforcement, prefracture zone, contact stresses.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Задача розрахунку підсилюючих елементів як одного із поширених засобів ремонту та відновлення працездатності інженерних конструкцій, зважаючи на те, що велика кількість відповідальних матеріаломістких конструкцій України близька до вичерпання свого проектного ресурсу, залишається на часі. Необхідна наукова експертиза можливості їх безпечної експлуатації і визначення засобів рентабельного продовження функціонування. Використовувані підкріплюючі елементи одночасно є й потужними концентраторами напружень і спричиняють нелінійні та пластичні деформації чи розвиток зон розпушення, що в значній мірі ускладнює прогноз гранич-

ної рівноваги системи в цілому.

Розрахункова модель для аналізу напружено-деформованого стану пружного тіла з підкріпленням розвинута в працях [1–3] та застосована нижче для півбезмежного тіла з системою співдотичних нерозтягливих підсилень. Пропонований підхід дав можливість уникнути сингулярності напружень на краях підсилення і отримати механічно коректні обмежені напруження у всіх точках композиції.

2. Постановка задачі

Розглядаємо задачу теорії пружності для півбезмежного тіла, яке розтягується на нескінченності напруженнями паралельно до краю (рис. 1). На відрізках $[-a + 2na, a + 2na]$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

тіло підкріплено періодичною системою скінченної міцності на розрив P_{ut} підсилень завдовжки $2a$, що співдотикаються. Приймаємо, що локалізовані зони передруйнування просувуються від кожного краю до центральної частини уздовж межі тіло-підсилення і складаються з двох фрагментів: ділянки розпушення $L_1 \approx b \leq |x - 2na| \leq a$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ та ділянки пластичного деформування $L_2 \approx c \leq |x - 2na| \leq b$. У зонах передруйнування виконуються такі крайові умови: на ділянках розпушення (ослабленого контакту) дотичні напруження лінійно зростають від нуля до свого граничного значення τ_s^* –

$$\sigma_{xy}(x) = \tau_s^* \frac{a - |x - 2na|}{a - b} \text{sign}(x - 2na), (x \in L_1), (1)$$

а на ділянках пластичного деформування

$$\sigma_{xy}(x) = \tau_s^* \text{sign}(x - 2na), (x \in L_2). (2)$$

Тут τ_s^* – адгезійна зсувна міцність контактної межі тіло-підсилення, а при пластичному деформуванні – її зсувний поріг пластичності; σ_{ij} –

компоненти тензора напружень. Значення параметра c знаходимо з додаткової фізичної умови, а b задаємо – його доцільно пов'язати з розмірами структурних елементів (зерен) матеріалу адгезійного прошарку. Запровадження у такий спосіб зони передруйнування дає можливість отримати обмежені напруження в усіх точках композиції, які задовольняють також і закон парності дотичних напружень.

На відрізках $L_0 \approx |x - 2na| \leq c$ пружного деформування зберігається ідеальний контакт і тому деформації там відсутні

$$\partial u(x)/\partial x = 0, (x \in L_0), (3)$$

де u, v – компоненти вектора переміщень у напрямках осей Ox та Oy відповідно. Напруження на нескінченності

$$\sigma_{xx}^\infty = q, \quad \sigma_{yy}^\infty = \sigma_{xy}^\infty = 0. (4)$$

При таких допущеннях знайдемо величину і характер розподілу контактних напружень та осевих розривних зусиль у підсиленнях, довжину локалізованих зон передруйнування.

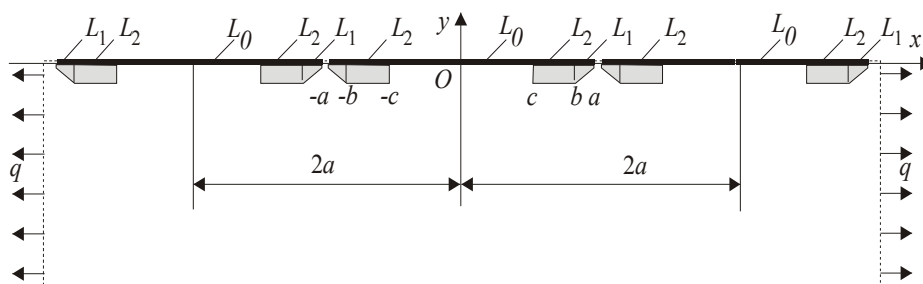


Рис. 1. Схема задачі

3. Побудова розв'язку задачі

Використовуємо відомі подання для напружень і деформацій через комплексні потенціали Колосва-Мусхелішвілі

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 4 \text{Re} \Phi(z), \\ \sigma_{yy} - i\sigma_{xy} &= \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\Phi'(z), \end{aligned} (5)$$

$$2G \partial(u + iv)/\partial x = \kappa \Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\Phi'(z), (6)$$

де $z = x + iy$; $\kappa = (3 - \mu)/(1 + \mu)$ для плоского напруженого стану; $\kappa = 3 - 4\mu$ в умовах плоскої деформації; G, ν – модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона матеріалу тіла. Функція $\Phi(z)$ буде кусочно аналітичною періодичною (з періодом $2a$), яку знайдемо після підставлення формул (4)–(6) у крайові умови (1)–(3):

$$\Phi(z) = \frac{f_4(a, b, c) \sin(\omega z)}{X(z)} + \frac{\tau_s^*}{2\pi} f_6(z, a, b, c), (7)$$

$$\text{де } f_4(a, b, c) = q/4 - (\tau_s^*/\pi) f_5(a, b, c),$$

$$f_5(a, b, c) = X_1(a, b) \left\{ \begin{aligned} &X(b) - X(a) + \ln \frac{1 + X(a)}{\sin(\omega c)} - \\ &-\sin(\omega b) \ln \frac{\sin(\omega b) + X(b)}{\sin(\omega c)} \end{aligned} \right\},$$

$$f_6(z, a, b, c) = X_1(a, b) \left\{ \begin{aligned} &\sin(\omega b) \Gamma_1(z, b, c) - \Gamma_1(z, a, c) + \\ &\sin(\omega z) (\Gamma_2(z, a, c) - \Gamma_2(z, b, c)) \end{aligned} \right\},$$

$$X(z) = \sqrt{\sin(\omega(z - c)) \sin(\omega(z + c))},$$

$$X_1(a, b) = [\sin(\omega(a - b)/2) \sin(\omega(a + b)/2)]^{-1},$$

$$\Gamma_1(z, c, a) = \ln(\zeta^-/\zeta^+), \quad \Gamma_2(z, c, a) = \ln(\xi^-/\xi^+),$$

$$\zeta^\pm = X(z) \sin(\omega z) \pm X(t) \sin(\omega z),$$

$$\xi^\pm = X(t) \pm X(z), \quad \omega = \pi/(2a).$$

Формули (5)–(7) цілком описують поля напружень та деформацій у тілі з підсиленнями і

дають можливість дослідити умови коректності розв'язку та обставини граничної рівноваги композиції.

4. Довжина зон передруйнування

Із умови обмеженості розв'язку (7) у вершинах зон передруйнування ($x = \pm c$), отримуємо нелінійне рівняння

$$q/(2\tau_s^*) - (2/\pi)f_5(a, b, c) = 0, \quad (8)$$

яке зв'язує довжину зон із навантаженням тіла та характеристиками композиції. За результатами обчислень на рис. 2 подано залежність загальної відносної довжини зон передруйнування $\varepsilon \equiv (a - c)/a$ від знерозміреного параметра навантаження $\tilde{q} = q/(2\tau_s^*)$, довжина ділянки розпушення $\gamma \equiv (a - b)/a = 10^{-6}$; лінією 2 подано такі ж результати [3] для не взаємодіючого підсилення. При $\tilde{q} < 0,5$ для співдотичних підсилень залежність між довжиною зон та навантаженням практично лінійна (лінія 1). За фіксованого рівня навантаження $\tilde{q} < 0,2$ ($\gamma = 10^{-6}$) найбільше відхилення довжини зони від результатів для одного підсилення дорівнює 315%.

Збільшення ділянки розпушення видовжує загальну довжину зони передруйнування, хоча сама ділянка пластичного деформування при цьому зменшується. З розвитком зон передруйнування абсолютна різниця між їх довжинами для різних γ зменшується, що пояснюється зростанням впливу ділянки пластичного деформування.

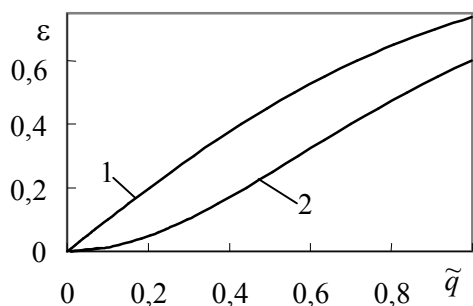


Рис. 2. Довжина зон передруйнування

5. Відшарування підсилень

На відміну від зон пружного контакту, де матеріал тіла нерозривно з'єднаний з підкріпленнями, на ділянках пластичного деформування та розпушення ($x \in L_1 \cup L_2$) відбувається зміщення (проковзування) точок матеріалу тіла стосовно підсилення. Інтегруванням у поданні (6) з урахуванням розв'язку (7) обчислюємо переміщення під підсиленнями:

$$u(x) = \frac{(\kappa + 1)\tau_s^*}{4\pi G} \int_c^x f_6(t, a, b, c) dt, \quad (x \leq a). \quad (9)$$

Із виразу (9) випливає, що зміщення точок тіла стосовно підсилення найбільші при $x = a + 2na$ (для $x = -a + 2na$ вони протилежні за знаком). Коли максимальні переміщення за формулою (9) $u(\pm a)$ досягають деякого граничного значення δ_{2c} , яке є характеристикою зсувної контактної міцності системи “тіло–підсилення” та з'ясується експериментально, то можлива втрата безпосереднього механічного зв'язку між тілом й підсиленням. Відповідна критеріальна умова

$$u(a) = \delta_{2c}, \quad (10)$$

що характеризує початок відшарування підсилення, аналогічна відомій δ_c -моделі.

Система рівнянь (8)–(10) описує стан граничної рівноваги композиції, коли можливе розшарування між підсиленнями й тілом, а її розв'язок дає значення відповідного цій ситуації граничного навантаження $q = q^*$.

За результатами здійснених на основі залежностей (9), (8) обчислень на рис. 3 подано (лінія 1) знерозмірені відносні зміщення точок тіла під торцями підсилень стосовно цих торців (підсилення в цілому) $\tilde{u}(a) = Gu(a)/(\tau_s^* a)$ у залежності від навантаження $\tilde{q} = q/(2\tau_s^*)$. Лінією 2 подано ті ж переміщення для одного не взаємодіючого підсилення. За сталих навантажень та фізико-механічних характеристик зі збільшенням ділянки розпушення зміщення точок матеріалу пластини стосовно підсилення зростає.

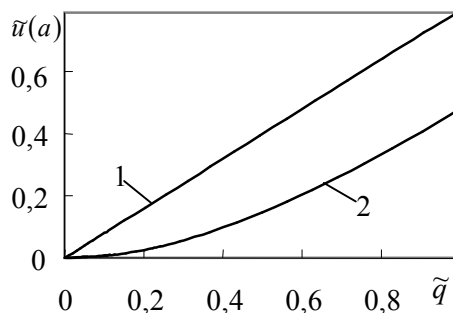


Рис. 3. Максимальні зміщення точок тіла

З урахуванням умови (10) те саме можна висловити інакше: за фіксованого δ_{2c} зі збільшенням ділянки розпушення допустиме граничне навантаження для розшарування між тілом і підсиленням зменшується. Відображені на рис. 3 залежності якісно відповідають результатам розрахунку довжини зони передруйнування (рис. 2). При цьому довжина ділянки розпушення практично не впливає на зв'язок між зміщеннями $u(a)$ та загальною довжиною зони передруйнування ε , що цілком узгоджується з відповідними резуль-

татами для тіла з високомодульним включенням.

Оскільки кінці підсилень співдотикаються, то зміщення точок тіла дорівнює переміщенню одного підсилення стосовно іншого як єдиного цілого і вони практично пропорційні (лінія 1) прикладеному навантаженню.

Загальне переміщення підсилення обчислюється за формулою

$$u(a) = \frac{(k+1)\tau_s^*}{4\pi G} \int_c^a f_6(t, a, b, c) dt. \quad (11)$$

Із аналізу та порівняння числових результатів за формулами (11) та (8) впливає цікава сама по собі залежність

$$\frac{2\tau_s^*}{aq} \int_c^a f_6(t, a, b, c) dt = \pi.$$

Максимальні переміщення підсилення лінійно залежить від навантаження та довжини підсилення за законом

$$u(a) = \frac{(k+1)a}{8G} q.$$

6. Розривання підсилень

Дотичні напруження уздовж поверхні зчеплення тіла з підсиленням (5), (1), (2) спричиняють у поперечному перерізі останнього осьове зусилля, яке зі збільшенням навантаження та розвитком локалізованих зон передруйнування зростає. Збільшення розривних зусиль відбуватиметься до початку їх відшарування чи, що те саме, до моменту досягнення відносними переміщеннями точок тіла стосовно підсилення граничного значення δ_{2c} . Тому максимальні осьові зусилля

$P_{\max}$, на які необхідно орієнтуватися під час вибору підсилень, знаходимо, розв'язуючи систему рівнянь (8)–(10) та прийнявши

$$P(0) = P_{\max}. \quad (12)$$

З іншого боку, міцність підсилень на розрив обмежена. Для запобігання їх розриву необхідно, щоб осьові зусилля не перевищували межі міцності підсилення на розтяг $P_{ut} : P_{\max} \leq P_{ut}$. Приймаючи останню умову за критеріальну і розв'язавши систему рівнянь (8), (9) за умов (10), (12), отримуємо граничне значення навантаження $q = q^{**}$ розриву підсилення.

7. Висновки

Запроваджено двофазну зону передруйнування (ослабленого контакту) у тілі з системою співдотичних нерозтягливих гнучких підсилень, що дало можливість уникнути сингулярності напружень в околах їх країв та отримати механічно коректні обмежені напруження в усіх точках композиції. Виявлено вплив навантаження, довжини ділянки розпушення на розвиток локалізованих зон передруйнування, розподіли контактних напружень під підкріпленнями та осьових зусиль у них самих.

З використанням деформаційного критерію отримано формули для граничного значення навантаження, при якому відбуватиметься відшарування підсилення. Умова, що зусилля розтягу у під підсиленнях не може перевищувати їх міцності, дає граничні навантаження, за яких можливий їх розрив.

Список використаних джерел

1. Кундрат М. М. Гранична рівновага та локальне руйнування пластини з накладкою / М. М. Кундрат // Вісник Рівненського держ. техн. ун-ту. Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво. – 1999. – С. 200–204.
2. Кундрат А. М. Руйнування в з'єднанні двох накладок / А. М. Кундрат // Вісник Рівненського держ. техн. ун-ту. Збірник наук. праць. – 2001. – Вип. 3 (10). – С. 205–210.
3. Кундрат М. М. Контактна взаємодія півплощини з навантаженою по верхній границі пружною накладкою / М. М. Кундрат, Ю. В. Мельник // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. – 2013. – № 3. – С. 166–168.

References

1. KUNDRAT, M. M. (1999) Limit equilibrium and local fracture the lining plate with reinforcement. *Bulletin Rivne State Technical University. Water conservation and hydraulic construction*. p. 200–204.
2. KUNDRAT, A. M. (2001) The fracture in connecting two reinforcements. *Journal of Rivne state Sc. Univ. Collection of Science. works*. (3). p. 205–210.
3. KUNDRAT, M. M. & MELNIK, YU. V. (2013) Contact interaction a half-plane with elastic loaded along the upper border reinforcement. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*. (3). p. 166–168.

Надійшла до редколегії 30.08.17

УДК 532.5

Курилко О. Б., к.ф.-м.н., асистент

Перемішування в'язкої рідини всередині прямокутної порожнини уявними стержнями

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4е,
e-mail: alexandr.kurylko@gmail.com

O. B. Kurylko, Ph.D. (Phys.-Math.)

Stirring of viscous fluid inside a rectangular cavity with ghost rods

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4e,
e-mail: alexandr.kurylko@gmail.com

Досліджена двовимірною періодичною течією в'язкої нестисливої рідини в наближенні Стокса всередині прямокутної порожнини, яка приводиться в рух верхньою границею. Отриманий аналітичний розв'язок задачі методом покращеної редукції для заданого розподілу швидкостей руху границі. Виявлено існування трьох періодичних структур у течії, які породжують хаотичний рух виділеної пасивної рідини. Проведено порівняльний аналіз перемішування в'язкої рідини при двох різних періодичних рухах уявних стержнів.

Ключові слова: прямокутна порожнина, перемішування, уявний стержень.

A two-dimensional periodic flow of viscous incompressible fluid in the Stokes approximation inside a rectangular cavity, which is driven by top boundary, while the other three sides are fixed, is investigated. The method of superposition is effective for solving mechanical problems concerning creeping flow of viscous fluid set up in rectangular cavity by tangential velocities along its walls. The analytical solution of the problem is obtained by the improved reduction method for a given velocity distribution of the moved top boundary. The existence of three periodic structures in the Stokes flow, which generate chaotic motion of a chosen passive fluid, is identified. A comparative analysis of the stirring of viscous fluid with two different periodic motions of ghost rods is carried out. It is shown that one of these periodic motions is accompanied by exponential stretching and deformation of the allocated volume of fluid, known as topological chaos, while the second one does not possess the above-mentioned features.

Key Words: rectangular cavity, stirring, ghost rod.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

В останні роки простежується широкий інтерес до перемішування рідин ламінарними течіями. Аналіз перемішування в'язких рідин у багатьох дослідженнях проводиться з допомогою методів топології, а саме методів пучків [1, 2]. Виявляється, що детальний аналіз пучка дає важливу інформацію про властивість перемішування рідин. Наявність хаосу в таких динамічних системах є наслідком топології руху простих тіл різної форми, що виконують роль фізичних змішувачів.

У роботі [1] аналітично та експериментально досліджувалися топологічні схеми перемішування за допомогою фізичних стержнів-змішувачів. Показано, що для породження якісного перемішування рідини достатньо використовувати лише три фізичні стержні, при цьому існують два різних періодичних рухи: перший супроводжується експоненціальним розтягом та

деформацією виділеного об'єму рідини, відомий як топологічний хаос, в той час як другий не має вищезазначених особливостей.

Доведено, що наявність фізичних стержнів не є необхідною умовою породження топологічного хаосу. В роботі [3] показано, що окремі пасивні частинки рідини або періодичні структури, що рухаються по періодичним орбітам, можуть бути використані при перемішуванні в'язкої рідини в прямокутній порожнині. В роботах [2, 3] продемонстровано, що при вивченні динаміки руху спеціальних періодичних структур, які отримали назву уявних стержнів (ghost rods), є можливість застосування експериментальних результатів, отриманих у роботі [1], у випадку руху стержнів-змішувачів, які є топологічно тривіальними.

Дана робота присвячена дослідженню та аналізу процесу перемішування в'язкої рідини

ув'язними стержнями, що виникають при періодичних рухах верхньої стінки прямокутної порожнини, в той час як інші стінки - нерухомі.

2. Постановка задачі та методика побудови аналітичного розв'язку

Розглянемо двовимірну течію в'язкої нестисливої рідини в прямокутній порожнині з розмірами $2a \times 2b$ в декартовій системі координат, пов'язаній з центром порожнини (рис.1). У наближенні Стокса ($Re \rightarrow 0$) впливом інерційних сил на течію можна знехтувати в порівнянні з впливом сил в'язкості. Тоді після введення функції течії $\psi(x, y)$, за допомогою якої компоненти вектора швидкості визначаються за формулами

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (1)$$

розв'язок стаціонарної задачі зводиться до розв'язання бігармонічного рівняння

$$\Delta \Delta \psi = 0. \quad (2)$$

Нехай течія у прямокутній порожнині $|x| \leq a$, $|y| \leq b$ викликається заданою дотичною швидкістю $V(x)$ на верхній ($y = b$) стінці, а нижня ($y = -b$) і бічні стінки $x = \pm a$ - нерухомі (Рис. 1).

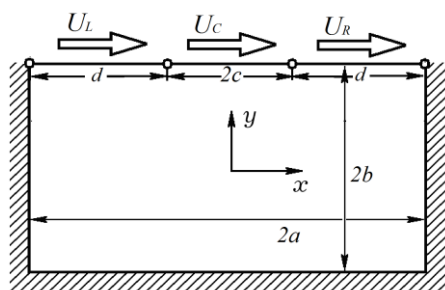


Рис. 1 Геометрія задачі в загальній постановці

У цьому випадку граничні умови для рівняння (2) мають вигляд

$$\psi(\pm a, y) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=\pm a} = 0, \quad |y| \leq b, \quad (3)$$

$$\psi(x, \pm b) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{y=\pm b} = 0, \quad |x| \leq a, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{y=b} = \begin{cases} U_L, & -a \leq x < -c, \\ U_C, & |x| \leq c, \\ U_R, & c < x \leq a, \end{cases} \quad |x| \leq a. \quad (5)$$

З огляду на лінійність граничної задачі (2)-(5) її розв'язок можна подати у вигляді суперпозиції шести бігармонічних функцій

$$\psi(x, y) = \psi_{EE}^{(1)}(x, y) + \psi_{EO}^{(1)}(x, y) + \psi_{EE}^{(2)}(x, y) + \psi_{EO}^{(2)}(x, y) + \psi_{OE}^{(1)}(x, y) + \psi_{OO}^{(1)}(x, y), \quad (6)$$

де бігармонічні функції $\psi_{EE}^{(1)}(x, y)$, $\psi_{EO}^{(1)}(x, y)$, $\psi_{EE}^{(2)}(x, y)$, $\psi_{EO}^{(2)}(x, y)$, $\psi_{OE}^{(1)}(x, y)$ та $\psi_{OO}^{(1)}(x, y)$ є розв'язками наступних бігармонічних задач з постійними швидкостями на верхній та нижній границях:

Задача 1

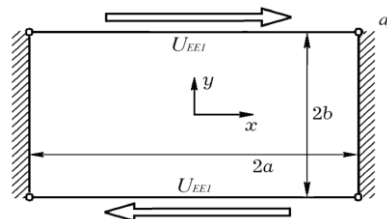


Рис. 2а Геометрія задачі 1

$$\begin{aligned} \Delta \Delta \psi_{EE}^{(1)} &= 0, \\ \psi_{EE}^{(1)}(\pm a, y) &= 0, \quad \frac{\partial \psi_{EE}^{(1)}}{\partial x} \Big|_{x=\pm a} = 0, \quad |y| \leq b, \\ \psi_{EE}^{(1)}(x, \pm b) &= 0, \quad \frac{\partial \psi_{EE}^{(1)}}{\partial y} \Big|_{y=\pm b} = \pm U_{EE1}, \quad |x| \leq a. \end{aligned} \quad (7)$$

Задача 2

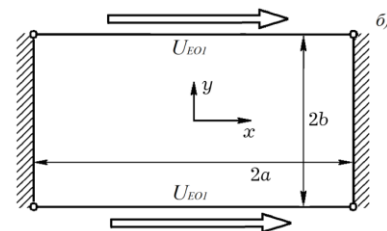


Рис. 2б Геометрія задачі 2

$$\begin{aligned} \Delta \Delta \psi_{EO}^{(1)} &= 0, \\ \psi_{EO}^{(1)}(\pm a, y) &= 0, \quad \frac{\partial \psi_{EO}^{(1)}}{\partial x} \Big|_{x=\pm a} = 0, \quad |y| \leq b, \\ \psi_{EO}^{(1)}(x, \pm b) &= 0, \quad \frac{\partial \psi_{EO}^{(1)}}{\partial y} \Big|_{y=\pm b} = U_{EO1}, \quad |x| \leq a. \end{aligned} \quad (8)$$

Задача 3

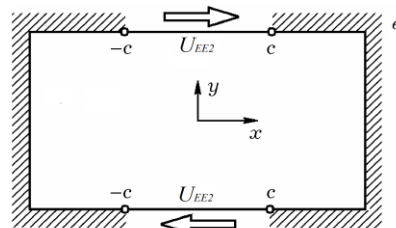


Рис. 2в Геометрія задачі 3

$$\begin{aligned}\Delta\Delta\psi_{EE}^{(2)} &= 0, \\ \psi_{EE}^{(2)}(\pm a, y) &= 0, \left. \frac{\partial\psi_{EE}^{(2)}}{\partial x} \right|_{x=\pm a} = 0, |y| \leq b, \\ \psi_{EE}^{(2)}(x, \pm b) &= 0, \left. \frac{\partial\psi_{EE}^{(2)}}{\partial y} \right|_{y=\pm b} = \pm U_{EE2}, |x| \leq c.\end{aligned}\quad (9)$$

Задача 4

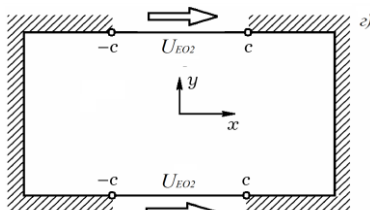


Рис.2г Геометрія задачі 4

$$\begin{aligned}\Delta\Delta\psi_{EO}^{(2)} &= 0, \\ \psi_{EO}^{(2)}(\pm a, y) &= 0, \left. \frac{\partial\psi_{EO}^{(2)}}{\partial x} \right|_{x=\pm a} = 0, |y| \leq b, \\ \psi_{EO}^{(2)}(x, \pm b) &= 0, \left. \frac{\partial\psi_{EO}^{(2)}}{\partial y} \right|_{y=\pm b} = U_{EO2}, |x| \leq c.\end{aligned}\quad (10)$$

Задача 5

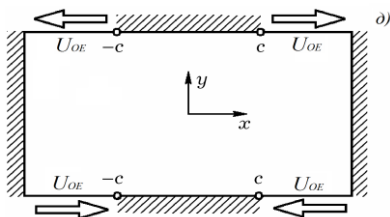


Рис.2д Геометрія задачі 5

$$\begin{aligned}\Delta\Delta\psi_{OE}^{(1)} &= 0, \\ \psi_{OE}^{(1)}(\pm a, y) &= 0, \left. \frac{\partial\psi_{OE}^{(1)}}{\partial x} \right|_{x=\pm a} = 0, |y| \leq b, \\ \psi_{OE}^{(1)}(x, \pm b) &= 0, \left. \frac{\partial\psi_{OE}^{(1)}}{\partial y} \right|_{y=\pm b} = \pm U_{OE1}, c \leq |x| \leq a.\end{aligned}\quad (11)$$

Задача 6

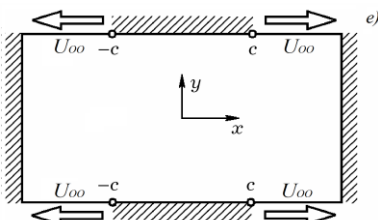


Рис.2е Геометрія задачі 6

$$\begin{aligned}\Delta\Delta\psi_{OO}^{(1)} &= 0, \\ \psi_{OO}^{(1)}(\pm a, y) &= 0, \left. \frac{\partial\psi_{OO}^{(1)}}{\partial x} \right|_{x=\pm a} = 0, |y| \leq b,\end{aligned}\quad (12)$$

$$\psi_{OO}^{(1)}(x, \pm b) = 0, \left. \frac{\partial\psi_{OO}^{(1)}}{\partial y} \right|_{y=\pm b} = U_{OO1}, c \leq |x| \leq a.$$

Детальний опис аналітичних розв'язків бігармонічних задач (7) - (12) наведено в роботі [4]. При цьому використовувалися аналітичний метод суперпозиції, який є ефективним для багатьох двовимірних бігармонічних задач для течії Стокса, а також метод покращеної редукції при розв'язанні нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

3. Чисельні результати

Розглянуто процес перемішування в'язкої рідини на прикладі течії Стокса всередині прямокутної порожнини ($a/b = 3$, $2c/d = 1$), що викликається періодичними рухами верхньої границі з періодом T за двома різними сценаріями: R_+L_- та R_+L_+ , які є аналогами рухів фізичних змішувачів, розглянутих у роботі [1].

Сценарію руху R_+ відповідає задання швидкості на верхній границі

$$U_{top}^{(1)} = \begin{cases} -U_L, & -a \leq x \leq -c, \\ U_R, & -c < x \leq a, \end{cases}\quad (13)$$

сценарію руху L_+ відповідає задання швидкості руху верхньої границі

$$U_{top}^{(2)} = \begin{cases} U_L, & -a \leq x \leq c, \\ U_R, & c < x \leq a, \end{cases}\quad (14)$$

та сценарію руху L_- відповідає задання швидкості руху верхньої границі

$$U_{top}^{(3)} = \begin{cases} -U_L, & -a \leq x \leq c, \\ U_R, & c < x \leq a. \end{cases}\quad (15)$$

З метою визначення розподілу поля швидкості течії розв'язано шість задач (7) - (12). Обчислення проводилися таким чином, що у нескінченних сумах використовувалися тільки п'ять доданків. Дослідження показали, що відносна похибка виконання граничних умов не перевищувала 0,1%.

Періодичний рух рідини в прямокутній порожнині задається таким чином, що на проміжку часу $nT \leq t < \left(n + \frac{1}{2}\right)T$, $n = 0, 1, \dots$

швидкість на верхній границі має вигляд (13), після чого відбувається миттєва зміна швидкості, яка на інтервалі $\left(n + \frac{1}{2}\right)T \leq t < (n+1)T$, $n = 0, 1, \dots$

має вигляд (14) або (15).

Картини ліній течії в порожнині для сценаріїв R_+ та L_- (або L_+) показані в роботі [1]. На рис.3 показано траєкторію руху пасивної рідкої частинки на проміжку часу $0 \leq t < 5T$, де $T = 2$. Суцільними лініями показано траєкторії пасивної

частинки, що рухається по ним згідно протоколу R_+ , а пунктирними лініями – траєкторії пасивної частинки, що рухається згідно протоколу L_- .

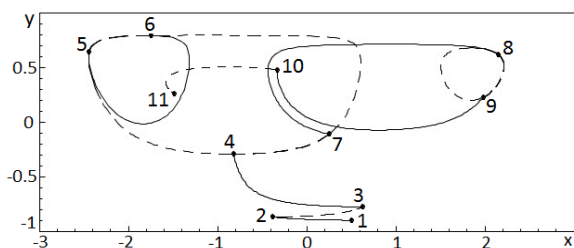


Рис. 3 Адвекція пасивної рідкої частинки в прямокутній порожнині (R_+L_-)

На рис. 4 показано адвекцію кругової плями, породжену двома сценаріями перемішування, які є енергетично еквівалентними. Як і в роботі [1], показано, що сценарій перемішування R_+L_- є псевдо-Аносового типу, в той час як R_+L_+ є регулярного типу. Перемішування рідини згідно розглядуваних протоколів породжене уявними стержнями, структура яких детально вивчена в роботі [4].

Висновки

Дослідження показали, що в ламінарній течії в'язкої рідини всередині прямокутної порожнини при періодичному русі верхньої границі існують два різних сценарії перемішування. Перший сценарій, псевдо-Аносового типу, характеризується експоненціальним зростанням числа періодичних точок течії та експоненціальним розтягом нетривіальних ліній в рідині.

Список використаних джерел

1. Boyland P.L. Topological fluid mechanics of stirring / P. L. Boyland, H. Aref, M. A. Stremler // J. Fluid Mech. – 2000. – 403. – P. 277-304.
2. Gouillart E. Topological mixing with ghost rods / E. Gouillart, M. D. Finn, J. L. Thiffeault // Phys. Rev. E. – 2006. – 73, 036311.
3. Stremler M.A. Generating topological chaos in lid-driven cavity flow / M. A. Stremler, J. Chen // Physics of fluids. – 2007. – 19, 103602.
4. Мелешко В.В. Породження топологічного хаосу в течії Стокса в прямокутній порожнині / В.В.Мелешко, О.Б.Курилко, О.А.Гуржій // Математичні методи і фізико-механічні поля. – 2011. – Том 54, №3. – С.87-98.

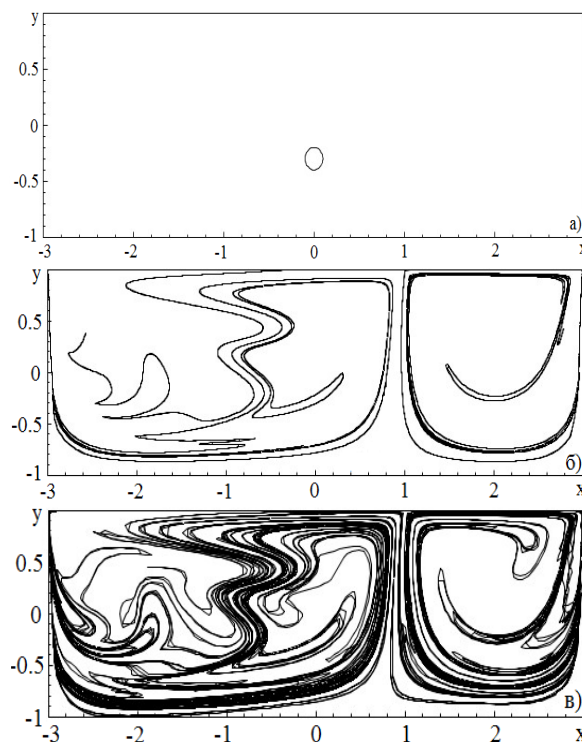


Рис. 4. Адвекція кругової плями, породжена двома сценаріями перемішування: а) початкове положення плями; б) R_+ ; в) R_+L_-

Другий сценарій перемішування не пов'язаний з утворенням нових періодичних точок різного типу, а адвекція виділеного об'єму рідини протікає регулярно.

References

1. BOYLAND, P., AREF, H. and STREMLER, M. (2000) Topological fluid mechanics of stirring. *Journal of Fluid Mechanics*. 403. p. 277-304.
2. GOUILLART, E., FINN, M. and THIFFEAULT, J. (2006) Topological mixing with ghost rods. *Phys. Rev. E*. 73, 036311.
3. STREMLER, M. and CHEN, J (2007). Generating topological chaos in lid-driven cavity flow. *Physics of fluids*. 19, 103602.
4. MELESHKO, V., KURYLKO, O. and GURJII O. (2011) Porodzhennya topolohichnoho khaosu v techiyi Stoksa v pryamokutniy porozhnyini. *Mathematical methods and physicomechanical fields*. 54(3). p. 87-98.

Надійшла до редколегії 30.09.17

УДК 539.3

Куценко О. Г.¹, к. ф.-м. н., доц.,
Харитонов О. М.¹, к. ф.-м. н., доц.,
Куценко А. Г.², к. ф.-м. н., доц.,
Дикий П.В.¹, пр. інж.

Осесиметричне кручення тонких кілець під дією різних силових факторів

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4е,
e-mail: alex_kutz@univ.kiev.ua

² Національний університет біоресурсів і
природокористування України, 03041, м. Київ,
вул. Героїв Оборони 12.

O. G. Kutsenko¹, Ph.D (Phys.-Math.),
O. M. Kharytonov¹, Ph.D (Phys.-Math.),
A. G. Kutsenko², Ph.D (Phys.-Math.),
P. V. Dykyi¹, Lead Engineer.

Axisymmetric torsion of thin ring under different kind of loads

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova av., 4e,
e-mail: alex_kutz@univ.kiev.ua

² National University of Life and Environmental
Sciences of Ukraine, 03041, Kyiv, Heroyiv Oborony
str., 12.

Розглянута задача про осесиметричне кручення тонкого кільця під дією різних силових чинників, а саме: поздовжніх сил, радіальної сили та тиску, прикладеного до його внутрішньої бічної поверхні. Для вказаних навантажень шляхом узагальнення раніше отриманих для випадку чистого кручення співвідношень одержано аналітичні вирази для кута закручування. Даний результат апробований за допомогою метода скінченних елементів. Запропоновано підхід до розрахунку фланцевих з'єднань, що ґрунтується на одержаних результатах.

Ключові слова: кручення під дією тиску, жорсткість на кручення, розрахунок фланцевих з'єднань.

Using the assumption of flat rigid cross-section the analytical expression for longitudinal (axial) coordinate of the ring cross-section rotation center and for the ring cross-section torsion angle were obtained in the previous research of the authors for the case of the pure torsion. The consideration of the problem of the axisymmetric torsion of thin rings is continued in the present paper where the cases of the ring loading by the pair of axial forces, by the radial force and by the inner pressure are investigated. These types of loading are usual for the technical practices. For these cases the analytical relations for longitudinal (axial) coordinate of the ring cross-section rotation center and for the torsion angle are obtained using the assumption of flat rigid cross-section in the similar way to the previous research. The obtained results are approved with the help of numerical calculation by the finite element method. The way to develop the theory of the deformation of flange connections is presented. This theory can be based on the analytical relations of the theory of shells and the results of the given paper.

Key Words: torsion under pressure, torsional stiffness, flange coupling design.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я. О.

Вступ

Напружено-деформівний стан (НДС), що відповідає осесиметричному крученню тонких кілець довільного поперечного перерізу, часто виникає в фланцевих з'єднаннях обладнання об'єктів енергетичної, хімічної та харчової галузей промисловості. Тому вміння його оцінювати на основі простих аналітичних співвідношень являє собою важливу практичну задачу.

В попередній роботі авторів [1] було розглянуто випадок чистого кручення тонких кілець, тобто кручення під дією лише рівномірно розподіленого вздовж осі кільця (яка є колом) дотичного до неї моменту. В даній роботі одержані раніше результати поширені на випадок навантаження кільця поздовжніми силами, радіальною силою та внутрішнім тиском.

Постановка задачі

Загальна схема осесиметричного кручення зображена на рисунку 1. Причиною кручення є розподілений момент інтенсивності m . Циліндрична система координат $r \varphi z$ вибирається таким чином, що вісь z є віссю симетрії кільця, а вісь r проходить через центр повороту деякого поперечного перерізу. Оскільки в осесиметричному випадку від координати φ нічого не залежить, подальший розгляд будемо проводити в площині поперечного перерізу $r z$.

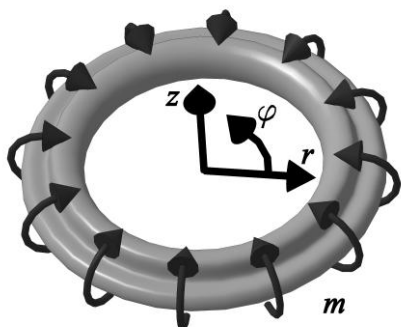


Рис.°1 Осесиметричне кручення кільця довільного поперечного перерізу

В загальному випадку будемо розрізняти три системи координат (див. рис. 2). Крім системи $r z$, пов'язаною з центром обертання — точкою O , введемо в розгляд довільну систему координат $\bar{r} \bar{z}$ та систему координат $\tilde{r} \tilde{z}$, пов'язану з центром площ поперечного перерізу — точкою C . Під центром площ поперечного перерізу будемо розуміти “осесиметричний” центр площ, осьова координата якого визначається як

$$z_c = \frac{\hat{S}_r}{\hat{A}}, \quad \text{де} \quad \hat{S}_r = \int_A \frac{z}{r} dA, \quad \hat{A} = \int_A \frac{dA}{r}.$$

Тут інтеграли беруться по площі поперечного перерізу A . З точністю до величин порядку відношення характерного розміру поперечного перерізу до радіуса осі кільця він співпадає зі “звичайним” центром площ.

$$z_c \approx S_r / A, \quad \text{де} \quad S_r = \int_A z dA.$$

Крім того, в подальшому розгляді будемо використовувати осесиметричний аналог моменту інерції

$$\hat{J}_r = \int_A \frac{z^2}{r} dA,$$

який для тонких кілець наближено рівний відношенню моменту інерції до радіуса осі кільця r_c .

Чисте кручення кільця

Як вже відзначалося раніше, під чистим крученням тонкого кільця будемо розуміти кручення внаслідок дії лише рівномірно розподіленого вздовж осі кільця (яка є колом) дотичного до неї моменту постійної інтенсивності m . Такий тип деформації кільця детально досліджений в [1] на основі гіпотези абсолютно жорстких поперечних перерізів. Відповідна кінематика точок задається співвідношеннями

$$u_r \approx -\vartheta z, \quad u_\varphi = 0, \quad u_z \approx \vartheta(r - r_0), \quad (1)$$

де u_r, u_φ, u_z — компоненти вектора зміщень, ϑ — кут повороту поперечного перерізу у власній площині, r_0 — відстань від осі симетрії до центру повороту поперечного перерізу.

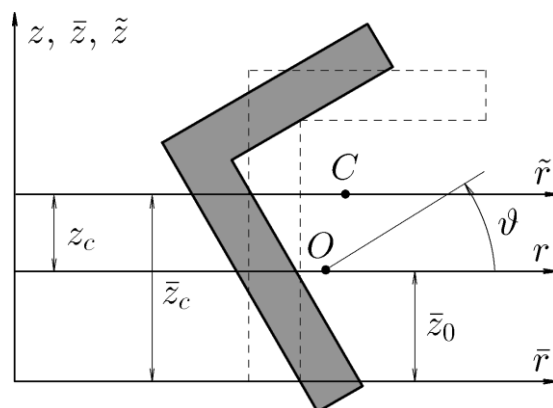


Рис.°2 Осесиметричне кручення кільця довільного поперечного перерізу

Підставляючи (1) в геометричні співвідношення Коші та закон Гука, приходимо до висновку, що єдиними суттєвими напруженнями є колові

$$\sigma_\varphi = E \varepsilon_\varphi = -E \vartheta \frac{z}{r}, \quad (2)$$

де E — модуль Юнга матеріалу кільця.

З умови силової рівноваги кільця встановлюємо, що $\hat{S}_r = 0$, тобто точки O та C лежать на одному радіальному промені.

З умови рівноваги в моментах знаходимо кут повороту поперечного перерізу

$$\vartheta = \frac{m r_c}{E \hat{J}_r}. \quad (3)$$

Якщо в (3) знехтувати зміною радіусу вздовж поперечного перерізу, одержимо

$$\vartheta = \frac{mr_c^2}{EJ_r}, \quad (4)$$

де J_r — момент інерції поперечного перерізу кільця відносно осі r . Вираз (4) є узагальненням на випадок довільного поперечного перерізу аналогічних виразів для круглого [2] та прямокутного [3] поперечних перерізів.

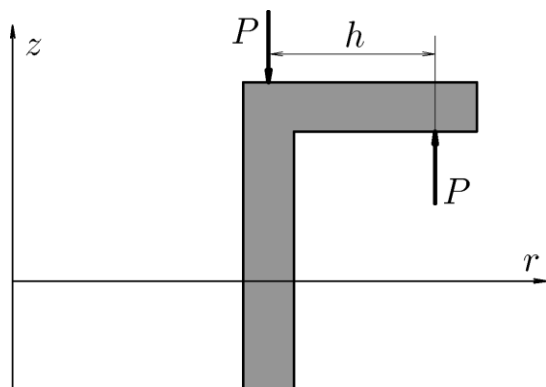


Рис. 3 Навантаження кільця парою осьових сил

До деформації чистого кручення призводить навантаження кільця парою осьових сил P з великим плечем h (див. рис. 3). Остання умова забезпечує низький рівень напружень в площині поперечного перерізу. При цьому кут повороту визначається з (4), якщо покласти $m = Ph$. Якщо плече h мале, то при визначенні кута повороту необхідно додатково враховувати деформації в площині перерізу. Навантаження кільця парою осьових сил можна інтерпретувати як навантаження фланця силою натягу шпильки та силою протидії опорного кільця.

Кручення кільця під дією тиску

Великий практичний інтерес викликає навантаження кільця внутрішнім тиском, адже трубопроводи та резервуари, що мають фланці чи кільцеві ребра жорсткості, часто знаходяться під дією внутрішнього тиску.

Розглянемо кільце, що знаходиться під дією тиску p_0 , який прикладений вздовж ділянки внутрішньої циліндричної поверхні $r = r_p$, $z_{p1} < z < z_{p2}$. Якщо товщина кільця змінюється вздовж z , то крім розтягу воно буде також випробовувати на собі деформацію кручення. Умови силової та моментної рівноваги такого кільця можуть бути представлені у вигляді

$$E\vartheta \hat{S}_r = p_0(z_{p1} - z_{p2})r_p, \quad (5)$$

$$2E\vartheta \hat{J}_r = p_0(z_{p1}^2 - z_{p2}^2)r_p.$$

З (5) отримуємо зв'язок $2\hat{J}_r = \hat{S}_r(z_{p1} + z_{p2})$, який шляхом очевидних, але громіздких перетворень допомагає отримати положення центру обертання відносно центру площі

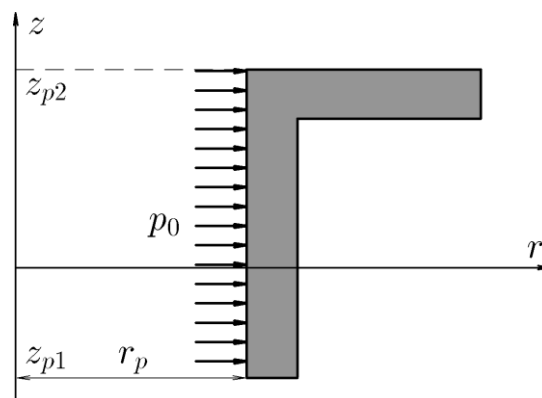


Рис. 4 Навантаження кільця тиском

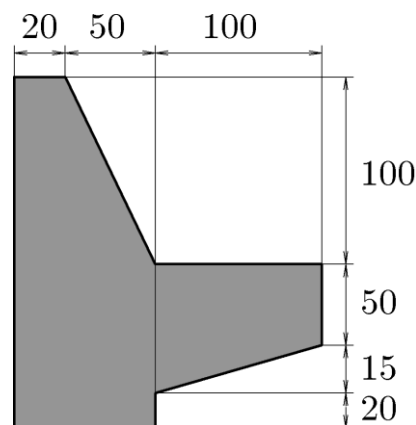


Рис. 5 Основні розміри фланця Д2130

$$z_c = \frac{\hat{J}_r - \bar{z}_c^2 \hat{A}}{\hat{A} \left(\frac{\bar{z}_{p1} + \bar{z}_{p2}}{2} - \bar{z}_c \right)}. \quad (6)$$

Важливо, що всі величини в правій частині (6) розраховуються в довільній системі координат $\bar{r} \bar{z}$.

Після знаходження положення центра обертання, кут повороту знаходиться з будь-якого з співвідношень (5). Отримані вирази були протестовані для фланця Д2130, основні розміри в мм якого показані на рисунку 5, за допомогою методу скінченних елементів [4]. Відхилення значення кута ϑ , обчислене за формулами (5) та

(6), від знайденого чисельно виявилось менше 2%. Зауважимо, що спрощення виразів за рахунок неврахування зміни радіальної координати під інтегралами збільшило відхилення до 15%.

Кручення кільця під дією радіальної сили

Загальна схема навантаження в цьому випадку зображена на рисунку 6. Кручення відбувається під дією радіальної сили, прикладеної в точці (r_p, z_p) . Вирази для положення центра обертання та кута ϑ можна отримати з формул (5) та (6) шляхом граничного переходу $P_0(z_{p1} - z_{p2}) \rightarrow P$ при $z_{p1}, z_{p2} \rightarrow z_p$. Таким чином, відповідні співвідношення мають вигляд

$$E\mathcal{G}\hat{S}_r = Pr_p, \quad E\mathcal{G}\hat{J}_r = Pz_p r_p, \quad (7)$$

та

$$z_c = \frac{\hat{J}_r - \bar{z}_c^2 \hat{A}}{\hat{A}(z_p - \bar{z}_c)}. \quad (8)$$

Вони дають розв'язок поставленої задачі.

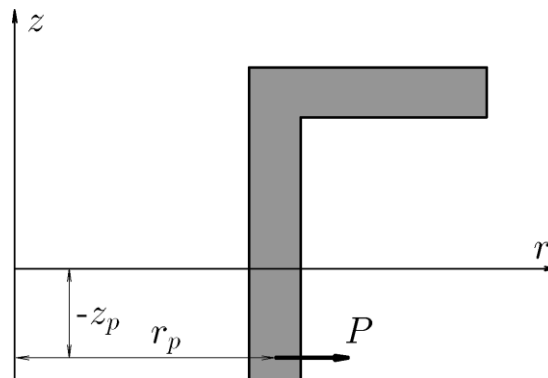


Рис. 6 Навантаження кільця радіальною силою

Висновки

В роботі наведені співвідношення, які повністю визначають кінематику тонкого кільця під дією довільного осесиметричного навантаження, а саме: розподіленого моменту кручення, пари розподілених по двом колам поздовжніх сил, розподіленої по колу радіальної сили та розподіленої по внутрішній бічній поверхні тиску. Вони дозволяють у поєднанні зі співвідношеннями теорії циліндричних чи еліптичних оболонок [3] знаходити НДС конструкцій з фланцями. Для цього потрібно відділити фланець від конструкції методом уявних перерізів, приклавши на торцях розподілені момент і перерізуючу силу, значення яких знаходяться з умов неперервності радіальних зміщень та кутів повороту.

Список використаних джерел

1. Куценко О.Г., Осесиметричне кручення тонких кілець довільного профілю / О. Г. Куценко, Г. В. Куценко, О. М. Харитонов, І. Ю. Васильєв // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки – 2016. – №3. – С. 49–54.
2. Куценко Г.В. Об одной задаче осесимметричной деформации кругового тора / Г. В. Куценко // Прикл. мех. – 1979. – Том 15, №11. – С. 46–51.
3. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – Москва: Физматгиз, 1966. – 635 с.
4. Dhondt G. The Finite Element Method for Three-Dimensional Thermomechanical Applications / G. Dhondt. – Hoboken: Wiley, 2004. – 362 p.

References

1. KUTSENKO, O.G. (2016) Osesymetrychne kruchennia tonkykh kilets dovilnoho profilu. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*. 1. p. 49–54.
2. KUTSENKO, G.V. (1979) Ob odnoy zadache osesimmetrichnoy deformatsii krugovogo tora. *Priladnaya Mekhanika*. 15 (11). p. 46–51.
3. TIMOSHENKO, S.P. (1966) *Plastinki i obolochki*. Moskva: Fizmatgiz.
4. DHONDT, G. (2004) *The Finite Element Method for Three-Dimensional Thermo-mechanical Applications*. Hoboken: Wiley.

Надійшла до редколегії 24.07.17

УДК 539.3

Кушнір Р. М.¹, д. ф.-м. н., проф., член-кор.
НАН України,
Калиняк Б. М.¹, к. ф.-м. н., с. н. с.,
Горошко В. О.¹, аспірант.

Визначення термопружного стану тришарової термочутливої порожнистої кулі за складного теплообміну

¹ Інститут прикладних проблем механіки і
математики ім. Я. С. Підстригача НАН
України, 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б,
e-mail: dyrector@iapmm.lviv.ua

R. M. Kushnir¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
B. M. Kalynyak¹, Ph.D. (Phys.-Math.),
V. O. Horoshko¹, Ph.D. student.

Determination of the thermo-elastic state of the three-layer hollow sphere at completed heat exchange

¹ Pidstryhach Institute for Applied Problems of
Mechanics and Mathematics, National Academy of
Sciences of Ukraine, 79060, L'viv, Naukova str., 3-b,
e-mail: dyrector@iapmm.lviv.ua

У рамках математичної моделі термочутливого тіла визначено і досліджено термопружний стан тришарової термочутливої порожнистої кулі за складного теплообміну та сталого силового навантаження на межевих поверхнях, а також наявності теплових джерел у середньому шарі. Отримано точний аналітичний розв'язок відповідної нелінійної задачі теплопровідності та наближені аналітичні вирази для компонент напружено-деформованого стану.

Ключові слова: порожниста тришарова куля, термопружність, залежні від температури фізико-механічні характеристики, нелінійні рівняння теплопровідності.

In limits of mathematical model of the thermal sensitive solid the thermal and thermo-stressed state of the three-layer thermal sensitive hollow sphere at complicated heat exchange with an environment and constant force loading on its boundary surfaces has been considered. The sphere is heated by heat source in the middle layer. The ideal thermo-mechanical contacts are present between the neighbour layers. The internal surface is subjected to constant temperature. The outer surface is subjected to convective heat exchange with environment. The exact analytical solution of the nonlinear steady heat transfer problem and approximate analytic expressions for thermal-stressed state using reduction of the unbounded thermo-elasticity problem to the solving the set of Volterra integral equations and obtained integral condition were obtained. The stresses in the three-layer sphere have been calculated, using the quadrature method for solving the obtained integral equations. The contribution of temperature dependence of heat transfer coefficient into stress values is more less in comparison to the contribution of temperature dependence of mechanical characteristics.

Key Words: hollow three-layer sphere, thermoelasticity, temperature dependent physico-mechanical characteristics, nonlinear equations of heat conduction.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

У приладо- і машинобудуванні, тепловій та атомній енергетиці, космічній техніці широке застосування знаходять шаруваті елементи конструкції кульової форми. Їх виготовлення та експлуатація у широких діапазонах температур вимагає якомога точнішого визначення теплового та термопружного станів, що призводить до необхідності врахування залежності фізико-механічних характеристик матеріалів шарів та параметрів теплообміну з довкіллям від температури (термочутливість матеріалу). Запропоновано аналітичний розв'язок відповідної задачі статичної незв'язаної термопружності.

Формулювання та розв'язування задачі термопружності.

Розглянемо тришарову порожнисту кулю з внутрішнім $r=r_1$ і зовнішнім $r=r_4$ радіусами відповідно. На поверхні $r=r_1$ підтримується стала температура t_i , а через поверхню $r=r_4$ кулі відбувається конвективний теплообмін із середовищем сталої температури t_0 . На поверхнях контакту сусідніх шарів $r=\{r_2, r_3\}$, які виготовлені з різних термочутливих матеріалів, виконуються умови ідеального теплового та механічного контактів (рівність температур, теплових потоків, радіальних переміщень та

напружень). Куля нагрівається джерелами тепла, розташованими у другому її шарі.

Математична модель для визначення термопружного стану описується [1]

- рівняннями теплопровідності

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \lambda_t^{(j)}(t^{(j)}) \frac{dt^{(j)}}{dr} \right) = -W^{(j)}(r) \delta_{2j}, \quad j = \overline{1,3} \quad (1)$$

- умовами теплового контакту сусідніх шарів

$$\begin{aligned} t^{(j)} \Big|_{r=r_{j+1}} &= t^{(j+1)} \Big|_{r=r_{j+1}}, \\ \lambda_t^{(j)}(t^{(j)}) \frac{dt^{(j)}}{dr} \Big|_{r=r_{j+1}} &= \lambda_t^{(j+1)}(t^{(j+1)}) \frac{dt^{(j+1)}}{dr} \Big|_{r=r_{j+1}}, \\ j &= \overline{1,2}; \end{aligned} \quad (2)$$

- умовами теплообміну на межах

$$t^{(1)} \Big|_{r=r_1} = t_i, \quad \left[\lambda_t^{(3)}(t^{(3)}) \frac{dt^{(3)}}{dr} + \alpha_3(t^{(3)}) (t^{(3)} - t_o) \right] \Big|_{r=r_4} = 0. \quad (3)$$

- рівняннями рівноваги

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} (\rho^3 \sigma_r^{(j)}) &= 2\rho^2 \sigma_\theta^{(j)}(\rho) - \rho^3 f^{(j)}(\rho), \\ \sigma^{(j)} &= \frac{1}{2} \sigma_r^{(j)} + \sigma_\theta^{(j)}, \quad j = \overline{1,3}; \end{aligned} \quad (4)$$

- виразами зв'язків між компонентами тензорів деформації і напружень

$$\begin{aligned} e_r^{(j)}(\rho) &= \frac{1+\nu^{(j)}(\rho)}{E^{(j)}(\rho)} \sigma_r^{(j)}(\rho) - 2 \frac{\nu^{(j)}(\rho)}{E^{(j)}(\rho)} \sigma_\theta^{(j)}(\rho) + \\ &\quad + \Phi^{(j)}(T^{(j)}(\rho)), \\ e_\theta^{(j)}(\rho) &= \frac{1-\nu^{(j)}(\rho)}{E^{(j)}(\rho)} \sigma_r^{(j)}(\rho) - \frac{1+\nu^{(j)}(\rho)}{2 E^{(j)}(\rho)} \sigma_r^{(j)}(\rho) + \\ &\quad + \Phi^{(j)}(T^{(j)}(\rho)), \quad j = \overline{1,3}; \end{aligned} \quad (5)$$

- рівняннями суцільності, які у напруженнях мають вигляд [1]

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} \left[\frac{1-\nu^{(j)}(\rho)}{E^{(j)}(\rho)} \sigma_r^{(j)}(\rho) + \Phi^{(j)}(T^{(j)}(\rho)) \right] &= \\ = \frac{\sigma_r^{(j)}(\rho)}{2} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1+\nu^{(j)}(\rho)}{E^{(j)}(\rho)} \right) - \frac{1+\nu^{(j)}(\rho)}{E^{(j)}(\rho)} \frac{f^{(j)}(\rho)}{2}, \\ j &= \overline{1,3}; \end{aligned} \quad (6)$$

- умовами на обмежувальних поверхнях

$$\sigma_r^{(1)}(\rho_1) = -p_1, \quad \sigma_r^{(n)}(\rho_{n+1}) = -p_2; \quad (7)$$

- умовами ідеального механічного контакту сусідніх шарів

$$\begin{aligned} u_r^{(j+1)}(\rho_{j+1}) &= u_r^{(j)}(\rho_{j+1}), \\ \sigma_r^{(j+1)}(\rho_{j+1}) &= \sigma_r^{(j)}(\rho_{j+1}), \quad j = \overline{1,2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Тут у рівняннях та умовах (1)–(3) верхній індекс (j) означає номер шару, $t^{(j)}$, $\lambda_t^{(j)}(t^{(j)})$ – абсолютні температури та залежні від них коефіцієнти теплопровідності відповідно, $\alpha_3(t^{(3)})$ – залежний від температури коефіцієнт теплообміну через поверхню $r = r_4$, $W^{(j)}(r)$ – густина розподілу джерел тепла, $\delta_{2j} = \begin{cases} 1, j = 2, \\ 0, j \neq 2. \end{cases}$

У рівняннях та співвідношеннях (4)–(8) $E^{(j)}(T^{(j)})$, $\nu^{(j)}(T^{(j)})$, $\alpha^{(j)}(T^{(j)})$ – залежні від температури модуль пружності, коефіцієнт Пуассона та температурний коефіцієнт лінійного розширення матеріалу j -го шару відповідно; $f^{(j)}(\rho)$ – розподіл масових сил у j -му шарі;

$\Phi^{(j)}(T^{(j)}) = t_0 \int_{T_p}^{T^{(j)}} \alpha^{(j)}(T) dT$ – суто теплова деформація; $\sigma_r^{(j)}$, $\sigma_\theta^{(j)} = \sigma_\theta^{(j)}$ – радіальні та колові компоненти тензора напружень, а $e_r^{(j)}$, $e_\theta^{(j)} = e_\theta^{(j)}$ – радіальні та колові компоненти тензора деформацій; $u_r^{(j)}$ – радіальна компонента вектора переміщень, віднесена до характерного розміру l_0 ; p_1 , p_2 – задані сталі тиски (напруження) на внутрішній ($\rho = \rho_1$) та зовнішній ($\rho = \rho_4$) поверхнях кулі.

Залежності від температури характеристик матеріалів шарів у діапазоні температур їх зміни $[T_p, T_k]$ подамо у вигляді $\chi^{(j)}(T^{(j)}) = \chi_0^{(j)} \chi_j^*(T^{(j)})$, де $\chi_0^{(j)}$ – сталі величини розмірності відповідної характеристики, а $\chi_j^*(T^{(j)})$ – безрозмірні функції, які описують її температурну залежність, і вважатимемо їх поліномами вигляду $\chi_j^*(T^{(j)}) = 1 + k_{1j} (T^{(j)} - T_p) + k_{2j} (T^{(j)} - T_p)^2 + \dots$

Задача визначення термопружного стану для термочутливих багатошарових пластин, порожнистих циліндрів та куль розглянута у працях [1-3]. Точний аналітичний розв'язок нелінійної задачі теплопровідності для тришарової кулі отримано шляхом лінеаризації задачі (1)–(3) за допомогою перетворень Кірхгофа [1]:

$$\theta^{(j)} = C_1^{(j)} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_j} \right) + C_2^{(j)} - \rho_0^{(j)} \bar{w}^{(j)}(\rho), \quad j = \overline{1,3},$$

де $\theta^{(j)}$ – температурна змінна Кірхгофа,
 $\rho_0^{(j)} = \frac{w_0^{(j)} l_0^2}{t_0 \lambda_{t_0}^{(j)}}$ – критерій Померанцева, $w_*^{(j)}(\rho)$ –
безрозмірні функції, які описують просторовий
розподіл джерел тепла $\bar{w}^{(j)}(\rho) =$
 $= \int_{\rho_j}^{\rho} \xi \left(1 - \frac{\xi}{\rho}\right) w_*^{(j)}(\xi) d\xi$, $w^{(j)}(\rho) = \int_{\rho_j}^{\rho} \xi^2 w_*^{(j)}(\xi) d\xi$.

Тут $C_1^{(j)}$, $C_2^{(j)}$ – довільні сталі, які
визначаються з межових умов і можуть бути
виражені через дві сталі, скажімо 1-го шару з
умов ідеального теплового контакту. Умови на
межах кулі дозволяють визначити відповідні дві
сталі з трансцендентних, а в деяких випадках
межових умов і з лінійних алгебричних рівнянь.

Відповідна задача для визначення напружень,
деформацій та переміщень розв'язана
безпосереднім інтегруванням системи рівнянь (4)
– (8) у напруженнях і зведена до сукупності
інтегральних рівнянь Вольтерра 2-го роду та
інтегральної умови [1], яка містить одну
невідому сталу, що визначається з інтегральної
умови. Відповідна система інтегральних рівнянь
розв'язується методом квадратур з використан-
ням формули трапецій [1,4]. Наближені аналі-
тичні вирази для сумарних та радіальних
напружень подаються у виді [1]:

$$\sigma^{(j)}(\rho) = \sigma^{(1)}(\rho_1) \gamma_{10}^{(j)}(\rho) + \gamma_{00}^{(j)}(\rho),$$

$$\sigma_r^{(j)}(\rho) = \sigma^{(1)}(\rho_1) \gamma_{1r}^{(j)}(\rho) + \gamma_{0r}^{(j)}(\rho),$$

де

$$\gamma_{10}^{(j)}(\rho) = \left[\frac{1 - \nu^{(1)}(\rho_1)}{E^{(1)}(\rho_1)} + B_1^{(j)} \right] \chi_1^{(j)}(\rho) +$$

$$+ \frac{1}{2} \rho_j^3 \gamma_{1r}^{(j)}(\rho_j) \varphi^{(j)}(\rho),$$

$$\gamma_{00}^{(j)}(\rho) = B_2^{(j)} \chi_1^{(j)}(\rho) + \chi_2^{(j)}(\rho),$$

$$\gamma_{1r}^{(j)}(\rho) = \frac{1}{\rho^3} \left[(1 - \delta_{1j}) \rho_j^3 \gamma_{1r}^{(j-1)}(\rho_j) + 2 \int_{\rho_j}^{\rho} \eta^2 \gamma_{10}^{(j)}(\eta) d\eta \right],$$

$$\gamma_{0r}^{(j)}(\rho) = \frac{1}{\rho^3} \left[(1 - \delta_{1j}) \rho_j^3 \gamma_{0r}^{(j-1)}(\rho_j) - \delta_{1j} \rho_1^3 p_1 + \right.$$

$$\left. + \int_{\rho_j}^{\rho} \eta^2 \left(2 \gamma_{00}^{(j)}(\eta) - \eta f^{(j)}(\eta) \right) d\eta \right],$$

$$B_1^{(j)} = \frac{1}{2} (1 - \delta_{j1}) \sum_{k=1}^{j-1} \rho_k^3 \gamma_{0r}^{(k)}(\rho_k) \varphi^{(k)}(\rho_{k+1}) +$$

$$+ (1 - \delta_{j1}) \sum_{k=1}^{j-1} \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \left[\varphi^{(k)}(\rho_{k+1}) - \varphi^{(k)}(\eta) \right] \eta^2 \gamma_{00}^{(k)}(\eta) d\eta +$$

$$+ \frac{1}{2} (1 - \delta_{j1}) \sum_{k=1}^{j-1} \beta^{(k)} \gamma_{0r}^{(k)}(\rho_{k+1}),$$

$$B_2^{(j)} = B_1^{(j)} - (1 - \delta_{j1}) \sum_{k=1}^{j-1} F^{(k)}(\rho_{k+1}) -$$

$$- \Phi^{(j)}(\rho_j) + \Phi^{(1)}(\rho_1),$$

$$\chi_1^{(j)}(\rho) = \frac{E^{(j)}(\rho)}{1 - \nu^{(j)}(\rho)} \left[1 + \right.$$

$$\left. + \frac{\rho - \rho_j}{2} \varphi^{(j)}(\rho) \rho^2 \frac{E^{(j)}(\rho_j)}{1 - \nu^{(j)}(\rho_j)} \right],$$

$$\chi_2^{(j)}(\rho) = \frac{E^{(j)}(\rho)}{1 - \nu^{(j)}(\rho)} \left[\frac{1}{2} \rho_j^3 \sigma_r^{(j)}(\rho_j) \varphi^{(j)}(\rho) - \right.$$

$$\left. - \left(\Phi^{(j)}(\rho) - \Phi^{(j)}(\rho_j) \right) - F^{(j)}(\rho) \right].$$

$$\sigma^{(1)}(\rho_1) = \left(\rho_1^3 p_1 - \rho_{n+1}^3 p_2 + \sum_{k=1}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta f^{(j)}(\eta) d\eta - \right.$$

$$\left. - 2 \sum_{k=1}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta^2 \gamma_{00}^{(k)}(\eta) d\eta \right) / \left(2 \sum_{k=1}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta^2 \gamma_{10}^{(k)}(\eta) d\eta \right).$$

Приклад. Визначимо термopужний стан
тришарової кулі з $\rho_1 = 0.5$, $\rho_2 = 0.7$, $\rho_3 = 0.9$,
 $\rho_4 = 1$, $l_0 = \rho_4$, в якій: 1,3 шари – кераміка (ZrO_2),
2 шар – титановий сплав (Ti-6Al-4V).

Експериментально задані коефіцієнти тепло-
провідності та термомеханічні характеристики
апроксимували методом найменших квадратів,
многочленами другого степеня у діапазоні
температур від 300 К до 1100 К. Для кераміки
отримали:

$$\lambda_t^{(1,3)} = 1.915 \left(1 + 0.24664 (T_{1,3} - T_p) \right) \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \right],$$

$$\nu^{(1,3)} = 0.333, \alpha_t^{(1,3)} = 8,783 \cdot 10^{-6} \left(1 - 1,4128 (T_{1,3} - T_p) + \right.$$

$$+ 1.7496 (T_{1,3} - T_p)^2 \left[\frac{1}{\text{К}} \right], E^{(1,3)} = 116.381 \left(1 - \right.$$

$$\left. - 0.521357 (T_{1,3} - T_p) - 0.084215 (T_{1,3} - T_p)^2 \right) \left[\text{ГПа} \right],$$

а для титанового сплаву –

$$\lambda_t^{(2)} = 6.2 \left(1 + 3.016 (T_2 - T_p) \right) \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \right],$$

$$\nu^{(2)} = 0.2984 \left(1 + 0.118 (T_2 - T_p) \right), \alpha_t^{(2)} = 8,8559 \cdot 10^{-6} \left(1 + \right.$$

$$+ 0.49014 (T_2 - T_p) - 0.36754 (T_2 - T_p)^2 \left[\frac{1}{\text{К}} \right],$$

$$E^{(2)} = 105.05(1 - 0.5916(T_2 - T_p))[\text{ГПа}],$$

$$T_p = 3/11, T_k = 1, T_i = 1/2, T_o = 3/11, \text{Po} = -1, \text{Bi} = 1.$$

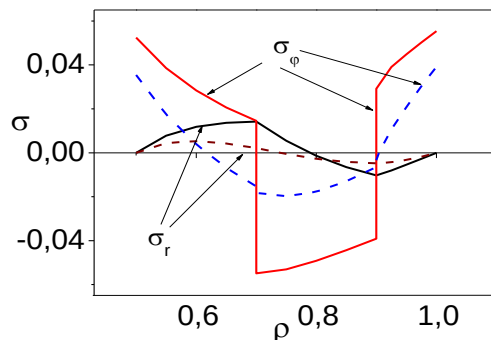


Рис.1. Розподіл радіальних та колових напружень у порожнистій кулі

Розподіли радіальних та колових напружень подані на рис. 1, де штрихові лінії відповідають нетермочутливій кулі з опорними характеристиками матеріалу, а суцільні лінії – тришаровій кулі з урахуванням температурної залежності фізико-механічних характеристик матеріалів від температури. Колові напруження визначені з формули (4), а деформації визначаються тоді з формул (5).

Висновок. Для даної комбінації матеріалів вплив залежності коефіцієнта теплопровідності від температури на розподіл напружень незначний, тому відповідні графіки, які це враховують, наведені. Врахування температурної залежності фізико-механічних характеристик суттєво впливає на величину термонапружень, особливо у середньому шарі.

Список використаних джерел

References

1. Горошко В. О. Математичне моделювання і визначення термопружного стану тришарової порожнистої кулі за складного теплообміну / В.О. Горошко, Б.М. Калиняк, В.С. Попович, І.І. Ракоча // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2016. – Вип. 14. – С. 123–132.
2. Кушнір Р. М. Про визначення усталеного термопружного стану багатшарових структур за високотемпературного нагрівання / Р. М. Кушнір, В. С. Попович // Вісн. Київ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2013. – № 3. – С. 42–47.
3. Попович В.С. Математичне моделювання та методика визначення статичного термопружного стану багатшарових термочутливих циліндрів / В.С.Попович, Б.М. Калиняк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – 57, №2. – С. 169-186.
4. Калиняк Б. М. Аналітичні вирази для напружень і термонапружень у довгому порожнистому неоднорідному термочутливому циліндрі / Б. М. Калиняк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – 50, № 2. – С. 132–86.
1. HOROSHKO, V.O., KALYNYAK, B.M., POPOVYCH, V.S. and RAKOCHA, I.I. (2016) Matematychnе modeluvannia i vyznachennya termoprzhnoho stanu trysharovoyi kuli za skladnoho teploobminu. *Prykl.probl. mech. i mat.* (14). p. 123–132.
2. KUSHNIR, R.M. and POPOVYCH, V.S. (2013) Pro vyznachennia ustalenooho termoprzhnoho stanu bahatosharovykh struktur za vysokotemperaturnoho nahrivannya. *Visn. Kyiv. Nats. Univ. imeni Tarasa Shevchenka. Ser. Phys.-Mat. Nauky.* (3). p. 42–47.
3. POPOVYCH, V.S. and KALYNYAK, B.M. (2016) Mathematical modeling and methods for the determination of the static thermoelastic state of multilayer thermally sensitive cylinders. *Journal of Mathematical Sciences.* 215 (2). p. 218–242.
4. KALYNYAK, B.M. (2007). Analitychni vyrazy dlia napruzhen i termonapruzhen u dovhomu porozhnystomu neodnoridnomu termochutlyvomu cylindri. *Mat.metody i phis.-mech.polia.* 50(2). p.79–86.

Надійшла до редколегії 12.11.2017

УДК 539.3:535.3:539.122

Лебедева І. В.¹, к.ф.-м.н., доц.,
Борисейко О. В.¹, к.ф.-м.н., доц.,
Ящук В. М.¹, д.ф.-м.н., проф.

Коливання металевих та напівпровідникових наночастинок

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4е,
e-mail: Lebedevai@ukr.net

I. V. Lebedyeva¹, Ph. D. (Phys.-Math.),
O. V. Boriseiko¹, Ph. D. (Phys.-Math.),
V. M. Yashchuk¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.).

Oscillations of metal and semiconductor nanoparticles

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4e,
e-mail: Lebedevai@ukr.net

У роботі досліджено можливість застосування класичної теорії пружності до напівпровідникових та металевих наночастинок. Зазначено, що на відміну від руху електронів, що обмежується розмірами наночастинок і призводить до залежності їх оптичних властивостей від їх розмірів, рухи атомів або іонів решітки практично не залежать від розмірів наночастинок у широкому діапазоні. Це дає підстави використати теорію пружності для опису механічних властивостей наночастинок. За результатами розв'язку задачі про вимушені коливання пружної ізотропної кулі отримано значення перших власних частот резонансного спектру наночастинок золота в кілогерцовому діапазоні. Отримано часову залежність спектрального положення максимуму оптичного поглинання металеві наночастинки за умов переважання квантоворозмірного механізму над іншими механізмами. Розглянуто експерименти з модуляції оптичного поглинання світла та випромінювання, а також можливі застосування даного ефекту.

Ключові слова: наночастинка, пружні коливання, оптичне поглинання та випромінювання.

In the paper the possibility to apply the classical theory of elasticity to semiconductor and metallic nanoparticles were examined. It was appointed that contrary to motion of electrons that is limited by sizes of nanoparticles that leads to the dependence of their optical properties on their sizes, the motions of atoms or ions of lattice do not disturbed essentially under variation of nanoparticle sizes. The latter gives the base to apply of the theory of elasticity for describing of nanoparticles mechanical properties. The application of this theory to gold solid spherical nanoparticles gives the values of their own oscillation frequencies in kilohertz diapason. The expression for oscillation of gold nanoparticle color (the first long-wave maximum of optical absorption) was obtained. The experiments on modulations of optical properties (the light absorption and emission) as well as possible application were discussed.

The results of research of the mechanical and optical properties interference of metallic and semiconductor nanoparticles were proposed to apply a) for information transfer (the effect of modulation of electromagnetic waves absorbed and emitted by nanoparticles); b) the creation of sensor systems for recording of elastic waves in condensed media (kilohertz range).

Key Words: nanoparticle, elastic oscillations, optical absorption and light emission.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Частинки твердої речовини, що мають характерні розміри менше ніж 200 нм, проявляють унікальні електронно-оптичні властивості, відмінні від таких для тіл більших розмірів чи суцільних середовищ (bulk materials). Такі частинки називають наночастинками (nanoparticles). Відмінність електронно-оптичних властивостей суцільних (bulk) матеріалів від

електронно-оптичних властивостей наночастинок в основному пов'язана з обмеженням руху електронів у наночастинках. Особливо залежності спектрів оптичного поглинання та випромінювання проявляються в наночастинках, що мають розміри декілька десятків нанометрів [1-4]. Яскравою ілюстрацією таких властивостей є відмінність кольорів суспензій наночастинок різних розмірів [5].

2. Особливості оптичних властивостей твердотілих наночастинок

На даний час досить добре вивчено електронно-оптичні властивості двох типів наночастинок: напівпровідникових (їх ще називають квантовими точками, *nanodots*) та металевих. Механізми електронних процесів, що спричиняють поглинання та випромінювання фотонів для цих типів наночастинок суттєво відрізняються. У металевих наночастинках поглинання та випромінювання світла пов'язано в основному з плазмонними коливаннями електронного газу та підсилені цими коливаннями зон-зонними переходами. У той же час, у напівпровідникових наночастинках особливості поглинання та випромінювання світла пов'язані з просторовими обмеженнями руху електрон-діркових пар. Саме просторове обмеження (фінітність) руху електронів призводить до появи нових енергетичних станів, квантові переходи в які спричиняють поглинання (у видимій області візуально сприймається як колір).

3. Особливості механічних властивостей твердотілих наночастинок

Рухи іонів просторової ґратки напівпровідникових матеріалів та металів значно слабше залежать від розмірів наночастинок, ніж рух електронів. Тому такі механічні властивості як пружність, на нашу думку, повинні зберігатися і для тіл дуже малих розмірів, оскільки навіть для двох нейтральних молекул, що взаємодіють за рахунок дисперсійних сил, у випадку малих відхилень від їх рівноважного положення виконується закон Гука (потенціал Ленарда-Джонса).

4. Застосування теорії пружності до опису малих коливань наночастинок сферичної форми

Представлені вище міркування є підставою для застосування моделі пружних коливань макроскопічних тіл до наночастинок різної форми та вивчення суперпозиції механічних коливань наночастинок з електронно-оптичними процесами, що відбуваються в них при взаємодії зі світлом.

Вираз для змінного радіуса моделі наночастинок-кулі шукаємо у вигляді

$$R(t) = R_0 + u_r(R_0, t).$$

Будемо розглядати задачу у сферичній системі координат.

Оскільки рух частинок кулі радіальний вектор переміщень буде мати лише одну ненульову компоненту:

$$\vec{u} = \vec{e}_r u_r(r, t).$$

Співвідношення Коші мають такий вигляд

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}.$$

Вирази ненульових компонент тензора напружень через радіальні переміщення частинок можна подати у формі:

$$\sigma_r = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \left((1-\nu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\nu \frac{u_r}{r} \right),$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_\theta = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \left(\nu \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right).$$

Тут E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона.

Диференціальне рівняння руху отримаємо з рівнянь рівноваги, приклавши інерційні сили:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}.$$

Граничні умови задамо наступним чином $\sigma_r|_{r=R_0} = \sigma_0 e^{i\omega t}$. Тут σ_0 – амплітуда зовнішнього гармонічного навантаження.

Запишемо диференціальне рівняння руху в переміщеннях:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} u_r = \frac{\rho}{(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2},$$

де λ, μ – коефіцієнти Ляме.

Зважаючи на характер навантаження, будемо шукати невідому функцію радіальних переміщень у вигляді гармонічної функції за часом:

$$u_r(r, t) = u(r) e^{i\omega t}.$$

Тоді для визначення амплітуди переміщень дістанемо звичайне однорідне диференціальне рівняння другого порядку:

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + 2r \frac{du}{dr} + ((\kappa r)^2 - 2)u = 0,$$

$$\kappa^2 = \frac{\rho \omega^2}{(\lambda + 2\mu)} = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2,$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}}$$

швидкість поширення радіальних просторових хвиль.

Загальний розв'язок даного рівняння має вигляд:

$$u(r) = C_1 j_1(\kappa r) + C_2 y_1(\kappa r),$$

$j_1(\kappa r)$, $y_1(\kappa r)$ – сферичні функції Бесселя першого та другого роду. Враховуючи рівність нулю переміщення центру кулі, покладемо $C_2 = 0$, оскільки $\lim_{r \rightarrow 0} y_1(r) = -\infty$. Тоді

$$u(r) = C_1 j_1(\kappa r).$$

Остаточно

$$R(t) = R_0 + u_r = R_0 + C_1 j_1(\kappa R_0) e^{i\omega t}.$$

Для визначення сталої інтегрування C_1 підставимо отриманий розв'язок у граничні умови, визначивши попередньо амплітуду радіальної компоненти тензора напружень:

$$\hat{\sigma}_r = \frac{EC_1}{(1-\nu)(1-2\nu)} \left((1-\nu)\kappa j_0(\kappa r) + \frac{2}{r} j_1(\kappa r) \right).$$

Тоді

$$C_1 = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \cdot \frac{\sigma_0 R_0}{(1-\nu)(\kappa R_0) j_0(\kappa R_0) + 2 j_1(\kappa R_0)}.$$

З умови нескінченного зростання амплітуди вимушених коливань отримаємо рівняння для визначення резонансних частот:

$$(1-\nu)(\kappa R_0) j_0(\kappa R_0) + 2 j_1(\kappa R_0) = 0.$$

Резонансні частоти при $\nu = 0,44$ мають значення

$$(\kappa R_0)_1 = 3,78, \quad (\kappa R_0)_2 = 6,73, \quad (\kappa R_0)_3 = 9,76, \\ (\kappa R_0)_4 = 12,83, \quad (\kappa R_0)_5 = 15,93.$$

Для золотої наночастинки ($\nu = 0,44$; $E = 79 \cdot 10^9$; $\rho = 19320$) з радіусом $R_0 = 100$ нм значення перших резонансних частот дорівнюють: 1030,61 Гц; 1834,91 Гц; 2661,04 Гц; 3498,06 Гц; 4343,27 Гц.

5. Залежності довжин хвиль максимумів поглинання наночастинок від їх радіусів

Довжина хвилі поглинання наночастинок (наприклад, CdSe) в діапазоні розмірів 1,2 – 3,2 нм з досить високою точністю пов'язана з їх розмірами досить простою формулою [5]:

$$R_{\text{нм}} = 0,172 \exp \left(\frac{\lambda_{\text{max}} [\text{нм}] - 252,7}{129,3} \right) \Rightarrow$$

$$\lambda_{\text{max}} [R(t)] = 252,7 + 129,3 \ln \frac{R}{0,172}.$$

Для металевих наночастинок за умов переважання квантоворозмірного механізму над іншими механізмами (ефект стиснення ґратки наночастинки та ефект поверхневого розсіювання електронів, що виникає, коли розмір наночастинки стає меншим ніж довжина вільного пробігу електронів) залежність довжини хвилі максимуму в спектрі поглинання має вигляд [6]:

$$\lambda_{\text{max}} [R] = \frac{hcm^* R^2}{2\pi^2 \hbar^2 (2\Delta n + \Delta l + 2)^2},$$

де m^* – ефективна маса електрона, n та l – головне та орбітальне квантові числа електрона. Підстановка загального розв'язку $R(t)$ у формулу для $\lambda_{\text{max}} [R(t)]$ дає закон осциляції кольору наночастинки

$$\lambda_{\text{max}} [R(t)] = \frac{hcm^* (R_0 + C_1 j_1(\kappa R_0) e^{i\omega t})^2}{2\pi^2 \hbar^2 (2n + l + 2)^2}.$$

Тому, знання залежності $R(t)$ у випадку власних чи вимушених коливань наночастинки дає можливість отримати зміну довжини хвилі поглинання наночастинки, що спричинена цими коливаннями. У результаті можна спостерігати ефект, зображений на рис. 1.

Висновки

1. У наночастинках металів та напівпровідників, починаючи з деяких певних розмірів, має місце обмеження руху електронів. Ця фінітність руху електронів спричинює низку розмірно залежних оптичних ефектів – кардинальні зміни у поглинанні (кольорі) та у спектрах випромінювання.

У той же час, зміни розмірів наночастинок істотно не впливають на рух іонів ґратки. Саме цей факт дає підстави застосовувати до наночастинок класичну теорію пружності.

2. Застосування теорії пружності до опису власних коливань наночастинок золота із заданими розмірами та, вважаючи, що значення пружних констант приблизно дорівнює відповідним значенням для суцільного середовища, дають значення частот коливань у кілогерцовому діапазоні.

3. Зміни в спектрах поглинання призведуть до змін у спектрах випромінювання наночастинок.

Таким чином, ми прогнозуємо появу двох ефектів, спричинених коливаннями наночастинок: а) осциляції положення максимуму спектру поглинання наночастинок (осциляція кольору); б) осциляції положення максимуму спектру випромінювання наночастинок при їх відповідному збудженні.

4. Результати досліджень зв'язку механічних та оптичних властивостей наночастинок можуть бути використані: а) для передачі інформації (ефект модуляції електромагнітних хвиль, що поглинаються та випромінюються наночастинами), б) у створенні сенсорних систем, що реєструють пружні хвилі у кілогерцовому діапазоні.

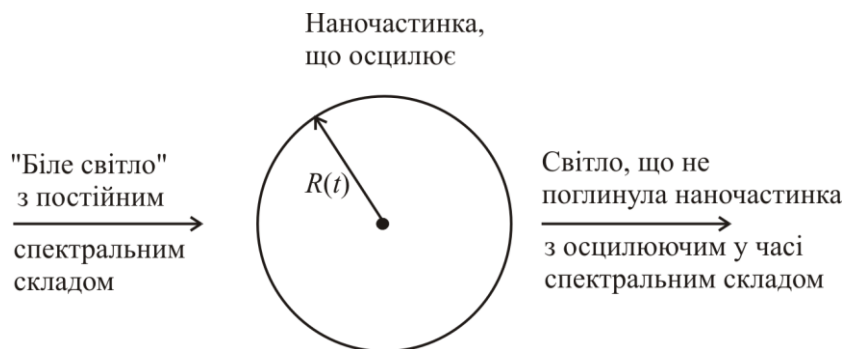


Рис. 1 Ілюстрація ефекту зміни довжини хвилі поглинання наночастинок, спричиненої цими коливаннями.

Список використаних джерел

1. Blanton S.A. Photoluminescence wandering in single CdSe nanocrystals / S.A. Blanton, M.A. Hines, P. Guyot-Sionnest // *Applied Physics Letters*. – 1996. – №69. – С. 3905-3907.
2. Empedocles S.A. Photoluminescence spectroscopy of single CdSe nanocrystallite quantum dots / S.A. Empedocles, D.J. Norris, M.G. Bawendi // *Phys. Rev. Lett.* – 1996. – №77. – С. 3873-3876.
3. Gammon D. Optical studies of single quantum dots / D. Gammon, D. G. Steel // *Physics Today* – 2002. – №10. – С. 36-41.
4. Mishchenko M.I. Scattering, absorption and emission of light by small particles. / M.I. Mishchenko, L.D. Travis, A. Lacis. – Cambridge: Cambridge University Press, 2002. – 376 с.
5. Дмитрук І.М. Електронні процеси в наноструктурах. / І. М. Дмитрук. – Київ: Четверта хвиля, 2013. – 208 с.
6. Єщенко О. А. Плазмоніка. / О. А. Єщенко. – Київ: Фенікс, 2013. – 176 с.

References

1. BLANTON, S., HINES, M., and GUYOT-SIONNEST, P. (1996) Photoluminescence wandering in single CdSe nanocrystals. *Applied Physics Letters*. 69. p.3905-3907.
2. EMPEDOKLES, S., NORRIS, D. and BAWENDI, M. (1996) Photoluminescence spectroscopy of single CdSe nanocrystallite quantum dots. *Phys. Rev. Lett.* 77. p.3873-3876.
3. GAMMON, D. and STEEL, D. (2002) *Physics Today*. (October). p. 36-41.
4. MISHCHENKO, M., TRAVIS, L. and LACIS, A. (2002) *Scattering, absorption and emission of light by small particles*. Cambridge: Cambridge University Press.
5. DMITRUK, I. (2013) *Electronni processy v nanostrukturah*. Kyiv: Chetverta hvylya.
6. YESHCHENKO, O. (2013) *Plazmonika*. Kyiv: Phenics.

Надійшла до редколегії 08.09.17

УДК 534

Лежосєв Р. С.¹, к. т. н., пров. інж.-ел.

R. S. Lezhoyev¹, Ph.D.

**Вимірювальний перетворювач
геометричних і механічних величин з
ємнісними давачами**

**Measuring transducer of geometrical and
mechanical quantities with capacity sensors**

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Акад.
Глушкова 4-е,
e-mail: measure@voliacable.com

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e,
e-mail: measure@voliacable.com

Ємнісні давачі використовують для вимірювання розмірів, переміщень та деформацій, а також зусиль, прискорень та положення у полі тяжіння, тобто фізичних параметрів, які можуть бути приведені до переміщення. Такі давачі зазвичай мають принципово лінійну функцію перетворення, котра піддається простому аналітичному розрахунку. Складнощі застосування ємнісних давачів зумовлені насамперед дуже малим значенням їх часткових ємностей, котрі у сотні, а іноді в тисячі разів менші у порівнянні з нестабільною паразитною ємністю конструкції та ліній зв'язку з вимірювальним приладом. Часткові ємності суттєво залежать від температури і тиску, котрі складним чином впливають на діелектричну проникність та геометричні розміри конструктивних елементів.

Для подолання впливу паразитних параметрів ємнісні давачі будують на основі кількох (або ж навіть багатьох) часткових ємностей, які різним чином пов'язані з вимірюваною фізичною величиною. Це створює інформативну надлишковість, котру можна використати для компенсації неінформативних впливів розрахунковими методами.

Стаття присвячена побудові універсального вимірювального перетворювача, здатного реалізувати просту дробово-лінійну функцію перетворення, аргументами якої є часткові ємності давача відносно одного спільного електроду.

Ключові слова: вимірювання, давач, ємність, компенсація.

Capacitive sensors are used to measure dimensions, displacements and deformations, as well as effort, acceleration and position in the gravitational field, that is, the physical parameters that can be displaced. Such sensors usually have a fundamentally linear transformation function, which is subjected to a simple analytical calculation. The complexity of the use of capacitive sensors is primarily due to the very small value of their partial capacitances, which are hundreds, and sometimes thousands of times smaller, in comparison with the volatile parasitic capacitance of the design and communication lines with the measuring device. Partial capacities are significantly dependent on temperature and pressure, which have a complex effect on dielectric permeability and geometric dimensions of structural elements. In order to overcome the influence of parasitic parameters, capacitive sensors are built on the basis of several (or even many) partial capacitances, which are in various ways related to the measured physical value. This creates informative redundancy, which can be used to compensate for non-informative influences by calculated methods.

This paper is devoted to the construction of a universal measuring transducer capable of implementing a simple fractional-linear transformation function whose arguments are partial capacitors of the sensor relative to one common electrode.

Key Words: measurement, sensor, capacity, compensation.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Ємнісні давачі використовують для вимірювання розмірів, переміщень та деформацій, а також зусиль, прискорень та положення у полі тяжіння, тобто фізичних параметрів, які можуть бути приведені до переміщення. Такі давачі зазвичай мають принципово лінійну функцію перетворення, котра піддається простому аналітичному розрахунку. Ця лінійна залежність зумовлена тим, що електрична ємність є безпосередньо лінійною або дробово-лінійною функцією геометричних параметрів електродів, а також щільності та діелектричних властивостей середовища між електродами.

Складнощі застосування ємнісних давачів зумовлені насамперед дуже малим значенням їх часткових ємностей: від одиниць до кількох десятків часток пікофаради, – котрі у сотні, а іноді в тисячі разів менші у порівнянні з нестабільною паразитною ємністю конструкції та ліній зв'язку з вимірювальним приладом. Окрім того, часткові ємності суттєво залежать від температури і тиску, котрі складним чином впливають на діелектричну проникність та геометричні розміри конструктивних елементів.

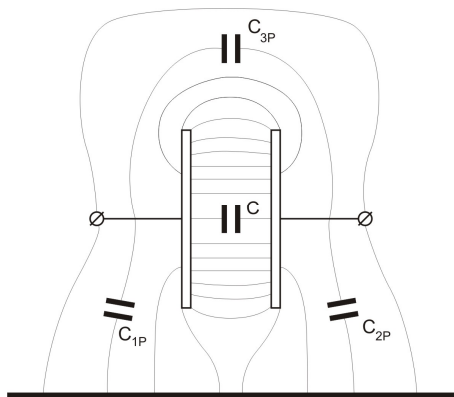


Рис. 1. Паразитні ємності відносно інформативної часткової ємності

Вплив паразитних ємностей C_{1P} та C_{2P} може бути зменшений відповідною процедурою вимірювання ємності, а C_{3P} – вживанням специфічного захисту за допомогою додаткового електроду, що екранує, відомого з часу створення конденсатора Кельвіна [1].

Для подолання впливу інших паразитних параметрів ємнісні давачі будують на основі кількох (або ж навіть багатьох) часткових ємностей, які різним чином пов'язані з вимірюваною фізичною величиною. Це створює інформативну надлишковість, котру можна використати для компенсації неінформативних впливів розрахунковими методами.

2. Вибір типу вимірювального перетворювача

Компенсаційні електричні вимірювальні перетворювачі найкращим чином пристосовані для роботи з ємнісними давачами. Їх переваги зумовлені передусім якісною компенсацією паразитних ємностей – адже ці паразитні ємності включаються паралельно виходу джерела напруги (тобто закорочуються дуже низьким вихідним опором джерела), або паралельно входу детектора балансу (у стані компенсації на цьому вході присутній нульовий сигнал, тобто струм через паразитну ємність відсутній). Типовим є використання вимірювальних ланцюгів з синусоїдальним сигналом, але у випадку часткових ємностей з якісним діелектриком (вакуум, сухе повітря, органічні або мінеральні оливи) цілком припустимо застосувати прямокутні сигнали живлення. Важливою перевагою компенсаційних перетворювачів є можливість підключення багатьох часткових ємностей до єдиного спільного електроду – адже результат вимірювання кожної окремої часткової ємності є інваріантний до інших. Механізм забезпечення такої інваріантності тотожний такому по відношенню до паразитних ємностей.

Стаття присвячена побудові універсального вимірювального перетворювача, здатного реалізувати просту дробово-лінійну функцію перетворення, аргументами якої є часткові ємності $C_1 \dots C_6$ давача відносно одного спільного електроду.

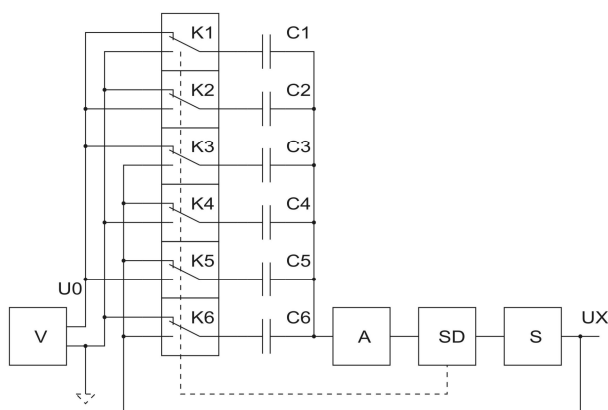


Рис. 2. Схема вимірювального перетворювача

Схема складається з джерела V стабільної напруги U_0 та аналогових ключів $K_1 \dots K_6$, котрі формують прямокутні сигнали на електродах часткових ємностей $C_1 \dots C_6$. Підсилювач сигналу нерівноваги A , фазочутливий детектор SD та інтегратор S складають астатичну систему врівноваження компенсаційного перетворювача, яка слідкує за станом сигналу нерівноваги та намагається у реальному плінні часу привести

його до нуля. Пристрій реалізує на аналоговому рівні (до аналого-цифрового перетворювача) наступну функцію:

$$UX = U0 \frac{C1 - C2 + C3 - C5}{C3 - C4 - C5 + C6}$$

Особливість цієї функції – пропорційна залежність вихідного сигналу UX від напруги $U0$ та від безрозмірної дробово-лінійної функції інформативних часткових ємностей $C1...C6$ (деякі з яких можуть бути відсутні, тобто дорівнювати нулю). Під час роботи з інтегральним АЦП сигнал $U0$ може бути використаний у якості його напруги опору, тому цифровий код АЦП може бути інваріантним до його значення.

Прикладом реального використання такого вимірювального перетворювача з комутаційними джерелами прямокутної напруги є самокомпенсований ємнісний рівнемір [2], який дозволяє повністю компенсувати зміну діелектричної проникності рідини та середовища над нею з температурою та у плінні часу. Його функція

$$UX = U0 \frac{C - C_{top}}{C_{bot} - C_{top}}$$

базується на корекції основної інформативної ємності C рівнеміра двома референсними – верхньою C_{top} і нижньою C_{bot} .

Звісно, можливо було б вимірювати часткові ємності окремо, а потім розраховувати потрібну функцію цифровим способом. Проте, АЦП мають обмежену роздільну здатність, а вимірювані параметри знаходяться під впливом електромагнітних та механічних перешкод. Обчислення, наприклад, різниці двох близьких за значенням часткових ємностей у такій ситуації може спричинити до великих похибок, аж до повного спотворення результату вимірювань, а послідовне вимірювання часткових ємностей неодмінно викличе появу динамічної похибки через зміну вимірюваного параметру та паразитних впливів у часі.

3. Метрологічні властивості

Точність виконання основної функції перетворення залежить від стабільності джерела напруги $U0$, неідеальності аналогових ключів $K1...K6$ та якості детектора сигналу нерівноваги на елементах A та SD . Вплив джерела напруги $U0$ одразу можна виключити з бюджету метрологічної невизначеності результату якщо застосовано логометричний АЦП, тобто АЦП з використанням зовнішньої референсної напруги $U0$. Власний опір та витоки аналогових ключів дають нехтовно малий вплив, тому що струм

через реальні часткові ємності давача – зникаюче малий, а отже не може викликати помітного падіння напруги на ключах. Виключення можуть виявитися лише у присутності дуже великих паразитних ємностей, котрі затягуватимуть фронти прямокутної напруги, створюючи RC-ланцюжки разом з залишковим опором ключів. Невизначеність цього типу може бути записана наступною функцією:

$$\delta_\tau \approx \frac{C1 \cdot C2}{(C1 + C2)^2} \cdot \left(\frac{\tau2 - \tau1}{\tau\Sigma} + \frac{\tau1}{\tau\Sigma} \cdot e^{-\frac{T}{\tau1}} - \frac{\tau2}{\tau\Sigma} \cdot e^{-\frac{T}{\tau2}} \right)$$

де $C1, C2$ – актуальні часткові ємності для найпростішого – двоємнісного давача (або суми груп позитивних та від'ємних часткових ємностей у повній формулі), $\tau1, \tau2$ – постійні часу на виходах ключів, $\tau\Sigma$ – постійна часу на вході підсилювача сигналу нерівноваги, T – час дії прямокутного імпульсу. Оскільки звичайно вибирають $T \gg \tau1, \tau2$, цей вираз можна істотно спростити:

$$\delta_\tau \approx \frac{C1 \cdot C2}{(C1 + C2)^2} \cdot \frac{\tau2 - \tau1}{\tau\Sigma}$$

Різниця параметрів $\tau2 - \tau1$ зазвичай в декілька разів менша за кожний з них, але не може бути нехтовною, тим більше, що вона є принципово нестабільною. А от збільшити $\tau\Sigma$ – цілком можливо: адже вхідний опір підсилювача реально зробити $1...10$ МОм. Крім того, можна наростити $\tau\Sigma$ збільшуючи вхідну ємність підсилювача: чутливість системи врівноваження від цього пропорційно зменшиться, але це можна компенсувати підвищенням коефіцієнту підсилення (без ризику втрати стійкості).

Якість підсилювача A та фазочутливого детектора SD – критичні параметри для визначення метрологічної невизначеності перетворювача. Підсилювач повинен мати достатньо широку частотну смугу, яка у декілька десятків разів перекидає робочу частоту переключення аналогових ключів, дуже малий зсув фази на декількох ближніх вищих гармоніках цієї частоти і відсутність резонансних викидів на верхніх частотах, щоб не спотворювати істотно фазу сигналу нерівноваги. Адже саме фаза сигналу нерівноваги є головною вказівкою для визначення напрямку компенсації, а навіть часткове утворення у сигналі нерівноваги ортогональної складової створює еквівалент зсуву нуля для фазочутливого детектора. Це не створює помилок врівноваження, але може збільшити похибку, яка зумовлена зсувом нуля на вході інтегратора S .

Інший важливий додаток до зсуву нуля на вході інтегратора – це вплив фазочутливого детектора. Цей вузол побудовано на аналогових ключах по схемі синхронного подвоєння напруги на допоміжному конденсаторі. На відміну від ключів K1...K6, ключі детектору мають особливі властивості: їх опір у відкритому стані не має значення, але дуже важливий параметр – проникнення у канал управляючої напруги. Адже накид заряду через паразитну ємність затвору випрямляється таким же чином, як і сигнал на виході підсилювача. Це може істотно збільшити зсув нуля на вході інтегратора S.

Сумарну невизначеність, яка спричиняється зсувом нуля інтегратора, можна записати таким чином:

$$\delta_U \approx \frac{E}{k \cdot U_0} \cdot \frac{C\Sigma}{C_1 + C_2},$$

де E – зсув нуля на вході інтегратора (звичайно, 1...5 мВ), U_0 – напруга стабільного джерела, k – коефіцієнт підсилення системи врівноваження (тобто, добуток коефіцієнтів підсилювача, фазового детектора та інтегратора), C_1 , C_2 – актуальні часткові ємності для найпростішого – двоємнісного давача, $C\Sigma$ – вхідна ємність підсилювача.

Оцінка загальної невизначеності результату вимірювання, яка розрахована за формулами, що наведені, звичайно не перевищує 0.01% відносно повного діапазону вимірювання.

4. Експериментальні дослідження

Перевірка лінійності та стабільності основної функції перетворення у часі та при зміні температури відбувалася за допомогою вірцевих мір малої ємності 2-го розряду – 10 пФ (КМЕ-101, 0.02%), 0.1 пФ та 0.5 пФ (КМЕ-11, 0.02%), з

короткочасною нестабільністю не гірше 0.0005%, конденсатора змінної ємності від 0.05 до 10 пФ (нестандартного) з короткочасною нестабільністю не гірше 0.005%, та цифрового вольтметра 6040 фірми Prema (Німеччина) з похибкою, що не перевищує 0.001% на діапазоні 10 В у логометричному режимі (з зовнішнім джерелом референсної напруги). Короткочасна нестабільність метрологічного обладнання вказана за даними виробника.

Лінійність функції перетворення досліджувалась методом накопичення ємності на конденсаторі змінної ємності, а саме: паралельно цьому конденсатору включався конденсатор малої ємності (0.1 пФ чи 0.5 пФ), показання цифрового вольтметра запам'ятовувалися, а потім, після видалення конденсатору малої ємності, відтворювалися за допомогою мікрогвинта конденсатора змінної ємності. Ця процедура повторювалася до повного вичерпання діапазону вимірювання. Відхил від лінійності на кожному з відрізків функції перетворення не вийшов за межі 0.003%, а оскільки бюджет метрологічної невизначеності вірцевого обладнання мав таку саму оцінку, то можна вважати, що дана оцінка є «песимістичною», тобто, прийнята в якості найгіршого випадку.

Стабільність поведінки перетворювача оцінювалася декілька разів, кожен раз – з інтервалом у три дні при різних температурах (від +18С до +26С). Максимальне відхилення абсолютних значень відліків показань цифрового вольтметра для відповідних пунктів функції перетворення склало 0.007%, і мало характер розподілення за нормальним законом, без явної кореляції з температурою спостереження.

Список використаних джерел

1. Maxwell J.C. A Treatise on Electricity and Magnetism. V.1. / J. C. Maxwell. – Oxford; Clarendon, 1873. – 460 с.
2. Карандеев К. Б. Емкостные самокомпенсированные уровнемеры / К. Б. Карандеев, Ф. Б. Гриневич, А. И. Новик. – М., Л.: Энергия, 1966. – 136 с.

References

1. MAXWELL, J. C. (1873) *A Treatise on Electricity and Magnetis.*, V.1. Oxford: Clarendon.
2. KARANDEYEV, K., GRINEVICH, F., NOVIK, A. (1966) *Emkostniye samokompensirovanniye urovnmery.* Moskva, Leningrad: Energia.

Надійшла до редколегії 19.09.17

УДК 621.317.385

Лежосєв Р. С.¹, к. т. н., пров. інж.-електронік.

**Вимірювання та контроль енергії
живлення електронних приладів з
мікро- і нано-амперним струмом
споживання**

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Акад.
Глушкова 4-е,
e-mail: rostleg@gmail.com

R. S. Lezhoyev¹, Ph.D.

**Measurement and control of power supply of
electronic devices with micro and nano-
ampere consumption current**

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e,
e-mail: rostleg@gmail.com

Для геодезичних зондів, інших мобільних дослідницьких об'єктів, використовують первинні джерела струму обмеженої ємності через лімітовані параметри об'єму та ваги. Розробка таких пристроїв потребує контролю енергії споживання. Пряме вимірювання струму або підсумовування середнього струму споживання різних фаз роботи дають помилковий, значно занижений результат. Це відбувається через швидкоплинні перехідні процеси.

Виміряти реальне споживання можна по втраті заряду накопичувального конденсатора з лінійним стабілізатором напруги. Втрата потенціалу конденсатора за час спостереження дає оцінку заряду, а середній струм можна визначити поділивши цей заряд на час спостереження. Але така процедура є незручною для автоматичного контролю. Лінійний стабілізатор малої потужності додає значну власну похибку через короткі імпульси споживання.

Проблема вирішується за допомогою системи автоматичного відновлення заряду конденсатора імпульсами сталої довжини та струму. Необхідно лише забезпечити метрологічну сталість параметрів імпульсу. Зміна струму та характеру споживання безпосередньо впливатиме лише на інтервал повторення імпульсів, тобто їх частота буде інтегральною оцінкою середнього струму споживання.

Ключові слова: вимірювання, споживання, струм, потужність.

Primary sources of limited capacity are used for geodetic probes and other mobile research objects because of the limited volume and weight. The development of such devices requires experimental evaluation and technological control of energy consumption. Direct measurement of current or summation of the current consumption of different phases of the device, taking into account the duration of each phase give a false, significantly understated result. This is due to transient processes, through currents, charge and discharge of parasitics on blocking capacities.

Measuring real consumption can be due to loss of charge capacitor with a linear voltage regulator. Capacitor loss during observation gives an estimate of charge, and the average current can be determined by dividing this charge by observation time. But such an procedure is inconvenient for automatic control. Linear low power stabilizer adds a significant self-error due to short pulses of consumption.

The problem is solved by means of the system of automatic restoration of capacitor charge by pulses of constant length and current. It is necessary to provide metrological stability of the parameters of the impulse. Changing the current and the nature of consumption will directly affect only the interval of repetition of pulses, that is, their frequency will be an integral estimate of the average consumption current.

Keywords: measurement, consumption, current, power.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Для вимірювальних та зв'язкових електронних пристроїв геодезичних зондів, мобільних дослідницьких об'єктів використовують первинні джерела струму обмеженої ємності через лімітовані параметри об'єму та ваги. Розробка таких пристроїв неможлива без попередньої експериментальної оцінки та технологічного контролю енергії споживання підчас експлуатації. Для досягнення мінімально можливого середнього струму всі активні компоненти більшість часу свого функціонування перебувають в режимі сну, очікування або ж навіть повного вимкнення, а в активній фазі знаходяться епізодично, дуже короткий термін, буває, протягом нехтовно малої за часом частини періоду найвищої тактової послідовності приладу.

Оцінка струму споживання зазвичай відбувається прямим вимірюванням середнього струму окремо у кожному з робочих режимів, які використовують. Потім середні значення струмів підсумовують, попередньо домноживши їх на реальний термін дії відповідного режиму. Так отримують загальну теоретичну оцінку заряду, який було спожито за час повного циклу роботи пристрою. Середній струм споживання обчислюють, поділивши цей заряд на час повного циклу, який включає терміни дії всіх складових режимів приладу. Але цей метод зазвичай дає хибний, необґрунтовано оптимістичний результат, занижений, іноді навіть в декілька разів. Це відбувається через перехідні процеси підчас активації/вимкнення окремих компонентів приладу, динамікою наскрізних струмів у комплексних напівпровідникових структурах, зарядом та розрядом паразитних та блокуючих ємностей. Саме ці паразитні явища часто складають лівову частку споживання електронних пристроїв.

Інший шлях – сервісні вимірювачі, які контролюють споживання у реальному часу. За допомогою швидкісного АЦП періодичні виміри миттєвих значень струму можуть бути інтегровані для оцінки середнього споживання. Але й цей метод часто дає помилкові оцінки, тому що амплітудні викиди струму з великою вірогідністю можуть бути втрачені, якщо не потраплять у сітку дискретизації АЦП, або ж навпроти – необмежено та необґрунтовано збільшити оцінку середнього струму, спираючись саме на короточасні регулярні амплітудні викиди.

2. Вимірювальна процедура

Виміряти реальне споживання можна по втраті заряду накопичувального конденсатора, до якого підключають лінійний стабілізатор напруги з дуже малим і стабільним власним споживанням I_{stab} . Конденсатор достатньої ємності заряджають до максимальної напруги, яка припустима на вході стабілізатора, та розряджають до мінімальної. Різниця потенціалу ΔU конденсатора на початку і в кінці фази спостереження дає оцінку загального заряду, який було на ньому втрачено, якщо відома його ємність C , а середній струм споживання I_{AV} можна визначити, поділивши цей заряд на час τ , за який він був спожитий, мінус власне споживання стабілізатора (разом із струмом витоку конденсатора):

$$I_{AV} = \frac{\Delta U \cdot C}{\tau} - I_{stab}.$$

Цей метод дає напрохуд змістовну оцінку споживання навіть у вкрай важких умовах, коли амплітуда викидів струму у десятки тисяч разів перевищує середній вимірюваний струм, а термін дії таких викидів набагато коротший за період актуальної тактової послідовності. Суттєвий недолік методу – присутність лінійного стабілізатора напруги. Адже струм його споживання I_{stab} не є величиною, яка метрологічно визначена. I_{stab} має дуже широкий діапазон невизначеності та реально велику залежність від температури та струму споживання. Через це переваги мають лінійні стабілізатори з наднизьким власним споживанням. Але саме такі стабілізатори є досить інерційними – в імпульсному режимі вони встановлюють напругу з запізненням у часі. На час цього запізнення мають місце падіння (або викиди!) напруги на їх виході, а головне – відбувається істотне неконтрольоване підвищення струму власного споживання. Це зменшує точність вимірювання струму споживання, а саме, дещо віртуально збільшує оцінку струму.

Але головний недолік методу – це його «процедурний» характер. Він годиться для експерименту, випробувань, і є незручним для автоматичного контролю.

3. Метод імпульсної стабілізації

Подолати ці неприємності можна заміною конденсатора великої ємності з лінійним стабілізатором імпульсною системою автоматичної стабілізації напруги на конденсаторі мікро-

порціями заряду, як у звичайних DC-DC перетворювачах. Сучасні імпульсні стабілізатори напруги (наприклад, TPS62740 Texas Instruments) у мікропотужному режимі можна використовувати для об'єктивної оцінки струму споживання, оскільки частота їх функціонування лінійно (у першому припущенні) залежить від струму навантаження. Проте, для метрологічної визначеності такий підхід незадовільний: частота безпосередньо залежить, окрім струму, ще й від напруги живлення, напруги на виході, характеристик насичення у сердечнику дроселя. Навіть калібровка частотної залежності такого стабілізатора від струму не дає пристойного результату, оскільки параметри імпульсу істотно нестабільні, змінюються з температурою та у часі.

Необхідно мати більш стабільний генератор компенсаційних імпульсів, а саме – формувати прямокутний імпульс струму, амплітуда якого та довжина у часі є постійними. Тоді розмір порції заряду визначатиметься терміном дії імпульсу та значенням середнього струму за час цього імпульсу. Зміна струму та характеру споживання безпосередньо впливатиме лише на інтервал повторення імпульсів, тобто їх частота буде інтегральною оцінкою середнього струму.

Математично запропонований спосіб вимірювання середнього струму споживання є ідентичний інтегруючому АЦП сигма-дельта типу [1] та найкращим чином пристосований для визначення робочого ресурсу електронних приладів при живленні від первинних чи поновлюваних джерел.

Відомо, що електрична ємність конденсатору накопичення визначається так: $C = dQ/dU$, де Q та U , відповідно, заряд та напруга на конденсаторі. Якщо конденсатор лінійний, тобто його ємність у нормальному режимі роботи не залежить від напруги, можна записати простіше: $C = Q/U$. Заряд на конденсаторі є інтегралом струму, що втікає чи витікає за час спостереження T :

$$Q = \int_T I_X(t) \cdot dt,$$

а отже, напруга на ньому буде визначатися виразом:

$$U(T) = C \cdot \int_T I_X(t) \cdot dt.$$

В усталеному режимі напруга на виході стабілізатора має незначні коливання біля значення, яке стабілізується. Це можна пояснити балансом заряду, який втрачається під час розряду навантаження за час спостереження T , та

заряду відновлення за цей же час, який створюється необхідною кількістю N елементарних порцій сталого струму I_0 каліброваної довжини τ у часі:

$$C \cdot \int_T I_X(t) \cdot dt = N \cdot C \cdot \int_\tau I_0 \cdot dt.$$

Ємність C у цьому виразі одна й та сама, її можна скоротити, а отже, загальний заряд дорівнює:

$$Q = \int_T I_X(t) \cdot dt = N \cdot I_0 \cdot \tau.$$

А середній струм споживання за час T :

$$I_M = Q/T = \frac{N}{T} \cdot I_0 \cdot \tau = F \cdot I_0 \cdot \tau,$$

де F – середня частота повторення імпульсів.

Подвійна амплітуда коливань напруги біля значення стабілізації може бути визначена теж достатньо просто в залежності від параметрів компенсуючих імпульсів:

$$\Delta U = C \cdot I_0 \cdot \tau$$

4. Експериментальна схема

Реалізувати схему найпростіше за допомогою програмованого контролера з додаванням елементів аналогової схемотехніки, які зображено на рис.1. Метрологічну стабільність струму I_0 забезпечує джерело постійного струму на основі емітерного повторювача з транзистором VT1. Для параметрів, указаних на схемі, вибрано значення струму 50 мА. Імпульс вмикання струму стабільної довжини τ (наприклад, 50 мкс) можна забезпечити на лінії TAU засобами програмованого контролера, а саме, таймером чи фіксованою послідовністю команд процесора, якщо його тактова послідовність стабілізована кварцевим резонатором. Безпосередньо формування імпульсу струму відбувається завдяки логічному перетворювачу рівня напруги на ізоляторі DD2 та локальному джерелу стабілізованої напруги DD3, прив'язаному до позитивного полюсу джерела підвищеної напруги +20V. Значення напруги +10V на відповідній лінії може формуватися контролером або визначатися окремим пристроєм – стабілізатором напруги, якщо необхідно отримати на виході пристрою напругу, яка виходить за межі живлення контролера. У нашому випадку ми використали в якості сигналу +10V лінію живлення контролера 3,3 V, але цілком можливо задавати на цій лінії опорну напругу від +1.2 до +12 V –

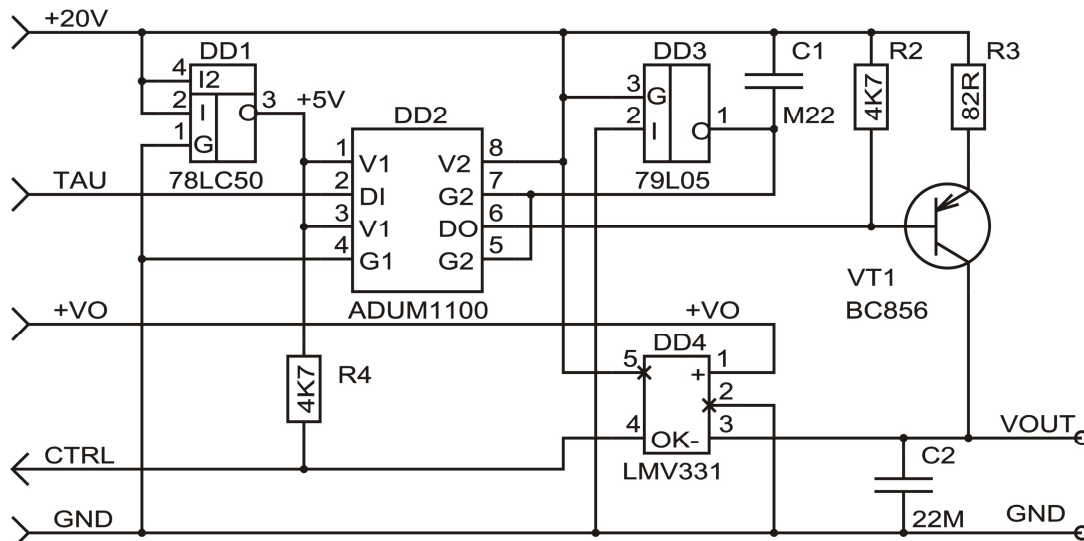


Рис. 1. Схема аналогової частини вимірювача.

саме значення цієї напруги визначає рівень сигналу, який стабілізується на виході пристрою V_{OUT} . Сигнал зворотнього зв'язку на лінії $CTRL$, який є необхідним для роботи контролера у якості імпульсного стабілізатора напруги, формується компаратором напруги $DD4$, який порівнює значення напруги на накопичувальному конденсаторі $C2$, тобто на виході пристрою, з рівнем сигналу $+V0$. Імпульс TAU формується контролером за фактом отримання сигналу $CTRL$. При ємності накопичувального конденсатора 22 мкФ, яка вказана на рисунку, амплітуда коливань напруги, що стабілізується, складає приблизно 0.1 В. Ці коливання можна істотно зменшити, поставивши конденсатор більшої ємності та пасивний LC-фільтр.

5. Висновки

Експериментальна перевірка показала, що вимірювання струму споживання даним методом повністю співпадає з розрахунками. В діапазоні вимірювань середнього струму I_M від 1 мкА до 20 мА з короткочасними викидами до 1500 мА

похибка вимірювань не перевищила значення $0.1 \text{ мкА} \pm 0.01 \cdot I_M$. При цьому ємність накопичувального конденсатора, напруга живлення та стабілізації ніяк не впливають на результат вимірювання.

Перспективи подальшого удосконалення пристрою є доволі очевидними: зменшення амплітуди коливань та підвищення діапазону струму споживання об'єкту вимірювань. Обидві задачі можуть бути успішно вирішені, якщо вдасться підняти енергетичну ємність імпульсу одночасно зі скороченням його тривалості. Це призведе до збільшення робочої частоти системи стабілізації напруги, що, між іншим, суттєво полегшить фільтрацію пульсацій. Ці проблеми є досить традиційними для сучасних імпульсних стабілізаторів напруги. Необхідно забезпечити швидкодію системи стабілізації та зменшити складову частину енергії, яка втрачається під час перехідних процесів комутації джерела струму на підвищених частотах, заради стабільності функції перетворення струм-частота.

Список використаних джерел

1. Голуб В. С. Сигма-дельта-модуляторы и АЦП / В. С. Голуб // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. – 2003. – №4. – С. 35–41.

References

1. GOLUB V. S. (2003) Sigma-delta-modulatory i ACP. *Technologia i konstruirovaniye v elektronnoy apparature*. 4. p. 35–41.

Надійшла до редколегії 21.08.17

УДК 539.3

Лубков М. В. д.ф.-м.н., с.н.с.

**Застосування в'язкопружної моделі
Кельвіна-Фойгта для моделювання
геотектонічних процесів**

Полтавська гравіметрична обсерваторія
НАНУ, 36015, м. Полтава, вул. Мясоедова
27/29, e-mail: mikhail.lubkov@ukr.net

M. V. Lubkov, Dr. Sci. (Phys.-Math.)

**Using of the visco-elastic Kelvin-Voigt model
for modeling of geotectonic processes**

Poltava Gravimetric Observatory of NASU,
36015, Poltava, Myasoedova st., 27/29,
e-mail: mikhail.lubkov@ukr.net

Розглянуто моделювання і геофізичну інтерпретацію результатів у таких областях геотектоніки, як середньомасштабне складкоутворення в осадових породах земної кори та формування геоструктур під впливом різноспрямованих рухів тектонічних блоків. Для вирішення цих геотектонічних проблем застосовано в'язкопружну варіаційну скінчено-елементну методику в рамках лінійної в'язкопружної феноменологічної моделі Кельвіна-Фойгта.

Ключові слова: комп'ютерне моделювання, геотектонічні процеси, в'язкопружна модель Кельвіна-Фойгта.

We consider modeling and geophysical interpretation of the obtained results in such fields of geotectonics, as a middle scale folding in sediments and forming of geostructures under influence of differently directed tectonic blocks movements. For solving these geotectonic problems, we use visco-elastic variation finite element method for resolving two-dimensional and three-dimensional problems. At that case, we consider long-term process of deforming of multicomponent geologic environment under acting of the slow geophysical forces. Physic-chemical mechanisms of visco-elastic relaxation in the sedimental crust, at that case, can pass due to diffusion creep and creep connected with presence of water. Such mechanisms lead to the creep processes in sediments with hardening and we can describe it on the base of linear visco-elastic phenomenological Kelvin-Voigt model. On the base of computer modeling, we have shown that processes of a middle scale folding in sediments mainly depend on acting compressing forces directions, power of the sediment layer, at the same time, from structure and salt presence in the sediment rocks. We have defined that processes of geostructures forming under influence of the active crystalline blocks mainly depend on directions of the blocks movements, power, structure and friability of the sedimental rocks.

Key Words: computer modeling, geotectonic processes, visco-elastic Kelvin-Voigt model.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

На сучасному етапі у зв'язку з потужним розвитком обчислювальних методів механіки і математики, а також завдяки досягнутому прогресу в розумінні основних законів геодинаміки, виникають унікальні можливості дослідження раніше недоступних геотектонічних процесів [2, 3, 7, 10]. Це, перш за все, стосується процесів, що протікають у складних, обумовлених просторовою та реологічною неоднорідністю геодинамічних об'єктах. Недосяжність для прямих вимірювань у більшості таких об'єктів, а також геологічні масштаби часу роблять математичне

моделювання одним з головних, якщо не єдиним, інструментом досліджень таких об'єктів.

Ця стаття присвячена моделюванню і геофізичній інтерпретації результатів у таких областях геотектоніки, як середньомасштабне складкоутворення в осадових породах земної кори [3, 6, 8, 9, 10] і формування геоструктур під впливом різноспрямованих рухів тектонічних блоків [2, 5, 7, 10].

Для вирішення цих геотектонічних проблем застосовано в'язкопружну варіаційну скінчено-елементну методику для розв'язання двовимірних і тривимірних в наближенні шаруватих оболонок обертання задач [1, 2, 3, 4, 8, 9]. У

даному випадку розглядається довготривалий процес деформування багатокомпонентного геологічного середовища (взагалі літологічного шару різних осадових порід) під дією повільних геотектонічних сил. Фізико-хімічні механізми в'язкопружної релаксації в земній корі (області відносно низьких тисків і температур) можуть відбуватись завдяки дифузійному кріпу [7, 10] і повзучості твердих порід, яка пов'язана з присутністю води [7, 10] (мінерали розчиняються у місцях підвищеного тиску і випадають в осад у місцях пониженого тиску), ці механізми можуть бути описані в рамках в'язкопружної феноменологічної моделі Кельвіна-Фойгта [2, 3, 7, 10]. Ця модель розглядає випадок, коли загальне напруження зсуву при заданих деформаціях і швидкостях деформацій представляє собою суперпозицію пружної та лінійно-в'язкої частин напруження і описує характерний для твердих геологічних порід процес кріпу зі зміцненням:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}_i + \sigma_{ij,j} + \mathbf{F}_i = 0; \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + 2\eta_v \dot{\epsilon}_{ij} + k\theta \delta_{ij}; \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} \mathbf{n}_j - \mathbf{f}_i = 0, \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i^*; \quad \dot{\mathbf{u}}_i = \dot{\mathbf{u}}_i^*. \quad (3)$$

Тут (1) – рівняння руху; (2) – реологічні співвідношення для моделі Кельвіна-Фойгта; (3) – граничні умови I – го й II – го роду відповідно та початкові умови; $\mathbf{u}_i$ – компоненти переміщень; σ_{ij} – компоненти тензора напружень; ϵ_{ij} – компоненти тензора деформацій; $\mathbf{F}_i$ – компонента об'ємної сили; $\mathbf{f}_i$ – поверхневі зовнішні сили; $\mathbf{n}_j$ – одиничний вектор нормалі до поверхні; ρ – густина, μ – модуль зсуву; k – модуль всебічного стиску; θ – дилатація (об'ємне розширення); η_v – динамічна в'язкість; δ_{ij} – символ Кронекера.

2. Постановка і метод розв'язання задач

Геотектонічні процеси з точки зору механіки деформованого твердого тіла є повільними встановленими процесами. Тому перехідними стадіями динамічного процесу в даному випадку можна знехтувати і розглядати деформування як повільний встановлений зрівноважений процес. Таким чином, повільний нестационарний геотектонічний процес можна умовно розглядати як зрівноважений процес повільних квазістационарних коливань. Цей підхід дозволяє описувати не тільки циклічні, але і поступальні

геотектонічні процеси. Приймаючи характерну циклічну частоту повільного встановленого геотектонічного процесу за ω , складемо функціонал Лагранжа плоскої квазістационарної в'язкопружної задачі, що виражає повну механічну енергію досліджуваного двовимірного об'єкту (півпростору осадових порід), у нерухомій декартовій системі координат (x, y) [2, 4]:

$$\begin{aligned} \tilde{L} = & \frac{1}{2} \iint_S [C_1 (\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{yy}^2) + 4C_2 \epsilon_{xy}^2 + 2C_3 \epsilon_{xx} \epsilon_{yy} - \\ & - \rho \omega^2 (u^2 + w^2) - 2\rho g w] dx dy - \\ & - \int_L (\mathbf{f}_{xn} u + \mathbf{f}_{yn} w) dl; \end{aligned} \quad (4)$$

Тут $C_1 = k + 4(\mu + i\omega\eta_v)/3$, $C_2 = \mu + i\omega\eta_v$, $C_3 = k - 2(\mu - i\omega\eta_v)/3$ –

комплексні коефіцієнти; u, w – компоненти переміщень уздовж осей x та y відповідно; g – прискорення сили тяжіння; S – площа поперечного перерізу розглянутого півпростору осадових порід; L – контур, що охоплює площу S ; dl – елемент контуру; i – уявна одиниця.

Надалі складемо функціонал Лагранжа квазістационарної в'язкопружної задачі у наближенні ортотропних оболонок обертання, що виражає повну механічну енергію досліджуваного тривимірного геодинамічного об'єкту в нерухомій криволінійній системі координат (s, φ, z) [1, 3]:

$$\begin{aligned} \tilde{L} = & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \int_{h_j} \int_S [\mathbf{E}_{ss}^j \epsilon_{ss}^{j2} + \mathbf{E}_{\varphi\varphi}^j \epsilon_{\varphi\varphi}^{j2} + \mathbf{E}_{zz}^j \epsilon_{zz}^{j2} + \\ & + 2\mathbf{E}_{s\varphi}^j \epsilon_{ss}^j \epsilon_{\varphi\varphi}^j + 2\mathbf{E}_{sz}^j \epsilon_{ss}^j \epsilon_{zz}^j + 2\mathbf{E}_{\varphi z}^j \epsilon_{\varphi\varphi}^j \epsilon_{zz}^j + \\ & + 4\tilde{\mathbf{G}}_{s\varphi}^j \epsilon_{s\varphi}^{j2} + 4\tilde{\mathbf{G}}_{sz}^j \epsilon_{sz}^{j2} + 4\tilde{\mathbf{G}}_{\varphi z}^j \epsilon_{\varphi z}^{j2} + \omega^2 \rho_j (u_j^2 + \\ & + v_j^2 + w_j^2) - 2\rho_j g w_j] (1 + \frac{z}{R_3})^2 ds d\varphi dz - \\ & - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\mathbf{T}_s u_0 + \mathbf{T}_{s\varphi} v_0 + \mathbf{Q}_s w_0) d\varphi - \\ & - \int_{s_1}^{s_2} (\mathbf{T}_{\varphi s} u_0 + \mathbf{T}_{\varphi} v_0 + \mathbf{Q}_{\varphi} w_0) ds. \end{aligned} \quad (5)$$

Тут R_3 – радіус кривизни Землі; S – площа поверхні розглянутого півпростору осадових порід; h_j – товщина j -го шару порід; ρ_j – густина осадових порід j -го шару; $\mathbf{T}_{\alpha\beta}, \mathbf{Q}_\alpha$ – горизонтальні та вертикальні зусилля, дія яких на контур півпростору, в квазістационарній постановці задачі, еквівалентна заданню відпо-

відних швидкостей на цьому контурі; $\epsilon_{\alpha\beta}^j$ – компоненти тензора деформацій j -го шару; $E_{\alpha\beta}^j$ – дійсні модулі Юнга j -го шару; $\tilde{G}_{\alpha\beta}^j = G_{\alpha\beta}^j + i\omega\eta_{\alpha\beta}^j$ – комплексні компоненти узагальненого модуля зсуву j -го шару, що складаються з дійсної пружної складової та комплексної в'язкої складової; $\eta_{\alpha\beta}^j$ – коефіцієнт динамічної в'язкості j -го шару.

Для розв'язання квазістаціонарної в'язко-пружної задачі застосовується метод скінчених елементів, оснований на варіаційному принципі Лагранжа [5], що виражає мінімум повної механічної енергії системи:

$$\delta \tilde{L}(u_i) = 0. \quad (6)$$

При розв'язанні варіаційного рівняння (6), у випадку плоскої задачі застосовується восьми-вузловий ізопараметричний чотирикутний криволінійний скінчений елемент [2, 4], у випадку тривимірної задачі використовується дев'яти-вузловий оболонковий скінчений елемент [3]. Як глобальна система координат, тобто система в якій поєднуються всі скінчені елементи, використовується декартова або відповідно криволінійна система координат. Як локальна система координат, де для кожного елемента визначаються функції форми, і проводиться чисельне інтегрування, використовується допоміжна нормалізована система координат. При побудові функцій форми, що апроксимують змінні й функції в межах кожного елемента, використовуються квадратичні алгебраїчні й тригонометричні поліноми [2-4]. Алгоритм скінчено-елементного розв'язання варіаційної задачі (6) полягає в наступному. Спочатку в локальній системі координат відбувається апроксимація усіх компонент переміщень і деформацій, що входять до функціоналів Лагранжа [4, 5], з використанням отриманих функцій форми. Потім проводиться диференціювання цих функціоналів по всіх вузлових складових переміщень і прирівнювання відповідних похідних до нуля. У результаті для кожного скінченого елемента одержуємо лінійну алгебраїчну систему. Далі у відповідній глобальній системі координат відбувається підсумовування локальних систем лінійних алгебраїчних рівнянь по всіх скінчених елементах, на які розбито досліджувану область, і формування глобальної системи рівнянь. Розв'язання глобальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь проводиться за допомогою чисельного методу Гауса [5], внаслідок чого визначаються компоненти

переміщень в усіх вузлових точках скінчено-елементної сітки. За знайденими вузловими значеннями переміщень можуть бути визначені компоненти переміщень, швидкостей, деформацій, напружень та інші величини, що цікавлять, у довільній точці скінченого елемента, тобто в будь-якій точці області, що досліджується.

3. Середньомасштабне складкоутворення в осадових породах

На основі моделювання процесу середньомасштабного складкоутворення в осадовому шарі земної кори під впливом стискаючих субгоризонтальних геотектонічних сил встановлено, що цей процес залежить від напрямку дії сил, потужності осадового шару, а також від складу і соленості осадових товщ. Відхилення стискаючих геотектонічних зусиль від горизонталі, призводить до локалізації процесу складкоутворення в околиці області стиснення і зменшенню швидкості росту складок. Збільшення товщини осадового шару за аналогічних умов навантаження приводить до більш інтенсивного процесу складкоутворення в локальній структурі, при цьому загальний вплив жорсткісних властивостей осадових порід на цей процес зменшується. Зменшення індивідуальних жорсткісних характеристик осадових шарів, збільшення їх соленості також приводять до інтенсифікації процесу складкоутворення.

4. Формування геоструктур під впливом різноспрямованих рухів тектонічних блоків

На основі моделювання процесу формування геоструктур під впливом різноспрямованих блоків кристалічного фундаменту встановлено, що цей процес суттєво залежить від напрямку рухів блоків, а також від потужності, складу і пухкості осадових товщ. Вертикальні рухи активних блоків призводять до пропорційних локальних змін рівнів земної поверхні. У випадку односпрямованого руху блоків швидкості підняття і опускань земної поверхні найбільші. У випадку протилежно спрямованих рухів має місце взаємна компенсація і швидкості рухів земної поверхні зменшуються. Субгоризонтальні рухи активних блоків, на відміну від вертикальних, впливають на більші області земної поверхні. При цьому найбільш активний вплив здійснюють насувні та скидові рухи. Відхилення скидних і насувних рухів блоків від горизонтального напрямку призводять до зменшення швидкостей відповідних підняття і опускань. У випадку вертикальних рухів блоків потужність осадового шару, його склад і пухкість мало впливають на швидкості змінювання рівнів

земної поверхні. У випадку субгоризонтальних рухів блоків, ослаблення потужності осадового чохла, збільшення його пухкості призводять до зниження швидкостей відповідних підняття і опускань земної поверхні.

Список використаних джерел

1. Карнаухов В.Г. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек / В.Г. Карнаухов, И.Ф. Киричок. – Киев: Наукова думка, 1986. – 221с.
2. Лубков М.В. Моделювання нахилів земної поверхні у зонах активних розломів / М.В. Лубков // Геоінформатика. – 2013. - № 2(46). – С. 48 – 54.
3. Лубков М.В. Процес великомасштабного складкоутворення в осадовому шарі земної кори / М.В. Лубков // Геоінформатика. – 2014. – № 3(51). – С. 57 –66.
4. Образцов И. Ф. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов / И.Ф. Образцов, Л.М. Савельев, Х.С. Хазанов. – М.: Высшая школа, 1985. – 329с.
5. Уфимцев Г.Ф. Очерки теоретической геоморфологии / Г.Ф. Уфимцев. – Новосибирск: Наука, 1994. – 123с.
6. Эз В.В. Складкообразование в земной коре / В.В. Эз. – М.: Недра, 1985. – 240с.
7. Karato S. Deformation of earth materials: An introduction to the rheology of solid earth / S. Karato. – Cambridge: Cambridge University press, 2008. – 463 p.
8. Muhehaus H.B. A director theory for visco-elastic folding instabilities in multilayered rock / H.B. Muhehaus, F. Dufour, L. Moresi, B. Hobbs // Int. journal of solids and structures. – 2002. – 39(13-14), P. 3675 – 3691.
9. Schmid D.W. Evolution of large amplitude 3D fold patterns: A FEM study / D.W. Schmid, M. Dabrowski, M. Krotkiewski // Physics of the Earth and Planetary Interiors. – 2008. – 171. – P. 400 – 408.
10. Turcotte D. Geodynamics. Second edition / D. Turcotte, G. Schubert. – Cambridge: Cambridge University Press, 2002. – 848 p.

References

1. KARNAUHOV, V. and KIRICHOK, I. (1986) *Svjazannye zadachi teorii vjazkouprugih plastin i obolochek*. Kiev: Naukova dumka.
2. LUBKOV, M. (2013) Modelyuvannya nakhyliv zemnoyi poverkhni u zonakh aktyvnykh rozlomiv. *Heoinformatyka*. 46(2). p. 48 – 54.
3. LUBKOV, M. (2014) Protses velykomasshtabnoho skladkoutvorennia v osadovomu shari zemnoyi kory. *Heoinformatyka*. 51(3). p. 57 –66.
4. OBRAZCOV, I., SAVEL'EV, L. and HAZANOV, H. (1985) *Metod konechnykh jelementov v zadachah stroitel'noj mehaniki letatel'nykh apparatov*. Moskva: Vysshaja shkola.
5. UFIMCEV, G. (1994) *Ocherki teoreticheskoy geomorfologii*. Novosibirsk: Nauka.
6. JEZ, V. (1985) *Skladkoobrazovanie v zemnoj kore*. Moskva: Nedra.
7. KARATO, S. (2008) *Deformation of earth materials: An introduction to the rheology of solid earth*. Cambridge: Cambridge University Press.
8. MUHEHAUS, H. and DUFFOUR, F. & MORESI, L. & HOBBS, B. (2002) A director theory for visco-elastic folding instabilities in multilayered rock. *Int. journal of solids and structures*. 39(13-14). p. 3675 – 3691.
9. SCMD, D., DABROWSKI, M. and KROTKIEWSKI, M. (2008) Evolution of large amplitude 3D fold patterns: A FEM study. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. 171. p. 400 – 408.
10. TURCOTTE, D. and SCHUBERT, G. (2002) *Geodynamics. Second edition*. Cambridge: Cambridge University Press.

Надійшла до редколегії 29.06.17

УДК 539.375

Маковійчук М. В.¹, к.ф.-м.н., доц.,
Шацький І. П.², д.ф.-м.н., проф.,
Щербій А. Б.³

**Оцінка міцності циліндричної оболонки
з поперечними колінеарними
тріщинами, підсиленої гнучким
покриттям**

Івано-Франківський відділ Інституту
прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, 76002,
м. Івано-Франківськ, вул. Микитинецька, 3,
¹ e-mail: makoviy@ua.fm
² e-mail: ipshatsky@gmail.com
³ e-mail: shch_andrew@ukr.net

M. V. Makoviichuk¹, Ph.D. (Phys.-Math.),
I. P. Shatskyi², Dr.Sci. (Phys.-Math.),
A. B. Shcherbii³.

**Estimation of strength of cylindrical shell
with a circumferential collinear cracks and
reinforced by flexible coating**

Ivano-Frankivsk Branch of Pidstryhach-Institute for
Applied Problems in Mechanics and Mathematics,
NAS of Ukraine, 76002, Ivano-Frankivsk,
Mykytynetska str., 3,
¹ e-mail: makoviy@ua.fm
² e-mail: ipshatsky@gmail.com
³ e-mail: shch_andrew@ukr.net

У рамках двовимірної теорії досліджується вплив одностороннього гнучкого покриття на напружений стан та граничну рівновагу пологої циліндричної оболонки з двома колінеарними дефектами, орієнтованими вдовж напрямної. Гнучке покриття моделюється шарніром, який з'єднує береги розрізу на одній із лицьових поверхонь оболонки. На основі отриманих розв'язків досліджено залежності коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів в околі вершин дефектів та розподілу зусиль у шарнірному з'єднанні від взаємного розташування розрізів та від кривини оболонки. Для оцінки впливу гнучкого покриття на граничний стан вкритої оболонки з тріщинами використано комбінований критерій руйнування, який враховує два механізми: порушення цілісності покриття з обмеженою міцністю та розповсюдження тріщин в тілі оболонки.

Ключові слова: циліндрична оболонка, поперечні тріщини, гнучке покриття, гранична рівновага.

Elastic and limit equilibrium of shallow cylindrical shell weakened by two cross-cutting circumferential collinear cracks and enhanced by coating on one of the face surfaces is studied in the two-dimensional formulation. The cracks in the shell with a flexible coating is simulated by a cuts with eccentrically hingedly connected edges. The boundary problem for equations of classical shell theory with interrelated conditions of tension and bending along the cutting line is formulated within the framework of such model. Singular integral equation for the unknown jump of normal displacement on the crack's edges has been elaborated. Based on numerical solutions of integral equation dependences of forces and moments intensity factors in the vicinity of the defect tips and distribution of forces in the hinge joints on the parameters of shell curvature and distance between cracks are investigated. To estimate the influence of flexible coating on the limit state of the thin-walled elements of constructions with defects the combined fracture criterion was proposed which takes into account two mechanisms: propagation of the crack along the shell body and disintegration of the coating with limited strength. The first mechanism is implemented in the shell of small curvature (with short crack), and the second one – in the shell of big curvature (with long crack). It was discovered that enhancing of external surface of tensioned cylindrical shell by coating is more efficient than enhancing of internal one.

Key Words: cylindrical shell, circumferential cracks, flexible coating, limit equilibrium.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Мета цього дослідження – вивчити вплив одностороннього гнучкого покриття на напружено-деформований стан та міцність пологої циліндричної оболонки, послабленої

системою поперечних колінеарних тріщин, з урахуванням обмеженої міцності підкріплення. Числовий аналіз граничних навантажень проведено в широкому діапазоні зміни параметрів кривини оболонки та віддалі між дефектами.

Постановка та інтегральне рівняння задачі

Розглянемо ізотропну циліндричну оболонку завтовшки $2h$ з радіусом серединної поверхні R , послаблену двома наскрізними колінеарними розрізами завдовжки $2l$, які розташовані вздовж напрямної на відстані $2d$ між їхніми центрами. Нехай на одну із лицьових поверхонь оболонки нанесено гнучке покриття, яке деформується сумісно з підкладкою і здатне витримати доволі високі напруження. Оболонка зазнає рівномірного розтягу зусиллями $p = \text{const}$; інші поверхні об'єкта вільні від навантаження. В рамках класичної теорії пологих оболонок Кірхгофа-Лява досліджуємо напружений стан та граничну рівновагу композиції.

Виберемо систему декартових координат $Oxuz$ з центром посередині одного з розрізів та віссю абсцис уздовж напрямної. В межах гіпотези прямої нормалі тріщини в оболонці із гнучким покриттям доцільно моделювати математичними розрізами, береги яких з'єднані шарнірно в одній із лицьових поверхонь оболонки $z = sh$ ($s = +1$ для зовнішнього чи $s = -1$ для внутрішнього підкріплення). Такий підхід призводить до задачі теорії пологих оболонок із взаємопов'язаними крайовими умовами на розрізах [1–3]:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta \varphi - \frac{B}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0, \quad \Delta \Delta w + \frac{1}{DR} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus L; \\ [u_y] - sh[\vartheta_y] &= 0, \quad M_y - sh N_y = 0, \quad x \in L; \\ N_x = N_{xy} &= 0, \quad N_y = p, \\ M_x = M_{xy} = M_y &= 0, \quad (x, y) \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут φ – функція напружень, w – прогин оболонки, Δ – оператор Лапласа; $[u_y]$ – розкриття тріщини в базовій поверхні оболонки, $[\vartheta_y]$ – розрив кута повороту нормалі; N_x , N_{xy} , N_y – зусилля, M_x , M_{xy} , M_y – моменти; $B = 2Eh$, $D = 2Eh^3 / (3(1 - \nu^2))$, E і ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки; $L = (-l - 2d, l - 2d) \cup (-l, l)$ – сукупність розрізів.

Задачу (1) розв'язували методом сингулярних інтегральних рівнянь. Враховуючи, що дефекти перебувають в однакових умовах, за схемою, наведеною у працях [1–3], дістали сингулярне інтегральне рівняння для розриву переміщень на правому розрізі:

$$\frac{B}{4\pi} \int_{-l}^l K(\xi, x) [u_y]'(\xi) d\xi = -p, \quad x \in (-l, l); \quad [u_y](\pm l) = 0. \quad (2)$$

Тут

$$\begin{aligned} K(\xi, x) &= \tilde{K}_{11}(\xi, x) - 2s\tilde{K}_{13}(\xi, x) / \sqrt{3(1 - \nu^2)} + \tilde{K}_{33}(\xi, x) / (3(1 - \nu^2)); \\ \tilde{K}_{ij}(\xi, x) &= K_{ij}(\xi - x) + K_{ij}(\xi + x + 2d), \quad i, j = 1, 3; \quad K_{11}(z) = -\frac{d}{dz} \ker \frac{\gamma|z|}{2}, \quad K_{13}(z) = K_{31}(z) = \\ &= -(1 + \nu) \frac{d}{dz} \ker \frac{\gamma|z|}{2}, \quad K_{33}(z) = -(3 - 2\nu - \nu^2) \frac{d}{dz} \ker \frac{\gamma|z|}{2} - \gamma^2 \int_2^z \ker \frac{\gamma|z|}{2} dz; \quad a = h / \sqrt{3(1 - \nu^2)}, \quad \gamma^2 = 1 / (Ra). \end{aligned}$$

За знайденою функцією стрибка переміщення обчислювали кут повороту нормалі, коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів K_N, K_M [4] та розподіл зусиль $N(x)$ у покритті на лінії розрізів.

Критерії руйнування

Вважаємо, що руйнування підкріпленої оболонки з тріщинами може відбуватися двома шляхами: поширення тріщин без порушення цілісності покриття та втрата несучої здатності через розтріскування покриття.

Перший механізм оцінюємо енергетичним критерієм лінійної механіки руйнування [3, 4]:

де γ_* – густина ефективної поверхневої енергії матеріалу.

Для оцінки граничного стану покриття скористаємось класичною теорією міцності:

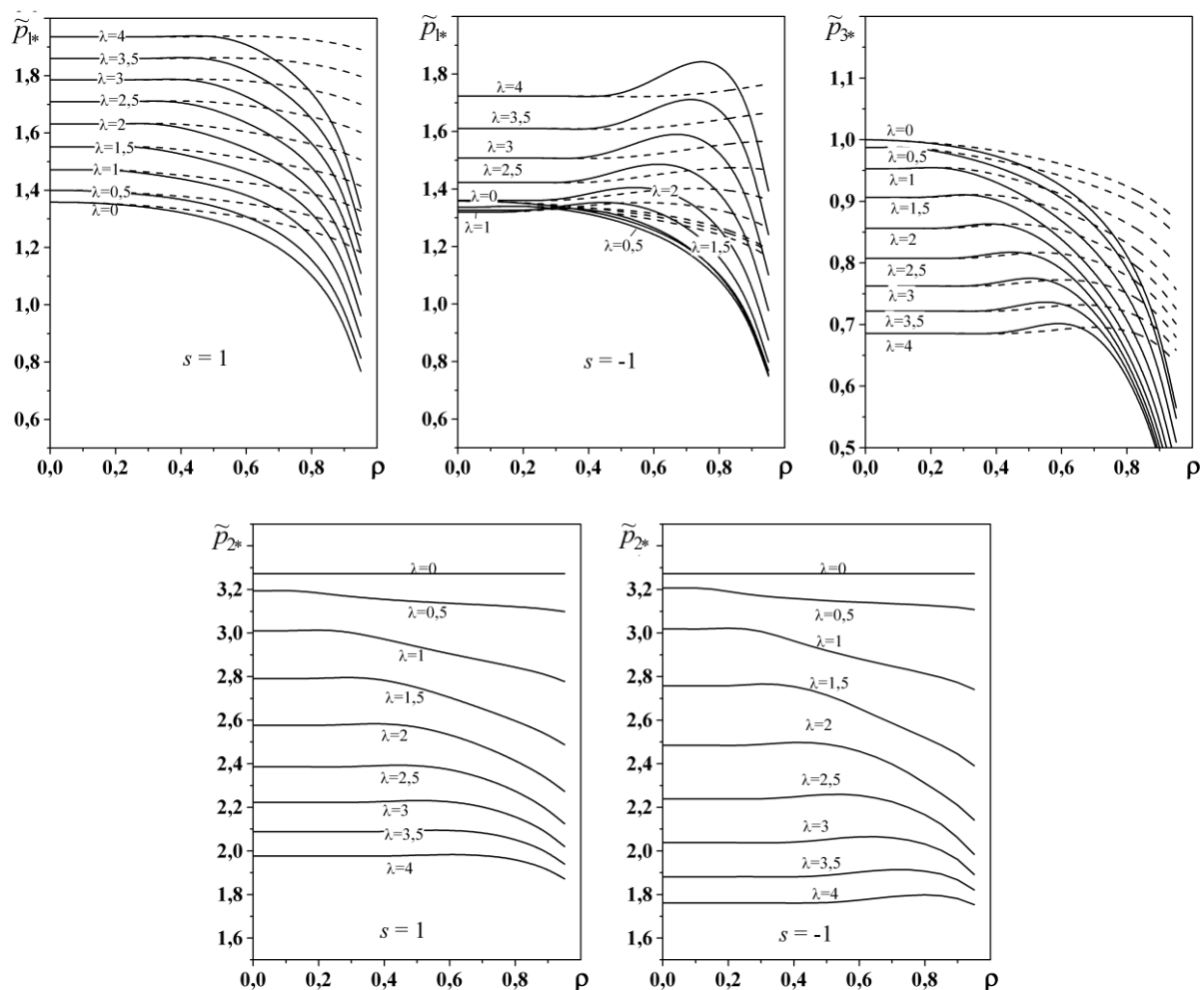
$$\max_{x \in [-l, l]} N(x) = N_*, \quad (4)$$

де N_* – критична сила, яку здатне витримати покриття.

Аналіз результатів

Числовий розв'язок задачі (2) побудували при $\nu = 0,3$ методом механічних квадратур. За критерієм (3) знайшли граничне навантаження p_{1*} , при якому настане розвиток тріщини, а за критерієм (4) – граничне навантаження p_{2*} , при якому відбудеться руйнування покриття (рис.). Для порівняння наведено значення руйнівного навантаження p_{3*} , розрахованого для двох поперечних тріщин у оболонці без покриття [4, 5]. Варіювали безрозмірні параметри взаємного розташування дефектів: $\rho = l/d$ та кривини оболонки $\lambda = \gamma l = (3(1-\nu^2))^{1/4} l / \sqrt{Rh}$.

Граничні навантаження p_{1*} можуть набувати значень як більших, так і менших порівняно з аналогічно навантаженою пластиною. Для випадку покриття на внутрішній поверхні оболонки спостерігається немонотонна залежність p_{1*} від параметра ρ для ближніх вершин дефектів; у той же час за великих λ небезпечними виявляються дальні вершини тріщин. Натомість, у разі підкріплення зовнішньої поверхні завжди небезпечними є ближні вершини розрізів.



Руйнівні навантаження для циліндричної оболонки з поперечними тріщинами:
 $\tilde{p}_{i*} = p_{i*} / p_0$, $p_0 = 2h\sqrt{2E\gamma_*/(\pi l)}$; суцільні лінії відповідають ближнім, а штрихові –
дальнім вершинам; $s = 1$ – зовнішнє, $s = -1$ – внутрішнє покриття

Граничні навантаження p_{2*} отримано при $N_* / p_0 = 1,5$. Для слабших покриттів з меншим N_* ординати кривих p_{2*} закономірно зменшуються, нівелюючи тим самим ефект підкріплення. Значення p_{2*} істотно знижуються при збільшенні параметра кривини λ і практично не залежать від параметра розміщення дефектів ρ .

Для малих кривин оболонки руйнівним є навантаження $p_{1*} = \min\{p_{1*}, p_{2*}\}$, для більших кривин – $p_{2*} = \min\{p_{1*}, p_{2*}\}$.

У часткових випадках $\lambda = 0$ та $\rho = 0$ отримуємо відомі результати для колінеарних тріщин у вкритій пластині [6] та для поодинокій поперечної тріщини у циліндричній оболонці з покриттям [7] відповідно.

Список використаних джерел

1. Шацький І. П. Інтегральне рівняння задачі про тріщину в пологій оболонці з гнучким покриттям / І. П. Шацький // Доп. АН України. – 1992. – № 1. – С. 46–48.
2. Шацький І. П. Задача о трещине в пологой оболочке с гибким покрытием / И. П. Шацкий // Прикл. механика и техн. физика. – 1996. – 37, № 2. – С. 131–138.
3. Шацький І. П. Вплив гнучкого покриття на міцність пологої оболонки з тріщиною вздовж лінії кривини / І. П. Шацький, А. Б. Щербій // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій (вип. 2): В 3-х т. / Під заг. ред. Панасюка В. В. – Львів : Каменяр, 1999. – Т. 2. – С. 333–335.
4. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами / В. А. Осадчук. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.
5. Механика композитов. В 12 т. / Под общей ред. А. Н. Гузя. – К.: Наук. думка, 1993. – (Т. 7: Концентрация напряжений / А. Н. Гузь, А. С. Космодамианский, В. П. Шевченко и др. – К.: А. С. К., 1998. – 387 с.)
6. Шацький І. П. Взаємодія колінеарних розрізів з шарнірно з'єднаними берегами у розтягнутій пластинці / І. П. Шацький // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1992. – Вип. 36. – С. 93–97.
7. Шацький І. П. Вплив гнучкого покриття на міцність пологої циліндричної оболонки з поперечною тріщиною / І. П. Шацький, М. В. Маковійчук, А. Б. Щербій // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2015. – Вип. 24. – С. 248–257.

Висновки

Руйнівне навантаження розтягу для циліндричної оболонки з двома поперечними тріщинами з покриттям на внутрішній поверхні немонокотонно залежить від параметрів кривини та віддалі між дефектами, а небезпечними, при цьому, можуть бути зовнішні вершини дефектів. Для малих кривин оболонки руйнівним є навантаження, розраховані за міцністю болонки, а для більших кривин – за міцністю покриття. За будь-яким із критеріїв підкріплення оболонки ззовні є загалом вигіднішим, ніж зсередини. Вирішальне значення має врахування обмеженої міцності гнучкого покриття. Неміцні підкріплення не дають відновлювального ефекту.

References

1. SHATSKYI, I. P. (1992) Integralni rivniannia zadachi pro trishchynu v polohii obolontsi z hnuchkym pokryttiam. *Dop. AN Ukrainy*. (1). pp. 46–48.
2. SHATSKII, I. P. (1996) Crack problem for a shallow shell with a flexible coating. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 37 (2), pp. 259–265.
3. SHATSKYI, I. P. & SHCHERBII, A. B. (1999) Vplyv hnuchkoho pokryttia na mitsnist' polohoi obolonky z trishchynoiu vzdovzh linii kryvyny.. *Mehanika ruinuvannia materialiv i mitsnist konstruksii*, 2 (2). pp. 333–335. (In 3 V. ed. by Panasyuk V. V., Lviv: Kameniar).
4. OSADCHUK, V. A. (1985) *Napriazhenno-deformirovannoe sostoianie i predel'noe ravnovesie obolochek s razrezami*. Kiev: Naukova dumka.
5. *Mekhanika kompozitov*, in 12 V. (1993) Ed. Guz A. N., Kiev: Naukova dumka (Vol. 7: Guz, A. N., Kosmodamianskii, A. S., Shevchenko, V. P. et al. (1998) *Koncentratsiia napriazhenii*, Kiev: A. S. K.).
6. SHATS'KII, I. P. (1993) The interaction of collinear cuts with hinged rims in a plate under tension. *J. Sov. Math.*, 67 (5), pp. 3355–3358.
7. SHATSKY, I. P. MAKOVICHUK, M. V. & SHCHERBII, A. B. (2015) Vplyv hnuchkoho pokryttia na mitsnist' polohoi tsylindrychnoi obolonky z poperechnoiu trishchynoiu. *Problemy obchysliuvalnoi mehaniky i mitsnosti konstruksii*, (24), pp. 248–257.

Надійшла до редколегії 29.08.17

УДК 539.3

Маланчук Н. І., к.ф.-м.н., с.н.с.,
Чумак К. А., к.ф.-м.н., с.н.с.

Вплив ідеального газу на часткове термічне проковзування тіл з регулярним рельєфом поверхонь

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б,
e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

N. I. Malanchuk, Ph. D. (Phys.-Math.),
K. A. Chumak, Ph. D. (Phys.-Math.).

Influence of an ideal gas on partial thermal slip of bodies with regular surface relief

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, 79060, Lviv, Naukova str., 3-b,
e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

Досліджено часткове термічне фрикційне проковзування двох пружних тіл, поверхня одного з яких має регулярний рельєф, з урахуванням термоопору та тиску газу, що заповнює інтерфейсні зазори. У якості фізичної моделі міжконтактного газу вибрано ідеальний газ. Сформульовану задачу зведено до системи трьох рівнянь: двох сингулярних інтегральних рівнянь відносно висоти зазорів та відносно зсуву поверхонь і сингулярного інтегро-диференціального рівняння відносно контактної стрибка температури. На основі побудованого аналітично-числового розв'язку цієї системи рівнянь встановлено закономірності впливу тиску газу на часткове термічне проковзування тіл.

Ключові слова: регулярний рельєф поверхні, часткове проковзування, інтерфейсні зазори, термоопір, тиск газу.

The stick-slip thermoelastic contact between two solids of identical materials, one of which has regular surface relief in the form of periodically arranged grooves, has been investigated. The interface between the solids consists of a periodic array of gaps, which are filled with an interstitial gas, and a periodic array of contact regions, where perfect thermal and stick-slip contacts are assumed. The partial slip of the surfaces is induced by thermal strains due to imposed heat flow, and the first points to slip are the ends of every contact region. Both mechanical influence (pressure on the surfaces of the bodies) and thermal influence (thermal resistance) of the gas have been taken into account. As a physical model of the interstitial gas, the ideal gas model has been selected. The gas thermal resistance is a function of a height of the gaps and the gas thermal conductivity. The corresponding plane thermoelastic contact problem has been reduced to a system of three equations: two singular integral equations for a height of the gaps and a relative shift of the contacting surfaces, and a singular integro-differential equation for a temperature jump between the surfaces of the gaps. Solution to the system is constructed for a specific shape of the grooves. The effect of the gas pressure on the partial slip of the bodies has been analyzed. It has been revealed that the gas pressure effect on the slip zone width is small when the partial slip occurs within the grooves. On the other hand, this effect is large when the partial slip extends over the grooves.

Key Words: regular surface relief, partial slip, interface gaps, thermal resistance, gas pressure.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Розв'язки задач про контакт тіл із частковим зчепленням і проковзуванням є важливими для інженерної практики, оскільки зумовлені явищем проковзування поверхневі ушкодження сприяють зародженню втомних тріщин в елементах машин та конструкцій [1].

Теоретичні дослідження контакту тіл різної форми в умовах часткового зчеплення та проковзування здебільшого проведені для випадку, коли

причиною проковзування тіл є прикладене до них зсувне навантаження (огляд цих досліджень наведений в працях [2, 3]). Явище часткового проковзування, зумовлене тепловим навантаженням, досліджено для двох пружних тіл за наявності між ними: i) одиничного зазору, який є теплоізолюваним [4] або заповненим теплопровідним середовищем, що чинить тиск на поверхні тіл [5]; ii) періодичної системи зазорів, які теплоізолювані чи заповнені теплопровідним середовищем, що не чинить тиск на поверхні тіл [6].

Нижче досліджено часткове термічне проковзування двох тіл за наявності між ними періодичної системи зазорів, заповнених теплопровідним газом, що чинить тиск на поверхні тіл.

2. Формулювання задачі

Розглянемо контакт двох пружних півпросторів за умов плоскої деформації. Матеріали тіл є однаковими та характеризуються модулями зсуву G і Юнга E та коефіцієнтами Пуассона ν , лінійного теплового розширення $\tilde{\alpha}$ і теплопровідності λ . Поверхня тіла D_2 є ідеально плоскою, а поверхня тіла D_1 має регулярний рельєф, утворений періодичною системою неглибоких тунельних виїмок однакової ширини b , розташованих з періодом d . Форма виїмок описується періодичною неперервно-диференційованою функцією $r(x)$ ($x \in [-b/2 + kd, b/2 + kd]$, $k = 0, \pm 1, \dots$), такою, що $\max |r(x)| < b$. Навантаження тіл реалізується у два етапи. На першому етапі тіла притискаються одне до одного прикладеним на безмежності монотонно зростаючим номінальним тиском $p_n = P/d$ (P – навантаження, що припадає на один період). Інтерфейс між тілами складається з періодично розташованих герметичних зазорів висоти $h(x)$ та ширини a ($a < b$), які заповнені однаковою кількістю ідеального газу, та періодично розташованих ділянок контакту. У процесі навантаження тиск газу p_g змінюється, а його зв'язок з об'ємом газу V_g описується рівнянням Клапейрона-Менделєєва:

$$p_g V_g = m_g R T_g / \mu_g, \quad (1)$$

де m_g , μ_g та $T_g = 273.15$ К – маса, молярна маса та абсолютна температура газу; $R = 8.3145$ Дж/(моль·К) – універсальна газова стала.

На другому етапі нормальні зусилля підтримуються сталими, а до тіл на нескінченності перпендикулярно до осі x прикладається номінальний тепловий потік інтенсивності $q_n = Q/d$, де Q – тепловий потік, що припадає на один період (Рис. 1). В околі кожного зазору з'являються термічні деформації, що зумовлюють часткове проковзування поверхонь в зонах, прилеглих до кінців ділянок контакту $x \in (-c/2 + kd, -a/2 + kd]$ та $x \in [a/2 + kd, c/2 + kd]$. У цих зонах діють дотичні напруження $\tau_{xy}^\pm(x, 0) = f |\sigma_y^\pm(x, 0)|$, де f – коефіцієнт тертя, $|\sigma_y^\pm(x, 0)|$ – контактний тиск

(індексами «-» і «+» позначено граничні значення функції на осі x у тілах D_1 і D_2 відповідно).

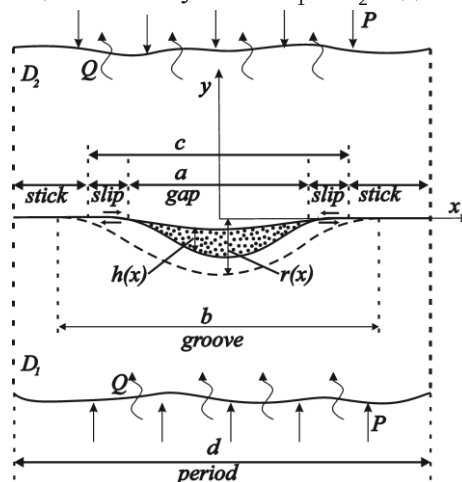


Рис. 1. Модель контакту тіл в межах періоду

Вплив газу на контактний теплообмін враховано термоопором $R(x) = h(x)/\lambda_g$ (λ_g – коефіцієнт теплопровідності газу) [6]. На ділянках контакту тіл реалізуються умови ідеального теплового контакту.

З огляду на періодичний характер задачі її крайові умови наведемо лише для $|x| \leq d/2$: на зазорі ($|x| < a/2$):

$$q_y^+(x, 0) = q_y^-(x, 0), \quad (2)$$

$$T^-(x, 0) - T^+(x, 0) = h(x) q_y^-(x, 0) / \lambda_g, \quad (3)$$

$$\sigma_y^-(x, 0) = \sigma_y^+(x, 0) = -p_g, \quad \tau_{xy}^-(x, 0) = \tau_{xy}^+(x, 0) = 0; \quad (4)$$

на ділянках контакту ($a/2 \leq |x| \leq d/2$):

$$T^-(x, 0) = T^+(x, 0), \quad q_y^-(x, 0) = q_y^+(x, 0), \quad (5)$$

$$v^-(x, 0) - v^+(x, 0) = \begin{cases} -r(x), & a/2 \leq |x| \leq b/2 \\ 0, & b/2 < |x| \leq d/2 \end{cases},$$

$$u^-(x, 0) = u^+(x, 0), \quad c/2 \leq |x| \leq d/2, \quad (6)$$

$$\sigma_y^-(x, 0) = \sigma_y^+(x, 0), \quad \tau_{xy}^-(x, 0) = \tau_{xy}^+(x, 0), \quad (7)$$

$$\tau_{xy}^-(x, 0) = f \sigma_y^-(x, 0) \text{sign}(x), \quad a/2 \leq |x| < c/2; \quad (8)$$

на нескінченності:

$$q_x(x, \pm \infty) = 0, \quad q_y(x, \pm \infty) = q_n,$$

$$\sigma_x(\pm \infty, y) = (-1)^j \tilde{\alpha} E \gamma_{av} / 2(1 - \nu), \quad \sigma_y(x, \pm \infty) = -p_n,$$

$$\tau_{xy}(x, \pm \infty) = 0, \quad \tau_{xy}(\pm \infty, y) = 0. \quad (9)$$

Тут $j = 1, 2$; σ_y , σ_x , τ_{xy} та u , v – компоненти тензора напружень та вектора переміщень; q_x ,

q_y – компоненти вектора теплового потоку.

3. Розв'язання задачі

Застосувавши розроблену в праці [4] методику, сформульовану контактну задачу зведено до системи трьох рівнянь: сингулярного інтегрального рівняння відносно висоти зазорів $h(x) = u_y^+(x, 0) - u_y^-(x, 0) - r(x)$, сингулярного інтегро-диференціального рівняння типу Прандтля відносно стрибка температури між берегами зазорів $\gamma(x) = T^-(x, 0) - T^+(x, 0)$ та сингулярного інтегрального рівняння відносно відносного зсуву поверхонь тіл $U(x) = u^-(x, 0) - u^+(x, 0)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = \frac{3r_0}{\beta} \left(\frac{\xi^2}{\beta^2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{Kd(p_n - p_g)}{2\pi} (1 + \xi^2),$$

$$\frac{\lambda_g \tilde{\gamma}(\xi)}{h(\xi)} - \frac{\lambda(1 + \xi^2)}{2d} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\tilde{\gamma}'(\eta) d\eta}{\eta - \xi} = 1, \quad |\xi| \leq \alpha;$$

$$\int_{-\chi}^{\chi} \left(U'(\eta) - \frac{\tilde{\alpha}(1 + \nu) dq_n M(\eta)}{\pi(1 + \eta^2)} \right) \frac{d\eta}{\eta - \xi} =$$

$$= (\tilde{\alpha}(1 + \nu) \tilde{\gamma}_{av} dq_n \xi - KdfL(\xi)) / (1 + \xi^2), \quad |\xi| \leq \chi.$$

Тут $\xi = \text{tg}(\pi x/d)$, $\eta = \text{tg}(\pi t/d)$, $\alpha = \text{tg}(\pi a/2d)$, $\beta = \text{tg}(\pi b/2d)$, $\chi = \text{tg}(\pi c/2d)$, $K = 4(1 - \nu)/G$,

$$\tilde{\gamma}(\eta) = \gamma(\eta) / q_n, \quad M(\eta) = \begin{cases} \tilde{\gamma}(\eta), & |\eta| \leq \alpha \\ 0, & \alpha \leq |\eta| \leq \chi \end{cases},$$

$\tilde{\gamma}_{av} = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \gamma(x) dx$ – усереднений стрибок температури [6], $L(\xi) = \begin{cases} 0, & |\xi| \leq \alpha \\ \sigma_y^+(\xi) \text{sign}(\xi), & \alpha \leq |\xi| \leq \chi \end{cases}$, функції $h(x)$, $\gamma(x)$ і $U(x)$ задовольняють умови [6]:

$$h(\pm\alpha) = 0, \quad h'(\pm\alpha) = 0,$$

$$\tilde{\gamma}(\pm\alpha) = 0, \quad \tilde{\gamma}'(\pm\alpha) = 0,$$

$$U(\pm\chi) = 0, \quad U'(\pm\chi) = 0.$$

Розв'язок цієї системи рівнянь побудовано для виїмок форми $r(\xi) = -r_0(1 - \xi^2/\beta^2)^{3/2}$ з використанням аналітично-числового підходу, запропонованого в праці [5].

4. Числові результати та їх аналіз

Числові розрахунки проведено для матеріалу тіл – неіржавна сталь AISI 304 ($G = 77.0029 \cdot 10^3$ МПа, $\nu = 0.2532$, $\alpha = 17.3 \cdot 10^{-6}$ 1/К, $\lambda = 16.3 \cdot 10^{-3}$

Вт/(мм·К), $f = 0.74$), заповнювача зазору – повітря ($\mu_g = 28.966$ г/моль, $\lambda_g = 0.026 \cdot 10^{-3}$ Вт/(мм·К)), максимальної глибини виїмок – $r_0 = 0.001$ мм, ширини виїмок – $b = 2$ мм, ширини періоду – $d = 4$ мм та наступного діапазону зміни ширини зазорів a та координати краю зони проковзування $x = \pm c/2$: $0 < a \leq b$, $a < c \leq d$.

На Рис. 2 та 3 зображено залежність ширини зон проковзування $w = (c - a)/2$ від густини теплового потоку q_n для різних значень тиску газу p_g за навантаження $p_n = 1$ МПа та $p_n = 10$ МПа відповідно. Криві для $p_g = 0$ відповідають випадку, коли газ в інтерфейсних зазорах відсутній.

Криві на Рис. 2 і 3 мають зломи в точці $w = (b - a)/2$ ($c = b$). Зазначимо, що точки кривої $w = w(q_n)$ при $w < (b - a)/2$ (точки, які лежать нижче точки злому) відповідають випадку, коли проковзування відбувається в

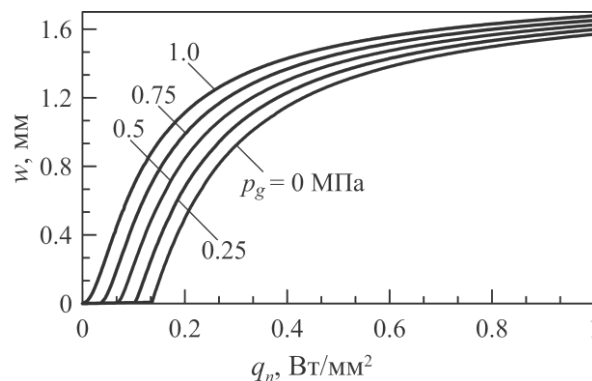


Рис. 2. Залежність ширини w зон проковзування від теплового потоку q_n та тиску газу p_g за силового навантаження $p_n = 1$ МПа

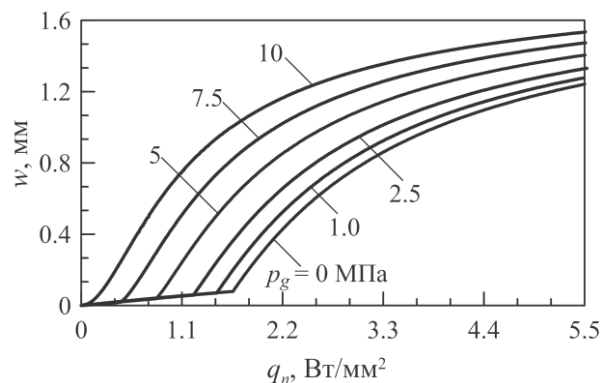


Рис. 3. Залежність ширини w зон проковзування від теплового потоку q_n та тиску газу p_g за силового навантаження $p_n = 10$ МПа

межах виїмок ($c < b$), а точки при $w > (b - a) / 2$ (точки, які лежать вище точки злому) – випадку, коли зони проковзування поширилися за межі виїмок ($c > b$). Аналогічні зломи були виявлені в попередніх працях [5, 6].

Ширина зон проковзування w збільшується зі збільшенням густини теплового потоку q_n . За фіксованої густини теплового потоку q_n зміна тиску міжконтактного газу p_g практично не впливає на зміну ширини зон проковзування, якщо проковзування відбувається в межах виїмок. Якщо зони проковзування поширилися за межі виїмок, вплив тиску газу p_g є значним, причому його збільшення зумовлює поширення зон проковзування.

З ростом густини теплового потоку q_n кожна крива $w = w(q_n)$ асимптотично наближається до прямої $w = (d - a) / 2$.

Список використаних джерел

1. Hills D. A. Mechanics of fretting fatigue / D. A. Hills, D. Nowell. – Dordrecht: Springer Science+Business Media, 1994. – 246 p.
2. Block J. M. Periodic contact problems in plane elasticity / J. M. Block, L. M. Keer // J. Mech. Mater. Struct. – 2008. – Vol. 3, №7. – P. 1207–1237.
3. Goryacheva I. G. Contact problems for textured surfaces involving frictional effects / I. G. Goryacheva, R. M. Martynyak // Proc. Inst. Mech. Eng., Part J: J. Eng. Tribol. – 2014. – Vol. 228, № 7. – P. 707–716.
4. Malanchuk N. Thermally induced local slip of contacting solids in vicinity of surface groove / N. Malanchuk, R. Martynyak, B. Monastyrskyy // Int. J. Solids Struct. – 2011. – Vol. 48, № 11-12. – P. 1791-1797.
5. Маланчук Н. Вплив тиску заповнювача міжконтактного зазору на часткове проковзування тіл, зумовлене термічними деформаціями / Н. Маланчук, К. Чумак, Б. Слободян // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2016. – Вип. 24. – С. 46–57.
6. Chumak K. Partial slip contact problem for solids with regular surface texture assuming thermal insulation or thermal permeability of interface gaps / K. Chumak, N. Malanchuk, R. Martynyak // Int. J. Mech. Sci. – 2014. – Vol. 84. – P. 138–146.

5. Висновки

Досліджено фрикційний контакт двох півбезмежних тіл, поверхня одного з яких має регулярний рельєф, за наявності на інтерфейсі між ними періодично розташованих зазорів, заповнених ідеальним газом, та зон часткового термічного проковзування. Сформульовану контактну задачу зведено до системи двох сингулярних інтегральних рівнянь відносно висоти зазорів і відносного зсуву поверхонь тіл та сингулярного інтегродиференціального рівняння типу Прандтля відносно контактного стрибка температури. Отримано аналітично-числовий розв'язок цієї системи рівнянь та проаналізовано вплив тиску газу на поширення зон проковзування. Встановлено, що вплив тиску газу є незначним/істотним, якщо проковзування відбувається в межах виїмки/поширилося за межі виїмки. Збільшення тиску газу та густини прикладеного теплового потоку зумовлює поширення зон проковзування.

References

1. HILLS, D. A. & NOWELL, D. (1994) *Mechanics of fretting fatigue*. Dordrecht: Springer Science+Business Media.
2. BLOCK, J. M. & KEER, L. M. (2008) Periodic contact problems in plane elasticity. *J. Mech. Mater. Struct.*, 3 (7). p. 1207–1237.
3. GORYACHEVA, I. G. and MARTYNYAK, R. M. (2014) Contact problems for textured surfaces involving frictional effects. *Proc. Inst. Mech. Eng., Part J: J. Eng. Tribol.*, 228 (7). p. 707–716.
4. MALANCHUK, N., MARTYNYAK, R. & MONASTYRSKYI, B. (2011) Thermally induced local slip of contacting solids in vicinity of surface groove. *Int. J. Solids Struct.*, 48 (11-12). p. 1791-1797.
5. MALANCHUK, N., CHUMAK, K. & SLOBODYAN, B. (2016) Vplyv tysku zapovniuvacha mizhkontaktnoho zazoru na chastkove prokovzuvannia til, zumovlene termichnymy deformatsihamy. *Fizyko-matematychne modeliuvannia ta informatsiini tekhnologii.*, 24. p. 46–57.
6. CHUMAK, K., MALANCHUK, N. & MARTYNYAK, R. (2014) Partial slip contact problem for solids with regular surface texture assuming thermal insulation or thermal permeability of interface gaps. *Int. J. Mech. Sci.*, 84. p. 138–146.

Надійшла до редколегії 17.08.17

УДК 539.3

Мартиненко М. А.¹, д.ф.-м.н., проф.,
Лебедєва І. В.², к.ф.-м.н., доц.

Вплив параболоїдального включення на осесиметричне гармонічне поле

¹ Національний університет харчових техно-
логій, 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 68,

² Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4е,

e-mail: matemat@nuft.edu.ua

M. A. Martynenko¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
I. V. Lebedyeva², Ph. D. (Phys.-Math.).

Effect of paraboloidal inclusion on the axisymmetric harmonic field

¹ National University of Food Technology, 01601,
Kyiv, Volodymyrs'ka st., 68,

² Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4e,
e-mail: matemat@nuft.edu.ua

У статті аналітичним методом розв'язана задача про знаходження гармонічного поля за заданим його потоком на параболоїдальному поверхневому сегменті S . Відмінність поставленої проблеми від задач Діріхле, Неймана в тому, що поверхня S є незамкненою. Задача зведена до інтегро-диференціального рівняння Фредгольма другого роду і показано, що в околі граничної лінії поверхні S потік має кореневу особливість.

Ключові слова: гармонічна функція, парні рівняння, сингулярність потоку.

In the paper the problem on finding of the harmonic field using given flow on a paraboloidal surface segment S is solved by the analytical method. In present problem the surface S is unlocked unlike Dirichlet and Neumann tasks. The problem is reduced to the second kind integral-differential equation of Fredholm. The local harmonic field in the vicinity of the boundary line of the surface segment is analyzed. It is shown that the flow has a root singularity under approaching to the boundary line of the segment. The practical value of the result obtained is the same as in the problems of the mathematical theory of elasticity for bodies weakened by cracks, where the local analysis of the field of stress gives the basis for calculating the elements for strength. The solution of proposed class of problems opens the way to the study of physical fields in the vicinity of defects of various origin (cracks, thin-walled inclusions, etc.). Such problems are relevant and have theoretical and practical significance, for example, in problems of hydrostatics, electrostatics, and thermal conductivity.

Key words: harmonic function, dual equations, flow singularity.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ. Постановка задачі

Класична математична фізика розглядає три основні задачі: задачу Діріхле, задачу Неймана і мішану задачу. Об'єднує ці задачі те, що в них розшукується гармонічна функція в області G за відомим її значенням або потоком на замкненій (повній) поверхні S , яка обмежує область G [1]. У даній роботі розглядається задача про знаходження потенціального поля в просторі за його відомим потоком на поверхневому параболоїдальному сегменті. Суттєва її відмінність від класичних задач полягає у тому, що в ній граничні значення гармонічного поля задаються на частині криволінійної поверхні. Розв'язання запропонованого класу задач відкриває шлях до дослідження фізичних полів в околі дефектів різного походження (тріщини, тонкостінні включення та ін.).

Такі проблеми є актуальними і мають теоретично-практичну значимість, наприклад, в задачах гідростатики, електростатики, теплопровідності. Задачу про знаходження гармонічного поля за відомими його значеннями на поверхневому криволінійному сегменті можна розглядати як узагальнення класичних задач математичної фізики.

Дійсно, якщо, наприклад, сферичний сегмент із заданим на ньому потоком продовжити до поверхні сфери, то прийдемо до класичної задачі Неймана для кулі і простору зі сферичною порожниною. До даного класу задач слід віднести роботу [2], де досліджено температурне гармонічне поле із заданим його потоком на сферичному сегменті.

Методика, запроваджена у даній роботі, може бути поширена на широкий клас задач про зна-

ходження динамічної гармонічної функції в просторі за заданим її значенням або потоком на сегменті поверхні другого порядку.

2. Постановка задачі

Нехай тривимірне тіло V , яке містить тонке параболоїдальне включення, перебуває в осесиметричному гармонічному полі (рис.1). Включення будемо моделювати відповідним математичним розрізом по поверхні S . Вважаємо, що потік поля через поверхню S відсутній («параболоїдальна гребля для потоку»). Задачу будемо розглядати в параболоїдальних координатах обертання ξ, η, φ , які пов'язані з декартовими координатами x, y, z співвідношеннями [3]

$$x = \xi\eta \cos \varphi; y = \xi\eta \sin \varphi; z = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2) \quad (1)$$

$$(0 \leq \xi < \infty; 0 \leq \eta < \infty; 0 \leq \varphi < 2\pi)$$

Осесиметричне рівняння Лапласа $\Delta F = 0$ у параболоїдальних координатах обертання має вигляд

$$\frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (2)$$

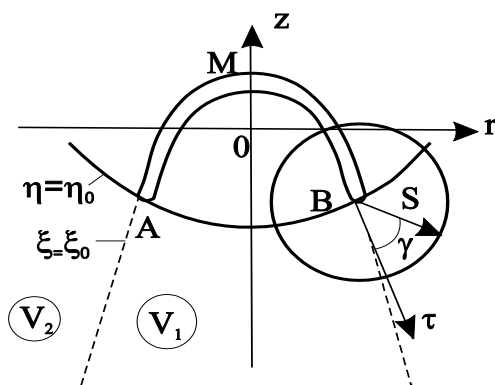


Рис. 1 Геометрія задачі.

Розіб'ємо простір на дві області: внутрішню $V_1 (\xi < \xi_0)$ і зовнішню $V_2 (\xi > \xi_0)$ (рис. 1). Тоді математичний розріз лежатиме на поверхні $S (\xi = \xi_0; 0 \leq \eta \leq \eta_0)$. Вважатимемо, що осесиметричне гармонічне поле у просторі без включення відоме $F_0(\xi, \eta)$, а через $T(\xi, \eta)$ позначимо збурене параболоїдальним включенням гармонічне поле, яке необхідно знайти. Відповідно до принципу суперпозиції сумарне гармонічне поле в тілі запишемо у вигляді

$$F(\xi, \eta) = F_0(\xi, \eta) + T(\xi, \eta), \quad (3)$$

де $T(\xi, \eta)$ - невідома гармонічна функція збурення, $F_0(\xi, \eta)$ - задана функція.

Оскільки потік гармонічного поля через поверхню S дорівнює нулеві, а гармонічне поле і його потік на поверхні параболоїда поза розрізом $(\xi = \xi_0, \eta > \eta_0)$ неперервні, то граничні умови запишуться у вигляді:

$$T(\xi, \eta) = \begin{cases} T_1(\xi, \eta); & (\xi < \xi_0, 0 < \eta < \infty) \\ T_2(\xi, \eta); & (\xi > \xi_0, 0 < \eta < \infty) \end{cases}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial F(\xi, \eta)}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} [F_0(\xi, \eta) + T(\xi, \eta)] = 0. \quad (\xi = \xi_0; 0 \leq \eta \leq \eta_0)$$

$$\frac{\partial T_1(\xi, \eta)}{\partial n} = \frac{\partial T_2(\xi, \eta)}{\partial n} = -\frac{\partial F_0(\xi, \eta)}{\partial n} = \Pi_0(\eta) \quad (\xi = \xi_0, 0 \leq \eta \leq \infty)$$

Як видно, на поверхні параболоїда для потоку виконується умова

$$\frac{\partial T_1(\xi, \eta)}{\partial n} = \frac{\partial T_2(\xi, \eta)}{\partial n} \quad (\xi = \xi_0; 0 \leq \eta < \infty), \quad (5)$$

а поза включенням

$$T_1(\xi, \eta) = T_2(\xi, \eta) \quad (\xi = \xi_0; \eta_0 \leq \eta < \infty). \quad (6)$$

Аналіз граничних умов (4) – (6) показує, що ця задача не належить до класичних задач математичної фізики (Діріхле, Неймана, мішаної задачі) [1]. Тут гібридні граничні умови, і тому необхідно шукати іншу методику для розв'язання поставленої задачі. Розв'язок рівняння Лапласа (2) шукаємо за допомогою інтегрального перетворення Ханкеля [4]. Умовою існування інтегрального перетворення Ханкеля для кусково-неперервної функції $f(\eta)$ є збіжність інтегралу $\int_0^\infty f(\eta) \sqrt{\eta} d\eta$.

У результаті застосування до (2) перетворення Ханкеля і врахування поведінки функцій при $\xi > \xi_0$ і $\xi < \xi_0$ було показано, що осесиметрична гармонічна функція $T(\xi, \eta)$ в областях $V_1 (\xi < \xi_0)$ і $V_2 (\xi > \xi_0)$ представляється наступними інтегралами Ханкеля [4]

$$T_1(\xi, \eta) = \int_0^\infty \alpha(\tau) I_0(\tau \xi) J_0(\tau \eta) \tau d\tau; \quad (\xi < \xi_0) \quad (7)$$

$$T_2(\xi, \eta) = \int_0^\infty \beta(\tau) K_0(\tau \xi) J_0(\tau \eta) \tau d\tau; \quad (\xi > \xi_0)$$

де $I_n(\tau \xi)$ – модифіковані функції Бесселя першого роду, $K_n(\tau \xi)$ – модифіковані функції Макдональда [4], а $\alpha(\tau), \beta(\tau)$ – невідомі щільності.

Потік гармонічного поля знаходиться шляхом диференціювання $T_1(\xi, \eta)$ і $T_2(\xi, \eta)$ по нормалі $\bar{n}$ до поверхні $\xi = \xi_0$:

$$\frac{\partial T_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \int_0^\infty \alpha(\tau) I_1(\tau \xi) J_0(\tau \eta) \tau^2 d\tau \quad (\xi < \xi_0) \quad (8)$$

$$\frac{\partial T_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} = - \int_0^\infty \beta(\tau) K_1(\tau \xi) J_0(\tau \eta) \tau^2 d\tau \quad (\xi > \xi_0)$$

Невідомі щільності $\alpha(\tau), \beta(\tau)$ необхідно знайти з гібридних граничних умов (4) – (6).

Розв'язання задачі

З умови (5) виключимо одну із невідомих, наприклад, $\beta(\tau)$. Маємо

$$\beta(\tau) = - \frac{\alpha(\tau) I_1(\tau \xi_0)}{K_1(\tau \xi_0)}. \quad (9)$$

Задовольняючи послідовно іншим граничним умовам, приходимо до наступної системи парних інтегральних рівнянь з ядрами у вигляді функцій Бесселя

$$\begin{cases} \int_0^\infty \alpha(\tau) I_1(\tau \xi_0) J_0(\tau \eta) \tau^2 d\tau = - \frac{\partial F_0}{\partial \eta} = \Pi_0(\eta) & (\xi = \xi_0; 0 < \eta < \eta_0) \\ \int_0^\infty \frac{\alpha(\tau)}{K_1(\tau \xi_0)} J_0(\tau \eta) d\tau = 0 & (\eta > \eta_0) \end{cases} \quad (10)$$

Безпосереднє застосування методу Фур'є для розв'язку цієї системи не приносить результату, а тому вводимо нову невідому функцію $\varphi(t)$ через інтегральний оператор I [5]

$$\frac{\alpha(\tau)}{K_1(\tau \xi_0)} = \int_0^{\eta_0} \varphi(\tau) \sin \tau t d\tau = I, \quad (11)$$

де $\varphi(t), \varphi'(t)$ – неперервні функції на проміжку $[0, \eta_0]$ і $\varphi(0) = 0$.

Інтегральний оператор I тотожно задовольняє другому рівнянню системи (10) на основі наступного значення невідомого інтегралу

$$\int_0^\infty \sin \tau t U_0(\tau \eta) d\tau = \frac{H(t - \eta)}{\sqrt{t^2 - \eta^2}}; \quad H(t - \eta) = \begin{cases} 1; & t > \eta \\ 0; & t < \eta \end{cases}$$

де $H(t - \eta)$ – функція Хевісайда [6].

Якщо скористатися інтегральним представленням функції Бесселя $J_0(\tau \eta)$ [6]

$$J_0(\tau \eta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\eta \frac{\cos \tau x dx}{\sqrt{\eta^2 - x^2}} \quad (12)$$

і підставити (11), (12) в перше рівняння системи (10), то після відповідних перетворень дістанемо інтегральне рівняння Абеля [5]

$$\int_0^\eta \frac{g(x) dx}{\sqrt{\eta^2 - x^2}} = - \frac{\partial F_0}{\partial \eta} = \Pi_0(\eta); \quad (0 \leq \eta \leq \eta_0), \quad (13)$$

де

$$g(x) = \int_0^{\eta_0} \varphi(t) M(t, x) dt, \quad (14)$$

$$M(t, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty I_1(\tau \xi_0) K_1(\tau \xi_0) \sin \tau t \cos \tau x \tau^2 d\tau. \quad (15)$$

Розв'язок рівняння (13) має вигляд [5]

$$g(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{s \Pi_0(s) ds}{\sqrt{x^2 - s^2}}. \quad (16)$$

Асимптотичний аналіз невідомого інтегралу (15) показує, що він є розбіжним при $x = t$. Якщо в нижній межі інтеграл (15) особливостей немає, то при $\tau \rightarrow \infty$ поведінка (15) визначається наступною асимптотикою добутку функцій Бесселя і Макдональда [6].

$$I_1(\tau \xi_0) K_1(\tau \xi_0) \approx \frac{1}{2\xi_0} - \frac{3}{16\tau^3 \xi_0^3} = \alpha_{11}(\tau), \quad \tau \gg 1.$$

Отримане наближення дає можливість суттєво поліпшити збіжність невідомого інтегралу (15) шляхом виділення головних складових, тобто

$$I_1(\tau \xi_0) K_1(\tau \xi_0) = \frac{1}{2\xi_0} - \frac{3}{16\tau^3 \xi_0^3} + [I_1(\tau \xi_0) K_1(\tau \xi_0) - \alpha_{11}(\tau)]$$

$$I_1(\tau \xi_0) K_1(\tau \xi_0) - \alpha_{11}(\tau) \approx O(\tau^{-5}), \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Після підстановки (17) у (15) і проведення відповідних перетворень, було показано, що інтеграли від перших двох доданків знаходяться в явному вигляді в класі узагальнених функцій на підставі відомих і отриманих рівностей

$$\int_0^\infty \sin \tau t \cos \tau x \tau d\tau = - \frac{\pi}{2} \delta'_t(t - x) \quad (18)$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin \tau t \cos \tau x}{\tau} d\tau = \frac{\pi}{2} H(t - x)$$

де $\delta(t - x)$ – дельта-функція Дірака.

Враховуючи (18), вираз (15) для $M(t, x)$ представляємо у вигляді

$$M(t, x) = - \frac{1}{2\xi_0} \delta'_t(t - x) - \frac{3}{18\xi_0^3} H(t - x) + K_{11}(x, t),$$

$$K_{11}(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [I_1(\tau \xi_0) K_{11}(\tau \xi_0) - \alpha_{11}(\tau \xi_0)] \sin \tau t \cos \tau x \tau^2 d\tau$$

Якщо врахувати рівність (18), а також

$$\int \varphi(t) \delta'_t(t - x) dt = -\varphi'(x), \quad (19)$$

то (16) перетвориться в наступне інтегро-диференціальне рівняння Фредгольна другого роду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\xi_0} \varphi'(x) - \frac{3}{16\xi_0^3} \int_x^{\eta_0} \varphi(t) dt + \int_0^{\eta_0} \varphi(t) K_{11}(x, t) dt = \\ = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{s \Pi_0(s) ds}{\sqrt{x^2 - s^2}} = \phi(x). \end{aligned}$$

Чисельні методи розв'язання таких рівнянь сьогодні детально розроблені в літературі.

Локальний аналіз граничного поля

Оскільки концентрація фізичних характеристик спостерігається в околі особливих точок, ліній, поверхонь, то в даній задачі необхідно дослідити фізичні поля в околі лінії L , яка є перетином двох поверхонь $S_1(\xi = \xi_0)$ і $S_2(\eta = \eta_0)$.

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\eta} \frac{1}{\sqrt{\eta^2 - x^2}} \left\{ \int_0^{\eta_0} \varphi(t) \left[\int_0^{\infty} K_1(\tau \xi_0) I_1(\tau \xi_0) \cos \tau x \sin \tau / \tau^2 d\tau \right] \right\} dx \quad \eta > \eta_0.$$

Обчислення останнього інтегралу в околі особливої точки $\eta = \eta_0$ та виконання граничного переходу при $\eta \rightarrow \eta_0$ приводить до формули для розрахунку коефіцієнта інтенсивності потоку гармонічного поля

$$K_{\eta} = -\frac{\varphi(\eta_0)}{2\xi_0\sqrt{\eta_0}} \sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}. \quad (20)$$

Після асимптотичного інтегрування потоку гармонічного поля (8) в околі граничного кола параболоїдального включення у локальній полярній системі координат s, γ (рис.1) та низки громіздких аналітичних асимптотичних перетворень для потоку (8) було отримано наступне перше наближення в околі лінії L

$$\frac{\partial T_2}{\partial n} \approx K_n \frac{\cos \gamma/2}{\sqrt{2S}}, \quad (21)$$

де K_n визначається за формулою (20). Практичне значення формули (21) таке, як і в задачах математичної теорії пружності для тіл, послаблених

На рис. 1 показано переріз простору площиною $\varphi = const$. В силу осової симетрії достатньо проаналізувати поля в околі т. $B(\xi_0, \eta_0)$, яка є початком локальної полярної системи координат s, γ .

Після асимптотичного аналізу формул (7), (8), (11) знайдено потік гармонічного поля (8) у вигляді

тріщинами, де локальний аналіз поля напружень складає основу розрахунку елементів на міцність.

Висновки

У роботі запропоновано аналітичний метод знаходження гармонічної функції у просторі за відомим її потоком на поверхневому параболоїдальному сегменті.

Відзначено, що зовнішня і внутрішня задача Неймана для параболоїда є частинним випадком розглянутої задачі.

Задачу зведено до інтегро-диференціального рівняння Фредгольма другого роду і показано, що всі характеристики потенціального поля знаходяться через його розв'язок.

Проаналізовано локальне гармонічне поле в околі граничної лінії поверхневого сегмента і показано, що потік при наближенні до граничної лінії сегмента має кореневу сингулярність.

Список використаних джерел

1. Мартиненко М. А. Інженерні задачі математичної фізики. / М.А. Мартиненко, В. П. Легеза. – Київ: НУХТ. 2008. – 389 с.
2. Мартиненко М.А. Розподіл температури в пружному тілі зі сферичним розрізом / М. А. Мартиненко, І. В. Лебедева // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки – 2009. – №4 – С. 55-58.
3. Улитко А.Ф. Векторные разложения в пространственной теории упругости. / А. Ф. Улитко. — Киев: Академперіодика, 2002.—341 с.
4. Снеддон И. Преобразования Фурье. / И. Снеддон. — М.: ИЛ, 1966.— 667 с.
5. Мартиненко М. А. Мішані просторові задачі математичної теорії пружності / М. А. Мартиненко. — Київ: Освіта України. 2012. – 376 с.
6. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. / Г. Н. Ватсон. — М.: ИЛ, 1949. — 798 с.

References

1. MARTYNENKO, M. and LEHEZA, V. (2008) *Inzhenerni zadachi matematychnoyi fizyky*. Kyiv: NUKHT.
2. MARTYNENKO, M. and LEBEDYEVA, I. (2009) *Rozpodil temperatury v pruzhnomu tili zi sferychnym rozrizom*. Visnyk Kyiv. Un-tu. Ser. Fiz.-Mat. Nauky. 4. p.55-58.
3. ULITKO, A. (2002) *Vektornye razlozheniya v prostranstvennoy teorii uprugosti*. Kyiv: Akademperiodyka.
4. SNEDDON, I. (1951) *Fourier Transforms*. N-Y: Mc Graw-Hill Book Company.
5. MARTYNENKO, M. (2012) *Mishani prostorovi zadachi matematychnoyi teoryi pruzhnosti*. Kyiv: Osvida Ukrainy.
6. WATSON, G. (1966) *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge University Press.

Надійшла до редколегії 08.09.17

УДК 539.3

Мартиняк Р. М., д.ф.-м.н., проф.,
Маланчук Н. І., к.ф.-м.н., с.н.с.,
Слободян Б. С., к.ф.-м.н., с.н.с.

Часткове проковзування пружних тіл за наявності періодичної системи кругових підповерхневих включень

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б,
e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

R. M. Martynyak, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
N. I. Malanchuk, Ph. D. (Phys.-Math.),
B. S. Slobodyan, Ph. D. (Phys.-Math.).

Partial slip of solids with a periodic system of circular subsurface inclusions

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, 79060, Lviv, Naukova str., 3-b,
e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

Досліджено контактну взаємодію двох півбезмежних тіл з ідентичних пружних матеріалів, одне з яких містить періодичну систему кругових підповерхневих включень, що відрізняються від матриці лише коефіцієнтом лінійного теплового розширення. Тіла спершу нагріваються до постійної температури та взаємно притискаються одне до одного, а потім піддаються дії зсувних зусиль. Над центрами включень зсувні зусилля зумовлюють виникнення та поширення ділянок фрикційного проковзування. Відповідну контактну задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння на відносний зсув поверхонь тіл на цих ділянках. На основі побудованого аналітичного розв'язку цього рівняння проаналізовано залежності ширини ділянок проковзування та розподілу відносного зсуву поверхонь від прикладеного навантаження.

Ключові слова: система кругових підповерхневих включень, часткове проковзування, відносний зсув поверхонь.

The contact interaction between two solids which are made of identical elastic materials and one of which has a periodic system of subsurface circular inclusions is investigated. The coefficients of linear thermal expansion of the inclusions and the matrix are different. The solids are loaded in two phases. Initially the solids are heated to a constant temperature and pressed together by an increasing nominal pressure. Then the solids are loaded by shear forces, which cause the partial slip in the zones over the center of each inclusion. The corresponding contact problem is reduced to a singular integral equation for a relative shift of the surfaces of the bodies in the slip zones. The dependences of the widths of the slip zones and the distribution of the relative shift of the surfaces on the applied load are analyzed. It has been revealed that the widths of the slip zones and the relative shift of the surfaces increase when the heating temperature and difference between the thermal expansion coefficients of the inclusions and the matrix increase. The widths of the slip zones and the relative shift of the surfaces decrease when the nominal pressure increases.

Key Words: system of circular subsurface inclusions, partial slip, relative shift of surfaces.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

У інженерній практиці при розрахунках надійності та довговічності вузлів машин і елементів конструкцій часто використовують аналітичні та аналітико-числові розв'язки контактних задач теорії пружності з урахуванням сил тертя. Теоретичні дослідження впливу зчеплення та часткового проковзування на взаємодію тіл в основному проведено для однорідних матеріалів тіл [1–3]. У праці [4] вивчено фрикційне проковзування двох

пружних тіл, одне з яких містить кругове підповерхнє включення, що відрізняється від матриці лише коефіцієнтом лінійного теплового розширення, за одночасної дії стискальних зусиль та нагріву до постійної температури.

Нижче досліджено зумовлене зсувним навантаженням фрикційне проковзування двох нагрітих до сталої температури та взаємно притиснутих пружних тіл за наявності в одному з них системи періодично розташованих кругових підповерхневих включень.

2. Формулювання задачі

За умов плоскої деформації розглянемо контактну взаємодію двох пружних півплощин з ідентичних матеріалів, одна з яких містить періодичну систему кругових включень радіуса R . Центри включень розташовані на глибині y_0 від межі ($y_0 > R$) з періодом d . Вважатимемо, що коефіцієнт лінійного теплового розширення включень α_0 є менший, ніж матриці α ($\alpha_0 < \alpha$), а їх пружні сталі (модуль зсуву G , коефіцієнт Пуассона ν) – однакові. Початкова температура, при якій система перебуває у природному ненапруженому стані, дорівнює нулю. Спершу півплощини нагріваються до постійної температури T та взаємно притискаються прикладеним на нескінченності монотонно зростаючим номінальним тиском інтенсивності $p_n = P/d$, де P – навантаження, що припадає на один період. Вважається, що номінальний тиск p_n перевищує певне порогове значення p_n^0 , за якого починається повне налягання поверхонь тіл.

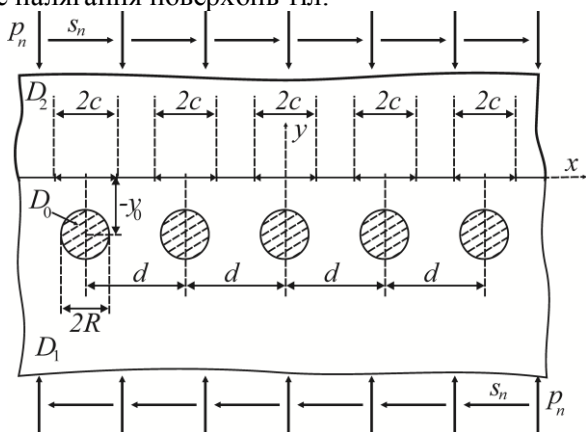


Рис. 1. Модель контакту тіл

Далі тіла на нескінченності піддаються дії монотонно зростаючих зсувних зусиль інтенсивності $s_n = S/d$, де S – навантаження, що припадає на один період (Рис. 1). Згідно із законом Кулона-Амонтона поверхні тіл будуть зчепленні до поки в кожній точці інтерфейсу дотичні напруження є меншими, ніж контактний тиск поверхонь, помножений на коефіцієнт тертя. Якщо ж зсувні зусилля s_n перевищать деяке критичне значення S_{cr} ($s_n \geq S_{cr}$), то вздовж розташованих над центрами включень ділянок контакту поверхонь відбуватиметься фрикційне проковзування. Ширина цих ділянок $2c$ монотонно зростатиме із ростом зсувних зусиль s_n . За досягнення зсувних

зусиллями величини fp_n (f – коефіцієнт тертя) відбудеться перехід від локального проковзування поверхонь до глобального ковзання тіл одне по другому. Вважаємо, що $S_{cr} < s_n < fp_n$ і відбувається локальне проковзування поверхонь.

Контактні умови сформульованої задачі запишуться:

$$\sigma_y^-(x, 0) = \sigma_y^+(x, 0), \quad \tau_{xy}^-(x, 0) = \tau_{xy}^+(x, 0); \quad (1)$$

$$v^-(x, 0) = v^+(x, 0); \quad (2)$$

$$u^-(x, 0) = u^+(x, 0), \quad x \in J_k^c; \quad (3)$$

$$\tau_{xy}^\pm(x, 0) = f |\sigma_y^\pm(x, 0)|, \quad x \in I_k^c. \quad (4)$$

Тут σ_y , τ_{xy} та u , v – компоненти тензора напружень та вектора переміщень; індексами «–» і «+» позначено граничні значення функції на осі x в тілах D_1 і D_2 відповідно; $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $I_k^c = [-c + kd, c + kd]$ – ділянки проковзування, $J_k^c = [-d/2 + kd, -c + kd] \cup [c + kd, d/2 + kd]$ – ділянки зчеплення.

3. Розв'язання задачі

Застосувавши викладену в працях [4, 5] методику, задачу (1)–(4) зведено до сингулярного інтегрального рівняння (СІР) на відносний зсув поверхонь тіл $U(x) = u^-(x, 0) - u^+(x, 0)$ на ділянках проковзування $x \in I_k^c$

$$\int_{-c}^c U'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-x)}{d} dt = \frac{2d(1-\nu)}{G} (s_n - fP(x)), \quad (5)$$

де $P(x)$ – контактний тиск поверхонь тіл:

$$P(x) = p_n - \frac{G(1+\nu)(\alpha_0 - \alpha)R^2 T \pi^2}{d^2(1-\nu)} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi x}{d} \right) \right) \times \frac{\left(1 - \operatorname{th}^2 \left(\pi y_0 / d \right) \right) \left(\operatorname{tg}^2 \left(\pi x / d \right) - \operatorname{th}^2 \left(\pi y_0 / d \right) \right)}{\left(\operatorname{tg}^2 \left(\pi x / d \right) + \operatorname{th}^2 \left(\pi y_0 / d \right) \right)^2}. \quad (6)$$

Функція $U(x)$ задовольняє умови

$$U(\pm c + kd) = 0, \quad U'(\pm c + kd) = 0, \quad (7)$$

перші з яких випливають з неперервності дотичних переміщень на межі тіл, а виконання других забезпечує обмеженість дотичних напружень на кінцях ділянок проковзування.

Аналізуючи вираз (6) бачимо, що контактний тиск $P(x)$ є періодичною функцією, мінімальне

значення якої досягається у точках $x = kd$, які лежать над центрами включень, а максимальне значення – у точках $x = (k + 1/2)d$, які лежать над серединами відрізків між центрами включень. Беручи до уваги вираз (6), знаходимо порогове значення зовнішнього тиску та критичне значення зсувних зусиль:

$$p_n^0 = \frac{G(1+\nu)(\alpha_0 - \alpha)R^2T\pi^2 \left(\text{th}^2(\pi y_0/d) - 1 \right)}{d^2(1-\nu) \text{th}^2(\pi y_0/d)},$$

$$S_{cr} = f(p_n - p_n^0).$$

Обмежений розв'язок СІР (5) запишеться:

$$U(x) = \frac{2d(1-\nu)(s_n - fp_n)}{\pi G} \left[\frac{\sqrt{\text{tg}^2\left(\frac{\pi c}{d}\right) - \text{tg}^2\left(\frac{\pi x}{d}\right)}}{\sqrt{1 + \text{tg}^2(\pi c/d)}} + \right.$$

$$- \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{\text{tg}^2(\pi c/d) + 1} + \sqrt{\text{tg}^2(\pi c/d) - \text{tg}^2(\pi x/d)}}{\sqrt{\text{tg}^2(\pi c/d) + 1} - \sqrt{\text{tg}^2(\pi c/d) - \text{tg}^2(\pi x/d)}} \right| +$$

$$\left. + \frac{(\text{tg}^2(\pi c/d) - \text{tg}^2(\pi x/d))^{3/2}}{\sqrt{1 + \text{tg}^2(\pi c/d)} (\text{tg}^2(\pi x/d) + \text{th}^2(\pi y_0/d))} \right].$$

З другої умови в (7) знаходимо півширину c ділянки проковзування:

$$\frac{s_n - fp_n}{\sqrt{1 + \text{tg}^2(\pi c/d)}} - \frac{fG(1+\nu)(\alpha_0 - \alpha)R^2T\pi^2}{d^2(1-\nu)} \times$$

$$\times \frac{\text{th}(\pi y_0/d)(1 - \text{th}^2(\pi y_0/d))}{(\text{tg}^2(\pi c/d) + \text{th}^2(\pi y_0/d))^{3/2}} = 0.$$

Дотичні контактні напруження на ділянках зчеплення J_k^c мають вигляд:

$$\tau_{xy}(x, 0) = fP(x) - \frac{fG(1+\nu)(\alpha_0 - \alpha)R^2T\pi^2}{d^2(1-\nu)} \times$$

$$\times \left| \text{tg}\left(\frac{\pi x}{d}\right) \right| \left(1 + \text{tg}^2\left(\frac{\pi x}{d}\right) \right) \sqrt{\text{tg}^2\left(\frac{\pi x}{d}\right) - \text{tg}^2\left(\frac{\pi c}{d}\right)} \times$$

$$\times \frac{\text{th}(\pi y_0/d)(1 - \text{th}^2(\pi y_0/d))}{(\text{tg}^2(\pi c/d) + \text{th}^2(\pi y_0/d))^{3/2}} \left(\frac{1}{1 + \text{tg}^2(\pi x/d)} + \right.$$

$$\left. - \frac{\text{tg}^2(\pi x/d) + 3\text{th}^2(\pi y_0/d) - 2\text{tg}^2(\pi c/d)}{(\text{tg}^2(\pi x/d) + \text{th}^2(\pi y_0/d))^2} \right).$$

4. Аналіз результатів

Числові розрахунки проведено для безрозмірних величин: $\bar{x} = x/d$, $\bar{c} = c/d$, $\bar{U} = U/d$, $\bar{P} = P/G$, $\bar{s}_n = s_n/G$, $\bar{\tau}_{xy} = \tau_{xy}/G$, $\bar{T} = T(\alpha - \alpha_0)$ при $f = 0,2$, $\nu = 0,3$, $\bar{y}_0 = y_0/d = 0,5$, $\bar{R} = R/d = 0,1$ та $\bar{p}_n = p_n/G = 5$.

На Рис. 2–4 крива 1 відповідає температурі $\bar{T} = 100$, крива 2 – $\bar{T} = 120$, крива 3 – $\bar{T} = 140$. Нелінійну залежність півширини ділянок проковзування $\bar{c}$ від зсувних зусиль $\bar{s}_n$ ілюструє Рис. 2.

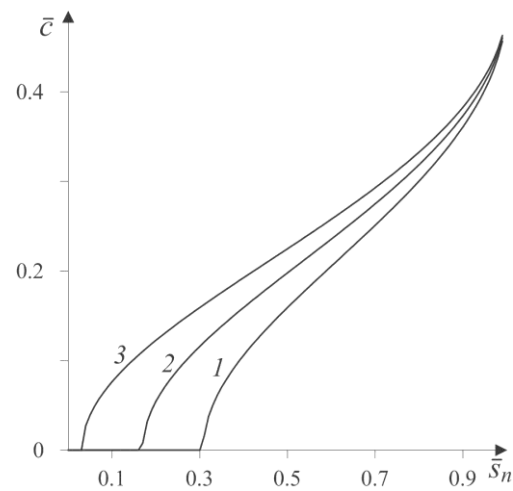


Рис. 2. Залежність півширини ділянки проковзування від зсувних зусиль

На Рис. 3 зображено розподіл відносного зсуву поверхонь $\bar{U}(\bar{x})$. Бачимо, що зі збільшенням температури збільшується максимальне значення $\bar{U}(\bar{x})$, яке досягається у центрі ділянки проковзування.

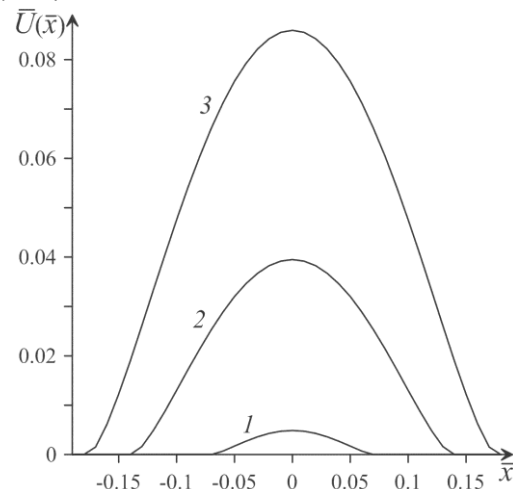


Рис. 3. Відносний зсув поверхонь тіл

На Рис. 4 подано розподіли контактних дотичних напружень $\bar{\tau}_{xy}$ (суцільні криві) та контактного тиску, помноженого на коефіцієнт тертя $f\bar{P}$ (штрихові криві). З ростом температури мінімальне значення контактного тиску спадає, а максимальне значення – зростає.

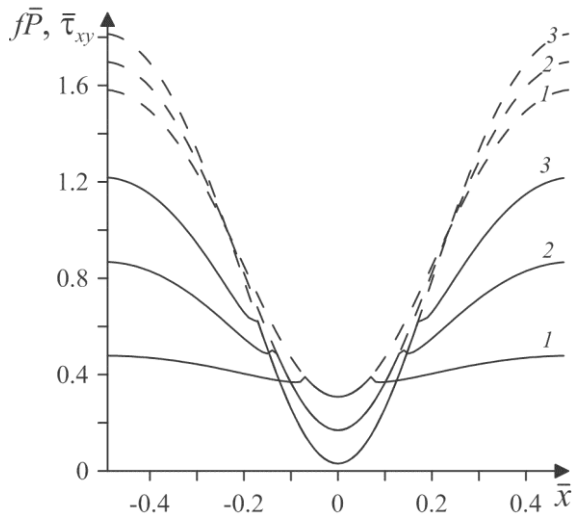


Рис. 4. Розподіл контактних напружень

Контактні дотичні напруження на кінцях ділянки проковзування мають характерні точки злому, а свого максимального значення досягають у центрі ділянок зчеплення. На ділянках проковзування контактні дотичні напруження рівні контактному тиску, помноженому на коефіцієнт

тертя, а поза ними графіки $\bar{\tau}_{xy}$ лежать нижче, ніж графіки $f\bar{P}$.

5. Висновки

Досліджено зумовлене прикладеними на нескінченності зсувними зусиллями фрикційне проковзування двох нагрітих до постійної температури та взаємно притиснутих пружних тіл, одне з яких містить періодичну систему підповерхневих кругових включень. Коефіцієнт лінійного теплового розширення включень є менший, ніж коефіцієнт лінійного теплового розширення матеріалів тіл. Сформульовану контактну задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння з ядром Гільберта на відносний зсув поверхонь тіл, що виникає на ділянках проковзування. Базуючись на отриманому аналітичному розв'язку задачі, проаналізовано контактні параметри системи. Зокрема виявлено, що ширина ділянки проковзування нелінійно залежить від зсувних зусиль. Максимальне значення відносного зсуву поверхонь зростає зі збільшенням температури та досягається у центрі ділянок проковзування. З ростом температури максимальні значення контактного тиску та контактних дотичних напружень зростають та досягаються у центрі ділянок зчеплення, а мінімальні значення – спадають та досягаються у центрі ділянок проковзування.

Список використаних джерел

1. Johnson K. L. Contact mechanics / K. L. Johnson. – Cambridge: Cambridge University Press, 1985. – 452 p.
2. Острик В. И. Метод Винера–Хопфа в контактных задачах теории упругости / В. И. Острик, А. Ф. Улитко. – К.: Наукова думка, 2006. – 328 с.
3. Hills D. A. Mechanics of elastic contact / D. A. Hills, D. Nowell, A. Sackfield. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 1993. – 496 p.
4. Маланчук Н. І. Фрикційне проковзування пружних тіл за наявності підповерхневого включення / Н. І. Маланчук, Б. С. Слободян, Р. М. Мартиняк // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2016. – Т. 52, № 6. – С. 69–74.
5. Мартиняк Р. М. Порухення контакту півпросторів при термомеханічній дії підповерхневого включення / Р. М. Мартиняк // Доп. НАН України. – 1998. – № 12. – С. 71–77.

References

1. JOHNSON, K. L. (1985) *Contact mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press.
2. OSTRIK, V. I. & ULITKO, A. F. (2006) *Metod Vinera–Hopfa v kontaktnykh zadachah teorii uprugosti*. K: Naukova dumka.
3. HILLS, D. A, NOWELL, D. & SACKFIELD, A. (1993) *Mechanics of elastic contact*. Oxford: Butterworth-Heinemann.
4. MALANCHUK, N. I., SLOBODYAN, B.S. & MARTYNYAK, R.M. (2016) Fryktsiine prokovzuvannia pruzhnykh til za naiavnosti pidpoverkhnevoho vkluchennia. *Fizyko-khimichna mekhanika materialiv*. 52 (6). p. 69–74.
5. MARTYNYAK, R. M. (1998) Porushennia kontaktu pivprostoriiv pry termomekhanichnii dii pidpoverkhnevoho vkluchennia. *Dop. NAN Ukrainy*. 12. p. 71–77.

Надійшла до редколегії 17.08.17

УДК 539.3

Мішарін А. С.¹,
Попов В. Г.², д. ф.-м. н., проф.

**Дослідження напруженого стану біля
тріщини і включення, що виходять з
однієї точки, при дії силою
поздовжнього зсуву**

¹ Національний університет «Одеська морська
академія», 65029, м. Одеса, вул. Дідрихсона, 8,
e-mail: as.mishandr@gmail.com

² Національний університет «Одеська морська
академія», 65029, м. Одеса, вул. Дідрихсона, 8,
e-mail: dr.vg.popov@gmail.com

A. S. Misharin¹,
V. G. Popov², Dr. Sci. (Phys.-Math.).

**The research of the stress state near the crack
and inclusion coming from one point, under
the action of the longitudinal shear force**

¹ National University "Odessa Maritime Academy",
8, Didrikhson str., Odessa, 65029,
e-mail: as.mishandr@gmail.com

² National University "Odessa Maritime Academy", 8,
Didrikhson str., Odessa, 65029,
e-mail: dr.vg.popov@gmail.com

Розв'язана задача визначення динамічних КІН для тріщини і включення, які виходять з однієї точки. На дефекти діє сила поздовжнього зсуву. Вихідна задача зведена до розв'язання системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь з нерухомими особливостями. Для числового розв'язання цієї системи розроблений метод, який враховує реальну асимптотику невідомих функцій і використовує спеціальні квадратурні формули для сингулярних інтегралів.

Ключові слова: коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН), система сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь, плоскі пружні хвилі, включення, тріщина.

Elements of building modern constructions and details of machines often contain constructive elements or technological defects that can be considered as thin inclusion of high rigidity. Armored elements of composite materials can also constitute thin hard inclusions. But as studies show, thin rigid inclusions cause a significant concentration of stresses in the environment, which can lead to the formation of cracks in its continuation. The problems for determining the dynamic stressed state around defects, representing a thin inclusion from the continuation of it at some angle there is a crack, is almost not solved. The problem about determining of the dynamic SIF for the crack and inclusion coming from one point is solved. The defects are under the action of longitudinal shear force. The initial problem is reduced to solving the system of singular integral-differential equations with fixed singularities. For numerical solution of the system the method is developed that takes into account the real asymptotic of the unknown functions and uses special quadrature formulas for singular integrals

Key Words: stress intensity factor (SIF), a system of singular integral-differential equations, plane elastic waves, inclusion, cracks.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Елементи сучасних будівельних конструкцій і деталі машин досить часто містять конструктивні елементи або технологічні дефекти, які можна розглядати як тонкі включення великої жорсткості. Армуючі елементи композитних матеріалів теж можуть представляти собою тонкі жорсткі включення. Але як показують дослідження [1], тонкі жорсткі включення спричиняють значну концентрацію напружень у оточуючому середовищі, яка може привести до утворення тріщин на його продовженні. Дослідження коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) від

відношення відносних довжин тріщини на продовженні включення, у статичній постановці, вивчалися у роботах [2-5].

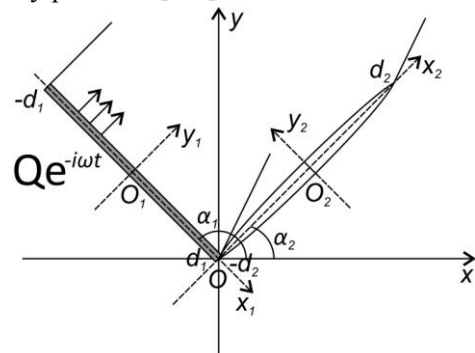


Рис.1. Тріщина, яка відходить від включення.

Задачі по визначенню динамічного напруженого стану навколо дефектів, що представляють собою тонке включення, від краю якого під деяким кутом відходить тріщина, майже не розв'язувались.

Постановка задачі

Нехай ізотропне пружне тіло знаходиться в умовах антиплоскої деформації і містить тріщину і абсолютно жорстке включення, що виходять з однієї точки (Рис. 1). Ці дефекти в площині Oxy займають відрізки $2d_i$ і утворюють з віссю Ox кути α_i , $i = 1, 2$. На включення діє зсувна сила

$$Q = Q_0 e^{-i\omega t} \quad (1)$$

де ω - частота коливань. Множник $e^{-i\omega t}$, що визначає залежність від часу, тут і далі відкинутий.

Нехай $w(x, y)$ - єдина, що не дорівнює нулю при антиплоскої деформації, z - компонента вектора переміщень. Вона визначається з рівняння Гельмгольца:

$$\Delta w + \kappa_2^2 w = 0, \quad (2)$$

де Δ - оператор Лапласа в системі координат Oxy . Це рівняння слід розглядати з граничними умовами на дефектах, для формулювання яких з кожним з дефектів зв'язується локальна система координат $O_i x_i y_i$ (Рис.1).

Нехай $w_i(x_i, y_i)$, отримані з $w(x, y)$, в результаті переходу до локальних координат. Граничні умови на тріщині сформулюємо виходячи з того, що на її берегах відсутні напруження:

$$\tau_{y_2 z}(x_2, 0) = 0, \quad x_2 \in [-d_2, d_2]. \quad (3)$$

Також на поверхні тріщини переміщення $w_2(x_2, y_2)$ мають розрив з невідомим стрибком, для якого вводиться позначення:

$$w_2(x_2, +0) - w_2(x_2, -0) = \chi_2(x_2), \quad x_2 \in [-d_2, d_2]. \quad (4)$$

На включенні за умови ідеального зчеплення повинна виконуватися рівність:

$$w_1(x_1, 0) = a, \quad x_1 \in [-d_1, d_1] \quad (5)$$

де a - невідома амплітуда поздовжніх (вздовж вісі Oz) коливань включення. Вона визначається з рівняння:

$$-m\omega^2 a = Q_0 + \int_{-d_1}^{d_1} \chi_1(\eta) d\eta \quad (6)$$

де $m = 2d_1 \rho_v h$.

На поверхні включення напруження $\tau_{y_1 z}(x_1, y_1)$ мають розрив з невідомим стрибком, для якого вводиться позначення:

$$\tau_{y_1 z}(x_1, +0) - \tau_{y_1 z}(x_1, -0) = \chi_1(x_1), \quad x_1 \in [-d_1, d_1] \quad (7)$$

Метод розв'язання

Для розв'язання цієї задачі у системах координат, зв'язаних з дефектами, будуються розривні розв'язки рівняння (2) зі стрибками (4), (7). Ці розривні розв'язки знаходяться за формулами:

$$w_1^d(x_1, y_1) = G^{-1} \int_{-d_1}^{d_1} \chi_1(\eta) r_2(\eta - x_1, y_1) d\eta,$$

$$w_2^d(x_2, y_2) = \int_{-d_2}^{d_2} \chi_2(\eta) \frac{\partial}{\partial y_2} r_2(\eta - x_2, y_2) d\eta, \quad (8)$$

де

$$r_2(\eta - x_l, y_l) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(\kappa_2 \sqrt{(\eta - x_l)^2 + y_l^2} \right), \quad l = 1, 2.$$

Після цього переміщення дифракційного поля в системі Oxy подаються у вигляді:

$$w(x, y) = w_1^g(x, y) + w_2^g(x, y) \quad (9)$$

де $w_l^g(x, y)$ отримуються за формулами (8) після перетворення координат. Щоб остаточно визначити переміщення і напруження у півпросторі необхідно знайти невідомі стрибки переміщень і напружень.

Після задовільнення граничних умов на дефектах, шляхом підстановки (3), (5) в (9), отримуємо систему сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь. Ця система після відокремлення сингулярних складових ядер і переходу до проміжку $[-1, 1]$ має вигляд:

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 \varphi_1(\tau) \left[\frac{1}{\tau - \varsigma} + R_1(\tau, \varsigma) \right] d\tau - \\ - \sin \beta \int_{-1}^1 \varphi_2'(\tau) g_2(\tau, \varsigma) d\tau - \\ - \int_{-1}^1 \varphi_2(\tau) R_2(\tau, \varsigma) d\tau = 0, \\ \int_{-1}^1 \varphi_2'(\tau) \left[\frac{1}{\tau - \varsigma} + R_3(\tau, \varsigma) \right] d\tau + \\ + \kappa_0^2 \gamma_2^2 \int_{-1}^1 \varphi_2(\tau) [\ln |\tau - \varsigma| + R_4(\tau, \varsigma)] d\tau - \\ - \sin \beta \int_{-1}^1 \varphi_1(\tau) [g_1(\tau, \varsigma) + R_5(\tau, \varsigma)] d\tau = 0, \\ \int_{-1}^1 \varphi_1(\tau) [\ln |1 + \tau| + R_6(\tau)] d\tau + \\ + 2\gamma_2^2 \sin \beta \int_{-1}^1 \varphi_2(\tau) R_7(\tau) d\tau = f_{20}. \end{cases} \quad (10)$$

$$\varphi_1(\tau) = G^{-1} \chi_1(\eta), \quad \varphi_2(\tau) = d_2^{-1} \chi_2(\eta), \quad \varphi_2'(\tau) = \chi_2'(\eta),$$

$$p_l(x, y) = \gamma_l^2 y^2 - 2\gamma_l x y \cos \beta + x^2, g_l^0(x, y) = \frac{x}{p_l(x, y)}$$

$$g_1(x, y) = g_1^0(1-x, 1+y), g_2(x, y) = g_2^0(1+x, 1-y),$$

$$\gamma_l = d_l/d, l=1, 2, d = \max(d_1, d_2).$$

Наближений розв'язок системи інтегро- диференціальних рівнянь

Наявність у сингулярної частини системи (10) нерухомих особливостей при $\tau=1, \zeta=-1$ і $\tau=-1, \zeta=1$ впливає на поведінку її розв'язків у околі точок $\zeta=\pm 1$. Згідно з методикою, викладеною в [6], встановлено:

$$\varphi_2'(\tau) = (1+\tau)^{-\delta} (1-\tau)^{-1/2} \psi_2(\tau)$$

$$\varphi_1(\tau) = (1+\tau)^{-1/2} (1-\tau)^{-\delta} \psi_1(\tau) \quad (11)$$

де показник особливості визначається рівністю:

$$\delta = \frac{2\beta - 3\pi}{2(\beta - 2\pi)}, \beta = |\alpha_1 - \alpha_2|, 0 \leq \beta \leq \pi. \quad (12)$$

Також має виконуватися рівність:

$$\psi_1(1) = \psi_2(-1) \quad (13)$$

а функції $\psi_i(\tau)$, $i=1, 2$, вважаються такими, що задовільняють умові Гельдера на проміжку $[-1; 1]$. Подальше розв'язання ґрунтується на апроксимації цих функцій інтерполяційними многочленами:

$$\psi_i(\tau) = \sum_{m=1}^n \psi_{im} \frac{P_{in}(\tau)}{(\tau - \tau_{im})[P_{im}(\tau_{im})]^l}, \quad (14)$$

$\psi_{im} = \psi_i(\tau_{im})$, $i=1, 2$, $P_{1n}(\tau) = P_n^{-\delta, -1/2}(\tau)$, $P_{2n}(\tau) = P_n^{-1/2, -\delta}(\tau)$ - многочлени Якобі, а τ_{im} - корені цих многочленів.

Для інтегралів з ядром Коші застосуємо наступні квадратурні формули [7]:

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi_l^{(l-1)}(\tau)}{\tau - \zeta_{lk}} d\tau = \sum_{m=1}^n \psi_{lm} \frac{A_{lm}}{\tau_{lm} - \zeta_{lk}}, \quad (15)$$

$l=1, 2$, $k=1, 2, \dots, n-1$, де ζ_{lk} - нулі функцій Якобі другого роду $J_n^{-\delta, -1/2}(\tau)$ і $J_n^{-1/2, -\delta}(\tau)$, а A_{lm} коефіцієнти відповідних квадратурних формул Гаусса-Якобі.

Далі аналогічні формули необхідно отримати для інтегралів з нерухомими особливостями:

$$E_l = \int_{-1}^1 \varphi_l^{(l-1)}(\tau) g_l(\tau, \zeta) d\tau, l=1, 2, \quad (16)$$

при $1 \pm \zeta \rightarrow 0$. Для цього використовуються подання (11), (14) і метод, що базуються на застосуванні теореми про згортку для інтегрального перетворення Мелліна. Остаточні формули для обчислення інтегралів (16):

$$E_l = (-1)^l \sum_{m=1}^n \psi_{lm} \left[A_{lm} \sin \beta \cdot g_l(\tau_{lm}, \zeta_{lk}) + S_l(\tau_{lm}, \zeta_{lk}) \right], l=1, 2, k=1, 2, \dots, n-1. \quad (17)$$

Для інтеграла з логарифмічною функцією у результаті інтегрування частинами та використання подання похідною (11) отримуємо наступну квадратурну формулу:

$$\int_{-1}^1 \varphi_2(\tau) \ln |\tau - \zeta_{2k}| dx = \sum_{m=1}^n A_{2m} \psi_{2m} B_{km} \quad (18)$$

$$B_{km} = -(1 + \zeta_{2k})(\ln |1 + \zeta_{2k}| - 1) - (\tau_{2m} - \zeta_{2k})(\ln |\tau_{2m} + \zeta_{2k}| - 1).$$

Застосування квадратурних формул (15), (17), (18), а також формул Гаусса-Якобі приводить до заміни системи інтегро-диференціальних рівнянь (10) системою лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень функцій ψ_l , $l=1, 2$ у вузлах інтерполяції.

Для механіки руйнувань найбільший інтерес представляють коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) [1]. Через розв'язок системи наближені значення КІН виражаються формулами:

$$K_1 = -\frac{G\sqrt{d_1}}{2^\delta} \psi_1(-1), K_2 = -\frac{G\sqrt{d_2}}{2^{1+\delta}} \psi_2(1). \quad (19)$$

Аналіз числових результатів і висновки

Розглянуто дефекти однакової довжини d , що виходять з початку координат і розташовані симетрично щодо вісі Оу. На Рис. 2 і Рис. 3 показані залежності зміни безрозмірних КІН ($k_i = K_i G^{-1} / \sqrt{d_i}$, $i=1, 2$) від безрозмірного значення хвильового числа. Кут між дефектами брався послідовно $\beta = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ і 175° , що відповідає кривим на рисунках під номерами 1, 2, 3, 4, 5. У всіх випадках показано існування числа ($1 < \kappa_0 < 2$), при якому значення КІН для тріщини досягають максимуму. Для всіх кутів, крім кутів близьких до 180° , спостерігається максимум значень КІН для включення при невеликих ($\kappa_0 \leq 2$) числах. Потім залежність від частоти приймає складний характер.

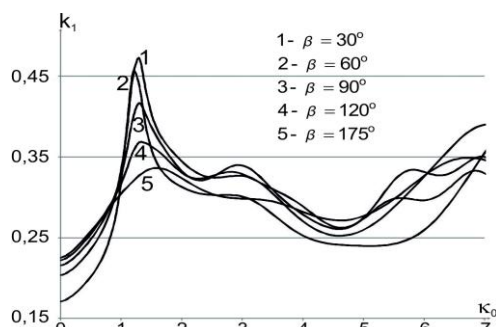


Рис.2. Залежність КІН для включення від хвильового числа при різних значеннях кута між дефектами.

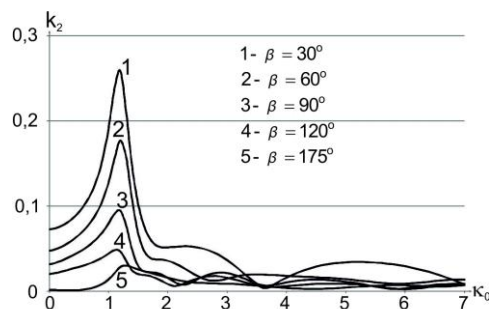


Рис.3. Залежність КІН для тріщини від хвильового числа при різних значеннях кута між дефектами.

Список використаних джерел

1. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г.Т. Сулим – Львів: Дослід.-видав. центр НТШ. – 2007. – 716 с.
2. Бережницький Л.Т. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле / Л.Т. Бережницький, В.В. Панасюк, Н.Г. Стащук – Киев.: Наук. Думка, 1983. – 288с.
3. Бережницький Л.Т. Коэффициенты интенсивности напряжений около трещины на продолжении линейного жесткого включения / Л.Т. Бережницький, Н.Г. Стащук // Докл. АН УССР. Сер. А. –1981.– №11. – С. 30-46.
4. Бережницький Л.Т. К определению критического размера макротрещины, возникающей на продолжении линейного жесткого включения / Л.Т. Бережницький, Н.Г. Стащук, Р.С. Громяк // Пробл. Прочности.–1989. – № 2. С. 68-71.
5. Акопян В.Н. Напряженное состояние полуплоскости с выходящим на границу абсолютно жестким включением и трещиной/ В.Н. Акопян, А.А. Амирджанян // Известия национальной академии наук Армении. Механика. – 2015. – Т. 68 – №1. – С.25 – 36.
6. Попов В.Г. Дифракция упругих волн сдвига на включении сложной формы, расположенном в неограниченной упругой среде. / В.Г. Попов // Гидроаэромеханика и теория упругости: Численные и аналитические методы решения задач гидроаэродинамики и теории упругости. – Днепропетровск: Днепропетр. гос. ун-т, 1986. – С. 121–127.
7. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов./ В.И Крылов - Москва: Наука, 1967. - 500 с.

References

1. SULIM, G. T. (2007) *Osnovy matematychnoi teorii termoprugnoi rivnovagy deformivnykh tverdykh til z tonkymy vkluchennyamy*. Lviv: Doslidno- vydavnychy centr NTSH.
2. BEREZHNYTSKY, L.T., PANASYUK, V.V. and STASHCHUK, N.G. (1983) *Vzaymodeystvye zhestkykh lyneynykh vklucheniy i treshchyn v deformyruемом теле*. Kiev: Naukova Dumka.
3. BEREZHNYTSKY, L.T., & STASHCHUK, N.G. (1981) Koeffitsienty intensyvnosti napryazheniy okolo treshchiny na prodolzhenii lineynoho zhestkoho vklucheniya. *Dopovidi Akademii Nauk UkrSSR. Ser. A.* №11. p. 30-46.
4. BEREZHNYTSKY, L.T., STASHCHUK, N.G., & GROMYAK, R.S.(1989) To the determination of the critical size of a macrocrack arising on the extension of a linear rigid inclusion. *Probl. Strength.* № 2. p. 68-71.
5. AKOPYAN, V.N. & AMIRJANYAN, A. A. (2015) Napryazhennoe sostoyanye poluploskosti s vykhodyashchym na granitsu abso- lyutno zhestkim vklucheniem i treshchinoy. *Yzvestiya natsyonal'noy akademii nauk Armenii. Mekhanyka.* 1 (68). p.25 - 36.
6. POPOV, V.G. (1986) Difraktsiya uprugih voln sdviga na vkluchenii slozhnoy formy, raspolozhennom v neohranichennoy upruhoy srede. – *Hydroaeromekhanika i teoriya upruhosty: Chyslennyye i analiticheskie metody resheniya zadach hydroaerodynamiki i teorii upruhosti*. Dnepropetrovsk: Dnepropetr. Gos. Univ., p. 121-127.
7. KRYLOV, V. I. (1967) *Priblizhennoe vychislyenie integralov*. Moscow: Nauka.

Надійшла до редколегії 29.08.17

УДК 539.3

Можаровський В. В., д. т. н., проф.,
Кузьменков Д. С., к. ф.-м. н., доц.
Голубова Е.А., аспірант

**Методика розрахунку напружено-
деформованого стану шаруватих труб з
урахуванням явищ повзучості
і релаксації**

Гомельський державний університет
ім. Ф. Скорини, 246019, м. Гомель, вул. Совет-
ская, 104
e-mail: mozh@gsu.by

V. V. Mozharovsky, Dr. Sci. (Tech.),
D. S. Kuzmenkov, Ph. D. (Phys.-Math.),
E. A. Golubeva, Postgraduate Student

**A technique for calculating the stress-strain
state of a layered tube with allowance for
creep and relaxation phenomena**

Francisk Skorina Gomel State University, 246019,
Gomel, Sovetskaya str., 104
e-mail: mozh@gsu.by

У роботі розглядається реалізація пружної і в'язкопружної задач для тришарових циліндричних труб з ізотропних і функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ), розв'язок яких зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Для розв'язання розглянутих задач (розрахунку напружено-деформованого стану) розроблена автоматизована методика та створено програмний модуль. Досліджується напружено-деформований стан тришароватої циліндричної труби з полімерів для теплопостачання, що знаходиться під дією внутрішнього тиску. Для в'язкопружних задач, також розроблена програма в середовищі Delphi, яка дає можливість реалізовувати розрахунок напружень і деформацій для труб з композитів, використовуючи принцип Вольтера. Розроблено алгоритм і створена програма, що реалізує розрахунок напружень і переміщень для труби з функціонально-градієнтного матеріалу в податливій оболонці з теплоізоляцією.

Ключові слова: напружено-деформований стан, композит, в'язкопружність, програмний комплекс, шарувата труба.

The realization of elastic and viscoelastic problems for three-layer cylindrical pipes from isotropic and functional-gradient materials is considered in the paper, the solution of which is reduced to a system of linear algebraic equations. To solve the considered problem (calculation of stress-strain state) an automated technique was developed and a software module was created. The stress-strain state of a three-layer cylindrical tube from polymers, for heat supply, which is under the influence of internal pressure, is studied. For visco-elastic problems, a Delphi program is also developed, which provides the ability to calculate stresses and deformations for composite pipes using the Voltaire principle. An algorithm was developed and a program was developed that implements the calculation of stresses and displacements for a pipe from a functional gradient material in a plural cover made of thermal insulation.

Key Words: stress-strain state, composite, program complex, visco-elasticity, layered tube.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

У проблемі дослідження напружено-деформованого стану (НДС) циліндричних тіл і розрахунку шаруватих конструкцій з нових армованих полімерів можна виділити кілька важливих аспектів:

- оцінка впливу зовнішніх впливів (силових, механічних, впливу температурних полів і т.д.) при виробництві та експлуатації трубопровідних систем шаруватій структури;
- використання в сучасних конструкціях нових композитів і армованих полімерів з урахуванням

фізико-механічних характеристик матеріалу, експлуатаційних умов функціонування досліджуваних об'єктів;

- розробка сучасних систем оцінки та діагностування, прогнозування стану систем трубопроводів на базі нових комп'ютерних технологій.

Проведемо короткий аналіз сучасних досліджень в області розрахунку циліндричних труб шаруватої структури. Детальна розробка схем і розрахунків для композитів шаруватих систем на підставі теорії анізотропної пружності дана в [1] - [3] і на підставі теорії шаруватих систем - на-

приклад, в [4], [5]. Пагано в [4] показав спільне рішення для анізотропного циліндра через ряди Фур'є, при цьому залишилось створити математичну модель, побудувати чисельні методи розрахунку стану конструкції.

2. Постановка задачі та її розв'язання

Розрахунок напружень у податливій оболонці з теплоізоляцією

На сучасному етапі розвитку техніки все частіше в системі теплопостачання (рис. 1) стали з'являтися тришарові полімерні і композитні труби, які необхідно розраховувати на НДС з урахуванням силових, температурних, реологічних факторів. У зв'язку з цим, розглянемо

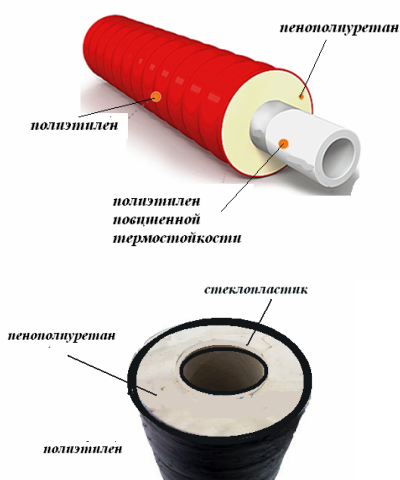


Рис.1. Приклад шаруватих труб з полімерів для теплопостачання (фото з сайту www.zpt.by)

задачу про нескінченний довгий пружний циліндр, укладений в податливу оболонку з теплоізоляцією, навантажений внутрішнім тиском, модель для розрахунку представлена на рис. 2.

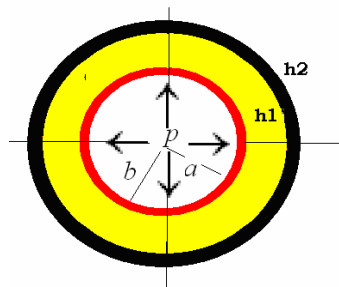


Рис. 2. Циліндр в податливій оболонці під дією внутрішнього тиску.

Приймемо, що поведінка труби, оболонки і наповнювача описується рівняннями теорії пружності і $\varepsilon_z^* = \varepsilon_z = 0$. Для даної задачі маємо рівняння рівноваги:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,$$

геометричні та фізичні співвідношення:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_z = 0,$$

$$\sigma_\theta = 2G\varepsilon_\theta + \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta),$$

$$\sigma_r = 2G\varepsilon_r + \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta),$$

де $\sigma = (\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z)^T$ і $\varepsilon = (\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z)^T$, – тензори напружень і деформацій відповідно,

де $\lambda = \lambda_i$ – коефіцієнт для випадку плоского напруженого стану (ПНС) має вигляд $\lambda_i = 2G_i\nu_i/(1-\nu_i)$, $G = G_i$ – де модуль зсуву, ν_i – коеф. Пуассона для плоского деформованого стану (ПДС) – $\lambda_i = 2G_i\nu_i/(1-2\nu_i)$. Надалі будемо мати на увазі, що G_1 і λ_1 відносяться до матеріалу циліндра, а G_2 й λ_2 – до матеріалу наповнювача і G_3 та λ_3 – до матеріалу оболонки. На підставі вищенаведених рівнянь, отримаємо рівняння рівноваги в переміщеннях:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = 0.$$

В результаті розв'язку диференціального рівняння, будуть отримані наступні вирази для переміщень і напружень:

$$u_r^{(i)} = A_i r + B_i \frac{1}{r}, \quad \sigma_\theta^{(i)} = (2G_i + 2\lambda_i)A_i + 2G_i B_i \frac{1}{r^2}$$

$$\sigma_r^{(i)} = (2G_i + 2\lambda_i)A_i - 2G_i B_i \frac{1}{r^2}$$

Таким чином, маємо відповідно для труби, наповнювача і для оболонки $i=1,2,3$,

де A_i, B_i , – шукані коефіцієнти, які знаходяться з граничних умов:

1) Граничні умови силового навантаження:

$$\sigma_r^{(1)}(a) = -p,$$

$$\sigma_r^{(3)}(r=b+h1+h2) = 0.$$

2) Умови неперервності переміщень і радіальних напружень на межі розділу шарів:

$$u_{r/r=b}^{(1)} = u_{r/r=b}^{(2)},$$

$$\sigma_{r/r=b+h_1}^{(2)} = \sigma_{r/r=b+h_1}^{(3)}, u_{r/r=b+h_1}^{(2)} = u_{r/r=b+h_1}^{(3)}$$

Необхідно вирішити систему рівнянь при заданих геометричних і фізичних параметрах, знайти напруження і переміщення.

Аналогічно вирішується задача, якщо внутрішній шар (тобто сам циліндр) складається з **функціонально-градієнтного матеріалу**. Вважаємо, що матеріал циліндра (тобто внутрішнього шару) – функціонально-градієнтний, то для нього справедлива залежність для модуля пружності [6]: $E(r) = E_0 r^\beta$, $-2 \leq \beta \leq 2$.

На підставі вищеведеного рівняння рівноваги в переміщеннях знайдемо переміщення, а потім і напруження:

– для труби

$$u_r^{(1)} = A_1 r^{m_1} + B_1 r^{m_2},$$

$$\sigma_r^{(1)} = C_{11} \varepsilon_r^{(1)} + C_{12} \varepsilon_\theta^{(1)} =$$

$$C_{11} (A_1 m_1 r^{m_1-1} + A_2 m_2 r^{m_2-1}) +$$

$$C_{12} (A_1 r^{m_1-1} + A_2 r^{m_2-1}),$$

$$\sigma_\theta^{(1)} = C_{12} \varepsilon_r^{(1)} + C_{11} \varepsilon_\theta^{(1)} =$$

$$C_{12} (A_1 m_1 r^{m_1-1} + A_2 m_2 r^{m_2-1}) + C_{11} (A_1 r^{m_1-1} + A_2 r^{m_2-1}),$$

– для наповнювача (теплоізоляція)

$$u_r^{(2)} = A_2 r + B_2 \frac{1}{r}, \sigma_\theta^{(2)} = (2G_2 + 2\lambda_2) A_2 + 2G_2 B_2 \frac{1}{r^2},$$

$$\sigma_r^{(2)} = (2G_2 + 2\lambda_2) A_2 - 2G_2 B_2 \frac{1}{r^2},$$

– для оболонки

$$u_r^{(3)} = A_3 r + B_3 \frac{1}{r}$$

$$\sigma_\theta^{(3)} = (2G_3 + 2\lambda_3) A_3 + 2G_3 B_3 \frac{1}{r^2},$$

$$\sigma_r^{(3)} = (2G_3 + 2\lambda_3) A_3 - 2G_3 B_3 \frac{1}{r^2},$$

де згідно [6]:

$$m_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-\beta \pm \sqrt{4 + \beta^2 - 4\beta v^*} \right), v^* = \frac{v_1}{(1 - v_1)},$$

$$C_{11} = \frac{E_0 (1 - v_1)}{(1 + v_1)(1 - 2v_1)} r^\beta, C_{12} = \frac{E_0 v_1}{(1 + v_1)(1 - 2v_1)} r^\beta.$$

Постійні A_i, B_i визначаються з граничних умов

$$\sigma_{r/r=a}^{(1)} = -p,$$

$$\sigma_{r/r=b}^{(1)} = \sigma_{r/r=b}^{(2)}$$

$$u_{r/r=b}^{(1)} = u_{r/r=b}^{(2)},$$

$$\sigma_{r/r=b+h_1}^{(2)} = \sigma_{r/r=b+h_1}^{(3)}, u_{r/r=b+h_1}^{(2)} = u_{r/r=b+h_1}^{(3)},$$

$$\sigma_{r/r=b+h_1+h_2}^{(3)} = 0.$$

3. Приклад числових досліджень

На основі описаної вище методики розроблено програмний модуль. Використовуючи граничні умови складаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів $A_i, B_i, i = \overline{1,3}$. Потім визначаємо напруження і переміщення в трубі.

Розроблено алгоритм і створена програма, що реалізує розрахунок напружень і переміщень для труби з функціонально-градієнтного матеріалу в податливу оболонці з теплоізоляцією (для ізотропного випадку беремо $\beta = 0$). Приклад для ілюстрації роботи програми наведено на рис. 3. і рис. 4.

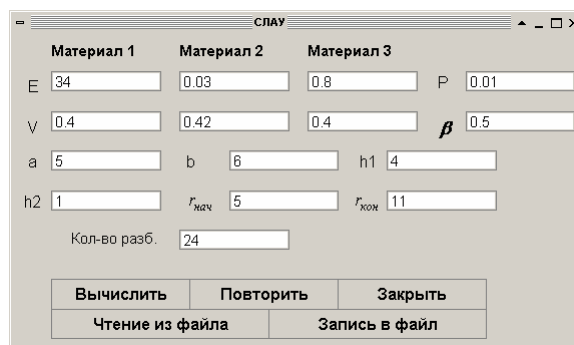


Рис. 3. Головне вікно програми (E_1, E_2, E_3, P в ГПа, a, b, h_1, h_2 – в см.)

Програма, по заздальгідь визначеним алгоритмом будує матрицю і вектор вільних членів системи лінійних алгебраїчних рівнянь, рахує її, за формулами з першої частини, визначає напруження і переміщення і виводить результати у вигляді таблиць, після натиснення кнопки «графік» буде побудований графіки залежності $\sigma_r^{(k)}, \sigma_\theta^{(k)}, u_r^{(k)}$ від r (див. приклад на рис. 4).

На рис. 4 представлена картина розподілу напружень в шаруватій трубі. Алгоритм задачі підбору матеріалу для труб реалізований таким чином, що кінцевий користувач (проектувальник) задає мінімальний перелік технічних характеристик необхідної конструкції: геометричні характеристики конструкції; експлуатаційні

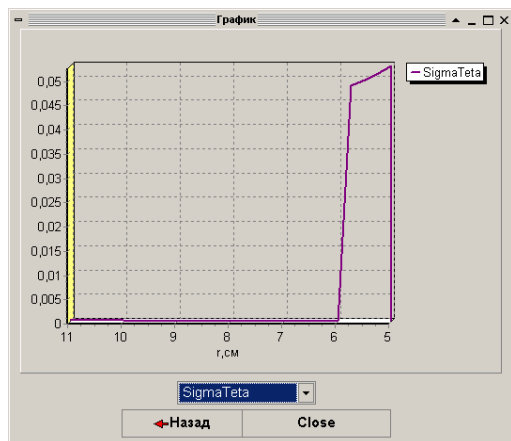


Рис. 4. Графіки залежності $\sigma_{\theta}^{(k)}$ від r при $\beta = 0.5$

характеристики: середовище експлуатації, робочий тиск, визначає коефіцієнт запасу міцності, задає групу матеріалів найбільш придатних для вирішення даного завдання, причому, якщо не конкретизувати даний параметр, то підбір буде здійснюватися за всіма наявними в довіднику матеріалами.

4. В'язкопружний випадок розрахунку неоднорідної труби

На підставі рішення для пружної задачі для неоднорідної труби розглянемо в'язкопружний випадок, в якому механічні характеристики труби змінюються за часом.

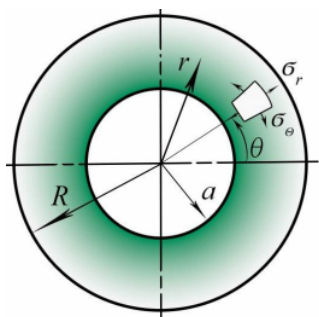


Рис.5. Труба з функціонально-градієнтного матеріалу

Теоретичні викладки розрахунку напруженого стану для пружного циліндра із фгм представлено в роботі [6] в якій досить детально викладаються основні формули для знаходження напружень в залежності від механічних властивостей фгм. Для побудови програмного модуля для розрахунку деформацій в трубі в залежності від часу будемо користуватися роботою [6] і отримаємо формули для знаходження деформацій. Для достовірності отриманих рішень протестуємо результати розрахунку напружень за допомогою програмного модуля із

результатами які показані в [6], як видно із рис.6 результати повністю ідентичні. Замінюємо модуль пружності на інтегральний оператор за принципом Вольтера (беремо $\nu = \nu(t) - const$). Так, деформації та переміщення в в'язкопружній задачі при дії внутрішнього тиску $p(t)$, за принципом Вольтера, виражаються наступним чином:

$$\varepsilon_{\theta}(r, t) = - \frac{\left(\frac{a}{R}\right)^{1-\beta} (1+\nu)(1-2\nu)(r^{m_1-1} + r^{m_2-1})}{\left(\left(\frac{a}{R}\right)^{m_1} - \left(\frac{a}{R}\right)^{m_2}\right) \omega_1 \omega_2} \tilde{E}_0^{-1} \cdot p,$$

$$\varepsilon_r(r, t) = - \frac{\left(\frac{a}{R}\right)^{1-\beta} (1+\nu)(1-2\nu)(m_1 r^{m_1-1} \omega_2 + m_2 r^{m_2-1} \omega_1)}{\left(\left(\frac{a}{R}\right)^{m_1} - \left(\frac{a}{R}\right)^{m_2}\right) \omega_1 \omega_2} \tilde{E}_0^{-1} \cdot p,$$

$$u(r, t) = - \frac{\left(\frac{a}{R}\right)^{1-\beta} (1+\nu)(1-2\nu)(r^{m_1} \omega_2 + r^{m_2} \omega_1)}{\left(\left(\frac{a}{R}\right)^{m_1} - \left(\frac{a}{R}\right)^{m_2}\right) \omega_1 \omega_2} \tilde{E}_0^{-1} \cdot p,$$

де $\omega_1 = \nu + (1-\nu)m_1$, $\omega_2 = \nu + (1-\nu)m_2$.

Тут оператор $\tilde{E}_0^{-1} \cdot 1 = \frac{1}{E_0} \left[1 + \int_0^t K(t-\tau) d\tau \right]$ діє

на функцію тиску $p(t)$.

У даній роботі використовували узагальнені ядра виду [5]

$$R(\tau) = A^* \tau^{\alpha-1} e^{-\chi \tau} E_{\frac{1}{\alpha}}(\delta^* \tau^{\alpha}; \alpha),$$

$$K(\tau) = A^* \tau^{\alpha-1} e^{-\chi \tau} E_{\frac{1}{\alpha}}(\delta \tau^{\alpha}; \alpha),$$

в які входить функція типу Міттаг-Леффлера

$E_{\rho}(x, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\tilde{A}(\mu + k\rho^{-1})}$, де $\tilde{A}(x)$ – гамма-функція, $\gamma(\alpha n, \chi t)$ – неповна гамма-функція; μ – довільний параметр. A^* , δ , χ , α – реологічні параметри.

Наведемо основні аналітичні залежності, які необхідні для подальших розрахунків. Інтеграли в фізичних залежностях легко обчислюються через суму гамма-функцій для випадку $\sigma(t)$, $\varepsilon(t) - const$.

$$\tilde{R}(\tau) = \int_0^{\tau} R(s) ds = \frac{A^*}{\delta^*} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\delta^*}{\chi^{\alpha}}\right)^n \frac{\gamma(\alpha n, \chi \tau)}{\tilde{A}(\alpha n)},$$

$$\tilde{K}(\tau) = \int_0^\tau K(s)ds = \frac{A^*}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\delta}{\chi^\alpha}\right)^n \frac{\gamma(\alpha n, \chi\tau)}{\tilde{A}(\alpha n)}.$$

При обчисленні інтегралів можна користуватися кінцевою сумою до k -го члена. З вище наведених формул, враховуючи $(\delta^* = \delta - A^*)$ маємо при $\tau \rightarrow \infty$

$$\int_0^\infty R(s)ds = \frac{A^*}{\delta^*} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\delta^*}{\chi^\alpha}\right)^n = \frac{A^*}{\chi^\alpha - \delta^*} = \frac{A^*}{\chi^\alpha - (\delta - A^*)},$$

$$\int_0^\infty K(s)ds = \frac{A^*}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\delta}{\chi^\alpha}\right)^n = \frac{A^*}{\chi^\alpha - \delta}.$$

Використовуючи [5], розглянемо різні випадки завантаження матеріалу:

а) навантаження постійне $\sigma(t) = \sigma_0 = \text{const}$, в цьому випадку закон деформування можна виразити таким чином:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} \left[1 + \int_0^t K(t-\tau)d\tau \right].$$

Використовуючи значення інтеграла $\int_0^t K(\tau)d\tau$, маємо

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} \left[1 + \frac{A^*}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\delta}{\chi^\alpha}\right)^n \frac{\gamma(\alpha n, \chi t)}{\tilde{A}(\alpha n)} \right].$$

Для $t \rightarrow \infty$ деформація асимптотично наближається до значення

$$\varepsilon_\infty = \frac{\sigma_0}{E_0} \left[1 + \int_0^\infty K(\tau)d\tau \right] = \frac{\sigma_0}{E_0} \left[1 + \frac{A^*}{\chi^\alpha - \delta} \right],$$

де $A^* = A\tilde{A}(\alpha)$, α, δ – параметри ядра.

5. Реалізація розрахунку напружень

Було прораховано різні приклади розрахунку напружень. Нижче на рис. 3 приведена якісна картина зміни радіальних напружень. Розроблений програмний комплекс дозволяє вільно варіювати матеріалами труб і їх характеристиками і показує достовірні результати. Результати показані для $a/R = 0,6$ і $\nu = 0,3$, деформації труб нормалізовані. Був розроблений алгоритм і створена програма в середовищі Delphi, яка реалізує розрахунок напружено-деформованого стану в трубі з композитів для пружної задачі. Після натискання

клавіші «обчислити» програма, за заздалегідь визначеним алгоритмом, рахує коефіцієнти A і B і будує графіки розподілу напружень і переміщень в циліндричній трубі (рис. 6). Тестування програми здійснювалося в порівнянні з результатами інших дослідників, отриманих при розрахунку напружень та деформацій в трубі з композиційних матеріалів. Деформації труби нормалізовані відповідними деформаціями в однорідному випадку і показано вплив неоднорідності.

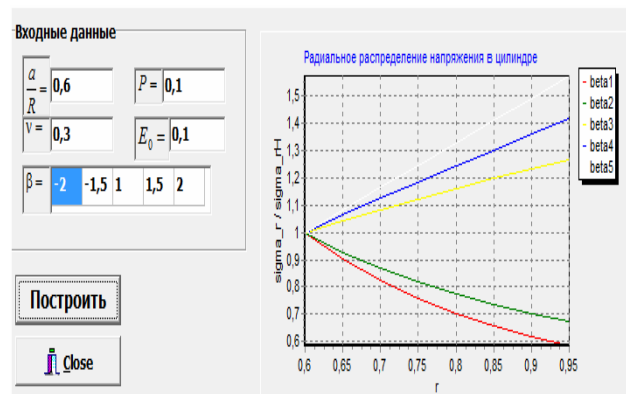


Рис. 6. Результати розрахунків і графіки розподілу напружень в трубі із ФГМ відносно матеріала однорідної труби ($\frac{\sigma_\theta}{\sigma_{0h}}$)

Для в'язкопружного випадку результати розрахунку представлені з використанням слабосингулярного ядра Ржаніцина-Колтунова при $\delta^* = 0$.

$$\text{Беремо } R(t) = A e^{-\chi t} t^{\alpha-1}$$

$$K(t) = A t^{-1} e^{-\chi t} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(A\tilde{A}(\alpha) t^\alpha)^i}{\tilde{A}(i\alpha)} \right].$$

Для в'язкопружних задач, також розроблена програма в середовищі Delphi, яка дає можливість реалізовувати розрахунок напружень і деформацій для труб з композитів, використовуючи принцип Вольтера. Аналіз розрахункових даних показує, що в'язкопружність впливає на зміни в циліндричній трубі. Пропоновані підходи можуть бути використані в теплоенергетиці, а також машинобудуванні та інших конструкціях з композитів.

6. Висновки

Розроблено автоматизовану методику і створено програмний модуль знаходження напру-

жень і деформацій шаруватих циліндричних конструкцій (труб) з ізотропних і функціонально-градієнтних матеріалів. Показана оцінка напруженого стану для шаруватих труб. Представлена методика урахування в'язкопружних і реологіч-

них властивостей функціонально-градієнтних матеріалів при розрахунках напружень і деформацій труб.

Список використаних джерел

1. Hyer M.W. Hydrostatic Response of Thick Laminated Composite Cylinders / M.W. Hyer // *J.Reinforced Plastics and Composites*. – 1988. – Vol. 7. – P. 321–330.
2. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов / Б.Е. Победря. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 336 с.
3. Можаровский В.В. Напряженно-деформированное состояние слоистых цилиндрических труб / В.В. Можаровский, С.А. Марьин, Н.А. Марьина // *ВЕСТНИК ХНТУ*. – 2008. – № 2. – С. 31.
4. Pagano N.J. Geometric Design of Composite Cylindrical Characterization Specimens / N.J. Pagano // *Journal of Composite Materials*. – 1970. – Vol. 4. – P. 360–378.
5. Можаровский В.В. Прикладная механика слоистых тел из композитов / В. В. Можаровский, В. Е. Старжинский. – Минск: Наука и техника, 1988. – 280с.
6. Tutuncu N. Exact solutions for stresses in functionally graded pressure vessels/ N. Tutuncu, M Ozturk // *Composites. Part B: Engineering*. – 2001. – Vol.32. – P. 683–686.

References

1. HYER, M.W. (1988) Hydrostatic Response of Thick Laminated Composite Cylinders *J. Reinforced Plastics and Composites*. 7. p. 321–330.
2. POBEDRJA, B.E.(1984) *Mecanica compozicionih materialov*. Moskwa: Izdatel'stvo Mosk. Universiteta.
3. MOZHAROVSKY, V. V., MARJIN, S. A. & MARJINA, N. A. (2008) Napryazhenodeformirovane sostoyanie sloistih cillindricheskih trub. *Vestnik KhNTU*. 31 (2). p. 304–309.
4. PAGANO, N.J. (1970) Geometric design of composite cylindrical characterization specimens. *Journal of Composite* (4). p. 360–378.
5. MOZHAROVSKY, V. V., STARZHYNSKY V.E (1988) *Priladnaja mecantca sloistih tel iz kompozitov*. Minsk: Nauka I Tehnika.
6. TUTUNCU, N. (2001) Exact solutions for stresses in functionally graded pressure vessels. *Composites. Part B: Engineering*. 32. p. 683–686.

Надійшла до редколегії 14.09.17

УДК 539.3

Мусій Р. С., д. ф.-м. н., проф.,
Мельник Н. Б., к. ф.-м. н.,
Андрусак І. В., к. ф.-м. н., доц.

**Побудова розв'язків динамічних задач
термомеханіки двошарових
електропровідних циліндричних тіл за
нестационарної електромагнітної дії**

Національний університет «Львівська полі-
техніка», 79013, м. Львів, вул. С. Бандери, 12,
e-mail: melnyk.n.pz@gmail.com

R. S. Musij, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
N. B. Melnyk, Ph.D. (Phys.-Math.),
I. V. Andrusyak, Ph.D., (Phys.-Math.).

**Solution construction of dynamic problems of
thermomechanics for two-layered conductive
cylindrical bodies under non-stationary
electromagnetic action**

Lviv Polytechnic National University, 79013, Lviv,
Bandera str., 12,
e-mail: melnyk.n.pz@gmail.com

Сформульовано початково-крайову задачу термомеханіки для двошарових електропровідних циліндричних тіл за імпульсною електромагнітною дією. Запропоновано методику розв'язування цієї задачі з використанням квадратичної апроксимації розподілів всіх визначальних функцій – дотичної компоненти вектора напруженості магнітного поля, температури та радіальної компоненти вектора переміщення. Вихідні початково-крайові задачі на визначальні функції зведено до задач Коші на інтегральні характеристики (сумарні по товщині складових шарів) цих функцій. З допомогою інтегрального перетворення Лапласа отримано вирази інтегральних характеристик за однорідної нестационарної електромагнітної дії. Наведено числовий аналіз задачі термомеханіки для біметалевого порожнистого циліндра за дією електромагнітного імпульсу.

Ключові слова: електромагнітний імпульс, двошарові електропровідні тіла, біметалевий порожнистий циліндр, роботоздатність.

The initial boundary value problem of thermomechanics has been formulated for the two-layered conductive cylindrical bodies under uniform non-stationary electromagnetic action. The method of solving this problem has been proposed using quadratic approximation of distributions of all determining functions - tangential components of the magnetic field intensity vector, temperature and radial component of the displacement vector. The initial boundary value problems for the defining functions have been reduced to Cauchy problems for the integral characteristics (total by thickness of constituent layers) of these functions. Using integral Laplace transform, the expressions of the integral characteristics have been obtained under the uniform non-stationary electromagnetic action. The numerical analysis of the thermomechanics problem has been carried out for bimetallic hollow cylinder under electromagnetic pulse action. The thermomechanical behavior patterns of the cylinder under electromagnetic pulse have been obtained and the critical value of its parameters has been established, under which the given cylinder loses its workability.

Key words: electromagnetic impulse, two-layered electroconductive bodies, bimetallic hollow cylinder, workability.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Двошарові електропровідні циліндри (ДЕЦ) є конструктивними елементами сучасних приладів і пристроїв, зокрема, електропровідними перехідниками і давачами [1]. У процесі експлуатації вони зазнають впливу імпульсних електромагнітних полів (ЕМП) [2,3]. Внаслідок цього в них виникають нестационарні температурні поля T і напруження $\hat{\sigma}$, які можуть досягати значних рівнів аж до втрати ДЕЦ роботоздатності як елемента конструкції [3]. Тому

обчислення цих фізичних факторів є актуальним для прогнозування роботоздатності елементів конструкцій у вигляді ДЕЦ за дії імпульсних ЕМП. У літературі [4] відомі дослідження термонапруженого стану і роботоздатності однорідних електропровідних тіл канонічної форми за дії імпульсних ЕМП. Однак недостатньо вивчено термомеханічну поведінку і роботоздатність ДЕЦ як конструктивних елементів за таких дій.

2. Формулювання задачі термомеханіки для двошарового електропровідного циліндра

Розрахункова модель задачі складається з трьох етапів. На першому етапі з співвідношень Максвелла визначаємо нестационарне ЕМП, яке описується вектором напруженості магнітного поля $\vec{H}^{(n)}$, та зумовлені ним джоулеві тепловиділення $Q^{(n)}$ і пондеромоторні сили $\vec{F}^{(n)}$ у кожному шарі ДЕЦ за врахування заданих граничних умов на зовнішніх поверхнях циліндра та умов ідеального електромагнітного контакту на поверхні з'єднання шарів. На другому етапі з рівняння теплопровідності, в якому джоулеві тепловиділення $Q^{(n)}$ є об'ємними джерелами тепла, визначаємо нестационарне температурне поле $T^{(n)}$ за умов конвективного теплообміну з довкіллям на зовнішніх поверхнях та ідеального теплового контакту на поверхні з'єднання складових шарів. На третьому етапі з рівнянь динамічної термopужності за знайденими температурою $T^{(n)}$ та пондеромоторною силою $\vec{F}^{(n)}$ визначаємо вектор переміщень $\vec{u}^{(n)}$ та тензор динамічних напружень $\hat{\sigma}^{(n)}$.

Для оцінювання роботоздатності ДЕЦ обчислюємо інтенсивності $\sigma_i^{(n)}$ сумарних напружень, зумовлених джоулевім теплом і пондеромоторною силою, в кожному n -му шарі і порівнюємо їх величину з межею пружного деформування $\sigma_d^{(n)}$ матеріалу. ДЕЦ втрачає роботоздатність в цілому, якщо її втрачає хоча б один із складових шарів, тобто за виконання умови $\max \sigma_i^{(n)} \geq \sigma_d^{(n)}$. Ця умова відповідає критерію Губера-Мізеса для ізотропного тіла. Величина $\sigma_d^{(n)}$ для використовуваних в техніці біметалевих з'єднань відома з експериментальних досліджень [4].

2.1. Визначення ЕМП. Однорідне ЕМП в n -му шарі ДЕЦ задається значеннями осової компоненти $H_z^{(n)}(r, t)$ вектора $\vec{H}^{(n)}$ напруженості магнітного поля і визначається з рівняння

$$\frac{\partial^2 H_z^{(n)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z^{(n)}}{\partial r} - \sigma_n \mu_n \frac{\partial H_z^{(n)}}{\partial t} = 0. \quad (1)$$

Тут σ_n , μ_n – коефіцієнт електропровідності та магнітна проникливість матеріалу n -го шару ДЕЦ. Рівняння (1) розв'язуємо за крайових умов на зовнішніх поверхнях $r = r_0$ і $r = r_2$ та на поверхні $r = r_1$ з'єднання складових шарів ДЕЦ, які мають вигляд:

$$H_z^{(1)}(r_0, t) = H_z^-(t), \quad H_z^{(2)}(r_2, t) = H_z^+(t), \quad (2)$$

$$H_z^{(1)}(r_1, t) = H_z^{(2)}(r_1, t), \quad \frac{\partial H_z^{(1)}(r_1, t)}{\partial r} = k_\sigma \frac{\partial H_z^{(2)}(r_1, t)}{\partial r},$$

де $H_z^\pm(t)$ – задані функції часу, $k_\sigma = \sigma_1/\sigma_2$.

Початкові умови при $t = 0$ будуть

$$H_z^{(n)}(r, 0) = 0. \quad (3)$$

2.2. Визначення температурного поля.

Температуру $T^{(n)}(r, t)$ в n -му шарі ДЕЦ визначаємо з рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial^2 T^{(n)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(n)}}{\partial r} - \frac{1}{\kappa_n} \frac{\partial T^{(n)}}{\partial t} = -\frac{Q^{(n)}}{\lambda_n} \quad (4)$$

за граничних умов

$$\frac{\partial T^{(1)}(r_0, t)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T^{(2)}(r_2, t)}{\partial r} = 0 \quad (5)$$

теплоізоляції зовнішніх поверхонь $r = r_0$ і $r = r_2$ та умов на поверхні $r = r_1$ з'єднання шарів

$$T^{(1)}(r_1, t) = T^{(2)}(r_1, t),$$

$$\frac{\partial T^{(1)}(r_1, t)}{\partial r} = k_\lambda \frac{\partial T^{(2)}(r_1, t)}{\partial r}, \quad (6)$$

а також нульових початкових умов

$$T^{(n)}(r, 0) = 0. \quad (7)$$

Тут κ_n , λ_n – коефіцієнти температуро- і теплопровідності матеріалів n -го шару, $k_\lambda = \lambda_2/\lambda_1$.

2.3. Визначення термонапруженого стану.

Радіальну компоненту $u_r^{(n)}$ вектора переміщень $\vec{u}^{(n)}$ для ДЕЦ визначаємо з рівняння

$$\frac{\partial^2 u_r^{(n)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_r^{(n)} - \frac{1}{c_{1n}^2} \frac{\partial^2 u_r^{(n)}}{\partial t^2} =$$

$$= \alpha_n \frac{1 + \nu_n}{1 - \nu_n} \frac{\partial T^{(n)}}{\partial r} - \frac{(1 + \nu_n)(1 - 2\nu_n)}{E_n(1 - \nu_n)} F_r^{(n)} \quad (8)$$

за крайових умов

$$\frac{\partial u_r^{(1)}(r_0, t)}{\partial r} + \frac{\nu_1}{1 - \nu_1} \frac{1}{r_0} u_r^{(1)}(r_0, t) = \alpha_1 \frac{1 + \nu_1}{1 - \nu_1} T^{(1)}(r_0, t), \quad (9)$$

$$\frac{\partial u_r^{(2)}(r_2, t)}{\partial r} + \frac{\nu_2}{1 - \nu_2} \frac{1}{r_2} u_r^{(2)}(r_2, t) = \alpha_2 \frac{1 + \nu_2}{1 - \nu_2} T^{(2)}(r_2, t)$$

на поверхнях $r = r_0$ і $r = r_2$ та умов при $r = r_1$

$$u_r^{(1)}(r_1, t) = u^{(2)}(r_1, t), \quad (10)$$

$$(1 - \nu_1) \frac{\partial u_r^{(1)}(r_1, t)}{\partial r} + \nu_1 \frac{1}{r_1} u_r^{(1)}(r_1, t) - \alpha_1 (1 + \nu_1) T^{(1)}(r_1, t) =$$

$$= k_E \left[(1 - \nu_2) \frac{\partial u_r^{(2)}(r_1, t)}{\partial r} + \nu_2 \frac{1}{r_1} u_r^{(2)}(r_1, t) - \alpha_2 (1 + \nu_2) T^{(2)}(r_1, t) \right]$$

і нульових початкових умов

$$u_r^{(n)}(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_r^{(n)}(r, 0)}{\partial t} = 0. \quad (11)$$

Тут $c_1^n = ((1 - \nu_n) E_n / (\rho_n (1 + \nu_n) (1 - 2\nu_n)))^{-1/2}$ - швидкість пружних хвиль розширення, α_n , ν_n - коефіцієнти лінійного теплового розширення і Пуассона, E_n - модуль пружності, ρ_n - густина матеріалу n -го шару циліндра.

Радіальні $\sigma_{rr}^{(n)}$, колові $\sigma_{\varphi\varphi}^{(n)}$ та осьові $\sigma_{zz}^{(n)}$ напруження обчислюємо зі співвідношень:

$$\sigma_{rr}^{(n)} = E_{*n} \left[(1 - \nu_n) \frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial r} + \nu_n \frac{1}{r} u_r^{(n)} - \alpha_n (1 + \nu_n) T^{(n)} \right],$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(n)} = E_{*n} \left[(1 - \nu_n) \frac{u_r^{(n)}}{r} + \nu_n \frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial r} - \alpha_n (1 + \nu_n) T^{(n)} \right],$$

$$\sigma_{zz}^{(n)} = \nu_n (\sigma_{rr}^{(n)} + \sigma_{\varphi\varphi}^{(n)}) - \alpha_n E_n T^{(n)},$$

де $E_{*n} = E_n / ((1 + \nu_n) (1 - 2\nu_n))$.

3. Методика побудови розв'язків

Початково-крайові задачі (1)-(11) розв'язуємо, апроксимуючи за радіальною змінною r всі функції $\Phi^{(n)}(r, t) = \{H_z^{(n)}(r, t), T^{(n)}(r, t), u_r^{(n)}(r, t)\}$ в n -му шарі ДЕЦ квадратичними многочленами

$$\Phi^{(n)}(r, t) = \sum_{i=0}^2 a_i^{(n)}(t) r^i. \quad (12)$$

Коефіцієнти $a_i^{(n)}(t)$ у виразах (12) визначаємо через інтегральні характеристики

$$\Phi_s(t) = \sum_{n=1}^2 \int_{\gamma_{n-1}}^{\gamma_n} \Phi^{(n)}(r, t) r^{s+1} dr, \quad s = 1, 2 \quad (13)$$

функцій $\Phi^{(n)}(r, t)$ та задані крайові умови на їх зовнішніх поверхнях і на поверхні з'єднання шарів ДЕЦ. Тут $l = 0$ при інтегруванні рівнянь (1) і (4); $l = 1$ - для рівняння (8).

Для знаходження інтегральних характеристик $\Phi_s(t)$ вихідні рівняння (1), (4) і (8) інтегруємо згідно з (13) за врахування виразів (12). В результаті вихідні початково-крайові задачі на функції $\Phi^{(n)}(r, t)$ зводимо до задач Коші на їх інтегральні характеристики $\Phi_s(t)$, розв'язки яких записуємо у вигляді згорток функцій, що описують задані крайові умови та однорідні розв'язки. Отримано вирази компоненти $H_z^{(n)}$

$$H_z^{(n)}(r, t) = \sum_{i=0}^2 \left\{ \sum_{s=1}^2 a_{is}^{(n)} \sum_{k=1}^2 \int_0^t [A_{s1}(k) H_j^-(\tau) + A_{s2}(k) H_j^+(\tau)] \times \right.$$

$$\left. \times e^{p_k(t-\tau)} d\tau + a_{i3}^{(n)} H_j^-(t) + a_{i4}^{(n)} H_j^+(t) \right\} r^i, \quad (14)$$

температури

$$T^{(n)}(r, t) = \sum_{k=0}^2 \sum_{s=1}^2 \left(b_{ks}^{(n)} \sum_{m=1}^2 \int_0^t [B_{s1}(m) W_1^Q(\tau) + \right.$$

$$\left. + B_{s2}(m) W_2^Q(\tau)] e^{p_m(t-\tau)} d\tau \right) r^k \quad (15)$$

та радіальної компоненти $u_r^{(n)}(r, t)$ вектора $\vec{u}^{(n)}$

$$u_r^{(n)}(r, t) = \sum_{i=0}^2 \left\{ \sum_{s=1}^2 c_s^{(n)} \sum_{\beta=1}^4 \int_0^t [R_{s1}^{**}(\beta) W_1^{**}(\tau) + \right.$$

$$\left. + R_{s2}^{**}(\beta) W_2^{**}(\tau)] e^{p_\beta(t-\tau)} d\tau \right\} r^i. \quad (16)$$

Тут $A_{sj}(k)$, $B_{sj}(m)$, $R_{sj}^{**}(\beta)$ ($s, j = 1, 2$) - вирази, що залежать від коренів p_k , p_m , p_β відповідних характеристичних рівнянь задач для визначення функцій $H_z^{(n)}$, $T^{(n)}$ та $u_r^{(n)}$. За відомими виразами (16) функцій $u_r^{(n)}(r, t)$ визначаємо компоненти $\sigma_{rr}^{(n)}$, $\sigma_{\varphi\varphi}^{(n)}$, $\sigma_{zz}^{(n)}$ тензора напружень в циліндрі.

4. Числовий аналіз задачі за дії електромагнітного імпульсу (ЕМІ)

Дія ЕМІ описується функцією вигляду [2, 4]

$$H_z^\pm(t) = k_0 H_0 (e^{-\beta_1 t} - e^{-\beta_2 t}). \quad (17)$$

Тут k_0 - нормувальний множник, β_1 і β_2 - параметри, що характеризують часи фронтів наростання і спадання ЕМІ тривалості t_i , H_0 - максимальне значення напруженості магнітного поля в імпульсі. Підставляючи вираз (17) у співвідношення (14)-(16), отримуємо

вирази функцій $\Phi^{(n)}$ і вирази напружень $\sigma_{rr}^{(n)}$, $\sigma_{\varphi\varphi}^{(n)}$, $\sigma_{zz}^{(n)}$.

Проаналізовано ДЕЦ, виготовлені зі сталі X18H9T та міді з $r_0 = 8$ мм, $r_1 = 9$ мм, $r_2 = 10$ мм. Параметри ЕМІ вибрані: $t_i = 10^{-4}$ с, 10^{-3} с, $\beta_1 = 6,9/t_i$, $\beta_2 = 2\beta_1$, $k_0 = 4$. Для сталі $\sigma_d = 300$ МПа, для міді $\sigma_d = 70$ МПа [1, 4].

На рис. 1 показано зміну в часі складників $\sigma_{\varphi\varphi}^{(n)j}$ ($j = Q, F$) колових напружень $\sigma_{\varphi\varphi}^{(n)}$ при $t_i = 10^{-3}$ с в шарах ДЕЦ при $r = r_1$. Лінії 1 та 2 відповідають сталевому і мідному шарам.

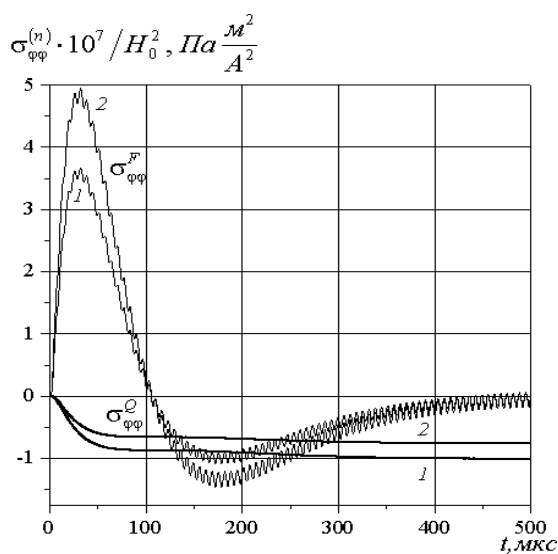


Рис. 1 Складові колових напружень при $t_i = 10^{-3}$ с

На рис. 2 подано залежності $\sigma_{i\max}^{(n)}$ від величини H_0 у шарах ДЕЦ при $r = r_1$ за $t_i = 10^{-4}$ с, 10^{-3} с. Суцільні лінії відповідають сталевому, а штрихові –

мідному шарам.

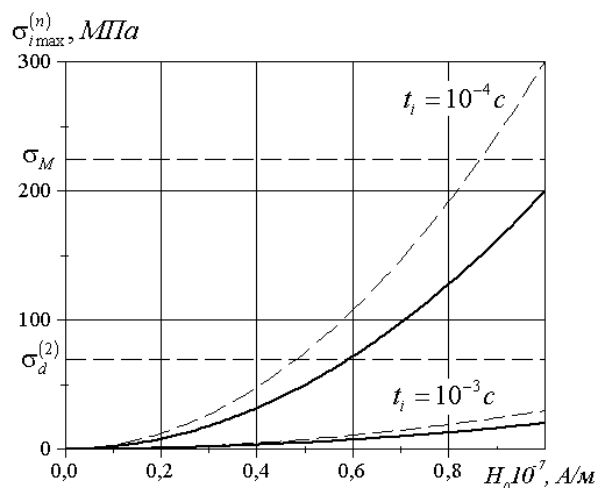


Рис. 2 Складові колових напружень при $r = r_1$

Отримано, що за $t_i = 10^{-3}$ с робоздатність ДЕЦ зберігається, а за $t_i = 10^{-4}$ с - втрачається.

5. Висновки

Запропонована методика дала змогу точно врахувати в розв'язках задач електродинаміки, теплопровідності і термпружності всі задані крайові умови як на внутрішній і зовнішній поверхнях ДЕЦ, так і на поверхні з'єднання його шарів. З'ясовано закономірності термомеханічної поведінки розглядуваного ДЕЦ і критичні значення параметрів ЕМІ, за яких ДЕЦ втрачає робоздатність.

Список використаних джерел

1. Matthews F. Composite materials. Engineering and Science / F. Matthews, R. Rawlings – Cambridge, England: Woodhead Publishing Limited, 1999. – 480 p.
2. Moon F.C. Magnetosolid mechanics / F.C. Moon. – New York: J.Wiley, 1984. – 436 p.
3. Батыгин Ю. В. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий / Ю. В. Батыгин, В. И. Лавинский, Л. Т. Хименко – Харьков: МОСТ – Торнадо, 2003. – 288 с.
4. Мусій Р. С. Динамічні задачі термомеханіки електропровідних тіл канонічної форми / Р. С. Мусій. – Львів: Видавництво «Растр-7», 2010. – 216 с.

References

1. MATTHEWS, F. (1999) *Composite materials. Engineering and Science*. Cambridge: Woodhead Publishing Limited.
2. MOON F.C. (1984) *Magnetosolid mechanics* New York: J.Wiley.
3. BATYGYN, J. V., LAVYNSKYY, V. I. and HYMENKO, L. N. (2003) *Impulsnyje Magnytnyje Polja Dlja Progressivnyh Tehnologij*. Harkov: Most-Tornado.
4. MUSIJ, R. S. (2010) *Dynamichni Zadachi Termomehaniky Elektroprovodnyh Til Kanonichnoji Formy*. Lviv: Rastr-7.

Надійшла до редколегії 15.09.17

УДК 539.3

Николишин¹ М. М., д.ф.-м.н., проф.,
Опанасович² В. К., д.ф.-м.н., проф.,
Куротчин¹ Л. Р., к.ф.-м.н., м.н.с.,
Слободян² М. С., к.ф.-м.н., доц.

**Двовісний розтяг кусково-однорідної
пластини з прямолінійною межею
поділу матеріалів та двома
поверхневими тріщинами в ній з
урахуванням пластичних зон біля їх
вершин**

¹ Інститут прикладних проблем механіки і
математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, Україна,
e-mail: klesi@i.ua

² Львівський національний університет імені
Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів,
79000, Україна,
e-mail: slobkolia@gmail.com

Nykolysyn¹ M. M., Dr.Sci., (Phys.-Math.),
Opanasovych² V. K., Dr.Sci., (Phys.-Math.),
Kurotchyn¹ L. R., Ph.D. (Phys.-Math.),
Slobodyan² M. S., Ph.D. (Phys.-Math.).

**Biaxial tension of piecewise-homogeneous
isotropic plate with a straight boundary
between material and two surface cracks in it,
taking into account the plastic zone at its
edges**

¹ Pidstryhach Institute for Applied Problems of
Mechanics and Mathematics National Academy of
Sciences of Ukraine, 3b, Naukova Str., Lviv, 79060,
Ukraine,

email: klesi@i.ua

² Ivan Franko National University of Lviv,
1, Universytetska St., Lviv, 79000, Ukraine,
email: slobkolia@gmail.com

Сформульовано та розв'язано задачу про двовісний розтяг нескінченної кусково-однорідної ізотропної пластини, що має прямолінійну межу поділу матеріалів і дві рівні поверхневі тріщини на цій межі. Припущено, що матеріал під тріщинами перейшов у пластичний стан, а на продовженні тріщин біля їх вершин утворюються пластичні зони, де виконуються умови пластичності Треска-Сен-Венана у вигляді поверхневого пластичного шару. Оскільки тріщини поверхневі, то розв'язок задачі подано у вигляді суперпозиції двох задач: розтягу та згину пластини з використанням класичної теорії згину. Чисельно проаналізовано вплив глибини поверхневих тріщин та їх взаємного розташування, на довжину пластичних зон та розкриття тріщин біля їх вершин.

Ключові слова: розтяг, кусково-однорідна пластина, міжфазна поверхнева тріщина, пластичні зони, комплексні потенціали, умова пластичності Треска-Сен-Венана.

The problem on biaxial tension of an infinite piecewise-homogeneous isotropic plate has been formulated and solved, the plate having a linear interface of materials, where the conditions of perfect mechanical contact are satisfied, and two equal surface cracks. It is assumed that material under cracks changed into plastic state and on the crack prolongation near their tips plastic zones are formed Tresca-Saint-Venant plasticity conditions are satisfied in the form of a surface plastic layer. Since the cracks are through. The solution of the problem is given in the form of two problems superposition: tension and bending of the plate, having used classical theory of bending. Using the methods of the theory of complex variable and complex potentials of plane problem of elasticity theory and classical theories of the plate bending, solution of the problem is reduced to the problems of linear conjugation, solution of which is obtained in the class of functions, limited in the tops of plastic zones. The formulas to find the stress state on the interface of materials are written out. A system of equations to find the length of plastic zones near the crack tips is obtained. It is solved numerically by means of Newton method. The separation of the crack edges in their tips is determined; where on computing the integrals the method of mechanical quadrature's has been utilized. The influence of load, depth of surface cracks and their mutual location on the length of plastic zones and crack opening near their tips has been analyzed numerically.

Key words: tension, piecewise-homogeneous plate, interfacial surface crack, plastic zone, the complex potentials, the condition of Tresca-Saint-Venant plasticity.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

У багатьох галузях техніки використовують пластинчасті елементи, оскільки вони легкі і надійні. Однак у них можуть виникнути тріщини, як при виготовленні, так і під час експлуатації. Тому важливо дослідити вплив тріщин на напружено-деформований стан таких елементів. Методи визначення напружено-деформованого стану за наявності тріщин у тонких пластинах наведено в монографіях [1-3], а у [4] досліджено напружено-деформований стан тонкостінних елементів конструкцій за наявності в них тріщин та пластичних зон біля їх вершин, де виконується умова пластичності Треска-Сен-Венана у вигляді поверхневого шару чи пластичного шарніру. Зауважимо, як частковий випадок із даної роботи впливають результати статі [5].

2. Формулювання задачі

Розглянуто задачу про двовісний розтяг безмежної кусково-однорідної ізотропної пластини завтовшки $2h$ з прямолінійною межею поділу матеріалів та двома рівними міжфазними поверхневими тріщинами завдовжки $2l$ та заввишки $h + h_1$ з відстанню $2s$ між їх центрами. У серединній площині пластини виберемо декартову систему координат $Ox\tilde{z}$ з початком посередині між тріщинами, направивши вісь Ox по межі поділу матеріалів, а вісь Oy перпендикулярно до неї. Півплощину, для якої $y > 0$ ($y < 0$) будемо позначати через S_1 (S_2). На нескінченності пластина знаходиться під дією однорідного поля зусиль P_1 , P_2 і q . Вважаємо, що під дією зовнішнього навантаження на продовженні тріщин виникають пластичні зони завдовжки w_1 (між тріщинами) і w_2 (зовні них), крім того, матеріал у перемичці під тріщиною $h_1 \leq \tilde{z} \leq h$, $x \in [b, c]$, $x \in [-c, -b]$ (рис. 1) також перейшов у пластичний стан. Оскільки тріщини поверхневі, то розв'язок задачі розбиваємо на дві взаємозв'язані задачі: плоску задачу теорії пружності і задачу згину пластини з використанням класичної теорії. Лінію спаю матеріалів, де виконуються умови ідеального механічного контакту, позначимо через L' , лінію тріщин – через L , а пластичні зони через L'_1 , L'_2 , L''_1 і L''_2 (див. рис. 1).

Згідно формулювання задачі маємо такі крайові умови:

$$\text{на межі поділу матеріалів } x \in L' \\ [\sigma_{yy}] = [\sigma_{xy}] = [u] = [v] = 0,$$

$$[M_y] = [H_{xy}] = [N_y] = [w] = [\partial w / \partial y] = 0,$$

та на берегах тріщин з пластичними зонами [4]

$$\sigma_{yy}^{\pm} = \begin{cases} \sigma_{0j}, x \in L_j, \\ \sigma_Y \tilde{b}_1, x \in L, \end{cases} \quad M_y^{\pm} = \begin{cases} M_{0j}, x \in L_j, \\ \sigma_Y \tilde{b}_2, x \in L, \end{cases} \\ \sigma_{xy}^{\pm} = \begin{cases} \tau_{0j}, x \in L'_j, \\ 0, x \in L, \\ -\tau_{0j}, x \in L''_j, \end{cases} \quad H_{xy}^{\pm} = \begin{cases} H_{0j}, x \in L'_j, \\ 0, x \in L, \\ -H_{0j}, x \in L''_j, \end{cases}$$

$$\tilde{b}_1 = (h - h_1) / (2h), \quad \tilde{b}_2 = (h^2 - h_1^2) / 2, \quad L_j = L'_j \cup L''_j,$$

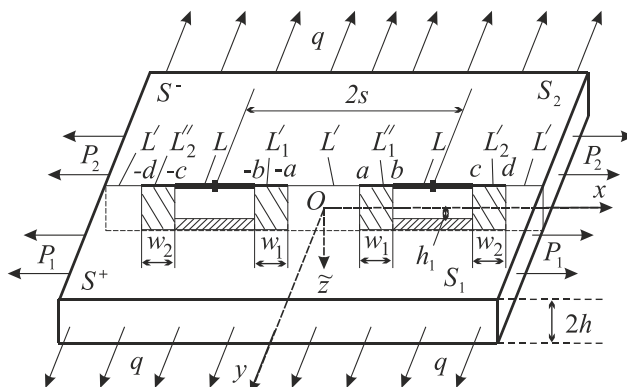


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщин

де u , v – проекції вектора переміщення точки серединної площини на осі Ox і Oy відповідно; σ_{yy} , σ_{xy} , σ_{xx} – компоненти тензора напружень; σ_{0j} , τ_{0j} , – невідомі нормальні і дотичні напруження у плоскій задачі в j пластичній зоні, де $j=1,2$; w – прогин серединної площини пластини; M_y , H_{xy} , N_y – згинальний і крутний моменти та перерізувальна сила; M_{0j} , H_{0j} – невідомі згинальний і крутний моменти у пластичній зоні; $\sigma_Y = \min\{\sigma_Y^{(1)}, \sigma_Y^{(2)}\}$, $\sigma_Y^{(j)}$ – границя текучості матеріалу S_j – півплощини; $[f] = f^+ - f^-$, значками “+” і “-” позначено граничне значення відповідних величин при $y \rightarrow \pm 0$.

3. Розв'язок задачі

З використанням комплексних потенціалів плоскої задачі [1] та задачі згину [2], подібно як це зроблено у статті [5], розв'язок задачі зведено до задач лінійного спряження, на основі яких отримано систему трансцендентних рівнянь відносно невідомих w_j , σ_{0j} , τ_{0j} , M_{0j} , H_{0j} :

$$\sigma_Y b_1 I_{s0}^{bc} + \sigma_{01} I_{s0}^{ab} + \sigma_{02} I_{s0}^{cd} - \tau_{01} I_{c0}^{ab} + \tau_{02} I_{c0}^{cd} = 0,$$

$$\begin{aligned} \sigma_Y b_1 I_{c1}^{bc} + \sigma_{01} I_{c1}^{ab} + \sigma_{02} I_{c1}^{cd} + \tau_{01} I_{s1}^{ab} - \tau_{02} I_{s1}^{cd} &= q_1, \\ -\sigma_Y b_1 I_{s2}^{bc} - \sigma_{01} I_{s2}^{ab} - \sigma_{02} I_{s2}^{cd} + \tau_{01} I_{c2}^{ab} - \tau_{02} I_{c2}^{cd} &= q_2, \\ \sigma_Y b_2 \tilde{I}_{s0}^{bc} + M_{01} \tilde{I}_{s0}^{ab} + M_{02} \tilde{I}_{s0}^{cd} + H_{01} \tilde{I}_{c0}^{ab} - H_{02} \tilde{I}_{c0}^{cd} &= 0, \\ \sigma_Y b_2 \tilde{I}_{c1}^{bc} + M_{01} \tilde{I}_{c1}^{ab} + M_{02} \tilde{I}_{c1}^{cd} - H_{01} \tilde{I}_{s1}^{ab} + H_{02} \tilde{I}_{s1}^{cd} &= \tilde{q}_1, \\ -\sigma_Y b_2 \tilde{I}_{s2}^{bc} - M_{01} \tilde{I}_{s2}^{ab} - M_{02} \tilde{I}_{s2}^{cd} - H_{01} \tilde{I}_{c2}^{ab} + H_{02} \tilde{I}_{c2}^{cd} &= \tilde{q}_2, \end{aligned}$$

де використано позначення

$$I_{si}^{km} = \int_k^m \frac{t^i \sin b(t) dt}{q_3(t)}, \quad I_{ci}^{km} = \int_k^m \frac{t^i \cos b(t) dt}{q_3(t)}, \quad \beta = -\frac{\ln|g|}{2\pi},$$

$$g = -\frac{A_1}{A_2}, \quad \alpha = \frac{q}{1-g}, \quad \kappa_j = \frac{3-v_j}{1+v_j}, \quad q_1 = \alpha \pi e^{-\beta \pi},$$

$$b(x) = \beta \ln \frac{(x+a)(d-x)}{(x-a)(x+d)}, \quad \mu_j = \frac{E_j}{2(1+v_j)}, \quad i=0,1,2,$$

$q_2 = 2\alpha \pi \beta (d-a) e^{-\beta \pi}$, $q_3(t) = \sqrt{(d^2 - t^2)(t^2 - a^2)}$
 $A_j = \mu_j + \mu_{3-j} \kappa_j$, E_j , v_j – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу j півплощини.

Тут і надалі вирази для $\tilde{\alpha}$ і $\tilde{\beta}$, $\tilde{b}(x)$ і $\tilde{X}_0(z)$, $\tilde{I}_{si}^{km}$ і $\tilde{I}_{ci}^{km}$, $\tilde{f}(z)$ і $\tilde{f}_j^{(k)}(z)$, $\tilde{g}_j(x)$ отримуються із виразів α і β , $b(x)$ і $X_0(z)$, I_{si}^{km} і I_{ci}^{km} , $f(z)$ і $f_j^{(k)}(z)$, q_j , $g_j^{mn}(x)$ відповідно заміною g на $\tilde{g}$, β на $\tilde{\beta}$, $b(x)$ на $\tilde{b}(x)$, $X_0^+(t)$ на $\tilde{X}_0^+(t)$, α на $\tilde{\alpha}$ та β на $\tilde{\beta}$, $b(x)$ на $\tilde{b}(x)$ та I_{si}^{km} на $\tilde{I}_{si}^{km}$.

Для визначення напруженого стану на лінії поділу матеріалів отримано формули

$$\sigma_{yy}^{\pm} - i\sigma_{xy}^{\pm} = A_1^{-1} (\Phi_0^+(x) - g\Phi_0^-(x)),$$

$$\sigma_{xx}^+ = A_1^{-1} \operatorname{Re} (3\Phi_0^+(x) + g\Phi_0^-(x)) + P_1 - \alpha(3+g),$$

$$\sigma_{xx}^- = -A_1^{-1} \operatorname{Re} (\Phi_0^+(x) + 3g\Phi_0^-(x)) + P_2 + \alpha(1+3g),$$

$$M_y^{\pm} + iH_{xy}^{\pm} = \tilde{A}^{-1} (\theta_0^+(x) - \tilde{g}\theta_0^-(x)),$$

$$M_x^+ = \tilde{A}^{-1} \operatorname{Re} ((\tilde{\kappa}_1 - 2)\theta_0^+(x) / \tilde{\kappa}_1 + \tilde{g}\theta_0^-(x)),$$

$$M_x^- = -\tilde{A}^{-1} \operatorname{Re} (\theta_0^+(x) + \tilde{g}(\tilde{\kappa}_2 - 2)\theta_0^-(x) / \tilde{\kappa}_2),$$

де $\tilde{\mu}_j = -0,75(1+v_j)/(E_j h^3)$, $\tilde{A}_j = \tilde{\mu}_j + \tilde{\mu}_{3-j} \tilde{\kappa}_j$,

$$\tilde{g} = \frac{\tilde{\kappa}_2 \tilde{A}_1}{\tilde{A}_2 \tilde{\kappa}_1}, \quad \tilde{\kappa}_j = \frac{3+v_j}{1-v_j}, \quad \tilde{A} = \frac{\tilde{\kappa}_1}{2\tilde{A}_1}, \quad \Phi_0(z) = A_1 X_0(z) \cdot$$

$$\cdot \{ \sigma_Y b_1 f(z) + \sum_{j=1}^2 (\sigma_{0j} f_j^{(0)}(z) + \tau_{0j} (f_j^{(2)}(z) - f_j^{(1)}(z))) \},$$

$$\theta_0(z) = \tilde{A} \tilde{X}_0(z) \left\{ \sigma_Y b_2 \tilde{f}(z) + \sum_{j=1}^2 (M_{0j} \tilde{f}_j^{(0)}(z) + \right.$$

$$\left. + H_{0j} (\tilde{f}_j^{(2)}(z) - \tilde{f}_j^{(1)}(z))) \right\}, \quad (f(z), f_j^{(0)}(z), f_j^{(1)}(z),$$

$$f_j^{(2)}(z)) = (-i \int_L, -i \int_{L_j}, \int_{L_j}, \int_{L_j^*}) (2\pi X_0^+(t)(t-z))^{-1} dt,$$

$$X_0(z) = \sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - d^2)} \left(\frac{(z+a)(z-d)}{(z-a)(z+d)} \right)^{i\beta}.$$

Визначивши напруження і моменти, можемо записати умови пластичності, тобто будемо мати ще два додаткові рівняння для знаходження шуканих величин. Для замикавання системи трансцендентних рівнянь відносно невідомих параметрів використаємо умову однозначності переміщень для плоскої задачі і задачі згину

$$\int_a^d [\Phi_0(x)] dx = 0, \quad \int_a^d [\theta_0^+(x) - \theta_0^-(x)] dx = 0. \quad (2)$$

Зауважимо, що зусилля P_1 , P_2 і q задовольняють залежність:

$$P_2 = (P_1 E_2 + (E_1 v_2 - E_2 v_1) q) / E_1.$$

Для знаходження розкриття у вершинах тріщини $b(km=ab, j=1)$ і $c(km=dc, j=2)$ маємо залежності:

у плоскій задачі

$$\begin{aligned} \delta_{km}^{\Pi} &= \frac{A_1(g-1)}{4\pi g \mu_1 \mu_2} \int_k^m q_3(x) \{ (\sigma_Y b_1 - \sigma_{0j}) g_1^{bc}(x) + \\ &+ (\sigma_{03-j} - \sigma_{0j}) g_1^{ab}(x) + (-1)^j \tau_{0j} \{ 2g_2^{ab}(x) + \\ &+ g_3^{bc}(x) + g_3^{ab}(x) \} + (-1)^{j-1} \tau_{03-j} g_4^{ab}(x) \} dx, \\ g_1^{mn}(x) &= \sin b(x) (I_{sp}^{mn} - I_{sm}^{mn}) - \cos b(x) (I_{cp}^{mn} + I_{cm}^{mn}), \\ g_2^{ab}(x) &= \sin b(x) I_{cp}^{ab} + \cos b(x) I_{sp}^{cd}, \\ g_3^{mn}(x) &= \sin b(x) (I_{cp}^{mn} + I_{cm}^{mn}) + \cos b(x) (I_{sp}^{mn} - I_{sm}^{mn}), \\ g_4^{ab}(x) &= \sin b(x) (I_{cp}^{ab} - I_{cm}^{ab}) + \cos b(x) (I_{sp}^{ab} + I_{sm}^{ab}) \end{aligned}$$

і задачі згину

$$\begin{aligned} \delta_{km}^3 &= \frac{\tilde{A}(\tilde{g}-1)}{2\pi \tilde{g} \tilde{h}^{-1}} \int_k^m q_3(x) \{ (\sigma_Y b_2 - M_{0j}) \tilde{g}_1^{bc}(x) + \\ &+ (M_{03-j} - M_{0j}) \tilde{g}_1^{ab}(x) + (-1)^j H_{0j} \{ 2\tilde{g}_2^{ab}(x) + \\ &+ \tilde{g}_3^{bc}(x) + \tilde{g}_3^{ab}(x) \} + (-1)^{j-1} H_{03-j} \tilde{g}_4^{ab}(x) \} dx, \end{aligned}$$

причому $\delta_1 = \delta_{ab}^{\Pi} + \delta_{ab}^3$, $\delta_2 = \delta_{dc}^{\Pi} + \delta_{dc}^3$.

4. Чисельний аналіз та висновки

Чисельний аналіз задачі проведено для нитесилу $\sigma_Y^1 = 278$ МПа, $E_1 = 1,38 \cdot 10^5$ МПа та технічно чистого заліза $\sigma_Y^2 = 130$ МПа, $E_2 = 2,08 \cdot 10^5$ МПа.

Скористаємося умовою пластичності Треска-Сен-Венана у вигляді поверхневого шару

$$\max \{ |\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2| \} = \sigma_Y, \quad (3)$$

де σ_1 , σ_2 – головні напруження.

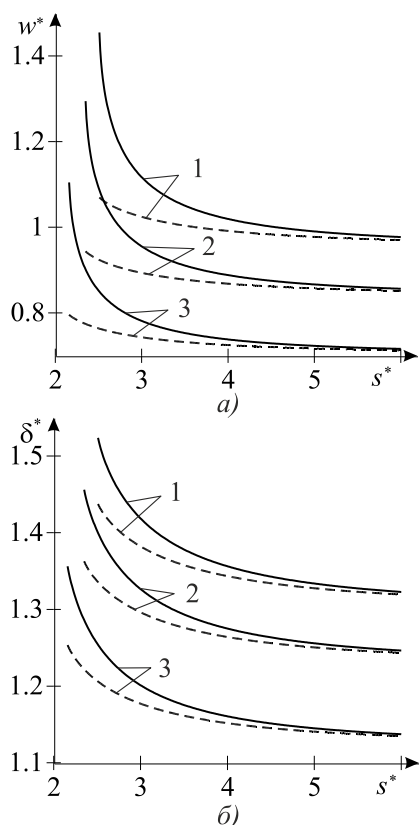


Рис. 2. Графічна залежність довжин зон пластичності w_j^* та розкриття δ_j^* від відстані між тріщинами s^* при різних h_1^*

Список використаних джерел

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили – М.: Наука, 1966. – 708 с.
2. Прусов И. А. Метод сопряжения в теории плит / И. А. Прусов – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975. – 256 с.
3. Панасюк В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацшин – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
4. Кушнір Р. М. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами / Р. М. Кушнір, М. М. Николишин, В. А. Осадчук // Львів: СПОЛІОМ, 2003. – 320 с.
5. Николишин М. Двовісний розтяг кусково-однорідної ізотропної пластини з прямолінійною межею поділу матеріалів та ненаскрізною тріщиною в ній з урахуванням пластичних зон біля її вершин / М. Николишин, В. Опанасович, Л. Куротчин, М. Слободян // Вісник Львів. нац. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2012. – Вип. 72. – С. 29-45.

References

1. MUSHELISHVILI, N.I. (1966) *Nekotore osnovnie zadachi matematicheskoy teorii uprugosti*. Moskva: Nauka.
2. PRUSOV, I.A. (1975) *Metod sopragenia v teorii plit*. Minsk: Izdatelstvo Beloruskogo universiteta.
3. PANASUK, V.V., SAVRUK, M.P. and DATSHIN, A.P. (1976) *Raspredeleniye napragniy okolo treshchin v plastinakh i obolochkah*. Kyiv: Naukova Dumka.
4. KUSHNIR, R.M., NIKOLISHIN, M.M. and OSADCHUK, V.A. (2003) *Pruznyi ta pruzno-plastychnyi granychnyi stan obolonok z dyphektamy*. Lviv, SPOLOM.
5. NIKOLISHIN, M., OPANASOVYCH, V., KUROTCHYN, L. and SLOBODIAN, M. (2012) *Dvovisniy roztyag kuskovo-odnorodnoi izotropnoi plastyny z priamlyiniynoiu mezeiu podilu materialiv ta nenaskriznoi trishchynoiu v niy z uraxuvanniam plastychnyx zon bilya ii vershyn*. *Visnyk Lviv univ. Ser. Meh.-Mat.* 72. p. 29-45.

Надійшла до редколегії 15.09.2017

УДК 539.3

Онишкевич В. М¹, к.ф.-м.н., доц.,
Сулим Г.Т.², д.ф.-м.н., проф.

**Задача про термопружний контакт
півплощини з прямокутним штампом за
теплоутворення від тертя**

¹ Національний лісотехнічний університет
України, 79057, м. Львів, вул. Генерала
Чупринки, 103,
e-mail: onyshkevych@nltu.edu.ua

² Львівський національний університет імені
Івана Франка, 79000, м. Львів, вул.
Університетська, 1,
e-mail: sulym@franko.lviv.ua

V. M. Onyshkevych¹, Ph. D. (Phys.-Math.),
G. T. Sulym², Dr. Sci. (Phys.-Math.).

**The problem about thermoelastic contact of
half-plane and rectangular punch with heat
generation account of friction**

¹ Ukrainian National Forestry University, 79057,
L'viv, General Chuprynka str., 103,
e-mail: onyshkevych@nltu.edu.ua

² Ivan Franko National University of L'viv, 79000,
L'viv, Universytetska str., 1,
e-mail: sulym@franko.lviv.ua

Розглядається плоский штамп деякої висоти, який втискується заданою силою у пружну півплощину і рухається прямолінійно уздовж поверхні з деякою швидкістю. На верхній межі штампa відбувається конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем. Між бічними поверхнями штампa і зовнішнім середовищем здійснюється теплообмін за законом Ньютона. Тепловий контакт між штампом і півплощиною є неідеальним. Від дії сил тертя виникають теплові потоки, направлені у взаємодіючі тіла. Через ненавантажenu поверхню півплощини із зовнішнім середовищем здійснюється конвективний теплообмін. Розв'язок задачі термопружності для півплощини побудовано за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Задачу теплопровідності для штампa розв'язано за допомогою методу прямих. Отримано систему парних інтегральних рівнянь, яку за допомогою методу поточної колокації зведено до системи лінійних алгебричних рівнянь. Запропоновано розрахункові формули для температурних полів, теплових потоків та контактних напружень. Для визначення наперед невідомої області контакту застосовано ітераційну схему, коли на кожному кроці контролюється знак нормальних напружень у областях, де передбачено безпосередній контакт тіл.

Ключові слова: неідеальний контакт, тертя, теплоутворення, конвективний теплообмін.

The plane punch of a certain height pressing by the given force into elastic half-plane and moves along creating line with the constant velocity is considered. The upper end of the punch carries out a heat exchange with external medium. The heat exchange between the side surfaces of the punch and the external medium occurs according to Newton's law. The heat contact between punch and half-plane is non-ideal. The direction of the heat fluxes into the interactive bodies has been generated due to the action of frictional forces.. The convective heat exchange occurs with external medium through the unloaded surface. The solution of the problem of thermoelasticity for a half-plane is obtained by means of the Fourier integral transformation. Heat conductivity problem for the punch is solved by method of straight lines. The system obtained of dual integral equations is reduced to the system of linear algebraic equations by means of points collocation method. Formulae for thermal fields, heat fluxes and contact stresses are proposed. In order to obtain the unknown contact area the iterative scheme based on a control of a sign of normal stresses in the immediate contact interaction zones is used.

Key Words: non-ideal contact, friction, heat generation, convective heat exchange

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Математичне моделювання перерозподілу
теплових полів при дослідженні контактної

взаємодії тіл є математично складною та
важливою, актуальною для застосувань науково-
технічною проблемою. Вперше розв'язок плоскої
задачі термопружності про тиск штампa з

неповним контактом було отримано в [1], де у разі врахування тепловіддачі від штампів у півплощину було виявлено втрату контакту на краях штампів і потребу враховувати у цій задачі нелінійність через зміну області контакту. Задачу про термопружний контакт півплощини з прямокутним жорстким штампом у разі подачі тепла на його зовнішню поверхню розв'язано в [2].

2. Постановка задачі

Розглядається плоский штамп заввишки H , який втискується силою P у пружну півплощину і рухається прямолінійно уздовж поверхні з деякою сталою швидкістю V . Між верхньою поверхнею штампів, бічними поверхнями штампів і ненавантаженою поверхнею півплощини з одного боку та зовнішнім середовищем з іншого здійснюється теплообмін за законом Ньютона з коефіцієнтами теплообміну γ_0 , γ_a , γ_H відповідно. Тепловий контакт між штампом і півплощиною неідеальний з коефіцієнтом теплопроникувності контакту h . Від дії сили тертя з коефіцієнтом f_T на ділянці контакту відбувається теплоутворення, що пропорційне інтенсивності сили тертя. Температуру зовнішнього середовища вважаємо нульовою.

З урахуванням цього для розв'язання задачі необхідно проінтегрувати систему рівнянь

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu \partial \theta / \partial x) - \beta \partial t^{(2)} / \partial x = 0, \quad (1)$$

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu \partial \theta / \partial y) - \beta \partial t^{(2)} / \partial y = 0, \quad (2)$$

$$\Delta t^{(i)} = 0, \quad i=1,2, \quad (3)$$

де Δ – оператор Лапласа; $\theta = \partial u / \partial x + \partial u / \partial y$; u та v – компоненти вектора переміщень; λ та μ – коефіцієнти Ламе; $\beta = (3\lambda + 2\mu)\alpha_T$; α_T – температурний коефіцієнт лінійного розширення. При цьому треба врахувати температурні крайові умови

$$y=0: \quad \partial t^{(1)} / \partial y = \gamma_0 t^{(1)}, \quad |x| \leq a; \quad (4)$$

$$x=\pm a: \quad \partial t^{(1)} / \partial x = \mp \gamma_a t^{(1)}, \quad |x| \leq a; \quad (5)$$

$$y=H:$$

$$\lambda^{(1)} \partial t^{(1)} / \partial y - \lambda^{(2)} \partial t^{(2)} / \partial y = -f_T V \sigma_y(x), \quad |x| \leq a; \quad (6)$$

$$\lambda^{(1)} \partial t^{(1)} / \partial y + \lambda^{(2)} \partial t^{(2)} / \partial y = h(t^{(2)} - t^{(1)})0, |x| \leq a \quad (7)$$

$$\partial t^{(2)} / \partial y = \gamma_H t^{(2)}, \quad |x| > a; \quad (8)$$

та силові крайові умови

$$y=H: \quad v(x, H) = f(x) + \delta, \quad |x| \leq a; \quad (9)$$

$$\sigma_y(x, H) = 0, \quad |x| > a; \quad (10)$$

$$\tau_{xy}(x, H) = 0, \quad |x| < \infty; \quad (11)$$

при заданих γ_0 , γ_a , γ_H γ_0 – коефіцієнтах теплообміну відповідно між верхньою поверхнею штампів, бічними поверхнями штампів, ненавантаженою поверхнею півплощини з одного боку і зовнішнім середовищем з іншого, коефіцієнті теплопроникувності контакту h , коефіцієнті тертя f_T , півширині штампів a , формі основи штампів $f(x)$, величині осідання штампів δ , коефіцієнтах теплопровідності $\lambda^{(i)}$ ($i=1$ відноситься до штампів, $i=2$ – до півплощини).

3. Розв'язок задачі для штампів

Використовуючи скінченно-різницеву апроксимацію рівняння теплопровідності для штампів і крайових умов (4) за координатою x , розв'язок задачі для штампів будується методом прямих і зводиться до системи лінійних диференціальних рівнянь [2]

$$d\bar{s}/dy = A\bar{s}, \quad (12)$$

яка розв'язується за допомогою матричної експоненти.

4. Розв'язок задачі для півплощини

Використовуючи загальний розв'язок рівнянь термопружності для півплощини в просторі трансформант Фур'є та задовольняючи крайові умови (6) – (11), задачу зведено до системи парних інтегральних рівнянь. Подаючи невідомі контактні напруження $\sigma_y(x)$ та невідому функцію $\psi(x)$ у вигляді рядів Фур'є та замінюючи в інтегральних рівняннях інтеграли на суми, отримаємо співвідношення:

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} \sum_{n=-N}^N a_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\xi a + \pi n)}{|\xi|(\xi + \pi n/a)} e^{-i\xi x} d\xi + \frac{\beta(\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)} \cdot \sum_{n=-N}^N b_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\xi a + \pi n)}{|\xi|(\gamma_H + |\xi|)(\xi + \pi n/a)} e^{-i\xi x} d\xi = -2\pi(f(x) + \delta),$$

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda^{(2)}}{\pi} \sum_{n=-N}^N b_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\xi| \sin(\xi a + \pi n)}{(\gamma_H + |\xi|)(\xi + \pi n / a)} e^{-i\xi x} d\xi + \\ & + f_T V \sum_{n=-N}^N a_n \exp(ik\pi x/a) + \lambda^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial y} = 0, \\ & \frac{1}{\pi} \sum_{n=-N}^N b_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(h + \lambda^{(2)} |\xi|) \sin(\xi a + \pi n)}{(\gamma_H + |\xi|)(\xi + \pi n / a)} e^{-i\xi x} d\xi - \\ & - \lambda^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial y} - h t^{(1)} = 0. \end{aligned}$$

Використовуючи метод поточної колокації, отримано систему лінійних алгебричних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів розкладу. Повертаючись у простір оригіналів, отримано вирази для контактних напружень, температури і теплових потоків у контактуючих тілах та переміщень півплощини.

5. Числові результати

При числових розрахунках вважалося, що основа штампа має закруглені краї, тобто $f(x) = x^2 H(|x| - x^*) / 2a$, де x^* є близьким до a . Отримано розподіл контактних напружень, який, подібно до [2, 3], за різних значень параметрів задачі може дати два якісно різні випадки контактної взаємодії. У першому випадку розраховані контактні напруження σ_y на всій ділянці $L_0: x \in [-a; a]$ не є додатними. Це означає, що на всій цій ділянці штамп прилягає до основи, крайові умови (6), (7) і (9) виконані, а отримані контактні напруження та розподіл температури будуть остаточними.

При цьому прикладена до нього сила, яка спричинила задане осідання δ , обчислюється з умови рівноваги штампа:

$$P = - \int_{-a}^a \sigma_y(x) dx = - \int_{-a}^a \sum_{n=-N}^N a_n e^{i\pi n x/a} dx = -2aa_0. \quad (13)$$

В іншому випадку на певній ділянці $L_1 = \bigcup_{m=1}^M L^{2m}$, яка складається з сукупності M проміжків $L^{2m} = [x_{2m-1}; x_{2m}]$ ($-a = x_0 \leq x_1, x_i < x_{i+1}, x_{2M} \leq x_{2M+1} = a; m = \overline{1, M}, i = \overline{1, 2M}$), розраховані значення напруження σ_y є строго додатними. Це означає, що на цих ділянках якісь зусилля мали б притягувати штамп до півплощини, а тому отриманий розв'язок не є

коректним розв'язком контактної задачі, оскільки існує велика ймовірність того, що штамп контактує з півплощиною на ділянці $L'_0 = L_0 - L_1 = \bigcup_{m=0}^M L^{2m+1}$, а на L_1 контакт відсутній. Тут $L^1 = [x_0; x_1], L^{2m+1} = (x_{2m}; x_{2m+1}), (m = \overline{1, M-1}), L^{2M+1} = (x_{2M}; x_{2M+1}]$. Тому треба змінити первісне формулювання крайових умов (6), (7), (9). Інші умови залишаються у незмінному вигляді. У нульовому наближенні вважатимемо, що справджується припущення про контакт штампа на L'_0 , а тому замість L_0 тепер треба брати L'_0 , а для лінії L_1 умова відсутності контакту запишеться так:

$$y = H, x \in L_1: \sigma_y(x, H) = 0, v(x, H) > \delta, \quad (14)$$

$$\lambda^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial y} + \lambda^{(2)} \frac{\partial t^{(2)}}{\partial y} = h_0 (t^{(2)} - t^{(1)}) \quad (15)$$

де h_0 – коефіцієнт теплопроникності контакту на ділянці L_1 . Така зміна крайових умов змушує розв'язувати основну систему рівнянь вже лише на проміжку L'_0 , а на ділянці L_1 – систему рівнянь, яка забезпечує виконання крайових умов (14) – (15).

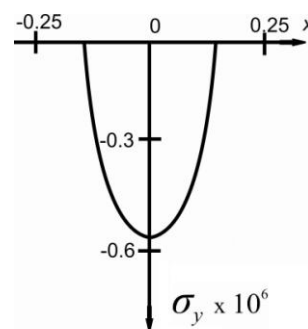


Рис. 1. Остаточні контактні напруження.

Числові розрахунки здійснено для випадку, коли матеріал циліндра – сталь, а матеріал півпростору – алюміній, $\gamma_0 = \gamma_a = \gamma_H = 1$ 1/м, $\delta = 0.01$ м, $h = 5$ кВт/(м² К), $h_0 = 2.5$ кВт/(м² К), $a = 0.25$ м, $f_T = 0.1$, $V = 0.25$ см/с, $H = 0.15$ м, $f(x) = 0$. За таких вхідних даних при використанні однакової для кожного проміжку розбиття L^i кількості точок розбиття $N_i = 23$ після шести ітерацій було отримано другий випадок (відставання штампа) з областю контакту

$L'_0 = L^1 = (-b; b)$, $L_1 : (b < |x| \leq a)$ при числовому значенні $b \approx 0.15$ м.

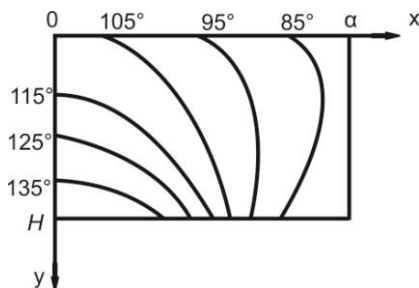


Рис. 2. Ізотерми в штампі.

Остаточні контактні напруження наведено на рис. 1, ізотерми для штамп – на рис. 2, температуру півплощини в області контакту – на рис. 3.

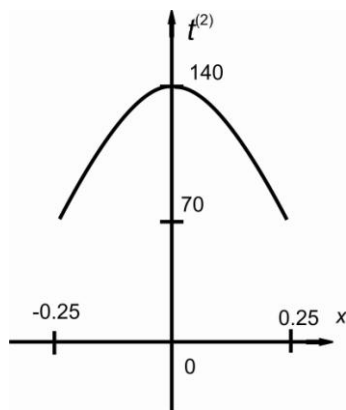


Рис. 3. Температура півплощини в зоні контакту.

Розподіл теплових потоків на межі контакту подано на рис. 4 (крива 1 відповідає штамп, 2 – півплощині). Із збільшенням сили P півплощина від дії температури випучується, і настає момент, коли плоска підшва по краях не контактує з основою. Зближення смуги стає від'ємним, штамп рухається в протилежному до дії сили P напрямку.

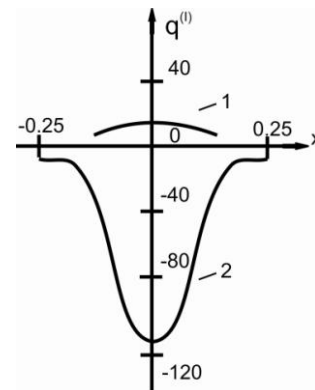


Рис. 4. Теплові потоки в зоні контакту (1 – штамп, 2 – півплощина).

На отриманий розв'язок слід накласти відомий розв'язок антиплоскої задачі з заданими дотичними напруженнями під штампом.

Список використаних джерел

1. Comninou M. Heat conduction through flat punch / M. Comninou, J. R. Barber, J. Dundurs // J. Appl. Mech. – 1981. – Vol. 48. – P. 871–874.
2. Сулим Г. Т. Термопружний контакт півплощини з прямокутним жорстким штампом у разі подачі тепла на його зовнішню поверхню / Г. Т. Сулим, В. М. Онишкевич // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: фізико-математичні науки. – 2015. – Спецвипуск. – С. 255–260.
3. Сулим Г. Т. Взаємодія жорсткого циліндра з пружним півпростором при теплоутворенні на ділянці контакту / Г. Т. Сулим, В. М. Онишкевич // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: фізико-математичні науки. – 2013. – № 3. – С. 228–231.

References

1. COMNINOU, M., BARBER, J. R. & DUNDURS, J. (1981) Heat conduction through flat punch. J. Appl. Mech. 48. pp. 871–874.
2. SULYM, G. T. & ONYSHKEVYCH, V. M. (2015) Termoprzhnyj kontakt pivploshchyny z priamokutnym zhorstkym shtampom u razi podachi tepla na jogo zovnishniyu poverhniu. Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics. (spec). pp. 255–260.
3. SULYM, G. T. & ONYSHKEVYCH, V. M. (2013) Vzajemodija zhorstкого cylindra z pruzhnyym pivprostorum pry teploutvorenni na dilyanci kontaktu. Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics. (3). pp. 228–231.

Надійшла до редколегії 14.08.17

УДК 539.3

Остос О. Х.¹, аспірант,
Жук Я. О.², д.ф.-м.н., проф.,
П'ятецька О.В., к.ф.-м.н., с.н.с.

**Постановка задачі про коливання і
дисипативний розігрів еластомерного
в'язкопружного кільця при
попередньому деформуванні**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова, 4е,
e-mail: ¹ostos.alexander1994@gmail.com;
²y.zhuk@i.ua

O. J. Ostos¹, Ph.D. Student,
Y. A. Zhuk², Dr.Sci., (Phys.-Math.),
O.V.Pyatetska, Ph.D. (Phys.-Math.).

**Statement of problem on vibration and
dissipative heating of a prestrained
elastomeric viscoelastic ring**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova pr., 4e,
e-mail: ¹ostos.alexander1994@gmail.com;
²y.zhuk@i.ua

Розглянуто задачу про циклічне навантаження еластомерного в'язкопружного кільця при наявності попереднього деформованого стану. Досліджено випадки малих та скінченних початкових деформацій. Застосовано принцип пружних потенціалів Муні-Рівліна. Отримані визначальні рівняння є достатньо складними з точки зору розв'язання реальних задач. Аналогічна складність спостерігається для експериментальної конкретизації параметрів моделі. Шляхом використання температурно-частотної та деформаційно-частотної аналогії, сепарабельності представлення залежності динамічних характеристик від параметрів попереднього деформованого стану, розвинуто спрощену модель циклічної поведінки еластомерного матеріалу. На її основі сформульовано і розв'язано задачу для в'язкопружного кільця із заданими кінематичними умовами на поверхні.

Ключові слова: еластомери, в'язкопружне кільце, скінченні деформації, резонансні коливання.

The external loading to which polymer structural elements are routinely subjected has a significant influence on the dynamic characteristics of the material. The most important loading factors are the temperature, the vibrational frequency and amplitude, and the preliminary strain state. To take account of these complex relations between them, adequate model to simulate material response has to be developed. In the particular case of elastomeric elements, the problem of vibroprotection and damping systems should be considered as well. Preliminary deformation of vibration insulators occurs mainly due to the gravitational force acting on the object and is normally finite. The temperature influence is associated both with the external thermal conditions and dissipative heating. General theory of prestrained viscoelastic media with temperature-dependent properties was applied, where the case of small and finite preliminary deformations were considered. Constitutive equations obtained are very complex in terms of both experimental determination of the model parameters and the solution of specific problems. Using the temperature-frequency and deformation-frequency analogies, separation of the dependence of the dynamic characteristics from the initial deformation parameters, and nonlinear elastic potentials depending on small amount of constants (for instance, Muni-Rivlin potential), the simplicity of empirical model was achieved. Using this model, qualitative analysis of the influence of dissipative heating and preliminary deformation on the resonant vibrations of viscoelastic bodies is performed. The problem for viscoelastic ring under kinematic loading on the surface was solved.

Key Words: finite strain, viscoelastic ring, resonant vibrations .

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Перестюк М.О.

1. Вступ

У сучасній науці відома велика кількість різноманітних матеріалів, які можуть використо-

вуватися для виготовлення елементів конструкцій, тощо. Еластомерні та полімерні матеріали є незамінними в багатьох практичних

застосуваннях завдяки їх дисипативним властивостям та високій деформівній здатності. Термомеханічна поведінка еластомерів при циклічних навантаженнях зумовлена перш за все ефектами зв'язаності механічних і теплових полів: залежністю властивостей від температури, так і необоротними втратами механічної енергії внаслідок дисипації, що призводить до виділення тепла. Невеликий розігрів протягом одного циклу деформування може призвести до суттєвих рівнів вібророзігріву у випадку багатоциклових процесів і до деградації міцності внаслідок розм'якшення матеріалу. Виходячи з досягнень та вимог в технічному плані у промисловому світі, такі елементи як автомоюльні шини, ролики транспортерів, покришки, підшипники, під'ятники в процесі експлуатації піддаються дії цілого комплексу навантажень, які мають суттєвий вплив на динамічні характеристики матеріалів. Серед основних зовнішніх факторів виділимо частоту, температуру, амплітуду коливань, попереднє навантаження та деформацію. Саме ефект амплітудної залежності динамічних характеристик відображає фізичну нелінійність матеріалу. В даній задачі розглядається зв'язана термомеханічна теорія поведінки еластомерних елементів конструкцій з врахуванням фізичної нелінійності та попереднього деформування. Для описання такої поведінки еластомерних матеріалів застосовуються різноманітні моделі й підходи: інтегральні, інтегро-диференціальні, диференціальні методи. У цьому дослідженні розвивається підхід, що ґрунтується на використанні амплітудних визначальних рівнянь, співвідношення яких формулюються в термінах амплітуд основних польових величин, і концепції комплексних модулів [2]. Ці визначальні рівняння є досить складними як з експериментальної точки зору, так і з точки зору розв'язання конкретних задач. Проте сформульовано ряд достатньо простих моделей, які враховують наведені вище фактори. Застосовано принцип пружних потенціалів Муні-Рівліна. Розглядається випадок малих та скінченних початкових деформацій.

2. Визначальні рівняння моделі

Використовуючи комплексні модулі в наближеній моделі [4] отримаємо наступні величини попередньо деформованого матеріалу

$$\begin{aligned} E(\omega, \theta, \lambda_n) &= E'(\omega, \theta, \lambda_n)[1 + i\eta(\omega, \theta, \lambda_n)], \\ E'(\omega, \theta, \lambda_n) &= A_1(\lambda_n)E'_L(\omega, \theta), \\ \eta(\omega, \theta, \lambda_n) &= A_2(\lambda_n)\eta_L(\omega, \theta), \\ E''(\omega, \theta, \lambda_n) &= E'(\omega, \theta, \lambda_n)\eta(\omega, \theta, \lambda_n) = \end{aligned}$$

$$= A_3(\lambda_n)E''_L(\omega, \theta), \quad (1)$$

де $E = E' + iE''$ – комплексний модуль Юнга, $\eta = E''/E'$ – тангенс кута втрат, θ – температура, ω – частота, λ_n – головні видовження ($n=1,2,3$), E'_L, E''_L, η_L – відповідні характеристики матеріалу в недеформованому стані, $A_i(\lambda_n)$ – функції, які визначаються виглядом пружного потенціалу.

Запишемо потенціал Муні-Рівліна:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{4}\mu[(1+f)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + \\ &+ (1-f)(\lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2})] = C_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_2(\lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2}) \end{aligned}$$

Де $C_1 = \mu(1+f)/4$, $C_2 = \mu(1-f)/4$ – параметри моделі.

Запишемо умову нестисливості:

$$I_3 = 1 \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1.$$

У випадку одновісного розтягу напруження дорівнює відношенню сили до площі поперечного перерізу, враховуючи формулу (1) отримаємо наступне співвідношення для напруження:

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \sigma &= \mu[(1+f)(\lambda^2 - \lambda^{-1}) + \\ &+ (1-f)(\lambda - \lambda^{-2})]/2, \\ A_1(\lambda) &= [C_1F_1(\lambda) + C_2F_2(\lambda)]/6(C_1 + C_2), \\ A_2(\lambda) &= (C_1 + C_2)F_2(\lambda)/[C_1F_1(\lambda) + C_2F_2(\lambda)], \\ A_3(\lambda) &= F_2(\lambda)/6, \end{aligned} \quad (2)$$

де λ – видовження в напрямку розтягу.

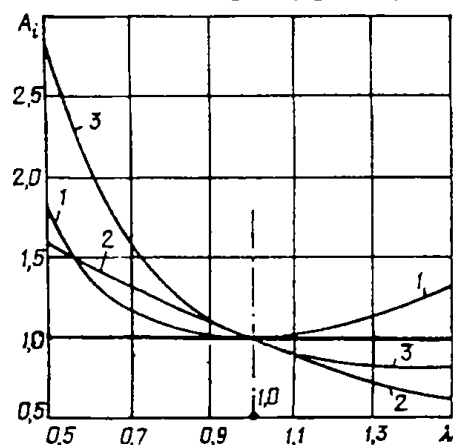


Рис. 1. Залежності коефіцієнтів A_i , $i = 1,2,3$ від головних видовжень λ_n .

Розглянемо гуму ІРП2068, для якої конкретизуємо закон зрівноваженої пружності виходячи з експериментальних даних та використовуючи підхід спрямлених координат

$$\mu = 1,04 \text{ МПа}, \quad f = 0,0535 \\ C_1 = 0,274 \text{ МПа}, \quad C_2 = 0,246 \text{ МПа}.$$

Використовуючи знайдені параметри отримаємо графік, з якого випливає, що в області $\lambda < 2$ похибка апроксимації залежності

$\sigma \sim \lambda$ не перевищує 1%.

Причому жорсткість матеріалу зростає і при $\lambda > 1$ (випадок попереднього розтягу) так і при $\lambda < 1$ (випадок стиску). Модуль втрат та тангенс кута втрат є спадаючими функціями видовження λ .

Запишемо температурно-частотні характеристики лінеаризованих величин: (співпадають з характеристиками для гуми ІРП1347)

$$G'_L = E'_L / 2(1 + \nu) = a\omega^b e^{-2,3b\varphi},$$

$$G''_L / G'_L = \eta_L = c\omega^d e^{-2,3d\varphi},$$

$$\varphi = 8,86(\theta - \theta_z) / (101,6 + \theta - \theta_z),$$

де ν - коефіцієнт Пуассона,

a, b, c, d, θ_z - постійні коефіцієнти

$$a = 1,35 \text{ МПа}, \quad b = 0,04,$$

$$c = 0,06, \quad d = 0,18,$$

$$\nu = 0,495, \quad \theta_g = 20^\circ \text{ C}.$$

3. Постановка задачі

Вплив попереднього деформування на дисипативний розігрів та коливання тіл скінченних розмірів проводиться на прикладі скінченного кільця $0 \leq r \leq R$, із заданими кінематичними умовами на поверхні.

Сформулюємо наближену постановку задачі. Запишемо рівняння коливань

$$\operatorname{div} \tilde{\sigma} + \rho \omega^2 \tilde{u} = 0, \quad (3)$$

рівняння теплопровідності має вигляд

$$c_v \dot{\theta} = \operatorname{div}(k \nabla \theta) + \bar{D}'. \quad (4)$$

Визначальні рівняння для напружень та швидкості дисипації, де відповідні величини записуються в тензорному вигляді, наступні:

$$\tilde{\sigma} = 2G[\tilde{\varepsilon} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \tilde{\varepsilon}_{kk} \tilde{I}], \quad (5)$$

$$\bar{D}' = \frac{\omega}{2} \operatorname{Im}(\tilde{\sigma} : \tilde{\varepsilon}^*). \quad (6)$$

Кінематичні, граничні, а також початкові умови (для температури) наступні:

$$u_r = 0, \quad \sigma_{rr} = 0, \quad (7)$$

$$-k\theta_r = \alpha(\theta - \theta_0), \quad r = R, \quad (8)$$

$$\theta = \theta_0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad (9)$$

де $\tilde{u} = \tilde{u}' + i\tilde{u}''$, $\tilde{\sigma}, \tilde{\varepsilon}$ - комплексні амплітуди накладених переміщень, тензорів напружень та деформацій. У формулах (3)–(9) використані позначення:

θ - усереднена за період температура,

θ_0 - початкова температура навколишнього середовища,

α - коефіцієнт тепловіддачі,

k - коефіцієнт теплопровідності,

c_v - коефіцієнт об'ємної теплоємності,

ρ - густина,

$\tilde{I}$ - одиничний тензор,

$(\cdot)^*$ - знак комплексного спряження.

Коефіцієнт динамічної жорсткості для оцінки динамічної реакції кільця вводиться за формулою:

$$\beta = \frac{2 \int_0^R \sigma_{rr}(r) r dr}{E_0 R^2 \varepsilon_0},$$

де $\varepsilon_0 = u_0$, $E_0 = 2G_0(1 + \nu)$, $G_0 = G'_L(\theta_0, \omega_0)$,

$\omega_0 = 1 \text{ с}^{-1}$.

Для вибраного матеріалу фізико-механічні параметри вибрані наступними:

$$\alpha = 20 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{C}^0, \quad k = 0,22 \text{ Вт/мC}^0,$$

$$\rho = 1200 \text{ кг/м}^3.$$

Геометрія в'язкопружного кільця характеризується радіусом $R = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, а амплітуда зовнішнього навантаження вибиралась рівною $u_0 = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ м}$.

Рівняння (3)–(6) разом з граничними умовами (7), (8) і початковими умовами по температурі (9) представляють собою постановку зв'язаної задачі про стаціонарні коливання і розігрів еластомерного кільця. Ця задача є суттєво нелінійною і може бути розв'язаною чисельно.

4. Висновки

Використання концепції комплексних модулів у випадку циклічних навантажень дозволяє застосувати спрощені моделі циклічної поведінки в'язкопружних тіл і сформулювати постановку зв'язаної задачі термомеханіки у вигляді, який допускає чисельне розв'язання.

Список використаних джерел

References

1. Behnke R. Thermo-mechanically coupled investigation of steady state rolling tires by numerical simulation and experiment / R. Behnke, M. Kalishke – International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2015. – 68. – С. 101–131.
2. Карнаухов В. Г. Термомеханика предварительно деформированных вязкоупругих тел / В. Г. Карнаухов, Б.П. Гуменюк. – Киев: Наук. думка, 1990. – 304 с.
3. Карнаухов В. Г., Влияние предварительного деформирования на резонансные колебания и диссипативный разогрев вязкоупругого цилиндра конечной длины / В. Г. Карнаухов, И.К. Сенченков, О.П. Червинко // Прикладная механика. – 1997. – 33, № 1. – С. 39 – 42.
4. Nashif A. D. Vibration Damping / A. D. Nashif, D. I. Jones, J. P. Henderson – New York: A Wiley-Interscience Publication. – 1985. – 448 p.
5. Карнаухов В. Г., Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении / В. Г. Карнаухов, И. К. Сенченков, Б. П. Гуменюк. – Киев: Наук. думка, 1985. – 288 с.
6. Astarita G. Thermodynamics of dissipative materials with entropic elasticity / G. Astarita – Polymer Engineering & Sci. – 1974. – 14, № 10. – С. 730 – 733.
7. Babra R. C. Thermodynamics of simple materials of differential type / R. C. Babra – J. Mech. – 1976. – 15, № 3. – С. 457 – 466.
8. Freakley P. K. Theory and practice of engineering with rubber / P. K. Freakley, A. R. Payne – London: Applied Science Publishers, 1978. – 667 p.
9. Goodman J. Mechanics applied to engineering / J. Goodman. – London: Longmans-Green, 1899. – 148 p.
10. Anderson V. W. Damping and fatigue properties of magnesium and magnese-copper alloys proposed as new high damping materials / V. W. Anderson, B. J. Lazan. – Minnesota: Internal rept., Aero Library. – 1957. – 243 p.
1. BEHNKE, R. and KALISKE, M. (2015) Thermo-mechanically coupled investigation of steady state rolling tires by numerical simulation and experiment. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 68. p. 101–131.
2. KARNAUKHOV, V. G. and GUMENUK, B. P. (1990) *Termomekhanika predvaritel'no deformirovannykh vyazkoupругikh tel*. Kiev: Naukova dumka.
3. KARNAUKHOV, V. G., SENCHENKOV, I. K. and CHERVINKO, O. P. (1997) Vliyanie predvaritel'nogo deformirovaniya na rezonansnyye kolebaniya i disipativnyy razogrev vyazkoupругого tsilindra konechnoy dliny. *Applied mechanics*. 33(1). p. 39 – 42.
4. NASHIF, A. D., JONES, D. I. and HENDERSON, J. P. (1985) *Vibration Damping*. New York: A Wiley-Interscience Publication.
5. KARNAUKHOV, V. G., SENCHENKOV, I. K. and CHERVINKO, O. P. (1985) *Termomekhanicheskoye povedeniye vyazkoupругikh tel pri garmonicheskoy nagruzhenii*. Kiev: Naukova dumka.
6. ASTARITA, G. (1974) Thermodynamics of dissipative materials with entropic elasticity. *Polymer Engineering & Sci*. 14 (10). p. 730 – 733
7. BABRA, R. C. (1976) Thermodynamics of simple materials of differential type. *J. Mech*. 15(3). p. 457 – 466.
8. FREAKLEY, P.K. and PAYNE, A. R. (1978) *Theory and practice of engineering with rubber*. – London: Applied Science Publishers.
9. GOODMAN, J. (1899) *Mechanics applied to engineering*. London: Longmans-Green.
10. ANDERSON, V. W. and LAZAN, B. J. (1957) *Damping and fatigue properties of magnesium and magnese-copper alloys proposed as new high damping materials*. Minnesota: Internal rept., Aero Library.

Надійшла до редколегії 18.09.17

УДК 539.376

Павлюк Я.В.¹, к.т.н., н.с.,
Фернаті П.В.², к.т.н., н.с.,
Рагуліна В.С.³, к.ф.-м.н., м.н.с.

**Повзучість ізотропних однорідних і
нестаріючих лінійно-в'язкопружних
матеріалів за умов складного
напруженого стану**

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН
України, 03057, м. Київ-57, вул. Нестерова, 3,
e-mail: ¹slavikp406@gmail.com,
²Pavel147223@gmail.com,
³ragulinavera@rambler.ru

Y.V. Pavlyuk¹, Ph. D.,
P.V. Fernati², Ph. D.,
R.V. Ragulina³, Ph. D. (Phys.-Math.).

**Creep of isotropic homogeneous and non-
aging of linear-viscoelastic materials under
the complex stress state**

National Academy of Sciences of Ukraine
S. P. Timoshenko Institute of Mechanics, 03057,
Kyiv-57, P. Nesterov str., 3,
e-mail: ¹slavikp406@gmail.com,
²Pavel147223@gmail.com,
³ragulinavera@rambler.ru

Розглядається повзучість ізотропних однорідних і нестаріючих лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану. Розв'язок будується шляхом узагальнення вихідної одновимірної моделі в'язкопружності на складний напружений стан, що побудований на використанні гіпотези пропорційності девіаторів. Ядра спадковості задаються дробово-експоненційною функцією Работнова. Встановлюється залежність між ядрами інтенсивності та об'ємної повзучості, що задають скалярні властивості лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану у визначальних рівняннях типу рівнянь малих пружно-пластичних деформацій, і ядрами поздовжньої і поперечної повзучості, що задають спадкові властивості лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов одновісного розтягу. Розв'язано та експериментально апробовано задачі розрахунку деформацій повзучості тонкостінних труб за умов комбінованого навантаження розтягом із скрученням.

Ключові слова: повзучість, лінійно-в'язкопружність, ядро спадковості.

The creep of isotropic homogeneous and non-aging linear-viscoelastic materials under conditions of complex stress state is considered. Thin-walled tubular specimens of High Density Polyethylene (HDPE) for creep under a single-axial stretching, with a pure twist and combined load tension and torsion are considered as base experiments, tests. The solution is obtained by generalizing the initial one-dimensional viscoelasticity model to a complex stressed state, constructed using the hypothesis of the proportionality of deviators. The heredity kernels are given by the Rabotnov's fractional-exponential function. The dependence between the kernels of intensity and volumetric creep is established, which determine the scalar properties of linear viscoelastic materials in the conditions of a complex stressed state in the defining equations of the type of equations of small elastic-plastic deformations, and the kernels of longitudinal and transverse creep defining the hereditary properties of linear-viscoelastic materials under the conditions of the uniaxial tension. The problems of creep strain calculation of thin walled tubes under combined tension with torsion have been solved and experimentally approved.

Key Words: creep, linear-viscoelastic, heredity kernel.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Постановка задачі

Розглядається повзучість ізотропних однорідних і нестаріючих лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану. Визначальні рівняння повзучості, що задають

залежність між компонентами тензора деформацій ε_{ij} , тензора напружень σ_{ij} і часом t , записуються у вигляді:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_v(t) &= \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i(t, \sigma_i)}{\sigma_i(t)}(\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij}\sigma_0(t)), \\ \varepsilon_i(\sigma_i, t) &= \frac{2(1+\nu)}{3E}\left(\sigma_i(t) + \lambda_i \int_0^t K_i(t-\tau)\sigma_i(\tau)d\tau\right); \\ \varepsilon_v(\sigma_0, t) &= \frac{3(1-2\nu)}{E}\left(\sigma_0(t) + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau)\sigma_0(\tau)d\tau\right),\end{aligned}\quad (1)$$

тут $\varepsilon_v(t)$ і $\varepsilon_i(\sigma_i, t)$ – об’ємна деформація і інтенсивність деформації повзучості; $\sigma_0(t)$ і $\sigma_i(\varepsilon_i, t)$ – середнє напруження і інтенсивність напружень; $K_i(t-\tau)$ і $K_v(t-\tau)$ – ядра інтенсивності повзучості і об’ємної повзучості; E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуассона; λ_i , λ_v – реологічні параметри; δ_{ij} – одинична функція Кронекера.

Ідентифікація ядер повзучості $K_i(t)$ і $K_v(t)$ в (1) здійснюється на основі групи базових дослідів на повзучість при постійних напруженнях.

Група базових дослідів включає випробування суцільних циліндричних зразків на повзучість за умов одновісного розтягу з заміром поздовжніх і поперечних деформацій. Одновимірні моделі повзучості, що встановлюють залежність між напруженнями, деформаціями і часом, задаються у цьому випадку рівняннями

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}(t) &= \frac{\sigma_{11}(t)}{E} + \frac{\lambda_{11}}{E} \int_0^t K_{11}(t-\tau)\sigma_{11}(\tau)d\tau; \\ \gamma_{21}(t) &= \frac{\tau_{21}(t)}{G} + \frac{\tau_{21}}{G} \int_0^t K_{21}(t-\tau)\tau_{21}(\tau)d\tau,\end{aligned}\quad (2)$$

котрі при $\sigma_{11} = const$ та $\tau_{21} = const$ зводяться до рівнянь

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}(t) &= \frac{\sigma_{11}}{E} \left(1 + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(t-\tau)d\tau\right); \\ \gamma_{21}(t) &= \frac{\tau_{21}}{G} \left(1 + \lambda_{21} \int_0^t K_{21}(t-\tau)d\tau\right).\end{aligned}\quad (3)$$

тут $\sigma_{11}(t)$ – поздовжнє напруження; $\tau_{21}(t)$ – дотичне напруження кручення; $\varepsilon_{11}(t)$ і $\gamma_{21}(t)$ – поздовжня і кутова деформація, що включає пружну деформацію і деформацію повзучості; $K_{11}(t)$ – ядро поздовжньої повзучості; E – модуль пружності; G – модуль зсуву; λ_{11} і λ_{21} – реологічні параметри.

Ядра повзучості $K(t)$ в (1) та (2) апроксимуються дробово-експоненційними функціями [1]:

$$K(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha)]}, \quad (4)$$

де α і β – параметри ядер ($-1 < \alpha < 0$; $\beta > 0$); $\Gamma[\cdot]$ – гамма-функція Ейлера.

Вважається, що матеріал є лінійно-в’язкопружним, якщо функція інтенсивності деформації повзучості інваріантна по відношенню до рівня інтенсивності напружень для декількох моментів часу, а розрахункове значення квантиля статистики [1].

Задача заключається у встановленні та експериментальній апробації залежності між ядрами повзучості $K_i(t)$ і $K_v(t)$ в (1), що задають скалярні властивості лінійно-в’язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану у визначальних рівняннях типу рівнянь малих пружно-пластичних деформацій, і ядрами поздовжньої $K_{11}(t)$ і зсувної $K_{21}(t)$ повзучості, що задають спадкові властивості лінійно-в’язкопружних матеріалів за умов одновісного розтягу.

2. Ідентифікація ядер інтенсивності повзучості

Залежність між ядрами інтенсивності повзучості $K_i(t)$ і ядрами поздовжньої і зсувної повзучості $K_{11}(t)$ і $K_{21}(t)$ встановлюється виходячи з сумісного розв’язку рівнянь (1) і (3).

Із другого рівняння в (1) з врахуванням (3) виходячи з умови зв’язку компонентів тензорів напружень і деформацій за умов одновісного розтягу при $\sigma_{11}(t) = const$ і $\sigma_i(t) = const$ отримуємо співвідношення

$$\begin{aligned}\frac{(1+\nu)}{E} \left(\sigma_{21}(t) + \lambda_i \int_0^t K_i(t-\tau)\tau_{21}(\tau)d\tau \right) &= \\ = \frac{1+\nu}{E} \left(\tau_{21}(t) + \lambda_{21} \int_0^t K_{21}(t-\tau)\sigma_{21}(\tau)d\tau \right),\end{aligned}\quad (5)$$

із якого випливає співвідношення

$$\lambda_i K_i(t) = \lambda_{21} K_{21}(t), \quad (6)$$

і відповідно можна вважати

$$\lambda_i = \lambda_{21} \text{ і } K_i(t) = K_{21}(t). \quad (7)$$

$$\text{В (5) прийнято, що } \gamma_{21}(t) = 2\varepsilon_{21}(t); \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (8)$$

Із співвідношень (6) і (7) випливає, що параметри ядер інтенсивності повзучості співпадають із параметрами ядер зсувної повзучості, що визначаються в експерименті на чисте кручення.

3. Ідентифікація ядер об'ємної повзучості

Залежність між ядрами об'ємної повзучості $K_v(t)$ і ядрами поздовжньої і зсувної повзучості $K_{11}(t)$ і $K_{21}(t)$ встановлюється виходячи з сумісного розв'язку рівнянь (1) і (3).

Із першого рівняння в (1) з врахуванням (3) виходячи з умови зв'язку компонентів тензорів напружень і деформацій за умов одновісного розтягу при $\sigma_{11}(t) = \text{const}$ отримуємо співвідношення

$$\varepsilon_{11}(t) = \frac{2(1+\nu)\sigma_{11}}{3E} \left(1 + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(t-\tau) d\tau \right) + \frac{(1-2\nu)\sigma_{11}}{3E} \left(1 + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) d\tau \right), \quad (11)$$

із врахуванням першого рівняння в (1) і (7) впливає залежність між операторами

$$\frac{1-2\nu}{3} \left(1 + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) d\tau \right) = \left(1 + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(t-\tau) d\tau \right) - \frac{2(1+\nu)}{3} \left(1 + \lambda_{21} \int_0^t K_{21}(t-\tau) d\tau \right). \quad (12)$$

Диференціюючи обидві частини рівняння (12) по t і використовуючи теорему Ньютона-Лейбніца отримуємо рівняння

$$\lambda_v K_v(t) = \frac{3\lambda_{11} K_{11}(t) - 2(1+\nu)\lambda_{21} K_{21}(t)}{1-2\nu}. \quad (13)$$

Рівняння (13) встановлює залежність між ядром об'ємної повзучості і ядрами поздовжньої і зсувної повзучості при одновісному розтягу та чистому крученні. Дозволяє розрахувати дискретні значення ядер об'ємної повзучості $K_v(t)$ за умов складного напруженого стану в функції часу t . Параметри ядер визначаються за результатами апроксимації дискретних значень ядер вибраним для ядра аналітичним виразом.

4. Визначення параметрів ядер спадковості

У якості об'єкту дослідження обрані тонкостінні трубчаті зразки з поліетилену високої щільності ПЕВП. Експериментальні дані запозичені з [2]. В якості базових експериментів розглядаються випробування тонкостінних трубчастих зразків на повзучість при

одновісному розтягу, при чистому крученні і при комбінованому навантаженні із розтягом і крученням. За даними випробувань на одновісний розтяг визначаються параметри ядер поздовжньої та зсувної повзучості.

В таблиці 1 наведені значення параметрів ядер спадковості поліетилену ПЕВП. Значення пружних сталей запозичені з [1].

Таблиця 1

Значення параметрів ядер спадковості для ПЕВП

$K_{11}(t), \text{год}^{-1}$			$K_{21}(t), \text{год}^{-1}$		
α_{11}	β_{11}	λ_{11}	α_{21}	β_{21}	λ_{21}
-0,6460	-0,1398	1,9439	-0,4700	-1,2467	2,0197
$K_i(t), \text{год}^{-1}$			$K_v(t), \text{год}^{-1}$		
α_i	β_i	λ_i	α_v	β_v	λ_v
-0,4706	1,2402	2,0155	-0,6334	0,2971	9,1396

Значення параметрів ядер спадковості визначаються за результатами апроксимації дискретних значень ядер повзучості дробово-експоненційною функцією (4) за методикою викладеною в [1]. Розмірність коефіцієнтів β і λ – $\text{год}^{-(1+\alpha)}$, а коефіцієнт α – безрозмірний.

5. Розрахунок поздовжньої і зсувної повзучості

Розв'язується задача розрахунку деформацій поздовжньої і поперечної повзучості тонкостінних трубчастих зразків при одновісному розтягу і розтягу зі крученням, а також деформацій зсувної повзучості при чистому крученні і крученні з розтягом. Розв'язок будується на основі тривимірної моделі в'язкопружності (1) з використанням значень пружних сталей і значень параметрів ядер спадковості, наведених в таблицях 1 і 2.

Для компонент тензора деформацій повзучості $\varepsilon_{ij}(t)$ з (1) впливає рівняння

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i(\sigma_i, t)}{\sigma_i(t)} (\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij} \sigma_0(t)) + \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v(t) \quad (14)$$

звідки для деформацій поздовжньої повзучості $\varepsilon_{11}(t)$ при двовісному комбінованому навантаженні розтягом із скрученням при $\sigma_{11} = \text{const}$ і $\tau_{21} = \text{const}$ з урахуванням (4) отримуємо рівняння

$$\varepsilon_{11}(t) = \frac{2(1+\nu)}{3E} \sigma_{11} \left\{ 1 + \lambda_{11} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_{11})^n t^{(1+n)(1+\alpha_{11})}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_{11})]} \right\} + \frac{1-2\nu}{3E} \sigma_{11} \left\{ 1 + \lambda_v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_v)^n t^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_v)]} \right\}, \quad (15)$$

і для деформації зсувної повзучості $\varepsilon_{21}(t)$ – рівняння

$$\varepsilon_{21}(t) = \frac{1}{2G} \tau_{21} \left\{ 1 + \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1 + (1+n)(1+\alpha_i)]} \right\}^k. \quad (16)$$

Результати розрахунків деформацій поздовжньої $\varepsilon_{11}(t)$ і зсувної $\varepsilon_{21}(t)$ повзучостей тонкостінних трубчатих зразків з поліетилену високої щільності ПЕВП,

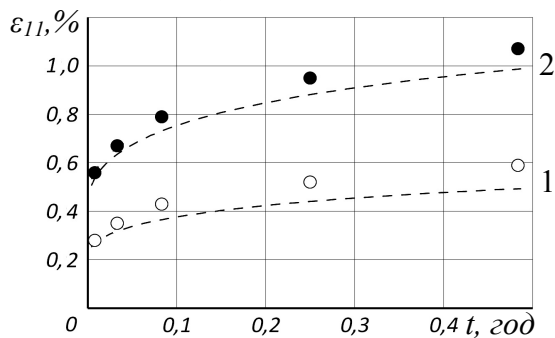


Рис.1 Поздовжня повзучість

виконаних за рівняннями (15) і (16) з використанням наведених в таблиці 1 значення пружних сталей і параметрів ядер спадковості, співставлені на рис. 1 і 2 з експериментальними даними. Результати розрахунків нанесені штриховими лініями, а експериментальні дані – точками.

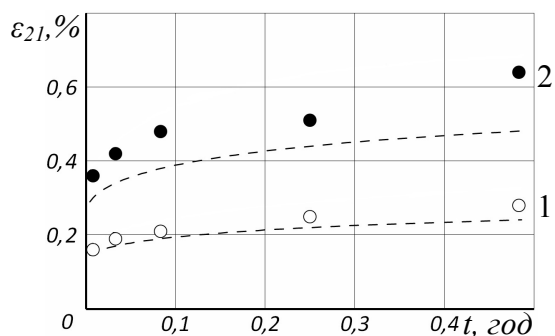


Рис.2 Поперечна повзучість

Деформації поздовжньої повзучості (рис. 1) і деформації зсувної повзучості (рис.2) розраховувались при напруженнях $\sigma_{11} = 1,77$ МПа і $\tau_{21} = 0,83$ МПа (криві 1; $\circ$) і при напруженнях $\sigma_{11} = 3,54$ МПа і $\tau_{21} = 1,66$ МПа (криві 2; $\bullet$).

6. Обговорення результатів

Наведені на рис. 1-2 результати розрахунків нормальних σ_{11} і дотичних τ_{21} напружень, свідчать про задовільне узгодження умові лінійності. Ця умова сформульована для складного напруженого стану і передбачає що за будь-якого фіксованого часу t_i інтенсивності деформацій повзучості $\varepsilon_i(t)$ знаходяться у тому ж відношенні між собою, як і інтенсивності напружень σ_i .

Список використаних джерел

1. Голуб В.П. Идентификация ядер наследственности изотропных линейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии. 1. Суперпозиция сдвиговой и объемной ползучести / В. П. Голуб, Б. П. Маслов, П. В. Фернати // Прикл. механика. – 2016. – Том 52, № 2. – С. 78-90
2. Креггерс А.Ф. Комплексное исследование полиэтилена высокой плотности в условиях нелинейной ползучести и релаксации напряжений / А.Ф. Креггерс, М.Р. Килевич // Механика композитных материалов. – 1985. – №2. – С. 195-201.

References

1. GOLUB, V. P. and MASLOV, B. P. and FERNATI, P.V. (2016) Identifikatsiya yader nasledstvennosti izotropnykh lineyno-vyazkouprugih materialov pri slozhnom napryazhenom sostoyanii. 1. Superpozitsiya sdvigovoy i ob'emnoy polzuchesti. *Prikladnaya mehanika*. 52 (2). p. 78-90.
2. KREGERS, A.F. and KILEVICH, M.R. (1985) Kompleksnoe issledovanie polietilena vyisokoy plotnosti v usloviyah nelineynoy polzuchesti i relaksatsii napryazheniy. *Mekhanika kompozitnykh materialov*. 2. p. 195-201.

Надійшла до редколегії 15.09.2017

УДК 534.1

Перепічка В. В.¹, к. ф.-м. н., доц.,
Шацький І. П.², д. ф.-м. н., проф.

**Нестационарна взаємодія пружного
стержня з недеформівною основою через
жорсткопластичний прошарок із
зміцненням**

Івано-Франківський відділ Інституту
прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, 76002,
м. Івано-Франківськ, вул. Микитинецькая, 3,

¹ e-mail: an_w@i.ua

² e-mail: ipshatsky@gmail.com

Perepichka V. V.¹, Ph.D., (Phys.-Math.),
Shatskyi I. P.², Dr.Sci., (Phys.-Math.).

**Nonstationary interaction of an elastic rod
with nondeformable foundation through a
rigid-plastic layer with hardening**

Ivano-Frankivsk Branch of Pidstryhach Institute for
Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
NAS of Ukraine, 76002, Ivano-Frankivsk,
Mykytynetska str., 3,

¹ e-mail: an_w@i.ua

² e-mail: ipshatsky@gmail.com

Розглянуто нестационарну задачу про розповсюдження ударної хвилі стиску у півнескінченному пружному стержні, бічна поверхня якого взаємодіє з абсолютно недеформівною основою через тонкий жорстко-пластичний прошарок з лінійним зміцненням. Аналітичний розв'язок початково-крайової задачі побудовано інтегральним перетворенням Лапласа. Проаналізовано вплив ефекту зміцнення на структуру області руху, на розподіл нестационарних полів переміщення, швидкості та напружень, знайдено залишкові напруження після зупинки стержня. Встановлено обмеження для співвідношення реологічних параметрів, за яких в системі не розповсюджуються відбиті хвилі.

Ключові слова: стержень, динаміка, жорстко-пластичний прошарок, зміцнення.

The wave problem of propagation and deceleration of shock pressure perturbation in semi-infinite elastic rod interacting with the medium is investigated using the model of elastoplastic resistance with increasing relation between shear stress and jump of displacement on the lateral surface (model of thin rigid-plastic layer with linear hardening). An exact analytical solution of the initial-boundary problem is obtained using the Laplace transforms. A wave pattern of perturbation including the prefront zone of rest, the area of motion and the domain of stationary residual stresses has been built. The three-dimensional diagrams for nonstationary fields of velocity and stresses have been constructed too. The influence of the hardening effect on the solution is analyzed. Restrictions for the ratio of rheological parameters, in which the reflected waves do not propagate in the system, are established.

Key Words: rod, dynamics, rigid-plastic layer, hardening.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

У окремих галузях матеріалознавства, будівництва та нафтогазової справи актуальними є задачі динамічної взаємодії стержневих систем з довкіллям за складних умов контакту на бічних поверхнях стержнів. Це стосується проблем розтріскування волокнистих композитів з непружною матрицею, будівництва на палях, сейсмосахисту трубопровідних систем, ліквідації прихоплень бурильної колони тощо. Задачі розповсюдження ударних хвиль у стержнях із зовнішнім сухим тертям докладно описано у праці [1]. Варіанти взаємодії стержня з основою через в'язко-пластичний бінгамівський прошарок розглядалися у статтях [2–4].

Постановка задачі

Досліджуємо нестационарну задачу про розповсюдження ударної хвилі стиску у півнескінченному пружному стержні, бічна поверхня якого взаємодіє з абсолютно недеформівною основою через тонкий жорстко-пластичний прошарок з лінійним зміцненням. Дотичні зусилля на контактних поверхнях стержня визначаються силами опору, котрі моделюються паралельним з'єднанням за Фойхтом елементів Сен-Венана та Гука (відповідна діаграма подана на рис. 1).

До торця стержня в початковий момент часу прикладається зусилля, яке залишається надалі сталим. Слід вивчити вплив зміцнення на структуру хвильового поля.

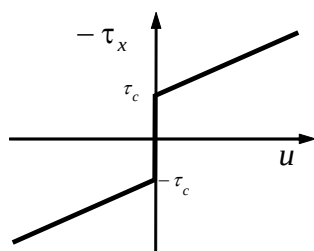


Рис. 1. Модель дотичних зусиль на бічних поверхнях стержня

Нелінійна початково-крайова задача для знаходження переміщення стержня $u(x, t)$ має вигляд:

$$\frac{u''}{L} + \frac{\tau_x}{E} = \frac{\ddot{u}}{L}, \quad x > 0, \quad t > 0; \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{u} \neq 0: & \tau_x = -\tau_c \operatorname{sgn} \dot{u} - ku; \\ \dot{u} = 0: & |\tau_x + ku| < \tau_c. \end{cases} \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \dot{u}(x, 0) = 0, \quad x > 0; \quad (3)$$

$$\frac{u'(0, t)}{L} = -\frac{\sigma_0}{E} H(t), \quad u(\infty, t) = 0, \quad t > 0. \quad (4)$$

Тут $x = X/L$, $t = cT/L$ – безрозмірні координата та час, $L = F/\Pi$ – характерний розмір, а F , Π – площа та периметр поперечного перерізу; $c = \sqrt{E/\rho}$ – швидкість хвилі; τ_x – дотичне напруження на бічній поверхні, $k = E_l/h_l$ – зведений модуль зміцнення, а τ_c , E_l та h_l – межа текучості, січний модуль матеріалу та товщина прошарку відповідно; σ_0 – величина напруження на торці стержня, $H(t)$ – функція Гевісайда.

Передбачаючи напрямок руху стержня ($\dot{u} > 0$) і припускаючи, що швидкість поширення збурення не перевищує акустичну швидкість в матеріалі стержня (область руху належить

$$\begin{aligned} \frac{u(x, t)}{L} &= \frac{\sigma_0}{E} \left[\int_x^t J_0(\lambda \sqrt{\tau^2 - x^2}) d\tau + \frac{\tau_c}{\sigma_0} \frac{1}{\lambda^2} \left\{ J_0(\lambda \sqrt{t^2 - x^2}) - 1 \right\} \right] H(t - x), \\ \frac{\dot{u}(x, t)}{L} &= \frac{\sigma_0}{E} \left[J_0(\lambda \sqrt{t^2 - x^2}) - \frac{\tau_c}{\sigma_0} t \frac{J_1(\lambda \sqrt{t^2 - x^2})}{\lambda \sqrt{t^2 - x^2}} \right] H(t - x), \\ \frac{u'(x, t)}{L} &= -\frac{\sigma_0}{E} \left[1 - \lambda x \int_x^t \frac{J_1(\lambda \sqrt{\tau^2 - x^2})}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau - \frac{\tau_c}{\sigma_0} x \frac{J_1(\lambda \sqrt{t^2 - x^2})}{\lambda \sqrt{t^2 - x^2}} \right] H(t - x). \end{aligned} \quad (8)$$

Аналіз результатів

Для розрахунків взяли $\tau_c/\sigma_0 = 1$, $\lambda^2 = 2$.

Рис. 2 подає в координатно-часовій площині хвильову картину нестационарного збурення в

секторі $t > x$), дотичні напруження (2) подамо у вигляді:

$$\tau_x = -\tau_c H(t - x) - ku$$

і тим самим лінеаризуємо задачу (1)–(5). Цю дію слід трактувати як перший крок ітераційного процесу.

В такому разі рівняння (1) зводиться до лінійного неоднорідного рівняння Клейна-Гордона:

$$\frac{u''}{L} - \lambda^2 \frac{u}{L} = \frac{\ddot{u}}{L} + \frac{\tau_c}{E} H(t - x), \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (5)$$

де $\lambda^2 = kL/E = E_l L/(E h_l)$ – безрозмірний параметр зміцнення.

Аналітичний розв'язок

Розв'язок переформульованої задачі (5), (3), (4) побудуємо за допомогою інтегрального перетворення Лапласа за часом. Операційний еквівалент задачі у просторі зображень буде:

$$\frac{U''}{L} - (s^2 + \lambda^2) \frac{U}{L} = \frac{\tau_c}{E} \frac{e^{-sx}}{s}, \quad x > 0, \quad (6)$$

$$\frac{U'(0)}{L} = -\frac{\sigma_0}{E} \frac{1}{s}, \quad U(\infty) = 0. \quad (7)$$

Тут $U(x) = \int_0^\infty e^{-st} u(x, t) dt$ – трансформанта переміщення, s – параметр перетворення.

У свою чергу розв'язок задачі (6)–(7) такий:

$$\frac{U(x)}{L} = \frac{\sigma_0}{E} \left[\left(\frac{1}{s} + \frac{\tau_c}{\sigma_0} \frac{1}{\lambda^2} \right) \frac{e^{-x\sqrt{s^2 + \lambda^2}}}{\sqrt{s^2 + \lambda^2}} - \frac{\tau_c}{\sigma_0} \frac{1}{\lambda^2} \frac{e^{-sx}}{s} \right].$$

Переходячи до оригіналу, аналітичний розв'язок вихідної задачі та його похідні виразили через функції Бесселя:

стержні. Тут область A – передфронтна зона спокою, B – зона розповсюдження динамічного збурення в стержні, C – зона залишкових стаціонарних напружень. Штриховою лінією

показані відповідні зони для випадку сухого тертя. Зони A і B розділені характеристикою $x=t$, яка описує розповсюдження фронту хвилі і є лінією сильного розриву, тут мають місце стрибки швидкості і напружень. Розв'язок (8) справедливий в областях A та B , причому відсутність збурень у передфронтівій області врахована множителем Гевісайда.

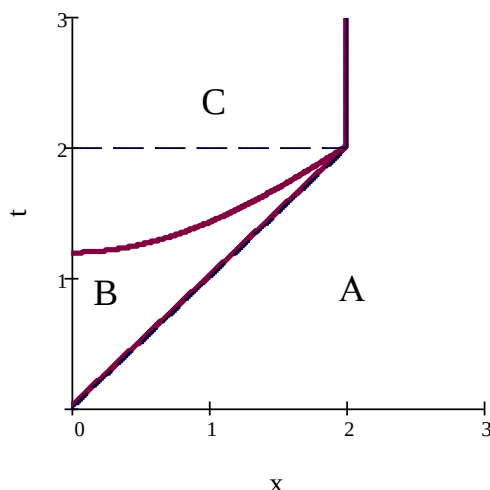


Рис. 2. Хвильова картина нестационарного збурення в стержні

В області C швидкість збурення $\dot{u}(x,t)$ стає від'ємною, тому отримані формули тут слід відкинути як такі, що суперечать вихідному припущенню про знак швидкості. Крива, що розділяє зони B і C , знаходиться числово з умови $\dot{u}(x,t)=0$ і є лінією слабого розриву. При переході через неї рух припиняється, на ній мають місце стрибки прискорення, дотичного напруження і градієнта осьового напруження. У області C переміщення і напруження не змінюються з часом і мають значення, що зафіксовані на лінії зупинки. Дотичні напруження визначаються з рівнянь статики і дорівнюють градієнтові осьових напружень, обчислених на лінії слабого розриву. Вперше зупинка спостерігається на торці стержня. Безрозмірна довжина нестационарно збуреної ділянки $L_* = 2\sigma_0/\tau_c$ така ж, як і в задачі Нікітіна без зміцнення [1].

На рис. 3–5 подано графіки нестационарних полів швидкості та напружень у пружному стержні.

$$\frac{u(x,t)}{L} = \frac{\sigma_0}{E} \left\{ (t-x) - \frac{1}{4} \frac{\tau_c}{\sigma_0} (t^2 - x^2) - \left[\frac{1}{3} (t^3 - x^3) - x^2(t-x) - \frac{1}{16} \frac{\tau_c}{\sigma_0} (t^2 - x^2)^2 \right] \frac{\lambda^2}{4} + O(\lambda^4) \right\} H(t-x),$$

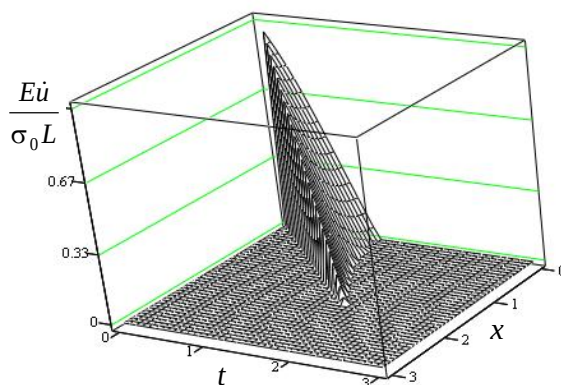


Рис. 3. Розподіл швидкості по довжині стержня

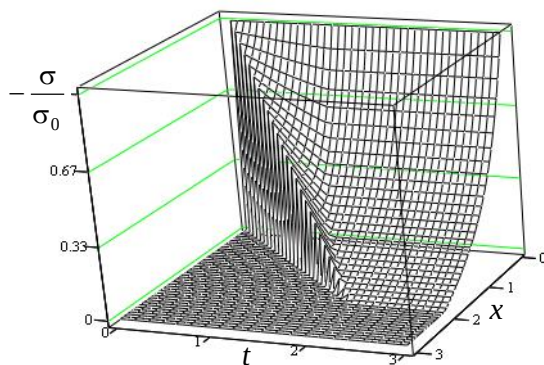


Рис. 4. Динамічне поле осьових напружень

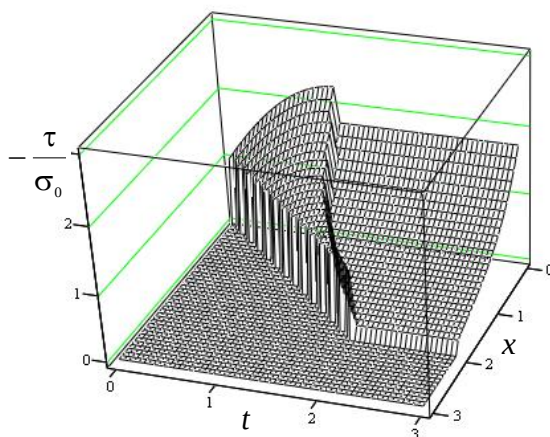


Рис. 5. Дотичні напруження на бічній поверхні

Крім того, для малого параметра зміцнення побудували асимптотичний розклад розв'язку (8) у першому наближенні:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{u}(x,t)}{L} &= \frac{\sigma_0}{E} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{\tau_c}{\sigma_0} t - \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\tau_c}{\sigma_0} t \right) \left(t^2 - x^2 \right) \frac{\lambda^2}{4} + O(\lambda^4) \right\} H(t-x), \\ \frac{u'(x,t)}{L} &= -\frac{\sigma_0}{E} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{\tau_c}{\sigma_0} x + \left[2x(t-x) - \frac{1}{4} \frac{\tau_c}{\sigma_0} x(t^2 - x^2) \right] \frac{\lambda^2}{4} + O(\lambda^4) \right\} H(t-x).\end{aligned}\quad (10)$$

Ці вирази справедливі в області руху, обмеженій лінією зупинки:

$$t = t_*(x) = \frac{2\sigma_0}{\tau_c} \left[1 - \left(L_*^2 - x^2 \right) \frac{\lambda^2}{8} + O(\lambda^4) \right]. \quad (10)$$

Нарешті, залишкові напруження в області С є такими:

$$\begin{aligned}\sigma_x^{res}(x) &= -\sigma_0 \left[1 - \frac{x}{L_*} + x(L_* - x) \left(3 - \frac{x}{L_*} \right) \frac{\lambda^2}{8} + O(\lambda^4) \right] H(L_* - x), \\ \tau_x^{res}(x) &= -\frac{\tau_c}{2} \left[1 + (3L_*^2 - 8L_*x + 3x^2) \frac{\lambda^2}{8} + O(\lambda^4) \right] H(L_* - x).\end{aligned}\quad (11)$$

При $\lambda = 0$ і точний, і асимптотичний результати дають розв'язок задачі для чисто сухого тертя [1] (або для жорстко-пластичного прошарку). Асимптотики (9)–(11) також якісно узгоджуються з графічно поданими числовими результатами.

Аналіз показав, що для значного зміцнення (грубо при $\lambda > 3\tau_c/\sigma_0$) порушуються вихідні припущення про структуру хвильового поля і

можливими є поява відбитих хвиль та зміна напрямку проковзування.

Висновки

У розглянутій задачі, на противагу випадкові жорстко-пластичного прошарку, зупинка руху не відбувається одномоментно, а збурена ділянка стержня рухається як деформівне тіло. Зупинка руху завжди починається зі сторони торця. Ефект зміцнення не впливає на довжину збуреної ділянки.

Для слабкого зміцнення отриманий розв'язок асимптотично близький до розв'язку задачі Нікітіна [1]. Для значного зміцнення очікується поява відбитих хвиль та ділянок зворотного проковзування з рухомими межами.

Поля залишкових напружень, що знаходяться за результатами обчислення градієнта напружень на лінії зупинки руху, характеризуються великою варіативністю залежно від параметрів задачі.

Список використаних джерел

1. Никитин Л. В. Статика и динамика твердых тел с внешним сухим трением / Л. В. Никитин. – Москва: Моск. лицей, 1998. – 272 с.
2. Шацкий И. П. Распространение ударной волны в упругом стержне с вязкопластическим внешним сопротивлением / И. П. Шацкий, В. В. Перепичка // Прикл. механика и техн. физика. – 2013. – Т. 54, № 6. – С. 175–180.
3. Шацкий И. П. Нестационарный скрут пружного стержня з в'язкопластичним зовнішнім опором / І. П. Шацкий, В. В. Перепічка // Доповіді НАН України. – 2014. – № 10. – С. 63–69.
4. Shatskyi I. Dynamic problem for an elastic rod with decreasing function of viscoplastic friction / I. Shatskyi, V. Perepichka // Proc. 22nd Int. Conf. "MECHANIKA 2017" (19 May 2017, Kaunas, Lithuania). – P. 348–350.

References

1. NIKITIN, L. V. (1998) *Statika i dinamika tverdykh tel s vneshnim sukhim treniem*. Moskva: Mosk. Litsei.
2. SHATSKII, I. P. & PEREPICHKA, V. V. (2013) Shock wave propagation in an elastic rod with a viscoplastic external resistance. *J. Appl. Mech. and Techn. Phys.* 54 (6), pp. 1016–1020.
3. SHATSKY, I. P. & PEREPICHKA, V. V. (2014) Nestationarnyi skrut pruzhnoho sterzhnya z v'iazkoplasychnym zovnushnim oporom. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukrainy*. (10), pp. 63–69.
4. SHATSKYI, I. P. & PEREPICHKA, V. V. Dynamic problem for an elastic rod with decreasing function of viscoplastic friction. *Proc. 22nd Int. Conf. "MECHANIKA 2017"* (19 May 2017, Kaunas, Lithuania), pp. 348–350.

Надійшла до редколегії 29.08.17

УДК 552:539.217

Попов С. А.¹, к.г.-м.н.,
Андрущенко Т. В.², аспірант,
Краснікова О. О.³, студентка

Визначення пружних характеристик зразків гірських порід циліндричної форми методом резонансів

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка,
03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е
¹ e-mail: sapopovsa@mail.ru
² e-mail: tarasandruschenko@gmail.com
³ e-mail: koatinga@gmail.com

S. A. Popov¹, Ph.D.,
T. V. Andrushchenko², PhD student
O. O. Krasnikova³, student

Determination of elastic characteristics of cylindrical rocks samples by the method of resonances

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
4e, Glushkov ave., Kyiv 03680,
¹ e-mail: sapopovsa@mail.ru
² e-mail: tarasandruschenko@gmail.com
³ e-mail: koatinga@gmail.com

У роботі наведені експериментальні дані по вимірам пружних параметрів гірських порід резонансним методом. Модулі пружності визначалися за допомогою отримання мод Кри-Лемба і подальшим розрахунком за методикою Мелешка (2008). Форми коливань визначалися за допомогою фігур Хладні. З метою перевірки та уточнення отриманих результатів було задіяне чисельне моделювання. Результати дозволяють розраховувати на точність методики 0.5-1 %

Ключові слова: резонансний метод, модуль пружності, сильне затухання.

In this work, an attempt is made to use a well-developed methodology for determining the elastic properties of solid high-Q materials by the resonance method in order to study rock samples. Such samples may also have significant damping, such as, for example, cores from oil and gas bearing sandstone beds. A physical study was carried out on high-quality cylindrical samples from an aluminum alloy D16T, which had the same diameter and height. Such a simulation made it possible to determine very accurately the spectrum of the resonance frequencies and the modes of the oscillations. The nodal lines and waveforms were visualized by the sand figures of Chladni. With the help of mathematical modeling, symmetric and asymmetric modes were distinguished. Calculations for test cylindrical samples having a single height and a diameter of 30 mm (aluminum, copper, pressed corundum, limestone) showed that the accuracy of determining the modulus of elasticity of materials by the resonance method is about 1 percent.

Key Words: resonance method, elastic modulus, overdamping.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Дані про пружні параметри (ПП) гірських порід набувають все більшого попиту, значною мірою внаслідок уніфікації умов проектування стволів свердловин та проведення видобувних робіт. Обидва процеси потребують застосування програмних продуктів, де вхідними даними є пружні параметри середовища. Традиційним методом отримання ПП є лабораторні виміри повздовжньої та поперечної швидкостей звуку в зразках гірських порід, та подальший розрахунок ПП. При вимірюванні використовують різні

модифікації імпульсних методів прозвучування. Однак вони мають обмеження, до яких відносяться наявність дисперсійних явищ, виникнення обмінних хвиль на межі поділу детектора зі зразком, які змінюють корисний сигнал при вимірах поперечних хвиль. Зауважимо, що ці явища виникають у зразках з високим затуханням акустичного імпульсу, як правило, це найбільш цікаві зразки.

Метод резонансів (МР) значно менш залежний від дисперсії, а внаслідок використання частот 20-100 кГц замість 500-1000 кГц при імпульсних методах, він значно менш поглинається. І

якщо для ізотропних об'єктів він використовується доволі широко [1], то для природних об'єктів він ще не є загальноприйнятим [2]. Останнє, на наш погляд, пов'язане як із наукоємністю методу, так і зі складністю об'єкта досліджень. Наша робота присвячена відпрацюванню відповідної методики.

Матеріали та методика

В якості об'єкта досліджень виступають зразки гірських порід циліндричної форми 30×30 мм. Зразок затискувався між латунними конусами, приклеєними до приймальної та випромінюючої керамік. Приймач також був оснащений демпфером з епоксидної смоли з порошком вольфрама. Така конструкція збудження сприяє утворенню вісесиметричних коливань, моди яких були використані нами в якості «робочих».

Методика розрахунку базується на алгоритмі, наведеному в [3], де для зразків зі співвідношенням висоти до діаметру рівному 1 знайдені нормовані (по відношенню до першої моди Крі-Лемба) резонансні частоти (моди Крі-Лемба). Наведені перших 6 форм вісесиметричних коливань відповідно до величини коефіцієнту Пуассона (ν). Тобто, отримуючи експериментально перші моди вісесиметричних коливань ($f_1, f_2, \dots$), знаходимо їх співвідношення, яке співставляємо зі співвідношенням відповідних мод Крі-Лемба ($\Omega_1, \Omega_2, \dots$), отриманих теоретично. Тобто за [3], $\Omega_2/\Omega_1 \approx f_2/f_1$. Модуль зсуву буде дорівнювати :

$$G = \frac{\pi^2 f_{s_1}^2 D^2 \rho}{\Omega_{s_1}},$$

де D – діаметр циліндричного зразка, ρ – його густина, f_{s_1} – перша симетрична мода коливання циліндра, Ω_{s_1} – перша нормована резонансна частота коливань циліндра.

Таким чином, при правильній ідентифікації відповідних максимумів на кривій амплітудно-частотної характеристики (АЧХ) подальші розрахунки ν і G нескладні.

Зазначена вище ідентифікація може викликати деякі труднощі. По-перше, в зразках зі зміще-

ним центром мас або неоднорідною структурою будуть з'являтися невісесиметричні моди, і «псувати» АЧХ. До цього ж ефекту призводить можливе розщеплювання мод, і згладжування піків за рахунок низької добротності. По-друге, можливі випадки, коли друга мода дуже близька до першої або третьої [3]. У подібних випадках доцільно користуватися моделюванням у програмі ANSYS, перепроверяючи отримані експериментальні дані. ANSYS був використаний також для співставлення отриманих нами резонансів АЧХ та форм коливань з результатами, отриманими за алгоритмом [3]. Для такої перевірки був використаний циліндр з алюмінію висотою 60 мм і діаметром 60 мм з приклеєними на його торцях п'єзокерамічними датчиками діаметром 10 мм і товщиною 1 мм. Форми коливань циліндра, визначені за допомогою методу Хладні, добре співпадають з формами коливань, знайденими за допомогою чисельного моделювання.

Результати експериментів

Експериментально досліджувалися чотири циліндричні зразки розміром 30×30 мм : алюміній, мідь, наждачний корундовий камінь з пористістю 30%, вапняк. Їх АЧХ показані на рис. 1. Для вибраних геометричних розмірів значний інтерес складає розташування на частотному спектрі першої моди коливань. Як видно з рис.1, для трьох зразків (алюміній, корунд, вапняк) – це діапазон частот 79,6; 79,9; 72,7 кГц відповідно. Перша мода для мідного зразка збуджується значно нижче від цієї області коливань, а саме на частоті 49,9 кГц. При цьому для перших трьох зразків відстань між першим і другим резонансом приблизно 20 кГц, а для зразка із міді ця відстань приблизно 7 кГц.

Необхідно зауважити, що для всіх чотирьох зразків у спектрах АЧХ фіксуються інтенсивні резонанси в області 100-120 кГц. Вибір пари резонансів, тобто збуджуваних мод коливання, в даному випадку являється компромісом між точністю і гарантією безпомилковості їхньої ідентифікації.

Форми коливань, отримані в ANSYS та перевірені фігурами Хладні, і їх номери за [3] приведені на рисунку 2.

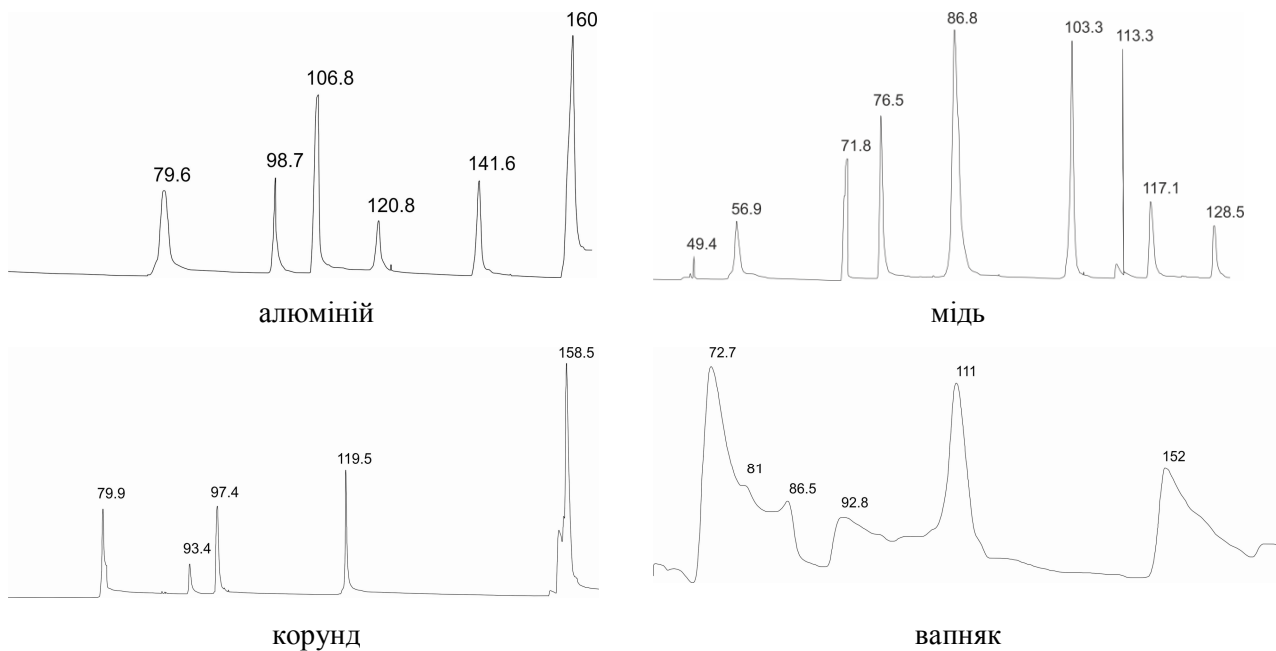


Рис. 1 Амплітудно-частотні характеристики тестових зразків

Результати чисельної перевірки наведені в таблиці 1, де: f_1 і f_2 – дві перші моди вісесиметричних коливань; G , ν , E – розраховані модулі пружності; f_3 , f_4 , f_5 , f_6 – розраховані (чисельник) та виміряні (знаменник) моди; V_p , V_s – розраховані по експериментальним даним повздовжні і поперечні швидкості відповідно.

Висновки

Створений робочий макет обладнання для вимірів пружних модулів зразків гірських порід резонансним методом. При дослідженні властивостей макетного зразка було встановлено, що як

форма, так і повторюваність спектру АЧХ досить сильно залежать від співосності датчиків і керна. Однак експериментально вдається так підібрати їхнє положення, коли максимуми можуть бути визначені з похибкою не більше 5% для сильнозатухаючих зразків, і менше 0,5% для високодобротних. Обґрунтована необхідність застосування додаткових п'єзодатчиків і на боковій поверхні циліндричних зразків. Подальша оптимізація методики потребує, в першу чергу, більш якісного збудження та фіксації виключно вісесиметричних коливань.

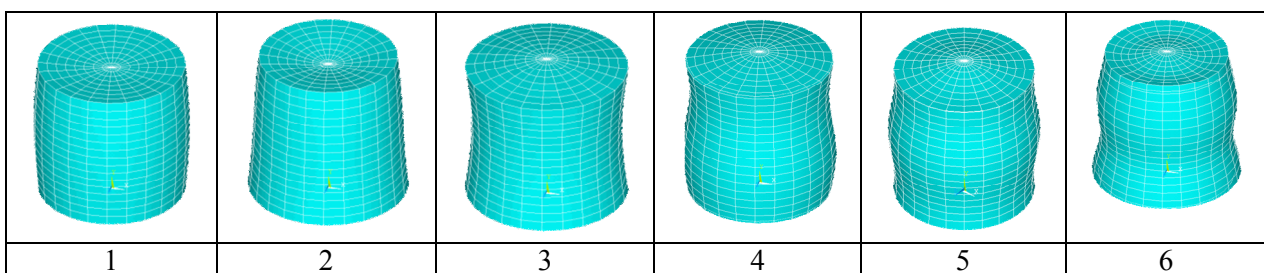


Рис. 2 Форми мод коливань і їх номери за [3]

Таблиця 1

Співставлення вимірних та розрахованих параметрів

Матеріал зразка	f_1 , кГц	f_2 , кГц	G , Па E^{10}	ν	E , Па E^{10}	f_3 кГц	f_4 кГц	f_5 кГц	f_6 кГц	V_p	V_s
Al	79,6	98,7	2,82	0,307	7,3	$\frac{105,5}{106,8}$	$\frac{121,3}{120,8}$	$\frac{138,0}{141,6}$	$\frac{161,4}{160}$	6113	3223
Cu	56,9	71,8	4,73	0,337	12,6	$\frac{77,0}{76,5}$	$\frac{87,0}{86,8}$	$\frac{102,7}{103,3}$	$\frac{116,6}{117,1}$	4650	2301
корунд	79,9	93,4	2,29	0,211	5,5	$\frac{98,9}{97,4}$	$\frac{119,9}{119,5}$	$\frac{118,6}{119,5}$	$\frac{157,3}{158,5}$	5372	3249
вапняк	72,7	86,5	2,33	0,239	5,7	$\frac{91,8}{92,8}$	$\frac{109,6}{111}$	$\frac{112,9}{111}$	$\frac{144,3}{152}$	5046	2952

Список використаних джерел

References

1. Малкин А. Я. Методы измерения механических свойств полимеров / А. Я. Малкин, А. А. Аскадский, В. В. Коврига. – Москва: Химия, 1978. – 336 с.

2. Гурбатов С. Н. Современные методы обработки и интерпретации экспериментальных данных в задачах геоакустики. Учебно-методический материал по программе повышения квалификации «Применение современных информационно-телекоммуникационных систем и технологий для обработки сигналов различной природы» / С. Н. Гурбатов, А. В. Лебедев. – Нижний Новгород, 2006. – 99 с.

3. Мелешко В. В. Резонансный метод определения упругих постоянных конечных изотропных цилиндров / В. В. Мелешко, Н. С. Якименко, А. Ф. Улитко // Акуст. вестник. – 2008. – Т. 11, № 3. – С. 65-75.

1. MALKIN, A. Ya., ASADSKIY A. A. and KOVRIGA V. V. (1978) *Metody izmereniya mekhanicheskikh svoystv polimerov*. Moskva: Nauka.

2. HURBATOV, S. N. and LEBEDEV A.V. (2006) *Sovremennye metody obrabotki i interpretatsii eksperimental'nykh dannykh v zadachah geoakustiki. Uchebno-metodicheskiy material po programme povysheniya kvalifikatsii "Primenenie sovremennykh informatsionno-telekommunikatsionnykh sistem i tehnologiy dlya obrabotki signalov razlichnoy prirody"*. Nizhniy Novgorod.

3. MELESHKO V. V., YAKIMENKO N. S. and ULITKO A. F. (2008) Rezonansniy metod opredeleniya uprugih postoyannih konechnykh izotropnykh tsilindrov. *Akusticheskiy vestnik*. 11 (3). P.65-75.

Надійшла до редколегії 29.09.17

УДК 539.9

П'ятецька О.В., к.ф.-м.н., с.н.с.

O.V.Pyatetska, Ph.D. (Phys.-Math.)

Вплив дисипативного розігріву на показники п'єзоелектричного сенсора

Influence of dissipative heating on piezoelectric sensors work

Київський національний університет імені Тараса
Шевченка, 03680, м. Київ, пр. Акад. Глушкова, 4-е,
e-mail: pyatetskaov@gmail.com.

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Acad. Glushkova pr., 4-e,
e-mail: pyatetskaov@gmail.com.

Розглядається задача про вплив температури дисипативного розігріву на ефективність роботи п'єзоелектричних сенсорів при вимушених резонансних коливаннях тонких в'язкопружних прямокутних пластин з шарнірним закріпленням торців. Розв'язок задачі одержано за допомогою варіаційного методу та методу Бубнова-Галеркіна. Досліджено вплив розмірів сенсора і температури дисипативного розігріву на показники сенсора.

Ключові слова: п'єзоелектричні сенсори, демпфування, різниця потенціалів, температура дисипативного розігріву.

The main coupled problems of thermomechanics for the inelastic passive and piezoactive solids under harmonic loading are formulated at the account of dependence of electromechanics characteristics from a temperature. The basic equations of the theory thermoviscoelastic thin-walled plates with piezo-electric sensors under monoharmonic mechanical and electric loading are derived using the Kirchhoff-Love hypotheses. The thermomechanical behavior of passive and piezoactive materials is described using the concept of complex characteristics. The coupling of electromechanical and thermal fields is taken into account. The problem of influence of the dissipative heating temperature on efficiency piezoelectric sensors work for the forced resonance vibrations of thin viscoelastic rectangular plates is considered. The simplified equations of induction and heat conductivity are used for the bending vibrations of plates. The nonlinear system of differential equations for the deflection and temperature for a sandwich plate with isotropic core layer and two piezoactive layers with opposite polarization is solved by the variational method and Bubnov-Galerkin method. The influence sensors dimensions and temperature of dissipative heating on sensors functioning is investigated.

Key Words: piezosensors, damping, potential difference, dissipative heating temperature.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Для моделювання термомеханічних процесів в тілах з пасивних і п'єзоактивних матеріалів можна використовувати загальні моделі в'язкопружності, пластичності або в'язкопружно-пластичності. Можливі різні варіанти постановки зв'язаних задач термомеханіки елементів конструкцій з пасивних (без п'єзоефекту) та активних (з п'єзоефектом) матеріалів. Найпростіша постановка задачі має місце в тому випадку, коли електромеханічні характеристики не залежать від температури та інших польових величин. Тоді цей перший клас задач зводиться до розв'язання лінійної задачі електромеханіки, чи механіки, розрахунку дисипативної функції і розв'язання задачі теплопровідності з відомим джерелом тепла. Якщо електромеханічні характеристики залежать від температури, маємо більш складний другий клас нелінійних задач. Їх нелінійність

обумовлена залежністю дисипативної функції від температури та деформацій і залежністю електромеханічних характеристик від температури. Третій клас задач виникає при врахуванні залежності електромеханічних характеристик від незалежних польових величин, наприклад, від деформацій для задач термомеханіки для тіл з пасивних непружних матеріалів. Цей клас задач зводиться до розв'язання нелінійної задачі електромеханіки (чи механіки), розрахунку дисипативної функції і розв'язання лінійного рівняння теплопровідності з відомим джерелом тепла. Найбільш складний четвертий клас задач виникає при врахуванні залежності електромеханічних характеристик від температури і незалежних польових величин, наприклад, деформацій для випадку тіла з пасивного матеріалу.

Для активного демпфірування гармонічних коливань тонких пластин із пасивних матеріалів за допомогою сенсорів та актуаторів в її структуру вводяться п'єзоелектричні включення, які виконують роль сенсорів. Основна функція цих включень — дати інформацію про механічну поведінку пластини, зокрема про амплітуду резонансних коливань. Маючи показники сенсора, для демпфірування коливань до актуатора підводиться різниця потенціалів, пропорційна цим показникам. Тому ефективність демпфірування суттєво залежить від роботи сенсора. Загальна теорія вимушених коливань шаруватих пластин з пасивних в'язкопружних ортотропних матеріалів з розподіленими поляризованими по товщині трансверсально-ізотропними сенсорами із врахуванням впливу дисипативного розігріву представлена в [3]. Основні співвідношення виведені на основі гіпотез Кірхгофа-Лява, доповнених адекватними їм гіпотезами відносно розподілу електричних польових величин по товщині пластини. Пасивні шари можуть бути металічними, полімерними або композитними. Дисипативні властивості матеріалів пасивних і п'єзоактивних шарів враховуються на основі концепції комплексних характеристик [1,2]. Кінематичні співвідношення між деформаціями та переміщеннями є лінійними. Розглянемо випадок згинних коливань пластини, яка складається з пасивного середнього шару товщиною h_0 , що лежить між верхнім та нижнім протилежно поляризованими п'єзоактивними шарами однакової товщини h_1 . Властивості цих п'єзошарів відрізняються тільки знаками п'єзоконстанти.

Рівняння енергії, яке описує дисипативний розігрів, для згинних коливань має вид:

$$\lambda_{11}\theta_{,xx} + \lambda_{22}\theta_{,yy} - (2\delta/h)\theta + W/h = 0, \quad (1)$$

де

$$\begin{aligned} \theta &= T - T^0, \quad \delta = (\alpha_3 + \alpha_4)/2, \\ T^0 &= (\alpha_3\theta_3 + \alpha_4\theta_4)/(\alpha_3 + \alpha_4); \end{aligned}$$

α_3, α_4 — коефіцієнти теплообміну на поверхнях $z = \pm h/2$ із зовнішнім середовищем з температурами θ_3, θ_4 ; λ_{ij} — коефіцієнти теплопровідності. В (1) дисипативна функція W для згинних коливань розраховується по спрощеній формулі:

$$W = \frac{\omega}{2} [(M_1''\chi_1' - M_1'\chi_1'') + (M_2''\chi_2' - M_2'\chi_2'') + 2(H_1''\chi_{12}' - H_1'\chi_{12}'')].$$

Спрощене у випадку згинних коливань визначальне рівняння для індукції [3] приймає вигляд:

$$\frac{D_3}{\gamma_{33}} = -\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\gamma_{31}}{\gamma_{33}} [z(\kappa_1 + \kappa_2)]. \quad (2)$$

Якщо внутрішні електроди відсутні, то згідно з наведеними вище гіпотезами:

$$D_3 = C(\alpha, \beta) = \gamma_{33}E_\gamma + \gamma_{31}(\varepsilon_x + \varepsilon_y). \quad (3)$$

Для розімкнутих електродів при згинних коливаннях з (3) маємо:

$$C(\alpha, \beta) = \frac{w_{11}}{v_{10}} (\kappa_1 + \kappa_2). \quad (4)$$

Для пасивного шару покладемо: $\gamma_{31} = 0$. При цьому:

$$E_3 = \frac{C(x, y)}{\gamma_{33}(z)} - \frac{\gamma_{31}(z)}{\gamma_{33}(z)} [z(\kappa_1 + \kappa_2)]. \quad (5)$$

Підставляючи (5) у подані в [3] спрощені рівняння, одержимо спрощені вирази для напружень. Після їх інтегрування по товщині отримаємо рівняння стану для зусиль та моментів. При дії на пластину рівномірного поверхневого тиску, що змінюється з часом за гармонічним законом, термомеханічна поведінка ізотропної пластини описується нелінійною системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial x^2} [D(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2})] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} [D(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2})] + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [2(1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}] - (\gamma h) \omega^2 w - p_0(x, y) = 0. \\ &\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{2\alpha}{(\lambda h)} (T - T_C) + \frac{\omega E''(T) h^3}{24(1-\nu^2)(\lambda h)} \times \left\{ \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} \right)^2 + \right. \\ &+ \left(\frac{\partial^2 w''}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w''}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial^2 w''}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w''}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w''}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \Big\} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Тут $D = D' + iD''$ — комплексна згинна жорсткість; ρ — густина матеріалу; ω — частота

коливань; якщо нехтувати впливом п'єзошарів на згинну жорсткість, то $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, E, ν — комплексні модуль і коефіцієнт Пуасона; T — температура дисипативного розігріву; α — коефіцієнт теплообміну із зовнішнім середовищем з температурою T_C ; λ — коефіцієнт теплопровідності. До цієї системи рівнянь необхідно додати традиційні механічні та теплові граничні умови. Для розімкнутих електродів різницю потенціалів, яку показує сенсор при згинних коливаннях пластини, можна подати у вигляді:

$$V_S = \frac{h_1(h_0 + h_1) \int_{C_1 D_1}^{C_2 D_2} \frac{d_{31}}{s_{11}(1-\nu_S)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy}{2 \int_{C_1 D_1}^{C_2 D_2} \varepsilon_{33} (1 - k_p^2) dx dy}. \quad (7)$$

Якщо характеристики сенсора не залежать від температури, то вираз (7) набуває вигляду:

$$V_S = \frac{h_1(h_0 + h_1) k_p^2}{2S d_{31}(1 - k_p^2)} \int_{C_1 D_1}^{C_2 D_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy.$$

Для дослідження впливу температури дисипативного розігріву на ефективність роботи сенсора необхідно спочатку знайти показники сенсора без врахування впливу температури дисипативного розігріву, потім розв'язати нелінійні диференціальні рівняння типу (6) з граничними умовами, що відповідають шарнірному закріпленню торців, потім підставити знайдену температуру та прогин у представлені вище формули для показників сенсора у залежності від температури дисипативного розігріву. Використаємо варіаційний метод для розв'язку сформульованої вище задачі, так як різниця потенціалів є інтегральною характеристикою. Орієнтуючись на вимушені коливання на першій резонансній частоті, вибираємо стандартний для шарнірного закріплення торців пластини вираз для прогину:

$$w = A \sin k_1 x \sin p_1 y, \quad k_1 = \frac{\pi}{a}, \quad p_1 = \frac{\pi}{b}. \quad (8)$$

Якщо на контурі задана постійна температура T_C , апроксимацію температури вибираємо так:

$$\theta = T - T_C = \theta_0 \sin k_1 x \cdot \sin p_1 y.$$

З використанням варіаційного методу та методу Бубнова-Гальоркіна [2], знайдемо:

$$\theta_0 = \frac{8\omega W_0^2 a^2}{(\lambda h) \pi^4} \cdot \frac{d_0 + \frac{2}{3} d_1 + \frac{1}{9} d_2}{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{2\alpha a^2}{\lambda h \pi^2}}. \quad (9)$$

Максимальний розігрів буде мати місце в центрі пластини, так що при постійній температурі на контурі максимальна температура $\theta_{\max} = \theta_0$.

Якщо властивості п'єзоматеріалу не залежать від температури, то для заряду одержимо [3]:

$$Q = - \frac{w_{11}}{v_{10}} \iint_{(S)} (\kappa_1 + \kappa_2) dx dy. \quad (10)$$

З цієї формули видно, що дисипативний розігрів впливає на величину заряду і у випадку, коли властивості п'єзоматеріалу не залежать від температури, так як дисипативний розігрів впливає на амплітуду коливань (амплітуда у виразі (10) з'являється тільки у чисельнику). Користуючись формулою (10), легко показати, що при розміщенні центра сенсора розмірами $c \times d$ у точці в центрі пластини має місце формула:

$$Q = \frac{(k_1^2 + p_1^2) w_{11}}{k_1 p_1 v_{10}} A \sin^2 \left(\frac{\pi l}{2L} \right). \quad (11)$$

Звідси слідує, що робота сенсора буде найбільш ефективною при повному покритті, при умові збігу центра актуатора з центром пластини.

Якщо враховується тільки залежність від температури властивостей пасивного матеріалу, а властивості п'єзоматеріалу залежать від осередненої по площі температури, то з представлених вище формул одержуємо, що для короткозамкнутих електродів:

$$K_{S1} = \frac{|V_S(\theta^0 C)|}{|V_S(20^0 C)|} = \frac{\gamma_{31}(\theta^0 C)}{\gamma_{31}(20^0 C)} \cdot \frac{|A(\theta^0 C)|}{|A(20^0 C)|}, \quad (12)$$

а для розімкнутих електродів:

$$K_{S2} = \frac{\gamma_{33}(20^0 C)}{\gamma_{33}(\theta^0 C)} \cdot K_{S1}. \quad (13)$$

Якщо ж від температури залежать тільки властивості пасивного матеріалу, то

$$K_S = K_{S1} = K_{S2} = \frac{|A(\theta^0 C)|}{|A(20^0 C)|}. \quad (14)$$

Для розрахунку цих коефіцієнтів необхідно при заданому навантаженні розрахувати температуру дисипативного розігріву шляхом розв'я-

зання представлених [3] кубічних рівнянь, знайти осереднену по площі температуру, розрахувати величини, які фігурують у коефіцієнтах K_{S1} , K_{S2} , та побудувати графіки залежності цих коефіцієнтів від амплітуди механічного навантаження. Штрихові лінії відповідають випадку, коли властивості п'єзоматеріалу не залежать від температури, а суцільні – випадку, коли вони залежать від осередненої по площі температури. Як видно з цих графіків, при врахуванні залежності властивостей пасивного матеріалу від температури у широкому діапазоні значень параметра навантаження показники сенсора погіршуються.

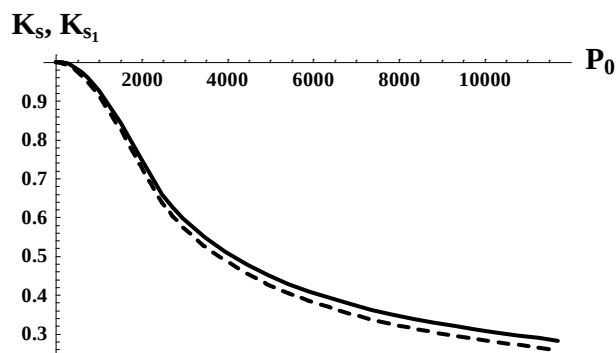


Рис.1 Залежність K_{S1} від параметра навантаження

Для введення додаткового демпфірування вимушених коливань прикладена до актуатора різниця потенціалів V_A пропорційна швидкості зміни різниці потенціалів сенсора V_S :

$$V_A = -G_S \dot{V}_S. \quad (15)$$

Список використаних джерел

1. Карнаухов В. Г. Электротермовязкоупругость: Механика связанных полей в элементах конструкций / В.Г. Карнаухов, И.Ф. Киричок. – Киев: Наукова думка, 1988. – Т. 4. – 320 с.
2. Карнаухов В. Г. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении / В. Г. Карнаухов, В. В. Михайленко. – Житомир: ЖТТУ, 2005. – 428 с.
3. Карнаухова Т. В. Основные соотношения термомеханики неупругих тонких пассивных пластин с распределенными сенсорами при моногармоническом нагружении / Т. В. Карнаухова, Е. В. Пятецкая // Прикл. механика. – 2009. – 45, № 6. – С. 100–112.

При відповідному виборі коефіцієнта оберненого зв'язку G_S вплив температури дисипативного розігріву, а також вплив нелінійності суттєво зменшується (Рис.2).

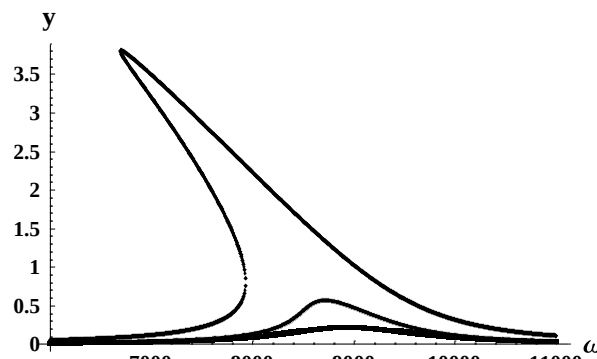


Рис.2 Температурно-частотна характеристика для залежних від температури властивостей при $\alpha = 0,5 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{град.}$

Висновки

Розглянуто задачу про вплив температури дисипативного розігріву на показники сенсора при вимушених згинних резонансних коливаннях тонкої в'язкопружної шарнірно закріпленої прямокутної пластини, враховуючи залежність властивостей матеріалів від температури. Подано числові результати, що ілюструють вплив температури дисипативного розігріву на ефективність роботи сенсора при резонансних коливаннях пластини.

References

1. KARNAUKHOV, V. and KIRICHOK, I. (1988). *Electrotermovязкоупругость: Mekhanika svyazannykh poley v elementakh konstruktsiy*. 4. Kiev: Naukova dumka.
2. KARNAUKHOV, V. and MIKHAILENKO, V. (2005) *Nelineynaya termomekhanika piezoelektricheskikh neuprugikh tel pri monogarmonicheskom nagruzhenii*. Zhitomir: ZhTTU.
3. KARNAUKHOVA, T. (2009) Osnovnyie sootnosheniya neuprugikh tonkikh passivnykh plastin s raspredelennymi sensorami pri monogarmonicheskom nagruzhenii . *Prikladnaya mekhanika*. 45 (6). p. 100–112.

Надійшла до редколегії 15.09.2017

УДК 531.7 : 621.762

Рево С. Л.¹, д.ф.-м.н., проф.,
Мельниченко М. М.¹, к.ф.-м.н., с.н.с.,
Силенко П. М.², к.т.н.,
Іваненко К.О.¹, к.ф.-м.н.,
Андрущенко В.О.¹, пров. інж.,
Шевченко І. П.¹, пров. інж.

Визначення напруження початку пластичної течії нанокмпозиційних матеріалів методом мікроіндентування

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова, 4д,
e-mail: revo@univ.kiev.ua

² Інститут проблем матеріалознавства імені
І.М.Францевича, 03142, м. Київ, вул.
Кржижанівського, 3.

S. L. Revo¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
M. M. Melnichenko¹, Ph.D. (Phys.-Math.),
P. M. Sylenko², Ph.D.,
K. O. Ivanenko¹, Ph.D. (Phys.-Math.),
V.O. Andruschenko¹,
I. P. Shevchenko¹.

Determination of the stress of the beginning of the plastic flow of nanocomposite materials by microindentation

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: revo@univ.kiev.ua

² Frantsevich Institute for Problems of Materials
Science NAS of Ukraine, 03142, Kyiv,
Krzhyzhanivskogo st., 3.

Розглянуто структуру оброблених у кульковому планетарному млині сумішей порошків (компонент) нанокмпозицій з заліза та багатостінних вуглецевих нанотрубок (10, 20 і 30 об. %) та визначена мікротвердість одержаних з них нанокмпозицій. Показано, що в залежності від складу та часу обробки в нанокмпозиціях можуть утворюватись карбіди Fe_3C , Fe_7C_3 , Fe_5C_2 , а одержаний з сумішей матеріал має підвищені фізико-механічні характеристики. Крім того, показано, що для одержаних скмпонованих зразків за допомогою метода кінетичної твердості можна визначати конкретні значення початку пластичної деформації і оцінювати границю міцності зразків при розтягуванні.

Ключові слова: залізо, вуглецеві нанотрубки, механо-хімічна активізація, мікротвердість, пружність.

*The structure of powders mixtures of iron and multi-walled carbon nanotubes (10, 20 and 30 vol.%) after their mixing in a ball planetary mill was studied and the microhardness of such nanocomposites obtained from this components was determined. The structure and morphology of the samples of obtained nanocomposite material were investigated using scanning electron microscopy, transmission electron microscopy and X-ray diffractometry. It was shown that depending on content and processing time of the composition the Fe_3C , Fe_7C_3 and Fe_5C_2 carbides have been formed and the mechanical characteristics of the obtained materials have been increased. The analysis of the obtained data shows that the process of mechanochemical treatment of the iron and multi-walled carbon nanotubes mixture in a planetary mill is likely to occur in three stages. Practically important physical-mechanical characteristics of nanocomposite material, in particular microhardness, are obtained When measuring PMT-3 micro-meter (Vickers method), the value of microhardness for all samples is higher than the values obtained on the Micron-gamma device (kinetic hardness method). It was also shown that the kinetic hardness method can be used for both the determination the specific values of the plastic deformation and the estimation of the tensile strength of the samples. Based on the obtained results, the dependences of the values of strength limit on the microhardness for the armko-iron and Fe_3C samples were calculated and constructed. In particular, for armko-iron *спп*, when the applied load is changed from 300 g to 80 g, the boundary of proportionality varies from 0,34 to 0,59 GPa, and for samples Fe_3C - from 0,65 to 2,2 GPa.*

Key Words: iron, carbon nanotubes, mechano-chemical activation, microhardness, elasticity.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Використання механо-хімічної активації порошків металів, а також їх сумішей у планетарних млинах відкриває широкі перспективи для створення нових наноконпозиційних матеріалів (НКМ). Характерним для такої активації є те, що після її використання для обробки сумішей змінюються морфологія частинок, їх розмір та фазовий склад. При цьому, властивості одержаних із сумішей наноконпозицій залежать як від природи взаємодії між фазами, так і від будови міжфазних областей, об'ємна доля яких у кінцевому продукті виявляється досить значною. Важливими, при цьому, є й процеси взаємного легування компонент НКМ у межах, які в рівноважних умовах є неможливими. Таке спостерігали, наприклад, для порошків заліза та міді, де практично нерозчинні у рівноважних умовах компоненти могли повністю розчинитися один в одному у процесі механо-хімічної активації [1]. З практичної точки зору цікавим є використання механо-хімічної активації для обробки композицій з карбідоутворюючих металів і графіту. Добре відомо, що серед таких композицій особливе місце займає система Fe-C, що є основною для виробництва чавуну і сталі. Автори роботи [2] успішно використали метод механо-хімічної активації (механічного легування) для одержання нанокристалічних сталевих порошків із суміші заліза і графіту. Твердість по Віккерсу НКМ, одержаних з цих порошків, сягає значень більше 10 ГПа. Встановлено, що твердість по Віккерсу, виготовленого із суміші заліза і графіту і скомпонованого після цього гарячим ізостатичним пресуванням НКМ, максимальна при концентрації вуглецю 6–7 об.% і залежить від кількості в ньому фази Fe₃C і інших графітових фаз [3]. В той же час в науковій літературі немає інформації про механічне легування заліза вуглецем у вигляді вуглецевих нанотрубок (ВНТ). Це, напевно, має місце через те, що перші спроби використання наповнювача у вигляді ВНТ виявилися невдалими: не було суттєвих покращень механічних властивостей спечених матеріалів [4].

Метою даної роботи було дослідження структури, фазового складу та мікротвердості наноконпозиційного матеріалу з заліза та багатостінних вуглецевих нанотрубок (БВНТ) та визначення напруження початку пластичної течії отриманого наноконпозиційного матеріалу.

Зразки і методи вимірів

БВНТ були синтезовані методом каталітичного хімічного осадження (CVD-метод) в реакторі,

що обертається. Параметри використаних нанотрубок наступні: середній діаметр – 10–20 нм, площа питомої поверхні (визначена за методом десорбції аргону) – до 400 м²/г, їх насипна густина – 20–40 г/дм³. Порошок заліза марки ПЖРЗ був отриманий методом розпилення розплаву водою високого тиску. Середній розмір поперечного перерізу частинок металу становив до 200 мкм. Суміші вихідних порошків Fe та БВНТ протягом різного часу – від 60 до 200 хв циклічно (час циклу 5 хв) обробляли в планетарному високоенергетичному кульковому млині. Температура робочої області у стаканах млина під час обробки не перевищувала 100°C. Швидкість обертання стаканів складає 1480 об/хв., прискорення – 50 g, а тиск на частинки речовини у стаканах ≈ 5 ГПа. Механо-активовані суміші порошків формували у прес-формі під тиском 30 ГПа, після чого відпалювали в середовищі аргону при температурі $T \leq 950^\circ\text{C}$ на протязі 30 хв. Для дослідження структури зразків було використано, як електронний мікроскоп JAMP-9500F виробництва фірми JEOL, так і трансмісійний електронний мікроскоп ПЕМ-125K. Для фазового аналізу та визначення кристалічної структури використовували рентгенівський дифрактометр ДРОН-4 (випромінювання CoK α) з оригінальним програмним пакетом.

Тестування на мікротвердість проводили для зразків у вигляді таблеток діаметром 6 мм і товщиною 5 мм, як статичним методом Віккерса (ПМТ-3), так і методом неперервного вдавлювання індентора (методом кінетичної твердості), який дозволяє одночасно реєструвати глибину проникнення індентора і навантаження (Мікрон-гамма). Випробування проводили мікроіндентометром Мікрон-гамма при навантаженнях в діапазоні від 20 до 300 г за схемою «навантаження - розвантаження» індентора (без витримки між циклами). Кожна серія уколів складалася з 15 послідовних вдавлювань індентора з кроком по площині поверхні зразків – 100 мкм. Визначення напруження початку пластичної течії виконувалося згідно розрахунків отриманих в [5].

Результати та їхнє обговорення

На рис. 1 зображено зовнішній вигляд БВНТ (рис. 1а) та частинок порошку заліза (рис. 1б). Якщо в початковому стані розмір поперечного перерізу (S) частинок Fe не перевищує 200 мкм, то вже після обробки у млині на протязі 60 хв середня величина S зменшується майже удвічі, а подальша обробка поряд з подрібненням

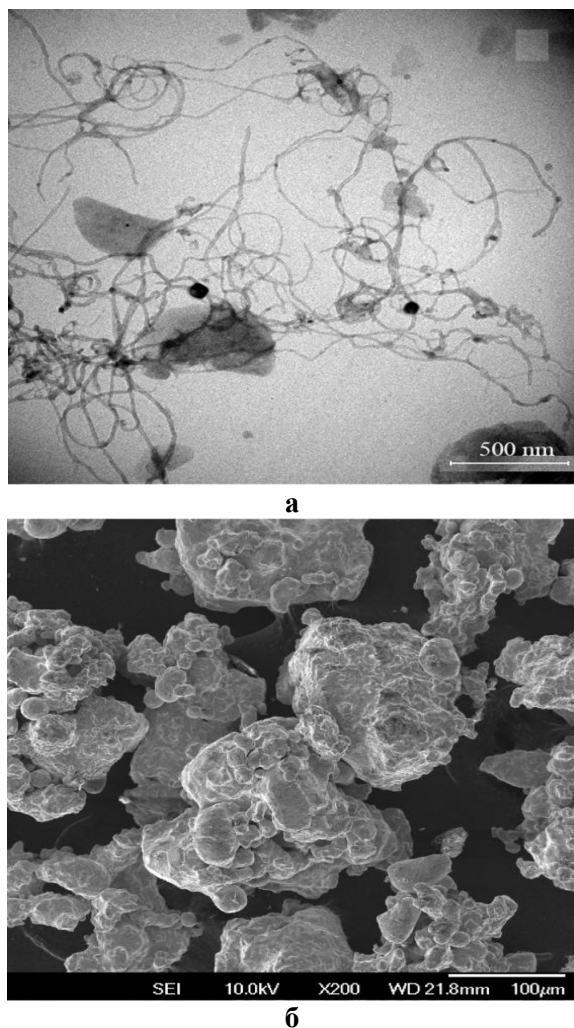


Рис. 1. Структура багатостінних вуглецевих нанотрубок (а) та вихідного порошку заліза (б)

частинок викликає і їх агломерацію за рахунок активації поверхні порошків. Для з'ясування впливу концентрації БВНТ на структуру і мікротвердість НКМ Fe-БВНТ були виготовлені композиції, у склад яких входило 10, 20 та 30 об % трубок. В цілому, аналіз одержаних даних показує, що процес механо-хімічної обробки суміші Fe-БВНТ у планетарному млині, скоріш за все, відбувається в три етапи. На першому етапі (до 60 хв. обробки) енергетичні затрати спрямовані, в основному, на руйнування частинок заліза вздовж границь зерен та їх подрібнення, що призводить до збільшення кількості дрібних частинок (зерен заліза) з великою реакційно-активною поверхнею. На другому етапі (тривалість механо-хімічної активації до 250 хв) відбувається конгломерація частинок і, внаслідок дифузії атомів з вуглецевих нанотрубок, поверхня заліза поступово насичується вуглецем, результатом чого є

утворення твердого розчину занурення. Пересичення цього твердого розчину сприяє зародженню в ньому карбідної фази за реакцією $\alpha\text{-(Fe, C)} + \text{БВНТ} \rightarrow \text{Fe}_3\text{C}$. В результаті цього кількість карбіду Fe_3C збільшується, а кількість $\alpha\text{-(Fe, C)}$ навпаки – зменшується. Третя стадія процесу полягає в тому, що процес карбідоутворення посилюється, але при певній

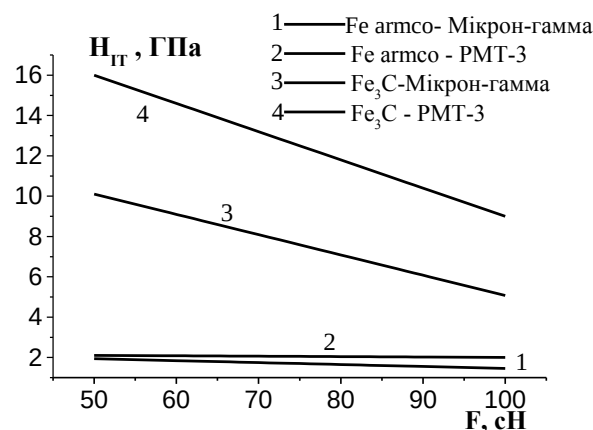


Рис. 2. Залежність мікротвердості від навантаження на індентор отриманої за допомогою приладу Мікрон-гамма та мікротвердоміра PMT-3

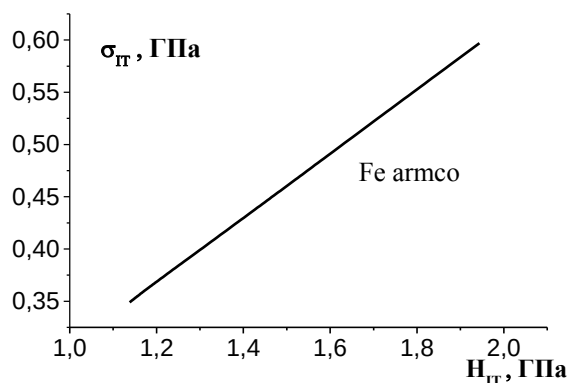


Рис. 3. Залежність границі міцності від мікротвердості для зразків армко-заліза

товщині півки Fe_3C , яка утворюється на поверхні заліза, починається її відлущення з розмежуванням продуктів реакції та островів залізних зерен.

Як склад розроблених НКМ, так і умови обробки компонент сумішей визначають у кінцевому випадку практично важливі фізико-механічні характеристики одержаних на їх основі НКМ, зокрема, мікротвердість.

Характерним є те, що отримані при вимірюваннях мікротвердоміром PMT-3 (метод

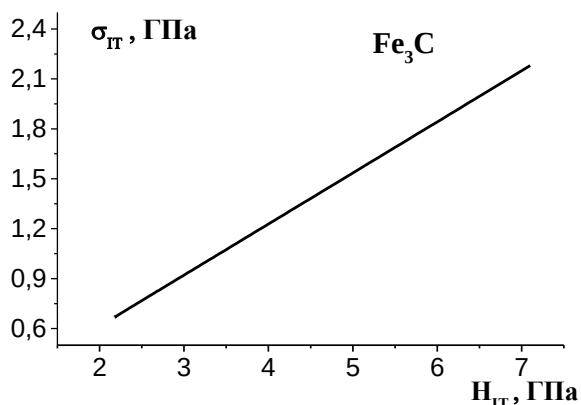


Рис. 4. Залежність границі міцності від мікротвердості для зразків Fe₃C

Віккерса) значення мікротвердості майже для всіх скомпонованих та спечених сумішей більші, ніж значення, отримані на приладі Мікрон-гамма (метод кінетичної твердості) рис. 2. За даними, отриманими на мікротвердомірі Мікрон-гамма при навантаженнях від 100 до 50 г мікротвердість

змінюється від 5 до 10 ГПа, а для ПМТ-3 мікротвердість змінюється від 10 до 16 ГПа. За отриманими результатами були обчислені і побудовані залежності значень границі міцності від мікротвердості для зразків армко-заліза і Fe₃C. Зокрема, для армко-заліза (рис. 3) σ_Г при зміні прикладеного навантаження від 300 г до 80 г границя пропорційності змінюється від 0,34 до 0,59 ГПа, а для зразків Fe₃C (рис. 4) – від 0,65 до 2,2 ГПа.

Таким чином, отримані результати дозволяють при кімнатній температурі без руйнування досліджуваного зразка визначити конкретні значення напруження початку пластичної деформації і відповідного напруження для крихких матеріалів і надтвердих покриттів, що недоступно для інших відомих методів випробування.

Публікація містить результати досліджень, проведених при грантовій підтримці Держаного фонду фундаментальних досліджень за конкурсним проектом № Ф76/79-2017.

Список використаних джерел

1. Boshko O.O. Effect of the carbon nanotubes on structure and magnetic properties of the Fe–Cu (4:1) composites / O.O Boshko, O. Nakonechna, M. Dashevskiy, K. Ivanenko, N. Belyavina, S. Revo // *Advanced Powder Technology*. – 2016. – 27 (4). – p.1101-1108.
2. Suryanarayana C. Mechanically Alloyed Nanocomposites / C. Suryanarayana, Nasser Al-Aqeeli // *Progress in Materials Science*. – 2013. – 58. – p.383-502.
3. Nowosielski R. Structure and properties of Fe-6,67 % C alloy obtained by mechanical alloying / R. Nowosielski, W. Pilarczyk // in: *Materials of 13th Int. Sci. Conf. of Achievements in Mechanical and Materials Engineering*. – 2005. – Gliwice, Poland, – 2005. – p.481-486.
4. Suryanarayana C. Mechanical alloying and milling / C. Suryanarayana // *Progress in Materials Science*. – 2001. – 46. – p.1-184.
5. Фирстов С.А. Определение величин деформации и напряжения начала пластического течения в материалах методом инструментального индентирования / С.А. Фирстов, В.Ф. Горбань, Э.П. Печковский // *Электронная микроскопия и прочность материалов: Сб. научн. тр.* — К.: ИПМ НАН України, 2012. — Вип. 18. — с. 75-84.

References

1. BOSHKO, O. O., NAKONECHNA, O., DASHEVSKYI, M., IVANENKO, K., BELYAVIN, A. N. and REVO, S. (2016) Effect of the carbon nanotubes on structure and magnetic properties of the Fe–Cu (4:1) composites. *Advanced Powder Technology*. 27 (4). p.1101–1108.
2. SURYANARAYANA, C. and NASSER, AL-AQEELI (2013) Mechanically Alloyed Nanocomposites. *Progress in Materials Science*. 58. p.383–502.
3. NOWOSIELSKI, R. and PILARCZYK, W. (2005) Structure and properties of Fe-6,67 % C alloy obtained by mechanical alloying. in: *Materials of 13th Int. Sci. Conf. of Achievements in Mechanical and Materials Engineering*. Gliwice. Poland. pp. 481-486.
4. SURYANARAYANA, C. (2001) Mechanical alloying and milling. *Progress in Materials Science*. 46. p.1–184.
5. FIRSTOV, S.F., GORBAN', V.F. and PECHKOVSKI, A.P. (2012) Opredelenie velichin deformatsii i napryasheniya nachala plasticheskogo techeniya v materialah metodom instrumental'nogo indentirovaniya. *Elektronnaja mikroskopiya i prochnost' materialov*: Kiev: IPM NAN Ukrainy. 18. p. 75-84.

Надійшла до редколегії 20.09.17

УДК 539.3

Реут А. В., науковий співробітник,
Реут О. В., старший викладач.

**Антиплоска задача для чверть
площини, що послаблена довільно
орієнтованою тріщиною**

Одеський національний університет імені
І. І. Мечникова, 65082, м. Одеса, вул.
Дворянська, 2,
e-mail: reut@onu.edu.ua

A. V. Reut,
O. V. Reut.

**The anti-plane problem for a quarter plane
which is weakened by the arbitrary oriented
crack**

Odessa I. I. Mechnikov National University, 65082,
Odessa, Dvoryanskaya str., 2,
e-mail: reut@onu.edu.ua

Антиплоску задачу для чверть площини, що послаблена довільно орієнтованою тріщиною, за допомогою методу інтегральних перетворень зведено до розв'язання відомого інтегрального рівняння. Цей підхід може бути застосовано і до випадку криволінійної тріщини та допускає узагальнення для задач згину та плоских задач теорії пружності.

Ключові слова: антиплоска задача, чверть площини, довільно орієнтована тріщина.

The anti-plane problem for a quarter plane, one side of which is fixed and the other is free, with arbitrary oriented crack was reduced to the known singular integral equation on the finite interval with the help of the integral transformation method. The obtained equation allowed the effective approximate solution by the use of the orthogonal polynomials method when the unknown function was expanded in series by the Chebyshev polynomials of the second kind. The complexity of the case when the crack is arbitrary oriented is associated with the necessity of the changing of the integration and differentiation orders when the integrand and its first derivative have breaks. This approach generalizes the G. Ya. Popov's method of solving of the elasticity problems for the areas with the crack-type defects and the rigid inclusions in the case of the defects which fit in the coordinate system. The proposed approach can be used in the case of the curvilinear crack and this approach allows generalization for the more complex problems of the plate's bending and the plane elasticity problems including the problems in the axisymmetric case, for the crack-type defects and rigid inclusions.

Key Words: anti-plane problem, quarter plane, arbitrary oriented crack.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Одним з ефективних методів розв'язання задач про концентрацію напружень біля кінців дефектів типу тріщин та тонких включень є метод інтегральних перетворень [1], що застосовується, якщо середня лінія дефекту співпадає з координатною лінією чи поверхнею. Таким способом розв'язувались задачі у роботах Г.Я. Попова та його учнів [1-4], В.А. Александрова і С.М. Мхітаряна [5], А.Ф. Улітка [7], а також інших авторів [7-8]. Однак застосування цього методу у випадку довільно орієнтованого дефекту викликає труднощі, що пов'язані з необхідністю заміни порядку інтегрування та диференціювання при наявності розривів підінтегральної функції та її похідної. У роботі [9] був запропонований підхід, що дозволяє розв'язати цю проблему.

У даній роботі проведено реалізацію цього підходу на прикладі антиплоскої задачі для

чверть площини, один край якої закріплений, а інший вільний. У середині області розташована довільно орієнтована прямолінійна тріщина. До берегів тріщини прикладене зсувне навантаження.

Варто відмітити, що якщо тріщина паралельна до однієї з граней чверть площини чи лежить на промені на дузі кола з центром у початку координат, то за допомогою методу інтегральних перетворень (Фур'є чи Мелліна) проблема зводиться до розв'язання сингулярного інтегрального рівняння на скінченному проміжку, що допускає ефективне наближене розв'язання, наприклад, методом ортогональних поліномів.

1. Математично поставлена задача еквівалента відшукуванню розв'язку гармонічного рівняння

$$\Delta w(x, y) = 0 \quad (1)$$

в області $\Omega = \{(x, y) : x \in (-l, \infty), y \in (0, \infty)\} /$
 $/ \{(x, y) : y = \varphi(x), |x| < 1\}, l > 1$

що задовольняє граничним умовам

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=-l} = 0, \quad w, \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad (2)$$

$$w|_{y=0} = 0, \quad w, \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad (3)$$

та умовам на тріщині

$$\left. \frac{\partial w}{\partial \nu} \right|_{y=\varphi(x) \pm 0} = f(x), |x| < 1 \quad (4)$$

у класі функцій, що є двічі неперервно диференційованими всередині області та неперервно диференційованими аж до межі

$$w(x, y) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) \quad (5)$$

що володіють в особливих точках $(-1, \alpha_-)$ і $(+1, \alpha_+)$ асимптотикою

$$w(x, y) = O(r_{\pm}^{1/2}), r_{\pm} \rightarrow 0, r_{\pm} = \sqrt{(x \pm 1)^2 + (y - \alpha_{\pm})^2} \quad (6)$$

Тут $y = \varphi(x) > 0$ - деяка крива, причому $\varphi(x)$ є двічі неперервно диференційована функція на $(-1, 1)$, яку без обмеження загальності будемо вважати лінійною

$$\varphi(x) = k(x+1) + b, \quad (7)$$

$w(x, y)$ - переміщення вздовж вісі z під дією навантаження $f(x)/G$, G - модуль зсуву, $f(x)$ - деяка функція.

Позначимо через s дотичний напрямок до кривої $y = \varphi(x)$, що утворює з віссю Ox кут, рівний $\alpha(x)$, ν - нормальний напрямок до $\varphi(x)$.

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} &= \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \varphi(x) \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \nu} &= -\sin \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2}} \left(-\varphi'(x) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

З постановки задачі слідую

$$\langle w(x, y) \rangle \Big|_{y=\varphi(x)} = \chi(x), \left\langle \frac{\partial w}{\partial \nu}(x, y) \right\rangle \Big|_{y=\varphi(x)} = 0 \quad (9)$$

Тут

$$\langle \Phi(x, y) \rangle \Big|_{y=\varphi(x)} = \Phi(x, \varphi(x) - 0) - \Phi(x, \varphi(x) + 0).$$

Невідома функція $\chi(x)$, що введена, при $|x| < 1$ є неперервною, що тотожно рівна нулю при $|x| > 1$ та володіє у силу (6) асимптотикою

$$\chi(x) = O(\sqrt{1-x^2}), x \rightarrow \pm 1 \quad (10)$$

2. Застосуємо до поставленої задачі (1-6) півнескінченне синус-перетворення Фур'є

$$w_{\lambda}(x) = \int_0^{\infty} w(x, y) \sin \lambda y dy \quad (11)$$

$$w(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} w_{\lambda}(x) \sin \lambda y d\lambda$$

Для цього помножимо обидві частини рівняння (1) на $\sin \lambda y$ та проінтегруємо за змінною y у межах від 0 до ∞

$$0 = \left(\int_0^{\varphi(x)-0} + \int_{\varphi(x)-0}^{\varphi(x)+0} + \int_{\varphi(x)+0}^{\infty} \right) \Delta w(x, y) \sin \lambda y dy \quad (12)$$

Відмітимо, що в силу (5) та абсолютної неперервності інтегралу Лебега

$$\int_{\varphi(x)-0}^{\varphi(x)+0} \Delta w(x, y) \sin \lambda y dy = 0 \quad (13)$$

Як показано в [1] за допомогою інтегрування по частинам

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{\varphi(x)-0} + \int_{\varphi(x)+0}^{\infty} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin \lambda y dy &= \left\langle \frac{\partial w}{\partial y} \right\rangle \Big|_{y=\varphi(x)} \sin \lambda \varphi - \\ - \lambda \langle w \rangle \Big|_{y=\varphi(x)} \cos \lambda \varphi - \lambda^2 w_{\lambda}(x) \end{aligned} \quad (14)$$

Для перетворення $\partial^2 w / \partial x^2$ скористаємось результатом роботи [9], в якій показано, що для будь-якої кусково-гладкої функції $\Phi(x, y)$ справедлива формула

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, y) dx &= \frac{d^2}{dx^2} \int_a^b \Phi(x, y) dx - \\ - \varphi'(x) \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\rangle \Big|_{y=\varphi(x)} &- \frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi'(x) \langle \Phi(x, y) \rangle \Big|_{y=\varphi(x)} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

де $y = \varphi(x)$ - крива, при переході через яку функція $\Phi(x, y)$ та її часткові похідні терплять стрибки.

Отримаємо

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin \lambda y dy = - \left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle \Big|_{y=\varphi(x)} \varphi'(x) \sin \lambda \varphi - \frac{d}{dx} [\varphi'(x) \cos \lambda \varphi(x)] + w''_{\lambda}(x) \quad (16)$$

Складаючи (14), (13) та (16) маємо, враховуючи (8),

$$\int_0^\infty \Delta w(x, y) \sin \lambda y dy = \left\langle \frac{\partial w}{\partial \nu} \right\rangle \Big|_{y=\varphi(x)} \sin(\lambda \varphi(x)) - \frac{d}{dx} [\varphi'(x) \chi(x) \cos(\lambda \varphi(x))] - \chi(x) \lambda \cos(\lambda \varphi(x)) + w''_{\lambda}(x) - \lambda w_{\lambda}(x) = 0 \quad (17)$$

Застосовуючи перетворення (11) до граничних умов (2) приходимо до одновимірної задачі

$$w''_{\lambda}(x) - \lambda w_{\lambda}(x) = \frac{d}{dx} [\varphi'(x) \chi(x) \cos(\lambda \varphi(x))] - \chi(x) \lambda \cos(\lambda \varphi(x)) \quad (18)$$

$$w'_{\lambda}|_{x=-l} = 0; \quad w_{\lambda}, w'_{\lambda}|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

Тут $\chi(x)$ - невідома функція – суть стрибок шуканої функції $w(x, y)$ при переході через криву $y = \varphi(x)$. Відносно $\varphi(x)$ поки що передбачається, що вона двічі неперервно диференційована.

3. Розв'язок одновимірної крайової задачі (18) будемо за допомогою функції Грина

$$G_{\lambda}(x, \xi) = \Phi_{\lambda}(x - \xi) + \Phi_{\lambda}(x + \xi - 2l), \quad (19)$$

$$\Phi_{\lambda}(x) = -(2\lambda)^{-1} \exp(-\lambda|x|)$$

Тоді розв'язок одновимірної крайової задачі (18) можна записати у вигляді

$$w_{\lambda}(x) = - \int_{-1}^1 \chi(\xi) \left\{ \varphi'(\xi) \sin(\lambda \varphi(\xi)) \frac{\partial G_{\lambda}}{\partial \xi}(x, \xi) + \lambda \cos(\lambda \varphi(\xi)) G_{\lambda}(x, \xi) \right\} d\xi \quad (20)$$

Використовуючи відомі інтеграли

$$\int_0^\infty \sin(\lambda B) e^{-\lambda A} d\lambda = \frac{B}{A^2 + B^2}, \quad (21)$$

$$\int_0^\infty \cos(\lambda B) e^{-\lambda A} d\lambda = \frac{A}{A^2 + B^2}$$

після обернення перетворення Фур'є отримаємо подання розв'язку крайової задачі (1-8) у вигляді

$$w(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \chi(\xi) \left\{ \frac{-\varphi'(\xi)(x - \xi) + [y - \varphi(\xi)]}{(x - \xi)^2 + [y - \varphi(\xi)]^2} - \frac{-\varphi'(\xi)(x - \xi) + [y + \varphi(\xi)]}{(x - \xi)^2 + [y + \varphi(\xi)]^2} + \frac{\varphi'(\xi)(x + \xi - 2l) + [y - \varphi(\xi)]}{(x + \xi - 2l)^2 + [y - \varphi(\xi)]^2} + \frac{\varphi'(\xi)(x + \xi - 2l) + [y + \varphi(\xi)]}{(x + \xi - 2l)^2 + [y + \varphi(\xi)]^2} \right\} d\xi \quad (22)$$

Функція (22) задовольняє усім граничним умовам задачі (1-8), окрім умови (4). Реалізувавши його, отримаємо інтегральне рівняння для знаходження функції $\chi(x)$. Відмітимо, що до цього моменту функція $y = \varphi(x)$ була довільною двічі неперервно диференційованою функцією. Щоб не загроможувати розв'язання на цьому етапі, без обмеження загальності, будемо передбачати, що $\varphi(x)$ - лінійна функція

$$\varphi(x) = k(x + 1) + b, \varphi'(x) = k, \varphi''(x) \equiv 0 \quad (23)$$

В результаті отримаємо сингулярне інтегральне рівняння на скінченному інтервалі відносно $\chi(x)$ - невідомого стрибка переміщень на тріщині

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \chi(\xi) \ln \frac{1}{|x - \xi|} d\xi + \int_{-1}^1 \chi(\xi) R(x, \xi) d\xi = \quad (24)$$

$$= (1 + k^2)^{-1/2} f(x), \quad |x| < 1$$

де нескінченно диференційована на $(-1, 1)$ функція $R(x, \xi)$ допускає уявлення

$$R(x, \xi) = T(x - \xi, kx + k\xi + 2k + 2b) - T(x + \xi + 2l, kx - k\xi) - T(x + \xi + 2l, kx + k\xi + 2k + 2b)$$

$$T(x, y) = - \frac{1}{2\pi} \frac{(k^2 - 1)(y^2 - x^2) + 2kxy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Таке рівняння відомо [2]. Воно допускає ефективне наближене розв'язання методом ортогональних поліномів.

4. Таким чином антиплоска задача для чверть площини, що послаблена довільно орієнтованою тріщиною, зводиться до сингулярного

інтегрального рівняння відомого типу, що допускає ефективне наближене розв'язання.

Цей метод можна застосовувати до задач згину та плоских задач теорії пружності.

Робота виконана у рамках держбюджетної теми 0115U003211.

Список використаних джерел

References

1. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – Москва: Наука, 1982. – 344 с.
2. Vaysfel'd N. The axisymmetric contact interaction of an infinite elastic plate with an absolutely rigid inclusion / N. Vaysfel'd, G. Popov, V. Reut // *Acta Mechanica*. – 2015. – Vol. 226, Issue 3. – P. 797-810.
3. Реут В. В. Неразрезная полосовидная пластинка, ослабленная трещиной / В. В. Реут, С. Т. Роговский // *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичних наук*. – 2013. – Т. 33. – С. 213-219.
4. Vaysfel'd N. On the stress investigation at the edge of the fixed elastic semi-strip / N. Vaysfel'd, O. Kryvyi, Z. Zhuravlova // *Frattura ed Integrità Strutturale*. – 2016. – Vol. 38. – P. 1-11. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.38.01
5. Александров В. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками / В. М. Александров, С. М. Мхитарян. – Москва: Наука, 1983. – 487 с.
6. Александров В. М. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах / В. М. Александров, Б. И. Сметанин, Б. В. Соболев. – Москва: Физматгиз, 1993. – 224 с.
7. Кунец Я. И. Осесимметричное кручение пространства с тонким дискообразным включением / Я. И. Кунец // *ПММ*. – 1986. – Т. 50, № 4. – С. 638-645.
8. Поддубняк А. П. Осесимметричное кручение пространства с тонким упругим включением / А. П. Поддубняк // *ПММ*. – 1986. – Т. 50, № 4. – С. 644-650.
9. Реут В. Обобщенная схема метода интегральных преобразований при наличии криволинейного дефекта / В. Реут, Е. Реут // *The problems of dynamics of interaction of deformable media. Proceeding of VIII International Conference, 22-24 September 2014, Coris-Stepanakert*. pp. 364-368.
10. POPOV, G. Ya. (1982) *Koncentraciya Uprugih Napryazheniy Vozle Shtampov, Razrezov, Tonkih Vkluyucheni i Podkrepliniy*. Moskva: Nauka.
11. VAYSFEL'D, N., POPOV, G. & REUT, V. (2015) The axisymmetric contact interaction of an infinite elastic plate with an absolutely rigid inclusion. *Acta Mechanica*. 226, 3. P. 797-810.
12. REUT, V. V. & ROGOVSKIY, S. T. (2013) Nerazreznaya polosovidnaya plastinka, oslablen-naya treshinoy. *Visnik Kyivskogo nazionalnogo universitetu imeni Tarasa Shevchenka. Seriya fiziko-matematichnih nauk*. 33. p. 213-219.
13. VAYSFEL'D, N., KRYVYI, O. and ZHURAVLOVA, Z. (2016) On the stress investigation at the edge of the fixed elastic semi-strip. *Frattura ed Integrità Strutturale*. 38. p. 1-11. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.38.01
14. ALEKSANDROV, V. M. and MHITARYAN, S. M. (1983) *Kontaktnie zadachi dlya tel s tonkimi pokritiyami i prosloykami*. Moskva: Nauka.
15. ALEKSANDROV, V. M., SMETANIN, B. V. and SOBOLEV, B. V. (1993) *Tonkie koncentratori napryazheniy v uprugih telah*. Moskva: Fizmatgiz.
16. KUNEZ, YA. I. (1986) Osесimmetrichnoe kruchenie prostranstva s tonkim diskoobraznim vkluyucheniem. *PMM*. 50, 4. p. 638-645.
17. PODDUBNYAK, A. P. (1986) Osесimmetrichnoe kruchenie prostranstva s tonkim uprugim vkluyucheniem. *PMM*. 50, 4. 644-650.
18. REUT, V. and REUT, E. (2014) Obobshchennaya shema metoda integralnih preobrazovaniy pri nalichii krivolineynogo defekta. In *The problems of dynamics of interaction of deformable media. Proceeding of VIII International Conference, 22-24 September 2014, Coris-Stepanakert*. pp. 364-368.

Надійшла до редколегії 15.09.17

УДК 539.3

Савельєва К. В.¹, к. ф.-м. н., доц.,
Сінчило С.В.¹, к. ф.-м. н.,
Симчук Я.В.², к. ф.-м. н.

Поперечні плоскі хвилі в наноккомпозитних матеріалах

¹ Інститут механіки ім.С.П.Тимошенка НАН
України, 03057 м. Київ, вул. П.Нестерова, 3,
e-mail: katerina1971s@gmail.com

² Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря
Сікорського», 03056, м.Київ, пр-т Перемоги,
37,
e-mail: yar_simchuk@ukr.net

K. V. Savelieva¹, Ph. D.(Phys.-Math.),
S. V. Sinchilo¹, Ph. D. (Phys.-Math.),
Y. V. Simchyk², Ph. D. (Phys.-Math.).

Transverse plane waves in nano-composite materials

¹S. P. Timoshenko Institute of Mechanics NAS of
Ukraine, 03057, Kyiv, P. Nesterov str., 3
e-mail: katerina1971s@gmail.com

²National Technical University of Ukraine
“I.Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, 03056, Kyiv,
Peremoghy pr.,37
e-mail: yar_simchuk@ukr.net

Теоретично досліджено взаємодію кубічно нелінійних пружних плоских гармонічних хвиль в матеріалі, нелінійні властивості якого описуються пружним потенціалом Мурнагана. Розв'язок, що описує взаємодію поперечних горизонтально та вертикально поляризованих хвиль, отримано за допомогою методу збурень. Описано перепомпуння енергії між різними типами поперечних хвиль. Прокоментовано результати чисельного аналізу для різних типів наноккомпозитних матеріалів.

Ключові слова: кубічна нелінійність, пружна плоска хвиля, метод збурень, наноккомпозитні матеріали, двохилюва взаємодія.

The theoretical study of cubically nonlinear plane harmonic waves is carried out for the hyperelastic material. Nonlinear properties of the material are described by Murnaghan elastic potential. Two-wave interaction of transverse harmonic waves is studied. The horizontally and vertically polarized transverse elastic plane waves interact during their propagation. Quadratically and cubically nonlinear wave effects are explored and described analytically. The interaction of transverse horizontal (TH-) and transverse vertical (TV-) harmonic waves is studied by means of perturbing method. Pumping of the energy between different types of transverse waves is described theoretically. Results of a numerical analysis for several types of nanocomposite materials are commented. As a result of nonlinear wave interaction, the wave profile changes and energy is transferred between different polarized transverse waves. The speed of these wave processes is affected by the concentration of the filler in the nanocomposite. They occur faster in materials with a high concentration of filler (nonlinearity increasing)

Key Words: cubic nonlinearity, elastic plane wave, transverse harmonic wave, transverse horizontal harmonic wave, transverse vertical harmonic wave, perturbing method, two- waves interaction, pumping of energy nanocomposite materials.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ. Постановка задачі

Предметом публікації є результати дослідження взаємодії горизонтально і вертикально поляризованих поперечних пружних плоских хвиль при їх поширенні в гіперпружному матеріалі. Деформування матеріалу описується нелінійною моделлю Мурнагана [1,6,7]. Представлення пружного потенціалу з урахуванням доданків четвертого порядку, як відомо [7], дозволяє досліджувати квадратично і кубічно нелінійні хвильові ефекти

в гіперпружних матеріалах [6,8,9]. Залежність вектора переміщень тільки від однієї просторової змінної x та часу t дає можливість подальшого запису повної системи рівнянь для плоских хвиль, що поширюються вздовж осі Ox . В рамках врахування квадратичної і кубічної нелінійностей у визначальних рівняннях, нелінійні хвильові рівняння мають вигляд

$$\rho u_{2,tt} - \mu u_{2,xx} = N_4 u_{2,xx} (u_{2,x})^2 + N_6 u_{2,xx} (u_{3,x})^2; \quad (1)$$

$$\rho u_{3,tt} - \mu u_{3,xx} = N_4 u_{3,xx} (u_{3,x})^2 + N_6 u_{3,xx} (u_{2,x})^2. \quad (2)$$

Для рівнянь (1), (2), у порівнянні з записом відповідних рівнянь руху [1,11], який дає можливість повного аналізу усіх хвиль і відповідних явищ у матеріалі (поширення поздовжніх, горизонтально та вертикально поляризованих поперечних хвиль), враховано специфіку поставленої у даному дослідженні задачі. Прийнято умову: спочатку на вході в середовище збуджуються тільки поперечні хвилі; поздовжні переміщення відсутні. Рівняння, що описують поширення поздовжньої хвилі не розглядаються, оскільки задача збудження поперечними хвилями поздовжньої хвилі була досліджена раніше [11].

У рівняннях (1) – (2) було використано стандартні позначення: ρ – стала густина, λ , μ – пружні сталі другого порядку (сталі Ламе), A , B , C – пружні сталі третього порядку (сталі Мурнагана),

$$N_4 = \frac{1}{2} [2(\lambda + 2\mu) + 5A + 14B + 4C];$$

$$N_6 = 3A + 10B + 4C.$$

Квадратично нелінійні доданки з правої частини рівнянь (1) – (2) використовувалися при постановці і розв'язанні трьох стандартних задач нелінійної акустики, що дало можливість дослідження нелінійних ефектів, що виникають при поширенні плоских хвиль [11].

Наявність у правій частині рівнянь (1),(2) кубічно нелінійних доданків створює нові, прокоментовані в роботі [11], можливості для опису хвильової картини. Зокрема, може бути вирішена сформульована в [11] «нова четверта стандартна задача. Вона полягає в завданні на вході в середовище однієї з поперечних хвиль і виявленні генерування іншої поперечної хвилі. Це забезпечують складові з коефіцієнтом N_6 ».

Зауважимо, що праві частини обох рівнянь кубічно нелінійні, а самі рівняння симетричні. Таким чином, на їх підставі може досліджуватися задача про одночасне поширення кубічно нелінійних поперечних хвиль двох видів: горизонтально і вертикально поляризованих.

У випадку збудження на границі середовища двох хвиль однакової частоти початкові і граничні умови мають вигляд

$$u_2(x, 0) = u_3(x, 0) = 0;$$

$$u_2(0, t) = u_2^0 \cos \omega t; u_3(0, t) = u_3^0 \cos \omega t. \quad (3)$$

На основі рівнянь (1)-(3) далі аналітично досліджується взаємодія цих хвиль.

2. Розв'язання рівнянь руху

Для розв'язання рівнянь (1), (2) скористаємося методом збурень [3,7,11]. Згідно з методом, переміщення представляються у вигляді

$$\vec{u} = \vec{u}^{(*)} + \vec{u}^{(**)} + \vec{u}^{(I^{***})} + \dots \quad (4)$$

Перше наближення – лінійне. Це розв'язок лінійних хвильових рівнянь, що відповідають (1), (2)

$$u_{2,tt}^{(*)} - v^2 u_{2,xx}^{(*)} = 0, \quad u_{3,tt}^{(*)} - v^2 u_{3,xx}^{(*)} = 0.$$

у вигляді гармонічних хвиль

$$u_n^{(*)}(x, t) = u_n^0 \cos(kx - \omega t), \quad n=2,3. \quad (5)$$

Тут ω – частота, k – хвильове число поперечної хвилі, $v = \sqrt{\mu / \rho}$ – її фазова швидкість, u_n^0 ($n=2,3$) – початкові постійні амплітуди відповідних переміщень.

Рівняння в другому наближенні набуває вигляду

$$u_{2,tt}^{(**)} - v^2 u_{2,xx}^{(**)} = \quad (6)$$

$$= \frac{1}{\rho} \left(N_4 u_{2,xx}^{(*)} (u_{2,x}^{(*)})^2 + N_6 u_{2,xx}^{(*)} (u_{3,x}^{(*)})^2 \right);$$

$$u_{3,tt}^{(**)} - v^2 u_{3,xx}^{(**)} = \quad (7)$$

$$= \frac{1}{\rho} \left(N_4 u_{3,xx}^{(*)} (u_{3,x}^{(*)})^2 + N_6 u_{3,xx}^{(*)} (u_{2,x}^{(*)})^2 \right).$$

Для розв'язання цих рівнянь треба: обчислити їх праві частини, виходячи з формул (5); за відомими правими частинами знайти частинний розв'язок рівнянь (6), (7) – він і буде розв'язком другого наближення; додаючи розв'язки першого і другого наближень, отримати розв'язок рівнянь (1), (2) з точністю до третього наближення.

Розв'язки рівнянь другого наближення отримано у вигляді:

$$u_2^{(**)}(x, t) = -\frac{1}{6} \frac{(u_3^0)^3 N_4 + u_2^0 (u_2^0)^2 N_6}{\mu \rho} x \sin 3(kx - \omega t),$$

$$u_3^{(**)}(x, t) = -\frac{1}{6} \frac{(u_2^0)^3 N_4 + u_3^0 (u_3^0)^2 N_6}{\mu \rho} x \sin 3(kx - \omega t).$$

І для SH-, і для SV- хвилі, це – чисті треті гармоніки, амплітуди яких залежать лінійно від фізичних сталих, кубічно нелінійно від амплітуд,

а також від пройденої хвилею відстані x . Слід зазначити, що в разі початкового збудження імпульсу з однаковою амплітудою для обох хвиль ці розв'язки збігаються: при

$$u_2^0 = u_3^0 = u_0 \quad (8)$$

Маємо

$$u_2^{(**)}(x, t) = u_3^{(**)}(x, t) = -\frac{1}{3} \frac{N_4 + N_6}{\mu \rho} (u_0^0)^3 x \sin 3(kx - \omega t).$$

Додаючи розв'язки першого і другого наближень, отримуємо розв'язання рівнянь (1), (2) з точністю до третього наближення у вигляді

$$u_2(x, t) = u_2^0 \cos(kx - \omega t) - \frac{k^3}{6\mu\rho} u_2^0 \left((u_2^0)^2 N_4 + (u_3^0)^2 N_6 \right) x \sin 3(kx - \omega t), \quad (9)$$

$$u_3(x, t) = u_3^0 \cos(kx - \omega t) - \frac{k^3}{6\mu\rho} u_3^0 \left((u_3^0)^2 N_4 + (u_2^0)^2 N_6 \right) x \sin 3(kx - \omega t). \quad (10)$$

У випадку ж (8):

$$u_2(x, t) = u_3(x, t) = u_0 \cos(kx - \omega t) - \frac{k^3}{3\mu\rho} (N_4 + N_6) (u_0^0)^3 x \sin 3(kx - \omega t).$$

3. Аналіз отриманих розв'язків

Було проведено числове дослідження отриманих розв'язків і відповідний аналіз результатів. Для обчислень було використано значення ефективних сталих для чотирьох типів нанокомпозитних матеріалів, відповідних до моделі Зпапо, з публікацій [10,11]. Складовими зазначених нанокомпозитів є: матриця, представлена в двох варіантах (N1 - суміш смоли Епон-828 і полістиролу, з м'якою характеристикою нелінійності; N2 - суміш смоли Епон-828 і скла-пирекс, з жорсткою характеристикою нелінійності), і наповнювач - вуглецеві нанотрубки двох різних типів (N1 - звивисті вуглецеві нанотрубки; N2 - хіральні вуглецеві нанотрубки). Характеристики та властивості матеріалів та їх складових представлені і детально описані в публікації [11], а також у книзі [10]. Розрізняються використані при дослідженні матеріали також об'ємним вмістом наповнювача. Дослідження проводилося для п'яти варіантів

концентрації наповнювача в чотирьох видах нанокомпозитів. Хвильові параметри $\omega = 1.0 \text{ МГц}$, $u_2^0 = u_3^0 = 1 \cdot 10^{-7} \text{ м}$, $k \approx 0,5 \cdot 10^6 \text{ 1/м}$ обиралися однаковими для всіх розглянутих варіантів матеріалу. Обґрунтування вибору значень цих величин також викладено в роботі [11].

Було побудовано графіки зміни профілю хвилі в залежності від просторової координати x : горизонтально поляризованої поперечної хвилі, згідно формулі (9); та для вертикально поляризованої поперечної хвилі, згідно (10). Амплітуда горизонтально поляризованої хвилі, що була задана початково малою в порівнянні з амплітудою вертикально поляризованої хвилі, при поширенні збільшується, зменшуючи при цьому амплітуду останньої. Це свідчить про перепомпвання енергії з більш потужної вертикальної поперечної хвилі до початково слабкої горизонтальної.

Крім того, досліджувалися хвилі у випадку (8). Як було показано вище, при цьому розв'язки для обох поперечних хвиль збігаються. Відповідно, збігаються і їх графіки. Це дає можливість аналізу змін форми хвильового профілю в залежності від фізичних властивостей матеріалу, зокрема, від об'ємного вмісту наповнювача нанокомпозиту. Таке дослідження було проведено для всіх вказаних вище двадцяти варіантів нанокомпозитів. З порівняння отриманих графіків є очевидним, що характер поширення поперечної хвилі змінюється в залежності від значення концентрації волокон у нанокомпозиті: процес перепомпвання енергії та спотворення профілів поперечних хвиль у матеріалах зі слабкою нелінійністю (низькою концентрацією наповнювача нанокомпозита) відбувається помітно повільніше, ніж у матеріалах з нелінійністю сильнішою. Взаємодія хвиль однакової амплітуди проявляється в спотворенні початкового профілю за рахунок зміни амплітуди, її зростання і збільшення частоти хвилі. При цьому швидкість і характер цього процесу залежить від вибору певного композитного матеріалу як середовища поширення хвиль.

4. Висновки

У роботі проаналізовано процес одночасного поширення двох поперечних хвиль різної поляризації в нанокомпозитних матеріалах. Загальний висновок з аналізу може бути сформульовано таким чином. При одночасному поширенні зазначених хвиль у нелінійному нанокомпозитному матеріалі відбувається

спотворення їх профілів. Внаслідок нелінійної хвильової взаємодії, хвилі поступово трансформуються у свої треті гармоніки. За умови різної початкової інтенсивності хвиль різної поляризації відбувається перепомпвання енергії з потужної хвилі в слабку. Причому зазначені процеси в матеріалах зі слабкою нелінійністю відбуваються помітно повільніше

Комп'ютерним моделюванням було виявлено основні ефекти спотворення початкових профілів

хвиль, під впливом другого та третього наближення, при одночасному поширенні поперечних хвиль різної поляризації. Основні ефекти було описано для різних матеріалів та різних початкових даних, проведено аналіз основних тенденцій – перепомпвання енергії між різними типами поперечних хвиль, і, таким чином, перемикання хвильового процесу з одної хвилі на іншу.

Список використаних джерел

1. Руцицький Я. Я. Хвилі в матеріалах з мікро-структурою / Я. Я. Руцицький, С. І. Цурпал. – Київ: Інст.механіки ім. С. П. Тимошенка, 1998. – 377 с.
2. Achenbach J. D. Wave Propagation in Elastic Solids / J. D. Achenbach. – Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1973. – 425 p.
3. Cattani C. Wavelet and Wave Analysis as Applied to Materials with Micro or Nanostructure / C. Cattani, J. J. Rushchitsky– Singapore-London: World Scientific, 2007. – 466 p.
4. Kratzer A. Transcendente Funktionen / A.Kratzer, W.Franz. – Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1960. – 466 S.
5. Olver F.W.J. Asymptotics and Special Functions / F.W.J. Olver. – New York: Academic Press, 1974. – 528 p.
6. Rushchitsky J. J. Nonlinear Elastic Waves in Materials / J. J. Rushchitsky. – Heidelberg: Springer, 2014. – 454 p.
7. Rushchitsky J. J. Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – derivation of wave equations. Plane strain state / J. J. Rushchitsky // Int. Appl. Mech. – 2005. – Vol. 41, № 5. – P. 701–712.
8. Rushchitsky J. J. Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – derivation of wave equations. Axisymmetrical and other states / J. J. Rushchitsky // Int. Appl. Mech. – 2005. – Vol. 41, № 6. – P. 831–840.
9. Rushchitsky J. J. Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – primary analysis of evolution / J. J. Rushchitsky // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 7. – P. 825 – 833.
10. Гузь А.Н. Введение в механику нанокомпозитов / А. Н. Гузь, Я. Я. Руцицкий, И. А. Гузь. – Київ: Академперіодика, 2010. – 398 с.
11. Rushchitsky J. J. On the Self-Switching Hypersonic Waves in Cubic Nonlinear Hyperelastic Nanocomposites // J. J. Rushchitsky // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, N 1. – P.73–93.

References

1. RUSHCHITSKY, J. J. and TSURPAL, S.I. (1998) *Hvili v Materialah z Mikrostrukturoyu*. K.: Inst. Mehaniki im.S. P.Timoshenka.
2. ACHENBACH, J. D. (1973) *Wave Propagation in Elastic Solids*. Amsterdam: North Holland Publishing Company.
3. CATTANI, C. and RUSHCHITSKY, J. J. (2007) *Wavelet and Wave Analysis as Applied to Materials with Micro or Nanostructure*. Singapore-London: World Scientific.
4. KRATZER, A. and FRANZ, W. (1960) *Transcendente Funktionen*. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft.
5. OLVER, F. W. J. (1974) *Asymptotics and Special Functions*. New York: Academic Press.
6. RUSHCHITSKY, J. J. (2014) *Nonlinear Elastic Waves in Materials*. Heidelberg: Springer.
7. RUSHCHITSKY, J. J. (2005) Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – derivation of wave equations. Plane strain state. *Int. Appl. Mech.* 41 (5). p. 701–712.
8. RUSHCHITSKY, J. J. (2005) Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – derivation of wave equations. Axisymmetrical and other states. *Int. Appl. Mech.* 41 (6). p. 831–840.
9. RUSHCHITSKY, J. J. (2005) Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – primary analysis of evolution *Int. Appl. Mech.* 41 (7). p. 825–833.
10. GUZ, A.N., RUSHCHITSKY, J. J. and GUZ, I.A. (2010) *Introduction to mechanics of nanocomposites*. Kiev: Akademperiodika.
11. RUSHCHITSKY, J. J. (2009) On the Self-Switching Hypersonic Waves in Cubic Nonlinear Hyperelastic Nanocomposites *Int. Appl. Mech.* 45 (1). p. 73–93.

Надійшла до редколегії 01.09.17

УДК 517.9

Самойленко В.Г.¹, д.ф.-м.н., проф.,
Вовк В.С.¹, аспірант.

**Двосолітонні розв'язки рівняння
Кортевега-де Фріза та їх асимптотичні
і чисельні наближення**

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03022, м. Київ, пр-т.
Академіка Глушкова 4-е,
e-mail: valsamyul@gmail.com
e-mail: vovkvitali@gmail.com

V.H. Samoilenko¹, Dr.Sci., (Phys.-Math.),
V. S. Vovk¹, Ph.D. student.

**Two-soliton solutions to the Korteweg-
de Vries equation and their asymptotical and
numerical approximations**

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03022, Kyiv, Akademika Glushkova Av., 4-e,
e-mail: valsamyul@gmail.com
e-mail: vovkvitali@gmail.com

Розглянуто асимптотичні двофазові солітоноподібні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза. Методом прямих побудовано чисельне наближення двосолітонного розв'язку для задачі Коші та здійснено порівняння отриманого чисельного розв'язку з асимптотичним двофазовим солітоноподібним розв'язком даного рівняння.

Ключові слова: рівняння Кортевега-де Фріза, асимптотичні солітоноподібні розв'язки, чисельні розв'язки, метод прямих.

We consider the singularly perturbed Korteweg-de Vries equation and its asymptotic two-phase soliton-like solutions. Korteweg-de Vries equation is a classical nonlinear PDE which was originally stated to model long waves on liquid surface. In the present study, an asymptotic two-phase soliton-like solution of Korteweg-de Vries equation is constructed through applying an algorithm based on the nonlinear WKB method. In general the solution consists of a regular and a singular part. Here we establish that the solution contains only the main term of the singular part and coincides with the exact solution of the Korteweg-de Vries equation. By using the method of lines, in further we construct numerical solutions of the Korteweg-de Vries equation. The numerical scheme is detailed in the paper. Finite difference approximation of the nonlinear term was obtained from its two different representations and the one minimizing the error was used. Calculation results are presented for different values of the small parameter and time variable. A comparative analysis of the obtained numerical and asymptotic solutions is given.

Key Words: Korteweg-de Vries equation, asymptotic soliton-like solution, numerical solution, method of lines.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Серед нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними особливе місце займає рівняння Кортевега-де Фріза.

Своєю популярністю це рівняння завдячує тому, що воно виникає при описі багатьох досить різноманітних фізичних процесів та явищ. Крім цього, це рівняння володіє так званими солітонними розв'язками, які мають особливі властивості. Ці розв'язки описують відокремлені хвилі на поверхні рідини, взаємодія яких відбувається за спеціальним сценарієм, а саме: хвиля з більшою амплітудою, а відповідно і з більшою швидкістю, наздоганяє хвилю з меншою амплітудою; потім ці хвилі утворюють так званий “нелінійний імпульс”, з якого через деякий час виділяється дві такі самі хвилі. При

цьому нові хвилі мають форму хвиль до взаємодії, але лише зазнають зміни їх порядку розташування і величини фази.

Така взаємодія подібна взаємодії твердих частинок при зіткненні, через що М. Крускал і Н. Забускі [1], які виявили це явище, назвали їх солітонами (від англ. solitary – усамітнений).

Вивчення таких усамітнених хвиль проводилося ще задовго до відкриття рівняння Кортевега-де Фріза. Першим нове явище спостерігав і зафіксував шотландський інженер Джон Скотт Расселл [2], яке було ним названо хвилею трансляції. Зараз такі хвилі називають усамітненими або відокремленими.

Стаття [2], в якій було описано рух хвиль в каналі невеликої глибини, викликала бурхливі

дискусії, що спонукало вчених до активного пошуку аналітичного опису таких хвиль. Саме в якості математичної моделі цього явища голандські дослідники Кортевег Д. і де Фріз В. у 1895 році запропонували рівняння:

$$u_{xxx} + 6uu_x + u_t = 0, \quad (1)$$

яке згодом було названо їхніми іменами.

У другій половині ХХ-го століття для відшукування точних (аналітичних) розв'язків рівняння Кортевега-де Фріза та низки інших було створено метод оберненої задачі розсіювання, що ґрунтується на спектральній теорії і який став одним із потужних та ефективних методів побудови точних розв'язків нелінійних рівнянь теоретичної і математичної фізики [3].

У той же час також вивчалася низка різних задач для рівняння Кортевега-де Фріза з малим збуренням, при цьому успішно застосовувалися різні асимптотичні методи, зокрема, метод ВКБ та його узагальнення – нелінійний метод ВКБ [4].

Цей метод було розроблено для знаходження асимптотичних наближень для квазі-періодичних розв'язків сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза вигляду:

$$\varepsilon^2 u_{xxx} - 6uu_x + u_t = 0. \quad (2)$$

Згодом за допомогою нелінійного методу ВКБ було побудовано асимптотичні солітоноподібні розв'язки багатьох рівнянь математичної фізики інтегровного типу з сингулярним збуренням.

Об'єктом дослідження даної статті є рівняння Кортевега-де Фріза (2), для якого знайдено асимптотичний двофазовий солітоноподібний розв'язок і побудовано його чисельний розв'язок.

Асимптотичний розв'язок

Означення. Функція $u(x, t, \varepsilon)$, де ε – малий параметр, називається асимптотичною двофазовою солітоноподібною, якщо ця функція для довільного цілого $N \geq 0$ зображується асимптотичним розкладом вигляду:

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j (u_j(x, t) + V_j(x, t, \tau_1, \tau_2)) + O(\varepsilon^{N+1}), \quad (3)$$

де $\tau_1 = S_1(x, t)/\varepsilon$, $\tau_2 = S_2(x, t)/\varepsilon$;

функції $u_j(x, t)$, $S_1(x, t)$, $S_2(x, t) \in C^\infty(R \times [0; T])$, де

$$\left. \frac{\partial S_k}{\partial x} \right|_{\Gamma_k} \neq 0, \quad \Gamma_k = \{(x, t) \in R \times [0; T], S_k(x, t) = 0\},$$

$$k=1, 2; V_0(x, t, \tau_1, \tau_2) \in G_2^0, V_j(x, t, \tau_1, \tau_2) \in G_2,$$

$j=1, N$. Тут G_2^0, G_2 – деякі функціональні простори нескінченно диференційовних функцій

змінних $x, t, \tau_1, \tau_2 \in R \times [0; T] \times R \times R$, означення яких можна знайти в [5].

Функція

$$U_N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j u_j(x, t)$$

називається регулярною частиною, а функція

$$V_N(x, t, \tau_1, \tau_2, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j V_j(x, t, \tau_1, \tau_2)$$

– сингулярною частиною асимптотики (3).

За допомогою алгоритму побудови асимптотичних солітоноподібних розв'язків рівняння Кортевега-де Фріза, описаного в [5], можна знайти асимптотичний двофазовий солітоноподібний розв'язок рівняння (2). З цією метою, підставимо (4) в (3), перейдемо до границі при $\tau_1, \tau_2 \rightarrow +\infty$ і скористаємося властивостями функцій з просторів G_2^0, G_2 . У результаті отримаємо диференціальні рівняння з частинними похідними для визначення членів регулярної та сингулярної частин асимптотики (4). Зокрема, для головного члена регулярної частини маємо рівняння $\frac{\partial u_0}{\partial t} - 6u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0$.

Оскільки регулярна частина асимптотики відповідає за так званий фон і не відображає якісної поведінки розв'язку, то покладемо $u_0(x, t) \equiv 0$.

Для визначення головного члена сингулярної частини асимптотики (4) отримуємо рівняння Кортевега-де Фріза вигляду

$$\frac{\partial^3 V_0}{\partial \xi^3} - 6V_0 \frac{\partial V_0}{\partial \xi} + \frac{\partial V_0}{\partial \eta} = 0. \quad (4)$$

Тут величини ξ, η визначено згідно

$$\text{формул } \xi = \frac{a_2 \tau_1 - a_1 \tau_2}{\sqrt{6} (a_2 - a_1)}, \quad \eta = \frac{\tau_1 - \tau_2}{6\sqrt{6} (a_2 - a_1)}; \text{ змінні}$$

τ_1, τ_2 мають вигляд $\tau_s = (x - \varphi_s(t))/\varepsilon$, $s=1, 2$; функції $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ задають так звані криві розриву і визначаються з диференціальних рівнянь $\varphi'_s(t) = -a_s$, $s=1, 2$, де a_1, a_2 – різні дійсні додатні числа.

З рівняння (4) знаходимо [4]

$$V_0(\xi, \eta) = -2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \ln \det(E + G), \quad (5)$$

де E – одинична (2×2) -матриця, матриця G має вигляд:

$$G = \begin{pmatrix} c_1^2(\eta) \frac{\exp(-2\kappa_1 \xi)}{2\kappa_1} & c_1(\eta)c_2(\eta) \frac{\exp(-2(\kappa_1 + \kappa_2)\xi)}{\kappa_1 + \kappa_2} \\ c_1(\eta)c_2(\eta) \frac{\exp(-2(\kappa_1 + \kappa_2)\xi)}{\kappa_1 + \kappa_2} & c_2^2(\eta) \frac{\exp(-2\kappa_2 \xi)}{2\kappa_2} \end{pmatrix}$$

$$c_s(\eta) = c_s(0) \exp(4\kappa_s^3 \eta), \quad \kappa_s = \frac{\sqrt{6a_s}}{2};$$

$c_s(0)$, $s=1, 2$, – довільні дійсні числа.

Розв'язок рівняння (4) можна записати в такому вигляді:

$$V_0(\xi, \eta) = -2 \left[2\kappa_1 c_1^2 e^{-2\kappa_1 \xi} + 2\kappa_2 c_2^2 e^{-2\kappa_2 \xi} - 2c_1^2 c_2^2 \frac{(\kappa_1 - \kappa_2)^2}{\kappa_1 \kappa_2} e^{-2(\kappa_1 + \kappa_2)\xi} - c_1^4 c_2^2 \frac{(\kappa_1 - \kappa_2)^2 \kappa_2}{2\kappa_1^2 (\kappa_1 + \kappa_2)^2} e^{(-4\kappa_1 - 2\kappa_2)\xi} - \right. \\ \left. - c_1^2 c_2^4 \frac{(\kappa_1 - \kappa_2)^2 \kappa_1}{2\kappa_2^2 (\kappa_1 + \kappa_2)^2} e^{(-2\kappa_1 - 4\kappa_2)\xi} \right] \times \left[1 + \frac{c_1^2}{2\kappa_1} e^{-2\kappa_1 \xi} + \frac{c_2^2}{2\kappa_2} e^{-2\kappa_2 \xi} + \frac{c_1^2 c_2^2 (\kappa_1 - \kappa_2)^2}{4\kappa_1 \kappa_2 (\kappa_1 + \kappa_2)^2} e^{-2(\kappa_1 + \kappa_2)\xi} \right]^{-2}.$$

Тоді, вибравши $a_1 = 8/3$, $a_2 = 2/3$, розв'язок рівняння (2) можна записати таким чином:

$$u(x, t, \varepsilon) = -12 \frac{4 \operatorname{ch}\left(2 \frac{x-4t}{\varepsilon}\right) + \operatorname{ch}\left(4 \frac{x-16t}{\varepsilon}\right) + 3}{\left[3 \operatorname{ch}\left(\frac{x-28t}{\varepsilon}\right) + \operatorname{ch}\left(3 \frac{x-12t}{\varepsilon}\right)\right]^2}. \quad (6)$$

Цей розв'язок є найпростішим випадком багатосолітонного розв'язку і називається дублетним розв'язком.

Чисельний розв'язок

Для знаходження чисельного розв'язку рівняння (3) скористаємося методом прямих [6]. Задамо рівномірну сітку за допомогою розбиття вигляду

$$\bar{\Omega}_h = \{x_i = (i-1)h, i=1, 2, \dots, N, h=1/(N-1)\},$$

де значення функції на прямих x_i позначено через $Y_i(t) = u(x_i, t)$.

У результаті такої дискретизації отримуємо системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dY_2}{dt} - 6Y_2 \frac{Y_3 - Y_2}{h} + \varepsilon^2 \frac{-2Y_3 + Y_4}{2h^3} = 0, \\ \frac{dY_i}{dt} - 6Y_i \frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{2h} + \varepsilon^2 \frac{-Y_{i-2} + 2Y_{i-1} - 2Y_{i+1} + Y_{i+2}}{2h^3} = 0, \\ i=3, \dots, N-2; \quad (7)$$

$$\frac{dY_{N-1}}{dt} - 6Y_{N-1} \frac{Y_{N-1} - Y_{N-2}}{h} + \varepsilon^2 \frac{-Y_{N-3} + 2Y_{N-2}}{2h^3} = 0,$$

$$Y_1 = Y_N = 0,$$

$$Y_i(0) = -6 \operatorname{sech}^2 \frac{x_i}{\varepsilon}, \quad i=2, \dots, N-1.$$

Якщо рівняння (3) записати у дивергентній формі

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3 \frac{\partial(u^2)}{\partial x} - \varepsilon^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3},$$

то отримаємо різницеву схему вигляду:

$$\frac{dY_2}{dt} - 3 \frac{Y_3^2 - Y_2^2}{h} + \varepsilon^2 \frac{-2Y_3 + Y_4}{2h^3} = 0, \\ \frac{dY_i}{dt} - 3 \frac{Y_{i+1}^2 - Y_{i-1}^2}{2h} + \varepsilon^2 \frac{-Y_{i-2} + 2Y_{i-1} - 2Y_{i+1} + Y_{i+2}}{2h^3} = 0,$$

$$i=3, \dots, N-2;$$

(8)

$$\frac{dY_{N-1}}{dt} - 3 \frac{Y_{N-1}^2 - Y_{N-2}^2}{h} + \varepsilon^2 \frac{-Y_{N-3} + 2Y_{N-2}}{2h^3} = 0,$$

$$Y_1 = Y_N = 0,$$

$$Y_i(0) = -6 \operatorname{sech}^2 \frac{x_i}{\varepsilon}, \quad i=2, \dots, N-1.$$

Для чисельного аналізу крайові умови на нескінченності замінені умовами на деякій скінченній межі. Значення функції в точках межі вважаються рівним нулеві. Початкова умова отримана з формули (6) при $t=0$.

Чисельне розв'язання систем (7) і (8) здійснено за допомогою пакету математичних програм MATLAB засобами вбудованих стандартних функцій для розв'язування звичайних диференціальних рівнянь.

На рис. 1, рис. 2 представлено результати обчислень значень функції $u(x, t)$ при різних значеннях часової змінної t . Значення малого параметра ε взято рівним 0,2 та 0,5. На рис. 2 можна спостерігати відокремлення швидшого солітона. На рис. 1 при $\varepsilon=0,2$ солітони стають вужчими.

Зауважимо, що обчислення з використанням схеми (8) мають кращу точність.

Висновки

Розглянуто сингулярно збурене рівняння Кортевега-де Фріза зі сталими коефіцієнтами, для якого за допомогою алгоритму побудови асимптотичних розв'язків на основі нелінійного методу ВКБ знайдено його асимптотичний двофазовий солітоноподібний розв'язок.

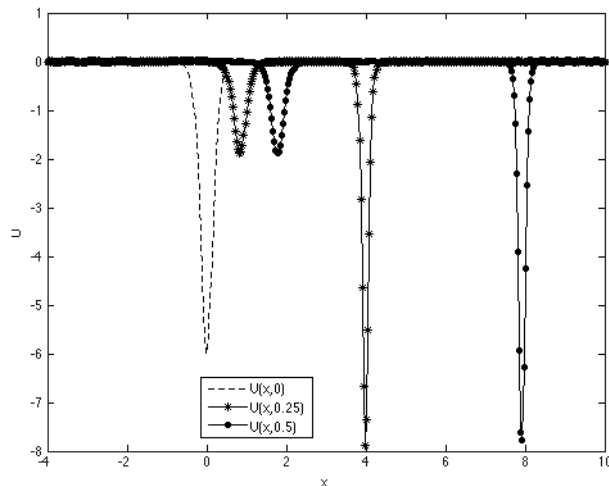


Рис. 1. Часова еволюція розв'язків при $\varepsilon = 0,2$, $\Delta t = 0,25$.

Встановлено, що цей розв'язок можна записати у такому вигляді, коли його головний член сингулярної частини співпадає з точним розв'язком розглядуваного рівняння. Розглянуто різницеве наближення даного рівняння і за допомогою методу прямих побудовано його чисельний розв'язок. Проведено порівняльний аналіз отриманих наближених розв'язків.

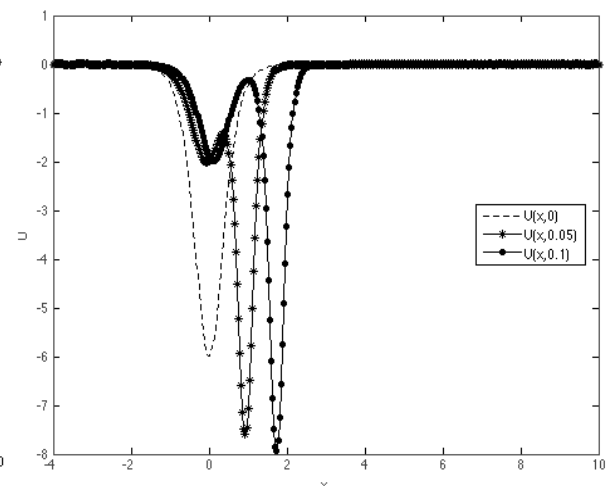


Рис. 2. Часова еволюція розв'язків при $\varepsilon = 0,5$, $\Delta t = 0,05$.

Список використаних джерел

1. Zabusky N. J. Interaction of solitons in a collisionless plasma and recurrence of initial states / N.J. Zabusky, M.D. Kruskal // *Phys. Review Lett.* – 1965. – V. 15. – P. 147-154.
2. Russel J. Scott. Report on waves / J. Scott Russel // *Proc. Roy Soc. Edinb.*, 1844. – P. 319-320.
3. Захаров В. Е. Теория солитонов: метод обратной задачи / В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л.П. Питаевский. – Москва: Наука, 1980. – 320 с.
4. Miura R.M. Application of nonlinear WKB method to the Korteweg-de Vries equation / R.M. Miura, M.D. Kruskal // *SIAM Appl. Math.* – 1974. – V. 26, No 2. – P. 376 – 395.
5. Samoylenko V.H. Asymptotic two-phase soliton-like solutions of the singularly perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients / V.H. Samoylenko, Yu. I. Samoylenko // *Ukrainian Mathematical Journal* – 2008. – V. 60, №3. – P. 449-461.
6. Ляшко И.И. Методы вычислений / И.И. Ляшко, А.А. Скоробогатко. – Киев: Вища школа, 1977. – С. 243-245.

References

1. ZABUSKY, N. and KRUSKAL, M. (1965) Interaction of solitons in a collisionless plasma and recurrence of initial states. *Phys. Review Lett.* 15. p.147-154.
2. RUSSEL, J. SCOTT (1844) Report on waves. *Proc. Roy Soc. Edinb.* p. 319-320.
3. ZAHAROV, V. et al. (1980) *Teoria solitonov: metod obratnoy zadachi.* Moskva:Nauka.
4. MIURA, R. and KRUSKAL, M. (1974) Application of nonlinear WKB method to the Korteweg-de Vries equation. *SIAM Appl. Math.* 26(2). p.376-395.
5. SAMOYLENKO, V. and SAMOYLENKO, Yu. (2008) Asymptotic two-phase soliton-like solutions of the singularly perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients. *Ukrainian Mathematical Journal.* 60(3). p. 449-461.
6. LYASHKO, I. and SKOROBOGAT'KO, A. (1977) *Metody vychisleniy.* Kiev: Vyshcha shkola.

Надійшла до редколегії 18.09.17

УДК 532.595

Семенович К.О.¹, к.ф.-м.н.

**Вплив рівномірного витікання на
динаміку кутового руху резервуару з
рідиною**

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, просп.
академіка Глушкова 4-е,
e-mail: kateryna.semenovych@gmail.com

K.O. Semenovych¹, Ph.D. (Phys.-Math.)

**Influence of uniform outflow on dynamics of
angular motion of reservoir with liquid**

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, academician Glushkov Avenue,
building 4-e,
e-mail: kateryna.semenovych@gmail.com

Розглянуто задачу про кутовий рух циліндричного резервуару з рідиною, що має вільну поверхню, на маятниковому підвісі за наявності рівномірного витікання рідини при коротких довжинах підвісу. Продемонстровано працездатність побудованої математичної моделі механічної системи для розв'язання такого типу задач. Показано, що у випадку зі змінним об'ємом рідини хвильовий рух на вільній поверхні стає суттєво нелінійним, відбувається зростання амплітуди першої осесиметричної форми коливань рідини, що є нехарактерним для динаміки системи за відсутності витікання рідини. Розглянуто випадки різних значень початкового заповнення резервуару і показано, що тенденція збільшення проявів нелінійних властивостей системи зберігається.

Ключові слова: нелінійна динаміка рідини, вільна поверхня рідини, рівномірне витікання, кутовий рух.

The problem of combined angular motion of cylindrical reservoir filled with ideal free-surfaced liquid on pendulum suspension under uniform outflowing of liquid is investigated for small values of suspension length. Solution is built on the basis of variational approach and algorithms along with methods of nonlinear mechanics and method of modal decomposition. Efficiency of the constructed mathematical model of the mechanical system reservoir-liquid is demonstrated for the class of problems under consideration. Numerical data obtained on the basis of mathematical model is shown to be in accordance with theoretical expectations. Numerical results are obtained for small values of suspension length in order to isolate nonlinear effects, which are natural for long suspension lengths, from outflow manifestation. It is ascertained that in the case of variable liquid volume, wave motion on a free surface becomes sufficiently nonlinear, which is not peculiar for dynamics of the system under the same conditions without outflow. The cases of different values of initial filling of the reservoir are considered and it is shown that tendency of magnification of nonlinear properties of the system conserves.

Key Words: nonlinear liquid dynamics, liquid free surface, uniform outflow, angular motion.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Важливим аспектом вивчення нелінійної динаміки механічних систем, що містять рідину з вільною поверхнею, є розгляд випадків змінного об'єму рідини, оскільки в такому разі власні частоти механічної системи змінюються в процесі руху і стає потенційно можливим входження у нові резонансні та навколорезонансні режими.

В статті розглянуто задачу про кутовий рух циліндричного резервуару на маятниковому підвісі, частково заповненого ідеальною нестис-

ливою рідиною, за наявності рівномірного витікання рідини. Для отримання чисельних результатів обрано такі довжини підвісу, при яких динамічні процеси в системі при сталому об'ємі рідини практично підкоряються лінійній теорії [1], що дало змогу дослідити вплив витікання на характер руху механічної системи.

Було показано, що побудована математична модель придатна для опису кутового руху системи при змінному об'ємі рідини, чисельні результати не суперечать законам збереження. Було

розглянуто випадки з різним рівнем початкового заповнення резервуару для декількох значень довжин маятникового підвісу і показано, що в системі за наявності витікання рідини відбувається активізація нелінійних механізмів взаємобміну енергією між формами коливань рідини, причому така тенденція проявляється при змінному об'ємі рідини незалежно від початкового рівня заповнення резервуару і є нехарактерною для задач без витікання.

Математична модель

Формулювання задачі сумісного кутового руху резервуару з рідиною складається з кінематичних та динамічних граничних умов, рівнянь руху та початкових умов.

До кінематичних умов задачі відносяться вимога нерозривності потоку в області, умова неперетікання на границі контакту резервуар – рідина та умова непротікання через вільну поверхню рідини (1):

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0, \Delta\vec{\Omega} = 0 \text{ в } \tau; \\ \frac{\partial\varphi_0}{\partial n} &= 0 \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial \vec{n}} = \vec{r} \times \vec{n} \text{ на } \Sigma + S; \\ \frac{\partial\xi}{\partial t} + \vec{\nabla}\xi \cdot [\vec{\nabla}\phi_0 + \vec{\nabla}(\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega}) - \vec{\varepsilon} - \vec{\omega} \times \vec{r}] &= \\ = \frac{\partial\phi_0}{\partial z} + \vec{\omega} \cdot \frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial z} - \dot{\varepsilon}_z - (\vec{\omega} \times \vec{r})|_z, \xi &= z; \end{aligned} \quad (1)$$

де τ – область, яку займає рідина, S – вільна поверхня рідини, Σ – змочувана поверхня резервуару. Функцію Лагранжа механічної системи у випадку кутового руху резервуару можна представити в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\rho \int_{\tau} [\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}(\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega})]^2 d\tau + \frac{1}{2}I_{\text{res}}^{\text{ij}}\omega_i\omega_j + \\ &+ \rho g (\cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_3 - \sin\alpha_1 \sin\alpha_3) \int_{S_0} r \cos\theta(\xi + H) dS - \\ &- \rho g (\sin\alpha_1 \cos\alpha_3 + \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3) \int_{S_0} r \sin\theta(\xi + H) dS - \\ &- \frac{1}{2}\rho g \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \int_{S_0} \xi^2 dS - \\ &- (M_r h_r + M_l h_l)(1 - \cos\alpha_1 \cos\alpha_2) + \vec{M} \cdot \vec{\chi}, \end{aligned} \quad (2)$$

де ρ – густина рідини, g – гравітаційне прискорення, H – рівень заповнення рідини в резервуарі, M_l , M_r – маси рідини та резервуару, h_l , h_r – зміщення центрів мас рідини та резервуару відносно площини незбуреної вільної поверхні рідини S_0 , $I_{\text{res}}^{\text{ij}}$ – тензор інерції резервуару, визначений відносно точки O (центр незбуреної віль-

ної поверхні рідини); $\vec{M}$ – головний момент зовнішніх сил, що діють на резервуар, визначений відносно точки O ; $\vec{\chi} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ – представлення кутів повороту резервуару відносно нерухомої системи координат. Системи координат побудовано аналогічно до роботи [2].

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0. \quad (3)$$

Динамічні граничні умови та рівняння сумісного руху системи отримуємо після застосування варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського (3) для функції Лагранжа механічної системи (2).

Перехід від континуальної до дискретної моделі системи виконуємо за допомогою методу модальної декомпозиції. Специфіка варіаційних методів у застосуванні до даного типу задач полягає в тому, що необхідно задовольнити кінематичним граничним умовам до початку розв'язання варіаційної задачі.

Представлення невідомих величин побудовані таким чином, щоб автоматично задовольнити умові нерозривності потоку та кінематичним граничним умовам на твердій поверхні резервуару. Алгоритм задовільнення кінематичній граничній умові на вільній поверхні рідини [2] ґрунтується на тому, що, виходячи з теореми про те, що безвихровий рух ідеальної однорідної нестисливої рідини повністю визначається рухом її границь, число ступенів вільності всього об'єму рідини з вільною поверхнею дорівнює числу ступенів вільності руху самої вільної поверхні. Задовільнення кінематичній граничній умові на невідомій вільній поверхні рідини виконано з точністю до величин третього порядку малості.

Після переходу до вільної механічної системи рівняння руху одержуються як рівняння Лагранжа другого роду для функції Лагранжа (3). В узагальненій формі система рівнянь сумісного кутового руху резервуару з рідиною з нерухомою точкою підвісу відносно амплітудних параметрів коливань рідини α_i і параметрів кутового руху резервуара α_i має вигляд:

$$\sum_{n=1}^N p_{rn} \ddot{a}_n + \sum_{n=N+1}^{N+3} p_{rn} \ddot{\alpha}_{n-N} = q_r, \quad r = \overline{1, N+3} \quad (4)$$

де N – кількість форм коливань вільної поверхні рідини.

Розмірність розв'язуючої системи рівнянь (4) мінімальна і збігається з кількістю ступенів

вільності механічної системи, що вивчається. Система рівнянь (4) є лінійною відносно других похідних від шуканих змінних, що дає можливість перетворити її до нормальної форми Коші і виконати інтегрування системи за часом методом Рунге – Кутта.

Коефіцієнти рівнянь (4) визначаються в квадратурах від форм коливань рідини для довільної кількості форм коливань N ; чисельні результати отримано з урахуванням $N=12$ форм коливань рідини, відповідно до методики розв'язання в роботі [2].

Чисельні результати

Розглянуто задачу про рух циліндричного резервуару радіусу $R=1^\circ\text{м}$, заповненого рідиною до рівня H_0 , на маятниковому підвісі довжиною $l=0,1R$. Маса резервуару складає 10% маси рідини. Резервуар коливається у вертикальній площині і в початковий момент часу є відхиленням від положення рівноваги на кут $\alpha_0 = \frac{\pi}{25}$. Вільна поверхня рідини до початку руху є горизонтальною.

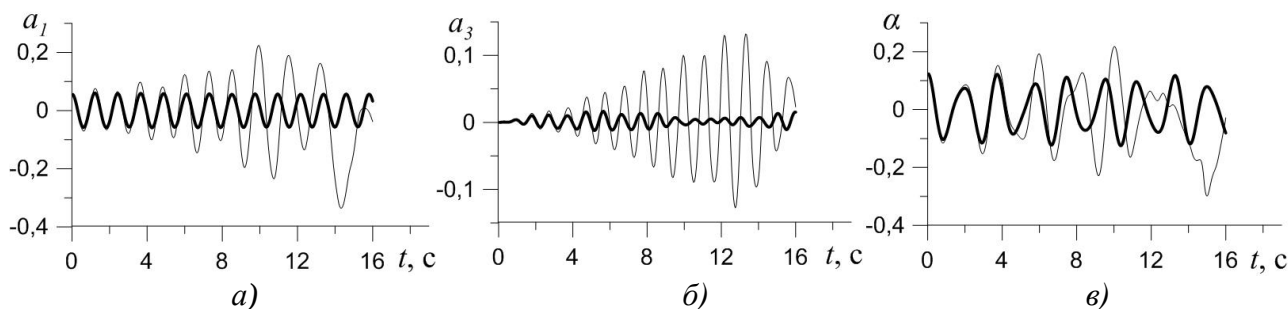


Рис. 1. Зміна в часі амплітуд перших a – антисиметричної, b – осесиметричної форм коливань вільної поверхні рідини та v – кута відхилення резервуару, $H_0 = R$, $l = 0,1R$

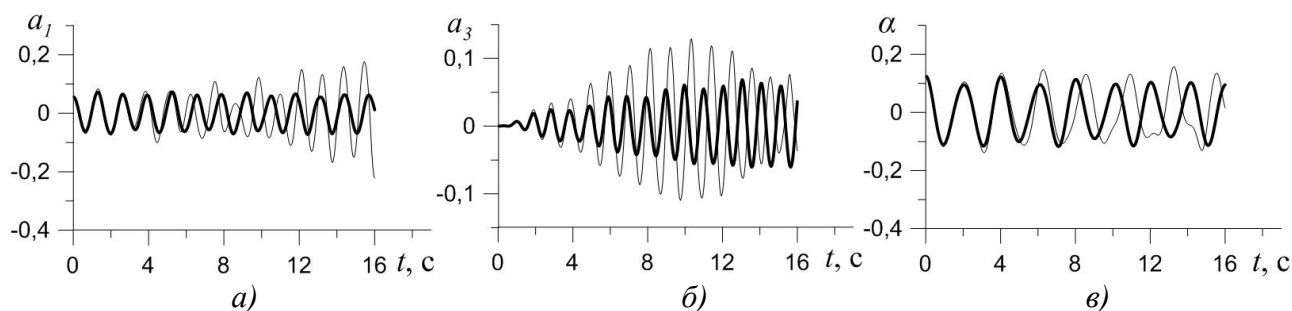


Рис. 2. Зміна в часі амплітуд перших a – антисиметричної, b – осесиметричної форм коливань вільної поверхні рідини та v – кута відхилення резервуару, $H_0 = 1,5R$, $l = 0,1R$

Припускаємо, що дисипація енергії в системі відсутня. Об'єм рідини не є сталим, в процесі руху системи відбувається рівномірне витікання через дно резервуару за законом $H = H_0 + t\Delta H$, де t – час, H – рівень заповнення рідини в резервуарі, віднесений до радіусу основи резервуару R (індекс "0" відповідає початковому стану рідини), ΔH – швидкість зміни рівня заповнення резервуару. Локальними ефектами витікання знехтувано, оскільки розгляд обмежено малими значеннями швидкості витікання ΔH [3].

Чисельні результати представлено для значення швидкості витікання $\Delta H = -0,05$. На

рис. 1–3 подано зміну в часі безрозмірних амплітуд форм коливань рідини та кута резервуару для різних рівнів початкового заповнення H_0 (тонка лінія відповідає випадку з витіканням, товста – зі сталим об'ємом рідини).

Графіки v) на рис. 1–3 показують, що за наявності витікання відбувається зростання амплітуди та зменшення частоти коливань резервуару з часом. Також зростає значення амплітуди коливань вільної поверхні рідини за першою формою (графіки a)). Ці результати узгоджуються з вимогами теореми про зміну моменту кількості руху механічної системи. Аналізуючи графіки на рис. 1–3 b), можемо констатувати, що

за наявності витікання рідини перша осесиметрична форма коливань a_3 вільної поверхні зазнає більш значних збурень, ніж в задачі зі сталим об'ємом рідини. Відомо, що осесиметричні форми коливань рідини зазнають збурення лише внаслідок нелінійної взаємодії з іншими формами коливань, проявом якої є таке наростання амплітуди.

Дослідження для різних початкових рівнів заповнення резервуару H_0 показали, що тенденція наростання нелінійних ефектів зберігається і не є безпосереднім результатом зниження рівня рідини до певного граничного значення.

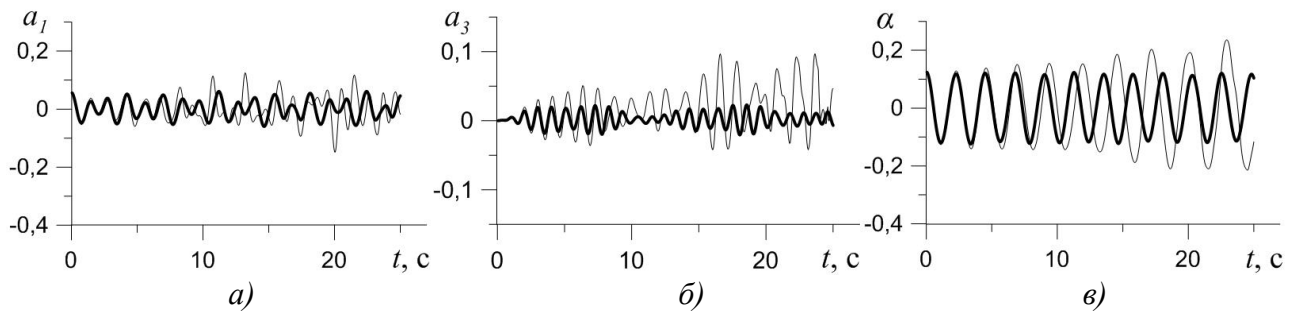


Рис. 3. Зміна в часі амплітуд перших a – антисиметричної, b – осесиметричної форм коливань вільної поверхні рідини та v – кута відхилення резервуару, $H_0 = 2R$, $l = 0,1R$

Висновки

В роботі розглянуто задачу про сумісний кутовий рух циліндричного резервуару, частково заповненого рідиною, за наявності рівномірного витікання рідини. Показано, що побудована математична модель динаміки механічної системи придатна для дослідження основних механічних характеристик руху такої системи і не суперечить теоретичним очікуванням.

Досліджено вплив наявності витікання на характер динаміки системи при коротких довжинах маятникового підвісу. Показано, що при змінному об'ємі рідини система проявляє нелінійні властивості, зокрема, відбувається помітне зростання амплітуди першої осесиметричної форм коливань рідини, що є нехарактерним для задач без витікання при аналогічних параметрах руху.

Список використаних джерел

1. Семенович К. О. Сумісний рух резервуара на маятниковому підвісі і рідини при імпульсному збудженні / К. О. Семенович, О. С. Лимарченко // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2013. – № 2. – С. 67–70.
2. Limarchenko O. Rotational motion of structures with tanks partially filled by liquid. / O. Limarchenko, G. Matarazzo, V. Yasinsky. – Kyiv: "FADA LTD", 2003. – 286 p.
3. Limarchenko O. Dynamics of a reservoir containing a liquid with a free surface in the uniform outflow regime. / O. Limarchenko // International Applied Mechanics. – 1993. – 29(2). – P. 149-152.

References

1. LIMARCHENKO O.S. and SEMENOVYCH K.O. (2013) Sumisnyi rukh rezervuara na maiatnykovomu pidvisi i ridyny pry impulsnomu zbudzhenni, *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*. (2). p. 67–70.
2. LIMARCHENKO O., MATARAZZO G. and YASINSKY V. (2003) *Rotational motion of structures with tanks partially filled by liquid*. Kyiv: FADA LTD.
3. LIMARCHENKO O. (1993) Dynamics of a reservoir containing a liquid with a free surface in the uniform outflow regime. *International Applied Mechanics*. 29(2), p. 149-152.

Надійшла до редколегії 23.08.17

УДК 624.074.04

Семенюк М. П.¹, д.т.н., проф.,
Трач В. М.², д.т.н., проф.,
Подворний А. В.², к.т.н., доц.

**Стійкість циліндричних анізотропних
оболонки під дією зсувного напруження
в тривимірній постановці**

¹Інститут механіки НАН України, 03057,
м. Київ, вул. Нестерова, 3,
e-mail: mikolasem@ukr.net

²Національний університет водного
господарства та природокористування, 33000,
м. Рівне, вул. Соборна 11,
e-mail: trach-vm@ukr.net

M. P. Semenuk¹, Dr. Sci.,
V. M. Trach², Dr. Sci.,
A. V. Podvorny², Ph. D.

**Stability of cylindrical anisotropic shells
under the influence of the shear tension in
three-dimensional statement**

¹ Institute of Mechanics of National Academy of
Sciences of Ukraine, 03057, Kiev, Nesterov str, 3,
e-mail: mikolasem@ukr.net

² National University of Water and Environmental
Engineering, 33000, Rivne, Soborna str, 11,
e-mail: trach-vm@ukr.net

Запропонований підхід, що дозволяє розв'язувати задачі стійкості товстостінних циліндричних анізотропних оболонок під дією крутного моменту. Матеріал конструкцій має одну площину пружної симетрії, що обумовлено поворотом головних напрямків пружності вихідного ортотропного матеріалу відносно твірної оболонок. Для вирішення задачі використовується система диференціальних рівнянь стійкості, що базується на тривимірних співвідношеннях теорії пружності. Розв'язок цієї системи отриманий за допомогою процедури Бубнова-Гальоркіна урахування крайових умов на торцях циліндричної оболонки, чисельного методу дискретної ортогоналізації. Розв'язана задача стійкості циліндра виготовленого з матеріалу, характеристики якого описуються однією площиною пружної симетрії. За використання тривимірного підходу проведені дослідження залежності критичних величин крутного моменту від кута повороту головних напрямків пружності початково ортотропного матеріалу відносно ліній головних кривин оболонкової конструкції. Результати розрахунків представлені у вигляді графіків, а також проведений їх аналіз.

Ключові слова: стійкість, анізотропні циліндричні оболонки, тривимірний підхід.

The approach is offered for solving problems of stability of thick-walled cylindrical anisotropic shells under the influence of torque. Material of designs has one plane of elastic symmetry resulting from turn of the main directions of elasticity of initial orthotropic material relative to forming shells. To solve the problem a system of differential equations of stability, based on three-dimensional ratios theory of elasticity, is used. Solution of this system is received by means of Bubnov-Galerkin procedure of accounting for boundary conditions at end faces of the cylindrical shell, a numerical method of discrete orthogonalization. Solved is the problem of stability of the cylinder manufactured out of material with characteristics described by one plane of elastic symmetry. Using a three-dimensional approach, conducted researches on dependence of critical sizes of torque on an angle of rotation of the main directions of elasticity of initially orthotropic material relative to lines of main curvatures of shell design. Results of calculations are presented in the form of graphs and, also, included their analysis.

Key Words: stability, anisotropic cylindrical shells, three-dimensional approach.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Товстостінні анізотропні композитні оболонки широко використовуються у найрізноманітніших конструкціях сучасної техніки. В більшості розроблених на даний час методик приймається, що матеріал конструкції може бути ортотропним. Однак, при виготовленні оболонок, наприклад, намотуванням,

внаслідок неспівпадіння між напрямком армування та лініями головних кривин оболонки виникає ефект конструктивної анізотропії. Таким чином, з'являється необхідність у розробці методів розв'язку задач стійкості оболонок з композитних матеріалів із

використанням більш загальної моделі композиту з меншим рівнем симетрії матеріалу.

Традиційні класичні теорії [1] не враховують низьку зсувну жорсткість і неоднорідність, властиву композитним матеріалам. Уточнені ж теорії, засновані на введенні відповідних гіпотез [2], лише дозволяють в деякій мірі ці особливості враховувати.

Тривимірні підходи позбавлені вказаних недоліків, але в основних роботах [3, 4, 5] увага була зосереджена на перевірці точності класичних і уточнених теорій для конструкцій з ортотропних матеріалів. Відомо, що перевагою тривимірного методу над двовірними є можливість уточнення результатів, отриманих наближеними підходами, а також можливість виявлення нових ефектів роботи матеріалів конструкцій до моменту втрати стійкості.

У роботі, спираючись на методику, запропоновану в [6], представлено підхід до дослідження стійкості товстостінних циліндричних композитних оболонок виготовлених з матеріалу з однією площиною пружної симетрії в полі дії крутних навантажень.

Розглядаються пружні анізотропні композитні циліндричні оболонки, віднесені до циліндричної (криволінійної) системи координат r, z, θ . Вісі r та θ є полярними координатами колового поперечного перерізу циліндра, z – нормальна до цього перетину вісь, початок якої збігається з центром основи циліндра. Геометрія оболонки визначається її довжиною вздовж твірної L , а також радіусами внутрішньої R_1 та зовнішньої R_2 поверхонь.

В нелінійній теорії пружності [7] умови рівноваги елемента, для циліндричної системи координат, зводяться до трьох рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\sigma}_{rr}}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[\hat{\sigma}_{rr} + r \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\tau}_{rz}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\hat{\tau}_{r\theta}) - \hat{\sigma}_{\theta\theta} + r F_r \right]; \\ \frac{\partial \hat{\tau}_{rz}}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[\hat{\tau}_{rz} + r \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\sigma}_{zz}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\hat{\tau}_{\theta z}) + r F_z \right]; \\ \frac{\partial \hat{\tau}_{r\theta}}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[\hat{\tau}_{r\theta} + \hat{\tau}_{\theta r} + r \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\tau}_{z\theta}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\hat{\sigma}_{\theta\theta}) + r F_\theta \right], \end{aligned} \quad (1)$$

де F_r, F_z, F_θ – проекції вектора питомих об'ємних сил за напрямками дотичних до координатних ліній r, z, θ ; $\hat{\sigma}, \hat{\tau}$ – проекції напружень на вісі прийнятої криволінійної системи координат до деформації оболонки.

При цьому лінеаризовані компоненти деформацій і кути повороту оболонки пов'язані з її переміщеннями такими залежностями:

$$\begin{aligned} e_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r; \quad e_{z\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}; \\ e_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad e_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}; \\ e_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}; \quad \omega_z = \frac{1}{2r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{2r} u_\theta - \frac{1}{2} \frac{\partial u_\theta}{\partial r}; \\ \omega_\theta &= \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{1}{2} \frac{\partial u_r}{\partial z}; \quad \omega_r = \frac{1}{2} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} - \frac{1}{2r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут u_z, u_θ, u_r – переміщення точок циліндра в напрямках осей z, θ, r відповідно.

Співвідношення узагальненого закону Гука, що пов'язують компоненти деформацій і напружень при повороті осей ортотропії відносно осі z , запишемо так [8]:

$$\begin{aligned} e_{zz} &= a_{11}\sigma_{zz} + a_{12}\sigma_{\theta\theta} + a_{13}\sigma_{rr} + a_{16}\tau_{z\theta}; \\ e_{\theta\theta} &= a_{12}\sigma_{zz} + a_{22}\sigma_{\theta\theta} + a_{23}\sigma_{rr} + a_{26}\tau_{z\theta}; \\ e_{rr} &= a_{13}\sigma_{zz} + a_{23}\sigma_{\theta\theta} + a_{33}\sigma_{rr} + a_{36}\tau_{z\theta}; \\ e_{r\theta} &= a_{44}\tau_{r\theta} + a_{45}\tau_{rz}; \quad e_{rz} = a_{45}\tau_{r\theta} + a_{55}\tau_{rz}; \\ e_{z\theta} &= a_{16}\sigma_{zz} + a_{26}\sigma_{\theta\theta} + a_{36}\sigma_{rr} + a_{66}\tau_{z\theta}. \end{aligned} \quad (3)$$

В (3) a_{ij} ($i, j = \overline{1,6}$) – механічні константи матеріалу, що має одну площину пружної симетрії паралельну серединній поверхні циліндра. Зв'язок яких з константами матеріалу, чий вісі ортотропії співпадають з координатними представляється у вигляді [8].

Співвідношення узагальненого закону Гука, для матеріалів з однією площиною пружної симетрії (3), запишемо в оберненому вигляді [9], який використаємо для розв'язку системи (1):

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= b_{11}e_{zz} + b_{12}e_{\theta\theta} + b_{16}e_{z\theta} + c_1\sigma_{rr}; \\ \sigma_{\theta\theta} &= b_{12}e_{zz} + b_{22}e_{\theta\theta} + b_{26}e_{z\theta} + c_2\sigma_{rr}; \\ \tau_{z\theta} &= b_{16}e_{zz} + b_{26}e_{\theta\theta} + b_{66}e_{z\theta} + c_3\sigma_{rr}; \\ e_{rr} &= -c_1e_{zz} - c_2e_{\theta\theta} - c_3e_{z\theta} + c_4\sigma_{rr}; \\ e_{rz} &= a_{45}\tau_{r\theta} + a_{55}\tau_{rz}; \quad e_{r\theta} = a_{44}\tau_{r\theta} + a_{45}\tau_{rz}, \end{aligned} \quad (4)$$

де b_{ij} ($i, j = \overline{1,2,6}$), c_i ($i = \overline{1,4}$) – характеристики, що визначаються з використанням механічних констант a_{ij} ($i, j = \overline{1,3,5,6}$) матеріалу оболонки.

Для розв'язання задачі стійкості циліндричних анізотропних оболонок, згідно до статичного критерію Ейлера, проведемо лінеаризацію системи (1), записаної відносно похідних за змінною r [6]. При цьому замінимо напруження $\sigma_{zz}, \sigma_{\theta\theta}, \tau_{z\theta}$ їх виразами (4) з урахуванням (2) і, використовуючи

співвідношення для деформації e_{rz} , $e_{r\theta}$, e_{rr} (2), після відповідних перетворень отримаємо систему рівнянь стійкості для анізотропних товстостінних циліндричних оболонок:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} &= \frac{c_2 - 1}{r} \sigma_{rr} - \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{b_{22}}{r^2} u_r + \\ &\frac{b_{12}}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{b_{26}}{r^2} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{b_{26}}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{b_{22}}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \\ &-\sigma_{zz}^0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r} \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial u_\theta}{\partial z}; \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} &= -c_1 \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} - \frac{1}{r} \tau_{rz} - \frac{b_{12}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - b_{11} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \\ &-\frac{b_{66}}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} - \frac{b_{12} + b_{66}}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial \theta} - \frac{c_3}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} - \frac{b_{26}}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \\ &-\frac{2b_{16}}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta} - b_{16} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{b_{26}}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \sigma_{zz}^0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \\ &-\frac{2}{r} \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta}; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} &= -\frac{c_2}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \tau_{r\theta} - \frac{b_{22}}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \\ &-\frac{b_{12} + b_{66}}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta} - b_{66} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{b_{22}}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - c_3 \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} - \\ &-\frac{b_{26}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - b_{16} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{b_{26}}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} - \frac{2b_{26}}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial \theta} - \\ &-\sigma_{zz}^0 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{2}{r} \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{2}{r} \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial \theta}; \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} &= c_4 \sigma_{rr} - \frac{c_2}{r} u_r - c_1 \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{c_3}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - c_3 \frac{\partial u_\theta}{\partial z} - \\ &-\frac{c_2}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} &= a_{55} \tau_{rz} + a_{45} \tau_{r\theta} - \frac{\partial u_r}{\partial z}; \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} &= a_{45} \tau_{rz} + a_{44} \tau_{r\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_\theta. \end{aligned} \quad (5)$$

де σ_{zz}^0 та $\tau_{z\theta}^0$ – докритичні напруження відшукані аналогічно [6].

Одним зі способів розв'язку отриманої тривимірної задачі (5) є можливість перетворення її на одновимірну, для чого скористаємось процедурою Бубнова-Гальоркіна. Згідно цієї процедури, розкладемо всі функції у тригонометричні ряди за координатою уздовж твірної циліндра z так, щоб вони задовольняли крайовим умовам на торцях оболонки

$$\tau_{z\theta} = \tau_{z\theta}^0, \quad \tau_{rz} = u_z = 0,$$

а також врахуємо періодичність функцій за коловою координатою θ [9].

Після деяких математичних перетворень та розділення змінних за допомогою співвідношень [9], отримаємо нескінчену систему звичайних диференціальних рівнянь стійкості в нормальній формі Коші вигляду [6]. Розв'язок цієї системи при граничних умовах на внутрішній $r = R_1$ та на зовнішній $r = R_2$ поверхнях оболонки [9] проводиться з використанням чисельного методу дискретної ортогоналізації [3].

В якості тестування та реалізації можливостей запропонованого підходу розглянемо стійкість циліндричної оболонки під дією крутного моменту. Оболонка утворена намотуванням з наступними геометричними та механічними характеристиками: радіусами внутрішньої $R_1 = 0.585$ м та зовнішньої $R_2 = 0.615$ м поверхонь, довжиною твірної $L = 1.2$ м, $E_z = 1900$ МПа, $E_\theta = 1200$ МПа, $E_r = 450$ МПа, $G_{zr} = G_{\theta r} = 230$ МПа, $G_{z\theta} = 300$ МПа, $\nu_{z\theta} = 0.15$, $\nu_{r\theta} = 0.3$, $\nu_{rz} = 0.07$. На рис. 1 приведені графіки в осях $\tau_{z\theta}^c - \psi$, де $\tau_{z\theta}^c$ – критичне значення зсувного напруження оболонки (вертикальна вісь) з гвинтовим армуванням, кут якого визначається величиною ψ (горизонтальна вісь). Зсувні напруження на рис.1 слід помножити на 10^3 МПа.

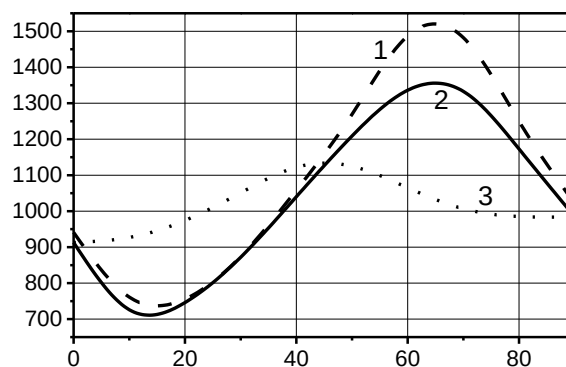


Рис. 1. Залежність зсувних напружень циліндра від кута повороту головних напрямків пружності матеріалу

На рис.1 крива 1 отримана при використанні теорії Кірхгофа-Лява [1], криві 2 та 3 відповідають запропонованому підходу, але крива 3 отримана без урахування у співвідношеннях пружності (3) констант матеріалу a_{16} , a_{26} , a_{36} , a_{45} , тобто оболонка є ортотропною.

Висновки. Таким чином, в просторовій постановці, отримано розв'язок задачі стійкості

циліндричних оболонок з урахуванням анізотропії матеріалу, що обумовлена наявністю однієї площини пружної симетрії.

Розв'язуюча система диференціальних рівнянь стійкості здобута, спираючись на тривимірні співвідношення теорії пружності.

Використовуючи запропонований підхід, досліджена залежність критичних значень зсувних напружень від кута армування стінок оболонки. З отриманих результатів видно, що запропонований метод досить добре узгоджується з класичною теорією.

Список використаних джерел

1. Баженов В.А. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок / В. А. Баженов, М. П. Семенюк, В. М. Трач. – Київ: Каравела, 2010. – 352 с.
2. Tracz W. Stateczność osiowo ściskanych cylindrycznych, anizotropowych powłok o średniej grubości / W. Tracz, M. Chorużyj // Acta scientiarum polonorum. Architektura. – 2015. – 14(3). – P.21-34.
3. Григоренко Я. М. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей / Я. М. Григоренко, Г. Г. Влайков, А. Я. Григоренко – Київ: Академперіодика, 2006. – 472 с.
4. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел / А. Н. Гузь. – Київ: Вища школа, 1986. – 511 с.
5. Пространственные задачи теории упругости и пластичности : в 6-и т. / під заг. ред А. М. Гузя. Т.4. Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел / А.Н. Гузь, И. Ю. Бабич. – Киев: Наук. думка, 1985. – 280 с.
6. Semenuk M.P. Stability of cylindrical anisotropic shells under axial pressure in three-dimensional statement / P. M. Semenuk, V. M. Trach, A. V. Podvornyi // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. зб. Вип. 94 / КНУБА; Відп. ред. В. А. Баженов. – К.: КНУБА, 2015. – С. 192-206.
7. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости / В. В. Новожилов. – Л.-М.: ОГИЗ, 1948. – 211 с.
8. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. – Москва: Наука, 1977. – 415 с.
9. Григоренко Я.М. Задачи теории упругости неоднородных тел / Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко, Н. Д. Панкратова.– Київ: Наук. думка, 1991. – 216 с.

References

1. BAZENOV, V.A., SEMENUK, M.P. & TRACH, V.M. (2010) *Neliniyne deformuvannya, stiykist' i zakritichna povedinka anizotropnykh obolonok*. Kyiv: Karavela.
2. TRACH, V. & CHORUZYI, M. (2015) Statechnos osovo siskanyh tsilindrichnih, anizotropovih povlok o sredney grubosy. *Acta scientiarum polonorum. Architektura*. 14(3). p.21-34.
3. GRIGORENKO, YA. M., VLAYKOV, G. G. & GRIGORENKO, A.YA. (2006) *Chislenno-analiticheskoe reshenie zadach mekhaniki obolochek na osnove razlichnih modeley*. Kyiv: Akademperiodika.
4. GUZ, A.N. (1986) *Osnovy trekhmernoy teorii ustoychivosti deformiruemykh tel*. Kyiv: Vishcha shkola.
5. GUZ, A.N. and BABICH, I.U. (1985) *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti i plastichnosti. T.4. Trehmernaya teoriya ustoychivosti deformiruemykh tel*. Kyiv: Naukova dumka.
6. SEMENUK, M. P., TRACH, V. M. & PODVORNYI, A. V. (2015) Stability of cylindrical anisotropic shells under axial pressure in three-dimensional statement. *Opir materialiv i teoriya sporud: Nauk.-tehn. zbirnyk*. Kyiv: KNUBA. 94. p.192-206.
7. NOVOZYLOV, V. V. (1948) *Osnovy nelineynoy teorii uprugosti*. L.–M.: OGIZ.
8. LEKHNITSKIY, S.G. (1977) *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela*. Moskva: Nauka.
9. GRIGORENKO, YA. M., VASILENKO, A.T. & PANKRATOVA, N. D. (1991) *Zadachi teorii uprugosti neodnorodnykh tel*. Kyiv: Naukova dumka.

Надійшла до редколегії 21.08.2017

УДК 539.3

Середницька Х. І., к.ф.-м.н.,
Мартиняк Р. М., д.ф.-м.н., проф.

Теплові потоки на берегах заповненої теплопровідним середовищем міжфазної тріщини

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б,
e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

Kh. I. Serednytska, Ph. D. (Phys.-Math.),
R. M. Martynyak, Dr. Sci. (Phys.-Math.).

The heat flows on the faces of interfacial crack, which filled thermo-conducting medium

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, 79060, Lviv, Naukova str., 3-b,
e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

На основі розв'язку задачі термопружності для біматеріального тіла з міжфазною заповненою теплопровідним середовищем тріщиною досліджено розподіл потоку тепла через міжфазну лінію в межах тріщини і поза нею. Проаналізовано вплив коефіцієнта теплопровідності заповнювача тріщини та напряму прикладеного до тіла теплового потоку на нормальну і дотичну складові вектора теплового потоку.

Ключові слова: біматеріал, міжфазна тріщина, теплопровідний заповнювач, вектор теплового потоку.

Thermal conductivity of the interfacial crack filled with a heat-conducting medium is investigated. The bimaterial with different thermo-mechanical parameters of materials and with zero Dundurs parameter is considered. A crack with a fixed length and heat-conducting filler is located on the interface of bimaterial. The heat conduction between faces crack is determined by thermal resistance, which proportional to the opening crack and inversely proportional to the filler thermal conductivity. The opening crack is modified under the thermal and mechanical loads. Based on the solution of the thermoelastic problem for the bimaterial with such a crack, the distribution of the heat flow vector at the interface on crack and outside is determined. The dependence of the tangential and normal components of the heat flow vector on filler's thermal conductivity and direction of the heat flow applied to the bimaterial is analyzed. It is shown, that the absolute value of the normal component (tangential component) of the heat flow vector across crack increases (decreases) with increasing of the filler's thermal conductivity.

Key Words: bimaterial, interfacial crack, heat-conducting filler, heat flow vector.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Термопружний стан тіл з тріщинами суттєво залежить від передачі тепла між її берегами, що відбувається через заповнювач тріщин. Використовуючи умови теплового контакту тіл через тонкий прошарок, у праці [1] змодельовано теплопередачу між берегами тріщини в однорідному матеріалі, припускаючи, що термоопір заповнювача тріщини не залежить від її розкриття. Розв'язано задачі термопружності для однорідних [2] і функціонально градієнтних тіл [3] з теплопроникними тріщинами та для біматеріальних тіл з міжфазними теплопроникними тріщинами [4], термоопір яких наперед заданий. Термонапружений стан біматеріалу з міжфазною тріщиною, заповненою теплопровідним середовищем,

термоопір якої залежить від її розкриття і змінюється в процесі навантаження, досліджено у праці [5], де проаналізовано розподіл розкриття тріщини та стрибка температури між її берегами.

У даній статті досліджено залежність компонент вектора теплового потоку на міжфазній лінії та берегах тріщини від коефіцієнта теплопровідності її заповнювача і напряму прикладеного до біматеріалу теплового потоку.

2. Формулювання задачі

Розглянемо біматеріал, компонентами якого є півплощини D_1 і D_2 , що характеризуються коефіцієнтами теплопровідності λ_1 і λ_2 , коефіцієнтами лінійного теплового розширення α_1 і α_2 ,

коефіцієнтами Пуассона ν_1 і ν_2 , модулями зсуву G_1 і G_2 . Вважаємо, що пружні сталі пов'язані між собою залежністю $G_1(1-2\nu_2) = G_2(1-2\nu_1)$, тобто параметр Дандерса [6] біматеріалу рівний нулеві. На міжфазній лінії біматеріалу розташована тріщина завдовжки $2a$ (рис. 1). Порожнину тріщини заповнена середовищем (газом, рідиною) з коефіцієнтом теплопровідності λ_c . Вважаємо, що заповнювач тріщини не чинить опору деформуванню тіла.

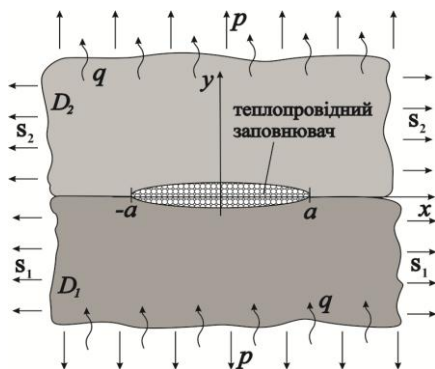


Рис. 1 Біматеріал з міжфазною тріщиною

До біматеріалу на нескінченності прикладено перпендикулярні до міжфазної лінії однорідний стаціонарний тепловий потік q та рівномірно розподілені розтягувальні навантаження p . Паралельно міжфазній лінії, до півплощин D_1 і D_2 на нескінченності прикладені лінійно розподілені по координаті y нормальні напруження S_1 і S_2 [5], які компенсують поздовжню деформацію в напрямку осі Ox і глобальне викривлення границь півплощин, що зумовлені зусиллями p і тепловим потоком q .

В біматеріалі реалізується двовимірне стаціонарне поле і стан плоскої деформації. Береги тріщини вільні від напружень, а вплив теплопровідності заповнювача тріщини на теплопередачу між берегами враховуватимемо [5] термоопором, пропорційним розкриттю тріщини $h(x)$, що змінюється в процесі навантаження, і обернено пропорційним коефіцієнту теплопровідності заповнювача λ_c . Поза тріщиною виконуються умови ідеального теплового і механічного контакту півплощин D_1 і D_2 .

3. Сингулярні інтегро-диференціальні рівняння задачі

Згідно з викладеною у праці [5] методикою сформульовану задачу зведено до системи нелі-

нійних сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь (СІДР) відносно розкриття тріщини $h(x)$ та стрибка температури між її берегами $\gamma(x)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{h'(t) dt}{t-x} = -\frac{Kp}{2} - \frac{\lambda \eta^-}{2} \gamma(x), \quad |x| < a, \quad (1)$$

$$\lambda_c \frac{\gamma(x)}{h(x)} - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma'(t) dt}{t-x} = q, \quad |x| < a, \quad (2)$$

де $K = (1 - \kappa_1 \kappa_2) / (G_1(1 - \kappa_2))$; $\eta^- = \eta_2 - \eta_1$; $\lambda = 2\lambda_1 \lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2)$; $\eta_i = \alpha_i(1 + \nu_i) / \lambda_i$ – термічна дистортивність компонент біматеріалу D_i ; $\kappa_i = 3 - 4\nu_i$, $i = 1, 2$.

Шукані функції на кінцях тріщини задовольняють умови $h(\pm a) = 0$, $\gamma(\pm a) = 0$.

Розв'язок системи (1), (2) побудовано на основі аналітично-числової процедури, викладеної у праці [5].

4. Компоненти вектора теплового потоку

За знайденими функціями стрибка температури $\gamma(x)$ та розкриття тріщини $h(x)$ визначаємо температуру, компоненти вектора теплового потоку та напруження в біматеріалі.

Нормальна і дотична складова вектора теплового потоку на міжфазній лінії мають вигляд

$$q_x^+ = \frac{\lambda}{2} \gamma'(x), \quad q_x^- = -\frac{\lambda}{2} \gamma'(x), \quad |x| < a, \\ q_x^+ = -q_x^- = 0, \quad |x| \geq a, \quad (3)$$

$$q_y^+ = q_y^- = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma'(t) dt}{t-x} + q, \quad -\infty < x < \infty. \quad (4)$$

Тут q_x , q_y – компоненти вектора теплового потоку. Верхніми індексами „+” і „-” позначено граничні значення величин на міжфазній лінії в півплощинах D_1 і D_2 відповідно.

5. Числові результати та їх аналіз

Для числових розрахунків вводимо в розгляд безрозмірні величини: розкриття тріщини $\bar{h} = h/a$, стрибок температури $\bar{\gamma} = \gamma \lambda \eta^-$, коефіцієнт теплопровідності заповнювача $\bar{\lambda}_c = \lambda_c / \lambda$, розтягувальні зусилля $\bar{p} = Kp$, тепловий потік $\bar{q} = q a \eta^-$, змінну $\bar{x} = x/a$, нормальну $\bar{q}_y = q_y a \eta^-$

і дотичну $\bar{q}_x^+ = q_x^+ a \eta^-$ складові вектора теплового потоку. Вважаємо, що термічні дистортивності матеріалів різні ($\eta_1 \neq \eta_2, \eta^- \neq 0$).

Безрозмірний тепловий потік $\bar{q}$ набуває додатних значень ($\bar{q} > 0$), якщо тепловий потік скерований до матеріалу з більшою термічною дистортивністю (ТД), та від'ємних ($\bar{q} < 0$), якщо до матеріалу з меншою ТД.

Числовий аналіз проведено для $\bar{p} = 0.01$.

На рис. 2 проілюстровано вплив теплопровідності заповнювача тріщини і напрямку заданого на нескінченності теплового потоку на розподіл дотичної складової вектора теплового потоку $\bar{q}_x^+$ на міжфазній лінії. Дотична складова вектора теплового потоку $\bar{q}_x^+$ змінюється в межах тріщини, поза тріщиною рівна нулю. Зі збільшенням коефіцієнта теплопровідності заповнювача $\bar{\lambda}_c$ абсолютна величина $\bar{q}_x^+$ зменшується. У випадку теплового потоку, скерованого до матеріалу з більшою ТД, $\bar{q}_x^+$ набуває більших за абсолютною величиною значень порівняно з випадком теплового потоку до матеріалу з меншою ТД. Зі збільшенням $\bar{\lambda}_c$ зменшується різниця між значеннями $|\bar{q}_x^+|$ при зміні напрямку теплового потоку $\bar{q}$.

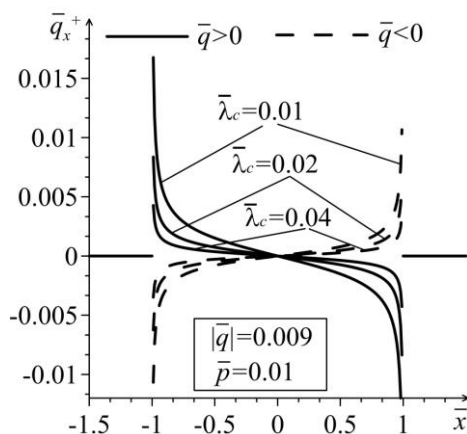


Рис. 2 Розподіл дотичної складової вектора теплового потоку на міжфазній лінії

Розподіл нормальної складової вектора теплового потоку $\bar{q}_y$ на міжфазній лінії для різних значень коефіцієнта теплопровідності заповнювача тріщини $\bar{\lambda}_c$, якщо тепловий потік скерований до матеріалу з більшою ТД, зображено на рис. 3. Бачимо, що $\bar{q}_y$ має мінімальне значення в центрі тріщини, зростає при наближенні до її кі-

нців, де має місце розрив другого роду, а з віддаленням від кінців тріщини спадає, асимптотично прямуючи до значення прикладеного на нескінченності теплового потоку $\bar{q}$. Зі збільшенням коефіцієнта теплопровідності заповнювача $\bar{\lambda}_c$ нормальна складова $\bar{q}_y$ зростає в межах тріщини і спадає поза тріщиною. У випадку, коли прикладений на нескінченності тепловий потік скерований до матеріалу з меншою ТД, розподіл нормальної складової вектора теплового потоку $\bar{q}_y$ на міжфазній лінії по абсолютній величині має аналогічний характер, відрізняючись лише тим, що в центрі тріщини має максимум.

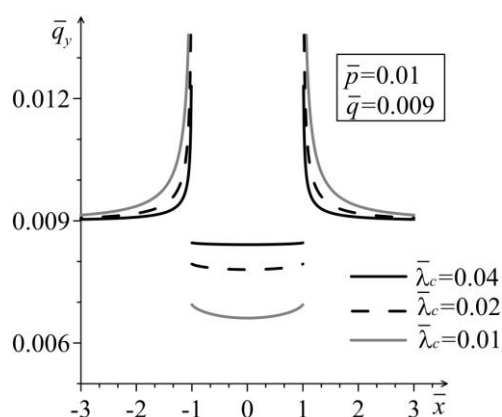


Рис. 3 Розподіл нормальної складової вектора теплового потоку на міжфазній лінії для заданого на нескінченності теплового потоку, скерованого до матеріалу з більшою ТД

На рис. 4 проілюстровано розподіл модуля нормальної складової вектора теплового потоку $|\bar{q}_y|$ вздовж тріщини для двох напрямів теплового потоку, заданого на нескінченності.

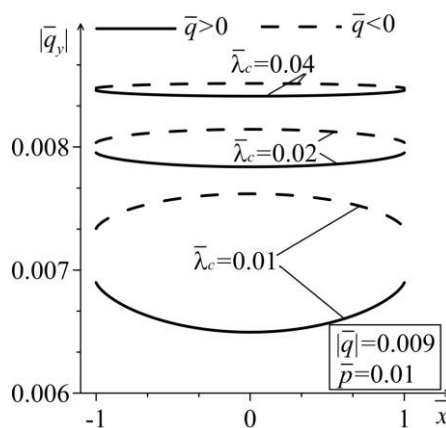


Рис. 4 Розподіл абсолютної величини нормальної складової вектора теплового потоку на берегах

тріщини за двох напрямів теплового потоку, заданого на нескінченності

Бачимо, що при збільшенні $\bar{\lambda}_c$ для обох напрямів заданого на нескінченності теплового потоку $|\bar{q}_y|$ зростає, проте різниця між значеннями $|\bar{q}_y|$ при зміні напрямку потоку зменшується.

6. Висновки

На основі розв'язку задачі термопружності для біматеріалу з міжфазною тріщиною, що містить теплопровідний заповнювач, досліджено розподіл потоку тепла на міжфазній лінії. Проаналізовано залежності нормальної і дотичної складової вектора міжфазного теплового потоку від коефіцієнта теплопровідності заповнювача

тріщини та напрямку прикладеного на нескінченності теплового потоку, з урахуванням того, що термоопір тріщини пропорційний її розкриттю, яке змінюється в процесі навантаження. Показано, що зі збільшенням коефіцієнта теплопровідності заповнювача в межах тріщини абсолютна величина нормальної складової вектора теплового потоку зростає, а абсолютна величина дотичної – спадає. Поза тріщиною відмінною від нуля є нормальна складова, модуль якої зі збільшенням теплопровідності заповнювача спадає. Зі зменшенням коефіцієнта теплопровідності заповнювача тріщини збільшується різниця в розподілах компонент вектора теплового потоку на міжфазній лінії при зміні на протилежний напрямку заданого на нескінченності теплового потоку.

Список використаних джерел

References

1. Подстригач Я.С. Определение температурных полей и напряжений в окрестности теплопроводящих трещин / Я.С. Подстригач, Г.С. Кит // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1967. – Вып. 7. – С. 194-201.
2. Кит Г.С. Термоупругое состояние бесконечного тела с теплопроводящей круговой трещиной / Г.С. Кит, О.В. Побережный // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1970. – № 9. – С. 78-88.
3. El-Borgi S. A partially insulated embedded crack in an infinite functionally graded medium under thermo-mechanical loading / S. El-Borgi, F. Erdogan, L. Hidri // Int. J. Eng. Sci. – 2004. – 42. – P. 371–393.
4. Мартиняк Р.М. Моделювання термомеханічного закриття початково розкритої міжфазної тріщини, наділеної термоопором / Р.М. Мартиняк, Х.І. Гончар, С.П. Нагалка // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – 39, № 5. – С. 59-66.
5. Мартиняк Р.М. Контактні задачі термопружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах / Р.М. Мартиняк, Х.І. Средницька. – Львів: Растр-7, 2017. – 168 с.
6. Schmauder S. Correlation between Dundurs' parameters and elastic constants / S. Schmauder, M. Meyer // Z. Metallkunde. – 1992. – Vol. 83. – P. 524–527.
1. PODSTRIGACH, Ya. S. & KIT, H. S. (1967) Opredelyeniye temperaturnykh poley i naprygeniy v okrestnosti teploprovodyashchih treshchin. *Teplovyye napryageniya v elementah konstrukciy*. 7. p. 194-201.
2. KIT, H. S. & POBEREGNYY, O. V. (1970) Termouprugoye sostoyaniye beskonechnogo tela s teploprovodyashchey krugovoy treshchenoy. *Teplovyye napryageniya v elementah konstrukciy*. 9. p. 78-88.
3. EL-BORGI, S. & ERDOGAN, F. & HIDRI, L. (2004) A partially insulated embedded crack in an infinite functionally graded medium under thermo-mechanical loading. *Int. J. Eng. Sci.* 42. p. 371–393.
4. MARTYNYAK, R. M. & HONCHAR, KH. I. & NAGALKA, S. P. (2003) Modelyuvannia termomekhanichnoho zakryttya pochatkovo rozkrytoji mizhfaznoi trishchyny, nadilenoji termooporom. *Fizyko-khimichna mekhanika materialiv*. 39 (5). p. 59-66.
5. MARTYNYAK, R. M. & SEREDNYTSKA, K. I. (2017) *Kontaktni zadachi termoprugnosti dlya mizhfaznyh trishchyn v bimaterialnyh tilah*. Lviv : Rastr-7.
6. SCHMAUDER, S. & MEYER, M. (1992) Correlation between Dundurs' parameters and elastic constants. *Z. Metallkunde*. 83. p. 524–527.

Надійшла до редколегії 22.08.2017

УДК 539.3

Слободян М. С.¹, к.ф.-м.н., доц,
Матулка М. І.¹, аспірант,
Білаш О. В.², к.е.н., викладач

**Двосторонній розтяг пластини з
круговим отвором та радіальною
тріщиною з урахуванням пластичних
зон поблизу її вершин**

¹Львівський національний університет імені
Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів,
79000, Україна, e-mail: slobkolia@gmail.com.ua
²Національна академія сухопутних військ
імені гетьмана Петра Сагайдачного, вул. Героїв
Майдану, 32, м. Львів, 79012, Україна.

Slobodyan M. S.¹, Ph.D. (Phys.-Math.),
Matulka M.I.¹, postgraduate student,
Bilash O.V.², Ph.D.

**Biaxial tension of plate with circular hole and
radial crack considering plastic zones near its
tips**

¹Ivan Franko National University of Lviv, 1,
Universytetska St., Lviv, 79000, Ukraine,
email: slobkolia@gmail.com.ua
²Hetman Petro Sahaidachnyi National Army
Academy, 32, Heroes of Maidan str., Lviv, 79012,
Ukraine.

У роботі побудовано розв'язок задачі про двосторонній розтяг нескінченної ізотропної пластини з круговим отвором та радіальною тріщиною. При розв'язуванні задачі припускалося, що під дією рівномірно розподіленого розтягуючого навантаження на нескінченності біля вершин тріщини утворилися прямолінійні пластичні зони. Розв'язок задачі побудований з використанням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів і зведений до системи сингулярних інтегральних рівнянь відносно стрибків переміщень у плоскій задачі, яка розв'язана чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Проведено числовий аналіз задачі та побудовані графічні залежності довжини пластичних зон при різних параметрах задачі.

Ключові слова: тріщина, розтяг, круговий отвір, ізотропна пластинка, комплексні потенціали, пластична зона.

The problem of biaxial tension of infinite isotropic plate with circular hole and radial crack is solved. The bound of the circular hole and crack edges are free of external load. It was assumed, that under the influence of uniformly distributed tensial load in infinite, linear plastic zones near tips of the crack were formed. Myzes plasticity conditions are fulfilled at plastic zones as a surface layer. Using methods of theory function of complex variable and complex potentials of Kolosov-Musgelishvili boundary-value problem was built. This problem is solved analytically and the system of singular integral equations regarding to jumps of movement on the crack edges and in plastic zones are obtained. This system of singular integral equations through the method of mechanical quadratures is reduced to a system of algebraic equations which is solved numerically using the Gaussian method. The numerical analysis of the problem is carried out and graphic of dependences of the length of plastic zones are constructed at various geometric parameters of the problem and different values of a uniformly distributed stretching load at infinity. In some cases, the obtained results coincided with the known results obtained in the scientific works by other authors.

Key-words: crack, tension, circular hole, isotropic plate, complex potentials, plastic zone.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Пластинчасті елементи конструкцій використовують у багатьох галузях техніки широко. Їх експлуатаційні характеристики залежать від тріщиноподібних дефектів та отворів, які різко знижують діапазон допустимого навантаження. Під час експлуатації

пластинчатих елементів важливо знати, яким чином дефекти типу тріщин впливають на міцність та механічні характеристики конструкції.

Розв'язанням плоских задач з отворами, шайбами та тріщинами за розтягу пластини займалось багато авторів. Проте в цих роботах не враховувалися пластичні зони, які можуть

утворитися на продовженні тріщин. У [1] проведено огляд досліджень для задач розтягу тіл з тріщиною, у вершині якої утворюються пластичні зони, та наведено критерії руйнування. У статті [2] з використанням умови пластичності Мізеса визначена пластична область на продовженні тріщини у пластині. Задачі розтягу однорідної та кусково-однорідної пластини з однією або двома прямолінійними тріщинами з урахуванням пластичних зон біля вершин розв'язано у [3, 4].

У даній роботі досліджується задача про двовісний розтяг ізотропної пластини з круговим отвором та радіальною тріщиною з урахуванням лінійчатих пластичних зон на її продовженні.

2. Формулювання задачі

Нехай нескінченна ізотропна пластина завтовшки $2h$ містить круговий отвір радіуса R і радіальну тріщину завдовжки $2l$. Межа кругового отвору та береги тріщини вільні від зовнішнього навантаження. Вважається, що під дією рівномірно розподіленого розтягуючого навантаження на нескінченності P_1 і P_2 (див. рис. 1) біля вершин тріщини утворилися пластичні зони завдовжки w_1 і w_2 . У серединній площині пластини виберемо декартову систему координат $Ox\tilde{y}$ з початком у центрі кругового отвору, направивши вісь Ox вздовж тріщини, а вісь $O\tilde{y}$ перпендикулярно до неї, та полярну систему координат з центром у точці O та полярною віссю Ox , а в центрі тріщини виберемо декартову систему координат $O_1x_1y_1$. Межу кругового отвору позначимо через L , лінію, де розміщена тріщина – L_1 , пластичні зони – L'_1 і L''_1 , відстань між центром отвору та центром тріщини – x_0 ; $\tilde{L}_1 = L_1 \cup L'_1 \cup L''_1$.

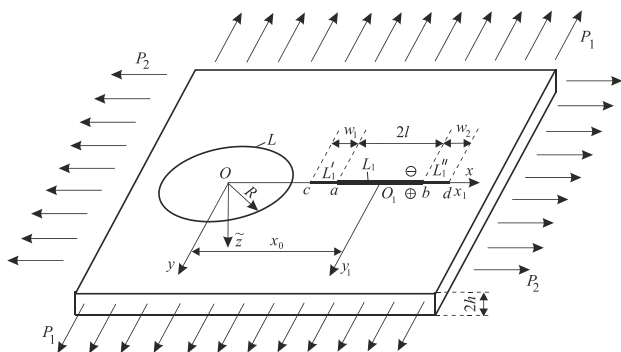


Рис. 1 Схема навантаження пластини та розміщення тріщини

Розв'язок задачі будемо будувати за таких граничних умов:

$$\sigma_{rr} = 0, \sigma_{r\theta} = 0, t \in L, \quad (1)$$

$$\sigma_{x_1y_1}^\pm = 0, x_1 \in \tilde{L}_1; \sigma_{y_1y_1}^\pm = 0, x_1 \in L_1, \quad (2)$$

$$\sigma_{y_1y_1}^\pm = \sigma_0^{(1)}, x_1 \in L'_1; \sigma_{y_1y_1}^\pm = \sigma_0^{(2)}, x_1 \in L''_1, \quad (3)$$

де $\sigma_{x_1y_1}$, $\sigma_{y_1y_1}$, σ_{rr} і $\sigma_{r\theta}$ – компоненти тензора напружень відповідно у декартовій та полярній системах координат; $\sigma_0^{(1)}$ і $\sigma_0^{(2)}$ – невідомі нормальні напруження у пластичних зонах, для яких виконуються умови пластичності Мізеса у вигляді поверхневого шару [5].

3. Розв'язок задачі

З використанням комплексних потенціалів плоскої задачі [6], задовольняючи граничні умови (1)–(2), розв'язок задачі зведений до задач лінійного спряження, на підставі яких отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих стрибків переміщень на берегах тріщини $G(\eta)$, яка набуде вигляду

$$\int_{-1}^1 \{R(\eta, \xi) + S(\eta, \xi)\} G_1(\eta) d\eta = P(\xi) + H(\xi),$$

$$\int_{-1}^1 \{R(\eta, \xi) - S(\eta, \xi)\} G_2(\eta) d\eta = 0, \xi \in [-1, 1], \quad (4)$$

де

$$R(\eta, \xi) = \frac{1}{\pi(\eta - \xi)} + R^I(\eta, \xi) + \left(1 + \frac{1}{X^2}\right) \times$$

$$\times R^{II}(\eta, \xi) + \left(X - \frac{1}{X}\right) R^{III}(\eta, \xi) + \frac{1}{X^2} R^{IV}(\eta, \xi),$$

$$S(\eta, \xi) = S^I(\eta, \xi) + \left(1 + \frac{1}{X^2}\right) S^{II}(\eta, \xi) +$$

$$+ \left(X - \frac{1}{X}\right) S^{III}(\eta, \xi) + \frac{1}{X^2} S^{IV}(\eta, \xi),$$

$$R^I(\eta, \xi) = -\frac{1}{2\pi X} \cdot \frac{\lambda}{TX - 1},$$

$$S^I(\eta, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\lambda}{T} + \frac{\lambda(X^2 - 1)}{X(TX - 1)^2} - \frac{\lambda}{X} \cdot \frac{X^2 + 1}{TX - 1} \right\},$$

$$R^{II}(\eta, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\lambda}{T} + \frac{\lambda(X^2 - 1)}{X(TX - 1)^2} - \frac{\lambda}{X} \cdot \frac{X^2 + 1}{TX - 1} \right\},$$

На рис. 2 наведена графічна залежність обезрозміреної довжини пластичних зон w^* від відносної відстані між центром тріщини на межею кругового отвору ε (рис. а) та від зовнішнього навантаження P_1^* (рис. б). Рис. а) побудовано при $P_2^* = 0.3$, $\lambda = 1$, при чому крива 1 побудована при $P_1^* = 0.4$, крива 2 – при $P_1^* = 0.5$, крива 3 – при $P_1^* = 0.6$. Рис. б) побудовано при $\varepsilon = 2$, $\lambda = 1$, при чому крива 1 побудована при

$P_2^* = 0.4$, крива 2 – при $P_2^* = 0.5$, крива 3 – при $P_2^* = 0.6$. Як бачимо з рис. а), при віддаленні тріщини від отвору довжини пластичних зон зменшуються і прямують до випадку для однієї ізольованої тріщини. З рис. б) бачимо, що із збільшенням навантаження P_1^* довжини пластичних зон збільшуються.

Список використаних джерел

1. Витвицький П.М. Пластические деформации в окрестности трещин и критерии разрушения. (Обзор) / П.М. Витвицький, В.В.Панасюк, С.Я. Ярема // Пробл. Прочности. – 1973. – № 2. – С. 3-18.
2. Castro J.T.P. Comparing improved crack tip plastic zone estimates considering corrections based on T-stresses and on complete stress fields. / J.T.P. Castro, R.A. Sousa, A.A.O. Lopes, L.F. Martha // First IJFatigue & FFEMS Joint WorkShop “Characterization of Crack Tip Stress Fields”. – Forni di Sopra, 7-9 March 2011. – Pp. 58-65.
3. Nykolyshyn M.M. Biaxial tension of a homogeneous isotropic plate with two equal coaxial cracks with regard for plastic zones near their tips / M.M. Nykolyshyn, V.K. Opanasovych, L.R. Kurotchyn, M.S. Slobodyan // Journal of Mathematical Sciences. – 2010. – Vol. 168, № 5. – P. 643-652.
4. Николишин М.М. Двовісний розтяг кусково-однорідної пластини з двома тріщинами на межі поділу матеріалів з урахуванням пластичних зон біля їхніх вершин / М.М. Николишин, В.К. Опанасович, Л.Р. Куротчин, М.С. Слободян // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2014. – № 6. – С. 67-72.
5. Кушнір Р.М. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами / Р.М. Кушнір, М.М. Николишин, В.А. Осадчук. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 320 с.
6. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
7. Панасюк В.В. Распространение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацышин – К.: Наук. Думка. – 1976. – 444 с.

References

1. VITVITSKIY, P.M., PANASUK, V.V. and YAREMA, S.Ya. (1973) Plastic deformations in the vicinity of cracks and destruction criteria. *Problemi prochnosti*. 2. p. 3-18.
2. CASTRO, J.T.P., SOUSA, R.A., LOPES, A.A.O. and MARTHA, L.F. (2011) Comparing improved crack tip plastic zone estimates considering corrections based on T-stresses and on complete stress fields. In *Characterization of Crack Tip Stress Fields*. Forni di Sopra, 7-9 March 2011. Forni di Sopra: Gruppo Italiano Frattura. pp. 58-65.
3. NYKOLYSHYN, M.M., OPANASOVYCH, V. K., KUROTCHYN, L.R. and SLOBODYAN, M.S. (2010) Biaxial tension of a homogeneous isotropic plate with two equal coaxial cracks with regard for plastic zones near their tips. *Journal of Mathematical Sciences*. 168 (5). p. 643-652.
4. NYKOLYSHYN, M.M., OPANASOVYCH, V.K., KUROTCHYN, L. R., and SLOBODYAN, M. S. (2014) Dvovisniy roztyag kuskovo-odnorodnoyi plastini z dvoma trishchinami na megi podilu vaterialiv z urahuvanniam plastichnih zon bilya yihnih vershin. *Fiziko-himichna mehanika materialiv*. 6. p. 67-72.
5. KUSHNIR, R.M., NIKOLISHIN, M.M. and OSADCHUK, V.A. (2003) *Pruzhnyy ta pruzhno-plastychnyy stan obolonok z defectamy*. Lviv: SPOLOM..
6. MUSKHELISHVILI, N.I. (1966) *Nekotorie osnovnie zadachi matematicheskoy teorii uprugosti*. Moscow: Nauka.
7. PANASUK, V.V., SAVRUK, M.P. and DATSYSHIN, A.P. (1976) *Raspredeleniye napragniy okolo treshchin v plastinakh i obolochkah*. Kyiv: Naukova Dumka.

Надійшла до редколегії 19.09.2017.

УДК 532.595+612.13

Соловйова О. М.¹, викладач,
Кізілова Н. М.², д. ф.-м. н., проф.

Дисперсія хвиль в заповнених рідиною в'язкопружних трубках із закріпленою стілкою

¹Харківський національний політехнічний
університет (ХПІ), Харків, Україна,
e-mail: helenfilippova@yahoo.co.uk

²Харківський національний університет
ім. В.Н. Каразіна,
61022, м. Харків, пл. Свободи, 4,
e-mail: kizilova@univer.kharkov.ua

O. M. Solovjova¹,
N. M. Kizilova², Dr. Sci. (Phys.-Math.).

Wave dispersion in the fluid-filled viscoelastic tubes with fixed walls

¹Kharkiv National Polytechnical University
(«KhPI»), 61002, Kharkov, Kirpichova st., 2,
e-mail: helenfilippova@yahoo.co.uk

²V.N. Karazin Kharkov National University,
61022, Kharkov, Svobody sq., 4,
e-mail: kizilova@univer.kharkov.ua

У зв'язку з дослідженням поширення пульсових хвиль в артеріях, в роботі вивчається дисперсія хвиль в заповнених в'язкою нестисливою рідиною трубках із нестисливого в'язкопружного матеріалу, поведінка якого відповідає моделі Зенера. Вважається, що рідина однорідна та ньютонівська, а її рух осесиметричний. Трубка вважається товстостінною, а її зовнішня поверхня нерухома, що відповідає глибоким артеріям, які закріплені до кісток, м'язів та інших тканин. Поширення осесиметричних хвиль у в'язкій нестисливій рідині описується рівняннями Нав'є-Стокса, а нестисливої стінки – рівняннями класичної теорії в'язкопружності. Залежність механічних властивостей стінки від частоти описується трьохелементною релаксаційною моделлю. Розв'язок розшукується у вигляді нормальної моди. Використовуючи умови неперервності компонент швидкостей та напружень на границі рідина-стінка та відсутність переміщень на зовнішній стінці трубки, отримано дисперсійне рівняння та досліджено його розв'язки. Чисельне моделювання проведено для параметрів моделі, які відповідають здоровій та патологічно зміненій стінці артерій. Показано, що у патологічно змінених артеріях швидкості різних гармонік суттєво відрізняються, а в здорових – відрізняються неістотно.

Ключові слова: артерія, пульсові хвилі, дисперсія хвиль, м'які хвилеводи.

Wave dispersion in the fluid-filled tubes from an incompressible viscoelastic material of the Zener type rheological model is studied in connection to pulse wave propagation in arteries. The fluid is assumed to be homogeneous and Newtonian and its motion is axisymmetric. The tube is supposed thick-walled and its outer surface is motionless, that corresponds to the deep arteries which are attached to the bones, muscles and other tissues. The motion of the incompressible fluid is described by the linearized Navier-Stokes equations, while the motion of the incompressible wall is governed by classical theory of viscoelasticity. The frequency dependence of the wall mechanical properties are represented by a three parameter, relaxation-type model. The solution of the problem is found in the form of normal mode. Continuity of the stress and velocity vectors at the fluid-solid interfaces and zero displacements of the outer surface of the tube are used as boundary conditions. The dispersion equation and its solutions are obtained. Numerical computations have been carried out for the model parameters corresponded to the normal and pathological arterial wall. It was shown, the speeds of different harmonics in the pathological arteries are essentially different, while in the healthy ones their speeds are the same.

Key Words: artery, pulse waves, wave dispersion, soft waveguides.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я. О.

1. Вступ

Поширення малих збурень у заповнених рідиною деформівних трубках досліджується

як у зв'язку з технічними хвилеводами, так і з поширенням пульсових хвиль в артеріях. За рахунок підбору матеріалів стінки трубки, можна

отримати оптимальні хвилеводи з мінімальними витратами енергії [1]. Але в артеріях та їх штучних замінниках (імплантах) швидкість хвиль залежить від частоти. Величини швидкостей мають велике значення для діагностики патологій судин, клапанів серця та системи мікроциркуляції [1, 2]. Поширення малих збурень $\sim e^{i(\omega t + \gamma x)}$ у заповнених рідиною пружних циліндрах розглядалося раніше в рамках моделей теорії оболонок [3-5], а також товстостінних трубок [6,7]. Там же були отримані дисперсійні рівняння та досліджені залежності сталої поширення хвиль γ від кругової частоти ω . Дисперсійні рівняння у випадку ідеальної рідини та ненавантаженої стінки були проаналізовані та порівнювалися з відповідними даними для порожнистого циліндра [8].

У роботі досліджується дисперсія хвиль у випадку в'язкої рідини та товстостінної трубки з в'язкопружного матеріалу, зовнішня поверхня якої закріплена, що відповідає глибоким артеріям, які прикріплені до кісток, м'язів та інших тканин.

2. Огляд результатів

В історично першій роботі [3] для випадку в'язкої рідини та тонкостінної трубки було отримано дисперсійне співвідношення у вигляді

$$\gamma(\omega) = \frac{c_0^2(1-\sigma^2)}{1-F_{01}(\omega)}, \quad (1)$$

де σ - коефіцієнт Пуасона матеріалу стінки, $F_{01} = 2J_1(\beta)/(\beta J_0(\beta))$, $\beta = \alpha i^{3/2}$, $i = \sqrt{-1}$, $\alpha = R\sqrt{\omega\rho/\mu}$, $J_{1,0}$ - функції Бесселя першого роду порядків 1,0, $c_0 = \sqrt{Eh/2\rho R}$, ρ - щільність рідини, R, E, h - радіус трубки, модуль Юнга і товщина стінки.

Для товстостінної трубки з ненавантаженою поверхнею дисперсійне рівняння має більш складний вигляд [7]

$$4(1-F_{01})\left(\frac{\gamma c_0}{\omega}\right)^4 + (F_{01}(4\sigma + 2k - 1) - 4 - 2k)\left(\frac{\gamma c_0}{\omega}\right)^2 + (2k + F_{01})(1 - \sigma^2) = 0, \quad (2)$$

де $k = \rho_w h / \rho R$, ρ_w - щільність матеріалу стінки. В [7] отримано рівняння, аналогічне рівнянню (2), для випадку $k = 0$ (за рахунок $h = 0$).

Бікватратне рівняння (2) має два корені, які відповідають більш повільним рідинним модам Юнга, - це хвилі тиску та швидкості, що розповсюджуються в рідині. Друга пара коренів (2) відповідає більш швидким модам Лемба, які поширюються по стінках трубки.

3. Постановка та розв'язок задачі

Поширення осесиметричних хвиль у в'язкій нестисливій рідині описується рівняннями Нав'є-Стокса, а нестислової стінки - рівняннями класичної теорії в'язкопружності

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v}, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad \rho_s \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = -\nabla p_s + \operatorname{div} \hat{\sigma}. \quad (4)$$

Граничні умови мають вигляд [2]

$$r = 0: \quad v_r = 0, \quad (5)$$

$$r = R: \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \vec{v}, \quad -p + \mu \frac{\partial v_r}{\partial r} = -p_s + \sigma_{rr}, \quad (6)$$

$$r = R_0 + h: \quad \vec{u} = 0, \quad (7)$$

де $\vec{v} = (v_r, 0, v_x)$, $\vec{u} = (u_r, 0, u_x)$ - швидкість рідини та переміщення стінки в пов'язаній з віссю трубки циліндричній системі координат, p, p_s - гідростатичні тиски в рідині та стінці, $\hat{\sigma}$ - тензор напружень стінки, для якої приймемо модель Зенера:

$$\tau_w \frac{d\hat{\sigma}}{dt} + \hat{\sigma} = E\hat{\varepsilon} + \mu_w \frac{d\hat{\varepsilon}}{dt}, \quad (8)$$

де $\hat{\varepsilon}$ - тензор деформацій, μ_w - в'язкість стінки, τ_w - час релаксації напружень.

Розв'язок системи (3)-(8) шукаємо у вигляді нормальної моди $f(t, r, x) = f_0(r)e^{i(\omega t - \gamma x)}$,

$$f = \{v_r, v_x, u_r, u_x, p, p_s\}.$$

Розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь для амплітуд, у випадку закріпленої стінки, був виписаний раніше [9]. Звичайним шляхом із (5)-(7) отримаємо дисперсійне співвідношення у вигляді

$$\det |A_{ik}| = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{де } A_{11} &= iJ_1(i\gamma a), \quad A_{21} = -\gamma J_0(i\gamma a), \\ A_{41} &= i\rho\omega J_0(i\gamma a) - 2\mu i\gamma J_1'(i\gamma a), \quad A_{51} = 0, \\ A_{31} &= -2\mu\gamma^2 J_1(i\gamma a), \quad A_{61} = 0, \quad A_{12} = iJ_1(ika), \\ A_{22} &= -kJ_0(ika), \quad A_{32} = -\mu(\gamma^2 + k^2)J_1(ika), \\ A_{42} &= -2\mu i\gamma J_1'(ika), \quad A_{52} = 0, \quad A_{62} = 0, \\ A_{13} &= \omega J_1(\alpha a), \quad A_{23} = \omega\alpha J_0(\alpha a), \\ A_{33} &= \mu_w(\gamma^2 - \alpha^2)J_1(\alpha a), \quad A_{43} = 2\mu_w i\gamma J_1'(\alpha a), \\ A_{53} &= -i\gamma J_1(\alpha b), \quad A_{63} = -\alpha J_0(\alpha b), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{14} &= \omega Y_1(\alpha a), \quad A_{24} = \omega \alpha Y_0(\alpha a), \\ A_{34} &= \mu_w(\gamma^2 - \alpha^2) Y_1(\alpha a), \quad A_{44} = 2\mu_w i \gamma Y_1'(\alpha a), \\ A_{54} &= -i \gamma Y_1(\alpha b), \quad A_{64} = -\alpha Y_0(\alpha b), \\ A_{15} &= \omega J_1(i \gamma a), \quad A_{25} = i \omega \gamma J_0(i \gamma a), \\ A_{35} &= 2\mu_w \gamma^2 J_1(i \gamma a), \\ A_{45} &= \rho \omega^2 J_0(i \gamma a) + 2\mu_w i \gamma J_1'(i \gamma a), \\ A_{55} &= -i \gamma J_1(i \gamma b), \quad A_{65} = -i \gamma J_1(i \gamma b), \\ A_{16} &= \omega Y_1(i \gamma a), \quad A_{26} = \omega Y_1(i \gamma a), \\ A_{36} &= 2\mu_w \gamma^2 Y_1(i \gamma a), \\ A_{46} &= \rho \omega^2 Y_0(i \gamma a) + 2\mu_w i \gamma Y_1'(i \gamma a), \\ A_{56} &= -i \gamma Y_1(i \gamma b), \quad A_{66} = -i \gamma Y_0(i \gamma b), \quad \text{де } Y_{0,2} - \\ &\text{функції Бесселя другого роду порядків 0 та 1,} \\ &\text{штрих відповідає похідній від функції,} \\ &\beta^2 = \gamma^2 + i \omega / \nu, \quad k^2 = \omega^2 \rho_w / \mu_w - \gamma^2. \end{aligned}$$

4. Результати розрахунків

Чисельні розрахунки залежностей $\gamma(\omega)$ з (9) проводилися з використанням параметрів, які відповідають стінкам артерій і крові в нормі та при захворюваннях [1,2]: $\rho = 1050 - 1080 \text{ кг/м}^3$, $\rho_w = 1000 - 1200 \text{ кг/м}^3$, $R = 10^{-3} - 10^{-2} \text{ м}$, $\sigma = 0.4 - 0.5$, $h = (0.2 - 0.4)R$, $E = 10^6 - 10^8 \text{ Па}$, $\mu = (3 - 20) \cdot 10^{-3} \text{ Па/с}$, $\mu_w = 0.1 - 10 \text{ Па/с}$,

$\tau_w = 10^{-3} - 10^{-1} \text{ с}$. У кожному з інтервалів було вибрано по три різних значення параметру. Результати розрахунків для параметрів здорової людини та пацієнта з віковою деградацією стінки наведені на рис. 1 а, б відповідно.

У нормальному стані швидкість хвиль швидко зростає зі зростанням частоти, і швидкості 5-10 гармонік майже однакові (рис.1 а), що відповідає результатам вимірювань на здорових волонтерах [1]. У патологічно змінених артеріях швидкості різних гармонік суттєво відрізняються (рис.1 б). Підвищення жорсткості стінки веде до прискорення поширення хвиль, особливо височастотних гармонік. У великих пружних артеріях швидкості в нормі $c=5-6 \text{ м/с}$, а при атеросклерозі $c=12-15 \text{ м/с}$. У малих артеріях ці значення більші, $c=8-10 \text{ м/с}$ та $c=15-20 \text{ м/с}$ відповідно.

5. Висновки

Таким чином, запропонована модель дозволяє обчислювати швидкості поширення пульсових хвиль з достатньо високою точністю, а отримані дисперсійні залежності відповідають результатам численних експериментальних вимірювань. Розроблена модель буде використана для обробки даних власних вимірювань.

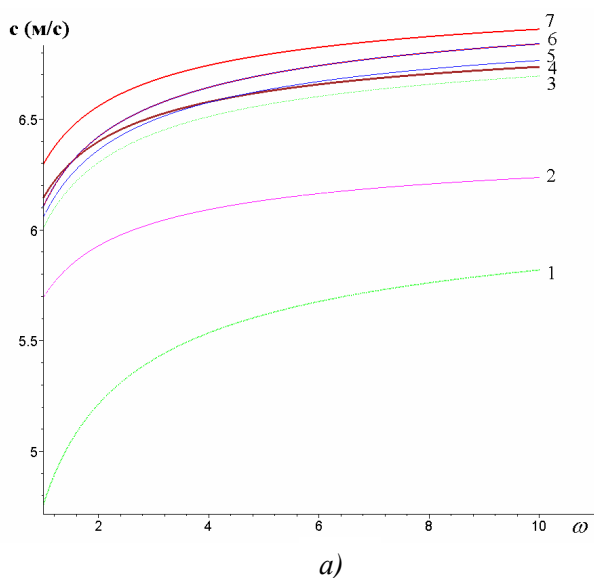
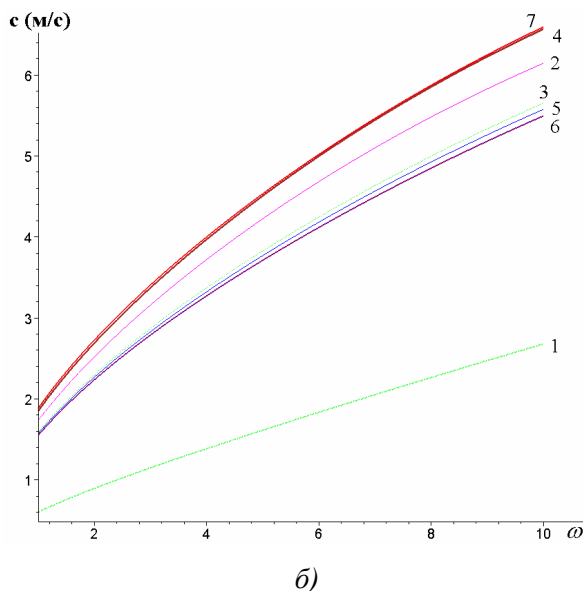


Рис. 1 Залежності $c(\omega)$ для артерій: $R = 1 \text{ см}$, $E = 10^6 \text{ Па}$ (а); $R = 1 \text{ мм}$, $E = 10^5 \text{ Па}$ (б)

$$\begin{aligned} \text{при } \left\{ \frac{\rho}{\rho_w}, \frac{\mu}{\mu_w} \right\} &= \{1; 0.04\} \text{ (1)}, \{1.05; 0.04\} \text{ (2)}, \{1.1; 0.04\} \text{ (3)}, \{1.1; 0.04\} \text{ (4)}, \\ &\{1.5; 0.04\} \text{ (5)}, \{1; 0.4\} \text{ (6)}, \{1.5; 0.4\} \text{ (7)}. \end{aligned}$$

Список використаних джерел

1. *Milnor W.R. Hemodynamics* / W. R. Milnor. – Baltimore: Williams & Wilkins, 1989. – 278 p.
2. Кизилова Н. Н. Новые направления и перспективы теории пульсовых волн в артериях / Н. Н. Кизилова // Современные проблемы биомеханики. – Москва: Изд-во МГУ, 2006. – 11. – С. 44–63.
3. *Witzig K. Über erzwungene Wellenbewegungen zäher, inkompressibler Flüssigkeiten in elastischen Röhren* / K. Witzig. – Bern: University of Bern, 1914. – 54 p.
4. Селезов И. Т. О распространении малых возмущений в упругой цилиндрической оболочке, заполненной жидкостью / И. Т. Селезов // Прикл. мех. 1965. - 1, №3. - С. 10-16.
5. Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ / М.А.Ильгамов. – Москва: Наука. – 1969. – 184 с.
6. *Morgan G.W. Wave propagation in a viscous liquid contained in a flexible tube* / G.W. Morgan, J.P. Kiely // J. Acoust. Soc. Am. – 1954. – 26. – С. 323-328.
7. *Womersley J.R. Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube. I. The linear approximation for long waves* / J.R. Womersley // Phil. Mag. – 1955. – 46. С. 199-221.
8. Гринченко В.Т. Распространение волн в полой упругой цилиндрической оболочке с жидкостью / В.Т. Гринченко, Г.Л. Комиссарова // Прикл. мех. – 1984. – 20, №1. – С.21–26.
9. Кизилова Н.Н. Отражение волн давления в вязкоупругих трубках при разных граничных условиях: приложение к анализу пульсовых колебаний стенок артерий / Н.Н. Кизилова, Е.Н. Филиппова // Тези доповідей Всеукраїнської наук. конф. молодих вчених і студентів з диференціальних рівнянь та їх застосувань, присвяченої 100-річчю ювілею Я.Б. Лопатинського». – Донецьк. – 2006. – с.71-72.

References

1. MILNOR, W. (1989) *Hemodynamics*. Baltimore: Williams & Wilkins.
2. KIZILOVA, N. (2006) *Novyye napravleniya i perspektivy teorii pulsovyykh voln v arteriyah. Sovremennyye problemy biomehaniki*. 11. p.44-63
3. WITZIG, K. (1914) *Über erzwungene Wellenbewegungen zäher, inkompressibler Flüssigkeiten in elastischen Röhren*. Bern: University of Bern.
4. SELEZOV, I. (1965) *O rasprostraneni malykh vozmushcheniy v uprugoy cylindricheskoy obolochke, zapolnennoy zhidkostyu. Prikl. meh.* 1(3). p.10-16.
5. ILGAMOV, M. (1969) *Kolebaniya uprugih obolochek, soderzhaschih zhidkost i gaz*. Moskva: Nauka.
6. MORGAN, G. and KIELY, J. (1954) *Wave propagation in a viscous liquid contained in a flexible tube. J. Acoust. Soc. Am.* 26. p.323–328.
7. WOMERSLEY, J. (1955) *Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube. I. Phil. Mag.* 46. p.199-221.
8. GRINCHENKO, V. and KOMISSAROVA, G. (1984) *Rasprostranenie voln v polom uprugom tsilindre s zhidkostyu. Prikl. meh.* 20(1). p.21-26.
9. KIZILOVA, N. (2006) *Otazhenie voln davleniya v vyazkouprugih trubkakh pri raznykh granichnykh usloviyakh: prilozhenie k analizu pulsovyykh kolebaniy stenok arteriy. In Vseukrayinska Naukova Conferentsiya molodyh vchenykh i studentiv z diferentsialnih rivnyan ta yih zastosovan, prisvyachena 100-richnomu yuvileyu Ya.B. Lopatinskogo. Donetsk: Tezi dopovidey.* p.71-72.

Надійшла до редколегії 18.09.17 р.

УДК 532.595

Тимоха О.М.^{1,2}, д.ф.-м.н., чл.-кор. НАНУ,
Райновський І. А.², аспірант.

Резонансні усталені хлюпання у вертикальних баках, що рухаються періодично у тривимірному просторі

¹ Центр Досконалості “Автономні морські
операції та системи”, Норвезький університет
природничих та технологічних наук, NO-7491,
Трондхейм, Норвегія,
e-mail: alexander.timokha@ntnu.no

² Інститут математики НАН України, вул.
Терещенківська 3, Київ, 01004, Україна,
e-mail: ihor.raynovsky@gmail.com

A. N. Timokha^{1,2}, Dr. Sci., (Phys.-Math.),
I. A. Raynovsky², PhD Student.

Resonant steady-state sloshing in upright tanks performing a three-dimensional periodic motion

¹ The Centre of Excellence “Autonomous Marine
Operations and Systems”, Norwegian University of
Science and Technology, NO-7491, Trondheim,
Norway,
e-mail: alexander.timokha@ntnu.no

² Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine,
Tereshchenkivska 3, str., Kiev, 01004, Ukraine,
e-mail: ihor.raynovsky@gmail.com

Вивчається усталене хлюпання рідини у вертикальному циліндричному контейнері, який рухається циклічно у просторі із частотою, близькою до власної частоти коливань рідини. Використовується нелінійна нескінченновимірна модальна система Наріманова-Мойсєєва. Показано, що з точністю до членів вищого порядку малості усталені (періодичні) розв'язки модальної системи співпадають із такими, що виникають для орбітальних (еліптичних) збурень посудини. Проведено оцінку значень лінійних коефіцієнтів в'язкого демпфування (поверхневий шар на змоченій поверхні баку та об'ємне тертя), використовуючи схему Майлза, з метою показати, що ефектом демпфування можна нехувати для індустриальних контейнерів, але не для посудин біореакторів. Порівняно амплітудно-частотні характеристики усталених резонансних хвиль із демпфуванням та без нього для різних величин співвідношень головних вісей еліпсу орбітальних збурень. Частковий (але важливий результат) полягає у зникненні кругової хвилі із напрямом, протилежним до збурення, при зменшенні меншої вісі орбіти збурень, в той час як така кругова хвиля існувала в рамках модель непемпфованого руху рідини.

Ключові слова: хлюпання рідини, демпфування, усталені хвилі.

The steady-state sloshing in an upright circular cylindrical tank due to its three-dimensional prescribed periodic motion with the forcing frequency close to the lowest natural sloshing frequency is studied employing the nonlinear Narimanov-Moiseev infinite-dimensional modal system. We show that, within to the higher-order quantities, the steady-state (periodic) solutions of the system can be regarded to those caused by orbital (elliptic) harmonic tank excitations. The linear viscous damping rates (accounting for boundary layer and viscous bulk effect) are evaluated by using the Miles' estimate to show that the damping may be neglected for industrial containers but not for bioreactors. The damped and undamped steady-state response curves are compared versus the ellipse axes ratio of the forcing orbit. A particular (but important) result consists of eliminating the counter-directed (to the forcing direction) swirling with decreasing the minor semi-axis of the excitation orbit while the latter swirling type existed within the framework of the undamped sloshing model.

Keywords: sloshing, damping, steady-state waves.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

An inviscid incompressible liquid with irrotational flows partly fills a rigid upright circular cylindrical tank, which performs a uniform small-amplitude cyclic three-dimensional sway-surge-pitch-roll motion with the forcing period close to the highest natural sloshing period. Fig. 1 demonstrates

the liquid domain $Q(t)$, the free surface $\Sigma(t)$ and the wetted tank surface $S(t)$. Sloshing is considered in the tank-fixed coordinate system $Oxyz$ (Oxy coincides with the mean free surface Σ_0). The mean

liquid depth-to-tank radius ratio h/r_0 is a finite value and there are no secondary resonances [1].

The problem is studied by using the infinite-dimensional Narimanov-Moiseev nonlinear modal system [1,2], which couples the free-surface generalized coordinates $p_{Mi}(t)$ and $r_{mi}(t)$ in the Fourier representation of $\Sigma(t): z = \zeta(r, \theta, t) =$

$$= \sum_{M,i} J_M(k_{Mi}r) \cos(M\theta) p_{Mi}(t) + \\ + \sum_{m,i} J_m(k_{mi}r) \sin(m\theta) r_{mi}(t), \quad J'_M(k_{Mi}r_0) = 0.$$

First, we remark [2] that the periodic (steady-state) solutions associated with a combined sway-surge-roll-pitch resonant cyclic tank forcing are mathematically identical, within to higher-order terms, to certain steady-state solutions occurring for an elliptic (orbital) horizontal harmonic tank excitation. Those orbital excitations are a common for containers with bioliquids (bioreactors [3]).

Secondly, by conducting an extensive numerical analysis, we show that the linear viscous damping becomes important due to increasing bulk liquid viscosity and boundary layer effect [4,5]. The associated linear damping terms are incorporated into the Narimanov-Moiseev nonlinear modal system. The damping coefficients at these terms are then chosen according to the Miles' estimate [5], for which an alternative derivation is proposed.

Thirdly, asymptotic periodic solutions of the nonlinear Narimanov-Moiseev system, which is equipped with the linear damping terms, are derived for the orbital (elliptic) tank forcing. These solutions describe the so-called steady-state resonant sloshing regimes. The resonance means that the forcing frequency is close to the lowest natural sloshing frequency. The derivations [1,2,4,6] introduce the four lowest-order amplitude components $a, \bar{a}, \bar{b}, b$ of the primary excited (perpendicular) natural sloshing modes ($J_1(k_{11}r) \cos \theta$ and $J_1(k_{11}r) \sin \theta$ in the Fourier presentation of the free surface) read as $p_{11}(t) = a \cos t + \bar{a} \sin t$ and $r_{11}(t) = \bar{b} \cos t + b \sin t$. A solvability condition with respect to $a, \bar{a}, \bar{b}, b$ must then be satisfied [1,2,6]. It takes the form of a system of nonlinear algebraic equations. We rewrite the system in terms of the two 'integral' amplitudes $A = \sqrt{a^2 + \bar{a}^2}$, $B = \sqrt{b^2 + \bar{b}^2}$ and the two phase-lags ψ and φ so that $a = A \cos \psi$, $\bar{a} = A \sin \psi$, $\bar{b} = B \cos \varphi$, $b = B \sin \varphi$:

$$\begin{cases} A [\bar{\sigma}^2 - 1 + m_1 A^2 + (m_3 - F) B^2] = \varepsilon_x \cos \psi, \\ A [DB^2 + \xi] = \varepsilon_x \sin \psi, \\ B [\bar{\sigma}^2 - 1 + m_1 B^2 + (m_3 - F) A^2] = \varepsilon_y \sin \varphi, \\ B [DA^2 - \xi] = \varepsilon_y \cos \varphi; \end{cases}$$

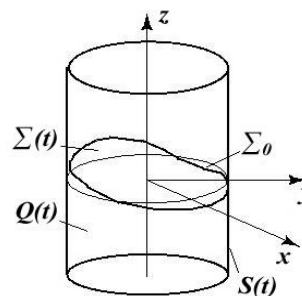


Fig. 1 Sketch of tank and adopted nomenclature.

$F = (m_3 - m_1) \cos^2 \alpha$, $D = (m_3 - m_1) \sin \alpha \cos \alpha$, where $\bar{\sigma}_{11} = \sigma_{11} / \sigma$, $\alpha = \psi - \varphi$, $0 \leq \varepsilon_y \leq \varepsilon_x \neq 0$, and $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ are proportional to the forcing amplitudes along the Ox, Oy -axes, respectively (see, Fig. 1). The coefficients m_1 and m_3 are known functions of the mean liquid depth whose explicit form can be found in [1,2], but $\xi = 2\xi_{11}$ (damping rate of the two lowest natural sloshing modes). As long as we know A, B and the phase-lag difference α for any fixed σ / σ_{11} , one can write down the asymptotic steady-state solution and examine its stability by using the first (linear) Lyapunov method [4].

Fourthly, we conduct an extensive numerical parameter study of the stable/unstable response curves in the $(\sigma / \sigma_{11}, A, B)$ -space and give a physical interpretation of the corresponding steady-state regimes. Illustrative numerical examples are presented in Figs. 2 and 3 for some ratios $\delta = \varepsilon_y / \varepsilon_x$ of the orbital forcing; other input parameters are fixed.

The undamped resonant steady-state response curves for the longitudinal excitation ($\varepsilon_y = 0$, $\xi = 0$) are described in [1,6]. Planar (standing) and swirling (progressive angular) steady-state wave regimes, their stability ranges, are established and discussed. These response curves are now compared with the damped ones ($\xi = 0.02$) in the top panels of Figs. 2 and 3. The response curves in the $(\sigma / \sigma_{11}, A)$ -plane imply the planar standing wave regime but the three-dimensional curves correspond to swirling. We see that the linear damping weakly affects the stability

frequency ranges of the steady-state wave regimes (irregular liquid motions are expected between E_1 and $H(H_1)$) but the damping eliminates the infinite

curves limits from Fig. 2 so that P and E_2 become points where swirling bifurcates from the standing waves.

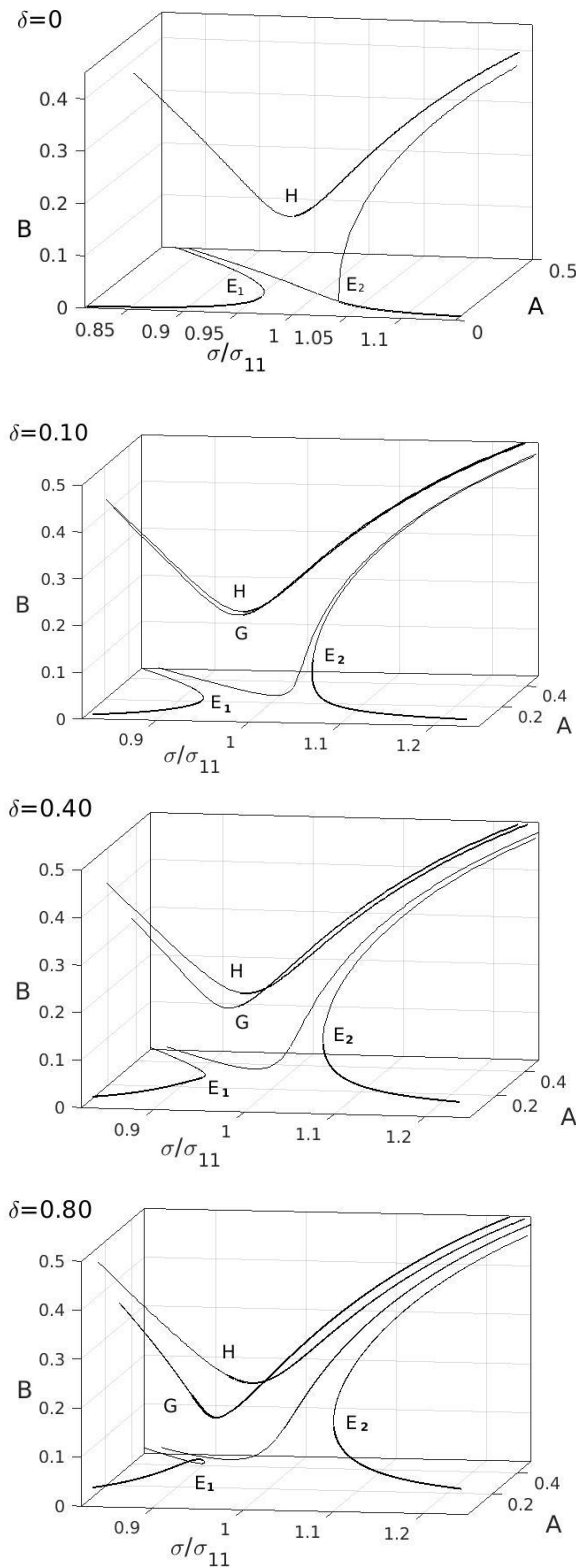


Fig. 2 The response curves for the undamped steady-state resonant sloshing for $\delta = \varepsilon_y / \varepsilon_x$. The resonant sloshing due to an elliptic horizontal harmonic forcing with the nondimensional amplitudes $\eta_x = 0.01$, $\eta_y = \delta \eta_x^{227}$. The bold lines mark the stability.

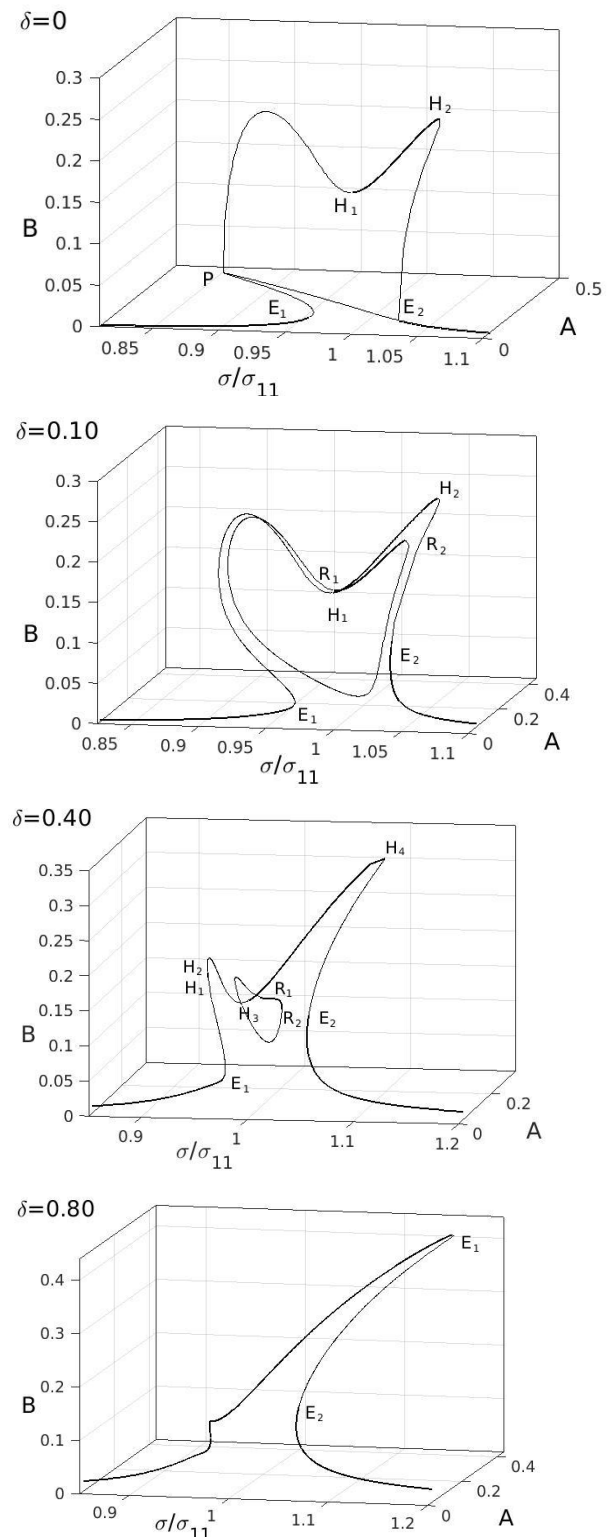


Fig. 3 The same as in Fig.2 but for the damped sloshing with $\xi = 0.02$.

What happens with the resonant steady-state response curves for elliptic tank excitations (non-zero ratios δ) is demonstrated in Figs. 2 (undamped) and 3 (damped case). All points on the response curves correspond then to swirling and there are no standing waves. As a consequence, the $E_1(P)E_2$ curves do not belong to the horizontal plane as $\delta \neq 0$. In addition, whereas $\xi \neq 0$, the response curves split at E_2 . Furthermore, the H type branch of the longitudinal excitations splits into the two different branches as $\xi \neq 0$ implying the two angular progressive waves occurring in opposite directions, co- and counter-directed with the orbital forcing, respectively. The co-directed waves are associated with branches marked with the H points but the counter-directed swirling – with G in Fig. 2 (undamped) and R in Fig. 3 (damped sloshing).

The damping dramatically changes the resonant steady-state branching, especially, for the counter-directed swirling. With non-zero ξ the two steady-state branches (associated with co- and counter-directed swirling) become continuously connected. The counter-directed angular waves are presented by

the loop-like curve R in Fig. 3. This curve type vanishes at certain δ (about 0.5 in the numerical example). As a consequence, the effective frequency ranges, where stable resonant swirling exists, remain approximately the same for both the damped and undamped cases if the swirling is co-directed with the orbital forcing. In the contrast, the stable counter-directed swirling always exists in the primary resonant zone (to the right of G in Fig. 2) for the undamped case, but analogous stable angular waves (zone R_1R_2 in Fig. 3) are absent in the damped case with increasing δ .

In summary, being motivated in studying the resonant steady-state damped sloshing in bioreactors [3], we incorporated associated linear damping terms into the Narimanov-Moiseev nonlinear modal system and constructed an asymptotic steady-state solution. The damping coefficients are chosen according to Miles [5]. By analyzing the response curves for both undamped and damped cases, we showed importance of damping in containers, for purely orbital (non-longitudinal) excitations.

Список використаних джерел

References

1. Faltinsen O. M. Resonant sloshing in an upright tank / O. M. Faltinsen, I. A. Lukovsky, A. N. Timokha // *Journal of Fluid Mechanics*, 2016. – № 804. – P. 608–645.
2. Raynovskyy I. A. Resonant liquid sloshing in an upright circular tank performing a periodic motion / I. A. Raynovskyy, A. N. Timokha // *Journal of Numerical and Applied Mathematics*, 2016. – № 2 (122). – P. 71–82.
3. Reclari M. Hydrodynamics of orbital shaken bioreactors / M. Reclari // PhD Thesis № 5759. – Ecole Polytechnique Federale de Lausanna, 2013. – P. 159.
4. Faltinsen O. M., Timokha A. N. Resonant three-dimensional sloshing in a square-base basin. Part 4. Oblique forcing and viscous damping / O. M. Faltinsen, A. N. Timokha // *Journal of Fluid Mechanics*, 2017. – № 822. – P. 139-169.
5. Miles J. W. A note on interior vs. boundary-layer damping of surface waves in a circular cylinder / J. W. Miles // *Journal of Fluid Mechanics*, 1998. – № 364. – P. 319–323.
6. Lukovsky I. A. Nonlinear dynamics: Mathematical models for rigid bodies with a liquid / I. A. Lukovsky. – Berlin: De Gruyter, 2015. – 410 c.
1. FALTINSEN, O., LUKOVSKY, I. & TIMOKHA, A. (2016) Resonant sloshing in an upright tank. *Journal of Fluid Mechanics*. 804, pp. 608-645.
2. RAYNOVSKYY, I., TIMOKHA, A. (2016) Resonant liquid sloshing in an upright circular tank performing a periodic motion. *Journal of Numerical and Applied Mathematics*. 2 (122). pp. 71-82.
3. RECLARI, M. (2013) *Hydrodynamics of orbital shaken bioreactors*. PhD Thesis No 5759. Ecole Polytechnique Federale de Lausanna.
4. FALTINSEN, O., TIMOKHA, A. (2017) Resonant three-dimensional sloshing in a square-base basin. Part 4. Oblique forcing and viscous damping. *Journal of Fluid Mechanics*. 822. p. 139-169.
5. MILES, J.W. (1998). A note on interior vs. boundary-layer damping of surface waves in a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*. 364. pp. 319-323.
6. LUKOVSKY, I.A. (2015) *Nonlinear dynamics: Mathematical models for rigid bodies with a liquid*. Berlin : De Gruyter.

Надійшла до редколегії 09.08.2017

УДК 532.5

Троценко Я. П., аспірант.

Автоколивальні процеси в циліндричному каналі зі стенозами

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Акад.
Глушкова, 4-е,
e-mail: yaroslav.p.trotsenko@gmail.com

Y. P. Trotsenko, Ph.D. student.

Self-sustained oscillations in a cylindrical duct with stenoses

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e,
e-mail: yaroslav.p.trotsenko@gmail.com

Досліджено течію в'язкої нестисливої рідини у циліндричному каналі з двома послідовно розташованими стенозами (звуженнями) на основі чисельного розв'язання нестационарних рівнянь Нав'є-Стокса. Встановлено, що при обраних параметрах течія рідини в області між стенозами характеризується наявністю нестійкого зсувного шару, у якому утворюється послідовний ряд вихорів. Ці вихори викликають стійкі періодичні автоколювання профілю швидкості в отворі другого стенозу, які можуть бути джерелом звуку в каналі.

Ключові слова: канал зі стенозами, вихрові структури, автоколювання.

The flow of viscous incompressible fluid in a cylindrical duct with two serial stenoses (contractions) is studied by the numerical solution of unsteady Navier-Stokes equations. The discretization procedure is based on the finite volume method using the TVD scheme for the discretization of the convective terms and second order accurate in both space and time difference schemes. The resulting system of non-linear algebraic equations is solved by the PISO algorithm. It is established that under the chosen parameters the fluid flow in the region between the stenoses is non-stationary and is characterized by the presence of an unstable shear layer formed by the boundary layer that breaks off from the surface of the first stenosis. In the interstenosis cavity, a circulating motion of the medium is formed that transfers part of the kinetic energy of the jet from the region of the orifice of the second stenosis upstream. Due to this, a series of vortices is formed in the shear layer that causes stable periodic self-sustained oscillations of the velocity profile in the orifice of the second stenosis. These oscillations may serve as an acoustic source in the duct.

Key Words: duct with stenoses, vortex structures, self-sustained oscillations.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Течія рідини (газу) в нерегулярних каналах широко зустрічається як в природі, так і в технічних приладах. Нерідко виникають випадки, коли потік, зустрічаючи на своєму шляху перешкоди, починає генерувати акустичні колювання [1]. Дослідження таких процесів є непростою завданням як в експериментальному, так і в теоретичному планах [2, 3]. Тому на даний момент ще не достатньо кількісних даних про зв'язки рівнів і характеру звуку, що виникає у нерегулярних каналах, із геометричними та фізичними характеристиками цих каналів.

Метою даної роботи є дослідження особливостей потоку рідини в циліндричному каналі з двома послідовними різкими звуженнями (стенозами), а саме: моделювання даного процесу та чисельний розрахунок, аналіз

структури потоку в області між стенозами, виявлення фізичних причин, що здатні призводити до появи автоколивальних рухів середовища і, як наслідок, до появи тональних звуків.

2. Постановка задачі.

Розглядається течія рідини у напівнескінченному циліндричному каналі з двома послідовно розташованими стенозами. В повздовжньому перерізі каналу контури стенозів в околі отворів мають форму півкола (рис. 1). Вважається, що стінки каналу та стенозів нерухомі й абсолютно жорсткі. Потік рідини з густиною ρ потрапляє в розрахункову область з рівномірною швидкістю V_1 через ліву межу $x = 0, 0 \leq R \leq R_1$ та покидає її через праву $x = L, 0 \leq R \leq R_1$.

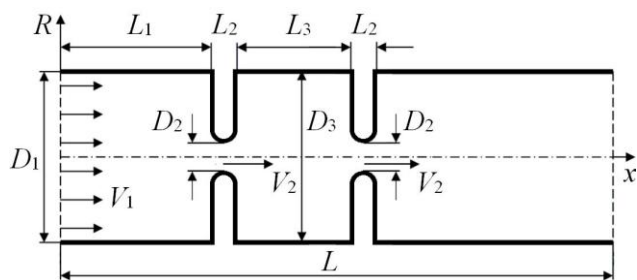


Рис. 1. Геометрія задачі

Значення геометричних параметрів обиралися такими як в експериментальній роботі [2]: $D_2 = 6.35$ мм, $D_1/D_2 = D_3/D_2 = 8.16$, $L/D_2 = 92$, $L_1/D_2 = 12$, $L_2/D_2 = 1$, $L_3/D_2 = 6$. Кінематична в'язкість відповідала в'язкості повітря при температурі 20°C : $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$.

Задача розв'язується в межах моделі в'язкої нестисливої рідини із застосуванням наступних гіпотез: потужність акустичних коливань, що породжуються потоком є значно меншою за потужність самого потоку, і породжений звук не впливає на його характер. Ці припущення справедливі для даної задачі, оскільки розміри джерел звуку, що породжується потоком, тобто розміри стенозів та міжстенозної порожнини, – малі в порівнянні з довжиною звукової хвилі.

Основним параметром задачі є число Рейнольдса, яке можна визначити як $Re = V_2 D_2 / \nu$, де V_2 – швидкість потоку в отворах стенозів, осереднена по вертикальному перетину. Тоді масштабом довжини буде діаметр отвору стенозу D_2 , масштабом швидкості – швидкість V_2 , масштабом часу – величина D_2 / V_2 , а масштабом тиску – подвоєний швидкісний напір ρV_2^2 .

В межах прийнятої моделі процес описується системою нестационарних рівнянь Нав'є-Стокса, що в тензорній формі мають вигляд:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{UU} = \frac{1}{Re} \nabla \cdot \nabla \mathbf{U} - \nabla p, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (2)$$

де p – скалярне поле тиску, $\mathbf{U}$ – векторне поле швидкості, $\mathbf{UU}$ – тензор другого рангу.

Крайові умови для швидкості: рівномірний потік на вході в розрахункову область зі швидкістю $V_1 = 0.1 \text{ м/с}$, що відповідає значенню числа Рейнольдса $Re \approx 2819$, умова прилипання на твердих поверхнях, рівність нулю нормального градієнту на виході з розрахункової області. Для тиску задавалась рівність нулю

нормального градієнту на всій межі розрахункової області окрім виходу з неї, де обирався постійний тиск.

3. Чисельний алгоритм розв'язання задачі.

Рівняння руху (1), (2) розв'язуються чисельно за методом скінченних об'ємів. Припускається, що рух рідини в міжстенозній порожнині є близьким до осесиметричного, на що вказують експериментальні дослідження [2]. При цьому повільні несиметричні коливання струменя за другим стенозом суттєво не впливають на характеристики потоку в області між стенозами [3]. Тому в якості розрахункової області приймається половина повздовжнього перерізу труби.

Для дискретизації області використовується кусково-структурована сітка зі згущенням вузлів в отворах стенозів та при наближенні до їх стінок (рис. 2). Чисельне розв'язання задачі проводиться за допомогою прикладного пакету OpenFOAM. Для розрахунку об'ємних інтегралів по контрольному об'єму застосовується загальна процедура Гауса. Для інтерполяції конвективних членів використовується TVD форма центрально-різницевої схеми для векторного поля з обмежувачем типу Sweby [4]. Нормальні градієнти швидкості на поверхні елементів обчислюються зі значень швидкості в центроїдах сусідніх комірок за схемою другого порядку. В якості схеми дискретизації похідної за часом використовується неявна триточкова несиметрична схема другого порядку з різницями назад.

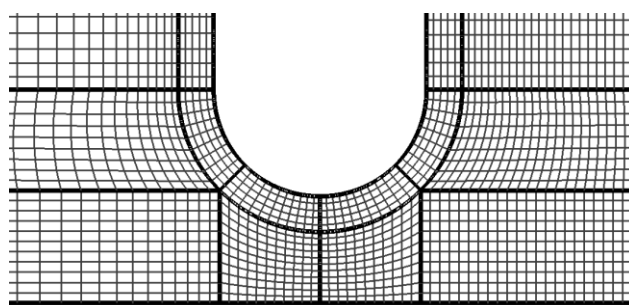


Рис. 2. Схема дискретизації розрахункової області в околі отвору першого стенозу

Зв'язаний розрахунок поля швидкості і тиску проводиться за допомогою процедури PISO [5]. Для розв'язання отриманої системи лінеаризованих алгебраїчних рівнянь використовуються ітераційні солвери, що побудовані на основі методу спряжених/біспряжених градієнтів для симетричних та асиметричних матриць. В якості

передобумовлення обрано спрощені схеми неповної факторизації Холецького та неповної LU-факторизації для симетричних і асиметричних матриць відповідно [6]. Більш детально алгоритм чисельного розв'язання та обґрунтування вибору відповідних методів розглянуто у роботі [7].

Розрахунки виконані за підтримки обчислювального комплексу СКІТ Інституту кібернетики НАН України [8].

4. Аналіз результатів обчислень.

Розглянемо поле завихреності в повздовжньому перерізі каналу після закінчення перехідних процесів (рис. 3). На поверхні першого стенозу формується ламінарний примежовий шар, який, відриваючись від стенозу, утворює на межі струменя та міжстенозної порожнини кільцевий зсувний шар. При наближенні до другого стенозу струмінь приймає хвилястий характер, а у зсувному шарі послідовно утворюються вихори.

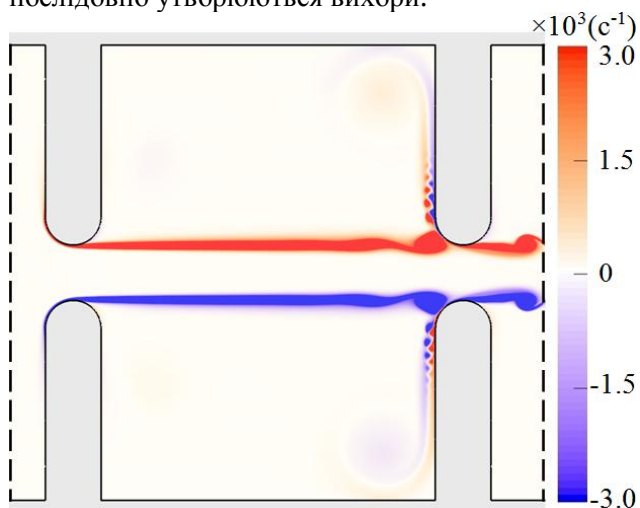


Рис. 3. Поле завихреності

В глибині міжстенозної порожнини біля другого стенозу утворюється великий кільцевий вихор. Завдяки цьому відбувається циркуляційний рух середовища, який переносить частину кінетичної енергії струменя з області отвору другого стенозу вгору за потоком. Цей процес можна інтерпретувати як гідродинамічний канал зворотного зв'язку, що створює умови для виникнення автоколивань в даній системі. Варто також відмітити, що біля першого стенозу утворюється вихор протилежної завихреності, що добре видно на рис. 4.

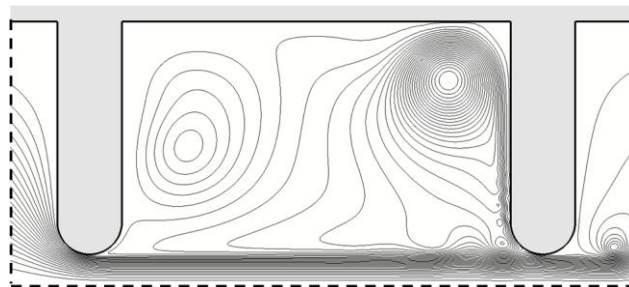


Рис. 4. Лінії течії

Вихорі, що утворюються у зсувному шарі набігають на отвір другого стенозу та спричиняють симетричні відносно осі струменя коливання вертикального профілю швидкості. На рис. 5 приведені дані, що зображують зміну осцилюючих частин профілів повздовжньої швидкості потоку $V_x^{(o)}$ на виході з отвору другого стенозу у перетині S ($x = L_1 + 2L_2 + L_3$, $0 \leq R \leq R_2$) протягом одного періоду T процесу автоколивань у системі. Ці коливання мають яскраво виражений періодичний характер та можуть бути джерелом звуку в каналі. При цьому в перетинах отвору першого стенозу форма профілю швидкості є стаціонарною.

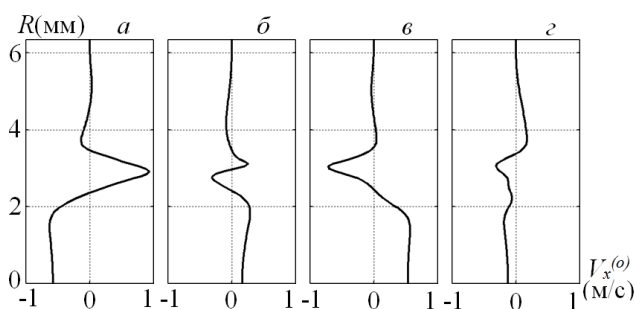


Рис. 5. Осцилюючі частини повздовжньої швидкості потоку в перетині S впродовж одного періоду T : $a - t = 0$, $b - t = T/4$, $v - t = T/2$, $z - t = 3T/4$.

На рис. 6 представлений амплітудно-частотний спектр коливань швидкості $V_x^{(o)}$ у логарифмічній шкалі в точці отвору другого стенозу $x = L_1 + 2L_2 + L_3$, $R = 0.5R_2$. Амплітуда основної гармоніки ($f_1 \approx 545$ Гц) значно переважає амплітуду другої ($f_2 \approx 1095$ Гц) та інших гармонічних складових. Отримана частота звуку добре співпадає з експериментальними дослідженнями ($f_e \approx 530$ Гц) [2].

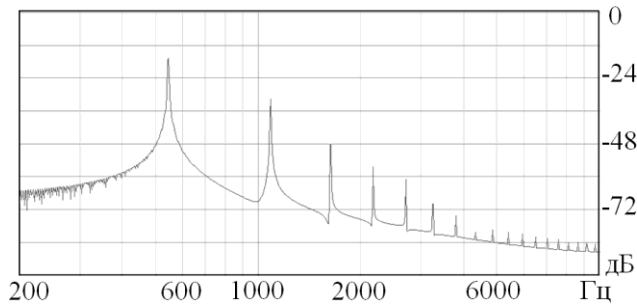


Рис. 6. Спектр коливань швидкості $V_x^{(o)}$

5. Висновки

Проведено чисельне моделювання течії в'язкої нестисливої рідини в циліндричному

каналі з двома послідовно розташованими стенозами. Проведено аналіз особливостей руху середовища на основі поля завихреності, ліній течії та профілів швидкості в отворах стенозів. Встановлено, що при обраних параметрах течія рідини в області між стенозами є нестационарною. У зсувному шарі утворюється послідовний ряд вихорів, що спричиняють періодичні симетричні відносно осі струменя коливання профілю швидкості в отворі другого стенозу. Ці автоколивання можуть бути джерелом звуку в каналі.

Список використаних джерел

1. Вовк И.В. Звук, рожденный потоком (очерки об аэрогидродинамической акустике) / И.В. Вовк, В.Т. Гринченко. – Киев: Наукова думка, 2010. – 221 с.
2. Wilson T.A. Experiments on the fluid mechanics of whistling / T.A. Wilson, G.S. Beavers, M.A. DeCoster, D.K. Holger, M.D. Regenfuss // J. Acoust. Soc. Am. – 1971. – 50, Iss. 1B. – P. 366-372.
3. Вовк И.В. Звуковое поле, генерируемое потоком в канале со стенозами / И.В. Вовк, В.С. Малюга // Прикл. Гидромех. – 2012. – 14, № 1. – С. 23-48.
4. Sweby P.K. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws / P.K. Sweby // J. Numer. Anal. – 1984. – 21, Iss. 5. – P. 995-1011.
5. Ferziger J.H. Computational methods for fluid dynamics / J.H. Ferziger, M. Peric. – Berlin: Springer, 2002. – 424 p.
6. Barrett R. Templates for the solution of linear systems: Building blocks for iterative methods, 2nd Edition / R. Barrett, M. Berry, T.F. Chan, J. Demmel, J.M. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine, H. Van der Vorst. – Philadelphia: SIAM, 1994. – 107 p.
7. Малюга В.С. Численное исследование течения в канале с двумя последовательно расположенными стенозами. Алгоритм решения / В.С. Малюга // Прикл. гидромех. – 2010. – 12, № 4. – С. 45-62.
8. Головинський А.Л. Енергоефективний суперкомп'ютер СКІТ-4 / А.Л. Головинський, А.Л. Маленко, І.В. Сергієнко, В.Г. Тульчинський // Вісн. НАН України. – 2013. – № 2. – С. 50-59.

References

1. VOVK, I. V. and GRINCHENKO, V. T. (2010) *Zvuk, rozhdennyj potokom*. Kiev: Naukova dumka.
2. WILSON, T. A., BEAVERS, G. S., DECOSTER, M. A., HOLGER, D. K. and REGENFUSS, M. D. (1971). Experiments on the fluid mechanics of whistling. *J. Acoust. Soc. Am.*, 50 (1B), p.366-372.
3. VOVK, I. V. & MALYUGA, V. S. (2012). *Zvukovoye pole, generiruyemoye potokom v kanale so stenozami*. *Prykl. Hidromeh.*, 11 (4), p.17-30.
4. SWEBY, P. K. (1984). High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *J. Numer. Anal.*, 21 (5), p.995-1011.
5. FERZIGER, J. H. and PERIC, M. (2002). *Computational methods for fluid dynamics*. Berlin: Springer.
6. BARRETT, R., BERRY, M., CHAN, T. F., DEMMEL, J., DONATO, J. M., DONGARRA, J., EIJKHOUT, V., POZO, R., ROMINE, C. and VAN DER VORST, H. (1994). *Templates for the solution of linear systems: Building blocks for iterative methods*, 2nd Ed. Philadelphia: SIAM.
7. MALYUGA, V. S. (2010). *Chislennoye issledovaniye techeniya v kanale s dvumya posledovatel'no raspolozhennymi stenozami*. *Algoritm resheniya*. *Prykl. Hidromeh.*, 12 (4), p.45-62.
8. GOLOVYNSKYI, A. L., MALENKO, A. L., SERGIENKO, I. V. & TULCHYNSKY, V. G. (2013). *Enerhoefektyvnyi superkompiuter SKIT-4*. *Visn. Nac. Akad. Nauk. Ukr.*, 2, p. 50-59.

Надійшла до редколегії 23.08.17

УДК 539.3

Федорченко Л. М., к. ф.-м. н.

L.N. Fedorchenko, Ph.D. (Phys.-Math.)

**Вплив стороннього струму на
напружено-деформований стан
ортотропної циліндричної оболонки**

**Influence of extraneous current on the
stress-strain state of orthotropic cylindrical
shell**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова, 4е,
e-mail: fedorchenko555@gmail.com

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4 e,
e-mail: fedorchenko555@gmail.com

Дана робота присвячена дослідженню впливу стороннього струму на напружено-деформований стан ортотропної циліндричної оболонки, яка знаходиться в нестационарному магнітному полі. Проведено аналіз її напружено-деформованого стану при різних значеннях величини стороннього струму.

Ключові слова: ортотропна оболонка, сторонній струм, магнітопружність.

The problem of the effect of external current on the stress-strain state of an orthotropic cylindrical shell with orthotropic electrical conductivity is relevant both from a theoretical and a practical point of view. Having an idea of the behavior of a shell in a magnetic field under the influence of an extraneous current, we can optimize its stress-strain state. Thus, to avoid the destruction of the design element, and therefore to increase the bearing capacity of the structure as a whole.

The analysis of electromagnetic effects is investigated on the basis of the Maxwell equations in Lagrangian variables together with material relations and equations of motion. When constructing geometrically nonlinear equations of an orthotropic cylindrical shell, orthotropic electric conductivity is also taken into account.

In the paper, the numerical technique for solving the nonlinear problem of magnetoelasticity for shells is developed on the basis of the consecutive application of the Newmark finite-difference scheme, the method of quasilinearization along with the method of discrete-orthogonalization. A numerical example is considered. The effect of extraneous current on the stress state of a orthotropic cylindrical shell is analyzed.

Key Words: orthotropic shell, extraneous current, magnetoelasticity.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Задача про вплив стороннього струму на напружено-деформований стан ортотропної циліндричної оболонки з ортотропної електропровідністю є актуальною як з теоретичної так і з практичної точки зору. Маючи уявлення про поведінку оболонки в магнітному полі при дії стороннього струму ми можемо оптимізувати її напружено-деформований стан. Тим самим уникнути руйнування елемента конструкції, а отже і збільшити несучу здатність конструкції в цілому.

Постановка задачі. Розглядаємо гнучку ортотропну циліндричну оболонку змінної товщини з ортотропною електропровідністю в лагранжевих змінних. Такий підхід дає

можливість використовувати співвідношення деформацій і кривизн з урахуванням нелінійності.

Припускаємо, що оболонка знаходиться під дією нестационарного механічного і електромагнітного впливів. Нехтуючи впливом процесів поляризації і намагнічування, а також температурними напруженнями. Приймаємо, що до торця оболонки підводиться змінний електричний струм $J_{\text{вст}}$ від зовнішнього джерела [1].

Серединну поверхню оболонки в недеформованому стані віднесемо до криво-лінійної системи координат s і θ , де s – довжина дуги меридіана, θ – центральний кут.

Координатні лінії $s = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ є лініями головних кривизн серединної поверхні.

Пружні властивості матеріалу – ортотропні, головні напрямки пружності яких співпадають з відповідними координатними лініями.

Електромагнітні властивості матеріалу характеризуються тензорами електричної провідності σ_{ij} , діелектричної проникності ε_{ij} та магнітної проникності μ_{ij} .

Процес деформування описується геометрично нелінійною теорією в квадратичному наближенні.

Аналіз електромагнітних ефектів досліджуємо на основі системи рівнянь Максвелла в лагранжевих змінних разом з матеріальними співвідношеннями і рівняннями руху.

Розглядаємо тіла з ромбічною кристалічною структурою. Виходячи з кристалографії [2] тензори ε_{ij} , σ_{ij} , μ_{ij} приймають діагональний вигляд.

Беремо у якості незалежної змінної довжину дуги меридіану циліндра s , тоді величини, що характеризують геометрію оболонки, запишуться наступним чином:

$$\frac{1}{R_s} = 0, \quad r = R$$

Враховуючи діагональний вигляд тензорів і геометрію циліндричної оболонки розв'язувальна система рівнянь магнітопружності осесиметричної ортотропної оболонки обертання має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{1 - \nu_s \nu_\theta}{e_s h} N_s - \frac{\nu_\theta}{r} w - \frac{1}{2} g_s^2, \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= -g_s, \quad \frac{\partial g_s}{\partial s} = \frac{12(1 - \nu_s \nu_\theta)}{e_s h^3} M_s, \\ \frac{\partial N_s}{\partial s} &= -F_s - h J_{\text{ECT}} B_\gamma - \\ &- \sigma_1 h \left[E_\theta B_\gamma + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma^2 \right] + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial Q_s}{\partial s} &= \frac{\nu_\theta e_\theta}{r e_s} N_s + e_\theta h \frac{w}{r} - F_\gamma - \\ &- 0,5 h J_{\text{ECT}} (B_s^+ + B_s^-) - \sigma_3 h [-0,5 E_\theta (B_s^+ + B_s^-) - \\ &- 0,25 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-)^2 - \frac{1}{12} \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ - B_s^-)^2 + \\ &+ 0,5 \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-)] + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_s}{\partial s} &= Q_s + N_s g_s - \frac{\nu_s M_s}{r}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_\gamma}{\partial s} &= -\mu \sigma_2 \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right] + \\ &+ \frac{(B_s^+ - B_s^-)}{h}, \quad \frac{\partial E_\theta}{\partial s} = -\frac{\partial B_\gamma}{\partial t}. \end{aligned}$$

Де u , w – переміщення; N_s – нормальні зусилля; Q_s – поперечні зусилля; M_s – згинальний момент; g_s – кут повороту нормалі; $h = h(s)$ – товщина оболонки; ρ – густина матеріалу; $r(s)$ – радіус кола оболонки; ν_s , ν_θ – коефіцієнти Пуассона; e_s , e_θ – модулі Юнга; F_i – механічна сила; E_θ – компонента напруженості електричного поля; B_γ – нормальна складова магнітної індукції; B_s^+ , B_s^- – відомі складові магнітної індукції на поверхнях оболонки; J_{ECT} – складова густини стороннього електричного струму.

Розв'язувальна система рівнянь є нелінійною гіперболічно-параболічною системою восьмого порядку зі змінними коефіцієнтами. Для визначення сталих, що з'являються в загальному розв'язку системи рівнянь після інтегрування, необхідно задати граничні та початкові умови на кінцях оболонки. Граничні умови для функцій, що характеризують механічну частину задачі, задаються так само, як і у звичайній теорії оболонок. Крайові умови для електромагнітних функцій можуть задаватись через компоненти електромагнітного поля або комбінацію компонент магнітних і електричних полів. При цьому початкові умови задаються в класичному вигляді.

Методика чисельного розв'язання осесиметричних задач оболонок обертання.

Дослідження напружено-деформівного стану ортотропних оболонок обертання зводиться до розв'язання нестационарної крайової задачі, яка описується системою нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних восьмого порядку зі змінними коефіцієнтами.

Для ефективного використання запропонованої методики нехтуємо скін-ефектами, які виникають по товщині ортотропної оболонки, і електромагнітний процес швидко виходить на режим, який близький до усталеного.

Застосовуючи схему Ньюмарка, весь інтервал зміни часу розбивається на окремі малі інтервали. При заміні похідних за часом скінченно-різницевиими виразами, згідно схеми Ньюмарка, необхідно враховувати взаємозв'язок

між кроком за часом і кроком інтегрування по просторовій координаті.

Співвідношення кроків різницевої схеми за часом і просторовою координатою обумовлюється критерієм стійкості Куранта.

За допомогою метода квазілінеаризації крайова задача магнітопружності, яка описує напружено-деформівний стан оболонок обертання, зводиться до послідовності лінійних крайових задач. Кожна з лінійних задач розв'язується чисельно стійким методом дискретної ортогоналізації [3-4].

Числовий приклад.

Розглянемо задачу про вплив стороннього струму на напружено-деформований стан ортотропної циліндричної оболонки з кадмію змінної товщини $h = 5 \cdot 10^{-4} (1 + 0.3 \sin \frac{\pi s}{l})$ м (l – довжина оболонки). Оболонка знаходиться під впливом нормального навантаження $P_\gamma = 1 \cdot 10^3$ н/м². Напружений стан ортотропної циліндричної оболонки досліджувався в залежності від дії тангенційної складової стороннього струму $J_{\theta T}$.

Граничні умови вибираємо наступним чином:

$$u = 0, Q_s = 1 \cdot 10^3, M_s = 0; B_\gamma = 0.5 \sin \omega t$$

$$\text{при } s = s_0$$

$$u = w = M_s = 0; B_\gamma = 0 \quad \text{при } s = s_N.$$

Параметри оболонки і матеріалу взяті наступні:

$$S_0 = 0; S_N = 0.5; \omega = 31416 \tilde{n}^{-1}; B_s^\pm = 0.1 T \tilde{e}$$

$$e_s = 8.1 \cdot 10^{10} \tilde{f} / \tilde{i}^2; e_\theta = 2.82 \cdot 10^{10} \tilde{f} / \tilde{i}^2;$$

$$\nu_s = 0.3; \nu_\theta = 0.3; \rho = 8640 \tilde{a} / \tilde{i}^3;$$

$$\mu = 1.256 \cdot 10^{-6} \tilde{A} \tilde{f} / \tilde{i}; \sigma_1 = 0.147 \cdot 10^8 (\tilde{h} \cdot \tilde{i})^{-1};$$

$$\sigma_2 = 0.147 \cdot 10^8 (\tilde{h} \cdot \tilde{i})^{-1};$$

Розв'язок задачі отримано на інтервалі часу $t = 1 \cdot 10^{-2} \tilde{n}$, крок інтегрування за часом $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3} c$.

Досліджуємо вплив стороннього струму на напружено-деформівний стан ортотропної циліндричної оболонки. При розв'язанні крайової задачі магнітопружності оболонки, необхідно задати початкову ітерацію. Початкова ітерація визначається з рівнянь лінійної задачі магнітопружності (лінійні рівняння руху пластини і лінеаризовані рівняння Максвела).

Величину стороннього струму і його напрямок вибираємо наступним чином:

$$1). J_{\theta T} = 0 \text{ (A/m}^2\text{); } 2). J_{\theta T} = 1 \cdot 10^5 \text{ (A/m}^2\text{);}$$

$$3). J_{\theta T} = -1 \cdot 10^5 \text{ (A/m}^2\text{);} \quad (2)$$

Результати розв'язку розглянутої задачі приведені нижче у вигляді графіків.

Лінії 1-3 відповідають значенням стороннього струму (2).

На Рис. 1 представлені результати розподілу нормальної складової сили Лоренца $\rho F_\gamma^\wedge(t)$ на лівому контурі при $s = 0$ для ортотропної циліндричної оболонки з кадмію. З графіка видно, що максимальні значення сили Лоренца досягаються при додатному значенні стороннього струму.

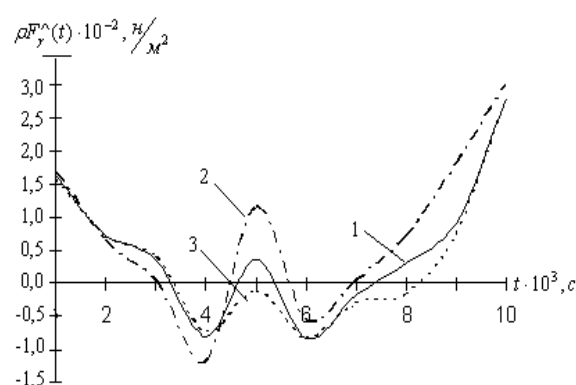


Рис. 1 Розподілу нормальної складової сили Лоренца $\rho F_\gamma^\wedge(t)$ на лівому контурі

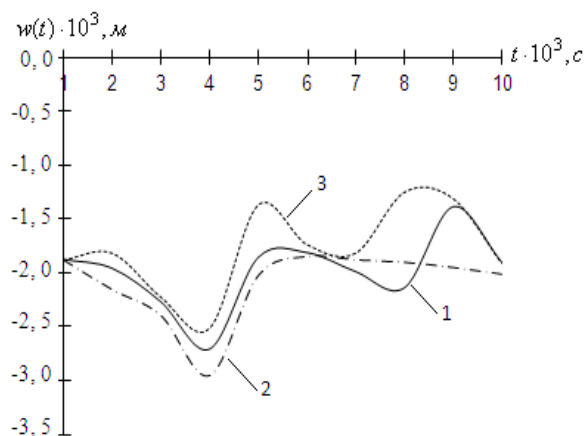


Рис. 2. Зміна прогину w в залежності від часу t на лівому контурі

На Рис. 2 приведено зміну прогину w в залежності від часу t на лівому контурі. При додатному значенні струму абсолютне значення прогину збільшується в порівнянні з його відсутністю. Абсолютне значення $w/h \approx 5,89$. В той час як при від'ємному значенні струму, абсолютне значення струму зменшується.

Абсолютне значення $w/h \approx 5,12$. Максимальні значення досягаються при $t = 4 \cdot 10^{-3} \text{ с}$. Це пояснюється тим, що пондеромоторна сила, за наявності стороннього струму, має дві складові, які залежать від індукційного електромагнітного поля утвореним зовнішнім магнітним полем і стороннім струмом. У одному випадку ці складові діють співнапрямлено, а у іншому – протилежно напрямлено.

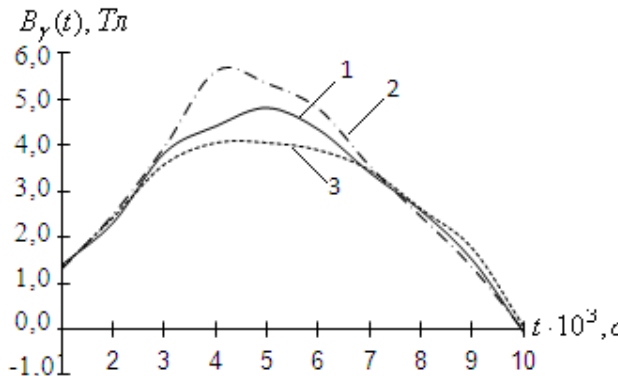


Рис. 3. Зміна тангенційної складової магнітної індукції в залежності від часу t на лівому контурі

На Рис. 3 приведено зміну тангенційної складової магнітної індукції $B_y(t)$ в залежності від часу t на лівому контурі при $s = 0i$. Максимальні значення досягаються при додатному значенні стороннього струму при $t = 4 \cdot 10^{-3} \text{ с}$. Бачимо, що зі збільшенням значення стороннього струму значення магнітної індукції збільшується.

Висновки

В даній статті проведено аналіз впливу стороннього струму на напружено-деформований стан ортотропної циліндричної оболонки з ортотропною електропровідністю. Враховуючи проведений аналіз можна відмітити значний вплив стороннього струму на її напружено-деформований стан. Приведені результати дають можливість стверджувати, що на напружено-деформований стан впливає як величина струму так і його напрямок. Таким чином змінюючи величину та напрям струму можна оптимізувати напружено-деформований стан ортотропної циліндричної оболонки.

Список використаних джерел

1. Molchenko L.V. Influence of extraneous current on the stress state of an orthotropic ring plate with orthotropic conductivity / L.V. Molchenko, I.I. Loos, L.M. Fedorchenko // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – Vol.50, N 6. – P. 683-687.
2. Келли А., Кристаллография и дефекты в кристаллах / А. Келли, Г. Гровс. – М.: Мир, 1974. – 496 с.
3. Mol'chenko L.V. A method for solving two-dimensional nonlinear boundary-value problems of magnetoelasticity for thin shells / L.V. Mol'chenko // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – Vol.41, No 5.
4. Bian Yu-Hong Analysis of nonlinear stresses and strains in a thin current-carrying elastic plate / Bian Yu Hong // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – Vol.51, № 1. – P. 108–120.
5. Mol'chenko L.V. Deformation of a flexible orthotropic spherical shell of variables stiffness in a magnetic field / L.V. Mol'chenko, I.I. Loos, L.M. Fedorchenko // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – Vol.52. № 1. – P. 56-61.

References

1. MOL'CHENKO L., LOOS I. and FEDORCHENKO L. (2014) Influence of extraneous current on the stress state of an orthotropic ring plate with orthotropic conductivity. *Int. Appl. Mech.* 50 (6). p. 683-687.
2. KELLI, A. and GROVS, G. (1974) *Kristallografiya i defekti v kristalakh*. Moskva: Mir.
3. MOL'CHENKO, L.(2005) A method for solving two-dimensional nonlinear boundary-value problems of magnetoelasticity for thin shells. *Int. Appl. Mech.* 41 (5).
4. BIAN YU-HONG (2015) Analysis of nonlinear stresses and strains in a thin current-carrying elastic plate. *Int. Appl. Mech.* 51 (1). p.108-120.
5. MOL'CHENKO L., LOOS I. and FEDORCHENKO L. (2016) Deformation of a flexible orthotropic spherical shell of variables stiffness in a magnetic field. *Int. Appl. Mech.* 52 (1). p. 56-61.

Надійшла до редколегії 26.08.2017

22УДК 539.3

Хашемі М.¹, аспірант,
Жук Я.О.¹, д. ф.-м. н., проф.

**Вплив об'ємного вмісту нановолокон
на вібророзігрів і руйнування елемента
конструкції при статичному і
циклічному навантаженні**

¹Київський національний університет імені Тараса
Шевченка, 01033, м. Київ, вул. Володимирська, 64
e-mail: moh.hashemi2013@gmail.com,
y.zhuk@i.ua

M. Hashemi¹, Ph.D. Student,
Y.A. Zhuk¹, Dr. Sci., Prof.

**The effects of volume fraction of nanofibers
on self-heating and failure of composite
structure elements under static and cyclic
loading**

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Kyiv, 01033, Volodymyrska Street, 64
e-mail: moh.hashemi2013@gmail.com,
y.zhuk@i.ua

Досліджується руйнування нанокompозитного елемента конструкції внаслідок дисипативного розігріву. Вивчається вплив розігріву і об'ємного вмісту нановолокон на механічну стійкість полімерного нанокompозитного стержня під одночасною дією статичного і циклічного навантаження шляхом використання концепції температурно- і амплітудно залежних комплексних модулів.

Ключові слова: нанокompозит, теплова нестійкість, дисипативний розігрів

The failure of nanocomposite structural elements due to the self-heating is investigated. The influence of dissipative heating and volume fraction of nanofibers on mechanical stability of polymeric nanocomposite rod subjected to both static and monoharmonic loading are studied by using the temperature and amplitude dependent complex moduli. In this regard, special modified homogenization procedure based on the Mori-Tanaka method is designed with taking into account the effects of interface on response of nanocomposite material to derive the complex moduli for the nanocomposite with either random orientation of nanofibers. Complex moduli approach is used to formulate the approximate (single frequency approximation) problem statement. The problem is solved numerically. Influence of carbon nanotube fiber volume fraction on stability and critical stress for the nanocomposite rod with randomly oriented nanofibers is estimated. It is found that volume fraction of nanofibers affects significantly the temperature evolution and mechanical stability due to dissipative heating of nanocomposite element under static compressive and harmonic loading. The approach presented in this paper can be useful to understanding of the cyclic behavior of viscoelastic structures and investigations on fatigue with taking into account the vibro-heating effect due to the mechanical energy dissipation.

Key Words: nanocomposite, thermal instability, dissipative heating

1. Introduction

Nanocomposites, a high performance material exhibit unusual property combinations and unique design possibilities in different areas of engineering. The elements of structures made of these materials often experience various kinds of mechanical and thermal loading. One of the most common types of loading is cyclic loading. Depending on the amplitude of harmonic loading, frequency, heat-exchange conditions, thermo-physical and mechanical characteristics, thermal fracture may occurs in structural elements as a result of the dissipation of mechanical energy into thermal energy. The levels of vibro-heating (or dissipative heating) can be high enough

the critical thermal states to happen that lead to thermal instability effects under cyclic loading [1, 2, 3]. If critical values of some parameters characterizing the behavior of the body are exceeded, there is a significant growth of temperature with time. This growth of temperature due to dissipation of mechanical energy causes the decrease in stiffness. As a result, the strength of materials is significantly reduced [1]. It is the main mechanism of thermal failure for plastics and polymeric composites [3]. This paper is dedicated to the investigation of the dissipative heating influence on mechanical and thermal stability of rod made of the isotropic polymeric nanocomposite reinforced with randomly oriented nanofibers based on temperature and amplitude de-

pendent complex moduli with taking into account the effects of volume fraction of nanofibers.

2. Simulation of nanocomposite response under monoharmonic loading

The objective of this section is to present a model for description of the macroscopically inelastic response of the isotropic nanocomposite material systems. This material consists of a macroscopically isotropic polymeric matrix filled with randomly oriented nanofibers. The complete description of the constitutive equations for predicting of nonlinear response of polymer matrix and also the procedures to evaluate the storage and loss moduli based on the approximation model for nanocomposite material under monoharmonic deformation can be found in previous papers of authors [4, 5, 6] in whole details.

Let us ignore the description of simulation of nanocomposite response under monoharmonic loading in this paper and use the presented results in the mentioned previous paper above

3. Problem statement and simulation technique

As mentioned earlier, the main mechanism of thermal failure for plastics and polymeric composites is the growth of temperature due to dissipation of mechanical energy. In this regard, the most interesting effect under quasi-static deformation is thermal instability for polymer and nanocomposite bodies, which often leads to thermal failure of the elements [1, 3]. In present paper, the particular problem of the vibro-heating of a nanocomposite rod with a circular cross section is assumed. The length of the rod and the cross sectional radius are L and R , respectively. Furthermore, the nanocomposite rod is subjected to the static compressive, P_0 , and low amplitude harmonic loading, $P_1 \cos \omega t$, at the free end of rod. Also, it is assumed that excitation frequency of harmonic loading, ω , is small enough to prevent any parametric or sub- as well as superharmonic resonances to occur. For the loading forces and amplitudes, the inequality $P_1 \ll P_0 < P_{cr}$ holds where P_{cr} is the Eulerian critical load so that we can apply the quasi static theory of viscoelasticity. The relation between stress and strain in the viscoelastic rod is of the well-known form:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \sigma_0 + \sigma_1 \cos \omega t, \\ \varepsilon(t) &= \sigma_0 J^\infty + \sigma_1 \operatorname{Re}[\tilde{J} e^{i\omega t}], \end{aligned} \quad (1)$$

where J^∞ is equilibrium creep compliance and $\tilde{J} = J' - iJ''$ is complex creep compliance; σ_0 and σ_1 are magnitudes of the steady compressive and har-

monic stress, respectively. The period-averaged energy dissipation rate, $\langle D' \rangle$, (see Eq. (2)) is used as a internal heat source in the transient heat conduction equation for one dimension problem to predict the temperature evolution over the viscoelastic rod. Therefore, the equation takes the form Eq. (2). Also, the temperature is considered to have uniform distribution along the length of the rod.

$$\begin{aligned} \frac{d\theta^*}{dt} &= -\frac{\alpha_t S}{C_v V} \theta^* + \frac{\alpha_t S}{C_v V} + \frac{\langle D' \rangle}{C_v \theta_0}, \\ \langle D' \rangle &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(\xi) \dot{\varepsilon}(\xi) d\xi = \frac{\omega}{2} J'' \sigma_1^2, \end{aligned} \quad (2)$$

where $\theta^* = \theta/\theta_0$ is normalized temperature. Coefficients C_v and α_t are specific heat capacity for constant volume and heat transfer coefficient through the rod surface, respectively; S , V and θ_0 are the lateral surface area, volume of the rod and temperature of surrounding media, respectively. It is important to notice that to calculate the loss creep compliance moduli, J'' , approximate equation $J'' = J_0'' \theta^{*\beta}$ can be proposed by using values of complex moduli at different conditions of cyclic loading which were obtained in [5], where J_0'' shows initial value of the loss creep compliance under harmonic loading and β is constant of materials. Indeed, these constants can be calculated with making use of data obtained in the frame of simplified monoharmonic approach described in [5, 6]. The loss creep compliance modulus, J'' , depends on temperature caused by vibro-heating at different values of harmonic loading amplitude, P_1 . Eq. (2) can be rewritten in the form

$$\begin{aligned} \frac{d\theta^*}{d\tau} &= -\theta^* + 1 + \mu \theta^{*\beta}, \\ \mu &= \frac{\omega}{2C_v \theta_0} J_0'' \sigma_1^2, \quad \lambda = \frac{\alpha_t S}{C_v V}, \end{aligned} \quad (3)$$

where μ and λ are loading parameter and time constant, respectively. As it follows from the Eq. (3), the stationary heat state can be presented as equation $\theta^* = 1 + \mu \theta^{*\beta}$. As mentioned above, the loss creep compliance modulus, J'' , for most materials increases with temperature (see the proposed approximate equation $J'' = J_0'' \theta^{*\beta}$). If the loss creep compliance increases faster than according to the linear law, there exists a critical load parameter, μ^* , so that for $\mu > \mu^*$ there isn't a solution of equation $\theta^* = 1 + \mu \theta^{*\beta}$.

Let us investigate the influence of the dissipative heating on the mechanical stability of nanocomposite rod. The Eulerian approach can be used to find the critical force, P_{cr} . Taking into account of temperature field uniformity and inequality $P_1 \ll P_0$, differential equation for rod axis and Eulerian critical load relation can be written as:

$$\frac{d^4 W}{dz^4} + \xi_0^2 \frac{d^2 W}{dz^2} = 0, \quad (4)$$

$$\xi_0 = \left(\frac{P_0 J^\infty}{I} \right)^{1/2}, \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 I}{J^\infty (KL)} = \frac{\chi}{J^\infty},$$

where K and L are effective length factor of the column and length of the rod, respectively; W and χ are deflection and constant which depends on the rod shape and end fixing conditions. For the most materials, J^∞ , increases with the temperature growth. For certain critical temperature, θ_{cr}^* , Eulerian critical load, P_{cr} , can reach the value of applied compressive load, P_0 , that initially was smaller than P_{cr} . The dependence of the equilibrium creep compliance moduli, J^∞ , on temperature is formulated approximately by the expression $J^\infty = J_0^\infty (\theta^*)^\alpha$, where α is constant of material and J_0^∞ denotes the initial value of equilibrium creep compliance under static loading.

The normalized Eulerian critical stress, σ_{cr}^* , is defined by the expression:

$$\sigma_{cr}^* = P_{cr} / P_{cr}^0 = \sigma_{cr} / \sigma_{cr}^0 = 1 / (\theta^*)^\alpha, \quad (5)$$

where P_{cr}^0 and σ_{cr}^0 are the initial Eulerian critical load and stress. Therefore, the variation of the load parameter, μ , with the normalized Eulerian critical load can be written as follow:

$$\mu = \left[(\sigma_{cr}^*)^{-\alpha} - 1 \right] (\sigma_{cr}^*)^{-\beta/\alpha}. \quad (6)$$

In the present study, the rod length and the cross sectional radius are 0.5 and 0.03 m, respectively. To solve the transient heat conduction equation for one dimensional problem, the iterative process in combination with numerical method at the different load parameter is used. The loading frequency is assumed to be equal to 1 Hz.

4. Numerical Results of evaluation of critical parameters of structure

Dependence of the evolution of dimensionless temperature on volume fraction in nanocomposite rod with randomly oriented CNTs nanofibers under constant amplitude of harmonic loading, $\sigma_1 = 75$ MPa, is shown in Fig 1. It is completely seen that station-

ary self-heating temperature decreases continuously as the volume fraction of CNTs nanofibers increases in polymer. It is clearly evident in this figure that the dissipative heating temperature of neat polymer rises very quickly and the thermal failure occurs as a result. So, by embedding nanofibers in polymer matrix, it is possible to increase the thermal stability of structural element, because of the loss creep compliance of material decreases and the thermal conductivity of rod improves. Furthermore, the normalized loading parameter, μ , decreases with increasing volume fraction of the filament.

The influence of volume fraction on mechanical stability of the nanocomposite rod with randomly oriented nanofibers for constant amplitude of the harmonic loading, $\sigma_1 = 60$ MPa, is illustrated in Fig. 2. This figure shows that with increasing of volume fraction of CNTs nanofibers, the normalized critical stress increases and as result the mechanical stability of rod increases.

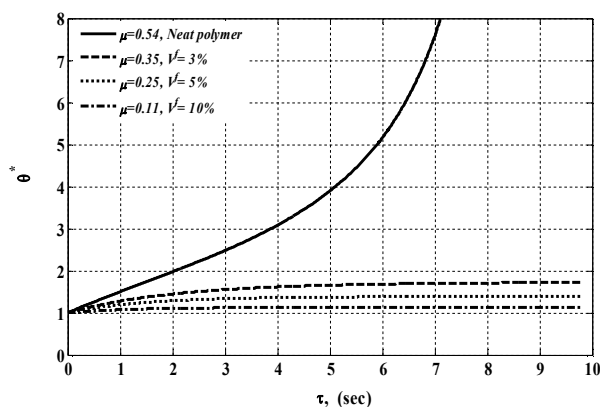


Fig. 1. Temperature evolution in nanocomposite rod with randomly oriented nano- fibers under $\sigma_1 = 75$ MPa at $V^f = 0, 3, 5, 10\%$

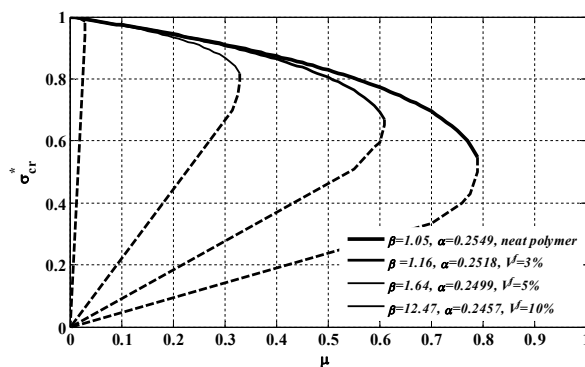


Fig. 2. Influence of volume fraction on stability and normalized critical stress for the nanocomposite rod with randomly oriented nanofibers for $\sigma_1 = 60$ MPa

It is clearly evident that the dissipative heating temperature decreases with increasing of volume

fraction. It happens because the loss creep compliance modulus, J'' , decreases. Furthermore, the heat transfer coefficient of the rod increases with adding of CNTs nanofibers. It is completely observed in the variation of coefficients β and α .

As seen in this figure, the nanocomposite rod with 0, 3, 5, and 10% volume fraction of CNTs nanofibers under harmonic loading, the mechanical instability occurs for $\mu > \mu^*$ (dish lines region). It means that, there isn't a solution for Eq. (6).

5. Conclusions

In the present work, the effects of volume fraction of nanofibers on thermal and mechanical stability of

nanocomposite rod were studied. The results show that filament volume fraction of nanofibers affects significantly the temperature evolution and mechanical stability due to dissipative heating of nanocomposite element under static compressive and harmonic loading. The approach presented in this investigation can be useful to understanding and appropriate description of the cyclic behavior of nanocomposite structures and further investigations in the area of the description of fatigue mechanisms with regard to vibro-heating effect caused by the mechanical energy dissipation.

Список використаних джерел

1. Katunin, A. Investigation of dynamic behavior of laminated composite plates under cyclic loading / A. Katunin, M. Fidali // *Kompozyty* – 2011. – Vol. 11. – P. 208–213.
2. Goel, A. Characterization of fatigue behavior of long fire reinforced thermoplastic (LFT) composites / A., Goel, K. K. Chawla, U. K. Vaidya and N. Chawla // *Mater. Char.* – 2009. – Vol. 60. – P. 537–544.
3. Karnaukhov, V. G. Thermomechanical Behavior of Viscoelastic Bodies under Harmonic Loading [in Russian] / V. G., Karnaukhov, I. K., Senchenkov and B. P. Gumenyuk // *Naukova Dumka, Kiev.* – 1985.
4. Hashemi, M. A procedure for complex moduli determination for polycarbonate plastic under harmonic loading / M. Hashemi, Y. A. Zhuk // *Bulletin of KNU. Physical and Math. Sci.* – 2015. – № 4. P. 67–73.
5. Zhuk, Y. A. Frequency and amplitude dependence of complex moduli of composite material reinforced with nanofibers / Y. A. Zhuk, M. Hashemi // *Journal of Physico-Mathematical Modeling and Informational Technologies.* – 2016. – № 23. – P. 92–107.
6. Hashemi, M. Influence of frequency and amplitude of harmonic loading on complex moduli for polymer materials / M. Hashemi and Y. A. Zhuk // *Bulletin of KNU.* – 2016. – № 35. P. 53–57

References

1. KATUNIN, A., & FIDALI, M. (2011) Investigation of dynamic behavior of laminated composite plates under cyclic loading. *Kompozyty. Vol. 11.* p. 208–213.
2. GOEL, A., Chawla K. K., & Chawla N. (2009) Characterization of fatigue behavior of long fire reinforced thermoplastic (LFT) composites. *Mater. Char. Vol. 60.* p. 537–544.
3. KARNAUKHOV, V. G., SENCHENKOV, I. K., & GUMENYUK, B. P. (1985) Thermomechanical Behavior of Viscoelastic Bodies under Harmonic Loading [in Russian]. *Naukova Dumka, Kiev.*
4. HASHEMI, M., & ZHUK Y. A. (2015) A procedure for complex moduli determination for polycarbonate plastic under harmonic loading. *Bulletin of KNU. Physical and Math. Sci. № 4.* p. 67–73.
5. ZHUK, Y. A. & HASHEMI, M. (2016) Frequency and amplitude dependence of complex moduli of composite material reinforced with nanofibers. *Journal of Phys.-Math. Modeling and Informational Tech. № 23.* p. 92–107.
6. HASHEMI, M., & Zhuk Y. A. (2016) Influence of frequency and amplitude of harmonic loading on complex moduli for polymer materials. *Bulletin of KNU. № 35.* p. 53–57

Надійшла до редколегії 28.08.17

УДК 539.3

Хома І.Ю.¹, д. ф.-м. н., с.н.с.,
Дашко О.Г.¹, к. ф.-м. н.,
Проценко Т.М.², к. ф.-м. н., доц.

Третя крайова задача деформування транстропної пластини з круговим отво- ром при чистому зсуві на нескінченності

¹ Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН
України, 03057 м. Київ, вул. П. Нестерова, 3,
e-mail: olga.dashko@gmail.com

² Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: t.proshchenko@gmail.com

I. Yu. Khoma¹, Dr. (Phys.-Math.),
O. G. Dashko¹, Ph. D. (Phys.-Math.),
T. M. Proshchenko², Ph. D. (Phys.-Math.).

The third boundary problem of deformation transtropic plate with a circular hole in pure shear at infinity

¹S. P. Timoshenko Institute of Mechanics NAS of
Ukraine, 03057, Kyiv, P. Nesterov str., 3
e-mail: olga.dashko@gmail.com

² Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: t.proshchenko@gmail.com

Викладено метод побудови розв'язку задачі про напружений стан трансверсально-ізотропної товстої пластини, послабленої круговим отвором. На поверхні отвору задано нульові значення нормального переміщення і дотичних напружень, тобто поставлено умови одного з видів однорідної третьої крайової задачі теорії пружності. На нескінченності пластина знаходиться під дією постійних зсувних навантажень. Задача розв'язується на основі методу розкладу шуканих функцій в ряди Фур'є за поліномами Лежандра координати товщини.

Ключові слова: транстропний матеріал, товста пластина, зсувні напруження, круговий отвір.

This paper is devoted to a problem of stress distribution near a circular hole in a thick transversely isotropic plate under the action of the permanent shear loads applied at infinity. On the surface of the hole, zero values of normal displacement and tangential stresses are defined, that is, the boundary conditions for one of the species of homogeneous third boundary value problem of the theory of elasticity are given. The problem is solved on the basis of the expansion method of the components of the unknown functions namely the displacement vector and the stress tensor into Fourier series by Legendre polynomials of the thickness coordinate. The method of solution constructing for the problem is presented and analytical formulas have been found that describe the stress state that arises in a plate under the specified boundary conditions. The stress concentration factors on the middle plane and the boundary surfaces of the plate are analyzed. The effects of the influence of the geometrical parameters of the hole on the stress concentration factor near the hole are investigated and the results of numerical calculations are shown.

Key Words: transversely isotropic material, thick plate, shear stresses, circular hole.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О

1. Вступ. Постановка задачі

В рамках тривимірної теорії пружності розглянемо задачу про визначення напруженого стану у товстій трансверсально-ізотропній пластині, яка містить круговий циліндричний отвір. На великому віддаленні від нього (умовно на нескінченності) пластина знаходиться під дією постійних зсувних навантажень $\sigma_{12}|_{r=\infty} = \tau$. Пластину має постійну товщину $2h$. Вона віднесена до декартової системи координат x_i ($i = \overline{1,3}$) і займає

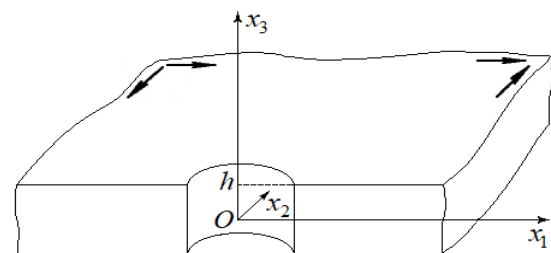


Рис.1 Пластину, що розглядається.

область $S \times [-h, h]$ тривимірного простору R^3 .

Отвір є підкріпленим: на його поверхні задано нульові значення для нормального переміщення і дотичних напружень

$$u_r(r, \theta)|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta)|_{r=R} = 0;$$

$$\sigma_{r3}(r, \theta)|_{r=R} = 0.$$

Таким чином, поставлено третю крайову задачу теорії пружності за класифікацією, що була запропонована Купрадзе та ін. [1]

Розв'язок аналогічної задачі для отвору у формі еліптичного циліндра, а також отворів, форма яких близька до квадрату та трикутника в плані представлено у роботі [2].

2. Метод побудови розв'язку задачі

Для розв'язання задачі використовуємо метод розкладення шуканих функцій в ряди Фур'є за поліномами Лежандра, що був розроблений в роботах Векуа [3] та Хоми [4].

Представимо компоненти вектора переміщень u_j і тензора напружень σ_{ij} у вигляді скінченного ряду Фур'є за поліномами Лежандра $P_k(\xi)$ координати товщини $\xi = x_3 / h$, тобто

$$\{u_j(x_1, x_2, x_3), \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)\} =$$

$$= \sum_{k=0}^N \{u_j^{(k)}(x), \sigma_{ij}^{(k)}(x)\} P_k(\xi),$$

де $x = (x_1, x_2) \in S$; $\xi = h^{-1}x_3 \in [-1, 1]$, $u_j^{(k)}(x)$, $\sigma_{ij}^{(k)}(x)$ – коефіцієнти розкладу, які ми будемо, наслідуючи Векуа [3], називати моментами; N – натуральне число, яке вважатимемо парним $N = 2n$ ($n = 0, 1, \dots, \infty$).

Щодо складових даного розкладу отримаємо систему рівнянь рівноваги

$$\partial_\alpha \sigma_{\alpha j}^{(k)} - (2k+1)h^{-1} \sum_{s=0}^{[K]} \sigma_{3j}^{(k-2s-1)} = 0$$

$$(j=1, 2, 3; k=\overline{0, N}, K=(k-1)/2)$$

і співвідношення пружності $\sigma_{ij}^{(k)} = c_{ijlm} \varepsilon_{lm}^{(k)}$, що зв'язують моменти напружень і деформацій. Моменти тензора деформацій $\varepsilon_{lm}^{(k)}$ визначаються формулами

$$\varepsilon_{\alpha j}^{(k)} = \partial_\alpha u_j^{(k)}; \quad \varepsilon_{3j}^{(k)} = (2k+1)h^{-1} \sum_{s=0}^{[N_k]} u_j^{(k+2s+1)}$$

$$(\alpha=1, 2; j=1, 2, 3; N_k=(N-k-1)/2),$$

де символ $[]$ означає цілу частину числа.

Наведені рівності утворюють замкнену систему рівнянь щодо невідомих функцій моментів напружень і переміщень. Для трансверсально-ізотропного тіла ці рівняння зводяться до двох груп рівнянь, що описують симетричне і косиметричне відносно S деформування пластини.

При симетричному деформуванні система рівнянь має вигляд

$$c_{60} \Delta u_\alpha^{(2k)} + (c_{12} + c_{66}) \partial_\alpha e^{(2k)} +$$

$$+ (4k+1)h^{-1} \sum_{s=1}^n (\lambda_{2s-1}^{(k)} \partial_\alpha u_3^{(2s-1)} - c_{44} h^{-1} \beta_{2s}^{(k)} u_\alpha^{(2s)}) = 0,$$

$$(\alpha=1, 2; k=\overline{0, n}) \quad (1)$$

$$c_{44} \Delta u_3^{(2k-1)} + (4k-1)h^{-1} \times$$

$$\times \sum_{s=0}^n (\lambda_{2s}^{(k)} e^{(2s)} - c_{33} h^{-1} \alpha_{2s-1}^{(k)} u_3^{(2s-1)}) = 0, \quad (k=\overline{1, n}),$$

де $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{66}$ – пружні сталі матеріалу; Δ – оператор Лапласа; $e^{(2k)} = \partial_1 u_1^{(2k)} + \partial_2 u_2^{(2k)}$;

$$\lambda_{2s-1}^{(k)} = \begin{cases} -c_{44}, & 1 \leq s \leq k; \\ c_{13}, & k < s \leq n \end{cases},$$

$$\lambda_{2s}^{(k)} = \begin{cases} -c_{13}, & 0 \leq s < k; \\ c_{44}, & k \leq s \leq n \end{cases};$$

$\alpha_{2s-1}^{(k)}, \beta_{2s}^{(k)}$ – абсолютні постійні.

Для однозначного визначення дані рівняння необхідно доповнити умовами, заданими на границі області

$$u_r^{(2k)}(r, \theta)|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{r\theta}^{(2k)}(r, \theta)|_{r=R} = 0 \quad (k=\overline{0, n});$$

$$\sigma_{r3}^{(2k-1)}(r, \theta)|_{r=R} = 0 \quad (k=\overline{1, n}).$$

Загальний аналітичний розв'язок системи (1) в комплексній формі представляється таким чином [4]

$$c_{66} u_+^{(0)} = \kappa \varphi(z) - z \overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + h \sum_{l=1}^N a_l^{(0)} \partial_{\bar{z}} V_l;$$

$$c_{66} u_+^{(2k)} = \mu_*^{(2k)} h^2 \overline{\varphi''(z)} + h \sum_{l=1}^N a_l^{(2k)} \partial_{\bar{z}} V_l +$$

$$+ i h \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}} W_s; \quad u_+^{(2k)} = u_1^{(2k)} + i u_2^{(2k)}; \quad (2)$$

$$c_{66}u_3^{(1)} = -\kappa_1 h \left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] + \sum_{l=1}^N c_l^{(1)} V_l ;$$

$$c_{66}u_3^{(2k-1)} = \sum_{l=1}^N c_l^{(2k-1)} V_l \quad (k=\overline{1, n}),$$

де $\varphi(z)$, $\psi(z)$ - довільні голоморфні функції комплексної змінної $z = x_1 + ix_2$; V_l і W_s - метагармонічні функції, що задовольняють рівнянням

$$\Delta V_l - k_l h^{-2} V_l = 0 \quad (l=\overline{1, N});$$

$$\Delta W_s - t_s h^{-2} W_s = 0 \quad (s=\overline{1, n}),$$

в яких параметрами k_l і t_s є корені відповідних характеристичних рівнянь; κ , κ_1 , $\mu_*^{(2)} = \kappa_2$, $\mu_*^{(2k)} = 0$ ($k > 1$), $a_l^{(2k)}$, $b_s^{(2k)}$, $c_l^{(2k-1)}$ - безрозмірні константи.

Складові напружень $\sigma_{ij}^{(m)}$ згідно розв'язку (2) виражаються формулами

$$\sigma_{11}^{(0)} + \sigma_{22}^{(0)} = 4 \left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] + 2h^{-1} \sum_l^N d_l^{(0)} V_l ;$$

$$\sigma_{11}^{(0)} - \sigma_{22}^{(0)} + 2i\sigma_{12}^{(0)} =$$

$$= -4 \left[z \overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)} \right] + 4h \sum_{l=1}^N a_l^{(0)} \partial_{\bar{z}}^2 V_l ;$$

$$\sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)} = 2h^{-1} \sum_{l=1}^N d_l^{(2k)} V_l ;$$

$$\sigma_{33}^{(2k)} = h^{-1} \sum_{l=1}^N d_{3l}^{(2k)} V_l$$

$$\sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i\sigma_{12}^{(2k)} = 4\mu_*^{(2k)} h^2 \overline{\varphi'''(z)} +$$

$$+ 4h \sum_{l=1}^N a_l^{(2k)} \partial_{\bar{z}}^2 V_l + 4ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}}^2 W_s ;$$

$$\sigma_{13}^{(2k-1)} + i\sigma_{23}^{(2k-1)} = 2 \sum_{l=1}^N p_l^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} V_l +$$

$$+ 2i \sum_{s=1}^n q_s^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} W_s, \quad (k=\overline{1, n}).$$

Введемо полярну систему координат r, θ і скористаємося формулами перетворення

$$\sigma_{rr}^{(2k)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} - 2i\sigma_{r\theta}^{(2k)} = e^{2i\theta} \left(\sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} - 2i\sigma_{12}^{(2k)} \right);$$

$$\sigma_{rr}^{(2k)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} = \sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)};$$

$$u_r^{(2k)} - iu_\theta^{(2k)} = e^{i\theta} \overline{u_+^{(2k)}};$$

$$\sigma_{r3}^{(2k-1)} - i\sigma_{\theta 3}^{(2k-1)} = e^{i\theta} \left(\sigma_{13}^{(2k-1)} - i\sigma_{23}^{(2k-1)} - 2i\sigma_{12}^{(2k)} \right).$$

Отримаємо вирази для граничних умов на контурі отвору

$$c_{66}u_r^{(2k)} = \operatorname{Re} \left(c_{66} \overline{u_+^{(2k)}} e^{i\theta} \right),$$

$$\sigma_{r3}^{(2k-1)} = \operatorname{Re} \left[e^{i\theta} \left(\sigma_{13}^{(2k-1)} - i\sigma_{23}^{(2k-1)} \right) \right];$$

$$2\sigma_{r\theta}^{(2k)} = \operatorname{Im} \left[e^{2i\theta} \left(\sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} - 2i\sigma_{12}^{(2k)} \right) \right].$$

Представимо голоморфні функції $\varphi(z)$, $\psi(z)$, у вигляді

$$\varphi(z) = \Gamma z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad \psi(z) = \Gamma' z + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n},$$

де a_n , b_n , - довільні постійні;

$$\Gamma + \bar{\Gamma} = \frac{1}{4} \left(\sigma_{11}^{(0)\infty} + \sigma_{22}^{(0)\infty} \right),$$

$$\Gamma' = -\frac{1}{4} \left(\sigma_{11}^{(0)\infty} - \sigma_{22}^{(0)\infty} + 2i\sigma_{12}^{(0)\infty} \right).$$

Залежно від значень коренів k_m характеристичного рівняння, які можуть бути дійсними позитивними (k_1) і комплексно-спряженими (k_2 , $k_3 = \bar{k}_2$), метагармонічні функції представимо таким чином:

$$V_l = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n K_n(\rho x_1) e^{in\theta},$$

$$V_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(\rho x_2) e^{in\theta},$$

$$V_3 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H_n^{(2)}(\rho x_3) e^{in\theta},$$

Тут $K_n(\rho x_1)$, $H_n^{(1)}(\rho x_2)$, $H_n^{(2)}(\rho x_3)$ - циліндричні функції Бесселя, Ханкеля першого і другого роду, $\rho = r/R$, $x_1 = Rh^{-1} \sqrt{k_1}$, $x_2 = Rh^{-1} \sqrt{-k_2}$, $x_3 = \bar{x}_2$. Аналогічний вигляд мають метагармонічні функції W_s .

Радіальні σ_{rr} і окружні $\sigma_{\theta\theta}$ напруження представляються виразами

$$\frac{1}{\tau} \sigma_{rr} = \frac{1}{2} \left\{ 2 - \sum_{k=0}^n T_{rr}^{(2k)}(\rho) P_{2k}(\xi) \sin 2\theta \right\},$$

$$\frac{1}{\tau}\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{2} \left\{ -2 + \sum_{k=0}^n T_{\theta\theta}^{(2k)}(\rho) P_{2k}(\xi) \sin 2\theta \right\},$$

де $T_{rr}^{(2k)}(\rho)$, $T_{\theta\theta}^{(2k)}(\rho)$ – складові, що містять циліндричні функції, $\rho = r/R$.

3. Числовий аналіз результатів

Проведено числове дослідження напруженого стану трансверсально-ізотропної пластини з коефіцієнтами Пуассона $\nu = 0,25$, $\nu' = 0,35$ і співвідношеннями модулів пружності $E/G' = 5,0$, $E/E' = 1,75$, що містить кругову циліндричну порожнину і знаходиться під дією постійних зсувних зусиль τ на нескінченності.

Як показав аналіз, при заданих умовах домінуючими є радіальні напруження в граничних точках отвору при значенні $\theta = \pi/4$.

Графік на рис. 2 ілюструє зміну коефіцієнта концентрації радіальних напружень на контурі отвору ($r = R$, $\theta = \pi/4$) в залежності від співвідношення між півтовщиною пластини і радіусом отвору.

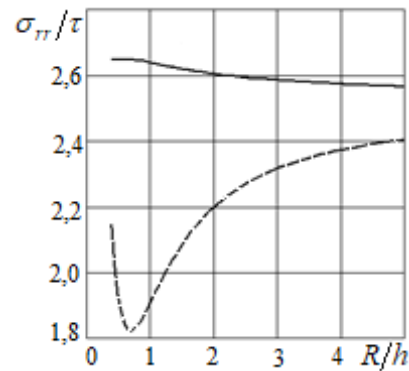


Рис.2 Залежність радіальних напружень від відношення радіуса отвору і півтовщини пластини.

Значення напружень в точках на серединній площині пластини показано суцільною кривою лінією, а на її граничних поверхнях – штриховою.

Як видно з рисунку, коефіцієнт концентрації радіальних напружень σ_{rr} досягає значень $2,55 \div 2,65$, він тим більший, чим менше діаметр отвору, порівняно з товщиною пластини, але його зростання значно сповільнюється, коли діаметр і товщина пластини стають рівними.

Список використаних джерел

1. Купрадзе В. Д. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / В.Д. Купрадзе, Т.Г. Гегелия, М.О. Башенейшвили, Т.В. Бурчуладзе. – Тбилиси: Изд-во Тбилисск. ун-та, 1968. – 627 с.
2. Khoma I.Yu. Solving the Third Homogeneous Boundary-Value Problem of the Deformation of a Transversely Isotropic Plate with a Curved Hole Under Uniform Tension Stress State of a Nonthin Transversely Isotropic Plate with a Curved Hole / I.Yu. Khoma, O.G. Dashko // Int. Appl. Mech. – 2016. – Vol 52, N 6. – P. 605-615.
3. Векуа И.Н. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины / И.Н. Векуа // Тр. Тбилисск. матем. ин-та. – 1965. – № 30. – С. 3–103.
4. Khoma I.Yu. Representation of the Solution of the Equilibrium Equations for Non-Thin Transversely Isotropic Plates / I.Yu. Rhoma // Journal of Mathematical Sciences. – 2000. – Vol. 101, N 6. – P. 3577-3584.

References

1. KUPRADZE, V.D., GEGELIA, T.G., BASHENEYSHVILI, M.O. and BURCHULADZE, T.V. (1968) *Trehmernye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti i termouprugosti*. Tbilisi: Izdatel'stvo Tbilisskogo universiteta.
2. KHOMA, I.YU. AND DASHKO, O.G. (2016) Solving the Third Homogeneous Boundary-Value Problem of the Deformation of a Transversely Isotropic Plate with a Curved Hole Under Uniform Tension Stress State of a Nonthin Transversely Isotropic Plate with a Curved Hole. *International Applied Mechanics*. 52(6). p. 605-615.
3. VEKUA, I.N. (1965) *Teoriya tonkih plogoh obolochek peremennoj tolschiniy*. *Trudyi Tbilisskogo matematicheskogo instituta*. 30. p. 3-103.
4. KHOMA, I.YU. (2000) Representation of the Solution of the Equilibrium Equations for Non-Thin Transversely Isotropic Plates. *Journal of Mathematical Sciences*. 101 (6). p. 3577-3584.

Надійшла до редколегії 03.09.17

УДК 539.3

Хотенко О.О.¹, к.ф.-м.н., н.с.,
Хотенко І.М.¹, к.ф.-м.н., с.н.с.

Двовимірна динамічна задача теорії гіперпружності

¹ Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН
України, 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3,
e-mail: h.khotenko@gmail.com

O.O. Khotenko¹, Ph.D. (Phys.-Math.),
I.M. Khotenko¹, Ph.D. (Phys.-Math.)

Two-dimensional dynamical problem of the theory of hyperelasticity

¹ S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of
Ukraine, 03057, Kyiv, Nesterova str., 3,
e-mail: h.khotenko@gmail.com

В статті розглянуто динамічну задачу про поширення квадратично нелінійної хвилі Релея в пружному півпросторі в класичній постановці. Визначальні співвідношення відповідають нелінійному потенціалу Мурнагана. Нелінійне рівняння Релея досліджується для дев'яти пружних матеріалів.

Ключові слова: плоска нелінійна пружна задача, модель Мурнагана, нелінійна хвиля Релея, квадратично нелінійні хвильові рівняння, генерація другої гармоніки.

The dynamical problem of quadratically nonlinear Rayleigh wave propagation in elastic half-space in classical statement is studied. Constitutive relations correspond to nonlinear five constant Murnaghan potential. The paper continues the study on nonlinear Rayleigh wave propagation conducted by authors previously. Numerical analysis and computer aided design is applied (MathCad 15). The numerical analysis of the nonlinear Rayleigh equation is applied to nine elastic materials of different types (metals, glasses, polymers) such as: aluminum, wolfram, copper, molybdenum, steel, steel Hecla 17, polystyrene, plexiglas, fused quartz. Dependence of the frequencies on which different effects appear on initial amplitude is studied. Results of the studied problem are presented in tabular form. Conclusions on the effect of mechanical properties of materials on results are made. New effects are detected. One of the new effects is that increasing of the initial amplitude or frequency leads to decreasing of the Rayleigh wave velocity.

Key Words: nonlinear elastic two-dimensional plane problem, Murnaghan model, nonlinear Rayleigh wave, quadratically nonlinear wave equations, the second harmonic generation.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я. О.

1. Вступ

Теорія нелінійних хвиль в пружних матеріалах являє собою великий розділ нелінійної теорії пружності, який через властиві теорії нелінійних хвиль математичні труднощі не є закінченим до цього часу і розвивається у багатьох наукових центрах світової механіки. З іншого боку, сучасна промисловість виробляє незлічену кількість машин, конструкцій, приладів, устаткування, які або постійно працюють у динамічних режимах, або у роботі яких використовуються механізми поширення.

В дослідженні [1-4] розглянута одновимірна та двовимірна динамічні задачі теорії

гіперпружності, основаної на одно- та двовимірному потенціалі Мурнагана [5, 6]. Записані формули для визначення нелінійного потенціалу Мурнагана 3, 4, 5, 6 степенів щодо компонентів градієнта зміщень і відповідні їм динамічні рівняння для обох випадків. Записані нові двовимірні хвильові рівняння для різних випадків, в тому числі і нехтування геометричною чи фізичною нелінійностями.

2. Постановка задачі та її розв'язання

В даному дослідженні вибраний пружний потенціал Мурнагана у вигляді

$$W = \frac{1}{2} \lambda (u_{1,1} + u_{3,3})^2 + \mu \left\{ u_{1,1}^2 + u_{3,3}^2 + \frac{1}{2} (u_{1,3} + u_{3,1})^2 \right\} + \frac{1}{2} \lambda (u_{1,1} + u_{3,3}) [u_{1,1}^2 + u_{3,3}^2 + u_{1,3}^2 + u_{3,1}^2] + \mu \left\{ u_{1,1}^2 + u_{3,3}^2 + 2u_{1,1}u_{1,3} + 2u_{1,1}u_{3,1} + u_{1,3}u_{3,1} (u_{1,1} + u_{3,3}) \right\} + \quad (1)$$

$$+ \frac{1}{3} A \left[u_{1,1}^2 + u_{3,3}^2 + \frac{3}{4} (u_{1,3} + u_{3,1})^2 (u_{1,1} + u_{3,3}) \right] + B (u_{1,1} + u_{3,3}) \left[u_{1,1}^2 + u_{3,3}^2 + \frac{1}{2} (u_{1,3} + u_{3,1})^2 \right] + \frac{1}{3} C (u_{1,1} + u_{3,3})^3.$$

де λ , μ – пружні сталі Ляме (другого порядку); A , B , C – пружні сталі Мурнагана (третього порядку) та нелінійний тензор деформацій Коші – Гріна у вигляді

$$\varepsilon_{nm} = \frac{1}{2} (u_{n,m} + u_{m,n} + u_{i,n} u_{i,m}), \quad (2)$$

де u_n – компонент вектора зміщень.

Вивчається можливість поширення хвиль вздовж площини $x_3 = 0$, яка розділяє вакуум та пружне середовище. Вважаємо, що рух не залежить від координати x_2 , і тоді задача стає двовимірною (плоскою задачею в площині Ox_1x_3 ; механічний стан середовища стає плоским

деформованим). Напрямок руху хвиль обираємо вздовж осі Ox_1 .

В рамках нелінійної постановки та прийнятих припущень про хвильовий рух рівняння руху записують через несиметричний тензор напружень Кірхгофа t_{nm} в такому вигляді:

$$t_{11,1} + t_{31,3} = \rho \ddot{u}_1; \quad t_{13,1} + t_{33,3} = \rho \ddot{u}_3 \quad (3)$$

Розглядаються квадратично нелінійні хвилі, що відповідає представленню потенціалу Мурнагана

$$W = \frac{1}{2} \lambda (u_{1,1} + u_{3,3})^2 + \mu \left\{ u_{1,1}^2 + u_{3,3}^2 + \frac{1}{2} (u_{1,3} + u_{3,1})^2 \right\} + \quad (4)$$

$$+ \frac{1}{2} \lambda (u_{1,1} + u_{3,3}) \left[u_{1,1}^2 + u_{3,3}^2 + u_{1,3}^2 + u_{3,1}^2 \right] + \mu \left\{ u_{1,1}^2 + u_{3,3}^2 + 2u_{1,1}u_{1,3}^2 + 2u_{1,1}u_{3,1}^2 + u_{1,3}u_{3,1} (u_{1,1} + u_{3,3}) \right\} + \\ + \frac{1}{3} A \left[u_{1,1}^2 + u_{3,3}^2 + \frac{3}{4} (u_{1,3} + u_{3,1})^2 (u_{1,1} + u_{3,3}) \right] + B (u_{1,1} + u_{3,3}) \left[u_{1,1}^2 + u_{3,3}^2 + \frac{1}{2} (u_{1,3} + u_{3,1})^2 \right] + \frac{1}{3} C (u_{1,1} + u_{3,3})^3.$$

Компоненти тензора напружень Кірхгофа визначаються за формулою

$$t_{nm} = \partial W / \partial u_{m,n}.$$

Нелінійне рівняння спрощується через врахування лише першого з трьох нелінійних доданків, що можливо лише за певних обмежень на величину початкової амплітуди хвилі. Таке рівняння має вигляд:

$$-l_1 l_4 + l_2 l_3 - \left[\frac{l_3^2 n_2^2 + l_1^2 n_5^2 - 2l_1 l_3 n_2 n_5}{l_2 n_5 - l_4 n_2} - \frac{l_4 n_1 n_2 + l_2 n_2 n_4 - 2l_2 n_1 n_5}{n_2} \right] A_\varphi = 0, \quad (5)$$

де l_i , n_j – величини, що залежать від параметрів матеріалу (пружних сталих і густини), швидкості і фази хвилі.

Рівняння (5) можна записати у наступній формі:

$$L + N \cdot A_\varphi \cdot \omega^2 = 0, \quad (6)$$

де L , N – лінійна та нелінійна частини, відповідно.

3. Результати розрахунків та їх аналіз

В дослідженні проведено комп'ютерне моделювання та числовий аналіз рівняння (5). Основне дослідження проводилось для 9 матеріалів: алюміній, вольфрам, мідь, молибден, сталь, сталь Несла17, полістирол, оргскло та плавлений кварц для чотирьох значень початкових амплітуд: $1 \cdot 10^{-8}$, $5 \cdot 10^{-8}$, $1 \cdot 10^{-7}$, м

та на дев'яти частотах: 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800 кГц, а також було проведено ряд додаткових розрахунків для визначення частот, на яких починають проявлятися нелінійні ефекти.

Задача є багато параметричною, тому при числовому аналізі було обрано метод, коли фіксувалися значення частоти ω та фази $k_R x - \omega t$ і сканувалося значення початкової амплітуди A_φ .

Визначено значення початкових амплітуд та відповідних їм частот, при яких вплив нелінійності стає помітним. Для частоти $\omega = 1$ кГц та заданого значення похибки $\Delta = 1 \cdot 10^{-3}$, визначили значення початкової амплітуди A_φ , що не суперечать припущенню про малу нелінійність, але є приграничними значеннями.

Таблиця 1

Результати розрахунків

Матеріали	$c_{lin}, \frac{м}{с}$	$c_R, \frac{м}{с}$	Δ	$A_\phi, \cdot 10^{-4} м$
Алюміній	2947	2958	0,0001	2,89
Вольфрам	1808	1815	0,001	1,61
Мідь	2166	2174	0,01	3,23
Молибден	988	990	0,1	5,67
Сталь	979	982	0,001	4,83
Сталь Нєсcla 17	2937	2949	0,001	7,44
Полістирол	2837	2849	0,001	2,39
Оргскло	9089	9117	0,00000001	1,76
Плавлений кварц	3325	3338	0,00001	311

На наступному етапі визначено значення лінійної швидкості хвилі Релея та фазової швидкості хвилі Релея за формулою Вікторова, а також визначено, за якого значення похибки, значення початкової амплітуди усе ще не суперечить припущенню про малу нелінійність. Результати занесені до Табл.1.

Теоретичне спостереження певних нових нелінійних хвильових ефектів стало можливим завдяки побудованим графікам залежності швидкості хвилі Релея від значень початкової амплітуди для фіксованих частот. З Табл. 1 видно, що чим більша швидкість поширення хвилі Релея, тим менше значення похибки. Також з отриманих результатів видно, що лінійна швидкість завжди менша за загальноприйняте значення фазової швидкості поширення хвилі Релея, що визначається за формулою Вікторова. Чим більше абсолютне значення фазової швидкості, тим відхилення від c_R більше.

Було виявлено наступні особливості. По-перше, для кожного значення початкової амплітуди відношення амплітуд u_3/u_1 при зростанні частоти є від'ємним, і повільно спадає. Для різних значень початкової амплітуди утворюється сімейство кривих, наближених до прямих, що лежать тим ближче до осі, чим більше значення початкової амплітуди. По-друге, зміна вигляду графіків при зростанні частоти однакова для усіх значень початкових амплітуд, однак ефекти, що в них проявляються, в

залежності від матеріалу та початкової амплітуди проявляються на відмінних між собою частотах.

Для усіх матеріалів зберігається така залежність: чим вища початкова амплітуда, тим нижче частота, при якій спостерігається кожен ефект. Зміна пружних властивостей матеріалу, має наслідком зміну частоти, на яких настає ефект.

4. Висновки

Застосовано класичний підхід, який оснований на введенні потенціалів. Отримано нові нелінійні хвильові рівняння щодо потенціалів.

Проаналізовано роль граничних умов в лінійному та нелінійному аналізі хвилі Релея.

В дослідженні проведено аналіз нелінійного рівняння Релея. Результати аналізу узагальнено на дев'ять пружних матеріалів різних типів та представлено у табличному вигляді (Табл. 1).

Основний нелінійний ефект при еволюції хвилі є в тому, що гармонічна хвиля трансформується в хвилі, для яких характерні асиметрія піку, плато, роздвоєння піку та сильні нелінійні спотворення. Основний спостережений ефект полягає в тому, що нелінійність впливає лише поблизу границі.

Основний нелінійний ефект при затуханні пружної поверхневої хвилі полягає в тому, що характерна для лінійної хвилі Релея експоненціальна залежність вертикального зміщення від відстані від поверхні поширення значно ускладнюється і в результаті

експоненціальна крива трансформується в криві, для яких властиві вигин, перегин та зміна знаку.

Один з виявлених нових нелінійних ефектів полягає в тому, що при збільшенні початкової

амплітуди або частоти, швидкість хвилі Релея зменшується.

Швидкість хвилі Релея обмежується зверху максимально можливим значенням – швидкістю лінійної хвилі.

Список використаних джерел

1. Руцицкий Я.Я. О волне Рэлея в квадратично нелинейном упругом материале (модель Мурнагана) / Я.Я. Руцицкий, Е. А. Хотенко // Прикладная механика – 2011. – 47, N 3. – С.50-58.
2. Хотенко О. О. Аналіз впливу початкової амплітуди на затухання нелінійної пружної хвилі Релея / О.О. Хотенко // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2012. – Вип. 4. – С. 73–76.
3. Хотенко О. О. До теорії квадратично нелінійних хвиль Релея: дис. ... кандидата фіз.-мат. наук : 01.02.04 / Хотенко Олена Олександрівна. – Київ, 2014. – 185 с.
4. Хотенко О. О. Поширення нелінійної хвилі Релея у ізотропному пружному півпросторі / О.О. Хотенко, І.М. Хотенко // Сучасні проблеми термомеханіки: Міжнародна наукова конференція, 22 – 24 вересня 2016, Львів, Україна: збірник праць. – Львів. – 2016. – С.243–244.
5. Achenbach J. D. Wave Propagation in Elastic Solids. – Amsterdam: North Holland. – 1973. – 436 p.
6. Farnell G. W. Properties of elastic surface waves / In Physical acoustics. Ed. W.P. Mason, R.N. Thurston – New York: Academic Press, 1970. – 6. – P. 109 – 166.

References

1. RUSHCHITSKY, J. J. & KHOTENKO, E. A. (2011) On Rayleigh Wave in Quadratically Nonlinear Elastic Half-Space (Murnaghan Model). *International Applied Mechanics*. 47 (3). p.100-108.
2. KHOTENKO, O. O. (2012) Analysis of the effect of the initial amplitude on the nonlinear elastic Rayleigh wave attenuation. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics*. 4. p. 73–76.
3. KHOTENKO, O. O. (2014). *Do teorii kvadratichno nelineynykh hvyl' Releya* (PhD Dissertation). Kyiv. 185 p.
4. KHOTENKO, O. O. & KHOTENKO, I. M. (2016) Nonlinear Rayleigh wave propagation in isotropic elastic half-space. In *Modern Problems of thermomechanics*. L'viv, 22-24 dthtcyz 2016. Lviv. PubM. p.243-244
5. ACHENBACH, J. D. (1973) *Wave Propagation in Elastic Solids*. Amsterdam: North Holland.
6. FARNELL, G. W. (1970) Properties of elastic surface waves / In *Physical acoustics*. Ed. W.P. Mason, R.N. Thurston – New York: Academic Press. Vol.6. P. 109 – 166.

Надійшла до редколегії 27.08.17

УДК 539.3

Хурденко М.І., аспірант,
Жук Я.О., д.ф.-м.н., проф.

**Постановка задачі про параметричні
коливання непружних прямокутних
пластин з п'єзоелектричними сенсорами
і актуаторами з врахуванням деформації
зсуву**

Київський національний університет імені Тара-
са Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е,
e-mail: mariia.khurdenko@gmail.com;
y.zhuk@i.ua

M.I. Khurdenko, PhD student,
Y.A. Zhuk, Dr. Sci., (Phys.-Math.).

**Problem statement on parametric oscillations
of inelastic rectangular plates with piezoelec-
tric sensors and actuators with account for
shear strain**

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 4e,
Glushkov ave., Kyiv 03680
e-mail: mariia.khurdenko@gmail.com; y.zhuk@i.ua

Розвинута постановка задачі про параметричні коливання в'язкопружних тонкостінних шаруватих елементів конструкцій з п'єзоактивними шарами з врахуванням зсувів та інерції обертальних рухів та з врахуванням взаємодії механічних та електричних полів.

Ключові слова: параметричні коливання, в'язкопружний елемент, п'єзоактивний матеріал, актуатор, сенсор, лінеаризовані рівняння коливань.

The rapid development of modern technology makes it possible to shift from traditional methods of controlling oscillations to more complex, but more effective, methods that allow the use of intensive operating modes, provided that the correct assessment and strict compliance with numerous criteria of reliability, endurance and fatigue strength. Modern constructions, equipment and devices must withstand significant levels of load and to withstand new complex types of work cycles. This has led to the need for new systems of modeling, control and much deeper understanding of the real mechanical processes that occur during the loading and operation of such structures and devices. The development of a problem statement on parametric oscillations of viscoelastic thin-walled layered piezoelements with the account of shear strain and inertia of rotational motions is developed. The interaction between mechanical and electric fields is taken into account as well. The object of the study is a rectangular plate consisting of packages of orthotropic electrically passive and piezoactive layers, separated by internal electrodes with the difference in potentials varies according to the harmonic law.

Key words: parametric oscillations, viscoelastic element, displacement, piezoelement, actuator, sensor, linearized oscillation equations.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Перестюк М.О.

1. Вступ

У багатьох галузях науки і техніки в наш час знаходять застосування шаруваті тонкостінні елементи конструкцій, що містять п'єзоактивні шари, на які діють електромагнітні, механічні гармонічні за часом навантаження [1–3].

П'єзоелектричні елементи ефективно використовуються для контролю коливань тонкостінних елементів конструкцій з пасивних металічних і композитних матеріалів. Завдяки такому підходу, одні п'єзоактивні шари дають інформацію про рівень коливань системи, а інші збуджують коливання необхідної фази й амплітуди для зменшення цього рівня.

Швидкий розвиток сучасних технологій ро-

бить можливим перехід від традиційних методів контролю коливань до складніших, проте набагато ефективніших, методів, які дозволяють використовувати інтенсивні режими роботи за умови коректної оцінки і суворого дотримання численних критеріїв надійності, витривалості та втомної міцності. Сучасні конструкції, устаткування і пристрої повинні витримувати значні рівні навантажень і протистояти новим складним типам робочих циклів. Це зумовило потребу в нових системах моделювання, керування і значно глибшого розуміння складних з'язаних термоелектромеханічних процесів, які відбуваються в процесі навантаження і функціонування таких конструкцій і приладів.

Оскільки електромеханіка тонкостінних елементів є галуззю механіки, що активно розвивається, дослідження впливу п'єзокомпонент на механічну поведінку тонкостінних елементів має велику теоретичну та практичну цінність [1–3].

У даній статті розвинута постановка нової задачі про параметричні коливання в'язкопружних тонкостінних шаруватих п'єзоелементів з врахуванням зсувів інерції обертальних рухів, врахуванням взаємодії механічних електричних полів; розробка чисельно-аналітичних методів розв'язування крайових задач в рамках цих постановок; аналіз впливу основних факторів на головну область динамічної нестійкості тонкостінних п'єзоелементів.

2. Моделі параметричних коливань шаруватих в'язкопружних тонкостінних п'єзоелементів

Моделі параметричних коливань шаруватих в'язкопружних п'єзоелементів – це співвідношення, які описують їх параметричні коливання [1–3].

Розглядаються шаруваті в'язкопружні тонкостінні п'єзоелементи типу пластин, стержнів та оболонок постійної товщини, що складаються з довільного числа пасивних або п'єзоактивних шарів сталої товщини. Будемо вважати пасивні шари ортотропними. П'єзоактивні шари можуть бути виготовлені з п'єзополімера або п'єзокераміки, та вважаються поляризованими по товщині.

Досліджуючи коливальні процеси, дисипативні властивості матеріалів пасивних і п'єзоактивних шарів будемо враховувати на основі концепції комплексних модулів [1,3].

Замінімо всі електромеханічні характеристики на оператори Вольтера для моделювання нестационарних процесів [1,3]. Будемо вважати, що при втраті динамічної стійкості кути повороту координатної поверхні великі, так що кінематичні характеристики нелінійні. При цьому нелінійними є і рівняння руху, хоч деформації й малі. При розрахунку докритичного стану використовується лінійна теорія [4].

В теорії параметричних коливань одним із основних питань є питання визначення областей динамічної нестійкості. Знайти ці області можливо на основі лінеаризованих рівнянь [5]. У загальному випадку вважається, що існує деякий відомий незбурений стан гармонічних коливань, який можна характеризувати зміщеннями u, v , w ; деформаціями $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, \chi_1, \chi_2, \chi_{12}$; зусиллями та моментами T_1, T_2, S, M_1, M_2 ,

$^0 H$.

При малих тангенсах кута втрат з достатньою точністю можна використовувати розв'язок для пружного матеріалу. Лише у випадку дослідження впливу інерції в докритичному стані на область динамічної нестійкості слід враховувати дисипативні властивості матеріалу.

3. Постановка задачі про параметричні коливання непружних прямокутних пластин

Розглянемо прямокутну пластину $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, що складається з пакетів ортотропних і пакетів п'єзоактивних шарів, що розділені внутрішніми електродами, до яких підведено різницю потенціалів, що змінюються за гармонічним законом. Між деякими пакетами електроди можуть бути відсутні; зовнішні поверхні можуть бути електродовані і до електродів може бути підведено різницю потенціалів.

Враховуючи, що п'єзопластина має симетричну відносно серединної поверхні структуру ($K_{ij}, M_0 = 0$), визначальні рівняння мають вигляд [1–3]:

$$\begin{aligned} T_1 &= C_{11} * \varepsilon_1 + C_{12} * \varepsilon_2 + T_0, \\ T_2 &= C_{12} * \varepsilon_1 + C_{22} * \varepsilon_2 + T_0, \\ S &= C_{66} * \varepsilon_{12}, \\ M_1 &= D_{11} * \chi_1 + D_{12} * \chi_2, \\ M_2 &= D_{12} * \chi_1 + D_{22} * \chi_2, \\ H &= D_{66} * \chi_{12}. \end{aligned} \quad (1)$$

де зірочка (*) означає оператор Вольтера, а D – вектор електричної індукції.

Вважається, що докритичний стан є квазістатичним і є станом планарних коливань.

Торці пластини жорстко закріплені відносно планарних зміщень:

$$^0 u = 0, \quad (x = 0, a), \quad ^0 v = 0, \quad (y = 0, b). \quad (2)$$

Тоді в докритичному квазістатичному стані деформації відсутні, а зусилля визначаються формулами [5]:

$$\begin{aligned} ^0 T_1 &= T_0(t) = T + T^1 \cos \omega t, \\ ^0 T_2 &= T_0(t) = T + T^1 \cos \omega t. \end{aligned} \quad (3)$$

Підстановка (3) в лінеаризовані рівняння, отримані для оболонок у [4],

$$\begin{aligned} (A_{11} * \Delta \Delta + A_6 * L_4) * \Phi - \\ - (P_{12} * \Delta \Delta + B_6 * L_4 + \Delta_k) * w = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & (D_{11} * \Delta \Delta + D_6 * L_4) * w - \\ & - (R_{12} * \Delta \Delta + \bar{A}_6 * L_4 - \Delta_k) * \Phi + \\ & + \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[B \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ T_1 \end{smallmatrix} w_1 + \begin{smallmatrix} 0 \\ S \end{smallmatrix} w_1 \right) \right] + \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial \beta} \left[A \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ T_2 \end{smallmatrix} w_2 + \begin{smallmatrix} 0 \\ S \end{smallmatrix} w_2 \right) \right] \right\} + R \ddot{w} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

приводить до такого рівняння відносно прогину w :

$$\begin{aligned} & D_{11} * \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) * \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ & + D_{22} * \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + T_0(t) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \\ & + \tilde{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Для шарнірного закріплення торців пластин матимемо рівняння такого вигляду:

$$\begin{aligned} & w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (x = 0, a), \\ & w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (y = 0, b). \end{aligned} \quad (7)$$

Отриману постановку задачі можна розв'язувати або методом скінченних елементів, або аналітичним методом – методом Бубнова-Гальоркіна [4,5]. В останньому випадку розв'язок крайової задачі представляємо у вигляді:

$$w = w_{mn}(t) \sin k_m x \sin p_n y, \quad (8)$$

$$\text{де} \quad k_m = \frac{m\pi}{a}, \quad p_n = \frac{n\pi}{b}. \quad (9)$$

Підставляючи (7) в (5)–(6), отримаємо інтегродиференціальне рівняння відносно амплітуд w_{mn} .

$$\begin{aligned} & \tilde{\rho} \frac{d^2 w_{mn}}{dt^2} + \left\{ k_m^4 D_{11} * + \right. \\ & + 2k_m^2 p_n^2 (D_{12} + 2D_{66}) * + p_n^4 D_{22} * \left. \right\} - \\ & \left(T + \begin{smallmatrix} 0 \\ T \end{smallmatrix} \cos \omega t \right) (k_m^2 + p_n^2) \Big\} w_{mn} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Нагадаємо, що зірочка (*) – це оператор:

$$D_{ij} * w_{mn} = D_{ij} \begin{smallmatrix} 0 \\ w_{mn} \end{smallmatrix} - \int_{-\infty}^t D_{ij} (t - \tau) w_{mn}(\tau) d\tau. \quad (11)$$

Наприклад, для пружного матеріалу це рівняння набирає вигляду класичного рівняння Матіє:

$$\frac{d^2 w_{mn}}{dt^2} + \Omega_{mn}^2 (1 - 2\mu_{mn} \cos \omega t) w_{mn} = 0, \quad (12)$$

$$\Omega_{mn}^2 = \frac{1}{\tilde{\rho}} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ p_{mn} \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} 0 \\ T \end{smallmatrix} T_{mn} \right), \quad \mu_{mn} = \frac{\begin{smallmatrix} 1 \\ T \end{smallmatrix}}{2(T_{mn}^{kp} - \begin{smallmatrix} 0 \\ T \end{smallmatrix})},$$

$$\begin{aligned} & T_{mn}^{kp} = \frac{\begin{smallmatrix} 0 \\ p_{mn} \end{smallmatrix}}{T_{mn}}, \quad T_{mn} = k_m^2 + p_n^2, \\ & \begin{smallmatrix} 0 \\ p_{mn} \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} 0 \\ D_{11} \end{smallmatrix} k_m^4 + 2(\begin{smallmatrix} 0 \\ D_{12} \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 0 \\ D_{66} \end{smallmatrix}) k_m^2 p_n^2 + \\ & + \begin{smallmatrix} 0 \\ D_{22} \end{smallmatrix} p_n^4. \end{aligned}$$

Як відомо [4,5], межі динамічної нестійкості зосереджені біля частоти:

$$\omega_{mn} = \frac{2\Omega_{mn}}{k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (13)$$

При цьому межі першої (головної) ($k=1$) області динамічної нестійкості знаходяться з формули:

$$\omega = 2\Omega(1 \pm \mu)^{\frac{1}{2}}, \quad (14)$$

В роботах [4,5] детально досліджено вплив затухання на межі області динамічної нестійкості. При цьому рівняння (12) замінюється рівнянням

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dw}{dt} \Omega^2 (1 - 2\mu \cos \omega t) w = 0. \quad (15)$$

Для головної ОДН одержано формулу:

$$\omega = 2\Omega \left\{ 1 \pm \left(\mu^2 - \Delta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \Delta = \frac{2\varepsilon}{\Omega}. \quad (16)$$

З виразу (16) отримаємо формулу для критичного значення коефіцієнта збудження для головної ОДН:

$$\mu_* = \Delta. \quad (17)$$

Якщо досліджувати тільки головну ОДН, то для рівняння (16) формулу (17) отримаємо шляхом представлення розв'язку у вигляді:

$$w = \operatorname{Re} \tilde{w} e^{\frac{i\omega t}{2}} = w' \cos \frac{i\omega t}{2} - w'' \sin \frac{i\omega t}{2}, \quad (18)$$

$$\tilde{w} = w' + iw''.$$

Слідуючи [4,5], підставляємо (18) у (6) і отримаємо задачу на власні числа для w' і w'' :

$$\begin{aligned} {}^0L w' - {}^1L w'' + \left({}^0T - \frac{{}^1T}{2} \right) \Delta w' &= 0, \\ {}^0L w'' + {}^1L w' + \left({}^0T + \frac{{}^1T}{2} \right) \Delta w'' &= 0, \end{aligned} \quad (19)$$

де $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, а оператор ${}^0L$ має вигляд

$$\begin{aligned} {}^0L &= {}^0D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \left({}^0D_{12} + 2 {}^0D_{66} \right) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ &{}^0D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} - \tilde{\rho} \left(\frac{\omega}{2} \right)^2, \end{aligned}$$

а оператор ${}^1L$ отримаємо з оператора ${}^0L$ заміною

${}^0D_{ij}$ на ${}^1D_{ij}$, а $\tilde{\rho}$ на 0.

До цього рівняння необхідно додати відповідні однорідні граничні умови. У випадку шарнірно закріплених торців пластини:

$$\begin{aligned} w' = 0, \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} = 0, w'' = 0, \frac{\partial^2 w''}{\partial x^2} = 0, (x = 0, a), \\ w' = 0, \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} = 0, w'' = 0, \frac{\partial^2 w''}{\partial x^2} = 0, (x = 0, a). \end{aligned} \quad (20)$$

Задача (19), (20) є задачею на власні числа для w' і w'' .

4. Висновки

З використанням концепції комплексних модулів розвинуто постановку задачі електромеханіки про параметричні коливання в'язкопружних тонкостінних шаруватих елементів конструкцій з п'єзоактивними шарами з врахуванням зсувів та інерції обертальних рухів та з врахуванням взаємодії механічних та електричних полів.

Список використаних джерел

1. Карнаухов В.Г. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек / В.Г. Карнаухов, И.Ф. Киричок. – Киев: Наук. думка, 1986. – 222 стр.
2. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.5. Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга; Отв. ред. А.Н. Гузь; АН УССР. Ин-т механики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с.
3. Карнаухов В.Г. Электротермовязкоупругость / В.Г. Карнаухов, И.Ф. Киричок. – Киев: Наук. думка, 1988 г. – 320 стр.
4. П'ятецький В.О. Параметричні коливання тонкостінних елементів з в'язкопружних п'єзоелектричних матеріалів / В.О. П'ятецький, О.В.Карнаухова // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки – 1996. – 2. – С.77–88.
5. Pyatetskii V. A. Study of parametric vibrations of a viscoelastic piezoelectric rod with allowance for geometric nonlinearity / V. A. Pyatetskii, O. V. Karnaukhova // Int. Appl. Mech. – 1998. – Vol. 34, № 11. – p. 92–96.

References

1. KARNAUKHOV V. G., KIRICHOK I. F. (1986) *Svjazannye zadachi teorii vjaskouprugih plastin i obolochek*. Kiev: Nauk. Dumka.
2. *Mekhanika svjazannyh polej v jelementakh konstrukcij*. T.5. *Elektrouprugost'* (1989) / GRINCHENKO V.T., ULIYKO A.F., SHUL'GA N.A.; Otv. red. A.N. GUZ'; AN USSR. In-t mehaniki. Kiev: Nauk. Dumka.
3. KARNAUKHOV V.G., KIRICHOK I.F. (1988) *Elektrotermovjaskouprugost'*. Kiev: Nauk. Dumka.
4. PYATETSKII V.A., KARNAUKHOVA O.V. (1996) Parametrychni kolyvannya tonkostinnykh elementiv z v'yazkopruznykh piezoelektrychnykh materialiv. *Visnyk Kyivskogo universytetu. Ser. Fiziko-matematychni nauky*. (2) p. 77-88.
5. PYATETSKII V.A., KARNAUKHOVA O.V. (1998) Study of parametric vibrations of a viscoelastic piezoelectric rod with allowance for geometric nonlinearity. *Int. Appl. Mech.* 34(11) p. 92–96.

Надійшла до редколегії 20.09.2017

УДК 539.3

Шакери Мобараке Пуян¹, стажер,
Гринченко В.Т.², д. ф.-м. н., професор,
Андрушенко В.А.³, ведучий інженер,
Никитенко В.Н.⁴, ведучий інженер.

**Амплитудно-частотные
характеристики пьезокерамических
пластин в зависимости от формы
границ**

^{1,3,4}Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, 03680, г. Київ, пр-т.
Акад. Глушкова 4-е
e-mail¹: pouyan.shakeri@gmail.com

²Інститут гідромеханіки НАН України,
г. Київ, 03057, ул. Желябова, 8/4
e-mail²: vgrinchenko@yahoo.com

Pouyan Shakeri Mobarakeh¹, researcher,
V.T. Grinchenko², Dr. Sci.(Phys -Math), Prof.,
V.A. Andruschenko³, leading engineer,
V.N. Nikitenko⁴, leading engineer.

**The amplitude-frequency characteristics
of piezoceramic plates depending on the shape
of the boundaries**

^{1,3,4}Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 03680, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e
e-mail¹: pouyan.shakeri@gmail.com

²Institute of Hydromechanics of NAS of
Ukraine, Kyiv, 03057, Zhelyabova Str., 8/4
e-mail²: vgrinchenko@yahoo.com

Изложены результаты экспериментальных исследований вынужденных планарных колебаний пьезокерамических пластин в форме параллелограмма. Основная идея работы заключается в том, чтобы изучить возможность управления спектром собственных частот пластин путем изменения формы. Методика проведения эксперимента опробована при изучении свойств прямоугольных пластин с различным соотношением сторон. Эксперименты проводились на пластинах из керамики SM111 (модифицированная PZT-4 фирмы STEMiNC). Частотный диапазон планарных мод ограничивался сверху значением 140 кГц, что обеспечивало возможность эффективного возбуждения, достаточного для анализа числа собственных форм колебаний, включая и форму колебаний при краевом резонансе. Экспериментальные результаты дополнены результатами расчетов с использованием пакета ANSYS, что дало возможность надежно идентифицировать конкретные формы колебаний.

Ключевые слова: пластины неканонической формы, планарные колебания, амплитудно-частотные характеристик (АЧХ), метод конечных элементов (МКЭ).

The results of experimental studies of forced planar vibrations of piezoceramic plates in the form of a parallelogram are presented. The main idea of the work is to study the possibility of controlling the spectrum of natural frequencies of plates by changing the form. The technique of the experiment was tested in studying the properties of rectangular plates with different aspect ratios. The experiments were carried out on plates of SM111 ceramics (modified PZT-4 from STEMiNC). The frequency range of the planar modes was limited to 140 kHz from the top. This ensured the possibility of an effective excitation, sufficient for analyzing the number of eigenmodes and the shape of oscillations at the edge resonance. The experimental data were compared with the numerical simulation results obtained using the ANSYS package. This made it possible to reliably identify specific forms of oscillations. It is shown that even a slight distortion of the shape of a rectangular plate significantly changes the frequency spectrum of its planar resonance oscillations. Analysis of the plates resonant spectrum allows us to distinguish the frequencies of the edge resonance from the complex spectrum.

Key Words: plates of non-canonical form, planar vibrations, amplitude-frequency characteristics(AFC), finite element method(FEM).

1. Введение

Необходимость экспериментального исследования амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) пьезокерамических пластин неканонической формы обусловлена потребностью под-

тверждения исходных положений математической модели метода частичных областей [1,2], использованного для построения решений задачи об их планарных колебаниях. В частности, эксперимент дает возможность получить нагляд-

ное, хотя и не полное, представление о нормальных модах колебаний пластины в диапазоне частот планарного спектра при последовательном изменении ее геометрической формы, определить эти частоты и их энергоэффективность. В этой связи представляют интерес проблемы паразитных колебаний в резонаторах при нарушении их канонической формы, возникающие в частотных фильтрах или чувствительных элементах MEMS-датчиков.

В качестве исходных объектов для вариации геометрической формы выбраны квадратная и две прямоугольные пластины с соотношением сторон 1:2 и 1:3. Исследовалась эволюция их частотного спектра и нормальных мод при последовательной трансформации в параллелограммы путем среза прямых углов на 2° , 10° и 20° . Такие исследования позволяют не только оценить возможности возникновения паразитных колебаний в резонаторах непрямоугольной формы, но и указать на тенденции распределения по частотам планарного спектра.

Важным стимулом исследования таких геометрий был поиск форм колебаний с максимально интенсивной двухкомпонентной кинематикой движения острых углов пластин для использования их в пьезоэлектрических фрикционных ультразвуковых двигателях.

2. Экспериментальные исследования и численное моделирование

Экспериментальные исследования были выполнены с использованием нескольких пьезокерамических пластин состава SM111 (Modified PZT-4) фирмы STEMiNC с толщиной поляризации размером $45,0 \times 45,0 \times 2,8$ мм.

На пластины с обеих сторон нанесены серебряные сплошные электроды. Из этих пластин, при помощи тонких алмазных кругов, с контролем температуры пластины (нагрев не более 65°C) вырезались пластины требуемой формы. Амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) исследовались при помощи установки, включающей аналоговый характериограф, генератор качающей частоты, широкополосный усилитель, генератор звуковых частот (высоковольтный выход), генератор звуковых частот (спектрально чистый), вибродемпфируемый предметный столик с исследуемым образцом и экранированными проводами соединений, вольтметры для измерения эффективного значения амплитуд входных и выходных сигналов, осциллографы для наблюдения за формой сигналов, двухкоординатный самописец для записи АЧХ.

Для квадратной пластинки размером $45 \times 45 \times 2,8$ мм, основной резонанс проявляется на частоте $f_{\text{МКЗ}}^{(1)} = 41,1104$ кГц, замкнутая узловая линия находится по центру пластины, что может соответствовать «квазирадиальной» моде колебаний, характерной для радиальных колебаний кругового диска. Вторая интенсивная мода колебаний реализуется на частоте $f_{\text{МКЗ}}^{(2)} = 60,4066$ кГц и имеет диагональный характер распределения узловых линий. Третья интенсивная мода колебаний на частоте $f_{\text{МКЗ}}^{(3)} = 112,5899$ кГц имеет пять узловых линий и является обертоном первой основной моды.

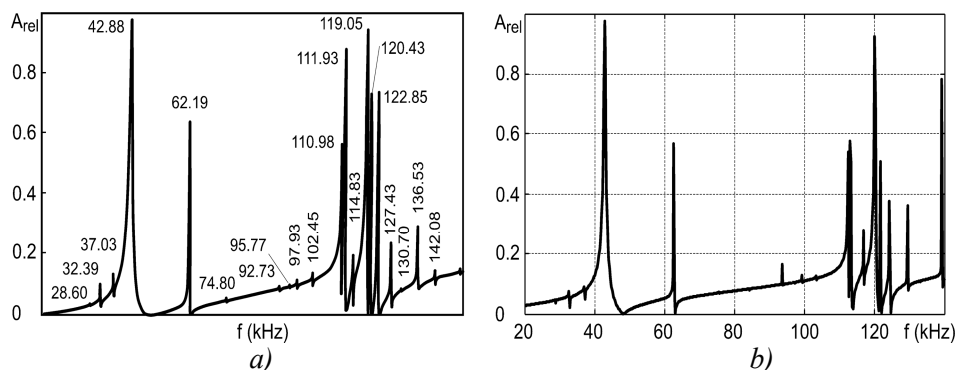


Рис.1. Амплитудно-частотные характеристики квадратной пластинки размером $45 \times 45 \times 2,8$ мм со срезом прямого угла на 2° : а) экспериментальные данные; б) численные данные.

На Рис. 1 приведены АЧХ параллелограммной пластинки, полученной из квадратной, с острым углом 88° (т.е. со срезом прямого угла на 2°). В описываемом эксперименте расчетные

данные удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными до частоты 62,42 кГц. По сравнению с квадратной пластиной общая структура спектра резонансных частот пластины

сохранилась, т.е. наиболее интенсивные резонансы достигаются в окрестностях 40 кГц, 60 кГц и в промежутке 110–120 кГц.

Сравнивая данные анализа планарных колебаний пластины 45x45x2,8 с острым углом 88° и квадратной пластины, отметим, что, во-

первых, имеет место увеличение всех резонансных частот для всего спектра параллелограммной пластины, а во-вторых, кинематика форм колебаний не претерпевает существенных изменений.

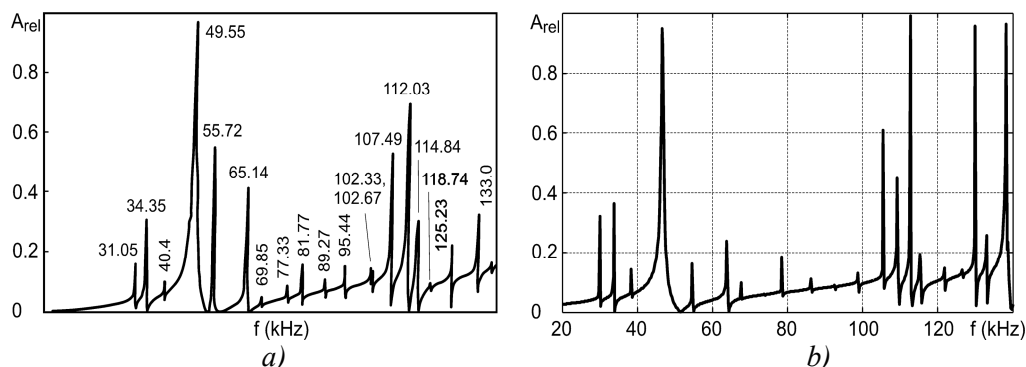


Рис.2. Амплитудно-частотные характеристики параллелограммной пластины размером 45x45x2,8 мм со срезом прямого угла на 10°: а) экспериментальные данные; б) численные данные.

На Рис. 2 приведены АЧХ параллелограмма с острым углом 80°. Как видим, при сравнении с данными Рис.1, с увеличением угла среза частота всех собственных форм колебаний еще немного увеличивается.

Частота основной моды, соответствующая первому резонансу квадратной пластины $f_R^{(1)} = 41,077$ кГц, увеличивается до $f_R^{(4)} = 49,55$ кГц. Второму резонансу квадрата $f_R^{(2)} = 60,394$ кГц соответствует частота $f_R^{(6)} = 65,14$ кГц.

В совокупности собственных форм колебаний проявляется форма с резонансной частотой $f_R^{(5)} = 55,72$ кГц, которая ранее не наблюдалась.

Для прямоугольника с отношением сторон 1:2, т.е. 45x22x2,8 мм, формы колебаний обладают полной симметрией относительно координатных осей [3]. Так, первая мода, которую можно идентифицировать как первую продольную моду, наблюдается в эксперименте на частоте $f_R^{(1)} = 35,39$ кГц (численное значение $f_{\text{мкэ}}^{(1)} = 35,1898$ кГц на 0,5 % ниже экспериментального). Вторая мода наблюдается экспериментально при $f_R^{(2)} = 63,73$ кГц (численное значение $f_{\text{мкэ}}^{(2)} = 63,5519$ кГц отличается на 0,1781). Она имеет планарный характер с колебаниями и в продольном и в поперечном направлениях. Третья мода с преобладающей продольной компонентой наблюдается при $f_R^{(3)} = 74,60$ кГц. После среза противоположных граней прямоугольника 45x22x2,8 мм на угол 10° существенно

увеличивается эффективность возбуждения моды $n = 2$, а эффективности возбуждения первой и третьей мод уменьшаются. Как и прежде наиболее эффективной остается пластинчатая мода с номером $n = 4$, однако существенно возрастает эффективность моды $n = 5$, что сопоставимо с основной пластинчатой модой $n = 4$. После среза противоположных граней прямоугольника 45x22x2,8 мм на угол 20° наиболее энергоэффективными являются моды с номерами $n = 3$ и $n = 5$. Таким образом, для параллелограммов с увеличением угла наклона граней наблюдается увеличение интенсивности возбуждения нечетных мод колебаний, чего не было для пластин канонической формы. Тот факт, что эффективность возбуждения мод разнесена между соседними значениями резонансов объясняется перераспределением кинематики стационарных волновых движений за счет взаимного отражения и сложения волн на неортогональных плоскостях косоугольной границы.

Описанные выше закономерности эффективности возбуждения мод планарных колебаний еще в большей степени проявляют себя для пластины в форме прямоугольника с отношением сторон 1:3 и производных от нее параллелограммов с острыми углами 80° и 70°. АЧХ прямоугольной пластины размером 45x17x2,8 мм характеризуется первым продольным резонансом на частоте 35,67 кГц (расчетное значение 35,76 кГц). Далее до 80 кГц резонансов не наблюдается. В высокочастотной области основные резонансы хорошо совпадают со своими расчетными значениями. Анализ полученных результатов для пластин с

соотношением сторон 1:3 показывает, что на первых модах колебаний ярко проявляется стержневая модель с преобладающими перемещениями u_x . Очевидно, имеет место устойчивая тенденция перераспределения энергетики и кинематики нормальных мод колебаний по нечетным (угол при основании 10°) либо по четным (угол 20°) номерам гармоник параллелограммной пластины. Как и прежде, эти результаты объясняются неортогональностью граничных поверхностей на контуре пластины и перераспределением кинематики нормальных мод колебаний.

3. Выводы

1. Показано, что даже незначительное отклонение геометрии пластины от прямоугольной формы к параллелограммной резко изменяет частотный спектр планарных резонансных колебаний. Так, в том же диапазоне частот, в котором квадратная пластина имеет 5 резонансных частот, пластина в форме параллелограмма с острым углом в 80° может иметь до 20 резонансных частот.

2. Представленная процедура параллельных экспериментальных исследований и моделирования в пакете ANSYS позволяет так видоизменять геометрию пластин в форме параллелограмма, чтобы четные и нечетные обертоны рабочих частот пьезодвигателей, например, не совпадали с собственными формами верхнего диапазона частот. Это важно для пьезодвигателей и актюа-

торов, где требуется возбуждать высокоинтенсивные колебания.

3. Сравнением экспериментальных и расчетных данных показано хорошее совпадение спектров резонансных частот, что свидетельствует о соответствии принятой физической модели реальному материалу. Для первых трех резонансных частот расхождение этих данных – не хуже 0,1 %, для частот больше 10 – не хуже 1 %. Для первых трех резонансных частот расхождение этих данных – не хуже 0,1 %, для частот больше 10 – не хуже 1 %. Эта точность позволяет рекомендовать на первых этапах проектирования резонатора производить только ANSYS-расчеты частот. Экспериментальные исследования необходимы на заключительных стадиях, особенно при значительных интенсивностях возбуждения пьезокерамического резонатора.

4. Анализ резонансного спектра пластин при соотношении сторон 1:3 и 1:2 совместно с расчетами на ANSYS и визуализацией узловых линий позволяет достаточно надежно установить наличие краевого резонанса в сложном спектре резонансных частот. По виду АЧХ можно сделать заключение, что коэффициент связи между краевыми резонансами намного меньше для пластин в форме параллелограмма, чем для пластин прямоугольной формы. Совокупность полученных данных позволила спланировать следующий этап исследований краевых резонансов при использовании для возбуждения как сплошных электродов, так и разрезных.

Список використаних джерел

1. Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко. – Киев: Наукова думка, 1981. – 284 с.
2. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров / В.Т. Гринченко. – Киев: Наукова думка, 1978. – 264 с.
3. Krushynska A. Mode Excitation Efficiency for Contour Vibrations of Piezoelectric Resonators / A. Krushynska, V. Meleshko, Chien-Ching Ma, Yu-His Huang // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. – 2011. – Vol.58, №10. – p.2222– 2238.
4. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.5. Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга; Отв. ред. А.Н. Гузь; АН УССР. Ин-т механики. – Киев : Наук. думка, 1989. – 280 с.

References

1. GRINCHENKO, V. & MELESHKO, V. (1981). *Garmonicheskie Kolebaniya i Volni v Uprugikh Telakh*. Kiev: Naukova Dumka.
2. GRINCHENKO, V. (1978). *Ravnovesiye i Ustanovivshiesya Kolebaniya Uprugikh Tel Konechnikh Razmerov*. Kiev: Naukova Dumka.
3. KRUSHYNSKA, A., MELESHKO, V., CHIEN-CHING MA & YU-HIS HUANG (2011). Mode Excitation Efficiency for Contour Vibrations of Piezoelectric Resonators. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*. 58(10). p.2222–2238.
4. *Mekhanika svyazannykh poley v elementakh konstruktsey*. Т.5. *Elektrouprugost'* (1989) / GRINCHENKO V.T., ULIYKO A.F., SHUL'GA N.A.; Отв. ред. А.Н. ГУЗЬ; АН УССР. Ин-т механики. Киев: Наук. Думка.

Надійшла до редколегії 23.08.17

УДК 393.3

Ярема¹ Є. Б., аспірант,
Опанасович В. К., д.ф.-м.н., проф.,
Слободян М. С., к.ф.-м.н., доц.,
Рошот В. В., магістр.

Двовісний розтяг пластини з жорсткою криволінійною шайбою та прямолінійною наскрізною тріщиною

Львівський національний університет імені
Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів,
79000, Україна,
¹e-mail: evhenkozak@mail.ru

Y. B. Yarema¹, Postgraduate Student,
V. K. Opanasovich, Dr. Sci. (Phys.-Math),
M. S. Slobodyan, Ph.D. (Phys.-Math),
V. V. Roshchot.

Biaxial stretching of the plate with rigid curved washer and straight-through crack

Ivan Franko National University of Lviv,
1, Universytetska St., Lviv, 79000, Ukraine,
¹e-mail: evhenkozak@mail.ru

У роботі досліджено напружено-деформований стан ізотропної пластини з криволінійною жорсткою шайбою і прямолінійною наскрізною тріщиною, береги якої вільні від зовнішнього навантаження. Пластина знаходиться під дією однорідного поля зусиль на нескінченності. Використовуючи методи теорії функцій комплексної змінної та комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі, розв'язок задачі зведено до задач лінійного спряження, які з урахуванням крайових умов на берегах тріщини, розв'язано аналітично, а на межі криволінійної жорсткої шайби отримано сингулярне інтегральне рівняння.

Ключові слова: тріщина, жорстка шайба, розтяг, ізотропна пластинка, комплексні потенціали.

This paper deals with the study of stress-strain state of the plate for the presence of a rigid curved washer and straight-through crack which free from external load. Moreover, a uniform field of efforts acts on the plate at infinity. The solution of the problem is constructed by using Kolosov-Muskhelishvili complex potentials. It is presented in the form of a superposition of three functions. One corresponds for a homogeneous stress state in a plate and is a known function. The second one is related to the crack and the third is related to the rigid inclusion. Using the methods of the theory of functions of a complex variable the solution of the problem is reduced to a singular integral equation on the inclusion boundary, relatively unknown function $g(t)$. The equation is solved numerically using the method of mechanical quadratures. And for the function associated with the crack, we obtain an analytic representation through the desired function $g(t)$. In some cases were obtained the results known in the scientific literature. Conducted the numerical analysis of stress intensity factors which presented graphically for different values of parameters of the problem for a circular and rectangular rigid washers.

Key words: rectilinear crack, rigid washer, stretching, isotropic plate, complex potential.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Формулювання задачі

Дослідимо задачу про двовісний розтяг ізотропної пластини з жорсткою криволінійною шайбою та тріщиною завдовжки $2l$. У серединній площини пластини виберемо декартову систему координат Ox з початком у центрі тріщини, направивши вісь Ox по ній (див. рис. 1). Пластина знаходиться під дією рівномірно розподілених розтягуючих зусиль p_1 і p_2 на нескінченності, причому p_1 утворює кут α з віссю Ox та кут $\pi/2$ з зусиллям p_2 . Тріщина вільна від зовнішнього навантаження.

Жорстка шайба може повертатися як жорстке ціле на кут ε , або до неї прикладений момент M_0 , який утримує її від цього повороту.

З жорсткою шайбою зв'яжемо локальну систему декартових координат $O'x'y'$, причому вісь $O'x'$ утворює кут β з віссю Ox . Точка O' має координати c і d в системі координат Ox .

Відрізок дійсної осі $[-l; l]$ позначимо через L , контур жорсткої шайби – через L_1 , а граничні значення величин на берегах тріщини при $y \rightarrow \pm 0$ будемо позначати значками «+» і «-».

Згідно формулювання задачі на берегах тріщини та жорсткої шайби маємо такі крайові умови:

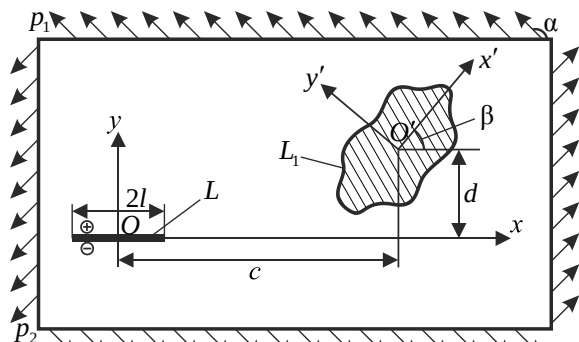


Рис. 1. Схема розміщення жорсткої шайби та тріщини

$$\sigma_{yy}^+ - \sigma_{xy}^+ = 0, \quad x \in L, \quad (1)$$

$$\tilde{u} + i\tilde{v} = i\varepsilon z', \quad t \in L_1, \quad (2)$$

де σ_{yy}^+ , σ_{xy}^+ – компоненти тензора напружень, $\tilde{u}$ і $\tilde{v}$ – компоненти вектора переміщень у локальній системі координат $O'x'y'$, $z = c + id + z'e^{i\beta}$, $z' = x' + iy'$, $z = x + iy$, $i^2 = -1$.

2. Побудова розв'язку задачі

Введемо в розгляд комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$. Тоді для визначення компонент тензора напружень σ_{yy} і σ_{xy} та компонент вектора переміщень u і v в декартовій системі координат Oxy на L_1 будемо мати співвідношення [1, 5]:

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \kappa^* \Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + \frac{dt}{dt} \left[t\overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)} \right] = \\ = -2\mu [u'(t) + iv'(t)], \quad t \in L_1, \end{aligned} \quad (4)$$

μ – модуль зсуву, $\kappa^* = -\frac{3-\nu}{1+\nu}$, ν – коефіцієнт Пуассона.

Комплексні потенціали $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ подамо у вигляді:

$$\Phi(z) = \Gamma + \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad (5)$$

$$\Psi(z) = \Gamma' + \Psi_1(z) + \Psi_2(z),$$

де функції $\Phi_1(z)$ і $\Psi_1(z)$, згідно з [1], подамо так:

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{g_1(t)dt}{t-z}, \quad (6)$$

$$\Psi_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \left[\frac{\kappa^* \overline{g_1(t)}dt}{t-z} + \frac{\overline{t}g_1(t)dt}{(t-z)^2} \right],$$

$g_1(u)$ – невідома шукана функція, функції $\Phi_2(z)$ і $\Psi_2(z)$ – голоморфні поза прямолінійною тріщиною і зникають на безмежності,

$$\Gamma = \frac{1}{4}(p_1 + p_2), \quad \Gamma' = -\frac{1}{2}(p_1 - p_2)e^{-2i\alpha}.$$

Крім того має місце залежність:

$$\int_{L_1} g_1(u)du = 0, \quad (7)$$

що визначає собою рівність нулю головного вектора зусиль, прикладених до жорсткого включення.

Введемо в розгляд функцію:

$$\Omega_2(z) = \overline{\Phi_2(z)} + z\overline{\Phi_2'(z)} + \overline{\Psi_2(z)}, \quad (8)$$

де $\overline{\Phi(z)} = \overline{\Phi(\bar{z})}$.

З крайової умови (1) отримаємо задачі лінійного спряження:

$$(\Phi_2(x) - \Omega_2(x))^+ - \quad (9)$$

$$-(\Phi_2(x) - \Omega_2(x))^- = 0, \quad x \in L,$$

та:

$$\Phi_2^+(x) + \Phi_2^-(x) = f(x), \quad x \in L, \quad (10)$$

розв'язок яких, матиме вигляд відповідно:

$$\Phi_2(z) = \Omega_2(z), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_L \frac{f(x)X^+(x)dx}{x-z} + \\ + \frac{C_1 z + C_2}{X(z)}, \end{aligned} \quad (12)$$

де C_1 та C_2 невідомі сталі, які знайдемо з поведінки функції $\Phi_2(z)$ при великих z , $f(x)$ – відома функція, $X(z) = \sqrt{z^2 - l^2}$.

Оскільки мають місце залежності [5]:

$$\int_L \frac{X^+(x)dx}{x-z} = \pi i (X(z) - z), \quad (13)$$

$$\int_L \frac{X^+(x)dx}{(x-z)^2} = \pi i \left(\frac{z}{X(z)} - 1 \right).$$

то функція $\Phi_2(z)$ (12), набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \Phi_2(z) = - \left(\Gamma + \frac{1}{2} \Gamma' \right) \left(1 - \frac{z}{X(z)} \right) + \\ - \frac{1}{4\pi i X(z)} \int_{L_1} \left\{ g_1(u) \left[\frac{X(z) - X(u)}{u-z} - 1 + \kappa^* + \right. \right. \end{aligned}$$

$$+\frac{\kappa^* \left(X(z) - \overline{X(u)} \right)}{\bar{u} - z} \left] du - \overline{g_1(u)} \left[\frac{(\bar{u} - u)}{(\bar{u} - z)} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{X(z) - \overline{X(u)}}{(\bar{u} - z)} + \frac{\bar{u}}{X(u)} \right) \right] d\bar{u} \right\}.$$

Визначивши функцію $\overline{\Psi_2(z)}$ із (8) та врахувавши (2), (5) і (11), формулу (4) подамо у вигляді:

$$\kappa^* \Phi_1(t) + \overline{\Phi_1(t)} + \frac{d\bar{t}}{dt} \left[t \overline{\Phi_1'(t)} + \overline{\Psi_1(t)} \right] + \kappa^* \Phi_2(t) + \\ + \frac{d\bar{t}}{dt} \Phi_2(\bar{t}) + \left(1 - \frac{d\bar{t}}{dt} \right) \overline{\Phi_2(t)} + \\ + (t - \bar{t}) \frac{d\bar{t}}{dt} \overline{\Phi_2'(t)} + \Gamma(1 + \kappa^*) + \frac{d\bar{t}}{dt} \bar{\Gamma}' = \\ = -2\mu i \varepsilon, \quad t \in L_1.$$

Врахувавши (6) та (14), з (15) отримаємо сингулярне інтегральне рівняння для визначення шуканої функції $g_1(u)$:

$$\int_{L_1} \left[g_1(u) K(u, t) du + \overline{g_1(u)} M(u, t) d\bar{u} \right] = \\ = \rho(t), \quad t \in L_1,$$

де $K(u, t)$, $M(u, t)$ та $\rho(t)$ знайдені функції (не наводимо через їх громіздкість)

Коефіцієнти інтенсивності напружень знайдемо за формулою [4]:

$$K_1^\pm - iK_2^\pm = 2 \lim_{x \rightarrow \pm l} \left[\sqrt{2\pi |x \mp l|} \Phi_2(x) \right]. \quad (17)$$

Якщо в інтегральному рівнянні (17) та доповненні (7) зробимо заміни $t(\theta) = z_0 + e^{i\theta} \omega(\theta)$, $0 < \theta \leq 2\pi$, (29), $z_0 = c + id$, і $u(v) = z_0 + e^{i\theta} \omega(v)$, $0 < v \leq 2\pi$, то отримаємо:

$$\int_0^{2\pi} \left[\tilde{g}(v) \tilde{K}(v, \theta) dv + \overline{\tilde{g}(v)} \tilde{M}(v, \theta) d\bar{v} \right] = \\ = \tilde{\rho}(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ \int_0^{2\pi} \tilde{g}(v) dv = 0. \quad (19)$$

Систему інтегральних рівнянь (18), (19) розв'язуємо числово за допомогою методу механічних квадратур [2].

3. Числовий аналіз

Проведено числовий аналіз задачі за одновісного розтягу пластини зусиллями p_1 і $p_2 = 0$ для кругової (рис. 2), та для квадратної шайби (рис. 3), коли $d = 0$, $v = 0.3$. При цьому вважаємо що $\varepsilon = 0$.

Функція $\omega(v)$ у випадку еліптичної шайби має вигляд:

$$\omega(v) = R(e^{iv} + me^{-iv})$$

де a і b – півосі еліпса, $R = (a + b)/2$, $m = (a - b)/(a + b)$. Зауважимо що рис. 2 а) відповідають дальній вершині, а рис. 2 б) ближній вершині тріщини по відношенню до шайби ($j = \overline{2, 3}$).

На рис. 2 при взаємодії жорсткої кругової шайби з тріщиною зображено зведені коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) $K_1^* = k_1 / (p_1 \sqrt{\pi l})$ від відносної відстані c/l між

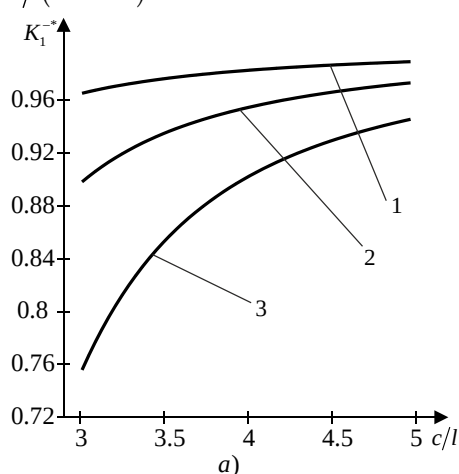
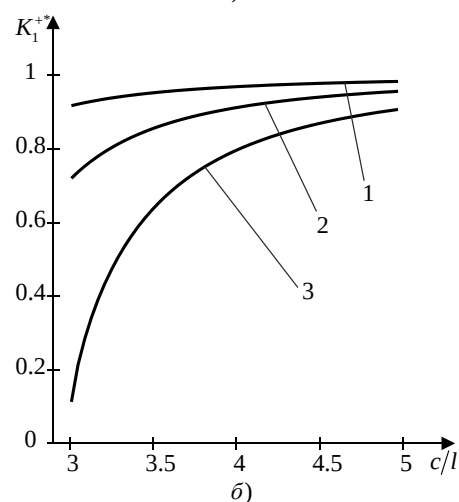


Рис. 2. Зведені коефіцієнти інтенсивності по відношенню до c/l

центром включення та центром тріщини при $\alpha = \pi/2$. Крива 1 побудована для $R/l = 1$, крива 2 – для $R/l = 1.5$, крива 3 – для $R/l = 2$. З цього рисунка бачимо, що при наближенні тріщини до шайби КІН спадають, а при віддаленні від неї вони прямують до значення КІН для ізолюваної тріщини. Крім того, КІН спадають, коли розмір

кругового отвору збільшувати. У часткових випадках числові результати збігаються з результатами із монографії [3], отриманих іншим підходом. Коли жорстка шайба має форму квадрата:

$$\omega(V) = R \left(e^{iv} + \sum_{k=1}^9 \frac{\tilde{C}_{2k-1}}{e^{iv(2k-1)}} \right), \quad \tilde{C}_{2k} = 0, \quad R > 0,$$

де R – дійсне число, $\tilde{C}_{2k-1}$ – відомі сталі, значення яких не наведено.

На рис. 3 наведено графічну залежність КІН $K_1^* = k_1 / (p_1 \sqrt{\pi l})$ при взаємодії квадратної жорсткої шайби (зі стороною $2a$) з тріщиною від

відносної величини a/l між центром шайби та центром тріщини, $\alpha = \pi/2$, $\beta = 0$. Побудована при $c/l = 3.01$ – крива 1, крива 2 – для $c/l = 4$, крива 3 – для $c/l = 5$. З рисунка видно, що при наближенні квадратної шайби до тріщини КІН спадають, а при віддаленні – прямують до значень ізольованої тріщини [3]

На основі чисельного аналізу встановлено, що при віддаленні тріщини від жорсткої шайби, КІН виходять на значення для однієї тріщини.

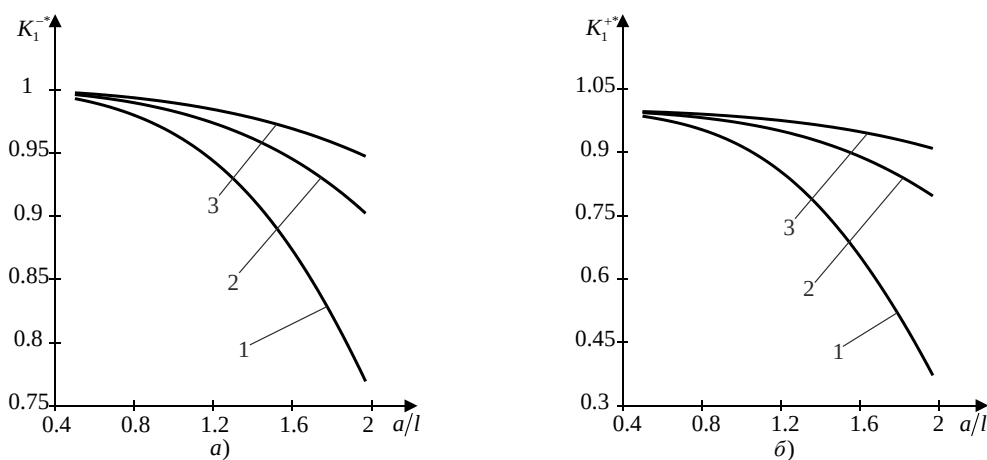


Рис. 3. Зведені коефіцієнти інтенсивності по відношенню до a/l

Список використаних джерел

1. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М.П. Саврук. – К.: Наук. Думка. – 1981. – 324 с.
2. Панасюк В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В.В. Панасюк, М.П.Саврук, А.П.Дацышин. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
3. Калоеров С.А. Концентрация напряжений в многосвязных изотропных пластинка / С.А. Калоеров, Е.В. Авдюшина, А.Б. Мироненко. – Донецк: ДонНУ. – 2013. – 440 с.
4. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами: справочное пособие. Механика разрушения и прочность материалов / М.П. Саврук. – Т.2. – К.: Наук. Думка, 1998. – 620 с.
5. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили– М.: Наука, 1966. – 708 с.

References

1. SAVRUK, M.P. (1981) *Dvumerniye zadachi uprugosti dlya tel s treshchinami*. Kyiv: Naukova Dumka.
2. PANASUK, V.V., SAVRUK, M.P. and DATSISHIN, A.P. (1976) *Raspredeleniye napragniy okolo treshchin v plastinakh i obolochkah*. Kyiv: Naukova Dumka.
3. KALOEROV, S.A., AVDJUSHINA, E.V. and MIRONENKO, A.B. (2013) *Koncentraciya napryazheniy v mnogovsyaznyh izotropnyh plastinka*. Donetsk: DonNU.
4. SAVRUK, M.P. (1998) *Koefficienty intensivnosti napryazheniy v telah s treshhinami: spravochnoe posobie. Mehanika razrusheniya i prochnost' materialov*. Kyiv: Naukova Dumka.
5. MUSKHELISHVILI, N.I. (1966) *Nekotore osnovnie zadachi matematicheskoy teorii uprugosti*. Moscow: Nauka.

Надійшла до редколегії 19.09.2017

УДК 534+531.7+53.082.5 + 621.375.8

Яровой Л.К., к.т.н., с.н.с.

**Проблеми застосування трихвильового
лазерного віброметра для підвищення
чутливості до механічних коливань з
надмалими амплітудами**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: yarovoi@univ.kiev.ua

L.K. Yarovoi, Ph.D.

**Application of the laser Doppler vibrometer
with three-wave interference for
measurement of small amplitude mechanical
vibrations: the problem of use.**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: yarovoi@univ.kiev.ua

Для використання в повній мірі переваг лазерних доплерівських віброметрів з додатковим каналом при дослідженні механічних коливань з нано- та субнанометровими амплітудами необхідно встановити та підтримувати оптимальну величину фазової різниці між зондувальною та додатковою хвилею. Пропонуються два методи, котрі побудовані на аналізі спектру вихідного сигналу віброметра, або складової фотоструму на частоті оптичного гетеродин. А саме, знайдені такі комбінації параметрів системи, в першу чергу фазової різниці, при яких основна гармоніка відповідного сигналу зменшується до нуля. Тим самим, з'являється можливість налаштовувати оптимальні параметри віброметра безпосередньо під час вимірювань. Надається короткий теоретичний аналіз та результати демонстраційних експериментів.

Ключові слова: експериментальна механіка, лазерна доплерівська віброметрія, лазерні гетеродинні системи.

The advantage of laser Doppler vibrometer with three-wave interference (TWI) can be realized only by setting and maintenance of optimal parameters, first of all, zero phase differences between probing and additional waves. We developed two alternative approaches based on spectral analysis of output vibrometer signal or HF component of the laser light photodetector current. We found out that there are such combinations of the system parameters, first of all, zero phase difference, in which the main harmonic of appropriate signal falls to zero. In particular, at vicinity of zero optimal value for the phase difference the main harmonic of the HF component of photodetector current becomes much smaller than the second one, demonstrating a visible doubling of the signal frequency. Thereby, an opportunity for controlling the optimal parameters of the TWI vibrometer appears during a measurement. A short theoretical analysis and demonstration experiments are presented.

Key Words: experimental mechanics, laser vibrometer, nanoscale measurements, laser heterodyne system.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Діагностика нано-, та субнаноамплітудних механічних коливань актуальна для багатьох галузей науки та техніки. Найбільш привабливі, з точки зору чутливості та точності, є інтерференційні оптичні методи, зокрема, методи лазерної доплерівської віброметрії [1]. Останні вимірюють миттєву швидкість коливального процесу, яка надалі може бути перерахована в миттєве переміщення, або акустичний тиск.

Зазвичай лазерні доплерівські віброметри (ЛДВ) побудовані по двоххвильовому принципу, котрий передбачає порівняння оптичних фаз референтної e_0 та зондувальної e_1 хвиль [1].

Чутливість, в залежності від частотного діапазону таких приладів, може сягати частин нанометра. Подальшому підвищенню чутливості заважають нестабільність лазерного випромінювання. Також під час вимірювання на значній відстані сам канал розповсюдження зондувальної хвилі створює значний вплив на фазу зондувального променя.

Інший тип лазерної віброметричної системи, який замість двох використовує три взаємодіючих хвилі e_0 , e_1 та e_2 [2], надає додаткові можливості для керування параметрами вимірювального процесу. Зокрема, встановлено,

що тільки завдяки тонкому налаштуванню параметрів вимірювальної системи можливе значне підвищення амплітуди вихідного сигналу. В умовах впливу на лазерний промінь зовнішніх завад можна збільшити [3] чутливість до коливань з малими амплітудами до α разів:

$$\alpha(\eta) = \eta / (\eta - 1), \quad (1)$$

де $\eta = E_1 / E_2$, – відношення амплітуд, а $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$ – початкова фазова різниця зондувальної e_1 та додаткової e_2 хвиль.

Вихідні сигнали лазерного віброметра

У найпростішому випадку, коли досліджуваний об'єкт рухається за гармонічним законом $x_1(t) = X_1 \cos(\Omega t)$ (X_1 – амплітуда, Ω – частота коливань) інтерференція трьох хвиль на поверхні фотодетектора (фотозмішування) віброметра призводить до генерації фотоструму, складова якого на частоті оптичного гетеродину має вигляд $i_{HF\ det} = I_G \cdot \cos(2\pi f_G t - \phi(t))$, де f_G –

$$\omega_{inst}(t) = -kX_1\Omega \sin(\Omega t) \cdot \left[1 + \frac{(\eta^2 - 1)}{2\eta \cdot \cos(2kX_1 \cos(\Omega t) + \Delta\phi) + \eta^2 + 1} \right] \quad (3)$$

де k – хвильовий вектор лазерного випромінювання.

Функція $\omega_{inst}(t)$ поза $\Delta\phi_{opt} = 2n\pi$ значною мірою нелінійна і лише при створенні оптимальних умов $\Delta\phi = \Delta\phi_{opt}$ формула (3)

спрощується: $\omega_{inst}(t) = \frac{\eta}{\eta - 1} \cdot \omega_{Dop}(t)$.

Звідси остаточна формула для розрахунку миттєвої швидкості коливання має вигляд:

$$v(t) = \frac{\omega_{inst}(t)}{2k} \cdot \frac{\eta - 1}{\eta} \quad (4)$$

Повертаючись до (3) можна отримати [4], що $\Delta\phi = \Delta\phi_{opt}$ є середня величина двох значень $\Delta\phi_{z1}$ та $\Delta\phi_{z2}$:

$$\Delta\phi_{opt} = \frac{1}{2}(\Delta\phi_{z2} + \Delta\phi_{z1}), \quad (5)$$

$$I_G(t) = SE_0 E_1 \cdot \left[A - 2kX_1 A^{-1} \eta \cdot \sin(\Delta\phi) \cos(\Omega t) - \frac{1}{4} (2kX_1)^2 \cdot A^{-1} \eta \cdot \cos(\Delta\phi) \cos(2\Omega t) \right], \quad (7)$$

де $A = \sqrt{1 + \eta^2 + 2\eta(1 - (kX_1)^2) \cdot \cos(\Delta\phi)}$, S – чутливість фотодетектора.

Аналіз (7) вказує, що спектральний склад сигналу $I_G(t)$ також суттєво залежить від фази. А саме, при наближенні $\Delta\phi$ до $\Delta\phi_{opt}$ зникає основна

частота гетеродину, на яку зміщено оптичну частоту опорної хвилі e_0 , а амплітуда $I_G(t)$:

$$I_G(t) = 2SE_0 E_2 \sqrt{2\eta \cos(2kX_1 \cos(\Omega t) + \Delta\phi) + \eta^2 + 1} \quad (2)$$

Похідна від фази $\phi(t)$ – миттєва частота $\omega_{inst}(t)$ сигналу $i_{HF\ det}$ є основною характеристикою для лазерних віброметрів оскільки в класичному доплерівському віброметрі вона є тотожною з доплерівською частотою $\omega_{inst}(t) = \omega_{Dop}$, яка пропорційна миттєвій швидкості $v(t)$ коливання об'єкту $\omega_D(t) = 2k \cdot v(t)$, де k – хвильовий вектор лазерного випромінювання, і, таким чином, представляє собою (з певним коефіцієнтом) вихідний сигнал віброметра.

У випадку такого модернізованого віброметра з трихвильовим фотозмішуванням (ТХФ) миттєва частота процесу виражається більш складною формулою. За умови $kX_1 \ll 1$ формула для миттєвої частоти приймає вигляд [3]:

при яких в сигналі зникає основна гармоніка сигналу.

Формула (3) дає рішення для цих особливих точок, яке залежить лише від параметра η :

$$\Delta\phi_z = \pi \pm \arccos(\eta) \quad (6)$$

Знайдений ефект дозволяє в поточному режимі встановлювати $\Delta\phi = \Delta\phi_{opt}$ шляхом знаходження $\Delta\phi_{z1}$ та $\Delta\phi_{z2}$ за допомогою, наприклад, ВЧ сканування фази (див. експеримент).

Інший метод визначення оптимального значення фази пов'язаний з аналізом сигналу $I_G(t)$ (2), який зазвичай у віброметрах використовується лише для контролю потужності відбитого оптичного сигналу. Для малих амплітуд коливання $X_1 \ll \lambda/2$ та $\eta > 1$ формула (2) спрощується та може бути надана у вигляді:

гармоніка коливання, що може бути зафіксована електронними засобами.

Модернізований лазерний віброметр та експериментальні дослідження

Оскільки принципова ефективність використання ТХФ в лазерних віброметрах вже була продемонстрована раніше [3, 4], експери-

ментальні дослідження ставили за мету підтвердження запропонованих підходів контролю оптимальної фазової різниці.

Блок-схема експериментальної установки зображена на Рис.2. Зондувальне випромінювання лазерного доплерівського віброметра CLV-S 1 спрямовується на додатковий інтерферометр 2, в якому формуються зондувальний та додатковий пучки e_1 e_2 . Опорний пучок e_0 циркулює всередині віброметра CLV-S. Зондувальний пучок спрямований на віброуючу поверхню 3, вкриту відбиваючим шаром, а додатковий пучок на нерухому поверхню 4. П'єзокомірка 5 з відбиваючим покриттям призначена для модуляції і налаштування оптичної фази в зондувальному пучку. Інший важливий елемент – це фільтр оптичної щільності 6, керований напругою 12. Додаткові фотодетектори 7, 8 реєструють інтенсивність оптичного випромінювання в кожному з двох пучків. Сигнали віброметра спостерігаються на осцилоскопі RIGOL 102E 9 та за допомогою АЦП реєструється в пам'яті ПК 10.

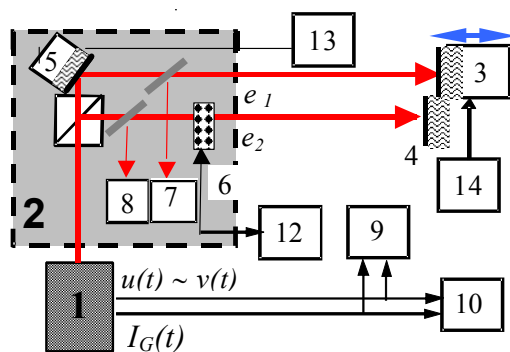


Рис.2 Блок-схема установки

Результати експерименту щодо можливості встановлення оптимальної фази шляхом спостереження за моментами подвоєння основної гармоніки сигналу представлені на Рис. 3.

Частота та амплітуда коливань досліджуваного об'єкту складали відповідно 31.6 кГц та $X_1=12\text{ нм}$. Цей сигнал амплітудою 0.45V на виході класичного віброметра ($E_2=0$) представлений на Рис 3.А.

Епюри на Рис.3.Б відповідають такому ж коливанню, але досліджуваному за допомогою модернізованого віброметра з ТХВ (параметр $\eta \approx 0.75$). Причому в зондувальному каналі здійснювалась додаткова модуляція фази

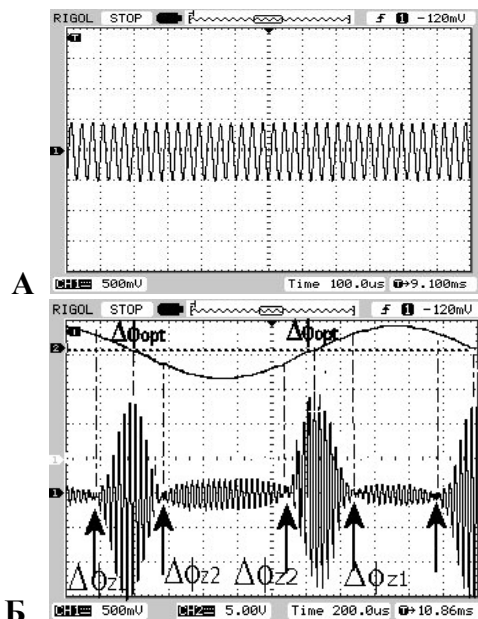


Рис. 3. Осцилограми вихідних сигналів віброметрів. А – сигнал двопроменевого віброметра; Б – сигнали віброметра з ТХФ та при додатковій ВЧ модуляції: епюра зверху – сигнал $I_G(t)$, епюра знизу – сигнал миттєвої швидкості.

випромінювання (верхня епюра) з частотою $F_{mod}=0.5$ кГц і амплітудою, яка відповідала індексу модуляції фази $\delta\phi_{mod}=0.95\text{ rad}$.

Вихідний сигнал віброметра (нижня епюра) має характерні мінімуми основної гармоніки в точках $\Delta\phi_{z1}$ та $\Delta\phi_{z2}$ відповідно для кожного півперіоду моделюючої функції. Можна бачити, що максимальна амплітуда сигналу знаходиться посередині між моментами, коли фаза модуляції дорівнює $\Delta\phi_{z1}$ та $\Delta\phi_{z2}$. Це підтверджує можливість використання формули (5) під час поточного налаштування віброметра з ТХВ.

У наступному експерименті досліджувався сигнал $I_G(t)$ поблизу оптимальної фазової різниці $\Delta\phi_{opt}$. Параметри коливання об'єкту: $f=6\text{ кГц}$, $X_1=1,5\text{ нм}$. На Рис. 4.А наведена епюра вихідного сигналу класичного віброметра без модуляції, а на рис.4Б – вихідні сигнали віброметра з ТХВ та додатковою модуляцією фазової різниці $\Delta\phi$ з частотою $F_{mod}=300$ Гц.

Перервним контуром на епюрах Рис.4.Б показані зони, в яких виконується умова $\Delta\phi \approx \Delta\phi_{opt}$. Саме там відбувається максимальне зростання вихідного сигналу віброметра (в даному випадку приблизно в два рази).

Як індикація цих моментів, основна гармоніка сигналу $I_G(t)$ спадає до мінімуму, а друга

зростає, що дозволяє контролювати умови оптимального фотозмішування під час вимірювань.

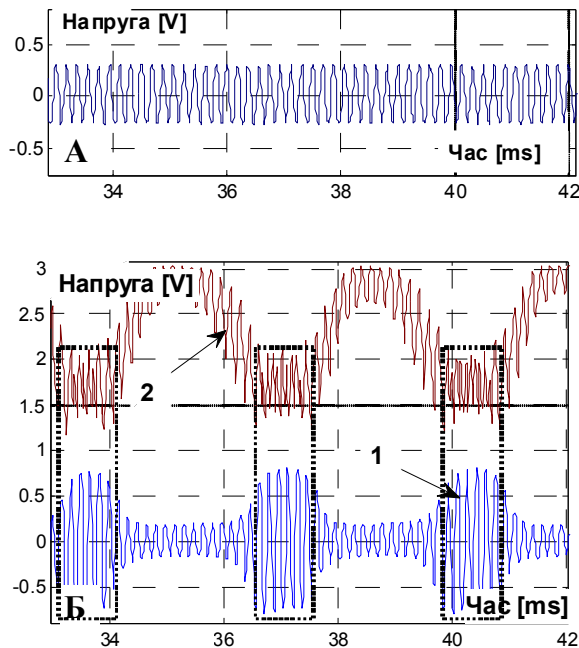


Рис. 4 еюра А – сигнал класичного вібрметра, Б – сигнали вібрметра з ТХФ, 1 – сигнал $I_G(t)$, 2 – сигнал миттєвої швидкості

Список використаних джерел

1. Drain L. E. The Laser Doppler Technique / I. E. Drain. – New York: Wiley, 1980.
2. Яровой Л. К. Особливості роботи лазерного доплерівського вібрметра з трихвильним фотозмішуванням в нанометровому діапазоні / Л. К. Яровой // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Математика. Механіка. – 2011. – 26. – С. 39-43.
3. Іващенко Д.О., Світловодний сенсор механічних коливань з підвищеною чутливістю в нанометровому діапазоні / Д. О. Іващенко, Л. К. Яровой, В. І. Розумнюк // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2012. – 4. – С.57–51.
4. Яровой Л.К. Визначення оптимальної фази в лазерному доплерівському вібрметрі з трихвильним фотозмішуванням / Л. К. Яровой // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Математика. Механіка. – 2015. – 3-4. – С. 61–65

Висновки

Лазерні вібрметри з додатковим лазерним променем дозволяють діагностувати коливання з малими амплітудами в умовах зовнішніх перешкод, при умові підтримання оптимальної фазової різниці $\Delta\phi_{opt}$ між лазерними променями.

Для стабілізації $\Delta\phi_{opt}$ запропоновано та експериментально продемонстровано два підходи на підставі аналізу спектральних складових фотоструму фотодетектора на частоті гетеродину та вихідного сигналу вібрметра. В обох випадках існують такі значення фази $\Delta\phi$, пов'язані з $\Delta\phi_{opt}$, при яких зникає основна гармоніка відповідного сигналу. Це дає можливість в знаходити $\Delta\phi_{opt}$ та підтримувати $\Delta\phi \approx \Delta\phi_{opt}$.

Обидва підходи мають свої переваги та недоліки. Зокрема, контроль за спектром вихідного сигналу вимагає певного маніпулювання саме з вихідним сигналом, що не завжди зручно. Натомість спостереження за сигналом $I_G(t)$ не має цих недоліків, але цей сигнал може зазнавати впливу амплітудних завад. Вибір або комбінація цих двох методів залежить від вимог конкретного експерименту.

References

1. DRAIN, L.E. (1980) *The Laser Doppler Technique*. New York: Wiley.
2. YAROVOI, L.K. (2011) Osoblyvosti roboty lazernoho dopplerivs'koho vibrometra z trykhvylevym fotozmishuvanniam v nanometrovmu diapazoni. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Mechanics & Mathematics*. 2). p.39– 43.
3. IVASHCHENKO, D.O., YAROVOI, L.K. and ROZUMNUK, V.I. (2012) Svitlovodnyy sensor mekhanichnykh kolyvan' z pidvyshchenoyu chutlyvisty v nanometrovmu diapazoni. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*. (4). p.57–51.
4. YAROVOI, L.K. (2015) Vyznachennya optymal'noyi fazy v lazernomu dopplerivs'komu vibrometri z trykhvylevym fotozmishuvanniam. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series: Mechanics & Mathematics*. 3–4. p.61–65.

Надійшла до редколегії 20.09.17

УДК 539.3

Яцків О. І.¹

**Обернена задача термопружності з
ідентифікації набору теплофізичних
параметрів та визначення
термонапруженого стану циліндра з
тонким приповерхневим шаром**

¹ Інститут прикладних проблем механіки і
математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
79060, м. Львів, вул. Наукова, 3б.
e-mail: viktsya@gmail.com

O. I. Yatskiv¹

**Inverse thermoelastic problem of
thermophysical parameters identification and
determination the thermoelastic state of the
cylinder with undersurface thin layer**

¹ Ya. S. Pidstrygach Institute to Applied Problems of
Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine, 79060,
Lviv, Naukova str., 3b.
e-mail: viktsya@gmail.com

Розглянуто обернену задачу термопружності з визначення набору теплофізичних параметрів тонкого приповерхневого шару довгого ізотропного суцільного циліндра, який нагрівається довкіллям, якщо в низці послідовних моментів часу задано значення поверхневих колових напружень. Досліджено вплив малих похибок задання вхідних даних на точність визначення параметрів та термонапруженого стану циліндра. Порівняно точність ідентифікації з такою, якщо як вхідні дані задано дискретні за часом значення температури поверхні.

Ключові слова: обернена задача термопружності, теплофізичні параметри, ідентифікація параметрів, стійкість ідентифікації, поверхневі колові напруження, циліндр, приповерхневий шар

The inverse problem of determining the thermostressed state in a long isotropic cylinder with unknown undersurface thin layer thermophysical properties when circumferential surface stresses are known is considered. Cylinder is heated by the environment of constant temperature. The heat exchange of the cylinder with its environment obeys the Newton law. The presence of a thin layer is taken into account in the formulated boundary-value problem by means of a Pidstrygach nonclassical nonstationary boundary condition. The additional data for inverse problem of determining two unknown thermophysical parameters is formed by the discrete-in-time data set of circumferential surface stresses. In that case the representation for stresses in cylinder by the surface temperature is obtained. When surface stresses are known this representation transforms into integral Volterra equation for unknown temperature at the cylinder surface. After determination the temperature on the surface thermophysical parameters are calculated as a result of integro-differential operator acting on the surface temperature. Identification instability depending upon small input data errors is investigated. After identification of thermophysical parameter the temperature and stresses in a cylinder are calculated.

Key Words: inverse problem of thermoelasticity, thermophysical parameters, parameters identification, stability for identification procedure, surface circumferential stresses, cylinder, undersurface layer.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Виробництво і експлуатація відповідальних конструктивних елементів вимагають наявності достовірної інформації про реальні величини теплофізичних параметрів, а також надійного рівня контролю за їх допустимими значеннями. У першу чергу дії зовнішніх факторів зазнають приповерхневі шари таких елементів, а

відповідно змінюються їх структура і фізико-механічні властивості.

У праці [1] наведено метод визначення одного із зведених межових теплофізичних параметрів: тепловіддачі тонкого приповерхневого шару довгого циліндра, або його теплоємності, якщо у низці дискретних моментів часу задано виміри температури поверхні. У разі двох невідомих параметрів задача ускладнюється, бо уточнення розв'язку оберненої задачі (ОЗ)

параметричної ідентифікації переноситься з лінії зміни одного параметра у площину параметрів. Алгоритм такої двопараметричної ідентифікації за заданих значень поверхневої температури описано в [2].

Однак не завжди ці виміри можна здійснити. Тому для випадку поверхнево-однорідних тіл було запропоновано використовувати зв'язаність механічного і температурного полів і як вхідні дані брати результати вимірів однієї з характеристик механічного процесу: напружень, деформацій чи переміщень [3, 4]

У праці [5] метод визначення одного з межових теплофізичних параметрів розвинуто для випадку, коли виміри температури поверхні невідомі, а натомість задано виміри переміщень поверхні, а в праці [6] – виміри колових поверхневих напружень. Тут запропоновано метод одночасної ідентифікації набору двох теплофізичних параметрів, а саме: тепловіддачі тонкого приповерхневого шару довгого циліндра, та його теплоємності у разі задання поверхневих колових напружень. Досліджено стійкість процесу ідентифікації щодо похибки вимірювань напружень.

2. Постановка задачі та її розв'язання

Розглянуто ізотропний суцільний довгий циліндр, що нагрівається довкіллям сталої температури. Тонкий приповерхневий шар циліндра має неоднакові з основним матеріалом теплофізичні властивості, які є невідомі. Натомість задано результати вимірювань в низці моментів часу колових поверхневих напружень. Потрібно в межах квазістатичної осесиметричної задачі термопружності знайти поля напружень і температури в циліндрі. Така задача термопружності є неklasичною, так як граничні умови задачі теплопровідності є недоозначеними – відсутня інформація про значення зведених параметрів тепловіддачі з поверхні циліндра та теплоємності тонкого приповерхневого шару. Теплопровідність в циліндрі описуємо таким рівнянням

$$\Delta T(r, \tau) = \alpha^2 \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau}, \quad 0 \leq r < r_1. \quad (1)$$

Тут $T(r, \tau)$ – температура; α^{-1} – коефіцієнт температуропровідності; Δ – оператор Лапласа в циліндричній системі координат; r – радіальна координата; τ – час; r_1 – радіус циліндра.

Наявність в циліндрі тонкого приповерхневого шару задаємо неklasичними, нестационарними межовими умовами Підстригача [1]

$$\frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} + BT(r, \tau) + H \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = 0, \quad r = r_1. \quad (2)$$

Тут B , H – відповідно зведені коефіцієнти тепловіддачі та теплоємності приповерхневого шару.

В початковий момент часу температура в циліндрі була однаковою за товщиною

$$T(r, 0) = T^0, \quad \tau = 0. \quad (3)$$

Додатково вимагаємо виконання умов обмеженості температури і рівності нулю теплового потоку в центрі циліндра

$$T(r, \tau) < \infty, \quad \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} = 0, \quad r = 0. \quad (4)$$

Для знаходження напружено-деформованого стану записуємо рівняння рівноваги в переміщеннях

$$\Delta \bar{u} + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad div} \bar{u} = 2 \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_T \text{grad} T, \quad (5)$$

$$r \in [0, r_1]$$

Тут $\bar{u}$ – вектор переміщень; ν – коефіцієнт Пуассона; α_T – коефіцієнт лінійного температурного розширення.

Механічним впливом приповерхневого шару на напружений стан циліндра нехтуємо. На поверхні циліндра радіальні напруження рівні нулю

$$\sigma_{rr} = 0, \quad r = r_1. \quad (6)$$

Для поперечного перерізу циліндра виконується умова рівноваги

$$\int_0^{r_1} r \sigma_{zz} dr = 0. \quad (7)$$

Розв'язки рівнянь рівноваги (5) подаємо у вигляді Папковича-Нойбера, враховуючи осесиметрію задачі

$$u_r = \Lambda_r + \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial r} (\Lambda - r\Lambda_r - z\Lambda_z)$$

$$u_z = \Lambda_z + \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} (\Lambda - r\Lambda_r - z\Lambda_z) \quad (8)$$

Тут $\Lambda_r(r, \tau)$, $\Lambda_z(z, \tau)$ подаються через довільні функції часу $K_1(\tau)$, $K_2(\tau)$:

$$\Lambda_r(r, \tau) = K_2(\tau)r, \quad \Lambda_z(z, \tau) = K_1(\tau)z. \quad (9)$$

Використовуючи побудовану раніше [1] спеціальну структуру розв'язку прямої задачі теплопровідності (1)-(4), отримано такий вираз для складової $\Lambda(r, \tau)$ подання (8):

$$\Lambda(r, \tau) = 8(1+\nu)\alpha_T \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\Phi(\tau)}{B} \frac{(\alpha\mu_n r_1)^2 - 4}{(\alpha\mu_n r_1)^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - T^0 e^{-\mu_n^2 \tau} \right) - \alpha\mu_n^2 \int_0^{\tau} \frac{\Phi(t)}{B} e^{-\mu_n^2(\tau-t)} dt \right] x \quad (10)$$

$$x \frac{1}{(\alpha\mu_n)^3 r_1} \frac{J_0(\alpha\mu_n r)}{J_1(\alpha\mu_n r_1)} + \frac{r^4}{32r_1^2} \frac{\Phi(\tau)}{B} \left\}.$$

Тут $\Phi(\tau)$ - температура поверхні циліндра; $J_0(\alpha\mu_n r)$, $J_1(\alpha\mu_n r_1)$ - функції Бесселя; μ_n - власні числа межевої задачі (1)-(2). Використовуючи для напружень закон Дюгамеля-Неймана, конкретизуємо $K_1(\tau)$, $K_2(\tau)$ з умов (6) та (7) і отримуємо для колових напружень на поверхні циліндра таке подання:

$$\sigma_{\theta\theta}(r_1, \tau) = -2\mu\alpha_T \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \left[\frac{\Phi(\tau)}{B} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} L_n(\tau) J_0(\alpha\mu_n r_1) \right] \quad (11)$$

Тут μ - стала Ляме, а $L_n(\tau)$ має вигляд

$$L_n(\tau) = \frac{2}{J_1(\alpha\mu_n r_1)} \left\{ \frac{\mu_n}{\alpha r_1} \int_0^{\tau} \frac{\Phi(t)}{B} e^{-\mu_n^2(\tau-t)} dt + \right.$$

$$\left. + T^0 \frac{e^{-\mu_n^2 \tau}}{\alpha\mu_n r_1} - \left(\frac{(\alpha\mu_n r_1)^2 - 4}{(\alpha\mu_n r_1)^2} \right) \frac{\Phi(\tau)}{B} \right\} \quad (12)$$

Якщо поверхневі колові напруження відомі, то (12) є інтегральним рівнянням типу Вольтерри для визначення $\Phi(\tau)$. За знайденою температурою поверхні циліндра, використовуючи побудовану структуру розв'язку задачі термопружності [1], можна визначити невідомі параметри і термонапружений стан в циліндрі.

3. Результати розрахунків та їх аналіз

Для розв'язання інтегрального рівняння (11), використано сплайн-інтерполяцію напружень та сплайн-апроксимацію розв'язку. Вхідні дані задавали з 2% похибкою. За знайденою температурою поверхні, розробленим методом [1], знайдено параметри приповерхневого шару, які уточнено перебором їх околу в площині параметрів за мінімального середньо-квадратичного відхилення обчислених напружень від заданих. Як приклад, в таблиці 1 наведено результати ідентифікації параметрів B та H . Після їх визначення, обчислено температуру й напруження в циліндрі. Виявлено, що задання поверхневих напружень дає кращу точність ідентифікації параметрів порівняно із заданням температури поверхні.

4. Висновки

Сформульовано обернену задачу термопружності про визначення термонапруженого стану довгого суцільного циліндра з тонким приповерхневим шаром за невідомих тепловіддачі та теплоємності шару, якщо задано поверхневі колові напруження. Використано зв'язаність полів напружень і температури та отримано для температури поверхні інтегральне рівняння типу Вольтерри. Застосовано сплайн-інтерполяцію даних вимірів напружень та сплайн-апроксимацію розв'язку інтегрального рівняння. Для ідентифікації теплофізичних параметрів приповерхневого шару застосовано розроблений метод,

Таблиця 1

Результати ідентифікації параметрів B і H та уточнення їх значень

B=0,5; H=1			
Розв'язок оберненої задачі	Похибка відносно точних значень параметрів	Параметри з мінімальним відхиленням напружень	Похибка відносно точних значень параметрів
B=0,4743	5,14%	B=0,4843	3,14%
H=0,9313	6,87%	H=0,9573	4,27%

оснований на побудові спеціальної структури розв'язку прямої задачі і отриманні для шуканих параметрів залежних від поверхневої температури інтегро-диференціальних виразів. Знайдені теплофізичні параметри уточнено за допомогою перебору їх околу і вибору таких, для яких се-

редньо-квадратичне відхилення обчислених напружень від заданих є мінімальним. Досліджено стійкість процесу ідентифікації щодо малих похибок вимірів вхідних даних. Виявлено, що вона краща у разі задання поверхневих напружень.

Список використаних джерел

1. Швець Р.М. Ідентифікація межових теплофізичних параметрів циліндра за нестационарних умов теплообміну з довкіллям / Р. М. Швець, О. І. Яцків, Б. Я. Бобик // Фіз.-мат. моделюв. та інформ. технології. – 2010. – Вип. 12. – С. 198-207.
2. Швець Р. Особливості двопараметричної ідентифікації зосереджених теплофізичних параметрів у валах з тонким приповерхневим шаром / Р. Швець, О. Яцків, Б. Бобик // Математ. пробл. механ. неоднор. структур. Збірник наук. праць. – Львів: Ін-т прикл. пробл. механ. і математ. ім. Я.С.Підстригача НАНУ. – 2014. – С. 198–199.
3. Blanc G. Solution of the inverse heat conduction problem from thermal strain measurements / G. Blanc., M. Raynaud // ASME. – J. Heat Transfer. – 1996. – **118**. – P.842-849.
4. Кушнір Р.М. Обернена задача термopужності для неоднорідного циліндра за неповної інформації про теплове навантаження / Р. М. Кушнір, А. В. Ясінський // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 3. - С. 140-145.
5. Яцків О.І. Визначення теплофізичних властивостей приповерхневого шару циліндра за відомими переміщеннями поверхні / Р. М. Швець, О. І. Яцків, Б. Я. Бобик // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. Спецвипуск.– 2015. – С. 305-310.
6. Яцків О. Термонапружений стан циліндра за неповної інформації про теплофізичні властивості приповерхневого шару, якщо відомі поверхневі колові напруження / О. Яцків // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математ. науки.– 2015. – Вип. 3. – С. 318-328.

References

1. SHVETS, R. M., YATSKIV, O. I., and BOBYK B. YA. (2010) Identyfikatsiya mezhovykh teplofizychnykh parametriv tsylindra za nestatsionarnykh umov teploobminu z dovkilliam. *Fizyko-matematychnye Modelyuvannya ta Informatsijni Tekhnologiji*. 12. p. 198-207.
2. SHVETS, R., YATSKIV, O. and BOBYK, B. (2014) Osoblyvosti dvoparmetrychnoji identyfikatsiji zoseredzhenykh teplofizychnykh parametriv u valakh z tonkym pry-poverkhnevym sharom. *Matematychni problemy mekhaniky neodnorodnykh struktur. Zbirnyk naukovykh prats'*. – L'viv. Instytut prykladnykh problem mekhaniky i matematyky im. Ya.S.Pidstrygacha NANU. pp. 198-199.
3. BLANC, G., and RAYNAUD, M. (1996) Solution of the Inverse Heat Conduction Problem from Thermal Strain Measurements. *ASME. J. Heat Transfer*. 118. p. 842-849.
4. KUSHNIR, R. M. and YASINSKYI, A. V. (2007) Obernena zadacha termopruzhnosti dlya neodnorodnogo tsylindra za nepovnoji informatsiji pro teplove navantazhennya. *Matematychni Metody i Fyzyko-mekhanichni Polya*. 50(3). pp. 140-145.
5. YATSKIV, O. I. and SHVETS, R. M. (2015) Vyznachennya teplofizychnykh vlastyvostej pry-poverkhneвого шару tsylindra za vidomy-my peremishchennyamy poverkhni. *Visnyk Kyjivs'kogo natsional'nogo universytetu im. Tarasa Shevchenka. Seriya: fizyko-matematychni nauky*. Spetsvypusk. p. 305-310.
6. YATSKIV, O. (2015) Termonapruzhenyj stan tsylindra za nepovnoji informatsiji pro teplofizychni vlastyvosti pry-poverkhneвого шару, yakshcho vidomi poverkhnevi kolovi napruzhennya. *Visnyk Zaporiz'kogo natsional'nogo universytetu. Fyzyko-matematychni nauky*. 3. p. 318-328.

Надійшла до редколегії 27.08.17

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 004.652.43

Федорус О.М., аспірант

Моделювання засобами ПАРКС операцій реляційної алгебри вибору

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д, e-mail:
alex.fedorus@gmail.com

Fedorus O.M., Grad. Stud.

Modeling operations of relational algebra by PARCS

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail:
alex.fedorus@gmail.com

З розвитком інтернету та хмарних обчислень зросла і потреба у зберіганні та ефективній обробці великих даних. Феномен «Big Data» створив багато викликів для традиційних реляційних баз даних, особливо у масштабованих і високо-паралельних системах, таких як пошукові машини та соціальні мережі. У таких випадках використання реляційних баз даних для зберігання і обробки динамічних даних користувача виявилось неадекватним. Як результат почали створюватись «NoSQL» бази даних.

У цій статті запропонована схема керуючого простору (КП) яка дозволяє створити на базі ПАРКС (Паралельні Асинхронно-Рекурсивні Керовані Системи) сховище даних з можливістю створювати реляційні запити на базі алгебри Дрібаса. Оскільки запропонована система не гарантує виконання умов ACID-транзакцій то вона належить до NoSQL баз даних.

Ключові слова: Алгебра Дрібаса, ПАРКС, NoSQL.

With the development of the Internet and cloud computing, the need for storage and efficient processing of large data has increased. The Big Data phenomenon has created many challenges for traditional relational databases, especially in scalable and high-parallel systems, such as search engines and social networks. In such cases, the use of relational databases for storing and processing dynamic user data was inadequate. As a result, the NoSQL database was created.

This paper proposes a control space scheme (CS) that allows you to create a data warehouse based on PARCS (Parallel Asynchronous-Recursive Controlled Systems) with the ability to create relational requests based on the Dribas algebra. Since the proposed system does not guarantee fulfillment of ACID transaction conditions, and it's distributed nature, it belongs to NoSQL databases. Such formal description must allow other developers of PARCS-system to implement their versions of distributed data storages. Ideas proposed in this article may push researchers to implement and test different databases interactions through PARCS.

Key Words: Dribas algebra, PARCS, NoSQL.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф., Анісімов А.В.

Вступ. З розвитком інтернету та хмарних обчислень зросла і потреба у зберіганні та ефективній обробці великих даних. Феномен «Big Data» створив багато викликів для традиційних реляційних баз даних, особливо у масштабованих і високо-паралельних системах, таких як пошукові машини та соціальні мережі. У таких випадках використання реляційних баз даних для зберігання і обробки динамічних даних користувача виявилось неадекватним. Як результат почали створюватись «NoSQL» бази даних. ПАРКС як можливий засіб створення розподілених баз даних цікавий відразу декількома речами:

1. Природна для ПАРКС модульна архітектура дозволить приховати деталі реалізації запитів у конкретній точці. За рахунок цього

можливо створювати гетерогенні бази у яких дані можуть зберігатися у контейнерах що найбільш для цього підходять.

2. Рекурсивність ПАРКС. Велика кількість NoSQL баз даних відмовилися від чіткої структури таблиць і у них можливо створювати «колонки» що є об'єктом і у звичайній реляційній базі вони б зберігалися в окремій таблиці. Підхід об'єднання декількох таблиць у одну виник як один з засобів оптимізації запитів до реляційних баз даних, оскільки один пошук по «широкій» таблиці набагато швидше ніж пошук з об'єднанням. Проте у такого підходу є явний недолік, оскільки пошук по вкладеним даним зазвичай є набагато менш ефективним. ПАРКС може дозволити рекурсивно «розгортати» такі вкладені об'єкти в окремі таблиці.

Модель керуючого простору. При розробці основним пріоритетом було зробити варіант що можна поділити до найменших частинок. У найзагальнішому випадку найменшою частинкою є кортеж(чи їх множина) з інформацією. Отже КП для реляції(таблиці) буде мати вигляд:

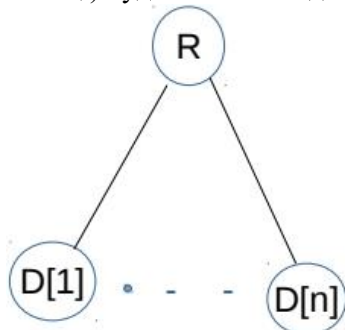


Рис. 1 «Структура КП для реляції»

Де у вузлі R може зберігатися і оброблюватися схемна інформація, тобто імена атрибутів, типи даних, інформація про ключі. У вузлах D[i] знаходяться кортежі реляції, один кортеж чи кілька, тобто блок.

Наступний малюнок «Структура КП для БД (сукупність реляцій)» відображає КП для реляційної бази даних. Всі вузли виду R[i] як і раніше, призначені для збереження та обробки схемної інформації, але можуть бути ще вузли виду L[j], які потрібні для підтримки тимчасових чи віртуальних реляцій. Вузли такого виду не мають власних кортежів, а тільки посилання на деякі кортежі, які зберігаються у вузлах виду R[i]. Відпрацювання посилань здійснюється через вузол G або за допомогою безпосередніх каналів між вузлами виду R та L(у випадку інтенсивної роботи).

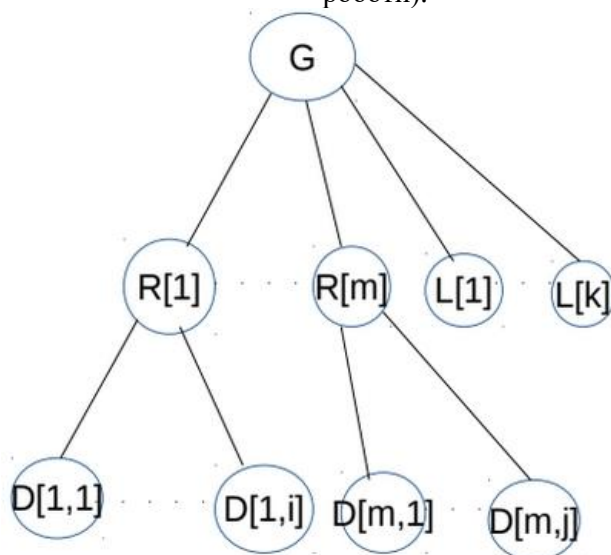


Рис 2. «Структура КП для БД (сукупність реляцій)»

Моделювання засобами ПАРКС операцій реляційної алгебри вибору. Реляційна алгебра вибору або алгебра Дрібаса функціонально еквівалентна реляційній алгебрі Кодда, але її операції більш зручні для реалізації.

Операції алгебри Дрібаса поділяються на дві групи:

1) теоретико-множинні операції співпадають з аналогічними операціями алгебри Кодда ($\cup, \cap, \setminus, \otimes, []$), тобто об'єднання, перетин, різниця, декартів добуток і проекція.

2) операції фільтрації

• $F_\beta(R, \beta)$ — операція β -фільтрації — дуже схожа на операцію Θ -обмеження алгебри Кодда; R — початкова таблиця, а β — це умова з іменами атрибутів таблиці R та констант; в результаті отримуємо таблицю тієї ж структури, що і R, з кортежами, які задовольняють умові β ;

• $F_\exists(R1, R2, \beta)$ — операція фільтрації по квантору існування; R1 та R2 — початкові таблиці, а β — це умова з іменами атрибутів таблиць R1, R2 та констант; в результаті отримуємо таблицю тієї ж структури, що і R1, з кортежами, які задовольняють умові β хоча б для одного кортежа з R2;

• $F_\forall(R1, R2, \beta)$ — операція фільтрації по квантору узагальнення; R1 та R2 — початкові таблиці, а β — це умова з іменами атрибутів таблиць R1, R2 та констант; в результаті отримуємо таблицю тієї ж структури, що і R1, з кортежами, які задовольняють умові β для всіх кортежів з R2;

• $F_S(R1, R2, A, B_a \Theta C)$ - операція фільтрації з порівнянням множин; R1 та R2 — початкові таблиці; A, B_a - списки атрибутів з R1, а C — список атрибутів з R2, Θ — бінарний предикат порівняння множин; в результаті операції

отримуємо таблицю тієї ж структури, що і R_1 , а її наповнення визначимо наступною послідовністю дій:

а) виконуємо групування кортежів таблиці R_1 по списку атрибутів A ;

б) $R_2[C]$ — проекція таблиці R_2 по списку атрибутів C ;

в) $R_1[B_a] \ominus R_2[C]$ — (замість $\ominus$ використовуємо $\supset, \subset$, тощо) групи (створені на кроці а) підкортежів по списку B порівнюються як множини з множиною підкортежів $R_2[C]$; якщо результат порівняння $TRUE$, то відповідна група кортежів проходить в результат, в іншому випадку переходимо до порівняння іншої групи або ж завершення; зауважимо, що $R_1[B]$ та $R_2[C]$ повинні бути сумісними.

Допоміжні процедури.

1. Вилучення дублів кортежів (чи ключових блоків) у вузлах типу R (чи L);

2. Переписування кортежів з одного вузла на інший (з перевіркою схеми чи без), (перепис всіх кортежів чи по ключовим блокам);

3. Підрахунок кількості кортежів у вузол типу R (чи L);

4. Підрахунок кількості підпорядкованих вузлів для вузла типу G ;

5. Підрахунок суми значень по деякому атрибуту (з доменом числового типу) для вузлів типу R (чи L);

Розглянемо реалізацію операції $R_1 \cup R_2$. За основу візьмемо

малюнок “Структура КП для БД (сукупність реляцій)” з акцентуванням на вузли R_1 , R_2 та вузол виду L для результату (йдеться про віртуальне створення результату), а також створенням додаткових каналів між вузлами (R_1 , R_2), (R_1 , L) та (R_2 , L).

1) перевірка сумісності R_1 та R_2 здійснюється вузлом G (перевіряються тільки схеми реляцій);

2) виявлення дублів — всі блоки ключових атрибутів з R_1 прокачуються через R_2 з перевіркою рівності ключових блоків; результат порівняння запам'ятовується в спеціальному булевському масиві $BOOL$ присвоєнням відповідному елементу масиву значення $TRUE$ (ініціальне значення елементів масиву — $FALSE$); кількість елементів масиву $BOOL$ дорівнює кількості кортежів, які приписані вузлу R_2 ;

3) власне об'єднання — з вузла R_1 до вузла L переписуються ключові блоки (або посилання на них) кортежів, потім до вузла L з вузла R_2 переписуються тільки ті ключові блоки, яким в масиві $BOOL$ відповідає значення $FALSE$.

Реалізація операції $R_1 \cap R_2$ дуже схожа на попередню, зокрема перші два пункти повністю

співпадають, а на третьому — виконується перепис з вузла R_2 до вузла L тих ключових блоків, яким в масиві $BOOL$ відповідає значення $FALSE$.

Реалізація операції $R_1 \setminus R_2$.

1) перевірка сумісності R_1 та R_2 здійснюється вузлом G (перевіряються тільки схеми реляцій);

2) виявлення дублів — всі блоки ключових атрибутів з R_2 прокачуються через R_1 з перевіркою рівності ключових блоків; результат порівняння запам'ятовується в спеціальному булевському масиві $BOOL$ присвоєнням відповідному елементу масива значення $TRUE$ (ініціальне значення елементів масива — $FALSE$); кількість елементів масива $BOOL$ дорівнює кількості кортежів, які приписані вузлу R_1 ;

3) з вузла R_1 до вузла L переписуються тільки ті ключові блоки (або посилання на них) кортежів, яким в масиві $BOOL$ відповідає значення $FALSE$.

Реалізація операції $R_1 \otimes R_2$.

1. Перевірка сумісності не виконується, оскільки відсутні обмеження на операнди; у вузлі G створюється схема результуючої реляції, як поєднання схем реляцій операндів;

2. В циклі з вузла R_1 переписуються ключові блоки (або посилання на них) кортежів до вузла L ; для кожного кроку циклу (R_1) у вузол R_2 здійснюється повний прохід циклу з переписуванням своїх ключових блоків.

У випадку, якщо операція $R_1 \otimes R_2$ є проміжною, то можливо обійтись без 2-го пункту, відклавши його для поєднання з наступною операцією, наприклад $F_\beta(R, \beta)$.

Реалізація операції $R_1 \dots$.

1. Перевірка коректності списку атрибутів операції проекції (чи є відповідні атрибути у схемі реляції R_1) здійснюється у вузол G ; тут же виконується формування схеми результуючої реляції у вузол L ; також уточняється чи є список атрибутів проекції квазіключем реляції R_1 ;

2. з вузла R_1 переписуються значення атрибутів, заданих в списку операції проекції до вузла L ;

3. якщо список атрибутів не є квазіключем реляції R_1 , то у вузлі L потрібно провести процедуру вилучення дублів.

Реалізація операції $F_\beta(R, \beta)$.

1. Схема реляції копіюється з вузла R у вузол L ;

2. Перепис ключових блоків, які задовольняють умові β , з вузла R у вузол L ;

Реалізація операції $F_\Delta(R_1, R_2, \beta)$.

1. Схема реляції копіюється з вузла R_1 у вузол L ;

2. Для кожного кортежа з $R1$ здійснюється прокачка кортежів з $R2$ з перевіркою умови β ; якщо для деякого кортежа з $R2$ отримаємо TRUE, то для поточного кортежа з $R1$ прокачка завершується, а його ключовий блок переписується у вузол L ;

Реалізація операції $F_V(R1, R2, \beta)$.

1. Схема реляції копіюється з вузла $R1$ у вузол L ;

2. Для кожного кортежа з $R1$ здійснюється прокачка кортежів з $R2$ з перевіркою умови β ; якщо для деякого кортежа з $R2$ отримаємо FALSE, то для поточного кортежа з $R1$ прокачка завершується, і переходимо до наступного кортежа з $R1$ (переписування не відбувається), переписування ключового блока поточного кортежа з $R1$ у вузол L здійснюється при завершенні прокачування всіх кортежів з $R2$ (всі TRUE);

Реалізація операції $F_S(R1, R2, A, B_a \ominus C)$.

1. Схема реляції копіюється з вузла $R1$ у вузол L ;

2. Виконання $R2[C] \rightarrow L2$ (ключові блоки);

3. $R1$ групується по списку атрибутів $A \rightarrow L1$ (ключові блоки) (як варіант — результати групування зберігаються в $R1$ у вигляді масиву списків);

Висновки. У статті запропонований підхід до створення розподіленої бази даних, яка потенційно може складатися одразу з декількох (різних за типом) баз даних та запропоновано формальний опис реалізації реляційної алгебри за допомогою ПАРКС. Такий формальний і не

4. Виконання $R1[B_a] \ominus R2[C]$: (обидві множини сортуються для порівняння)

• $R1[B_a] \supseteq R2[C]$ — друга множина прокачується через першу, при першому ж FALSE — вихід з прокачки без переписування; якщо ж всі TRUE, то відповідна група ключових блоків з $R1$ переписується у вузол L ;

• $R1[B_a] \subseteq R2[C]$ — перша множина прокачується через другу, при першому ж FALSE — вихід з прокачки без переписування; якщо ж всі TRUE, то відповідна група ключових блоків з $R1$ переписується у вузол L ;

• $R1[B_a] = R2[C]$ — виконується зустрічна прокачка множин першої через другу і навпаки, при першому ж FALSE — вихід з прокачки без переписування; якщо ж всі TRUE, то відповідна група ключових блоків з $R1$ переписується у вузол L ;

• для випадку $R1[B_a] \subset R2[C]$ виконується $R1[B_a] \subseteq R2[C]$ та $R1[B_a] = R2[C]$ з наступним відніманням;

• для випадку $R1[B_a] \supset R2[C]$ виконується $R1[B_a] \supseteq R2[C]$ та $R1[B_a] = R2[C]$ з наступним відніманням;

прив'язаний до конкретної реалізації опис операцій дозволяє його застосування у різних реалізаціях ПАРКС, а при узгодженні інтерфейсів передачі даних може дозволити поєднання точок породжених різними реалізаціями ПАРКС у єдиний КП.

Список літератури

1. Анисимов А.В. Система ПАРУС-JAVA для паралельних вычислений на компьютерных сетях / Анисимов А.В., Дерев'янченко А.В. // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — №1 — с. 25-36.
2. Дерев'янченко О.В. Моделирование паралельных программ за допомогою системи ПАРКС-JAVA / Дерев'янченко О.В. // Наукові записки НаУКМА, Комп'ютерні науки. — 2005. — Т.36. — с. 32-38.
3. Дрибас В.П. Реляционные модели данных. / Дрибас В.П. // Мир — 1992.
4. Hecht R. NoSQL evaluation: A use case oriented survey / Hecht R., Jablonski S. // International Conference on Cloud and Service Computing — 2011. — [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://ieeexplore.ieee.org/document/6138544/>
5. Федорус О.М. Системи ПАРКС як засіб реалізації хмарних обчислень. / Федорус О.М. // Матеріали II Міжнародної науково-практичної конференції «Інформаційні технології та взаємодії» — 2015. — с. 115-116.

References

1. ANISIMOV A., DEREVIANCHENKO A. (2005) PARCS-Java system for parallel computing on computer networks. *Cybernetics & System Analysis*. 2005(1) pp. 25-36.
2. DEREVIANCHENKO A. (2005) Simulation of parallel programs using PARCS-Java system. *Scientific Notes of NaUKMA, Computer Science*. 36. pp. 32-38.
3. DRIBAS V.P. (1992) Relational data models. Mir. 1992.
4. HECHT R., JABLONSKI S. (2011) NoSQL evaluation: A use case oriented survey. *International Conference on Cloud and Service Computing*. [Online] Available from: <http://ieeexplore.ieee.org/document/6138544/>
5. FEDORUS O. (2015) PARCS system as a tool for cloud computing. *Materials of the International Scientific and Practical Conference "Information Technologies and Interaction"*. pp. 115-116.

Надійшла до редколегії 30.08.2017

РАДІОФІЗИКА

УДК 620.18:546.28

Находкін М.Г., акад. НАНУ, д. ф.-м.н., проф.,
Родіонова Т.В., к.ф.-м.н., с.н.с.

Вплив відпалювання на зернограничну енергію кремнієвих плівок з дендритною структурою

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4г,
e-mail: rodtv@univ.kiev.ua

N.G. Nakhodkin., Acad. Of NAS of Ukraine, Dr.Sci.,
T.V. Rodionova, Ph.D.

Effect of annealing on grain-boundary energy of silicon films with dendritic structure

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4g,
e-mail: rodtv@univ.kiev.ua

Відносна зерногранична енергія нелегованих та легованих фосфором кремнієвих плівок, що отримані методом хімічного осадження з газової фази, визначалась методом зернограничних канавок, що утворюються при перетинанні границь зерен вільною поверхнею. Показано, що нелеговані плівки з дендритною структурою мають меншу відносну зернограничну енергію, ніж плівки, що леговані фосфором. Відпалювання призводить до релаксації структури легованих фосфором плівок.

Ключові слова: кремнієві плівки, двограний кут, відносна зерногранична енергія, атомна силова мікроскопія.

The relative grain-boundary energy of undoped and phosphorus-doped silicon films with dendritic structure, prepared by low-pressure chemical vapor deposition, was determined by the method of grain boundary grooves being formed at the intersection of the grain boundary plane with the free surface. The measurements of grain boundary groove dihedral angles were performed by atomic force microscopy. It was found that the average dihedral angles of the grain-boundary grooves for undoped and phosphorus-doped silicon films were $178,82^\circ$ and $166,60^\circ$, and average relative grain-boundary energy were 0,02 and 0,26, respectively. That is undoped films with a dendritic structure possess the lowest relative grain-boundary energy compared with phosphorus-doped silicon films. The mechanism of the phosphorus influence on relative grain-boundary energy has been analyzed. It was shown that annealing of phosphorus-doped dendritic silicon films leads to a decrease in the relative grain-boundary energy and, consequently, to the relaxation of the non-equilibrium structure. Such films are preferred for practical use.

Key words: silicon films, dihedral angles, relative grain-boundary energy, atomic force microscopy.

Статтю представив д. ф.-м. н. Скришевський В.А.

Вступ

Стабільність властивостей кремнієвих плівок (механічних, електрофізичних, оптичних), що широко застосовуються в мікроелектроніці та сонячній енергетиці, визначаються стабільністю їх структури, зокрема, зернограничної структури [1]. Тому важливими є дослідження, що пов'язані з аналізом умов, які сприяють підвищенню стабільності структури плівок. Стабільність структури значною мірою визначається ступенем нерівноважності границь зерен. Найбільш прямим індикатором ступеня нерівноважності є

зерногранична енергія. Чим вона нижче, тим більш рівноважною і, отже, стабільною є структура. Як відомо [2], кремнієві плівки, залежно від умов осадження та подальших обробок, можуть існувати в різних структурних модифікаціях, зокрема можуть мати рівноосьову, волокнисту або дендритну структуру. Плівки з дендритною структурою становлять особливий інтерес завдяки своїм властивостям, зокрема, вони мають найменші в порівнянні з іншими структурами, поверхневі неоднорідності, що сприяє формуванню на них рівномірного шару окислу [3], та ін.

Мета даної роботи полягала в тому, щоб за допомогою атомного силового мікроскопа оцінити вплив легування фосфором та відпалювання на відносну зернограничну енергію кремнієвих плівок з дендритною структурою.

Методика

Кремнієві плівки отримували методом хімічного осадження з газової фази в реакторі зниженого тиску. Плівки осаджували на підкладки термічно окисленого (товщина окисного шару 100 нм) монокристалічного кремнію орієнтації (100). Товщина плівок 500 нм. Частина плівок була легована фосфором. Залежно від умов осадження, плівки мали різну структуру: ріноосову, дендритну або волокнисту. Рівноосова структура спостерігається в легованих фосфором плівках, що були осаджені при температурі 630°C та відпалені при температурі 1150°C в атмосфері азоту. Дендритна структура має місце в нелегованих та легованих фосфором плівках, що були осаджені в аморфній або аморфно-кристалічній фазах (температури осадження 560°C та 610°C, відповідно) та відпалені при температурі $\leq 1000^\circ\text{C}$. Структура плівок залежно від умов осадження та подальших обробок детально досліджена в роботі [4].

Найбільш поширеним способом експериментального дослідження зернограничної енергії є метод дослідження відносних значень енергії границь зерен, який заснований на виміюванні геометрії зернограничних канавок, що утворюються при перетинанні границь зерен вільною поверхнею [4-6]. На практиці, експериментальні дані прийнято аналізувати в припущенні, що поверхнева енергія ізотропна, а енергія границь розділу визначається тільки їх орієнтацією. В такому випадку відносна зерногранична енергія γ_{rel} визначається із співвідношення:

$$\gamma_{\text{rel}} = \gamma_b / \gamma_s = 2 \cos(\Psi_s / 2),$$

де Ψ_s – двограний кут в основі канавки; γ_s та γ_b – поверхнева та зерногранична енергії, відповідно. Двогранні кути визначали по даним атомної силової мікроскопії (АСМ) шляхом вимірювання ширини W та глибини d зернограничних канавок (рис. 1). Методика визначення двограних кутів по даним АСМ досліджень детально описана в [4]. Оскільки сторони канавки мають різний нахил, двограний кут Ψ_s визначався як сума двох кутів Ψ_1 та Ψ_2 , які вимірювались окремо:

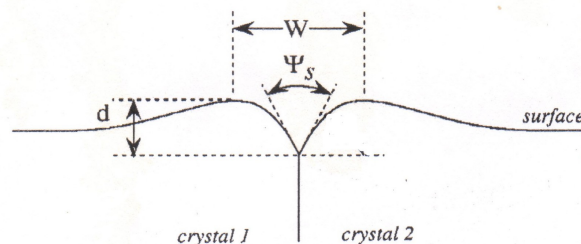


Рис. 1 Схематична геометрія зернограничної канавки [5]

$$\Psi_s = \Psi_1 + \Psi_2$$

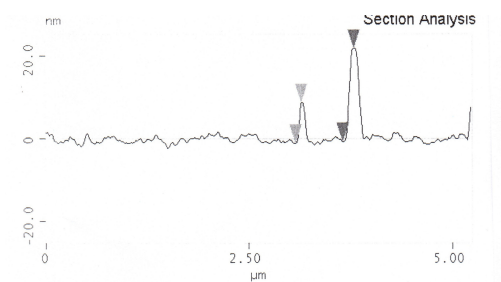
Перевагою АСМ-досліджень є можливість отримання та обробки великої кількості даних.

Результати та обговорення

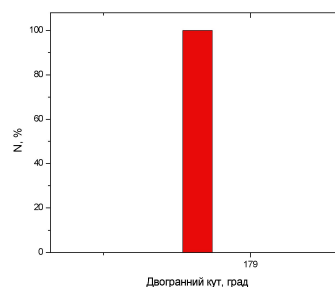
Як відомо [2,3], дендритна структура кремнієвих плівок формується шляхом множинного двійникування в процесі кристалізації аморфних або аморфно-кристалічних плівок. Проведені в роботі [3] електронно-мікроскопічні дослідження показали, що на структуру цих вихідних плівок суттєво впливає легування фосфором. На відміну від плівок з волокнистою структурою, в яких пучки волокон розташовані перпендикулярно до поверхні підкладки, в плівках з дендритною структурою пучки волокон (двійникових прошарків) розташовані хаотично.

На рис. 2,3 наведено АСМ-скани поверхонь кремнієвих плівок, по яких визначались двогранні кути, для нелегованих та легованих фосфором плівок з дендритною структурою, а також відповідні розподіли двограних кутів для плівок до та після відпалювання.

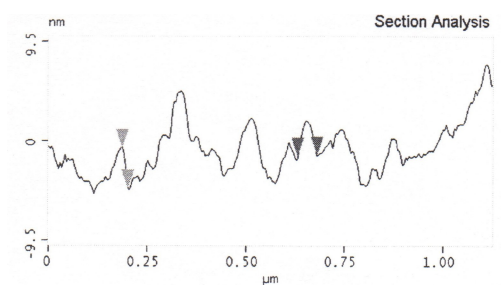
Аналіз результатів АСМ-досліджень вказує, що леговані фосфором кремнієві плівки з дендритною структурою характеризуються меншими значеннями двограних кутів та, відповідно, мають значно більше значення відносної зернограничної енергії, ніж нелеговані дендритні плівки. Так, середнє значення двогранного кута для нелегованої плівки складає $178,82^\circ$, відносна зерногранична енергія дорівнює 0,02. Для легованих фосфором плівок ці значення відповідно дорівнюють $166,60^\circ$ та 0,26. Це може бути пов'язано з сегрегацією фосфору на границях зерен.



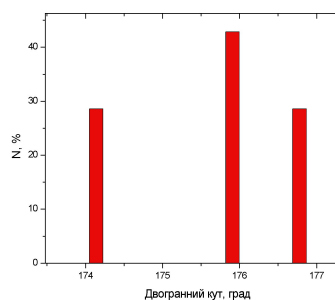
а



б

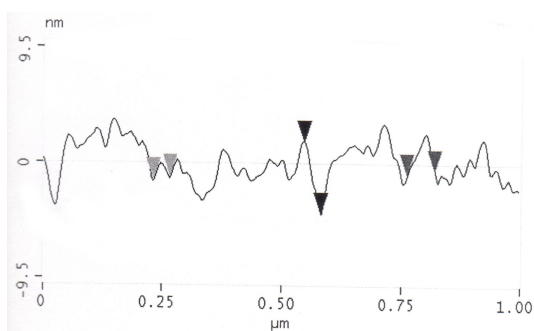


в

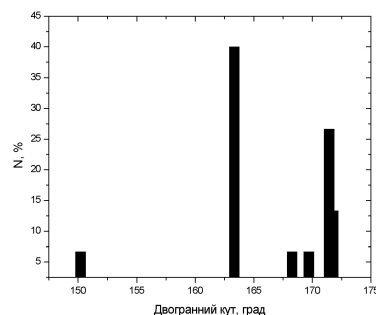


г

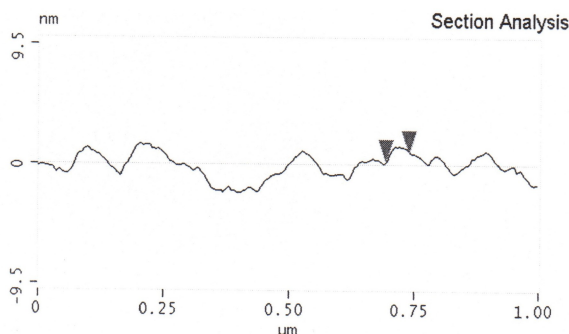
Рис. 2 АСМ-скани (а,в), та відповідні розподіли (б,г) зернограничних канавок у нелегованих дендритних плівках: а,б– до відпалювання; в,г- після відпалювання



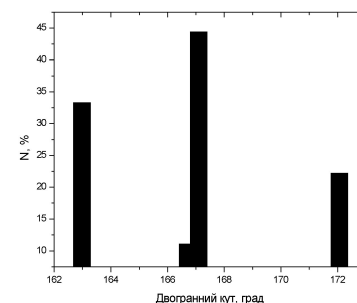
а



б



в



г

Рис. 3 АСМ-скани (а,в), та відповідні розподіли (б,г) зернограничних канавок у легованих фосфором дендритних плівках: а,б– до відпалювання; в,г- після відпалювання

Відпалювання при температурі 1150°C плівок [3]. Дендритна структура перетворюється призводить до перебудови структури кремнієвих в рівноосову. Аналіз показав, що в нелегованих

кремнієвих плівках з дендритною структурою відпалювання призводить до незначного зростання відносної зернограничної енергії. Це свідчить, що має місце перебудова зернограничної структури, проте вона не завершена. Тобто температура та час відпалювання, які використовувались, є недостатніми для повної перебудови структури.

Що стосується легованих фосфором кремнієвих плівок з дендритною структурою, то в них відносна зерногранична енергія зменшується після відпалювання, що є свідченням релаксації зернограничної структури внаслідок перебудови дендритної структури плівок на рівноосову в процесі відпалювання. Релаксація відбувається за рахунок переходу від малокутових границь, що мають дальнодіючі поля пружних напружень, до висококутових границь, в яких дальнодіючі напруги

зменшуються майже до нуля [47]. внаслідок зміни приграничного спряження.

Висновки

1 - Показано, що нелеговані плівки з дендритною структурою мають меншу відносну зернограничну енергію, ніж плівки, що леговані фосфором.

2 - Відпалювання нелегованих плівок з дендритною структурою не призводить до суттєвої зміни відносної зернограничної енергії, тобто температура та час відпалювання недостатні для перебудови структури.

3 - Відпалювання легованих фосфором дендритних плівок призводить до зниження відносної зернограничної енергії, а, отже, до релаксації нерівноважної структури. Такі плівки є переважними для практичних використань.

Список використаних джерел

1. *Mukhopadhyay S.* Nanocrystalline silicon: A material for thin film solar cells with better stability / S. Mukhopadhyay, A. Chowdhury, S. Ray // *Thin Solid Films.* – 2008. - **516**, Issue 20. - P. 6824-6828.
2. *Nakhodkin, N.G.* Formation of different types of polysilicon film structures and their grain growth under annealing / N.G. Nakhodkin, T.V. Rodionova // *Phys. Status Solidi A.* – 1991. - **123**, № 2. - P. 431-439.
3. *Nakhodkin N.G.* Features of special joints of grain boundaries in polysilicon films of equiaxial and dendritic structures / N.G. Nakhodkin, N.P. Kulish, P.M. Lytvyn, T.V. Rodionova // *Functional Materials.* – 2006. - **13**, № 2. - P. 305-309.
4. *Saylor D.M.* Measuring the influence of grain-boundary misorientation on thermal groove geometry in ceramic polycrystals / D.M. Saylor, G.S. Rohrer // *Am. Ceram. Soc.* - 1999. - **82**. - P. 1529–1536.
5. *Amouyal Y.* A scanning force microscopy study of grain boundary energy in copper subjected to equal channel angular pressing / Y. Amouyal, E. Rabkin // *Acta Materialia.* - 2007. - **55**. - P. 6681-6689.
6. *Rost M. J.* Grains, Growth, and Grooving / M. J. Rost, D. A. Quist, J.W.M. Frenken // *Phys. Rev. Lett.* 2003. - **91**, № 2. - P. 026101-1 – 026101-4.

References

1. *MUKHOPADHYAY, S., CHOWDHURY, A., RAY, S.* (2008) Nanocrystalline silicon: A material for thin film solar cells with better stability. *Thin Solid Films.* 516 (20). p. 6824-6828.
2. *NAKHODKIN, N. G. & RODIONOVA, T. V.* (1991) Formation of different types of polysilicon film structures and their grain growth under annealing. *Phys. Status Solidi A.* 123 (2). p. 431-439.
3. *NAKHODKIN, N. G., KULISH, N. P., LITVYN, P. M., RODIONOVA, T.V.* (2006) Features of special joints of grain boundaries in polysilicon films of equiaxial and dendritic structures. *Functional Materials.* 13 (2). p. 305-309.
4. *SAYLOR, D. M. & ROHRER, G. S.* (1999) Measuring the influence of grain-boundary misorientation on thermal groove geometry in ceramic polycrystals. *Am. Ceram. Soc.* 82. p. 1529–1536.
5. *Y. AMOYAL, Y. & RABKIN, E.* (2007) A scanning force microscopy study of grain boundary energy in copper subjected to equal channel angular pressing. *Acta Materialia.* 55. p. 6681-6689.
6. *ROST, M. J., QUIST, D. A., FRENKEN, J. W. M.* (2003) Grains, Growth, and Grooving *Phys. Rev. Lett.* 91 (2). p. 026101-1 – 026101-4.

Надійшла до редколегії 22.08.17

УДК 004.852

Сачковський Б. В., студ.
Агафонов О. М., студ.
Грязнов Д. Б., асист.
Бойко Ю. В., к.ф.-м.н.

Нова boid модель побудована з використанням штучних неймереж

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: bohdan.sachkovskiy@univ.net.ua,

B. V. Sachkovskiy, stud.,
O. M. Agafonov, stud.,
D. B. Gryaznov, assist.,
Y. V. Boyko, Ph. D.

New artificial life boid model based on neural networks

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000,
Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: bohdan.sachkovskiy@univ.net.ua,

Запропоновано нову модель для дослідження проблем штучного життя, на основі нейронних мереж. Досліджено можливість відновлення стану нейронної мережі за допомогою нейроеволюційних алгоритмів. У статті висвітлюється деталі запропонованої boid моделі.

Ключові слова: нейроеволюція, штучна нейронна мережа, штучне життя, колективний інтелект, генетичний алгоритм.

The present article is proposed neural networks based artificial life boid model of ant, and investigated the possibility of restoring neural network state, after random weights update, using neuroevolutionary algorithms. In current research boid model was built using two feed forward neural networks (with fixed topology), one operating as vision system, another – as musculoskeletal system. Bouth neural networks was pre-trained using backpropagation algorithm. Generation of 10 Boids was placed in 2-dimensional space. Food is randomly appears in space. Fitness function is defined as minimum steps to food count. Before generation start running, for one randomly chosen ant, vision system was mutated. After generation finished run two the worst ants (according to fitness function) were replaced with two clones of the best ant. Neural network restored state after 350 generation. Proposed boid model can be used for optimization network topologies, and also for restoring, finding new neural network states.

Key words: neuroevolution, artificial neural network, artificial life, swarm intelligence, genetic algorithm.

Статтю представив д.т.н., доц., Заславський В.А.

Introduction

Neuroevolution (NE) is a computer science method, which applies evolutionary algorithms for generation of artificial neural networks (ANNs) (their connection weights and/or topology) [1, 6]. NE was introduced around two decades ago and now it is used for a wide range of problems from classification to different types of control [8, 4]. The basic idea is to train the network with an evolutionary algorithm. In difference to classic weights updating according learning rule (backpropagation) some fitness function is assigned to ANNs to allow creation of a new generation of ANNs applying mutation and recombining to the selected genomes. Most straightforward way to encode ANN is describe every connection individually, by building a vector of concatenated

weight values, also called direct encoding. One of benefits of NE is that it can be used with any type of learning (supervised, unsupervised, reinforcement), and it only requires fitness function evaluation for ranking the quality of candidate networks. Another one is that NE can help better understand how evolution works. Opposite to real biological evolution, which is very slow to study, NE study time is limited by computer processor performance. This fact open opportunities for researching a wide range of problems linked with evolution process. Artificial life (Alife) it is research field which is examining properties and evolution of systems related to natural life with computer modeling using boids as evolutionary unit of interacting. Originally term boid ("bird-oid object", bird-like object) was

used by Craig W. Reynolds [7], now this term is used to denote agents in Alife and swarm intelligence fields. One of the recent Alife studies [5] notice importance of understanding dynamic genotype and phenotype transitions in multi-agent Alife systems. Every agent was represented as a neural network with one hidden layer, agent strategies was represented as a vector. Experiment was done with fixed ANN topology. Disadvantage of such approach is that the user need to determine appropriate topology before experiment. Topology can significantly affect neural network performance [2] so the better approach is to evolve ANN topology together with weights. Neuroevolution of augmenting topologies (NEAT [3]) and neuro differential evolution (NDE [8]) methods can build neural networks which outperforms candidates built with approach of evolving the weights alone. In this paper we are going to investigate ability to restore neural network functionality after random weights update.

Experimental

An ant model was chosen as a boid for experiment. Their simple external morphology and complex social behavior strategies have made ants ideal for further research. In current research ant model is build using two feed forward neural networks, one operating as vision system, another – as musculoskeletal system. Boids was placed in 2-dimensional space, their position is defined by real coordinates (x, y) and relative direction. Food is randomly appears in space. The task is to reach food with minimum steps count.

Vision system implementation details

Vision system is implemented using 3 eyes which is placed on the edges of equilateral triangle as shown on Fig. 1. Such anatomy gives full range (360°) of overview, which is divided into 16 sectors (directions) of 22.5° width. Every eye is constructed similar to entire vision system (Fig.2) – full range (360°) of overview is divided into 16 directions of 22.5°.

When the food is placed in the space we can draw virtual lines from it to the center of every eye, sector which this line crossed indicate the direction to the food [0..15]. Signals from eyes are combined to the vector of 48 elements where items under indexes: $i = N * 16 + ASI$ (where N – eye number [0..2], ASI – active sector index of eye [0..15]) will have value of 1, other elements – 0. This vector – V_{input} is used as neural network input signal. Output

signal is a vector V_{output} have size of 16 elements, where activated element (which have value of 1) indicates overall direction to the food. Neural network contains 1 hidden layer, and was pre-trained with set of randomly computed values using backpropagation algorithm.

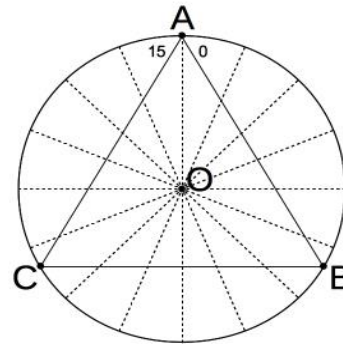


Fig. 1. Ant vision system diagram. A, B, C – eyes, O – center of vision system.

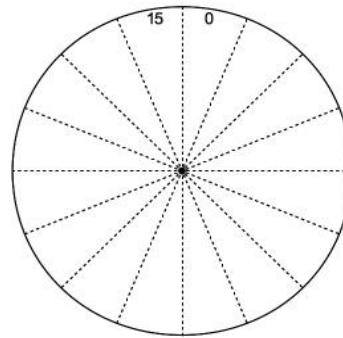


Fig. 2. Eye diagram

Musculoskeletal system implementation details

Musculoskeletal system physically is modeled as a pair of leg tripods and body. Every leg in tripod can be in one of 6 positions: 3 horizontal (backward, middle and forward) combined with 2 vertical (up and down). Tripods movements can be described with next diagram (Fig. 4). Programmatically musculoskeletal system is modeled with neural network, which contains 1 hidden layer. The input vector (V_{input}) is combined using 16 elements vector of vision system computational result, 30 elements vector of current legs positions (every leg is encoded with 5 elements vector) and the last element is body vertical position (up or down). Body vertical position is used to emulate ant horizontal rotation, for example, when vertical body position is down and left tripod moves forward ant rotates left and otherwise. Output signal is a vector V_{output} with size of 31 elements and describes next positions of ant legs and body. Neural network was pre-trained with a predefined

set of valid legs positions according to ant movement walkcycle using backpropagation algorithm.

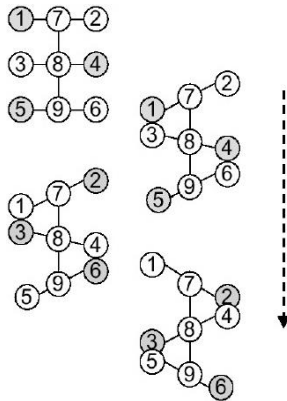


Fig. 3. Ant walkcycle

Ant lifecycle during experiment can be described with next diagram (Fig. 4):

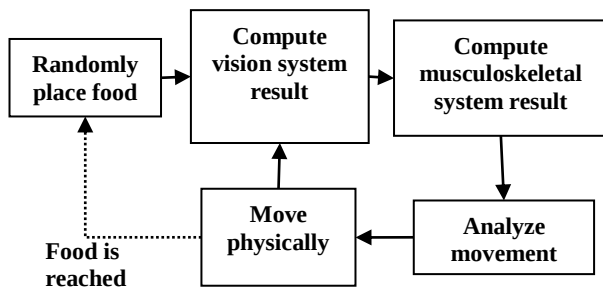


Fig. 4. Ant lifecycle

Experiment description

Generation of 10 ants is placed in the center of the circle. Food is placed on the circle according to the route on Fig. 6 with small ($\pm 5^\circ$) rotation for every generation. Ants are running sequentially and should reach every food on the route. Before generation start running, for one randomly chosen ant, vision system was mutated (weights in vision system was randomly updated). After generation finished run two the worst ants (according to fitness function) were replaced with two clones of the best ant, forming new generation. During running next values are recording: steps (tacts) count, forward steps count, clockwise turns count, counterclockwise turns count. Fitness function is defined as min (steps count). Fig. 5 show results of experiment - (1) – non mutated (default) ants. (2) – ants with randomly mutated vision system. (3) – evolution process (neural network restored state after 350 generation)

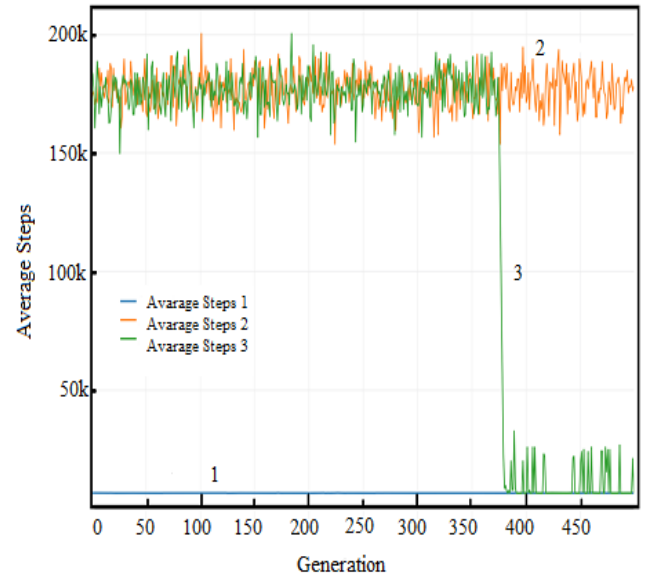


Fig. 5. Experiment results: (1)– non mutated (default) ants. (2) – ants with randomly mutated vision system. (3) – evolution process (neural network restored state after 350 generation)

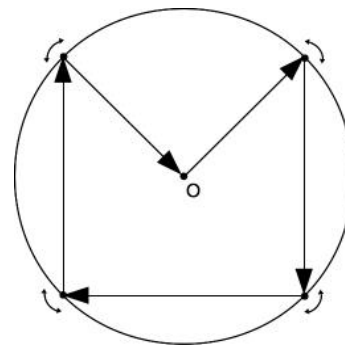


Fig. 6. Generation running route

Conclusions

Proposed boid model can be used not only for optimizing network topologies but also for restoring and finding new neural network states. Neural network ability to improve the accuracy of calculations is the key to further research the possibility of using genetic algorithms for evolving new neural networks with improved set of features. Improvements and increasing complexity of proposed model can help examine evolutionary strategies and analyze how different environment impact evolution processes.

The following issues are important for further research and model development:

- investigation generation behavior when ants runs simultaneously;
- introduce interactions between agents, investigating groups formation;

- examining ant behavior when there more than one food placed around;
- increasing complexity of environment (adding grass, hills etc.).

Список використаних джерел

1. Floreano D. Neuroevolution: from architectures to learning / D. Floreano, P. Dür, C. Mattiussi // *Evolutionary Intelligence*. – 2008. **1**, №1. – P. 47-62.
2. Igel C. Neuroevolution for reinforcement learning using evolution strategies. / C. Igel // *Evolutionary Computation*. – 2003. – **4**. – P. 2588-2595.
3. Stanley K.O. Evolving neural networks through augmenting topologies / K.O. Stanley, R. Miikkulainen // *Evolutionary Computation*. – 2002. – **10**, №2. – P. 99-127.
4. Risi S. Neuroevolution in games: state of the art and open challenges / S. Risi, J. Togelius // *IEEE Transactions on Computational Intelligence and AI in Games*. – 2015. – **9**, №1. – P. 25-41.
5. Zvertanyy V. Genotype dynamic for agent neuroevolution in artificial life model. / V. Zvertanyy, A. Makarenko // *System Research & Information Technologies*. – 2017. – № 1. – P. 75-87.
6. Yao X. Evolving artificial neural networks / X. Yao // *Proceedings of the IEEE*. – 1999. – **87**, №9. – P. 1423-1447.
7. Reynolds C. W. Flocks, herds and schools: A distributed behavioral model. / C.W. Reynolds // *ACM SIGGRAPH Computer Graphics: international conference, July 1987, New York, USA: ACM*. – New York. – 1987. – **21**, №4. – P. 25-34.
8. Mason K. Neural network topology and weight optimization through neuro differential evolution. / K. Mason, J. Duggan, E. Howley // *GECCO '17 Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion: international conference, 15-19 July 2017, New York, USA: ACM*. – New York. – P. 213-214.

Reference

1. FLOREANO, D., DÜRR, P. and MATTIUSSI, C. (2008) Neuroevolution: from architectures to learning. *Evolutionary Intelligence*. 1 (1). p.47–62
2. IGEL, C. (2003) Neuroevolution for reinforcement learning using evolution strategies. *Evolutionary Computation*. 4 p.2588–2595.
3. STANLEY, K., O. and MIIKKULAINEN, R. (2002) Evolving neural networks through augmenting topologies. *Evolutionary Computation*. 10(2). p.99–127.
4. RISI, S. and TOGELIUS, J. (2015) Neuroevolution in games: state of the art and open challenges. *IEEE Transactions on Computational Intelligence and AI in Games*. 9 (1). p.25-41.
5. ZAVERTANYI, V. and MAKARENKO, A. (2017) Genotype dynamic for agent neuroevolution in artificial life model. *System Research & Information Technologies*. (1). p.75-87.
6. YAO, X. (1999) Evolving artificial neural networks. *Proceedings of the IEEE*. 87 (9). p.1423–1447
7. REYNOLDS, C. W. (1987) Flocks, herds and schools: A distributed behavioral model. In *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*. New York, July 1987. New York. ACM. 21(4). p.25-34.
8. MASON, K., DUGGAN, J. and HOWLEY, E. (2017) Neural network topology and weight optimization through neuro differential evolution. In *GECCO '17 Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion*. New York, Saturday 15th to Wednesday 19th July 2017. New York. ACM. pp. 213-214.

Надійшла до редколегії 31.08.17

СУЧАСНА ФІЗИКА

Кравець В. Г.¹, к.ф.-м.н.,
Кудрявцев Ю. В.², д.ф.-м.н., проф.,
Ляшенко І. О.³, інж.,
Поперенко Л. В.⁴, д.ф.-м.н., проф.,
Щербаков А. О.⁵, студ.

V. G. Kravets¹, PhD.,
Yu. V. Kudriavtsev², Dr. Sci., Prof.,
I. O. Liashenko³, eng.,
L.V. Poperenko⁴, Dr. Sci., Prof.,
A. O. Shcherbakov⁵, stud.

Оптичні властивості метало- діелектричних структур з поверхневим шаром графену

Optical properties of metal-dielectric structures with surface graphene layer

¹School of Physics and Astronomy, University of
Manchester, Manchester M13 9PL, United Kingdom

²Інститут металофізики ім. Г.В. Курдюмова
НАН України, 03142, м. Київ, бульвар
Академіка Вернадського, 36

^{3,4,5}Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13,

e-mail:⁴ plv@univ.kiev.ua,

⁵ andre.shcherbakov@gmail.com

¹School of Physics and Astronomy, University of
Manchester, Manchester M13 9PL, United Kingdom

²G.V. Kurdyumov Institute for Metal Physics of The
N.A.S. of Ukraine, 03142, Kyiv, 36 Academician
Vernadsky Boulevard

^{3,4,5}Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,

e-mail:⁴ plv@univ.kiev.ua,

⁵ andre.shcherbakov@gmail.com

Методами багатокутової еліпсометрії виміряно основні еліпсометричні параметри для різних кутів падіння світла на зразок та кутів повороту зразка у власній площині, що містить шари міді та графену. Обраховано показники заломлення та поглинання і оптичну провідність у наближенні напівнескінченного середовища. Завдяки вимірюванням методом спектральної еліпсометрії у діапазоні від 0,5 еВ до 3,7 еВ оцінено релаксаційну та плазмову частоти. У спектрі оптичної провідності зразків з графеном на поверхні спостерігається широкий максимум в області 1.0-1.5 еВ, який пов'язано з плазмонним збудження електронної підсистеми шарів.

Ключові слова: еліпсометрія, плазмон, мідь, графен.

The features of optical properties of graphene films grown at two temperature modes on different Cr-Cu - HfO₂ heterostructures using chemical vapor deposition method were investigated via spectral ellipsometry measurements. These measurements were performed applying Beattie technique. The azimuth ψ of the restored linear polarization and the phase shift Δ between p- and s- components of polarization vector were measured at different values of light incidence angle ϕ on the sample from 45° to 85° by step of 5° and at different azimuthal angles α changing in own sample plane at the fixed ϕ value from 0° to 360° by step of 5°. Ellipsometric parameters ψ and Δ are defined from ellipsometry equation $\tan \Psi \exp(i\Delta) = r_p/r_s$. Measurements have been performed consistently for the substrate and relatively large size samples, and then the results were modeled by method based on the Fresnel coefficients for semi-infinite medium. Azimuthal angle α variable ellipsometry measurements were performed to analyze the polar dependence of both ellipsometric parameters ψ and Δ to estimate the appropriate optical anisotropy in own plane of heterostructures. The significant enhancement of the absorption band in the graphene layers positioned with respect to the bulk graphite spectral range due to response of the exited surface-localized plasmons in thin film as Cr-Cu-HfO₂ - Graphene were observed. The obtained results provide direct evidence of the strong influence of a specificity of morphology of surface on electronic structures and optical properties of the sample with graphene layer.

Key Words: ellipsometry, plasmon, copper, graphene.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Макарець М. В.

Introduction

Graphene – two dimensional crystal form of carbon is perspective material in micro- and nano-electronics. Unique atomic structure of graphene leads to its incredible flexibility, mechanical strength and unusual optical properties which open new abilities in electronic and optical system production. Amongst the wide spectrum of potential applications of graphene, ranging from transistors and chemical-sensors to nanoelectromechanical devices and composites, the field of photonics and optoelectronics it is believed to be one of the most promising material. Graphene monolayers exhibit unique properties due to conjugation of π -electrons along all honeycomb crystal lattice and two dimension structures density of states with “ultrarelativistic” electrons and holes. These unique characteristics allow graphene to be used as a basic material in a variety of different nanoscale devices [1]. Graphene-protected Cu is a viable alternative to the conventional noble metals components in plasmonics applications. It is relatively cheap, stable, reproducible and high-quality plasmonic material that is suitable for nanofabrication. The HfO_2 -protected Cu films also provide exciting opportunity for applications which require low plasmonic losses. That’s why the main goal of a paper consists in the estimation of the level of plasmon-supported absorption and the feature of optical anisotropy in such heterostructure by ellipsometric methods.

Sample descriptions and methods of investigations

The three types of samples were investigated. The base for these samples was the glass substrate. Firstly the glass was coated by Cr layer with the thickness of 1.5 nm. After that for all samples 43 nm Cu layers were deposited. Finally previous base was processed a layer of dielectric HfO_2 with the thickness of 7 nm. The obtained structure was called the Sample 1. The Sample 2 was obtained as a Sample 1 coated by graphene layer. At the end the Sample 2 was heated up to a temperature of 150 °C and cooled after it to the room temperature. And that was noted as a Sample 3. All layers in samples were performed by CVD method.

To find indexes of refraction and absorption, optical conductivity we have used spectroscopic, angular and azimuthal (α -) ellipsometric measurements which also based on a comparison of p- and s- components of vector polarization before and after reflection from the investigated sample[2]. The ellipsometry measurements were already

fulfilled to elucidate the specificity optical properties of graphene monolayer deposited on copper thin film [1]. Spectral ellipsometric measurement were performed within 0.5-3.8 eV range applying Beattie technique. The azimuth Ψ of the restored linear polarization and the phase shift Δ between p- and s-components of the electric field vector E were measured at different values of light incidence angle φ from 45° to 85° by step of 5° and at different values of azimuthal angle α in own plane of sample from 0° to 360° by step of 5°. The ellipsometric parameters ψ and Δ are defined as $\tan \Psi \exp(i\Delta) = r_p / r_s$, where r_p and r_s are the reflection coefficients for the light with p- and s-components of polarization vector. Measurements have been performed consistently for all samples, and modeled by method based on the Fresnel coefficients for semi-infinite medium. All angular measurements were performed with the red laser ellipsometer «ЛІФ-3М-1» with the 632.8 nm of wavelength. Spectroscopic measurements were also performed on a handmade ellipsometer which has 5 detectors for different ranges of detected photon energy [3].

Results and discussions

The first part of experimental work consisted in the investigations of the dependence of the principal ellipsometric parameters ψ and Δ on the angle φ of the light incidence. Such dependences was obtained for the Sample 1 (Fig. 1). There were found the phase shift Δ decreases linearly while the angle φ increases. It is determined that the slope of approximation line is almost the same for three samples and equals to 0.3.

At that time the same difference between Sample 1, 2 and 3 was found for values of azimuth ψ

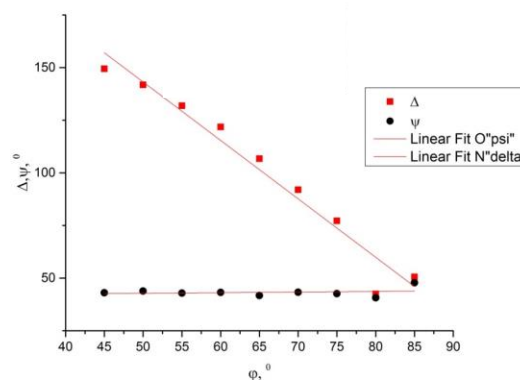


Fig.1. Angular ellipsometry: experimental diagrams for phase shift Δ and restored linear polarization ψ in dependence on the incident angle for the Sample 1. of the restored linear polarization. In the all cases this parameter was unchangeable.

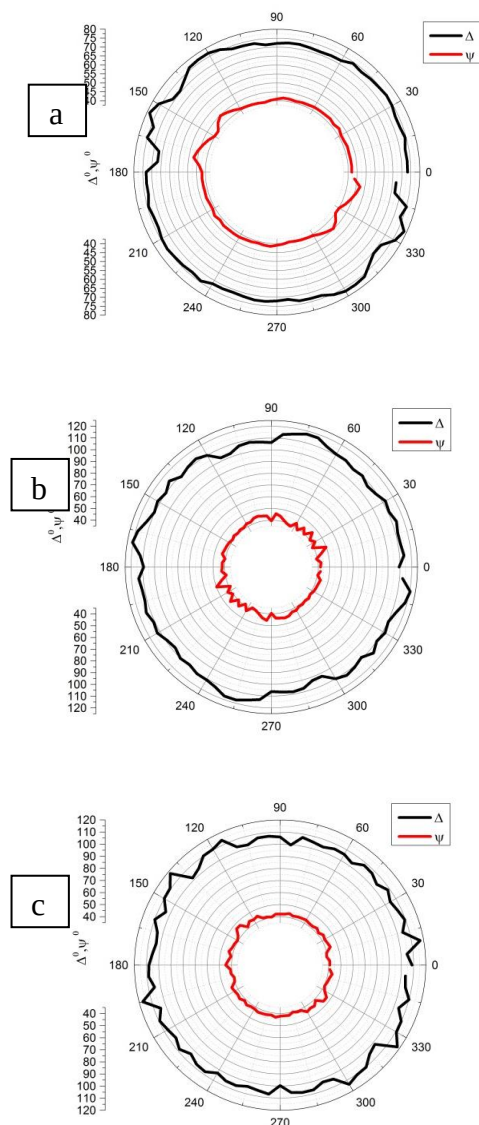


Fig. 2. Angular (α -) ellipsometry: experimental diagrams for phase shift Δ (outer curve) and of the restored linear polarization ψ (inner curve) in dependence on the azimuthal angle α in own plane of Sample 1(a), 2 (b) and 3 (c).

After this part of angular experiment the dependences of ellipsometric parameters on the azimuthal angle α were provided. Such dependences are shown in Fig. 2. Here it is possible to observe the difference between each pair of samples. The existence of graphene layer in Sample 2 and Sample 3 leads to changeable values of phase shift Δ and the restored linear polarization ψ during the sample rotating (changing angle α) in its own plane. At the same time these parameters are much more stable for the Sample 1 which didn't include the graphene. Then various behaviors for Samples 2 and 3 are a confirmation of the existence of hexagonal structure of graphene which leads to its some optical

anisotropy of layer in these samples. The most one may be attributed to the Sample 2 due to its some stressed initial hexagonal structure in comparison to that the reconstructed after the annealing at 150°C (Sample 3). The spectroscopic ellipsometry measurements allow to get the spectral dependences of ellipsometric parameters ψ and Δ which were used for further calculations of optical characteristics. Firstly the indexes of refraction and absorption were computed. It is possible to compare the graphs of these indexes for the all samples (Fig. 3). The viable difference for the refraction index is higher at low energies of incident photons (up to 1.1 eV) for Sample 1.

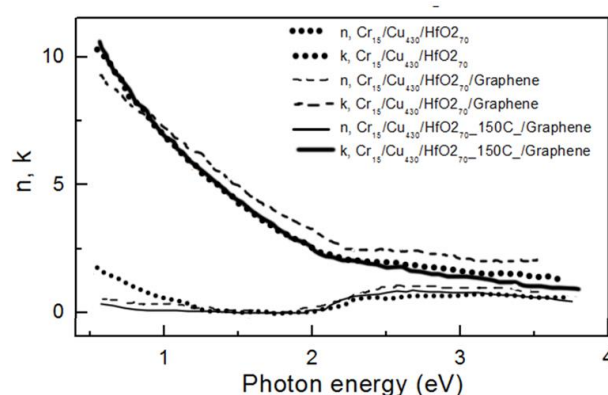


Fig 3. Spectroscopic ellipsometry: experimental graphs of indexes of absorption (upper) and refraction (lower) in dependence on incident photon energy for Samples 1-3..

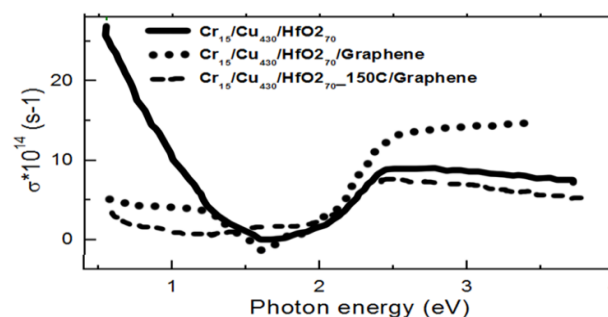


Fig 4. Spectroscopic ellipsometry: experimental graphs of optical conductivity in dependence on incident photon energy for Samples 1-3.

The huge differences were obtained for the curves of optical conductivity σ . First of all the optical conductivity is much higher at low energies of incident photons (up to 1.4 eV) for the Sample 1 than others. It is also possible to see the difference between Sample 3 (the heated one) and Sample 2 (the unheated one) with graphene layer. The optical conductivity for Sample 3 has smaller values at high energies of incident photons beginning from 2.2 eV.

It could be caused by the graphene layer melting and further stirred with layer of HfO_2 .

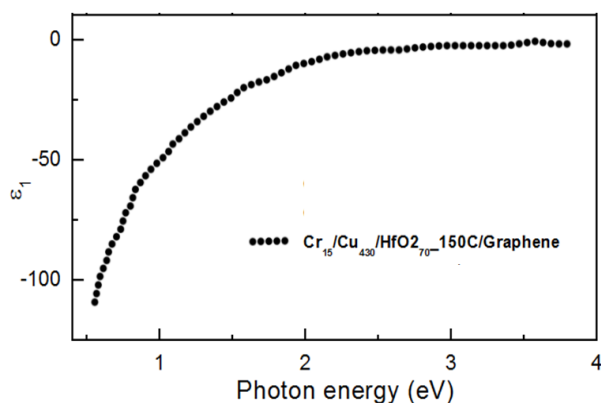


Fig 5. Spectroscopic ellipsometry: experimental graphs of real part of dielectric function in dependence on incident photon energy for Sample 1.

Then the values of the real part of the dielectric function were calculated in dependence on photon energy (Fig. 5). The differences for this parameter were not found in its spectral dependences for Samples 1-3 but their forms gave the opportunity to obtain for the investigated samples by using the Drude-Zinner theory of the free electrons the plasma and relaxation frequency were calculated. Their values are well-compatible with the experimental data for the noble metals [4]. According to this theory there are the functions:

$$f_1(\omega^2) = \frac{1}{1 - \varepsilon_1} = \frac{\omega^2}{\Omega^2} + \frac{\gamma^2}{\Omega^2}; \quad (1)$$

$$f_2(\lambda) = \frac{\varepsilon_2}{1 - \varepsilon_1} = \frac{\gamma}{2\pi} \lambda; \quad (2)$$

Список використаних джерел

1. Спектроскопічна еліпсометрія графену та екситон-зміщеного піку ван Хофа у поглинанні / В. Г. Кравець, А. Н. Григоренко, Р. Р. Нейр, П. Блейк, С. Аніссімова, К. С. Новосолов, А. К. Гейм, PHYSICAL REVIEW B, 155413 (2010).
2. Діагностика поверхні поляризованим світлом/Поперенко Л.В., Стащук В.С., Шайкевич І. А., Одарич В.А.-К.: ВПЦ: «Київський університет», 2007.-336с.
3. Оптика металевих структур/Поперенко Л.В., Кудрявцев Ю. В., Стащук В.С., Янг Пак Лі.-К.: ВПЦ «Київський університет», 2013.-531с.
4. Оптические свойства металлов/А. В. Соколов-, Москва-1961, -465с.

$$f_3(\lambda) = \sqrt{\frac{(1 - \varepsilon_1)^2 + \varepsilon_2^2}{1 - \varepsilon_1}} = \frac{\Omega}{2\pi} \lambda; \quad (3)$$

where ω is the circular frequency, Ω and γ are plasma and relaxation frequencies of electron subsystem respectively. The values ε_1 and ε_2 are the parts of the dielectric function namely $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$. Theoretically the dependence of the function f_1 on the square of circular frequency must be linear. Also the slope of this line must be equal to $\frac{1}{\Omega^2}$ and the intercept must be equal to $\frac{\gamma^2}{\Omega^2}$. Then it is possible to calculate numerically the plasma and relaxation frequencies. Because the values of ε_1 are known, the graphs of f_1 for the all samples were obtained and approximated by direct line and then the plasma and relaxation frequencies were found. In result the comparison of these frequencies with the table value for copper one can see that these values are almost coincided.

Conclusions

Due to our researches it was found that if the angle of light incidence increases the azimuth of the restored linear polarization stay as a constant, but the phase shift decreases linearly. The existence of graphene layer on the sample leads to some optical anisotropy in the own plane of such layer on the sample. The existence of graphene layer decreases the optical conductivity at low energies of the incident photons. The strong difference between the unheated and the heated (at 150°C) graphene-protected sample was not found in the visible.

References

1. KRAVETS, V. G., GRIGORENKO, A. N., NAIR, R. R., BLAKE, P., ANISSIMOVA, S., NOVOSELOV, K. S., GEIM, A. K. (2010) Spectroscopic ellipsometry of graphene and an exciton-shifted van Hove peak in absorption, *Physical review B* 81, p. 155413.
2. POPERENKO, L.V. et al. (2007) *The diagnostics of surface by the polarized light*. Kyiv: VPC: «Kyiv university».
3. POPERENKO, L.V. et al. (2013) *The optics of metal structures*. Kyiv: VPC: «Kyiv university».
4. SOKOLOV, A.V. (1961) *Optical properties of metals*. Moscow: SPH of Physical and Mathematical Literature.

Надійшла до редколегії 07.09.17

Підписано до друку _____. Формат _____. Друк. офс.
Папір офс. № _____. Друк. арк. _____. Тираж _____. Зам. _____.
Друкарня _____.