

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

ВИПУСК №2 2017

**Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
выпуск №2, 2017,**

Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Фізика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету комп'ютерних наук та кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1222 від 07.10.2016), та реферується в Реферативному журналі, Zentralblatt MATH та базах даних ВИНІТИ, Росія, Москва.

Редакційна колегія:

Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор**;
Хусаїнов Денис Яхєвич, д.ф.-м.н., проф., **заступник головного редактора, відповідальний за видання**;
Arturs Medvids, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;
Miklós Rontó, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;
Milada Bartlova, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;
Nickolai Kukhtarev, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;
Sergei Gorlatch, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;
Sergey Trofimchuk, Prof., Universidad de Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;
Stefan Hudak, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;
Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;
Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;
Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Буй Дмитро Борисович, д.ф.-м.н., проф.;
Булавін Леонід Анатолійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;
Гарашенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;
Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;
Жук Ярослав Олександрович, д.ф.-м.н., проф.;
Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., проф.;
Кириченко Володимир Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Козаченко Юрій Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;
Львов Віктор Анатолійович, д.ф.-м.н., проф.;
Макара Володимир Арсенійович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;
Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Погорілий Сергій Дем'янович, д.т.н., проф.;
Савенков Сергій Миколайович, д.ф.-м.н., доц.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.

Редакційний відділ:

Анісімова Тетяна Харитонівна, **відповідальний секретар**;
Безущак Оксана Омелянівна, bezusch@univ.kiev.ua;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
Хмелюк Надія Кузьмівна, khmeluk@univ.kiev.ua;
Сільвейструк Людмила Миколаївна, **технічний редактор**, slm-klm@ukr.net.

Адреса редакційної колегії:

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49
ISBN 978-966-2142
ISSN 1812-5409

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Скочко В.М. Ріст ініціальних оборотних автоматів з двома станами над бінарним алфавітом	9
---	---

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Петрова Т. О. Про поточкові інтерполяційні оцінки q -опуклого наближення функцій, що мають дробову похідну довільного дійсного порядку $\gamma > 4$	17
---	----

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

XXX Міжнародна конференція "Проблеми прийняття рішень в умовах невизначеності"	23
Берідзе З. Сучасний стан систем безпеки бездротових мереж, аналіз і методи розв'язання проблем	26
Боровик С.О. Побудова систем для знаходження алгоритмів з адаптаційними правилами	29
Вергунова І.М. Задача масопереносу з частково невідомими граничними значеннями концентрації	32
Верес К.О., Верес М.М., Демківський Є.О. Прогнозування хімічного синтезу	36
Власюк А.П., Жуковський В.В., Жуковська Н.А. Оптимізація комп'ютерних методів обчислень для задачі математичного моделювання вертикальної міграції радіонуклідів в каталітичному пористому середовищі	40
Горбачук В. М., Дунаєвський М. С., Морозов О. О. Рівноважні інвестиції у кібербезпеку мережі ланцюгів постачання	47
Горджеладзе І. Мобільні технології у викладанні іноземної мови	53
Джалладова І. Стохастична модель просторово-часової еволюції декількох популяцій	56
Дідманідзе І., Ахвледіані Н., Дідманідзе Д. Навчальний процес з використанням комп'ютерних технологій	60
Дідманідзе І., Кахіані Г., Думбадзе З. Питання моделювання одношарових нейронних мереж як питання оптимального управління	63
Дідманідзе І., Цицкішвілі Г., Кучава М. Задача оптимального завантаження морського транспорту та математичний розрахунок консолідації вантажів	67
Івохін Є.В., Аджубей Л.Т., Гавриленко О.В. Про деякі математичні моделі формалізації соціоінформаційних потоків	70
Івохін Є.В., Апанасенко Д.В. Про деякі моделі та методи розв'язування нечітких трьохіндексних транспортних задач	74
Івохін Є.В., Навродський В.О. Про одну оптимізаційну задачу розподілу часового ресурсу в умовах невизначеності	79
Кінаш А.В., Чабанюк Я.М., Хімка У.Т. Умови дисипативності для узагальненого процесу Орнштейна-Уленбека	82
Коваль В.В., Кальян Д.О., Худинцев М.М., Лисенко В.П., Самков О.В., Шкляревський І.Ю. Автоматизований моніторинг 24x7 синхроінформації сучасних цифрових мереж	88
Крак Ю.В., Бармак О.В., Касьянюк В.С., Вольчина І.І. Моделі узагальнених граматичних конструкцій для перекладу з української мови на жестову мову	95

Кудін Г.І., Зінько Т.П. Синтез кусково гіперплощинних кластерів в просторах векторів ознак	101
Мановицька Д.О. Алгоритм визначення суттєвості нечітких обмежень	108
Махорт А.П. Параметричний опис станів рівноваги економічної системи за наявності монополістів	111
Наконечний О., Марценюк В., Андрушак І., Сверстюк А. Задачі в системах підтримки прийняття рішень для системного аналізу інноваційних лікувальних методик	116
Наконечний О.Г., Зінько П.М., Шевчук Ю.М. Усередненні оптимальні прогнозні оцінки в моделях поширення інформації при невизначеностях	122
Пашко А.О. Аналіз точності моделювання дробового броунівського руху	128
Скачко Д.А., Тимашов О.О. Прийняття рішень на основі аналізу переміщень усередині просторових об'єктів з використанням сенсорних мереж	134
Тимашова Л.А., Скачко І.О. Оптимізація портфеля цінних паперів на фондовому ринку за допомогою нечіткого групового методу обробки даних	141
Турбал Ю.В., Бомба А.Я., Турбал М.Ю., Сьох А.П., Радовенюк О.В. Просторове узагальнення “пірамідального” методу екстраполяції даних	146
Усар І.Я., Макушенко І.А. Оптимальне керування вхідним потоком в системах з повторними викликами і чергою	152
Щербатий М.В. Аналіз чутливості для одновимірних квазілінійних рівнянь в частинних похідних	157

РАДІОФІЗИКА

Павлюк С.П., Григоруk В.І., Іщук Л.В., Телега В.М., Ковток В. Г., Вакуляк Є. О. Виникнення коливань напруги в “кремнієвій структурі з діелектричною ізоляцією” при дії потужного імпульсу струму	167
--	-----

СУЧАСНА ФІЗИКА

Мотолига О.В., Сенчуров С.П. Вимірювання товщини зрізу в цифровому томосинтезі та цифровій ламінографії	173
---	-----

CONTENTS

ALGEBRA, GEOMETRY AND PROBABILITY THEORY

Skochko V.M. Growth of initial invertible automata with two states over binary alphabet	9
---	---

DIFFERENTIAL EQUATIONS, MATHEMATICAL PHYSICS AND MECHANICS

Petrova T. O. Pointwise estimates for q -convex polynomial approximation of function with fractional derivatives of real order $r > 4$	17
--	----

COMPUTER SCIENCES AND INFORMATICS

XXX International Conference "Problems of Decision Making under Uncertainties"	23
Beridze Z. Current state of wireless network security systems, analysis of problems and solutions	26
Borovyk S.O. Building of system for finding algorithm with adaptation rules	29
Vergunova I.M. The problem of mass transfer with partially unknown limits values of concentration	32
Veres K.O., Veres M.M., Demkivskiy I.O. Chemical synthesis forecasting	36
Vlasyuk A.P., Zhukovskyy V.V., Zhukovska N.A. Optimization of computer methods for mathematical modeling of radionuclides vertical migration in catalytic porous media	40
Gorbachuk V.M., Dunaievskiy M.S., Morozov O.O. Equilibrium investments to cybersecurity of supply chain network	47
Gorjeladze I. Mobile technologies in foreign language teaching	53
Dzhalladova I. A stochastic spatial-temporal multiple species evolution model	56
Didmanidze I., Akhvlediani N., Didmanidze D. Training Process Using Computer Technologies	60
Didmanidze I., Kakhiani G., Dumbadze Z. The issue of single-layer neural networks modeling as a task of optimal management	63
Didmanidze I., Tsitskishvili G., Kutchava M. The task of optimal loading of maritime transport and mathematical calculation of cargo consolidation	67
Ivohin E.V., Adzhubey L.T., Gavrilenko O.V. About some mathematical models of the social information flows formalization	70
Ivokhin E.V., Apanasenko D.V. About some models and solving methods of fuzzy three-index transport problems	74
Ivokhin E.V., Navrodskiy V.A. About one optimization problem of the time resource under conditions of uncertainty	79
Kinash A.V., Chabaniuk Ya.M., Khimka U.T. The dissipativity conditions for the generalized Ornstein-Uhlenbeck process	82
Koval V.V., Kalian D.O., Khudyntsev M.M., Lysenko V.P., Samkov O.V., Shkliarevskiy I.J. Automated 24x7 monitoring of synchroinformation in modern digital networks	88
Krak Iu.V., Barmak O.V., Kasianiuk V.S., Volchyna I.I. Models of generalized grammar constructions for translation from Ukrainian to gesture language	95
Kudin G.I., Zinko T.P. A synthesis of piecewise hyperplane clusters in the spaces of vectors of signs	101

Manovytska D.O. Algorithm for determining the significance of fuzzy constraints	108
Makhort A.P. The parametric description of equilibrium states of an economy under presence of monopolies	111
Nakonechnyi O., Martsenyuk V., Andrushchak I., Sverstyuk A. Problems of decision support system for systematic analysis of innovative treatment methods	116
Nakonechnyi O.G., Zinko P.M., Shevchuk I.M. Averaged optimal predictive estimation of mathematical models of information spreading process under uncertainty	122
Pashko A.O. Analysis of accuracy of simulation of the fractional Brownian motion	128
Skachko D.A., Tymashov O.O. Decision-making based on the analysis of displacements within spatial objects using sensory networks	134
Timashova L.A., Skachko I.O. Solving securities portfolio optimization problem in the stock market with the help of the fuzzy group method of data handling	141
Turbal Y.V., Bomba A.Ya., Turbal M.Y., Sokh A.P., Radoveniuk O.V. Spatial generalization of "pyramidal" data extrapolation method	146
Usar I.Ya., Makushenko I.A. Optimal control of input flow in retrieval systems with queue	152
Shcherbatyy M.V. Sensitivity analysis for one-dimensional semilinear partial differential equations	157

RADIOPHYSICS

Pavlyuk S.P., Grygoruk V.I., Ischuk L.V., Telega V.M., Kovtok V.G., Vakylyak Ye.O. Emergence of voltage oscillations in "silicon structure with dielectric insulation" under the powerful current pulse	167
---	-----

MODERN PHYSICS

Motolyha O.V., Senchurov S.P. Measurement of slice thickness in digital Tomosynthesis and digital laminography	173
--	-----

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ ТА ТЕОРИЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 519.713.2

В.М. Скочко

Ріст ініціальних оборотних автоматів з двома станами над бінарним алфавітом

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володи-
мирська, 64.
e-mail: vovaskochko@gmail.com

V.M. Skochko

Growth of initial invertible automata with two states over binary alphabet

Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.
e-mail: vovaskochko@gmail.com

Обчислено функції росту для усіх ініціальних оборотних автоматів з двома станами над бінарним алфавітом. Як наслідок показано, що автомат нескінченного порядку з цього класу має раціональну (алгебраїчну) функцію росту тоді і лише тоді, коли множина його станів породжує групу блимаючих лампочок, яка є вінцевим добутком циклічної групи порядку 2 та групи цілих чисел.

Ключові слова: ініціальний автомат, функція росту.

Automata were introduced in the middle of the 20th century to investigate the properties of different computational schemes. They appeared as a part of applied mathematics but now automata are widely used in such abstract areas as group theory and dynamical systems. In particular, automata were used to solve the Milnor problem on group growth.

An initial automaton is a model which allows us to realize certain transformations of a set of words over some finite alphabet. The growth function of such an automaton counts the minimal number of states in the automata that implement different powers of corresponding action on the given set of words. In this article we consider the initial invertible automata with two states that act on the set of binary words. We compute the growth function for each automaton from this automata class. As a corollary we prove that the only infinite order automata in this class with rational (algebraic) growth function are the lamplighter automata.

Keywords: initial automaton, growth function.

Communicated by Prof. Kirichenko V. V.

1 Introduction

Modern computers translate any type of information to the binary sequences to store and process it. Operations on such a binary presentation of data are implemented by different types of abstract automata. If a given function over the data can be realized by an automaton then this realization is not unique. It is natural to find the automaton with the minimal number of states which realizes a given function.

One of the simplest type of automata are initial Mealy automata that implement certain functions on the space X^* of words over an alphabet X . The composition of such functions is realized by the consecutive connection of the corresponding Mealy automata. Moreover, if we define the n -th iteration of an automaton as a composition with itself n times then we may introduce the growth function $\gamma(n)$ which counts the number of states in n -th iteration. In other words, it calculates the

minimal number of states that could be used to implement the corresponding iteration of function given by the automaton.

The set of all initial invertible automata over a fixed alphabet forms a group with respect to the automata composition called the group of finite automata. Every finite invertible automaton A generate a finitely generated subgroup of this group: one can take an initial automaton A_s for each state s of A and generate a subgroup. There were many investigations during the last three decades in order to understand which groups can be generated by finite automata. The full list of groups generated by two-state automata over a two-letter alphabet is given in [6]. In particular, it was proved that the lamplighter group $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}$ is generated by such an automaton. Also groups generated by three-state automata over a two-letter alphabet were deeply investigated in [3].

The growth function of non-initial automaton

has the same type as the growth function of generated group. This connection allows one to construct examples of groups and automata with intermediate growth functions between polynomial and exponential. The first such an example was constructed by Grigorchuk in [5] and provided an answer to the question of Milnor on group growth. Interesting growth functions of non-initial automata were computed Bartholdi and Reznikov in [1] and [2]. The growth function of the generalized adding machine is computed in [7].

In this paper we compute the growth functions of initial invertible Mealy automata with two states over a binary alphabet. Note that we call a function $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ rational (algebraic) if the corresponding generating function of the sequence $\{f(n)\}_{n=0}^{\infty}$ is rational (algebraic). Our main result can be formulated as follows.

Theorem 1. *Let $\mathcal{A}_{(2,2)}$ be the set of invertible initial two-state automata over a two-letter alphabet and $\gamma_s(n)$ be the growth function of an automaton s . Then:*

- 1) *If an automaton $s \in \mathcal{A}_{(2,2)}$ has finite order then it has rational growth function. In this case $\gamma_s(n) = 1$ or $\gamma_s(n) = 1 + (n \bmod 2)$.*
- 2) *The only initial automata from $\mathcal{A}_{(2,2)}$ that have both infinite order and rational growth function are the lamplighter automata, which have growth function $\gamma_s(n) = 2^n$.*
- 3) *Any other automaton $s \in \mathcal{A}_{(2,2)}$ has non-algebraic growth function. More precisely, the following inequalities hold:*

$$2[\log_2 n] - p - 1 \leq \gamma_s(n) \leq 2[\log_2 n] - p + 2,$$

where $n = 2^p m$ with odd m .

The precise values of the growth functions $\gamma_s(n)$ for every $s \in \mathcal{A}_{(2,2)}$ are given in the proof.

The growth function in item 3) is non-algebraic, because it is bounded by two logarithmic functions $\log_2(x) - 2$ and $\log_2(x) + 3$, while the coefficients of an algebraic function cannot have logarithmic behavior (see Theorem 8.2 in [4]).

2 Automata and their growth functions

Let X be a finite set of elements $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $n \geq 2$. We call this set the alphabet. Also let us denote by X^* the set of words over X including the empty word.

Definition 2.1. An *automaton* A is a triple (X, S, λ) , where S is the set of states, and

$$\lambda : S \times X \rightarrow X \times S$$

is the output-transition map.

Definition 2.2. An automaton A is called *finite* if its set of states is finite.

Definition 2.3. An automaton $A = (X, S, \lambda)$ is *invertible* if for every its state $s \in S$ the restricted map $\lambda_s = \lambda(s, \cdot)|_X$ acts on X as some permutation $\pi_s \in \text{Sym}(X)$.

In this article we consider only finite invertible automata. Note that every state s of such an automaton can be defined using the following wreath recursion notation:

$$s = (s_1, s_2, \dots, s_n)\pi_s,$$

where $s_i = \lambda(x_i, s)|_S$.

Definition 2.4. An *initial automaton* A_s is an automaton $A = (X, S, \lambda)$ with a fixed initial state $s \in S$. We will use notation s for initial automaton A_s for better readability.

Each initial automaton s acts on the set of words over X . This action is constructed as follows. We pass the first letter y_1 of an input word to the initial automaton s . As the output we get a pair $\lambda(s, y_1) = (y'_1, s')$ where y'_1 is the output letter and s' is the next state. On the next step, we pass the second letter y_2 to the state s' and so on. Repeating of this procedure gives us an output word $y'_1 y'_2 \dots$.

Since different automata can produce the same action on X^* , we must consider the notion of *minimal* automata.

Definition 2.5. An initial automaton s is called *minimal* if it has a minimal number of states among the automata that act on X^* as s .

Now let we have two initial invertible automata s_1 and s_2 over the same alphabet X . We can consider their composition $s_1 \cdot s_2$ as the minimal automaton which acts on each word $\omega \in X^*$ by the rule $s_1 \cdot s_2(\omega) = s_1(s_2(\omega))$.

Definition 2.6. The *growth function* of an initial automaton s is the function

$$\gamma_s(n) = \#States(s^n).$$

Definition 2.7. An initial automaton s has *finite order* if s^n acts trivially on X^* for some $n \in \mathbb{N}$.

Definition 2.8. Let A be an invertible non-initial automaton. The group generated by the transformations A_s for all states s of A is called the *automaton group* of A or *group generated by the automaton* A .

Definition 2.9. The automata given by recursions $b = (a, b)$, $a = (b, a)\sigma$ and $b = (a, b)$, $a = (a, b)\sigma$ are called the lamplighter automata.

These automata get their name because they generate the lamplighter group $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}$ (see [6]).

3 Proof of Theorem 1

Every automaton with two states a and b over the binary alphabet $X = \{0, 1\}$ can be written in terms of wreath recursions as

$$a = (q_{11}, q_{12})\pi_a \text{ and } b = (q_{21}, q_{22})\pi_b,$$

where $q_{ij} \in \{a, b\}$ and $\pi_a, \pi_b \in \text{Sym}(X) = \{(), \sigma = (01)\}$. If $\pi_a = \pi_b = ()$, then $\gamma_a(n) = \gamma_b(n) = 1$. If $\pi_a = \pi_b = \sigma$, then $\gamma_a(n) = \gamma_b(n) = 1 + (n \bmod 2)$. Further, without loss of generality, we suppose that $\pi_a = \sigma$ and $\pi_b = ()$.

Proof of Item 1. We list the automata such that a and b have finite order:

- $b = (b, b)$, $a = (a, a)\sigma$ (generates C_2);
- $b = (b, b)$, $a = (b, b)\sigma$ (generates C_2);
- $b = (a, a)$, $a = (a, a)\sigma$ (generates $C_2 \times C_2$);
- $b = (a, a)$, $a = (b, b)\sigma$ (generates $C_2 \times C_2$);
- $b = (a, b)$, $a = (a, a)\sigma$ (generates D_∞);
- $b = (a, b)$, $a = (b, b)\sigma$ (generates D_∞).

For these cases we can directly get that $\gamma_s(n) = 1$ or $\gamma_s(n) = 1 + (n \bmod 2)$. $\square$

Remark 1. The two states of every automaton representation of the dihedral group D_∞ listed above have order two and they have rational growth function. However, the product of these two states has infinite order and its growth function is of logarithmic type thus it is not algebraic.

Now let us consider the lamplighter automata.

Proof of Item 2. There are two automata in our family that generate the group $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}$:

- $b = (a, b)$, $a = (b, a)\sigma$;
- $b = (a, b)$, $a = (a, b)\sigma$.

The states of the second automaton are inverse to the states of the first automaton. That is why the corresponding growth functions are equal. So we can consider only the automaton $b = (a, b)$, $a = (b, a)\sigma$. We claim that each of the automata a^n and b^n consists of 2^n states which correspond to all words of length n over $\{a, b\}$. This follows from two well known facts about the action of a and b (see [3]). First, the semigroup generated by a and b is free; therefore, all words of length n over $\{a, b\}$ represent different initial automata. Second, the so-called dual automaton is isomorphic to the lamplighter automaton and acts transitively on all words of length n over $\{a, b\}$. Therefore, the automata a^n and b^n contain a state for every word of length n over $\{a, b\}$. Hence $\gamma_a(n) = \gamma_b(n) = 2^n$. $\square$

Proof of Item 3. The other automata, according to the classification from [6], generate the group $\mathbb{Z}$. There are two such automata. The first one is the so-called adding machine $b = (b, b)$, $a = (b, a)\sigma$. Its growth function was computed in [7]:

$$\gamma_b(n) = 1 \text{ for all } n \in \mathbb{N} \text{ and}$$

$$\gamma_a(n) = \begin{cases} 2m - p + 2, & \text{if } \varepsilon_{m-1} = 1 \text{ or } p = m; \\ 2m - p + 1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

where $n = \varepsilon_0 + 2\varepsilon_1 + \dots + 2^m\varepsilon_m$ is the expansion of n in base 2, $m = \lfloor \log_2 n \rfloor$ and p is the first non-zero position.

The second automaton is defined by recursions $b = (a, a)$, $a = (a, b)\sigma$. It is easy to check that $\gamma_a(1) = \gamma_b(1) = 2$ and for any $n > 2$ we have $\gamma_b(n) = \gamma_a(n) + 1$. That is why it is enough to consider only the growth function of a .

Let us notice that $ab = ba$ and $a^2b = 1$. It means that $b = a^{-2}$ and $a = (a, a^{-2})\sigma$. As a has infinite order we have that any two different powers of a define different actions on X^* .

It is easy to check the following formula for the state a^n :

$$a^n = \begin{cases} (a^{-\frac{n}{2}}, a^{-\frac{n}{2}}), & n = 0 \bmod 2; \\ (a^{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}, a^{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2})\sigma, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

which implies $\gamma_a(2^k n) = k + \gamma_a(n)$ for $n > 1$ and $\gamma_a(2^k) = k + 1$. Therefore, it is enough to consider only odd values of n . Let $t_1 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2$. Then

$$a^n = (a^{t_1+3}, a^{t_1})\sigma.$$

To construct the set A of all states of the given finite state automaton we can consider the following procedure. First of all we add this automaton to the set A . Using the corresponding wreath recursion we add all coordinates to the set A . On the next step we consider only new elements that appeared in A during the previous step. We add to A all their coordinates. We can repeat this procedure again and again. As the given automaton is finite state then on some step there will be no new elements in A from the previous step. This means that A is constructed.

Let us use the procedure from above to find all the states of an automaton a^n , where n is a big enough odd number. First of all we add the state a^n and on the first step we also add states a^{t_1+3} and a^{t_1} with

$$t_1 = -\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2.$$

On the first step both states are new because of proposition that n is big enough number. It is easy to check that for any parity of t_1 we will get on the next step exactly 2 new elements a^{t_2} and a^{t_2+3} for some integer number t_2 . Note, that every next step gives us only 2 new states a^{t_k} and a^{t_k+3} for some t_k . Moreover, the following inequality holds:

$$|t_1| > |t_2| > \dots > |t_k|,$$

until we get the first value of $|t_k|$ or $|t_k + 3|$ that is less than 20.

So the idea is to calculate how many steps we made until we get a value t_l such that $|t_l| \leq 20$. In addition we must calculate all other states of a^n that can be obtained from the states a^{t_l} and a^{t_l+3} . Based on this we get that the growth function satisfies the following equality

$$\gamma_a(n) = 2l + 1 + \delta(t_l)$$

where $\delta(t_l)$ counts the number of powers in the union of states a^{t_l}, a^{t_l+3} except themselves.

The table 1 gives us the full list of all possible disjoint cases that cover all the odd values of $n > 20$. In other words, we describe such a set of pairs $x, x + 3$ (x is an integer number) that for any such a number n there is exactly one step of

the algorithm which gives us a pair from this set. Notice that we must take into account that sign of t_k is changed from step to step. Nevertheless, it is enough to consider only absolute values of t_k .

Using the algorithm for each a^n we will reach only one of the listed pairs $t_l, t_l + 3$. So it is enough to define what numbers can give us a pair t and $t + 3$ on some. To describe such numbers we may consider only absolute value of t . We can construct the inverse transformations of powers from the wreath recursion :

$$x \mapsto 2x,$$

$$x \mapsto 2x + 3, x \mapsto 2x - 3.$$

Moreover, as we consider only odd numbers n then it is enough to use only maps $x \mapsto 2x + 3$ and $x \mapsto 2x - 3$. So on the first level we can construct only one such a number $n = 2t + 3$ and then we can use both maps. As a result all numbers can be represented as follows:

$$\begin{aligned} n &= 2(2(2(\dots 2(2t + 3) \pm 3) \dots \pm 3) \pm 3) \pm 3 = \\ &= 2^s t + 3(2^{s-1} \pm 2^{s-2} \pm \dots \pm 1). \end{aligned}$$

This can be rewritten as $n = 2^s t + 3x$, where $x \in \{1, 3, 5, \dots, 2^s - 1\}$, $s \geq 1$. Also using this formula we can compute the number of steps

$$l = \lfloor \log_2 \frac{n}{t+3} \rfloor + 1.$$

Now we can introduce a boolean function $\psi(n, t)$ which equals to 1 if and only if there exist two numbers s and $x \in \{1, 3, 5, \dots, 2^s - 1\}$ such that $n = 2^s t + 3x$. Then the growth function is

$$\gamma_a(n) = 2\lfloor \log_2 n \rfloor + \sum_{8 \leq t \leq 17, t \neq 16} \psi(n, t) f(n, t), \quad (1)$$

where $f(n, t) = 2[\{\log_2 n\} - \log_2(t + 3)] + \delta(t) + 3$.

Further we simplify this expression. We need the following simple observation.

Lemma 1. *Let $\alpha \in (1, 2)$ and $n \in \mathbb{N}$. Then $\{\log_2 n\} \geq \log_2 \alpha$ if and only if $\frac{n}{2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}} \in [\alpha; 2)$.*

Proof. $\{\log_2 n\} = \log_2 \alpha$ if and only if the difference $\log_2 n - \lfloor \log_2 n \rfloor$ is equal to $\log_2 \alpha$.

Based on this we have

$$\log_2 n = \log_2 \alpha + \lfloor \log_2 n \rfloor \implies n = 2^{\log_2 \alpha + \lfloor \log_2 n \rfloor},$$

$$\frac{n}{2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}} = 2^{\log_2 \alpha} = \alpha.$$

This means that $\log_2 n \geq \log_2 \alpha$ if and only if $\frac{n}{2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}} \in [\alpha; 2)$. $\square$

t_l	$t_l + 3$	Powers	Powers for $-t_l - 3, -t_l$	$\delta(t_l)$
8	11	$\{-4, -7, 2, 5, -1\}$	$\{4, 7, -2, -5, 1\}$	5
9	12	$\{-3, -6, 3, 0\}$	$\{3, 6, -3, 0\}$	4
10	13	$\{-5, -8, 1, 4, -2\}$	$\{5, 8, -1, -4, 2\}$	5
11	14	$\{-4, -7, 2, 5, -1\}$	$\{4, 7, -2, -5, 1\}$	5
12	15	$\{-6, -9, 3, 6, -3, 0\}$	$\{6, 9, -3, -6, 3, 0\}$	6
13	16	$\{-5, -8, 1, 4, -2\}$	$\{5, 8, -1, -4, 2\}$	5
14	17	$\{-7, -10, 2, 5, -1, -4\}$	$\{7, 10, -2, -5, 1, 4\}$	6
15	18	$\{-6, -9, 3, 6, -3, 0\}$	$\{6, 9, -3, -6, 3, 0\}$	6
17	20	$\{-7, -10, 2, 5, -1, -4\}$	$\{7, 10, -2, -5, 1, 4\}$	6

Table 1: Some values of the function $\delta(t)$

Since only one summand in (1) is nonzero, we consider each possibility for t separately to hold the condition $\psi(n, t) = 1$.

1) If $t = 9$ then

$$f(n, t) = 2[\{\log_2 n\} - \log_2 1.5] + 1.$$

On the other hand $n = 9 \cdot 2^s + 3x = 2^{s+3} + 2^s + 3x$, $x \in \{1, 3, \dots, 2^s - 1\}$, $s \geq 1$. From Lemma 1 for $\alpha = 1.5$ we get that $\{\log_2 n\} < \log_2 1.5$. Therefore

$$\gamma_a(n) = 2[\log_2 n] - 1.$$

2) For $t \in \{12, 14, 15, 17\}$ we have $\delta(t) = 6$. Therefore

$$\begin{aligned} f(n, t) &= 2([\{\log_2 n\} - \log_2(t+3)] + 4) + 1 = \\ &= 2[\{\log_2 n\} + \log_2 \frac{16}{t+3}] + 1. \end{aligned}$$

a) For $t \in \{14, 15, 17\}$ we have $\log_2 \frac{16}{t+3} < 0$ and therefore

$$\begin{aligned} \gamma_a(n) &= 2[\log_2 n] + 2[\{\log_2 n\} - \log_2 \frac{t+3}{16}] + 1 = \\ &= \begin{cases} 2[\log_2 n] + 1, & \{\log_2 n\} \geq \log_2 \frac{t+3}{16}, \\ 2[\log_2 n] - 1, & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

b) For $t = 12$ we have

$$\gamma_a(n) = 2[\log_2 n] + 2[\{\log_2 n\} + \log_2 \frac{16}{15}] + 1.$$

By construction we have

$$n = 12 \cdot 2^s + 3x = 2^{s+3} + 2^{s+2} + 3x$$

for some $s \geq 1$ and $x \in \{1, 3, \dots, 2^s - 1\}$. Therefore $[\log_2 n] = s + 3$ and we get

$$\begin{aligned} \frac{n}{2^{[\log_2 n]}} &= \frac{n}{2^{s+3}} = \frac{2^{s+3} + 2^{s+2} + 3x}{2^{s+3}} = \\ &= 1.5 + \frac{3x}{2^{s+3}} < 1.5 + \frac{3 \cdot 2^s}{2^{s+3}} = \frac{15}{8}. \end{aligned}$$

Then $\{\log_2 n\} < \log_2 \frac{15}{8}$ by Lemma 1 and we get that $\gamma_a(n) = 2[\log_2 n] + 1$.

3) For $t \in \{8, 10, 11, 13\}$ we have the following equality:

$$\begin{aligned} f(n, t) &= 2([\{\log_2 n\} - \log_2(t+3)] + 4) = \\ &= 2[\{\log_2 n\} + \log_2 \frac{16}{t+3}]. \end{aligned}$$

a) If $t = 13$ then $\log_2 \frac{16}{t+3} = 0$ and we get that $\gamma_a(n) = 2[\log_2 n]$.

b) If $t \in \{8, 10, 11\}$ then we can repeat the same steps that was used for $t = 12$. As a result for these cases $\{\log_2 n\} < \log_2 \frac{t+3}{8}$ and $\gamma_a(n) = 2[\log_2 n]$.

The final result for any odd number $n > 20$ is defined by the formula $\gamma_a(n) = 2[\log_2 n] + \delta(n)$,

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{if } \psi(n, 12) = 1, \\ -1, & \text{if } \psi(n, 9) = 1, \\ 1, & \text{if } \psi(n, t) = 1, t \in \{14, 15, 17\} \\ & \text{and } \{\log_2 n\} \geq \log_2 \frac{t+3}{16}, \\ -1, & \text{if } \psi(n, t) = 1, t \in \{14, 15, 17\} \\ & \text{and } \{\log_2 n\} < \log_2 \frac{t+3}{16}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

where $\psi(n, t)$ is a boolean function which equals to 1 if and only if there are exist numbers s and $x \in \{1, 3, 5, \dots, 2^s - 1\}$ such that $n = 2^s t + 3x$.

It is easy to see that the statement of *Item 3* holds for both a and b . Moreover, this proof gives us a possibility to construct any iteration of the automata directly without calculation of automata composition. □

Remark 2. We can use the similar procedure as was used in the proof to calculate the growth function of any automaton a which is defined by the following wreath recursion

$$a = (a^s, a^{1-s})\sigma, s \in \mathbb{Z}.$$

Note, that in this case the adding machine corresponds to $s = 0$.

Список використаних джерел

1. *Bartholdi L.* The smallest Mealy automaton of intermediate growth / L. Bartholdi, I.I. Reznikov, V.I. Sushchansky // J. Algebra. – 2006 – №2, **295** – pp. 387–414.
2. *Bartholdi L.* A Mealy machine with polynomial growth of irrational degree / L. Bartholdi, I.I. Reznikov // Internat. J. Algebra Comput. – 2008 – №1, **18** – pp. 59–82.
3. *Bondarenko I.* On classification of groups generated by 3-state automata over a 2-letter alphabet / I. Bondarenko, R. Grigorchuk, R. Kravchenko, Y. Muntyan, V. Nekrashevych, D. Savchuk, Z. Sunik // Algebra and Discrete Mathematics – 2008 – №1 – pp. 1–163.
4. *Flajolet Ph.* Analytic combinatorics / Ph. Flajolet, R. Sedgewick // Cambridge University Press – 2009.
5. *Grigorchuk R.I.* On the Milnor problem of group growth / R.I. Grigorchuk // Dokl. Akad. Nauk SSSR – 1983 – №1, **271** – pp. 30–33.
6. *Grigorchuk R. I.* Automata, dynamical systems and groups / R.I. Grigorchuk, V.V. Nekrashevych, V.I. Sushchansky // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics – 2000 – **231** – pp. 128–203.
7. *Skochko V.* The growth function of the adding machine / V. Skochko // accepted for publishing in Algebra and Discrete Mathematics – 2018.

References

1. BARTHOLDI, L., REZNYKOV, I.I. and SUSHCHANSKY V.I., (2006) "The smallest Mealy automaton of intermediate growth", J. Algebra, №2, **295**, pp. 387–414.
2. BARTHOLDI, L. and REZNYKOV, I.I. (2008) "A Mealy machine with polynomial growth of irrational degree", Internat. J. Algebra Comput., №1, **18**, pp. 59–82.
3. BONDARENKO, I., GRIGORCHUK, R., KRAVCHENKO, R., MUNTYAN, Y., NEKRASHEVYCH, V., SAVCHUK, D. and SUNIK Z. (2008) "On classification of groups generated by 3-state automata over a 2-letter alphabet", Algebra and Discrete Mathematics, №1, pp. 1–163.
4. FLAJOLET, Ph. and SEDGEWICK, R. (2009) "Analytic combinatorics", Cambridge University Press.
5. GRIGORCHUK, R. I. (1983) "On the Milnor problem of group growth", Dokl. Akad. Nauk SSSR, №1, **271**, pp. 30–33.
6. GRIGORCHUK, R.I., NEKRASHEVYCH, V.V. and SUSHCHANSKY, V.I. (2000) "Automata, dynamical systems and groups", Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **231**, pp. 128–203.
7. SKOCHKO V. (2018) "The growth function of the adding machine", accepted for publishing in Algebra and Discrete Mathematics.

Received: 11.08.2017

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ,
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА
ТА МЕХАНІКА**

УДК 519.9

Петрова Т. О.¹, к.ф.-м.н., доц.

T. O. Petrova¹, PhD (Phys.-Math.), As. Prof.

**Про поточкові інтерполяційні оцінки
q-опуклого наближення функцій, що
мають дробову похідну довільного
дійсного порядку $r > 4$**

**Pointwise estimates for q-convex polynomial
approximation of function with fractional
derivatives of real order $r > 4$**

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4е,
e-mail: tamarapetrova2703@gmail.com

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e
e-mail: tamarapetrova2703@gmail.com

Досліджується питання наближення функцій $f \in W^r \bigcap \Delta^3, r > 4$ алгебраїчними поліномами $p_n \in \Pi_n \bigcap \Delta^3$. Побудовано контрприклад, який показує, що для $f \in W^r \bigcap \Delta^3, r > 4$ оцінка $|f(x) - p_n(x)| \leq c \frac{1}{n^2} (\sqrt{x(1-x)})^r, x \in [0, 1]$ є невірною.

Ключові слова: наближення функції, простір Соболева, алгебраїчний поліном, монотонна функція, q-опукла функція.

We discuss whether or not it is possible to have interpolatory estimates in the approximation of a function $f \in W^r[0, 1]$ by polynomials. The problem of positive approximation is to estimate the pointwise degree of approximation of a function $f \in C^r[0, 1] \cap \Delta^0$ where Δ^0 is the set of positive functions on $[0, 1]$. Estimates of the form (1) for positive approximation are known ([1], [2]). The problem of monotone approximation is that of estimating the degree of approximation of a monotone nondecreasing function by monotone nondecreasing polynomials. Estimates of the form (1) for monotone approximation were proved in [3], [4], [8]. In [3], [4] is consider $r \in \mathbb{N}, r > 2$. In [8] is consider $r \in \mathbb{R}, r > 2$. It was proved that for monotone approximation estimates of the form (1) are fails for $r > 2, r \in \mathbb{R}$. The problem of convex approximation is that of estimating the degree of approximation of a convex function by convex polynomials. The problem of convex approximation is that of estimating the degree of approximation of a convex function by convex polynomials. The problem of convex approximation is consider in ([5], [6]). In [5] is consider $r \in \mathbb{N}, r > 2$. In [6] is consider $r \in \mathbb{R}, r > 2$. It was proved that for convex approximation estimates of the form (1) are fails for $r > 2, r \in \mathbb{R}$. In this paper the question of approximation of function $f \in W^r \bigcap \Delta^3, r > 4$ by algebraic polynomial $p_n \in \Pi_n \bigcap \Delta^3$ is consider. It is proved, that for $f \in W^r \bigcap \Delta^3, r > 4$, estimate (1) is not true, generally speaking.

Key Words: approximation of function, Sobolev space, algebraic polynomial, monotone function, q-convex function

Статтю представив доктор фізико-математичних наук, професор, академік НАН України Перестюк М.О.

1. Вступ

Нехай $W^r, r \in \mathbb{N}$ клас функцій $f \in C[0, 1]$, таких, що мають абсолютно неперервну $(r-1)$ похідну і

$|f^{(r)}(x)| \leq 1$ майже скрізь на $[0, 1]$. Теляковський [1] для $r=1$ та Гопенгауз для $r \in \mathbb{N}$ [2] посилили пряму теорему Нікольського – Тіммана довівши, що кожну функцію $f \in W^r$ можна наблизити

алгебраїчним многочленом p_n степеня $< n$ так,
що

$$|f(x) - p_n(x)| \leq c(r) \left(\frac{\sqrt{x(1-x)}}{n} \right)^r, n > r \quad (1)$$

де c - абсолютна стала.

DeVore та Yu [3] довели, що при $r=1,2$ оцінка (1) справедлива і при наближенні монотонної функції монотонним многочленом. А саме, якщо монотонна функція $f \in W^r$, то існує монотонний многочлен p_n , такий, що має місце (1).

В роботі GLSW [4] доведено, що для натурального $r > 2$ оцінка (1), взагалі кажучи, невірна.

Для опуклого наближення при $r > 2, r \in \mathbb{N}$ доведено [5], що оцінка (1) також є невірною.

Для $r \in \mathbb{Q}$ введемо клас функцій $W^r[0,1]$, таких, що $D_{0+}^{r-1}f$ абсолютно неперервна і $|D_{0+}^r f| \leq 1$

майже скрізь на $[0,1]$ (тут $D_{0+}^{r-1}f$ - лівостороння дробова похідна [7]). Будемо позначати через Π_n - множину всіх алгебраїчних поліномів степеня $\leq n$ і через Δ^3 множину функцій, які мають опуклу вгору першу похідну на $[0,1]$. В роботі [9] було доведено, що при $r > 2, r \in \mathbb{N}$ оцінка (1) є невірною для класу функцій $W^r \cap \Delta^3$.

Основним результатом роботи є теорема, яка узагальнює результат роботи [9] на класи $W^r[0,1] \cap \Delta^3$ з $r > 4, r \in \mathbb{R}$.

Теорема. Нехай $r > 4$. Тоді для кожного n існує функція $F = F_{r,n} \in W^r[0,1] \cap \Delta^3$ така, що для кожного полінома $p_n \in \Pi_n \cap \Delta^3$

$$\text{або } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|F(x) - p_n(x)|}{\varphi^r(x)} = +\infty \quad (2)$$

$$\text{або } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|F(x) - p_n(x)|}{\varphi^r(x)} = +\infty \quad (3)$$

Доведення.

Позначимо $m = [r] + 1, r > 4$, де $[r]$ - ціла частина r .

Покладемо:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{b^{m+2}}{(m+2)!}x - \frac{(b-x)^{m+3}}{2(m+3)!} + \frac{b^{m+3}}{2(m+3)!}, 0 \leq x \leq b \\ -\frac{b^{m+2}}{(m+2)!}x + \frac{b^{m+3}}{2(m+3)!}, b < x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{де } b = \frac{1}{16n^4}.$$

Розглянемо функцію $F(x) = x^{m-1}f(x), x \in [0,1]$.

Доведемо, що $F \in W^r[0,1]$. За *Теоремою 2.3* [7]

маємо

$$D_{0+}^r F(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{F^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-r)} x^{k-r} + \frac{1}{\Gamma(m-r)} \int_0^x \frac{F^{(m)}(t)}{(x-t)^{r-m+1}} dt$$

Так як $F^{(k)}(0) = 0 \forall k = 0, \dots, m-1$, то

$$D_{0+}^r F(x) = \frac{1}{\Gamma(m-r)} \int_0^x \frac{\sum_{k=0}^{m-1} C_m^k(m-1)(m-2)\dots(m-k)t^{m-1-k}f^{(m-k)}(t)}{(x-t)^{r-m+1}} dt$$

Таким чином, якщо $x \neq b$, то

$$D_{0+}^r F(x) = \frac{1}{\Gamma(m-r)} \int_0^x \frac{\sum_{k=0}^{m-1} C_m^k(m-1)\dots(m-k)t^{m-1-k}(-1)^{m-k+1} \frac{(b-t)^{k+3}}{(k+3)!}}{(x-t)^{r-m+1}} dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m-r)} \sum_{k=0}^{m-1} C_m^k(m-1)\dots(m-k) \int_0^x \frac{(-1)^{m-k+1} t^{m-1-k} (b-t)^{k+3}}{(k+3)!(x-t)^{r-m+1}} dt$$

Тоді

$$|D_{0+}^r F(x)| \leq \frac{1}{\Gamma(m-r)} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{C_m^k(m-1)\dots(m-k)}{(k+3)!} \cdot \int_0^x \frac{dt}{(x-t)^{r-m+1}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m-r)} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{C_m^k(m-1)\dots(m-k)}{(k+3)!} \frac{x^{m-r}}{m-r} \leq$$

$$\leq \frac{x^{m-r}}{\Gamma(m-r)} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{C_m^k(m-1)\dots(m-k)}{(k+3)!} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(m-r)} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{C_m^k(m-1)\dots(m-k)}{(k+3)!}$$

Помітимо, що $D_{0+}^r(b+) = 0$ і

$$D_{0+}^r(b-) \leq \frac{1}{\Gamma(m-r)} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{C_m^k (m-1) \dots (m-k)}{(k+3)!}. \text{ Таким}$$

чином, $D_{0+}^r F(x)$ існує майже скрізь на $[0,1]$ і обмежена. Очевидно,

$$\text{що } D_{0+}^{r-1} F(x) = \frac{1}{\Gamma(m-r+1)} \int_0^x \frac{F^{(m-1)}(t)}{(x-t)^{r-m}} dt \in$$

абсолютно неперервною на $[0,1]$. Таким чином, $F \in W^r[0,1]$.

Доведемо, що $F \in \Delta^3$, тобто $\forall x \in [0,1] F'''(x) \leq 0$.

Нехай $x \in [0,b]$.

Тоді

$$\begin{aligned} F'''(x) &= x^{m-1} f'''(x) + 3(m-1)x^{m-2} f''(x) + \\ &+ 3(m-1)(m-2)x^{m-3} f'(x) + \\ &+ (m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4} f(x) \\ F'''(x) \leq 0 &\Leftrightarrow x^3 f'''(x) + 3(m-1)x^2 f''(x) + \\ &+ 3(m-1)(m-2)xf'(x) + \\ &+ (m-1)(m-2)(m-3)f(x) \leq 0. \end{aligned}$$

Нехай

$$\begin{aligned} G(x) &= x^3 f'''(x) + 3(m-1)x^2 f''(x) + \\ &+ 3(m-1)(m-2)xf'(x) + \\ &+ (m-1)(m-2)(m-3)f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G'(x) &= -\frac{(b-x)^{m-1}}{(m-1)!(m+1)} x(x^2(7m+1) - \\ &- 3b(2m-1)x + 3b^2(m-1)) + m(m-1)(m-2)f'(x). \end{aligned}$$

Легко бачити, що

$$x^2(7m+1) - 3b(2m-1)x + 3b^2(m-1) > 0, \forall x \in [0,b]$$

і $m \geq 5$. Тоді

$$\begin{aligned} -\frac{(b-x)^{m-1}}{(m-1)!(m+1)} x(x^2(7m+1) - 3b(2m-1)x + \\ + 3b^2(m-1)) \leq 0, \forall x \in [0,b]. \end{aligned}$$

Таким чином $G'(x) \leq 0$ при $x \in [0,b]$. Тоді функція $G(x)$ спадає на $x \in [0,b]$ і так як $G(0) = 0$, то $G(x) \leq 0$ при $x \in [0,b]$. Звідси випливає, що $F'''(x) \leq 0$ при $x \in [0,b]$. Якщо $x \in (b,1]$,

то

$$\begin{aligned} F'''(x) &= -3(m-1)(m-2)x^{m-3} f'(x) + \\ &+ (m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4} f(x) = \\ &= 3(m-1)(m-2)x^{m-3} \left(-\frac{b^{m+2}}{(m+2)!} \right) + \\ &+ (m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4} \left(-\frac{b^{m+2}}{(m+2)!} x + \frac{b^{m+3}}{2(m+3)!} \right) = \\ &= -x^{m-4}(m-1)(m-2) \frac{b^{m+2}}{(m+2)!} \left(mx - \frac{b(m-3)}{2(m+3)} \right) \leq 0, \end{aligned}$$

так як $x > b$.

З доведеного вище маємо, що $F \in \Delta^3$ і $F \in W^r[0,1] \cap \Delta^3$.

Нехай існує многочлен $p_n(x)$, степеня

$\leq n, p_n \in \Delta^3$ і для якого не виконується умова (2) з функцією $F(x)$. Тоді з деякою сталою A маємо:

$$|F(x) - p_n(x)| \leq Ax^{\frac{r}{2}}, 0 \leq x \leq b \text{ і}$$

$$p_n(0) = F(0) = 0, p_n'(0) = F'(0) = 0, p_n''(0) = F''(0) = 0.$$

Так як $p_n'''(x) \leq 0, \forall x \in [0,1]$, то $p_n''(x)$ спадає і так як $p_n''(0) = 0$, то $\forall x \in [0,1]: p_n''(x) \leq 0$. Тоді многочлен $p_n'(x)$ спадає і так як $p_n'(0) = 0, \forall x \in [0,1]: p_n'(x) \leq 0$.

Таким чином, $p_n(x)$ спадає на $[0,1]$ і $p_n(0) = 0$ зумовлює $p_n(x) \leq 0, \forall x \in [0,1]$. Звідси випливає, що $\|p_n\| = |p_n(1)|$.

Розглянемо многочлен

$$\tilde{p}_n(x) = p_n(x) - \frac{b^{m+1}}{2!(m+1)!} x^2, x \in [0,1]$$

$$\tilde{p}_n'''(x) = p_n'''(x) - \frac{b^{m+1}}{(m+1)!}$$

$$\tilde{p}_n''(0) = p_n''(0) - \frac{b^{m+1}}{(m+1)!} = -\frac{b^{m+1}}{(m+1)!}$$

За нерівністю Маркова маємо:

$$|p_n''(0)| = \frac{b^{m+1}}{(m+1)!} \leq 4n^2(n-1)^2 \|\tilde{p}_n\| \leq$$

$$\leq 4n^2(n-1)^2 \|p_n\| = 4n^2(n-1)^2 |p_n(1)|,$$

$$\text{звідки } |p_n(1)| \geq \frac{b^{m+1}}{(m+1)! 4n^2(n-1)^2}. \quad \text{З іншого}$$

боку,

$$\begin{aligned}
 |f(l)| &= \frac{b^{m+2}}{(m+2)!} - \frac{b^{m+3}}{2(m+3)!} = \frac{b^{m+2}}{(m+2)!} \left(1 - \frac{b}{2(m-3)}\right) < \text{Таким чином,} \\
 &< \frac{b^{m+2}}{(m+2)!} = \frac{b^{m+2} 4n^2 (n-1)^2}{(m+2)! 4n^2 (n-1)^2} = \\
 &= \frac{b^{m+1}}{(m+1)! 4n^2 (n-1)^2} \cdot \frac{b 4n^2 (n-1)^2}{m+2} \\
 &< \frac{b^{m+1}}{(m+1)! 4n^2 (n-1)^2}
 \end{aligned}$$

як $F(l) = f(l)$, то $F(l) \neq p_n(l)$. Теорема доведена.

Список використаних джерел

References

1. Теляковский С.А. Две теоремы о приближении функций алгебраическими полиномами / С.А. Теляковский – Мат. сб. – 1966 – 13, № 79 – С. 252–265.
2. Gopengauz A.I., Pointwise estimates of Hermitian interpolation / A.I. Gopengauz - Constr. Approx. – 1994. – 9, № 77 – P. 34–43.
3. DeVore R.A., Pointwise estimates for monotone polynomial approximation / R.A DeVore and X.M. Yu // Constr. Approx. – 1985. – № 1 – P. 323–331.
4. Gonska H.H. Interpolatory pointwise estimates for polynomial approximations / H. H. Gonska, D. Leviatan, I. A. Shevchuk, H.-J. Wenz // Constr. Approx. – 2000. – 26, № 16 – P. 603–629.
5. Петрова Т.О., Контрприклад у інтерполяційному опуклому наближенні / Т. О. Петрова // Праці Інст. математики НАН України «Математика та її застосування. Теорія наближення функцій» – 2005. – № 35. – С. 107–112.
6. Петрова Т.О., Один контрприклад для наближення функцій, що мають дробову похідну / Т.О. Петрова // Вісник Київського університету: фіз.-мат. науки – 2006. – 5, № 4. – С. 113–118.
7. Samko S.G., Fractional integrals and derivatives: theory and applications / S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev // Constr. Approx. – 1987. – № 4 – P. 119–126.
8. Петрова Т.О., Про поточкові інтерполяційні оцінки монотонного наближення функцій, що мають дробову похідну / Т.О. Петрова // Вісник Київського університету. Математика–Механіка. – 2003. – 2, № 9-10. – С. 125–127.
9. Петрова Т.О., Про поточкові інтерполяційні оцінки монотонного наближення функцій, що мають дробову похідну / Т.О. Петрова // Вісник Київського університету. Математика–Механіка. – 2002. – № 7-8. – С. 118–122.
1. TELYAKOVSKIY, S. A. (1966) Dve teoremy o priblizhenii funkciy algebraicheskimi polinomami. *Mat. sb.* 79. p. 252-265.
2. GOPENGAUZ, A. I. (1994) Pointwise estimates of Hermitian interpolation. *Constr. Approx.* 77. p. 34-43.
3. DeVore R. A. and YU X. M. (1985) Pointwise estimates for monotone polynomial approximation. *Constr. Approx.* 1. p. 323-331.
4. GONSKA, H. H., LEVIATAN, D., SHEVCUK, I.A. and WENZ, H.-J. (2000) Interpolatory pointwise estimates for polynomial approximations. *Constr. Approx.* 16. p. 603-629.
5. PETROVA, T. O. (2005) Kontrprzyklad u interpolyatsiinomu opuklomu nablyzhenni. *Pratsi Instytutu matematyky NAN Ukrainy "Matematyka ta zastosuvannya. Teoriya nablyzhennia funtsii"*. 35. p.107-112.
6. PETROVA, T. O. (2006) Kontrprzyklad u interpolyacijnomu opuklomu nablyzhenni. *Praci Institutu matematiki NAN Ukrayini "Matematika ta yiyi zastosuvannya. Teoriya nablyzhennya funkciy"*. 4. p. 113-118.
7. SAMKO, S. G., KILBAS, A. A. and MARICHEV, O. I. (1987) Fractional integrals and derivatives: theory and applications. *Constr. Approx.* 4. p. 119-126.
8. PETROVA T.O. (2003) Pro potochkovi interpolyacijni ocinki monotonного nablyzhennya funkciy, sho mayut drobovu pohidnu. *Visnik Kiyivskogo universitetu. Matematika–Mehanika.* 9-10. p. 125-127.
9. PETROVA T.O. (2002) Pro potochkovi interpolyacijni ocinki monotonного nablyzhennya funkciy, scho mayut drobovu pohidnu. *Visnik Kiyivskogo universitetu. Matematika–Mehanika.* 7-8. p. 118-122.

Надійшла до редколегії 10.03.17

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

XXX International Conference
PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES
August 14-19, 2017
Vilnius, Lithuania

The XXX PDMU-2017 International Conference was organized by General Jonas Žemaitis Military Academy of Lithuania (Vilnius, Lithuania) and the Taras Shevchenko National University of Kyiv (Kyiv, Ukraine) in cooperation with

- International Institute for Applied Systems Analysis (Austria),
- Vilnius University (Lithuania),
- Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine,
- Ivan Franko National University of Lviv (Ukraine),
- Higher School Academy of Sciences of Ukraine,
- Noosphere Ventures Corporation (Ukraine)
- University of Defence (Czech Republic),
- European Education Center (Georgia).

The XXX International Conference PDMU-2017 was held in Vilnius, Lithuania in August 14-19, 2017. The Conference was held under the auspices of the Engineering Managing Department, The General Jonas Žemaitis Military Academy of Lithuania.

The set scientific topics of the conference were:

1. Theory of statistical decisions, inference and its applications.
2. Computer methods for decision making in various fields.
3. Decision making in a fuzzy environment.
4. Dynamical systems and decision making under uncertainties.
5. Risk theory and its applications.
6. Decision making in the military field.
7. Decision support systems and their application.

There were more than 200 participants from 12 countries (Ukraine, Lithuania, Austria, Azerbaijan, Czech Republic, Denmark, England, Georgia, Latvia, Poland, Sweden and Turkey).



16 plenary reports, 30 sectional reports and 25 poster reports were made at the Conference.

The best reports related to computer science and mathematics from the PDMU-2017 International Conference were recommended for print at the “Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics”.

International Presidium (Prof. **I. Didmanidze** (Georgia), Prof. **A. Pakštas** (England), **J. Novagrochienė** (Lithuania), **O. Nakonechnyi** (Ukraine), **N. Ibrahimov** (Azerbaijan), **V. Hutsaylyuk** (Poland), **S. Hoskova-Mayerova** (Czech Republic)) opens the first plenary session.



The Chairman of Local Organizing Committee **Petro Zinko**, the Chairman of National Organizing Committee **Svajone Bekesiene** and the Chairman of Program Committee **Oleksandr Nakonechnyi** discuss organizational issues after the plenary session.



Chief of Staff Lt. Col. **Saulius Stonkus** congratulates the conference participants on behalf of the General Jonas Žemaitis Military Academy of Lithuania.



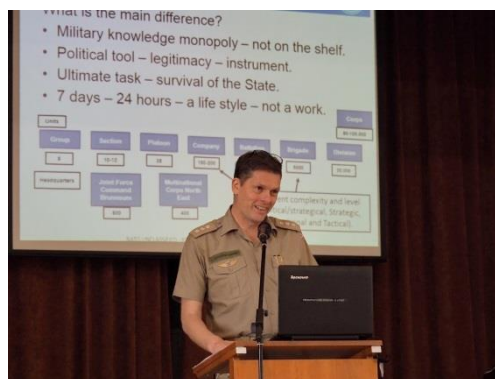
The Chairman of the Program Committee Professor **Oleksandr Nakonechnyi** thanked the organizers of the conference from the Lithuanian side for the warm reception of the participants.



Vice-Minister of Foreign Affairs of the Republic of Lithuania **Darius Skusevičius** congratulated the participants of the conference.



Commander of Nato Force Integration Units Colnel **Jakob Sogard Larsen** (Denmark) made a plenary report “Strategic decisions support system: military approach”.



The Organizing Committee looks forward to seeing you at the next Conferences:

XXXI International Conference
PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES
July 3-8, 2018
Lenkoran, Azerbaijan Republic

The XXXI PDMU-2018 International Conference will be organized by the Taras Shevchenko National University of Kyiv (Kyiv, Ukraine) and Lenkoran University (Azerbaijan Republic)



in cooperation with

- International Institute for Applied Systems Analysis (Austria),
- Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine,
- Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan,
- Higher School Academy of Sciences of Ukraine,
- Noosphere Ventures Corporation (Ukraine)
- University of Defence (Czech Republic),
- European Education Center (Georgia).

The XXXI International Conference will be held in one of the oldest cities in Azerbaijan, Lenkoran, on the shores of the Caspian Sea.

XXXII International Conference
PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES
August 27-31, 2018
Komorní Hradek, Czech Republic

The XXXII PDMU-2018 International Conference will be organized by the Taras Shevchenko National University of Kyiv (Kyiv, Ukraine) and University of Defence (Czech Republic)



in cooperation with

- International Institute for Applied Systems Analysis (Austria),
- Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine,
- Ivan Franko National University of Lviv (Ukraine),
- Higher School Academy of Sciences of Ukraine,
- Noosphere Ventures Corporation (Ukraine),
- European Education Center (Georgia),
- General Jonas Žemaitis Military Academy of Lithuania.

The XXXII International Conference will be held in the small picturesque town Komorní Hradek, located 30 km from Prague.

УДК 517.4

Берідзе З., академічний доктор

**Сучасний стан систем безпеки
бездротових мереж, аналіз і методи
розв'язання проблем**

Батумський Державний Університет
імені Шота Руставелі
6010, Грузія, Батумі, вул. Ніношвілі, 35
e-mail: ibraim.didmanidze@bsu.edu.ge

Z. Beridze, academian doctor

**Current state of wireless network security
systems, analysis of problems and solutions**

Batumi Shota Rustaveli State University
6010, Georgia, Batumi, Ninoshvili st., 35
e-mail: ibraim.didmanidze@bsu.edu.ge

Бездротові мережі відіграють важливу роль у житті людей, де б вони не знаходилися - на роботі, вдома або в громадських місцях. Навіть якщо бездротова мережа створена для простої мети - забезпечення зв'язку між людиною і джерелом інформації, необхідно розібратися в основній концепції бездротових мереж, обговорити проблеми, пов'язані з безпекою, а потім проаналізувати, як вони працюють і які вигоди можуть принести в тому чи іншому випадку.

Ключові слова: бездротові мережі, безпеку бездротових мереж, бездротові технології, область передачі інформації, бездротова глобальна мережа.

Wireless networks play a big role in people's lives, wherever they are - at work, at home or at public places. Even if a wireless network is created for a simple purpose - to provide a connection between a man and a source of information, it is necessary to understand the basic concept of wireless networks, to consider the security issues related to them, and then observe how they work and what benefits they can bring in different cases.

Key Words: Wireless networks, wireless network security, wireless technologies, information transfer area, wireless global network.

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

INTRODUCTION

Today, wireless technologies are widely used in the whole world to satisfy a large number of communication requirements. The popularity of wireless technology has several reasons. A significant reduction in the prices of wireless devices allows a service provider to significantly reduce the cost of wireless service and make it more accessible to a user.

Like usual networks, based on the use of wires, the wireless networks provide information between computer devices as well. This information can be presented in a variety of ways: by e-mail, WEB-page, database records, video stream or voice message. In most cases wireless networks transmit data through e-mail and files. In connection with the improvement of wireless networks' quality, it is possible to transfer video signals as well as to provide a telephone connection.

Wireless networks like transmitters, that ensure interaction between users, servers, and databases, use radio waves of infrared range. This area of

information transfer is invisible to humans. Today, most manufacturers integrate the Network Interface Cards (NIC), known as network adapters, and antennas into computer devices so that they are invisible to consumers. All this makes the wireless device more convenient to use.

MAIN PART

Wireless networks providing connections in different sizes of physical zones, are divided into different categories:

- Wireless Personal Area Network (PAN);
- Wireless Local Area Network (WLAN);
- Wireless Metropolitan Area Network (MAN);
- Wireless Wide-Area Network (WAN);

Wireless Personal Networks are distinguished by a transfer of information on a short distance, what makes them ideal for use in a small area of the building or "personal zone". In many situations, Wireless PAN successfully replace cable networks (Figure 1).



Fig. 1. Wireless PAN provide information transfer between computer devices on a short distance.

This kind of network can, for example, provide data wireless synchronization with a PDA user and his personal computer or laptop. Similarly, a wireless connection is available to a printer. Replacement of wired networks, connecting computer devices, with the wireless ones is a serious advantage, which greatly facilitates the installation of computer equipment in case of their transfer to another place.

Wireless regional (urban) networks serve zones in the city. In most cases the system implementation requires a fixed connection. For example, in a hospital such a network provides data transfer between a main office and the distant clinics. Also, in a city an energy company can use such networks to connect the main building with the distant energy points. As a result, the Wireless Regional Networks connect existing network infrastructure or allow mobile users to connect with existing network infrastructure.

Wireless Internet Service Providers (WISP) offer customers wireless regional networks which provide constant wireless connection between distant buildings across the city. Similar networks have significant advantages over conventional cable networks, such as the Digital Subscriber Line (DSL), since in most cases, its installation is associated with great cost savings.

Wireless global networks provide access to information across a country and a continent. Wireless global networks have an unlimited area of operation that is provided by telecommunication companies.

The agreements reached by telecommunication operators in relation to roaming allow long distance connections to be established and to provide fast data transfer between mobile users. Only after payment to

one of the telecommunication companies, customers can connect with the various Internet services with the help of wireless global networks from anywhere in the world.

Special systems, that characterize wireless global networks, provide users with access to the Internet, corporate systems and e-mails, regardless of a user's location. For example, network subscribers can establish a connection while travelling by a taxi or just walking in the city. Wireless global networks can operate from such places where access to other types of networks is impossible.

Wireless LANs have all the necessary properties to ensure the continuous operation of high-performance systems. Such network users can receive large volumes of e-mails or streaming videos from the server. Wireless LANs completely meet all office system requirements.

The safety and service quality of wireless networks has become a subject of considerable and active research over the past few years, what is caused by a growing requirement for supporting the transfer of data packages [1]. Without the corresponding security, organizations will avoid using wireless networks. Security issues in wireless networks represent an important obstacle for broadly adaptation of such networks. Consequently, the security of such wireless networks is an important area, which requires an appropriate response if such networks are widely used. The researchers of this field should identify the open problems and provide relevant solutions to these issues. Each of such attempts makes a wireless network a bit more secure. The aim of the present research is to develop a series of measures to increase the safety of wireless networks and to provide the management of distant workplaces.

Security is a very important issue for wireless networks, as communication signals are available for use in the environment. Therefore, companies and individual consumers should know about the potential problems and take appropriate measures [2].

Any system, that needs protection, has its weaknesses or shortcomings, which can be partially or completely used by an attacker. Consequently, one of the approaches to system security mechanisms is the analysis of all the threats and alleged attacks that are facing the system, taking into account the fact that the system has the shortcomings. The security mechanisms should ensure the system security with regard to these threats, attacks and deficiencies.

The safety of wireless networks significantly differs from the one of their wired analogs, what can be explained by a nature of physical environment. During the communication in a wireless environment, transmitted and received signals travel in the air. Therefore, any node which is located in the transmission range of a delivery node and which knows the operating frequency and other physical attributes (modulation, encoding, etc.) can potentially encrypt the signal so that a sender or an alleged recipient will not know anything about that interference. However, such interference in cable networks can occur if an attacker has an access to physical means of transmission (wires, fibers, etc.) what requires the accession to the facility. As wireless networks are not dependent on infrastructure based resources, such as power stable source, high frequency, continuous connection or unchanging routing, they can be easily attacked.

For example, an experienced hacker or accidentally snooper (a person who likes spying) can easily track the unwanted packages and open the data in it, using the software means. For example, snoopers located hundreds of miles away from the building, where a wireless local area network is functioning, are capable of looking for all transactions in a wireless network. Of course, the main danger is the fact that as a result of such an attack, some people can have access to important information such as usernames and passwords, credit card numbers and other.

The solution to this problem at least refers to the

encryption of information that should be transferred between wireless devices and base stations. During the encryption process, data bits are changed with the help of secret keys. As the keys are secret, the hacker cannot decrypt data. Therefore, due to the use of effective encryption mechanisms, the data protection can be strengthened.

CONCLUSION

The operating system *Windows* allows easy access to wireless networks, especially to public connection networks. When a laptop is connected to a wireless local area network, its owner has an access to any other notebook which is connected to the same wireless LAN. If a Personal Brandmaker is not used, than anyone can get an access to all the information existing on a hard disk drive of this notebook, what represents a tremendous threat [3].

Wireless network can be protected from outside radio signals by ensuring the ability to resist them in a building. There are some recommendations to reduce the flow of radio signals in the building:

- if the inner walls of the building appear to have a metal-resistant surface, it is better to ground it;
- it is desirable to put the windows with thermal insulation and to cover them with metal;
- the interior and outer walls of the building should be painted by metallic impurities paints;
- to adjust the power of a transmitter in such a way as to completely exclude the signal leakage or to decrease its level to the point that would easily reveal a hacker's presence.

Список використаних джерел

1. *Didmanidze I.* Routing Security Enchantment in Wireless Local Area Networks / Didmanidze I., Beridze Z., Geladze N. // XXX International Conference "Problems of decision making under uncertainties" (PDMU-2017). Abstracts. 14-19.08.2017, Vilnius, Lithuania. - P.39.
2. *Didmanidze I.* The Analysis of Wireless Network Security. / Didmanidze I., Beridze Z. // 12th International Conference "Theoretical and applied aspects of program systems development" (TAAPSD'2015). Proceeding. 23-26.12.2015, Kyiv. - P. 206-207.
3. *Shonia O.* Automatized Design of The Logic and Structured Process of Wireless Local Area Networks Monitoring/ O. Shonia, I. Kartvelishvili, Z. Beridze, I. Didmanidze, L. Kolbaia // Georgian National Academy of Sciences. Bulletin. New Series. - 2017. – Vol. 11, № 2. - P. 22-28.

References

1. DIDMANIDZE, I., BERIDZE, Z., GELADZE, N. (2017) "Routing Security Enchantment in Wireless Local Area Networks", *XXX International Conference "Problems of decision making under uncertainties" (PDMU-2017)*. Abstracts, 14-19.08.2017, Vilnius, Lithuania, pp. 39.
2. DIDMANIDZE, I., BERIDZE, Z. (2015) "The Analysis of Wireless Network Security", *12th International Conference «Theoretical and applied aspects of program systems development» (TAAPSD'2015)*, Proceeding, 23-26.12.2015, Kyiv, pp. 206-207.
3. SHONIA, O., KARTVELISHVILI, I., BERIDZE, Z., DIDMANIDZE, I., KOLBAIA, L. (2017) "Automatized Design of The Logic and Structured Process of Wireless Local Area Networks Monitoring", *Georgian National Academy Of Sciences. Bulletin*, New Series, vol.11, №.2, pp. 22-28.

Надійшла до редколегії 19.08.2017

УДК 519.9

Боровик С.О., аспірант

Побудова систем для знаходження алгоритмів з адаптаційними правилами

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ,
пр-т. Глушкова, 4д
e-mail: borovyk.stas@gmail.com

S. O. Borovyk, postgraduate

Building of system for finding algorithm with adaptation rules

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkov ave., 4d
e-mail: borovyk.stas@gmail.com

У даній роботі розглянуто проблему пошуку рішення в динамічних системах з адаптаційними правилами. Для основи цього рішення використана адаптована структура дерева. Обчислено складність та використання пам'яті для знайденого рішення.

Ключові слова: експертні системи, прийняття рішень, адаптаційні правила.

In this paper we consider the problem of finding decision in dynamic systems with adaptive rules. Rules can be added or changed at any point of time. Also we add additional condition, that rules are not cyclical. For base of this solution was used tree structure. Using heuristic optimizations and recursive algorithms we have made improvements in comparison with the direct solution to the problem. We calculate and substantiated solution complexity and memory, which show the optimality of this solution. Also, the example of the algorithm was demonstrated.

Key Words: expert systems, decision-making, tree structure, adaptive rules.

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Introduction

The process of expert systems creation has changed significantly over the last years. Due to the emergence of special tools time of their development was greatly reduced and complexity decreased. But the requirements for the complexity of the process also increased [1]. For many of these processes there is a relevant and important evolutionary adaptation of rules. And it needs a development of appropriate tools which will not only make decision-making possible, but will also reflect the features of the system and allow to work effectively with dynamic input data.

Formulation of the problem

We consider the problem with evolutionary and adaptive rules for determining points in time. Rules R_i can be added or changed at any point of time. Each rule has input and output state, and also weight of the rule, which can be interpreted as an expense. Denote them:

$$R_i : \bar{x}_i \rightarrow \bar{y}_i(w_i), \quad (1)$$

where R_i – rule, $\bar{x}_i, \bar{y}_i \in R^n$ – state vectors, w_i – rule weight, $i = \overline{1..n}$.

Also we add additional condition, that rules are not cyclical:

$$\neg \exists R_{i1} \circ \dots \circ R_{ik} \circ R_{i1}. \quad (2)$$

On input is the initial state $\bar{x}_0 \in R^n$. We need to find a function compositions of rules with the minimal amount of weights, which has transferred from the initial state to the final state:

$$F = R_{i1} \circ \dots \circ R_{ik}, F(\bar{x}_0) \in X^*,$$

$$\sum_{j=1}^k w_{ij} \rightarrow \min, \quad (3)$$

where F – solution function, $X^* \subset R^n$ – subset of all final states.

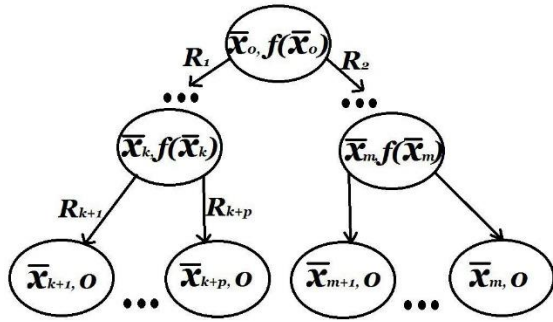
Solution of the problem

Lemma 1. For storing rules (1) in conditions (2) and (3) we can use tree structure.

Proving. We will take each state as a vertex, and rule as an edge. Each rule connect exactly two states according 1. Therefore, our structure forms a graph.

And condition (2) mean that this graph is acyclic. Acyclic graph is a tree. For root we will use initial state $\bar{x}_0$.

According Lema 1 we can use tree structure for storing our data (Picture 1). For speed dynamic recalculation of rules we will store not only state and weight, but function evaluation function (4) too.



Picture 1. Structure of tree

In the vertices of the trees we record minimal weight of subtree using the evaluation function (3). Program calculates this value using recursive bypass by formulas (4, 5).

$$f(x_k) = \min (f(x_{k+1}) + w_{k+1}, \dots, f(x_{k+p}) + w_{k+p}), \quad (4)$$

where $\forall i \in \overline{1..p} R_k : \bar{x}_k \rightarrow \bar{x}_{k+i}$.

$$f(x) = 0, \quad (5)$$

where $x \in X^*$ - final state.

Lemma 2. Storing tree structure with evaluation function (4) will take $O(n)$ memory.

Proving. To preserve the tree segments we need to save all the calculated function, vertices and their edges:

$$\begin{aligned} \text{memory}(n) &= O(\text{count}(\text{vertices}(n)) + \\ &\text{count}(\text{evaluatedValues}(\text{vertices}(n))) + \\ &\text{count}(\text{edges}(n))) = O((n+1) + (n+1) + n) = O(n) \end{aligned}$$

Lemma 3. Creating tree structure with evaluation function (4) will have complexity $O(n)$.

Proving. Construction such tree we need recursively bypass in width all the vertices and calculate their minimum value. So we need to use one compare and sum operation for each node according formula (4):

$$\text{create}(n) = 0(2\text{count}(\text{vertices}(n))) = 0(2(n+1)) = 0(n).$$

Lemma 4. Adding new rules will have complexity $O(\log n)$.

Proving. When adding a new rule, we do not need to recalculate all tree, but only a subtree which new rule is attached to. If the calculated value at some point is more than the value in the parent vertex you can stop the calculation. It follows from formula (4):

$$\text{add}(n) = O(\text{hightTree}(n)) = O(\log(n)).$$

Lemma 5. Finding solution on calculated tree structure have complexity $O(\log n)$.

Proving. In every tree level stored evaluated value. So we need to walk through each level of the tree to record the minimum rule:

$$\text{find}(n) = O(\text{hightTree}(n)) = O(\log(n)).$$

Example

Suppose we have a set of rules:

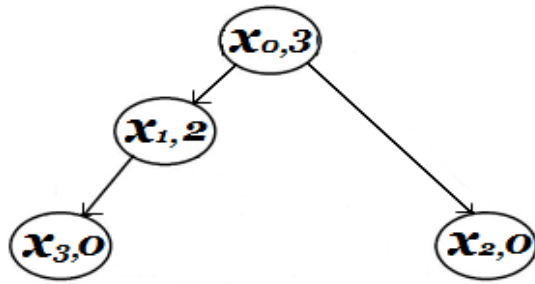
$$R_1 : x_0 \rightarrow x_1 (w_1 = 1),$$

$$R_2 : x_0 \rightarrow x_2 (w_2 = 5),$$

$$R_3 : x_0 \rightarrow x_3 (w_3 = 2),$$

where $x_2, x_3 \in X^*$ - final states.

- 1) Calculate $f(x_0) = \min(f(x_1) + w_1, f(x_2) + w_2)$ for this we need $f(x_1)$ and $f(x_2)$.
- 2) Calculate $f(x_1) = \min(f(x_3) + w_3)$ for this we need $f(x_3)$.
- 3) Calculate $f(x_3) = 0$ by (5). Store this value for current vertex.
- 4) Back to step 2 and calculate $f(x_1) = 2$. Store this value for current vertex.
- 5) Back to step 1. We need $f(x_2)$, but we can store $f(x_1) + w_1 = 3$ as current minimal value.
- 6) Calculate $f(x_2) = 0$ by (5). Store this value for current vertex.
- 7) Back to step 1 and calculate $f(x_0) = 3$. Store this value for current vertex.



Picture 2. Structure of example tree

Conclusion

We analyzed the problem with evolutionary and adaptive rules for determining points in time with additional not cyclical condition. On the base of this analysis was constructed the solution taking into account the dynamic of our system. In addition it has been proved that the memory requirements will be linear and the speed of decision counting is logarithmic.

Список використаних джерел

1. Експертні системи [Електронний ресурс] Режим доступу до журн.: https://en.wikipedia.org/wiki/Expert_system.
2. Древа відрізків [Електронний ресурс] Режим доступу до журн.: http://e-maxx.ru/algo/segment_tree.
3. Knuth D. The Art of Computer Programming, vol.1. Fundamental Algorithms. 3 Edition / D. Knuth. - Moscow: «Vilams», 2006.
4. Ronald R. Yager Essentials of Fuzzy Modeling and Control / R. Ronald, P. Dimitar. - New York: John Wiley & Sons, Inc., 1994.

References

1. Expert system [Online] Available from: https://en.wikipedia.org/wiki/Expert_system [Accessed: 19th June 2017].
2. Segment tree [Online] Available from: http://emaxx.ru/algo/segment_tree a. [Accessed: 19th June 2017].
3. KNUTH, D. (2006) *The Art of Computer Programming, vol.1. Fundamental Algorithms*. 3 Edition. Moscow: «Vilams»
4. RONALD, R., DIMITAR, P. (1994) *Yager Essentials of Fuzzy Modeling and Control*, New York: John Wiley & Sons, Inc.

Надійшла до редколегії 19.08.2017

УДК 519.6

Вергунова І.М., к.ф.-м.н., докт. габіл., проф.

Задача масопереносу з частково невідомими граничними значеннями концентрації

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка,
03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: vergunova@bigmir.net

Vergunova I.M., PhD, doct. habil., prof.

The problem of mass transfer with partially unknown limits values of concentration

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova ave., 4d,
e-mail: vergunova@bigmir.net

У статті розглядається задача масопереносу з частково невідомими граничними значеннями концентрації. Для представленої задачі, що має єдиний розв'язок, приведено сукупність оцінок різницевих аналогів операторів та умови стійкості відповідної неоднорідної різницевої схеми. Отримано, що використання регуляризуючого алгоритму на основі узагальненого принципу нев'язки дає рішення екстремальної задачі, що враховує неповну визначеність значень концентрації.

Ключові слова: різницева схема, сіткова область, параметр регуляризації, різницевий оператор, функціонал.

In this paper we consider the problem of mass transfer with partially unknown limits values of concentration. It is indicated that the presented the initial-boundary value problem has unique solution. A set of estimates for the difference approximations of operators is presented. For the scheme in the canonical form obtained estimates for its operators too. It is shown with the help of locally one-dimensional schemes the stability of the resulting inhomogeneous difference scheme and the conditions for its stability are presented. It is obtained that the using of a regularizing algorithm on the basis of the generalized discrepancy principle gives the solution of the corresponding extremum problem. The solution of this task exists and is unique. It takes into account incomplete certainty of concentration values.

Key Words: difference scheme, grid region, regularization parameter, difference operator, functional.

Статтю представив д.т.н. Гаращенко Ф.Г.

Introduction

Usually getting solution of the problem of determination the distribution of the Cs^{137} radionuclide in the area of soil aeration in the system of hydro technical shafts-terraces provides for known values on the limits of area. In practice, exact values of the limit values concentration are impossible to get accurately. In addition, the initial values are measured only in limited number of points. Therefore, we can calculate the distribution of the radionuclide concentration only approximately.

Accounting for this situation when modeling the processes of mass transfer in a limited area are takes place can give the using of a regularizing algorithm on the basis of the generalized discrepancy principle.

The model of mass transfer and the existence of unique solution

Having in mind the construction of surfaces shafts-terraces we investigated two-dimensional model of mass transfer:

$$\begin{aligned} Zu &\equiv \frac{\partial u}{\partial t} + Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^2 V \frac{\partial u}{\partial x_i} = \\ &= f(x, t) \equiv -\lambda u_0 \varphi(x) \delta(t-0), \\ \left(- \sum_{i=1}^2 D(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + Vu \right) \Big|_{x \in \Gamma} &= k(\Gamma) c_0 q_0(x), \quad t \in [0, T] \\ \left(- \sum_{i=1}^2 D(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + Vu \right) \Big|_{x \in \partial \Omega \setminus \Gamma} &= 0, \quad t \in [0, T]. \\ u(x, 0) &= 0, \quad x \in \Omega, \end{aligned}$$

in the bounded area $Q = \Omega \times (0 \leq t \leq T)$, $\Omega \subset R^2$ with piecewise smooth surface $\partial\Omega$, λ – half-decomposition factor, $\varphi(x_1, x_2)$ – the function describing the surface of the shaft-terrace Γ , $\varphi(x_1, x_2) \in L_2(\Omega)$, u_0 – surface contamination, $u(x, t)$ – the concentration of the substance in the point $x = (x_1, x_2)$ at the moment t , $u(x, t)$ is twice continuously differentiated by x on Ω and continuously differentiated by t on $[0, T]$.

Let's denote

$$Au = - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right),$$

$$Bu = \sum_{i=1}^2 V \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

The operator Au is elliptical in closed area $x \in \Omega + \partial\Omega$, $D(x)$ – continuously differentiable in the closed area $\bar{Q}$, an integral and limited in the relevant area, V – positive constant, $k(\Gamma) = k \cdot \cos(\alpha(\Gamma))$, k – the coefficient of conductivity (absorption) for surface, $\alpha(\Gamma)$ – the slope of the segment of terraces, q_0 – the flow of water coming from atmospheric precipitation with a concentration of the substance c_0 .

In [1, 2] shows the existence of a unique generalized solution of this problem in the space with the norm

$$\|u\|_H^2 = \int_Q \left(u_t^2 + \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right) dQ.$$

Using results of these works has been obtained

$$\frac{d}{dt} \|u\|_Q \leq \|f\|_Q + \delta \|u\|_H,$$

where $\|u\|_Q^2 = \int_Q u^2 dQ$ – the norm in $L_2(Q)$.

The difference approximations

In [3] was substantiated splitting method for difference approximations of this task of mass transfer. Used difference operators gives the opportunity to go to locally one-dimensional if necessary.

In Ω we used uniform for all variables difference grid $\omega_h = \{x | x = (x_1, x_2), x_1 = i_1 h_1, x_2 = i_2 h_2, h_1 = x_{i_1+1} - x_{i_1}, h_2 = x_{i_2+1} - x_{i_2}, i_1 = \overline{1, N_1 - 1}, i_2 = \overline{1, N_2 - 1}\}$ in which ω – the set of internal nodes, $\partial\omega$ – the set of external nodes.

Let denote the difference solution of the problem at time t as $y(x, t), x \in \omega \cup \partial\omega, t > 0$. For grid functions that satisfy the initial (in $D(L)$) and boundary conditions (on $\partial\omega$), we define a Hilbert space $\bar{H}$, the scalar product and the norm in which are $(y, v) = \sum_{x \in \omega} yv h_1 h_2$, $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$.

To the operator A on the set of functions $y \in \bar{H}$ we put in line the difference operator

$$Ay = - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (Dy_{x_i})_{x_i}, \text{ the operator } B - \text{ the difference}$$

$$\text{operator } By = \sum_{i=1}^2 Vy_{\bar{x}_i}.$$

Under conditions of the second order of approximation we take difference operator A in the following form

$$Ay = - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (Dy_{x_i})_{x_i} = - \sum_{j=1}^2 \frac{1}{h_j} (a_{i_j+1} y_{x_{i_j}} - a_{i_j} y_{x_{i_j-1}}),$$

where

$$\frac{a_{i_j+1} + a_{i_j}}{2} = D_{i_j} + O(h_j^2),$$

$$(\text{i.e. } a_{i_j} = \frac{D_{i_j} + D_{i_j-1}}{2}, j=1, 2, i_j = \overline{1, N_j} [4]).$$

Taking into account the previously obtained estimates for norms of A and B operators are obtained the following estimates:

$$(By, y) \leq c_1 \|y\|^2, \|By\|^2 \leq \frac{8V^2}{h_{\min}^2} \|y\|^2,$$

$$(Ay, y) \leq c_2 \|y\|^2, \|Ay\|^2 \leq \frac{64D_{\max}}{h_{\min}^2} \|y\|^2.$$

Difference Scheme

After space discretization an operator-difference scheme is obtained

$$\frac{dy}{dt} + Ay + By = \varphi,$$

$$y(x, 0) = 0,$$

$$- \sum_{i=1}^2 Dy_{x_i} + Vy|_{x \in \Gamma} = \varphi_0,$$

$$- \sum_{i=1}^2 Dy_{x_i} + Vy|_{x \in \partial\Omega \setminus \Gamma} = 0.$$

For y^k as the difference solution at the at the moment of time $t_k = k\tau, \tau > 0$, the two-layer difference scheme with weights has the form:

$$\frac{y^{k+1} - y^k}{\tau} + (A + B)(\sigma y^{k+1} + (1 - \sigma)y^k) = \varphi^k,$$

$$x \in \omega, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$y^0(x) = 0, \quad x \in \omega.$$

In the canonical form, the scheme has the form

$$\underline{B} \frac{y^{k+1} - y^k}{\tau} + \underline{A} y^k = \varphi^k, \quad x \in \omega, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$\underline{B} = E + \sigma \tau (A + B), \quad \underline{A} = A + B.$$

For operator A occurs

$$\|\underline{A}y\|^2 \leq 2(\|Ay\|^2 + \|By\|^2) \leq M_{AB}\|y\|^2,$$

where $M_{AB} = O(h_1^{-2} + h_2^{-2})$.

The operator $\underline{B} > 0$ under conditions

$$\frac{h_1 h_2}{(h_1 + h_2)\tau} > \sigma V.$$

To obtain numerical solutions we pass to locally one-dimensional schemes (with the same order of approximation) of the form

$$\frac{y^{k+1/2} - y^k}{\tau} = \Lambda_1(\sigma y^{k+1/2} + (1 - \sigma)y^k) + \frac{1}{2}\varphi^k,$$

$$\frac{y^{k+1} - y^{k+1/2}}{\tau} = \Lambda_2(\sigma y^{k+1} + (1 - \sigma)y^{k+1/2}) + \frac{1}{2}\varphi^{k+1/2},$$

$$x \in \omega, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$y^0(x) = 0, \quad x \in \omega,$$

$$\Lambda_1 = -(Dy_{x_1})_{x_1}^- + Vy_{\hat{x}_1}, \quad \Lambda_2 = -(Dy_{x_2})_{x_2}^- + Vy_{\hat{x}_2}$$

$$(\underline{B}_j > 0 \text{ for } h_j \geq 2 \frac{a_i}{V} \text{ for all } i, j = 1, 2).$$

Moreover, under conditions $h_j \geq 2 \frac{a_i}{V}$ we have that non-self-contained $\underline{A} > 0$ and $\underline{B} > 0$.

Therefore, as a condition of stability, may occur the condition such as $\underline{A}^{-1} \geq 0,5\tau \underline{B}^{-1}$ [4] or better results are obtained on the basis of the investigation of the transition operator from the time layer k to $k + 1$.

Due to the use of such locally one-dimensional schemes in the future we are dealing with three-diagonal matrices.

Using of the regularizing algorithm

Consider the case where the values of concentration for certain boundary points measured with an error or missing. For the problem of describing mass transfer in a two-dimensional closed domain with linear bounded operators we construct a regularizing algorithm on the basis of the generalized discrepancy principle.

Let it is known that the error in setting the right-hand side of the equation, which includes the initial concentration values established on the basis of measurements, $\|\bar{f} - \varphi_\delta\| \leq \delta$, $Z\bar{u} = \bar{f}$, $\delta > 0$.

$\|Z - Z_h\| \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, and in grid region $\Omega_h^\tau = \{(x_{1i}, x_{2j}, \tau^k) : h_1 = x_{1i+1} - x_{1i}, h_2 = x_{2j+1} - x_{2j}, \Delta\tau = \tau^{k+1} - \tau^k, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M}, k = \overline{0, K}\}$ constructed difference scheme for determining y_{ij}^k .

Has been introduced the functional

$$\Phi^\alpha[y] = \|Z_h y - \varphi_\delta\|^2 + \alpha \|y\|^2, \quad \alpha > 0$$

and made the transition to the problem

$$\inf_{y \in D(Z_h)} \Phi^\alpha[y], \quad (1)$$

where α – regularization parameter.

In [5] shown that this functional is strongly convex in a Hilbert space, which allows us to use gradient methods to find the solution $y_\eta^{(\alpha)} \in \bar{H}$ of the problem for fixed α .

The solution of abovementioned task exists and unique for $\alpha > 0$ and linear bounded operator Z_h [5]. Moreover, the following estimate holds for it $\|y_\eta^{(\alpha)}\|^2 \leq \|\varphi_\delta\| / \sqrt{\alpha}$.

We assume that the of incompatibility of the equation $Zu = f$ with approximate data on a set $D(Z) \subset H$

$$\mu_\eta(\varphi_\delta, Z_h) = \inf_{y \in D(Z)} \|Z_h y - \varphi_\delta\|$$

was obtained with error $r(\eta) = \varepsilon + \delta$. Regularization parameter was elected in accordance with the principle of generalized discrepancy [5, 6]. All of this allows us the use of methods of regularization, i.e. we can numerically construct such α^* that satisfies the equation

$$\|Z_h y_\eta^{(\alpha)} - \varphi_\delta\|^2 - (\delta + \varepsilon \|y_\eta^{(\alpha)}\|)^2 = (\mu_\eta(\varphi_\delta, Z_h))^2 \quad (2)$$

if $\|\varphi_\delta\|^2 > \delta^2 + (\mu_\eta(\varphi_\delta, Z_h))^2$ and look for such $y_\eta^{(\alpha)}$, which converge to the exact value $\bar{u}$ when tending to zero the input data error (for fixed α). If $\|\varphi_\delta\|^2 \leq \delta^2 + (\mu_\eta(\varphi_\delta, Z_h))^2$ then approximate solution of equation $Zu = f$ we take $y_\eta = 0$.

For the case $\mu_\eta(\varphi_\delta, Z_h) = 0$ we can use the initial approximations for α to find the solution α^* of equation (2).

Conclusion

Using of a regularizing algorithm on the basis of the generalized discrepancy principle takes into account incomplete certainty of concentration values for the problem of describing mass transfer in a two-dimensional closed domain.

The solution of the corresponding problem exists and is unique.

The difference approximation of the problem, namely, the possibility of transition to locally one-dimensional difference schemes, gives the three-diagonal form of matrices for operators in systems of linear equations. It is very important if you need to solve these systems very many times.

Список використаних джерел

1. Vergunov V.A. Study of the transfer process of Cs137 in the system of hydrotechnical ramparts / V.A. Vergunov, I.N. Vergunova, O.V. Hajduk // Scientific journal of Tessedik Samuel college. – Hungary. – 2001. – Т. 1. – P. 311-316.
2. Vergunov V.A. Cs 137 Felhastnalasa masodlagos radioactiv stennyezod-desu Ukran, erdossztyeppes videk erozios folyamatainak vizsgalataza / V.A. Vergunov, I.N. Vergunova // Fisikai szemle. – 2000. – № 7. – P. 229-231.
3. Вергунова І.М. Двоциклічний метод покомпонентного розщеплення для різницевої апроксимації рівняння масопереносу / І.М. Вергунова // Вісник НУВГП. – 2008. – № 2(42). – ч.1. – С. 102-107.
4. Самарский А.А. Устойчивость разностных схем / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: «Наука», Гл. ред. физ.-матем. лит., 1973. – 415 с.
5. Тихонов А.Н. Численные методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола. – М.: «Наука», 1990. – 232 с.
6. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: «Наука», Гл. ред. физ.-матем. лит., 1979. – 285 с.

References

1. VERGUNOV, V.A., VERGUNOVA, I.N., HAJDUK, O.V. (2001) Study of the transfer process of Cs137 in the system of hydrotechnical ramparts, *Scientific journal of Tessedik Samuel college*, Hungary, T. 1, p. 311-316.
2. VERGUNOV, V.A., VERGUNOVA, I.N. (2000) Cs 137 Felhastnalasa masodlagos radioactiv stennyezod-desu Ukran, erdossztyeppes videk erozios folyamatainak vizsgalataza, *Fisikai szemle*, 7, p. 229-231.
3. VERGUNOVA, I.M. (2008) Dvotsyklichnyy metod pokomponentnoho rozshcheplennya dlya riznytsevoyi aproksymatsiyi rivnyannya masoperenosu *Visnyk NUVHP*, 2(42), v. 1, p. 102-107.
4. SAMARSKIY, A.A., HULIN, A.V. (1973) *Ustoychivost' raznostnykh skhem*, Moscow: Nauka.
5. TIKHONOV, A.N., HONCHARSKIY, A.V., STEPANOV, V.V., YAHOLA, A.H. (1990) *Chislennyye metody resheniya nekorrektnykh zadach*, Moscow: Nauka.
6. TIKHONOV, A.N., ARSENIN, V.YA. (1979) *Metody resheniya nekorrektnykh zadach*, Moscow: Nauka.

Надійшла до редколегії 19.08.17

УДК 519.21

Верес К.О.¹, к.геогр.н., доцент
Верес М.М.², к.ф.-м.н., доцент
Демківський Є.О.², к.т.н., доцент

Прогнозування хімічного синтезу

¹Національний університет харчових
технологій, 01601, м. Київ,
вул. Володимирська, 68

²Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Академіка Глушкова, 4д
e-mail: veres@unicyb.kiev.ua

Veres K.O.¹, Ph.D. (Geogr.), Assoc. Prof.
Veres M.M.², Ph.D. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.
Demkivskiy I.O.², Ph.D. (Tech.), Assoc. Prof.

Chemical synthesis forecasting

¹National University of Food Technologies,
01601, Kyiv, Volodymyrska str., 68

²Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d

e-mail: veres@unicyb.kiev.ua

Хіміки-органіки мають справу з великими молекулами. У зв'язку з чим виникають складності під час їх синтезу. Навіть добре теоретично спланована послідовність дій часто дає помилки внаслідок чого доводиться повертатись до планування синтезу бажаної речовини. На це витрачається багато часу та коштів, особливо, коли похибка виникла на останніх кроках синтезу, що вимагав дорогих реактивів.

В роботі здійснено дослідження можливості використання комп'ютерів для проведення автоматичного ретросинтезу. Було розроблено неевристичний алгоритм пошуку шляхів синтезу заданої речовини, що базується на законі збереження маси та принципі мінімуму енергій. На основі розробленого алгоритму було створено розподілену програму, що використовує 3 рівні паралелізації обчислень для пришвидшення розрахунку. Запропонований у роботі алгоритм був протестований на 4 різних сполуках, і результат тестування показав можливість використання, як у наукових дослідженнях, так і в промисловому виробництві.

Ключові слова: хімічний синтез, автоматичний ретросинтез, прогнозування хімічного синтезу.

Organic chemists deal with large molecules. That is why they face difficulties during its synthesis. Even well-planned theoretically sequence of actions often makes mistakes, and forces us to go back to the planning the synthesis of the desired substance. This takes much time and money, especially when the error occurred on the last steps of synthesis, which had required expensive reagents. In this paper, possibilities of using computers for automatic retrosynthesis were researched. Modern views on inside structure of substances and reasons of molecules creation were described, also was shown, that variety of chemical chains have one and the same electrostatic nature, which allows not to distinguish chemical compounds on the basis of its combinations. Non-heuristic search algorithm of the ways of synthesis of given substance was developed, based on the law of conservation of mass and the principle of minimum energy. On the basis of the algorithm, a distributed program was created using 3 levels of parallelization of computations to speed up the calculation. Suggested algorithm was tested on 4 different compounds, and test results showed the possibility of implementation both in scientific research and in industrial production.

Key words: chemical synthesis, automatic retrosynthesis, forecast of chemical synthesis.

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ

Синтетична оцтова і лимонна кислоти, синтетичні вітаміни, антибіотики і алкалоїди – список успіхів органічного синтезу різноманітний і великий. Об'єднує подібні приклади той факт, що в кожному випадку метою синтезу були існуючі в природі з'єднання з

відомим комплексом корисних властивостей [1]. Однак, як показує досвід органічної хімії, речовини, що володіють корисними властивостями, можуть бути отримані не тільки шляхом копіювання природних структур. Деякі властивості органічної сполуки можуть бути передбачені заздалегідь на підставі однієї лише

структурної формули сполуки.

Синтез цільової речовини завжди протікає за заздалегідь складеним планом. Зазвичай, для раціонального планування синтезу необхідно зробити «розбирання» молекули [2], тобто скласти уявлення про те, з яких найближчих попередників цю молекулу можна синтезувати за допомогою реальних реакцій. Іншими словами, подумки хімік при плануванні синтезу йде в ретросинтетичному напрямку, тобто від цільової структури до вибору попередників.

Якщо всі попередники доступні, то на цьому планування закінчується, і можна приступати до експериментальної роботи по синтезу. Однак, у більшості випадків це не так: структури кожного з попередників необхідно проаналізувати аналогічним чином і так продовжувати до тих пір, поки не будуть отримані сполуки, які є в наявності у дослідника. В результаті цього планування виникає так зване дерево синтезу. Воно являє собою схематичне зображення можливих шляхів синтезу даної речовини з вихідних сполук через проміжні.

Зазвичай, отримане дерево синтезу дуже «густе» і містить величезну кількість «гілок». Власне в цьому і полягає головна складність синтезу речовин – велике різноманіття варіантів і тому виняткова складність вибору оптимального шляху синтезу.

Довгий час хіміки-сингетики керувалися в своїх діях зверненням до літературних даних в пошуку надійних і перевірених практикою хімічних реакцій, які специфічно придатні для синтезу базового скелета цільової молекули.

Однак, як показала практика [3], такий пошук не завжди успішний, оскільки фактичний матеріал по органічним реакціям настільки великий, що можна легко пропустити і не помітити потрібну реакцію, хоча вона і опублікована в літературі. Більше того, часто необхідне відкриття принципово нових реакцій і підходів, що запланувати неможливо.

Вихід з цієї ситуації полягає в широкому застосуванні комп'ютерів для планування органічного синтезу [4]. Лише великий обсяг пам'яті і значна швидкодія комп'ютера дозволяють знайти і оцінити величезне число можливих варіантів синтезу того чи іншого з'єднання, вибрати з них оптимальний план синтезу, який таким чином може бути здійснено з мінімальними витратами і максимальними шансами на успіх.

Найбільш природним способом представлення молекули є молекулярний граф [5] – зв'язний неорієнтований граф, що знаходиться у взаємно-однозначній відповідності зі структурною формулою модельованої хімічної сполуки таким чином, що вершини графа відповідають атомам молекули, а ребра графа – хімічним зв'язкам між цими атомами. Поняття «молекулярний граф» є базовим для комп'ютерної хімії та хемоінформатики. Як і структурна формула, молекулярний граф є моделлю молекули. Окрім інформації про зв'язність та про склад молекули, молекулярний граф може мати додаткову інформацію [6]: вершини можуть зберігати характерні риси атомів (наприклад, електричні властивості або кількість вільних валентних електронів), а кожне ребро може зберігати характерні особливості зв'язку між ними (наприклад, довжину, кратність зв'язку, енергію дисоціації).

Окрім хімічних властивостей, молекулярний граф має зберігати і таку важливу інформацію, як просторову конфігурацію молекули, що визначає її внутрішню енергію, необхідну для визначення реакційної здатності молекули [7]. Просторова інформація зберігається в атомах-вершинах графа у вигляді трьохелементного вектору $\vec{r}(x, y, z)$.

Загалом, алгоритм прогнозування хімічного синтезу використовує наступну інформацію в молекулярному графі для визначення ходу реакції:

- 1) електронегативність елементів;
- 2) кількість валентних електронів;
- 3) кількість спарених валентних електронів;
- 4) електричний заряд атому;
- 5) кратність інцидентних зв'язків.

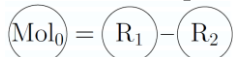
Алгоритм прогнозування хімічного синтезу

На вхід запропонованому алгоритму подається структурна формула сполуки, яку необхідно синтезувати. Метою роботи алгоритму є генерація усіх можливих варіантів реакцій, серед продуктів яких обов'язково має бути вхідна сполука. Таким чином, алгоритм автоматизує процес пошуку зручних шляхів синтезу речовин, виступаючи в ролі електронного довідника [6]. На відміну від існуючих рішень, алгоритм для своєї роботи використовує не обмежену кількість евристик, а фундаментальні властивості речовин для прогнозування та моделювання хімічної

реакції, такі як: потенційну енергію молекули та принцип мінімуму енергій [7].

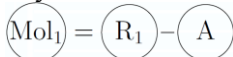
Основною ідеєю алгоритму є ретросинтетичний аналіз, тобто синтез «назад»: маючи структурну формулу речовини, алгоритм прогнозує, яким чином її можливо отримати. Для цього структурна формула перетворюється на молекулярний граф, що представляє введену сполуку. Далі алгоритм розбиває граф на підграфи, отримуючи молекулярні радикали – парамагнітні частинки (атоми або молекули) з неспареним одним або декількома електронами на зовнішній атомній або молекулярній орбіталі. Може бути нейтральним або нести позитивний чи негативний заряд. Оскільки вільні радикали рідко зустрічаються у природі, то отримані заряджені частинки добуваються до повноцінних молекул, що потім мають прореагувати. Будується формула потенційної реакції за участі добуваних молекул. На останньому кроці алгоритму, використовуючи принцип мінімуму енергій, знаходяться коефіцієнти формули. Якщо такі коефіцієнти існують і вони цілочисельні, то знайдена формула вважається дійсною і виводиться алгоритмом.

Коротко роботу алгоритму можна проілюструвати наступним чином. Необхідно синтезувати молекулу Mol_0 . Представимо молекулу Mol_0 як 2 зв'язаних радикали:

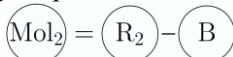


причому зображений зв'язок між радикалами означає всього лише символічну зв'язність, а не одинарний хімічний зв'язок. Між радикалами R_1 та R_2 може існувати як ковалентний кратний зв'язок, так і зв'язки більш складних конфігурацій.

«Розклавши» молекулу Mol_0 на дві частини, отримуємо 2 різні радикали, які використовуємо як основу для нарощування повноцінних молекул, які будуть використані для синтезу молекул і Mol_0 . Нехай на основі R_1 була побудована молекула

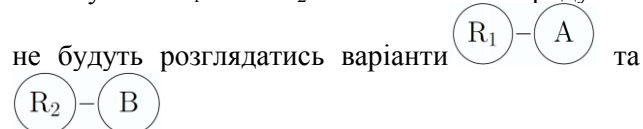


де A – деякий радикал, що був штучно добудований до R_1 таким чином, щоб не залишилось вільних валентних електронів, тобто щоб група атомів Mol_1 була повноцінною завершеною молекулою. Так само робимо і з радикалом R_2 , утворивши з нього молекулу

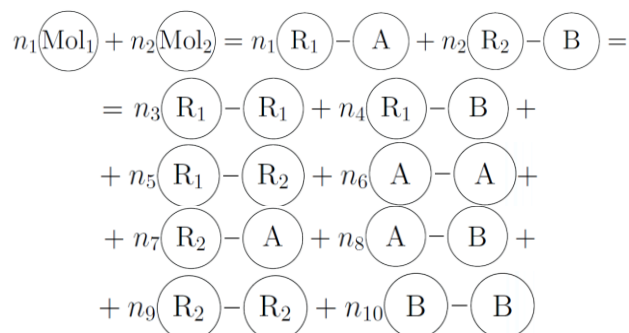


Штучні радикали A та B не обов'язково однакові. Результатом роботи алгоритму на даному кроці буде 2 молекули Mol_1 та Mol_2 , що містять 4 радикали: R_1 , R_2 , A , B .

Далі змодельуємо хімічну реакцію із молекул Mol_1 та Mol_2 . Утворимо формулу реакції шляхом перебору усіх можливих комбінацій радикалів, що входять до складу молекул реагентів, окрім тих варіантів, з яких побудовані молекули Mol_1 та Mol_2 , тобто в якості продуктів



Перед кожною сполукою у формулі проставимо коефіцієнти $n_i \in \mathbb{Z}$. Результатом даного кроку є схематична формула реакції:



В кінці алгоритм намагається відшукати такі значення коефіцієнтів n_i , при яких формула має зміст та виконується принцип мінімуму енергій [8]. Якщо ж такі коефіцієнти не знайдено, то вся формула разом із вхідними радикалами вважається недійсною, і тому відкидається. Інакше формула виводиться як така, що призводить до синтезу бажаної молекули Mol_0 .

Висновки

Таким чином, запропоновано алгоритм прогнозування хімічного синтезу, в якому можна виділити чотири найбільш важливі кроки:

- 1) генерація усіх можливих комбінацій поділу вихідного молекулярного графа на два молекулярні підграфи-радикали;
- 2) добування радикалів до повноцінних молекул;
- 3) утворення шаблону формули реакції з добуваних радикалів;
- 4) обчислення коефіцієнтів запропонованої формули.

Список використаних джерел

1. Бочков А.Ф. Органический синтез / Бочков А.Ф., Смит В.А. - М.: Наука, 1987. – 304 с.
2. Глинка Н.Л. Общая химия. 24-е изд. / Глинка Н.Л. – Л.: Химия. 1985.
3. Сайкс П. Механизмы реакций в органической химии. 4-е изд. / Сайкс П. – М.: Химия, 1991.
4. Varuek A. Chernoinformatics: recognition through teaching/ A. Varuek // Presented at 235th ACS National Meeting. New Orleans, Louisiana. April 6-10, 2008.
5. Кутолин С.А. Кибернетические модели в материаловедении / Кутолин С.А. и др. – Новосибирск: Chem.Lab.NCD, 1996. – 38 с.
6. Barone R. Computer-Assisted Synthesis Design (CASD). / R. Barone and M. Chanon // In "Chemoinformatics. From data to knowledge", J. Gasteiger, T. Engel Eds, J. Wiley, 2003.
7. Phoetner M. Computer-Assisted Synthesis Design by WODCA (CASD) / M. Phoetner and M. Sitzmann // In "Chemoinformatics. From data to knowledge", J. Gasteiger, T. Engel Eds. J. Wiley, 2003.
8. Zefirov N.S. SYMBEQ Program and Its Application. in Computer-Assisted Reaction Design / N.S. Zefirov, I.I. Baskin, V.A. Palyulin // J. Cheiri. Inf. Comput. Sci. – 1994. – 34 (4).

References

1. BOCHKOV, A., SMITH, V. (1987) Organic synthesis, Moscow – 304 p.
2. GLINKA N.L. (1985) General chemistry. 24th edition, Leningrad, 1985.
3. SYKES, P. (1991) Guidebook to Mechanism in Organic Chemistry, 4th edition, Moscow.
4. VARUEK, A. (2008) Chernoinformatics: recognition through teaching. *Presented at 235th ACS National Meeting*. New Orleans, Louisiana, April 6-10, 2008.
5. KUTOLIN S. and oth. (1996) Cybernetic models in material science, Novosibirsk, Chem.Lab.NCD, p.38.
6. BARONE, R. and CHANON, M. (2003) Computer-Assisted Synthesis Design (CASD). In "Chemoinformatics. From data to knowledge", J. Gasteiger, T. Engel Eds, J. Wiley.
7. PHOETNER, M. and SITZMANN, M. (2003) Computer-Assisted Synthesis Design by WODCA (CASD). In "Chemoinformatics. From data to knowledge", J. Gasteiger, T. Engel Eds. J. Wiley.
8. ZEFIROV, N. S., BASKIN, I. I., PALYULIN V. A. (1994) SYMBEQ Program and Its Application. in Computer-Assisted Reaction Design. *J. Cheiri. Inf. Comput. Sci.*, 34 (4).

Надійшла до редколегії 19.08.2017

УДК 519.6:544.431.11:[502.521]

Власюк А.П.¹, д.т.н., професор
Жуковський В.В.², ст. викладач
Жуковська Н.А.², к.т.н., ст. викладач

Оптимізація комп'ютерних методів обчислень для задачі математичного моделювання вертикальної міграції радіонуклідів в каталітичному пористому середовищі

¹Національний університет «Острозька
академія», 35800, Рівненська обл., м. Острог,
вул. Семінарська, 2,
e-mail: A.P.Vlasyuk.rv@gmail.com

²Національний університет водного
господарства та природокористування, 33000,
м. Рівне, вул. Соборна, 11,
e-mail: V.V.Zhukovskyy@nuwm.edu.ua

A.P. Vlasyuk¹, D.Sc. (Tech.), Professor
V. V. Zhukovskyy², Senior lecturer
N. A. Zhukovska², Ph.D., Senior lecturer

Optimization of computer methods for mathematical modeling of radionuclides vertical migration in catalytic porous media

¹The National University of Ostroh Academy, 35800,
Rivne region, Ostroh, Seminarska St., 2
e-mail: A.P.Vlasyuk.rv@gmail.com

²National University of Water and
Environmental Engineering, 33028, Rivne, 11
Soborna St., 11,
e-mail: V.V.Zhukovskyy@nuwm.edu.ua

У статті проведено комп'ютерне моделювання процесу вертикальної міграції радіонуклідів у каталітичному пористому середовищі. Математична модель враховує мікро-, мезо- та макромасштаби процесу масоперенесення. Отримано чисельний розв'язок відповідної одновимірної крайової задачі методом скінченних різниць. Побудовано обчислювальний алгоритм розв'язування поставленої крайової задачі та здійснено програмну реалізацію з використанням паралельних обчислень для систем із спільною пам'яттю за допомогою технології OpenMP. Проведено серію чисельних експериментів за допомогою нової версії власноствореного програмного комплексу NanoSurface та здійснено їх аналіз.

Ключові слова: комп'ютерне моделювання, паралельні обчислення, OpenMP, крайова задача, масоперенесення, наночастинки, очищення, метод скінченних різниць, програмний комплекс NanoSurface.

In this paper, the result of an application of computer modeling for vertical migration of pollutants in catalytic porous media with filter traps is presented. The mathematical model takes into account micro and meso/macro scale factors of the mass transfer process. The numerical solution of the respective one-dimensional boundary value problem was obtained by the method of finite differences. The software implementation was accomplished using multi-platform shared-memory parallel programming using OpenMP technology. All computer modeling experiments were made using the new version of NanoSurface tool developed by us in this study and their analysis were conducted.

Key Words: computer modeling, parallel computing, OpenMP, boundary-value problem, mass transfer, nanoparticle, refinement, NanoSurface software.

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

1. Introduction.

There has been a rapid development of computer technology for a long time. In this regard, the need for optimal use of all of the computing power of modern technology is increasing. In recent years, producers have preferred multi-processor architectures instead of increasing clock speed,

ensuring parallelism at the level of instructions. Thus, to obtain the maximum effect from the increased productivity, the code should be adapted for multi-use. This is achieved through parallel computing.

Unlike distributed computing, parallel computing for shared memory systems has not been widespread.

Distributed computing has long been found in the works of scientists engaged in mathematical modeling. In particular, a number of works [1; 2] considered the optimization problem of computational processes using clusters for solving complex problems in mathematical modeling (convection diffusion, fraction-differential dynamics of pushing processes etc.).

2. Formulation of the Problem.

Let consider the problem of vertical migration of contaminants (e.g., radionuclides) in a layer of soil (Fig. 1).

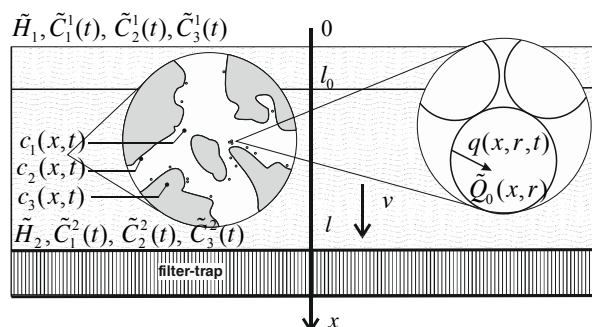


Figure 1. The process of migration of radionuclides in the one-dimensional case

At a depth l in the ground is a filter-trap filled with a sorbent (such as vermiculite). There is piezometric pressure on the upper and lower (underlying) surfaces of the soil $\tilde{H}_1$ and $\tilde{H}_2$ ($\tilde{H}_1 > \tilde{H}_2$), respectively. Also known is the distribution of radionuclide concentrations at the initial time $t=0$: $\tilde{C}_1^0(x)$ (for particles that are moving in convective pore solution), $\tilde{C}_2^0(x)$ (for bound water particles that are held on the surface of the ground skeleton), $\tilde{C}_3^0(x)$ (for particles located in the soil skeleton), and $\tilde{Q}^0(x,r)$ (for radionuclides inside micro- or nanosorbents). The soil concentrations $\tilde{C}_1^1(t)$, $\tilde{C}_2^1(t)$ and $\tilde{C}_3^1(t)$ on the upper surface and $\tilde{C}_1^2(t)$, $\tilde{C}_2^2(t)$, $\tilde{C}_3^2(t)$ for the filter-traps are known, or appropriate second-type boundary conditions are set up:

$$\left. \frac{\partial c_1}{\partial x} \right|_{x=l} = \left. \frac{\partial c_2}{\partial x} \right|_{x=l} = \left. \frac{\partial c_3}{\partial x} \right|_{x=l} = 0.$$

It is necessary to investigate the distribution of concentrations $c_1(x,t)$, $c_2(x,t)$, $c_3(x,t)$ and $q(x,r,t)$ on the filtration area at a given time, which will allow us to predict the degree of soil refinement and its subsequent use.

3. Mathematical Model.

The mathematical model of the problem in the one-dimensional linear case with filter-traps, according to works [3–8], can be described by the following boundary problem:

$$\sigma_1 \frac{\partial c_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} - v \frac{\partial c_1}{\partial x} - \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2, \quad (1)$$

$$0 < x < l, t > 0,$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} + \gamma_1 c_1 - \gamma_2 c_2 + \gamma_3 c_3 -$$

$$-\chi(l_0) \theta \left. \frac{\partial q}{\partial r} \right|_{r=R}, \quad 0 < x < l, t > 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial c_3}{\partial t} = D_3 \frac{\partial^2 c_3}{\partial x^2} + \gamma_2 c_2 - \gamma_3 c_3, \quad 0 < x < l, t > 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = D_0 \left(\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial q}{\partial r} \right), \quad 0 < r < R, t > 0, \quad (4)$$

$$v = -k(c_1) \frac{dh}{dx} + v_c \frac{\partial c_1}{\partial x}, \quad \text{div} \vec{v} + \frac{\partial n}{\partial t} = 0, \quad (5)$$

$$0 < x < l, t > 0,$$

$$\left. \frac{\partial q(x,r,t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad 0 < x < l, t > 0, \quad (6)$$

$$q(x,r,t)|_{r=R} = \frac{k_f \cdot c_2(x,t)^\beta}{1 + \eta \cdot c_2(x,t)^\beta}, \quad 0 < x < l, t > 0, \quad (7)$$

$$\chi(l_0) = \begin{cases} 1, & x \leq l_0, \\ 0, & x > l_0, \end{cases} \quad 0 < x < l, \quad (8)$$

$$l_1 c_1(0,t) = \tilde{C}_1^1(t), \quad l_2 c_1(l,t) = \tilde{C}_1^2(t), \quad (9)$$

$$l_3 c_2(0,t) = \tilde{C}_2^1(t), \quad l_4 c_2(l,t) = \tilde{C}_2^2(t), \quad (10)$$

$$l_5 c_3(0,t) = \tilde{C}_3^1(t), \quad l_6 c_3(l,t) = \tilde{C}_3^2(t), \quad (11)$$

$$h(0) = \tilde{H}_1, \quad h(l) = \tilde{H}_2, \quad (12)$$

$$c_1(x,0) = \tilde{C}_1^0(x), \quad c_2(x,0) = \tilde{C}_2^0(x), \quad (13)$$

$$c_3(x,0) = \tilde{C}_3^0(x), \quad q(x,r,0) = \tilde{Q}^0(x,r). \quad (14)$$

where $c_1(x,t)$ and D_1 are the concentration and convective diffusion coefficient of radionuclides in filtration flow (kg/m³ and m²/day), $c_2(x,t)$ and D_2 are the concentration and molecular diffusion coefficient of radionuclides in water connected with the soil skeleton, (kg/m³ and m²/day), $c_3(x,t)$ and D_3 are the concentration and diffusion coefficient of radionuclides in the soil skeleton (this diffusion estimates differ by orders of magnitude, that is why it is called ‘traps’ [8]; kg/m³ and m²/day), $q(x,r,t)$

and D_0 are the concentration and diffusion coefficient of radionuclides in particles with radius R , which are located in the soil skeleton (kg/m^3 and m^2/day), k_f, β, η – adsorption isotherm coefficients; $\chi(l_0)$ – Heaviside function; v is the filtration velocity (m/day); k is the filtration coefficient (m/day), γ_1, γ_2 , and γ_3 are the mass transfer coefficients (day^{-1}), σ_1 is the porosity of the soil, $x \in [0; l]$ is the vertical coordinate (m), $l_i, i = \overline{1, 6}$ are the differential operators for the boundary conditions when $x=0$ and $x=l$, t is time ($0 < t < t_1$; day); and r is the radius (radial, horizontal variable), $0 < r < R$ (m).

Equation (1) describes the migration of a pollutant (e.g., radionuclides) with the concentration $c_1(x, t)$ by diffusion in convective flow filtration (convective moving of the pore solution); (2) describes the migration of radionuclides in water connected with the soil skeleton; (3) describes the migration of radionuclides in the soil skeleton ('traps'); (4) describes the mass transfer of radionuclides with concentration $q(x, r, t)$ in micro- or nanoparticles, which is related to concentration $c_2(x, t)$ by adsorption isotherm (7) which becomes traditional Freundlich isotherm when $\eta=0$, and Langmuir isotherm when $\beta=1$ [9]; (5) describes filtration in a catalytic porous media. Boundary conditions for concentrations $c_1(x, t)$, $c_2(x, t)$, $c_3(x, t)$, $q(x, r, t)$ and pressure $h(x)$ have the form of (9)-(14).

Transfer of salts dissolved in water and heat by filtration flow occurs under the influence of the pressure gradients and the concentration of salts. The filtration of salt solutions and the heat transfer proceed in accordance with the generalized Darcy's and Fick's laws.

4. Numerical Solution of the Boundary-Value Problem.

Let us use mesh $\omega_{h_1 h_2 \tau}$ for finite-difference approximation with steps h_1, h_2 and τ by the Ox -axis, the Or -axis and the Ot -axis for x, r and t , respectively:

$$\omega_{h_1 h_2 \tau} = \left\{ (x_i, r_j, t_k) \left| \begin{array}{l} x_i = ih_1, r_j = jh_2, t_k = k\tau, \\ i = \overline{0, n_1}, j = \overline{0, n_2}, k = \overline{0, n_3}, \\ h_1 n_1 = l, r n_2 = R, \tau n_3 = T, \end{array} \right. \right\} \quad (15)$$

where n_1, n_2, n_3 are steps counts in the space and time variables x, r and t , respectively.

To find the numerical solution of the boundary-value problem (1)-(14), we use the finite difference method. To do this, let us use the implicit difference scheme for equations (2), (3) and the A.A. Samarskii monotone difference scheme for equations (1), (4) and (5).

Finite difference analogs of equations (1)-(5) and their solutions are described in detail in [5; 10]. For example, we present here the algorithm of concentration $c_1(x, t)$ from equation (1). For the approximation of equation (1), we use the A.A. Samarskii monotone difference scheme [11] or the refined monotone finite-difference scheme [12]. Then, the finite difference analogue of the differential equation (1) with appropriate boundary conditions has the next view:

$$\begin{aligned} \sigma'_1 \frac{c_{1,i}^{(k+1)} - c_{1,i}^{(k)}}{\tau} = & \chi_i^{(k)} \frac{c_{1,i+1}^{(k+1)} - 2c_{1,i}^{(k+1)} + c_{1,i-1}^{(k+1)}}{h_1^2} + \\ & + \frac{(r^+)_i^{(k)} c_{1,i+1}^{(k+1)} - c_{1,i}^{(k+1)}}{D_1 h_1} + \frac{(r^-)_i^{(k)} c_{1,i}^{(k+1)} - c_{1,i-1}^{(k+1)}}{D_1 h_1} - \\ & - \gamma'_1 c_{1,i}^{(k+1)} + \gamma'_2 c_{2,i}^{(k+1)}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$c_{1,i}^{(0)} = \tilde{C}_1^0(x_i), c_{1,0}^{(k)} = \tilde{C}_1^1(t_k), c_{1,n_1}^{(k)} = \tilde{C}_1^2(t_k), \quad (17)$$

where $i = \overline{1, n_1 - 1}, k = \overline{0, n_3}$.

We introduce the following notation:

$$\chi_i^{(k)} = \frac{1}{1 + \frac{h_1 |r_i^{(k)}|}{2D_1}} = 1 - \frac{h_1 |r_i^{(k)}|}{2D_1} + O(h_1^2),$$

$$\sigma'_1 = \frac{\sigma_1}{D_1}, \gamma'_1 = \frac{\gamma_1}{D_1}, \gamma'_2 = \frac{\gamma_2}{D_1},$$

$$r_i^{(k)} = (r^+)_i^{(k)} + (r^-)_i^{(k)}, (r^+)_i^{(k)} = \frac{-v_i^{(k)} + |v_i^{(k)}|}{2} \geq 0,$$

$$(r^-)_i^{(k)} = \frac{-v_i^{(k)} - |v_i^{(k)}|}{2} \leq 0.$$

To find the salt concentration $c_1(x, t)$ from finite-difference equation (16), we use the sweep method. To do this, let us rewrite the finite-difference scheme (16) in the following form:

$$\begin{cases} a_i^1 c_{1,i-1}^{(k+1)} - \bar{c}_i^1 c_{1,i}^{(k+1)} + b_i^1 c_{1,i+1}^{(k+1)} = -c_{1,i}^{(k)} - f_i^{1,(k+1)}, \\ c_{1,0}^{(k+1)} = \mu_1^1 c_{1,1}^{(k+1)} + \mu_2^1, \\ c_{1,n_1}^{(k+1)} = \mu_3^1 c_{1,n_1-1}^{(k+1)} + \mu_4^1, \end{cases} \quad (18)$$

where

$$a_i^1 = \frac{\tau}{\sigma_1'} \left(\frac{\chi_i^{(k)}}{h_1^2} - \frac{(r^-)_i^{(k)}}{h_1 D_1} \right), b_i^1 = \frac{\tau}{\sigma_1'} \left(\frac{\chi_i^{(k)}}{h_1^2} + \frac{(r^+)_i^{(k)}}{h_1 D_1} \right),$$

$$\bar{c}_i^1 = 1 + \frac{\tau}{\sigma_1'} \left(\frac{2\chi_i^{(k)}}{h_1^2} + \frac{1}{h_1 D_1} ((r^+)_i^{(k)} - (r^-)_i^{(k)}) + \gamma_1' \right),$$

$$f_i^{1,(k+1)} = \frac{\tau}{\sigma_1'} \gamma_2' c_{2,i}^{(k+1)},$$

$$\mu_1^1 \equiv 0, \mu_2^1 = \tilde{C}_1^1, \mu_3^1 \equiv 0, \mu_4^1 \equiv \tilde{C}_1^2.$$

To find the salt concentration $c_1(x, t)$ at time step $(k+1)$, we use the right sweep method:

$$c_{1,i}^{(k+1)} = \alpha_{i+1}^1 c_{1,i+1}^{(k+1)} + \beta_{i+1}^1, \quad (19)$$

$$\alpha_{i+1}^1 = \frac{b_i^1}{\bar{c}_i^1 - \alpha_i^1 a_i^1}, \beta_{i+1}^1 = \frac{a_i^1 \beta_i^1 + c_{1,i}^{(k)} + f_i^{1,(k+1)}}{\bar{c}_i^1 - \alpha_i^1 a_i^1}, \quad (20)$$

$$i = \overline{1, n_1 - 1}, k = \overline{1, n_3}, \alpha_1^1 = \mu_1^1 \equiv 0, \beta_1^1 = \mu_2^1 \equiv \tilde{C}_1^1,$$

or we may use the left sweep method in the following form:

$$c_{1,i+1}^{(k+1)} = \xi_{i+1}^1 c_{1,i}^{(k+1)} + \eta_{i+1}^1, \quad (21)$$

$$\xi_i^1 = \frac{a_i^1}{\bar{c}_i^1 - \xi_{i+1}^1 b_i^1}, \eta_i^1 = \frac{\eta_{i+1}^1 \beta_i^1 + c_{1,i}^{(k)} + f_i^{1,(k+1)}}{\bar{c}_i^1 - \xi_{i+1}^1 b_i^1}, \quad (22)$$

$$i = \overline{n_1 - 1, 1}, k = \overline{1, n_3}, \eta_1^1 = \mu_3^1 \equiv 0, \eta_{n_1}^1 = \mu_4^1 \equiv \tilde{C}_1^2.$$

It can be shown that the stability conditions of the sweep method performed as follows:
 $|\bar{c}_i^1| > |a_i^1| + |b_i^1|$.

5. Numerical Experiments and their Analysis.

We performed numerical experiments using the developed software [13] with the following input data:

$$l = 10 \text{ m}, \tilde{H}_1 = 1 \text{ m}, \tilde{H}_2 = 0 \text{ m}, \sigma_1 = 0,25,$$

$$\tau = 30 \text{ day}, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 6.5 \times 10^{-3} \text{ day}^{-1},$$

$$D_1 = 2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^2}{\text{day}}, D_2 = 1 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{day}},$$

$$D_3 = 1 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}^2}{\text{day}}, D_0 = 1 \cdot 10^{-18} \frac{\text{m}^2}{\text{day}},$$

$$\tilde{C}_1^1(t) = 5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \tilde{C}_1^2(t) = 0 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \tilde{C}_1^3(t) = 0 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3},$$

$$\tilde{C}_2^1(t) = 5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \tilde{C}_2^2(t) = 0 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \tilde{C}_2^3(t) = 0 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3},$$

$$\tilde{C}_1^0(t) = 5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \tilde{C}_2^0(t) = 5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \tilde{C}_3^0(t) = 0 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3},$$

$$\tilde{Q}^0(t) = 0 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, l_0 = 0 \text{ m}.$$

Charts and table data of concentration distribution and velocity were obtained after a series of numerical experiments. If we want to compare the distribution of concentrations $c_1(x, t)$, $c_2(x, t)$ and $c_3(x, t)$ at depth x of the soil layer over time, we may build 3D plots as seen in Fig. 2.

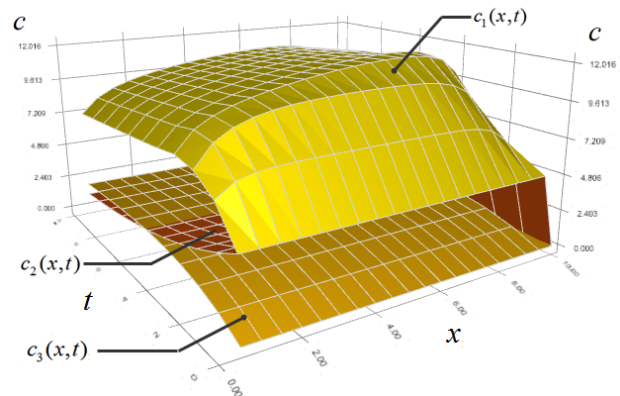


Figure 2. Comparative distribution of concentrations $c_1(x, t)$, $c_2(x, t)$ and $c_3(x, t)$

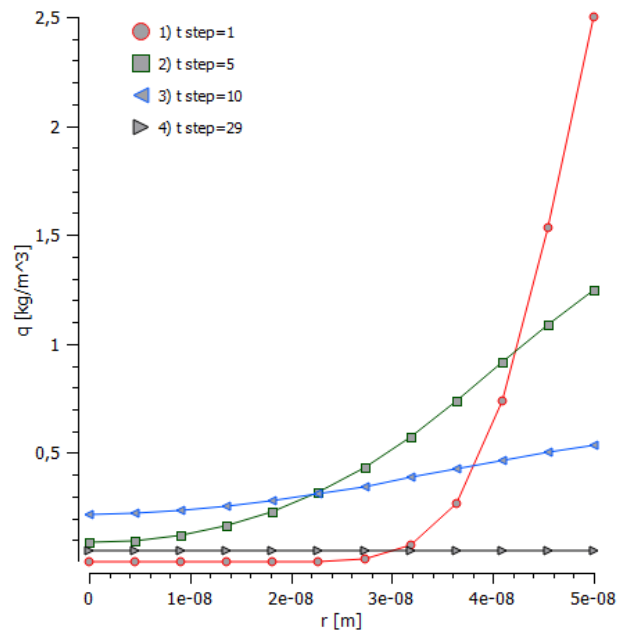


Figure 3. Distribution of concentrations $q(r)$ at depth $x = 1 \text{ m}$ with different timesteps: 1) $t = 1 \text{ month}$, 2) $t = 5 \text{ months}$, 3) $t = 10 \text{ months}$, 4) $t = 29 \text{ months}$

According to the numerical experiments, we cannot ignore the impact of diffusion in the soil skeleton. As we see in Fig. 2, concentration $c_3(x, t)$ increases, slowly overtaking concentration $c_2(x, t)$ at time step #5 (30 months). As concentrations $c_1(x, t)$ and $c_2(x, t)$ decrease, radionuclide concentration $c_3(x, t)$ persisted on the crystal lattice of the soil skeleton (e.g., traps). At the same time we see the impact of distribution of concentration $q(r)$ (figure 3). That is why we should take this fact into account in future research.

6. Efficiency of Parallel Computing.

A software implementation of a numerical solution of the mathematical model (1)-(14) is a nontrivial task. This follows from the relationships between the desired concentrations $c_1(x, t)$, $c_2(x, t)$, $c_3(x, t)$, $q(x, r, t)$ and filtration velocity v . That is why each mathematical model should be considered according to the relationships between groups of equations. The universal solution for parallel computing does not exist. Taking this into account, our calculations can be divided into smaller ones for the initialization of boundary and initial conditions of the first order and calculation of the sweep methods compared with those used to consistently find filtration velocity v and concentration $q(x, r, t)$, $c_3(x, t)$, $c_2(x, t)$ and $c_1(x, t)$. Additionally, each calculation of concentration may use parallelism on a low level of the sweep method (Thomas algorithm).

This paper derived coefficients of the sweep method, which is usually performed in a single threaded mode. To work on two streams on systems with shared memory, we should use a combination of left and right sweep methods. This type of sweep method is called the counter sweep method.

We may run the calculation for two separate threads using a two-sided Thomas algorithm. This algorithm combines the left and the right sweep methods. Let us divide the system of equations between 2 threads – the first thread will calculate equations with numbers $1 \leq i \leq p$, and the second thread will calculate equations with numbers $p \leq i \leq n$, where $p = \lceil n/2 \rceil$.

The first thread will calculate the sweep coefficients α_i and β_i when $1 \leq i \leq p$ according to (20), and the second thread should find sweep coefficients ξ_i and η_i when $p \leq i \leq n$ according to

equation (22). When $i = p$, we couple solutions in the form of (19) and (21) so that we may find x_p from the system:

$$\begin{cases} x_p = \alpha_{p+1}x_{p+1} + \beta_{p+1} \\ x_{p+1} = \xi_{p+1}x_p + \eta_{p+1} \end{cases} \quad (23)$$

After this, we may find all x_i at $1 \leq i \leq p$ in the first thread using equation (19). In the second thread, we may find all x_i at $p \leq i \leq n$ according to (21).

Note that the calculations for the forward and backward moves are made independently, so the theoretical acceleration equals two.

If we have a possibility to use more than two CPU cores for computation, the parallel block sweep method is more suitable [14].

Implementation of the parallel computations was made using OpenMP technology [15]. This technology provides a description of compiler directives, library procedures and environment variables intended for programming multithreaded applications on multiprocessor systems with shared memory.

Methods of different types of sweep method were implemented: simple, two-sided, and parallel block. We mainly used the syntax directive *for* for loop calculations and for initial initialization; *sections* was used in the two-sided sweep method; and *if (condition)* was used as a specific condition of parallel calculation.

We used the following computer configuration for the calculation experiments:

- CPU: Intel(R) Core(TM) i7-3630QM CPU @ 2.40GHz (8 CPUs);
- RAM: 8192MB RAM;
- VideoCard: NVIDIA GeForce GT 650M x2;
- Operation System: Windows 10 Pro 64-bit;
- Compiler: MinGW 32/64bits (gcc 5.3.0).

According to numerical experiments we find that two-sided Thomas algorithm for our mathematical model become effective for more than 30000 steps (figure 4).

When we tested block sweep method we find that 2 and 4 threads are much more effective than 8 threads (figure 5).

Figure 6 show a comparison of execution time on 8 threads for a different version of the algorithm: parallel loop for initialization according to boundary conditions; parallel calculation of the matrix coefficients $a_i, b_i, \bar{c}_i, f_i$ of all equations; parallel calculation of filtration velocity; and parallel calculation for concentration $q(x, r, t)$. As we see,

parallel computing allows us to minimize execution time. For example, for 120,000 steps in x , the variable parallel computing algorithm is 3.5 times faster than the single mode algorithm.

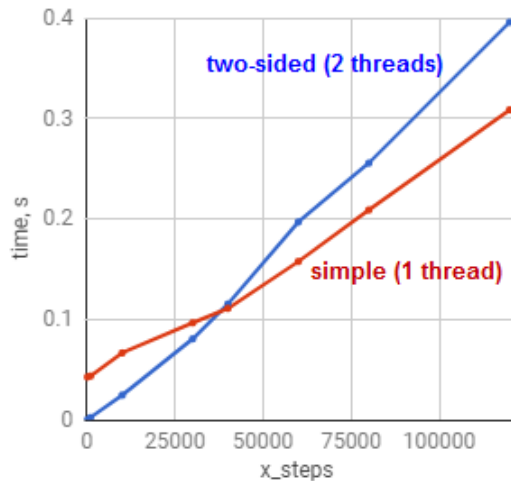


Figure 4. Execution time of simple and two-sided sweep method for different timesteps.

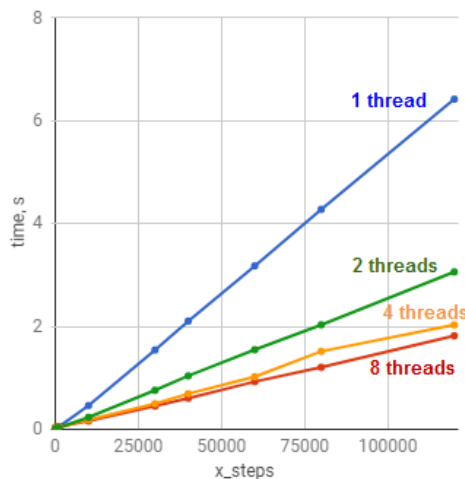


Figure 5. Comparison of execution time for the parallel block sweep method for different timesteps.

Список використаних джерел

1. Bogaenko V.A. On Mathematical modeling of Fractional-Differential Dynamics of Flushing Process for Saline Soils with Parallel Algorithms Usage / V.A. Bogaenko, V.M. Bulavatskiy, I.G. Kryvonos // *Journal of Automation and Information Sciences*. – 2016. – T.48. – №10.
2. Gladky A.V. Investigation of Parallel Algorithms for Solving Problems of Convection Diffusion on the Basis of Splitting Schemes / A.V. Gladky, V.A. Bohaienko // *Journal of Automation and Information Sciences*. – 2017. – T.49. – №2.
3. Kärger J. Diffusion in nanoporous materials / J. Kärger, D.M. Ruthven, D.N. Theodorou. – Weinheim, Germany: Wiley-VCH, 2012. – vol. 2.

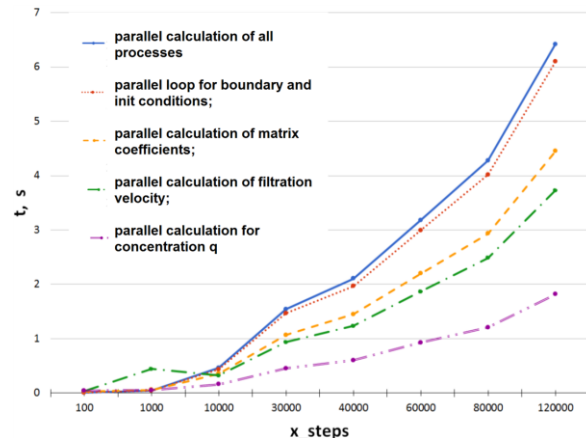


Figure 6. Time execution of parallel computing of different parts of the code using 8 threads

7. Conclusions.

The statement was formulated, and the mathematical modeling of the one-dimensional problem of vertical migration of radionuclides in a horizontally wide soil layer was carried out. A layer of soil contains micro and nanoporous structures and represents a catalytic porous medium in the presence of filters-traps. A numerical solution of a respective boundary-value problem by the finite difference method was obtained. We have developed NanoSurface software for the numerical experiments [13; 16]. After numerous experiments and analysis, the impact of pollutant migration in the soil skeleton on the overall processes of filtration becomes clear. That is why this should not be ignored in future research

We conducted experiments to identify the time cost of computation. Implementation of computational methods by means of parallel programming enables a significant increase in efficiency. In particular, as shown in Fig. 6 for 120,000 steps of the variable x partition, the runtime of a code is 3.5 times faster using parallel algorithm computation (with 8 threads).

References

1. BOGAENKO, V.A., BULAVATSKIY, V. M. and KRYVONOS I.G. (2016) "On Mathematical modeling of Fractional-Differential Dynamics of Flushing Process for Saline Soils with Parallel Algorithms Usage", *Journal of Automation and Information Sciences*, 48(10).
2. GLADKY, A. V. and BOHAIENKO, V. A. (2017) "Investigation of Parallel Algorithms for Solving Problems of Convection Diffusion on the Basis of Splitting Schemes", *Journal of Automation and Information Sciences*, 49(2).
3. KÄRGER, J., RUTHVEN, D.M. and THEODOROU, D.N. (2012) *Diffusion in nanoporous materials*, Weinheim, Germany: Wiley-VCH.

4. Zhukovskyy V.V. Mathematical modelling of vertical migration of radionuclides in catalytic porous media in non-isothermal conditions / V.V. Zhukovskyy, A.P. Vlasjuk // *Research on modern systems for manufacture and measurement of components of machines and devices*. – 2016. – T.SCIENCE REPORT Project CIII-PL-0007. – C.177–190.
5. Власюк А.П. Математичне моделювання вертикальної міграції радіонуклідів в каталітичному пористому середовищі / А.П. Власюк, В.В. Жуковський // *Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. науки*. – 2015. – Т.1. – С.89–95.
6. Власюк А.П. Математичне моделювання переносу сольових розчинів при фільтрації підземних вод у ґрунтових масивах / А.П. Власюк, О.П. Остапчук. – Рівне: НУВГП, 2015. – 214 с.
7. Сергієнко І. В., et al. Математичне моделювання масопереносу в середовищах частинок нанопористої структури / І.В. Сергієнко, М.Р. Петрик, О.М. Хіміч, Д.М. Михалик, Д. Леклерк, Ж. Фресар: Видавництво НАН України, 2014. – 209 с. .
8. Чапля Є.Я. Моделювання процесів стаціонарної гетеро дифузії розпадної речовини у середовищі з пастками / Є.Я.Чапля, О.Ю.Чернуха, В.Є.Гончарук, В.В.Пабирівський // *Моделювання та інформаційні технології*. – 2013. – Т.70. – С.96–108.
9. Simunek J. Numerical modeling of contaminant transport using HYDRUS and its specialized modules / J. Simunek, D. Jacques, G. Langergraber, S.A. Bradford, M. Šejna, M.T. van Genuchten // *Journal of the Indian Institute of Science*. – 2013. – Vol. 93, №2. – P.265–284.
10. Vlasjuk A.P. Mathematical Modelling of Vertical Migration of Radionuclides in Catalytic Porous Media with Traps in Linear Case / A.P. Vlasjuk, V.V. Zhukovskyy, M.M. Bondarchuk // *Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics. Proceedings of the 5th International Scientific Conference of Students and Young Scientists*. – 2015. – P.208–219.
11. Самарский А.А. Теория разностных схем: Учеб. пособие для вузов по спец. "Прикл. математика" / А.А. Самарский. – Москва: Наука, 1989. – 616 с.
12. Власюк А.П. Монотонна різницева схема для нелінійного одновимірного рівняння параболічного типу, що містить першу похідну / А.П. Власюк, О.П. Остапчук, О.М. Степанченко // *Вісник Київського ун-ту. Сер.ф.-м.науки*. – 2005. – Т. 2. – С.188.
13. Vlasjuk A.P. A modern approach for software construction of tools for mathematical modeling of mass transfer processes in catalytic porous media / A.P. Vlasjuk, V.V. Zhukovskyy // *Theoretical & Applied Science*. – 2016. – Т.44, №12. – С.69–75.
14. Баркалов К.А. Методы параллельных вычислений / Баркалов К.А. – Н.Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2011. – 124 с.
15. OpenMP.org. – <http://openmp.org/wp/>.
16. Vlasjuk A.P. Nanosurface – a tool for computer modeling of mass transfer process in catalytic porous media / A.P.Vlasjuk, V.V.Zhukovskyy// XXVIII International Conference PDMU.– 2016. – С.122–124.
4. ZHUKOVSKYY, V.V. and VLASYUK, A.P. (2016) Mathematical modelling of vertical migration of radionuclides in catalytic porous media in non-isothermal conditions, *Research on modern systems for manufacture and measurement of components of machines and devices*, science report project CIII-PL-0007, pp. 177-190.
5. VLASYUK, A.P. and ZHUKOVSKYY, V.V. (2015) "Matematychnе modeliuvannia vertykalnoi mihratsii radionuklidiv u katalitychnomu porystomu seredovyschi", *Visnyk Kyivskoho universytetu. Ser. fiz.-mat. nauk*, 1, pp. 89-95.
6. VLASYUK, A. P. and OSTAPCHUK, O. P. (2015) *Matematychnе modeliuvannia perenosu solovykh rozchyniv pry filtratsii pidzemnykh vod u hruntovykh masyvakh*. Rivne: NUVGP.
7. SERHIENKO, I. V., PETRYK, M. R., KHIMICH, O. M., MYKHALYK, D. M., LEKLERK, D. and FRESAR, ZH. (2014) *Matematychnе modeliuvannia masoperenosu v seredovyschakh chastynok nanoporystoi struktury*, Kyiv: Vyd-vo NAN Ukrainy.
8. CHAPLIA, YE. YA., CHERNUKHA, O. YU., HONCHARUK, V. YE., and PABYRIVSKYI, V.V. (2013) "Modeliuvannia protsesiv statsionarnoi hetero dyfuzii rozpadnoi rehovyny u seredovyschi z pastkami" [online], *Modeliuvannia ta informatsiini tekhnolohii*, 70, pp. 96-108.
9. SIMUNEK, J., JACQUES, D., LANGERGRABER, G., BRADFORD, S.A., ŠEJNA, M. and VAN GENUCHTEN, M.TH. (2013) "Numerical modeling of contaminant transport using HYDRUS and its specialized modules". *J. of the Indian Institute of Science*, 93(2), pp. 265-284.
10. VLASYUK, A. P., ZHUKOVSKYY, V. V. and BONDARCHUK, M. M. (2015) "Mathematical Modelling of Vertical Migration of Radionuclides in Catalytic Porous Media with Traps in Linear Case", *Theor. and App.Aspects of Cyb. Proceed. of the 5th Int. Sc. Conf. of Stud. and Young Scient.*, 208-219.
11. SAMARSKIJ, A. A. (1989) *Teoriya raznostnyh shem*, Moskva: Nauka.
12. VLASYUK, A. P., O. P. OSTAPCHUK, and O. M. STEPANCHENKO (2005) "Monotonna riznytseva skhema dlia neliniinoho odnovymirnoho rivniannia parabolichnoho typu, shcho mistyt pershu pokhidnu", *Visnyk KU. Ser. fiz.-mat. nauk.*, Vyp. 2, p.188.
13. VLASYUK, A. P. and ZHUKOVSKYY, V. V. (2016) "A modern approach for software construction of tools for mathematical modeling of mass transfer processes in catalytic porous media", *Theoretical & Applied Science*, 44(12), pp. 69-75.
14. BARKALOV K.A. (2011) *Methods of parallel computations*, N.Novgorod.
15. *OpenMP.org* Available from: <http://openmp.org/wp/>.
16. VLASYUK, A. P., and ZHUKOVSKYY, V. V. (2016) Nanosurface – a tool for computer modeling of mass transfer process in catalytic porous media, *XXVIII International Conference "PDMU"*, pp.122-124.

Надійшла до редколегії 19.08.2017

УДК 519.8

Горбачук В. М.¹, д.ф.-м.н., с.н.с.,
Дунаєвський М. С.¹, аспірант,
Морозов О. О.², магістр

Рівноважні інвестиції у кібербезпеку мережі ланцюгів постачання

¹Інститут кібернетики імені В.М.Глушкова
НАН України, проспект Глушкова 40, Київ
03187
e-mail: GorbachukVasyl@netscape.net

²Делойт, Лесная 5Б, Москва 101000

V.M. Gorbachuk¹, D.Sc.(Phys.-Math.),
M.S. Dunaievskiy¹, Ph.D. student,
O.O. Morozov², M.Sc. (Syst. of Autom.Control)

Equilibrium investments to cybersecurity of supply chain network

¹V.M.Glushkov Cybernetics Institute, NAS of
Ukraine, Glushkov ave., 40, Kyiv 03187
e-mail: GorbachukVasyl@netscape.net

²Deloitte, 5B Lesnaya, Moscow 101000

Розроблено ігрову модель мережі ланцюгів постачання, що складається з ряду роздрібних торговців продуктом і ряду ринків збуту даного продукту, де роздрібні торговці некооперативно конкурують, максимізуючи свої сподівані прибутки шляхом визначення своїх оптимальних трансакцій для продукту, а також оптимальних інвестицій у кібербезпеку, які входять у нелінійні бюджетні обмеження.

Ключові слова: мережа ланцюгів постачання, рівновага Неша, кібербезпека, інвестиції.

The game theory model for supply chain network consisting of a set of retailers selling a product and a set of demand markets buying that product, where retailers compete noncooperatively maximizing their expected profits by determining their optimal transactions for that product as well as the optimal cybersecurity investments entering nonlinear budget constraints, has been developed. The expected profit of each retailer depends on volumes of its transactions with all the markets, its cybersecurity level and general network cybersecurity level as well as on the probability of successful cyberattack versus that retailer dependent on cybersecurity levels. The modified approach of variational inequalities, requiring some assumptions of convexity and compactness, is suggested for application in such a problem of competition and search of Nash equilibria.

Key words: supply chain network, Nash equilibrium, cybersecurity, investments.

Статтю представив д.т.н., проф. Гарашенко Ф.Г.

Переваги споживачів на ринках збуту відбивають функції ціни попиту, які залежать від обсягу попиту на продукт і середнього рівня кібербезпеки у мережі ланцюгів постачання (МЛП). Тоді можна оцінювати вразливість до кібератак як МЛП, так і кожного торговця окремо [1]. Відповідні умови рівноваги Неша можна визначати за допомогою задачі розв'язання певної варіаційної нерівності [2].

Мета роботи – розробити теоретико-ігрову модель МЛП інвестицій у кібербезпеку, яка складається з роздрібних торговців $i = 1, \dots, m$ і ринків попиту $j = 1, \dots, n$. Розрібними торговцями можуть бути продавці споживчих товарів, високотехнологічних або фінансових продуктів. Суттєво, щоб такі торговці працювали в одній галузі та своїми рішеннями могли впливати на рішення інших торговців галузі стосовно обсягу постачання та рівня інвестицій у

кібербезпеку. При цьому важливо вірно оцінювати інвестиції у кібербезпеку, формуючи уявлення про справжню цінність активів інтелектуальної власності.

На відміну від моделей [3–5], у моделі [2, 6] кожний торговець має свої бюджетні обмеження на свої інвестиції у кібербезпеку. Нелінійність цих обмежень ускладнює теоретичні та практичні підходи до розв'язання відповідної ігрової задачі. Відомі застосування теорії ігор до питань безпечності і приватності [7], моделі інвестицій у кібербезпеку (моделі затрати–випуск, моделі інвестиційної віддачі, евристичні моделі тощо), статті з криптографії та мережевої безпеки. Модель [2, 6] застосовує сучасні теорії ігор і варіаційних нерівностей до інвестицій у кібербезпеку, розвиваючи роботу [8] в області моделей мережевої рівноваги для життєво важливих продуктів.

Роздрібним торговцем може бути як магазин

у будівлі чи приміщенні, так і онлайнвий постачальник. У широкому сенсі роздрібним торгівцем може бути надавач фінансових послуг (банківська філія), крамниця споживчих товарів, фізична особа-підприємець тощо. Припустимо, що роздрібні торговці здійснюють трансакції одного й того самого продукту. При електронних платіжних трансакціях між двома сторонами, інвестиції у кібербезпеку мають брати до уваги можливість кібератак, які супроводжуються фінансовою шкодою, втратою репутації, альтернативною вартістю та відповідними розривами. Коли споживачі на ринках збуту здійснюють свої покупки кредитними чи дебітними картками через онлайнну платіжну систему, то виражають свої переваги щодо кібербезпеки МЛП через функції ціни попиту. Ці переваги можуть ґрунтуватися на середній кібербезпеці МЛП, яку називають безпекою МЛП або мережі: напевне, споживачі мають інформацію про безпеку галузі в цілому, а не про безпеку окремого роздрібного торговця. Оскільки роздрібні торговці належать до МЛП, то є вразливими до кібератак через своїх постачальників та/або спільні платіжні системи, а також через спільну критичну інфраструктуру.

Розробимо теоретико-ігрову модель МЛП з конкуруючими роздрібними торговцями, кожний з яких прагне максимізувати свою сподівану корисність, що враховує сподівані виручку, втрати внаслідок кібератаки і витрати на інвестиції у кібербезпеку.

Роздрібні торговці і ринки збуту формують двочастинну структуру МЛП. Спочатку визначимо обмеження кожного роздрібного торговця, а потім – його цільову функцію. Попит d_j на продукт на ринку збуту j має задовольняти рівнянню збереження потоку

$$d_j = \sum_{i=1}^m Q_{ij}, j = 1, \dots, n, \quad (1)$$

де Q_{ij} – невід’ємний обсяг продукту у трансакції між роздрібним торговцем i та споживачами ринку збуту j , обмежений зверху заданою величиною $\bar{Q}_{ij}$:

$$0 \leq Q_{ij} \leq \bar{Q}_{ij}. \quad (2)$$

На відміну від моделі [5], тут кожний торговець характеризується своєю межею $\bar{Q}_{ij}$.

Невід’ємний рівень s_i кібербезпеки роздрібного торговця i обмежений зверху заданим значенням u_{si} :

$$0 \leq s_i \leq u_{si} < 1, \quad (3)$$

де $s_i = 1$ відповідає повній безпеці (яка може не досягатися), а $s_i = 0$ – відсутності безпеки. На відміну від моделі [5], тут кожний торговець характеризується своїм значенням $u_{si} < 1$.

Набуття рівня s_i безпеки пов’язується з функцією $h_i(s_i)$ інвестиційних витрат, яка припускається неперервно диференційованою й опуклою. Тоді для роздрібного торговця i повна безпека відповідає його інвестиціям $h_i(1) = \infty$, а відсутність безпеки – його інвестиціям $h_i(0) = 0$. Такою функцією є, наприклад, нелінійна функція

$$h_i(s_i) = \alpha_i[(1 - s_i)^{-0.5} - 1], \quad (4)$$

де множник α_i дозволяє розрізняти масштаби і потреби роздрібних торговців [3–5]. У моделях [3–5] функції інвестиційних витрат на кібербезпеку входили лише в цільові функції осіб, які приймають рішення (ОПР), але не входили у бюджетні обмеження.

Нехай для кожного роздрібного торговця $i = 1, \dots, m$ його бюджет (budget) на інвестиції у кібербезпеку обмежений зверху заданою величиною B_i :

$$h_i(s_i) \leq B_i. \quad (5)$$

Припустимо, що ймовірність (probability) успішної кібератаки на роздрібного торговця i становить

$$p_i = (1 - s_i)(1 - \bar{s}), \quad (6)$$

де $\bar{s} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m s_k$ – рівень кібербезпеки МЛП, $\bar{v} = 1 - \bar{s}$ – рівень вразливості (vulnerability) МЛП, $v_i = 1 - s_i$ – рівень вразливості роздрібного торговця i [2–7]. З урахуванням співвідношення (1) визначимо функцію ціни попиту на продукт на ринку збуту j

$$\hat{\rho}_j(Q, s) = \rho_j(d, \bar{s}),$$

де $Q \in R_+^{mn}$ – матриця трансакцій Q_{ij} на всіх n ринках збуту всіх m роздрібних торговців, $d \in R_+^n$ – вектор обсягів d_j попиту на продукт на всіх n ринках збуту, $s \in R_+^m$ – вектор рівнів s_i безпеки всіх m роздрібних торговців. Споживчі переваги щодо продукту виражаються обсягами попиту, а також безпекою відповідної МЛП: мабуть, споживачі готові платити за вищу

мережеву безпеку, але така готовність може бути різною для різних споживачів. До того ж, існує інформаційна асиметрія між роздрібними торговцями та споживачами [9, 10] (автор роботи [9] – Нобелівський лауреат 2001 р.): кожний роздрібний торговець i знає свої інвестиції $h_i(s_i)$ у кібербезпеку, а кожний споживач уявляє середній рівень $\bar{s}$ кібербезпеки.

За відсутності кібератаки та інвестицій у кібербезпеку, прибуток роздрібного торговця i дорівнює різниці між його виручкою та витратами

$$f_i(Q, s) = \sum_{j=1}^n Q_{ij} \hat{p}_j(Q, s) - \left(c_i \sum_{j=1}^n Q_{ij} + \sum_{j=1}^n c_{ij}(Q_{ij}) \right), \quad (7)$$

де c_i – витрати роздрібного торговця i , пов'язані з поводженням та обробкою продукту, $c_{ij}(Q_{ij})$ – витрати, пов'язані з трансакцією між роздрібним торговцем i та ринком збуту j .

Враховуючи співвідношення (6), очікувана (expected) фінансова шкода (damage) роздрібного торговця i від кібератаки становить

$$E(D_i) = p_i D_i, \quad (8)$$

де $0 < D_i$ – фінансова шкода, яку зазнає роздрібний торговець i при успішній кібератаці.

Тоді, враховуючи співвідношення (6)–(8), сподівана корисність (utility) роздрібного торговця i становить

$$E(U_i) = (1 - p_i) f_i(Q, s) + p_i [f_i(Q, s) - D_i] - h_i(s_i) = f_i(Q, s) - p_i D_i - h_i(s_i), \quad (9)$$

де $h_i(s_i)$ – інвестиційні витрати цього торговця на кібербезпеку. Враховуючи нерівності (2), (3), (5), допустиму множину для роздрібного торговця i позначимо

$$K_i \equiv \{(Q_i, s_i) : 0 \leq Q_{ij} \leq \bar{Q}_{ij} \forall j; 0 \leq s_i \leq u_{si}; h_i(s_i) \leq B_i\}. \quad (10)$$

Вважаємо, що всі роздрібні торговці некооперативно конкурують у постачанні однорідного продукту (продукт може бути диференційованим [11]), а кожний з них максимізує свою сподівану корисність, обираючи свої значення $Q_i = (Q_{i1}, \dots, Q_{in})$, s_i . Бажано

знайти такий набір значень $(Q^*, s^*) \in K \equiv \prod_{i=1}^m K_i$,

при яких m роздрібних торговців перебувають у стані рівноваги у сенсі Курно–Неша. Лауреат Нобелівської премії 1994 р. Неш узагальнив поняття рівноваги Курно на кількох гравців

(ОПР), кожний з яких діє виключно у своїх власних інтересах, тобто некооперативно.

Набір значень $(Q^*, s^*) \in K$ називають рівновагою Неша для МЛП, якщо для кожного роздрібного торговця $i = 1, \dots, m$ має місце $\forall (Q_i, s_i) \in K_i$ нерівність

$$E(U_i(Q^*, s^*)) \geq E(U_i(Q_1^*, \dots, Q_{i-1}^*, Q_i, Q_{i+1}^*, \dots, Q_m^*, s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_m^*)), \quad (11)$$

тобто будь-який роздрібний торговець i не може в односторонньому порядку збільшити свій очікуваний прибуток порівняно з рівновагою Неша, обираючи свої допустимі значення Q_i, s_i .

Щоб нерівності (11) звести до варіаційної нерівності, спочатку доведемо, що допустима множина K опукла. В силу співвідношень (4) і (5) ця множина містить нелінійні обмеження, на відміну від допустимої множини багатьох мережевих рівноважних задач, пов'язаних з перенавантаженням мереж міського транспорту, ланцюгами постачання чи фінансовими послугами [12–14].

Лема 1. Якщо $h_i(s_i)$ – опукла функція, $i = 1, \dots, m$, то допустима множина K опукла.

Доведемо спочатку опуклість множини

$$\bar{K}_i \equiv \{s_i \in R : h_i(s_i) \leq B_i\}.$$

Справді, для $s_i^1, s_i^2 \in \bar{K}_i$, $\lambda \in [0, 1]$ маємо

$$h_i(s_i^1) \leq B_i \leq h_i(s_i^2),$$

звідки в силу опуклості $h_i(s_i)$ випливає

$$h_i[\lambda s_i^1 + (1 - \lambda) s_i^2] \leq$$

$$\lambda h_i(s_i^1) + (1 - \lambda) h_i(s_i^2) \leq \lambda B_i + (1 - \lambda) B_i = B_i,$$

тобто $\lambda s_i^1 + (1 - \lambda) s_i^2 \in \bar{K}_i$.

Оскільки множина K_i є перетином опуклих множини $\bar{K}_i$, можини двосторонніх обмежень (3) і множини двосторонніх обмежень (2), то є опуклою. Тоді декартовий добуток опуклих множин $K \equiv \prod_{i=1}^m K_i$ також є опуклою множиною.

Оскільки для функції $h_i(s_i)$ інвестиційних витрат, що визначається формулою (4), за умови (3) мають місце нерівності

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_i(s_i)}{\partial s_i} &= \alpha_i [-0.5(1 - s_i)^{-0.5-1} \times (-1)] = \\ &= \frac{\alpha_i}{2} (1 - s_i)^{-1.5} < 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 h_i(s_i)}{\partial^2 s_i} &= (-1.5) \frac{\alpha_i}{2} (1-s_i)^{-1.5-1} \times (-1) = \\ &= \frac{3\alpha_i}{4} (1-s_i)^{-2.5} > 0,\end{aligned}$$

то ця функція опукла.

Теорема 1. Припустимо, у кожного роздрібного торговця $i = 1, \dots, m$ сподівана корисність неперервно диференційована й увігнута відносно змінних Q_i, s_i . Тоді рівні трансакцій продукту і безпеки $(Q^*, s^*) \in K$ є рівноважними за Нешем для МЛП тоді й тільки тоді, коли задовольняється варіаційна нерівність

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial E(U_i(Q^*, s^*))}{\partial Q_{ij}} (Q_{ij} - Q_{ij}^*) + \\ &+ \sum_{i=1}^m \frac{\partial E(U_i(Q^*, s^*))}{\partial s_i} (s_i - s_i^*) \leq 0 \quad \forall (Q, s) \in K, \quad (13)\end{aligned}$$

де в силу співвідношень (6), (7), (9) мають місце рівності

$$\begin{aligned}\frac{\partial E(U_i(Q^*, s^*))}{\partial Q_{ij}} &= \frac{\partial f_i(Q^*, s^*)}{\partial Q_{ij}} = \hat{\rho}_j(Q^*, s^*) + \\ &+ \sum_{k=1}^n Q_{ik}^* \frac{\partial \hat{\rho}_k(Q^*, s^*)}{\partial Q_{ij}} - c_i - \frac{\partial c_{ij}(Q_{ij}^*)}{\partial Q_{ij}};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E(U_i(Q^*, s^*))}{\partial s_i} &= \frac{\partial f_i(Q^*, s^*)}{\partial s_i} - \frac{\partial [p_i(s^*) D_i]}{\partial s_i} - \\ &- \frac{\partial h_i(s_i^*)}{\partial s_i} = \sum_{k=1}^n Q_{ik}^* \frac{\partial \rho_k(Q^*, s^*)}{\partial s_i} - \frac{\partial h_i(s_i^*)}{\partial s_i} + \\ &+ D_i \left(\bar{s}^* - 1 - \frac{1-s_i^*}{m} \right);\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_i(Q^*, s^*)}{\partial s_i} = \sum_{k=1}^n Q_{ik}^* \frac{\partial \rho_k(Q^*, s^*)}{\partial s_i};$$

$$\frac{\partial [p_i(s^*) D_i(Q^*)]}{\partial s_i} = D_i \frac{\partial p_i(s^*)}{\partial s_i} =$$

$$= D_i \left[-(1-\bar{s}^*) - \frac{1-s_i^*}{m} \right],$$

$$\frac{\partial p_i(s^*)}{\partial s_i} = \frac{\partial [(1-s_i)(1-\bar{s})]}{\partial s_i} =$$

$$= (1-s_i^*) \frac{\partial (1-\bar{s})}{\partial s_i} - (1-\bar{s}^*),$$

$$\frac{\partial (1-\bar{s})}{\partial s_i} = \frac{\partial \left(1 - m^{-1} \sum_{k=1}^m s_k \right)}{\partial s_i} = -\frac{1}{m}.$$

Скористаємося опуклістю допустимої множини K за лемою 1. За умов теореми 1 розв'язання задачі рівноваги Неша рівносильне розв'язанню відповідної варіаційної нерівності [15]. Перепишемо варіаційну нерівність (11) у стандартній формі скалярного добутку

$$\langle F(X^*), X - X^* \rangle \geq 0 \quad \forall X \in K, \quad (14)$$

де $F: K \rightarrow R^n$ – деяка задана неперервна функція, K – замкнута опукла множина. Для цього визначимо вектор-стовпці $X = (Q, s)$ та $F(X) = (F^1(X), F^2(X))$ вимірності $(mn + m)$, що при $X \in K = K$ задовольняють рівнянням

$$\frac{\partial E(U_i(Q^*, s^*))}{\partial Q_{ij}} = F_{ij}^1(X), \quad \frac{\partial E(U_i(Q^*, s^*))}{\partial s_i} = F_i^2(X).$$

Такі рівняння задовольняються, коли оператор $F(X)$ має властивості потенційності [16].

За умов (12) та $B_i = \infty = \bar{Q}_{ij}$, $u_{si} \leq 1$ [5] задача (13) зводиться до подібної задачі [5], що має значно простішу допустиму множину.

Теорема 2. Варіаційна нерівність (14) має розв'язок $X^* = (Q^*, s^*) \in K$.

Дійсно, варіаційна нерівність (14) має розв'язок, якщо функція $F(X)$ неперервна, а допустима множина K компактна [17].

Теорема 3. Варіаційна нерівність (14) має єдиний розв'язок $X^* = (Q^*, s^*) \in K$.

Достатньо показати, що функція $F(X)$ строго монотонна на K [17]:

$$\langle F(X^1) - F(X^2), X^1 - X^2 \rangle > 0 \quad \forall X^1, X^2 \in K, \\ X^1 \neq X^2.$$

У свою чергу, функція $F(X)$ є строго монотонною на K , якщо її якобіан $\nabla F(X)$ є позитивно визначеним на K .

Оскільки нелінійні обмеження (5) у допустимій множині K можуть ускладнювати чисельне розв'язання варіаційної нерівності (13), то виведемо альтернативну варіаційну нерівність, яка використовує множник Лагранжа $\lambda_i \geq 0$ для кожного такого обмеження. Позначимо $\lambda \in R_+^m$ вектор усіх цих множників. Тоді замість допустимої множини (10) використовуватимемо множину

$$K_i^1 \equiv \{(Q_i, s_i) : 0 \leq Q_{ij} \leq \bar{Q}_{ij} \forall j; 0 \leq s_i \leq u_{si}\},$$

а замість множини K – множини

$$K^2 = R_+^m \times \prod_{i=1}^m K_i^1.$$

Теорема 4. Вектор $(Q^*, s^*, \lambda^*) \in K^2$ є розв'язком варіаційної нерівності (13) тоді й тільки тоді, коли є розв'язком альтернативної варіаційної нерівності

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial L_i(Q^*, s^*, \lambda^*)}{\partial Q_{ij}} (Q_{ij} - Q_{ij}^*) + \\ & + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L_i(Q^*, s^*, \lambda^*)}{\partial s_i} (s_i - s_i^*) + \\ & + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L_i(Q^*, s^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} (\lambda_i - \lambda_i^*) \leq 0 \end{aligned}$$

$$\forall (Q, s, \lambda) \in K^2,$$

де використано лагранжіан (Lagrangian)

$$L_i = E(U_i(Q, s)) + \lambda_i [h_i(s_i) - B_i],$$

Список використаних джерел

1. Горбачук В.М. Економічні стимули до спільного володіння безпековою інформацією: узагальнення/ Горбачук В.М., Мартинів А.М. // Теоретичні і прикладні проблеми фізики, математики та інформатики. Ч. 2. – К.: НТУУ «КПІ», 2009. – С. 39–40.
2. Gorbachuk V. Equilibria in supply chain networks/ Gorbachuk V., Morozov O. // PDMU (August 14–19, 2017, Vilnius, Lithuania). – Kyiv, 2017. – P. 55.
3. Shetty N.G. Design of network architectures: role of game theory and economics. / Shetty N.G. - PhD dissertation. Technical Report UCB/EECS-2010-91. – Berkeley, CA: Electrical Engineering and Computer Sciences, University of California at Berkeley, 2010.
4. Shetty N. Competitive cyber-insurance and Internet security / Shetty N., Schwartz G., Felegahazy M., Walrand J. // Proceedings of the 8-th Workshop on the Economics of Information Security (WEIS 2009). – London, UK: University College London, 2009.
5. Nagurney A. A supply chain game theory framework for cybersecurity investments under network vulnerability / Nagurney A., Nagurney L.S., Shukla S. // Computation, cryptography, and network security. N.Daras, M.Th.Rassias (eds.) – Springer International Publishing, 2015. – P. 381–398.

$$\frac{\partial L_i(Q^*, s^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} = h_i(s_i) - B_i.$$

Таким чином, для розв'язання задачі пошуку рівноважних інвестицій у кібербезпеку МЛП можна запропонувати ітеративний алгоритм, який на кожній ітерації дає в явному вигляді співвідношення для трансакцій продукту, рівнів безпеки та множників Лагранжа, пов'язаних з бюджетними обмеженнями. Цей алгоритм можна застосувати до обчислення розв'язків широкого кола чисельних прикладів інвестицій у кібербезпеку МЛП.

Чисельні приклади, скажімо, для кібератаки на Україну 27 червня 2017 р., сприятимуть глибшому розумінню впливу додаткових роздрібних торговців, бюджетних змін, функцій ціни попиту, фінансових збитків на рівноважні трансакції продукту та інвестиції у кібербезпеку, а також на вразливість МЛП чи роздрібного торговця при бюджетних обмеженнях.

References

1. GORBACHUK, V.M., MARTYNIV, A.M. (2009) Economic incentives to joint possession by security information: generalizations, *Theoretical and applied problems of physics, mathematics and informatics*, P. 2. Kyiv, NTUU «KPI», pp. 39–40.
2. GORBACHUK, V. and MOROZOV, O. (2017) Equilibria in supply chain networks, *PDMU (August 14–19, 2017, Vilnius, Lithuania)*, Kyiv, p. 55.
3. SHETTY, N.G. (2010) Design of network architectures: role of game theory and economics. PhD dissertation. *Technical Report UCB/EECS-2010-91*. Berkeley, CA, Electrical Engineering and Computer Sciences, University of California at Berkeley.
4. SHETTY, N., SCHWARTZ, G., FELEGEHAZY, M. and WALRAND, J. (2009) Competitive cyber-insurance and Internet security, *Proceedings of the 8-th Workshop on the Economics of Information Security (WEIS 2009)*, London, UK, University College London.
5. NAGURNEY, A., NAGURNEY, L.S. and SHUKLA, S. (2015) A supply chain game theory framework for cybersecurity investments under network vulnerability, *Computation, cryptography, and network security*. N.Daras, M.Th.Rassias (eds.) Springer International Publishing, pp. 381–398.

6. Nagurney A. A supply chain network game theory model of cybersecurity investments with nonlinear budget constraints/ Nagurney A., Daniele P., Shukla S. // *Annals of operations research*. – 2017. – 248(1). – P. 405–427.
7. Manshei M.H. Game theory meets networks security and privacy / Manshei M.H., Zhu Q., Alpcan T., Basar T., Hubaux, J.-P. // *ACM computing surveys*. – 2013. – 45 (3). – P. 25:1–25:39.
8. Toyasaki F. A variational inequality formulation of equilibrium models for end-of-life products with nonlinear constraints/ Toyasaki F., Daniele P., Wakolbinger T. // *European journal of operational research*. – 2014. – 236. – P. 340–350.
9. Akerlof G.A. The market for lemons: quality uncertainty and the market mechanism/ Akerlof G.A. // *Quarterly journal of economics*. – 1970. – 84(3). – P. 488–500.
10. Горбачук В.М. Проектирование контрактов в условиях риска / Горбачук В.М., Бойко В.В., Русанов И.А. // *Теория оптимальных решений*. – 2011. – № 10. – С. 116–122.
11. Gorbachuk V.M. Cournot–Nash equilibria and Bertrand–Nash equilibria for a heterogenous duopoly of differentiated products/ Gorbachuk V.M. // *Cybernetics and Systems Analysis*. – 2010. – V. 46. – № 1. – P. 25–33.
12. Nagurney A. Network economics: a variational inequality approach. 2-nd, revised edition / Nagurney A. – Boston, MA: Kluwer Academic Publishers, 1999.
13. Nagurney A. Supply chain network economics: dynamics of prices, flows, and profits / Nagurney A. – Cheltenham, UK: Edward Elgar Publishing, 2006.
14. Daniele P. Dynamic networks and evolutionary variational inequalities /Daniele P. – Cheltenham, UK: Edward Elgar Publishing, 2006.
15. Gabay D. On the uniqueness and stability of Nash equilibria in noncooperative games / Gabay D., Moulin H. // *Applied stochastic control in econometrics and management science*. A.Bensoussan, P.Kleindorfer, C.S.Tapiero (eds.) – Amsterdam, The Netherlands: North-Holland, 1980. – P. 271–294.
16. Gorbachuk V. Methods for Nash equilibria search / Gorbachuk V. // *Nonsmooth analysis and its applications to mathematical economics*. – Baku: Ac. Sci. USSR, 1991. – P. 65.
17. Киндерлерер Д. Введение в вариационные неравенства и их приложения/ Киндерлерер Д., Стампакия Г. – М.: Мир, 1983. – 256 с.
6. NAGURNEY, A., DANIELE, P., SHUKLA, S. (2017) A supply chain network game theory model of cybersecurity investments with nonlinear budget constraints, *Annals of operations research*, 248(1), pp. 405–427.
7. MANSHEI, M.H., ZHU, Q., ALPCAN, T., BASAR, T., HUBAUX, J.-P. (2013) Game theory meets networks security and privacy, *ACM computing surveys*, 45(3), pp.25:1–25:39.
8. TOYASAKI, F., DANIELE, P., WAKOLBINGER, T. (2014) A variational inequality formulation of equilibrium models for end-of-life products with nonlinear constraints, *European journal of operational research*, 236, pp. 340–350.
9. AKERLOF, G.A. (1970) The market for lemons: quality uncertainty and the market mechanism, *Quarterly journal of economics*, 84(3), pp. 488–500.
10. GORBACHUK, V.M., BOYKO, V.V., RUSANOV, I.A. (2011) Contract design at risk conditions, *Theory of optimal decisions*, № 10, pp. 116–122.
11. GORBACHUK, V.M. (2010) Cournot–Nash equilibria and Bertrand–Nash equilibria for a heterogenous duopoly of differentiated products, *Cybernetics and systems analysis*, vol. 46, № 1, pp. 25–33.
12. NAGURNEY, A. (1999) *Network economics: a variational inequality approach*. 2-nd, revised edition, Boston, MA, Kluwer Academic Publishers.
13. NAGURNEY, A. (2006) *Supply chain network economics: dynamics of prices, flows, and profits*, Cheltenham, UK, Edward Elgar Publishing.
14. DANIELE, P. (2006) *Dynamic networks and evolutionary variational inequalities*, Cheltenham, UK: Edward Elgar Publishing.
15. GABAY, D., MOULIN, H. (1980) On the uniqueness and stability of Nash equilibria in noncooperative games, *Applied stochastic control in econometrics and management science*, A.Bensoussan, P.Kleindorfer, C.S.Tapiero (eds.) Amsterdam, The Netherlands, North-Holland, pp. 271–294.
16. GORBACHUK, V. (1991) Methods for Nash equilibria search, *Nonsmooth analysis and its applications to mathematical economics*, Baku, Ac. Sci. USSR, p. 65.
17. KINDERLEHRER, D., STAMPACCHIA, G. (1983) *Variational inequalities and their applications*, New York, NY, Academic Press.

Надійшла до редколегії 19.08.2017

УДК 517.3

Горджеладзе І., академічний доктор

Мобільні технології у викладанні іноземної мови

Батумський Державний Університет
імені Шота Руставелі
6010, Грузія, Батумі, вул. Ніношвілі, 35
e-mail: ibraim.didmanidze@bsu.edu.ge

I.Gorjeladze, academian doctor

Mobile technologies in foreign language teaching

Batumi Shota Rustaveli State University
6010, Georgia, Batumi, Ninoshvili st., 35
e-mail: ibraim.didmanidze@bsu.edu.ge

Мобільні технології широко використовуються у всіх сферах людської діяльності. За останній час вони також стали невід'ємною частиною системи освіти. Підвищений інтерес до мобільних технологій може бути викликаний тим, що в сфері освіти вони можуть з відволікаючого чинника перетворитися в корисний засіб, що сприяє освітньому процесу. Використання мобільних технологій може бути доцільним для вчителів, студентів, їх батьків, а також адміністративних органів. Багато вчених припускають, що в найближчому майбутньому комп'ютери і мобільні телефони перетворяться в універсальні портативні пристрої, інтегровані між собою.

Ключові слова: мобільні пристрої, інформаційні технології, QR- коди, освітній процес.

Mobile technologies are widely used in all social spheres of human life. They have recently become an essential part of educational system as well. The increased interest to mobile devices can be explained by the fact that in the field of education they can be turned from a distracting factor into a useful educational tool. The use of mobile technologies can be helpful for teachers, students, their parents and governing bodies. Many researchers forecast that in the near future computers and mobiles will become universal portable devices, integrated between each other.

Key Words: mobile devices, information technologies, QR-codes, educational process, mobile learning.

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

INTRODUCTION

As we know, computers have been used for educational purposes for a long time. However, the transition to mobile devices has introduced a new quality into this process. The analysis of the use of mobile technologies has showed that their wide consumption is directly related to their energetic autonomy (mobile devices do not require permanent connection to stationary power supplies), constant communication accessibility, portability, which provides, in fact, spatial mobility, as well as a set of built-in sensors and devices (spatial position, recording and playback of media information, etc.). It is obvious that the use of mobile devices in education also leads to the possibility to organize process of education "at any time in any place". Mobile devices have more motivational advantages to be used in educational field than stationary computers and even laptops:

- they are light and their spatial orientation options make them more suitable not only for reading, but also for reproducing any digital educational content;

- their ability to quickly turn on and switch between tasks allows a student to resume the learning process in the case of delay very fast;
- modern sensor interfaces provide a high degree of user interactivity;
- they are highly mobile and even while moving students can instantly perceive content and provide mobile data collection or recordings of lectures;
- the development of applications for mobile platforms is not expensive, and the number of such applications for education (free or not expensive) is growing rapidly;
- a long battery life ensures continuous operation of mobile devices during the school day.

THE MAIN PART

The use of mobile technologies in educational process is called Mobile Learning, or mLearning. The implementation of various types of classes, using informational communication technologies in teaching, allows formulating the pedagogical

conditions for their use: a sufficient level of information competence of a teacher and a student; modeling of the educational environment that reflects the content and is presented by the teaching resources of the Internet and multimedia means.

A continuous updating of existing software and the advances in computer technology make the university teachers constantly develop themselves, mastering a new material and adapting this new information to students. Let's analyze the possibilities of using information and communication technologies in the main activities of a foreign language teacher.

Information technologies are widely used in different educational activity of a university teacher (lectures, practical classes, educational games; project management-activities of students, diploma projects).

In order to successfully apply information technologies at work, a teacher should be well aware of the various types of informational and communication technologies and be able to practically apply some of them, to organize educational-cognitive activity of students in new conditions.

Teachers pay special attention to the use of mobile technologies in optimizing the work of students. According to the data of recent researches, over 90% of information is presented in digital form, and a personal communication between people by mobile devices every day is equivalent to the retelling of a content of approximately 6 newspapers. A total Internetization, a desire for information and "wireless" freedom lead to the fact that mobile devices begin to play the role of the "third screen" (after television and computers) of information, the users of which are rapidly increasing, providing wireless Internet surfing. Therefore, today it is very important to have the skills of using mobile devices in order to feel comfortable in a dynamic information space, confronting a wide range of types of media resources.

It is hard to imagine a modern student without any of the mobile devices. Mass use and relative availability make them an excellent technical tool for organizing and providing an educational process.

We should also note the advantages of using QR-codes in teaching process. QR code (Quick Response) is a matrix code (two-dimensional barcode) developed by the Japanese company Denso-Wave in 1994. The huge popularity of barcodes in Japan led to the fact that a large amount of information encrypted in them, soon ceased to satisfied the industry. The Japanese began to search

new methods of coding small amounts of information in a graphic picture [1].

Unlike the old barcode, which is scanned with a thin beam, the QR code can be defined by a smartphone sensor or camera as a two-dimensional image. In comparison to other barcodes, QR-code has several advantages: it can contain a large amount of digital and text information in any language, it has a high recognition speed, it can be read in any direction. QR-code can be read by a camera on your phone, computer, iPad or any tablet device.

Since 2000 QR codes have become widespread almost in all fields of social life: they could be found on a large number of posters, packages and goods; they are actively used by museums, in the field of tourism; they can be easily understood because they are installed in several languages [2].

QR codes are visually represented in the form of black and white squares. QR-code works for motivation, the ability to hide compactly a large amount of information and quickly extract it if necessary.

With the growing number of smartphones' and tablets' owners, QR-technologies are becoming more and more popular and affordable. Students willingly apply technical innovations both in everyday life and in the educational process. For example, QR codes placed in the library, allow students to find electronic versions of books easily, to get links to additional materials, to create their own codes, to share their scientific work.

The first lesson how to use QR-codes begins with showing how it works. The first step is mastering the skills of encoding information. There are numerous online tools for generating QRcodes, which you can use at the lesson, for example: <http://www.qrstuff.com>, QRDroid. A variety of information can be encoded: a small text fragment, a website address, a phone number or e-mail address.

The next step is the familiarization with the decoding of information. There are numerous applications for smartphones and iPads that can be used for this operation: QRReader, QRDroid, QRScanner, NeoReader, iMatrix, BeeTag and others. Most QR-code readers can be installed for free. A classroom should be provided with a high quality Wi-Fi and devices, which can be connected to the Web in order to successfully use this technology.

In the educational process QR codes can be used in different ways: from playing games to creating a resume. The easiest way is to print and place QR-codes on information sheets or posters for more information about planned events, competitions, educational sites, etc [3].

The development of the mobile Internet and devices opens new opportunities in the field of education. A new educational trend Mobile Learning has all the chances to become an educational mainstream. We consider that mLearning can be widely used at school, university, for distance and corporate training. In practice the analysis has shown that QR codes are actively used in educational processes.

CONCLUSION

QR codes are quite convenient for educational process: they can be added with links to sources in presentations, textbooks, they can be applied to real objects in classrooms (for example, posters, boards). These technologies allow to be mobile, i.e. to conduct educational process not from a fixed location, for example, at university, but from any other place with free Wi-Fi. QR codes allow students an access to links to multimedia sources: video clips, audio, links to websites, tasks and pictures can be encoded into QR-codes. It is enough to show a group a next code and it can be quickly scanned (for example, watching a video on the YouTube), thus adding and completing the given part of a lecture.

Список використаних джерел

1. Bagdanov A. «QR coder» Of Interactivity WEB services for education. [Electronic resource]. [Access mode: <https://sites.google.com/site/badanovweb2/home/qr-coder>.]
2. Isakova S. N. Formation of pedagogical college students' readiness to use information communication technologies in professional activity»: synopsis/ Isakova S. N. // PhD in Pedagogical Sciences, Novgorod, 2005.
3. Kruchinina G. A. Methodical work of a teacher in conditions of use of new educational information technologies / Kruchinina G.A. // Problems of theory and practice in the training of a modern specialist. Interuniversity collection of scientific works. N. Novgorod: publ. NGLU. - 2003.
4. Gorjeladze I. Computer Linguodidactics in English Language Teaching. / Gorjeladze I. // XXX International Conference "Problems of decision making under uncertainties" (PDMU-2017). Abstracts. August 14-19, 2017, Vilnius, Lithuania. - P. 56.

Such a process makes education more modern and technological. On the other hand, the quality of lectures increases because the information is perceived more extensively through visual, audible and tactile channels. QR codes in education allow using the maximum of perception channels. Teachers can use QR-codes for teaching foreign languages through games: a teacher encrypts the questions into the QR codes, and the students answer them and leave their answers on the paper strips next to the printed QR codes, attached to the board / wall. Reading questions using QR codes motivates students more, makes them focus on the material and memorize it. The printed QR-codes can be used inside the university attached to different rooms with a link to video, audio or a whole photo album. This technique expands the exposition not only with explanations, but also with additional materials like a mini-film or even a game based on the exhibition. The use of information and communication technologies in various activities of a teacher contributes to improving the effectiveness of educational process, raising the level of methodical and research work [4].

References

1. BAGDANOV, A. (2016) «QR coder» Of Interactivity WEB services for education. [Electronic resource]. [Access mode: <https://sites.google.com/site/badanovweb2/home/qr-coder>.]
2. ISAKOVA, S.N. (2005) *Formation of pedagogical college students' readiness to use information communication technologies in professional activity»: synopsis*, Abstract of PhD dissertation in Pedagogical Sciences, Novgorod, Russia.
3. KRUCHININA, G. A. (2003) *Methodical work of a teacher in conditions of use of new educational information technologies*, Problems of theory and practice in the training of a modern specialist. Interuniversity collection of scientific works, N. Novgorod, publ. NGLU.
4. GORJELADZE, I. (2017) "Computer Linguodidactics in English Language Teaching", *XXX International Conference "Problems of decision making under uncertainties"* (PDMU-2017). Abstracts. August 14-19, 2017, Vilnius, Lithuania, pp. 56.

Надійшла до редколегії 19.08.2017

УДК 519.87

Джалладова І., д.ф.-м.н., проф.

Стохастична модель просторово-часової еволюції декількох популяцій

Київський Національний Економічний
Університет, Київ, просп. Перемоги, 54/1
e-mail: idzhalladova@gmail.com

Dzhalladova I., D.Sc. (Phys.-Math.), prof.

A stochastic spatial-temporal multiple species evolution model

Kyiv National Economic University, Ukraine, Kyiv,
Peremogy ave., 54/1
e-mail: idzhalladova@gmail.com

Запропонована нова стохастична модель співіснування на спільній території декількох популяцій тварин, що описується системою рівнянь у частинних похідних. Коректність задачі Коші для даної моделі в абстрактних ймовірнісних гільбертових функціонально-аналітичних рамках була раніше досліджена нами в роботі [3]. За певних умов на коефіцієнти дифузії та вхідні дані також була отримана експоненційна стійкість у середньому квадратичному розв'язків запропонованої системи. В даній роботі, обмежуючись випадком двох конкуруючих видів – червоної та сірої білок, наведено детальний огляд сучасної літератури та підібрано статистичну базу, необхідну для оцінки параметрів нашої моделі.

Ключові слова: стохастична модель, динаміка популяцій, сірі та червоні білки в Європі, експоненційна стійкість у середньому квадратичному.

We present a new stochastic PDE model describing the spatial-temporal evolution of multiple animal species dwelling on a common territory. The well-posedness of the associated Cauchy problem in an abstract probabilistic Hilbert-space framework has earlier been studied in our work [3]. Under appropriate conditions on the diffusion coefficients and the source terms, the exponential stability in the mean square has also been established. In the present article, we focus on the case of two competing species – the red and the gray squirrel – and give a detailed recent literature overview along with a summary of most important statistical data crucial for estimating the parameters of our model.

Key Words: stochastic PDE model, population dynamics, red and gray squirrels in Europe, exponential stability in the mean square.

Представлено д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

I. INTRODUCTION

We propose a second-order parabolic PDE system with random parameters to model the spatial-temporal evolution of multiple species dwelling on a common territory. For the associated stochastic Cauchy problem, the global stability and long-time behavior were studied in a probabilistic weak functional-analytic framework under appropriate conditions on the data [3]. In this paper, an empirical study on the special case of two animal species is presented.

Monographs [1, 2] by Dautray & Lions and Okubo & Levin as well as our own earlier work [3] are used as a methodological base of this paper. Further references include the works [9-12].

II. MODELLING THE GRAY AND RED SQUIRELLS IN EUROPE: HISTORICAL OVERVIEW

Competitive interactions between introduced (or intruding) and native species have been shown in several studies [4, 5, 6, 7, etc] quoted (mostly *expressis verbis*) and summarized below. All author name-year quotations are made according to the reference list from the aforementioned papers. In Europe, the gray squirrel was introduced to Great Britain on more than 30 occasions between 1876 and 1929 and to Ireland in 1913. At least 20 separate introductions took place in Italy. Presently, the range of introduced gray squirrel populations covers most of England and Wales, part of Scotland, the eastern part of Ireland, as well as mane areas in Northwestern Italy and a location in central Italy. The spread of gray squirrel in Great Britain and

Ireland has been associated with dramatic decline of the native red squirrel. This replacement is caused by competition for food resource between the two species that reduces juvenile body growth and recruitment, and female breeding success in red squirrel. The replacement is also diseasemediated, as gray squirrels act as a reservoir host to a squirrel poxvirus that causes high mortality in red squirrels (Sainsbury et al. 2000; Tompkins et al. 2002; Rushton et al. 2006).[8] Recently, screening of macro-parasites in Italy is investigating whether other parasite-mediated competition mechanisms might be involved. In 1970-s red squirrels were still wide-spread and grays were restricted to forests near the introduction site.

“By 1990, gray squirrels had increased their range to 220 km², which coincided with the disappearance of native squirrels from 33 squares inside this range. The invasive species continued its spread occupying an area of 2,016 km² in 2010; within this area red squirrels went extinct in 88 squares. Overall, from 1970 to 2010 red squirrel in 62 of 2x2 km² and were replaced by gray squirrels. The spread of the alien species was slow in the first 20 years, but in the successive two decades. Nevertheless, the spread was slower than in Ireland and England. Gray squirrels adapt to climate and habitats in both North and South Europe causing extinction of the native red squirrel” [4]. In Ireland, the red squirrel remains widespread and locally abundant and is present in all but two counties. The gray squirrel is spreading and impacting biodiversity and commercial forestry in Great Britain, where it is a serious pest for its impact on trees through bark stripping (Mayle et al. 2003; Gurnell et al. 2008). In Italy, damage in plantations or to crops is still limited (Signorile and Evans 2007). “However, not everywhere has the species proven to be invasive. In South Africa, the gray squirrel has been introduced to the Cape Peninsula more than a century ago. Here, after an initial spread the species remained confined to agricultural and afforested environments, not being able to invade native ecosystems (Long 2003). In Australia the species thrived for some decades in two areas in Melbourne and then became extinct (Long 2003), while it was eradicated from another (Peacock 2009). Until now, spatially explicit population dynamics models have been used to forecast the future spread of the gray squirrel within Italy and in neighbouring countries and the risk that it poses to the red squirrel “(Lurz et al. 2001; Tattoni et al. 2005, 2006; Bertolino et al. 2008)[4]. However,

published information on the spatial spread of the gray squirrel and on the red squirrel is still limited (Wauters et al. 1997)[6]. A database on red and gray squirrel presence in Piedmont, the region where the first introduction of the American species in Italy took place, was used to show the spread of the introduced species and the impact on the native one. It has been investigated whether the gray squirrel is replacing the red squirrel in the area of spread. Further, the hypothesis that the gray squirrel had adapted to Italian habitats was tested, comparing the spread rate of the species in this country in respect to the rates recorded in England and Ireland [7]. If the replacement of the red squirrel by the American species is confirmed in Italy, the future diffusion of the gray squirrel beyond the Italian border represents a serious threat for the survival of the native species in the long-term at a European scale. The study was carried out in Piedmont, a region in northwestern Italy. Piedmont can be divided into four main geographical areas: the Alps (with peaks above 1,500 m a.s.l.), the pre-Alps (with peaks below 1,500 m a.s.l.), inland low-hills and Apennines (the hills bordering the River Po, Monferrato, Langhe, and Apennines uplands), and lowlands (including wide Alpine valley floors below 600 m a.s.l.). The region covers 25,383 km². Most of the plain and hilly area is covered by agricultural lands, Alps, and Apennines, and extremely reduced in lowlands.

The reconstructed distribution of the red squirrel in the area of the gray squirrel invasion in Piedmont before 1970 shows that the native species was widely distributed. “In 1970 gray squirrels were still restricted to the Stupinigi forests, the site of first introduction, where both species coexisted. The last observation of a red squirrel at Stupinigi occurred in the 1979 to 1980 winter (Wauters et al. 1997). By 1990, gray squirrels had drastically increased their range to 220 km². Concomitantly, in this area red squirrels disappeared from 33 292 km² where they were previously recorded. By 2000, the range of the invasive species had increased to 881 km² and red squirrels went extinct from an additional 30 squares. In 2010 the gray squirrel range reached an area of 2,016 km² between the cities of Turin and Cuneo. During these 10 years, the red squirrel disappeared in another 58 squares.” Hence, from 1970 to 2010 the red squirrel went extinct in 120 out of 194 (61.9 by the gray squirrel. Overall, the red squirrel is no longer present in an area of 1,689 km² that was previously occupied by the species. Among 153 woodland patches inside the gray squirrel range

where red squirrels were present in 1970 and went extinct after the arrival of the introduced species. There are no indications of any woodlot in which red squirrels have gone extinct in the absence of gray squirrel. Between 1970 and 2010, the gray squirrel area of occupancy increased with a pattern corresponding to the first part of a logistic curve. In the same period, the area of occupancy of the red squirrel decreased linearly [4]. The linear spread of the colonization by the alien species was low in the first 20 years of our survey (from 1970 to 1990: 0.33 km/year) and doubled in the successive two decades from 1990 to 2010 equal from 0.56 to 0.65 km/year. Accordingly, the *two-dimensional diffusion coefficient increases from 0.03 km²/year from 1970 to 1990 to 0.10 or 0.13*. "It has been shown that the gray squirrel had adapted to habitats in northern Italy and is able to spread in a highly fragmented landscape. Having reached the hills and approaching the Alps where large forests are present, a higher dispersal rate in the future is expected. The Piedmont population is only one of the many populations that are already present in Italy. These multiple introductions increase the risks posed by the alien species. The probable high genetic variability of different populations and the presence of animals in areas with large forests may result in a spread even faster than predicted from recent spatially explicit population dynamics modeling (Lurz et al. 2001; Tattoni et al. 2005, 2006; Bertolino et al. 2008). In Italy the spread of the gray squirrel coincides with the local extinction of the red squirrel. Hence, gray squirrel easily adapts to climate and habitats of North and South Europe and replaces the native squirrel species. The diffusion of the gray squirrel beyond the Italian border or the introduction of the American species in other countries would represent a serious threat for the survival of the red squirrel in the long-term at a European scale. The starting of a LIFE funded project with the aim to control or eradicate the gray squirrel in North Italy (www.rossoscoiattolo.eu) and the recent trade ban of gray squirrels in Italy (Inter-ministerial decree approved December 24th 2012) and trade restrictions at the European level (Commission Regulation n. 101/2012 of 6 February 2012 amending Council Regulation No 338/97 on the protection of species of wild fauna and flora by regulating trade there in area first step in reducing the risk, but their real effectiveness will have to be evaluated. Finally, it must be stressed that the gray squirrel was deliberately introduced in Europe, as occurred in other parts of the world with many other

vertebrates [6]. The availability in pet shops of exotic species that may threaten native species if released, represents a high-risk pathway for new invasive introductions. Therefore, the management of this risk should include the regulation of the pet trade with the ban of species that are considered or suspected to be potentially invasive.

III. MATHEMATICAL STATEMENT OF THE PROBLEM AND WELL-POSEDNESS

Consider a model describing the temporal evolution of multiple biological species (e.g., the gray and the red squarells) dwelling on a common territory parametrized by a bounded domain $G \in \mathbb{R}^d$. Whereas we want our model to account for the spatial distribution of the species including the diffusion and drifting phenomena, for the sake of simplicity, the age structure and (possible) morphological differences in the species are neglected, etc. In addition to the nonlinear local interaction between the species, stochastic parameters are incorporated into the model to better describe the environmental impact on the species. A detailed overview on related (stochastic and deterministic) models is given in [2].

Let $\xi(t)$ and $\eta(t)$, $t > 0$ be random processes taking their values in some spaces of x -dependent functions such that $\xi(t, x)$ and $\eta(t, x)$ describe the environmental, climatic or any other conditions at time $t \geq 0$ and space point $x \in G$.

Let $u_i(t, x)$ ($i = 1, 2$) denote the population density of the i -th species at time $t \geq 0$ at point $x \in G$. Consider the vector function $u = (u_1, u_2)^T$ and its Jacobian matrix ∇u . In the following, we employ the Einstein's summation convention. Imposing a continuity equation and a Fick-type constitutive relation (reminiscent of the Fourier law of heat conduction) between the flux and the concentration gradient, we arrive at the equation

$$\begin{aligned} \partial_t u_i(t, x) &= \partial_{x_j} (a_{ijkl}(t, x, u(t, x), \nabla u(t, x), \xi(t)) \times \\ &\partial_{x_j} u_k(t, x) + b_i(t, x, \eta(t), u(t, x), \nabla u(t, x)), \end{aligned} \quad (1)$$

with boundary

$$u_i(t, x) = 0, i = 1, 2 \quad (2)$$

and initial conditions

$$u_i(0, x) = u_i^0(x) \text{ for } x \in G. \quad (3)$$

In Equations (1)-(3), the following quantities are involved: $b_i(t, x)$ - stands for the local animal (net) "creation" intensity; u_i^0 - a size of the i -th species at the initial point time.

The well-posedness and long-time behavior of Equations (1)-(3) in separable Hilbert spaces H, V and probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ have been studied in [3].

IV. CONCLUSION AND DISCUSSION

A brief overview of existence and long-time behavior results for Equations (1)-(3) is given and

empirical studies on squirrel population dynamics in Europe are summarized. Our further goal is use the empirical data to estimate the parameters of our model (1)-(3) and subsequently use the model to predict future developments of the gray and the red squirrel populations in Europe.

Список використаної літератури

1. Dautray, R. Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology/ Dautray, R., Lions, J.-L. – Vol 5, Springer-Verlag, Berlin. – 1992. – 739 p.
2. Okubo A. Diffusion and Ecological Problems. Modern perspectives / Okubo A., Levin S. A. – Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 2001. – 467 p.
3. Dzhalladova I. On a Quasilinear PDE Model of Population Dynamics with Random Parameters / Dzhalladova I., Pokojovy M.// Proceeding, MITAV, Brno, 2017. – P. 20-24.
4. Bertolino S. A grey future for Europe: Sciurus carolinensis is re- placing native red squirrels in Italy/ S. Bertolino, N. C. di Montezemolo, D.G.Preatoni, L.A.Wauters, A.Martinili – Springer Sciences., DOI 10.1007/s 10530-013- 0502-3, 2013.
5. Cadi A. Competition for basking places between the endangered European pond turtle and the introduced red-eared slider / Cadi A., Joly P. – Can.J.Zool. – 2003. – 81. – P. 1392-1398, 2003.
6. Glen A.S. Niche overlap/ Glen A.S., Dickman C.R.// J. Apple. Ecol. – 2008. – 45. – P. 700-707.
7. Gurnel J. Monitoring tred squirrels Sciurus vulgaris and grey squirrels Sciurus carolinensis in Britain / Gurnel J., Lurtz P.W.W., Shirley M.D.F. // Mammal Rev. – 2004. – 34. – P. 51-74.
8. Okubo A. On the spatial spread of the grey squirrel in Britain/ Okubo A., Maini P.K., Williamson M.H., Murray J.D.D.// Proc. R. Soc., London. – 1989. – Vol. 238. – P.113-125.
9. Meyer P. A. Stochastic Processes from 1950 to the Present/ Meyer P. A. // Electronic Journal for History of Probability and Statistics. - 2009. - Vol. 5. – No. 1. – P. 1-42.
10. Diblik J. The Stability of Nonlinear Di er- ential Systems with Random Parameters/ Diblik. J., Dzhalladova I., Ruzickova M.// Abstract and Applied Analysis, Hindawi Publishing Corporation. – 2012. – Vol. 2012. – P. 1-11.
11. Dzhalladova I. The Optimization of Solutions of the Dynamic Systems with Random Structure/ Dzhalladova I., Ruzickova M.// Abstract and Applied Analysis, Hindawi Publishing Corporation. – 2011. – Vol. 2011. – P. 1-18.
12. Dzhalladova I. Optimization of Stochastic Systems / Dzhalladova I. – KNEU, Kiev, 2005.

REFERENCES

1. DAUTRAY, R., LIONS, J.-L. (1992) *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, vol. 5, Springer-Verlag, Berlin.
2. OKUBO, A., LEVIN, S. A. (2001) *Diffusion and Ecological Problems. Modern perspectives*, Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg.
3. DZHALLADOVA, I., POKOJOVY, M. (2017) “On a quasilinear PDE model of population dynamics with random parameters”, *Proceeding, MITAV*, Brno, 2017, pp.20-24.
4. BERTOLINO, S., DI MONTEZEMOLO, N.C., PREATONI, D.G., WAUTERS, L.A., MARTINILI A. (2013) *A grey future for Europe: Sciurus carolinensis is replacing native red squirrels in Italy*, Springer Sciences., DOI 10.1007/s 10530-013- 0502-3, 2013.
5. CADI, A., JOLY, P. (2003) “Competition for basking places between the endangered European pond turtle and the introduced red-eared slider”, *Can.J.Zool.*, 81, pp. 1392-1398.
6. GLEN, A.S., DICKMAN, C.R. (2008) “Niche overlap”, *J. Apple Ecol.*, 45, pp. 700-707.
7. GURNEL, J., LURTZ, P.W.W., SHIRLEY, M.D.F. (2004) “Monitoring tred squirrels Sciurus vulgaris and gray squirrels Sciurus carolinensis in Britain”, *Mammal Rev.*, 34, pp. 51-74, 2004.
8. OKUBO, A., MAINI, P.K., WILLIAMSON, M.H., MURRAY, J.D.D. (1989) “On the spatial spread of the grey squirrel in Britain”, *Proc. R. Soc.*, London, 238, pp. 113-125.
9. MEYER, P. A. (2009) “Stochastic Processes from 1950 to the Present”, *Electronic Journal for History of Probability and Statistics*, vol. 5, no. 1, pp 1-42.
10. DIBLÍK, J., DZHALLADOVA, I., RŮŽIČKOVÁ, M. (2012) “The Stability of Nonlinear Differential Systems with Random Parameters”, *Abstract and Applied Analysis*, Hindawi Publishing Corp., vol. 2012, pp. 1-11.
11. DZHALLADOVA, I., RŮŽIČKOVÁ, M. (2011) “The Optimization of Solutions of the Dynamic Systems with Random Structure”, *Abstract and Applied Analysis*, Hindawi Publishing Corporation, vol. 2011, pp. 1-18.
12. DZHALLADOVA, I. (2005) *Optimization of Stochastic Systems*, KNEU, Kiev.

Надійшла до редколегії 19.08.2017

УДК 517.46

Дідманідзе І., професор
Ахвледіані Н., професор
Дідманідзе Д., академічний доктор

Навчальний процес з використанням комп'ютерних технологій

Батумський Державний Університет
імені Шота Руставелі
6010, Грузія, Батумі, вул. Ніношвілі, 35
e-mail: ibraimd@ukr.net

I. Didmanidze, professor
N. Akhvlediani, professor
D. Didmanidze, academian doctor

Training Process Using Computer Technologies

Batumi Shota Rustaveli State University
6010, Georgia, Batumi, Ninoshvili st., 35
e-mail: ibraimd@ukr.net

Одним із аспектів процесу інформатизації суспільства та освіти є розробка та впровадження концепції сучасних форм навчання, яка буде повністю заснована на використанні сучасних систем нових інформаційних та комп'ютерних технологій. Ці технології включають в себе різні навчальні курси, електронні посібники, мультимедійні засоби, тощо. Для цього необхідно вивчити умови, обов'язкові для ефективного розробки та впровадження інформаційних технологій, призначених для навчальних цілей, чому і присвячена ця робота.

Ключові слова: технології комп'ютерного навчання, комп'ютерні освітні системи, комп'ютерні тренажери, інформаційно комунікаційні технології, інтелектуальні системи.

One of the aspects of the informatization process of society and education is to develop and implement the concept of modern teaching forms, which will be entirely based on the use of modern systems of new information technology and computer techniques. These technologies include various training courses, electronic manuals, multimedia means, etc. The informatization of education would require to study the necessary conditions for designing and implementing information technologies targeted at the improvement of educational performance. Aforementioned issue is the subject of our consideration in the present paper.

Key Words: Computer-based learning technologies, computer-based educational systems, computer-based training, informational communication technologies, intelligent systems.

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

INTRODUCTION

The analysis of the scientific work of computer-based technologies used in the education process demonstrated the invaluable role in enhancing students' intellectual, emotional and personal development through educational systems based on the usage of information technology and modelling. Therefore, the academic researchers and practitioners engaged in education, work intensively in this direction [1].

One of the priority thrusts of the informatization process of modern society is the computerization of education system. Under the term "informatization" of education is meant the introduction and implementation of information technology, technical means and facilities. Informatization of education ensures and makes the following objectives achievable:

- The improvement of education management system through automation of scientific-

pedagogical information, methodological information materials and communication network data bank system.

- The improvement of the respective tasks related to teaching methodology and choosing the management strategy with the regard to the current processes in the system, teaching methods, organizational forms and the listener's personality development in modern conditions of informatization process of society;
- The creation of modern, innovative methodological teaching systems, which are focused on the listener's capacity development, formation of self-study skills, carrying out information-educational and experimental-research activities, processing and filtering different types of information independently.

One of the aspects of the informatization process of society and education is to develop and implement the concept of modern forms of teaching, which will

be entirely based on the use of modern systems of new information technology and computer techniques. These technologies include various training courses, electronic manuals, multimedia means, etc. This would require to study the necessary conditions for designing and implementing information technologies targeted at the improvement of educational performance. Apart from that, considering the specificity of every discipline, e-learning and e-training systems should be created at all educational stages, the software application and scientific analysis should be carried out as well.

THE MAIN PART

Considering computer-based learning technologies, we will try to analyze the necessity of transferring of certain part of traditional learning to the computer-based one, related problems and necessary conditions. We will try to specify the role of computer technologies in the process of learning.

When we talk about the scientific basis of computer technologies used in the learning process, we mainly focus on the construction of information models for technical purpose objects. Such models will allow us to expand our theoretical and experimental studies, physical studies will help to detect the real properties and characteristics of the objects. Designing and modelling of computer technologies used in educational process should be grounded on scientific consideration that it should form a firm basis for profound knowledge of the aspects of the object under the study and guarantee further development of professional skills.

Despite the fact that computer technology is actively used today in the educational process, we should always keep in mind that this is only a modern helping didactic tool. Being the main character in the traditional learning process, the teacher still retains leadership in classes or auditions equipped with modern computer technologies. Moreover, the teacher today is the founder of innovative pedagogical technologies and he is not only a teacher but also a teacher of technology.

In the course of traditional teaching, the teacher is the main source of transferring information to the student. An important feature of this process is the existence of feedback which is carried out more or less successfully. The picture is quite different in case of the use of computer technologies in the learning process. The main characteristic in which this process differs from traditional one is the ability to organize effective dialogue through interactive programs between a human and a computer.

The use of computer tutoring systems enables the learners to obtain primary information through interactive learning programs. This fact significantly helps the students to master the target subject matter or any topic of this subject in case of proper competence.

With no time and space limits of the information, the student can independently get consulted by using various sources of information and get continuous measurement of progress in different forms. This significantly increases the motivation of cognitive activity and the creative nature of learning.

From our point of view, the flexibility of computer teaching systems and skills in class is one of the most promising directions to enhance learning efficiency. The use of modern computer tutoring systems should not be limited to accelerating the learning process itself (which is characteristic of information technologies), but should also be focused on thorough study of target topics and events.

The use of modern computer tutoring systems should promote acquiring thorough knowledge and development of logical thinking while studying various events. In such teaching systems it is essential for students to get exhaustive and clear concept of the methodology of solving a problem in order to get a deep understanding of pre-determined theoretical provisions in the goal of solving the task.

The methodology for solving the task assigned to each new training program on computer training should be based on strict logic and contain the following stages:

1. Review of several tasks of the same type.
2. Creating a specific algorithm for solving each task.
3. Analysis of the obtained solutions.

In the given methodology, the main part should be forming an algorithm, which is the sequence of precisely defined rules for solving a specific type of task.

It's clear that this algorithm is nothing but a step-by-step plan of solving the problem. In order to get used to different types of tasks, students need to compile a generalized algorithm and a relevant program in interactive mode using computer trainers.

Such method of work on computer training programs solves quite a number of problems. For instance, the student's interest towards the problems that need to be solved is increasing, and the teacher is given the opportunity to manage fruitfully the distribution of the training time.

But if we use computer training programs only as a calculation tool and do not pay serious attention to the task of solving algorithms, this approach will turn out to be not useful but even on the contrary, - harmful to the study of the subject or topic.

The effectiveness of the use of computer technologies in the learning process depends on the software product which carries out the implementing of the study topics. Nowadays, the process of creating such software products has yet to be systematized.

CONCLUSION

The content of the form of teaching using the computer-based tutoring systems is defined by a certain didactic concept the main provisions of which can be formulated as follows [2]:

1. The learning process is mainly based on student's independent cognitive activities.
2. It is necessary to create such learning environment that will facilitate to expose student's creative ability as much as possible.
3. It is necessary to guarantee the access to learning information for the student.
4. Students' cognitive work should be active. Activity is characterized by motivation expressed through the desire to learn.
5. The active method of learning according to the type of communication between the teacher and the student belongs to so called "much to many" method and consists of the following subdivisions:

role-plays, discussion groups, forum, project groups and others. In case of distance learning, these methods can be used even in virtual classes, when students are separated from each other in time and space.

6. Learning should be person-oriented.

7. The growth of effectiveness of the learning process may only be based on the individualization of educational-cognitive activities. Such personalized teaching in terms of mass demand may only be possible on the basis of high technologies that are based on computer technologies.

The learning environment that will facilitate the student's independent cognitive activities and the ability to reveal creativity depends on the quality of the use of modern computer tutor systems in the learning process.

Creating educational software products is a highly laborious and expensive process, it must be conducted purposefully and a great experience of teacher-researchers should be considered [3].

We should pay attention to the specific peculiarity of the specific task, which is a major methodological problem. While creating a computer assignment, it is necessary to take into account the intellectual abilities of the student. Therefore, the methods of creating a software product should be directed to a simple performing process with enclosed user instructions and guidelines.

Список використаних джерел

1. *Didmanidze I.* Computer technologies used in educational process. / Didmanidze I., Akhvlediani N., Didmanidze D. // XXX international conference PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES (PDMU-2015). ABSTRACTS. August 14-19, 2017, Vilnius, Lithuania. p. 38.
2. *Didmanidze D.* Use of computer tutoring in education process as one of the main innovative directions of the ongoing reforms in the education system / Didmanidze D. // International Periodical Journal "Intellect", Tbilisi. – 2014. – № 1 (48). – P. 66-69.
3. *Chachanidze G.* Didactics of computer realization of creating and working with text tasks/ Chachanidze G., Chkhikvadze I., Nanobashvili Q. // Periodic scientific journal "Intellect", Tbilisi. – 2005. – № 2 (22).

References

1. DIDMANIDZE, I., AKHVLEDIANI, N. and DIDMANIDZE, D. (2017) "Computer technologies used in educational process", *XXX International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2015). ABSTRACTS*, August 14-19, 2017, Vilnius, Lithuania, pp. 38.
2. DIDMANIDZE, D. (2014) "Use of computer tutoring in education process as one of the main innovative directions of the ongoing reforms in the education system", *International Periodical Journal "Intellect"*, Tbilisi, № 1 (48), pp. 66-69.
3. CHACHANIDZE, G., CHKHIKVADZE, I. and NANOBASHVILI, Q. (2005) "Didactics of computer realization of creating and working with text tasks", *Periodic scientific journal "Intellect"*, Tbilisi, № 2 (22).

Надійшла до редколегії 19.08.2017

УДК 517.4

Дідманідзе І., професор
Кахіані Г., професор
Думбадзе З., викладач

**Питання моделювання одношарових
нейронних мереж як питання
оптимального управління**

Батумський Державний Університет
імені Шота Руставелі
6010, Грузія, Батумі, вул. Ніношвілі, 35
e-mail: ibraim.didmanidze@bsu.edu.ge

I. Didmanidze, professor
G. Kakhiani, professor
Z. Dumbadze, teacher

**The issue of single-layer neural networks
modeling as a task of optimal management**

Batumi Shota Rustaveli State University
6010, Georgia, Batumi, Ninoshvili st., 35
e-mail: ibraim.didmanidze@bsu.edu.ge

Узагальнення результатів, отриманих в результаті вивчення нейронних мереж, веде до утворення потенційних передумов для створення різних систем прогнозування. У статті розглядається прогнозування часових рядів для котирувань цінних паперів на базі одношарових нейронних мереж.

З використанням різних функцій активації на основі одношарових нейронних мереж в роботі виконано моделювання часових рядів для котирувань фінансових інструментів, з метою прогнозування їх динаміки. Представлені комбінації динамічно адаптованих моделей прогнозування в мережі нейронів.

Ключові слова: нейронна мережа, одношарова нейронна мережа, часові ряди, оптимальне управління.

The property to generalize the subsequent results of neural network study creates the potential preconditions for the development of different forecast systems on their base. The paper deals with predicting the time series of stock quotes on the base of single-layer neural networks.

The analysis relates to the modeling of time series for quoting financial instruments on the basis of single-layer neuronal networks by using the different activation functions, with a view to predicting their dynamics. There are also the combinations of dynamically adapted models of prediction built on neuron networks.

Key Words: neural network, single-layer neural network, time series, task of optimal management.

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

INTRODUCTION

The issue of modeling neuron networks is considered to be an optimal management task, for the solution of which it is necessary to apply the theorem of conditions necessary for optimization, while the weight coefficients are considered to be managing functions.

A criteria for the forecasting quality of the stock market should always take into account the deviation of predicted values from real data as well as the correspondence of the direction of the existing trend.

Let's consider a neuron network that consists of n neurons. Characterize i -th state of the neuron by a function $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, which dynamics is described by the following system of differential equations:

$$x'_i(t) = h_i(x(t)) + \sum_{j=1}^n [w_{ij}^0 + w_{ij}(t)] g_j(x(t)), i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

here $h_i(x)$, $g_i(x)$ – are given as continuously differentiated functions on R^n , $x(t)$ is a continuous function, w_{ij}^0 and $w_{ij}(t)$ are the weight coefficients which characterize the effect of i -th neuron on j -th neuron, in the initial conditions $x_i(0) = a_i$, $i = \overline{1, n}$.

The differential equation system (1) can be recorded in the following vector form:

$$x'_i(t) = h(x(t)) + (W_0 + W(t))g(x(t)). \quad (2)$$

with the following initial conditions:

$$x(0) = a. \quad (3)$$

Here $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$; W_0 is a continuous $n \times n$ matrix which consists of w_{ij}^0 elements; the matrix of $n \times n$ dimension, composed of weight coefficients $W(t) - w_{ij}(t)$, which will subsequently be considered as management functions and which can be extended to the following limitations: $|w_{ij}(t)| \leq A_{ij}, i, j = \overline{1, n}$. Let's choose the optimal values of neuronal network weight coefficients according to the minimum condition of target function (4)

$$J(w(\cdot)) = \Phi(x(T)) + \int_0^T \left[Q(x(t)) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n r_{ij} w_{ij}^2(t) \right] dt. \quad (4)$$

In this model the process time $T > 0$ is fixed, $Q(x)$ and $\Phi(x)$ are scalar continuous differentiating functions, while $r_{ij} \geq 0, i, j = \overline{1, n}$ coefficients form a symmetric positive R matrix.

MAIN PART

The task of optimal management of artificial neuron network is represented by such a selection of $w_{ij}(t), i, j = \overline{1, n}$ weight coefficients where the image (4) is taken to the minimum value. This task belongs to the class of optimal management task. Let's consider the weight coefficients as management functions and use the theorem about the necessary conditions of optimality [1].

Let's introduce the switching functions $\Phi_{ij}(t)$ taking into account the following rule:

$$\Phi_{ij}(t) = p_i(t) g_j(x(t)) r_{ij}^{-1}, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Consider just a regular case to build $\bar{w}_{ij}(t)$ optimal management:

$$\bar{w}_{ij}(t) = \begin{cases} A_{ij}, & \Phi_{ij}(t) > A_{ij}, \\ \Phi_{ij}, & |\Phi_{ij}| \leq A_{ij}, \\ -A_{ij}, & \Phi_{ij}(t) < -A_{ij}. \end{cases} \quad (6)$$

The coupling functions $p_i(t), i, j = \overline{1, n}$ satisfy the following system of differential equations:

$$p_i'(t) = \frac{\partial Q(x(t))}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n p_i(t) \left(\sum_{j=1}^n (w_{ij}^0 - w_{ij}(t)) \frac{\partial g_i(x(t))}{\partial x_i} + \frac{\partial h_i(x(t))}{\partial x_i} \right), \quad i = \overline{1, n}, \quad (7)$$

They also meet the following boundary conditions

$$p_i(T) = -\frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x_i}. \quad (8)$$

In the process of studying artificial neuron networks the following task often appears: how to build such a management, as a result of which the neuter network vector $x(T)$ would take a predetermined value θ , i.e. $x(T) = \theta$. Such a situation should lead to the necessity of solving the boundary problem of (1), (3), (6) - (8) maximization. For this purpose, it is necessary to determine the terminal compounds as follows:

$$\Phi(x(T)) = -\alpha_1(\theta, x(T)) + \alpha_2(|x(T) - \theta|^2), \quad (9)$$

where α_1 and α_2 are selectively increased by the correspondence of $x(T)$ and θ vectors' directions.

Let's analyze the case when it is necessary to store one n -dimensional θ vector in associative memory. This vector is called from the memory when the current state of the neuron network is close to θ [2].

For the case under consideration let's suppose that $h_i(x) = -\beta_i x_i$, where $\beta_i > 0, i = \overline{1, n}$ are the given numbers, $g_j(x(t)) = x_j(t)$, $Q = O$, $W_0 = O$, $R = I$, $\Phi(x) = -(\theta, x)$, here O, I are correspondingly $n \times n$ dimensional zero and single matrix. There the initial (1) - (4) task will take the following form:

$$J(w(\cdot)) = -(\theta, x(T)) + \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i,j=1}^n w_{ij}^2(t) dt, \quad (10)$$

$$x_i'(t) = -\beta_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n w_{ij}(t) x_j(t), \quad i = \overline{1, n}; \quad (11)$$

$$|w_{ij}(t)| \leq A_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad w_{ij} = 0, \quad (12)$$

$$x_i(0) = a_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

In this task the image $(\theta, x(T))$ represents the correlation between the vector $x(t)$ and the desired vector θ of the final position of the neural network. We should note that minimizing the negative value of the correlation is equivalent to the task of correlation maximizing.

In this case, the optimal values of weight coefficients are determined by the same (6) formula, but here we should take into account the fact that the switching function $\Phi_{ij}(t), i, j = \overline{1, n}$ has the following form:

$$\Phi_{ij}(t) = p_i(t) x_j(t), \quad i \neq j \quad (13)$$

and the coupling functions $p_i(T) = \theta, i = \overline{1, n}$ satisfy the following system of differential equations

$$p'_i(t) = -\sum_{i=0}^n p_i(t) w_{ij}(t) + \beta_i p_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (14)$$

with the following boundary conditions

$$p_i(T) = \theta_i, \quad p_i(t) = 0, \quad t > T, \quad i = \overline{1, n}. \quad (15)$$

A discrete model (i.e. a model that describes the artificial neuron network state in the fixed moments of time [3,4]) of the neuron network can be constructed by analogy of the continuous model of artificial neuron network.

Let's consider the discrete task of optimal management. It is necessary to minimize the following function

$$I([u]) = \sum_{k=0}^{q-1} f_k^0(x^k, u^k) + \Phi(x^q) \quad (16)$$

with the restrictions on the following recurring correlations

$$x^{k+1} = f_k(x^k, u^k), \quad k = \overline{0, q-1}, \quad (17)$$

$$x^0 = b^0 \in R. \quad (18)$$

Let's introduce the following designations:

$$\begin{aligned} z^k &= (x^k, u^k); \\ [u] &= [u^0, \dots, u^{q-1}], \\ [\tilde{u}] &= [u^0, \dots, u^{i-1}, u^i + \Delta, u^{i+1}, \dots, u^{q-1}], \\ [x] &= [x^0, \dots, x^{q-1}], \\ [\tilde{x}] &= [x^0, \dots, x^{i-1}, x^i + \Delta, x^{i+1}, \dots, x^{q-1}]. \end{aligned} \quad (19)$$

Let's determine a coupling vector

$$p^i = \frac{dI([x], [u])}{dx^i} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{I([\tilde{x}], [\tilde{u}]) - I([x], [u])}{\Delta}. \quad (20)$$

if $i = q$ then from (20) it follows that

$$p^q = \frac{dI([x], [u])}{dx^q} = \frac{\partial \Phi(x^q)}{\partial x^q}, \quad (21)$$

if $i = q-1$ then

$$\begin{aligned} p^{q-1} &= \frac{\partial I}{\partial x^{q-1}} + \left(\frac{\partial x^q}{\partial x^{q-1}} \right)^q \frac{dI}{dx^{q-1}} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^{q-1}} [f_{q-1}^0(z^{q-1}) + (p^q, f_{q-1}(z^{q-1}))]. \end{aligned} \quad (22)$$

Generally, in (21) and (22) we will similarly get the following

$$\begin{aligned} p^i &= \frac{\partial I}{\partial x^i} + \left(\frac{\partial x^{i+1}}{\partial x^i} \right)^T \frac{dI}{dx^i} = \frac{\partial f_i^0(z^i)}{\partial x^i} + \left[\frac{\partial f_i(z^i)}{\partial x^i} \right]^T p^{i+1}, \\ i &= \overline{1, q-1}, \quad p^0 = 0, \quad j > q. \end{aligned} \quad (23)$$

Let's introduce a function

$$H_k(z^k, p^{k+1}) = \lambda_0 f_k^0(z^k) + (p^{k+1}, f_k(z^k)),$$

then (23) can be rewritten in the following way

$$\begin{aligned} p^i &= \frac{\partial H_i(z^i, p^{i+1})}{\partial x^i}, \quad i = \overline{q-1, 1}, \\ p^q &= \frac{\partial \Phi(x^q)}{\partial x^q}. \end{aligned} \quad (24)$$

A set of vectors $[x] = [x^1, \dots, x^q]$ depends on the set of initial vector x^0 of the given condition and the set of admissible vectors $[u] = [u^1, \dots, u^q]$, so we can write $[x] = [x(u)]$ and minimize the function

$$\begin{aligned} I = I([x(u)], [u]). \text{ Let's determine } \frac{dI}{du^i} \\ \frac{dI([x(u)], [u])}{du^i} &= \frac{\partial I([x(u)], [u])}{\partial u^i} + \\ &+ \frac{\partial x^{i+1}[u]}{\partial u^i} \cdot \frac{dI([x(u)], [u])}{dx^{i+1}} = \\ &= \frac{\partial f_i^0(z^i)}{\partial u^i} + \left[\frac{\partial f_i(z^i)}{\partial u^i} \right]^T p^{i+1} = \frac{\partial}{\partial u^i} H_i(z^i, p^{i+1}). \\ &= \frac{\partial f_i^0(z^i)}{\partial u^i} + \left[\frac{\partial f_i(z^i)}{\partial u^i} \right]^T p^{i+1} = \frac{\partial}{\partial u^i} H_i(z^i, p^{i+1}). \end{aligned} \quad (25)$$

The Lagrange function for the optimal management task, described in formulas (16)-(19), can be recorded as follows:

$$\begin{aligned} L([x], [u], [p], \lambda_0) = \\ \sum_{i=0}^{q-1} \left[\lambda_0 f_i^0(z^i) + (p^{i+1}, f_i(z^i) - x^{i+1}) \right] + \lambda_0 \Phi(x^q). \end{aligned}$$

In order to get the required conditions of optimality, it is necessary to calculate the derivatives with respect to variables of the Lagrange function $x^i, i = \overline{1, q}, u^i, i = \overline{1, q-1}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x^i} &= \frac{\partial H_i(z^i, p^{i+1})}{\partial x^i} - p^i = 0, \quad i = \overline{1, q-1}, \\ \frac{\partial L}{\partial x^q} &= \lambda_0 \frac{\partial \Phi(x^q)}{\partial x^q} - p^q = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial u^i} &= \frac{\partial H_i(z^i, p^{i+1})}{\partial u^i} = 0, \quad i = \overline{1, q-1}. \end{aligned} \quad (26)$$

Comparing formulas (25) and (26) we will get:

$$\frac{\partial L}{\partial u^i} = \frac{\partial I([x(u)], [u])}{\partial u^i}, \quad i = \overline{1, q-1}. \quad (27)$$

According to the image (20) the Langrand's multipliers $p^i, i = \overline{1, q}$, have a value of derivatives with respect to variables of the minimized function $x^i, i = \overline{1, q}$.

The formula (27) can be used for an approximate solution, for example, by graded methods if a task

(16)-(19) contains the restrictions of management vector $u^i \in U_i$, $i = \overline{0, q-1}$. For instance:

$$U_i = \left\{ v \in R^r : g_l^i(v) \leq 0, l = \overline{1, k}, \right. \\ \left. h_l^i(v) = 0, l = \overline{k+1, s} \right\} \quad (28)$$

CONCLUSION

It is possible to use the Lagrange method with the help of the Lagrange new function. In this case the Lagrange new function $\tilde{L}$ is determined for the tasks (16) - (19) in the following way:

$$\tilde{L} = L + \sum_{i=0}^{q-1} \left[\sum_{l=0}^k \mu_l^i g_l^i(v) + \sum_{l=k+1}^s v_l^i h_l^i(v) \right].$$

The tasks (16) - (19) can be also solved by the method of penalty functions.

The discrete task can also be derived from the continuous task if we change the derivation according to the Euler scheme and the integral, for example, by the rule of the right rectangles.

The task of the neural network modeling is formulated as an optimal management task where the neuronal network weight coefficients are considered to be management functions.

Список використаних джерел

1. *Hornik K.* Multilayer feedforward networks are universal approximators / Hornik K., Stinchcombe M. and White H. // *Neural Networks*. – 1989. – N 2. – P. 359-366.

2. *Didmanidze I.* Multilayer neural network/ Didmanidze I., Kakhiani G., Didmanidze D. // XXIV International Conference “Problems of decision making under uncertainties” (PDMU-2014). Abstracts. September 1-5, 2014. Chesky Rudolec, Czech Republic. – 2014. – P. 32-33.

3. *Didmanidze I.* Creation of mathematical model of the analysis of the financial market/ Didmanidze I., Kakhiani G., Motskobili I. // VII International Academic Congress “Innovation in the Modern World”. Papers and commentaries, volume III. Australia, Sydney, 18-20 May 2015. “Sydney University Press”. – 2015. – P. 440-444.

4. *Didmanidze I.* On the issue of choosing the neuron adaptive educational speed in the last hidden layer of a neural network / Didmanidze I., Kakhiani G., Dumbadze Z. // XXX International Conference “Problems of decision making under uncertainties” (PDMU-2015). Abstracts. August 14-19, 2017, Vilnius, Lithuania. – 2017. – P. 41.

References

1. HORNİK, K., STINCHCOMBE, M. and WHITE, H. (1989) “Multilayer feedforward networks are universal approximators”, *Neural Networks*, N 2, pp. 359-366.

2. DIDMANIDZE, I., KAKHIANI, G. and DIDMANIDZE, D. (2014) “Multilayer neural network”, XXIV international conference “Problems of decision making under uncertainties” (PDMU-2014). Abstracts, September 1-5, 2014, Chesky Rudolec, Czech Republic, pp. 32-33.

3. DIDMANIDZE, I., KAKHIANI, G. and MOTSKOBILI, I. (2015) “Creation of mathematical model of the analysis of the financial market”, VII International Academic Congress “Innovation in the Modern World”. Papers and commentaries, volume III, Australia, Sydney, 18-20 May 2015, “Sydney University Press”, pp. 440-444.

4. DIDMANIDZE, I., KAKHIANI, G. and DUMBADZE, Z. (2017) “On the issue of choosing the neuron adaptive educational speed in the last hidden layer of a neural network”, XXX International Conference “Problems of decision making under uncertainties” (PDMU-2015). Abstracts, August 14-19, 2017, Vilnius, Lithuania, pp. 41.

Надійшла до редколегії 19.08.2017

УДК 517.6

Дідманідзе І., професор
Цицкішвілі Г., професор
Кучава М., викладач

**Задача оптимального завантаження
морського транспорту та математичний
розрахунок консолідації вантажів**

Батумський Державний Університет
імені Шота Руставелі
6010, Грузія, Батумі, вул. Ніношвілі, 35
e-mail: ibraim.didmanidze@bsu.edu.ge

I. Didmanidze, professor
G. Tsitskishvili, professor
M. Kutchava, teacher

**The task of optimal loading of maritime
transport and mathematical calculation of
cargo consolidation**

Batumi Shota Rustaveli State University
6010, Georgia, Batumi, Ninoshvili st., 35
e-mail: ibraim.didmanidze@bsu.edu.ge

Метою даної роботи є розрахунок навантаження морських транспортних суден і оптимальне розміщення вантажу.

Основне значення при розрахунку навантаження морських транспортних суден має транспортно-технологічні характеристики вантажу. Транспортно-технологічними характеристиками вантажу є сукупність якості вантажу, за допомогою якої встановлюються методи і умови його перевезення, навантаження і зберігання. Вантаж для перевезення надається в транспортабельному вигляді, забезпечуючи цим його збереження на всіх стадіях транспортного процесу.

Ключові слова: морський транспорт, оптимальний розподіл вантажу, укомплектування вантажу, математичний розрахунок, вантажне обслуговування, прохідність транспортного шляху.

The aim of the mentioned paper represents the task of optimal loading of maritime transport and mathematical calculation of cargo consolidation.

The importance of shipping and technological characteristics of cargo is important for calculating the loading operations on maritime transport vessels. Cargo transportation characteristics are set of cargo features, which establish its transportation, unloading and storage technology and techniques. The cargo will be transferred only in transportable condition, which ensures its protection at all stages of the transport process.

Key Words: maritime transport, optimal disposition of cargo, cargo consolidation, mathematical calculation, stevedore service, passability of transport road

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

INTRODUCTION

In the World practice of trading navigation, service complex is considered as a stevedore service, which is offered to the vessels during their berthing period. .

The concept of service, in this case, is widely understood and implies:

- Activities for the vessels and offering diverse service for cargoes, including navigational support;
- Pilot and towing service;
- Provision with berth place;
- Performance of freight and warehouse operations;
- Supply with fuel and water;
- Supply with material-technical and food;
- Post-voyage repair;
- Sanitation-quarantine activities;

- Cultural, household and medical services, etc.

The majority of listed activities are performed by directly port services or by their active participation.

The main task represents performance of calculating-analytical study, which is connected to planning and organization of stevedoring service and analyses of the results.

MAIN PART

Knowledge of transport-technological characteristics of the cargo gives the possibility to calculate the optimal variant of its loading on transport. The main characteristic of the cargo is its volume-mass characterization and cohesion.

The procedure for combining cargos with each other is determined in terms of its protection and reduction of influence on each other, which can be

considered as a factor of environmental aggression.

For this, we consider the following explanations: The cargo on a single cargo area is considered to be in the case of their separation;

1. The cargo on a single cargo area is considered to be compatible in case of their separation;
2. The cargoes should be separated by deck or partitions;
3. The cargoes should be separated by vertical waterproof partitions;
4. The cargoes should be separated by two or more waterproof partitions.

We pay much attention to the maximal usage of the road bandwidth. The effectiveness of bandwidth of the road could be discussed in different angles and is caused by different factors.

The optimization of loading-unloading operations performance is one of the key features of maximal bandwidth of the road. In our case, in optimization we mean as time parameters, as well as work out the concept of maximal load of cargo loading operations. The concept presented in our scientific paper could be successfully used in road transport as well as in case of air transport.

The issue set by us is considered to be in unloading of road transport cargo in minimum period of time and work out the optimal mode model of loading the cargo in maritime transport means [1,2].

It's obvious that characteristics and features of each cargo is important, but we deeply widen our knowledge in this direction in case of maritime transportation practice. It's caused by the fact that the cargo reveals the unknown characteristics in terms of environmental conditions and some other factors whole transportation that are caused by uneven technology.

That's why the knowledge of these characteristics is better suited to the placement of the cargo and the delivery of it in the process of each navigation (for the voyage).

A huge importance is given to the atmospheric conditions, estimating air circulation and heat resistance regime, organizing of cargo handling, etc. for the loaded cargo.

We should know that from the moment when the carrier is supplied with the goods, the goods status is changed and it is called a cargo instead of the goods. This is because we suggest that these two categories - goods and cargo differ from each other with characteristic features. It should therefore be understood that the goods are replaced from goods to a cargo obtaining new properties of transport importance, which results in loss of commodity

characteristics such as consumer properties. At this time there is a need to study and account the cargo as a new category of goods. These characteristics include a combination of cargo characteristics, according to which the techniques and technologies for loading and unloading are established, to determine the optimal variant of the loading, its transportation conditions.

The optimal option for loading is one of the main points of the cargo shipment technology, first of which is determined by the volume-mass (storage) characteristics, the characteristics of dead weight and packaging, physical-chemical properties, and some commodity features for the storage of the vessel.

First of all, let's calculate the loading capacity of the vessel.

The cargo set in cargo parcels is based on the following requirements:

1. Fulfillment of the conditions for compounding the cargo;
2. Cargo within loading gage and long cargo are placed in the vessel's central freight containers;
3. Small freight and size cargo are placed in the front and rear containers are placed if applicable;
4. It is not recommended to place the cargo type of rolling barrel in front and rear containers;
5. As far as possible, bunding of cargo is carried out so that the total quantity of the cargo in specific cargo store is calculated for the distribution of the calculated weight for those stores, and the volume of the cargo is handled by the cargo capacity of the vessel;
6. Implementation of the non-rescheduling condition for reloading of cargo parcel;
7. The "heavy" cargo is placed in the lower hold and the "light" cargo - in tween-deck and the upper deck;
8. Loose and bulk cargo should be placed below the main cargo and divided by horizontal waterproof partitions.

The maximum load of the storerooms is determined based on the qualities of the ship's deck, which is characterized by a limit of 1 m² (technical load).

The maximum load of the storerooms is set by the formula [36]:

$$F_{ri\ max} = 0.7 T_v,$$

where $F_{ri\ max}$ - maximum permissible loading of a tween deck, t.;

W_{tw} - Permissible loading capacity of a tween deck (bulk) m³;

$$P_{m\ max} = W_{tr}$$

$P_{m\ max}$ - maximum permissible loading of a hatch cover, t.;

Wtr - Permissible loading capacity of a hatch cover (bulk) m³;

The intended severity of the cargo store is the planned number of cargo for this cargo store. The weight distributed in the vessel storerooms is the full load of the vessel. Calculation of weight distributed in cargo containers is done with a formula:

$$P_j = W_j * Q_c / W_c$$

W_j - cargo capacity of the j-th cargo area, m³;

Q_c – loading of the vessel, t.;

W_c - ship's cargo capacity, m³.

CONCLUSION

The main goal of the paper is to develop the concepts of optimization of cost of loading-unloading operations on the vessel based on complex approach.

The scientifically justified methodology for the concept and realization of this concept model is the scientific innovation of optimizing the cost of loading-unloading operation on the vessel [3,4]. Obviously, the concept of optimizing the costs of loading-unloading operation on the vessel is developed as a management system, which is a complex, macro-management process. It consists of a number of systemic roots that form a single,

organizational chain aimed at efficient modeling, optimizing cargo handling and minimizing service costs.

Creation of proposed conceptual model is relevant and based on modern information systems and material resource management theory, using modern methods and methods of modeling, reduces the volume of transport units, minimizes loading and unloading operations costs.

With this in mind we discussed the following:

- Generalizing the theoretical knowledge of the optimization of costs of loading and unloading operations on various cargo transport and adaptation to maritime transport;

- Analyze the systematic optimization parameters for the cost of loading-unloading operation on the vessel;

- Development of algorithms for the optimization of cost for loading-unloading operation;

- Building a conceptual model of optimization of costs for loading-unloading operation;

- Research on economic effect of conceptual model;

- Analysis of the results of the economic effect of conceptual model.

References

1. Tsitskishvili G. Algorithm for selection of optimal set of items transported in maritime transport / Tsitskishvili G. // Abstracts. II International Scientific Conference "Computing/Informatics, Education Sciences, Teacher Education". Batumi, September 21-23, 2012.
2. Didmanidze I.Sh. The Technologies of Cargo Handling Operations by Marine Transport Means / Didmanidze I.Sh., Tsitskishvili G.D., Kuchava M.Sh. // XXVIII international conference PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES (PDMU-2016). ABSTRACTS. August 25-30, 2016. Brno, Czech Republic. p. 40.
3. Didmanidze I.Sh. Mathematical model to optimize loading-unloading operations on the vessel / Didmanidze I.Sh., Tsitskishvili G.D. // XXVII International Conference "Problems of decision making under uncertainties" (PDMU-2016). Abstracts. May 23-27, 2016. Tbilisi-Batumi, Georgia. - P. 49-50.
4. Didmanidze I.Sh. Mathematical model to operations on the vessel / Didmanidze I.Sh., Tsitskishvili G.D., Kuchava M. Sh. // XXIX International Conference "Problems of decision making under uncertainties" (PDMU-2017). Abstracts. May 10-13, 2017. Mukachevo, Ukraine. - P. 39.
1. TSITSKISHVILI, G. (2012) "Algorithm for selection of optimal set of items transported in maritime transport", *Abstracts. II International Scientific Conference "Computing/Informatics, Education Sciences, Teacher Education"*, Batumi, September 21-23, 2012.
2. DIDMANIDZE, I.SH., TSITSKISHVILI, G.D., KUCHAVA M.SH. (2016) "The Technologies of Cargo Handling Operations by Marine Transport Means", *XXVIII International Conference Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2016)*. Abstracts. August 25-30, 2016, Brno, Czech Republic, pp. 40.
3. DIDMANIDZE, I.SH., TSITSKISHVILI, G.D. (2016) "Mathematical model to optimize loading-unloading operations on the vessel", *XXVII International Conference "Problems of decision making under uncertainties" (PDMU-2016)*. Abstracts, May 23-27, 2016, Tbilisi-Batumi, Georgia, pp. 49-50.
4. DIDMANIDZE I.SH, TSITSKISHVILI G.D., KUCHAVA M. SH. (2017) "Mathematical model to operations on the vessel", *XXIX International Conference "Problems of decision making under uncertainties" (PDMU-2017)*. Abstracts. May 10-13, 2017, Mukachevo, Ukraine, pp. 39.

Надійшла до редколегії 19.08.2017

УДК 517.9

Івохін Є.В.¹, д.ф.-м.н, професор,
Адзубей Л.Т.¹, к.ф.-м.н, доцент,
Гавриленко О.В.², к.ф.-м.н, доцент

Про деякі математичні моделі формалізації соціоінформаційних потоків

¹Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, Київ, пр-т Глушкова, 4д,
e-mail: ivohin@univ.kiev.ua

²Національний технічний університет України
«КПІ імені І.Сікорського»,
Київ, вул. Політехнічна, 41,
e-mail: asoiu@kpi.ua

Ivohin E.V.¹, Dr.Sc. (Phys.-Math.), Prof.,
Adzhubey L.T.¹, Ph.D. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.,
Gavrilenko O.V.², Ph.D. (Tech.), Assoc. Prof.

About some mathematical models of the social information flows formalization

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: ivohin@univ.kiev.ua

²National Technical University of Ukraine "KPI",
Kyiv, Politechnichna st., 41,
e-mail: asoiu@kpi.ua

У даній роботі формалізовано процеси розповсюдження інформації шляхом комунікації в межах заданої цільової аудиторії. Використано підходи, що базуються на моделях соціальної та фізичної аналогії процесів обміну інформацією у соціальній мережі. Змодельовано та досліджено динаміку інформаційних потоків на основі моделей різних типів. Запропоновано використання моделей дифузії інформації у соціальній групі. Отримано результати, які підтверджують адекватність описаних математичних моделей показникам реальної динаміки інформаційних процесів.

Ключові слова: інформаційні потоки, процес розповсюдження, моделювання, динаміка інформаційного процесу.

In this article a process of the information spreading via communications within a given target audience and without means of mass media was modeled and studied. We are using a model that describes the process of communication within the group. The proposed models are formed based on the method of formalizing the processes of penetration (spread) of the influence of information on a given target audience. Approaches based on models of social and physical analogies of information exchange processes in the social network are used.

In the process of complicating the model of information dissemination, linear, exponential and logistic models are considered. Specific features of models and characteristics of their use in real conditions are indicated. The dependence of the dynamics of information processes on social factors is noted. An approach is proposed for modeling the changes in the information flow on the basis of a hybrid model consisting of the diffusion equation and a model describing the dynamics of quantitative changes in different social groups.

On the basis of the Kermann-McKendrick model a system of partial differential equations that describes the dynamic of disseminating information process is written. Numerous experiments were carried out that allowed us to conclude the adequacy of the calculation methods.

Key words: information flows, distribution process, simulation, dynamic of the information process.

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Аналіз динаміки соціальних інформаційних процесів, які генеруються у медіа-просторі, стає сьогодні однією з найбільш актуальних проблем дослідження у сфері інформаційних технологій [1]. Дана динаміка характеризується чинниками, багато з яких не піддаються точному аналізу. Проте загальний характер часової залежності кількості інформації дозволяє побудувати математичні моделі, які формалізують цей процес.

У динаміці інформаційних процесів (потоків) спостерігаються дві важливі риси: по-перше,

наявна виразна тенденція до постійного зростання їх об'ємів, а по-друге, відбувається ускладнення динамічної структури. Спостереження за часовими залежностями кількості повідомлень в соціальних інформаційних потоках переконливо свідчать про те, що механізми їх генерації і розповсюдження, очевидно, зв'язані з складними нелінійними процесами внутрішньої мережевої динаміки. Однак, це ніяк не зменшує бажання формалізації процесів зміни тематичного та загального обсягів інформації.

Традиційно класичними вважаються два класи моделей інформаційних потоків: лінійні і експоненціальні. Обидва класи мають істотну обмеженість - монотонний характер часової залежності, тобто вони мало придатні для вивчення реальної динаміки мережевих інформаційних потоків протягом тривалих інтервалів часу. Коротко проаналізуємо їх особливості.

Лінійна модель. В деяких випадках динаміка соціальних інформаційних потоків, що визначаються кількістю публікацій за певний період, їх інтенсивністю, обумовленою, наприклад, зміною активності тематики (її підвищенням або старінням), відбувається лінійно, тобто кількість повідомлень у момент часу t можна, відповідно, представити формулою:

$$y(t) = y(t_0) + v(t - t_0), \quad (1)$$

де t_0 - стартовий момент відліку часу, $y(t)$ - кількість повідомлень до моменту часу t , $v(t)$ - середня швидкість збільшення (зменшення) інтенсивності інформаційного потоку.

Важливі характеристики інформаційного потоку можуть бути кількісно оцінені флуктуацією цього потоку [1] - зміною середньоквадратичного відхилення $\sigma(t)$, що обчислюється за формулою:

$$\sigma(t_n) = \sqrt{1/n \sum_{i=0}^n [y(t_i) - (y(t_0) + v(t_i - t_0))]^2}. \quad (2)$$

Якщо ця величина змінюється пропорційно квадратному кореню від часу, то процес зміни кількості інформації за обраною темою можна вважати процесом з незалежними приростами. При цьому, зв'язками з попередніми тематичними публікаціями можна нехтувати.

У випадку, коли середньоквадратичне відхилення вважається пропорційним деякій степені від часу: $\sigma(t) \approx t^\mu$ ($1/2 < \mu < 1$), маємо, що чим більше значення μ , тим вище кореляція між поточними і попередніми повідомленнями в інформаційному потоці.

Експоненціальна модель. В деяких випадках процес зміни актуальності інформації (збільшення або зменшення кількості тематичних повідомлень в інформаційному потоці в одиницю часу) апроксимується експоненціальною залежністю, яка виражається формулою:

$$y(t) = y(t_0) \exp[\lambda(t - t_0)], \quad (3)$$

де λ - середня відносна зміна інтенсивності тематичного інформаційного потоку.

У реальності актуальність тематики є

дискретною величиною, яка вимірюється в моменти часу $t_0, \dots, t_n$, яка лише апроксимується наведеною вище залежністю. В рамках даної моделі справедливе співвідношення:

$$y(t_i) = y(t_{i-1}) \exp[\lambda(t_i - t_{i-1})], \quad (4)$$

Введемо позначення: $\lambda(t_i)$ - відносна зміна інтенсивності тематичного інформаційного потоку у момент часу t_i : $\lambda(t_i) = \lambda(t_i - t_{i-1})$, $i = \overline{1, n}$, і прологарифмуємо рівняння (3):

$$\lambda(t_i) = \ln y(t_i) / y(t_{i-1}).$$

Відносна зміна інтенсивності у момент часу t_i , $i = \overline{1, n}$, на практиці також часто обчислюється як співвідношення $\lambda(t_i) \approx (y(t_i) - y(t_{i-1})) / y(t_{i-1})$.

Зміна флуктуації величини $\lambda(t_i)$ відносно середнього значення $\bar{\lambda}$ може оцінюватися за стандартним відхиленням:

$$\sigma(t_n) = \sqrt{1/n \sum_{i=0}^n [\lambda(t_i) - \bar{\lambda}]^2}. \quad (5)$$

В цьому випадку також, якщо $\sigma(t)$ змінюється пропорційно кореню квадратному від часу, то можна говорити про процес з незалежними приростами - кореляція між окремими повідомленнями неістотна. У випадку наявності значної залежності повідомлень спостерігається співвідношення: $\sigma(t) \approx t^\mu$, причому значення μ перевищує 1/2, але обмежено 1.

Значення μ , яке перевищує 1/2, свідчить про наявність довгострокової пам'яті в інформаційному потоці. Такий клас процесів отримав назву автомодельних.

Логістична модель. На відміну від розглянутої моделі в реальній динаміці інформаційних потоків мають місце процеси як зростання, так і спаду обсягів інформації. Тому для побудови реалістичної картини необхідно застосовувати гнучкіші моделі.

В першу чергу, варто сказати, що сукупності даних в інформаційних потоках у багатьох відношеннях нагадують популяції живих організмів. Вони, в певному розумінні, «народжуються», «старіють» і утворюють «нащадків» (посилання, що містять інформацію, яка раніше з'явилася в зовнішніх до даної тематики повідомленнях). Такий підхід називається методом біологічних аналогій. У сучасній науковій літературі він часто застосовується і для моделювання динаміки інформаційних потоків: поняття популяції узагальнює сутність потоку інформації.

На даний момент серед різних математичних моделей динаміки популяцій необхідно відзначити логістичну модель, яку можна розглядати як узагальнення експоненціальної моделі Мальтуса, яка передбачає пропорційність швидкості росту функції $y(t)$ в кожен момент часу її значенню:

$$dy(t)/dt = ky(t), \quad (6)$$

де k - деякий коефіцієнт.

Окремо відзначимо, що у реальному житті динамічні системи, як правило, мають достатньо ефективні зворотні зв'язки, які дозволяють коректувати характер процесів, що відбуваються в них, і тим самим утримувати їх в певних рамках. Інформаційні процеси, коректуючи ці зворотні зв'язки в певні періоди еволюційного розвитку, можуть ефективно впливати на характер поведінки всієї системи.

Найбільш простим узагальненням моделі Мальтуса, що дозволяє уникнути необмеженого зростання розв'язків, є заміна постійного коефіцієнту k деякою функцією часу $k(t)$. Природно, ця функція повинна бути вибрана таким чином, щоб виконувалися деякі додаткові умови.

Головна ідея логістичної моделі полягає в тому, що для обмеження швидкості росту на функцію $y(t)$ накладається додаткова умова, відповідно до якої її значенням не повинно перевищувати деяку задану величину [2]. Для цього виберемо $k(t)$ такого вигляду:

$$k(t) = k[N - ry(t)], \quad (7)$$

де N - граничне значення, яке функція $y(t)$ не може перевищити, r - коефіцієнт, який описує негативні для даної тенденції процеси, k - коефіцієнт пропорційності. Причому передбачається, що завжди виконується нерівність $k < N$. Тоді замість рівняння (6) маємо:

$$dy(t)/dt = ky(t)[N - ry(t)], \quad y(t_0) = y_0. \quad (8)$$

Модель, яка заснована на наведеному вище рівнянні, також називається логістичною. Не дивлячись на достатню простоту, подібне узагальнення закону Мальтуса жодним чином не є примітивним. Навпаки, воно дозволяє явно включити в опис динаміки популяцій важливий зворотний зв'язок: на процес діють механізми, які у міру зростання функції $y(t)$ знижують швидкість її зміни.

Наведене вище логістичне рівняння має два рівноважні стани (розв'язки): $y(t)=0$ і $y(t)=N/r$. З формальної точки зору перший з них нестійкий, проте на практиці це не зовсім так. Виходячи з того, що реальні об'єми інформаційних потоків

подаються дискретними величинами, зазначимо, що при отриманні функцією $y(t)$ в якийсь момент значення менше одиниці надалі її величина не зростає. Тому в реальності розв'язок $y(t)=0$ також можна вважати рівноважним.

Другий розв'язок $y(t)=N/r$ визначає рівноважний стан, при чому, при $y(t)>N$ вмикаються механізми спаду залежності, а при $y(t)<N$, відповідно, зростання.

Як вже було зазначено, логістична модель часто застосовується для аналізу динаміки інформаційних потоків. Очевидно, що за наявності сприятливих зовнішніх умов (при деякій щільності ресурсу) об'єм інформаційного потоку росте вільно, що сприяє логістичному зростанню. При цьому з великою мірою впевненості можна стверджувати, що основні параметри для конкретизації загальної моделі (8) можуть визначатися в результаті аналізу спрощеної логістичної моделі.

Отже, логістична модель успішно описує процес досягнення тематичним інформаційним потоком деякого рівноважного стану.

Інформаційну динаміку в сучасних соціальних умовах можна розглядати як процес, обумовлений виникненням і зникненням окремих тематик, які відбуваються на тлі загальних тенденцій інформаційного простору. Зафіксуємо певну тематику і припустимо, що у момент часу $t=0$ існує n_0 фонових інформаційних підтверджень щодо її актуальності. Внаслідок того, що в рамках прийнятої моделі актуальність тематики зберігається протягом проміжку часу T , можна розглядати окремо дві часові області: $0 < t \leq T$ з рівнем актуальності теми $D > 0$ і $t > T$ з $D = 0$. У даному випадку розв'язок $y(t)$ задається парою функцій $u(t)$ і $v(t)$, які є відповідними розв'язками задач визначення рівня інформованості в соціальному середовищі для кожній з цих областей і які «зшиваються» у точці $t = T$.

Перша функція відповідає процесу зростання кількості інформованості в умовах ненульової актуальності теми і, можливо, перехід до стану насичення, який описується функцією $v(t)$.

У випадку вивчення динаміки загального інформаційного потоку може спостерігатися явище «перетікання» інформації з одних, що втрачають актуальність тематик, в інші. Тому ця динаміка має описуватися системою рівнянь, кожне з яких відноситься до окремого монотематичного процесу або потоку, а зміни стану, в основному, визначаються

«конкурентною боротьбою» окремих тематик. На зміну величини тематичного інформаційного процесу здійснюється вплив зовнішніх факторів (контрпропаганда), які зменшують швидкість її розповсюдження.

Необхідно також звернути увагу на залежність динаміки інформаційних процесів від соціальних факторів, характерних для суспільного інформаційного середовища. Відповідні дослідження можливі з використанням, наприклад, елементів теорії динамічного соціального впливу Латане [3]. Розглянемо один з підходів, який можна застосувати у цьому випадку для дослідження динаміки інформаційних потоків.

Гібридна математична модель процесу розповсюдження інформації. Позначимо $u(x, t): (x, t) \rightarrow [0, 1]$, $t \in [0, T]$, - функцію рівня розповсюдження реклами в межах заданої соціальної групи обсягу x , що не перевищує заданої величини A , $0 \leq x \leq A$.

Моделювання змін в інформаційному потоці можна провести за допомогою рівняння дифузії [4]. Цей процес аналогічний розповсюдженню деякої речовини в межах часового інтервалу $t \in [0, T]$ і може бути описаний рівнянням:

$$\frac{du}{dt} = -k(t) \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad (8)$$

з початковою умовою $u(x, 0) = 0$ та крайовою умовою $u(A, t) = 1$, де $k(t)$ - коефіцієнт, що характеризує вплив (аналог коефіцієнта дифузії) і є пропорційним швидкості зміни інформаційно-залежної частини соціальної групи.

Склад соціальної групи представимо у вигляді 3 підгруп: чутливих до інформаційної тематики y_1 , тих, що вже знаходяться під впливом тематичного змісту y_2 , і байдужих до теми y_3 . На основі відомої моделі Кермана-Маккендріка запишемо модель процесу розповсюдження тематичної інформації. Її розв'язки, відповідно,

визначають обсяги окремих груп:

$$\dot{y}_1 = -y_1 y_2, \quad \dot{y}_2 = y_1 y_2 - y_2, \quad \dot{y}_3 = y_2. \quad (9)$$

Відзначимо, що за такою постановкою величина A залежатиме від часу, при чому $A = A(t) = y_1(t) + y_2(t)$. Крім цього, можна покласти $k(t) = \mu \equiv \text{const}$.

Шукаючи функцію $u(x, t)$ у вигляді $u(x, t) = X(x(t))$, отримуємо величину рівня впливу тематичного контенту у вигляді $u(x, t) = \mu(1 - e^{-x(t)/\mu})$, $0 \leq x(t) \leq y_1(t) + y_2(t)$, $y_1(t), y_2(t)$ - компоненти розв'язку системи (9).

Цей розв'язок може бути узагальнений за умов припущення, що байдужа частина групи може через деякий час зацікавитися змістом інформаційної тематики. При цьому частина групи стає чутливою до інформаційного змісту, збільшуючи групу $y_1(t)$, і процес періодично повторюється.

Було проведено чисельні експерименти, які дозволили зробити висновок про адекватність отриманих на основі запропонованих підходів розрахунків результатам спостереження за реальними процесами зміни станів інформаційних потоків різної тематики.

Висновок. У даній роботі формалізовано процеси розповсюдження інформації шляхом комунікації в межах заданої цільової аудиторії. Використано підходи, що базуються на моделях соціальної та фізичної аналогій процесів обміну інформацією у соціальній мережі. Змодельовано та досліджено динаміку інформаційних потоків на основі моделей різних типів. Запропоновано використання моделей дифузії інформації у соціальній групі. Отримано результати, які підтверджують адекватність описаних математичних моделей реальній динаміці інформаційних процесів.

References

1. BRAYCHEVSKIY, S. (2005) "Modern information flows: actual problems", *Scientific and technical information*, vol. 1, iss.11, pp. 21-33.
 2. ARNOLD, V.I. (2003) "Analytics and prediction: mathematical aspect", *Scientific and technical information*, vol. 1, iss.3, pp. 1-10.
 3. LATANE, B. (1981) "The psychology of social impact", *American Psychologist*, v. 36, pp. 343-356.
 4. IVOHIN, E. and NAUMENKO, Y. (2017) "About some mathematical models of the advertising distribution in socium", *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Phys.&Math*, vol. 1, pp. 68-71.
- Надійшла до редколегії 19.08.2017

Список використаних джерел

1. Брайчевский С.М. Современные информационные потоки: актуальная проблематика / С.М. Брайчевский, Д.В. Ландэ // Научно-технич. инф. – 2005. – Сер. 1. – Вып. 11. – С. 21-33.
2. Арнольд В.И. Аналитика и прогнозирование: математический аспект/ В.И. Арнольд // Научно-технич. инф. – 2003. – Сер. 1. – Вып. 3. – С. 1-10.
3. Latane B. The psychology of social impact/ B. Latané // Amer. Psychologist. – 1981. – Vol. 36. – P. 343–356.
4. Івохін Є.В. Про окремі математичні моделі процесу розповсюдження реклами в соціумі / Є.В. Івохін, Ю.О.Науменко // Вісник КНУ імені Тараса Шевченка. Серія фіз.-мат. науки. – 2017. – №1. – С.68-71.

УДК 519.87

Івохін Є.В., д.ф.-м.н, професор,
Апанасенко Д.В., аспірант

Про деякі моделі та методи розв'язування нечітких трьохіндексних транспортних задач

Київський національний університет імені Тараса
Шевченка, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д
e-mail: ivohin@univ.kiev.ua

Ivokhin E.V., Dr.Sci., professor,
Apanasenko D.V., postgraduate

About some models and solving methods of fuzzy three-index transport problems

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Kyiv, Glushkova ave., 4d
e-mail: ivohin@univ.kiev.ua

В роботі розглянуто моделі та методи пошуку оптимального розв'язку нечітких транспортних задач, ресурси в яких задано у вигляді нечітких чисел. Розглянуто узагальнення методики розв'язання нечіткої транспортної задачі за умови використання декількох рівнів нечіткості в обмеженнях та з урахуванням важливості обмежень. Запропоновано спосіб застосування розробленого підходу для розв'язання нечітких трьохіндексних транспортних задач загального вигляду. Запропонований підхід можна використовувати для розв'язання багатокритеріальних нечітких транспортних задач з нечітко заданими обмеженнями на ресурси. Він дозволяє здійснювати пошук ефективних за сукупністю критеріїв розв'язків нечітких транспортних задач на множинах допустимих розв'язків, що визначаються з урахуванням параметрів неточності та важливості обмежень.

Ключові слова: транспортна задача, багатоіндексна модель, нечіткі трикутні числа, методи розв'язування.

The paper considers models and methods of finding an optimal solution of fuzzy transport problems, the resources of which are given in the form of fuzzy numbers. The generalization of the solving method of the fuzzy transport problem with the use of several levels of fuzziness in the constraints and taking into account the importance of the restrictions is considered. A method of application of the developed approach for solving fuzzy three-index transport problems of general appearance is proposed. Proposed scheme in which the values of needs of consumers or carrying capacities of intermediate points are defined as the fuzzy variables. The proposed approach can be used to solve multicriteria fuzzy transport problems with fuzzy specified restrictions on resources. As the properties of the transportation plan, indicators based on the benefits of points of consumption are considered. This allows us to search for effective sets of criteria for solutions of fuzzy transport problems on sets of permissible solutions, which are determined taking into account the parameters of inaccuracy and the importance of constraints.

Key words: transportation problem, multi-index model, fuzzy triangle numbers, methods of solving.

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Зміст транспортної задачі (ТЗ), яка є одним з прикладів задач математичного програмування, полягає в розподіленні оптимальним чином однорідної продукції групи «виробників» серед групи «споживачів» з урахуванням заданих обмежень на «пропозицію» та «попит».

Дослідженню задач транспортного типу присвячено багато наукових публікацій (наприклад, [1–4]). У цих роботах наводяться змістовні постановки прикладних задач, які зводяться до транспортних, і формуються їх математичні моделі.

Транспортна задача, яка вирішується на мережі, що складається з кінцевого числа вузлів і

дуг між ними, є задачею лінійного програмування (ЗЛП), якщо загальна вартість перевезень і обмеження на об'єми перевезень задаються лінійними функціями. Типовою проблемою є транспортування продукції від m виробників до n споживачів.

Нехай $A_1, \dots, A_m$ - виробники однорідного продукту, причому об'єм виробництва в пункті A_i складає a_i одиниць $i = \overline{1, m}$. Припустимо, що продукт споживається в пунктах $B_1, \dots, B_n$, а об'єм споживання в пункті B_j складає b_j одиниць, $j = \overline{1, n}$. Транспортні витрати по доставці одиниці продукції з пункту A_i в пункт B_j дорівнюють c_{ij}

$(i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$. Задача полягає у визначенні такого плану перевезень, $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, при якому запити всіх споживачів $B_j, j = \overline{1, n}$, повністю задоволені, всі продукти з пунктів виробництва $A_i, i = \overline{1, m}$, вивезено та сумарні транспортні витрати мінімальні.

Для цього необхідно визначити множину значень $x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, що задовольняють умовам

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad (1)$$

і таких, що цільова функція

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (2)$$

досягає мінімального значення.

Транспортна задача має місце у разі перевезення однорідного продукту між пунктами виробництва і споживання. У реальних ситуаціях доводиться здійснювати перевезення, для яких загальна вартість транспортування залежить не тільки від відстані між пунктами, але і від інших, іноді суб'єктивних чинників. Це вимагає збільшення індексності задачі. На практиці часто розглядаються багатоіндексні транспортні задачі розподілу ресурсів, що описуються сукупністю елементів трьох множин: пунктів виробництва, проміжних пунктів і пунктів споживання однорідного ресурсу, функціональний взаємозв'язок яких представлений у вигляді графа. Багатоіндексні задачі розподілу обмеженого однорідного ресурсу з обмеженнями транспортного типу є задачами визначення оптимального плану перевезень, що забезпечує ефективне функціонування системи, тобто знаходження оптимальних об'ємів виробництва і споживання з урахуванням пропускнуої спроможності проміжних пунктів при транспортуванні ресурсу.

Ефективні алгоритми рішення транспортної задачі були розроблені для випадків, коли вартість і коефіцієнти споживання відомі апіорі. Проте на практиці достатньо часто розглядаються приклади, в яких ці параметри не можуть бути задані точно. Наприклад, вартість доставки може змінюватися в процесі транспортування. Запити на об'єми споживання можуть бути невизначеними через специфіку окремих неконтрольованих чинників.

Відповідна нечітка транспортна задача (НТЗ) може бути записане у вигляді:

$$\min Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{c}_{ij} x_{ij} \quad (3)$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \tilde{a}_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = \tilde{b}_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^m \tilde{a}_i = \sum_{j=1}^n \tilde{b}_j, \quad (5)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Розглянемо транспортну задачу нечіткого виробництва і розподілу ресурсів, об'єми яких задаються нечіткими трикутними числами [5]

$\tilde{a}_i = (a_i^l, a_i, a_i^r), i = \overline{1, m}, \tilde{b}_j = (b_j^l, b_j, b_j^r), j = \overline{1, n}$, де

величини допустимих відхилень $0 \leq a_i^l \leq a_i, a_i^r \geq 0, i = \overline{1, m}, 0 \leq b_j^l \leq b_j, b_j^r \geq 0, j = \overline{1, n}$,

визначають граничні зміни ресурсів моделі. Величини транспортних витрат по доставці одиниці продукції $c_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, будемо вважати наперед відомими.

В цьому випадку транспортна задача може розглядатися як нечітка задача лінійного програмування з ресурсними обмеженнями у формі нечітких трикутних чисел, функція цілі

$$\text{якої має вид } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min.$$

Нечіткі величини ресурсів в обмеженнях можна записати у вигляді

$$\tilde{a}_i = (a_i - \lambda a_i^l, a_i, a_i + \lambda a_i^r), i = \overline{1, m},$$

$$\tilde{b}_j = (b_j - \lambda b_j^l, b_j, b_j + \lambda b_j^r), j = \overline{1, n}.$$

Тоді на основі визначення нечіткого рішення Белмана-Заде НТЗ можна переписати у формі

$$\max \lambda$$

з обмеженнями

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} - \lambda(U_1 - L_1) \geq L_1$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} - \lambda a_i^l \geq a_i - a_i^l, \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} + \lambda a_i^r \leq a_i + a_i^r,$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} - \lambda b_j^l \geq b_j - b_j^l, \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} + \lambda b_j^r \leq b_j + b_j^r,$$

$$\sum_{i=1}^m (a_i - a_i^l + \lambda a_i^l) = \sum_{j=1}^n (b_j - b_j^l + \lambda b_j^l),$$

$$\sum_{i=1}^m (a_i + a_i^r - \lambda a_i^r) = \sum_{j=1}^n (b_j + b_j^r - \lambda b_j^r),$$

$$0 \leq \lambda \leq 1, \quad x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Очевидно, що дана задача є класичною

задачею ЛП, для знаходження рішень якої можна застосувати будь-який варіант симплекс-метода.

Альтернативний спосіб рішення НТЗ може бути отриманий на основі використання декількох рівнів нечіткості в обмеженнях задачі.

Нехай відомо, що допустимі відхилення в обмеженнях на ресурси незалежні. Запишемо нечіткі величини ресурсів в обмеженнях у вигляді

$$\tilde{a}_i = (a_i - \lambda_{a_i}^l a_i^l, a_i, a_i + \lambda_{a_i}^r a_i^r),$$

$$\tilde{b}_j = (b_j - \lambda_{b_j}^l b_j^l, b_j, b_j + \lambda_{b_j}^r b_j^r),$$

$$\lambda_{a_i}^l, \lambda_{a_i}^r \in [0, 1], \quad \lambda_{b_j}^l, \lambda_{b_j}^r \in [0, 1], \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Використовуючи декілька рівнів нечіткості в обмеженнях, можна сформулювати задачу багатокритеріальної оптимізації для пошуку розв'язків НТЗ: знайти значення параметрів $\lambda_0, \lambda_{a_i}^l, \dots, \lambda_{a_m}^r, \lambda_{b_1}^l, \dots, \lambda_{b_n}^r : \lambda_{a_i}^l, \lambda_{a_i}^r \in [0, 1], \quad i = \overline{1, m}, \lambda_{b_j}^l, \lambda_{b_j}^r \in [0, 1], \quad j = \overline{1, n}, \lambda_0 \in [0, 1]$, які є рішенням задачі лінійного програмування з критеріями

$$\lambda_0 \rightarrow \max, \quad \lambda_{a_1}^l \rightarrow \max, \dots, \lambda_{b_n}^r \rightarrow \max$$

та обмеженнями вигляду

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} - \lambda_0 (U_1 - L_1) \geq L_1,$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} - \lambda_{a_i}^l a_i^l \geq a_i - a_i^l, \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} + \lambda_{a_i}^r a_i^r \leq a_i + a_i^r,$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} - \lambda_{b_j}^l b_j^l \geq b_j - b_j^l, \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} + \lambda_{b_j}^r b_j^r \leq b_j + b_j^r,$$

$$\sum_{i=1}^m (a_i - a_i^l + \lambda_{a_i}^l a_i^l) = \sum_{j=1}^n (b_j - b_j^l + \lambda_{b_j}^l b_j^l),$$

$$\sum_{i=1}^m (a_i + a_i^r - \lambda_{a_i}^r a_i^r) = \sum_{j=1}^n (b_j + b_j^r - \lambda_{b_j}^r b_j^r),$$

$$\lambda_0 \in [0, 1], \quad \lambda_{a_i}^l, \lambda_{a_i}^r \in [0, 1], \quad \lambda_{b_j}^l, \lambda_{b_j}^r \in [0, 1], \quad x_{ij} \geq 0,$$

$$i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

У разі великої кількості обмежень для вирішення отриманої задачі можна застосувати метод перетворення області допустимих рішень на основі близькості обмежень або використати метод порівнянь для ранжування важливості нечітких обмежень [6].

Припустимо, що є пункти виробництва, проміжні пункти і пункти споживання однорідного продукту. Задані максимально можливі об'єми виробництва продукту кожним пунктом виробництва, мінімально допустимі об'єми споживання продукції кожним пунктом споживання, обмеження на об'єми перевезення

продукту від кожного пункту виробництва до кожного проміжного пункту, обмеження на об'єми перевезення продукту від кожного проміжного пункту до кожного пункту споживання. Потрібно знайти план перевезень, що забезпечує ефективне функціонування системи і задовольняє обмеженням пунктів на вироблені, спожиті та передані об'єми однорідного продукту.

Позначимо через I – множин пунктів виробництва, J – множин проміжних пунктів, K – множин пунктів споживання, $A_i, i = \overline{1, I}$, – максимальний об'єм виробництва продукту пунктом виробництва i ; $B_k, k = \overline{1, K}$, – мінімально допустимий об'єм продукту, який необхідно доставити в пункт споживання; $C_{ij}, i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}$, – максимальна кількість продукту, яка може бути доставлена з пункту виробництва i в проміжний пункт j ; $D_{jk}, j = \overline{1, J}, k = \overline{1, K}$, – максимальний об'єм продукту, який може бути доставлений з проміжного пункту j в пункт споживання k ; $x_{ijk}, i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}, k = \overline{1, K}$, – кількість продукту, яка буде перевезено з пункту виробництва i через проміжний пункт j в пункт споживання k .

Загальна математична модель проблеми перевезення однорідного продукту є наступною системою обмежень

$$\sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K x_{ijk} \leq A_i$$

(об'єм виробництва продукту пунктом виробництва не повинен перевищувати максимально можливого об'єму);

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J x_{ijk} \geq B_k$$

(пункт споживання повинен отримати об'єм продукту не нижче мінімально допустимого об'єму);

$$\sum_{k=1}^K x_{ijk} \leq C_{ij}$$

(об'єм перевезення продукту від пункту виробництва до проміжного пункту не повинен перевищувати максимально допустимого об'єму);

$$\sum_{i=1}^I x_{ijk} \leq D_{jk}$$

(об'єм перевезення продукту від проміжного пункту до пункту споживання не повинен перевищувати максимально допустимого об'єму);

$$x_{ijk} \geq 0$$

(природні обмеження на змінні).

Як критерії оптимальності, що визначають ефективність функціонування системи, які можуть залежати від різних показників шуканого плану перевезень, розглянемо вартісні показники плану. Позначимо через a_i , $i = \overline{1, I}$, - собівартість виробництва одиниці продукції пунктом виробництва i ; b_k , $k = \overline{1, K}$, - ціну реалізації одиниці продукції пункту споживання k ; c_{ij} , $i = \overline{1, I}$, $j = \overline{1, J}$, - вартість доставки одиниці продукції з пункту виробництва i в проміжний пункт j ; d_{jk} , $j = \overline{1, J}$, $k = \overline{1, K}$, - вартість доставки одиниці продукції з проміжного пункту j в пункт споживання k . Задача мінімізації витрат полягає у визначенні такого плану перевезень x_{ijk} , $i = \overline{1, I}$, $j = \overline{1, J}$, $k = \overline{1, K}$, для якого виконуються обмеження, на якому критерій

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (a_i + c_{ij} + d_{jk}) x_{ijk} \rightarrow \min$$

приймає оптимальне значення.

Задача максимізації доходу полягає у визначенні такого плану перевезень x_{ijk} , $i = \overline{1, I}$, $j = \overline{1, J}$, $k = \overline{1, K}$, для якого виконуються обмеження і приймає оптимальне значення критерій

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K b_k x_{ijk} \rightarrow \max.$$

Задача максимізації прибутку полягає у визначенні такого плану перевезень x_{ijk} , $i = \overline{1, I}$, $j = \overline{1, J}$, $k = \overline{1, K}$, для якого виконуються обмеження і приймає оптимальне значення критерій

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (b_k - a_i - c_{ij} - d_{jk}) x_{ijk} \rightarrow \max.$$

У якості показників плану може бути розглянуті показники, засновані на перевагах, визначуваних контрольованими елементами системи. Припустимо, що контрольованими елементами системи є пункти споживання. З кожним з пунктів споживання $k = \overline{1, K}$ будемо зв'язувати функцію переваги, яка визначає перевагу споживача щодо об'єму спожитого ним продукту. Відмітимо, що об'єм продуктів, спожитих елементом, визначається у вигляді $\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J x_{ijk}$, $k = \overline{1, K}$. На практиці споживачам важко визначити свої переваги щодо можливого

об'єму кожного з спожитих ними продуктів. Одним із способів завдання таких переваг є метод ранжирування інтервалів відповідних об'ємів продукту. Формалізація такого роду переваг пов'язана з визначенням кінцевої вкладеної послідовності інтервалів відповідних об'ємів продукту. Нехай кожний із споживачів задає $p+1$ вкладених інтервалів $[B_{kl}^-, B_{kl}^+]$, $l = \overline{0, p}$, $k = \overline{1, K}$. Вкладеність інтервалів означає виконання наступних умов $[B_{kl}^-, B_{kl}^+] \subseteq [B_{kl+1}^-, B_{kl+1}^+]$, $l = \overline{0, p-1}$, $k = \overline{1, K}$. Так інтервал $[B_{k0}^-, B_{k0}^+]$ є найбільш важливим для споживача k , $k = \overline{1, K}$, інтервал $[B_{k1}^-, B_{k1}^+]$ менш важливим і т.д. Тоді функції переваги визначаються як кусково-постійні функції наступного вигляду:

$$\phi_k(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } u \in [B_{k0}^-, B_{k0}^+], \\ l, & \text{если найдется } l \in \{1, \dots, p\} \\ & u \in [B_{kl}^-, B_{kl}^+], u \notin [B_{kl-1}^-, B_{kl-1}^+], \\ p+1, & \text{если } u \notin [B_{kp}^-, B_{kp}^+], \end{cases}$$

де $u \in R$, $k = \overline{1, K}$. Тоді задача вибору найбільш ефективного плану перевезень ставиться як наступна задача багатокритеріальної оптимізації: необхідно визначити план перевезень x_{ijk} , $i = \overline{1, I}$, $j = \overline{1, J}$, $k = \overline{1, K}$, для якого виконуються обмеження і приймають оптимальні значення критерії, що визначають переваги пунктів споживання:

$$\phi_k(\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J x_{ijk}) \rightarrow \min, k = \overline{1, K}.$$

У ситуаціях, коли споживачі не можуть формалізувати систему вкладених інтервалів значень об'ємів необхідного продукту, можна використати нечіткий підхід для задання величин необхідних ресурсів.

Позначимо $[b_k, c_k]$, $k = \overline{1, K}$, - діапазони найбільш важливих для споживачів k , $k = \overline{1, K}$, об'ємів продукту. Допустимі відхилення в об'ємах необхідного споживачам продукту задамо у вигляді значень $a_k \leq b_k$ і $c_k \leq d_k$, $k = \overline{1, K}$, при чому величини a_k, d_k , $k = \overline{1, K}$, є відповідно найменшими і найбільшими значеннями об'ємів необхідного споживачам ресурсу. Це дозволяє формалізувати числові значення потреб у вигляді нечітких трапецеїдальних чисел $\tilde{v}_k = (a_k, b_k, c_k, d_k)$, $k = \overline{1, K}$ [5]. Припускаючи лінійний характер

функцій належності, отримаємо нечітку транспортну задачу з проміжними пунктами і обмеженнями на об'єми споживання ресурсу у формі нерівностей з нечіткою правою частиною

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J x_{ijk} \geq \tilde{v}_k^-, \quad \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J x_{ijk} \leq \tilde{v}_k^+, \quad k = \overline{1, K},$$

де $\tilde{v}_k^- = (a_k, b_k, b_k)$, $\tilde{v}_k^+ = (c_k, c_k, d_k)$, $k = \overline{1, K}$, - нечіткі трикутні числа, що визначають мінімальні і максимальні потреби продукту.

Висновки. В роботі розглянуто моделі та методи пошуку оптимального розв'язку нечітких транспортних задач, ресурси в яких задано у вигляді нечітких чисел. Розглянуто узагальнення методики розв'язання нечіткої транспортної

задачі з урахуванням важливості обмежень. Запропоновано спосіб застосування розробленого підходу для розв'язання нечітких трьохіндексних транспортних задач загального вигляду. Запропонований підхід може використовуватися для розв'язання багатокритеріальних нечітких транспортних задач з нечітко заданими обмеженнями на ресурси. Це дозволяє здійснювати пошук ефективних за сукупністю критеріїв розв'язків нечітких транспортних задач на множинах допустимих розв'язків, що визначаються з урахуванням параметрів неточності та важливості обмежень.

Список використаних джерел

1. Воронин А.А. Оптимальные иерархические структуры / А.А.Воронин, С.П. Мишин – М.: ИПУ, 2003.
2. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования: в 2 т. / А.Схрейвер. – М.: Мир, 1991.
3. Юдин Д.Б. Линейное программирование / Д.Б. Юдин, Е.Г.Гольштейн – М.: Наука, 1969. – 424с.
4. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій / Ю.П.Зайченко – К.: «Слово», 2006. – 815 с.
5. Bablu Jana. Multi-Objective Fuzzy Linear Programming and Its Application in Transportation Model / Bablu Jana, Tapan Kumar Roy // Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences. – 2005. – V.21. – No.2. – P.243-268.
6. Івохін Є.В. О подходах к решению транспортной задачи с нечеткими ресурсами / Є.В. Івохін, Альмодарс Барак Субхи Камл // Проблемы управления и информатики. – 2014. – V.46. – №10. – P.45-57.

References

1. VORONIN, A. and MISHIN, S. (2003) *Optimal hierarchical structures*, Moscow: IPU.
2. SKHREIVER, A. (1991) *Theory of linear and integer programming*, Moscow: Mir.
3. UDIN, D. and GOLSHTAIN, E. (1969) *Linear programming*, Moscow: Nauka.
4. ZAYCHENKO, YU. (2006) *Operations research*, Kiev: Slovo.
5. BABLU, JANA and TAPAN, KUMAR ROY (2005) "Multi-Objective Fuzzy Linear Programming and Its Application in Transportation Model", *Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences*, vol.21, no.2, pp. 243-268.
6. IVOHIN, E. and ALMODARS, BARRAQ SUBHI KAML (2014) "To Approaches for Solving Transportation Problem with Fuzzy Resources", *Journal of Automation and Information Sciences*, vol. 46, №10, pp. 45-57.

Надійшла до редколегії 19.08.2017

УДК 519.87

Івохін Є.В.¹, д.ф.-м.н, професор,
Навродський В.О.², к.ф.-м.н, доцент

Про одну оптимізаційну задачу розподілу часового ресурсу в умовах невизначеності

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д,
e-mail: ivohin@univ.kiev.ua

²Київський національний університет культури і
мистецтв, м. Київ, вул. Чигоріна, 20,
e-mail: navrodskiy@ukr.net

Ivokhin E.V.¹, Dr.Sci., professor,
Navrodskiy V.A.², Ph.D., associate professor

About one optimization problem of the time resource under conditions of uncertainty

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: ivohin@univ.kiev.ua

²Kyiv National University of Culture and Arts,
Kyiv, Chigorina st., 20,
e-mail: navrodskiy@ukr.net

В роботі розглянуто задачу визначення порядку виконання заданої сукупності робіт, проведення яких забезпечує максимально ефективний розподіл наявного часового обмеження. Розглянуто модель даної задачі за умов неточного визначення термінів виконання окремих робіт, що описуються за допомогою нечітких трикутних чисел. Запропоновано метод розв'язання отриманої задачі шляхом формування дискретного варіанту задачі оптимізації на основі процедури зведення. Для реалізації оператора порівняння значень функції пристосованості використано спосіб порівняння інтервально заданих чисел. Запропонований підхід може ефективно використовуватися для планування послідовності виконання заданої кількості робіт, що потребують часового розподілу за умов неточно заданих обсягів часу виконання.

Ключові слова: задача розподілу часового ресурсу, нечіткість, трикутні нечіткі числа, функція пристосування.

The paper considers the task of determining the order of execution of a given set of works, the conduct of which ensures the most efficient distribution of the available time limit. The form of the problem of discrete programming, to which the problem of distribution of a temporary resource is reduced, is given. A model of this problem is considered in the conditions of inaccurate determination of the timing of the execution of individual works, which are described with the help of fuzzy triangular numbers. A method is proposed for solving the obtained problem by forming a discrete variant of the optimization problem on the basis of the special reduction procedure. The form of the fitness function for a solution containing uncertainty is given. To implement the operator for comparing the values of the fitness function, a method is used to compare the interval-defined numbers. The proposed approach can be effectively used to schedule the sequence of execution of a specified number of jobs that require the efficient time distribution in conditions of inexact specified amounts of execution time.

Keywords: the problem of allocation of time resource, fuzzy, triangular fuzzy numbers, the function of adaptation.

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Задача ефективного використання часу розглядається як одна з класичних задач розподілу (резервування) ресурсів заданого об'єму за множиною категорій (робіт). Постановка такої задачі полягає в знаходженні плану витрат наявного ресурсу (у нашому випадку таким ресурсом є поняття часу) на виконання деякої сукупності завдань, при якому сумарне (ітогове) використання ресурсу є оптимальним.

Для визначення порядку виконання робіт, проведення яких забезпечує максимальну часову

ефективність, можна сформулювати задачу у вигляді оптимізаційної задачі.

Розглянемо m виконавців (машин), що володіють різною продуктивністю. Припустимо, що задано сукупність робіт, які згруповано в p типів (без обмеження можна вважати задано p робіт). Кожен виконавець $k \in \{1, \dots, m\}$ може виконувати будь-яку роботу, але для виконання роботи i -го типу виконавці можуть витратити різний час. Цей факт враховується технологічною матрицею

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1m} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{p1} & t_{p2} & \dots & t_{pm} \end{pmatrix} \quad (1)$$

де t_{ik} – час виконання роботи типу i виконавцем k . Необхідно розподілити p робіт по m виконавцям (скласти план робіт) так, щоб загальний час виконання робіт, що обчислюється з початку роботи першого виконавця і закінчується за фактом звільнення всіх виконавців, був мінімальним. Відповідно до нотації, описаної в [1], сформульовану задачу позначимо у вигляді $Rm//Cmax$.

У класичному випадку, де $t_{ik} \in R$, задачу можна звести до задачі дискретного програмування наступного вигляду

$$\begin{aligned} \max_k \sum_{i=1}^p c_{ik} t_{ik} &\rightarrow \min \\ \sum_{k=1}^m c_{ik} &= n_i, i = \overline{1, p}, \\ c_{ik} &\geq 0, i = \overline{1, p}, k = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (2)$$

де c_{ik} – кількість призначених робіт типу i для виконавця k , n_i – загальна (сумарна) кількість робіт типу i . Сукупність обмежень в задачі (2) гарантує, що всі роботи будуть залучені до розкладу. Розв'язок задачі (2) формується у вигляді матриці $C = \{c_{ik}\}_{i=\overline{1, p}; k=\overline{1, m}}$.

Розглянемо математичні моделі оптимізаційних задач складання розкладу в умовах неточних даних.

Припустимо, що початкова інформація для задачі $Rm//Cmax$ є наближеною і задається у вигляді трикутних нечітких чисел $\tilde{t}_{ik} = (t_{ik}, \underline{t}_{ik}, \overline{t}_{ik})$, які представляють собою один з підходів до формалізації неточних величин. Подання інформації про час виконання робіт у такому вигляді є найпоширенішим способом представлення невизначеної інформації.

Отже, початкові дані мають вигляд нечіткої технологічної матриці $\tilde{T} = \{\tilde{t}_{ik}\}_{p \times m}$ – матриці, компоненти якої подаються нечіткими трикутними значеннями часу виконання робіт. Для розв'язання задачі планування розглянемо підхід, що дозволить отримати субоптимальний план.

Під зведенням задачі до дискретного варіанту задачі оптимізації (2) будемо розуміти, що з матриці $\tilde{T}$ можна отримати матрицю T за

допомогою обчислення значень елементів α -зрізів за формулою [2]

$$\xi_{\alpha}(t_{ik}) = \alpha \underline{t}_{ik} + (1 - \alpha) \overline{t}_{ik}, \quad (3)$$

де $\alpha \in [0, 1]$.

При різних α отримуємо такі варіанти планування:

- $\alpha \rightarrow 1$, песимістичне планування (оптимізація за максимальним часом виконання робіт);
- $\alpha \rightarrow 0$, оптимістичне планування;
- $\alpha \rightarrow 0,5$, планування за середніми величинами;
- $\alpha \sim \alpha_{ik}$, планування, в рамках якого формується окрема матриця $A = \{\alpha_{ik}\}_{p \times m}$, за якою кожному елементу t_{ik} ставиться у відповідність свій коефіцієнт α_{ik} для перетворення $\tilde{T}$ у T .

Матриця $A = \{\alpha_{ik}\}_{p \times m}$ може бути сформована особою, що приймає рішення (експертом), тому, як наслідок, можна говорити про використання експертної інформації. Однак, знань експертів може не вистачити для точного визначення коефіцієнтів, із-за чого розв'язки задачі будуть неоптимальними. Автоматизувати налаштування матриці A можна за допомогою залучення оберненого зв'язку, хоча при цьому мають місце такі проблеми:

- проблема навчання – цілком зрозуміло, що отримати оптимальні значення коефіцієнтів α_{ik} неможливо, тому їх вибір перетворюється в окремий ітераційний процес, причому з урахуванням змін умов задачі $Rm//Cmax$; крім того, необхідно забезпечити поетапну активну пробну перевірку на основі спеціально організованого пошуку методом спроб і помилок;
- проблема оцінки – важко визначити, наскільки поточне значення α_{ik} краще або гірше за інше.

Незалежно від вибору α невизначеність щодо часу виконання робіт «ліквідується» до етапу розв'язування задачі дискретного програмування (2).

Інший спосіб базується на тому, що розв'язок задачі (2) формується з використанням функції пристосування. Це вимагає проведення ранжування результатів розв'язання задачі (2), спираючись на правила обробки нечітких трикутних чисел [3].

Обчислимо функцію пристосованості для розв'язку C , що містить невизначеність (враховуючи $c_{ik} \geq 0$):

$$R(C) = \max_k \sum_{i=1}^p c_{ik} \tilde{t}_{ik} = \max_k \sum_{i=1}^p [c_{ik} \underline{t}_{ik}, c_{ik} \overline{t}_{ik}] =$$

$$= \max_k ([\sum_{i=1}^p c_{ik} \underline{t}_{ik}, \sum_{i=1}^p c_{ik} \overline{t}_{ik}]) = [\underline{C}, \overline{C}]. \quad (4)$$

Реалізацію оператора порівняння значень функції пристосування проведемо на основі способу порівняння інтервально заданих чисел [4]:

$$\xi(R(C_1)) > \xi(R(C_2)) \Leftrightarrow R(C_1) > R(C_2), \quad (5)$$

при $\alpha=0.5$. Однак, конкретно для задачі (2) з інтервально заданими термінами виконання робіт допустимим є варіант

$$R(C_1) > R(C_2) \Leftrightarrow (\overline{C}_1 > \overline{C}_2) \vee ((\overline{C}_1 = \overline{C}_2) \wedge (\underline{C}_1 > \underline{C}_2)). \quad (6)$$

Відповідно до (6) при порівнянні планів вводиться пріоритет у послідовності перевірки: спочатку аналізується найгірший можливий випадок виконання робіт за планом, після чого,

якщо наслідки однакові, переглядається найкращий випадок.

Висновки. В роботі розглянуто задачу визначення порядку виконання заданої сукупності робіт, проведення яких забезпечує максимально ефективний розподіл наявного часового обмеження. Розглянуто модель даної задачі за умов неточного визначення термінів виконання окремих робіт, що описуються за допомогою нечітких трикутних чисел. Запропоновано метод розв'язання отриманої задачі шляхом формування дискретного варіанту задачі оптимізації на основі процедури зведення. Для реалізації оператора порівняння значень функції пристосування використано спосіб порівняння інтервально заданих чисел. Запропонований підхід може ефективно використовуватися для планування послідовності виконання заданої кількості робіт, що потребують часового розподілу за умов неточно заданих обсягів часу виконання.

Список використаних джерел

1. Жданова Е.Г. Теория расписаний. – Москва: МГУ, 2000. – 136 с.
2. Лю Б. Теория и практика неопределенного программирования / Б. Лю. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. – 416 с.
3. Алефельд Г. Введение в интервальные вычисления/ Г.Алефельд, Ю. Херцбергер. – М.:Мир, 1987. – 360 с.
4. Добронец Б.С. Интервальная математика. Учебное пособие/ Б.С.Добронец. – Красноярск: «СФУ», 2007. – 287 с.

References

1. ZHDANOVA, E. (2000) *Theory of scheduling*, Moscow, MSU.
2. LIU, B. (2014) *Theory and practice of undefined programming*, Moscow, BINOM.
3. ALEFELD, G. and HERCBERGER, Yu. (1987) *Introduction to interval calculations*, Moscow, Mir.
4. DOBRONETS, B. (2007) *Interval mathematics*, Krasnoyarsk, SFU.

Надійшла до редколегії 19.08.2017

УДК 519.21:62

Кінаш А.В.¹ к.ф.-м.н.
Чабанюк Я.М.^{2,3}, д.ф.-м.н.
Хімка У.Т.¹ к.ф.-м.н.

**Умови дисипативності для
узагальненого процесу Орнштейна-
Уленбека**

¹Національний університет “Львівська
політехніка”, Україна, 79000, м.Львів, вул.
Степана Бандери, 12,
e-mail: anastasiiaakinash@gmail.com
e-mail: ulyana.himka@gmail.com

²Люблінська політехніка, Польща, 20-618,
Люблін, вул. Надбистшицька, 38 Д,

³Львівський національний університет ім.
Івана Франка, Україна, 79000, Львів, вул.
Університетська, 1,
e-mail: y.chabanyuk@pollub.pl

Kinash A.V.¹, Ph.D. (Phys.-Math.)
Chabaniuk Ya.M.^{2,3}, D.Sc. (Phys.-Math.)
Khimka U.T.¹, Ph.D. (Phys.-Math.)

**The dissipativity conditions for the
generalized Ornstein-Uhlenbeck process**

¹L'viv Polytechnic National University, Ukraine,
79000, L'viv, Stepana Banderu st., 12,
e-mail: anastasiiaakinash@gmail.com
e-mail: ulyana.himka@gmail.com

²Lublin University of Technology, Poland, 20-618,
Lublin, Nadbystrzycka st., 38 D,

³Ivan Franko National University of L'viv, Ukraine,
79000, L'viv, Universytets'ka st., 1,
e-mail: y.chabanyuk@pollub.pl

В статті розглядається випадковий процес, що задається розв'язком стохастичного диференціального рівняння. Основною метою роботи є встановлення умов асимптотичної дисипативності такого процесу. Задача асимптотичної дисипативності була розглянута авторами для процесів, що задаються рівняннями з випадковими складовими та марковськими переключеннями в схемах дифузійної апроксимації та асимптотично малої дифузії. Ці дослідження базувались на підходах, які були розроблені В.С.Королюком, а також, на встановленні умов дисипативності дифузійних процесів, представлених в роботах Р.З.Хасмінського. Відмінність даної в статті задачі полягає в тому, що вихідне рівняння залежить від деякої додатної константи β , що дозволяє нам отримати в граничному процесі Орнштейна-Уленбека, за виконання додаткових умов, накладених на зсув та матрицю дифузії граничного процесу. Важливою також є задача встановлення умов асимптотичної нормальності граничного процесу в схемі використання малого параметру, що означає бути процесом Орнштейна-Уленбека для граничного процесу. Таким чином, в статті встановлено достатні умови асимптотичної дисипативності узагальненого процесу Орнштейна-Уленбека з марковськими переключеннями, граничним до якого є класичний процес Орнштейна-Уленбека.

Ключові слова: асимптотична дисипативність, процес Орнштейна-Уленбека, розв'язок проблеми сингулярного збурення, марковський процес.

In the article the random process, which is determined by the solution of the stochastic differential equation, is considered. The main goal of the work is obtaining the asymptotic dissipativity conditions of such process. Asymptotic dissipativity task was considered by the authors for the processes, which are presented by the equations with random components and Markov switching in the diffusion approximation scheme and scheme of small diffusion. These investigations were based on the approaches, which were developed by the V.S. Koroliuk, as well as on the receiving the dissipativity conditions of the diffusion processes, which are presented in works of R.Z. Khasmins'kyi. The difference of this research is that the initial equation depends on some positive constant β , which allows us to get in the limit the Ornstein-Uhlenbeck process with fulfilling additional conditions on the shift and diffusion matrix of the limited process. It is also important problem of the obtaining the asymptotic normality conditions of the limited process in the scheme of small parameter applying, what means to be an Ornstein-Uhlenbeck process for the limited process. Thus, in the article sufficient asymptotic dissipativity conditions of the generalized Ornstein-

Uhlenbeck process with Markov switching, limited to which is classic Ornstein-Uhlenbeck process, are found.

Key Words: asymptotic dissipativity, Ornstein-Uhlenbeck process, solution of the singular perturbation problem, Markov process.

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Considering the evolution process, which is represented by the solution of stochastic differential equation[1]

$$\begin{aligned} du^\varepsilon(t) = & -\beta C\left(u^\varepsilon(t), x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)dt + \\ & + \sigma\left(u^\varepsilon(t), x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)dw_t, u^\varepsilon(t) \in R^d, \end{aligned} \quad (1)$$

where $u^\varepsilon(t)$ – random evolution, $t \geq 0$; $C(u, x) \in C^2(R^d, \bullet)$ – regression function; w_t – Wiener process; $\sigma(u, x)$ – diffusion; ε – small series parameter; $\beta > 0$ – constant; $x(t)$ – uniformly ergodic Markov process, which is defined in the measured phase space of states (X, X) [2] with stationary distribution $\pi(B), B \in X$.

For the Markov process $x(t), t \geq 0$, there exists generator, which is given by the formula[2]

$$\mathcal{Q}\varphi(x) = q(x) \int_X \mathcal{Q}(x, dy) [\varphi(y) - \varphi(x)]. \quad (2)$$

For the generator $\mathcal{Q}$ the potential

$$R_0 = \Pi - (\Pi + \mathcal{Q})^{-1},$$

Is defined, where $\Pi \varphi(x) = \int_X \pi(dx) \varphi(x)$ – projector on the subspace of zeroes of $\mathcal{Q}$

$$N_{\mathcal{Q}} = \{\varphi : \mathcal{Q}\varphi = 0\}.$$

Limited evolution $u(t)$ is defined as a solution of equation

$$du(t) = a(u(t))dt + \sigma(u(t))dW(t), \quad (3)$$

де

$$a(u) = -\beta \int_X C(u, x) \pi(dx).$$

Limited diffusion $\sigma(u)$ is represented in the form

$$\sigma(u) \cdot \sigma^*(u) = B(u),$$

where

$$B(u) = \frac{1}{2} \int_X \sigma^2(u, x) \pi(dx).$$

The averaged regression function and the square of limited diffusion is equal, respectively, to

$$\int_X C(u, x) \pi(dx) = u, \quad (4)$$

$$\int_X \sigma^2(u, x) \pi(dx) = 2. \quad (5)$$

So, the limited process (3) is an Ornstein-Uhlenbeck process[3].

There is also determined the operator $\tilde{L}(x)$ as follows

$$\begin{aligned} \tilde{L}(x)\varphi(u) = & [a(u) + \beta C(u, x)]\varphi'(u) + \\ & + \left[B(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u, x)\right]\varphi''(u). \end{aligned} \quad (6)$$

Theorem. Let Liapunov function $V(u) \in C^3(R^d)$ is defined for the determined system

$$\frac{du}{dt} = a(u),$$

which fulfills the conditions

$$C1: |C(x)R_0\tilde{L}(x)V(u)| < M_1V(u), M_1 > 0,$$

$$C2: |C_1(x)R_0\tilde{L}(x)V(u)| < M_2V(u), M_2 > 0,$$

where

$$C(x)\varphi(u, x) = C(u, x)\varphi'(u, x),$$

$$C_1(x)\varphi(u, x) = \frac{1}{2}\sigma^2(u, x)\varphi''(u, x). \quad (7)$$

Also there are inequalities

$$a(u)V'(u) < -c_1V(u), c_1 > 0, \quad (8)$$

$$\sup_{u \in R^d} \|\sigma(u)\| < c_2, c_2 > 0. \quad (9)$$

Then system (1) is asymptotic dissipative[4].

Proof of theorem.

Lemma 1. For the two-component Markov process

$$u_t^\varepsilon := u^\varepsilon(t), x_t^\varepsilon = x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), t \geq 0$$

generator $L^\varepsilon(x)$ defined in the foem

$$\begin{aligned} L^\varepsilon(x)\varphi(u, x) = & \varepsilon^{-1}\mathcal{Q}\varphi(u, x) - \\ & - \beta C(x)\varphi(u, x) + C_1(x)\varphi(u, x). \end{aligned} \quad (10)$$

Proof. Generator of the Markov process on perturbed test-function is represented by formula

$$\begin{aligned} L^\varepsilon(x)\varphi(u, x) &= \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left[E \left[\varphi(u_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(u, x) \right] \middle| u_t^\varepsilon = u, \right. \\ &\quad \left. x_t^\varepsilon = x \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Let us consider separately the conditional expectation

$$\begin{aligned} E \left[\varphi(u_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(u, x) \middle| u_t^\varepsilon = u, x_t^\varepsilon = x \right] &= \\ &= E_{u,x} \left[\varphi(u_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) \right] - \varphi(u, x). \end{aligned}$$

Herefrom, for first term

$$E_{u,x} \left[\varphi(u_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) \right] \left[I(\theta_x > \varepsilon^{-1}\Delta) + I(\theta_x \leq \varepsilon^{-1}\Delta) \right].$$

Here $I(\theta_x > \varepsilon^{-1}\Delta)$, $I(\theta_x \leq \varepsilon^{-1}\Delta)$ – indicators of time, which system spend in the state x .

Indicators have form

$$I(\theta_x > \varepsilon^{-1}\Delta) = 1 - \varepsilon^{-1}q(t)\Delta + o(\Delta),$$

$$I(\theta_x \leq \varepsilon^{-1}\Delta) = \varepsilon^{-1}q(t)\Delta + o(\Delta).$$

Hence for the conditional expectation

$$\begin{aligned} E_{u,x} \left[\varphi(u_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) \right] &= \\ &= E_{u,x} \left[\varphi(u_{t+\Delta}, x) \right] \left[1 - \varepsilon^{-1}q(t)\Delta + o(\Delta) \right] + \\ &+ E_{u,x} \left[\varphi(u_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) \right] \left[\varepsilon^{-1}q(t)\Delta + o(\Delta) \right] = \\ &= E_{u,x} \left[\varphi(u_{t+\Delta}, x) \right] - \varepsilon^{-1}q(t)E_{u,x} \left[\varphi(u_{t+\Delta}, x) \right] \Delta + \\ &+ \varepsilon^{-1}q(t)E_{u,x} \left[\varphi(u_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) \right] \Delta + o(\Delta). \end{aligned}$$

To the term $\varepsilon^{-1}q(t)E_{u,x} \left[\varphi(u_{t+\Delta}, x) \right] \Delta$ apply the decomposition to the Taylor series on the evolution. As a result

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1}q(t)E_{u,x} \left[\varphi(u_{t+\Delta}, x) \right] \Delta &= \\ &= \varepsilon^{-1}q(t) \left[E_{u,x} \varphi(u, x) + E_{u,x} \varphi'(u, x) \Delta u \right] \Delta + o(\Delta) = \\ &= \varepsilon^{-1}q(t)E_{u,x} \left[\varphi(u, x) \right] \Delta + \varepsilon^{-1}q(t)E_{u,x} \left[\varphi'(u, x) \Delta u \right] \Delta + \\ &\quad + o(\Delta). \end{aligned}$$

Substitute given result in the expression for the conditional expectation

$$\begin{aligned} E_{u,x} \left[\varphi(u_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) \right] &= E_{u,x} \left[\varphi(u_{t+\Delta}, x) \right] - \\ &- \varepsilon^{-1}q(t)E_{u,x} \left[\varphi(u, x) \right] \Delta - \varepsilon^{-1}q(t)E_{u,x} \left[\varphi'(u, x) \Delta u \right] \Delta + \\ &+ \varepsilon^{-1}q(t)E_{u,x} \left[\varphi(u_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) \right] \Delta + o(\Delta) - \varphi(u, x). \end{aligned}$$

From using the Taylor's formula again, get

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1}q(t)E_{u,x} \left[\varphi(u_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) \right] \Delta &= \\ &= \varepsilon^{-1}q(t)E_{u,x} \left[\varphi(u, x_{t+\Delta}) + \varphi'(u, x_{t+\Delta}) \Delta u \right] \Delta = \\ &= \varepsilon^{-1}q(t)E_{u,x} \left[\varphi(u, x_{t+\Delta}) \right] \Delta + \\ &+ \varepsilon^{-1}q(t)E_{u,x} \left[\varphi'(u, x_{t+\Delta}) \Delta u \right] \Delta + o(\Delta). \end{aligned}$$

Then conditional expectation takes the form

$$\begin{aligned} E_{u,x} \left[\varphi(u_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) \right] &= E_{u,x} \left[\varphi(u_{t+\Delta}, x) \right] - \\ &- \varepsilon^{-1}q(t)E_{u,x} \left[\varphi(u, x) \right] \Delta - \varepsilon^{-1}q(t)E_{u,x} \left[\varphi'(u, x) \Delta u \right] \Delta + \\ &+ \varepsilon^{-1}q(t)E_{u,x} \left[\varphi(u, x_{t+\Delta}) \right] \Delta + \\ &+ \varepsilon^{-1}q(t)E_{u,x} \left[\varphi'(u, x_{t+\Delta}) \Delta u \right] \Delta + o(\Delta) - \varphi(u, x). \end{aligned}$$

Therefore, generator (11) takes the representation

$$\begin{aligned} L^\varepsilon(x)\varphi(u, x) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} E_{u,x} \left[\varphi(u_{t+\Delta}, x) \right] - \\ &- \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \varepsilon^{-1}q(t)E_{u,x} \left[\varphi(u, x) \right] \Delta - \\ &- \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \varepsilon^{-1}q(t)E_{u,x} \left[\varphi'(u, x) \Delta u \right] \Delta + \\ &+ \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \varepsilon^{-1}q(t)E_{u,x} \left[\varphi(u, x_{t+\Delta}) \right] \Delta + \\ &+ \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \varepsilon^{-1}q(t)E_{u,x} \left[\varphi'(u, x_{t+\Delta}) \Delta u \right] \Delta + \\ &+ \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} o(\Delta) - \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \varphi(u, x) = \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} E_{u,x} \left[\varphi(u_{t+\Delta}, x) \right] - \lim_{\Delta \rightarrow 0} \varepsilon^{-1}q(t)E_{u,x} \left[\varphi(u, x) \right] - \\ &- \lim_{\Delta \rightarrow 0} \varepsilon^{-1}q(t)E_{u,x} \left[\varphi'(u, x) \Delta u \right] + \\ &+ \lim_{\Delta \rightarrow 0} \varepsilon^{-1}q(t)E_{u,x} \left[\varphi(u, x_{t+\Delta}) \right] + \\ &+ \lim_{\Delta \rightarrow 0} \varepsilon^{-1}q(t)E_{u,x} \left[\varphi'(u, x_{t+\Delta}) \Delta u \right] - \varphi(u, x). \end{aligned}$$

From integrating formula (1) in the interval $[t, t + \Delta]$

$$\begin{aligned} u_{t+\Delta}^\varepsilon &= u - \beta \int_t^{t+\Delta} C \left(u^\varepsilon(s), x \left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right) ds + \\ &+ \int_t^{t+\Delta} \sigma \left(u^\varepsilon(s), x \left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right) dw_s, \\ \Delta u &= u_{t+\Delta}^\varepsilon - u = -\beta \int_t^{t+\Delta} C \left(u^\varepsilon(s), x \left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right) ds + \\ &+ \int_t^{t+\Delta} \sigma \left(u^\varepsilon(s), x \left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right) dw_s, \end{aligned} \quad (12)$$

Substitution of obtained expression for Δu to the difference gives

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} q(t) E_{u,x} [\varphi'(u, x_{t+\Delta}) \Delta u] - \\ & - \lim_{\Delta \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} q(t) E_{u,x} [\varphi'(u, x) \Delta u] = \\ & = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} q(t) E_{u,x} [\varphi'(u, x_{t+\Delta}) - \varphi'(u, x)] \Delta u = \\ & = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} q(t) E_{u,x} [\varphi'(u, x_{t+\Delta}) - \varphi'(u, x)] \times \\ & \times \left(-\beta \int_t^{t+\Delta} C \left(u^\varepsilon(s), x \left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right) ds + \right. \\ & \left. + \int_t^{t+\Delta} \sigma \left(u^\varepsilon(s), x \left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right) dw_s \right) = 0. \end{aligned}$$

Thus for generator $L^\varepsilon(x)$

$$\begin{aligned} & L^\varepsilon(x) \varphi(u, x) = \\ & = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} E_{u,x} [\varphi(u_{t+\Delta}, x)] - \lim_{\Delta \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} q(t) E_{u,x} [\varphi(u, x)] + \\ & + \lim_{\Delta \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} q(t) E_{u,x} [\varphi(u, x_{t+\Delta})] - \varphi(u, x). \end{aligned}$$

For the first and the last terms, with using form of $u_{t+\Delta}^\varepsilon$, have

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} E_{u,x} [\varphi(u_{t+\Delta}, x)] - \varphi(u, x) = \\ & = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} E_{u,x} [\varphi(u_{t+\Delta}, x) - \varphi(u, x)] = \\ & = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left[E_{u,x} \varphi \left(u - \beta \int_t^{t+\Delta} C \left(u^\varepsilon(s), x \left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right) ds + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_t^{t+\Delta} \sigma \left(u^\varepsilon(s), x \left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right) dw_s, x \right) - \varphi(u, x) \right]. \end{aligned}$$

Make a replacement

$$z = u - \beta \int_t^{t+\Delta} C \left(u^\varepsilon(s), x \left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right) ds$$

and substitute to the found expression

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} E_{u,x} \varphi \left(z + \int_t^{t+\Delta} \sigma \left(u^\varepsilon(s), x \left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right) dw_s, x \right) - \varphi(u, x).$$

From the Taylor's formula

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} E_{u,x} \varphi \left(z + \int_t^{t+\Delta} \sigma \left(u^\varepsilon(s), x \left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right) dw_s, x \right) = \\ & = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} E_{u,x} \varphi(z, x) + \\ & + \varphi'(z, x) \int_t^{t+\Delta} \sigma \left(u^\varepsilon(s), x \left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right) dw_s + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \varphi''(z, x) \left(\int_t^{t+\Delta} \sigma \left(u^\varepsilon(s), x \left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right) dw_s \right)^2 + \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} o(\Delta).$$

From here

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} E_{u,x} \varphi \left(z + \int_t^{t+\Delta} \sigma \left(u^\varepsilon(s), x \left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right) dw_s, x \right) - \\ & - \varphi(u, x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} E_{u,x} \varphi(z, x) + \\ & + \varphi'(z, x) \int_t^{t+\Delta} \sigma \left(u^\varepsilon(s), x \left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right) dw_s + \\ & + \frac{1}{2} \varphi''(z, x) \left(\int_t^{t+\Delta} \sigma \left(u^\varepsilon(s), x \left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right) dw_s \right)^2 - \\ & - \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \varphi(u, x). \end{aligned}$$

Since

$$\varphi'(z, x) \int_t^{t+\Delta} \sigma \left(u^\varepsilon(s), x \left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right) dw_s = 0,$$

Then finally the expression takes the form

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} E_{u,x} [\varphi(z, x) - \varphi(u, x)] + \\ & + \frac{1}{2} \varphi''(z, x) \left(\int_t^{t+\Delta} \sigma \left(u^\varepsilon(s), x \left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right) dw_s \right)^2. \end{aligned}$$

Let's return to the replacement in the second term

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} E_{u,x} \varphi''(z, x) \left(\int_t^{t+\Delta} \sigma \left(u^\varepsilon(s), x \left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right) dw_s \right)^2 = \\ & = \frac{1}{2} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} E_{u,x} \varphi'' \left(u - \beta \int_t^{t+\Delta} C \left(u^\varepsilon(s), x \left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right) ds, x \right) \times \\ & \times \left(\int_t^{t+\Delta} \sigma \left(u^\varepsilon(s), x \left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right) dw_s \right)^2. \end{aligned}$$

Herefrom, using a Taylor series expansion, get

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} E_{u,x} \varphi''(u, x) \left(\int_t^{t+\Delta} \sigma \left(u^\varepsilon(s), x \left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right) dw_s \right)^2 = \\ & = \frac{1}{2} \sigma^2(u, x) \varphi''(u, x). \end{aligned}$$

Substitute the received representation in the expression for the generator

$$\begin{aligned} L^\varepsilon(x)\varphi(u, x) &= \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} q(t) E_{u,x} [\varphi(u, x_{t+\Delta})] - \lim_{\Delta \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} q(t) E_{u,x} [\varphi(u, x)] + \\ &\quad + \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} E_{u,x} [\varphi(z, x) - \varphi(u, x)] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma^2(u, x) \varphi''(u, x). \end{aligned}$$

From formula (2) for the generator of the Markov process, the following equality follows

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} q(t) E_{u,x} [\varphi(u, x_{t+\Delta})] - \lim_{\Delta \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} q(t) E_{u,x} [\varphi(u, x)] &= \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} q(t) E_{u,x} [\varphi(u, x_{t+\Delta}) - \varphi(u, x)] = \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} Q\varphi(u, x) = \varepsilon^{-1} Q\varphi(u, x). \end{aligned}$$

Thereby,

$$\begin{aligned} L^\varepsilon(x)\varphi(u, x) &= \\ &= \varepsilon^{-1} Q\varphi(u, x) + \frac{1}{2} \sigma^2(u, x) \varphi''(u, x) + \\ &\quad + \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} E_{u,x} [\varphi(z, x) - \varphi(u, x)] = \\ &= \varepsilon^{-1} Q\varphi(u, x) + \frac{1}{2} \sigma^2(u, x) \varphi''(u, x) + \\ &\quad + \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} E_{u,x} \left[\varphi \left(u - \beta \int_t^{t+\Delta} C \left(u^\varepsilon(s), x \left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right) ds, x \right) - \varphi(u, x) \right] = \\ &= \varepsilon^{-1} Q\varphi(u, x) + \frac{1}{2} \sigma^2(u, x) \varphi''(u, x) + \\ &\quad + \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} E_{u,x} \left[\varphi(u, x) - \right. \\ &\quad \left. - \beta \varphi'(u, x) \int_t^{t+\Delta} C \left(u^\varepsilon(s), x \left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right) ds - \varphi(u, x) \right] = \\ &= \varepsilon^{-1} Q\varphi(u, x) + \frac{1}{2} \sigma^2(u, x) \varphi''(u, x) + \\ &\quad + \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} E_{u,x} \left[-\beta \varphi'(u, x) \int_t^{t+\Delta} C \left(u^\varepsilon(s), x \left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right) ds \right] = \\ &= \varepsilon^{-1} Q\varphi(u, x) + \frac{1}{2} \sigma^2(u, x) \varphi''(u, x) - \\ &\quad - \beta C(u, x) \varphi'(u, x), \end{aligned}$$

which, taking into account the expressions in formula (7), completes the proof of the lemma.

Lemma 2. On perturbed test-function $\varphi^\varepsilon(u, x)$, which defines from the equality

$$\varphi^\varepsilon(u, x) = \varphi(u) + \varepsilon \varphi_1(u, x), \varphi(u) \in C^2(R^d) \quad (13)$$

generator $L^\varepsilon(x)$ allows an asymptotic representation

$$\begin{aligned} L^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(u, x) &= \\ &= [Q\varphi_1(u, x) - \beta C(x)\varphi(u) + C_1(x)\varphi(u)] + \\ &\quad + \varepsilon \theta^\varepsilon(x) \varphi^\varepsilon(u, x), \end{aligned} \quad (14)$$

where residual term $\theta^\varepsilon(x)$ has form

$$\theta^\varepsilon(x) \varphi^\varepsilon(u, x) = -\beta C(x) \varphi_1(u, x) + C_1(x) \varphi_1(u, x). \quad (15)$$

Proof. From substitution (13) into (9), get

$$\begin{aligned} L^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(u, x) &= \varepsilon^{-1} Q[\varphi(u) + \varepsilon \varphi_1(u, x)] - \\ &\quad - \beta C(x) [\varphi(u) + \varepsilon \varphi_1(u, x)] + \\ &\quad + C_1(x) [\varphi(u) + \varepsilon \varphi_1(u, x)] = \\ &= \varepsilon^{-1} Q\varphi(u) + Q\varphi_1(u, x) - \beta C(x) - \\ &\quad - \varepsilon \beta C(x) \varphi_1(u, x) + C_1(x) \varphi(u) + \varepsilon C_1(x) \varphi_1(u, x) = \\ &= \varepsilon^{-1} Q\varphi(u) + [Q\varphi_1(u, x) - \beta C(x) + C_1(x) \varphi(u)] + \\ &\quad + \varepsilon [C_1(x) \varphi_1(u, x) - \beta C(x) \varphi_1(u, x)]. \end{aligned}$$

Taking into account that $\varphi(u)$ does not depend on x , have $Q\varphi(u) \equiv 0$. Considering the obtained result and the form of the residual term $\theta^\varepsilon(x)$, receive the generator (14).

Lemma 3. Generator of the two-component Markov process

$$u_t^\varepsilon := u^\varepsilon(t), \quad x_t^\varepsilon = x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \quad t \geq 0.$$

On perturbed Liapunov function

$$V^\varepsilon(u, x) = V(u) + \varepsilon V_1(u, x), V(u) \in C^3(R^d) \quad (16)$$

Using the scheme of the solution of the singular perturbation problem has the form

$$L^\varepsilon(x)V^\varepsilon(u, x) = LV(u) + \varepsilon \theta(x)\varphi(u), \quad (17)$$

where L – limited generator represented by the formula

$$\begin{aligned} LV(u) &= -\beta V'(u) \int_x^x C(u, x) \pi(dx) + \\ &\quad + \frac{1}{2} V''(u) \int_x^x \sigma^2(u, x) \pi(dx) \end{aligned} \quad (18)$$

and residual term

$$\theta(x)V(u) = -\beta C(x) R_0 \tilde{L}(x) V(u) + C_1(x) R_0 \tilde{L}(x). \quad (19)$$

Proof. Generator (14) in (16) has representation

$$\begin{aligned} L^\varepsilon(x)V^\varepsilon(u, x) &= \\ &= [QV_1(u, x) - \beta C(x)V(u) + C_1(x)V(u)] + \\ &\quad + \varepsilon \theta^\varepsilon(x) V^\varepsilon(u, x). \end{aligned}$$

From the second solvability condition of singular perturbation problem

$$QV_1(u, x) - \beta C(x)V(u) + C_1(x)V(u) = LV(u);$$

$$QV_1(u, x) = LV(u) + \beta C(x)V(u) - C_1(x)V(u).$$

Let us substitute

$$C_1(x) - \beta C(x) = L(x),$$

then

$$QV_1(u, x) = LV(u) - L(x)V(u),$$

$$QV_1(u, x) = [L - L(x)]V(u),$$

$$QV_1(u, x) = \tilde{L}(x)V(u),$$

where $\tilde{L}(x) = L - L(x)$.

$$\text{Hence } V_1(u, x) = R_0 \tilde{L}(x)V(u).$$

For the limited generator

$$\begin{aligned} LV(u) &= \Pi L(x)V(u) = \Pi [C_1(x) - \beta C(x)]V(u) = \\ &= \Pi C_1(x)V(u) - \beta \Pi C(x)V(u) = \\ &= -\beta V'(u) \int_x C(u, x) \pi(dx) + \frac{1}{2} V''(u) \int_x \sigma^2(u, x) \pi(dx), \end{aligned}$$

which coincides with the representation (18).

Now substitute (20) to the residual term (15), considered on perturbed Liapunow function

$$\theta^\varepsilon(x)V^\varepsilon(u, x) =$$

$$= -\beta C(x)R_0 \tilde{L}(x)V(u) + C_1(x)R_0 \tilde{L}(x)V(u),$$

which completes the proof of the lemma, taking into account the formula (19).

The end of proof of the theorem coincides with proof of the theorem in [5].

Список використаних джерел

1. Kinash A. V. Dissipative properties of generalized Ornstein–Uhlenbeck process. / A. V. Kinash, Ya. M. Chabanyuk, U. T. Khimka // XXX International Conference «Problems of Decision Making Under Uncertainties». Abstracts, August. 14–19, 2017, Vilnius, Lithuania. – Kyiv. – 2017. – P. 72–74.
2. Korolyuk V. S. Stochastic Systems in Merging Phase Space. / V. S. Korolyuk, N. Limnios. – World Scientific Publishing, 2005. – 330 p.
3. Scott M. Applied Stochastic Processes in Science and Engineering. / M. Scott. – University of Waterloo, 2013. – 316 p.
4. Кінаш А. В. Асимптотична дисипативність випадкової еволюції з імпульсним збуренням. / А. В. Кінаш, Я. М. Чабанюк, У. Т. Хімка // Вісник КНУ імені Т. Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2014. – Вип. 4. – С. 163–166.
5. Kinash A. Asymptotic dissipativity of the diffusion process in the asymptotic small diffusion scheme. / A. Kinash, Ya. Chabaniuk, U. Khimka // Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics. – 2015. – 14(4). – P. 93–103.

References

1. KINASH, A. V., CHABANYUK, YA. M. and KHMKA, U. T. (2017) “Dissipative properties of generalized Ornstein–Uhlenbeck process”, *XXX International Conference «Problems of Decision Making Under Uncertainties». Abstracts*, August. 14–19, 2017, Vilnius, Lithuania, pp. 72–74.
2. KOROLYUK, V.S. and LIMNIOS, N. (2005) *Stochastic Systems in Merging Phase Space*, World Scientific Publishing.
3. SCOTT, M. (2013) *Applied Stochastic Processes in Science and Engineering*, University of Waterloo.
4. KINASH, A. V., CHABANYUK, YA. M. and KHMKA, U. T. (2014) “Asymptotic dissipativity of random evolution with impulse perturbation”, *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series of Physical and Mathematical Sciences*, vol. 4, pp. 163–166.
5. KINASH, A., CHABANIUK, YA. and KHMKA, U. (2015) “Asymptotic dissipativity of the diffusion process in the asymptotic small diffusion scheme”, *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, 14(4), pp. 93–103.

Надійшла до редколегії 19.08.2017

УДК 621.391

В.В. Коваль¹, д.т.н., професор
Д.О. Кальян¹, аспірант
М.М. Худинцев², к.ф.-м.н., доцент
В.П. Лисенко¹, д.т.н., професор
О.В. Самков³, д.т.н., с.н.с.
І.Ю. Шкляревський⁴, директор

Автоматизований моніторинг 24x7 синхронізації сучасних цифрових мереж

¹Національний університет біоресурсів і
природокористування України, 03041, м. Київ,
вул. Героїв Оборони, 15

²Державна служба спеціального зв'язку та
захисту інформації України

³Інститут електродинаміки Національної
академії наук України

⁴ТОВ "Інформаційні сервісні технології"

e-mail: v.koval@nubip.edu.ua

V.V. Koval¹, Dr. Sci., Prof.
D.O. Kalian¹, graduate student
M.M. Khudyntsev², Ph. D., Associate Prof.
V.P. Lysenko¹, Dr. Sci., Prof.
O.V. Samkov³, Dr. Sci.
I.J. Shkliarevskyi⁴, director

Automated 24x7 monitoring of synchronization in modern digital networks

¹National University of Life and Environmental
Sciences of Ukraine, 03041, Kyiv, Geroiv Oborony
st., 15

²State Service of Special Communication and
Information Protection of Ukraine

³Institute of Electrodynamics of the National
Academy of Sciences of Ukraine

⁴"Information Service Technologies, Ltd"

e-mail: v.koval@nubip.edu.ua

В статті запропоновано застосування технології поліканального моніторингу робочих характеристик синхросигналів, яка дозволяє контролювати та прогнозувати якість роботи мереж синхронізації цифрових телекомунікацій. У якості формувача опорного сигналу, для проведення вимірювань відхилення часового інтервалу ВЧІ, було використано пристрій синхронізації із запропонованим адаптивним цифровим фазовим дискримінатором, оригінальність якого захищена патентом України на винахід.

В роботі надано опис технології поліканального моніторингу та можливості її реалізації та використання в якості комп'ютерно-інтегрованої системи автоматизованого моніторингу 24x7 синхронізації сучасних цифрових телекомунікаційних мереж. Наведено результати вимірювань і виконані статистичні обчислення основних показників, що задаються європейським стандартом ETS 300 464-4 та проведено їх порівняння з нормами. Запропоновано використання технологій поліканального моніторингу відхилення часового інтервалу при вирішенні практичних задач для виявлення початку масованих кібератак у сучасних цифрових IP-мережах.

Ключові слова: цифрові мережі, моніторинг, синхросигнал, адаптація, фазовий дискримінатор, опорний сигнал.

The paper proposes the application of the technology of multichannel monitoring of the working characteristics of clock signals, which allows to monitor and predict the quality of work of the synchronization networks of digital telecommunications. As the driver of the reference signal for measuring the deviation of the time interval TIE, a synchronization device with the proposed adaptive digital phase discriminator was used, the originality of which is protected by the patent for the invention of Ukraine.

The paper describes the technology of multichannel monitoring and the possibility of its implementation and use as a computer-integrated system for automated 24x7 monitoring of synchronization of modern digital telecommunications networks. The results of measurements and statistical calculations of the main indicators are given, set to the European standard ETS 300 464-4 and compared to the standards. The use of technologies for multichannel monitoring of the time interval deviation is proposed in solving practical problems for detecting the beginning of massive cyber attacks in modern digital IP networks.

Keywords: digital networks, monitoring, timing, adaptation, phase discriminator, reference signal.

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Introduction

In this article describes the specifics of measuring timing of synchronization information are discussed and the need to create a computer-integrated system for automated 24x7 monitoring of synchronization information is demonstrated [1, 2]. That allows to monitor and predict the quality and stability of modern digital networks. This paper is designated to the development of technology of multichannel monitoring of synchronous signal performance, to experimental studies of manufactured adaptive synchronization devices of the automated 24x7 monitoring system [3] and to the use of such technologies in modern digital telecommunications networks [4].

Specifics of measuring clock signals characteristics

The measurements of the characteristics of clock sync signals are based on the comparison of these signals and the reference (calibration) signal [4, 5]. They are implemented basing on regular and continuous measurements of the parameters of the synchronization signals and are mandatory part of the control systems of the synchronization network as a whole. Measurements of the characteristics of the synchronization signal in the network must be carried out at different levels in order to have a complete picture of the signal state at key points of the network.

The methodic of measuring the timing characteristics of the clock signals of modern digital networks depends to a large extent on the indicators measured and on the basis of which the analysis and evaluation of the results are performed. Among many indicators designed to assess the characteristics of the stability of time and frequency for rationing the requirements for synchronization interfaces with International recommendations and standards (ITU-T and ETSI) and other regulatory documents [5 - 7], the five indicators in the area of time measurements are defined:

- maximum time interval error (MTIE);
- time deviation (TDEV) – square root of time variance (TVAR);
- Allan deviation (ADEV) – square root of Allan variance;
- modified Allan deviation (MADEV) – square root of modified Allan variance;
- square root of the time interval error (TIE_{rms}).

TIE_{rms} and MTIE are determined basing on time error, while ADEV, MADEV and TDEV – are theoretically determined on the basis of the process

$x(t)$, that is, random time deviations obtained from their deterministic components.

A common expression describing the pseudoperiodic wave that simulates the signal is written:

$$s(t) = A \sin \Phi(t), \quad (1)$$

where A – amplitude;

$\Phi(t)$ – the total instantaneous phase that expresses an ideal linear phase that grows with time, and any frequency displacements or arbitrary phase fluctuations.

The time function $T(t)$ of the generator is determined from the point of view of its instantaneous phase, by equation:

$$T(t) = \frac{\Phi(t)}{2\pi\nu_{nom}}, \quad (2)$$

where ν_{nom} – rated frequency.

Time error function $TE(t)$, which in the standards is denoted by $x(t)$, between time $T(t)$ and the reference time $T_{ref}(t)$ is defined by the formula:

$$x(t) \equiv TE(t) = T(t) - T_{ref}(t). \quad (3)$$

Measurements of the time error in the interval τ , starting from the instant t , are called the time interval error $TIE_t(\tau)$ and are determined by the following equation:

$$TIE_t(\tau) = TE(t + \tau) - TE(t) \quad (4)$$

The function of the maximum time interval error $MTIE(\tau, T)$ is determined [5] on the basis of the concept of the deviation of the time interval as the maximum span of changes in the error of time at all possible observation intervals τ within the measurement period T :

$$MTIE(\tau, T) = \max_{0 \leq t_0 \leq T - \tau} \left\{ \max_{t_0 \leq t \leq t_0 + \tau} TE(t) - \min_{t_0 \leq t \leq t_0 + \tau} TE(t) \right\}. \quad (5)$$

Recommendations [5] define MTIE as a function of τ , keeping in mind the following T to infinity:

$$MTIE(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} MTIE(\tau, T). \quad (6)$$

In practice, most of the technical requirements of International recommendations and standards are based on two indicators of the five adopted, namely MTIE and TVAR.

Time variance TVAR is determined by the equation:

$$\sigma_x^2(\tau) = \frac{\tau^3}{3} \text{Mod } \sigma_y^2(y), \quad (7)$$

where $\sigma_y^2(\tau)$ - Allan variance.

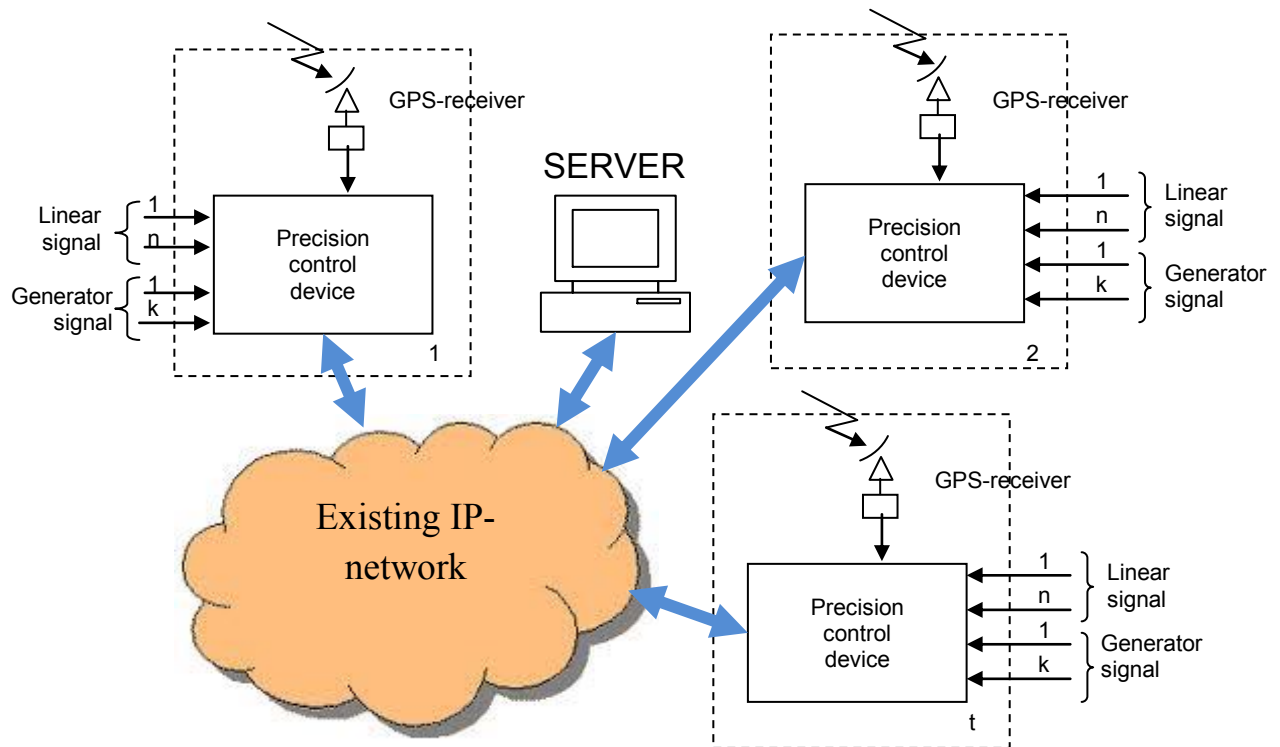


Fig. 1. Structure for automated multichannel 24x7 monitoring

Due to the regular and continuous measurements of the parameters of the synchronization signals, a quality control of the synchronization network as a whole is ensured. Monitoring of the synchronization signal in the network must be carried out at different levels in order to have a complete picture of the signal state at key points of the network.

Traditionally, synchronization networks are monitored using two methods [4] (monitoring the performance of the synchronization network signal and monitoring the performance of the feedback signals). However, these methods have a number of drawbacks, which can be significantly eliminated through the introduction of the technology of multichannel monitoring.

Multichannel monitoring technology

The proposed technology of multichannel monitoring of the characteristics of synchronization signals [1] differs from the known ones in that it is based on the use of geographically distributed, by objects of telecommunications, precision control devices (PCD) that simultaneously perform long-term measurements (hours, days, weeks) of several synchronization signals and a joint statistical processing in a specialized server of a centralized network management system.

Figure 1 shows a scheme for automated multichannel 24x7 monitoring of clock signals (generator and line signals). The system contains precision control devices that are synchronized with an external signal, for example, a GPS receiver signal, and provide a measurement with respect to the reference signal of the characteristics of the sync signals according to the TIE parameter. The reference signal is synthesized by the synchronization device with the phase-locked loop. The resulting TIE information is converted into a digital code and transmitted to the server.

In order to provide low cost and the possibility of reliable control over the parameters of digital network elements, the metrological characteristics of the PCD have an internal phase noise estimated by the deviation of the $TDEV(\tau)$ of approximately 2 ns.

The main type of monitored clock signals is 2,048 MHz. Additional option is available - 2,048 Mbps. As the source of the reference signal, a GPS receiver with a rubidium generator and an output signal of 10 MHz (S_{in} ; $U \geq 0,25$ V; $R = 50$ Ohm) is used, the characteristics of which comply with ITU-T G.811. As a reference signal for metrological certification, it is possible to use a signal of nominal frequency of 5 MHz (S_{in} ; $U \geq 0,25$ V; $R = 50$ Ohm).

Forming reference signal by an adaptive synchronization device

In order to guarantee low cost and the possibility of reliable control of the parameters of digital network elements, the metrological characteristics of the PCD have an internal phase noise evaluated by the deviation of the time interval $TDEV(\tau)$ of approximately 2 ns.

An option is available with an adaptive synchronization device implemented on the basis of a phase-locked loop with adaptive properties. In this case, the reference signal of the PCD with a frequency of 2,048 MHz is formed by a synchronization device with a phase-locked loop and an integrated ultra-precision reference signal generator that is controlled by the microcontroller through a 20-bit digital-to-analog converter. The PLL integration constant can be changed via the external interface. The PCD performs TIE monitoring for 2,048 MHz (2,048 Mbit/s) clock signal at a sampling time interval equal to $\tau = 200$ ms with allowed quantized values of 0,2 ns; performs digital processing for the observation interval $T=1$ sec and reports TIE data in digital format for output via the external interface. For the purpose of visual monitoring of the operation of the PCD, an indication of the status and results of monitoring on the built-in liquid crystal display are provided.

Experimental studies of the adaptive synchronization device of the automated 24x7 monitoring system of synchronoinformation

The complex of researches of the manufactured laboratory model of the PCD with an adaptive synchronization device was developed and implemented. Patterns were obtained, that substantially supplement the idea of the nature of control for providing adaptive and optimal modes of transient processes and high accuracy in the static state of synchronization devices with phase locked loop. In particular, it was confirmed that for the implementation of speed-optimal synchronization devices with phase-locked it is necessary to control the phase discriminator itself. At the same time, a single-level system was transformed into a system with a two-level hierarchical regulator, the structure of which is obtained by the results of solving the synthesis problem and implemented as a computing device.

For the practical implementation of the optimal control law, the use of an adaptive digital phase discriminator (ADPD) is proposed, the originality of which is protected by the patent for invention of

Ukraine [7]. The technical solution of the invention provides an adaptive controlled formation of a code combination about the magnitude of the phase angle of two mutually independent periodic pulse sequences and increasing the reliability of the representation of measurement results in a digital form.

To verify the theoretical results obtained, complex experimental studies of the laboratory prototype of the PCD with an adaptive synchronization device were done. The schema for measuring the output signal of the adaptive synchronization device ASD is shown in Fig. 2, and the results of TIE measurements and the calculated statistical characteristics of the MTIE and TDEV of the synchronous signal at the output of the ASD connected to the reference frequency source and their comparison with the norms of the European standard ETS 300 464-4 are shown in Fig. 3 and Fig. 4 and Fig. 5.

The results of the implementation of the automated system for multichannel 24x7 monitoring of synchronization information

To implement the proposed technology of multichannel 24x7 monitoring of clock signals, an original precision control device was developed, called the sensor block SB-1 (Fig. 6), which is part of the control and measurement system for the quality of synchronization signals (CMS-8).

The computer-integrated multichannel 24x7 monitoring system of clock signals operates on existing telecommunication networks and provides the possibility of continuous monitoring of the quality parameters of synchronization signals (Fig. 7) in key nodes of telecommunication networks instead of the periodic measurement (audit) procedure. The results of monitoring are published on the web site of the communication operator "Ukrtelecom"

The system of multichannel monitoring of clock signals has the following service capabilities:

- visual display in real time of the current state of a specified number of objects (images - individually for each object;
- a visual updated mapping of the correspondence of all characteristics to templates (images - by MTIE and TDEV separately with a group of graphs on each image)

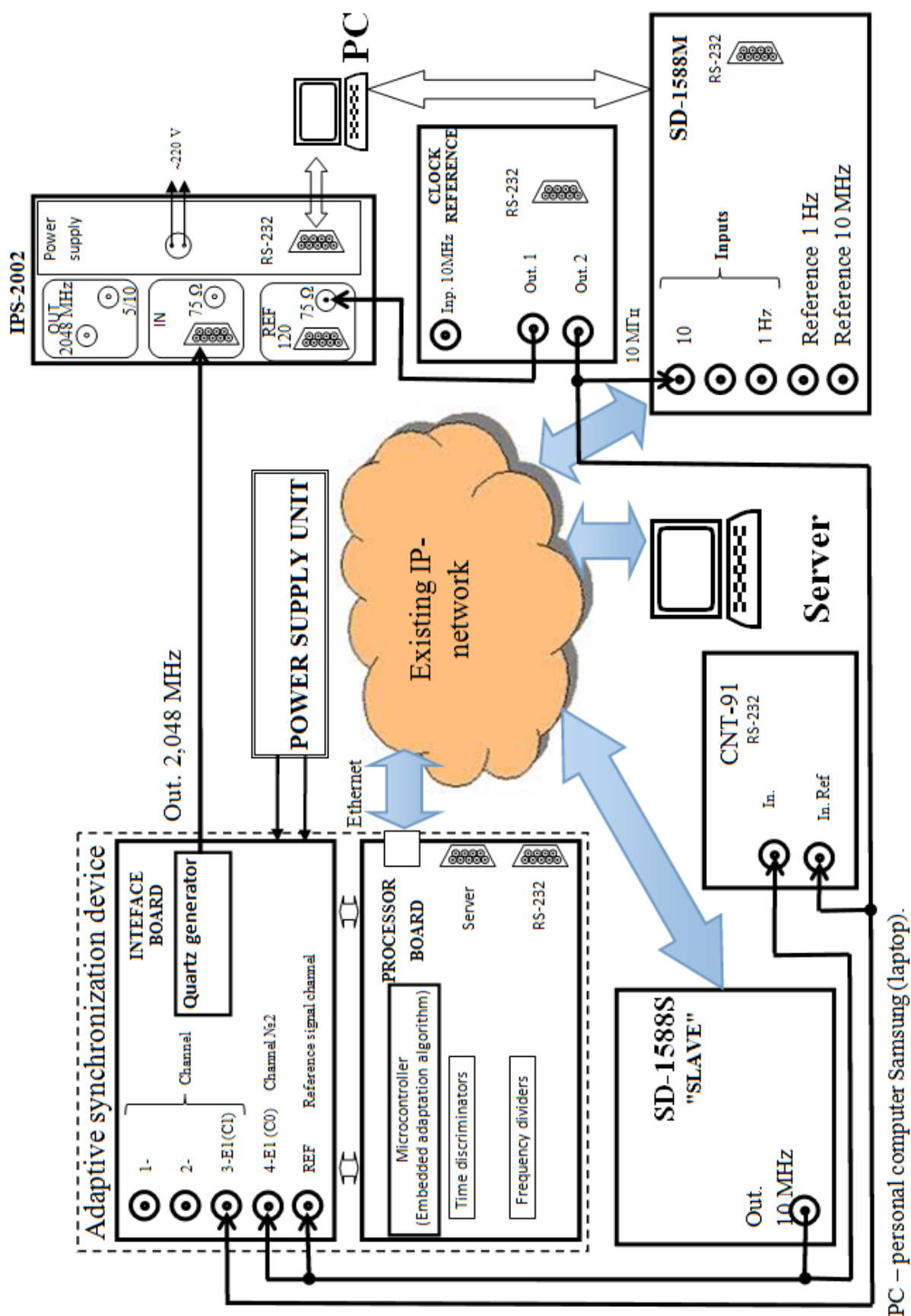


Fig.2. Workplace scheme for processing information obtained as a result of short-term measurements of the output signal of the adaptive synchronization device (ASD) connected to existing IP network

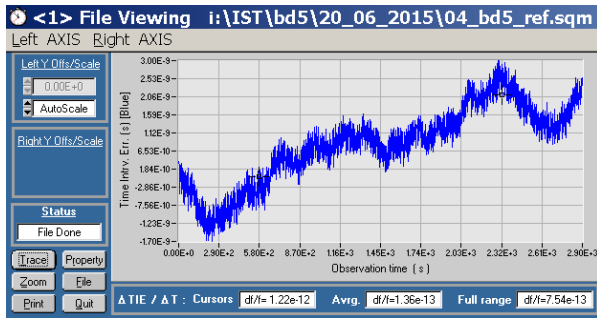


Fig. 3. The results of measurements of the TIE of a clock signal of automatic synchronization device connected to the reference frequency source

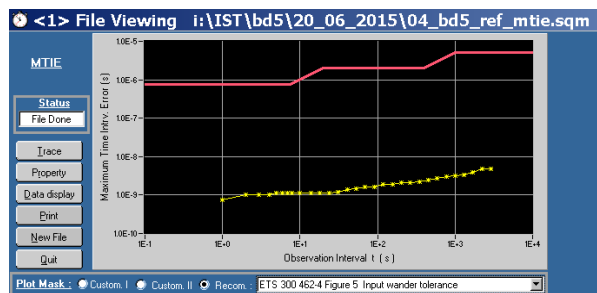


Fig. 4. Statistical characteristics of maximum time interval error (MTIE) of the clock signal at the output of the automatic synchronization device connected to the reference frequency source and their comparison with the norms of the European standard ETS 300 464-4

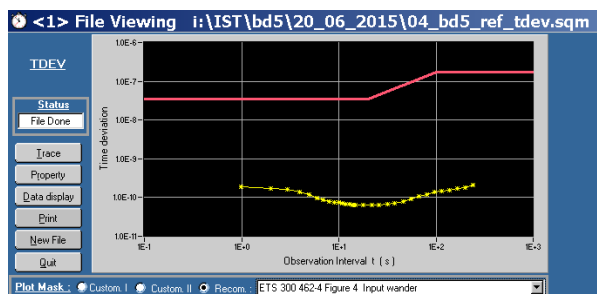


Fig. 5. Statistical characteristics of the time deviation (TDEV) of the clock signal at the output of the automatic synchronization device connected to the reference frequency source and their comparison with the norms of the European standard ETS 300 464-4



Fig. 6. Block of sensors SB-1 of the control and measurement system of the quality of synchronization signals (CMS-8)

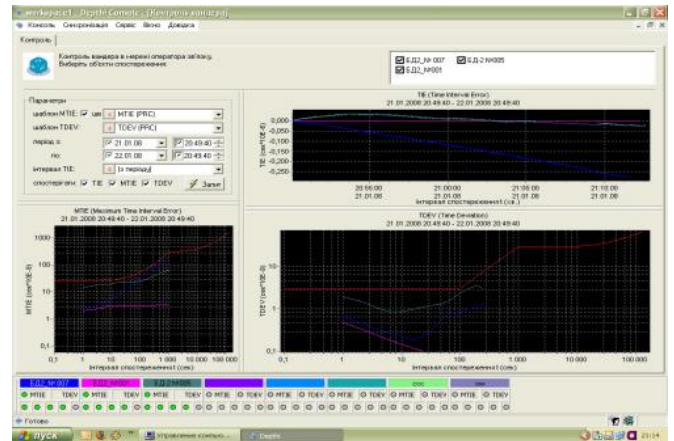


Fig. 7. Dialog box for monitoring the quality of synchronization signals

- the presence/absence of alarm messages (i.e., inconsistencies of signals to templates) is displayed for a specified period of time, the current status (presence / absence of an alarm at the moment), and the threat of an emergency state (the trend of approaching controlled characteristics to the template level).

In addition to this visualization, it is possible to perform statistical processing of measurement results, aggregate measurements over the previous period and accumulate averaged values over a longer period, process periods with accidents, archive and store results with the ability to process queries, configure measurement modes, etc.

This a system provides, firstly, direct, independent and reliable results of monitoring the quality of the synchronization signal in a network with centralized management and accumulation of data and, secondly, it is possible to:

- visually represent signal characteristics in real time at the central control point of the network;
- combine processing of measurement results, accumulation and storage, archiving and statistical processing, which is provided by the use of a specialized server of the measurement and control system for the quality of synchronization signals, which also serves as the end user terminal;
- access to data on signal quality for past periods, as well as the ability to predict future signal quality behavior, long-term monitoring ("cross-linking" of individual measurement arrays), and planning the development of a synchronization network.

It should also be mentioned that it is possible to transform the measurement and control system for the quality of synchronization signals from one server to a "client-server" system of any complexity that provides multi-user access to monitoring results.

Conclusions

In this paper, a computer-integrated system for automated 24x7 monitoring of synchronization information was introduced, which allows to monitor and predict the quality of functioning of synchronization networks for digital telecommunications, and also provides the potential for monitoring the transmission of the time scale, using the precision IEEE-1588 protocol, to identify the beginning of massive cyber attacks in modern digital IP-networks. It was shown how the adaptive synchronization device provides the forming of a reference signal using the proposed adaptive digital phase discriminator (ADPD), its originality is protected by the patent for the invention of Ukraine, and a complex of studies of the manufactured laboratory model of the synchronization device with adaptive properties connected to the active IP-network. During the processing of the measurement results, statistical calculations of the main indicators of MTIE and TDEV, set to the European standard ETS 300 464-4, were performed and compared with the norms. According to the results of experimental research and technical operation, it can be stated that

the computer-integrated system of automated 24x7 monitoring of synchronization information is the modern nanotechnology system that is produced in Ukraine and is used on modern networks to monitor the characteristics of clock sync signals. The system provides direct, free and reliable results of monitoring the quality of the synchronization signal with centralized management and accumulation of data and allows not only to find and localize synchronization problems in a timely manner, but also to predict the quality and stability of the operation of digital telecommunication systems and networks.

Improving the quality of synchronization information will allow to expand the range of services provided by operators and providers of modern digital telecommunications networks, increasing the speed and volume of transmitted information, its reliability, and in the future, creating conditions for organizing new services, for example, a single accurate time, increasing cybersecurity, mastering new technologies in the economy and defense.

Список використаних джерел

1. Коваль В.В. Комп'ютерно-інтегрована система поліканального моніторингу часових інтервалів синхронізації / Коваль В.В. // Науковий вісник Національного ун-ту біоресурсів і природокористування України. – 2010. – Вип.148. – С.57-64.
2. Konovalov G. Timing Information's 24x7 Monitoring as an Important Factor of Network Synchronization Quality Support / G.Konovalov, B.Kostik, V.Koval, I.Shkliarevskiy // International IEEE Symposium on Precision Clock Synchronization for Measurement Control and Communication (ISPCS-2013), pp.: 89-94 September 22-27, 2013.
3. Коваль В.В. Автоматичні пристрої та системи тактової синхронізації інфокомунікаційних мереж / В.В. Коваль, Д.О. Кальян, Є.В. Кільчицький та ін. – К.: НУБіП України, 2015. – 412 с.
4. Bregni S. Synchronization of Digital Telecommunications Networks /Bregni S.- Wiley, 2002.
5. G.811, Timing characteristics of primary reference clocks. - [Valid from 1997-9]. - Geneva, Switzerland, Sept. 1997. (Recommendation ITU-T).
6. Transmission and multiplexing (TM); Generic requirements for synchronization networks. - [Valid from 1996-5]. - ETS 300 462-2 1997. (Standard ETSI).
7. Коваль В.В. Патент на винахід №113473 Україна, МПК (2016.01) H 03 D 13/00, H 03 D 3/04 (2006.1). Адаптивний цифровий фазовий дискримінатор. Пат. №113473 Україна, МПК (2016.01) H 03 D 13/00, H 03 D 3/04 (2006.1) / Коваль В.В., Кальян Д.О., Коваль В.В. (Україна) - № а 2015 11981, Заявл. 03.12.2015, Опубл. Відомості про заявку 10.05.2016, Бюл. № 9. Опубл. Бюл. №2, 25.01.2017.

References

1. KOVAL, V.V. (2010) "Computer-integrated system of polycanal monitoring of time intervals of synchronization", *Naukovyy visnyk Natsionalnoho un-tu bioresursiv i pryrodokorystuvannya Ukrayiny*, vol.148, pp.57-64.
2. KONOVALOV, G., KOSTIK, B., KOVAL, V. and SHKLIAREVSKYI, I. (2013) "Timing Information's 24x7 Monitoring as an Important Factor of Network Synchronization Quality Support", *International IEEE Symposium on Precision Clock Synchronization for Measurement Control and Communication (ISPCS-2013)*, pp. 89-94.
3. KOVAL, V.V., KALYAN, D.O., KILCHYTSKYY, YE.V. and other (2015) *Automatic devices and clock systems for infocommunication networks*, Kyiv, NUBiP of Ukraine.
4. BREGNI, S. (2002) *Synchronization of Digital Telecommunications Networks*, Wiley.
5. INTERNATIONAL TELECOMMUNICATION UNION (1997) *G.811, Timing characteristics of primary reference clocks* [Valid from 1997-9], Geneva, Switzerland.
6. EUROPEAN TELECOMMUNICATIONS STANDARDS INSTITUTE (1996) *Transmission and multiplexing (TM); Generic requirements for synchronization networks*, [Valid from 1996-5], ETS 300 462-2.
7. KOVAL, V.V., KALYAN, D.O., and KOVAL, V.V. (2016) Patent for invention №113473 Ukraine, МПК (2016.01) H 03 D 13/00, H 03 D 3/04 (2006.1). Adaptive Digital Phase Discriminator. Pat. №113473 Ukraine, МПК (2016.01) H 03 D 13/00, H 03 D 3/04 (2006.1) № а 2015 11981, Declared 12.33.2015, Published. Information about the application 10.05.2016, Byul. No. 9. Published. Bull. №2, 25.01.2017.

УДК 004.933

Крак Ю.В.¹, д.ф.-м.н., проф.
Бармак О.В.², д.т.н., проф.
Касьянюк В.С.¹, к.ф.-м.н.
Вольчина І.І.¹, пров. інж.

Моделі узагальнених граматичних конструкцій для перекладу з української мови на жестову мову

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка,
03680, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д,

²Хмельницький національний університет,
29016, м. Хмельницький, вул. Інститутська, 11

e-mail: yuri.krak@gmail.com

Krak Yu.V.¹, D.Sc. (Phys.-Math.), Prof.
Barmak O.V.², D.Sc. (Tech.), Prof.
Kasianiuk V.S.¹, Ph.D. (Phys.-Math.)
Volchyna I.I.¹, Lead. Eng.

Models of generalized grammar constructions for translation from Ukrainian to gesture language

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova ave., 4d,

²Khmelnitsky National University,
29016, Khmelnsky, Institutska st., 11

e-mail: yuri.krak@gmail.com

Створено інфологічне подання словників української мови, як множини інфінітивів, флексій, та параметрів словозміни слів, та інфологічне подання словників жестової мови, як множини жестів та параметрів, що їх характеризують; розроблено механізм подання відношень між словами української та жестами жестової мов у вигляді узагальнених граматичних конструкцій та зв'язків між жестами і словами; розроблено інформаційну технологію для здійснення автоматизованого перекладу за допомогою отриманих моделей.

Ключові слова: інфологічна модель, жестова мова, граматичні конструкції.

The paper proposed an approach and the algorithm and program realizing the technology of automated translation from Ukrainian text language to corresponding analogues of Ukrainian gesture language. The infologic model of dictionaries of Ukrainian and gesture language was developed. For these models, the authors proposed and realized the algorithms of creating the sequence of words and sequence of gestures, creating the sentence structure and structure of the gesture sentence, obtaining the number of the sentence structure for the sentence in Ukrainian and also obtaining the corresponding number of the structure of the gesture sentence by the number of the sentence structure in Ukrainian. The paper proposed the method of presenting the connections between Ukrainian words and gestures by general grammatical constructions and links between gestures and words. By using the obtained models, the information technology of automated translation from oral speaking to gesture language was created. The further research work is directed to create a web-program of the information technology for online Internet translation as well as to test the proposed technology with more sentences.

Key Words: infologic model, gesture language, grammar construction.

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ

Важливою на сьогодні є проблема створення сучасних інформаційних технологій, що включають алгоритми, за допомогою яких можна було б розробляти нові комп'ютерні системи навчання та комунікації для людей з вадами слуху. Для її вирішення запропонована концепція інформаційної технології невербального спілкування таких людей [1]. Одним з напрямків концепції є створення автоматизованої системи перекладу з української на жестову мову [2].

Лексика розмовної жестової мови ще недостатньо вивчена, особливо ідіоматика, фразеологія, морфологія. Не можна втиснути розмовну жестову мову глухих в традиційні моделі лінгвістики. Для опису фактів морфології розмовної жестової мови найбільше підходить опис за принципом: від значення – до форми.

Система автоматизованого перекладу з української на жестову мову передбачає створення множинної моделі словника української мови [3] та реалізації її для можливості моделювання відповідних пов'язаних

узагальнених граматичних конструкцій української та жестової мов. При цьому до розгляду беруться тільки прості речення. Вважатимемо, що довільне складне речення можна подати як декомпозицію простих речень. Підмет і присудок у реченнях пов'язані предикативним зв'язком. Під простим реченням розумітимемо речення з одним предикативним зв'язком. Як для української так і для жестової мови обмежимося такими типами простих речень: розповідні (стверджувальні, окличні та заперечні), питальні та спонукальні [4].

Для реалізації інформаційної технології автоматизованого перекладу запропоновані відповідні інфологічні моделі: для словників української та жестової мов, для подання пов'язаних узагальнених граматичних конструкцій для перекладу.

Постановка задачі

Метою даної роботи є розробка інформаційної технології перекладу з української на жестову мову. Потрібно створити інфологічне подання словників української та жестової мов, розробити механізм подання відношень між словами української та жестами жестової мов, розробити модель для узагальнених граматичних конструкцій для української та жестової мов, розробити інформаційну технологію для здійснення автоматизованого перекладу за допомогою отриманих моделей.

Інфологічні моделі словників української та жестової мов

Для досягнення мети перекладу необхідно запропонувати граматичний словник української мови. Українська мова відноситься до флективної мови, у якій домінує словозміна за допомогою флексій – формантів, що поєднують відразу декілька значень. Побудова граматичного словника флективної мови визначається наявністю формальної моделі словозміни [5], що означає встановлення та формалізацію лінгвістичних критеріїв, згідно з якими вся множина слів мови розбивається на певні підмножини, взаємний перетин яких є порожнім, а всередині кожної з них словозміна відбувається за однаковими правилами. Підмножини слів з такими властивостями називаються словозмінними парадигматичними типами. Для української мови, яка є мовою аналітико-синтетичного типу, це означає, що, по-перше, слова, які належать до одного парадигматичного

класу, мають однакові флексії у відповідних граматичних значеннях та однаковий характер чергування в основі і, по-друге, відповідні аналітичні форми будуються за однаковими моделями їх утворення.

Українській мові притаманні наступні граматичні категорії, що визначають словозміну: s – число (однина (s_1), множина (s_2)), g – рід (чоловічий (g_1), жіночий (g_2), середній (g_3), вищий ступінь (g_4), чоловічий або середній рід для істоти (g_5), жіночий або середній рід для істоти (g_6), чоловічий або жіночий рід для істоти (g_7), незмінювана словникова одиниця (g_8), найвищий ступінь (g_9), i – узагальнена категорія, що включає відмінок, особу, час, стан, спосіб (називний (i_1), родовий (i_2), давальний (i_3), знахідний (i_4), орудний (i_5), місцевий (i_6), кличний (i_7), інфінітив (i_8), 1 особа, наказовий спосіб (i_9), 2 особа, наказовий спосіб (i_{10}), 3 особа, наказовий спосіб (i_{11}), 1 особа, майбутній час (i_{12}), 2 особа, майбутній час (i_{13}), 3 особа, майбутній час (i_{14}), 1 особа, теперішній (майбутній) час (i_{15}), 2 особа, теперішній (майбутній) час (i_{16}), 3 особа, теперішній (майбутній) час (i_{17}), 1 особа, теперішній час (i_{18}), 2 особа, теперішній час (i_{19}), 3 особа, теперішній час (i_{20}), активний дієприкметник, теперішній час (i_{21}), дієприслівник, теперішній час (i_{22}), минулий час (i_{23}), активний дієприкметник, минулий час (i_{24}), пасивний дієприкметник, минулий час (i_{25}), безособова форма, минулий час (i_{26}), дієприслівник, минулий час (i_{27}), незмінювана одиниця (i_{28})).

Кожне слово української мови віднесемо до наступних класів (частин мови) (p): іменники (p_1), числівники порядкові (p_2), числівники кількісні (p_3), числівники (p_4 , числівники типу «два» (p_5), дієслова недоконаного і доконаного виду (p_6), дієслова доконаного виду (p_7), дієслова недоконаного виду (p_8), дієприкметники (p_9), прикметники (p_{10}), займенники (p_{11}), займенники-прикметники (p_{12}), прислівники (p_{13}), вигуки (p_{14}), сполучники (p_{15}), частки (p_{16}), прийменники (p_{17}), присудкові слова (p_{18}), вставні слова (p_{19}), аббревіатури (p_{20}), сполуки (p_{21}), дієприслівники (p_{22}), займенники з часткою (p_{23}), сполучники і частки (p_{24}), прислівники і частки (p_{25}), числівники з прийменником (p_{26}), іменники з прийменником (p_{27}), дієприслівники з часткою (p_{28}), займенники з прийменником (p_{29}), дієприслівники з часткою (p_{30}).

Для української мови введемо наступні парадигматичні типи (Табл. 1):

Таблиця 1. Парадигматичні типи української мови

Парадигма тичні типи	Граматичні класи	Граматичні категорії що визначають словозміну	Кількість граматичних значень
T^1	p_1	$s^*(i_1, \dots, i_7)$	14
T^2	$p_2 \cup p_4 \cup p_9 \cup p_{10} \cup p_{12}$	$(g_1, g_2, g_3)^*((s_1, s_2)^*(i_1, \dots, i_7))$	24
T^3	$p_3 \cup p_{11}$	$(i_1, \dots, i_6)$	6
T^4	p_5	$(g_1, g_2)^*(i_1, \dots, i_6)$	12
T^5	$p_6 \cup p_8$	$i_8, (i_{10} * s_1), (i_9 * s_2), (i_{10} * s_2), (i_{12} * s_1), ((i_{12}, \dots, i_{17}) * s),$ $i_{21}, i_{22}, i_{23} * (g_1, g_2, g_3)^* s_1, (i_{23} * s_2), i_{24}, i_{25}, i_{26}, i_{27}$	26
T^6	p_7	$i_8, (i_{10} * s_1), (i_9, s_2), (i_{10}, s_2), ((i_{12}, i_{13}, i_{14}) * s),$ $(i_{23} * (g_1, g_2, g_3)^* s_1), (i_{23} * s_2), i_{24}, i_{25}, i_{26}, i_{27}$	18
T^0	$\bigcup_{j=13}^{30} p_j$	i_{28}	1

Виходячи з того, що українська мова є флективною мовою, тобто граматичні значення передаються флексіями, слова мови моделюються у вигляді комбінації незмінної та змінної складових:

$$x = c(x) \& f(x),$$

де $c(x)$ – частина лексеми x , яка в процесі словозміни залишається незмінною (квазіоснова), $f(x)$ – її змінна складова (квазіфлексія), $\&$ – конкатенація.

Реалізація такої моделі зберігання слова прибирає надмірну надлишковість, маючи на увазі, що в українській мові декілька мільйонів слів (у всіх словозмінах) та тільки біля 100 тисяч базових слів – інфінітивів. Тобто замість повного тексту слова у таблиці зберігається номер слова-інфінітиву із відповідної множини інфінітивів, номер позиції у слові до якої слово-інфінітив незмінне та номер флексії (змінної частини слова) із відповідної множини, отже слова української мови подаються у вигляді:

$$W = \left\{ W_i : W_i = \left\{ \begin{array}{l} I_{i_1} \in I, F_{i_2} \in F, \\ k, g \in G, s \in S, in \in In \end{array} \right\} \right\}, \quad (1)$$

де W_i – параметри слова української мови ($i = 0, \dots, N-1, N$ – кількість слів у словнику); F – множина всіх можливих закінчень слів (флексій); k – номер позиції у слові-інфінітиві, з якої починається конкатенуватися флексія (можливі випадки коли $k = 0$ – для словоформи, яка повністю відміна від інфінітива); $G = \{g_1, \dots, g_9\}$; $S = \{s_1, s_2\}$; $In = \{i_1, \dots, i_{28}\}$, I – множина слів-інфінітивів української мови (для дієслів –

інфінітиви, для іменників – слова у називному відмінку, однині, тощо):

$$I = \{I_i : I_i = \{word \inf, p \in P\}\},$$

де $P \in \{p_1, \dots, p_{30}\}$; $word \inf$ – слово-інфінітив.

Формування множин W , F , I проходить наступним чином (для всіх слів-інфінітивів мови): на вхід подається слово-інфінітив та усі його словоформи (граматичні значення), за параметр k приймається довжина (загальна частина для слова-інфінітива та всіх його словоформ). Для всіх словоформ визначаємо закінчення (відмінна частина) та додаємо його до множини F (якщо такого закінчення там немає). Після цього додаємо слово-інфінітив до множини I і формуємо множину W з (1).

Прямою задачею для такої моделі (1) є проста задача відтворення повного тексту слова за трьома параметрами I_{i_1}, F_{i_2}, k , яка реалізується відповідним оператором (H):

$$H = \begin{cases} Left(I_{i_1}, k-1) \& F_{i_2}, & k \neq 0 \\ Left(I_{i_1}, 0) \& F_{i_2}, & k = 0 \end{cases}, \quad (2)$$

де $Left(Word, Length)$ – функція отримання перших $Length$ символів із слова $Word$; $\&$ – конкатенація.

Деяка складність виникає для оберненої задачі (H^{-1}): для існуючого слова знайти три параметри, які його однозначно визначають. Реалізація оператора (2) для бази даних у вигляді недетерміністської функції призводить до того, що неможливо ефективно проіндексувати. Пошук по неіндексованому полю – досить

затратний по часу. Для вирішення цієї проблеми запропонований алгоритм, суть якого полягає у тому, що вхідне слово розбивається на можливі комбінації незмінної та змінної складових і пошук проводиться по проіндексованих полях таблиць-множин інфінітивів (I) та флексій (F).

Для жестової мови, в зв'язку з відсутністю у ній словозмін, структура словника буде дещо простішою. У невербальній комунікації мімічна складова відіграє дуже важливу, інколи ключову роль. Варто зазначити, що для синтаксису жестового мовлення для людей з вадами слуху характерна наявність немануального маркера: у запитальних реченнях, при загальному запитанні – піднятті брови, при окремому (приватному) запитанні – опущенні брови та нахилена вперед голова. При запереченні – негативні рухи головою, відповідний вираз обличчя. Для розповідних речень характерна наявність на обличчі емоційного забарвлення, що відповідає сенсу інформації, що передається. Множина жестів подається, як

$$Ges = \{Ges_i : Ges_i = \{word\ des, \\ pges \in PGes, em \in Em\}\},$$

де $word\ des$ – позначення жесту,
 $PGes \in \{p_1, \dots, p_{11}, p_{13}, p_{22}\}$, $Em \in \{em_1, em_2, em_3\}$ – множина емоційних забарвлень жестів em_1 – розповідне емоційне забарвлення, em_2 – запитальне емоційне забарвлення, em_3 – інші емоційні забарвлення.

Інфологічна модель словника української мови відображена на Рис. 1.



Рис.1. Інфологічна модель словника української мови

У таблиці «Словник української мови» міститься множина слів української мови (W), множина флексій (F) та інфінітивів (I) – в таблицях «Флексії» та «Інфінітиви» відповідно. Для кожного з слів зберігаються посилання на граматичні категорії, що визначають словозміну: «Множини», «Рід», «УКС» (узагальнена категорія словозміни). Множина жестів міститься

у відповідній таблиці «Словник жестів» і містить посилання на слово, яким позначається даний жест і тематику, в якій він найчастіше використовується. Множини інфінітивів та жестів містять посилання на «Частини мови» для визначення приналежності їх до певних частин мови.

Для роботи з даною інфологічною моделлю запропоновано відповідну алгоритмічну функціональність: додавання інфінітива, флексії та слова, отримання інфінітива слова, його флексії, визначення параметрів словозміни слова.

Інфологічна модель пов'язаних узагальнених граматичних конструкцій для перекладу

Після отримання інфологічного подання словників української та жестової мов потрібно побудувати пов'язані узагальнені граматичні конструкції речень українською мовою та жестовою мовою [6]. Під реченням розумітимемо послідовність слів мови та знаків пунктуації. Під граматичною конструкцією речення розумітимемо послідовність слів мови, що відносяться до частин мови, які передають сенс, тобто у речень відкидатимемо службові слова. Вважатимемо, що сенс передається наступними частинами мови: іменники (p_1), числівники порядкові (p_2), числівники кількісні (p_3), числівники (p_4), числівники типу «два» (p_5), дієслова недоконаного і доконаного виду (p_6), дієслова доконаного виду (p_7), дієслова недоконаного виду (p_8), дієприкметники (p_9), прикметники (p_{10}), займенники (p_{11}), прислівники (p_{13}), дієприслівники (p_{22}). Розрізнятимемо граматичні конструкції за кількістю слів, що в них входять. Елементами граматичних конструкцій (на відміну від речень) будуть множини слів, що зустрічатимуться у реченнях, які складають навчальну вибірку. Отже:

$$Gr = \{Gr_i = \{word_j \in W \parallel seq_j \in Seq \parallel p_j \in P, \\ s_j \in S, g_j \in G, i_j \in I, num\}, \\ GStr_i = \{ges_j \in Ges \parallel gseq \in Gseq \parallel \\ | pges \in PGes, num, gesnum\}\}$$

де num – номер елемента в структурі речення української мови, $gesnum$ – номер елемента в структурі речення жестової мови,

$$Seq = \{Seq_i : Seq_i = \{word_j \in W : word_j \in W, n\}\},$$

де n – номер слова в послідовності,

$$Gseq = \{Gseq_i : Gseq_i = \{ges_j \in Ges : ges_j \in Ges, n\}\},$$

де n – номер слова в послідовності.

Після отримання множини граматичних конструкцій проведемо узагальнення кожної із множин елементів, які входять в неї. Узагальнення розумітимемо як подання кожної із отриманих множин як комбінацію конкретних граматичних категорій та частин мови:

$$GGr = \{GGr_i = \{p_j \in P, s_j \in S,$$

$$g_j \in G, i_j \in I, num\},$$

$$GStr_i = \{pges \in PGes, num, gesnum\}$$

Для реалізації запропонованого підходу було сформовано множину речень, отриманих з програми-комплексу "Українська жестова мова"[7], який використовується в навчальних закладах для нечуючих з метою оволодіння жестовою мовою. Речення в моделі даних було об'єднано в структури, отримані шляхом узагальнення за формулою (3). Структури речень містять замість слів їх послідовності, кожна з яких може використовуватися при побудові речення. Послідовності можуть містити як окремі слова, так і різноманітні множини. Наприклад, речення «він іде», «вона іде», «час йде» було об'єднано в одну послідовність «{він, вона, час, хто, ...} іде». Крім того, послідовності можуть містити категорії словозміни (p,s,g,i) , перетин яких визначає множину слів.

Для подання граматичних конструкцій (6) запропонована наступна інфологічна модель (Рис. 2).

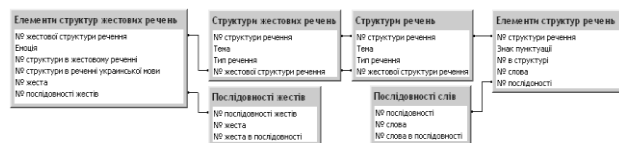


Рис.2. Інфологічна модель зв'язків між структурами речень та структурами жестових речень

Структури речень зберігаються в таблиці «Структури речень», структури жестових речень – в «Структури жестових речень». Дані таблиці містять інформацію про тип речення та тематику речення. «Елементи структур речень» можуть містити бути як окремі слова (№ слова), так і послідовності слів (№ послідовності). Для збереження порядку елементів структури речення кожен з елементів має порядковий номер. «Елементи структур жестових речень» також можуть містити жести та послідовності жестів. Для забезпечення відповідності при перекладі також в даній таблиці зберігається порядковий номер елемента структури речення українською мовою.

Для роботи з даною інфологічною моделлю запропоновано відповідну алгоритмічну

функціональність: створення послідовності слів, створення послідовності жестів, створення структури речення, створення структури жестового речення, отримання номера структури речення для речення українською мовою, отримання номера структури жестового речення за номером структури речення українською мовою.

Шляхом аналізу отриманої множини структур речень було отримано множину узагальнених конструкцій української та жестової мов, які містять тільки категорії словозміни, та не містять окремих слів, або множин слів. Для кожного елемента структури речення було виділено множину категорії словозміни (p,s,g,i) та порядок даного елемента у конструкції (3).

Інфологічна модель для узагальнених граматичних конструкцій відображена на Рис.3.

Створення узагальнених конструкцій дозволило на основі аналізу категорій словозміни (p,s,g,i) слів у реченні та його порядкового номера отримувати структуру жестового речення, що йому відповідає.

Для отримання відповідностей «слово → жест» для кожної структури речень з таблиці «Структури речень» та відповідної їй жестової структури речень з таблиці «Структури жестових речень» було отримано відповідності між послідовностями слів та послідовностями жестів. Використовуючи дані відповідності з таблиць «Послідовності слів» та «Послідовності жестів», було сформовано таблицю «Відповідність слів жестам».

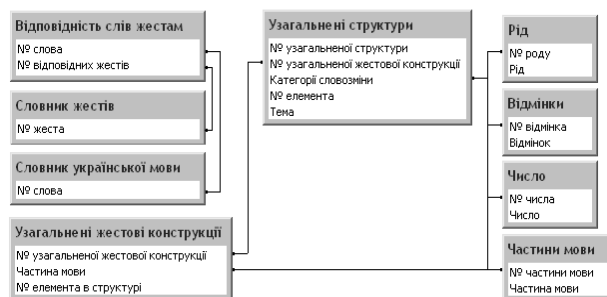


Рис.3. Інфологічна модель зв'язків між узагальненими структурами речень та узагальненими жестовими конструкціями.

У випадку наявності неоднозначних відповідностей «слово → жест» така інфологічна модель не дає можливості отримати чітке відношення між множиною слів та жестів. Якщо одному слову відповідає декілька жестів, для обрання правильного жесту використовуються відношення між реченнями «Структури речень»

та «Структури жестових речень» з врахуванням тематики речення, що перекладається. У випадку, якщо кільком словам відповідає один жест труднощів в отриманні відповідності «слово → жест» не виникає. Крім того, для таких жестів можна отримати список слів-синонімів, які їм відповідають.

Висновки

В результаті даної роботи було розроблено інформаційну технологію перекладу з української на жестову мову. Було створено інфологічне подання словників української мови, як множини інфінітивів, флексій, та параметрів словозміни слів та жестової мови, як множини жестів та параметрів, що їх характеризують; розроблено механізм подання відношень між

словами української та жестами жестової мов у вигляді узагальнених граматичних конструкцій та зв'язків між жестами і словами; розроблено інформаційну технологію для здійснення автоматизованого перекладу за допомогою отриманих моделей; алгоритмічно та програмно реалізовано інформаційну технологію для підтвердження її життєздатності. Подальші дослідження спрямовані на створення на основі запропонованої інформаційної технології веб-застосування, яке б дозволило виконувати переклад в режимі online; тестування запропонованої технології більшою кількістю речень; збір статистики використання конструкцій для перекладу.

Список використаних джерел

1. Barmak O. Text to gestures translation for inflected languages / O. Barmak, Iu. Krak, S. Romanyshyn. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2017. – 100 p.
2. Зайцева Г.Л. Жестовая речь. Дактилология: Учеб. для студ. высш. учеб. заведений / Зайцева Г.Л. – М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 2000. – 61 с.
3. Широков В.А. Корпусна лінгвістика: Монографія / В.А. Широков, О.В. Бугаков, Т.О. Грязнухіна [та ін.] // Український мовно-інформаційний фонд НАН України. – К.: Довіра, 2005. – 472 с.
4. Шульжук К.Ф. Синтаксис української мови / К. Ф. Шульжук. – К. : Академія, 2004. – С. 152–160.
5. Крак Ю.В. Метод подання відношень між словами та жестами / Ю.В. Крак, В.С. Касьянюк, І.І. Вольчина // Abstracts of XXIX International conference problems of decision making under uncertainties (PDMU-2017), Mukachevo, Ukraine, May 10-13, 2017. – p. 161.
6. Крак Ю.В. Побудова множин відповідності для автоматизованого перекладу речень української мови у їх жестові аналоги / Ю.В. Крак, В.С. Касьянюк, І.О. Стеля, І.Л. Черненко // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. – 2016. – Вип. 1. – С. 158-161.
7. Програма-комплекс "Українська жестова мова"//http://www.mon.gov.ua/education/average / programs_gluh.

References

1. BARMAK, O., KRAK, IU. and ROMANYSHYN, S. (2017) *Text to gestures translation for inflected languages*, LAP LAMBERT Academic Publishing.
2. ZAITSEVA, G.L. (2000) *Gesture language. Daktylology: Textbook for university students*, Humanitarian Publishing Center VLADOS, Moscow Russia.
3. SHIROKOV, V.A. and other. (2005) *Case linguistics*, Ukrainian language-informatics fund of NAN of Ukraine.
4. SHULZHUK, K.F. (2004) *Syntax of Ukrainian language*, Akademia, Kyiv.
5. KRAK, IU., KASIANIUK, V.S. and VOLCHYNA, I.I. (2017) "Method for presenting the correspondence of words with gestures", *Abstracts of XXIX International conference problems of decision making under uncertainties (PDMU-2017)*, Mukachevo, Ukraine, May 10-13, pp. 161.
6. KRAK, IU., KASIANIUK, V.S., STELYA, I.O. and CHERNENKO, I.L. (2016) "Constructing the sets of correspondence for automated translating the sentences in Ukrainian to their gesture analogues", *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series: Physics & Mathematics*, vol. 1, pp. 158-161.
7. PROGRAM-COMPLEX "Ukrainian Gesture Language", available at: // http://www.mon.gov.ua/education/average/programs_gluh.

Надійшла до редколегії 19.08.2017

УДК 519.685.3

Кудін Г.І., к.ф.м.н.
Зінко Т.П., к.т.н.

Синтез кусково гіперплощинних кластерів в просторах векторів ознак

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
м. Київ, пр-т. Глушкова, 4-д
e-mail: gkudin@ukr.net.ua

Kudin G.I., Ph.D. (Phys.-Math.)
Zinko T.P., Ph.D. (Tech.)

A synthesis of piecewise hyperplane clusters in the spaces of vectors of signs

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Glushkova ave., 4-d, Kyiv
e-mail: gkudin@ukr.net.ua

Досліджується задача побудови засобами псевдо обернення кусково гіперплощинних кластерів для навчальних виборок векторів у просторі ознак, а саме: поділ вибірки на два кусково гіперплощинних кластери так, щоб певна підмножина точок була в околі ланок першого кластеру, а точки іншої підмножини - в околі ланок другого кластеру. Особливість постановки: заздалегідь не відомі ні підмножини, ні складові обох сукупностей гіперплощин.

Ключові слова: Кластеризація інформації, гіперплощини, псевдо обернення матриць, проекційні оператори.

The algorithms for the construction of a piecewise hyperplane cluster by pseudo-inverse matrices are proposed. Vectors in the space of signs are divided into two pieces of hyperplane clusters such that a certain subset of points is in the vicinity of the first cluster, and the points of another subset - in the vicinity of the second cluster. Feature of the algorithm: no subset, or components of the hyperplane of both clusters are known in advance.

The use of hyperplanes for which the ratio for distances between vectors and hyperplanes is obtained, between sets of vectors and hyperplanes in the spaces of signs, in conjunction with the results of the perturbation theory of pseudo-inverse, projective and R-matrices provides the construction of effective algorithms for solving the problem. The description of the hyperplanes is carried out through solutions (pseudo-solutions) of systems of linear algebraic equations, which are determined by finding the optimal elements of them - the basic matrix, the vector of the right-hand sides.

The article presents the original scientific results of the theory of pseudo-inversion of matrices obtained by various authors over the past ten years.

Keywords: Clusterization of information, hyperplane, pseudo rotations of matrices, projection operators.

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ

Матрична структура представлення множин векторів ознак в відповідному евклідовому просторі, якими описуються досліджувані об'єкти при розв'язанні різноманітних прикладних задач цифрової обробки інформації, обумовлює широкий спектр можливостей розвиненню концепції псевдо обернення матриць для створення математичних методів кластеризації та класифікації інформації [1]-[4]. Використання елементарних лінійних структур – гіперплощин – з простими співвідношеннями для віддалей між векторами і гіперплощинами, між множинами векторів і гіперплощинами в

просторах ознак в поєднанні з результатами теорії збурення псевдо обернених, проекційних та R-матриць [1], [2] забезпечує не тільки побудову ефективних алгоритмів розв'язання задач, а також можливості їх оптимізації в рамках конкретних їх постановок. З роботами [3], [4] пов'язується варіант гіперплощинної кластеризації, в рамках якого опис гіперплощин здійснюється через гіперплощини, що є розв'язками (псевдо розв'язками) систем лінійних алгебраїчних рівнянь (в цьому випадку виникає проблема знаходження оптимальних елементів таких систем лінійних алгебраїчних рівнянь – основної матриці, вектора правих

частин, для яких подаються алгоритми їх обчислення). В роботі [2] параметри гіперплощин знаходяться рекурентно згідно функціонала прийнятності наявного розбиття. Функціонали прийнятності - це той чи інший варіант відстані елементу кластера до його гіперплощини, відстань елементу кластера до гіперплощини іншого кластера. В якості відстаней використовувались евклідові відстані, а в якості міри компактності гіперплощинного кластера – дисперсія елементів кластера відносно своєї гіперплощини. В якості ефективного розв'язання проблеми мінімізації дисперсії елементів кластеру може бути використано варіант гіперплощинного кластеру, який би описувався не одною гіперплощиною, а декількома, тобто будується кусково гіперплощинний кластер. Ця ідея кусково гіперплощинного кластеру витікає з запропонованого підходу розв'язання проблеми кусково лінійної віддільності множини точок в просторі векторів ознак від початку координат, запропонованого в 2007 році професором Кириченком М.Ф. [1]. Викладення результатів по темі кусково гіперплощинної кластеризації інформації подається після короткого опису використовуваних в подальшому математичних результатів стосовно визначення псевдо обернення, формул обчислення псевдо обернених, проєкційних та R-матриць при зміні розмірності вихідних матриць. Приводяться різні варіанти відстаней між елементами векторних просторів.

Основні математичні засоби псевдо обернення, його властивості

В подальшому крім стандартного позначення $m \times n$ матриці за її елементами: $A = (a_{ij})$, використовуватиметься її зображення за стовпчиками чи рядками, відповідно:

$$A = (a(1) : \dots : a(n)), \quad a(j) \in R^n, \quad j = \overline{1, n},$$

$$A = (a_{(1)} \quad \dots \quad a_{(m)})^T, \quad a_{(i)}^T \in R^n, \quad i = \overline{1, m}.$$

Традиційно стандартні базиси в R^n, R^m , складені із координатних ортів позначатимуться відповідно

$$e_{(i)} \in R^n, \quad i = \overline{1, n}, \quad e(j) \in R^m, \quad j = \overline{1, m},$$

$$e_{(i)}^T = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad i = \overline{1, n},$$

$$e^T(j) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad j = \overline{1, m}.$$

Сингулярний розклад матриці. Будь яка $m \times n$ матриця A рангу $r \leq \min(m, n)$ може бути

записана у вигляді $A = \sum_{i=1}^r \lambda_i u_i v_i^T$, в якому:

$\lambda_1^2 \geq \dots \geq \lambda_r^2 > 0$ спільний набір ненульових власних чисел матриць AA^T , $A^T A$; $v_i \in R^n, i = \overline{1, r}$ - ортонормований набір власних векторів матриці $A^T A$, що відповідають ненульовим власним числам:

$$A^T A v_i = \lambda_i^2 v_i, \quad \lambda_i^2 > 0, \quad i = \overline{1, r}, \quad v_i^T v_j = \delta_{ij}, \quad i \neq j;$$

$u_i \in R^m, i = \overline{1, r}$ - ортонормований набір власних векторів матриці AA^T , що відповідають ненульовим власним числам $\lambda_i^2, i = \overline{1, r}$:

$$AA^T u_i = \lambda_i^2 u_i, \quad i = \overline{1, r}, \quad u_i^T u_j = \delta_{ij}.$$

Визначення та обчислення псевдо оберненої матриці допускає декілька еквівалентних варіантів. Тут використовується варіант Penrose'a - визначення псевдооберненої матриці здійснюється через систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР): $Ax = b$, $x \in R^n, b \in R^m, b \neq 0$. За таких умов псевдо обернена матриця при довільному ненульовому векторі $b \in R^m$ визначається співвідношенням

$$A^+ b = \arg \min_{x \in \text{Arg min}_x \|Ax - b\|^2} \|x\|, \quad \forall b \in R^m, b \neq 0.$$

Підпростори, ортогональні проєктори. Підпросторами, які розглядаються у зв'язку матрицею A є множини можливих значень L_A, L_{A^T} матриць A, A^T : відповідно, а. ортогональними проєкторами на них - це P - проєктори, позначаються $P(A^T), P(A)$ відповідно, ортогональні до них - називаються Z -проєкторами і позначаються $Z(A), Z(A^T)$ відповідно.

Крім P - та Z - проєкторів, пов'язаних з базовими підпросторами матриці A , важливе застосування мають також оператори $R(A), R(A^T)$.

Зв'язок між P - та Z - проєкторами визначається співвідношеннями:

$$P(A) = A^+ A, \quad P(A^T) = (A^T)^+ A^T = AA^+,$$

$$Z(A) = I_n - A^+ A, \quad Z(A^T) = I_m - AA^+,$$

Звести обчислення псевдо оберненої матриці для довільної матриці до обчислення оберненої відповідної їй деякої квадратної матриці з розмірністю $\min(m, n)$ дозволяють важливі для практичних застосувань такі співвідношення:

$$A^+ = (A^T A)^+ A^T = A^T (A A^T)^+, \\ A^+ = R(A) A^T = A^T R(A^T).$$

Прямі формули Гревеля. Важливе місце у застосуваннях, пов'язаних із застосуванням псевдо обернення, посідають формули Гревеля: прямі та обернені.

В прямому варіанті формули Гревеля – це співвідношення, які пов'язують псевдо обернену матрицю, розширену введенням додаткового рядка чи стовпчика, з псевдо оберненою вихідної матриці. Обернені формули – це співвідношення, в яких псевдо обернена матриця для вихідної матриці обчислюється з використанням псевдо оберненої матриці матриці, що отримана з вихідної матриці викреслюванням рядка чи стовпчика.

Припустимо, що розширення матриці A відбувається появою нового рядка $a^T \in R^n$ після $(i-1)$ -го рядка ($i = \overline{2, m+1}$), тобто утворюється матриця

$$A(i, a) = (a_{(1)} : \dots : a_{(i-1)} : a : a_{(i)} : \dots : a_{(m)})^T \in R^{(m+1) \times n}.$$

Тоді при відомій псевдо оберненій матриці $A^+ \in R^{n \times m}$ для рекурентного обчислення псевдо оберненої матриці $A^+(i, a) \in R^{n \times (m+1)}$ мають місце співвідношення - *прямі формули Гревеля* [1], [2].

Якщо шукану псевдо обернену матрицю $A^+(i, a)$ подати в вигляді

$$A^+(i, a) = (p(1) : \dots : p(i-1) : p(i) : p(i+1) : \dots : p(m+1)) \in R^{n \times (m+1)},$$

де $P_i = (p(1) : \dots : p(i-1) : p(i+1) : \dots : p(m+1))$, тобто вважати, що матриця $A^+(i, a)$ може бути отримана з матриці $P_i \in R^{n \times m}$ вставленням після $(i-1)$ -го стовпчика вектора $p(i)$, то для матриці P_i справедлива формула:

$$P_i = (1 - p(i)a^T)A^+.$$

При цьому невідомий вектор $p(i)$ визначається з врахуванням властивості лінійної залежності вектора a від векторів підпростору вектор – рядків матриці A :

1) якщо вектор a лінійно незалежний від векторів підпростору вектор – рядків матриці A , тобто $a^T Z(A)a > 0$, то

$$p(i) = Z(A)a \|Z(A)a\|^{-2};$$

2) якщо вектор a лінійно залежний від векторів підпростору вектор – рядків матриці A , тобто $a^T Z(A)a = 0$, то

$$p(i) = R(A)a(1 + a^T R(A)a)^{-1}.$$

Наслідок. Операція псевдо обернення комутативна з транспонуванням, тому прямі формули Гревеля аналогічно виписуються для варіанту розширення матриці стовпчиком.

Обернені формули Гревеля. Якщо для матриці $A(i, a) \in R^{(m+1) \times n}$ (після $(i-1)$ -го рядка ($i = \overline{2, m+1}$) матриці A вставлено вектор-рядок a^T), відома її псевдо обернена матриця $A^+(i, a) \in R^{n \times (m+1)}$, то для визначення псевдо оберненої матриці $A^+ \in R^{n \times m}$ (рядок a^T з матриці $A(i, a)$ видаляється) справедливі *обернені формули Гревеля* [1], [2]:

1) для випадку лінійної залежності вектор – рядка a^T , який видаляється, від векторів підпростору вектор – рядків матриці $A(i, a)$, а це визначається виконанням умови $a^T p(i) < 1$, то псевдо обернена матриця $A^+ \in R^{n \times m}$ має вид

$$A^+ = (I_n + p(i)a^T(1 - a^T p(i))^{-1})P_i.$$

При цьому ранг псевдо оберненої матриці не змінюється, тобто $\text{rank } A = \text{rank}(A^T : a)^T$.

2) для випадку лінійної незалежності вектор – рядка a^T , який видаляється, від векторів підпростору вектор – рядків матриці $A(i, a)$, а це визначається виконанням умови $a^T p(i) = 1$, матриця $A^+ \in R^{n \times m}$ визначається формулою $A^+ = (I_n - p(i)p^T(i) \|p(i)\|^{-2})P_i$,

При цьому ранг псевдо оберненої матриці падає, тобто: $\text{rank } A = \text{rank}(A^T : a)^T - 1$.

Використовуючи обернені формули Гревеля для представлення псевдо оберненої матриці $A^+ \in R^{n \times m}$ при відомій псевдо оберненій матриці $A^+(i, a) \in R^{n \times (m+1)}$ (з матриці $A(i, a) \in R^{(m+1) \times n}$ видаляється i -тий ($i = \overline{2, m+1}$) вектор – рядок

a^T), можна отримати корисні для застосувань формули економного обчислення збурених проєкційних матриць $Z(A)$, $Z(A^T)$, $R(A)$, $R(A^T)$.

1) для випадку лінійної залежності вектор – рядка a^T , який видаляється, від векторів підпростору вектор – рядків матриці $A(i, a)$, а це визначається виконанням умови $a^T p(i) < 1$, то

$$Z(A) = Z(A(i, a));$$

$$R(A) = R(A(i, a)) + p(i) p^T(i) Z_{ii}^{-1}(A^T(i, a));$$

$$Z(A^T) = E_i Z(A^T(i, a)) - E_i h_i h_i^T E_i^T Z_{ii}^{-1}(A^T(i, a)),$$

Тут введена в розгляд матриця E_i – вона отримана вилученням i -го ($i = \overline{2, m+1}$) вектор-рядка з одиничної матриці I_{m+1} :

$$E_i = \begin{pmatrix} e_1(m+1) : \dots : e_{i-1}(m+1) : \\ : e_{i+1}(m+1) : \dots : e_{m+1}(m+1) \end{pmatrix}^T \in R^{m \times (m+1)}$$

$$h_i = -A_{i,a}^+ a;$$

$$R(A^T) = E_i R(A_{i,a}^T) E_i^T + E_i (h_i h_i^T (p^T(i) p(i)) + h_i t_i^T + t_i h_i^T) E_i^T,$$

$$t_i = -A^{+T}(i, a) p(i) Z_{ii}^{-1}(A^T(i, a));$$

2) для випадку лінійної незалежності вектор – рядка a^T , який видаляється, від векторів підпростору вектор – рядків матриці $A(i, a)$, а це визначається виконанням умови $a^T p(i) = 1$, то

$$Z(A) = Z(A(i, a)) + p(i) p^T(i) \|p(i)\|^{-2},$$

$$R(A) = Z(p^T(i)) R(A(i, a)) Z(p^T(i)),$$

$$Z(p^T(i)) = I_n - p(i) p^T(i) \|p(i)\|^{-2};$$

Використовуючи позначення матриці E_i (формула вище)

$$Z(A^T) = E_i Z(A^T(i, a)) E_i^T,$$

$$R(A^T) = E_i R(A^T(i, a)) E_i^T.$$

Математичні засоби кусково гіперплощинної кластеризації інформації

Базовий алгоритм поділу вибірки на два гіперплощинних кластери [2].

Розглядається задача гіперплощинної кластеризації, тобто задача представлення

наявної навчальної вибірки множини векторів $x(j) \in R^m$, $n = \overline{1, n}$ у вигляді двох частин – підмножин (кластерів) – на основі припущення, що структура цих підмножин (кластерів) в векторному просторі ознак може бути наближена гіперплощинами. Алгоритм полягає в послідовному виконанні рекурентних кроків, на кожному з яких здійснюється корегування параметрів гіперплощин $L^{(k)}(1)$, $L^{(k)}(2)$ (без обмежень загальності розглядається задача поділу навчальної вибірки на два кластери), побудованих на попередньому кроці за умов вихідного розбиття довільним способом. Це корегування параметрів гіперплощин полягає у вилученні із сукупності векторів, що породжують гіперплощини, тих, що мають найгірші значення відстаней відповідності. Вилучені вектори зараховується у альтернативний кластер. За новим розбиттям векторів будується нова пара гіперплощин $L^{(k+1)}(1)$, $L^{(k+1)}(2)$, за якими здійснюється новий рекурентний крок.

Математична постановка задачі забезпечується формальним введенням поняття відстані $\rho(x(j), L(A, b))$ від точки $x(j) \in R^m$ до деякої гіперплощини

$$L(A, b) = \{x \in R^n : x = A^+ y + Z(A) z, \quad z \in R^n\},$$

яка визначається як множина розв'язків (псевдо розв'язків) системи алгебраїчних рівнянь

$$Ax = b, \quad A \in R^{s \times m}, \quad b \in R^s,$$

де A і b є відповідно матричним і векторним параметрами розглянутої гіперплощини.

Базові формули гіперплощинної кластеризації інформації [3], [4]. Відстань $\rho(x(j), L(A, b))$ від точки $x(j)$ до гіперплощини $L(A, b)$ визначається відповідно до співвідношення

$$\rho^2(x(j), L(A, b)) = \|A^+(b - Ax(j))\|^2, \quad \|x\|^2 = x^T x.$$

Сума квадратів відстаней множини точок $x(j)$, $j = \overline{1, n}$ до гіперплощини $L(A, b)$

$$\rho^2(\{x : x(j), j = \overline{1, n}\}, L(A, b)) =$$

$$\sum_{j=1}^n (b - Ax(j))^T R(A^T) (b - Ax(j)) =$$

$$= \text{tr} R(A^T) \sum_{j=1}^n (b - Ax(j))(b - Ax(j))^T.$$

При заданих значеннях A , $x(j)$, $j = \overline{1, n}$ має місце співвідношення для оптимального значення вектора правої частини системи алгебраїчних рівнянь, визначальної для гіперплощини

$$b_{opt} = A\hat{x}, \quad \hat{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x(j).$$

Відстань $\rho(\{x: x(j), j = \overline{1, n}\}, L(A, b))$ множини точок $x(j)$, $j = \overline{1, n}$ до гіперплощини $L(A, b)$ при оптимальному виборі вектора b має наступне значення

$$\rho^2 \left(tr A^+ A \tilde{X} \tilde{X}^T \right)^{\frac{1}{2}},$$

де

$$\tilde{X} = (\tilde{x}(1) : \dots : \tilde{x}(n)), \quad \tilde{x}(j) = x(j) - \hat{x}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Оптимальний вибір матриці $A \in R^{s \times m}$ визначається матрицею

$$A_{opt} = (u_{m-s+1} \dots u_m),$$

при цьому $tr A_{opt}^+ A_{opt} \tilde{X} \tilde{X}^T = \sum_{j=m-s+1}^r \lambda_j^2$,
 $(u_1, \dots, u_m)^T (u_1, \dots, u_m) = I_m$.

Алгоритм складається з наступних кроків.

1. На першому кроці: первісна сукупність з n векторів довільним чином поділяється на дві частини $x(i_j(k))$, $j = \overline{1, n_k}$, $k = 1, 2$:

$$\{i_1(1), \dots, i_{n_1}(1)\} \cap \{i_1(2), \dots, i_{n_2}(2)\} = \emptyset,$$

$$\{i_1(1), \dots, i_{n_1}(1)\} \cup \{i_1(2), \dots, i_{n_2}(2)\} = \{1, 2, \dots, n\}.$$

2. На другому кроці за кожною з наявних частин розбиття будуються гіперплощини $L^{(0)}(A_k, b_k)$, $k = 1, 2$. Визначаються $\hat{x}^{(0)}(k)$, $k = 1, 2$ як середні за елементами відповідної сукупності, вводяться матриці

$$\tilde{X}^{(0)}(k) = (\tilde{x}(i_1(k)) : \dots : \tilde{x}(i_{n_k}(k))), \quad k = 1, 2,$$

будується їхній SVD-розклад:

$$\tilde{X}^{(0)}(k) = \sum_{i=1}^{r_k} u_i(k) \lambda_i(k) v_i^T(k), \quad k = 1, 2, \quad \text{де}$$

r_1, r_2 – ранги відповідних матриць, обчислюються оптимальні параметри гіперплощин первинного розбиття.

3. На третьому кроці проводиться корегування параметрів гіперплощин первинного розбиття. Воно здійснюється за відстанями

кожного з векторів до побудованих гіперплощин та вилученням найгірших – застосування засобів псевдо обернення забезпечує обчислення таких відстаней явними формулами. В результаті корегування розбиття деякі вектори залишаються серед векторів розбиття, за якими побудовані гіперплощини, інші – зараховується в альтернативний кластер.

4. Оновлені елементи розбиття є основою нового рекурентного кроку: алгоритм повторює свої кроки, починаючи з другого.

5. Зупинка алгоритму може здійснюватись після виконання певної кількості кроків, чи після того, як досягається не поліпшуваний певний рівень відстані кожного з векторів відповідного елементу розбиття до відповідної гіперплощини.

Задача синтезу двох кусково гіпер-площинних кластерів, алгоритм її розв'язування

Під задачею синтезу кусково гіперплощинних кластерів для навчальної вибірки $x(j) \in R^m$, $j = \overline{1, n}$ векторів у просторі ознак розуміється задача поділу цієї вибірки на два кластери таким чином, щоб точки першого кластера були розташовані ближче до деякої сукупності гіперплощин, яка породжується цією підмножиною, а точки іншої підмножини – другого кластера – ближче до іншої сукупності гіперплощин. Особливістю постановки розглянутої задачі є та обставина, що *заздалегідь не відомі ні підмножини, ні складові обох сукупностей гіперплощин*.

Отже, на початку процесу кусково гіперплощинної кластеризації припускається, без обмеження загальності щодо кількості підмножин, що вектори $x(1), \dots, x(n)$ з простору ознак R^m можуть належати одній з двох гіперплощин $L^{(0)}(A_k, b_k)$, $k = 1, 2$ фіксованої розмірності s ($s < m$). Якщо в процесі рекурентного поліпшення гіперплощинної кластеризації виявляється, що отримані кластери не відповідають раніше встановлених критеріїв (наприклад, незадовільна гіперплощинна концентрація векторів кластеру, тощо), то виникає потреба вплинути на форму кластеру і модифікувати її стає можливим побудовою кусково лінійних кластерів. Для розглядуваної задачі побудови кусково гіперплощинного кластеру це означає доповнення кожної з гіперплощин $L^{(0)}(A_k, b_k)$, $k = 1, 2$, які попередньо визначені в рамках базової гіперплощинної кластеризації, додатковими ланками – гіперплощинами.

Алгоритм синтезу кусково гіперплощинних кластерів. На підставі вище викладеної ідеї синтезу кусково гіперплощинних кластерів алгоритм такого синтезу можна представити так:

1. Формування одноланкового кластеру (номер ланки в кластері – індекс в дужках, номер множини – індекс низу):

1) Створити початкове розбиття вихідної множини $\Omega = \{x: x(j), j = \overline{1, n}\}$ на дві підмножини $\Omega \equiv \Omega^0(1) = \Omega_1^0(1) \cup \Omega_2^0(1), \Omega_1^0(1) \cap \Omega_2^0(1) = \emptyset$ (доцільно засобом k -means).

2) Побудувати гіперплощини

$$A_1(1)x = b_1(1), L(A_1(1), b_1(1)) \text{ для } \Omega_1^0(1),$$

$$A_2(1)x = b_2(1), L(A_2(1), b_2(1)) \text{ для } \Omega_2^0(1).$$

Обчислити оптимальні $A_{1opt}(1), b_{1opt}(1)$ для $\Omega_1^0(1)$ і $A_{2opt}(1), b_{2opt}(1)$ для $\Omega_2^0(1)$.

3) Оновити $\Omega_1^0(1)$ і $\Omega_2^0(1)$ по відповідних відстанях

$$(b_{opt} - A_{opt}x(j))^T R(A_{opt}^T)(b_{opt} - A_{opt}x(j)) -$$

сформувати нові множини $\Omega_1^1(1), \Omega_2^1(1)$ із точок $\Omega^0(1)$, для яких виконуються відповідно умови, а саме:

$x(j) \in \Omega_1^0(1)$, якщо

$$\begin{aligned} & \|A_{1opt}^+(1)(b_{1opt}(1) - A_{1opt}(1)x(j))\|^2 \leq \\ & \leq \|A_{2opt}^+(1)(b_{2opt}(1) - A_{2opt}(1)x(j))\|^2, \end{aligned}$$

$x(j) \in \Omega_2^0(1)$, якщо

$$\begin{aligned} & \|A_{1opt}^+(1)(b_{1opt}(1) - A_{1opt}(1)x(j))\|^2 > \\ & > \|A_{2opt}^+(1)(b_{2opt}(1) - A_{2opt}(1)x(j))\|^2. \end{aligned}$$

Лінійна залежність чи незалежність векторів, що можуть бути вилучені з множин, дає можливість спростити вигляд формул для відстаней цих векторів від відповідних гіперплощин, бо доцільно використовувати співвідношення, які отримані у вигляді обернених формул Гревеля.

4) Перейти на виконання операції 2 з новими підмножинами $\Omega_1^i(1), \Omega_2^i(1), i = 1, 2$. Верхній індекс позначає кількість ітерацій на етапі першої ланки.

5) Зупинка алгоритму на етапі першої ланки кластеру може завершитись після виконання певної кількості кроків або після того, як відстані кожного з векторів відповідного елементу

розбиття до відповідної гіперплощини не поліпшуються.

6) Перевіряється критерій ефективності здійсненої гіперплощинної кластеризації (компактності першої ланки кластеру, тощо). При невиконанні критерію перейти на формування другої ланки кластеру.

2. Формування другої ланки кластеру (на прикладі критерію компактності кластеру).

1) З отриманих в процесі побудови першої ланки розбиттів вихідної множини двох множин - $\Omega_1^{l_1}(1), \Omega_2^{l_1}(1)$, де l_1 - кількість ітерацій в рамках першої ланки, вилучаються вектори, які знаходяться від гіперплощин на віддалі більший від бажаної. Отримуються множини $\Omega^0(2) = \Omega_1^0(2) \cup \Omega_2^0(2), \Omega_1^0(2) \cap \Omega_2^0(2) = \emptyset$.

2) Побудувати гіперплощини $L(A_k(2), b_k(2))$

для $\Omega_k^0(2), k = 1, 2$, яка визначається як множина розв'язків (псевдо розв'язків) систем алгебраїчних рівнянь

$$A_k(2)x = b_k(2), \quad k = 1, 2.$$

3) Обчислити оптимальні $A_{kopt}(2), b_{kopt}(2)$

для $L(A_k(2), b_k(2)), k = 1, 2$.

4) Оновити $\Omega_k^0(2), k = 1, 2$ по відстані

вектора $x(j) \in \Omega^0(2)$ до кожної з гіперплощин $L(A_k(2), b_k(2)), k = 1, 2$,

$$\begin{aligned} & \rho^2(x: x(j), L(A_{kopt}(2), b_{kopt}(2))) = \\ & = (b_{kopt}(2) - A_{kopt}(2)x(j))^T R^T(A_{kopt}(2)) \\ & (b_{kopt}(2) - A_{kopt}(2)x(j)). \end{aligned}$$

(Дії подібні до пункту 3 побудови першої ланки).

5) Перейти на виконання операції 2 з новими підмножинами $\Omega_1^j(1), \Omega_2^j(1) j = 1, 2, \dots$. Верхній індекс j позначає кількість ітерацій на етапі другої ланки.

6) Зупинка алгоритму на етапі другої ланки кластеру може завершитись після того, як відстані кожного з векторів відповідного елементу розбиття до відповідної гіперплощини не поліпшуються.

7) Перевіряється критерій ефективності здійсненої гіперплощинної кластеризації (наприклад, вимога рівня компактності ланки кластеру). При виконанні критерію побудова кластеру завершується, а при невиконанні здійснюється перехід на формування третьої ланки кластеру.

Висновки

Розглянута концепція кусково гіперплощинної кластеризації скінченних сукупностей векторів евклідового простору. Запропоновано алгоритми розв'язання задачі в класичній

постановці – розподіл навчальної вибірки по непересічних кластерах. Приведено необхідні результати теорії псевдо обернених та проєкційних матриць. оптимальних параметрів розглядуваних гіперплощин.

Список використаних джерел

1. Кириченко Н.Ф. Анализ и синтез систем классификации сигналов средствами возмущений псевдообратных и проекционных операций / Кириченко Н.Ф., Кудин Г.И. // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – №3. – С. 47-57.
2. Кириченко Н.Ф. Псевдообращение в задачах кластеризации / Кириченко Н.Ф., Донченко В.С. // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – №5. – С. 73 – 92.
3. Кириченко Н.Ф. Синтез систем нейрофункциональных преобразователей в решении задач классификации / Кириченко Н.Ф., Кривонос Ю.Г., Лепеха Н.П. // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – №3. – С. 47-57
4. Кириченко Н.Ф. Оптимизация синтеза гиперплоскостных кластеров и нейрофункциональных преобразований в системах классификации сигналов / Кириченко Н.Ф., Кривонос Ю.Г., Лепеха Н.П. // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – №6. – С. 107 – 125.

References

1. KIRICHENKO, N.F. and KUDIN, G.I. (2009) “Analysis and synthesis of signal classification systems by perturbing pseudoinverse and projection operations”, *Cybernetics and System Analysis*, 45 (4), pp. 613-622.
2. KIRICHENKO, N.F. and DONCHENKO, V.S., (2007) “Pseudoinverse in clustering problems”, *Cybernetics and System Analysis*, 43 (4), pp. 527-541.
3. KIRICHENKO, N.F., KRIVONOS, YU.G., and LEPEKHA, N.P. (2007) “Synthesis of systems of neurofunctional transformations in classification problems”, *Cybernetics and System Analysis*, 43 (3), pp. 353-361.
4. KIRICHENKO, N.F., KRIVONOS, YU.G., and LEPEKHA, N.P. (2008) “ Synthesis of systems of neurofunctional transformations in classification problems”, *Cybernetics and System Analysis*, 44 (6), pp. 832-839.

Надійшла до редколегії 19.08.2017

УДК 519.8

Мановицька Д.О., аспірантка

Manovytska D.O., Ph.D. student

Алгоритм визначення суттєвості нечітких обмежень

Algorithm for determining the significance of fuzzy constraints

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова
НАН України,
м. Київ, пр-т. Академіка Глушкова, 40,
e-mail: manovytska_dariia@ukr.net

Institute Cybernetics NAS of Ukraine,
03680, Kyiv, Glushkova st., 40,

e-mail: manovytska_dariia@ukr.net

Стаття присвячена дослідженню у напрямку математичного моделювання та розробки процедур підтримки процесу прийняття рішень при управлінні розвитком систем (системній оптимізації). Побудовано багатокритеріальну модель задачі системної оптимізації з нечіткою множиною допустимих розв'язків. Запропонований алгоритм для визначення суттєвих обмежень з множини нечітких обмежень. Розробка моделей та методів системної оптимізації дозволяє суттєво розширити практичне застосування математичного програмування, в тому числі багатокритеріальної оптимізації, для економічних задач, забезпечує цілеспрямоване узгодження множини допустимих рішень з цільовими установками особи, що приймає рішення, та реальними можливостями розв'язуваної задачі. Ефективність даного підходу підтверджується практикою застосування, зокрема, в задачах стратегічного планування, управління змінами великих систем.

Ключові слова: системна оптимізація, нечіткі множини, прийняття рішень.

The article is devoted to research in the direction of mathematical modeling and development of procedures for supporting the decision making process in the management of system development (system optimization). A multicriterial model of the system optimization problem with fuzzy set of admissible solutions is constructed. One of the most important stages in solving system optimization tasks is the stage of determining the limitations of the original model, which are "bottlenecks" to achieve the inadmissible desired target of the decision maker. The realization of this stage is complicated if the range of permissible solutions is fuzzy set. The proposed algorithm for determining such restrictions on the set of fuzzy constraints, which are called essential. The development of models and methods of system optimization allows to significantly expand the practical application of mathematical programming, including multi-criteria optimization, for economic tasks, provides purposeful coordination of the set of permissible decisions with the target settings of the decision maker and the real possibilities of the solvable problem. The effectiveness of this approach is confirmed by the practice of application, in particular, in the tasks of strategic planning, management of changes in large systems.

Key Words: system optimization, fuzzy set, decision making.

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ

Одним з найважливіших етапів розв'язання задач системної оптимізації є визначення обмежень вихідної моделі, які є "вузькими місцями" для досягнення недопустимих бажаних цільових установок ОПР. Реалізація цього етапу ускладнюється, якщо область допустимих розв'язків є нечіткою множиною. В статті пропонується підхід до визначення таких обмежень, які будемо називати суттєвими.

1. Постановка задачі

Нехай модель організаційної системи (МО) задана у вигляді області допустимих розв'язків D_0 :

$$D_0 = \{x: g_l(x) \leq 0, l \in Q = \{1, \dots, m\}, x = \{x_j, j \in J = \{1, n\}\}\}$$

та множини критеріїв

$$f = \{f_i(x) \rightarrow \max, i \in I_1, f_i \rightarrow \min,$$

$$i \in I_2, i \in I_2, I_1 \cup I_2 = I = \{1, \dots, M\}\},$$

де:

x – вектор розв'язків розмірності n ;

m – кількість обмежень;

M – кількість критеріїв;

I_1 – множина індексів критеріїв, що максимізуються;

I_2 – множина індексів критеріїв, що мінімізуються.

Розглянемо модель з нечіткою областю допустимих розв'язків D_0 [1]:

$$D_0 = \left\{ \begin{array}{l} x : g_l(x) \leq 0, l \in Q = \{1, \dots, m\}, \\ x = \{x_j, j \in J = \{1, \dots, n\}\}; \\ \mu_{D_0}(g_l(x)), l \in Q = \{1, \dots, m\} \end{array} \right\}$$

де обмеження $g_l(x) \leq 0$ мають вигляд

$$\sum_{j=1}^n a_{lj}^0 x_j \leq b_l^0, l \in Q = \{1, \dots, m\}, j \in J = \{1, \dots, n\}, \text{ а}$$

через $\mu_{D_0}(g_l(x))$ позначено ступінь належності обмеження $g_l(x)$, $l \in Q = \{1, \dots, m\}$ множині D_0 причому $\mu_{D_0} \in [0, 1]$.

Нехай ОПР задає свої вимоги G через бажаний розв'язок x^* : $G = \{x : x_j = x_j^*, j \in J\}$. Точка x^* не належить вихідній області допустимих розв'язків $D_0 : x^* \notin D_0$.

Потрібно створити нову допустиму область D_1 у відповідності з початковою областю D_0 і обмеженнями на варіації її параметрів P_0 таку, в якій існує розв'язок $x_k \in D_1$, що $f_i^*(x^k) \geq f_i^*$, $i \in I$, $x^* \in D_1$, де $f_i^* = f_i(x^*)$, $i \in I$.

2. Алгоритм перевірки обмежень на "суттєвість"

Обчислення мінімальної відстані S від бажаної точки x^* до обмежень в просторі R^n .

Нехай задан n -вимірний евклідов простір ($n > 3$), де n може бути будь-яким натуральним числом. Подібно тому, як положення точки звичайного евклідового простору визначається заданням трьох її прямокутних координат, точка n -вимірного евклідового простору задається n координатами $x_1, x_2, \dots, x_n$ (які можуть приймати будь-які дійсні значення); відстань S між двома точками $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ та $H(y_1, y_2, \dots, y_n)$ визначається за наступною формулою:

$$S = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

аналогічно формулі відстані між двома точками звичайного евклідового простору.

Нормування відстаней.

В результаті попереднього кроку отримано m відстаней $S_i, i = \overline{1, m}$ (оскільки m – кількість обмежень) від бажаної точки x^* до кожного з обмежень. Необхідно пронормувати отримані відстані, для того, щоб в майбутньому оперувати показником, що належить до інтервалу від 0 до 1: $S_{iNORM}, i = \overline{1, m}; S_{iNORM} \in [0, 1]$.

Для цього застосуємо формулу:

$$S_{iNORM} = \frac{S_i - S_{\min}}{S_{\max} - S_{\min}}, i = \overline{1, m}.$$

Знаходження "коефіцієнтів суттєвості" обмежень.

Створення нової допустимої області D_1 передбачає впорядкування обмежень за суттєвістю з точки зору їх наявності в моделі. Позначимо k_i як "коефіцієнт суттєвості" (КС) обмеження, максимальне значення якого буде належати обмеженню, що є "найсуттєвішим".

КС визначається за наступною формулою:

$$k_i = \frac{\mu_{D_0} + (1 - S_{iNORM})}{2}, i = \overline{1, m}.$$

В чисельнику замість S_{iNORM} використовується вираз $(1 - S_{iNORM})$ для того, щоб врахувати, що зі збільшенням відстані між x^* та обмеженням зменшується "ступінь важливості" цього обмеження.

Після знаходження КС для кожного з обмежень відсортуємо КС за спаданням. Перше, максимальне значення, відповідає обмеженню (обмеженням), що є найбільш суттєвим.

3. Приклад

Область допустимих розв'язків D_0 задана наступними нерівностями, кожне з яких має свій ступінь належності області D_0 :

$$y_1 = x + 4, \mu_1 = 0.4,$$

$$y_2 = -\frac{1}{3}x + \frac{28}{3}, \mu_2 = 0.1,$$

$$y_3 = -3x + 28, \mu_3 = 0.75,$$

$$y_4 = \frac{1}{2}x, \mu_4 = 0.4,$$

$$y_5 = -2x + 10, \mu_5 = 0.4,$$

а точка $x^* = (6, 8)$ - є бажаним розв'язком.

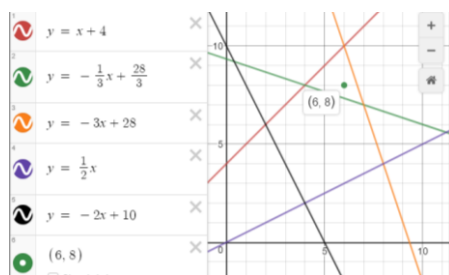


Рис.1 - модель системи D_0 .

=AVERAGE(1-[@[S norm]],[@M])						
№ обм	S(x*, g)	S norm	M	k		
1	1.41	0.203125	0.4	0.598438		
2	0.63	0	0.1	0.55		
3	0.63	0	0.75	0.875		
4	4.47	1	0.4	0.2		
5	4.47	1	0.4	0.2		
X min	0.63	4.47				
X max						

Рис.2 - Excel розрахунки.

Розрахунки в Excel ілюструють наступне.

Перший стовпчик позначає номер обмеження, другий – відстань від обмеження до бажаної точки x^* , третій – визначає нормовані відстані, що були отримані на третьому кроці алгоритму, четвертий – вказує на заданий ступінь

належності обмеження області D_0 . В останньому стовпчику обчислюється “коефіцієнт суттєвості” (КС) обмеження.

Після сортування з'ясувалось, що найбільш суттєвим є третій критерій.

=AVERAGE(1-[@[S norm]],[@M])						
№ обм	S(x*, g)	S norm	M	k		
3	0.63	0	0.75	0.875		
1	1.41	0.203125	0.4	0.598438		
2	0.63	0	0.1	0.55		
4	4.47	1	0.4	0.2		
5	4.47	1	0.4	0.2		
X min	0.63	4.47				
X max						

Рис.3 - сортування обмежень за КС.

Висновки

Запропонований алгоритм надає можливість визначати суттєві обмеження систем на основі відстані від цільових установок G і ступені належності $\mu_{D_0}(g_l(x))$ множині D_0 та може бути використаний, як етап, в алгоритмах системної оптимізації.

Список використаних джерел

1. Mashchenko S.O. The problem of mathematical programming with the fuzzy set of indexes of constraints / Mashchenko S.O. // Cybernetics and systems analysis. - 2013. - 49(1). - P. 62-68.

References

1. MASHCHENKO, S.O. (2013) “The problem of mathematical programming with the fuzzy set of indexes of constraints”, *Cybernetics and systems analysis*, 49(1), pp. 62-68.

Надійшла до редколегії 19.08.2017

УДК 519.86

Махорт А.П., к.ф.-м.н., с.н.с.

A.P. Makhort, Ph. D. (Phys.-Math.), Sr.Sci.
researcher

**Параметричний опис станів рівноваги
економічної системи за наявності
монополістів**

**The parametric description of equilibrium
states of an economy under presence of
monopolies**

Інститут теоретичної фізики
ім. М.М.Боголюбова НАН України
03143 Україна, Київ,
вул. Метрологічна 14-б
e-mail: map@bitp.kiev.ua

Bogolyubov Institute
for Theoretical Physics
14-b Metrolohichna str., Kyiv,
Ukraine 03143
e-mail: map@bitp.kiev.ua

Досліджено рівновагу відкритої економічної системи за наявності монополістів. Застосовано принципи рівноваги Вальрасового типу. Використано наближення моделі економіки з постійними інтересами споживачів. Запропоновано алгоритм розв'язання задачі про економічну рівновагу. Отримано обмеження на модельні характеристики, виконання яких дозволяє записати аналітичні вирази характеристик станів рівноваги економічної системи. Вирази залежать від параметрів, а зміна значень цих параметрів і описуватиме різні рівноважні стани.

Ключові слова: рівновага, монополісти, попит, пропозиція, ціноутворення.

The construction of economic models assists a detection of suitable tools to achieve an acceptable state of the economics. The equilibrium approach leads to a determination of factors generated negative processes in the economic system. The investigation aim is to a description of possible equilibrium states of the economic system under conditions of profitable productions of all economy subjects. The equilibrium principles are a Walrasian type. The model uses the approach of an economy with regular interests of consumers. The economy description takes into account a presence of monopolies and insatiable consumers. There is an algorithm of a solution of the equilibrium problem. The solution method is to a construction of analytic expressions of economy characteristics corresponded an individual equilibrium state. The economy characteristics depend on a parameter vector. This parameter vector describes various possible equilibrium states. The suitable choice of the parameter vector results in a detection of an equilibrium state with defined properties. The degrees of a satisfaction of consumers needs indicate the quality of equilibrium states.

Key words: equilibrium, monopolies, demand, supply, prices formation.

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ

Потреба у моделюванні поведінки економічних систем пов'язана зі спробами виявлення кризових чинників, та адекватних засобів впливу на них з метою реалізації прийнятних сценаріїв функціонування. Час від часу виникають економічні кризи, яких не вдалося запобігти, а їх подолання потребує значних зусиль. Що означає необхідність вдосконалення наявних інструментів впливу на економічну систему. Використання для моделювання поведінки економіки рівноважних підходів дозволяє отримати достатньо інформації про баланс економічної системи і чинники, дія

яких призводить до порушенні балансу. Різні сценарії відповідають окремим станам рівноваги. Оцінка характеристик станів рівноваги допоможе виявити те у взаємовідносинах між суб'єктами економічної системи, що призводить до появи дисбалансів.

У дослідженні використовуватимемо Вальрасові принципи рівноваги [1,2], а економічну систему моделюватимемо наближенням економіки з постійними інтересами споживачів [1]. Мета – з'ясувати вплив монопольних явищ на можливі стани рівноваги економічної системи. Це важливо, тому що монополізм відносять до несприятливих чинників, а знання його проявів

допоможе запобіганню розвитку негативних процесів.

Опис економічної системи

Економічну систему розглядатимемо як сукупність l споживачів, кожен з яких прагне здобути певну кількість потрібних йому товарів. Різновидів товарів є n . Частина з l споживачів товарів спроможні виготовляти один з n можливих типів товарів. Щоб придбати потрібний їм новий товар, такі суб'єкти економічної системи виставлятимуть на продаж товари, виготовлені в процесі свого виробництва. В економічній системі є $l-n$ чистих споживачів, які отримують фінансовий ресурс для придбання потрібних ним товарів виключно з зовнішніх джерел. Засобом утворення зовнішнього фінансування є перерозподіл капіталу, отриманого в результаті оподаткування прибутків виробників. Споживачі ненасичувані, тобто планують витратити весь отриманий прибуток на придбання товарів. Технології виготовлення товарів розглядатимемо у випадку наявності постійних витрат виробництва. Серед виробників в економічній системі наявні $n-t$ монополістів.

Рівняння рівноваги для економічної системи з такими характеристиками мають вигляд

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^l c_{kj} y_j &= x_k - \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i - \\ &- \sum_{i=1}^n b_{ki} - e_k + i_k, \quad k = \overline{1, n}. \\ p_j &= \sum_{k=1}^t \left(a_{kj} + \frac{y_j}{\pi_j x_j} c_{kj} + b_{kj} / x_j \right) p_k + \\ &+ \sum_{k=t+1}^n \left(a_{kj} + \frac{y_j}{\pi_j x_j} c_{kj} + b_{kj} / x_j \right) p_k^0, \quad j = \overline{1, t}, \\ p_j^0 &= \sum_{k=1}^t \left(a_{kj} + \frac{y_j}{\pi_j x_j} c_{kj} + b_{kj} / x_j \right) p_k + \\ &+ \sum_{k=t+1}^n \left(a_{kj} + \frac{y_j}{\pi_j x_j} c_{kj} + b_{kj} / x_j \right) p_k^0, \quad j = \overline{t+1, n}. \end{aligned}$$

де $x = \{x_i\}_{i=1}^n$ – обсяги випуску виготовлених в процесі виробництва товарів, $\{p_i\}_{i=1}^n$ – вектор цін товарів, $\{y_i\}_{i=1}^l$ – ступені задоволення потреб споживачів, $\{\pi_i\}_{i=1}^n$ – вектор оподаткування,

величини $\{e_i\}_{i=1}^n$ і $\{i_i\}_{i=1}^n$ задають обсяги експорту і імпорту товарів, матричні елементи $\{c_{kj}\}_{k=1}^n$ описують споживчі уподобання j -го суб'єкту економічної системи $\{a_{kj}\}_{k=1}^n$ – витрати на виготовлення одиниці випуску j -го товару, $\{b_{kj}\}_{k=1}^n$ – частина постійних витрат виробництва, що використовується для його утримання у працездатному стані. Монополістів нумеруватимемо індексами з інтервалу $[t+1, n]$.

З рівнянь рівноваги визначимо невідомі вектори $(p_1, \dots, p_t)$, $(x_{t+1}, \dots, x_n)$, $(y_1, \dots, y_l)$ і $(\pi_{t+1}, \dots, \pi_n)$ за решти заданих характеристик. Вказані невідомі змінні описуватимуть стани рівноваги, в яких може опинитись економічна система.

Характеристики станів рівноваги

Нехай спектральний радіус матриці $A = \|a_{jk}\|_{j,k=1}^n$ менше одиниці, тоді перше з рівнянь рівноваги набуде вигляду

$$\sum_{j=1}^l d_{kj} y_j = b_k^0, \quad k = \overline{1, t}, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^l d_{kj} y_j = b_k, \quad k = \overline{t+1, n},$$

де позначено

$$\begin{aligned} b_k &= x_k - \sum_{s=1}^n (E - A)_{ks}^{-1} \left[e_s - i_s + \sum_{j=1}^n b_{sj} \right], \\ d_{kj} &= \sum_{s=1}^n (E - A)_{ks}^{-1} c_{sj}. \end{aligned}$$

Компоненти $b_k^0 = b_k > 0$ для індексів $k = \overline{1, t}$ задані, а компоненти b_k для індексів $k = \overline{t+1, n}$ невідомі. З виразу (1) за вектором $b^0 = (b_1^0, \dots, b_t^0)$ можна знайти параметричний розв'язок для вектора ступенів задоволення потреб споживачів.

Теорема 1. Нехай ранг матриці $\|d_{kj}\|_{k,j=1}^{t,l}$ дорівнює t , спектральний радіус матриці $A(1)$ менше одиниці, де

$$A(\tau) = \left\| a_{kj} + \frac{1}{x_j^0} b_{kj} + \frac{\tau_j}{\pi_j^0 x_j^0} c_{kj} \right\|_{k,j=1}^t,$$

виконується вимога

$$(b^0, f_i) = \sum_{s=1}^l b_s^0 f_{is} > 0, \quad i = \overline{1, t},$$

де $f_i = \{d_{ki}^{-1}\}_{k=1}^t$, $i = \overline{1, t}$. Тоді для рівноважних характеристик економічної системи справедливе подання

$$\begin{aligned} y(\gamma) &= \left\{ (b^0, f_1) - \sum_{j=t+1}^l (d_j, f_1) \gamma_j y_j^*, \dots, (b^0, f_t) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=t+1}^l (d_j, f_t) \gamma_j y_j^*, \gamma_{t+1} y_{t+1}^*, \dots, \gamma_l y_l^* \right\}, \\ p_k(\gamma) &= \sum_{j=1}^t (E - \mathcal{A}(y))_{jk}^{-1} \sum_{s=t+1}^n \left(a_{sj} + \frac{b_{sj}}{x_j^0} + \frac{c_{sj}}{\pi_j^0} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1}{x_j^0} \left[(b^0, f_s) - \sum_{j=t+1}^l (d_j, f_s) \gamma_j y_j^* \right] \right) p_s^0, \quad k = \overline{1, t}, \\ x_k(\gamma) &= \sum_{i=1}^t d_{ki} (b^0, f_i) + \sum_{j=t+1}^l \left[d_{kj} - \sum_{i=1}^t d_{ki} (d_j, f_i) \right] \gamma_j y_j^* + \\ &\quad + \sum_{s=1}^n (E - A)_{ks}^{-1} \left[e_s - i_s + \sum_{j=1}^n b_{sj} \right], \quad k = \overline{t+1, n}, \\ \pi_j(\gamma) &= \left[\sum_{s=1}^t c_{sj} \gamma_j y_j^* p_s(\gamma) + \sum_{s=t+1}^n c_{sj} \gamma_j y_j^* p_s^0 \right] \times \\ &\quad \times \left[p_j^0 x_j(\gamma) - \sum_{k=1}^t (a_{kj} x_j(\gamma) + b_{kj}) p_k(\gamma) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=t+1}^n (a_{kj} x_j(\gamma) + b_{kj}) p_k^0 \right]^{-1}, \quad j = \overline{t+1, n}, \end{aligned}$$

де $(d_i, f_k) = \sum_{s=1}^t d_{si} f_{sk}$. Вектор $y^* = \{y_i^*\}_{i=t+1}^l$

заданий і вибирається так, щоб виконувались нерівності

$$(b^0, f_i) \geq \sum_{k=1}^t d_{ki} f_{ik} y_j^*, \quad i = \overline{1, t}, \quad j = \overline{t+1, n},$$

а вектор параметрів $\gamma = (\gamma_{t+1}, \dots, \gamma_l)$ набуває значень з множини визначеної виразами

$$\begin{aligned} 1 \geq (b^0, f_i) - \sum_{j=t+1}^l \sum_{k=1}^t d_{kj} f_{ik} \gamma_j y_j^* > 0, \quad i = \overline{1, t}, \\ \sum_{j=t+1}^{n+1} \gamma_j = 1, \quad \frac{1}{y_i^*} \geq \gamma_i > 0, \quad i = \overline{t+1, n}, \end{aligned}$$

і описує можливі стани рівноваги економічної системи.

Доведення теореми впливає з можливості записати розв'язок рівняння (1) стосовно вектора $y = y(\gamma)$ у параметричному вигляді [1].

Обмеження на значення параметрів $\gamma_{t+1}, \dots, \gamma_l$ випливають з того, що компоненти вектора $y(\gamma)$ мають набувати значень в інтервалу $(0, 1]$.

Досі вважалося, що заданими є компоненти $\pi_1^0, \dots, \pi_t^0$ вектора оподаткування. Розглянемо випадок, коли заданими є і ті компоненти, що стосуються монополістів $\pi_{t+1}^0, \dots, \pi_n^0$.

Теорема 2. Нехай компоненти, вектора $\{\pi_i^0\}_{i=t+1}^n$ є заданими, спектральний радіус матриці

$$\mathcal{A}^1 = \left\| a_{kj} + \frac{1}{x_j^0} b_{kj} + \frac{1}{\pi_j^0 x_j^0} c_{kj} \right\|_{k,j=1}^t$$

менше за одиницю, а для вібраних з множини

$$\Gamma = \left\{ \gamma_i \in R, \quad 1 \geq (b^0, f_s) - \sum_{j=t+1}^n \sum_{k=1}^t d_{kj} f_{sk} \gamma_j y_j^* > 0, \right.$$

$$\left. s = \overline{1, t}, \quad \frac{1}{y_i^*} \geq \gamma_i > 0, \quad i = \overline{t+1, n}, \quad \sum_{j=t+1}^{n+1} \gamma_j = 1 \right\}$$

векторів

$$\begin{aligned} \gamma^1 &= (\gamma_{t+1}^1, \dots, \gamma_{n+1}^1, \gamma_{n+1}^0, \dots, \gamma_l^1), \\ \gamma^0 &= (\gamma_{t+1}^0, \dots, \gamma_{n+1}^0, \gamma_{n+1}^1, \dots, \gamma_l^0) \end{aligned}$$

справедливі нерівності

$$\begin{aligned} 1 \geq (b^0, f_i) - \sum_{j \in \mathcal{A}_i^+} (d_i, f_j) \max(\gamma_j^1, \gamma_j^0) y_j^* - \\ - \sum_{j \in \mathcal{A}_i^-} (d_i, f_j) \min(\gamma_j^1, \gamma_j^0) y_j^* - \\ - \sum_{j=n+1}^l (d_j, f_i) \gamma_j y_j^* > 0, \quad k = \overline{t+1, n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi_j^0} \geq \frac{p_j^0 x_j^{\min} - \sum_{k=1}^t (a_{kj} x_j^{\min} + b_{kj}) p_k^1}{\sum_{s=1}^t c_{sj} p_j^1 + \sum_{s=t+1}^n c_{sj} p_s^0} - \\ - \frac{\sum_{k=t+1}^n (a_{kj} x_j^{\min} + b_{kj}) p_k^0}{\sum_{s=1}^t c_{sj} p_j^1 + \sum_{s=t+1}^n c_{sj} p_s^0}, \quad j = \overline{t+1, n}, \end{aligned}$$

де $p_k^1 = p_k(1)$,

$$p_k(y) = \sum_{j=1}^t (E - \mathcal{A}(y))_{jk}^{-1} \frac{1}{x_j^0} \sum_{s=t+1}^n \left(a_{sj} x_j^0 + b_{sj} + \frac{c_{sj}}{\pi_j^0} y_j \right) p_s^0,$$

$$x_k^{\min} = \sum_{s=1}^n (E - A)_{ks}^{-1} \left[e_s - i_s + \sum_{j=1}^n b_{sj} \right] + \sum_{i=1}^t d_{ki} (b^0, f_i) -$$

$$- \sum_{i=1}^t \left[\sum_{j=n+1}^l (d_j, f_i) \gamma_j y_j^* + \sum_{j \in \mathcal{A}_i^+} (d_j, f_i) \max(\gamma_j^1, \gamma_j^0) y_j^* + \right.$$

$$\left. + \sum_{j \in \mathcal{A}_i^-} (d_j, f_i) \min(\gamma_j^1, \gamma_j^0) y_j^* \right] d_{ki} +$$

$$+ \sum_{j=t+1}^n d_{kj} \min(\gamma_j^1, \gamma_j^0) y_j^* + \sum_{j=n+1}^l d_{kj} \gamma_j y_j^*,$$

$\mathcal{J}_s^+ = \{k \in \{t+1, \dots, n\}, (d_k, f_s) > 0\}, \quad s \in \{1, \dots, t\},$
 $\mathcal{J}_s^- = \{k \in \{t+1, \dots, n\}, (d_k, f_s) < 0\}, \quad s \in \{1, \dots, t\},$
 Тоді значення параметрів $\gamma_{t+1}, \dots, \gamma_n$
 визначатимуться зміною значень параметрів
 $\gamma_{n+1}, \dots, \gamma_l$.

Доведення. З виразу, який задає рівні
 оподаткування монополістів у теоремі 1
 випливає, що заданим величинам $\pi_{t+1}^0, \dots, \pi_n^0$ має
 відповідати деякий вектор γ^* . Нехай за
 фіксованих значень параметрів $\gamma_{n+1}, \dots, \gamma_l$ для
 вибраних векторів γ^0 і γ^1 з множини Γ
 справедливі обмеження

$$\pi_j(\gamma^0) \geq \pi_j^0 \geq \pi_j(\gamma^1), \quad j = \overline{t+1, n}.$$

Утворимо вектори $(\gamma_{t+1}^{\max}, \dots, \gamma_n^{\max}, \gamma_{n+1}, \dots, \gamma_l)$ і
 $(\gamma_{t+1}^{\min}, \dots, \gamma_n^{\min}, \gamma_{n+1}, \dots, \gamma_l)$ так, щоб
 $\gamma_i^{\max} = \max(\gamma_i^0, \gamma_i^1), \quad \gamma_i^{\min} = \min(\gamma_i^0, \gamma_i^1), \quad i = \overline{t+1, n}.$

Для таких векторів виконуватимуться оцінки

$$\gamma_j^{\max} \geq \frac{\pi_j^0 p_j^0 x_j^{\min} - \sum_{k=1}^t (a_{kj} x_j^{\min} + b_{kj}) p_k^1}{y_j^* \sum_{s=1}^t c_{sj} p_s^1 + \sum_{s=t+1}^n c_{sj} p_s^0} -$$

$$- \frac{\pi_j^0 \sum_{k=t+1}^n (a_{kj} x_j^{\min} + b_{kj}) p_k^0}{y_j^* \sum_{s=1}^t c_{sj} p_s^1 + \sum_{s=t+1}^n c_{sj} p_s^0}, \quad j = \overline{t+1, n},$$

$$\gamma_j^{\min} \leq \frac{\pi_j^0 p_j^0 x_j^{\max} - \sum_{k=1}^t (a_{kj} x_j^{\max} + b_{kj}) p_k(y^{\min})}{y_j^* \sum_{s=1}^t c_{sj} p_s(y^{\min}) + \sum_{s=t+1}^n c_{sj} p_s^0} -$$

$$- \frac{\pi_j^0 \sum_{k=t+1}^n (a_{kj} x_j^{\max} + b_{kj}) p_k^0}{y_j^* \sum_{s=1}^t c_{sj} p_s(y^{\min}) + \sum_{s=t+1}^n c_{sj} p_s^0}, \quad j = \overline{t+1, n},$$

де $y^{\min} = \{y_k^{\min}\}_{k=1}^l$,

$$y_k^{\min} = (b^0, f_k) - \sum_{i \in \mathcal{A}_k^+} (d_i, f_k) \max(\gamma_j^1, \gamma_j^0) y_j^* -$$

$$- \sum_{i \in \mathcal{A}_k^-} (d_i, f_k) \min(\gamma_j^1, \gamma_j^0) y_j^* - \sum_{j=n+1}^l (d_j, f_k) \gamma_j y_j^*,$$

$$x_k^{\max} = \sum_{s=1}^n (E - A)_{ks}^{-1} \left[e_s - i_s + \sum_{j=1}^n b_{sj} \right] + \sum_{i=1}^t d_{ki} (b^0, f_i) -$$

$$- \sum_{i=1}^t \left[\sum_{j=n+1}^l (d_j, f_i) \gamma_j y_j^* + \sum_{j \in \mathcal{A}_i^+} (d_j, f_i) \min(\gamma_j^1, \gamma_j^0) y_j^* + \right.$$

$$\left. + \sum_{j \in \mathcal{A}_i^-} (d_j, f_i) \max(\gamma_j^1, \gamma_j^0) y_j^* \right] d_{ki} +$$

$$+ \sum_{j=t+1}^n d_{kj} \max(\gamma_j^1, \gamma_j^0) y_j^* + \sum_{j=n+1}^l d_{kj} \gamma_j y_j^*.$$

Завдяки наведеним оцінкам, на підставі теорем
 про нерухому точку [3], встановимо існування
 розв'язку рівняння на змінні $\gamma_{t+1}, \dots, \gamma_n$

$$\gamma_j = \frac{\pi_j^0 p_j^0 x_j(\gamma) - \sum_{k=1}^t (a_{kj} x_j(\gamma) + b_{kj}) p_k(\gamma)}{y_j^* \sum_{s=1}^t c_{sj} p_s(\gamma) + \sum_{s=t+1}^n c_{sj} p_s^0} -$$

$$- \frac{\pi_j^0 \sum_{k=t+1}^n (a_{kj} x_j(\gamma) + b_{kj}) p_k^0}{y_j^* \sum_{s=1}^t c_{sj} p_s(\gamma) + \sum_{s=t+1}^n c_{sj} p_s^0}, \quad j = \overline{t+1, n}.$$

Цей розв'язок належатиме множині $\Gamma^1 \subset \Gamma$,
 $\Gamma^1 = \{|\gamma_i^{\max} + \gamma_i^{\min} - 2\gamma_i| \leq \gamma_i^{\max} - \gamma_i^{\min}, \quad j = \overline{t+1, n}\}$

Рівняння на змінні $\gamma_{t+1}, \dots, \gamma_n$ впливає з
 рівностей $\pi_j(\gamma) = \pi_j^0, \quad j = \overline{t+1, n}$. Зміна набору
 значень $\gamma_{n+1}, \dots, \gamma_l$ призводитиме до інших
 значень параметрів $\gamma_{t+1}, \dots, \gamma_n$ з множини Γ^1 .

Теорему доведено.

Висновки

Запропоновано метод параметричного опису станів рівноваги економічної системи. Параметричний опис станів рівноваги визначає всі можливі стани економічної системи з прибутковим виробництвом її суб'єктів. В межах застосування параметричного опису станів рівноваги отримано аналітичні вирази для рівноважних характеристик. Щодо рівнів оподаткування монополістів, досліджено і коли вони є заданими, і коли вони є характеристикою стану рівноваги економічної системи. В останньому випадку рівні оподаткування

розглядаються як важіль впливу на монополістів. За вектором ступенів задоволення потреб споживачів $y = y(\gamma)$ можна визначити якість окремого стану рівноваги економічної системи. За потребою, вибором значень параметрів $\gamma_{t+1}, \dots, \gamma_l$ можна досягти реалізації станів рівноваги з заданими властивостями. Зокрема, для окремих рівноважних характеристик можна встановити інтервал значень, як було вказано для компонентів вектора $y = y(\gamma)$ у [4,5].

Список використаних джерел

1. Gonchar N.S. Mathematical foundation of information economics / N.S. Gonchar – К.: Ін-т теор. фізики, 2008. – 468 с.
2. Debreu G. Existence of competitive equilibrium. Handbook of Mathematical Economics / Debreu G./ ed. by K.J.Arrow and M.D.Intriligator. – Amsterdam: North-Holland Publishing Company. – 1982. - vol.II. - P. 698 -742.
3. Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов – М.: Наука, 1977. – 442с.
4. Махорт А.Ф. Оптимизация монопольных влияний в экономической системе при условии равномерного налогообложения / А.Ф. Махорт // Проблемы управления и информатики. – 2008. – №1. – С. 147 - 155.
5. Махорт А.Ф. Влияние равномерного налогообложения и монопольных явлений на достижение равновесия в экономической системе / А.Ф. Махорт // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – №4. – С.152 – 164.

References

1. GONCHAR, N.S. (2008) *Mathematical foundation of information economics*, Kiev, 468 p.
2. DEBREU, G. (1982) Existence of competitive equilibrium. *Handbook of Mathematical Economics ed. by K.J.Arrow and M.D.Intriligator*, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, vol.II., pp. 698 –742.
3. KANTOROVICH, L.V. and AKILOV, G.P. (1977) *Functional analysis*, Moscow, 442p.
4. MAKHORT, A. Ph. (2008) “Optimization of Monopolies Influencing the Economic System Considering a Uniform Taxation”, *Journal of Automation and Information Sciences*, vol. 40, is.2, pp.71-80.
5. MAKHORT, A. F. (2008) “Influence of a uniform taxation and effects of monopolies on approaching equilibrium in an economic system”, *Cybernetics and Systems Analysis*, Springer New York, vol. 44, № 4, pp. 591-602.

Надійшла до редколегії 19.08.2017

УДК 519.21

Наконеchnий О.¹, д.ф.-м.н., проф.
Марценюк В.², д.т.н., проф.
Андрущак І.³, д.т.н., доц.
Сверстюк А.⁴, к.т.н., доц.

Задачі в системах підтримки прийняття рішень для системного аналізу інноваційних лікувальних методик

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Академіка Глушкова 4д, Україна
e-mail: a.nakonechniy@gmail.com

²Університет у Бельсько-Бялій, 43-309,
м. Бельсько-Бяла, вул. Віллова 2, Польща
e-mail: vmartsenyuk@ath.bielsko.pl

³Луцький національний технічний університет,
43000, м. Луцьк, вул. Львівська 75, Україна
e-mail: 9000@lntu.edu.ua

⁴Тернопільський державний медичний
університет імені І.Горбачевського, 46001,
м Тернопіль, майдан Волі 1, Україна
e-mail: sverstyuk@tdmu.edu.ua

O. Nakonechniy¹, Dr.Phys.-Math.Sci., Prof.
V. Martsenyuk², Dr.Tech.Sci., Prof.
I. Andrushchak³, Dr.Tech.Sci., Assoc. Prof.
A. Sverstyuk⁴, PhD in Tech., Assoc. Prof.

Problems of decision support system for systematic analysis of innovative treatment methods

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Akademik Glushkov ave., 4d, Ukraine
e-mail: a.nakonechniy@gmail.com

²University of Bielsko-Biala, 43-309, Bielsko-Biala,
Willowa st., 2, Poland
e-mail: vmartsenyuk@ath.bielsko.pl

³Lutsk national technical university, 43000, Lutsk,
Lvivska st., 75, Ukraine
e-mail: 9000@lntu.edu.ua

⁴I.Horbachevsky State Medical University of
Ternopil, 46001, Ternopil, Voli square, 1, Ukraine
e-mail: sverstyuk@tdmu.edu.ua

Захист здоров'я населення є пріоритетним напрямком соціальної політики держав. Значне місце у вирішенні проблем національної охорони здоров'я відіграє розвиток медичної науки. Тому один з головних підходів подолання проблем в національних системах охорони здоров'я полягає у використанні потенціалу науковців-медиків з метою розробки і застосування новітніх лікувальних, діагностичних та профілактичних методик, які б сприяли розвитку медичної допомоги та забезпеченню здоров'я населення.

У рамках вирішення завдань, що охоплюються національними проектами розвитку галузі, інформаційна підтримка інноваційних лікувальних методик включає: моделювання розвитку захворювання під дією інноваційних лікувальних методик; порівняльний аналіз ефективності лікувальних методик; обґрунтування прийняття рішень при виборі тактики лікування; прогнозування фінансового забезпечення лікування, необхідного у медичному страхуванні.

Аналіз інформаційних моделей в галузі медичних наукових досліджень вказує на необхідність розробки ряду методів для підтримки прийняття рішень, оптимізації і керування. Вирішення задач медичних наукових досліджень пов'язане з розробкою математичних моделей розповсюдження захворювань (у випадку епідеміологічного захворювання), опису їх прогресування (у випадку багатостадійності).

Ключові слова: медичні системні дослідження, підтримка прийняття рішень, компартментні моделі.

A health protection of population is priority direction of social politics of the states. A meaningful place in the solution of problems of national health care occupies development of medical science. Thus one of basic methods of overcoming of problems in the national systems of healthcare there is the use of potential of scientists-physicians with the aim of development and application of the newest curative, diagnostic and prophylactic methodologies, that assists upgrading of medicare and maintenance of health of population.

Within the framework of solution of the tasks included by national projects, researches dealing with informative support of innovative curative methodologies acquire special value: simulation of development

of disease under the action of innovative curative methodologies; a comparative analysis of efficiency of curative methodologies; evidence of decision-making at the choice of tactics of treatment; prognostication of the financial providing of treatment, which is necessary in medical insurance.

The analysis of information models in area of medical scientific activity shows on a necessity of developments of set of methods for decision support, optimization and management. The solution of problems of medical innovative activity is related to development of information models of development and distribution of diseases (in case of epidemiological disease), description of their progress (in case of multi-stageness).

Key Words: network medical systemic research, support of decision making, compartmental models

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

1. Introduction

A health protection of population is priority direction of social politics of the states. The national program of reformation of healthcare branch includes modernisation of the system of health care and sets basic conceptual priorities of development of medical branch of country. A meaningful place in the solution of problems of national health care occupies development of medical science. Thus one of basic methods of overcoming of problems in the national systems of health care there is the use of potential of scientists-physicians with the aim of development and application of the newest curative, diagnostic and prophylactic methodologies, that assists upgrading of medicare and maintenance of health of population.

Within the framework of solution of the tasks included by national project of healthcare reformation, researches dealing with informative support of innovative curative methodologies acquire special value [1-5]:

- simulation of development of disease under the action of innovative curative methodologies;
- a comparative analysis of efficiency of curative methodologies;
- evidence of decision-making at the choice of tactics of treatment;
- prognostication of the financial providing of treatment, which is necessary in medical insurance.

It is not complete list of tasks that arise up during implementation of systems medical researches on development and application of innovative curative methodologies.

The analysis of information models in area of medical scientific activity shows on a necessity of developments of set of methods for decision support, optimization and management. The solution of problems of medical innovative activity is related to development of information models of development and distribution of diseases (in case of epidemiological disease), description of their

progress (in case of multi-stageness). Such models use the tools of both theory of differential equations, random processes and information systems, systems analysis and decision making. Their practical realization requires development of corresponding software environment.

Analysing the algorithms of decision making in medical scientific researches it should be noted that traditional biostatistical methods limit for the estimation of results of investigations, models and molecular markers. Traditional biostatistical approach is concentrated on exactness, calibration and discriminativity using such measures as a sensitiveness, specificity and area under a curve (AUC, AUROC). In the same time such approach does not take into account population cooperations and compartmental nature of the most of medical and biological.

At the construction of information models, a concept of etiology is important, as nature of disease influences at choice design vehicle. Thus for epidemiological diseases traditional approach is the use of differential equations of population dynamics on the basis of SLIAR-models; for the construction of models of multi-stages diseases compartmental approach is used.

The objective of the work is to determine theoretical background for the development of information technologies for support of medical scientific researches.

2. The problems of systems analysis

We are focusing on development of the system of support of decision making for the basic tasks of system medical researches taking into account etiology of disease and support of medical insurance.

The following problems were solved.

Computer technologies of classification of pathologies were implemented in the system of medical diagnostics by the methods of data mining

on the basis of different indexes of information gain with the construction of decision trees and classification rules.

Thus at the solution of practical diagnostical problems the theoretical issues of computational complexity were investigated.

The methods of optimization were programmatically implemented for the mathematical models of chemio-, radio- and immunotherapies on the basis of dynamics of Gompertz and Richard at presence of limits on a controller and phase state.

On the basis of analysis of the generalized physiologically-based pharmacokinetic (PBPK) models the PBPK-model of kinetics of drug, that is described by the system of nonlinear differential equations that include equations of Hill for description of metabolic processes, were developed.

Quality of design of epidemiological processes were improved by the use of mathematical methods and software facilities of analysis, prediction and control.

Computer technologies of determination of optimal strategies of treatment were implemented on the basis of analysis of the decision curves, with use of the values of the combined function of utility and also with application of regret theory.

The multivariant methods of quality analysis of the dynamic systems were programmatically implemented on the basis of functionally-differential equations with the construction of structures of knowledge - decision trees and classification rules that were applied for classification of forms of pathological processes.

The methods of design and analysis of medical insurance were programmatically implemented taking into account etiology - epidemiology or multistage diseases.

The certificated software product covering the object-oriented implementation of system medical researches with the use of methods of systems analysis and optimal decisions was applied.

For implementation of project we needed the following computer hardware and software. Software was implemented for the platform Google Application Engine. Thus we used open-source IDE Eclipse and JDK, management system of project Maven and corresponding open - source frameworks. Server of database was MySQL. The storage of data of Google Datastore was used for maintenance of the most necessary data about a project. Therefore at implementation of project we use entirely advantage of open-source software and storages of data.

3. Mathematical models

One of the most complicated pathological processes is process of growth of the pathological formation. In the work [6] it was evidenced to use Gompertzian dynamics in order to describe tumor growth. That's why here we offer model of antitumor immunity taking into account influence of the damaged target organ on immune response as a basic model. Moreover, practical problems dealing with radiotherapeutic and radiosurgery (gammaknife, cyberknife) treatment require the consideration of impulse influences in such models. So, we use the following model for pathologic process

$$\begin{aligned} \frac{dL(t)}{dt} &= \alpha_L L(t) \ln \frac{\theta_L}{L(t)} - \gamma_L F(t) L(t), \\ \frac{dC(t)}{dt} &= \xi(m) \alpha L(t - \tau) F(t - \tau) - \mu_C (C(t) - C_0), \\ \frac{dF(t)}{dt} &= b_f C(t) - (\mu_f + \eta \gamma_L L(t)) F(t), \\ \frac{dm(t)}{dt} &= \sigma L(t) - \mu_m m(t), \quad t \neq nT, n \in \mathbb{N}, \\ \left. \begin{aligned} L(t) &= -pL(t), (0 < p < 1) \\ \Delta C(t) &= \Delta F(t) = 0, \\ \Delta m(t) &= -pm(t) \end{aligned} \right\} \quad t = nT, n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (1)$$

with initial conditions

$$\begin{aligned} (\phi_1(s), \phi_2(s), \phi_3(s), \phi_4(s)) &\in C_+ = C([- \tau, 0], R_+^4), \\ \phi_i(0) &> 0 \quad (i = \overline{1, 3}). \end{aligned} \quad (2)$$

System (1) is considered within the biologically evidenced region

$$D = \{(L, C, F, m) \mid L, C, F, m \geq 0\}.$$

The values of the variables are described in the work [7].

Note, that impulse differential equations can not have any solutions in general case (even if corresponding differential equations are smooth sufficiently). That's why in the work [7] there were offered the estimates of the solutions of the system (1), (2) in terms of the model parameters in a clear form.

The model (1), (2) can be used for the presentation of pathologic process of tumor growth and for the treatment schemes within the optimal control problems.

The problem of health insurance in the case of oncological diseases besides (1), (2) demand consideration of the models for determining the basic

indices of the insurance policy. Namely, they are survival of patient, the value of insurance premium, costs of treatment etc. It requires to consider probabilistic models of multistage diseases, which parameters of distribution follow from models (1), (2).

For example in the work [8] multistage model of oncological disease as compartmental process for which the laws of distribution of the time of the staying patient at each stage are known, was offered. So, the four-stage model of disease has the form (Fig. 1):

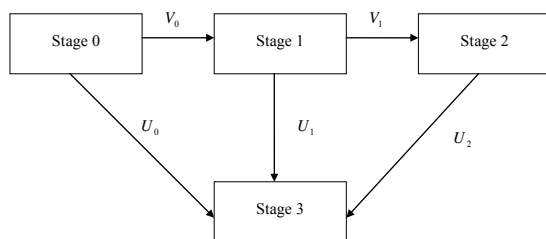


Fig. 1 Compartmental model of the four-stage disease.

Here V_i , $i = \overline{0,2}$ is the time of the staying patient at stage i , $i = \overline{0,2}$ till the instance of transition to the stage $i+1$, $i = \overline{0,2}$; U_i is the time of the staying patient at stage i , $i = \overline{0,2}$ till death, i.e. till transition to the stage 3. Here for the purpose of correctness we let $V_2 = U_2$.

In order to get the series of transition probabilities and calculate insurance functions we introduce the following random values

$$H_i = \min(U_i, V_i), i = \overline{0,2},$$

$$W_i = U_i - V_i, i = \overline{0,2},$$

$$Y_{ij} = \sum_{k=1}^j H_k, i \leq j = \overline{0,2}.$$

Theorem 1. Transition probabilities $q_{ij}(t), i \leq j = \overline{0,2}$ can be calculated due to relation

$$\begin{aligned} q_{ij}(t) &= P\{S(t) = j / S(0) = i\} \\ &= P\{W_k > 0, k = \overline{i, j-1}\} \\ &\times (P\{Y_{ij} > t / W_k > 0, k = \overline{i, j-1}\} - \\ &- P\{Y_{ij-1} > t / W_k > 0, k = \overline{i, j-1}\}). \end{aligned} \quad (3)$$

Let's assume random variables U_i and V_i , $i = \overline{0,2}$ be exponentially distributed, namely

$$U_i \sim \text{Exp}(\theta), i = \overline{0,2}, V_i \sim \text{Exp}(\lambda_i), i = \overline{0,1}. \quad (4)$$

Theorem 2. Provided that assumption (4) with respect to distribution of variables U_i and V_i , $i = \overline{0,2}$ holds, the transition probabilities $q_{ij}(t), i \leq j = \overline{0,2}$ can be calculated in such a way

$$\begin{aligned} q_{00}(t) &= e^{-(\theta_0 + \lambda_0)t}, t > 0. \\ q_{01}(t) &= \frac{\lambda_0}{\theta_0 + \lambda_0} \left(\frac{\theta_0 + \lambda_0}{\theta_1 + \lambda_1 - \theta_0 - \lambda_0} e^{-(\theta_1 + \lambda_1)t} - e^{-(\theta_0 + \lambda_0)t} \right), \\ &t > 0. \\ q_{02}(t) &= \frac{\lambda_0 \lambda_1}{(\theta_0 + \lambda_0)(\theta_1 + \lambda_1)} \\ &\times \left(\frac{(\theta_0 + \lambda_0)(\theta_1 + \lambda_1) e^{-\theta_2 t}}{(\theta_1 + \lambda_1 - \theta_0 - \lambda_0)(\theta_2 - \theta_1 - \lambda_1)\theta_2}, t > 0. \right. \\ &\left. - \frac{(\theta_0 + \lambda_0)}{(\theta_1 + \lambda_1 - \theta_0 - \lambda_0)} e^{-(\theta_1 + \lambda_1)t} \right) \\ q_{03}(t) &= 1 - q_{00}(t) - q_{01}(t) - q_{02}(t), t > 0, \\ q_{11}(t) &= e^{-(\theta_1 + \lambda_1)t}, t > 0, \\ q_{12}(t) &= \frac{\lambda_1}{\theta_1 + \lambda_1} \left(\frac{\theta_1 + \lambda_1}{\theta_2 - \theta_1 - \lambda_1} e^{-\theta_2 t} - e^{-(\theta_1 + \lambda_1)t} \right), \\ &t > 0, \\ q_{13}(t) &= 1 - q_{11}(t) - q_{12}(t), t > 0, \\ q_{22}(t) &= e^{-(\theta_2 + \lambda_2)t}, t > 0, \\ q_{23}(t) &= 1 - e^{-(\theta_2 + \lambda_2)t}, t > 0. \end{aligned}$$

Note, that in spite of the fact that the assumption (4) for exponential distribution of variables U_i and V_i , $i = \overline{0,2}$ presents clear form of formulas for calculation of transition probabilities and can be applied in a lot of cases, it doesn't correspond to tumor growth, which, as it was proved

experimentally, corresponds to Gompertzian dynamics. Survival of oncological patients and time of the staying at stage are due to the given distribution law. That's why it is necessary to consider the case if the variables $U_i, V_i, i = \overline{0,2}$ are due to Gompertzian distribution, that is $U_i \sim G(\mu_i, \eta_i), V_i \sim G(\alpha_i, \beta_i), i = \overline{0,2}$. There is used new definition of parameters of the Gompertzian distribution, which allows us to get

$$F_{U_i}(t) = 1 - \exp \left[-e^{\frac{t-\mu_i}{\eta_i}} \right],$$

$$F_{V_i}(t) = 1 - \exp \left[-e^{\frac{t-\alpha_i}{\beta_i}} \right], i = \overline{0,2}.$$

Theorem 3. Let $U \sim G(\mu, \eta)$ and $V \sim G(\alpha, \beta)$ are random variables which are distributed due to Gompertzian law and $\eta = \beta$. The the difference $W = U - V$ is distributed due to distribution law with the density

$$f_{U-V}(t) = \frac{\eta e^{-\frac{t+\mu+\alpha}{\eta}}}{(e^{-\frac{\mu}{\eta}} + e^{-\frac{t+\alpha}{\eta}})^2}. \quad (5)$$

At calculation of the total time of staying at all stages we used special functions.

4. Conclusions

There were developed and programmatically implemented the system of support of decision making for the basic problems of system medical researches taking into account etiology of disease and with support of medical insurance.

For the problems of diagnostics and prophylaxis were offered and implemented methods of induction of decision trees and construction of classification rules as computer technologies.

It was developed:

- mathematical models and methods of system research of processes of tumour growth on the basis of dynamics of Gompertz and Richard;

- methods of optimization for the mathematical models of chemio-, radio- and immunotherapies on the basis of dynamics of Gompertz and Richard at presence of bounds on a control and phase state together with software implementation;

- multivariant methods of qualitative analysis of the dynamic systems on the basis of functional-differential equations with the construction of structures of knowledge - decision trees and classification rules;

- PBPK-model of kinetics of drug, that is described by the system of nonlinear differential equations that include equation of Hill for description of metabolic processes on the basis of analysis of the generalized physiologically-based pharmacokinetic (PBPK) models;

- methods of design and analysis of medical insurance taking into account etiology - epidemiology or multistage diseases;

- the certificated software product will be developed for the object-oriented implementation of system medical researches with the use of methods of systems analysis and optimal decisions.

Quality of design of epidemiological processes was improved with the use of mathematical methods and software tools of analysis, prediction and control.

It will be developed:

- computer technologies of determination of optimal strategies of treatment on the basis of analysis of the decision curves, taking into account the values of the combined function of utility and also with application of regret theory;

- computer technologies of classification of forms of pathological processes as structures of knowledge - decision trees and classification rules.

The results of implementation of the methods mentioned above can present information support of innovative treatment methodologies with help of the simulation of disease under the action of innovative treatment methodologies, comparative analysis of efficiency of treatment methodologies and evidence of decision-making at the choice of tactics of treatment, including from the point of view of prediction of financial expenses.

Список використаних джерел

1. *Martsenyuk V.* On indirect method of exponential estimation for neural network model with discretely distributed delays/ V.Martsenyuk // *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* – 2017. – No. 23. – P. 1-16. DOI: 10.14232/ejqtde.2017.1.23
2. *Martsenyuk V. et al.* On multivariate method of qualitative analysis of Hodgkin-Huxley model with decision tree induction / Martsenyuk V. et al. // *In International Conference on Control, Automation and Systems.* – 2016. – DOI:10.1109/ICCAS.2016.7832365
3. *Martsenyuk V.P.* Qualitative Analysis of the Antineoplastic Immunity System on the Basis of a Decision Tree / V. P. Martsenyuk, I. Y. Andrushchak, and I. S. Gvozdetka // *Cybern. and Syst. Anal.* – 2015. – Vol. 51, no. 3. – P. 461–470. DOI: 10.1007/s10559-015-9737-6
4. *Lyapandra A. S.* Qualitative analysis of compartmental dynamic system using decision-tree induction/ A. S. Lyapandra, V.P.Martsenyuk, I.S.Gvozdetka, R.Szklarczyk, S.A. Rajba // *In Proceedings of the 2015 IEEE 8th International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications, IDAACS 2015*, 688–692 (Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2015). DOI: 10.1109/IDAACS.2015.7341391
5. *Martsenyuk V.P.* UML-modeling of Decision Support System for Medical Research / V.P. Martsenyuk, I.Y. Andrushchak, O.M. Kuchvara // *Med. Informatics Eng.* – 2015. – N 2. – P. 27–34. DOI: 10.11603/mie.1996-1960.2015.2.4907
6. *Laird A. K.* Dynamics of tumor growth/ A. K. Laird. // *Br J of Cancer.* – 1964. – Vol. 18. – P. 490–502.
7. *Марценюк В.П.* Построение оценок решений в модели противоопухолевого иммунитета с импульсными возмущениями / В.П. Марценюк, И.Е. Андрущак, И.С. Гвоздецкая // *Кибернетика и системный анализ.* – 2012. – Т. 48. – № 2. – С. 50-54.
8. *Марценюк В.П.* Модель багатостадійного захворювання для задач медичного страхування / В.П. Марценюк, Н.Я. Климук // *Штучний інтелект.* – 2012. – № 1. – С. 160-168.

References

1. MARTSENYUK, V. (2017) "On indirect method of exponential estimation for neural network model with discretely distributed delays", *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, No. 23, pp. 1-16. DOI: 10.14232/ejqtde.2017.1.23
2. MARTSENYUK, V. et al. (2016) On multivariate method of qualitative analysis of Hodgkin-Huxley model with decision tree induction, *In International Conference on Control, Automation and Systems*. DOI:10.1109/ICCAS.2016.7832365
3. MARTSENYUK, V.P., ANDRUSHCHAK, I.Y. and GVOZDETSKA, I.S. (2015) "Qualitative Analysis of the Antineoplastic Immunity System on the Basis of a Decision Tree", *Cybernetics and System Analysis*, vol. 51, no. 3, pp. 461–470. DOI: 10.1007/s10559-015-9737-6
4. LYAPANDRA, A. S., MARTSENYUK, V. P., GVOZDETSKA, I. S., SZKLARCZYK, R. and RAJBA, S. A. (2015) "Qualitative analysis of compartmental dynamic system using decision-tree induction", *In Proceedings of the 2015 IEEE 8th International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications, IDAACS 2015*, 688–692 (Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2015). DOI: 10.1109/IDAACS.2015.7341391
5. MARTSENYUK, V.P., ANDRUSHCHAK, I.Y. and KUCHVARA, O.M. (2015) "UML-modeling of Decision Support System for Medical Research", *Med. Informatics Eng.*, no. 2, pp. 27–34. DOI: 10.11603/mie.1996-1960.2015.2.4907
6. LAIRD, A. K. (1964) "Dynamics of tumor growth", *Br J of Cancer*, 18, pp. 490–502.
7. MARTSENYUK, V.P., ANDRUSHCHAK, I.Y. and GVOZDETSKA, I.S. (2012) On construction of estimates within the model of antitumor immunity with impulse disturbances, *Cybernetics and System Analysis*, vol. 48, no. 2, pp. 50-54.
8. MARTSENYUK, V.P. and KLYMUK, N.YA. (2012) "Model of multistage disease for problems of health insurance", *Artificial intelligence*, no. 1, pp. 160-168.

Надійшла до редколегії 19.08.2017

УДК УДК 517.9 : 519.87

Наконечний О.Г., д. ф.-м. н., професор
Зінько П.М., к. ф.-м. н., доцент
Шевчук Ю.М., аспірант

**Усереднені оптимальні прогнозні оцінки
в моделях поширення інформації при
невизначеностях**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка,
03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: a.nakonechniy@gmail.com
e-mail: petro.zinko@gmail.com

O.G. Nakonechniy, D.Sc., Prof.
P.M. Zinko, Ph.D., Assoc. Prof.
I.M. Shevchuk, Ph.D. student

**Averaged optimal predictive estimation of
mathematical models of information
spreading process under uncertainty**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova ave., 4d,
e-mail: a.nakonechniy@gmail.com
e-mail: petro.zinko@gmail.com

В роботі розглядається математична модель поширення одного виду інформації, що представлена у вигляді системи нелінійних диференціальних рівнянь із стаціонарними параметрами. Порівняно з базовою моделлю, яка включає в себе поширення інформації зовнішнім та внутрішнім каналами, пропонується модель і ще містить механізми, що впливають на процес розповсюдження інформації: забування, двокрокове охоплення інформацією та поділ соціуму на дві однорідні підгрупи. Наведено алгоритм отримання усередненої оптимальної середньоквадратичної прогнозної оцінки.

Ключові слова: математичні моделі поширення інформації, усереднені оптимальні прогнозні оцінки, середньоквадратична похибка, невизначеність.

We consider mathematical model of spreading one number of information type. Information is spread in the community along internal (interpersonal communication of the member of social community) and external threads (mass media). The mechanisms of forgetting, two-step spreading of information and differentiation of the social community into two homogeneous subgroups are included in the model. The model takes the form of system of four non-linear ordinary differential equations with stationary parameters. Conditions at which the estimation of the parameters of the model approaches to their optimal values are considered for general model. The algorithms of building averaged optimal root-mean-square predictive estimation and root-mean-square error are offered. Special cases of presenting measure on the parameter space of the model are considered. The offered model of information spreading process except theoretical interest has an important practical meaning.

Key words: mathematical models of information spreading process, averaged optimal predictive estimation, root-mean-square error, uncertainty.

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ

З розвитком суспільства і техніки все більшої ваги набуває інформація та можливості її впливу на членів соціальних спільнот.

Починаючи з кінця ХХ-го століття низка науковців з різних країн (США, Російська Федерація, Британія та інші) надають поширенню інформації одну з провідних ролей у внутрішніх та зовнішніх соціально-політичних процесах.

З цим можна пов'язати появу робіт, які висвітлюють процес розповсюдження інформації,

його особливості, можливості використання в власних інтересах (формування механізмів як для поширення «корисної» інформації, так і для протидії небажаним тенденціям в суспільстві).

Одним із ключових питань, що виникли для даної сфери, на рівні з концептуалізацією термінів та виокремлення предметної області, є побудова математичних моделей, які б адекватно описували цей процес. Одним із перспективних напрямків для даної проблематики є математичні моделі, представлені у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь.

Розглянемо узагальнену модель поширення довільної кількості типів інформації.

Нехай є деяка соціальна група чисельністю N , на яку провадиться інформаційна дія по n каналах, причому число суб'єктів, що сприйняли інформацію k -го типу ($k = \overline{1, n}$) залежить як від зовнішньої дії, так і від спілкування суб'єктів між собою. Позначимо через $x_k(t)$, $k = \overline{1, n}$ – число суб'єктів, що сприйняли інформацію k -го типу в момент часу t , через $\beta_k(t)$ – інтенсивність спілкування, $u_k(t)$ – зовнішні дії. Тоді зміну з часом величин $x_k(t)$, $k = \overline{1, n}$ можливо описати системою звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}\dot{x}_k(t) &= \beta_k(t)x_k(t)\left(N - \sum_{j=1}^n x_j(t)\right) + u_k(t), \\ x_k(0) &= N_{0k} \geq 0, k = \overline{1, n}.\end{aligned}\quad (1)$$

В роботах [1] – [5] проводився аналіз рівнянь (1) при постійних параметрах і спеціальному виборі функцій $u_k(t)$.

В роботі [1] показані можливості на базі моделі (1) вивчення характеру нарощування інформаційного впливу з часом в залежності від поведінкових характеристик об'єкту, побудови за допомогою методів оптимального керування найкращих в певному сенсі режимів цього впливу на соціальну групу. Показано, що в силу нелінійності процесу, він допускає неочевидні способи керування ресурсом. На прикладі одного інформаційного джерела формулюються основні припущення, на основі яких формулюється задача Коші, що описує процес поширення інформації. Для неї знайдено явний розв'язок та проведено аналіз характеру поведінки системи в залежності від співвідношень між параметрами й виділено три режими: інтенсивність зовнішньої дії перевершує інтенсивність міжособистісного спілкування, інтенсивність зовнішньої дії співставна з інтенсивністю міжособистісного спілкування, інтенсивність міжособистісного спілкування перевершує інтенсивність повідомлень у ЗМІ. Для моделі поширення інформації з двох інформаційних джерел наведені вичерпні умови, що накладаються на параметри моделі, які гарантують «перемогу» одного джерела над іншим.

В роботі [2] на основі базової моделі (1) запропонована модель, що враховує чотири механізми, які впливають на динаміку процесу: контингентність поведінки, неповне охоплення

груп засобами масової інформації, двокрокове засвоєння та забування інформації. Для побудованої моделі вивчалось питання про стійкість стаціонарного стану, що характеризується відсутністю адептів – індивідів, охоплених інформацією. Таким чином, отримані достатні умови того, що інформація розповсюдиться по групі так, що це приведе до ненульової кількості адептів.

Робота [3] присвячена аналізу моделі інформаційного протистояння в соціумі і у тому випадку, коли одна із сторін періодично дестабілізує систему за допомогою короткотривалого стрибкоподібного збільшення інтенсивності пропаганди через ЗМІ. Модель має вигляд двох звичайних диференціальних рівнянь з періодичною розривною правою частиною. Для випадку малої інтенсивності розповсюдження інформації шляхом міжособистісної комунікації побудована асимптотика періодичного розв'язку. Перехідний режим досліджено чисельно.

Дослідження задачі гарантованого керування динамікою систем в умовах конфлікту, що описуються диференціальними рівняннями Гомперца, проводилось в роботі [4]. Для спеціальних критеріїв якості доведені твердження про вигляд оптимальних керувань в класі програмних та позиційних стратегій.

Аналіз властивостей розв'язків системи (1) при спеціальному виборі $u_k(t)$ проводився в роботі [5]. Особливу увагу приділено пошуку умов існування додатних обмежених розв'язків системи (1) як для випадку нестационарних параметрів, так і стаціонарних параметрів та умов існування єдиних періодичних розв'язків для деяких окремих випадків базової моделі. Також для таких моделей за певних умов були знайдені розв'язки задачі Коші.

Постановки задач про гарантоване оцінювання параметрів за результатами спостережень та методи їх розв'язання пропонуються в [6], [7]. В роботі [6] наведено алгоритм отримання оптимальних усереднених оцінок для моделей інформаційного протистояння та вигляд похибок для них. Робота [7] присвячена оцінкам нестационарних параметрів моделі (1) при спеціальному виборі $u_k(t)$ та похибкам для них.

1. Опис математичної моделі

Нижче розглядається той випадок, коли соціум піддається впливу інформаційних повідомлень з одного джерела.

Вважатимемо, що спільнота складається з двох однорідних підгруп, чисельністю N_1 та N_2 , ($N = N_1 + N_2$): перша підгрупа може сприймати інформацію, що розповсюджується як через ЗМІ, так і через міжособистісне спілкування; друга підгрупа засвоює лише інформацію, що надходить в процесі міжособистісного спілкування. Переходи індивідів з однієї підгрупи в іншу відсутні.

Також припускається, що індивід, потрапивши вперше під вплив інформаційної дії, стає пасивним прихильником, потрапивши вдруге – активним прихильником, який поширює інформаційне повідомлення серед ще не охопленої частини соціуму.

Позначимо кількість активних та пасивних прихильників в момент часу t в першій підгрупі, відповідно, $x_1(t)$ та $x_3(t)$, в другій – $x_2(t)$ та $x_4(t)$.

Додамо припущення, що індивіди забувають трансльовану інформацію: активні прихильники забувають з інтенсивністю $\gamma > 0$ і стають пасивними прихильниками; пасивні прихильники забувають з інтенсивністю $\delta > 0$ й повертаються до неохоплених членів відповідних їм підгруп.

Нехай члени спільноти не можуть розпізнати, до якої підгрупи відноситься конкретний індивід. Тоді позначивши через α – інтенсивність повідомлень у ЗМІ, β – інтенсивність міжособистісного спілкування, отримаємо таку систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= (\alpha + \beta[x_1(t) + x_2(t)])x_3(t) - \gamma x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \beta[x_1(t) + x_2(t)]x_4(t) - \gamma x_2(t), \\ \dot{x}_3(t) &= (\alpha + \beta[x_1(t) + x_2(t)]) \times \\ &\times (N_1 - x_1(t) - x_3(t)) - \delta x_3(t) + \gamma x_1(t), \\ \dot{x}_4(t) &= \beta[x_1(t) + x_2(t)] \times \\ &\times (N_2 - x_2(t) - x_4(t)) - \delta x_4(t) + \gamma x_2(t),\end{aligned}\quad (2)$$

із початковими умовами:

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0. \quad (3)$$

Позначимо $\theta = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)^T$, $\theta \in \Theta \subseteq R^4$, де Θ – задана множина параметрів моделі (2). Тоді розв'язок задачі Коші (2), (3) залежить від значення параметру θ і позначається $x_k(t, \theta)$, $k = \overline{1, 4}$. Для спрощення (де це можливо і не

приводить до непорозуміння) будемо використовувати позначення $x_k(t)$, $k = \overline{1, 4}$.

2. Побудова прогностичних оцінок

Нехай в точках $t_1 < t_2 < \dots < t_m$, $t_i \in (0, T)$, $i = \overline{1, m}$ спостерігаються при невідомих параметрах $\theta_0 = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)^T$, $\theta_0 \in \Theta$ величини $x_k(t_j)$ та $y_{kj} = \dot{x}_k(t_j) + v_{kj}$, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, 4}$, де $x_k(t)$, $k = \overline{1, 4}$ – розв'язки задачі Коші (2), (3) (тут $v_j = (v_{1j}, \dots, v_{4j})^T$, $j = \overline{1, m}$ – вектори похибок спостережень).

Відомо також, що невідомі вектори похибок спостережень v_j , $j = \overline{1, m}$ задовольняють нерівність $\sum_{j=1}^m (Q_j v_j, v_j) \leq 1$, де Q_j , $j = \overline{1, m}$ – додатно визначені матриці.

Означення 1. Прогностичними оцінками величин $x_k(t_{m+1})$, $k = \overline{1, 4}$, де $t_{m+1} > t_m$, назовемо

$$\hat{x}_k(t_{m+1}) = g_k(\bar{y}, \bar{x}), k = \overline{1, 4} \quad (4)$$

(тут $\bar{y} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_4)$, $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_4)$, $\bar{y}_k = (y_{k1}, \dots, y_{km})$, $\bar{x}_k = (x_k(t_1), \dots, x_k(t_m))$, $k = \overline{1, 4}$, а g_k , $k = \overline{1, 4}$ – деякі функції векторних аргументів).

Проблема, яка досліджується в статті полягає в знаходженні оптимальних в деякому сенсі прогностичних оцінок (4).

Введемо векторну функцію $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))^T$ та матрицю $F(t, x(t))$ вигляду:

$$F(t, x(t)) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \psi_1(t) & -x_1(t) & 0 \\ 0 & \psi_2(t) & -x_2(t) & 0 \\ \varphi_3(t) & \psi_3(t) & x_1(t) & -x_3(t) \\ 0 & \psi_4(t) & x_2(t) & -x_4(t) \end{pmatrix},$$

$$\varphi_1(t) = x_3(t), \psi_1(t) = (x_1(t) + x_2(t))\varphi_1(t);$$

$$\psi_2(t) = (x_1(t) + x_2(t))x_4(t);$$

$$\varphi_3(t) = N_1 - x_1(t) - x_3(t),$$

$$\begin{aligned}\psi_3(t) &= (x_1(t) + x_2(t))\varphi_3(t); \\ \psi_4(t) &= (x_1(t) + x_2(t))(N_2 - x_2(t) - x_4(t)).\end{aligned}$$

Тоді систему рівнянь (2) можна представити у векторно-матричній формі:

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t))\theta.$$

Із нерівності

$$\sum_{j=1}^m (Q_j v_j, v_j) \leq 1$$

отримаємо:

$$\begin{aligned}\Phi(\theta) &\triangleq \\ &\triangleq \sum_{j=1}^m (Q_j (y(t_j) - F(t_j, x(t_j)))\theta, y(t_j) - F(t_j, x(t_j)))\theta \leq 1, \quad (5)\end{aligned}$$

де $y(t_j) = (y_{1j}, \dots, y_{4j})^T$.

Нехай $\hat{\theta}_m \in \underset{\theta \in \Theta}{\text{Arg min}} \Phi(\theta)$ – точка мінімуму функції $\Phi(\theta)$. Тоді з необхідних умов оптимальності маємо:

$$\Phi'(\hat{\theta}_m) = 0.$$

Розкладемо функцію $\Phi(\theta)$ в ряд Тейлора в околі точки $\hat{\theta}_m$:

$$\Phi(\theta) \cong \Phi(\hat{\theta}_m) + (H_m(\theta - \hat{\theta}_m), \theta - \hat{\theta}_m), \quad (6)$$

де

$$H_m = \sum_{j=1}^m F^T(t_j, x(t_j))Q_j F(t_j, x(t_j)).$$

Із формул (5), (6) випливає нерівність

$$(H_m(\theta - \hat{\theta}_m), \theta - \hat{\theta}_m) \leq 1 - \Phi(\hat{\theta}_m). \quad (7)$$

Твердження 1. Якщо $\lambda_{m,\min}$ є мінімальним власним числом матриці H_m та $\lambda_{m,\min} \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$, то $\hat{\theta}_m \rightarrow \theta_0$ при $m \rightarrow \infty$.

Доведення. Нерівність (7) має розв'язки, коли матриця H_m є додатно визначеною, тобто повинна виконуватись умова

$$H_m \geq \lambda_{m,\min} E,$$

де E – одинична матриця розмірності 4×4 .

Тоді з урахуванням нерівності (7) справджуються нерівності:

$$\begin{aligned}\lambda_{m,\min}(\theta - \hat{\theta}_m, \theta - \hat{\theta}_m) &\leq (H_m(\theta - \hat{\theta}_m), \theta - \hat{\theta}_m) \leq \\ &\leq 1 - \Phi(\hat{\theta}_m),\end{aligned}$$

і звідси отримуємо:

$$(\theta - \hat{\theta}_m, \theta - \hat{\theta}_m) \leq \frac{1 - \Phi(\hat{\theta}_m)}{\lambda_{m,\min}} \leq \frac{1}{\lambda_{m,\min}}. \quad (8)$$

Із (8) випливає $(\theta - \hat{\theta}_m, \theta - \hat{\theta}_m) \rightarrow 0$ при $\lambda_{m,\min} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty$, тобто $\hat{\theta}_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \theta_0$, що і потрібно було довести.

Позначимо через $G(\bar{x}, \bar{y})$ множину:

$$\begin{aligned}G(\bar{x}, \bar{y}) &\triangleq \left\{ \theta : \sum_{j=1}^m (Q_j (y(t_j) - F(t_j, x(t_j)))\theta, \right. \\ &\quad \left. y(t_j) - F(t_j, x(t_j)))\theta \leq 1 \right\} \cap \Theta.\end{aligned}$$

Уведемо далі множину X прогнозних оцінок вектора

$$x(t_{m+1}, \theta) = (x_1(t_{m+1}, \theta), \dots, x_4(t_{m+1}, \theta))^T,$$

яку визначимо наступним чином

$$X \triangleq \{x(t_{m+1}, \theta)\}.$$

Уведемо також на вимірних підмножинах множини $G(\bar{x}, \bar{y})$ ймовірнісну міру $\mu(\cdot)$ таку, що $\mu(G(\bar{x}, \bar{y})) = 1$.

Якщо $\hat{x}(\theta) = \hat{x}(t_{m+1}, \theta)$ – деяка прогнозна оцінка, то визначимо середньоквадратичну похибку такої оцінки у вигляді:

$$\sigma(\hat{x}) = \left(\int_{G(\bar{x}, \bar{y})} \|\hat{x}(\theta) - x(\theta)\|^2 \mu(d\theta) \right)^{1/2}.$$

Означення 2. Вектор $\tilde{x}$, що визначається з умови

$$\tilde{x} \in \underset{\hat{x} \in X}{\text{Arg min}} \sigma(\hat{x}),$$

назвемо *усередненою оптимальною середньоквадратичною прогножною оцінкою* вектора $x(t_{m+1}, \theta)$ (далі УОСКП-оцінка), а величину $\sigma(\tilde{x})$ – *середньоквадратичною похибкою такої оцінки*.

Твердження 2. УОСКП-оцінка має вигляд

$$\tilde{x} = \int_{G(\bar{x}, \bar{y})} x(t_{m+1}, \theta) \mu(d\theta), \quad (9)$$

де рівність виконується майже скрізь по мірі $\mu(\cdot)$. При цьому виконується рівність

$$\sigma(\tilde{x}) = \left(\int_{G(\bar{x}, \bar{y})} \|x(t_{m+1}, \theta)\|^2 \mu(d\theta) - \|\tilde{x}\|^2 \right)^{1/2}.$$

Доведення. Оскільки має місце нерівність

$$\sigma(\hat{x}) = \left(\int_{G(\bar{x}, \bar{y})} \|\hat{x}(\theta) - \tilde{x}\|^2 \mu(d\theta) + \right.$$

$$+ \int_{G(\bar{x}, \bar{y})} \|\tilde{x} - x(t_{m+1}, \theta)\|^2 \mu(d\theta) \geq \\ \geq \int_{G(\bar{x}, \bar{y})} \|\hat{x}(\theta) - \tilde{x}\|^2 \mu(d\theta),$$

то виконуються умови

$$\min_{\hat{x} \in X} \sigma^2(\hat{x}) = \int_{G(\bar{x}, \bar{y})} \|\tilde{x} - x(t_{m+1}, \theta)\|^2 \mu(d\theta) = \\ = \int_{G(\bar{x}, \bar{y})} \|x(t_{m+1}, \theta)\|^2 \mu(d\theta) - \|\tilde{x}\|^2$$

і мінімум досягається на такому векторі $x(\hat{\theta})$, для якого справджується рівність

$$\int_{G(\bar{x}, \bar{y})} \|\hat{x}(\theta) - \tilde{x}\|^2 \mu(d\theta) = 0.$$

Отже майже скрізь по мірі μ виконується рівність

$$\tilde{x} = \int_{G(\bar{x}, \bar{y})} x(t_{m+1}, \theta) \mu(d\theta),$$

що і потрібно було довести.

Наслідок. Візьмемо міру $\mu(\cdot)$ у вигляді

$$\mu(d\theta) = d\theta / V(G(\bar{x}, \bar{y})),$$

де

$$V(G(\bar{x}, \bar{y})) = \int_{G(\bar{x}, \bar{y})} d\theta, \\ \tilde{G}(\bar{x}, \bar{y}) = \{\theta : (H_m \theta, \theta) \leq 1 - \Phi(\hat{\theta}_m)\} \cap \Theta, \\ \Theta = R^4.$$

Тоді

$$\tilde{x} = 2\pi^{-2} \prod_{k=1}^4 \left(\frac{\lambda_k}{1 - \Phi(\hat{\theta}_m)} \right)^{1/2} \times \\ \times \int_{\tilde{G}(\bar{x}, \bar{y})} x(t_{m+1}, \theta + \hat{\theta}_m) d\theta. \quad (10)$$

Доведення. Покладемо $\bar{\theta} = \theta - \hat{\theta}_m$, $d\bar{\theta} = d(\theta - \hat{\theta}_m) = d\theta$. Оскільки $\tilde{G}(\bar{x}, \bar{y})$ – 4-х вимірний еліпсоїд, то [8]

$$\int_{\tilde{G}(\bar{x}, \bar{y})} d\theta = \frac{1}{2} \pi^2 \prod_{k=1}^4 \left(\frac{\lambda_k}{1 - \Phi(\hat{\theta}_m)} \right)^{-1/2}. \quad (11)$$

Із оцінки (9) отримаємо:

$$\tilde{x} = \int_{G(\bar{x}, \bar{y})} x(t_{m+1}, \theta) \mu(d\theta) = \left(\int_{G(\bar{x}, \bar{y})} ds \right)^{-1} \times \\ \times \int_{\tilde{G}(\bar{x}, \bar{y})} x(t_{m+1}, \theta + \hat{\theta}_m) d\theta. \quad (12)$$

Підставивши (11) в (12), одержимо (10), що і потрібно було довести.

Висновки

Запропоновано математичну модель поширення інформації із спеціальним виглядом функції зовнішньої дії та стаціонарними параметрами, яка включає в себе такі механізми, що впливають на процес розповсюдження інформації: поширення інформаційного повідомлення через внутрішній та зовнішній канали, двокрокове охоплення інформацією, поділ соціуму на дві однорідні підгрупи та забування. Для даної моделі наведено алгоритм знаходження усередненої оптимальної середньоквадратичної прогновної оцінки та середньоквадратичної похибки такої оцінки. Також сформульовані умови при яких оцінки параметрів моделі прямують до своїх оптимальних значень. Наведено приклад знаходження усередненої оптимальної середньоквадратичної прогновної оцінки в явному вигляді при спеціальному вигляді міри у просторі параметрів моделі. На основі цього можна стверджувати про необхідність використання даного підходу до окремих випадків загальної моделі інформаційного протистояння, а також про необхідність розробки алгоритмів знаходження гарантованих прогнозних оцінок для даної моделі при неповних спостереженнях.

Список використаних джерел

1. Михайлов А. П. Модели информационной борьбы / Михайлов А.П., Маревцева Н.А. // Математическое моделирование. – 2011. – №10. – С. 19–32.

References

1. MIKHAILOV, A.P. and MAREVTSEVA, N.A. (2011) "Models of information confrontation", *Mat. Model.*, vol. 10, pp.19–32.

2. Михайлов А. П. Развитие модели распространения информации в социуме/ Михайлов А.П., Петров А.П., Маревцева Н.А., Третьякова И.В.// Математическое моделирование. – 2014. – №3 (26). – С. 65–74.
3. Михайлов А.П. Моделирование периодических дестабилизирующих воздействий при информационном противоборстве в социуме/ Михайлов А.П., Петров А.П., Прончева О.Г., Прончев Г.Б., Маревцева Н.А.// Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. – 2016. – №16. – 13 с. – Режим доступа: <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-16>.
4. Наконечний О.Г. Задачі протидієвства в системах з динамікою Гомперца / Наконечний О. Г., Зінко П. М.// Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2015. – №3 (120). – С.50–60.
5. Наконечний О.Г. Математична модель розповсюдження інформації з нестационарними параметрами / Наконечний О. Г., Шевчук Ю.М.//Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки. – 2016. – №3. – С.98–105.
6. Nakonechnyi O.G. Best-mean estimates in models of information confrontation / O.G. Nakonechnyi // Abstracts XXIV International Conference “Problem of decision making under uncertainties”. – Cesky Rudolec, Czech Republic. September 1–5, 2014. – pp.114–115.
7. Nakonechnyi O.G. Estimates of unsteady parameters in model of information confrontation / O.G. Nakonechnyi, P.M. Zinko // Abstracts XXVIII International Conference “Problem of decision making under uncertainties”. – Brno, Czech Republic. August 25–30, 2016. – pp.82–83.
8. Wilson A.J. Volume of n-dimensional ellipsoid / A.J. Wilson // Scientia Acta Xaveriana. – 2014. – Vol. 1, №1. – pp.101–106.
2. MIKHAILOV, A.P., PETROV, A.P., MAREVTSEVA, N.A. and TRETIKOVA, I.V. (2014) “Development of a model of information dissemination in society”, *Mat. Model.*, 26(3), pp. 65–74.
3. MIKHAILOV, A.P., PETROV, A.P., PRONCHEVA, A.P., PRONCHEV, G.B. and MAREVTSEVA, N.A. (2016) “Modeling of periodic destabilizing effect on information warfare in a society”, *Preprint Keldysh Institute of Applied Mathematics*, (16), Available at: <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-16>.
4. NAKONECHNY, O.G. and ZINKO, P.M. (2015) “Confrontation problems with the dynamics Gompertzian systems”, *Journal of Computational&Applied Mathematics*, 120 (3), pp. 50–60.
5. NAKONECHNY, O.G. and SHEVCHUK, I.M. (2016) “Mathematical model of information spreading process with non-stationary parameters”, *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kiev Series Physics&Mathematics*, vol. 3, pp. 98–105.
6. NAKONECHNY, O.G. (2014) “Best-mean estimates in models of information confrontation”, *Abstracts XXIV International Conference “Problem of decision making under uncertainties”*, September 1–5, 2014, Cesky Rudolec, Czech Republic, pp. 114–115.
7. NAKONECHNY, O.G. and ZINKO, P.M. (2016) “Estimates of unsteady parameters in model of information confrontation”, *Abstracts XXVIII International Conference “Problem of decision making under uncertainties”*, August 25–30, 2016, Brno, Czech Republic, pp. 82–83.
8. WILSON, A.J. (2014) “Volume of n-dimensional ellipsoid”, *Scientia Acta Xaveriana*, vol. 1 (1), pp. 101–106.

Надійшла до редколегії 19.08.2017

УДК 519.21:519.6

Пашко А.О., д.ф.-м.н., доц.

Аналіз точності моделювання дробового броунівського руху

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка,
03680, м. Київ, пр-т. Академіка Глушкова, 4д
e-mail: aap2011@ukr.net

Pashko A.O., D.Sc. (Phys.-Math.), assoc. prof.

Analysis of accuracy of simulation of the fractional Brownian motion

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d
e-mail: aap2011@ukr.net

В роботі досліджуються оцінки точності моделювання дробового броунівського руху в нормі простору $L_2(T)$. В якості моделі розглядаються різні спектральні представлення дробового броунівського руху, а саме, у вигляді випадкових рядів та стохастичних інтегралів. Отримані оцінки дозволяють будувати моделі із заданими точністю і надійністю. Проведено оцінку основних параметрів моделі та наведено результати моделювання.

Ключові слова: Гауссовий випадковий процес, моделювання, точність моделі, надійність моделі, дробовий броунівський рух.

This paper analyzes estimation of the accuracy of simulation of fractional Brownian motion in the norm of space $L_2(T)$. To build statistical models we use various spectral representations of random processes, namely, in the form of random series and stochastic integrals. The obtained estimations allow us to construct models with given accuracy and reliability. We done the estimation of the main model parameters and gave simulation results.

Key Words: Gaussian random processes, simulation, model accuracy, reliability models, fractional Brownian motion.

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

I. INTRODUCTION

Methods of statistical simulation are widely used in many branches of natural and social sciences.

Recent studies show that many tasks in financial mathematics [1], in computational mathematics [2-4], in the theory of computer networks [5-6], in the theory of mass service [4,7], can be effectively described by fractional Brownian motion. Using fractional Brownian motion, we can investigate the self-similarity of processes in applied tasks. Therefore, organization of computational experiment that involves the construction of implementations of fractional Brownian motion is an actual task.

Methods of statistical simulation of random processes and fields with given accuracy and reliability in different functional spaces have a great application value.

In [8-9] we investigate statistical simulation methods of fractional Brownian motion (or

generalized Wiener process) with specified precision and reliability in different functional spaces, namely, $L_p(T)$, Orlich spaces, space of continuous functions.

Hurst index characterizes the self-similarity of random process realization.

Let $(T, \mathcal{B}, \mu)$ - be some measurable space and $\mu(T) = 1$.

Definition 1. Fractional Brownian motion (Generalized Wiener process) with Hurst index $\alpha \in (0, 1)$ is the Gaussian random process $W_\alpha(t), t \in [0, T]$ with correlation function

$$R_\alpha(t, s) = \frac{1}{2} \left(|t|^{2\alpha} + |s|^{2\alpha} - |t-s|^{2\alpha} \right), \text{ and } W_\alpha(0) = 0, \\ EW_\alpha(t) = 0.$$

If $\alpha = \frac{1}{2}$ have a standard Wiener process.

II. REPRESENTATION OF THE FRACTIONAL BROWNIAN MOTION

Random Series. Generalized Wiener process can be represented as a series [10]

$$W_\alpha(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin(x_k t) X_k + b_k (1 - \cos(y_k t)) Y_k), \quad (1)$$

where $\{X_k, Y_k\}$ - independent standard Gaussian random variables,

$\{x_k\}$ - real zeros Bessel functions $J_{-\alpha}(x)$,

$\{y_k\}$ - real zeros Bessel functions $J_{1-\alpha}(x)$,

$$a_k = \frac{\pi^\alpha \sqrt{2C}}{x_k^{\alpha+1} J_{1-\alpha}(x_k)}, \quad b_k = \frac{\pi^\alpha \sqrt{2C}}{y_k^{\alpha+1} J_{-\alpha}(y_k)},$$

$$C = \frac{\Gamma(2\alpha+1) \sin(\pi\alpha)}{\pi^{2\alpha+1}}.$$

Zeros of Bessel functions can be calculated with the required accuracy

$$x_n = \left(n + \frac{3}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\pi - \frac{4\alpha^2 - 1}{2\pi(4n + 3 - 2\alpha)} + \dots$$

$$y_n = \left(n + \frac{5}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\pi - \frac{4(1-\alpha)^2 - 1}{2\pi(4n + 1 + 2\alpha)} + \dots$$

For Bessel functions will use their presentation

$$J_{1-\alpha}^2(x_n) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x_n}} \left(\cos\left(x_n + \frac{2\alpha\pi - \pi}{4}\right) - \frac{4\alpha^2 - 1}{8x_n} \sin\left(x_n + \frac{2\alpha\pi - \pi}{4}\right) \right),$$

$$J_{-\alpha}^2(y_n) = \sqrt{\frac{2}{\pi y_n}} \left(\cos\left(y_n + \frac{2(1-\alpha)\pi - \pi}{4}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{4(1-\alpha)^2 - 1}{8y_n} \sin\left(y_n + \frac{2(1-\alpha)\pi - \pi}{4}\right) \right).$$

The model of random process can be obtained as

$$S_\alpha(t, M) = \sum_{k=1}^M (a_k \sin(x_k t) X_k + b_k (1 - \cos(y_k t)) Y_k),$$

where $\{X_k, Y_k\}$ - independent standard Gaussian random variables.

In real simulation of the independent standard Gaussian random variables, we get, as a rule, uncorrelated strictly sub-Gaussian random variables.

Zeros of Bessel function can be calculated with the required accuracy. For a_k, b_k, x_k, y_k let approximate values $\tilde{a}_k, \tilde{b}_k, \tilde{x}_k, \tilde{y}_k$.

$$\text{Let } |a_k - \tilde{a}_k| \leq h_k^a, \quad |b_k - \tilde{b}_k| \leq h_k^b,$$

$$|x_k - \tilde{x}_k| \leq h_k^x, \quad |y_k - \tilde{y}_k| \leq h_k^y,$$

where $h_k^a, h_k^b, h_k^x, h_k^y$ - precision computation.

The model of random process can be obtained as

$$\tilde{S}_\alpha(t, M) = \sum_{k=1}^M (\tilde{a}_k \sin(\tilde{x}_k t) X_k + \tilde{b}_k (1 - \cos(\tilde{y}_k t)) Y_k) \quad (2)$$

Accuracy of simulation $\Delta(t)$ is $\Delta(t) = W_\alpha(t) - \tilde{S}_\alpha(t, M)$.

In [8,9] studied estimations of accuracy and reliability of models of generalized Wiener process in different functional spaces, namely, space $L_2(T)$, in Orlicz spaces, in spaces of continuous functions.

Process with stationary increments. Standard Wiener process $W(t)$ is the process with independent increments. Generalized Wiener process $W_\alpha(t)$ it's the process with stationary increments. Therefore, random process $w(t) = W_\alpha(t + \Delta) - W_\alpha(t)$ is stationary Gaussian random process with correlation function [2]

$$E w(t + \tau) w(t) = \frac{1}{2} (|\tau + \Delta|^{2\alpha} + |\tau - \Delta|^{2\alpha} - 2|\tau|^{2\alpha})$$

and spectral density $g(\lambda) = \frac{A^2}{\pi} \left(\frac{1 - \cos(\lambda\Delta)}{|\lambda|^{2\alpha+1}} \right)$,

$\lambda \in (-\infty, +\infty)$, where

$$A^2 = \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos(\lambda)}{\lambda^{2\alpha+1}} d\lambda \right)^{-1} = \left(-\frac{2}{\pi} \Gamma(-2\alpha) \cos(\alpha\pi) \right)^{-1}.$$

Let $\xi(t)$ - be a real Gaussian stationary random process with $E\xi(t) = 0$, $R(\tau)$ - correlation function $\xi(t)$, $F(\lambda)$ - spectral function $\xi(t)$, $R(\tau) = \int_0^\infty \cos(\lambda\tau) dF(\lambda)$. Gaussian stationary random process can be represented as

$$\xi(t) = \int_0^\infty \cos(\lambda t) d\xi_1(\lambda) + \int_0^\infty \sin(\lambda t) d\xi_2(\lambda),$$

where $\xi_1(t)$ and $\xi_2(t)$ - the centered and uncorrelated random processes with uncorrelated increments such as $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2$ and

$$E(\xi_1(\lambda_2) - \xi_1(\lambda_1))^2 = F(\lambda_2) - F(\lambda_1),$$

$$E(\xi_2(\lambda_2) - \xi_2(\lambda_1))^2 = F(\lambda_2) - F(\lambda_1).$$

Let D_Λ - be some partition of the interval $[0, \Lambda]$, $D_\Lambda : 0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n = \Lambda$. The model of random process $\xi(t)$ can be obtained as $S_n(t, \Lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} [\cos(\lambda_i t) \eta_{1i} + \sin(\lambda_i t) \eta_{2i}]$, where $\{\eta_{1i}, \eta_{2i}\}$ - centered uncorrelated strictly sub-Gaussian random variables with $E(\eta_{1i})^2 = E(\eta_{2i})^2 = F(\lambda_{i+1}) - F(\lambda_i)$.

Therefore, random process $w(t)$ can be represented as

$$w(t) = \int_0^\infty \cos(\lambda t) d\xi_1(\lambda) + \int_0^\infty \sin(\lambda t) d\xi_2(\lambda). \quad (3)$$

And for partition $D_\Lambda: 0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n = \Lambda$, the model of random process $w(t)$ can be obtained as

$$w_n(t, \Lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} (\sin(\lambda_k t) X_k + \cos(\lambda_k t) Y_k), \quad (4)$$

where $\{X_k, Y_k\}$ - uncorrelated strictly sub-Gaussian random variables with $EX_k = EY_k = 0$ and

$$E(X_k)^2 = E(Y_k)^2 = \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} g(\lambda) d\lambda.$$

We study simulation of generalized Wiener process with representation (1), simulation of increments of generalized Wiener process with representation (3).

III. THE ACCURACY AND RELIABILITY OF MODEL IN $L_2(T)$

Let random process $X(t)$ and all $X_n(t, \Lambda)$ belongs to certain functional Banach space $A(T)$ with norm of $\|\cdot\|$. Let the two numbers be as follow $\delta > 0$ and $0 < \varepsilon < 1$.

Definition 2. Model $X_n(t, \Lambda)$ approximates process $X(t)$ with reliability $1 - \varepsilon$ and accuracy δ in the norm of space $A(T)$, if the following inequality holds $P\{\|X(t) - X_n(t, \Lambda)\| > \delta\} \leq \varepsilon$.

Whereas, $W_\alpha(0) = 0$, then for all Λ the model of generalized Wiener process we constructed as

$$W_\alpha(t + \Delta) = W_\alpha(t) + w(t). \quad (5)$$

Simulation of fractional Brownian motion is reduced to simulation of stationary Gaussian random process. Methods simulation of stationary Gaussian processes studied in [11-13].

There are theorems.

Theorem 1. Model $\tilde{S}_\alpha(t, M)$ approximates process $W_\alpha(t)$ with accuracy $\delta > 0$ and reliability $1 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$ in the norm of space $L_2([0, T])$, if inequalities hold

$$\delta^2 > B1_M, \quad \text{and} \quad \exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \frac{\delta}{\sqrt{B1_M}} \exp\left\{-\frac{\delta^2}{2B1_M}\right\} \leq \varepsilon,$$

where $B1_M = T \sum_{k=M+1}^{\infty} (a_k^2 + 4b_k^2) +$

$$+ T \sum_{k=1}^M \left((Ta_k h_k^x + h_k^a)^2 + (Tb_k h_k^y + 2h_k^b)^2 \right).$$

Theorem 2. Model $S_n(t, \Lambda)$ approximates process $\xi(t)$ with reliability $1 - \varepsilon$ and accuracy δ in the norm of space $L_2(T)$, if for numbers Λ and n inequalities hold $B2_{n, \Lambda} < \delta^2$ and

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \frac{\delta}{\sqrt{B2_{n, \Lambda}}} \exp\left\{-\frac{\delta^2}{2B2_{n, \Lambda}}\right\} \leq \varepsilon,$$

where $B2_{n, \Lambda} = \int_T E(\xi(t) - S_n(t, \Lambda))^2 d\mu(t)$.

Theorem 3. Model $w_n(t, \Lambda)$ approximates process $w(t)$ with reliability $1 - \varepsilon$ and accuracy δ in the norm of space $L_2(T)$, if for numbers Λ and n inequalities hold

$$B3_{n, \Lambda} < \delta^2 \quad \text{and}$$

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \frac{\delta}{\sqrt{B3_{n, \Lambda}}} \exp\left\{-\frac{\delta^2}{2B3_{n, \Lambda}}\right\} \leq \varepsilon,$$

where

$$B3_{n, \Lambda} = 2T \sum_{i=0}^n \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(1 - \frac{\sin(T(\lambda - \lambda_i))}{T(\lambda - \lambda_i)} \right) g(\lambda) d\lambda + T \left(\int_{\Lambda}^{\infty} g(\lambda) d\lambda \right).$$

Let for D_Λ implemented $T(\lambda_{i+1} - \lambda_i) \leq 1$, then there is the corollary.

Corollary 1. Model $w_n(t, \Lambda)$ approximates process $w(t)$ with reliability $1 - \varepsilon$ and accuracy δ in the norm of space $L_2(T)$, if for numbers Λ and n inequalities hold

$$G1_{n, \Lambda} < \delta^2 \quad \text{and}$$

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \frac{\delta}{\sqrt{G1_{n, \Lambda}}} \exp\left\{-\frac{\delta^2}{2G1_{n, \Lambda}}\right\} \leq \varepsilon,$$

where $G1_{n, \Lambda} = \frac{T}{3} \sum_{i=0}^n \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} (\lambda - \lambda_i)^2 g(\lambda) d\lambda +$

$$+ T \left(\int_{\Lambda}^{\infty} g(\lambda) d\lambda \right).$$

Let for D_Λ implemented $\lambda_{i+1} - \lambda_i = \frac{\Lambda}{n}$ and

$$\frac{T\Lambda}{n} \leq 1, \quad \text{then there is the corollary.}$$

Corollary 2. Model $w_n(t, \Lambda)$ approximates process $w(t)$ with reliability $1 - \varepsilon$ and accuracy δ

in the norm of space $L_2(T)$, if for numbers Λ and n inequalities hold

$$G2_{n,\Lambda} < \delta^2 \quad \text{and}$$

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \frac{\delta}{\sqrt{G2_{n,\Lambda}}} \exp\left\{-\frac{\delta^2}{2G2_{n,\Lambda}}\right\} \leq \varepsilon,$$

$$\text{where } G2_{n,\Lambda} = \frac{T^3 \Lambda^2}{3n^2} \int_0^\Lambda g(\lambda) d\lambda + T \left(\int_\Lambda^\infty g(\lambda) d\lambda \right).$$

For numbers Λ and n we put

$$\Lambda = \left(\frac{3n^2}{T^3} \right)^{\frac{1}{2\alpha+2}}, \text{ then}$$

$$G2_n = T^{\frac{3\alpha}{\alpha+1}} \left(1 + \frac{T}{\alpha} \right) \left[(3n^2)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right]^{-1}.$$

Corollary 3. Model $w_n(t, \Lambda)$ approximates process $w(t)$ with reliability $1-\varepsilon$ and accuracy δ in the norm of space $L_2(T)$, if for number n inequalities hold

$$n > \frac{1}{\sqrt{3}} \left[T^{\frac{3\alpha}{2\alpha+1}} \left(1 + \frac{T}{\alpha} \right) \delta^{-2} \right]^{\frac{\alpha+1}{2\alpha}} \quad \text{and}$$

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \frac{\delta}{\sqrt{G2_n}} \exp\left\{-\frac{\delta^2}{2G2_n}\right\} \leq \varepsilon.$$

IV. SIMULATION

We represent realization of the fractional Brownian motion obtained by the formula (2) (fig. 1-3), for $\delta=0.1$ and $\varepsilon=0.05$.

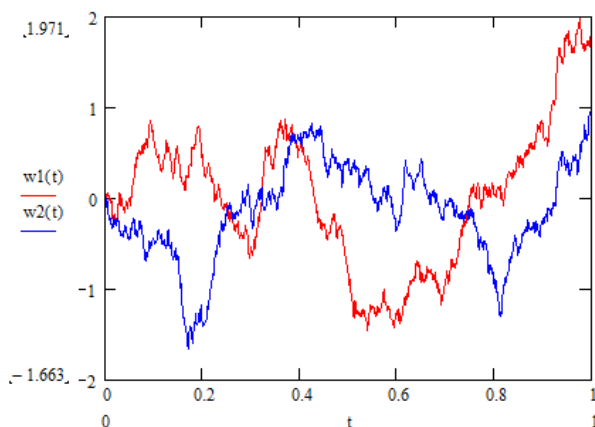


Fig.1 Realization of generalized Wiener process with $\alpha = 0.3$.

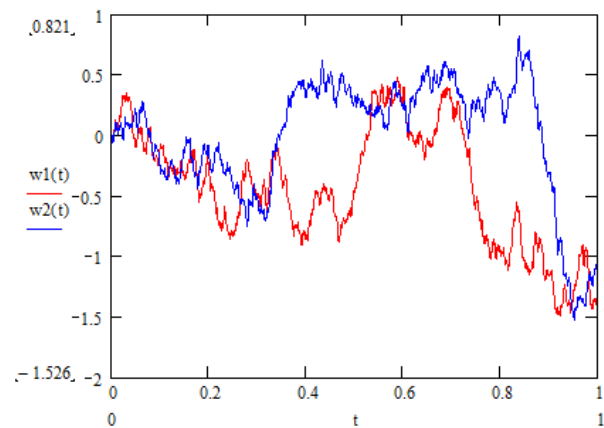


Fig.2 Realization of generalized Wiener process with $\alpha = 0.4$.

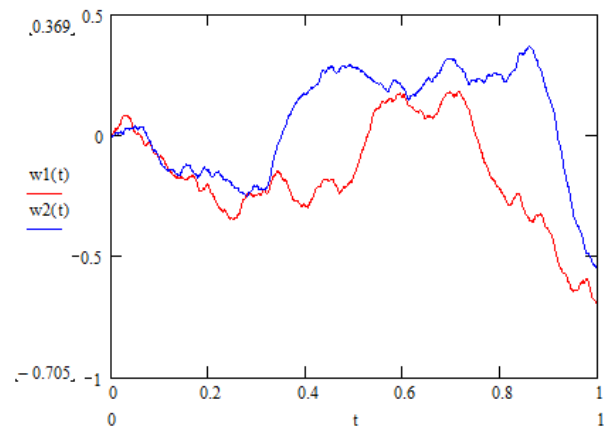


Fig.3 Realization of generalized Wiener process with $\alpha = 0.8$.

We represent realization of the fractional Brownian motion obtained by the formula (5) (fig. 5,7,9) and realization of increments by the formula (4) (fig. 4,6,8), for $\delta=0.1$ and $\varepsilon=0.05$.

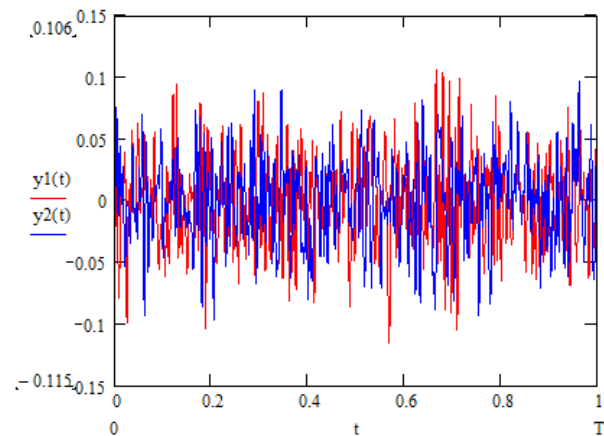


Fig.4 Realization of increments for $\alpha = 0.3$.

Table 1 shows the parameters of the model of stationary process for different values of Hurst index, accuracy of simulation in space $L_2(T)$, for reliability $\varepsilon=0.05$.

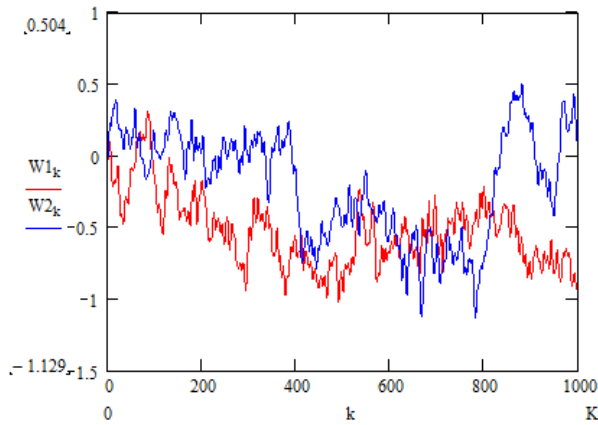


Fig.5 Realization of generalized Wiener process with $\alpha = 0.3$.

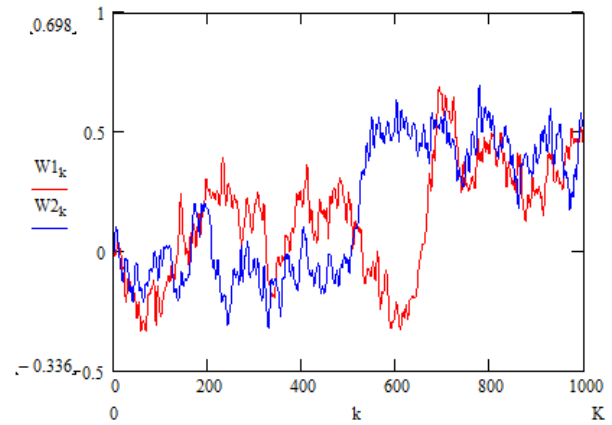


Fig.7 Realization of generalized Wiener process with $\alpha = 0.4$.

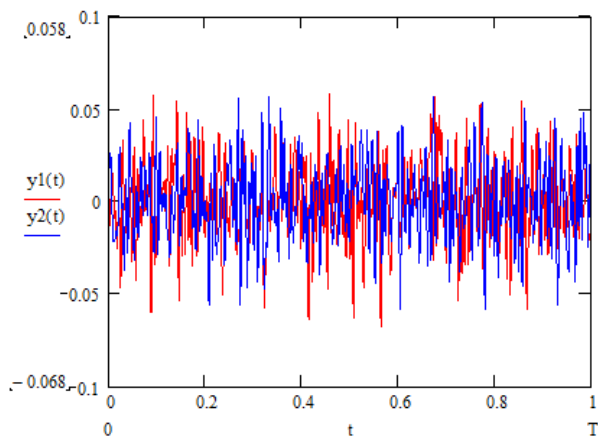


Fig.6 Realization of increments for $\alpha = 0.4$.

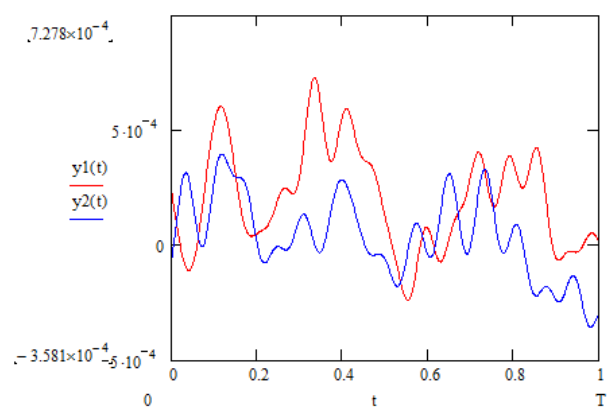


Fig.8 Realization of increments for 0.9.

Table 1

PARAMETERS OF MODEL			
δ	n	Λ	α
0.1	$3.7 \cdot 10^7$	$1.012 \cdot 10^6$	0.3
0.05	$7.4 \cdot 10^8$	$1.014 \cdot 10^7$	
0.1	$8 \cdot 10^5$	$2.44 \cdot 10^4$	0.4
0.05	$9 \cdot 10^6$	$1.37 \cdot 10^5$	
0.1	$8.4 \cdot 10^4$	2766	0.5
0.05	$6.7 \cdot 10^5$	$1.1 \cdot 10^4$	
0.1	$1.91 \cdot 10^4$	668	0.6
0.05	$1.25 \cdot 10^5$	2162	
0.1	$6.73 \cdot 10^3$	248	0.7
0.05	$3.6 \cdot 10^4$	662	
0.1	$3.1 \cdot 10^3$	118	0.8
0.05	$1.5 \cdot 10^4$	284	
0.1	$1.71 \cdot 10^3$	68	0.9
0.05	$7.5 \cdot 10^3$	147	
0.1	$1.11 \cdot 10^3$	45	0.99
0.05	$4.5 \cdot 10^3$	90	

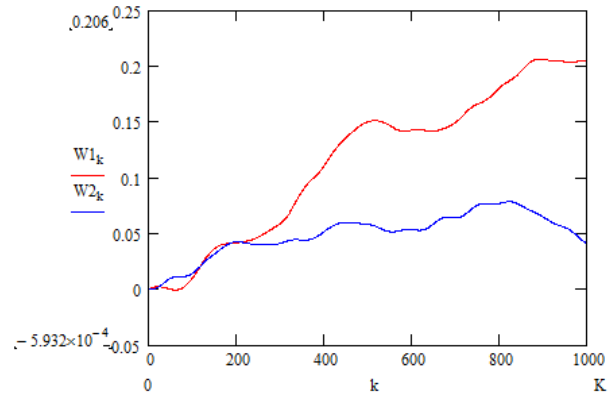


Fig.9 Realization of generalized Wiener process with 0.9.

CONCLUSIONS

The level of accuracy calculation by the first method consists of complexity of calculating zeros of Bessel functions and the functions itself.

The second our model from this point of view is simpler for implementation.

To validate the quality of the simulation it is possible to use the estimation of the stationary random process of correlation function.

Список використаних джерел

1. Mishura Yu. Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes / Yu. Mishura. - Berlin: Springer, 2008.
2. Prigarin S. Comparative analysis of two numerical methods to measure Hausdorff dimension of the fractional Brownian motion / S. Prigarin, K. Hahn, G. Winkler // Siberian J. Num. Math. - 2008. - 11, no.2. - P. 201-218.
3. Sabelfeld K. Monte Carlo Methods in Boundary Problems / K. Sabelfeld. - Novosibirsk: Nauka, 1989.
4. Yermakov S. Statistical simulation / S. Yermakov, G. Mikhailov. - Moscow: "Nauka", 1982.
5. Sheluhin O. Similar processes in telecommunication. / O.I. Sheluhin, S.M. Smolskiy and A.V. Osin. - John Wiley&Sons Ltd, England, 2007.
6. Veitch D. Multifractality in TCP/IP traffic: the case against / D. Veitch, N. Hohn and P. Abry // Computer Networks. - 2002. - №48(3). - P. 293-313.
7. Kozachenko Yu. ϕ -sub-Gaussian random process / Yu. Kozachenko, R. Yamnenko, O. Vasylyk. - Kyiv: Vydavnycho-Poligrafichnyi Tsentr "Kyivskyi Universytet", 2008.
8. Pashko A. Statistical Simulation of a generalized Wiener process / A. Pashko // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics. - 2014. - 2. - P.180-183.
9. Pashko A. Estimation of Accuracy of Simulation of a Generalized Wiener Process / A. Pashko // Bulletin of Uzhgorod University. Series: Mathematics and Informatics. - 2014. - 25 (1). - P. 109-116.
10. Dzhaparidze K. A series expansion of fractional Brownian motion. / K.O. Dzhaparidze, J.H. van Zanten // CWI. Probability, Networks and Algorithms[PNA] - 2002. - R0216.
11. Kozachenko Yu. On the simulation of random fields. I. / Yu. Kozachenko, A. Pashko // Theory Probab. Math. Stat. - 2000. - 61. - P. 61-74.
12. Kozachenko Yu. On the simulation of random fields. II. / Yu. Kozachenko, A. Pashko // Theory Probab. Math. Stat. - 2001. - 62. - P. 51-63.
13. Kozachenko Yu. Simulation of random processes and fields / Yu. Kozachenko, A. Pashko, I. Rozora. - Kyiv: "Zadruga", 2007.

References

1. MISHURA, YU. (2008) *Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes*, Berlin: Springer.
2. PRIGARIN, S., HAHN, K. and WINKLER, G. (2008) "Comparative analysis of two numerical methods to measure Hausdorff dimension of the fractional Brownian motion", *Siberian J. Num. Math.*, 11, no.2 pp.201-218.
3. SABELFELD, K. (1989) *Monte Carlo Methods in Boundary Problems*, Novosibirsk: Nauka.
4. YERMAKOV, S. and MIKHAILOV, G. (1982) *Statistical simulation*, Moscow: Nauka.
5. SHELUHIN, O., SMOLSKIY, S. and OSIN, A. (2007) *Similar processes in telecommunication*, John Wiley&Sons Ltd, England.
6. VEITCH, D., HOHN, N. and ABRY, P. (2005) "Multifractality in TCP/IP traffic: the case against", *Computer Networks*, №48(3), pp. 293-313.
7. KOZACHENKO, YU., YAMNENKO, R. and VASYLYK, O. (2008) *ϕ -sub-Gaussian random process*, Kyiv: Vydavnycho-Poligrafichnyi Tsentr "Kyivskyi Universytet".
8. PASHKO, A. (2014) "Statistical Simulation of a generalized Wiener process", *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*, vol.2, pp.180-183.
9. PASHKO, A. (2014) "Estimation of Accuracy of Simulation of a Generalized Wiener Process", *Bulletin of Uzhgorod University. Series: Mathematics and Informatics*, 25(1), pp.109-116.
10. DZHAPARIDZE, K. and ZANTEN, J. (2002) "A series expansion of fractional Brownian motion", *CWI. Probability, Networks and Algorithms [PNA]*, R0216.
11. KOZACHENKO, YU. and PASHKO, A. (2000) "On the simulation of random fields. I.", *Theory Probab. Math. Stat.*, 61, pp. 61-74.
12. KOZACHENKO, YU. and PASHKO, A. (2001) "On the simulation of random fields. II", *Theory Probab. Math. Stat.*, 62, pp. 51-63.
13. KOZACHENKO, YU., PASHKO, A. and ROZORA, I. (2007) *Simulation of random processes and fields*, Kyiv: "Zadruga".

Надійшла до редколегії 19.08.2017

УДК 519.21

Скачко Д.А.¹, аспірант
Тимашов О.О.², к.т.н., доцент

**Прийняття рішень на основі аналізу
переміщень усередині просторових
об'єктів з використанням сенсорних
мереж**

¹Інститут кібернетики імені В.М.Глушкова
НАН України
03187, м. Київ, пр-т. Академіка Глушкова, 40,
e-mail: dskachko@gmail.com

²Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Академіка Глушкова, 4д
e-mail: alex_timashov@outlook.com

D.A. Skachko¹, postgraduate
O.O. Tymashov², Ph.D. (Tech.), Associate Professor

**Decision-making based on the analysis of
displacements within spatial objects using
sensory networks**

¹Glushkov Institute of Cybernetic of NAS of Ukraine,
03187, Kyiv, Glushkov ave., 40
e-mail: dskachko@gmail.com

²Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkov ave., 4d
e-mail: alex_timashov@outlook.com

На основі використання інтелектуальних сенсорних систем як одного з технічних засобів розумного підприємства вирішується завдання створення нової інтелектуальної технології - навігація всередині приміщення. У багатьох відвідувачів є мобільні пристрої, а торгові центри мають все необхідне для організації внутрішньої навігації. Для роботи сервісу потрібно розгорнута мережа бездротового доступу і підтримує її клієнтський мобільний пристрій на платформі Android або iOS. Отримані дані дозволяють класифікувати відвідувачів, що дає можливість робити цільові акції для потрібної аудиторії. Розуміння переміщення відвідувачів, а також цілей їх відвідувань відкриває величезні можливості по оптимізації прийняття рішень при управлінні великими торговельними центрами.

Ключові слова: інтелектуальні сенсорні системи, дерево рішень, алгоритм CART, навігація, прийняття рішень.

For companies offering their products and services, indoor navigation is an opportunity to greatly enhance convenience and attract customers and buyers. Having installed on its territory special Bluetooth beacons, business owners can help users quickly navigate in space, and also present them with a lot of useful information and advertising services. And for yourself to get a lot of useful analytics. Based on the use of intelligent sensor systems as one of the technical means of a smart enterprise, the task of creating a new intellectual technology - indoor navigation - is being solved. Many visitors have mobile devices, and shopping centers have everything necessary for organizing internal navigation. For the service to work, you need an expanded wireless access network and a client mobile device supporting it on the Android or iOS platform. The obtained data will allow classifying visitors, which makes it possible to make targeted actions for the right audience. Understanding the movement of visitors, as well as the purposes of their visits, opens up huge opportunities for optimizing decision making when managing huge shopping centers.

Key words: intelligent sensory systems, decision tree, CART, indoor navigation, decision making.

Статтю представив д.т.н., проф. Гарашенко Ф.Г.

Вступ

Інтелектуалізація є головним напрямком розвитку сучасних технологій, а властивість інтелектуальності притаманне всім новітнім інформаційно-керуючим системам. Досвід останнього десятиріччя рішення множини практичних завдань і створення сотень

практично діючих систем показав, що саме інтелектуальні технології виявляються найбільш конструктивними і економічно виправданими при розробці сучасних цифрових систем автоматизованого керування.

Одним з підходів підвищення ефективності діяльності є технології створення «розумного

підприємства» (РП) як виробничої інновації, що базується на високому рівні знань про систему, високопродуктивних методах інтелектуалізації процесів управління. Відмінність такої технології від традиційних полягає в наданні їй нових можливостей для управління, здатних змінити продуктивність, а також концепцію, модель та спосіб функціонування.

Перспективним напрямком розвитку РП є повністю автоматизована система моніторингу роботи пристроїв і людей в режимі реального часу, найважливішою характеристикою якої є мобільність, можливість доступу до потрібної інформації у будь-який час, у будь-якому місці і з будь-яких пристроїв. У такій системі, крім повсюдного використання мініатюрних мобільних пристроїв, бездротових мереж, супутникової навігації, хмарних обчислень, сховищ інформації, електронного середовища, що створює образ навколишніх об'єктів і процесів. Базовою складовою є гнучка розподілена модель управління всіма процесами в реальному часі, що відображає процеси мислення, підтримувані потужним програмним інструментарієм [9].

Щоб зробити підприємство по-справжньому "розумним", потрібно навчитися збирати повсюдно різну інформацію про те, що відбувається з процесами, що швидше за все реально в умовах єдиної мережі великої множини дачив (сенсорних мереж), на території підприємства.

Розподілені сенсорні системи - це безумовно новий напрямок в традиційній області збору, обробки і передачі даних. Що стосується концепції розумного підприємства, то сенсорні системи це ідеальна інформаційна технологія інфраструктурного типу, пов'язана з інтелектуалізацією РП, як об'єкта управління.

Сьогодні з використанням цифрових технологій реалізовується концепція РП, які, отримуючи дані від великої кількості сенсорів, здійснюють контроль і моніторинг усіх процесів на підприємстві для їх удосконалення. Це означає можливість практично спостерігати і прогнозувати наперед все стадії процесу з метою внесення необхідних коригувань в реальному часі для підвищення ефективності.

Для процесів реалізації виробленої продукції у великих торгових центрах становить інтерес навігація всередині приміщень. Це дозволить значною мірою автоматизувати прийняття рішень в управлінні. В даний час, коли у багатьох

людей є мобільні пристрої, а торговельні центри мають все необхідне для організації внутрішньої навігації, розробка сервісу на базі інтелектуальних сенсорних систем для мобільних пристроїв видається актуальним завданням.

Механізм навігації, пропонується в статті, розроблений для навігації усередині приміщень, і ґрунтується на комунікаційній технології Wi-Fi. Для роботи сервісу потрібно розгорнута сенсорна мережа бездротового доступу і підтримує її клієнтський мобільний пристрій на платформі Android або iOS.

Отримані дані дозволяють класифікувати відвідувачів, що дає можливість робити цільові акції для потрібної аудиторії. Розуміння переміщення людей, а так само цілей їх відвідувань відкриває величезні можливості по оптимізації прийняття рішень при управлінні великими торговельними центрами.

Загальна частина. Принцип роботи сервісу полягає в наступному. Коли клієнтський пристрій знаходиться між декількома Wi-Fi-джерелами, за відносним рівнем сигналу що отримується від них, можна з прийнятною точністю визначити його місце розташування. Причому самі Wi-Fi-точки можуть бути закриті: потрібно тільки знати відносний рівень сигналу, отриманого користувачем, і порівнювати його з радіообстановкою в контрольних точках будівель. Чим більше щільність покриття області точками, тим вище точність навігації. Наприклад, проводиться позиціонування, додаток відображає плани поверхів будівлі з зазначенням місця розташування мобільного пристрою. Координати мобільного пристрою відслідковуються безперервно. Користувач може скористатися функцією прокладання оптимального маршруту до місця інтересу (магазину, офісного приміщення, виходу і т.п.), веденням по маршруту. Вибір об'єкта, що цікавить, здійснюється або безпосередньо на плані, або через вбудовану пошукову систему. Представлений сервіс навігації використовує найпростіший і найдоступніший тип карт. Фактично це зображення місцевості, до якого прив'язуються географічні координати [1, 2].

Аналіз даних. Система збирає всі дані про переміщення користувача, а також фіксує місця, де користувач проводить більше часу, місця інтересу. Попередній аналіз даних виконується за допомогою дерев рішень. Побудова дерева рішень здійснюється на основі алгоритму CART [8]. Алгоритм будує бінарні дерева рішень, які

містять тільки два нащадка в кожному вузлі. У процесі роботи відбувається рекурсивне розбиття прикладів навчальної множини на підмножини, записи в яких мають однакові значення цільової змінної.

$$Q(s|t) = 2P_L P_R \sum_{j=1}^N (P(j|t_L) - P(j|t_R)),$$

де s - ідентифікатор розбиття, t - ідентифікатор вузла, t_L та t_R - лівий і правий нащадки вузла t відповідно, P_L та P_R - відношення числа прикладів в лівому і правому нащадках до їх загальної кількості в навчальній множині, $P(j|t_L)$ и $P(j|t_R)$ - відношення числа прикладів класу j в лівому і правому нащадках до їх загальної кількості в кожному з них. Процес побудови регресійних дерев рішень в основному аналогічний класифікаційним, але замість міток класів в листі будуть розташовуватися числові значення. Фактично при цьому реалізується кусочно-постійна функція вхідних змінних [4].

В результаті в кожному листі повинні виявитися приклади зі схожими значеннями вихідної змінної. Чим ближче вони будуть, тим менше стане їх дисперсія. Тому вона є хорошою мірою «чистоти» вузла. Тоді найкращим розбиттям в вузлі є те, що забезпечить максимальне зменшення дисперсії вихідної змінної в ньому. У процесі росту дерева алгоритм CART проводить для кожного вузла повний перебір всіх атрибутів, на основі яких може бути побудована розбиття, і вибирає той, який максимізує значення показника. На кожному кроці побудови дерева алгоритм послідовно порівнює всі можливі розбиття для всіх атрибутів, вибирає найкращий атрибут (інтерес користувача) і найкращу розбивку для нього. Отримані результати показують, де користувач мобільного пристрою знаходився більше часу, які обсяги проходив без затримки і в будь повертався. Таким чином, розглянута модель містить об'єкти простору і отримані з сенсорів мобільних пристроїв характеристики сигналів, які описуються прихованими і спостережуваними станами відповідно. Крім того, дана модель має такі параметри: перехідні ймовірності між прихованими станами, значення яких визначаються з графової моделі простору, і ймовірності переходу від прихованих станів до спостережуваних. Отже, стосовно до задачі визначення поточного місцезнаходження, є відомі параметри (ймовірності переходів) і послідовність $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$, що спостерігаються. Потрібно підібрати

послідовність станів системи $Q = (q_1, \dots, q_p)$, яка найкраще відповідає послідовності, що спостерігається [3].

Опис алгоритму CART. CART (Classification And Regression Tree), перекладається як "Дерево класифікації і регресії" - алгоритм бінарного дерева рішень, який вперше був опублікований Бріманом в 1984 році. Алгоритм призначений для вирішення завдань класифікації і регресії [5]. Навчання дерева рішень відноситься до класу навчання з учителем, тобто навчальна і тестова вибірка містять класифікований набір прикладів. Оціночна функція, яка використовується алгоритмом CART, базується на інтуїтивній ідеї зменшення "невизначеності" в вузлі. Вузол має максимальну "невизначеності". В алгоритмі CART ідея "невизначеності" формалізована в індексі Gini. Якщо набір даних T містить дані n класів, тоді індекс Gini визначається як:

$$Gini(T) = 1 - \sum_{i=1}^n p_i^2,$$

де p_i - ймовірність (відносна частота) класу i в T . Якщо набір T розбивається на дві частини T_1 і T_2 з числом прикладів в кожному N_1 и N_2 відповідно, тоді показник якості розбиття дорівнює:

$$Gini_{split}(T) = \frac{N_1}{N} Gini(T_1) + \frac{N_2}{N} Gini(T_2).$$

Найкращим вважається те розбиття, для якого $Gini_{split}(T)$ мінімально. Позначимо N - число прикладів у вузлі - предка, L , R - число прикладів відповідно в лівому і правому нащадку, l_i й r_i - число примірників i -го класу в лівому/правому нащадку. Тоді якість розбиття оцінюється за такою формулою:

$$Gini_{split} = \frac{L}{N} \left(1 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{l_i}{L} \right)^2 \right) + \frac{R}{N} \left(1 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{r_i}{R} \right)^2 \right) \rightarrow \min.$$

Щоб зменшити обсяг обчислень формулу можна перетворити:

$$Gini_{split} = \frac{1}{N} \left(L \left(1 - \frac{1}{L^2} \sum_{i=1}^n l_i^2 \right) + R \left(1 - \frac{1}{R^2} \sum_{i=1}^n r_i^2 \right) \right) \rightarrow \min.$$

Так як множення на константу не грає ролі при мінімізації:

$$Gini_{split} = L - \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n l_i^2 + R - \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n r_i^2 \rightarrow \min,$$

$$Gini_{split} = N - \left(\frac{1}{L} \sum_{i=1}^n l_i^2 + \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n r_i^2 \right) \rightarrow \min,$$

$$G_{split} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n l_i^2 + \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n r_i^2 \rightarrow \max.$$

У підсумку, найкращим буде те розбиття, для якого величина максимальна.

Правила розбиття. Вектор предикторних змінних, що подається на вхід дерева може містити як числові (порядкові) так і категоріальні змінні. У будь-якому випадку в кожному вузлі розбиття йде тільки по одній змінній. Якщо змінна числового типу, то в вузлі формується правило виду $x_i \leq c$. Де c – деякий поріг, який найчастіше вибирається як середнє арифметичне двох сусідніх упорядкованих значень змінної x_i вибірки, що навчає. Якщо змінна категоріального типу, то в вузлі формується правило $x_i \in V(x_i)$, де $V(x_i)$ – деяка непорожня підмножина множини значень змінної x_i в вибірці, що навчає. Отже, для n значень числового атрибута алгоритм порівнює $n-1$ розбиття, а для категоріального $(2n-1-1)$. На кожному кроці побудови дерева алгоритм послідовно порівнює всі можливі розбиття для всіх атрибутів і вибирає найкращий атрибут і найкращу розбивку для нього.

Механізм відсікання дерева. Оригінальна назва *minimal cost-complexity tree pruning*, – найбільш серйозна відмінність алгоритму CART від інших алгоритмів побудови дерева в тому, що CART розглядає відсікання як отримання компромісу між двома проблемами: отримання дерева оптимального розміру і отримання точної оцінки ймовірності помилкової класифікації. Основна проблема відсікання – велика кількість всіх можливих відсічених піддерев для одного дерева. Більш точно, якщо бінарне дерево має $|T|$ – листів, тоді існує $\sim [1.5028369^{|T|}]$ відсічених піддерев. І якщо дерево має хоча б 1000 листів, тоді число відсічених піддерев стає просто величезним.

Базова ідея методу – не розглядати всі можливі піддерев, обмежившись лише "кращими представниками" згідно наведеної нижче оцінки. Позначимо $|T|$ – число листів дерева, $R(T)$ – помилка класифікації дерева, що дорівнює відношенню числа неправильно класифікованих прикладів до числа прикладів в навчальній вибірці. Визначимо – повну вартість (оцінку / показник витрати-складності) дерева T як: $Ca(T) = R(T) + \alpha * |T|$, де $|T|$ – число листів (термінальних вузлів) дерева, – деякий параметр, що змінюється від 0 до $+\infty$. Повна вартість дерева складається з двох компонент – помилки класифікації дерева і штрафу за його складність. Якщо помилка класифікації дерева незмінна, тоді зі його збільшенням повна вартість дерева буде збільшуватися. Тоді менше гіллясте дерево, що

дає велику помилку класифікації може коштувати менше, ніж дає меншу помилку, але більш гіллясте. Визначимо T_{max} – максимальне за розміром дерево, яке належить обрізати. Якщо ми зафіксуємо значення α , тоді існує найменше піддерево, що мінімізується, α , яке виконує наступні умови:

1. $Ca(T(\alpha)) = \min_{T \leq T_{max}} Ca(T)$
2. if $Ca(T) = Ca(T(\alpha))$ then $T(\alpha) \leq T$.

Перша умова говорить, що не існує такого піддерев дерева T_{max} , яке мало б меншу вартість, ніж $T(\alpha)$ при цьому значенні α . Друга умова говорить, що якщо існує більше одного піддерев, що має дану повну вартість, тоді ми вибираємо найменше дерево. Можна показати, що для будь-якого значення існує таке найменше піддерево, що мінімізується. Але ця задача не тривіальна, бо стверджується – не може бути такого, коли два дерева досягають мінімуму повної вартості і вони непорівнянні, тобто жодне з них не є піддеревом іншого. Ми не будемо доводити цей результат. Хоча має нескінченне число значень, існує кінцеве число піддерев дерева T_{max} . Можна побудувати послідовність піддерев, що зменшуються дерева T_{max} : $T_1 > T_2 > T_3 > \dots > \{t_1\}$ (де t_1 – кореневий вузол дерева) таку, що T_k – найменше піддерево, що мінімізується для $[\alpha_k, \alpha_{k+1})$. Це важливий результат, тому що це означає, що ми можемо отримати наступне дерево в послідовності, застосувавши відсікання до поточного дерева. Це дозволяє розробити ефективний алгоритм пошуку найменшого піддерев, що мінімізується, при різних значеннях α . Перше дерево в цій послідовності – найменше піддерево дерева T_{max} , яке має таку ж помилку класифікації, як і T_{max} , тобто $T_1 = T(\alpha = 0)$. Пояснення: якщо розбиття йде до тих пір, поки в кожному вузлі залишиться тільки один клас, то $T_1 = T_{max}$, але так як часто застосовуються методи ранньої зупинки (prepruning), тоді може існувати піддерево дерева T_{max} , що має таку ж помилку класифікації. Для того щоб отримати наступне дерево в послідовності і відповідне значення α , позначимо T_t – гілка дерева T з кореневим вузлом t . Якщо ми відсекаємо в вузлі t , тоді його внесок в повну вартість дерева $T - T_t$ стане $Ca(\{t\}) = R(t) + \alpha$, де $R(t) = r(t) * p(t)$, $r(t)$ – це помилка класифікації вузла t й $p(t)$ – пропорція випадків, які "пройшли" через вузол t . Альтернативний варіант: $R(t) = m/n$, де m – число прикладів класифікованих некоректно, а n – загальне число прикладів, що класифікуються

для всього дерева. внесок T_i в повну вартість дерева T складе $C\alpha(T_i) = R(T_i) + \alpha |T_i|$, де

$$R(T_i) = \sum_{t' \in T_i} R(t')$$

Дерево $T - T_i$ буде краще, чим T , коли $C\alpha(\{t\}) = C\alpha(T_i)$, тому що при цій величині вони мають однакову вартість, але $T - T_i$ найменше з двох. Коли $C\alpha(\{t\}) = C\alpha(T_i)$ отримаємо:

$$R(T_i) + \alpha |T_i| = R(t) + \alpha$$

вирішуючи для α , отримуємо:

$$\alpha = \frac{R(t) - R(T_i)}{|T_i| - 1}.$$

Так для будь-якого вузла t в T_i , якщо ми збільшуємо α , тоді коли

$$\alpha = \frac{R(t) - R(T_{1,t})}{|T_{1,t}| - 1}$$

дерево, отримане відсіканням в вузлі t , буде краще, ніж T_i .

Основна ідея полягає в наступному: обчислимо це значення для кожного вузла в дереві T_1 , і потім виберемо "слабкі зв'язки" (їх може бути більше ніж один), тобто вузли для яких величина є найменшою.

$$g(t) = \frac{R(t) - R(T_{1,t})}{|T_{1,t}| - 1}.$$

Ми відкидаємо T_1 в цих вузлах, щоб отримати T_2 - наступне дерево в послідовності. Потім ми продовжуємо цей процес для отриманого дерева і так поки ми не отримаємо кореневий вузол (дерево в якому тільки один вузол).

Вибір фінального дерева. Отже, ми маємо послідовність дерев, нам необхідно вибрати краще дерево з неї. Те, що ми і будемо використовувати надалі. Найбільш очевидним є вибір фінального дерева через тестування на тестовій вибірці. Дерево, що дало мінімальну помилку класифікації, і буде найкращим. Однак, це не єдиний можливий шлях. Також є процес побудови дерева і процес отримання послідовності піддерев, що зменшуються методом cost-complexity pruning. У послідовності дерев, необхідно вибрати краще дерево, що будемо використовувати в подальшому. Відзначимо, що відсікання дерева не використало ніяких інших даних, крім тих, на яких будувалося початкове дерево. Навіть не самі дані були потрібні, а кількість прикладів кожного класу, яке пройшло через вузол. Найбільш очевидним і можливо найбільш ефективним є вибір фінального дерева за допомогою тестування на тестовій вибірці. Природно, якість тестування

багато в чому залежить від обсягу тестової вибірки і «рівномірності» даних, які потрапили в навчальну та тестову вибірки. Часто можна спостерігати, що послідовність дерев дає помилки близькі одна до одної. Ця довга плоска послідовність дуже чутлива до даних, які будуть обрані в якості тестової вибірки. Щоб зменшити цю нестабільність CART використовує 1-SE правило: виберіть мінімальне за розміром дерево з Rts в межах інтервалу $[min R^{ts}, min R^{ts} + SE]$. R^{ts} - помилка класифікації дерева. SE - стандартна помилка, яка є оцінкою реальної помилки.

$$SE(R^{ts}) = \sqrt{\frac{R^{ts}(1 - R^{ts})}{n_{test}}},$$

де n_{test} - число прикладів в тестовій вибірці [6, 7].

Перехресна перевірка - найоригінальніша і складна частина алгоритму CART. Цей шлях вибору фінального дерева використовується, коли набір даних для навчання малий або кожен запис в ньому «унікальний» так, що ми не можемо виділити вибірку для навчання і вибірку для тестування.

В такому випадку будемо дерево на всіх даних, обчислимо $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ і $T_1 > T_2 > \dots > T_N$. Позначимо T_k - найменше піддерево, що мінімізуємо для (α_k, α_{k+1}) . Тепер потрібно вибрати дерево з послідовності, але вже використовували всі наявні дані. Хитрість в тому, що обчислимо помилку дерева T_k з послідовності непрямым шляхом.

Крок 1.

Встановимо

$$\beta_1 = 0, \beta_2 = \sqrt{\alpha_2 \alpha_3}, \beta_3 = \sqrt{\alpha_3 \alpha_4}, \dots, \beta_{N-1} = \sqrt{\alpha_{N-1} \alpha_N}, \beta_N = \infty$$

Вважаємо, що β_k буде типовим значенням для (α_k, α_{k+1}) і, отже, як значення відповідає T_k .

Крок 2.

Розділимо весь набір даних на V груп однакового розміру $G_1, G_2, \dots, G_V$. Бріман рекомендує брати $V = 10$. Потім для кожної групи G_i :

1. Обчислити послідовність дерев за допомогою описаного вище механізму відсікання на всіх даних, виключаючи G_i . Й визначити $T^{(i)}(\beta_1), T^{(i)}(\beta_2), \dots, T^{(i)}(\beta_N)$ для цієї послідовності.

2. Обчислити помилку дерева $T(i) < \beta_k$ на G_i .

Тут $T^{(i)}(\beta_k)$ означає найменше мінімізоване піддерево з послідовності, побудоване на всіх даних, виключаючи G_i для β_k .

Крок 3.

Для кожного β_k підсумовувати помилку $T^{(i)}(\beta_k)$ по всім G_i ($i = 1, \dots, V$). Нехай β_h буде з найменшою загальною помилкою. Так як β_h відповідає дереву T_h , вибираємо T_h з послідовності побудованої на всіх даних в якості фінального дерева. Показник помилки, обчислений за допомогою перехресної перевірки можна використовувати як оцінку помилки дерева. Побудова дерева регресії багато в чому схоже з деревом класифікації. Спочатку ми будуємо дерево максимального розміру, потім обрізаємо дерево до оптимального розміру. Основна перевага дерев у порівнянні з іншими методами регресії - можливість працювати з багатовимірними завданнями і завданнями, в яких присутня залежність вихідної змінної від змінної або змінних категоріального типу. Основна ідея - розбиття всього простору на прямокутники, необов'язково однакового розміру, в яких вихідна змінна вважається постійною. Зауважимо, що існує сильна залежність між обсягом навчальної вибірки і помилкою відповіді дерева.

Процес побудови дерева відбувається послідовно. На першому кроці ми отримуємо регресійну оцінку просто як константу по всьому простору прикладів. Константу вважаємо просто як середнє арифметичне вихідної змінної в навчальній вибірці. Отже, якщо ми позначимо все значення вихідної змінної як $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ тоді регресійна оцінка:

$$\hat{f}(x) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \right) I_R(x),$$

де R - простір навчальних прикладів, n - число прикладів, $I_R(x)$ - індикаторна функція простору - фактично, набір правил, що описують потрапляння змінної x в простір. Ми розглядаємо простір R як прямокутник. На другому кроці ми ділимо простір на дві частини. Вибирається деяка змінна x_i і якщо змінна числового типу, тоді ми визначаємо:

$$R_1 = \{x \in R : x \leq \alpha\}, R_2 = \{x \in R : x > \alpha\}.$$

Якщо x_i категоріального типу з можливими значеннями $A_1, A_2, \dots, A_q$, тоді вибирається деяка підмножина $I \{A_1, \dots, A_n\}$ і ми визначаємо

$$R_1 = \{x \in R : x \in I\},$$

$$R_2 = \{x \in R : x \in \{A_1, A_2, \dots, A_n\} \setminus I\}.$$

Регресійна оцінка приймає вид:

$$\hat{f}(x) = \left(\frac{1}{|I_1|} \sum_{I_1} Y_i \right) I_{R_1}(x) + \left(\frac{1}{|I_2|} \sum_{I_2} Y_i \right) I_{R_2}(x),$$

де $I_l = \{i, x_i \in R_l\}$ і $|I_l|$ - число елементів в I_l .

Яким чином вибирається краще розбиття? В якості оцінки тут служить сума квадратів різниць:

$$E = \sum (Y_i - \hat{f}(x_i))^2.$$

Вибирається розбиття з мінімальною сумою квадратів різниць. Ми продовжуємо розбиття до тих пір, поки в кожному підпросторі не залишиться мале число прикладів або сума квадратів різниць не стане менше деякого порога.

Відсікання, вибір фінального дерева

Відбуваються аналогічно дереву класифікації. Єдина відмінність - визначення помилки відповіді дерева:

$$R(\hat{f}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{f}(x_i))^2,$$

або, інакше кажучи, середньоквадратична помилка відповіді.

Вартість дерева дорівнює:

$$C_\alpha(\hat{f}) = R(\hat{f}) + \alpha |f|$$

Решта операції відбуваються аналогічно дереву класифікації.

Висновки. У статті розглянуто та описано механізм навігації усередині приміщень. А при спільному використанні з мобільними пристроями на платформі Android або iOS так само і можливість інтерактивної взаємодії з картою і елементами карти. Також запропонована модель аналізу даних за допомогою алгоритму CART. В якості основи для кластеризації даних були взяті дані переміщення відвідувача між базовими WiFi модулями, які включають в себе безліч параметрів, нетривіальних для простого вивчення. Покроково описано навчання, розбиття та вибір дерева рішень. Проведений аналіз дозволить вести інтерактивну комунікацію з відвідувачами через мобільні додатки, робити індивідуальні акції, а так само автоматизацію прийняття рішень в управлінні ТРЦ.

Список використаних джерел

1. Bill R. Indoor and Outdoor Positioning in Mobile Environments / Bill R., Cap C., Kofahl M., Mundt T. // *Geographical Information Sciences*. - 2004. - Vol. 10, Number 2. - P. 91-98.
2. Indoor Atlas. [Електронний ресурс]. [Режим доступа: <http://www.indooratlas.com/>.]
3. Zeimpekis V. A taxonomy of indoor and outdoor positioning techniques for mobile location services / Zeimpekis V., Giaglis G.M., Lek G. // *SIGecom Exchange*. - 2003. - P. 19-27.
4. Kaemarungsi K. Modeling of Indoor Positioning Systems Based on Location Fingerprinting / K. Kaemarungsi, P. Krishnamurthy // *IEEE INFOCOM'2004*.
5. Lenihan N. A local Optimal User Position System for Indoor Wireless Devices / Lenihan N. // Abstract of Masters of Engineering Degree dissertation. University of Limerick, Ireland, 2004. - 192 p.
6. BaseGroup Labs-Деревья решений - общие принципы работы. [Електронний ресурс]. [Режим доступа: <http://www.basegroup.ru/library/analysis/tree/description/>]
7. BaseGroup Labs- Деревья решений - CART математический аппарат. Часть1. [Електронний ресурс]. [Режим доступа: http://www.basegroup.ru/library/analysis/tree/math_cart_part1/]
8. BaseGroup Labs- Деревья решений - CART математический аппарат. Часть2. [Електронний ресурс]. [Режим доступа: http://www.basegroup.ru/library/analysis/tree/math_cart_part2/]
9. Гриценко В.И. «Умное предприятие» как базовый объект цифровой экономики» / Гриценко В.И., Тимашова Л.А. // *УСиМ*. - 2016. - № 5. - С. 54-66.

References

1. BILL, R., CAP, C., KOFAHL, M. and MUNDT, T. (2004) "Indoor and Outdoor Positioning in Mobile Environments", *Geographical Information Sciences*, vol. 10, № 2, pp. 91-98.
2. Indoor Atlas. [Електронний ресурс]. [Режим доступа: <http://www.indooratlas.com/>]
3. ZEIMPEKIS, V., GIAGLIS, G.M. and LEK, G. (2003) "A taxonomy of indoor and outdoor positioning techniques for mobile location services", *SIGecom Exchange*, pp. 19-27.
4. KAEMARUNGSI, K. and KRISHNAMURTHY, P. (2004) "Modeling of Indoor Positioning Systems Based on Location Fingerprinting", *IEEE INFOCOM'2004*.
5. LENIHAN, N. (2004) "A local Optimal User Position System for Indoor Wireless Devices", Abstract of Masters of Engineering Degree dissertation, University of Limerick, Limerick, Ireland.
6. BaseGroup Labs - Decision trees are the general principles of work. [Electronic resource]. [Access mode: <http://www.basegroup.ru/library/analysis/tree/description/>]
7. BaseGroup Labs - Trees of solutions - CART mathematical apparatus. Part 1. [Electronic resource]. [Access mode: http://www.basegroup.ru/library/analysis/tree/math_cart_part1/]
8. BaseGroup Labs - Trees of solutions - CART mathematical apparatus. Part 2. [Electronic resource]. [Access mode: http://www.basegroup.ru/library/analysis/tree/math_cart_part2/]
9. GRITSENKO, V.I. and TIMASHOVA, L.A. (2016) "Smart enterprise" as a basic object of the digital economy", *Control systems and machines*, № 5, pp. 54-66.

Надійшла до редколегії 19.08.2017

УДК 519.21

Тимашова Л.А., д.т.н., доцент
Скачко І.О., м.н.с.

**Оптимізація портфеля цінних паперів
на фондовому ринку за допомогою
нечіткого групового методу обробки
даних**

Міжнародний науково-навчальний центр
інформаційних технологій та систем
03187, м. Київ, пр-т. Академіка Глушкова, 40,
e-mail: dep190@irtc.org.ua

L.A. Timashova, D.Sc. (Tech.), Assoc. Prof.
I.O. Skachko, Junior Researcher

**Solving securities portfolio optimization
problem in the stock market with the help of
the fuzzy group method of data handling**

International Research and Training Centre for
Information Technologies and Systems,
03187, Kyiv, Glushkov ave., 40
e-mail dep190@irtc.org.ua

Робота присвячена вирішенню проблеми оптимізації портфеля цінних паперів на фондовому ринку, включаючи інтервальну вартість активів для кожного фонду за методом обробки даних з нечіткою групою за заданим рівнем ризику. В роботі введені практичні результати використання цього методу за допомогою інформаційних технологій.

Ключові слова оптимізація портфеля, акції, портфель безпеки, фондовий ринок, моделі, нечіткий груповий метод обробки даних.

Portfolio optimization is to find the stock portfolio minimizing the risk for a required return or maximizing the return for a given risk level. The seminal work in this field is the mean- variance model formulated as a quadratic programming problem. Since it is not computationally practical to solve the original model directly, a number of alternative models have been proposed.

The paper is concerned with the solution of the stock market securities portfolio optimization problem including interval asset pricing of each stock based on the fuzzy group method of data handling at the predetermined risk level. Practical results of using this method with the help of information technologies are introduced in this work.

Key words: portfolio optimization, stock, security portfolio, stock market, models, fuzzy group method of data handling.

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Introduction

The traditional portfolio optimization problem is to find an investment plan for securities with a reasonable trade-off between the rate of return and risk. The mean-variance model of Markowitz (1952) is a single period static model to obtain the portfolio which can achieve a specified average rate of return with the minimum risk. Following Markowitz's paper, a number of alternative models have been proposed for the same problem. The main objective of these alternative models is to overcome the computational complexity of the original quadratic programming problem. A piecewise linear approximation, the Mean Absolute Deviation (MAD), the Weighted Goal Programming (WGP) and the Minimax (MM) models are some examples of them. For more details on these models, please refer to Satchell and Scowcroft (2003).

The MAD model proposed by Konno and Yamazaki (1991) is a linear programming (LP) model where risk is measured by absolute deviation instead of variance. They showed that it is equivalent to the Markowitz model if returns are multivariate normally distributed. Later, Zenios and Kang (1993) analyzed the model for other asymmetric distributions and found that the MAD model does not require any specific type of return distributions. Speranza (1993) generalized the MAD model using a weighted risk function. The author showed that a more compact equivalent model can be constructed when the coefficients in the linear combination are selected suitably. Three other papers followed to introduce more flexible models (Speranza, 1996; Mansini, 1997; Mansini and Speranza, 1997). Thereafter, Mansini and Speranza (1999) extended their previous work by developing three heuristics.

More recent papers, Konno and Wijayanayake (2001) and Kellerer et al. (2001) examined the problems, which take into account more realistic features such as fixed transaction costs or minimum transaction lots. Mansini and Ogryczak (2003) introduced a systematic overview of the LP solvable models with a wide discussion of their theoretical properties. Over the last years, the problems of portfolio optimization have generated considerable interest in investment operations of organizations performing at the Ukrainian stock market. The problem is that optimizing the portfolio at the predetermined risk level requires expert assessment of portfolio return, which is, in its turn, attended by some risk.

Theoretical part

Harry M. Markowitz [Markowitz H., 1952] is the pioneer of the modern portfolio investment theory. Sharp [Sharp W., 1963], Tobin [Tobin J., 1958, 1965], Merton [Merton R., 1973], and Ross [Ross S., 1976] [4-8] have contributed to the portfolio theory as well. One of the latest trends in this field is concerned with using the fuzzy group method of data handling for portfolio optimization. The object of writing this article is to study the portfolio optimization method for fuzzy models based on stock price prediction. The fuzzy group method of data handling, researched and suggested by Ivahnenko [Ивахненко А. Г. 1975,] [1] is used as the relevant method of portfolio return prediction.

The principal feature of this work is that no external assessment (expert inspection) took place while predicting, optimizing and analyzing the portfolio. No experts were invited to predict the portfolio return or define the substantial input variables.

General formulation

There is a securities portfolio that consists of $N=5$ components, bigname stocks, AZST («МК Азовсталь»), BAVL («Райффайзен Банк Аваль»), CEEN («Центрэнерго»), DOEN («Донбасэнерго»), MSICH («Мотор Сич») and the portfolio behavior on the interval $[T,0]$. The data is received from «Ukrainian Stock Market» public joint-stock company and is based on securities auction results from 01/11/2012 to 29/11/2012. Each component of the portfolio is characterized by its financial viability (evaluated at the point T as the relative asset price increment over the period). Let us assume that the investor's capital equals to 1. The main aim of securities portfolio optimization is to find the stock share distribution vector in the

portfolio $\{x = \{x_i\} | i = 1, N\}$ that could maximize the investor's income at the predetermined risk level (it is evident that $\sum_{i=1}^N x_i = 1$) [2].

Chapter 1: Building the stock margin of profit forecasting model based on the fuzzy group method of data handling

Input time processes $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ are given, which are securities quotation rates at the stock market at the discrete time periods $t=0, 1, 2, \dots, T$. The task is to build the forecasting model to evaluate the quotation rate at the following period of time. Considering the nonstationarity of financial processes as well as the complex undefined interconnection of the input variables and the output $y_i(t) = x_i(t+1)$ it is recommended to consider using the group method of data handling, suggested in [3].

The description of the group method of data handling

Using the surveyed data, the task is to build the model, which would be adequate to the surveyed data. Out of the many outputs $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ we choose arguments X_i and X_j and create partial description of the kind $Y_k^{(1)} = \varphi(X_i, X_j), i \neq j, j = 1, N$ using either quadratic partial description or linear partial description:

$$Y_k^{(1)} = a_0 + a_i X_j + a_{ij} X_i X_j + a_{ii} X_i^2 + a_{jj} X_j^2.$$

The number of partial descriptions of the first-

order amounts to $M = \frac{n(n-1)}{2}$.

Coefficients are intervals that can be rendered by triangular fuzzy numbers and written down as a center a_i and a width c_i :

$$a_i = (a_i, c_i).$$

2. Seeking the best model requires the following steps:

- All samples are divided into two categories: training samples and validation samples.
- At the training sample, we define a_0, a_i, a_{ij} using the simplex method.
- Model is constructed

$$\min \left(C_0 M + C_1 \sum_{k=1}^M |x_{ki}| + C_2 \sum_{k=1}^M |x_{kj}| + \right. \\ \left. + C_3 \sum_{k=1}^M |x_{ki} \cdot x_{kj}| + C_4 \sum_{k=1}^M x_{ki}^2 + C_5 \sum_{k=1}^M x_{kj}^2 \right) \quad (1)$$

given that

$$a_0 + a_1 x_{ki} + a_2 x_{kj} + a_3 x_{ki} x_{kj} + a_4 x_{ki}^2 + a_5 x_{kj}^2 - \\ -(C_0 + C_1 |x_{ki}| + C_2 |x_{kj}| + \\ + C_3 |x_{ki} \cdot x_{kj}| + C_4 x_{ki}^2 + C_5 x_{kj}^2) \leq y_k \\ a_0 + a_1 x_{ki} + a_2 x_{kj} + a_3 x_{ki} x_{kj} + a_4 x_{ki}^2 + a_5 x_{kj}^2 - \\ -(C_0 + C_1 |x_{ki}| + C_2 |x_{kj}| + \\ + C_3 |x_{ki} \cdot x_{kj}| + C_4 x_{ki}^2 + C_5 x_{kj}^2) \geq y_k, \\ k = 1, M, C_p \geq 0, p = 0, 5, \quad (2)$$

where k is the number of the measurement (test), which results we are using; M is the sample volume. The task is to minimize the total interval width for the output Y by finding the value of the interval width for the coefficient C_i and such interval center values as $a_i, i = 1, C_{r+1}^2$, which could provide for the minimal spread of the value Y and at the same time fulfill the condition (2) which says that the measurable value of the sought quantity should be within this interval. The given tasks (1), (2) are linear programming tasks. By the minimum criterion $\bar{\varepsilon}^2$, F-number of the best models are selected on the check sequence, which makes it possible to realize the selection process.

The value F stands for *freedom in choosing*, with $F = C_{r+1}^2$. The outputs of these models serve as the input arguments for constructing models of the next order. To select the best models, the following criteria are usually used: *criterion of accuracy*

$$\bar{\varepsilon}^2 : \bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N (y_i - y_i^*)^2 \quad (3), \quad \text{criterion of}$$

unbiasedness. $\bar{\varepsilon}^2(m) = \min \bar{\varepsilon}^2$ is found. The condition $\bar{\varepsilon}^2(m) > \bar{\varepsilon}^2(m-1)$ is checked, where $\bar{\varepsilon}^2(m)$, $\bar{\varepsilon}^2(m-1)$ are the values of the criterion of accuracy for the best models of the m^{th} selection order accordingly. If it is a "yes", it is the end. The sought model is chosen from the partial descriptions of the $\bar{\varepsilon}^2(m-1)$ -th order, where the minimum error can be achieved.

Otherwise, we move to constructing the next order of partial descriptions. At that, we select the F-number of best descriptions.

The final stage. Based on the accuracy criterion, we select the best model out of the F-number of best models. We reconstruct the analytical form of the best model, using the Godel numbering, moving from finish to start and successively replacing the variables, and calculate the expressions for the sought model in the initial description volume [1].

Chapter 2: portfolio optimization under fuzzy conditions

Let us assume that we have a securities portfolio that consists of N active assets on the interval $[0, T]$. The predicted behavior of each of the portfolio components $i = 1, \dots, N$, at the moment T is characterized by its final estimated return profitability $\bar{r}_i$ (evaluated at the point T as the relative asset price increment over the period). Since the yield on securities is of random nature, its exact value in the future is unknown, thus, any random description of such kind of probability cannot be accurate. In this case, it is more appropriate to use triangular fuzzy numbers to describe the profitability (return). Therefore, for i^{th} security we have: $\bar{r}_i$ - expected return on the i^{th} security; r_{li} - lower bound return on the i^{th} security; r_{2i} - upper bound return on the i^{th} security. $r_i = (r_{li}, \bar{r}_i, r_{2i})$ - return on the i^{th} security, a triangular fuzzy number. Then the overall portfolio return is

$$r = (r_{\min} = \sum_{i=1} x_i r_{li}; \bar{r} = \sum_{i=1} x_i \bar{r}_i; r_{\max} = \sum_{i=1} x_i r_{2i}),$$

which is also a triangular fuzzy number (as the linear combination of triangular fuzzy numbers).

The cumulative practical results of the optimal portfolio construction problem solution based on securities auction results and its analysis

As the input data, we used the results, trading outcomes of the Ukrainian stock market (ux.ua). Based on this data we calculated the profitability index of stocks in percentage terms as to their current price. The results are introduced in Tab. 1.

We use the correlation analysis of dynamic series $x_i(t)$ and define optimal lags for each of the input variables. Thus, for example, when forecasting the AZST stock price, the lags for the input variables were as follows (see Tab. 2):

Constructing stock profitability index polynomial model

Using the results of the correlation analysis and fuzzy group method of data handling, we received the following models, which were synthesized at 12 out of 15 points. The remaining 3 points in each experiment were used for the forecasting purposes.

Table 1.

Date/ Stocks	AZST	BAVL	CEEN	DOEN	MSICH
1	-0,009677	-0,007838	-0,019876	-0,017059	-0,019785
2	-0,049829	-0,03839712	-0,05519	-0,067603	-0,071678
3	0,03775	0,041532	0,027439	0,054246	0,03226
4	-0,004641	0,005632	-0,002994	0,036153	0,0010316
5	0,041802	0,02679	0,024025	0,015904	0,037471
6	0,000341	-0,009409	0,058282	0,0123	0,014989
7	-0,011336	-0,002566	0,033859	-0,009626	-0,005693
8	-0,042104	-0,035468	-0,052067	-0,060867	-0,055024
9	0,022898	0,02153	0,027561	0,033084	0,05605
10	-0,0027	-0,001985	0,008666	0,011724	0,027703
11	0,006789	0,007715	0,031295	0,007243	0,003228
12	-0,008107	0,003048	0,020372	0,042186	-0,014174
13	-0,004323	0,006843	0,018863	0,004218	0,0071145
14	0,021825	0,023042	0,034775	0,007053	0,025014
15	0,005611	0,018128	-0,004946	-0,010201	0,01882
16	0,021706	0,014136	-0,018653	-0,001846	0,026576
17	0,031263	-0,008307	0,019211	-0,016027	-0,010045
18	-0,009091	0,012581	-0,004062	0,006891	0,016829
19	0,005512	0,01413	0,019447	0,021154	0,007951
20	0,003164	0,01074	0,005734	0,01112	-0,000161

Table 2.

Variable	Lag	Correlation
AZST	2	0,330041858
BAVL	5	0,251828399
CEEN	2	0,210079481
DOEN	5	0,127865395
MSICH	2	0,127548329

Table 3.

Stock	AFE	SD
AZST	0,0045	0,004934
BAVL	0,00218	0,002326
CEEN	0,006135	0,006275
DOEN	0,003978	0,004108
MSICH	0,003714	0,00382

The final forecasting results are introduced in Tab. 3.

In this table, AFE stands for the average forecast error and SD means standard deviation. As we can see from the above mentioned results, in general the actual profitability index value remained within the forecast interval. Adaptation of coefficients on the introduction of new values helped increase the accuracy significantly. The final stage of finding the stock share distribution in the portfolio based on the interval estimation of the P/E ratio of each stock, is

performed using the fuzzy group method of data handling. For example, in Tab. 4 you can see the results obtained for point 1.

Table 4.

	Lower bound	Expected return	Upper bound	Share
BAVL	-0,005042	0,010273	0,025589	0,101
CEEN	-0,005027	0,008949	0,022925	0
MSICH	-0,013872	0,015114	0,044101	0,135
DOEN	0,002955	0,008155	0,013355	0,122
AZST	0,004206	0,01975	0,035295	0,642
Portfol	0,000678	0,016752	0,032826	1

Conclusion

As the result of this work, we showed how to use the fuzzy group method of data handling for portfolio return prediction, which gives us a strong enough basis for portfolio optimization under fuzzy conditions. Using the fuzzy group method of data handling, an expert can simply calculate the band value where the future return on securities is expected to fluctuate.

Список використаних джерел

1. Ivakhnenko A. G. Polynomial theory of complex systems./ *Ivakhnenko A. G. // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*. - 1971. - SMC-1(1). - P. 364-378.
2. Zaychenko Y.P. Fuzzy group method of data handling and its application in the problem of macroeconomic indexes forecasting / Zaychenko Y.P., Kebkal A.G., Krachkovsky V.F.// *Scientific Notes of NTUU "KPI"*. - 2000. - № 2. - P. 18-26.
3. Zaychenko Y.P. The investigation of different membership functions in fuzzy group method of data handling. / Zaychenko Y.P., Zayets I.O., Kamotsky A. V., Pavljuck O.V. // *Control Systems and Machines*. – 2003. - № 2. - P. 56 - 67.
4. Sharp W. Simplified model for portfolio analysis / Sharp W. // *Management Sciences*. – 1963. - Vol.9, № 2.
5. Tobin J. Liquidity Preference as Behavior Towards Risk/ Tobin J. // *Review of Economic Studies*. – 1958. - 26, № 1.
6. Tobin J. The Theory of Portfolio Selection. The Theory of Interest Rates / Tobin J. - Ed. By Hahn F. and Brechlin, London, Macmillan and Co., 1965.
7. Merton R. An International Capital Asset Pricing Model / Merton R. // *Econometrica*. - 1973.
8. Ross S. The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing/ Ross S. // *Journal of Economic Theory*. - 1976. - 13, № 3.

References

1. IVAKHNENKO A. G. (1971) "Polynomial theory of complex systems", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-1(1), pp. 364-378.
2. ZAYCHENKO, Y.P., KEBKAL, A.G., and KRACHKOVSKY, V.F., (2000) "Fuzzy group method of data handling and its application in the problem of macroeconomic indexes forecasting", *Scientific Notes of NTUU "KPI"*, № 2, pp. 18-26.
3. ZAYCHENKO, Y.P., ZAYETS, I.O., KAMOTSKY, A.V., and PAVLJUCK, O.V. (2003) "The investigation of different membership functions in fuzzy group method of data handling", *Control Systems and Machines*, № 2, pp. 56 - 67.
4. SHARP, W. (1963) "Simplified model for portfolio analysis", *Management Sciences*, vol.9, № 2.
5. TOBIN, J. (1958) "Liquidity Preference as Behavior Towards Risk", *Review of Economic Studies*, 26, № 1.
6. TOBIN, J. (1965) *The Theory of Portfolio Selection. The Theory of Interest Rates*, ed. By Hahn F. and Brechlin, London, Macmillan and Co.
7. MERTON, R. (1973) "An International Capital Asset Pricing Model", *Econometrica*.
8. ROSS, S. (1976) "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing", *Journal of Economic Theory*, 13, № 3.

Надійшла до редколегії 19.08.2017

УДК 519.6

Турбал Ю.В., д.т.н., доцент,
Бомба А.Я., д.т.н., професор,
Турбал М.Ю., аспірант,
Сьох А.П., аспірант,
Радовенюк О.В., аспірант

**Просторове узагальнення
“пірамідального” методу екстраполяції
даних**

Національний університет водного
господарства та природокористування,
вул. Соборна, 11, м. Рівне, Україна, 33022
e-mail: turbaly@gmail.com

Turbal Y.V., D.Sc. (Tech.), Assoc. Prof.,
Bomba A.Ya., D.Sc. (Tech.), Prof.,
Turbal M.Y., postgraduate,
Sokh A.P., postgraduate,
Radoveniuk O.V., postgraduate

**Spatial generalization of "pyramidal" data
extrapolation method**

National university of water and environmental
engineering
Soborna str., 11, Rivne, Ukraine, 33022
e-mail: turbaly@gmail.com

У статті розглядається просторовий випадок “пірамідального” методу екстраполяції часових рядів, що ґрунтується на основі аналізу розділених різниць спеціального виду. Для побудови прогнозного значення деякої поверхні у вибраній точці пропонується розглядати шляхи, що проходять через вузли решітки, де відомі значення відповідної поверхні та визначається спеціальний параметр (міра) прогнозованості функції. Тоді в якості прогнозного значення вибирається результат застосування одновимірного “пірамідального” підходу для серії значень поверхні, що знаходяться вздовж того шляху, для якого міра прогнозованості є максимальною.

Ключові слова: екстраполяція, прогноз, розділені різниці, інтерполяція, часові ряди

The article deals with the spatial case of the "pyramidal" method of time series extrapolation. To construct the "predictive" value of some surface at the selected point, it is proposed to consider paths passing through lattice nodes, where the values of the corresponding surface are known and a special parameter (measure) of the predictability of the function is determined. Then, a predictive value is the result of one-dimensional "pyramidal" approach for the function values through the path for which the degree of predictability is maximal.

Key Words: extrapolation, forecast, divided differences, interpolation, time series.

Статтю представив д.т.н., проф. Гарашенко Ф.Г.

I. INTRODUCTION

Today the series of quantitative and qualitative approaches of forecasting are known [7]. The most common methods of short time-series forecasting are the extrapolation methods. There are a number of problems dealing with the study of small time series. For example, in the absence of additional information is often impossible to conclude that process is determinate or indeterminate, which significantly effects on the model construction. In determinate case is obvious that for any set of points there are many curves that pass through them or something to bring, and it is difficult to argue that one curve (model) is precisely the law that comprehensively describes the phenomenon and will effectively predict its behavior in the future.

The hypothesis, which corresponds to the observation point, is effective if it is appropriate to predict with reasonable accuracy the process starting from any step of observations. In practice, the finding an effective hypothesis is impossible.

In this paper we analyze a special method of extrapolation which was presented in [1] and propose a space extension of this method. The «pyramidal» method is based on the property of the rows of modified finite differences that provide the best cubic approximation in the range of convexity. Numerical results show significant advantages of the proposed method in comparison with approaches to extrapolate, based on the using of polynomials, including Newton's extrapolation.

II. THE MAIN FEATURES OF "PIRAMIDAL" METHOD

A new method of data extrapolation was proposed in [1]. The main feature of this method is construction a special divided differences and finding their order, for which a better predicted value in a certain sense can be found. Then the value of the original function at the point located outside the interpolation interval is based on the predictive value for the divided differences using a special computational procedure.

Let $f(x)$ be a continuous function of one independent variable defined over a closed interval $[a, b]$ having continuous derivatives and let values $f_1, f_2, \dots, f_n$ of this function are known at the points $x_1, x_2, \dots, x_n$ respectively. It is needed to assess the value of this function at the point $x > x_n$. Consider the finite differences modified as follows:

$$\Delta^j f_i = \frac{\Delta^{j-1} f_{i+1} - \Delta^{j-1} f_i}{r_i^j - l_i^j}, \quad (1)$$

$$\text{where } r_i^j = \begin{cases} x_{i+\frac{j}{2}}, j=2k, \\ x_{i+\left[\frac{j}{2}\right]+1}, j=2k+1, \end{cases}$$

$$l_i^j = \begin{cases} x_{i+\frac{j}{2}-1}, j=2k, \\ x_{i+\left[\frac{j}{2}\right]}, j=2k+1, \end{cases}$$

$$j = \overline{1, n-1}, i = \overline{1, n-j}.$$

Define the middle points $x_i^c = (x_i + x_{i+1})/2$. Let $f_i^c, i = \overline{1, n-1}$ be the functions values in intermediate points $x_i^c, i = \overline{1, n-1}$. Then we can define the finite differences in the intermediate points as follows:

$$\Delta^j f_i^c = \frac{\Delta^{j-1} f_{i+1}^c - \Delta^{j-1} f_i^c}{\hat{r}_i^j - \hat{l}_i^j}, \quad (2)$$

$$\text{where } \hat{r}_i^j = \begin{cases} x_{i+\frac{j}{2}+1}, j=2k, \\ x_{i+\left[\frac{j}{2}\right]+1}, j=2k+1, \end{cases}$$

$$\hat{l}_i^j = \begin{cases} x_{i+\frac{j}{2}}, j=2k, \\ x_{i+\left[\frac{j}{2}\right]}, j=2k+1, \end{cases} \quad j = \overline{1, n-2}, i = \overline{1, n-j}.$$

Consider the values of the form:

$$\tilde{\Delta}^i f_{n-i}^c = 2 \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+2}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c)}{(r_i - c_i)(r_i - l_i)} - \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c)}{(c_i - l_i)(r_i - l_i)},$$

where

$$r_i = \begin{cases} x_{n-\frac{i}{2}+1}, i=2k, \\ x_{n-\left[\frac{i}{2}\right]}, i=2k+1, \end{cases} \quad c_i = \begin{cases} x_{n-\frac{i}{2}}, i=2k, \\ x_{n-\left[\frac{i}{2}\right]}, i=2k+1, \end{cases}$$

$$l_i = \begin{cases} x_{n-\frac{i}{2}}, i=2k, \\ x_{n-\left[\frac{i}{2}\right]-1}, i=2k+1, \end{cases} \quad ll_i = \begin{cases} x_{n-\frac{i}{2}-1}, i=2k, \\ x_{n-\left[\frac{i}{2}\right]-1}, i=2k+1. \end{cases}$$

$$i = \overline{2, n-1}.$$

According to [1] if for any index i the condition

$$\frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c)}{c_i - l_i} = \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c)}{c_i - ll_i} \quad (3)$$

is satisfied and the condition of linearity of slope change velocity for the broken line with nodes at the points $(ll_i, \Delta^{i-2} f_{n-i}^c), (l_i, \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c), (c_i, \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c), (r_i, \Delta^{i-2} f_{n-i+2}^c), (rr_i, \Delta^{i-2} f_{n-i+2}^c)$ it is satisfied equality: $\tilde{\Delta}^i f_{n-i}^c = \Delta^i f_{n-i}^c$. (4)

Then a procedure of finding of the function unknown value at the point x_n^c can be built as follows:

$$\Delta^{j-1} f_{n-j+1}^c = \Delta^{j-1} f_{n-j}^c + \Delta^j f_{n-j}^c (\hat{r}_{n-j}^j - \hat{l}_{n-j}^j),$$

$$j = \overline{i, 1}$$

Consequently, the following algorithm of extrapolation was proposed:

1. Construct the table of finite difference according to (1).
2. Index i^* is finding according to the formula

$$i^* = \operatorname{argmin}_i \left| \frac{\left(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c \right)}{c_i - l_i} - \frac{\left(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c \right)}{c_i - l_i} \right|$$

Calculate the value $\tilde{\Delta}^{i^*} f_{n-i^*}^c$.

3. The predictive function value formula:

$$\Delta^{j-1} f_{n-j+1}^c = \Delta^{j-1} f_{n-j}^c + \Delta^j f_{n-j}^c \left(\hat{r}_{n-j}^j - \hat{l}_{n-j}^j \right),$$

where $\tilde{\Delta}^{i^*} f_{n-i^*}^c = \Delta^{i^*} f_{n-i^*}^c$, $j = \overline{1, 1}$.

Note that for better effectiveness of the method which is described above it is necessary the condition: the points $\left(x_{i+\frac{j}{2}}, \Delta^{i-2} f_{n-i}^c \right)$,

$\left(r_i, \Delta^{i-2} f_{n-i+2} \right)$ must lie on the other side of the line passes through the points $\left(l_i, \Delta^{i-2} f_{n-i}^c \right)$ and $\left(c_i, \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c \right)$. The last condition guarantees that cubic interpolation is the best on the corresponding interval.

Let us consider parameter that defines measure of function predictiveness according to this method:
 $\mu_p(f(.)) = \exp \{ -|\delta_1 f - \delta_2 f| / \min(|\delta_1 f|, |\delta_2 f|) \}$,

$$\text{where } \delta_1 f = \frac{\left(\Delta^{i^*-2} f_{n-i^*+1}^c - \Delta^{i^*-2} f_{n-i^*+1}^c \right)}{c_{i^*} - l_{i^*}}$$

$$\delta_2 f = \frac{\left(\Delta^{i^*-2} f_{n-i^*+1}^c - \Delta^{i^*-2} f_{n-i^*}^c \right)}{c_{i^*} - l_{i^*}}$$

Obviously that $\mu_p(f(.)) = 1$ when condition (3) is satisfied and $\mu_p(f(.))$ tends to 0 when

$$|\delta_1 f - \delta_2 f| / \min(|\delta_1 f|, |\delta_2 f|) \gg 1$$

III. SPASE ANALOGUE

In this paragraph we consider two-dimensional case of the method described above. Let $f(x, y)$ be a continuous function of two independent variables defined over $[a, b] \times [a, b]$ having continuous derivatives and let values $f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1n}, f_{21}, f_{22}, \dots, f_{2n}, \dots, f_{m1}, f_{m2}, \dots, f_{mn}$ of this function are known at the set of points $\Omega = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), \dots, (x_1, y_n), (x_2, y_2), \dots, (x_2, y_n), \dots, (x_m, y_1), (x_m, y_2), \dots, (x_m, y_n)\}$, respectively, where $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, $y_1 < y_2 < \dots < y_n$. We need to assess the value of this function at the point (x, y) , $x > x_n$, $y > y_n$.

Note that we can interpret the indexes as discrete time and we can define the partial order relation on any subsequence of Ω .

Consider the analogue of finite differences (1) modified as follows:

$$\Delta_p^j f_{ik} = \begin{cases} \frac{\Delta_p^{j-1} f_{i+1k} - \Delta_p^{j-1} f_{ik}}{r_i^j - l_i^j}, & p = x, \\ \frac{\Delta_p^{j-1} f_{ik+1} - \Delta_p^{j-1} f_{ik}}{r_k^j - l_k^j}, & p = y, \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{where } r_i^j = \begin{cases} x_{i+\frac{j}{2}}, & j:2, p = x, \\ x_{i+\left[\frac{j}{2}\right]+1}, & j-:2, p = x, \\ y_{i+\frac{j}{2}}^c, & j:2, p = y, \\ y_{i+\left[\frac{j}{2}\right]+1}, & j-:2, p = y, \end{cases}$$

$$l_i^j = \begin{cases} x_{i+\frac{j}{2}-1}^c, & j:2, p = x, \\ x_{i+\left[\frac{j}{2}\right]}, & j-:2, p = x, \\ y_{i+\frac{j}{2}-1}^c, & j:2, p = y, \\ y_{i+\left[\frac{j}{2}\right]}, & j-:2, p = y, \end{cases}$$

$$j = \overline{1, n-1}, i = \overline{1, n-j} \wedge p = x,$$

$$j = \overline{1, m-1}, i = \overline{1, m-j} \wedge p = y$$

If for any number k the finite difference $\Delta_x^k f_{n-k+1l}$ is known we can easily build predictive value of the function at the point $(x = x_{n+1}, y_l)$ or $(x_l, y = y_{m+1})$ using the following procedures:

$$\begin{aligned} \Delta_x^{j-1} f_{n-j+2l} &= \Delta_x^{j-1} f_{n-j+1l} + \\ &+ \Delta_x^j f_{n-j+1l} \left(r_{n-j+1}^j - l_{n-j+1}^j \right), j = \overline{k, 1} \\ \Delta_y^{j-1} f_{l(m-j+2)} &= \Delta_y^{j-1} f_{l(m-j+1)} + \\ &+ \Delta_y^j f_{l(m-j+1)} \left(r_{m-j+1}^j - l_{m-j+1}^j \right), j = \overline{k, 1} \end{aligned}$$

Let us define the middle points $x_i^c = (x_i + x_{i+1})/2$, $y_j^c = (y_j + y_{j+1})/2$. Then we denote $f_{i^c j}$ as the corresponding function value at the point (x_i^c, y_j) . In the intermediate points we define the analogue to divided differences (1):

$$\Delta_p^j f_{i^c k} = \begin{cases} \frac{\Delta_p^{j-1} f_{(i+1)^c k} - \Delta_p^{j-1} f_{i^c k}}{r_{i^c}^j - l_{i^c}^j}, p = x, \\ \frac{\Delta_p^{j-1} f_{i^c k+1} - \Delta_p^{j-1} f_{i^c k}}{r_k^j - l_k^j}, p = y, \end{cases}$$

$$\text{where } r_{i^c}^j = \begin{cases} x_{i+\frac{j}{2}+1}, j:2 \\ x_{i+\left[\frac{j}{2}\right]+1}^c, j-:2 \end{cases}, l_{i^c}^j = \begin{cases} x_{i+\frac{j}{2}}^c, j:2, \\ x_{i+\left[\frac{j}{2}\right]+1}, j-:2 \end{cases}$$

$$j = \overline{1, n-2}, i = \overline{1, n-j}.$$

In the same way we define $\Delta_p^j f_{ik^c}, \Delta_p^j f_{i^c k^c}$. Thus we define a «pyramid» which helps to estimate the unknown function value in the predictive points.

Consider the values of the form:

$$\tilde{\Delta}_x^i f_{(n-i)^c k} = 2 \frac{\left(\Delta_x^{i-2} f_{(n-i+2)^c k} - \Delta_x^{i-2} f_{(n-i+1)^c k} \right)}{(r_i - c_i)(r_i - l_i)} -$$

$$2 \frac{\left(\Delta_x^{i-2} f_{(n-i+1)^c k} - \Delta_x^{i-2} f_{(n-i)^c k} \right)}{(c_i - l_i)(r_i - l_i)}, \quad (6)$$

$$\text{where } r_i = \begin{cases} x_{n-\frac{i}{2}+1}, i = 2k, \\ x_{n-\left[\frac{i}{2}\right]}^c, i = 2k+1, \end{cases} \quad c_i = \begin{cases} x_{n-\frac{i}{2}}^c, i = 2k, \\ x_{n-\left[\frac{i}{2}\right]}, i = 2k+1, \end{cases}$$

$$l_i = \begin{cases} x_{n-\frac{i}{2}}, i = 2k, \\ x_{n-\left[\frac{i}{2}\right]-1}^c, i = 2k+1, \end{cases} \quad ll_i = \begin{cases} x_{n-\frac{i}{2}-1}^c, i = 2k, \\ x_{n-\left[\frac{i}{2}\right]-1}, i = 2k+1. \end{cases},$$

$$i = \overline{2, n-1}.$$

Suppose that for any i we have such equality:

$$\tilde{\Delta}_x^i f_{(n-i)k}^c = \Delta_x^i f_{(n-i)k}^c.$$

Using (6) we can build a procedure of finding of the function unknown value at the point $(x = x_n^c, y_l)$ as follows:

$$\Delta_x^{j-1} f_{(n-j+1)k}^c = \Delta_x^{j-1} f_{(n-j)k}^c +$$

$$+ \Delta_x^j f_{(n-j)k}^c \left(r_{(n-j)^c}^j - l_{(n-j)^c}^j \right),$$

We can illustrate our approach on Figure 1. Note that we can consider any pass which passes through the points of Ω and can be arrived to

the necessary point of prediction. This case is illustrated on Figure 2. But in this case it is not known which value is extrapolated-upper, right, or diagonal. In this case we must extrapolate the last node of corresponding broken line. Then the predictiveness of the function is a product of measures of predictiveness corresponding point of broken line and the function. Let us consider this case in more detail.

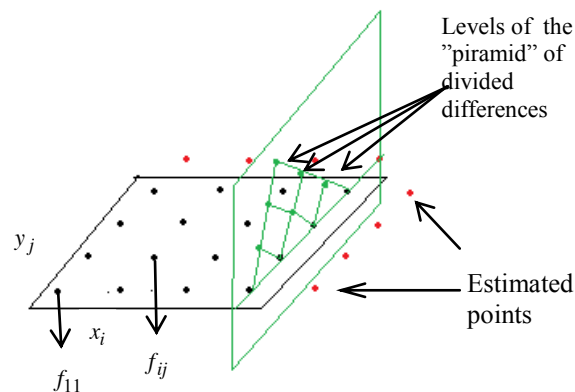


Figure 1. Illustration to the method

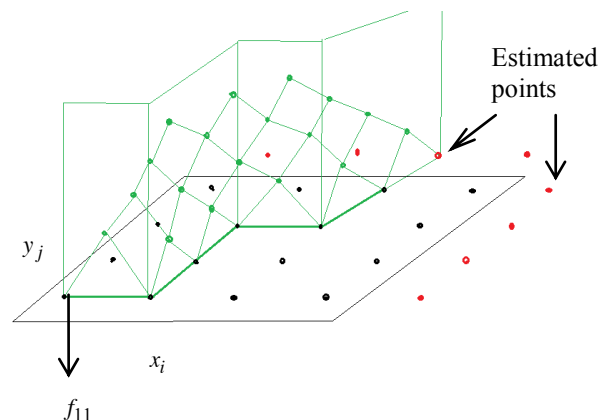


Figure 2. The possible way of pass choice

There is a number of methods for broken curve extrapolation. We can consider our broken line as automaton which have three states-0,1,2 corresponding to the orientation of segments-vertical, horizontal or diagonal. Then we can enter a measure of predictability for every state μ and predictive factor pf , depending on the amount of information available. We can define a measure of predictability as the ratio of the number of transition from the current automaton state into predictable one and a number of all transitions from the corresponding state. The predictive factor is maximum of

predictive measures for all states. For example, in the case of 00000000001, the predictive measures $\mu(0) = \frac{0}{0}$, $\mu(1) = \frac{0}{0}$ (there is not enough information), we can define the predictive factor as 0; 0000000000000 - $\mu(0) = \frac{0}{0}$ (there is not enough information if automaton has state 1) or $\mu(0) = \frac{12}{12} = 1$ (automaton has only one current state 0); 000100100010, current state is “the first zero after transition from 1” - $\mu(0) = \frac{3}{3} = 1$, $pf(0) = 1$; 0001001000100 - $\mu(0) = \frac{2}{3}$, $\mu(1) = \frac{1}{3}$, $pf(0) = \frac{2}{3}$.

Another possible way to predict a point of the broken curve is, for example, smoothing the broken curve by replacing the intervals where violate the functionality of their midpoints and applying the pyramidal extrapolation method described in paragraph 1.

Thus, identifying the path in the set of points Ω we can go to a one-dimensional case, consider instead of difference (5) the difference (1) and (2), where the value of a one-dimensional function is the value of two-dimensional in the nodes of the broken line. In the case of number ways for predictions of the function value at some point outside the region, we define a predictive factor as maximum of all prediction measures.

Thus, in the general case, it is necessary to consider all the passes that go to some point of extrapolation and choose one for which the forecasting factor is maximal. In general, such a procedure will require significant computing resources. However, in practice, the construction of a pass with optimal predictability can be significantly simplified taking into account the specifics of the problem being solved. For example, for the surface $f(x, y) = (x^6 + y^6) \sin(x^2 + y^2)$ predictability is the same for all passes which start from the point (0,0) through the corresponding rays.

We present some simulation results. Let the surface $f(x, y) = (x^6 + y^6) \sin(x)$ be defined in points (1,1), (1.5,1), (2,1), (2.5,1), (3,1), ...,

(11,1), (1,2), ..., (11,2), ..., (11,11). Let $y = 0$. Then we can consider one-dimensional case. Optimal

value $i^* = 8$, $\frac{(A^{i-2} f_{n-i+1}^c - A^{i-2} f_{n-i}^c)}{c_i - l_i} = 610713,879$,
 $\frac{(A^{i-2} f_{n-i+1}^c - A^{i-2} f_{n-i+1}^c)}{c_i - l_i} = 611585,256$,

$\tilde{A}^i f_{n-i}^c = -703068,269$. In this case, using

procedures described above we find the predictive value of the function at point 11.5, it is equal -2017907.745, the exact value -2024974.077. Thus, the relative error of extrapolation is 0.0035, predictive factor is $\mu = 0,99$.

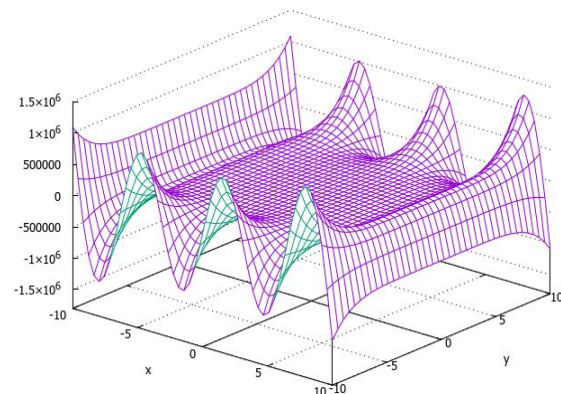


Figure 3 Illustration to the extrapolation of the surface $f(x, y) = (x^6 + y^6) \sin(x)$,

IV. CONCLUSION

Thus, the spatial analogue of the pyramidal method of extrapolation is considered in the paper. The expansion of dimensionality has led to the emergence of new features of the implementation of this method. The specificity of the pyramidal method is the ability to analyze when it works best. In accordance with this, a special measure of predictiveness of the function is introduced, which allows us to propose a constructive algorithm for extrapolating the function of two variables at a given point.

Список використаних джерел

1. Бомба А.Я. Метод екстраполяції на основі модифікованих розділених різниць / Бомба А.Я., Сьох А.П., Турбал Ю.В., Турбал М.Ю. // Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна, серія "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління". – 2017. – т.33. – С.36-51.
2. Бомба А. Я. Методы анализа данных и прогнозирование траекторий уединенных волн / А. Я. Бомба, Ю. В. Турбал // Проблемы управления и информатики. – 2015. – № 5. – С. 34–43.
3. Brezinski C. M. Extrapolation methods/ Brezinski C. M., Zaglia M.R. // Applied numerical Mathematic. – 1995. – Vol. 15, Issue 2. – Pp. 123-131.
4. Костинский А.С. О принципах экстраполяции геофизических данных/ А.С. Костинский // Доповіді Національної академії наук України. – 2014. – №2. – С.111-117.
5. Hyndman Rob J. Minimum sample size requirements for seasonal forecasting models/ Hyndman Rob J., Kostenko A. V. – FORESIGHT. – 2007. – Issue 6.
6. Levi J. C. A Comparative Study of Extrapolation Methods for Creep Data at Small Strains/ Levi J. C., Barody I. I. – London: Her Majesty's Stationery Office, 1969. – 29 p.
7. Ляшенко І.М. Основи математичного моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів/ І.М.Ляшенко, М.В.Коробова, А.М.Столяр. – Тернопіль, 2006. – 300 с.
8. Ragan P. Statistical extrapolation methods for estimating wind turbine extreme loads/ Ragan P., Manuel L. – University of Texas, Reno, Nevada, 2007. – 19 p.
9. Ray S.S. Numerical analysis with algorithms and programming/ Ray S.S. – CRC Press, 2016. – 675 p.
10. Sidi A. Practical extrapolation methods. Theory and applications/ Sidi A. – University of Cambridge, 2003. – 543 p.

References

1. BOMBA A.Y., SOKH, A.P., TURBAL, Y.V., TURBAL, M.Y. (2017) "Metod ekstrapoliatsii na osnovi modyfikovanykh rozdilenykh riznyts", *Visnyk Kharkivskoho natsionalnoho universytetu im. V.N.Karazina, seriia "Matematychne modeliuvannia. Informatsiini tekhnolohii. Avtomatyzovani systemy upravlinnia*, t.33, st.36-51.
2. BOMBA, A.YA., and TURBAL, YU.V. (2015) "Data analysis method and problems of identification of trajectories of solitary waves", *Journal of Automation and Information Sciences*, vol.5, pp. 34-43.
3. BREZINSKI, C.M., ZAGLIA, M.R. (1995) "Extrapolation methods", *Applied numerical Mathematics*, Vol. 15, Issue 2, pp. 123-131.
4. KOSTINSKY, A.S. (2014) "On the principles of a spline extrapolation concerning geophysical data", *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, Vol.2, pp.111-117.
5. HYNDMAN, ROB J., and KOSTENKO, A. V. (2007) *Minimum sample size requirements for seasonal forecasting models*, FORESIGHT, Issue 6.
6. LEVI, J. C. and BARODY., I. I. (1969) *A Comparative Study of Extrapolation Methods for Creep Data at Small Strains*, London: Her Majesty's Stationery Office, 29 p.
7. LYASHENKO, I.M., KOROBOVA, M.V., STOLYAR A.M. (2006) *Basics of mathematical modelling of economic, environmental and social processes*, Ternopil, 300 p.
8. RAGAN, P., MANUEL, L. (2007) *Statistical extrapolation methods for estimating wind turbine extreme loads*, University of Texas, Reno, Nevada, 19 p.
9. RAY, S.S. (2016) *Numerical analysis with algorithms and programming*, CRC Press, 675 p.
10. SIDI, A. (2003) *Practical extrapolation methods. Theory and applications*, University of Cambridge, 543 p.

Надійшла до редколегії 19.08.2017

УДК 519.21

Усар І.Я., к. ф.-м. н.
Макушенко І.А., к. ф.-м. н.

I.Ya. Usar, Ph.D.
I.A. Makushenko, Ph.D.

Оптимальне керування вхідним потоком в системах з повторними викликами і чергою

Optimal control of input flow in retrial systems with queue

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка,
03680, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д,
e-mail: usar@unicyb.kiev.ua

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: usar@unicyb.kiev.ua

У статті розглядається марковська модель багатосерверної системи з повторними викликами з обмеженою кількістю обслуговуючих приладів, скінченною довжиною черги та нескінченною орбітою. Керування системою здійснюється за допомогою порогових стратегій. Для такої моделі з'ясовано умови існування стаціонарного режиму. Подальший аналіз базується на апроксимації вихідної системи системою з обмеженою кількістю повторних викликів, для якої за допомогою матрично-аналітичного методу отримані формули для стаціонарних імовірностей. Змінний характер інтенсивності вхідного потоку в моделях даного типу дозволив поставити і розв'язати для них оптимізаційні задачі.

Ключові слова: стохастична система, повторні виклики, порогова стратегія, стаціонарний режим, оптимізація.

The paper is devoted to the perspective direction of the theory stochastic systems associated with research of retrial queuing systems. We consider a multiserver retrial queuing systems with the finite number of servers, a finite length queue and an infinite orbit. A class of bivariate migration processes is introduced to describe the service process of retrial systems with queue. We deal with a Markov models of the systems with repeated calls and queue with variable rate of input flow without limitation on the capacity of the orbit controlled by threshold strategies. At first for such models the existence conditions of stationary regime are pointed out. Further analysis is based on the approximation of the initial systems by the ones with limited orbit for which explicit vector-matrix formulas of stationary probabilities are found. As a result, we obtained effective calculating algorithms for the characteristics of the systems in stationary regime in terms of parameters of the systems according to the control strategy. For threshold control strategies the optimization problem of the total income of the system was stated and solved. We deal with the consequences of result obtained for the case of one server and one place in the queue.

Key Words: queue, repeated calls, threshold strategies, stationary regime, optimization.

Статтю представив д. т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Одним з важливих розділів теорії масового обслуговування є теорія систем з повторними викликами. Системи з повторними викликами виникають природним чином в нашій повсякденній діяльності в телефонних системах, комп'ютерних мережах, в області систем передачі інформації. У роботах [1],[2],[3] можна знайти огляд результатів в цій області.

У даній роботі ми розглядаємо багатосерверну систему з повторними викликами з обмеженою кількістю обслуговуючих приладів, скінченною довжиною черги та нескінченною орбітою.

Техніка дослідження схожа на підхід в [4], що використовує апроксимацію початкової моделі з нескінченною орбітою за допомогою скінченної моделі і прямий перехід до границі.

Основну модель, яка розглядається в роботі, визначимо як двовимірний ланцюг Маркова з неперервним часом $Q(t) = (Q_1(t), Q_2(t))$, $t \geq 0$ в множині станів $S = \{0, 1, \dots, m+n\} \times \{0, 1, \dots\}$.

Процесом міграції $Q(t)$ будемо моделювати процес обслуговування в класичній системі

$[M|M|m|m+n]$ з чергою і необмеженим числом джерел повторних викликів. Для якої m - число обслуговуючих приладів, а n - число місць у черзі. Інтенсивність вхідного потоку λ_j залежить від j - кількості джерел повторних викликів. Кожне джерело повторних викликів генерує пуассонівський потік інтенсивності ν . Час обслуговування на кожному з приладів має показниковий розподіл з параметром μ . Таким чином $Q_1(t)$ вказує на кількість зайнятих приладів і місць в черзі, а $Q_2(t)$ дорівнює кількості джерел повторних викликів.

З'ясуємо умови існування стаціонарного режиму для процесу $Q(t), t \geq 0$.

Лема. Нехай $\lambda = \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \lambda_j$. Тоді при $\frac{\lambda}{m\mu} < 1$

ланцюг $Q(t)$ ергодичний і його граничний розподіл співпадає з єдиним стаціонарним.

Доведення. Розглянемо в якості тест-функцій Ляпунова наступні функції

$$\phi(i, j) = ai + j, (i, j) \in S,$$

де параметр "a" буде визначено пізніше.

Для обраних тест-функцій середній перенос

$$y_{ij} = \sum_{(i', j') \neq (i, j)} q_{(i, j)(i', j')} (\phi(i', j') - \phi(i, j))$$

дорівнює

$$y_{ij} = \begin{cases} \lambda_j a - \min\{i, m\} \mu a + j\nu(a-1), 0 \leq i \leq m-1, \\ \lambda_j - m\mu a, i = m. \end{cases}$$

При $\frac{\lambda}{m\mu} < 1$ для будь-якого $a \in \left(\frac{\lambda}{m\mu}, 1\right)$ існує

таке $\varepsilon > 0$, що $y_{ij} < -\varepsilon$ для всіх $(i, j) \in S$ за винятком скінченного числа станів (i, j) . Таким чином для тест-функцій $\phi(i, j), (i, j) \in S$ виконуються умови теореми Твіді ([1], стор.97).

Лему доведено.

Змінний характер інтенсивності вхідного потоку в моделях типу $[M|M|m|m+n]$ дає можливість ставити і розв'язувати для них оптимізаційні задачі. В зв'язку з цим розглянемо клас багатопорогових стратегій, які задаються порогами $H' = (H_1, H_2, \dots, H_{N-1})$,

$$0 = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{N-1} < H_N = \infty,$$

N - фіксоване число. Якщо в момент часу $t \geq 0$ число джерел повторних викликів $Q_2(t) \in [H_{i-1}, H_i)$, $i = 1, \dots, N$, то будемо казати, що система з повторними викликами функціонує

в i -ому режимі і інтенсивність вхідного потоку дорівнює h_i . Інші параметри від режиму не залежать. Вибір порогової стратегії H означає фіксацію залежності λ_j від числа джерел повторних викликів: $\lambda_j = h_i, j \in [H_{i-1}, H_i)$, $i = 1, \dots, N$. Відповідний процес обслуговування і його характеристики будемо наділяти індексом H , $Q(t) = Q(t, H), \dots$.

Нехай $S_1(t, H)$ - число викликів, обслуговування яких завершено в системі за час t ; $S_2(t, H)$ - число викликів, які отримали відмову в обслуговуванні і стали повторними викликами; $S_3(t, H)$ - число перемикачів інтенсивності вхідного потоку. Якщо існують границі $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} S_i(t, H)$, то будемо позначати їх через $S_i(H)$, $i = 1, 2, 3$.

Розглянемо оптимізаційну задачу

$$W(H) = C_1 S_1(H) - C_2 S_2(H) - C_3 S_3(H) \rightarrow \max,$$

$$0 = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{N-1} < H_N = \infty,$$

$$H_i \in \{0, 1, \dots\}, i = 1, 2, \dots, N-1,$$

де C_1 - прибуток, пов'язаний з обслуговуванням одного виклику; C_2 - штраф за відмову в обслуговуванні; C_3 - штраф за перемикач інтенсивності вхідного потоку.

Розв'язком даної оптимізаційної задачі є така багатопорогова стратегія H , яка максимізує середній прибуток від роботи системи.

В умовах існування стаціонарного режиму (умови леми) граничні функціонали $S_i(H)$, $i = 1, 2, 3$, теж існують і можуть бути виписані через стаціонарні імовірності $\pi_{ij}, (i, j) \in S$.

$$S_1(H) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^m i \mu \pi_{ij}(H) + \sum_{i=m+1}^{m+n} m \mu \pi_{ij}(H) \right),$$

$$S_2(H) = \sum_{i=1}^N h_i \sum_{j=H_{i-1}}^{H_i-1} \pi_{m+n+j}(H),$$

$$S_3(H) = \sum_{i=1}^{N-1} \left(h_i \pi_{m+n+H_{i-1}}(H) + \nu H_i \sum_{k=0}^{m+n-1} \pi_{kH_i}(H) \right).$$

Таким чином для розв'язку заданої оптимізаційної задачі необхідні ефективні алгоритми розрахунку стаціонарного розподілу для системи $[M|M|m|m+n]$.

Для побудови розрахункових алгоритмів і явних формул ми розглянемо модель $[M|M|m|m+n]^{(N)}$, в якій кількість джерел

повторних викликів N є скінченною. Якщо знайти стаціонарний розподіл такої системи і перейти до границі $N \rightarrow \infty$ (в умовах леми), то ми отримаємо стаціонарний розподіл для системи $[M|M|m+n]$.

Позначимо через $Q^{(N)}(t) = (Q_1^{(N)}(t), Q_2^{(N)}(t))$ процес обслуговування для системи з чергою і скінченною орбітою. Процес $Q^{(N)}(t)$ приймає значення в скінченній множині станів $S^{(N)} = \{0, 1, \dots, m+n\} \times \{0, 1, \dots, N\}$, і є стаціонарним. Знайдемо його стаціонарний розподіл $\pi_{ij}^{(N)}, (i, j) \in S^{(N)}$.

Нехай $A(j), j = 0, 1, \dots, N-1$ - тридіагональна матриця вигляду

$$A(j) = \begin{pmatrix} a_0^{(0)} & a_0^{(+)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_1^{(-)} & a_1^{(0)} & a_1^{(+)} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{(-)} & a_2^{(0)} & a_2^{(+)} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{m+n-2}^{(-)} & a_{m+n-2}^{(0)} & a_{m+n-2}^{(+)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m+n-1}^{(-)} & a_{m+n-1}^{(0)} \end{pmatrix},$$

де

$$a_i^{(0)} = \begin{cases} \lambda_j + i\mu + j\nu, & i = 0, 1, \dots, m, \\ \lambda_j + m\mu + j\nu, & i = m+1, m+2, \dots, m+n-1, \\ a_i^{(+)} = -\lambda_j, & i = 0, 1, \dots, m+n-2, \end{cases}$$

$$a_i^{(-)} = \begin{cases} -i\mu, & i = 1, 2, \dots, m, \\ -m\mu, & i = m+1, m+2, \dots, m+n-1, \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- матриці розмірності $(m+n) \times (m+n)$.

Через $D(N)$ будемо позначимо трикутну матрицю: $D(N) =$

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -(N\nu + \lambda_N) & 2\mu & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -N\nu & -(N\nu + \lambda_N) & 3\mu & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -N\nu & -N\nu & -N\nu & \dots & -(N\nu + \lambda_N) & m\mu & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -N\nu & -N\nu & -N\nu & \dots & -N\nu & -(N\nu + \lambda_N) & m\mu & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -N\nu & -N\nu & -N\nu & \dots & -N\nu & -N\nu & -N\nu & \dots & -(N\nu + \lambda_N) & m\mu \end{pmatrix}$$

Нам також необхідні будуть вектори:

$$\pi^{(N)}(j) = (\pi_{0j}^{(N)}, \pi_{1j}^{(N)}, \dots, \pi_{m+n-1j}^{(N)}),$$

$$G^{(N)}(j) = \frac{\pi^{(N)}(j)}{\pi_{0N}^{(N)}} = (G_{0j}^{(N)}, G_{1j}^{(N)}, \dots, G_{m+n-1j}^{(N)}),$$

$\bar{1}(m+n-1) - (m+n-1)$ - вимірний вектор, що складається з одиниць,

$e_i(m+n-1) - (m+n-1)$ - вимірний вектор, i -та компонента якого дорівнює одиниці, а інші дорівнюють нулю. Через $\bar{1}, e_i$ будемо позначати такі ж вектори розмірності $m+n$.

Теорема. Якщо $\lambda_j > 0, j = 0, 1, \dots, N$, то стаціонарні ймовірності $\pi_{ij}^{(N)}, (i, j) \in S^{(N)}$ можна подати у вигляді:

$$\begin{pmatrix} \pi_{1N}^{(N)}, \pi_{2N}^{(N)}, \dots, \pi_{m+n-1N}^{(N)} \end{pmatrix}' = \pi_{0N}^{(N)} D^{-1}(N) (N\nu \bar{1}(m+n-1) + \lambda_N e_1(m+n-1)), \quad (1)$$

$$\pi_{m+nN}^{(N)} = \frac{\pi_{0N}^{(N)}}{m\mu} G^{(N)}(N) (N\nu \bar{1} + \lambda_N e_{m+n}),$$

$$\pi_j^{(N)} = \frac{\pi_{0N}^{(N)} N! \nu^{N-j}}{j!} G^{(N)}(N) T(N-1) \times \dots \times T(j), \quad (2)$$

$$\pi_{m+nj}^{(N)} = \frac{\pi_{0N}^{(N)} N! \nu^{N-j}}{\lambda_j j!} G^{(N)}(N) \times$$

$$\times T(N-1) \times \dots \times T(j+1) \bar{1}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3)$$

де

$$\pi_{0N}^{(N)} = \left\{ G^{(N)}(N) \left(\bar{1} + N! \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\nu^{N-j}}{j!} T(N-1) \times \dots \times T(j+1) \times \left[T(j) + \frac{1}{\lambda_j} \bar{1} + \frac{1}{m\mu} (N\nu \bar{1} + \lambda_N e_{m+n}) \right] \right)^{-1} \right\}, \quad (4)$$

$$G^{(N)}(N) = \begin{pmatrix} 1 \\ D^{-1}(N) (N\nu \bar{1}(m+n-1) + \lambda_N e_1(m+n-1)) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$T(j) = \left[B + \frac{m\mu}{\lambda_j} C \right] A^{-1}(j), \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Доведення. Для зручності позначимо $\pi_{ij}^{(N)} = \tilde{\pi}_{ij}, G_{ij}^{(N)} = \tilde{G}_{ij}, (i, j) \in S^{(N)}$. Для кожного $k = 0, 1, \dots, m-1$ розіб'ємо $S^{(N)}$ на дві підмножини $E_k = \{(0, N), (1, N), \dots, (k, N)\}$ та $\bar{E}_k = S^{(N)} \setminus E_k$. В силу рівності потоків імовірностей через замкнений контур у стаціонарному режимі ([5], ст.49), будемо мати

$$\begin{cases} N\nu\tilde{\pi}_{0N} + N\nu\tilde{\pi}_{1N} + \dots + N\nu\tilde{\pi}_{k-1N} + (N\nu + \lambda_N)\tilde{\pi}_{kN} = \\ = (k+1)\mu\tilde{\pi}_{k+1N}, \quad k=0,1,\dots,m-1, \\ N\nu\tilde{\pi}_{0N} + N\nu\tilde{\pi}_{1N} + \dots + N\nu\tilde{\pi}_{k-1N} + (N\nu + \lambda_N)\tilde{\pi}_{kN} = \\ = m\mu\tilde{\pi}_{k+1N}, \quad k=m,m+1,\dots,m+n-1. \end{cases} \quad (6)$$

Для $\tilde{G}_{ij} = \frac{\tilde{\pi}_{ij}}{\tilde{\pi}_{0N}}, (i,j) \in S^{(N)}$ перші $(m+n-1)$

рівняння із системи (6) мають вигляд

$$\begin{pmatrix} \tilde{G}_{1N} \\ \dots \\ \tilde{G}_{m+n-1N} \end{pmatrix} = D^{-1}(N) \left(N\nu\bar{1}(m+n-1) + \lambda_N e_1(m+n-1) \right),$$

що дає нам (5). З (6) при $k=m+n-1$ знаходимо

$$\tilde{G}_{m+nN} = \frac{1}{m\mu} \tilde{G}'(N) (N\nu\bar{1} + \lambda_N e_{m+n}). \quad (7)$$

Знайдемо тепер $\tilde{G}_{m+nj}$ при умові, що $j=0,1,\dots,N-1$. Розіб'ємо $S^{(N)}$ на дві підмножини $S_j^{(N)} = \{(\alpha, \beta) \in S^{(N)} : \beta \leq j\}$ і $\bar{S}_j^{(N)} = S^{(N)} \setminus S_j^{(N)}$.

Знову використовуючи рівність потоків імовірностей через замкнений контур, маємо

$$\lambda_j \tilde{\pi}_{m+nj} = (j+1)\nu \tilde{\pi}_{0j+1} + \dots + (j+1)\nu \tilde{\pi}_{m+n-1j+1},$$

звідки отримаємо

$$\tilde{G}_{m+nj} = \frac{(j+1)\nu}{\lambda_j} \tilde{G}'(j+1) \bar{1}, \quad j=0,1,\dots,N-1. \quad (8)$$

Розглянемо тепер $(m+n) \times N$ замкнених контурів, які містять одну точку (i,j) з області $\tilde{S}^{(N)} = \{0,1,\dots,m+n-1\} \times \{0,1,\dots,N-1\}$. Відповідні рівняння для G_{ij} , $(i,j) \in \tilde{S}^{(N)}$ мають вигляд

$$(\lambda_j + j\nu)\tilde{G}_{0j} = \mu\tilde{G}_{1j}, \quad i=0, \quad (9)$$

$$\begin{cases} (\lambda_j + i\mu + j\nu)\tilde{G}_{ij} = (j+1)\nu\tilde{G}_{i-1j+1} + \lambda_j\tilde{G}_{i-1j} + \\ + (i+1)\mu\tilde{G}_{i+1j}, \quad i=1,2,\dots,m-1, \\ (\lambda_j + m\mu + j\nu)\tilde{G}_{ij} = (j+1)\nu\tilde{G}_{i-1j+1} + \lambda_j\tilde{G}_{i-1j} + \\ + m\mu\tilde{G}_{i+1j}, \quad i=m,m+1,\dots,m+n-2. \end{cases} \quad (10)$$

При $i=m+n-1$ з урахуванням (8)

$$\begin{aligned} (\lambda_j + m\mu + j\nu)\tilde{G}_{m+n-1j} &= (j+1)\nu\tilde{G}_{m+n-2j+1} + \\ &+ \lambda_j\tilde{G}_{m+n-2j} + \frac{(j+1)\nu m\mu}{\lambda_j} \tilde{G}'(j+1) \bar{1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Систему (9) - (11) можна представити в векторно-матричному вигляді

$$\tilde{G}'(j) = (j+1)\nu \tilde{G}'(j+1) \left[B + \frac{m\mu}{\lambda_j} C \right] A^{-1}(j) =$$

$$= (j+1)\nu \tilde{G}'(j+1) T(j), \quad j=0,1,\dots,N-1. \quad (12)$$

Розв'язком рекурентного співвідношення (12) буде послідовність векторів

$$G'(j) = \frac{N! \nu^{N-j}}{j!} \tilde{G}'(N) T(N-1) \times \dots \times T(j), \quad j=0,1,\dots,N-1. \quad (13)$$

Підставляючи праву частину (13) в (8), маємо

$$\tilde{G}_{m+nj} = \frac{N! \nu^{N-j}}{j! \lambda_j} \tilde{G}'(N) T(N-1) \times \dots \times T(j+1) \bar{1}, \quad j=0,1,\dots,N-1. \quad (14)$$

Умова нормування для стаціонарних імовірностей π_{ij} , $(i,j) \in S$ дозволяє знайти $\tilde{\pi}_{0N}$. Це дає формулу (4). Співвідношення (1)-(3) являються прямим наслідком (7), (13) та (14).

Теорема доведена.

Очевидно, ці формули являють собою ефективну рекурентну процедуру для обчислення стаціонарного розподілу.

Застосуємо отриманий результат до систем $[M|M|1|1+1]^{(N)}$ та $[M|M|1|1+1]$ з повторними викликами. У даному випадку можна провести більш детальний аналіз і отримати явні формули.

Позначимо

$$A_i(j) = \begin{cases} \prod_{k=i}^{j-1} \frac{(1+\rho_k)\mu + \lambda_{k+1} + (k+1)\nu}{\rho_k[(\lambda_k + k\nu)^2 + k\nu\mu]}, & i < j, \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

де $\rho_k = \frac{\lambda_k}{\mu}$ - завантаження системи первинними викликами, коли орбіта $Q_2(t) = k$.

Наслідок 1. Якщо $\lambda_j > 0$, $j=0,1,\dots,N$, то для будь-якого N стаціонарні ймовірності $[M|M|1|1+1]^{(N)}$ - системи з чергою та повторними викликами мають вигляд

$$\begin{aligned} \pi_{0j}^{(N)} &= \pi_{0N}^{(N)} \frac{N! \nu^{N-j} A_j(N)}{j!}, \\ \pi_{1j}^{(N)} &= \pi_{0N}^{(N)} \frac{N! \nu^{N-j} (\lambda_j + j\nu) A_j(N)}{j! \mu}, \\ \pi_{2j}^{(N)} &= \pi_{0N}^{(N)} \frac{N! \nu^{N-j} (\mu + \lambda_{j+1} + (j+1)\nu) A_{j+1}(N)}{j! \lambda_j \mu}, \\ j &= 0,1,\dots,N-1, \\ \pi_{1N}^{(N)} &= \pi_{0N}^{(N)} \frac{(\lambda_N + N\nu)}{\mu}, \\ \pi_{2N}^{(N)} &= \pi_{0N}^{(N)} \frac{(\lambda_N + N\nu)^2 + N\nu\mu}{\mu^2}, \end{aligned}$$

$$\pi_{0N}^{(N)} = \left\{ 1 + \frac{1}{\mu} (\lambda_N + N\nu) + N! \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\nu^{N-j} (\mu + \lambda_j + j\nu) A_j(N)}{j! \mu} + \right. \\ \left. + N! \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\nu^{N-j} (\mu + \lambda_{j+1} + (j+1)\nu) A_{j+1}(N)}{j! \lambda_j \mu} + \frac{1}{\mu^2} ((\lambda_N + N\nu)^2 + N\nu\mu) \right\}^{-1}$$

Розглянемо тепер систему $[M|M|1|1+1]$. З леми випливає, що ця система буде стаціонарною, якщо $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\lambda_j}{\mu} < 1$. Для того, щоб знайти представлення для стаціонарного розподілу, необхідно в формулах наслідку 1 перейти до границі при $N \rightarrow \infty$.

Введемо позначення

$$R_j \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \pi_{0N}^{(N)} N! \nu^N A_j(N).$$

Наслідок 2. Якщо для $[M|M|1|1+1]$ - системи з чергою та повторними викликами $\lambda_j > 0, j = 0, 1, \dots, \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\lambda_j}{\mu} < 1$, то для неї існують стаціонарні ймовірності

$$\pi_{0j} = \frac{R_j}{\nu^j j!}, \quad \pi_{1j} = \frac{(\lambda_j + j\nu) R_j}{\nu^j \mu j!},$$

$$\pi_{2j} = \frac{(\mu + \lambda_{j+1} + (j+1)\nu) R_j}{\nu^j \lambda_j \mu j!} \times \\ \times \frac{\rho_j [(\lambda_j + j\nu)^2 + j\nu\mu]}{(1 + \rho_j) \mu + \lambda_{j+1} + (j+1)\nu},$$

де

$$R_j = \left\{ \sum_{i=0}^j \frac{(\mu + \lambda_i + i\nu) A_i(j)}{\nu^i \mu i!} + \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{\mu + \lambda_i + i\nu}{\nu^i \mu i!} A_j(i) + \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{(\mu + \lambda_{i+1} + (i+1)\nu) A_{i+1}(j)}{\nu^i \lambda_i \mu i!} + \sum_{i=j}^{\infty} \frac{\mu + \lambda_{i+1} + (i+1)\nu}{\nu^i \lambda_i \mu i!} A_j(i+1) \right\}^{-1}$$

У статті виписані умови існування стаціонарного режиму для процесу обслуговування моделі $[M|M|m|m+n]$, проаналізовано стаціонарний розподіл скінченної моделі. Стаціонарні ймовірності системи з обмеженою орбітою отримані за допомогою матрично-аналітичного методу. Також наводяться наслідки отриманого загального результату для усіченої моделі і загальної моделі в разі одного обслуговуючого приладу і одного місця в черзі. Змінний характер інтенсивності вхідного потоку в моделях даного типу дозволив поставити і розв'язати для них оптимізаційні задачі.

Список використаних джерел

1. Falin G.I. Retrial Queues / G.I. Falin, J.G.C. Templeton. – London Chapman & Hall, 1997. – 331 p.
2. Artalejo J.R. Retrial Queueing Systems. A Computational Approach / J.R. Artalejo, A. Gomes-Corral. – Springer-Verlag, 2008. – 318 p.
3. Artalejo J.R. Steady state solution of a single server queue with linear repeated request / J.R. Artalejo, A. Gomes-Corral // J. Applaid Probability. – 1997. – Vol.34. – P. 223-233.
4. Lebedev E.O. Steady-State Analysis of M/M/c/c-Type Retrial Queueing Systems with Constant Retrial Rate / E.O. Lebedev, V.D. Ponomarov // TOP. – 2016. – Vol.24. – P. 693-704.
5. Уолрэнд Дж. Введение в теорию массового обслуживания / Дж. Уолрэнд. – Москва: Мир, 1993. – 336 с.

References

1. FALIN, G.I., TEMPLETON, J.G.C. (1997) *Retrial Queues*, London Chapman & Hall.
2. ARTALEJO, J.R., GOMES-CORRAL, A. (2008) *Retrial Queueing Systems. A Computational Approach*, Springer-Verlag.
3. ARTALEJO, J.R., GOMES-CORRAL, A. (1997) "Steady state solution of a single server queue with linear repeated request", *J. Applied Probability*, vol.34, pp. 223-233.
4. LEBEDEV, E.O., PONOMAROV, V.D. (2016) "Steady-State Analysis of M/M/c/c-Type Retrial Queueing Systems with Constant Retrial Rate", *TOP*, vol.24, pp. 693-704.
5. WALRAND, J. (1993) *An Introduction to queueing systems*, Moscow.

Надійшла до редколегії 19.08.2017

УДК 519.3

Щербатий М.В., к.ф.-м.н., доцент

**Аналіз чутливості для одновимірних
квазілінійних рівнянь в частинних
похідних**

Львівський національний університет імені
Івана Франка,
вул. Університетська 1, м. Львів, 79000
e-mail: shcherbatyy@gmail.com

M.V. Shcherbatyy, Ph.D., Associate Professor

**Sensitivity analysis for one-dimensional
semilinear partial differential equations**

Ivan Franko National University of Lviv,
1, Universytetska St., Lviv, 79000
e-mail: shcherbatyy@gmail.com

В даній статті розглядаються задачі оптимального керування та задачі аналізу чутливості для систем, поведінка яких моделюється одновимірними квазілінійними рівняннями еліптичного та параболічного типів. Коефіцієнти рівнянь та праві частини рівнянь вибираються в ролі керування. Внаслідок дискретизації функцій керування задача оптимального керування зводиться до задачі нелінійного програмування. Дано аналіз обчислювальної ефективності різних методів аналізу чутливості; складнощів, які виникають в процесі отримання співвідношень аналізу чутливості та їхньої програмної реалізації. Приведені співвідношення аналізу чутливості для задач оптимального керування одновимірними рівняннями адвекції-дифузії-реакції з кубічною нелінійністю та граничними умовами Робена.

Ключові слова: оптимальне керування, квазілінійне рівняння еліптичного типу, квазілінійне рівняння параболічного типу, аналіз чутливості, коефіцієнт чутливості, прямий метод диференціювання, метод спряжених змінних, рівняння адвекції-дифузії-реакції з кубічною нелінійністю.

In this paper we consider optimal control problems and sensitivity analysis problems for systems, governed by one dimensional semilinear partial differential equations of elliptic and parabolic types. Coefficients of equations and right hand side of equations are selected as control functions. After approximation of control function optimal control problem leads to nonlinear programming problem. Computational efficiency of different methods of sensitivity analysis, difficulties during obtaining relationships of sensitivity and during software implementations is analyzed. Analytical sensitivities for optimal control problems of one dimensional advection-diffusion-reaction equations with cubic nonlinearity and Robin boundary conditions are presented.

Key words: optimal control, semilinear elliptic equation, semilinear parabolic equation, sensitivity analysis, sensitivity coefficient, direct differentiation method, adjoint method, advection-diffusion-reaction equation with cubic nonlinearity.

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Introduction

The mathematical theory and numerical methods for optimal control problems, optimal design problems, sensitivity analysis (SA) problems governed by partial differential equations (PDEs) have been studied by many authors (see [1-7]).

Several methods are available for response sensitivity computation, including the finite difference method (FDM), the direct differentiation method (DDM) and the adjoint method (AM). These methods can be derived in continuous and discrete formulation. Different aspects of SA methods can be found in [1-3,8-14]. In [10,13,14] reviews of

different methods of SA for optimization problems are given.

The outline of this paper is as follows. In Section 1 we give different formulation of abstract optimal control problems. We write these problems in terms of state and control function and, also, only in term of control function (reduced formulation). After discretization of control function the optimization problem is formulated as nonlinear programming problem. In Section 2 we introduce in continuous and discrete forms the basic concepts of sensitivity analysis, including FDM, DDM and AM. In sections 3 and 4 we apply DDM and AM of SA to the optimal

control problems for the processes governed by one-dimensional (1D) semilinear equations of elliptic and parabolic types properly with Robin boundary conditions. The nonlinearity in these equations is defined by a cubic reaction term. The expression for variation of optimization criterion and for sensitivity coefficients are presented for continuous and for discretized optimization problems.

1. Formulation of Optimization Problem

1.1. The infinite dimensional formulation

Optimization problem (OP) [1,2] consist of finding a control function $u_* \in U$ and proper state function $y_* \in Y$ that minimize optimization criterion $\tilde{\psi}_0$,

$$\tilde{\psi}_0(u_*, y_*) = \min_{(u,y) \in U \times Y} \tilde{\psi}_0(u, y) \quad (1)$$

subject to

$$c(y, u) = 0, \quad (2)$$

$$\tilde{\psi}_j(u, y) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (3)$$

where $u = u(x)$ and $y = y(x)$ are defined on a bounded domain Ω , $x \in \Omega$.

We can consider feasible region $\tilde{U}_\partial$ that is generated by the model (2) of the system and constraints (3)

$$\tilde{U}_\partial = \{(u, y) : u \in U, y \in Y, c(y, u) = 0, \tilde{\psi}_j(u, y) \leq 0, j = 1, \dots, m\}.$$

Therefore, optimization problem (1)-(3) can be formulated as follows: find functions u_*, y_* such that

$$(u_*, y_*) \in \tilde{U}_\partial, \quad \tilde{\psi}_0(u_*, y_*) = \min_{(u,y) \in \tilde{U}_\partial} \tilde{\psi}_0(u, y).$$

Optimization problem also can be formulated only in term of control function. Optimization criteria and constraints for given optimization variable u are calculated in the following way. Firstly, for given u we solve state equation (2) and obtain state function y . After that we calculate functionals $\psi_j(u) = \tilde{\psi}_j(u, y)$, $j = \overline{0, m}$ as functions of variables u, y . Functionals $\psi_j(u)$, $j = \overline{0, m}$ are often called reduced functionals (reduced cost functional and reduced constraints).

Let us consider the following feasible region which consist only of control functions u :

$$U_\partial = \{u : u \in U, \psi_j(u) \leq 0, j = 1, \dots, m\}.$$

Consequently optimization problem in term of reduced functionals [1,2,5] consists of finding a function u_* such that

$$u_* \in U_\partial, \quad \psi_0(u_*) = \min_{u \in U_\partial} \psi_0(u), \quad (4)$$

where $\psi_j(u) = \tilde{\psi}_j(u, y)$, $j = \overline{0, m}$ and $c(y, u) = 0$.

1.2. The finite dimensional formulation

To solve OP numerically by using nonlinear programming solver it is necessary to approximate control function $u \in U$ by the function that depends on vector of optimization parameters $b = [b_1, \dots, b_n]^T \in R^n$, $u(x) = u(x, b)$. As result OP (4) can be formulated as nonlinear programming problem: find a vector b_* such that

$$\psi_0(b_*) = \min_{b \in U_{b\partial}} \psi_0(b), \quad \psi_0(b) = \tilde{\psi}_0(b, y),$$

where $U_{b\partial}$ is feasible region

$$U_{b\partial} = \{b : b \in U_b, \psi_j(b) = \tilde{\psi}_j(b, y) \leq 0, j = 1, \dots, m\},$$

$$U_b = \{b : b \in R^n, b^- \leq b \leq b^+\}.$$

The state equation is presented in the form

$$c(y, b) = 0, \quad (5)$$

where operator c depends on state function y and vector of optimization parameters b .

2. Basics of sensitivity analysis

Sensitivity analysis (SA) consists of calculation of explicit expression of variation $\delta\psi_j$ as functional of δu [1,2,8,10-12]. Total derivatives $d\psi_j/du$, $j = 0, 1, \dots, m$ of the system characteristic ψ_j with respect to optimization parameters u is called sensitivity coefficients. In this section we consider FDM, DDM and AM of SA for OP (4) and analyse main features of these methods.

2.1. The continuous formulation of SA

2.1.1. Finite difference method (FDM)

The easiest way to compute sensitivity information is by using the finite difference method. If u is the current value of control parameter and δu represents a small change in the u , then the sensitivity of $\psi_j(u)$ can be approximated as

$$\frac{d\psi_j}{du} = \frac{\psi_j(u + \tau\delta u) - \psi_j(u)}{\tau\|\delta u\|},$$

where τ - a small quantity.

The advantage of the finite difference method is obvious. FDM is a straightforward approach that only requires evaluations from the solver for state equation (2) and thus almost no additional development. However, this approach can lead to difficulties in practice [8,10,13]. First, one has the problem of finding a good step size for the finite

difference calculation. Also, this option is highly costly because the solutions of state equation must be computed for two or more values of each parameter.

2.1.2. Direct differentiation method (DDM)

Variation of $\delta\psi_j$ as function of variation δu , δy is obtained as result of linearization of functional ψ_j :

$$\begin{aligned}\delta\psi_j &= \frac{\partial\tilde{\psi}_j}{\partial u}\delta u + \frac{\partial\tilde{\psi}_j}{\partial y}\delta y = \\ &= \left(\frac{\partial\tilde{\psi}_j}{\partial u}, \delta u\right) + \left(\frac{\partial\tilde{\psi}_j}{\partial y}, \delta y\right).\end{aligned}\quad (6)$$

To get explicit expression of variation $\delta\psi_j$ as functional of δu

$$\delta\psi_j = \frac{d\psi_j}{du}\delta u$$

it is necessary to write the term $\frac{\partial\tilde{\psi}_j}{\partial y}\delta y$ as functional of δu [1,2,8,12].

Let us write the state equation (2) in variations:

$$c_y\delta y + c_u\delta u = 0. \quad (7)$$

The subscripts u and y denote derivatives of operator c with respect to proper variables. δy can be found as solution of equation:

$$c_y\delta y = -c_u\delta u. \quad (8)$$

Therefore, calculation $\delta\psi_j$ via DDM requires the following steps:

- for given u solve direct problem (2) and find y ;
- for given $u, \delta u$ and evaluated from (2) state function y solve linearized state equation (8) and find δy ;
- calculate variation $\delta\psi_j$ according (6).

Calculation of total derivative $\frac{d\psi_j}{du}$ is expensive since all directional derivative for a basis of space of control function U have to be computed. Each of them requires the solution of linearized equation (8).

2.1.3. Adjoint method (AM)

AM is based on adjoint variables and adjoint equations [1,2,8,9,11]. Describe briefly the AM of SA. For functional ψ_j we introduce the adjoint variable μ_j . To derive the adjoint equation, we write the scalar product of adjoint function and equation (7):

$$0 = (\mu_j, c_y\delta y + c_u\delta u). \quad (9)$$

Using the adjoint operator c_y^*, c_u^* and Lagrange identities yield the following expression:

$$0 = (\mu_j, c_y\delta y + c_u\delta u) = (c_y^*\mu_j, \delta y) + (c_u^*\mu_j, \delta u). \quad (10)$$

Term-by-term addition of (6) and (10) gives the following equality:

$$\delta\psi_j = \left(\frac{\partial\tilde{\psi}_j}{\partial u} + c_u^*\mu_j, \delta u\right) + \left(\frac{\partial\tilde{\psi}_j}{\partial y} + c_y^*\mu_j, \delta y\right). \quad (11)$$

We define the adjoint variable μ_j as solution of the following adjoint equation:

$$c_y^*\mu_j = -\frac{\partial\tilde{\psi}_j}{\partial y}. \quad (12)$$

As a result of (12) the second term in (11) is vanished and we obtain the following explicit expression of variation $\delta\psi_j$ as functional of δu :

$$\delta\psi_j = \left(\frac{\partial\tilde{\psi}_j}{\partial u} + c_u^*\mu_j, \delta u\right). \quad (13)$$

Therefore, for the total derivative we have

$$\frac{d\psi_j}{du} = \frac{\partial\tilde{\psi}_j}{\partial u} + c_u^*\mu_j. \quad (14)$$

Consequently, calculation $\delta\psi_j$ via AM requires the following steps:

- for given u solve direct problem (2) and find y ;
- for given u and evaluated from (2) state function y solve adjoint equation (12) and find μ_j ;
- calculate variation $\delta\psi_j$ according to (13).

Even though DDM and AM yield the similar analytical sensitivities, the computational efficiency may be quite different, depending on the number of system characteristic m and the number of optimization parameters (dimension of space of control function U). DDM is preferable when there are relatively few optimization parameters and large number of system characteristics. AM is more efficient for problems involving large number of optimization parameters and few system characteristics [8,11].

2.2. SA in finite dimensional case

After approximating control function $u \in U$ by vector of optimization parameters $b = [b_1, \dots, b_n]^T \in R^n$, $u(x) = u(x, b)$ we obtain functionals ψ_j , $j = 0, 1, \dots, m$ as functions of b and y . Consequently, variations (differential) $\delta u, \delta y$ as function of vector of optimization parameters b can be calculated in the following way

$$\delta u = \frac{du}{db} \delta b, \quad \delta y = \frac{dy}{db} \delta b, \quad (15)$$

where $\frac{du}{db} = \left[\frac{du}{db_1}, \dots, \frac{du}{db_n} \right]$, $\frac{dy}{db} = \left[\frac{dy}{db_1}, \dots, \frac{dy}{db_n} \right]$ are derivatives.

Therefore, we can insert (15) in proper expressions and obtain expressions for sensitivity coefficients $\frac{d\psi_0}{db_i}$, $i=1, \dots, n$ within the frameworks of FDM,

DDM and AM properly.

a) FDM

In the simplest case sensitivity coefficients are calculated by using finite difference of first order

$$\frac{d\psi_j}{db_i} = \frac{\psi_{ij}^{(2)} - \psi_j^{(1)}}{\Delta b_i}, \quad i=1, \dots, n, \quad j=0, 1, \dots, m,$$

$$\psi_j^{(1)} = \psi_j(b_1, \dots, b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, \dots, b_n),$$

$$\psi_j^{(2)}(b_1, \dots, b_{i-1}, b_i + \Delta b_i, b_{i+1}, \dots, b_n).$$

To calculate vector of sensitivity coefficients according FDM it is necessary to solve at least $n+1$ times the state equation (5). Also, we have to select a good step size for the finite difference calculation (which can be different for difference ψ_j).

b) DDM

To compute sensitivity coefficients according to DDM we need at the beginning to solve direct problem (5) and find state vector y [2,3,8,12]. After that we solve n linearized problems for derivatives

$$z_i = \frac{dy}{db_i}, \quad i=1, \dots, n:$$

$$c_y z_i = -c_u \frac{\partial u}{\partial b_i}.$$

Finally, we can calculate sensitivities coefficients

$$\frac{d\psi_j}{db_i} = \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial u} \frac{du}{db_i} + \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial y} z_i, \quad i=1, \dots, n.$$

c) AM

In this case, first, we solve state equation (5) (similarly to DDM). After that we solve adjoint equations (12) and find adjoint functions μ_j $j=0, 1, \dots, m$. Sensitivity coefficients are calculated according to the expression, which is obtained from (14)

$$\frac{d\psi_j}{db_i} = \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial u} \frac{du}{db_i} + c_u^* \mu_j, \quad i=1, \dots, n.$$

3. Sensitivity analysis for 1D semilinear elliptic equations

In this section, we consider DDM and AM of SA in optimal control problems for the processes governed by semilinear equations of elliptic type in one-dimensional space.

3.1. The infinite dimensional optimal control problem

We investigate the following optimal control problem:

minimize the objective functional

$$\psi_0(u) = \gamma_y \int_{\Omega} g_1(x, y) d\Omega + \gamma_u \int_{\Omega} g_2(x, u) d\Omega \quad (16)$$

subject to advection-diffusion-reaction equation

$$-y'' + s(x, y, y', u) = f(x, u), \quad x \in \Omega = (x_0, x_e) \quad (17)$$

$$\alpha_0 y'(x_0) + \beta_0 y(x_0) = d_0 y^{(0)} \quad (18)$$

$$\alpha_e y'(x_e) + \beta_e y(x_e) = d_e y^{(e)}$$

and pointwise box constraint

$$U = \{u : u \in L(\Omega), u^-(x) \leq u(x) \leq u^+(x), x \in \Omega\},$$

where $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$, $y' = \frac{dy}{dx}$, $L(\Omega)$ - space of control

functions. In this setting, positive number γ_y, γ_u , x_0, x_e , numbers $\alpha_0, \beta_0, d_0, y^{(0)}$, $\alpha_e, \beta_e, d_e, y^{(e)}$, functions g_1, g_2, s, f, u^-, u^+ are given.

The nonlinearity is defined by the cubic term of the form

$$s(x, y, y', u) = r(x)y' + s_1(x)y + s_3(x)y^3.$$

As control function u one of the coefficients r, s_1, s_3 of equation (17) or right hand side f of the equation is selected. Therefore, we consider s, f as functions which depend on argument u .

Optimization criterion (16) in many applications [1,2,6,7] is selected in the form

$$\psi_0(u) = \gamma_y \int_{\Omega} (y(x) - y_d(x))^2 d\Omega + \gamma_u \int_{\Omega} u^2(x) d\Omega \quad (19)$$

where

$$g_1(x, y) = (y(x) - y_d(x))^2, \quad g_2(x, y) = u^2(x). \quad (20)$$

The optimization criterion (19) is assumed to consist of quadratic term for the state plus quadratic Tychonoff-type regularization term for the control.

To obtain sensitivity coefficients according to DDM and AM we use technics described in section 2.

a) DDM

According to (6)-(8) we obtain the following expression for calculating the variation of optimization criterion:

- Boundary value problem (BVP) (17)-(18) in variation

$$\begin{aligned} -(\delta y)'' + \frac{\partial s}{\partial y'}(\delta y)' + \frac{\partial s}{\partial y}\delta y &= \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial s}{\partial u} \right) \delta u, \quad x \in \Omega = (x_0, x_e), \\ \alpha_0 \delta y'(x_0) + \beta_0 \delta y(x_0) &= 0, \\ \alpha_e \delta y'(x_e) + \beta_e \delta y(x_e) &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Partial derivative of functions s, f for different cases of control function are summarized in the table 1.

Table 1. Summary of partial derivatives

	$\frac{\partial s}{\partial u}$	$\frac{\partial f}{\partial u}$	$\frac{\partial s}{\partial y'}$	$\frac{\partial s}{\partial y}$
$u = r$	y'	0	u	$s_1 + 3y^2 s_3$
$u = s_1$	y	0	r	$u + 3y^2 s_3$
$u = s_3$	y^3	0	r	$s_1 + 3y^2 u$
$u = f$	0	1	r	$s_1 + 3y^2 s_3$

• Variation of functional (16)

$$\delta \psi_0(u) = \gamma_y \int_{\Omega} \frac{\partial g_1}{\partial y} \delta y d\Omega + \gamma_u \int_{\Omega} \frac{\partial g_2}{\partial u} \delta u d\Omega. \quad (22)$$

For (20) we obtain

$$\frac{\partial g_1}{\partial y} = 2(y(x) - y_d(x)), \quad \frac{\partial g_2}{\partial u} = 2u(x),$$

and variation of functional (19) is written in the form

$$\delta \psi_0 = 2\gamma_y \int_{\Omega} (y - y_d) \delta y d\Omega + 2\gamma_u \int_{\Omega} u \delta u d\Omega.$$

b) AM

To obtain total derivative according to AM we will do the following steps. We multiply equation in variation (21) by adjoint function μ_0 ; integrate both sides over $\Omega = (x_0, x_e)$; apply integration by parts and add to the (22). We define the adjoint variable μ_0 in such way that all terms with factor δy are vanished. This leads to BVP for adjoint function

$$-\mu_0'' - \left(\frac{\partial s}{\partial y'} \mu_0 \right)' + \frac{\partial s}{\partial y} \mu_0 = \gamma_y \frac{\partial g_1}{\partial y}, \quad x \in \Omega, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \alpha_0 \mu'(x_0) + \left(\alpha_0 \frac{\partial s(x_0)}{\partial y'} + \beta_0 \right) \mu(x_0) &= 0, \\ \alpha_e \mu'(x_e) + \left(\alpha_e \frac{\partial s(x_e)}{\partial y'} + \beta_e \right) \mu(x_e) &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

As results we obtain variation of functional

$$\delta \psi_0 = \int_{\Omega} \left(\gamma_u \frac{\partial g_2}{\partial u} + \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial s}{\partial u} \right) \mu \right) \delta u d\Omega. \quad (25)$$

3.2. Finite dimensional case

a) DDM

To compute sensitivity coefficients according to DDM we need at the beginning to solve BVP (17)-(18) and find state vector y . After that need to solve

n BVPs for derivatives $z_i = \frac{dy}{db_i}$, $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} -z_i'' + \frac{\partial s}{\partial y'} z_i' + \frac{\partial s}{\partial y} z_i &= \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial s}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial b_i}, \quad x \in \Omega, \\ \alpha_0 z_i'(x_0) + \beta_0 z_i(x_0) &= 0, \\ \alpha_e z_i'(x_e) + \beta_e z_i(x_e) &= 0. \end{aligned}$$

Finally, we can calculate sensitivities coefficients

$$\frac{d\psi_0}{db_i} = \gamma_y \int_{\Omega} \frac{\partial g_1}{\partial y} z_i d\Omega + \gamma_u \int_{\Omega} \frac{\partial g_2}{\partial u} \frac{du}{db_i} d\Omega, \quad i = 1, \dots, n.$$

b) AM

In this case, first, we solve BVP (17)-(18) (similarly to DDM). After that we solve adjoint BVP (23)-(24) and find adjoint function μ_0 . Sensitivity coefficients are calculated according to the expression, which is obtained from (25)

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_0}{db_i} &= \int_{\Omega} \left(\gamma_u \frac{\partial g_2}{\partial u} + \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial s}{\partial u} \right) \mu \right) \frac{du}{db_i} d\Omega, \\ i &= 1, \dots, n. \end{aligned}$$

4. Sensitivity analysis for 1D semilinear parabolic equations

In this section, similarly to section 3, we briefly consider the numerical treatment of optimal control problems for the processes governed by semilinear equations of parabolic type in one-dimensional space and present expressions of sensitivity analysis.

4.1. The infinite dimensional optimal control problem

We investigate the following optimal control problem:

minimize the objective functional

$$\begin{aligned} \psi_0(u) &= \gamma_{1y} \int_{\Omega} g_1(x, t_e, y) d\Omega + \\ &+ \gamma_{3y} \int_{t_0}^{t_e} \int_{\Omega} g_3(x, t, y) d\Omega dt + \gamma_u \int_{t_0}^{t_e} \int_{\Omega} g_2(x, t, u) d\Omega dt \end{aligned} \quad (26)$$

subject to advection-diffusion-reaction equation

$$\frac{\partial y}{\partial t} - y'' + s(x, t, y, y', u) = f(x, t, u) \quad \text{in } Q, \quad (27)$$

$$\alpha_0 y'(x_0, t) + \beta_0 y(x_0, t) = d_0 y^{(0)}(t) \quad \text{in } (t_0, t_e], \quad (28)$$

$$\alpha_e y'(x_e, t) + \beta_e y(x_e, t) = d_e y^{(e)}(t) \quad \text{in } \Omega \quad (29)$$

and pointwise box constraint

$$U = \{u : u^-(x, t) \leq u(x, t) \leq u^+(x, t), (x, t) \in Q\},$$

where

$$s(x, t, y, y', u) = r(x, t) y' + s_1(x, t) y + s_3(x, t) y^3,$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}, y' = \frac{dy}{dx}, \Omega = (x_0, x_e), Q = \Omega \times (t_0, t_e].$$

Positive number $\gamma_{1y}, \gamma_{3y}, \gamma_u, x_0, x_e, t_0, t_e$, numbers

$\alpha_0, \beta_0, d_0, \alpha_e, \beta_e, d_e$, functions g_1, g_2, g_3, s, f , $y^{(0)}, y^{(e)}, u^-, u^+$ are given.

Note, that in case $r(x, t) = 0$ we obtain known in Physics "Schlögl model". Optimal control problems for this model with Neumann condition are considered in [15].

Functions g_1, g_2, g_3 in many applications [1, 2, 6, 7, 15] are selected in the form

$$\begin{aligned} g_1(x, t_e, y) &= (y(x, t_e) - y_{de}(x))^2, \\ g_3(x, t, y) &= (y(x, t) - y_d(x, t))^2, \\ g_2(x, t, y) &= u^2(x, t). \end{aligned} \quad (30)$$

a) DDM

- Initial-boundary value problem (IBVP) (27)-(29) in variation

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\delta y)}{\partial t} - (\delta y)'' + \frac{\partial s}{\partial y'}(\delta y)' + \frac{\partial s}{\partial y} \delta y &= \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial s}{\partial u} \right) \delta u \end{aligned} \quad \text{in } Q,$$

$$\begin{aligned} \alpha_0 \delta y'(x_0, t) + \beta_0 \delta y(x_0, t) &= 0, \\ \alpha_e \delta y'(x_e, t) + \beta_e \delta y(x_e, t) &= 0 \quad \text{in } (t_0, t_e], \\ y(x, t_0) &= y_0(x) \quad \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

Partial derivative of s, f for different cases of control function are given in the table 1.

- Variation of functional (26)

$$\begin{aligned} \delta \psi_0(u) &= \gamma_{1y} \int_{\Omega} \frac{\partial g_1(x, t_e, y(x, t_e))}{\partial y} \delta y(x, t_e) d\Omega + \\ &+ \gamma_{3y} \int_{t_0}^{t_e} \int_{\Omega} \frac{\partial g_3(x, t, y(x, t))}{\partial y} \delta y(x, t) d\Omega dt + \end{aligned}$$

$$+ \gamma_u \int_{t_0}^{t_e} \int_{\Omega} \frac{\partial g_2(x, t, u(x, t))}{\partial u} \delta u(x, t) d\Omega dt.$$

For functions (30) proper derivatives are

$$\frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{\partial g_1(x, t_e, y(x, t_e))}{\partial y} = 2(y(x, t_e) - y_{de}(x)),$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial y} = \frac{\partial g_3(x, t, y(x, t))}{\partial y} = 2(y(x, t) - y_d(x, t)),$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial y} = \frac{\partial g_2(x, t, u(x, t))}{\partial u} = 2u(x, t).$$

b) AM

Following (9)-(11) we obtain adjoint IBVP

- adoint equation in Q

$$-\frac{\partial \mu_0}{\partial t} - \mu_0'' - \left(\frac{\partial s}{\partial y'} \mu_0 \right)' + \frac{\partial s}{\partial y} \mu_0 = \gamma_{3y} \frac{\partial g_3}{\partial y}. \quad (31)$$

- boundary condition in $(t_0, t_e]$

$$\begin{aligned} \alpha_0 \mu_0'(x_0, t) + \left(\alpha_0 \frac{\partial s}{\partial y'} \bigg|_{x=x_0} + \beta_0 \right) \mu_0(x_0, t) &= 0, \\ \alpha_e \mu_0'(x_e, t) + \left(\alpha_e \frac{\partial s}{\partial y'} \bigg|_{x=x_e} + \beta_e \right) \mu_0(x_e, t) &= 0. \end{aligned} \quad (32)$$

- Initial conditions (at the final time t_e)

$$\mu_0(x, t_e) = \gamma_{1y} \frac{\partial g_1(x, t_e, y(x, t_e))}{\partial y}. \quad (33)$$

As results we obtain variation of functional

$$\delta \psi_0 = \int_{t_0}^{t_e} \int_{\Omega} \left(2\gamma_u u + \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial s}{\partial u} \right) \mu_0 \right) \delta u d\Omega dt. \quad (34)$$

4.2. Finite dimensional case

a) DDM

As for elliptic type model, first, we solve IBVP (27)-(29) and find state function y . After that we solve n

IBVPs for derivatives $z_i = \frac{dy}{db_i}$, $i = 1, \dots, n$:

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} - z_i'' + \frac{\partial s}{\partial y'} z_i' + \frac{\partial s}{\partial y} z_i = \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial s}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial b_i},$$

$$\alpha_0 z_i'(x_0, t) + \beta_0 z_i(x_0, t) = 0,$$

$$\alpha_e z_i'(x_e, t) + \beta_e z_i(x_e, t) = 0,$$

$$z_i(x, t_0) = 0.$$

And finally, we calculate sensitivities coefficients

$$\frac{d\psi_0}{db_i} = \gamma_{1y} \int_{\Omega} \frac{\partial g_1}{\partial y} \frac{dy}{db_i} d\Omega + \gamma_{3y} \int_{t_0}^{t_e} \int_{\Omega} \frac{\partial g_3}{\partial y} \frac{dy}{db_i} d\Omega dt + \\ + \gamma_u \int_{t_0}^{t_e} \int_{\Omega} \frac{\partial g_2}{\partial u} \frac{du}{db_i} d\Omega dt, \quad i=1, \dots, n.$$

b) AM

In this case, first, we solve IBVP (27)-(29) (similarly to DDM). After that we solve adjoint IBVP (31)-(33) and find adjoint function μ_0 . Sensitivity coefficients are calculated according to the expression, which is obtained from (34)

$$\frac{d\psi_0}{db_i} = \int_{t_0}^{t_e} \int_{\Omega} \left(2\gamma_u u + \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial s}{\partial u} \right) \mu_0 \right) \frac{du}{db_i} d\Omega dt, \quad i=1, \dots, n.$$

Conclusions and discussions

In this paper we have analyzed the basic concepts of sensitivity analysis, including FDM, DDM and AM for abstract PDEs constrained optimization problems (OPs). Following these concepts, we have obtained sensitivities for one dimensional stationary and time-dependent advection-diffusion-reaction equations with cubic nonlinearity.

To solve the optimal control problems numerically we discretize control functions by piecewise constant functions or piecewise linear functions with respect to the space variable. BVPs

for 1D elliptic equations (for equations of direct problems and for sensitivity equations, obtained by DDM and AM) have been solved by Matlab *bvp5c* solver. IBVPs for 1D parabolic PDEs and for sensitivity equations obtained by DDM have been solved by *pdepe* solver. We have modified *pdepe* solver to solve IBVPs for sensitivity equations obtained by AM with the negative step of integration for the time variable.

Results of numerical experiments confirm the conclusions that AM usually is less-time consuming than DDM and FDM. In the same time, solutions of adjoint equations by Matlab solvers (especially for parabolic equations) for some values of optimization parameters is not always very accurate.

In future publications we present more thorough results related to:

- analysis of the changing effect of various optimization parameters in regards to the response of solution of advection-diffusion-reaction equations;
- capabilities and limits of SA methods, peculiarities of software implementation for semilinear equations.

Список використаних джерел

1. *Hinze M.* Optimization with PDE constraints. / M. Hinze, R. Pinnau, M. Ulbrich, S. Ulbrich. – Springer Science + Business Media B.V., 2009. – 270 p.
2. *Tröltzsch F.* Optimal control of partial differential equations. Theory, methods and applications. / F. Tröltzsch. – Am. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2010. – 399 p.
3. *Banichuk N.V.* Introduction to optimization of structures. / N.V. Banichuk. – Springer-Verlag New York, Inc., 1990. – 300 p.
4. *Neittaanmäki P.* Optimal control of nonlinear parabolic systems: theory, algorithms, and applications. / P. Neittaanmäki, D. Tiba. – Marcel Dekker, New York, 1994. – 399 p.
5. *Litvinov V.G.* Optimization in elliptic problems with applications to mechanics of deformable bodies and fluid mechanics. / V.G. Litvinov. – Springer Basel AG, 2000. – 522 p.

References

1. HINZE, M., PINNAU, R., ULBRICH, M., ULBRICH, S. (2009) *Optimization with PDE constraints*, Springer Science + Business Media B.V.
2. TRÖLTZSCH, F. (2010) *Optimal control of partial differential equations. Theory, methods and applications*, Am. Math. Soc., Providence, Rhode Island.
3. BANICHUK, N.V. (1990) *Introduction to optimization of structures*, Springer-Verlag New York, Inc.
4. NEITTAANMÄKI, P., TIBA, D. (1994) *Optimal control of nonlinear parabolic systems: theory, algorithms, and applications*, Marcel Dekker, New York.
5. LITVINOV, V.G. (2000) *Optimization in elliptic problems with applications to mechanics of deformable bodies and fluid mechanics*. Springer Basel AG.

6. Дейнека В.С. Анализ многокомпонентных распределенных систем и оптимальное управление. / В.С.Дейнека, И.В. Сергиенко. – Киев, Наукова Думка, 2007. – 702 с.
7. Наконечний О.Г. Оптимальне керування та оцінювання в рівняннях із частинними похідними. / О.Г. Наконечний– К, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2004. – 102 с.
8. Haug E. J. Design sensitivity analysis of structural systems. / E. J. Haug, K.K. Choi, V. Komkov. – Academic Press, Inc., 1986. – 381 p.
9. Marchuk G.I. Adjoint equations and analysis of complex systems. / G.I. Marchuk. – Kluwer, Dordrecht, 1995. – 466 p.
10. Griewank A. Evaluating derivatives: principles and techniques of algorithmic differentiation. / A. Griewank, A. Walther. – SIAM, 2008. – 438p.
11. Li S. Adjoint sensitivity analysis for time-dependent partial differential equations with adaptive mesh refinement. / S. Li, L. Petzold. // Journal of Computational Physics. – Vol. 198. – 2004. – P. 310–325.
12. Savula Ya. Sensitivity analysis of solutions of two-dimensional admixture heterodiffusion problems with respect to perturbation of medium parameters. / Ya. Savula, H. Shcherbata, M. Shcherbatyy. // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2014. – Вип. 19. – С. 157-167.
13. Keulen F. Review of options for structural design sensitivity analysis. Part 1. Linear systems. / F. Keulen, R. T. Haftka, N. H Kim. // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 2005. – Vol. 194. – P. 3213-3243.
14. Peter J.E.V. Numerical sensitivity analysis for aerodynamic optimization: A survey of approaches. / J.E.V. Peter, R.P. Dwight. // Computers & Fluids. – 2010. – Vol. 39. – P. 373-391.
15. Buchholz R. On the Optimal Control of Schlögl-model. / R. Buchholz, H. Engel, E. Kammann, F. Tröltzsch // Comput. Optim. Appl. – 2013. – Vol. 56. – P. 153-185.
6. DEYNEKA, V.S., SERHIYENKO, I.V. (2007) *Analysis of Multicomponent Distributed Systems and Optimal Control*, Kiev: Naukova Dumka. [in Russian]
7. NAKONECHNYI, O.H. (2004.) *Optimal control and estimation in partial differential equations*, K., Publishing and polygraphic Center "Kiev University". [in Ukrainian]
8. HAUG, E.J., CHOI, K.K., KOMKOV, V. (1986.) *Design sensitivity analysis of structural systems*, Academic Press, Inc.
9. MARCHUK, G. I. (1995) *Adjoint Equations and Analysis of Complex Systems*, Kluwer: Dordrecht.
10. GRIEWANK, A., WALTHER, A. (2008) *Evaluating derivatives: principles and techniques of algorithmic differentiation*, SIAM.
11. LI, S., PETZOLD, L. (2004) "Adjoint sensitivity analysis for time-dependent partial differential equations with adaptive mesh refinement", *Journal of Computational Physics*, vol. 198, pp. 310–325.
12. SAVULA, YA., SHCHERBATA, H., SHCHERBATYY, M. (2014) "Sensitivity analysis of solutions of two-dimensional admixture heterodiffusion problems with respect to perturbation of medium parameters", *Physico-Mathematical Modeling and Informational Technologies*, vol. 19, pp. 157-167.
13. KEULEN, F., HAFTKA, R. T., KIM, N. H. (2005) "Review of options for structural design sensitivity analysis. Part 1. Linear systems", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 194, pp. 3213-3243.
14. PETER, J.E.V., DWIGHT, R.P. (2010) "Numerical sensitivity analysis for aerodynamic optimization: A survey of approaches", *Computers & Fluids*, vol. 39, pp. 373-391.
15. BUCHHOLZ, R., ENGEL, H., KAMMANN, E., TRÖLTZSCH, F. (2013) "On the Optimal Control of Schlögl-model", *Comput. Optim. Appl.*, vol. 56, pp. 153-185.

Надійшла до редколегії 19.08.2017

РАДІОФІЗИКА

УДК 537.311.33

Павлюк С.П., к.ф.-м.н., зав.лаб.,
Григорук В.І., д.ф.-м.н., проф.,
Іщук Л.В., к.ф.-м.н., доц.,
Телега В.М., к.ф.-м.н., зав.лаб.,
Ковток В. Г., пров. інж.,
Вакуляк Є. О., студ.

S. P. Pavlyuk, Ph.D.,
V. I. Grygoruk, Dr.Sci.,
L. V. Ischuk, Ph.D.,
V. M. Telega, Ph.D.,
V. G. Kovtok, lead eng.,
Ye. O. Vakylyak

**Виникнення коливань напруги в
“кремнієвій структурі з діелектричною
ізоляцією” при дії потужного імпульсу
струму**

**Emergence of voltage oscillations in "silicon
structure with dielectric insulation" under
the powerful current pulse**

Київський національний університет імені Тараса
Шевченка, 03022, м. Київ, пр-т. Глушкова, 4г,
e-mail:pps@univ.kiev.ua.

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03022, Kyiv, Glushkova st., 4g,
e-mail:pps@univ.kiev.ua.

За допомогою методики імпульсних вольт-амперних характеристик (ВАХ) проведено дослідження впливу джоулевого розігріву на властивості напівпровідникових резисторів, виготовлених на основі кремнієвих структур з діелектричною ізоляцією (КСДІ). Показано, що під дією потужних імпульсів виникає такий розігрів структури за якого виникає від’ємна диференціальна провідність у перегрівному механізмі, що призводить до виникнення коливань напруги.

An influence of Joule heating on the properties of semiconductor resistors based on silicon structures with dielectric isolation (SSDI) was studied using the method of pulsed volt-ampere characteristics (VAC). It is shown that under the influence of such powerful pulses, the heating of the structure leading to the negative differential conductivity occurs due to overheating mechanism, which results in the excitation of voltage fluctuations. Voltage fluctuations arise at currents more than 40 mA, at currents more than 80 mA the voltage differential goes to zero, there are fluctuations in the form of several periods, which then fade out, and the voltage drop becomes constant. Temperature calculations have been carried out with the passage of a powerful current pulse, the energy determined by the structure at the beginning of oscillations is determined. At a temperature of 1200 K, an overheating instability occurs. Such instability leads to the appearance of a falling area in the VAC mainly due to the characteristics of the energy spectrum of charge carriers. When drifting, and in the case of recombination nonlinearities, the appearance of negative differential conductivity is associated with the transfer of a part of the carriers to some special states.

Key Words: SSDI-structure, extreme current, voltage oscillations.

Статтю представив д.ф.-м.н. Скришевський В.А.

Вступ

Розробка нових інтегральних мікроелектронних багатосенсорних кремнієвих структур з діелектричною ізоляцією (КСДІ) потребує подальших наукових досліджень та конструкторсько-технологічних рішень. Покращення функціональних можливостей в КСДІ структурах, що працюють при високих густинах струму, та дослідження виникаючих при цьому нових ефектів є актуальним для розробників напівпровідникових структур.

У роботі[1] досліджено стаціонарні вольт-амперні характеристики (ВАХ) та

диференціально-амперні характеристики (ДАХ) структур «кремній з діелектричною ізоляцією» (КСДІ). Розглянуто різні частини ВАХ і виявлено ділянки де виникають коливання напруги. При цьому на цих ділянках спостерігається від’ємна диференціальна провідність (ВДП). Якщо залежність $I(U)$ має зону від’ємної диференціальної провідності, тобто якщо густина струму зменшується зі збільшенням електричного поля, або навпаки, зростає при зменшенні поля, то відповідні стаціонарні стани в загальному випадку нестійкі, і виникають коливання напруги. При цьому величина падіння напруги залежить від ланцюга, який навіть за

відсутності зовнішніх навантажувальних опорів обов'язково містить резистивні і реактивні елементи, такі як опір і індуктивність дрітків, взаємні індуктивності і ємності. Оскільки стаціонарний розігрів не дозволяє дослідити механізм виникнення ВДП та початку коливань в даній роботі дослідження проводились при живленні структури поодинокими потужними імпульсами.

Експериментальні результати та їх обговорення

Всі експерименти виконувались на кремнієвих $p^+ - n - p^+$ структурах[2] з електричними контактами з алюмінію (Al) до p^+ -областей, які сильно розігріваються при проходженні крізь них струму. Оцінюючи виділену потужність (Рис.1), бачимо, що при виникненні ВДП і початку коливань структура стаціонарно виділяє 0,5 - 1 Вт. Застосовуючи формулу (2) роботи[3], можна зробити висновок, що при такому енерговиділенні структура розігрівається до 1500 - 1900 К. Такий розігрів призводить до виникнення перегрівної нестійкості, S-подібної ВАХ та коливань напруги. Стаціонарний розігрів не дозволяє дослідити механізм виникнення ВДП та початку коливань. Тому метою даної роботи було дослідження коливань напруги, що виникають у структурі при її живленні коротким потужним поодиноким імпульсом струму. Тепло встигає розповсюдитись на відстань, яка оцінена за формулою

$$\Delta x = \sqrt{D_t \cdot t}, \quad (1)$$

де Δx – відстань, на яку розповсюдилось тепло,
 D_t – коефіцієнт теплової дифузії,
 t – тривалість імпульсу.

За тривалість імпульсу структура не встигає охолотитися, і дослідження проводяться за умов наростаючої температури. ВАХ структури показано на рис.1. Вона має декілька ділянок.

Ділянка 1 – це стабільна ВАХ, вона закінчується там, де починаються коливання і ВАХ роздвоюється на дві криві. Одна – для максимуму напруги U_{max} , а друга – для мінімуму U_{min} .

Диференціально-амперна характеристика (ДАХ) для U_{max} має додатній знак у всьому діапазоні зміни амплітуди струму (рис.2).

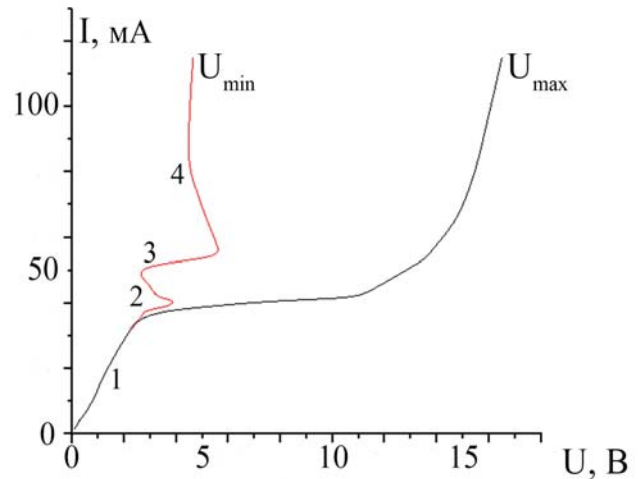


Рис.1. Вольт-амперна характеристика

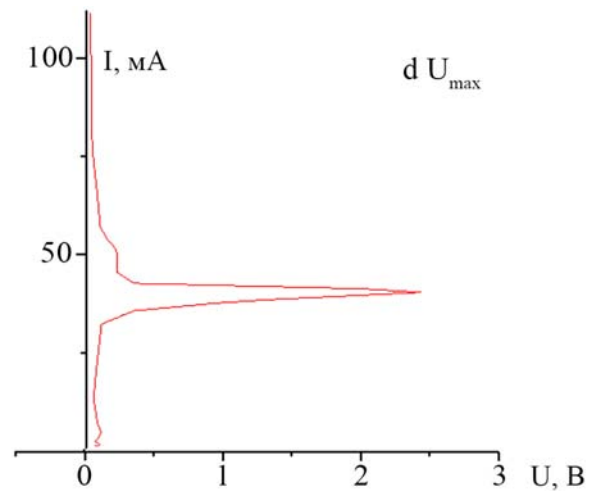


Рис.2. ДАХ для U_{max}

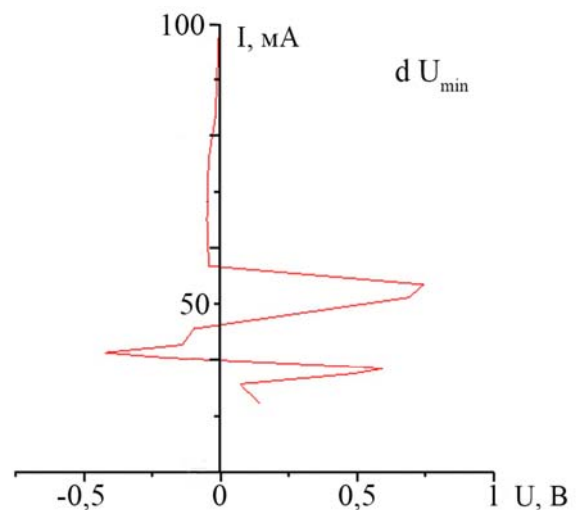


Рис.3. ДАХ для U_{min}

Іншу картину бачимо на ДАХ для U_{min} (рис.3). При струмах, менших 40 мА (ділянка 1 ВАХ), диференціал U_{min} є додатнім, і коливання не спостерігаються Рис. 4.(осц.1).

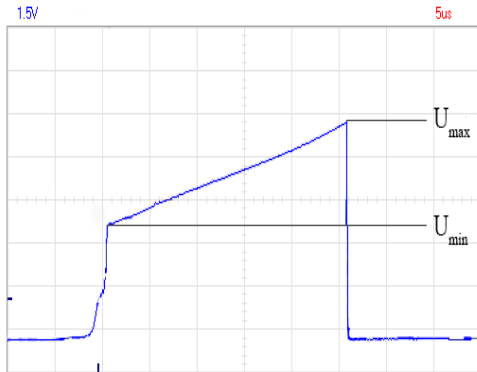


Рис.4. Осцилограма при струмі 40мА

При струмах від 40 до 46 мА (ділянка 2 ВАХ) диференціал U_{min} стає від'ємним. В колі виникають релаксаційні коливання Рис.4, Рис. 5.

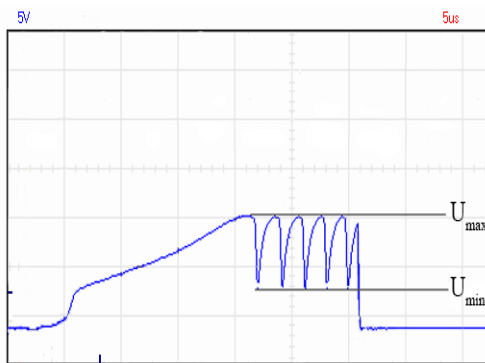


Рис.5. Осцилограма при струмі 42мА

При струмах від 46 до 58 мА диференціал U_{min} стає додатнім (ділянка 3 ВАХ), після чого знову змінює знак (ділянка 4 ВАХ). При струмах, більших 80мА, диференціал U_{min} прямує до нуля, виникають коливання у вигляді кількох періодів, які далі згасають, і падіння напруги стає постійним Рис.6.

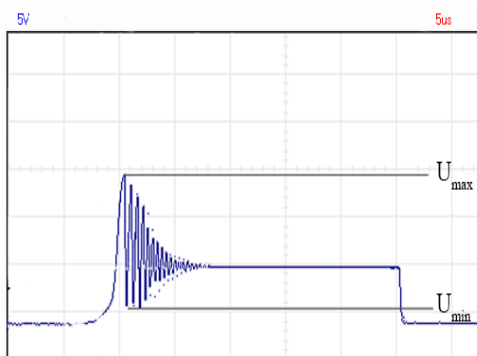


Рис.6. Осцилограма при струмі 65мА

Отримані результати можна пояснити потужним нестационарним розігрівом КСДІ структури. Використовуючи формулу перегріву ΔT структури

$$\Delta T \approx \frac{jEt}{c\rho} \approx \frac{IUt}{d \cdot d c \rho} \quad (2)$$

де c – питома теплоємність кремнію,
 ρ – густина кремнію,
 t – тривалість імпульсу,
 I – величина струму,
 d – розмір структури,

можна оцінити енергію, яка виділяється структурою на початку коливань.

Як видно з розрахунків, коли температура перегріву дорівнює 1200 К, виникає перегрівна нестійкість, яка призводить до початку коливань.

Розглянуті вище механізми призводили до появи спадаючої ділянки на ВАХ в основному за рахунок особливостей енергетичного спектра носіїв заряду. Насправді, наприклад, і при дрейфовій, і при рекомбінаційній нелінійності поява ВДП пов'язана з переходом частини носіїв в деякі особливі стани (наприклад, на локальні рівні, чи в ті області енергетичних зон, де присутні значні афективні маси). Разом з тим, ряд особливостей поведінки системи гарячих носіїв може бути пов'язаний також зі зміною характеру розсіювання енергії і імпульсу основної частини носіїв. Перегрівний механізм може призвести до S-подібної характеристики.

Механізми ВДП відносяться до того випадку, коли під дією електричного поля суттєво порушувалась рівновага в системі носіїв заряду, а розігрів ґратки не мав принципового значення. Дослідженням структур КСДІ займалися багато авторів. Найближча до наших досліджень була робота[4]. Досліджувались квазіодномірні КЗДІ резистори, тобто структури, у яких характерний поперечний розмір менше відстані між контактами. Границя ділянки безпечної роботи КЗДІ резисторів, як і інших напівпровідникових діодів, визначається S-подібна ділянка, що виникає при джоулевій розігріві. Інтерпретація S-характеристики в цьому випадку базується на уявленні про тепловий пробій, що виникає при переході до власної провідності в напівпровідниковій фазі з наступним шунтуванням струму перпендикулярним до напруги електричного поля, а структура вздовж лінії струму просторово не обмежена (тепловідводом в контакти нехтуємо).

В роботі було показано, що в квазіодномірних, обмежених контактами, структурах S-подібність ВАХ може бути пов'язана з виникненням неоднорідності доменного типу при джоулеві ВАХ може бути пов'язана з виникненням неоднорідності доменного типу при джоулеві розігріві, що призводить до фазового переходу напівпровідника у рідкий стан всередині домену. Для низки напівпровідників, у тому числі для Виникнення та розповсюдження хвилі фазового перетворення напівпровідник-метал розглядалась за умов, коли фронт хвилі був розігріві, що призводить до фазового переходу напівпровідника у рідкий стан всередині домену. Для низки напівпровідників, у тому числі для Виникнення та розповсюдження хвилі фазового перетворення напівпровідник-метал розглядалась за умов, коли фронт хвилі був кремнію, цей фазовий перехід є переходом напівпровідник-метал.

Отримані результати дозволяють говорити про те, що в деяких квазіодномірних структурах S-подібна ділянка зв'язана не тільки зі зміною

механізму провідності в твердій фазі напівпровідника, а і з розвитком нестійкості струму, яка обумовлена виникненням домену слабого поля при температурі фазового переходу напівпровідник-метал.

Наші результати доводять те, що для коротких квазіодномірних структур при струмах порядку 10^4 А/см виникає домен сильного поля знапруженостю до 104 В/см. Основний шнур струму і декілько зародків шнура виникали у домені. Докладно ці роботи опубліковані в [4].

Висновки

Розігрів ґратки за рахунок джоулевого тепла може значно вплинути на властивості структури, що відображається на вигляді ВАХ.

Такі особливості структури відкривають додаткові можливості отримання характеристик зі спадаючою ділянкою, що може бути використано для створення нових інтегральних мікроелектронних багатосенсорних кремнієвих структур.

Список використаних джерел

1. Бонч-Бруєвич В.Л. Доменная электрическая неустойчивость полупроводников. / В.Л. Бонч-Бруєвич, И.П. Звягин, А.Г. Миронов – Москва: Наука, 1972. – 412 с.
2. Павлюк С.П. Особливості генерації коливань напруги структурою «Кремній з діелектричною ізоляцією» / С.П. Павлюк, В.І. Григорук, Л.В. Ішук, В.М. Телега, В.Г. Ковток, Є.О. Вакуляк // Вісник КНУ, Серія фізико-математичні науки. – 2016, – №4, - С. 159-162.
3. Павлюк С.П. Визначення температури розігріву «кремнієвої структури з діелектричним ізолятором» / С.П. Павлюк, В.І. Григорук, Л.В. Ішук, В. Гандзюк, О. Соломенко, Ю. Онисько // Вісник КНУ, Радіофізика та електроніка – 2015. - №1(24) - С. 23 - 25.
4. Вакаров Б.С. Токовая неустойчивость, обусловленная фазовым переходом полупроводник – металл в квазиодномерных структурах / Б.С. Вакаров, И.С. Вакарова, Л.Б. Корлаков, С.Н. Кравченко, А.С. Петухов // ФТП, – 1989. - 23, вип.7. - С. 1182 – 1186.

References

1. BONCH-BRUEVICH, V.L., ZVYAGIN, I.P., MIRONOV, A.G. (1972) *Blast electric instability of semiconductors*. Moskva: Nauka.
2. PAVLYUK, S.P., GRIGORUK, V.I., ISHCHUK, L.V., TELEGA, V.M., KOVTOK, V.G., VAKULYAK, YE.O., (2016) *Features of voltage fluctuations generation into the structure "Silicon with dielectric insulation"*, Bulletin of KNU, Series Physics & Mathematics, №4, p.159-162
3. PAVLYUK, S.P., GRIGORUK, V.I., ISHCHUK, L.V., GANDZYUK, V., SOLOMENKO, O., ONIS'KO YU., (2016) *Heating temperature determination of the "silicon structure with dielectric insulat*, Bulletin of KNU, Radiophysics and electronics, №1(24), p. 23-25.
4. VAKAROV, B.S., VAKAROVA, I.S., KORLAKOV, L.B., KRAVCHENKO, S.N., PETUKHOV, A.S., (1989) *Current instability due to the phase transition of a semiconductor-metal in quasi-one-dimensional structures*, PTS, №23,v.7, p.1182 - 1186

Надійшла до редколегії 16.03.17

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 616.073,756.8

Мотолига О.В.¹, асп.,
Сенчуров С.П.², к.ф.-м.н.

Вимірювання товщини зрізу в цифровому томосинтезі та цифровій ламінографії

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська, 64/13,
e-mail: ¹oleksandr.motolyha@gmail.com
²sergsenc@gmail.com

O.V.Motolyha¹, PhD stud.,
S.P. Senchurov², PhD.

Measurement of slice thickness in digital Tomosynthesis and digital laminography

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska str., 64/13,
e-mail: ¹oleksandr.motolyha@gmail.com
²sergsenc@gmail.com

Зроблено експериментальне порівняння товщини зрізу, отриманої з використанням цифрової ламінографії та цифрового томосинтезу з використанням спеціального фантому та експериментальної установки. Запропоновано теоретичну оцінку товщини зрізу. Оцінка добре співвідноситься з експериментальними даними.

Ключові слова: комп'ютерна томографія, томосинтез, алгоритми реконструкції.

Tomosynthesis is a new diagnostic method that combines advantages of computed tomography and X-Ray projection radiography. Tomosynthesis provide a series of slices with small radiation dose. Spatial resolution in digital tomosynthesis is not the same on different axes compared to computed tomography where resolution is the same on all axes. Tomosynthesis resolution in direction perpendicular to detector plane is smaller then in computed tomography. But it is much higher in plane parallel to detector. So tomosynthesis diagnostic value is higher then in computed tomography in some cases.

The experimental comparison of the performance of the medical X-Ray laminography and digital tomosynthesis algorithms was carried out. Slice thickness in digital tomosynthesis was two times smaller than in laminography. For this research software for tomosynthesis slices reconstruction, pre- and postprocessing was developed.

The results of comparison show the promising future of the integration of the digital tomosynthesis algorithms into the currently produced medical X-Ray laminography complexes.

Key Words: Computed tomography, X-ray tomosynthesis, Reconstruction algorithms, Biomedical imaging

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

До створення комп'ютерної томографії (КТ), лінійна томографія (або ламінографія) [1] була єдиним способом візуалізації одного внутрішнього зрізу об'єкту. Впровадження комп'ютерної томографії дозволило візуалізувати одразу кілька зрізів внутрішньої структури об'єкту. Клінічна цінність КТ загалом значно вище ніж у ламінографії [2,3]. Це призвело до широкого розповсюдження КТ як методу медичних досліджень[4]. Однак КТ має ряд недоліків. Один з них це дозове навантаження що у 5-50 разів більше, ніж при звичайній рентгенографії. Інший - це роздільна здатність, що зазвичай менша, ніж в рентгенографії.

Створення плоских цифрових детекторів рентгенівського випромінювання високої роздільної здатності дало змогу використати їх для ламінографії. Будемо називати цей клас систем цифровою ламінографією.

© О.В. Мотолига, С.П. Сенчуров, 2017

Оцифровка ламінографії дозволяє застосувати цифрові алгоритми обробки зображень що було неможливим в плівковій ламінографії. Це дозволяє знизити дозове навантаження до рівня одиничного рентгенівського знімку.

З іншого боку сьогодні існує ряд технік що називаються цифровим томосинтезом. Технічне виконання яких майже співпадає з цифровою ламінографією. Цифровий томосинтез дозволяє отримати багато зрізів пацієнта за одне сканування [5, 6, 7]. Дозове навантаження при цифровому томосинтезі вище ніж при цифровій ламінографії, але все одно нижче ніж при КТ.

Відмінністю томосинтезу від ламінографії є те що при томосинтезі отримуються окремі рентгенівські знімки об'єкту під різними кутами, тоді як в ламінографії детектор неперервно накопичує данні під час руху системи детектор-

джерело навколо об'єкту. За своєю суттю алгоритми реконструкції при томосинтезі дуже схожі на алгоритми у КТ. Відмінністю від КТ є неповнота набору проєкцій, повний кут розвороту становить максимум 90° при томосинтезі, тоді як при КТ використовується діапазон кутів не менше 180° .

Метою даної роботи є оцінка товщини зрізу при цифровому томосинтезі, з використанням переробленого під томосинтез обладнання для цифрової ламінографії.

Геометрична модель товщини зрізу в цифровому томосинтезі.

Основна ідея залежності товщини зрізу від діапазону кутів сканування показана на рис. 1. Ми припускаємо, що:

1. Пучок рентгенівського випромінювання є паралельним.
2. Реконструкція виконана за допомогою алгоритму оберненого проєціювання.

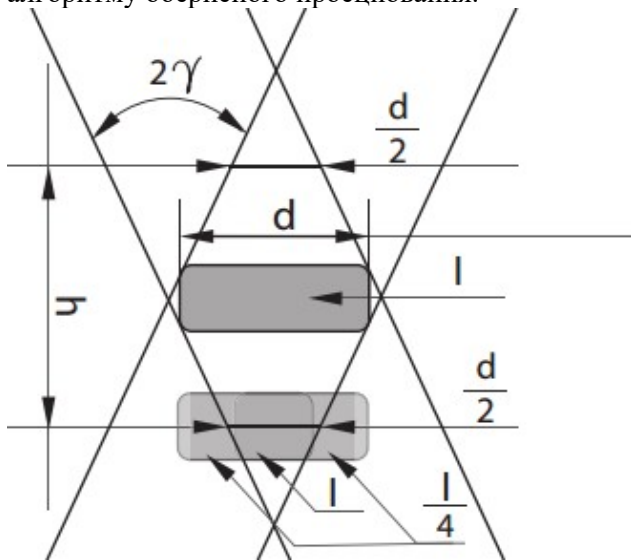


Рис. 1. Геометрична ілюстрація товщини зрізу в томосинтезі. Сірий прямокутник – реконструйований об'єкт, d – розмір об'єкту в площині зрізу, I – інтенсивність реконструйованого об'єкту, 2γ – кут розвороту при скануванні, h – товщина зрізу.

Товщина зрізу є відстанню між зрізами для яких інтенсивність об'єкту, що лежить в площині зрізу зменшується вдвічі.

З простих геометричних міркувань ми отримуємо наступний вираз для товщини зрізу h :

$$h = \frac{d}{2 \tan(\gamma)} \quad (1)$$

Найцікавішим висновком з рівняння є те що товщина зрізу залежить від розміру об'єкту, що знаходився в площині зрізу.

Фізичною причиною цього є те, що діапазон кутів сканування був менший 180° .

Отримане рівняння дозволяє визначити основні параметри томосинтезу.

Експериментальна оцінка товщини зрізу.

Тут ми називаємо товщиною зрізу подвійну відстань, на якій інтенсивність тіні від об'єкту спадає вдвічі.

Для аналізу товщини зрізу в цифровій ламінографії та томосинтезі було виготовлено спеціальний фантом (рис. 2). Цей фантом було виготовлено з набору рентгенівських мір закріплених на пластинах з органічного скла. Деякі пластини також містили в собі свинцеві кульки діаметром до 1 мм.

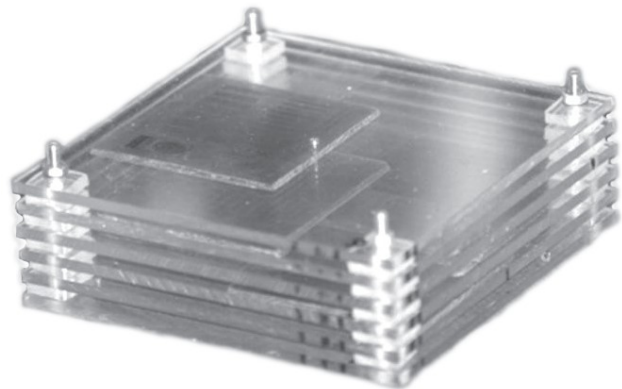


Рис. 2: Виготовлений фантом для оцінки роздільної здатності

Для аналізу ефективності цифрової ламінографії використовувався ламінограф з цифровим детектором, виготовленим НВО Телеоптик.

Діапазон кутів сканування 2γ варіювався в діапазоні від 8° до 40° .

Для аналізу ефективності томосинтезу, була виготовлена експериментальна установка з використанням вище згаданого цифрового детектора. Діапазон кутів сканування становив 48° , знімки отримувались через кожні 2° , 3° або 5° .

Приклад зрізу цифрової ламінографії показано на рис. 3. Приклад зрізу цифрового томосинтезу на рис. 4. Реконструкція була проведена на основі 13 знімків зроблених в діапазоні кутів від -30° до $+30^\circ$ через кожні 5° .

Роздільну здатність в площині зрізу можна оцінити напряму з отриманих знімків. Для оцінки

поперечної роздільної здатності було виміряно, як спадає контраст тестового об'єкту з віддаленням від площини зрізу.



Рис. 3: Приклад зрізу фантому отриманого за допомогою цифрової ламінографії.

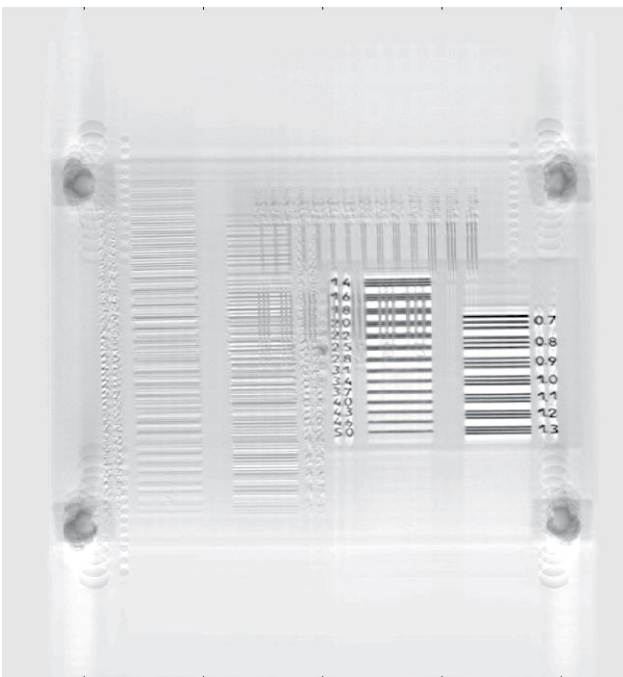


Рис. 4: Приклад зрізу фантому отриманого за допомогою цифрового томосинтезу.

Залежність контрасту K як функції від відстані до зрізу d було розраховано як:

$$K(d) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\text{фон}}} M \quad (2)$$

де $I_{\max}$ та $I_{\min}$ максимальна та мінімальна інтенсивності на зображенні, а $I_{\text{фон}}$ -

інтенсивність фону. M - нормуючий коефіцієнт, вибраний таким чином, що $K(0) = 1$. Залежність контрасту від відстані зображено на рис. 5 для цифрової ламінографії та рис. 6 для цифрового томосинтезу.

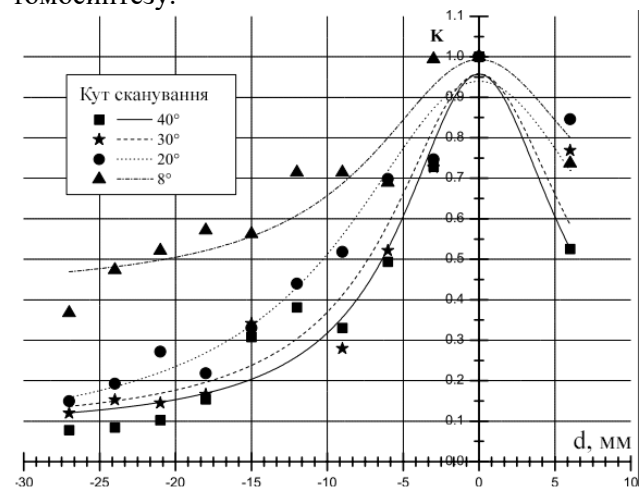


Рис. 5: Залежність контрасту K від відстані до зрізу d для цифрової ламінографії.

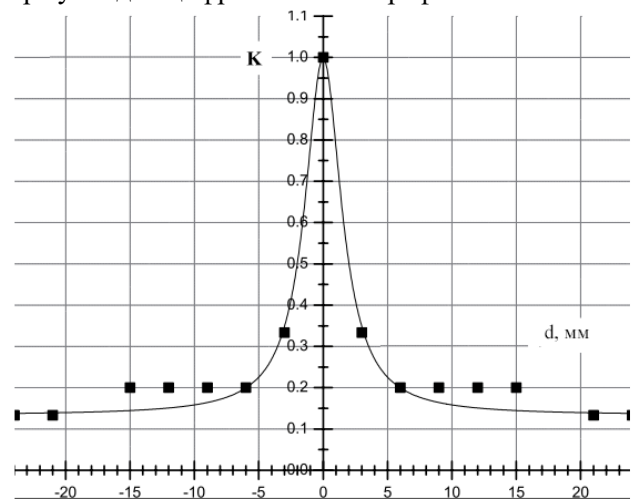


Рис. 6: Залежність контрасту K від відстані до зрізу d для цифрового томосинтезу.

З графіків видно, що товщина зрізу в цифровій ламінографії становить 6 мм, тоді як в цифровому томосинтезі - 3 мм для того ж об'єкту. Ми можемо бачити більш стрімке спадання інтенсивності зрізу в цифровому томосинтезі в порівнянні з ламінографією, з іншого боку необхідно покращувати алгоритми реконструкції для зменшення рівня артефактів.

Висновки

Роздільна здатність у площині зрізу для цифрового томосинтезу та ламінографії майже однакова та наближається до роздільної здатності звичайної рентгенографії.

Сильною стороною цифрової ламінографії є низьке дозове навантаження, цифровий

томосинтез дозволяє зберегти цю перевагу та отримати при цьому одразу кілька зрізів внутрішньої структури об'єкту за одне дослідження. При цьому товщина зрізу в томосинтезі виходить майже вдвічі менша за

товщину зрізу цифрової ламінографії, а отже і вища роздільна здатність по вісі перпендикулярній площині детектора.

Список використаних джерел

1. Buzug T. M. *Computed Tomography* / Buzug. – Берлін: Springer-Verlag, 2008.
2. E. Schaner, A. Chang, J. Doppman, D. Conkle, M. Flye, S. Rosenberg, Comparison of computed and conventional whole lung tomography in detecting pulmonary nodules: a prospective radiologic-pathologic study, *American Journal of Roentgenology* 131 (1) (1978) с. 51-54.
3. Evaluation of computed tomography in the detection of pulmonary metastases. a prospective study / [J. Chang, D. Conkle, J. Doppman та ін.]. // *Cancer*. – 1979. – №43. – С. 913–916.
4. Parsons A. M. Accuracy of helical ct in the detection of pulmonary metastases: Is intraoperative palpation still necessary? / A. M. Parsons, F. C. Detterbeck, L. A. Parker. // *The Annals of Thoracic Surgery*. – 2004. – №78. – С. 1910–1918.
5. Smith A. Full-field breast tomosynthesis / Smith. // *Radiology Management*. – 2005. – №27. – С. 25–31.
6. Nagy, Digital breast tomosynthesis: Initial experience in 98 women with abnormal digital screening mammography / S. P. Poplack, T. D. Tosteson, C. A. Kogel, H. M. Nagy. // *American Journal of Roentgenology*. – 2007. – №189. – С. 616–623.
7. Digital breast tomosynthesis: Observer performance study / [G. S. Abrams, D. Gur, D. M. Chough та ін.]. // *American Journal of Roentgenology*. – 2009. – №193. – С. 586–591.

References

1. BUZUG, T.M., (2008) *Computed Tomography*. 1st ed. Berlin: Springer-Verlag.
2. SCHANER E., et al. (1978) Comparison of computed and conventional whole lung tomography in detecting pulmonary nodules: a prospective radiologic-pathologic study, *American Journal of Roentgenology* 131 (1) p. 51-54.
3. CHANG A. E., et al. (1979) Evaluation of computed tomography in the detection of pulmonary metastases. a prospective study, *Cancer* 43 (3) p. 913-916.
4. PARSONS A. M., DETTERBECK F. C. & PARKER L. A., (2004) Accuracy of helical ct in the detection of pulmonary metastases: Is intraoperative palpation still necessary?, *Annals Thoracic Surgery* 78 (6) p. 1910-1918.
5. SMITH A., (2005) Full-field breast tomosynthesis, *Radiology Management* 27 p. 25-31.
6. POPLACK S. P., TOSTESON T. D., KOGEL C. A. & NAGY H. M., (2007) Digital breast tomosynthesis: Initial experience in 98 women with abnormal digital screening mammography, *American Journal of Roentgenology* 189 (3) p. 616-623.
7. GUR D., et al. (2009) Digital breast tomosynthesis: Observer performance study, *American Journal of Roentgenology* 193 (2) p. 586-591.

Надійшла до редколегії 18.05.17.

Підписано до друку _____. Формат _____. Друк. офс.
Папір офс. № _____. Друк. арк. _____. Тираж _____. Зам. _____.
Друкарня _____.